Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. Band II. Heft 3.

Die Zentrifugalkraft.

Ein Beitrag zur Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze.

Von

Dr. Friedrich Poske,

Professor am Askanischen Gymnasium in Berlin,
Mitglied der K. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

ISBN 978-3-642-47263-3 ISBN 978-3-642-47668-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-47668-6

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1909

Inhalt.

Vorwort.

> Gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations.
>
> Poinsot.

Die vorliegende Abhandlung ist, wie manche ähnliche in neuerer Zeit veröffentlichte, durch die Not des Unterrichts hervorgerufen. Dem Lehrenden, der um vollkommenste Klarheit der Grundanschauungen und Grundbegriffe bemüht war, stellten sich Schwierigkeiten entgegen, deren Lösung von einem eingehenden Studium der Quellenwerke erwartet werden durfte. Beabsichtigt war lediglich eine historisch-didaktische Studie über die Zentrifugalkraft. Es zeigte sich indessen, daß die Ursache der Unsicherheit über diesen Gegenstand einen tieferen Grund hatte, und es ergab sich die Nötigung, die Grundlehren der Mechanik einer kritischen Betrachtung zu unterziehen. So ist die Arbeit zugleich ein Beitrag zur Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze geworden. Wenn die hierauf bezüglichen Darlegungen des Verfassers richtig sind, so steht die Physik vor einer Gefahr, die jeder zum Ausbau eines Systems gelangten Wissenschaft droht — vor der Gefahr, in Scholastik zu verfallen. Dies betrifft die heutige Physik mindestens so weit, als sie den Newtonschen Prinzipien folgt. Es entspringen daraus gewisse Mängel, die leicht dazu verführen können, das historisch Gewordene gering zu achten und als reif zum Untergang zu erklären, namentlich in einer Zeit, wo die wissenschaftliche Phantasie in der Schaffung neuer „Bilder" eine staunenswerte Fruchtbarkeit entfaltet. Aber andrerseits ist es durch das Gesetz der Entwicklung gerechtfertigt, daß der Versuch gemacht wird, die überkommenen Grundlagen des Lehrgebäudes durch genauere Anpassung an die Tatsachen so umzugestalten, daß auf ihnen ein sicherer Aufbau der physikalischen Lehren möglich wird.

Auf die Unzulänglichkeit des heut geltenden Systems der Mechanik hat namentlich Heinrich Hertz in der Einleitung zu seiner „Mechanik" hingewiesen, und zwar betrifft sein Angriff gerade den Teil der Mechanik, der den Gegenstand dieser Abhandlung bildet. Ich setze die ganze Ausführung

8*

von Hertz hierher, um im Lauf der Untersuchung an die einzelnen Behauptungen anzuknüpfen. Hertz sagt[1]):

„Wir schwingen einen Stein an einer Schnur im Kreise herum; wir üben dabei bewußtermaßen eine Kraft auf den Stein aus; diese Kraft lenkt den Stein beständig von der geraden Bahn ab, und wenn wir diese Kraft, die Masse des Steins und die Länge der Schnur verändern, so finden wir, daß die Bewegung des Steines in der Tat stets in Übereinstimmung mit dem zweiten Newtonschen Gesetze erfolgt. Nun aber verlangt das dritte Gesetz eine Gegenkraft zu der Kraft, welche von unserer Hand auf den Stein ausgeübt wird. Auf die Frage nach dieser Gegenkraft lautet die jedem geläufige Antwort: es wirke der Stein auf die Hand zurück infolge der Schwungkraft, und diese Schwungkraft sei der von uns ausgeübten Kraft in der Tat genau entgegengesetzt gleich. Ist nun diese Ausdrucksweise zulässig? Ist das, was wir jetzt Schwungkraft oder Zentrifugalkraft nennen, etwas anderes als die Trägheit des Steines? Dürfen wir, ohne die Klarheit unserer Vorstellungen zu zerstören, die Wirkung der Trägheit doppelt in Rechnung setzen, nämlich einmal als Masse, zweitens als Kraft? In unseren Bewegungsgesetzen war die Kraft: die vor der Bewegung vorhandene Ursache der Bewegung. Dürfen wir, ohne unsere Begriffe zu verwirren, jetzt auf einmal von Kräften reden, welche erst durch die Bewegung entstehen, welche eine Folge der Bewegung sind? Dürfen wir uns den Anschein geben, als hätten wir über diese neue Art von Kräften in unseren Gesetzen schon etwas ausgesagt, als könnten wir ihnen mit dem Namen Kraft auch die Eigenschaften der Kräfte verleihen? Alle diese Fragen sind offenbar zu verneinen, es bleibt uns nichts übrig, als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwungkraft als einer Kraft sei eine uneigentliche, ihr Name sei wie der Name der lebendigen Kraft als eine historische Überlieferung hinzunehmen, und die Beibehaltung dieses Namens sei aus Nützlichkeitsgründen mehr zu entschuldigen als zu rechtfertigen. Aber wo bleiben alsdann die Ansprüche des dritten [Newtonschen] Gesetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt, und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen bloßen Namen befriedigt sein will? Ich glaube nicht, daß diese Schwierigkeiten künstlich oder mutwillig heraufbeschworen sind, sie drängen sich uns von selbst auf. Sollte sich nicht ihr Ursprung bis in die Grundgesetze zurückverfolgen lassen? Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, daß die Kräfte stets zwei

[1]) Heinrich Hertz, Gesammelte Werke, Bd. III, Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt (Leipzig 1894), S. 8—10.

Körper verbinden und ebensogut vom ersten zum zweiten, wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz, und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein Geringes verschieden, dieser geringe Unterschied reicht aber vielleicht aus, um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiele zum Ausbruch kamen . . .

„Vielleicht treffen unsere Einwände überhaupt nicht den Inhalt des entworfenen Bildes, sondern nur die Form der Darstellung dieses Inhalts. Wir sind gewiß nicht zu streng, wenn wir meinen, diese Darstellung sei noch niemals zur wissenschaftlichen Vollendung durchgedrungen, es fehle ihr noch durchaus die hinreichend scharfe Unterscheidung dessen, was in dem entworfenen Bilde aus Denknotwendigkeit, was aus der Erfahrung, was aus unserer Willkür stammt. . . . . Wir sind selbst der Überzeugung, daß die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen, und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann. . . . . Es erfordert aber die Würde und Größe des Gegenstandes durchaus, daß die logische Reinheit nicht nur mit gutem Willen zugegeben, sondern daß sie durch eine vollendete Darstellung auch so erwiesen werde, daß es nicht möglich sei, sie auch nur zu verdächtigen."

Wie schon diese Bemerkungen von Hertz erkennen lassen, schließt die Frage nach der wahren Natur der Zentrifugalkraft ein ganzes Bündel von Problemen ein, deren Entwirrung im folgenden versucht ist. Dabei ist im großen und ganzen der Gang der Untersuchung eingehalten worden, wie er sich dem Verfasser selbst bei allmählichem Vorwärtsschreiten ergab. In den Abschnitten I und II sind die Zentripetalkraft und die Zentrifugalkraft, auch im Hinblick auf ihre schulmäßige Behandlung, näher erörtert. Der Untersuchung der von Hertz angeregten prinzipiellen Frage ist der III. Abschnitt gewidmet; es wird sich ergeben, daß in der Tat eine schärfere Scheidung dessen nötig ist, was in den grundlegenden Begriffen aus der Erfahrung, und was aus unserer Willkür stammt; erst durch eine etwas veränderte Fassung der Begriffe und der Gesetze wird es möglich werden, die Grundlagen für eine einwandfreie Darstellung der Mechanik zu gewinnen. Der Abschnitt IV hat dann die Rotation starrer Körper, Abschnitt V die Bewegung des Zentrifugalpendels zum Gegenstande.

Die Abhandlung ist im Winter 1904/05 entstanden; Hindernisse verschiedener Art sind Ursache, daß sie erst jetzt dem Druck übergeben wird. Der Verfasser ist nicht der Meinung, in diesen schwierigen Dingen überall das Richtige getroffen zu haben, er hofft jedoch durch seine Darlegungen zur weiteren Klärung der erörterten Fragen beizutragen.

Friedenau bei Berlin, im August 1909.

Friedrich Poske.

I.

Die freie krummlinige Bewegung.

1. Vorbemerkung. Unter den krummlinigen Bewegungen lassen sich solche unterscheiden, bei denen die Krummlinigkeit durch eine vorgeschriebene Bahn oder eine feste Verbindung irgendwelcher Art, also mehr oder weniger zwangläufig bestimmt ist, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Die erste Art soll als unfreie, die zweite als freie krummlinige Bewegung bezeichnet werden. Als Beispiel der ersten Art mag die Bewegung eines Punktes der Oberfläche eines um eine feste Achse rotierenden festen Körpers, als Beispiel der zweiten Art die Bewegung des Mondes um die Erde gelten.

Wir betrachten zunächst eine freie krummlinige Bewegung der einfachsten Art, nämlich eine solche, die in einer Kreisbahn und mit gleichbleibender Geschwindigkeit vor sich geht. Auch sei von der Ausdehnung des bewegten Körpers abgesehen, es werde also statt seiner ein materieller Punkt angenommen. Da die Richtung der Bewegung sich von einem Bogenelement zum nächsten beständig ändert, so ist nach dem Beharrungsgesetz eine Kraft erforderlich, die den materiellen Punkt beständig von seiner Richtung ablenkt.

Die Berechnung dieser Kraft ist zuerst von Newton ausgeführt worden, und zwar unter der Voraussetzung einer beliebigen krummlinigen Bahn und einer nach einem unveränderlichen Zentrum gerichteten Kraft[1]). Dabei macht Newton die Annahme, daß die Kraft von einem Bogenelement zum andern in momentanen Impulsen auf den Körper wirke. Es kann jedoch bei der Analyse des Vorgangs von der Hereinziehung des Kraftbegriffs zunächst ganz Abstand genommen werden. Die auf den maßgebenden Begriff der Normalbeschleunigung führende Betrachtung ist von rein phoronomischer Art[2]), wie im folgenden gezeigt werden soll.

2. Die Normalbeschleunigung. Jede Geschwindigkeitsänderung ist dadurch hervorgebracht zu denken, daß zu der vorhandenen Geschwindigkeit eine zweite hinzutritt, die sich mit der ersten gemäß dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu einer resultierenden zusammensetzt. Fällt die zweite in die Richtung der ersten, so wird nur die Größe der Geschwindigkeit geändert; hat die zweite eine von der ersten verschiedene Richtung, so ändert sich im allgemeinen sowohl Größe als Richtung der Geschwindigkeit.

---

[1]) Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, §§ 13—21.

[2]) Im Hintergrunde dieser phoronomischen Behandlung steht allerdings das Beharrungsgesetz in seiner Anwendung auf einen frei beweglichen Körper; vgl. Euler, S. 32.

Es sei[1]) nun AB (Fig. 1) ein Bogenelement einer kreisförmigen Bahn, das in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v durchlaufen wird, so daß also $AB = v \,.\, dt$ ist. Der zu diesem Bogenelement gehörige Zentriwinkel sei δ, der Kreisradius r, dann ist:

$$\delta = \frac{AB}{r} = \frac{v \,.\, dt}{r}.$$

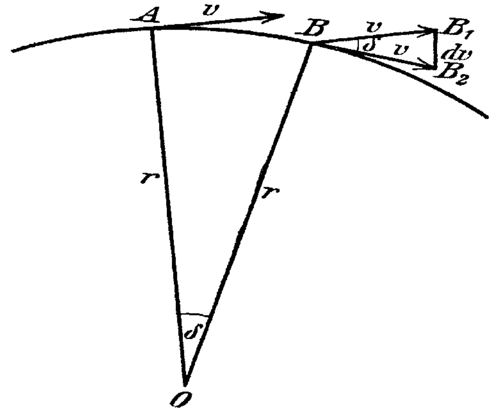

Fig. 1.

Beim Übergang zum nächstfolgenden Bogenelement hat sich die Richtung um einen Betrag geändert, dessen Größe ebenfalls durch δ gemessen ist. Die Geschwindigkeit in A sei nach Größe und Richtung durch BB_1, die in B durch BB_2 dargestellt, und es sei $BB_1 = BB_2 = v$. Die Geschwindigkeitsänderung $B_1 B_2$ werde mit dv bezeichnet. Dann ist:

$$dv = v \,.\, \delta = \frac{v^2\, dt}{r},$$

mithin:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}.$$

Die Größe $\frac{dv}{dt}$ ist eine Beschleunigung, deren Richtung als normal zur Richtung von v mit demselben Grade von Genauigkeit angesehen werden darf, mit dem man den Kreisradius als senkrecht zu einem Bogenelement ansieht. Diese Größe heißt allgemein Normalbeschleunigung oder, im besonderen Fall der Kreisbewegung, auch Zentripetalbeschleunigung. Es muß also beständig zur Geschwindigkeit v eine Beschleunigung von der Größe v^2/r in normaler Richtung hinzukommen, damit die Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit v auf einem Kreise vom Radius r vor sich geht. Man kann das erhaltene phoronomische Gesetz auch in folgender Form aussprechen:

Eine gleichförmige Bewegung in kreisförmiger Bahn ist an jedem Punkte der Bahn zusammengesetzt zu denken aus einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der Tangente der Bahn und aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung nach dem Zentrum der Bahn. —

Weniger durchsichtig ist das übliche Verfahren der analytischen Mechanik, weil dabei die Einheitlichkeit des Vorgangs durch die Zerlegung

---

[1]) Man vgl. zum Folgenden A. Voß, Die Schwungkraft, Zeitschr. f. d. physikal. u. chem. Unterricht II, 17—20; ähnlich schon Mach in seiner „Mechanik" (4. Aufl. S. 162) und v. Obermayer, Lehrbuch für österr. Kadettenschulen. Im Prinzip damit übereinstimmend ist die elegante Ableitung mit Hilfe des Hodographen, die Maxwell in *„Matter and Motion"* Art. 113 gibt. Man vgl. ferner A. Höfler, Zur vergleichenden Analyse der Ableitungen für Begriff und Größe der zentripetalen Beschleunigung, Zeitschr. II, 277—290.

nach den Koordinatenrichtungen zerstört wird. Doch ist auch diese Ableitung rein phoronomisch. Es liege (Fig. 2) der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkt O des Kreises. Der bewegte Punkt habe an einer beliebigen Stelle der Bahn die Koordinaten x und y. Der Winkel des Radiusvektor mit der Abszissenachse sei φ, der Kreisradius r, die konstante Geschwindigkeit v, die seit dem Durchgang durch die Abszissenachse verflossene Zeit t, dann ist:

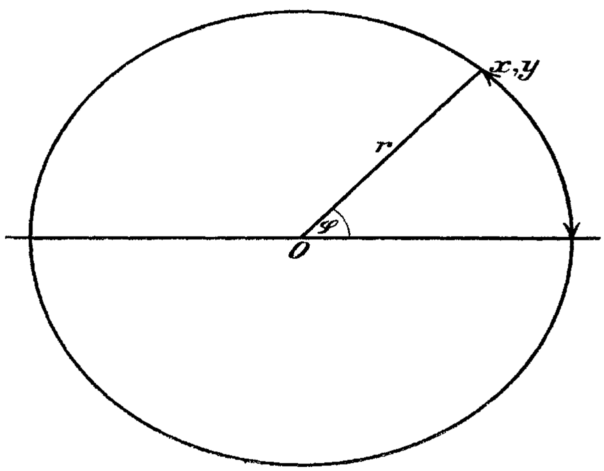

Fig. 2.

$$x = r\cos\varphi = r\cos\frac{vt}{r},$$

$$y = r\sin\varphi = r\sin\frac{vt}{r}.$$

Hieraus folgen leicht die Komponenten der Beschleunigung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\sin\frac{vt}{r},$$

und demnach die Gesamtbeschleunigung:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Die Richtung dieser Beschleunigung fällt, wie ohne weiteres ersichtlich, mit der Richtung des Kreisradius zusammen.

Beide Ableitungen lassen sich überdies auf eine Bewegung in beliebig krummliniger Bahn ausdehnen, es tritt dann der Krümmungsradius ρ an die Stelle des Kreisradius r.

Auch umgekehrt folgt sofort: Wenn einem Punkt mit der Geschwindigkeit v eine Beschleunigung von der Größe $\frac{v^2}{r}$ senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung erteilt wird, so bewegt er sich auf einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Abstande r von dem bewegten Punkte gelegen ist. Ist die hinzutretende Beschleunigung nicht senkrecht, sondern schief (unter einem Winkel ε) zu dem jeweilig von dem Punkte durchlaufenen Bahnelement gerichtet (Fig. 3), so ist sie in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine, $b \,.\cos\varepsilon$, eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Bahngeschwindigkeit, die andere, $b \,.\sin\varepsilon$, dagegen eine Richtungsänderung von einer wie vorher zu bestimmenden Größe hervorruft.

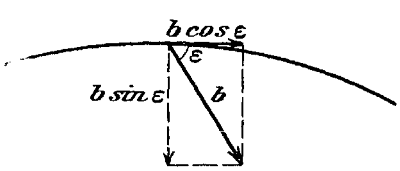

Fig. 3.

Ist die Beschleunigung beständig nach einem und demselben Punkt gerichtet, so ist als ihre Ursache eine von diesem Punkt ausgehende Kraft anzusehen, die von Newton den Namen **Zentripetalkraft** erhalten hat. Auf die Einführung dieser Kraft gründet sich bekanntlich Newtons Erklärung der Planetenbewegungen. —

3. Die elementaren Ableitungen. Gegen die Einfachheit und Schärfe der infinitesimalen Betrachtungsweise, die soeben angewandt wurde, stechen die meisten elementaren Ableitungen teils durch Schwerfälligkeit, teils durch Unstrenge sehr unvorteilhaft ab. Es ist daher öfters die Forderung aufgestellt worden, man solle von diesen Ableitungen im elementaren Unterricht ganz absehen. Wir unterziehen im Hinblick hierauf die gebräuchlichsten dieser Ableitungen einer näheren Prüfung.

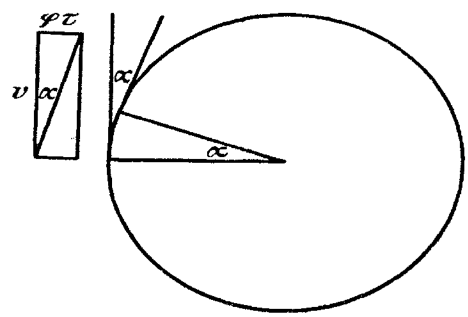

Fig. 4.

Wir geben zunächt zwei von E. Mach vorgeschlagene Ableitungen wieder, die sich am engsten an die Infinitesimalmethode anschließen.

a) In E. Machs Mechanik (4. Aufl. S. 162) ist folgendes Verfahren eingeschlagen: „Auf ein Bewegliches von der Geschwindigkeit v wirke eine Kraft, die ihm senkrecht zur Bewegungsrichtung die Beschleunigung φ erteilt, durch das Zeitelement τ ein (Fig. 4). Die neue Geschwindigkeitskomponente wird $\varphi\tau$, und die Zusammensetzung mit der früheren Geschwindigkeit ergibt eine neue Bewegungsrichtung, die den Winkel α mit der ursprünglichen einschließt. Hierbei ergibt sich, indem wir die Bewegung als in einem Kreise vom Radius r vorgehend denken und wegen der Kleinheit des Winkelelements tang $\alpha = \alpha$ setzen,

$$\frac{\varphi\tau}{v} = \operatorname{tang}\alpha = \alpha = \frac{v\tau}{r} \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \frac{v^2}{r}$$

als vollständiger Ausdruck für die Zentripetalbeschleunigung einer Kreisbewegung."

Wenn auch bezüglich der Strenge gegen diese Ableitung nichts einzuwenden sein wird, so ist es doch in methodischer Hinsicht nicht günstig, daß die Aufgabe umgekehrt gestellt und von vornherein eine beschleunigende Kraft angenommen ist. Zudem ist die „Ökonomie des Denkens" so weit getrieben, daß die Ableitung mehr für den im physikalischen Denken Ausgebildeten als für den Anfänger schmackhaft sein wird. Sie dürfte daher erst auf einer vorgeschritteneren Stufe des Unterrichts am Platze sein.

b) Das eben Gesagte gilt in noch höherem Grade von der gleichfalls von E. Mach bevorzugten und auch in seine „Naturlehre für die oberen Klassen" aufgenommenen Ableitung, die auf dem Prinzip des Hamiltonschen Hodographen beruht[1]): Durchläuft ein Körper (Fig. 5) gleichförmig den Kreis vom

[1]) E. Mach, Die Mechanik, 4. Aufl., S. 163. Man vgl. auch die verwandte Darstellung bei Maxwell, Matter and Motion, art. 113.

Radius r, so geht die Geschwindigkeit v in dem Bahnpunkte A in die gleich große v von anderer Richtung in dem Punkte B über. Tragen wir alle Geschwindigkeiten, die der Körper nacheinander erlangt, der Größe und

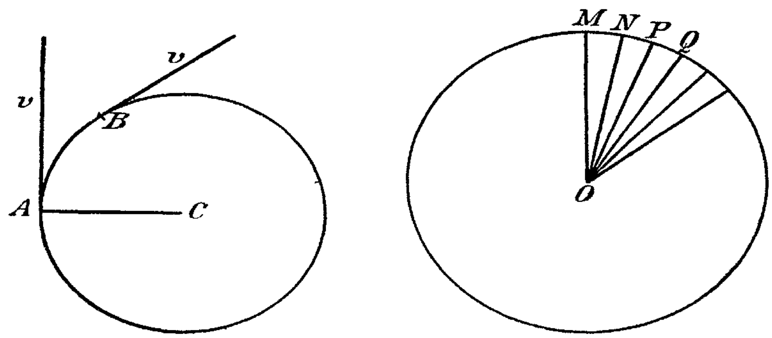

Fig. 5.

Richtung nach von O aus auf, so stellen diese die sämtlichen Radien v eines Kreises dar. Damit OM in ON übergehe, muß die zu ersterer senkrechte Komponente MN hinzutreten. Nach den Richtungen der Radien v wächst während der Umlaufszeit T gleichmäßig die Geschwindigkeit $2\pi v$ hinzu. Die Maßzahl der radialen Beschleunigung ist also $\varphi = 2\pi v/T$, und da $vT = 2\pi r$ so ist auch $\varphi = v^2/r$.

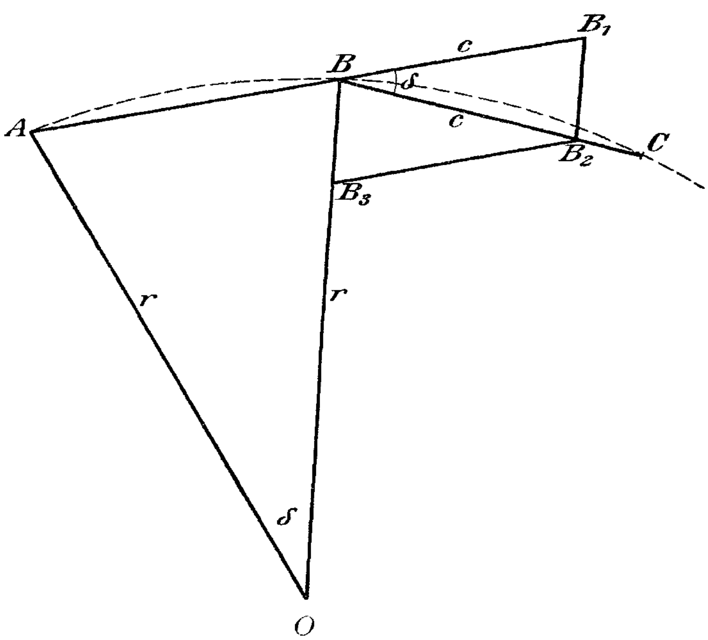

Fig. 6.

c) Die österreichischen „Instruktionen“ [1]) schreiben eine Herleitung vor, die mit einigen Abänderungen hier folgt. Die kreisförmige Bahn sei in sehr kleine Elemente zerlegt, die als geradlinig angesehen werden können. Die Geschwindigkeit längs des Elementes AB (Fig. 6) sei nach Größe und Richtung durch $BB_1 = c$ dargestellt, die längs des nächstfolgenden Elements BC durch die Strecke $BB_2 = c$. Es läßt sich nun, wegen der um den Winkel δ veränderten Richtung, BB_2 auffassen als Resultierende eines Geschwindigkeitsparallelogramms mit den Komponenten BB_1 und BB_3. Von diesen ist BB_1 gemäß dem Beharrungsgesetz

[1]) Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich, Wien 1900, S. 257; mitgeteilt auch von A. Höfler, Physik, Braunschweig 1904, S. 831, Leitaufgabe 31,3.

wieder $= c$. Wegen der Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke AOB und $B_1 B B_2$ ist ferner $B_1 B_2 \parallel BO$, also $B B_3$ auf BO gelegen. Diese in B hinzutretende Größe $B B_3$ bedeutet aber einen zentripetalen Geschwindigkeitszuwachs, daher ist die zentripetale Beschleunigung w selbst gleich dem Grenzwert von $B B_3/\tau$. Nun ist $B B_3 = c\,\delta$, und für τ folgt aus $AB = c\,\tau = r\,\delta$ der Wert $\tau = \frac{r\,\delta}{c}$, demnach wird $w = \frac{c^2}{r}$.

Dieses Verfahren ist im Grunde nichts weiter als eine elementare Umsetzung der unter Nr. 2 (S. 7) angegebenen strengen Herleitung; es wird indessen an die Stelle der kontinuierlichen Geschwindigkeitsänderung eine diskontinuierliche, in Zwischenräumen von der Größe τ momentan erfolgende Geschwindigkeitsänderung gesetzt. Um diese Abweichung von dem wirklichen Sachverhalt auszugleichen, ist im weiteren Verlauf ein nochmaliger Sprung in der Entwicklung erforderlich, indem die Beschleunigung $w = BB_3/\tau$ gesetzt wird, obwohl der Geschwindigkeitszuwachs $B B_3$ nicht in der Zeit τ, sondern in dem Endpunkt der Zeit τ erfolgend vorausgesetzt wird. Es muß daher entweder hinterher ausdrücklich gesagt werden, daß der Geschwindigkeitszuwachs $B B_3$ in Wahrheit nicht momentan, sondern während der Zeit τ erfolgt, oder aber man setzt die Größe $\tau = \frac{1}{n}$ Sek., dann ist der der Beschleunigung entsprechende Geschwindigkeitszuwachs in 1 Sek. gleich $B B_3 . n = B B_3/\tau$.

Hiermit dürfte das Verfahren den Grad von Strenge erreicht haben, der überhaupt bei einem solchen die infinitesimale Betrachtung nur umschreibenden Verfahren möglich ist[1]).

d) Eine von K. Schellbach herrührende, u. a. auch von Martus befolgte Methode[2]) stimmt mit der Newtonschen darin überein, daß sie die nach einem Zentrum wirkende Kraft zu Hilfe nimmt und diese Kraft in momentanen, durch kleine gleiche Zeitintervalle getrennten Impulsen wirken läßt. Führt man an Stelle der Schellbachschen „Impulse" nach Helms Vorgang[3]) anfänglich Geschwindigkeitsänderungen ein, so läßt sich das Verfahren dem vorhergehenden sehr ähnlich gestalten:

Ein Punkt (Fig. 6) bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit c auf dem Umfange ABC . . . eines regelmäßigen Polygons, dessen Mittelpunkt in O liege, und dessen Radius $AO = r$ sei. Zum Durchlaufen einer Polygonseite sei die Zeit $\frac{1}{n}$ Sek. erforderlich. Hat der Punkt die Strecke AB durchlaufen,

---

[1]) Der Verfasser ist in seiner „Oberstufe der Naturlehre" (Vieweg, 1906) dieser Herleitung gefolgt, die sich ihm selber auf dem Wege einer Modifikation der Schellbach-Helmschen Methode (s. nachher unter d) ergeben hat.

[2]) K. Schellbach, Neue Elemente der Mechanik, Berlin 1860, S. 104; Martus, Astronomische Geographie, § 21.

[3]) G. Helm, Die Elemente der Mechanik und der mathematischen Physik, Leipzig 1884, S. 87.

so müßte er sich nach dem Beharrungsgesetz in derselben Richtung weiterbewegen. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung sei durch $B B_1 = c$ dargestellt. Soll der Punkt statt dessen in der Richtung $B C$ weitergehen, und zwar mit der gleichen, durch $B B_2 = c$ dargestellten Geschwindigkeit, so muß ihm in B eine Geschwindigkeit $B B_3$ von der Art erteilt werden, daß BB_1 und BB_3 sich nach dem Parallelogrammgesetz zu der Resultierenden $B B_2 = B B_1$ zusammensetzen. Nun ist durch die Größe und Lage von $B B_1$ und $B B_2$ auch $B B_3$ völlig bestimmt. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $B_1 B B_2$ und $A O B$ ist nämlich $B_1 B_2 \parallel B O$, also liegt $B B_3$ auf $B O$, und ferner ist:

$$B_1 B_2 : B B_1 = A B : A O$$

oder, da

$$B_1 B_2 = B B_3, \quad B B_1 = c, \quad A B = \frac{c}{n}, \quad A O = r,$$

$$B B_3 : c = \frac{c}{n} : r,$$

so folgt

$$B B_3 = \frac{c^2}{n \cdot r}.$$

Wird nun die Richtungsänderung durch eine Kraft hervorgebracht gedacht, so muß diese so beschaffen sein, daß sie dem bewegten Punkte in Intervallen von $\frac{1}{n}$ Sek. stets einen Geschwindigkeitszuwachs von der Größe $B B_3$ nach dem Mittelpunkte hin erteilt; sie übt also in einer Sekunde n solcher Antriebe aus. Um die Größe der ablenkenden Kraft zu finden, denkt man sich diese Antriebe einem anfangs ruhenden Punkte sämtlich in derselben Richtung erteilt, sie würden dann insgesamt einen Geschwindigkeitszuwachs hervorbringen, dessen Größe dargestellt wäre durch

$$\frac{c^2}{n r} \cdot n = \frac{c^2}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Länge der Polygonseiten, er gilt also auch noch, wenn diese Länge unbegrenzt verkleinert oder die Zahl der Polygonecken unbegrenzt vergrößert wird. Dann geht die Bewegung in eine wirkliche Kreisbewegung über, und die Änderung der Geschwindigkeit erfolgt nicht mehr stoßweise, sondern kontinuierlich. Damit wird auch die Kraft eine ununterbrochen wirkende, ihre Größe aber, die von n unabhängig ist, bleibt, wenn die bewegte Masse $= 1$ gesetzt wird, wie vorher c^2/r.

Gegen diese Ableitung (insbesondere gegen die Darstellung bei Martus) erhebt Seeger[1]) den berechtigten Einwand, der Übergang von den kleinen

---

[1]) H. Seeger, Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung. Beilage zum Programm des Realgymnasiums zu Güstrow, Ostern 1894.

unterbrochenen Stößen zu einer stetig wirkenden Kraft sei hier deswegen so schwierig, weil die Richtung jedes folgenden Stoßes von der des vorhergehenden abweiche. Dieser Übelstand ließe sich beseitigen, wenn man nicht die Kräfte summierte, sondern (wie in der vorigen Herleitung) die Beschleunigung an einer Stelle der Bahn berechnete. Hierzu wäre aber wiederum erforderlich, daß man den Geschwindigkeitszuwachs nicht momentan, sondern kontinuierlich vor sich gehen ließe, also die Voraussetzung des ganzen Verfahrens fallen ließe. Es zeigt sich also, daß die Einführung der Kraftimpulse nicht zu einer Vereinfachung führt, und daß man besser tut, bei der rein phoronomischen Betrachtungsweise stehen zu bleiben[1]).

e) Eine andere sehr häufige, auch in Lehrbüchern für den Hochschulunterricht benutzte Ableitung ist folgende (Fig. 7). Der bewegliche Punkt lege in der sehr kleinen Zeit τ den sehr klein zu denkenden Kreisbogen AB mit der konstanten Geschwindigkeit v zurück. Die Bewegung kann zerlegt gedacht werden in eine gleichförmige längs der Tangente AC mit der Geschwindigkeit v und in eine gleichförmig beschleunigte längs der Normale AD mit der Beschleunigung b. Dann ist $AC = DB = v\tau$, $AD = {}^1/_2\, b\tau^2$ und

$$BD^2 = AD \cdot DE$$
$$v^2 \tau^2 = {}^1/_2\, b\tau^2 (2r - {}^1/_2\, b\tau^2)$$
$$v^2 = br - {}^1/_4\, b^2\tau^2.$$

Für verschwindend kleines τ fällt das letzte Glied fort, und es bleibt $v^2 = br$, folglich:

$$b = \frac{v^2}{r}.$$

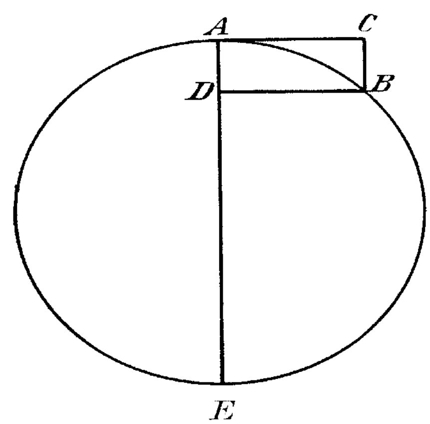

Fig. 7.

Ähnlich verläuft die Ableitung, wenn man den Bogen AB durch die Sehne ersetzt und deren Länge durch AD und AE darstellt[2]).

Gegen diese Ableitung macht Seeger bereits geltend, daß ein unendlich kleiner Weg AB in zwei andere zerlegt wird, von denen der eine AC ein unendlich Kleines der ersten, der andere aber ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist. Ferner wird der Weg AB seiner Komponente AC ausdrücklich gleichgesetzt, was dem Augenschein geradezu zuwiderläuft. Würde man genau konstruieren und AC gleich lang mit dem Bogen AB machen, so ergäbe sich, daß die Gerade CB nicht parallel zu AE läuft, sondern mit dieser einen spitzen Winkel bildet. Drittens ist es willkürlich,

[1]) Man vgl. hierzu auch die Ableitung der Zentrifugalkraft bei Poisson, S. 24.

[2]) Zur Kritik dieser und ähnlicher Ableitungen vgl. A. Voß, Zeitschr. f. d. physikal u. chem. Unterricht II, 17 ff, Höfler, ebd. II, 277 ff, Mach, ebd. 103, Seeger, a. a. O., S. 13; ferner F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Autograph. Vorlesungsheft Nr. VI, B. G. Teuber 1901).

die Bewegung längs AD als eine gleichförmig beschleunigte anzusehen. Viertens ist es unzulässig, die Richtung der Kraft während des ganzen Zeitteilchens als unveränderlich anzusehen, während sie in Wirklichkeit sich um einen unendlich kleinen Winkel ändert. Nun lassen sich zwar diese Bedenken durch eine eingehendere Betrachtung zum Teil beheben, insbesondere ist der auch von Mach geforderte Nachweis, daß die resultierende Geschwindigkeit von der tangentialen nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschieden sei, unschwer zu erbringen, setzt aber zu seinem vollen Verständnis immerhin schon eine gewisse Vertrautheit mit der Infinitesimalmethode voraus. Aber die Unstrenge und damit der Schein einer Erschleichung des Ergebnisses ist damit doch nicht beseitigt. Unter solchen Umständen tut man besser, von dieser Ableitung keinen Gebrauch zu machen.

f) Einen dem vorigen verwandten Weg hat Höfler[2]) vor längerer Zeit empfohlen, und zwar zieht er vor, die Ableitung für eine Bahn von veränderlicher Krümmung und für eine veränderliche Geschwindigkeit zu geben. Die Geschwindigkeit im Punkte M (Fig. 8) sei v, der Krümmungshalbmesser $MO = \rho$. Nach Verlauf der Zeit τ befinde sich der Punkt in M'. „Man kann die wirkliche Bewegung längs MM' als aus folgenden zwei Bewegungen zusammengesetzt denken: erstens der „Tangential-Bewegung" längs MN mit der Geschwindigkeit v, zweitens einer „zentripetalen Bewegung", die den Punkt aus der Tangente heraus nach M' führt, und welche in jedem Punkte der wirklichen Bahn als gegen die Tangente normal, somit gegen den jeweiligen Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet vorgestellt werden kann; und weil infolge der gegen MN konvexen Krümmung des wirklich zurückgelegten Weges MM' diese Bewegung als beschleunigte gedacht werden muß, findet auf sie die allgemeine Definitionsgleichung Anwendung:

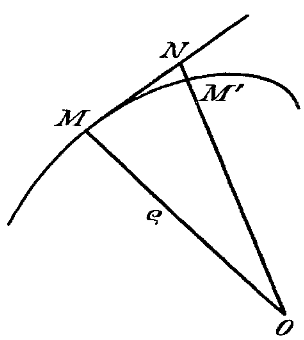

Fig. 8.

$$w = \left.\frac{v' - v}{t' - t}\right| \text{für } t = t'$$

wo in unserem Falle $v = 0$. Nun ist die zentripetale Geschwindigkeit v' als Endgeschwindigkeit einer beschleunigten Bewegung das Doppelte der mittleren Geschwindigkeit, also

$$v' = 2\,NM'/\tau$$

und der Weg

$$NM' = \sqrt{\rho^2 + v^2\tau^2} - \rho \sim {}^1/_2\, v^2\tau^2/\rho,$$

somit

$$w = \frac{v'}{\tau} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2\tau^2}{\varrho}\right) : \tau^2 = \frac{v^2}{\varrho}.$$

[1]) Höfler, Zeitschr. II, 289.

Höfler selbst gibt an, daß wegen des verschwindend kleinen Wertes von τ außer der bereits durch das Zeichen $\sim$ (annähernd gleich) angedeuteten im Lauf der Entwicklung noch folgende Annäherungen gemacht seien: 1. Der Krümmungsmittelpunkt von M' fällt zusammen mit O, und $M'O \sim \rho$. 2. Die Gerade NM' fällt in die Richtung von $M'O$. 3. Der Weg $MM' \sim v\tau$. Auch hier muß gesagt werden, daß sich die Tragweite dieser Annäherungen nicht so übersehen läßt, daß eine sichere Überzeugung von der Richtigkeit der abgeleiteten Formel zustande kommen könnte. Angreifbar erscheint es auch, daß die aus allgemeinen Betrachtungen wohl als beschleunigt anzuerkennende Bewegung längs NM' als eine gleichförmig beschleunigte angenommen wird. Denn nur unter dieser Annahme trifft die für v' angegebene Berechnung zu. Es gereicht ferner auch diesem Verfahren, ebenso wie dem unter e) erörterten, zum Nachteil, daß es mit den Wegen operiert, statt wie das modifizierte Schellbachsche Verfahren mit den Geschwindigkeiten. Auch dieses Verfahren wird daher nicht als ein empfehlenswertes bezeichnet werden können.

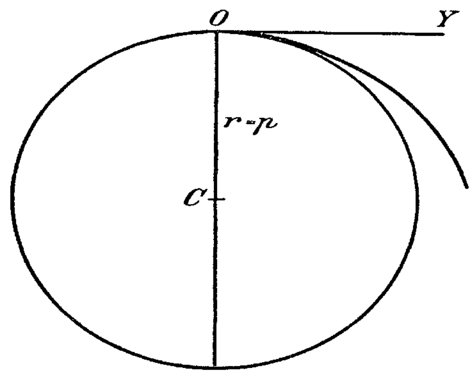

Fig. 9.

g) Sehr interessant und lehrreich ist ein ebenfalls von A. Höfler angegebenes Verfahren, das die Berechnung der Zentripetalbeschleunigung in Beziehung zur Wurfparabel setzt[1]). Wir denken uns den Kreis in vertikaler Ebene (Fig. 9) und das „Bewegliche“ den obersten Punkt des Umfangs passierend. Es entpricht dann das Element des Kreises vom Radius r dem Element nächst dem Scheitel einer Parabel vom Parameter $p = r$. Denn die Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ und die der Parabel $y^2 = 2rx$ lassen erkennen, daß für sehr kleine Werte von x die Ordinaten beider Kurven bis auf verschwindend kleine Größen zweiter Ordnung einander gleich sind. Nun ergibt sich bei der Betrachtung des horizontalen Wurfs mit der Anfangsgeschwindigkeit c die Gleichung der Wurfparabel $y^2 = 2\frac{c^2}{g}x$, ihr Parameter also $p = c^2/g$. Da nun für den Kreis g durch die Zentripetalbeschleunigung w, und p durch r zu ersetzen ist, so ergibt sich für das betrachtete Kreiselement (und demnach auch für alle übrigen) $w = c^2/r$.

Zu dieser Ableitung hat bereits Seeger[2]) bemerkt, sie setze die Lehre vom Krümmungskreise und diese wieder die Elemente der Infinitesimalrechnung voraus; andernfalls habe die Schlußgleichung nur den Wert einer Näherungsformel von unbestimmter Genauigkeit. Es wird demnach auch

---

[1]) Höfler, Physik, S. 40, und Zeitschr. II, 277 ff; ähnlich schon im Leitfaden von Beetz-Henrici, Leipzig 1888, S. 32 (nach Seeger).

[2]) Seeger, a. a. O., S. 15.

hier eine gewisse Vertrautheit mit den Grundbegriffen der Infinitesimalrechnung nicht zu entbehren sein, wenn die angegebene Schlußweise verstanden werden soll. In methodischer Hinsicht hat das Verfahren den großen Vorzug, daß es die Zentripetalbeschleunigung in Verbindung mit der bereits erkannten Beschleunigung im Kraftfeld der Erde bringt. Nur ist andererseits wieder die Bekanntschaft mit den Eigenschaften der Parabel vorausgesetzt, die für das zu untersuchende Problem selbst nicht wesentlich sind. Die Ableitung behält daher etwas Künstliches und wird nicht als grundlegend gelten können, während sie als ergänzende Übung wohl einen Platz verdient.

4. Beharrungswiderstand und Masse. Im Zusammenhange mit der Einführung des Begriffs der Zentripetalkraft (Nr. 2) sei endlich noch die Frage berührt, inwiefern bei der „freien" Bewegung von einem Beharrungswiderstand des bewegten Körpers gesprochen werden kann. Was man mit diesem Namen zu bezeichnen pflegt, wird bei Newton Trägheitskraft (*vis inertiae*) genannt. Die Tatsache, die diesem Begriff zugrunde liegt, ist die, daß es einer Kraft bedarf, um den Bewegungszustand (sei es der Ruhe, sei es der geradlinig gleichförmigen Bewegung) eines frei beweglichen Körpers zu ändern. Aber dieser Tatsache ist durch die Schaffung des Begriffs der Masse, d. i. durch die Gleichung $k = m\,b$, völlig Genüge getan und der Begriff des Beharrungswiderstandes demnach überflüssig. Denn in dieser Gleichung ist der Faktor m der zahlenmäßige Ausdruck dafür, daß eine Kraft von bestimmter Größe erforderlich ist, um einem gegebenen Körper eine bestimmte Beschleunigung zu erteilen. Allerdings ist der Begriff der Masse durch den in jener Tatsache hervortretenden Sachverhalt nicht erschöpft; Masse und „Beharrungswiderstand" sind nicht identische (umfanggleiche) Begriffe. Die Masse eines Körpers kann ja auch durch die Beschleunigung gekennzeichnet werden, die dieser Körper einem andern vermöge der Gravitationswirkung erteilt; nur auf diese Weise sind die Massen der Himmelskörper miteinander verglichen worden, und es gründet sich hierauf bekanntlich auch die neuerdings vielfach in den Vordergrund getretene Massendefinition von E. Mach. Die Masse eines Körpers kann ferner durch die Druckwirkung gemessen werden, die der Körper an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche auf die Unterlage ausübt. Wieder verschieden hiervon ist die Massenbestimmung, die sich aus den Vorgängen beim unelastischen Stoß ergibt[1]), ganz zu schweigen von der Rolle, die die Masse auf nicht mechanischem Gebiet, in kalorischer, chemischer u. a. Beziehung spielt. Der Physik ist aus dieser Vielheit der Beziehungen, in denen die Masse auftritt, die Aufgabe erwachsen, die Konkordanz zwischen den verschiedenen Arten der Massenbestimmung zu erweisen. Dies ist in einer Richtung durch Newton, in einer anderen durch Cavendish geschehen. In allen den erwähnten Erscheinungen

---

[1]) O. Reichel, Zeitschr. f. d. physik. Unterricht, II, 265.

gibt sich eben ein Identisches kund, das man als „Quantität der Materie“ bezeichnet hat. Welche indes von jenen Erscheinungen man für die grundlegende Definition der „Quantität der Materie“ verwenden will, hängt teils von Zweckmäßigkeitsgründen, teils von didaktischen Erwägungen ab. Mit gutem Recht kann man daher für die Mechanik die „Masse“ eines Körpers definieren als die „nach dem Beharrungswiderstand gemessene Menge der Materie“[1]), wobei „Masse“ und „Beharrungswiderstand“ nicht als identische Begriffe angesehen sind, wohl aber „Beharrungswiderstand“ eine besondere Seite des Massenbegriffs bezeichnet, nämlich genau die Seite, die durch die Gleichung $k = m\,b$ gekennzeichnet ist. Es wird aber angesichts einer präziseren Fassung des Kraftbegriffs (Nr. 10) nicht mehr zulässig sein, den Beharrungswiderstand noch als Kraft zu betrachten, wie es neuerdings noch mehrfach dem Newtonschen Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion zuliebe (vgl. Nr. 13) geschieht. Auch tritt in den Gleichungen der analytischen Mechanik die Masse nirgends mehr als Kraft auf, vielmehr geht aus der Wirkung einer Kraft (k) auf etwas, was nicht Kraft ist (m), die Beschleunigung (b) hervor. Hierdurch aber ist auch der Begriff der Kraftwirkung im Sinne der Mechanik erschöpft (bis auf die in Nr. 11 behandelte, mit der Beschleunigung einer Masse gleichwertige Spannung). Mit vollem Recht weist H. Hertz[2]) auf den Widerspruch hin, der in dieser Hinsicht zwischen dem 2. und 3. Newtonschen Gesetz besteht; es ist in der Tat ungerechtfertigt, die durch das 2. Gesetz an die Hand gegebene „einfachste“ Beschreibung des Vorgangs durch Hineintragen des Gegensatzes von Aktion und Reaktion wieder unnötig zu komplizieren. Ja der Vorgang der Kraftwirkung wird nur noch unerklärlicher, wenn man annimmt, daß die auf eine Masse m wirkende Kraft sogleich eine ihr entgegengesetzt gerichtete gleich große Gegenkraft hervorruft. Denn wie sollte unter dieser Voraussetzung überhaupt noch eine Bewegung zustande kommen?

Es ist nun auch ersichtlich, daß von einer Reaktionskraft, die der bewegte Körper bei der freien krummlinigen Bewegung ausübt (und die man hier und da als Trägheitswiderstand in die Betrachtung eingeführt findet), nicht die Rede sein kann, so wenig wie bei der Bewegung eines frei fallenden Körpers. Was dagegen im besonderen bei der freien Zentralbewegung als „Reaktion“ in Betracht kommen könnte, ist die Rückwirkung auf den Zentralkörper, von dem die Bewegung abhängt. Diese Rückwirkung aber tritt nicht erst im Gefolge der krummlinigen Bewegung auf, sondern ist (wenigstens nach unseren heutigen Vorstellungen) schon ohne diese bereits durch die Gegenseitigkeit der Anziehung zwischen dem Zentralkörper und seinem Trabanten gegeben. Wie es sich bei der unfreien krummlinigen Bewegung mit dem Beharrungswiderstand verhält, werden wir später zu untersuchen

[1]) Höfler, Physik, § 16.

[2]) Vorwort zu dieser Abhandlung, S. 5, Zeile 2 ff.

haben. Nur auf einen Punkt sei schon an dieser Stelle noch aufmerksam gemacht.

Eine noch größere Verwirrung tritt nämlich ein, wenn der „Trägheitswiderstand“ der Materie mit der nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes anzubringenden Gegenkraft, die ja doch bloß eine fingierte ist, identifiziert wird[1]). Von dem „zentrifugalen“ Trägheitswiderstand wird allerdings dann folgerichtig behauptet: „Seine gewöhnliche Bezeichnung als Zentrifugalkraft kann zu Mißverständnissen führen, da er keine Kraft ist.“ Weitere Aufklärung hierüber werden die folgenden Abschnitte bringen.

II.

Die unfreie krummlinige Bewegung.

5. Begriff der Zentrifugalkraft[2]). Bei der unfreien krummlinigen Bewegung ist der Körper genötigt, sich in einer vorgeschriebenen Bahn, also zwangläufig, zu bewegen. Das bekannteste Beispiel dafür ist der an einem Faden im Kreise herumgeschwungene Körper, wobei zunächst von der Schwere abgesehen wird. Doch ist ein festes Zentrum auch bei dieser Art der Bewegung, wie aus später zu betrachtenden Beispielen hervorgeht, nicht erforderlich, es genügt vielmehr, die Bewegung auf das Zentrum des Krümmungskreises zu beziehen, der dem betrachteten Teil der krummlinigen Bahn zugehört.

Es ist heut fast allgemein üblich, die unfreie krummlinige Bewegung in der Weise zu behandeln, daß man auf sie das Schema der freien Zentralbewegung anwendet. Einen sehr präzisen Ausdruck findet diese Auffassung namentlich bei MACH[3]):

> „Hat man einmal die Galileische [besser Newtonsche] Erkenntnis, daß „die Kraft eine Beschleunigung bestimmt, in sich aufgenommen, so ist es „unvermeidlich, jede Abänderung einer Geschwindigkeit, und folglich auch „jede Abänderung einer Bewegungsrichtung (weil diese durch drei zu„einander senkrechte Geschwindigkeitskomponenten bestimmt ist) auf eine „Kraft zurückzuführen. Wenn also ein Körper (etwa ein Stein) an einem

[1]) E. Warburg, Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende, § 81 und 101.

[2]) Wir behalten diese Bezeichnung als unmißverständlich im folgenden bei, da das Wort Schwungkraft vielfach (u. a. von Schellbach) für die Zentripetalkraft gebraucht und andrerseits die Bezeichnung Fliehkraft noch nicht allgemein angenommen ist.

[3]) E. Mach, Die Mechanik usw., 4. Aufl., S. 160.

„Faden gleichmäßig im Kreise geschwungen wird, so ist diese krumm-„linige Bewegung nur durch eine fortwährende aus der geraden Bahn „ablenkende Kraft verständlich. Die Spannung des Fadens ist diese Kraft, „durch dieselbe wird der Körper fortwährend aus der geradlinigen Bahn gegen „den Mittelpunkt des Kreises abgelenkt. Diese Spannung stellt also eine „Zentripetalkraft vor. Andrerseits wird durch die Fadenspannung auch „die Achse oder der feste Mittelpunkt des Kreises ergriffen, und insofern zeigt „sich diese Fadenspannung als Zentrifugalkraft."

Von anderen gewichtigen Stimmen zugunsten dieser Auffassung sei noch die von Cl. Maxwell angeführt, der sich in der ausgezeichneten kleinen Schrift „*Matter and Motion*"[1]) (*Art. 114*) unter der Überschrift „Zentrifugalkraft" folgendermaßen ausspricht, nachdem er die oben (S. 9) erwähnte Ableitung für die Zentripetalkraft gegeben hat:

„Diese Kraft F [die nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete] ist es, die auf den Körper wirken muß, damit er auf dem Kreise vom Halbmesser r bleibe und sich auf ihm mit der Geschwindigkeit V bewege. . . . Wird diese Kraft mittels eines am [bewegten] Körper M befestigten Fadens angebracht, so wird der Faden sich in einem Zustande von Spannung befinden. Einer Person, die das andere Ende des Fadens hält, wird diese Spannung gegen den Körper M hin gerichtet erscheinen, so als ob der Körper M ein Bestreben hätte, sich von dem Mittelpunkt des Kreises, den er beschreibt, weg zu bewegen. Daher wird diese Kraft oft Zentrifugalkraft genannt."

„Die Kraft, die in Wirklichkeit (*really*) auf den Körper wirkt, nennt man, da sie gegen den Mittelpunkt des Kreises hin wirkt, Zentripetalkraft, und in einigen populären Schriften werden die Zentrifugalkraft und die Zentripetalkraft als entgegengesetzt und einander das Gleichgewicht haltend beschrieben. Sie sind aber nichts als die verschiedenen Formen, unter denen sich eine und dieselbe dynamische Einwirkung (*stress*) darstellt."

Auch Boltzmann[2]) bezeichnet, unter Ablehnung des im Vorwort angeführten Einwands von H. Hertz, die Zentrifugalkraft als die Kraft, welche nach dem Gesetz der Wirkung und Gegenwirkung vom bewegten materiellen Punkt auf die materiellen Punkte ausgeübt wird, aus denen die (im folgenden erwähnte) Vorrichtung besteht. Er glaubt daher eine einwandfreie Darstellung geben zu können:

„Wenn wir z B. eine beliebige Vorrichtung haben, unter deren Einfluß sich ein materieller Punkt von der Masse m mit konstanter Geschwindigkeit c in einem Kreise vom Radius R bewegt, so wissen wir, daß die Resultierende

[1]) Maxwell, Substanz und Bewegung. Deutsch von E. v. Fleischl, Braunschweig 1879, S. 106.

[2]) Ludwig Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, I. Teil, Leipzig 1897, S. 95; ähnlich auch Pfaundler, (8. Aufl.) I, 158, Helm, a. a. O., S. 87, Chwolson, I, 95, Tait, Die Eigenschaften der Materie, (deutsch von G. Siebert, Wien 1888, S. 99) und insbesondere auch v. Helmholtz, Dynamik diskreter Massenpunkte (§ 14 „Die sogenannte Zentrifugalkraft").

aller Kräfte, welche die materiellen Punkte, aus denen jene Vorrichtung besteht, auf den bewegten Punkt ausüben, eine gegen das Zentrum des Kreises gerichtete Kraft von der Intensität $m c^2/R$ ist, welche die Zentripetalkraft heißt. Da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so muß auch der bewegte materielle Punkt eine genau gleiche, aber entgegengesetzte, also vom Zentrum des Kreises hinweggerichtete Kraft, die Zentrifugalkraft, auf die materiellen Punkte ausüben, aus denen die Vorrichtung besteht."

Ich kann nicht finden, daß diese Darstellungen frei von Dunkelheiten sind. Durch die Zurückführung auf die freie Zentralbewegung und durch die Hineinziehung des Begriffs der Aktion und Reaktion ist die klare Auffassung der Sache, wie mir scheint, unnötig erschwert worden. Man wird gut tun, unabhängig von jenem Begriff die Sache selbst ins Auge zu fassen. Daß bei der betrachteten Bewegung eine Fadenspannung auftritt, ist zweifellos. Woher aber diese Fadenspannung rührt, ist nicht ebenso zweifellos ausgemacht. Und doch sollte man meinen, daß sich dies auf Grund einer naheliegenden Analogie mit Sicherheit feststellen ließe. Ist an einem festen Punkt ein elastischer Faden angebracht, und wird dieser durch einen angehängten schweren Körper gespannt, so zweifelt niemand, daß eben der angehängte Körper, insofern er schwer ist, die Ursache der Fadenspannung sei. Wird nun ein an einem Faden befestigter Körper M durch einen Anstoß gezwungen, sich zu bewegen, so tritt eine Spannung des vorher nicht gespannten Fadens ein. Auch in diesem Falle sollte nach den Regeln der Kausalverknüpfung geschlossen werden, daß die Ursache der Fadenspannung in dem bewegten Körper, insofern er bewegt ist, zu suchen ist. Wollte man von einer Reaktion sprechen, so könnte nur dem bewegten Körper die Aktion, dem Faden die Reaktion zuerteilt werden. Es würden also nach dieser Auffassung die Rollen von Körper und Faden gerade umgekehrt wie nach der oben angeführten sein: der Zug des im Kreise bewegten Körpers ist das Primäre, die Spannung des Fadens das Sekundäre.

Es wird zwar häufig geltend gemacht, daß beim Herumschleudern des am Faden gehaltenen Körpers ja die haltende Hand auf den Faden eine zentripetale beständige Einwirkung ausübt. Man wird aber gut tun, zum Zweck klarer Erfassung des Sachverhalts von dem komplizierteren Vorgang bei einem mit der Hand am Faden herumgeschleuderten Körper (vgl. S. 65) ganz abzusehen und sich einen materiellen Punkt vorzustellen, der durch einen Faden mit einem festen Punkt verbunden und durch einen einmaligen Stoß in tangentialer Richtung in Umlauf versetzt ist. Auch die Schwere sei außer Betracht gelassen. Dann sieht man, daß weder im Befestigungspunkt des Fadens noch in dem Faden die Ursache der Spannung des Fadens zu suchen ist, vielmehr ist es der bewegte Körper, der die Spannung des Fadens hervorbringt und dauernd erhält. Es wäre hiernach die Zentrifugalkraft als eine ganz reale und ursprüngliche Kraft anzusehen.

Nun wird freilich von manchen Seiten [1]) behauptet, eine Wirkung des im Kreise umlaufenden Körpers etwa auf den Faden sei zwar vorhanden, aber nur für die Einleitung der Bewegung erforderlich. So Voss: „Man bemerkt eine Verlängerung des Fadens, durch diese ist eine bestimmte Spannung des Fadens verursacht, welche die Bewegung erhält.“ Und M. Koppe: „Soll eine Kreisbewegung zustande kommen, so muß man dem Faden schon vor Erteilung des tangentialen Stoßes die erforderliche Spannung gegeben haben; ist sie nicht vorhanden, so geht die Kugel nicht im Kreise, sondern anfangs, solange der Faden noch schlaff ist, gerade aus, nachher schwankt die Länge des Fadens um einen gewissen mittleren Wert, den sie nach Dämpfung der Schwingungen dauernd beibehält.“ Die Meinung ist in beiden Fällen die, daß die einmal hervorgerufene Spannung des Fadens ausreiche, um nunmehr dauernd als Zentripetalkraft wirksam zu sein. Hiergegen muß aber gesagt werden, daß die Spannung des Fadens sich doch nicht von selbst erhält, sondern nur so lange andauert, als eine spannende Kraft vorhanden ist, die sie hervorruft.

Wir können für unsere Auffassung keinen Geringeren als Newton selbst ins Feld führen, bei dem es gleich im Beginn seines großen Werkes [2]) heißt:

> „Ein in der Schleuder herumgetriebener Stein hat das Bestreben, sich „von der herumtreibenden Hand zu entfernen; er spannt durch dieses „Bestreben die Schleuder an, und zwar desto stärker, je schneller er „herumgetrieben wird, und er fliegt davon, sobald er losgelassen wird. Die „jenem Bestreben entgegengesetzte Kraft, durch die die Schleuder den Stein „beständig gegen die Hand zurückzieht und ihn im Kreise festhält, nenne „ich die Zentripetalkraft, weil sie gegen die Hand als den Mittelpunkt „des Kreises gerichtet ist. Dasselbe findet bei allen Körpern statt, die im „Kreise herumgetrieben werden.“

Auch Newton vereinfacht hier die Betrachtung dadurch, daß er der Hand, nachdem die Bewegung eingeleitet ist, nur die Rolle des Befestigungspunktes zuerteilt, denn er führt als Zentripetalkraft nur die Kraft ein, durch die „die Schleuder“ den Stein beständig gegen die Hand zurückzieht. Es fällt allerdings auf, daß Newton für das vorausgehende „Bestreben, sich von der Hand zu entfernen“, nicht die Bezeichnung Zentrifugalkraft angibt, obwohl er wenige Seiten danach von Zentrifugalkräften [3]) redet. Eine hinreichende Erklärung dafür ist es wohl, daß es Newton in den einleitenden Erklärungen nur darauf ankommt, den Begriff der Zentripetalkraft zu erläutern, von dem er in seinem Werke hauptsächlich Gebrauch macht. Für diesen Zweck kam die „Zentrifugalkraft“ nicht in Betracht.

---

[1]) A. Voß, Zeitschr. f. d. physik. Unterricht II, 19; M. Koppe, ebd. VI, 311 u. a.
[2]) Newton, Math. Prinz. d. Naturlehre, deutsch von Wolfers, S. 22.
[3]) Ubersetzung von Wolfers, S. 29.

Von neueren Autoren sei für unsere Auffassung namentlich Poisson erwähnt, in dessen *Traité de Mécanique* sich bezüglich der Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn folgender Ausspruch findet[1]):

„*L'état de mouvement donne naissance à une pression particulière, qu'on appelle force centrifuge, parcequ'on l'a d'abord considérée dans le cercle, où elle est dirigée suivant le prolongement du rayon, et tend continuellement à éloigner du centre le mobile sur lequel elle agit.*“

Ebenso Pouillet in seinem bekannten Lehrbuch[2]):

„*C'est la cause de cette tension du fil, qu'on appelle force centrifuge, parce qu'en effet c'est l'effort que fait la boule pour fuir le centre, ou ce qui revient au même, c'est l'effort qu'il faut faire pour la retenir et l'empêcher de s'en éloigner.*“

Eine Bestätigung der hier gekennzeichneten Auffassung wird sich in der folgenden Nummer und auch später (Abschnitt IV) bei der Betrachtung der Rotation eines Körpers um eine feste Achse ergeben.

6. Die Größe der Zentrifugalkraft. Ehe wir daran gehen, den Fehlschluß nachzuweisen, der in den oben (S. 18 und 19) wiedergegebenen Argumentationen steckt, wollen wir untersuchen, wie sich unabhängig von dem Schema der freien Zentralbewegung die Vorgänge bei der gebundenen Zentralbewegung darstellen lassen.

Die grundlegende, heut in Vergessenheit geratene Darstellung dieser Vorgänge findet sich bereits bei L. Euler, und zwar in voller Allgemeinheit für die vorgeschriebene Bewegung in einer beliebigen krummen Linie oder Fläche.

Euler teilt seine Mechanik geradezu in zwei Teile, von denen der erste die freie, der zweite die unfreie Bewegung behandelt. Er unterscheidet bei der letzteren die Bewegung auf einer gegebenen Kurve und die auf einer gegebenen Fläche. Von der Reibung sowohl als auch von einer Drehung des Körpers wird abgesehen, vielmehr ein ohne Reibung gleitender Massenpunkt vorausgesetzt. Für einen solchen beweist Euler im Beginn des zweiten Bandes seiner Mechanik den Satz[3]):

„Jeder Körper oder Punkt, der sich auf einer gegebenen Kurve bewegt und nicht von Kräften angetrieben wird, behält fortgesetzt die gleiche Geschwindigkeit bei, vorausgesetzt, daß zwei beliebige aneinanderstoßende Elemente jener Kurve nirgends einen Winkel von endlicher Größe miteinander bilden.“

---

[1]) Poisson, Traité de Mécanique, Livre I, Nr. 94.

[2]) M. Pouillet, Eléments de physique expérimentale (6) I, Paris 1853, S. 44. Der letzte Teil des oben zitierten Satzes widerspricht allerdings gewissermaßen der zuerst klar hingestellten Behauptung, dürfte jedoch im wesentlichen auf die Größe der Kraft zu beziehen sein, für die er durchaus zutrifft.

[3]) Leonhard Euler, Mechanica sive motus scientia analytice explicata, Petropolis 1736, t. II, cap. I, prop. I.

Dem Beweise wird die nebenstehende Figur (Fig. 10) zugrunde gelegt. Es sei MM' ein Element der krummlinigen Bahn, das in der kleinen Zeit dt durchlaufen werden soll, O sei der Krümmungsmittelpunkt, durch MN' sei die Richtung, in der der bewegte Körper in M ankommt, und zugleich der Weg, den er in der Zeit dt zurücklegen würde, dargestellt. Man konstruiere das Parallelogramm $MNN'M'$, dann ergibt sich:

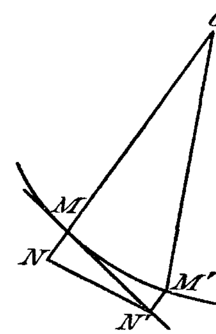

Fig. 10.

$$MO : MM' = MM' : MN$$

$$MN = \frac{MM'^2}{MO} = \frac{ds^2}{\varrho}.$$

Ferner:

$$MN' = \sqrt{ds^2 + \frac{ds^4}{\varrho^2}} = ds\sqrt{1 + \frac{ds^2}{\varrho^2}} = ds + \frac{ds^3}{2\varrho^2}.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ im Element MM' ist demnach unendlich klein von der 2. Ordnung, daher die Geschwindigkeitsänderung auf einem endlichen Wege noch verschwindend klein von der ersten Ordnung.

Im Anschluß daran leitet Euler dann[1]) den Druck des bewegten Körpers gegen die gekrümmte Bahn auf folgende originelle Art ab. Er sagt: Wenn der Zwang der Bahn nicht da wäre, so würde der Körper sich in derselben krummen Linie nur vermöge der Einwirkung einer gegen das Krümmungszentrum gerichteten Normalkraft $m\frac{v^2}{r}$, also einer Zentripetalkraft, bewegen können; in diesem Fall würde er sich, auch wenn die Bahn vorhanden wäre, längs der Bahn frei bewegen, ohne die Bahn zu drücken. Da aber bei der zwangläufigen Bewegung eine solche Zentripetalkraft nicht [!] da ist, so muß der Körper gegen die Bahn einen ebenso starken Druck ausüben. Die entsprechende Betrachtung wie für eine gegebene krumme Linie wird danach auch für eine gegebene krumme Fläche angestellt und die gegen die Fläche ausgeübte Kraft ausdrücklich als Zentrifugalkraft *(vis centrifuga)* bezeichnet. Es ist auch, im Hinblick auf die Einwendungen von H. Hertz (Nr. 7) bemerkenswert, daß Euler bei dieser Gelegenheit die Entstehung von Kraft aus Bewegung für begreiflicher hält als die umgekehrte Erzeugung von Bewegung durch eine Kraft. Denn von einer für sich existierenden Kraft vermöchten wir uns keine Vorstellung zu machen, wohl aber von einer Bewegung und einer von dieser hervorgerufenen Druckwirkung. Eben hier bei der Zentrifugalkraft sehe man deutlich, wie Kräfte aus Bewegung hervorgehen können[2]).

---

[1]) Ebenda cap. II, propos. II.

[2]) Vgl. L. Euler, a. a. O., Cap. II, Schol. II: Intelligitur hinc . . incertum esse, utrum motus potentiis debeatur an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo utrumque potentias nempe et motum existere; utrum igitur alterius sit causa, quaestio est tam ex ratione tam ex observationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur

Auf den Eulerschen Beweis stützt sich die Darstellung, die Poisson[1]) gibt, doch sind hier die phoronomische und die dynamische Seite des Vorgangs nicht so scharf voneinander geschieden:

„Es seien (Fig. 11) AB und BC zwei gleiche auf einander folgende Elemente der gegebenen Kurve, H und H' ihre Mitten, BT und BT' ihre Verlängerungen. Ihre Ebene sei die Krümmungsebene, der Winkel TBT' der Kontingenzwinkel der Kurve im Punkte B. Die Gerade BO stelle die Richtung des Krümmungsradius in B dar, sie halbiert den Winkel ABC. Bezeichnen wir das Element $AB = HBH'$ der Kurve mit ds, den verschwindend kleinen Winkel TBT' mit δ, den Krümmungsradius mit ϱ, so ist:

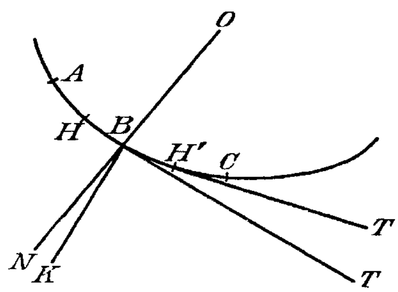

Fig. 11.

$$\delta = \frac{ds}{\varrho}.$$

Wir sehen zunächst von Kräften ab, die auf den bewegten materiellen Punkt wirken können, und nehmen an, daß dieser am Ende der Zeit t mit der Geschwindigkeit v in B ankommt. Wenn er völlig frei wäre, so würde er sich auf BT mit derselben Geschwindigkeit weiter bewegen; da er aber gezwungen ist, sich auf der gegebenen Kurve zu bewegen, so ändert sich die Richtung seiner Bewegung und geht in die von BT' über. Wenn man nun auf BT' in der Krümmungsebene und nach der konvexen Seite der Kurve die Senkrechte BK errichtet, so kann man die Geschwindigkeit v, die nach BT gerichtet war, durch zwei andere Geschwindigkeiten ersetzen, die eine $v \cos \delta$, in der Richtung BT', und die andere $v \sin \delta$, in der Richtung BK, und dann wird die Wirkung der krummen Bahn darin bestehen, daß sie die zweite dieser Geschwindigkeiten zerstört und nur die erste bestehen läßt; oder anders ausgedrückt, diese Wirkung kommt darauf hinaus, daß dem Körper eine Geschwindigkeit erteilt wird, die mit $v \sin \delta$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist[2]). Denkt man sich daher die Kurve durch ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten ersetzt, so besteht der Widerstand der Bahn darin, daß dem bewegten Körper an jeder Polygonecke eine unendlich kleine Geschwindigkeit $v \sin \delta$ entgegengesetzt der Richtung von BK erteilt wird."

„Um diesen Widerstand mit einer bewegenden Kraft f, die beständig auf den Körper wirkt, vergleichbar zu machen (*assimiler*), können wir uns vorstellen, daß die Geschwindigkeit $v \sin \delta$ hervorgebracht wird, während der Körper den Weg

---

corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum causas genuinas dedisse censendus est, qui omnia a motu orta demonstraverit. Motum enim semel existentem perpetuo conservari debere clare ostendimus supra; hic vero quemadmodum ex motu potentiae oriantur exposuimus. Quemadmodum vero potentiae sine motu vel existere vel conservari queant, concipi non potest. Quamobrem concludimus omnes potentias quae in mundo conspiciuntur, a motu provenire.

[1]) Poisson, Traité de mécanique, Livre II, chap. 4. De la force centrifuge. Ich zitiere nach der 3. édition par J. G. Garnier, Bruxelles 1838.

[2]) Im Original: „*ou autrement dit, cet effet se réduira à imprimer au mobile une vitesse égale et contraire à v sin δ.*"

von H bis H' durchläuft, und können die dazu erforderliche Zeit gleich dt setzen. Wir können auch in diesem Zeitintervall die Richtungsänderung der Kraft unberücksichtigt lassen und ihre Richtung z. B. parallel mit BO annehmen. Dann wird die entsprechende beschleunigende Kraft zu messen sein durch die Geschwindigkeit $v \sin \vartheta$, die sie in der Zeit dt hervorbringt, dividiert durch dt, und wenn man die Masse m nennt, so erhält man:

$$f = \frac{m v \sin \vartheta}{dt}.$$

Wenn man hierin $\sin \vartheta$ durch ϑ ersetzt und in Betracht zieht, daß $ds = v\,dt$ ist, so erhält man:

$$f = \frac{m v^2}{\varrho}.$$

Der Druck, den die krummlinige Bahn erfährt, und der allein von dem Bewegungszustand des materiellen Punktes herrührt, der diese Bahn beschreibt, oder die Zentrifugalkraft, die auf den bewegten Punkt wirkt, ist der Kraft f gleich und entgegengesetzt. Es folgt daraus, daß an irgendeinem Punkt B der krummlinigen Bahn die Zentrifugalkraft in die Krümmungsebene, und zwar in die Verlängerung des Krümmungsradius fällt, und daß ihre Größe der Länge des Kümmungsradius umgekehrt, der Masse des materiellen Punktes und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit direkt proportional ist."

Es ist hiernach kein Zweifel, daß Poisson eine wirkliche Kraft im Auge hat, die von dem bewegten Körper auf die feste Bahn ausgeübt wird. Die Einführung einer von der festen Bahn auf den Körper ausgeübten Kraft, deren sich Poisson gleichwohl in der vorstehenden Ableitung bedient, ist nichts weiter als ein mathematisches Hilfsmittel für die Rechnung, wodurch sich der Verfasser über die Nötigung hinwegsetzt, den physikalischen Charakter der Umwandlung einer Geschwindigkeitsänderung in eine Druckwirkung näher zu erörtern. Prinzipiell ist aber diese Erörterung bereits von Huygens ausgeführt worden (S. 59). In der Tat wird die Aufhebung der infinitesimalen Geschwindigkeit $v \sin \delta$ in der Zeit dt als gleichwertig anzusehen sein mit der Aufhebung einer Kraft von der Größe, die erforderlich wäre, um dem bewegten Körper in der Zeit dt eben jene Geschwindigkeit zu erteilen. Weiteres über die Natur der von Poisson zu Hilfe gezogenen Widerstandskraft der Bahn an einer späteren Stelle (S. 36).

Auch ohne die von Poisson eingeführte Hilfskraft läßt sich auf Grund des eben angegebenen Prinzips der Übergang zur dynamischen Seite des Vorgangs vollziehen. Denn wenn sich ein Körper von der Masse m mit der Relativbeschleunigung b gegen eine feste Wand bewegt, so wirkt er ebenso, wie wenn er von einer Kraft $k = m\,b$ gegen die feste Wand getrieben würde. Der längs einer gekrümmten Bahn bewegte Körper übt also auf die Bahn einen Druck aus, dessen Größe bestimmt ist durch $k = \frac{m v^2}{\varrho}$.

Daß die Geschwindigkeit v des Körpers längs der vorgeschriebenen Bahn dabei unverändert bleibt, zeigt Poisson in einer an Euler anschließenden

Weise. Die Differenz der Geschwindigkeiten in den Bahnelementen AB und BC ist $v\,(1 - \cos\delta)$. Diese Größe ist aber unendlich klein von der zweiten Ordnung und führt demnach auf einem endlichen Kurvenstück nur zu einer Geschwindigkeitsverminderung, die unendlich klein von der ersten Ordnung ist, d. h. die Geschwindigkeit bleibt konstant. —

Eine elementare Behandlung kann auch von der Poissonschen Zerlegung in die Komponenten $v \sin\delta$ und $v \cos\delta$ absehen und sich vielmehr eng an den zur Berechnung der Zentripetalbeschleunigung eingeschlagenen Weg anschließen. Man ersetze die als kreisförmig vorausgesetzte Bahn durch ein regelmäßiges Polygon $ABC\ldots$ (Fig. 12) mit verschwindend klein gedachten Seiten, und es stelle $BK = v$ nach Größe und Richtung die Geschwindigkeit dar, mit der der materielle Punkt in B ankommt, dann läßt sich diese Geschwindigkeit in eine längs der nächsten Polygonseite gerichtete BL und eine dazu senkrechte BM zerlegen. Die letztere, einen Geschwindigkeitszuwachs in normaler Richtung darstellende, kann durch $v\,\delta$ ausgedrückt werden, wenn δ den unendlich kleinen Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Polygonseiten bezeichnet. Nun ist wie früher

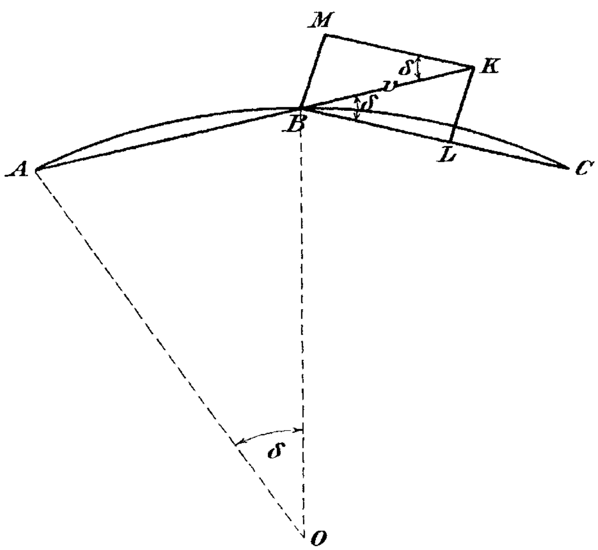

Fig. 12.

$$\delta = \frac{ds}{\varrho} = \frac{v\,dt}{\varrho}, \quad \text{also } BM = \frac{v^2\,dt}{\varrho},$$

und die entsprechende Normalbeschleunigung

$$\frac{BM}{dt} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Will man von der infinitesimalen Schreibweise ganz absehen, so kann man hierin noch dt durch τ ersetzen[1]).

Noch einen anderen, mehr indirekten Weg hat nach Eulers Vorgange ebenfalls Poisson angegeben[2]). Er legt eine kreisförmige Bahn zugrunde und setzt wie im früheren Fall voraus, daß ein materieller Punkt an einem unausdehnsamen Faden befestigt sei, und daß ihm durch einen Stoß eine Geschwindigkeit v senkrecht zur Fadenlänge erteilt werde; eine weitere bewegende Kraft soll nicht auf den beweglichen Körper wirken. Der Körper be-

[1]) Dieses Verfahren hat der Verfasser in seiner „Oberstufe der Naturlehre" (§ 18) eingeschlagen.

[2]) Poisson, a. a. O., Nr. 174. Poisson bezeichnet (irrtümlich?) diesen Weg als von Huygens herrührend.

schreibt dann einen Kreis, und der Faden erfährt einen Zug; dieser Zug ist die Zentrifugalkraft. Denkt man nun an dem Körper eine Kraft angebracht, die diesem Zuge gleich und nach dem Zentrum hin gerichtet ist, so kann man von dem Vorhandensein des Fadens absehen und den Körper als völlig frei ansehen. Die kreisförmige Bahn wird dann vermöge der Anfangsgeschwindigkeit v und dieser Zentripetalkraft beschrieben. Die Größe der letzteren ist aber, wie früher berechnet, $\frac{m v^2}{r}$, also hat auch die Zentrifugalkraft eben diesen Wert.

Wie ist es nun zu erklären, daß diese klare, von Euler und Poisson angegebene Herleitung der Zentrifugalkraft als einer wirklichen Kraft so völlig in Vergessenheit geraten konnte? Der Grund dafür wird bei der Erörterung des Beharrungsgesetzes in Nr. 8 und 9 ersichtlich werden. Zunächst aber sei ein Einwand von Heinrich Hertz, der noch nicht den Kern der Sache betrifft, näher erörtert.

7. Einwand von Heinrich Hertz. Im Vorwort (S. 4) sind die Bedenken angeführt worden, die Heinrich Hertz gegen die innere Folgerichtigkeit der auf Newtons Grundgesetzen aufgebauten Mechanik erhoben hat, und die er insbesondere an die übliche Behandlung der Schwungkraft anknüpft. Er wendet sich hier auch gegen das (von Euler herrührende und im vorigen benutzte) Prinzip, daß die Aufhebung einer Beschleunigung eine Druckwirkung zur Folge habe. Er sagt[1]):

> „In unseren Bewegungsgesetzen war die Kraft die vor der Bewegung vorhandene Ursache der Bewegung. Dürfen wir, ohne unsere Begriffe zu verwirren, jetzt auf einmal von Kräften reden, welche erst durch die Bewegung entstehen, welche eine Folge der Bewegung sind? Dürfen wir uns den Anschein geben, als hätten wir über diese neue Art von Kräften in unseren Gesetzen schon etwas ausgesagt, als könnten wir ihnen mit dem Namen „Kraft" auch die Eigenschaften der Kräfte verleihen? Alle diese Fragen sind offenbar zu verneinen, es bleibt uns nichts übrig als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwungkraft als einer Kraft sei eine uneigentliche, ihr Name sei wie der Name der lebendigen Kraft als eine historische Überlieferung hinzunehmen, und die Beibehaltung dieses Namens sei aus Nützlichkeitsgründen mehr zu entschuldigen als zu rechtfertigen. . . ."

Der Widerspruch, den Hertz darin findet, daß die Kraft einmal als Ursache, das andere Mal als Wirkung der Bewegung auftritt, ist in Wirklichkeit nicht vorhanden. Allerdings ist es unmöglich, daß eine Kraft die Ursache einer Bewegung und zugleich eben diese Bewegung die Ursache eben jener Kraft ist. Aber das behauptet auch niemand. Sondern nur darum handelt es sich, daß einmal Kraft als Ursache von Bewegung und ein andermal Bewegung als Ursache von Kraft auftreten kann. Dies ist ebensowenig ein Widerspruch, wie daß Wärme die Ursache von Be-

[1]) H. Hertz, a. a. O., S. 7.

wegung und ein andermal Bewegung die Ursache von Wärme ist[1]). Warum sollte ein ähnliches Verhältnis zwischen Kraft und Bewegung logisch unmöglich sein? Hertz scheint freilich der Meinung zu sein, als ob eine Kraft, die aus Bewegung hervorgehe, nur im uneigentlichen Sinne eine Kraft zu nennen sei. Hier bedürfte es zur Rechtfertigung unserer Auffassung eines Eingehens auf die Doppelseitigkeit des Kraftbegriffs, der sich sowohl auf die Erzeugung von Beschleunigungen als von Spannungen, die mit den Beschleunigungen gleichwertig sind, erstreckt. Davon wird erst weiter unten (S. 34) die Rede sein; Hertz selber[2]) spricht ja die Überzeugung aus, daß die vorhandenen Lücken der Darstellung nur Lücken der Form seien, und daß durch geeignete Anordnung der Definitionen und Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit werde vermieden werden können. Es genüge vor der Hand der Hinweis, daß doch vielleicht an der heut gebräuchlichen Kraftdefinition etwas nicht ganz in Ordnung ist. Zunächst aber sei noch ein anderer Einwand in Erwägung gezogen.

8. **Einwand aus dem Beharrungsgesetz.** Während in den Darstellungen von Euler und Poisson eine Zentripetalkraft gar nicht oder nur als Hilfsbegriff eine Stelle findet, spielt in den neueren Darstellungen (vgl. oben Nr. 5) gerade die Zentripetalkraft eine maßgebende Rolle. Und zwar wird die Einführung der Zentripetalkraft unter Berufung auf das Newtonsche Beharrungsgesetz für unumgänglich erachtet, denn „jede Abänderung einer Bewegungsrichtung ist auf eine Kraft zurückzuführen“[3]). Wir wollen nun untersuchen, wie weit sich die vorher angestellte Betrachtung, bei der sich die Zentrifugalkraft als eine wirkliche Kraft ergab, mit dieser Forderung in Einklang bringen läßt.

Wir betrachten zu diesem Zweck ein konkretes Beispiel, das sich eng an das von Euler und Poisson benutzte Schema anschließt. Es sei ein zylinderförmiges Gefäß in der Gestalt einer flachen Trommel dadurch hergestellt, daß auf den Rand einer ebenen kreisförmigen Scheibe eine dazu senkrechte zylindrische Wand aufgesetzt ist (eine solche Vorrichtung pflegt den Schwungmaschinen beigegeben zu sein). Das Gefäß befinde sich dauernd in Ruhe. In der Wand sei eine kleine Öffnung angebracht, und durch diese werde eine kleine Kugel in tangentialer Richtung (etwa wie beim sogen. Tivolispiel) in das Gefäß hineingeschleudert. Die Öffnung werde unmittelbar darauf wieder geschlossen. Dann wird die Kugel an der Wand entlang im Kreise herumlaufen und dabei gemäß der Darstellung von Euler und Poisson einen beständigen Druck gegen die feste Wand ausüben, den

[1]) Daß man ein solches Verhältnis nicht Wechselwirkung nennen darf, hat Höfler (Psychologie § 17), anläßlich der Beziehungen zwischen Physischem und Psychischem gezeigt.

[2]) a. a. O., S. 3.

[3]) Daß diese Einführung mehr durch das System als durch die Tatsachen selbst gefordert wird, kommt gerade in den besten Darstellungen des Gegenstandes zum Ausdruck. So bei W. Voigt, Elementare Mechanik (2. Aufl. 1903), S. 91: Jede Änderung einer Bewegung ist „nach unserer Vorstellung“ durch eine Kraft hervorgerufen.

wir auf die normale Komponente der Geschwindigkeit zurückführen und als Zentrifugalkraft ansprechen.

Wie läßt sich nun damit die Annahme einer Zentripetalkraft bzw. einer nach der konkaven Seite der Wand gerichteten Normalkraft vereinen? Das Nächstliegende ist, daß man sich vorstellt, es werde durch die Zentrifugalkraft eine elastische Gegenwirkung der Wand hervorgerufen, die der Zentrifugalkraft gleich und entgegengesetzt ist. Es sei wieder (wie oben S. 24) die tangentiale Geschwindigkeit v (Fig. 13) in die Komponenten $v \cos \delta$ und $v \sin \delta$ zerlegt, es sei also $v \sin \delta$ die zentrifugale Geschwindigkeitskomponente, und es stelle $- v \sin \delta$ den ihr gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeitszuwachs dar, der von der elastischen Gegenwirkung der Wand herrührt; sieht man Wirkung und Gegenwirkung als gleichzeitig an, so werden die beiden durch $v \sin \delta$ und $- v \sin \delta$ dargestellten Bewegungsantriebe einander aufheben, und es ließe sich der Vorgang auch so auffassen, als ob mit der ursprünglichen tangentialen Geschwindigkeit v eine dazu normale Geschwindigkeitskomponente $- v \sin \delta$ zusammenwirkte. Damit wäre in der Tat der Vorgang auf das Schema der freien krummlinigen Bewegung zurückgeführt. Doch ist wohl zu beachten, daß diese Betrachtung nur zutrifft, wenn eine elastische Gegenwirkung der Wand vorausgesetzt wird. Ähnliches wie für die Wand wird auch für einen Faden, an dem ein Stein herumgeschwungen wird, und für einen rotierenden Körper gelten. Und ferner ist zu beachten, daß die so eingeführte Zentripetalkraft durchaus eine sekundäre durch die Zentrifugalkraft hervorgerufene Kraft ist.

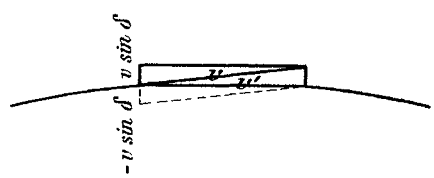

Fig. 13.

Es wird aber die Frage berechtigt sein, ob denn für das Zustandekommen einer zwangläufigen Bewegung die Annahme elastischer Gegenwirkungen notwendig sei. Wie ist es, wenn die Wand unelastisch ist? [Daß wir ein Recht haben, diesen Fall nicht als einen rein fingierten anzusehen, wird sich später bei Erörterung des unelastischen Stoßes (Nr. 14) erweisen.] In Eulers Darstellung wird die zur Wand normale Geschwindigkeitskomponente durch den Widerstand der Wand aufgehoben. Wenn man nun den Widerstand der Wand als eine Kraft einführt, die mit der eben erwähnten elastischen Gegenwirkung gleichwertig ist, so kann noch immer dieselbe an das Schema der freien krummlinigen Bewegung angelehnte Darstellung angewandt werden. Aber ist diese Einführung zulässig? Sind Widerstände Kräfte? Und noch bestimmter: Sind Widerstände bewegende Kräfte? Und endlich: Ist die obige Forderung, daß jede Abänderung einer Bewegungsrichtung auf eine Kraft zurückzuführen sei, vielleicht nur durch eine unzutreffende Formulierung des Beharrungsgesetzes bedingt? An diese Fragen werden die Untersuchungen des folgenden Abschnittes anknüpfen.

III.
Die Newtonschen Bewegungsgesetze.

9. Das Beharrungsgesetz. Das Beharrungsgesetz lautet in NEWTONS Fassung[1]):

„Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleich-„förmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch äußere Kräfte „gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern."

Wir vergleichen damit die GALILEIsche Fassung[2]):

„Ich denke mir ein Bewegliches auf einer horizontalen Ebene unter Aus-„schluß jedes Hindernisses vorwärts geschleudert; dann ist es sicher (nach „dem, was anderwärts von mir ausführlicher auseinandergesetzt ist), daß seine „Bewegung auf dieser Ebene gleichförmig und unaufhörlich sein wird, sofern „nur die Ebene ins Unendliche sich erstreckt."

Zur Erläuterung der Worte „unter Ausschluß jedes Hindernisses" sei noch auf die Bemerkung verwiesen, die GALILEI bei einer anderen Gelegenheit (bezüglich der schiefen Ebene) macht, es werde angenommen, „daß keine äußeren Hindernisse vorhanden sind, die von der Gestalt des Körpers, von der Rauhigkeit der Oberfläche, von den Bewegungen der Teile des Mediums, von einer äußeren bewegenden Kraft, welche die Bewegung beschleunigt oder verzögert, oder von ähnlichen Umständen herrühren"[3]).

Der Unterschied zwischen den Fassungen GALILEIS und NEWTONS fällt in die Augen. Abgesehen davon, daß GALILEI die Geradlinigkeit nicht ausdrücklich ausspricht, finden wir bei GALILEI eine ganze Reihe von beeinflussenden Umständen in Betracht gezogen und noch weitere „ähnliche Umstände" zugelassen, während sich NEWTON auf „äußere Kräfte" (*vires impressae*)[4]) be-

---

[1]) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

[2]) Mobile quoddam super planum horizontale projectum mente concipio omni secluso impedimento; jam constat ex his quae fusius alibi dicta sunt, illius motum aequabilem et perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur." Galilei, Opere ed. Albèri, XIII, 221; vgl. auch Wohlwill, Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes, Zeitschr. f. Völkerpsych. und Sprachwissenschaft 1883, und F. Poske, Der empirische Ursprung und die Allgemeingültigkeit des Beharrungsgesetzes, in Viertel-jahrsschr. f. wiss. Philos., VIII, 4 (1884), S. 393.

[3]) Galilei, Opere, XI, 62. Nach Wohlwill (a. a. O., S. 375) ist Descartes der erste, der die Geradlinigkeit und die Gleichförmigkeit ausdrücklich als zusammengehörig bezeichnet. Daß sie von Galilei mit gemeint ist, geht namentlich auch aus seiner Behandlung der Wurfbewegung hervor.

[4]) Über die Herkunft und Bedeutung dieses Ausdruckes vgl. Wohlwill, a. a. O., S. 123.

schränkt. Es erhellt hieraus, daß beide einen verschiedenen Kraftbegriff anwenden, GALILEI einen engeren, auf unmittelbare und direkte Ursachen der Beschleunigung und Verzögerung beschränkten (wie die Annäherung bzw. Entfernung von der Erde bei den Erscheinungen des senkrechten Wurfs, wo wir nach heutiger Sprechweise die Anziehungskraft der Erde einführen), — NEWTON einen allgemeineren, auch jene Hindernisse der Bewegung mit umfassenden. Daher lautet die NEWTONsche Definition der Kraft:

> „Als äußere Kraft bezeichnet man eine Einwirkung auf einen Körper, die darauf gerichtet ist, seinen Zustand, entweder der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, zu ändern“ [1]).

Zur Erläuterung führt NEWTON Stoß, Druck und Zentripetalkraft an. Dementsprechend beziehen sich auch die Beispiele für äußere Kräfte, die er an anderer Stelle (im Anschluß an seine Lex I) anführt [2]), nicht bloß auf die Wurfbewegung und die Bewegung der Planeten, sondern auch auf den Kreisel, „dessen Teile vermöge der Kohäsion sich beständig aus der geradlinigen Bewegung entfernen“, und auf den Einfluß von Reibung und Luftwiderstand.

Es ist oft bemerkt worden, daß NEWTONS Fassung des Beharrungsgesetzes und seine Definition der Kraft Zirkelbestimmungen darstellen, infolge wovon das Beharrungsgesetz seinen Tatsächlichkeitscharakter scheinbar völlig abstreift, indem es nur als eine Konsequenz der Kraftdefinition erscheint. Hier tritt uns gleich im Beginn der Mechanik eine jener Unsicherheiten entgegen, von denen HERTZ spricht und die vielleicht durch geeignete Fassung und Anordnung und durch vorsichtige Ausdrucksweise vermieden werden könnten. Andererseits hat die Allgemeinheit der von NEWTON aufgestellten Kraftdefinition von jeher als einer seiner vornehmsten Ruhmestitel gegolten. Unleugbar hat erst diese Definition die ganze Fülle der Veränderungen, die an den Bewegungen beobachtet werden, der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht [3]). Dennoch hat man von jeher gefühlt (und schon die eben erwähnten Beispiele NEWTONS lassen es erkennen), daß Verschiedenartiges in dieser Definition vereinigt ist. Wir stehen somit vor der Aufgabe, auch die Kraftdefinition NEWTONS auf ihre Berechtigung zu prüfen.

Ohne indessen das Ergebnis dieser Prüfung (vgl. Nr. 10) vorwegzunehmen, können wir dem Beharrungsgesetz eine mehr an GALILEI sich anschließende Form geben, in der nichts über die besondere Art der Kraftdefinition vorausgesetzt ist. Dem Gesetz liegt nämlich die folgende

---

[1]) „Vis impressa est actio in corpus exercita ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.“

[2]) a. a. O., S. 32.

[3]) Bei Galilei heißt es noch im Anschluß an die oben aus Opere, XI, 62 zitierte Stelle: de his enim accidentibus, eo quod innumeris modis accidere possint, regulae tradi nequeunt.

Erfahrung zugrunde[1]): So oft an einem Körper eine Abweichung von der geradlinigen gleichförmigen Bewegung beobachtet wurde, ist es bisher immer gelungen, einen zweiten Körper aufzufinden, dessen Existenz, Lagen- und Geschwindigkeitsverhältnisse als notwendige Bedingungen jener Abweichungen anzusehen sind. Hierdurch ist es möglich, die unbestimmte Fassung des Beharrungsgesetzes, die Newton selbst an anderer Stelle[2]) gibt:

> Jeder Körper verharrt, soweit es an ihm ist, in einem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung"

in die folgende bestimmtere Form zu bringen:

> „Jeder Körper verharrt in dem Zustande der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, sofern nicht Umstände vorhanden sind, durch die erfahrungsgemäß eine Änderung jenes Zustandes bewirkt wird.

Diese Formulierung bedeutete eine Identität (wie man sie der Newtonschen Fassung vielfach vorgeworfen hat), wenn nicht das Wörtchen „erfahrungsgemäß" den Hinweis in sich schlösse, daß es sich um Einwirkungen handelt, deren Gesetze im Zusammenhang mit dieser Formulierung festzustellen sind.

Ähnlich heißt es auch bei Huygens in der Abhandlung „Über die Bewegung der Körper durch den Stoß"[3]):

> „Ein einmal bewegter Körper setzt, wenn ihm nichts entgegensteht, seine Bewegung beharrlich mit derselben Geschwindigkeit und in gerader Linie fort."

Von diesen Formulierungen ist nun zu sagen, daß die Eulersche bzw. Poissonsche Darstellung der Schwungkraft damit gut zusammenstimmt. Denn diese Fassung nötigt nicht dazu, bei jeder Abweichung von der geradlinig gleichförmigen Bewegung eine Kraft als Ursache anzunehmen; erfahrungsgemäß rufen vielmehr auch ruhende Körper vermöge ihrer Masse an bewegten auf sie treffenden Körpern Geschwindigkeitsänderungen hervor, deren Größe sich nach den Gesetzen des unelastischen bzw. elastischen Stoßes ermitteln läßt (Nr. 14). Euler selbst wendet in Übereinstimmung hiermit den Schluß aus der Änderung des Beharrungszustandes auf das Vorhandensein einer Kraft nur an, wenn es sich um einen freien Körper handelt[4]).

---

[1]) Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883, S. 97; Poske, a. a. O., S. 403.

[2]) a. a. O., S. 21, Erklärung 3.

[3]) Ostwalds, Klassiker, Nr. 130, S. 3.

[4]) „Jeder sich selbst überlassene Körper verharrt entweder in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig und geradlinig fort. So oft daher ein ruhender freier Körper sich zu bewegen anfängt oder seine Bewegung weder gleichförmig noch geradlinig fortsetzt, muß man die Ursache hiervon irgend einer Kraft zuschreiben." (L. Euler, Mechanice sive motus scientia analytice exposita, t. I, praefatio.)

10. Der Kraftbegriff. Wir wenden uns nun der Prüfung des Newtonschen Kraftbegriffes selber zu. Die Definition der Kraft bei Newton lautet, wie schon oben angegeben:

> „Als äußere Kraft bezeichnet man eine Einwirkung auf einen Körper, die darauf gerichtet ist, seinen Zustand entweder der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung zu ändern."

Und damit zusammengehörig ist das 2. Bewegungsgesetz:

> „Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden „Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden „Linie, nach der jene Kraft wirkt"[1]).

Es ist der Beachtung wert, daß im letzteren Fall nur von einer „bewegenden" Kraft gesprochen ist, und auch die Beispiele, die hier zur *vis impressa* gegeben sind, beziehen sich nur auf „bewegende" Kräfte im engeren Sinn, auf Stoß, Druck, Zentripetalkraft[2]). Dahingegen läßt die in Nr. 9 erörterte Fassung des Beharrungsgesetzes bei Newton nur die Deutung zu, daß unter *vires impressae* sowohl bewegende Kräfte als auch Bewegungshindernisse zu verstehen sind. Es liegt hier also zwar kein offener Widerspruch, aber doch eine schwankende Umgrenzung des Kraftbegriffs vor, die in der verschiedenartigen Natur der Vorgänge selbst ihren Grund hat.

Die „bewegenden" Kräfte Newtons sind durch ein bestimmtes Merkmal von den Bewegungshindernissen aufs deutlichste unterschieden. Jene können sowohl beschleunigend als auch verzögernd auf den Körper wirken, diese hingegen wirken nur in verzögerndem Sinne. Schon der populäre Sprachgebrauch verbindet mit dem Wort Kraft die Vorstellung einer gewissen Aktivität, eines Vermögens, unter Umständen eine Bewegung hervorzubringen, nicht bloß eine solche zu hemmen. Wir handeln aber ebenso auch in Newtons Sinn, wenn wir seine Kraftdefinition in der von ihm selbst gegebenen Fassung ernst nehmen und auf jene erste Art von Vorgängen beschränken. Hiernach wäre also zu sagen:

> „Eine (bewegende) Kraft ist das, was **sowohl** eine Beschleunigung **als auch** eine Verzögerung eines Körpers hervorzubringen vermag"[3]).

In dieser Erklärung ist auch als besonderer Fall der Übergang eines Körpers aus der Ruhe in die Bewegung mit enthalten. Es gehören zu den so definierten Kräften die Schwerkraft, sowie überhaupt die Anziehungskräfte zwischen Massen bzw. Massenpunkten, und die Elastizitätskräfte (Nr. 11). Dagegen erfordert es eine besondere Untersuchung, ob auch die Bewegungs-

---

[1]) Newton, a. a. O., S. 32.

[2]) Über den Stoß vgl. jedoch unten Nr. 4.

[3]) Über die Ausdehnung dieser Definition auf die Erscheinungen der Spannung vgl. unten Nr. 11.

hindernisse und die Stoßkraft eines in Bewegung befindlichen Körpers dieser Definition unterzuordnen sind (Nr. 14 und 15).

Wenn wir so die Grenzen des Kraftbegriffs zunächst enger gezogen haben, so werden wir uns dagegen genötigt sehen, diesen Begriff in anderer Richtung über die von Newton eingehaltenen Grenzen hinaus zu erweitern.

11. Die Kraft als Spannungsursache. Lagrange stellt an die Spitze seiner Mechanik die Erklärung:

> „Man versteht im allgemeinen unter Kraft die Ursache, sie mag übrigens wie immer beschaffen sein, die den Körper, an dem man sie sich angebracht denkt, eine Bewegung entweder wirklich erteilt oder zu erteilen strebt[1]).“

Lagrange fährt dann fort:

> „Nach der Größe der Bewegung, die erteilt wird oder erteilt werden könnte, muß auch die Kraft geschätzt werden. Im Zustande des Gleichgewichts hat die Kraft keine wirkliche Betätigung, sie bringt ein bloßes Streben zur Bewegung hervor; aber immer muß sie gemessen werden durch die Wirkung, die sie hervorbringen würde, wenn sie nicht gehemmt wäre.“

Es ist der Begründer des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, der hier zu uns spricht. Er zollt auch an anderer Stelle[2]), was sehr zu beachten ist, seinem großen Vorläufer Huygens besondere Anerkennung, daß er dies Prinzip bereits bei seiner Ableitung der Zentrifugalkraft angewendet habe[3]). Der Wert der Kraft lasse sich bestimmen, indem man die in einem Zeitteilchen erzeugte Geschwindigkeit mit diesem Zeitteilchen oder den durchlaufenen Weg mit dem Quadrat dieses Zeitteilchens vergleiche. Es sei aber nicht einmal nötig, daß dieser Weg wirklich durchlaufen werde, es genüge, daß er sich als Komponente einer zusammengesetzten Bewegung ansehen lasse, da die Wirkung der Kraft in einem und dem anderen Falle dieselbe sei. Und weiterhin[4]):

> „ . . . so drückt das Produkt der Masse in die beschleunigende Kraft, die, wie wir gesehen haben, durch das Element der Geschwindigkeit, dividiert durch das Zeitelement, dargestellt wird, die elementare oder erst entstehende Kraft aus; und betrachtet man nun diese Größe als das Maß des Kraftaufwandes (*effort*), den der Körper vermöge der Geschwindigkeit, die er angenommen hat oder anzunehmen strebt, ausüben kann, so macht diese Größe das aus, was man Druck (*pression*) nennt. Sieht man diese Größe aber als das Maß der Kraft (*force ou puissance*) an, die erforderlich ist, diese Geschwin-

---

[1]) Lagrange, Méchanique analitique, Paris 1788; *On entend en général par force ou puissance la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps, auquel on la suppose appliquée.* — Der deutsche Wortlaut in der Schrift: Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik, Leipzig, C. E. M. Pfeffer, 1899, S. 70.

[2]) a. a. O., S. 162; Vorreden usw. S. 96.

[3]) Vgl. weiter unten S. 59.

[4]) a. a. O., S. 163; Vorreden usw. S. 100.

digkeit hervorzubringen, so ist sie eben das, was man bewegende Kraft nennt. Druckkräfte oder bewegende Kräfte heben sich daher auf oder halten einander das Gleichgewicht, wenn sie einander gleich oder gerade entgegengesetzt sind, oder wenn sie, an irgendeiner Maschine angebracht, deren Gleichgewichtsgesetze befolgen.“

Angesichts dieser klaren Darlegung begreift man nicht recht den Einwurf von H. Hertz:

„Auch Lagrange, denke ich, müsse jene Verlegenheit und den Wunsch, um jeden Preis vorwärts zu kommen, verspürt haben, als er seine Mechanik kurzerhand mit der Erklärung einleitete, eine Kraft sei eine Ursache, welche einem Körper eine Bewegung erteilt „oder zu erteilen strebt“; gewiß nicht ohne die logische Härte einer solchen Überbestimmung zu empfinden[1].“

Was die logische Seite betrifft, so kann man nicht wohl von Überbestimmung reden, da das zweite Merkmal ja zum ersten nicht hinzukommt, sondern nur stellvertretend für das erste gesetzt ist. Auch sind nicht zwei von einander unabhängige Bestimmungen gemeint, sondern die selbe Kraft, die einmal als bewegende Kraft erscheint, kann ein andermal — unter veränderten Bedingungen — als druckerzeugende Kraft auftreten. In sachlicher Hinsicht aber entspricht die Doppeltheit der Lagrangeschen Kraftdefinition der Erfahrungstatsache, daß derselbe Stein, der im freien Fall durch die Schwerkraft eine gewisse Beschleunigung erfährt, bei gehemmter Bewegung einen Druck auf die Unterlage ausübt, die ihn am Fallen verhindert. Dem Skeptiker aber, der anzweifeln wollte, daß in beiden Fällen dieselbe Schwerkraft wirke, wäre mit Newtons Grundsatz[2] zu begegnen: „An Ursachen zur Erklärung natürlicher Dinge sind nicht mehr zuzulassen, als wahr sind und zur Erklärung jener Erscheinungen ausreichen.“ Das Verhalten Lagranges ist auch sicherlich einwandfreier und verständlicher als das der neueren Mechanik, die die Druckkräfte als gleichartig mit den bewegenden Kräften einführt, ohne diese Einführung anders als durch die Einfachheit der Darstellung zu rechtfertigen[3].

Nur in einer Beziehung macht Lagranges Definition noch eine schärfere Fassung wünschenswert. Die Druckwirkung ist nicht die einzige Folge der Aufhebung einer bewegenden Kraft. Wird der Stein an einem Faden aufgehängt, so tritt an Stelle des Druckes der Zug. Es bedürfte also eines Wortes, das beide umfaßt; da nun der Zustand, den sowohl Druck wie Zug an den Körpern hervorrufen, als Spannung[4] bezeichnet zu werden pflegt, so bietet sich für Druck und Zug die gemeinsame Benennung „Spannungsursache“ dar. Wir sind ferner, soweit es sich um rein mechanische Vor-

[1] H. Hertz, a. a. O. S. 8; Vorreden usw. S. 129. Man vgl. insbesondere auch A. Höfler, Studien z. gegenw. Mechanik, S. 36.

[2] Newton, Math. Prinzipien usw., deutsch von Wolfers. S. 379.

[3] G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Anfang der XI. Vorlesung.

[4] Im Englischen *stress*, während *tension* = Zug ist.

gänge handelt, gegen den Gebrauch des Wortes „Streben" empfindlicher, als es unsere Vorfahren waren[1]); und diese Empfindlichkeit hat eine gewisse Berechtigung. Nicht berechtigt ist aber die Abneigung gegen den Gebrauch des Wortes „Ursache"; diese Abneigung ist nur eine (vielleicht schon im Schwinden begriffene) Zeitkrankheit, die mit dem Abscheu vor allem, was nach Metaphysik schmeckt, zusammenhängt.

Wir versuchen nunmehr im Anschluß an Lagrange für die Kraft in dem bisher erläuterten Sinne eine kurze Definition zu geben. Wir sagen:

Die Ursache einer Beschleunigung oder einer statt dieser hervorgerufenen Spannung heißt Kraft[2]).

Hierzu ist gemäß dem früher Gesagten erläuternd zu bemerken, daß die Ursache einer Verzögerung (also einer negativen Beschleunigung) nur dann als Kraft gelten soll, wenn sie auch als Ursache einer wirklichen (positiven) Beschleunigung auftreten kann.

Mit der Hineinziehung der Spannung in die Definition der Kraft knüpfen wir übrigens an die populäre, unserem eigenen Empfinden gemäße und natürliche Vorstellung von Kraft an, die auch Jahrhunderte hindurch, während der Herrschaft der Statik, die maßgebende für die Mechanik gewesen ist. Nur eine allzuausschließlich auf das „Beschreiben der Bewegungen" gerichtete Denkweise hat gemeint, diese Vorstellung ganz zurückdrängen zu müssen — doch nur, um sie wie bei Kirchhoff durch eine Hintertür wieder einzulassen[3]).

Im Lichte der Lagrangeschen Kraftdefinition erscheint es nun durchaus einwandfrei, den Druck des bewegten Körpers gegen die Bahn, die ihm eine Zwangsbewegung aufnötigt, aus der senkrecht zur Bahn gerichteten Beschleunigung herzuleiten, insofern eben an die Stelle einer gehinderten Beschleunigung ein Druck tritt.

12. Ist der Widerstand der Bahn als eine Kraft anzusehen? Wir können nunmehr den Einfluß einer festen Bahn, die dem Körper eine Bewegung auf einer Kurve oder Fläche vorschreibt, eingehender als oben (S. 25) erörtern. Wie in dem angeführten Poissonschen Beispiel (Nr. 6), so pflegt die neuere Mechanik überall, wo ein solcher Einfluß ins Spiel kommt, Normalkräfte einzusetzen, die in der von Lagrange eingeführten Schreib-

---

[1]) G. Kirchhoff, a. a. O., Vorrede.

[2]) Hierbei ist davon abgesehen, daß strenggenommen die so definierte Kraft nicht eine Ursache schlechthin, sondern nur eine Teilursache darstellt, derart, daß je nach der Art der übrigen Bedingungen des Vorgangs eine Beschleunigung oder eine Spannung hervorgebracht wird. — Auf die Bedeutung der Spannung als dritten Grundphänomens der Mechanik hat seit Jahren A. Höfler hingewiesen; man vgl. dessen „Psychische Arbeit", S. 7, und „Physik" (Vieweg, 1906), § 1, wo die Mechanik mit den Worten beginnt: „Gegenstand der Mechanik sind die Bewegungen nebst den mechanischen Spannungen."

[3]) Kirchhoff, a. a. O. XI. Vorlesung.

weise die Form $\lambda \frac{dL}{dx}$, $\mu \frac{dM}{dx}$ usw. haben, wenn $L = 0$, $M = 0$.. die Gleichungen der vorgeschriebenen Kurven oder Flächen oder noch allgemeiner die Bedingungsgleichungen für die Bewegung eines Punktes oder eines Punktsystems sind. Ist aber hiermit ausgesprochen, daß physikalische Kräfte der bezeichneten Art und Größe wirklich auf die betreffenden Punkte wirken? Lagrange selbst gewinnt die angegebenen Ausdrücke auf Grund eines Eliminationsverfahrens, bei dem λ, μ . . . unbestimmte Koeffizienten vorstellen. Und er selbst bemerkt, daß man nach Einführung dieser Kräfte das System als ein freies behandeln könne, daß also diese Kräfte an die Stelle der Widerstände treten, denen die Punkte des Systems infolge ihrer Verbindung miteinander oder infolge der Hindernisse, die sich ihrer Bewegung entgegenstellen, unterworfen sind. Wenn er aber dann noch hinzufügt[1]): „oder vielmehr diese Kräfte sind nichts anderes als die Kräfte dieser Widerstände selbst, die den auf sie ausgeübten Drucken gleich und entgegengesetzt sein müssen" — so überschreitet er damit die Grenze, die die mathematische Fiktion von dem physikalischen Vorgang trennt. Verfährt man mit aller Strenge, so kann man nichts weiter sagen als: Die eingeführten Kräfte sind mit den Bedingungsgleichungen äquivalent[2]), oder: sie ersetzen die für die Bewegung des Punktes vorhandenen Hindernisse. Es handelt sich also im vorliegenden Falle um substituierte Kräfte, die lediglich im Interesse der mathematischen Behandlung der Erscheinnngen eingeführt sind, aber in bezug auf den wirklichen physikalischen Vorgang nichts präjudizieren, ja die als eigentliche Kräfte abgelehnt werden müssen, sobald man die Kraftdefinition in der oben angegebenen Form annimmt. Der Vorgang selbst besteht, wie oben (Nr. 6) bei dem Poissonschen Beispiel gezeigt, lediglich darin, daß sich von der Geschwindigkeit des bewegten Massenpunktes eine Komponente abspaltet. Über deren Verbleib sind besondere Untersuchungen notwendig, die an einer anderen Stelle (S. 26) angedeutet sind. Das Beispiel Eulers zeigt übrigens, daß der Mechanik vor Lagrange die Annahme solcher sozusagen toter Kräfte, wie es die Widerstandskräfte sind, völlig fern lag.

Wenn die eben erwähnten Kräfte nur mathematische Substitutionen bedeuten, so ist auch ersichtlich, daß in dem oben (S. 28) betrachteten Beispiel einer unfreien krummlinigen Bewegung — die der Bewegung entgegenstehende Wand als unelastisch vorausgesetzt — keine Kraft nach der

---

[1]) Lagrange, Méc. anal., p. 49: ou plutôt ces forces ne sont que les forces mêmes de ces résistances, lesquelles doivent être égales et directement opposées aux pressions exercées par les corps. — Ebenda p. 166: La résistance du milieu n'est autre chose qu'une force qui agit dans une direction opposée à celle du mobile et lorsqu'un corps est forcé de se mouvoir sur une surface donnée, il y a nécessairement une force perpendiculaire à la surface qui l'y retient etc.

[2]) So Lagrange selbst, a. a. O.

konkaven Seite der Wand hin wirksam wird. Wer aber selbst die Lagrangeschen Kräfte für wirkliche Kräfte nehmen wollte, müßte doch noch mit Lagrange einräumen, daß diese Kräfte keine ursprünglichen, sondern erst durch den „vom bewegten Körper ausgeübten Druck“ hervorgerufen sind.

13. Das Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion. In den eben betrachteten Fällen pflegt das Gesetz von Aktion und Reaktion angerufen zu werden, um die Einführung einer Gegenkraft (die von der Bahn ausgeübt wird) zu rechtfertigen. (Man vgl. oben Nr. 5.) Wir werden dadurch zu einer Prüfung auch dieses Gesetzes genötigt. Es ist von Newton als drittes Bewegungsgesetz in folgender Form aufgestellt worden:

> „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen „zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter „Richtung.“

Die Erläuterungen, die spätere Autoren zu diesem Gesetz gaben, gehen durchweg auf diejenigen, die Newton selbst hinzugefügt hat, zurück. Doch wird eine, die sich auf den Stoß bezieht, zumeist mit Stillschweigen übergangen[1]). Wir knüpfen zunächst gerade an dieses Beispiel Newtons an[2]).

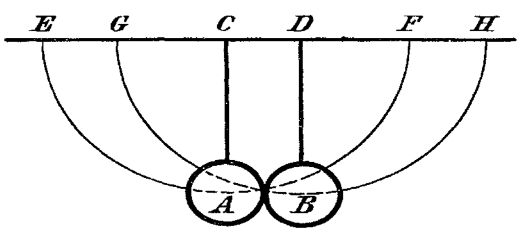

Fig. 14

Es hängen zwei Körper A und B (Fig. 14) an den parallelen und gleichlangen Fäden CA und DB (von beiläufig 10 Fuß Länge) lotrecht herab. Sie können also, wenn jeder sich ungehindert vom andern bewegt, die Halbkreise EAF und GBH beschreiben; durch Vorversuche kann man den Einfluß, den der Luftwiderstand auf die Schwingungsweite des ersten Zurückschwingens ausübt, ermitteln. Wird der Versuch mit möglichst vollkommen elastischen Kugeln angestellt, und läßt man die Kugeln aus gleicher Höhe gegeneinander fallen, so ergibt sich, daß die Änderungen der Bewegungsgrößen beider Körper entgegengesetzt gleich sind. Dasselbe tritt auch ein, wenn die Körper aus verschiedenen Höhen fallen, oder wenn der eine von ihnen sich vor dem Zusammenstoß in der Ruhelage befindet. Newton spricht das Ergebnis so aus[3]):

> „Die Größe der Bewegung, welche man erhält, indem man von der „Summe der nach einer Richtung stattfindenden Bewegungen die Summe „der nach der entgegengesetzten Richtung stattfindenden subtrahiert, wird „durch eine gegenseitige Einwirkung der Körper nicht geändert“,

---

[1]) So namentlich auch bei Maxwell, Matter and motion, art. 55—58.

[2]) Newton-Wolfers, a. a. O., S. 40. Die obige Fig. 14 und die Bezeichnungen sind genau die von Newton gegebenen.

[3]) a. a. O., S. 35, Zusatz 3.

und er sieht dies als eine Folge aus dem dritten Bewegungsgesetz an. Er fügt aber hinzu, daß dies Ergebnis nicht auf den Stoß vollkommen elastischer Körper beschränkt sei. Er habe Versuche mit unvollkommen elastischen Körpern, z. B. mit Wollbällen, angestellt und gefunden, daß dann allerdings die Geschwindigkeit der Rückkehr zugleich mit der elastischen Kraft vermindert war, daß aber das Gesetz der gleichen Änderung der Bewegungsgröße bestehen blieb, während sich die Geschwindigkeit der Rückkehr zu der des Zusammentreffens wie 5 : 9 verhielt.

Aus diesen Versuchen läßt sich offenbar nur folgern, daß, **wenn** beim Zusammenstoß zweier Körper überhaupt eine elastische Einwirkung stattfindet, **dann** stets die Aktion der Reaktion gleich ist.

Wie aber, wenn die Körper beide vollkommen unelastisch vorausgesetzt werden? Dann müßte man, Newtons Gedankengange folgend, sagen, daß überhaupt weder Aktion noch Reaktion stattfindet, daß also beide gleich Null und nur in diesem Betracht allerdings auch noch einander gleich sind.

Stoßen zwei unelastische Körper von gleicher Masse mit gleichen Geschwindigkeiten gegeneinander, so verschwindet die Bewegungsgröße beider, und die ganze lebendige Kraft geht in Wärme (bzw. in Deformationsarbeit) über. Beide üben tatsächlich eine Einwirkung aufeinander aus, und doch ist die *actio* **im Newtonschen Sinne** ebenso wie die *reactio* gleich Null. Auch in diesem Fall des Stoßes aber ist das Newtonsche Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gültig, insofern die Summe der beiden Bewegungsgrößen, diese im Vektorsinn genommen, von Anfang an gleich Null ist; und es bleibt auch bestehen, wenn die beiden unelastischen Kugeln mit verschiedenen Geschwindigkeiten zusammenstoßen und nach dem Stoß mit gleichen Geschwindigkeiten weitergehen. (Vgl. Nr. 14.)

Es folgt hieraus: 1. **Das Gesetz von der konstanten (algebraischen) Summe der Bewegungsgrößen** ist ein umfassenderes Gesetz als das Gesetz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion, da es für alle Fälle der Bewegungsübertragung zwischen bewegten oder ruhenden Massen gültig ist; und 2. **das Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion** findet auf den unelastischen Stoß keine Anwendung, insofern es bei diesem keine Aktion und Reaktion in dem von Newton selbst definierten Sinne gibt.

Wir ziehen demnach aus Newtons eigener Darlegung den Schluß, daß das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz innerhalb der Mechanik nicht die allgemeine Gültigkeit zu haben scheint, die man ihm gemeinhin beilegt. Es besteht zu Recht für die Attraktion zwischen Massen bzw. Massenpunkten — obwohl es auch hier, wie Maxwell[1]) gezeigt hat, nicht als Erfahrungsaxiom, sondern als eine Ableitung aus dem ersten Newtonschen Gesetz anzusehen ist. Es gilt ferner, wie wiederum Maxwell besonders nachdrücklich betont hat, für alle Elastizitätsvorgänge, sowohl wenn es sich um den

[1]) Maxwell, a. a. O., Art. 58.

elastischen Stoß, als wenn es sich um elastischen Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug handelt.

In diese Kategorie gehören Wirkungen der folgenden Art: die Bewegung eines Bootes durch den Stoß eines Ruders oder durch die Umdrehung eines Schaufelrades, die Bewegung eines Eisenbahnzuges auf einer Schienenbahn u. dgl. mehr. Hier sind es die Spannungen in den kraftübertragenden Vorrichtungen, die die Rückwirkung auf den zu bewegenden Körper vermitteln. In dem letztgenannten Fall z. B. ist es die Spannung in den Speichen des Triebrades. Denkt man sich dieses zur Vereinfachung als Zahnrad ausgebildet, das über eine Zahnstange läuft, so wirkt die durch die Achse übertragene Triebkraft auf die Zähne des Rades und preßt sie gegen die Zähne der Zahnstange. Die Speichen des Zahnrades stellen die elastische Verbindung dar zwischen der Achse und der mit der Zahnstange fest verbundenen Erde; durch ihre elastische Deformation wird die Rückwirkung auf die Achse hervorgerufen. Die Erde ist bei dieser Rückwirkung als ruhend anzusehen, eine Übertragung der Bewegung auf den Erdkörper kann zunächst außer Betracht bleiben (man vgl. auch S. 42).

Nun beschränkt sich aber Newton in der Erläuterung zu seinem dritten Gesetz nicht auf solche Fälle. Es heißt dort vielmehr:

> „Jeder Gegenstand, der einen anderen drückt oder zieht, wird von „diesem ebenso stark gedrückt oder gezogen. Drückt jemand einen Stein „mit dem Finger, so wird dieser von dem Stein gedrückt. Zieht ein Pferd „einen an einem Seil befestigten Stein fort, so wird das erstere gleich stark „gegen den letzteren zurückgezogen, denn das nach beiden Seiten gespannte „Seil wird durch dasselbe Bestreben, schlaff zu werden, das Pferd gegen den „Stein und diesen gegen jenes drängen; es wird ebenso stark das Fort„schreiten des einen verhindern als das Fortschreiten des andern befördern. „Wenn irgendein Körper auf einen anderen stößt und die Bewegung des „letzteren irgendwie verändert, so wird ersterer in seiner eigenen Bewegung „dieselbe Änderung nach entgegengesetzter Richtung durch die Kraft des „anderen (wegen der Gleichheit des wechselseitigen Druckes) erleiden . . .“

Das letzte von diesen Beispielen ist bereits vorher erörtert, und es ist gezeigt worden, daß es von Newton ausdrücklich nur hinsichtlich der elastischen Wirkung und Gegenwirkung gemeint war, während es hier ohne diese Beschränkung erscheint. Inwiefern und ob die übrigen angeführten Beispiele unter das Gesetz sich unterordnen lasssen, wird noch genauer zu untersuchen sein.

In einem solchen umfassenderen Sinne aber, wie in der eben angeführten Newtonschen Erläuterung wird das „Gegenwirkungsprinzip“ auch in der neueren Physik durchweg gebraucht. Wenn Newtons Formulierung (S. 38) sich noch so deuten ließ, daß nur da, wo zwei Körper aufeinander wirken, das Prinzip gültig sei, so fordert die neuere Physik, daß überall, wo eine Aktion vorhanden sei, auch eine Reaktion auftrete, oder mit anderen Worten, daß alle Wirkungen als Wechselwirkungen aufzufassen seien. Höfler[1]) gibt dem Prinzip die nachstehende Fassung:

„Jede mechanische Einwirkung eines Punktes A auf einen anderen B ist begleitet von einer gleichgroßen Gegenwirkung des B auf A.“

Auch Höfler unterscheidet aber in der Erläuterung des Prinzips mit Recht zwei völlig verschiedene Fälle: A. Bei einer gespannten elastischen Feder, bei der Anziehung zwischen Magnet und Eisen, zwischen Stein und Erde hat man es mit völlig simultanen Wirkungen zu tun, derart, daß Aktion und Reaktion ohne weiteres mit einander vertauschbar sind. Es sind dies Beispiele einer echten Wechselwirkung.

Den zweiten Fall (B) erläutert Höfler durch folgendende Betrachtung:

Sehr häufig stellen wir uns vor, daß durch die Wirkung die Gegenwirkung erst hervorgerufen werde. So wenn eine Schnur an einem in einer massiven Mauer steckenden Haken befestigt ist, und wir in dem Maße, wie wir mit der Hand an der Schnur den Haken aus der Mauer herauszuziehen suchen, unsere Hand zur Mauer hingezogen empfinden. — Ebenso: Wenn ein Arbeiter einen Eisenbahnwagen zu verschieben hat und so unvorsichtig ist, seine Hand gegen eine herausragende scharfe Ecke oder einen Nagel wirken zu lassen, so empfindet er die Gegenwirkung des Wagens so, wie wenn dieser ihm die Spitze in die Hand drücken wollte. Auch der Wagen auf den festen Schienen „weckt“ durch seinen Druck nach abwärts in diesen einen Gegendruck nach aufwärts.

In den hier angeführten Beispielen, die den obigen Newtonschen koordiniert sind, handelt es sich nicht mehr um Beschreibung von Tatsachen, sondern um Deutung von solchen. Auch sind Aktion und Reaktion hier nicht mehr mit einander vertauschbar; da die *actio* als Ursache der *reactio* als Wirkung gegenübersteht. Grund genug, daran zu zweifeln, ob es zulässig ist, die Fälle A und B unter einem Prinzip zusammenzufassen.

Es läßt sich auch nicht aufrecht erhalten, daß schon aus dem Begriff der *actio* die Notwendigkeit einer *reactio* folge[2]). Interessant und lehrreich ist in dieser Hinsicht, daß Poisson das dritte Bewegungsgesetz nicht als den ersten beiden gleichwertig ansehen wollte[3]). In der 2. Auflage seiner Mechanik (1833) stellt er das Trägheitsprinzip und das Unabhängigkeitsprinzip (irrtümlicherweise) als Denknotwendigkeiten hin, bezeichnet dagegen das Prinzip der Wechselwirkung als einen nur durch Erfahrung erweisbaren Satz und tut dabei den bemerkenswerten Ausspruch:

---

[1]) Höfler, Physik, § 15. Der obige Wortlaut stellt wohl in einwandfreier Fassung den Standpunkt der Physik zur Zeit der Abfassung des Höflerschen Buches dar.

[2]) Von A. Höfler werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß auch bei der Reizempfindung, die das Licht im Auge hervorruft, eine actio ohne reactio vorliegt.

[3]) Hierauf hat Streintz, a. a. O., S. 133 hingewiesen.

„Wir können es a priori nicht als eine Unmöglichkeit betrachten, daß ein materieller Punkt m auf einen anderen m' wirke, ohne daß dieser wieder auf den ersten in entgegengesetztem Sinne und mit gleicher Intensität zurückwirkt.“

Wenn wir es also im vorliegenden Fall weder mit einer Erfahrungstatsache noch mit einer Denknotwendigkeit zu tun haben, so wird es sich empfehlen, zu untersuchen, ob nicht die angeführten Beispiele B sich schon auf Grund der Begriffe von Kraft, Masse und Beschleunigung ohne Aufstellung eines neuen Prinzips vollständig begreifen lassen.

Betrachten wir zunächst einen auf wagerechten Schienen ruhenden Eisenbahnwagen, den ein Arbeiter in Bewegung zu setzen sucht. Hier ist, wenn von der Reibung abgesehen wird, der von dem Arbeiter verspürte Widerstand sicher als bloßer Beharrungswiderstand anzusehen, also gemäß dem früher Gesagten durch den Begriff der Masse ausreichend gekennzeichnet. Werden dem einen Wagen noch mehrere andere hinzugefügt, so wird es dem Arbeiter immer schwerer werden, sie in Bewegung zu setzen, er wird ihnen schließlich nur eine verschwindend kleine Beschleunigung erteilen können. Werden die Wagen gar an der Unterlage befestigt gedacht, so wird es ihm nicht mehr möglich sein, sie in Bewegung zu setzen; aber der Widerstand, den er jetzt spürt, wird von dem vorhergehenden qualitativ nicht verschieden sein; nur ist die Masse, die in Bewegung zu setzen wäre, gleich der Masse des Erdkörpers, also so gut wie unendlich groß geworden.

In dem letzten Fall ist allerdings der Vorgang dadurch kompliziert, daß der den Druck oder Zug gegen die Wagen Ausübende gleichzeitig auch mit den Füßen gegen den Erdkörper drückt. Die Gesamtheit der Einwirkungen wird sich durch ein Kräftepaar darstellen lassen, dem wiederum die Masse des ganzen Erdkörpers als zu Bewegendes entgegensteht.

Um das Beispiel von der Schnur, mittels deren man an einem in einer Mauer befestigten Haken zieht, richtig zu verstehen, denke man sich zwischen zwei senkrechten, parallel zueinander stehenden Mauern eine elastische Feder ausgespannt. Diese wird auf die beiden Mauern gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zugkräfte ausüben. Betrachtet man die eine Zugkraft für sich, so würde diese dem Erdkörper eine gewisse verschwindend kleine Bewegung erteilen; da aber die andere Zugkraft eine ebenso große und entgegengesetzt gerichtete Bewegung hervorbringen würde, so heben die beiden Bewegungen sich auf. (Es sei hier wie auch im folgenden von der Verschiebbarkeit der Teile des Erdkörpers abgesehen und überdies das zu bewegende System als absolut starr vorausgesetzt. Werden die Verbindungen als elastisch angenommen, so schieben sich nur zwischen den die Kraft ausübenden Teil und die übrige zu bewegende Masse elastische Zwischenglieder ein, die an dem Effekt nichts Wesentliches ändern.)

In dem Fall nun, daß ein Mensch an einem in der Mauer befestigten Haken zieht, wirkt er mit seiner Muskelkraft gegen den Erdkörper an zwei Stellen, sowohl an dem Haken als an der Stelle der Erdoberfläche, die ihm als Stützpunkt dient. Da keine von beiden Stellen nachgibt, so empfindet er an beiden Stellen einen Widerstand, der auch hier wieder nur als Trägheitswiderstand einer sehr großen in Bewegung zu setzenden Masse zu deuten ist. Daß man seine Hand zur Mauer hingezogen empfände, ist eine leicht begreifliche Selbsttäuschung, die durch Zwischenschaltung einer elastischen Schnur noch begünstigt wird. Denn im letzteren Fall findet tatsächlich eine elastische Gegenwirkung der gespannten Schnur gegen die Hand statt, und es kombiniert sich eine wirkliche Reaktion mit der bloß vermeintlichen der festen Wand.

Ähnlich wie in dem eben betrachteten Fall verhält es sich mit den von Newton zugunsten seines dritten Gesetzes angeführten Beispiel: „Drückt jemand einen Stein mit dem Finger, so wird auch dieser von dem Stein gedrückt.“ Dies ist eine petitio principii, die auf einer psychologischen Täuschung beruht. Da wir ein Druckgefühl in der Hand spüren, glauben wir einen von außen wirkenden Druck als Ursache annehmen zu müssen und übersehen dabei, daß die Zusammenpressung der an den Stein angrenzenden Teile der Hand nicht von dem Stein, sondern allein von der Muskelkraft unseres Körpers herrührt.

Das gleiche gilt von dem ferneren von Höfler angegebenen Beispiel: Der Arbeiter glaubt eine Wirkung der scharfen Wagenecke zu empfinden, in Wahrheit ist er es selber, der die Hand gegen die scharfe Wagenecke drückt und sie dadurch zusammenpreßt.

Endlich der „Wagen auf den festen Schienen“, der durch seinen Druck nach abwärts in diesen einen Gegendruck nach aufwärts „weckt“. Hier drücken in Wahrheit der schwere Wagen und der Erdkörper vermöge der Gravitation gegeneinander, es liegt also nicht eine erst „hervorgerufene“ Gegenwirkung, sondern eine simultane Aktion und Reaktion vor, die in die oben mit A bezeichnete Kategorie gehört. Nimmt man aber noch elastische Kräfte in den aneinander grenzenden Teilen des Wagens und der Erdoberfläche hinzu, so wird dadurch doch, ebenso wie im früheren Beispiel, an dem Grundcharakter des Vorgangs nichts geändert. Ebenso verhält sich die Sache bei einem auf eine horizontale Tischplatte gesetzten Gewichtstück.

Unter den Newtonschen Beispielen (S. 40) befindet sich auch noch das Pferd, das einen Stein an einem Seil fortzieht und angeblich gleich stark gegen den Stein zurückgezogen wird. Dieser Fall ist insofern von den vorigen verschieden, als es sich um eine vermeintliche Aktion und Reaktion während der Bewegung handelt. Aber auch hier spielt das elastische Seil nur die Rolle eines Übertragers der Bewegung von dem bewegten Körper (dem Pferde) auf den zu bewegenden (den Stein); eine Reaktion des Steines selbst gegen das ziehende Pferd wird dadurch nicht erwiesen[1]).

---

[1]) Ein von K. T. Fischer zur Demonstration der Gleichheit von actio und reactio beschriebener, auch von Grimsehl in seinem Lehrbuch angeführter Versuch betrifft weniger

Wir kommen hiernach zu dem Schluß, daß keines der angeführten Beispiele es rechtfertigt, den Körpern eine eigentümliche Reaktionskraft zuzuschreiben, die jedesmal aufträte, wenn auf die Körper eine Kraft einwirkt.

Es bleibt nunmehr nur noch das von Newton ebenfalls angezogene Beispiel des Stoßes, und insbesondere des unelastischen Stoßes, zu betrachten übrig.

14. Der unelastische Stoß und das Problem der Bewegungsübertragung. In der Mechanik pflegt man von jeher die Betrachtung des unelastischen Stoßes von der des elastischen zu trennen. Sicher ist, daß es in Wirklichkeit weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Stoffe gibt, daß es sich also bei beiden um fingierte Grenzfälle handelt. Man kann die Frage aufwerfen, ob es überhaupt berechtigt sei, solche Grenzfälle zu betrachten, und ob daraus ein Schluß auf das wirkliche Geschehen zulässig sei. Darauf ist Folgendes zu erwidern. Es ist ein anerkanntes Verfahren der Forschung, die Teilbedingungen eines Vorgangs festzustellen und zu untersuchen, welcher Anteil an dem Zustandekommen der Erscheinung jeder einzelnen Teilbedingung zukommt. Es ist also auch bei dem oben (S. 38) betrachteten, von Newton experimentell untersuchten Beispiel der unvollkommen elastischen Kugeln eine Zerlegung des Vorgangs vorzunehmen.

Wir knüpfen wiederum an dies Beispiel an und setzen der Einfachheit halber voraus, daß die Kugeln aus gleicher Höhe gegeneinander fallen. Nun entspringt der Gesamterfolg aus der Gesamtbeschaffenheit der Bedingungen; der in elastischen Wirkungen bestehende Anteil des Erfolges entspringt den elastischen Eigenschaften der zusammentreffenden Körper; also muß der Rest des Erfolges auf die unelastischen Eigenschaften zurückgeführt werden. Der „Rest“ aber besteht in den dauernden Deformationen und in den Wärmewirkungen; diese Wirkungen müssen rein hervortreten, wenn man den Stoß als völlig unelastischen behandelt[1]).

In der heutigen Mechanik werden auch die Gesetze des unelastischen Stoßes mit Hilfe des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung

---

das Gesetz der Wirkung und Gegenwirkung als die Übertragung der Bewegung von einem Körper auf einen andern durch Vermittlung der Reibung, gehört demnach unter die in Nr. 14 und 15 näher zu betrachtenden Erscheinungen [1909].

[1]) Daß es übrigens wirklich Körper gibt, die in sehr hohem Grade den Voraussetzungen des unelastischen Stoßes entsprechen, zeigt besonders ein Versuch von Whiting zur Bestimmung des mechanischen Äquivalents der Wärme. (Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht Bd. XVII, 228; 1904.) Eine Pappröhre von etwa 1 m Länge, deren Enden durch Korke verschlossen sind, läßt man von einer größeren Menge Bleischrot etwa hundertmal durchfallen und mißt die eingetretene Temperaturerhöhung des Bleies. Unter Ausschaltung einiger Fehlerquellen erhält man hierdurch das mechanische Äquivalent der Wärme zu 4,2 Joule mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa 2,5% genau. Hahn, Handbuch für psysikalische Schülerübungen, S. 254.

abgeleitet. Man legt in der Regel der Betrachtung den Fall zugrunde, daß eine schnellere Kugel auf eine vor ihr in derselben Richtung laufende stößt. Die folgende elementare Herleitung ist der Physik von A. Höfler[1]) entnommen.

„Stoßen zwei Körper (die hier als Massenpunkte aufgefaßt werden) von m_1 und m_2 Gramm Masse mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 aneinander, indem sie sich längs derselben Geraden in derselben Richtung so bewegen, daß $c_1 < c_2$, so suchen sie ihre Geschwindigkeiten auszugleichen, bis ein Mittelwert erreicht ist, dessen Größe

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

der Gleichung

$$m_1 (c - c_1) = m_2 (c_2 - c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

entspricht. Hier besagt (2): Der Zuwachs an Bewegungsgröße bei dem einen Körper ist gleich der Abnahme an Bewegungsgröße beim andern. Diese Zunahme bzw. Abnahme von Geschwindigkeit des einen und anderen Körpers erfolgt gemäß dem Gegenwirkungsprinzip, vermöge dessen in jedem Zeitpunkte die Größe des Druckes, den der eine Körper vom anderen erfährt, dem Gegendrucke gleich ist.

Denken wir uns hiernach die Zeit der gegenseitigen Einwirkung beider Massen zerlegt in die sehr kurzen Zeitteilchen $\tau, \tau', \tau'', \ldots$, so können wir die Größe des Druckes und Gegendruckes als während dieser Zeiten konstant annehmen, und es erhalten daher z. B. während des Zeitteilchens τ die beiden Massen Beschleunigungen γ_1 und γ_2 gemäß der Gleichung $m_1 \gamma_1 = m_2 \gamma_2$, ebenso im zweiten Zeitteilchen gemäß $m_1 \gamma'_1 = m_2 \gamma'_2$ usf. Es ist dann die gesamte

Geschwindigkeitszunahme für m_1 folgende: $c - c_1 = \gamma_1 \tau + \gamma_1' \tau' + \gamma_1'' \tau'' + \ldots$

daher: $m_1 (c - c_1) = m_1 \gamma_1 \cdot \tau + m_1 \gamma_1' \cdot \tau' + m_1 \gamma_1'' \cdot \tau'' + \ldots$

Geschwindigkeitsabnahme für m_2 folgende: $c_2 - c = \gamma_2 \tau + \gamma_2' \tau' + \gamma_2'' \tau'' + \ldots$

daher: $m_2 (c_2 - c) = m_2 \gamma_2 \cdot \tau + m_2 \gamma_2' \cdot \tau' + m_2 \gamma_2'' \cdot \tau'' + \ldots$

Da die rechten Seiten dieser Gleichungen gliedweise gleich sind, so ist die Gleichung (2), also auch (1), aus der Grundgleichung der Dynamik $k = m b$ abgeleitet.“

In der Schreibweise der Infinitesimalrechnung würde die Ableitung folgende Form annehmen. Die zweite Kugel übt auf die erste (langsamere) eine Kraft aus, deren Größe aus der identischen Gleichung $m_1 dv_1 = P dt$ folgt. Durch Integration erhält man hieraus:

$$|1) \quad \ldots \ldots \quad m_1 c - m_1 c_1 = \int P dt .$$

Nimmt man nun das Gesetz der gleichen Aktion und Reaktion für diesen Fall als gültig an und setzt demnach für jedes Zeitelement des Zu-

[1]) Höfler, a. a. O., S. 57—58.

sammenstoßes die rückwirkende Kraft der wirkenden Kraft P gleich, so folgt für die zweite Kugel: $m_2\,dv_2 = P\,dt$ und

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad m_2 c_2 - m_2 c = \int P\,dt\,.$$

Da die rechten Seiten von (1) und (2) einander gleich sind, so folgt schließlich

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = (m_1 + m_2)\,c.$$

Es fragt sich nun, ob durch die Übereinstimmung dieses Resultats mit der Erfahrung die Gültigkeit des Gesetzes der Aktion und Reaktion auch für den hier betrachteten Fall erwiesen ist, mit andern Worten, ob die Annahme dieses Gesetzes für die Herleitung der Stoßgleichung unumgänglich erforderlich ist.

Man hat wohl gemeint, zur Erklärung der Vorgänge beim unelastischen Stoß abstoßende Kräfte der Moleküle annehmen zu sollen. Aber wie ist dann diese Wirkung der Moleküle beim unelastischen Stoß von der Wirkung der Moleküle beim elastischen Stoß verschieden? Letztere beginnt ja auch erst in der zweiten Periode des Stoßes, nachdem in der ersten Periode bereits die Ausgleichung der Geschwindigkeiten so erfolgt ist wie beim unelastischen Stoß. Und wenn gleichwohl die Annahme jener elastischen Kräfte in der ersten Periode des Stoßes haltbar wäre, würde sie nicht in ein hypothetisches „Zwischenreich physikalischer Realitäten“[1]) führen, das streng geschieden bleiben sollte von einer auf die Beschreibung der Bewegungsvorgänge (im weitesten Sinne) gerichteten Mechanik?

Wir finden daher auch in neueren Darstellungen des Stoßes, z. B. bei Föppl[2]) in der „ersten“ Stoßperiode nur eine „Formänderung“ angenommen, die so lange dauert, bis die Relativgeschwindigkeit beider Körper zu Null geworden ist. In der „zweiten“ Periode des Stoßes erst muß unterschieden werden, ob die Körper vollkommen plastisch oder elastisch sind. Bei ersteren ist der Stoß mit der ersten Stoßperiode beendigt, bei den letzteren nur treten elastische Kräfte auf, die die Formänderung ganz oder zum Teil wieder rückgängig machen.

Kehren wir aber zur obigen Herleitung zurück, so dürfte es wohl berechtigt sein, zu untersuchen, ob nicht auch im vorliegenden Fall, ebenso wie beim Beharrungswiderstand (S. 16), bloße Begriffsgebilde willkürlich in den Vorgang hineingelegt worden sind.

Gegen die obige Ableitung der Stoßformel ist besonders einzuwenden, daß die Annahme eines gleichen Druckes zwischen den beiden Körpern der Tatsache widerspricht, daß die Übertragung eines Teils der Bewegung von dem ersten auf den zweiten gerade durch den Druck, den der erste gegen den zweiten ausübt, hervorgebracht zu denken ist.

---

[1]) Höfler, Zur gegenwärtigen Naturphilosophie, S. 98.

[2]) Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik I (3. Aufl.), S. 317 ff.

Wenn Druck und Gegendruck einander während des ganzen Vorgangs entgegengesetzt gleich sind und also einander aufheben, so bleibt unbegreiflich, wie denn überhaupt die Übertragung der Bewegung zustande kommt. Bestehen bleibt dann nur ein Rechenschematismus, der zu einem richtigen Resultat führt, dessen gedankliche Unterlage aber vielleicht eine ganz andere ist als die bei Heranziehung des dritten Newtonschen Gesetzes sich ergebende

Es läßt sich nun in der Tat unter Beibehaltung der übrigen Annahmen, auch *ohne* Zuhilfenahme des Prinzips der Gleichheit von Aktion und Reaktion das Stoßgesetz in folgender Weise ableiten.

Wir fassen wieder den Fall ins Auge, daß ein schnellerer Körper A (mit der Masse m_1 und der Geschwindigkeit c_1) auf einen langsameren, in gleicher Richtung vor ihm herlaufenden B (mit der Masse m_2 und der Geschwindigkeit c_2) trifft. In dem Moment, wo dies geschieht, wird die Bewegung von A gehemmt, weil die Masse m_2 nicht plötzlich die neue Geschwindigkeit annehmen kann. Es wird demnach von A auf B ein Druck ausgeübt, der in jedem Moment während der ganzen Dauer des Stoßes gemessen wird durch $m_1 \frac{dv_1}{dt}$, wenn v_1 die veränderliche Geschwindigkeit von A während des Stoßes bedeutet. Andrerseits übt aber dieser Druck auf B eine beschleunigende Wirkung aus, die gemessen wird durch $m_2 \frac{dv_2}{dt}$, worin v_2 die veränderliche Geschwindigkeit von B während des Stoßes bedeutet. Da es *derselbe* Druck ist, der einmal durch $m_1 \frac{dv_1}{dt}$, das anderemal durch $m_2 \frac{dv_2}{dt}$ gemessen wird, so ergibt sich:

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_2 \frac{dv_2}{dt}$$

und daraus die Stoßgleichung

$$m_1 (c_1 - c) = m_2 (c - c_2)$$

Das Rätsel der Bewegungsübertragung von einer Masse auf eine andere erscheint hierdurch seiner Lösung beträchtlich näher geführt und die Beschreibung des Vorgangs wesentlich vereinfacht. Es genügt dafür die Grundeigenschaft der Masse, unter der Einwirkung einer Druckkraft eine genau bestimmte Beschleunigung anzunehmen, und die damit zusammenhängende, ebenfalls schon im Trägheitsbegriff enthaltene Eigenschaft der Masse, daß ihre Geschwindigkeit nicht plötzlich eine Änderung von endlichem Betrage erleiden kann.

Das Prinzip, das der Betrachtung des Stoßes zugrunde gelegt werden kann, ist demnach nichts weiter als ein Korollar zum Trägheitsgesetz; es sagt aus:

Wenn zwei Körper von endlichem Geschwindigkeitsunterschied aufeinanderstoßen, so wird mindestens die Be-

wegung des einen der beiden Körper gehemmt, und es tritt ein Druck des gehemmten Körpers gegen den andern Körper auf.

Für den Fall, daß der zweite Körper sich vor dem Stoß in Ruhe befand, gilt offenbar das gleiche. Sind beide Körper vor dem Stoß in entgegengesetzter Richtung bewegt, so werden beide gehemmt, und beide üben daher auch einen Druck gegen einander aus. In diesem Fall kann man von zwei Aktionen sprechen, es ist aber ebensowenig wie in den andern Fällen nötig, überdies noch zwei Reaktionen anzunehmen. —

Auch die so modifizierte Herleitung der Stoßformel ist, wie schon angedeutet, noch nicht als ausreichend zur vollständigen Erklärung des Vorgangs anzusehen. Denn während die Geschwindigkeit c_1 des stoßenden Körpers sich um dv vermindert, müßte der Körper ja noch mit nahezu derselben Geschwindigkeit weitergehen, während ihm doch der zweite Körper entgegensteht. Offenbar ist an dieser Stelle der Ursprung der beim Stoß auftretenden Deformations- und Wärmewirkung zu suchen. Die gegebene Herleitung aber läßt ebensowenig wie die frühere erkennen, wie die Umwandlung von lebendiger Kraft in Deformationsarbeit bzw. Wärme beim Stoß vor sich geht. Nur rein rechnungsmäßig ergibt sich[1]), daß ein Betrag an lebendiger Kraft verloren geht, der dargestellt wird durch:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{m_1 + m_2} .$$

Diese Größe ist, wie hervorgehoben zu werden verdient, nur von der relativen Geschwindigkeit der beiden aufeinander stoßenden Körper abhängig.

Leibniz scheint der erste zu sein, der den Gedanken ausgesprochen hat, daß die fortschreitende Bewegung der Massen beim Stoß auf die kleinsten Teile übergeht; es sei nur als ob man großes Geld in kleines umwechsle[2]). Diese Leibnizsche Idee der Umwandlung von Massenbewegung in Molekularbewegung hat Newton noch gefehlt. Newton findet sich mit dem Verlust an Bewegung, der beim unvollkommen elastischen Stoß eintritt, ab, indem er es als eine Tatsache ansieht, daß alle Bewegung in der Welt durch die Widerstände nach und nach zum Erlöschen gebracht werden würde, wenn nicht aktive Prinzipien (wie die „Ursache der Schwere") vorhanden wären.

Gehen wir nun auf die angedeutete Verwandlung näher ein, so zeigt sich, daß auch hierfür die Annahme einer besonderen Reaktionskraft auf seiten des gestoßenen Körpers unnötig ist. Wir betrachten zunächst den Stoß eines unelastischen, aber plastischen Körpers gegen eine ebenfalls unelastische feste

---

[1]) Z. B. bei Höfler, Physik, Leitaufgabe 129.

[2]) Leibniz, Recueil de diverses Pièces sur la Philosophie, Amsterdam 1720, S. 135; zitiert bei Rosenberger, Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien, Leipzig 1895, S. 411. Ferner Essai de dynamique etc., Opera VI, 231, zit. bei Dühring, Krit. Gesch. d. Prinz. d. Mech. (4) 229.

Wand. Da die Wand (wegen ihrer Verbindung mit der Erde) als ein Körper von unendlich großer Masse angesehen werden kann, so ist die Geschwindigkeit sowohl des auftreffenden Körpers wie der Wand nach dem Stoß gleich Null, es geht also die gesamte lebendige Kraft in Deformationsarbeit bzw. Wärme über. Sobald nämlich die vordersten Teile des Körpers die Wand erreicht haben, und durch diese am weiteren Vordringen gehindert werden, üben sie auf die Wand Druckkräfte aus. Diese aber bewirken zufolge der vorausgesetzten Verschiebbarkeit der kleinsten Teile eine Deformationsarbeit sowohl an dem stoßenden Körper als an der festen Wand. Im Zusammenhang damit treten Wärmewirkungen und daneben noch wellenförmige Ausbreitungen von Erschütterungszuständen auf, so daß der ganze Vorgang überaus verwickelt wird. Das bestimmende Phänomen aber ist das Auftreten von Druckkräften, und diese rühren ausschließlich von dem stoßenden Körper her. Wollte man noch eine besondere Widerstandskraft der Wand annehmen, so würde hierdurch freilich die Aufhebung der Bewegung im alten Newtonschen Sinne auf das statische Gleichgewicht von Kräften zurückgeführt werden, aber die Umwandlung der Bewegungsenergie in andere Energieformen würde doch unerklärt bleiben, sofern nicht noch ein Erfahrungsprinzip hinzugefügt wird. Bedarf es aber doch noch eines solchen, so wird die Bezugnahme auf eine besondere Widerstandskraft der Wand überflüssig werden.

Das erwähnte Erfahrungsprinzip ergibt sich in allgemeiner Form, wenn wir den Stoß zweier bewegter Körper gegen einander in Betracht ziehen. In diesem Falle üben, wie oben schon bemerkt, beide Körper Druckkräfte gegen einander aus, es findet in beiden eine Verwandlung von lebendiger Kraft in Deformationsarbeit bzw. Wärme statt, und es ist die Größe dieser Umwandlungsarbeit, wie bereits angegeben, unabhängig von der Größe der absoluten Geschwindigkeiten, vielmehr nur abhängig von den Massen der beiden Körper und von ihrer relativen Geschwindigkeit. Das hierin enthaltene Erfahrungsprinzip hat eine gewisse Verwandtschaft mit dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre und läßt sich in folgender Form aussprechen:

> Zwischen zwei unelastischen Körpern von endlicher Gechwindigkeitsdifferenz kann keine Bewegungsübertragung (bzw. Energieübertragung) stattfinden, ohne daß gleichzeitig ein von der relativen Geschwindigkeit beider Körper abhängiger Teil ihrer lebendigen Kraft in Deformationsarbeit bzw. Wärme übergeht.

(Eine weitere Beziehung zur Wärmelehre ergibt sich, wenn die Betrachtung auf teilweise oder vollkommen elastische Körper ausgedehnt wird. Auch beim Stoß vollkommen elastischer Körper findet eine Umwandlung von kinetischer Energie in Deformationsarbeit in dem vorher angegebenen Betrage statt; aber diese Verwandlung ist umkehrbar und geht unter der gemachten Voraussetzung wieder vollständig in kinetische Energie zurück. Bei unvollkommen elastischen Körpern endlich ist die Verwandlung nur zum Teil umkehrbar. Die Umkehrbarkeit beruht eben auf dem Vorhandensein von Elastizitätskräften, die bei dem nicht umkehrbaren Teil der Verwandlung fehlen.) —

Von besonderem Interesse ist der Fall, in dem die gesamte Bewegungsenergie der beiden Körper beim Zusammenstoß verschwindet. Dies geschieht, wenn die resultierende Geschwindigkeit gleich Null wird, oder, wie aus der Stoßformel hervorgeht, wenn $m_1 v_1 = - m_2 v_2$ wird.

Mach hat überdies gezeigt, daß man diesen besonderen Fall des Stoßgesetzes herleiten kann, ohne das Prinzip von Aktion und Reaktion zu Hilfe zu nehmen[1]). Und es gelingt leicht, von diesem speziellen Fall zu der allgemeinen Form des Stoßgesetzes überzugehen.

Erteilt man nämlich dem System der beiden Körper noch eine gemeinsame Geschwindigkeit x, so muß gemäß dem Prinzip der Relativität der Bewegung der Vorgang selbst unverändert bleiben, d. h. immer noch müssen die Bewegungsgrößen $m_1 c_1$ und $m_2 c_2$ einander aufheben.

Es sei also:

$$c_1 = v_1 + x, \qquad c_2 = v_2 + x.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der Bewegungsgrößen ein, so erhält man:

$$m_1 (c_1 - x) = - m_2 (c_2 - x),$$

und daraus die Stoßgleichung:

$$x = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Es seien endlich umgekehrt zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2, den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 gegeben. Dann werden sich stets zwei neue Geschwindigkeiten v_1 und v_2 so bestimmen lassen, daß:

$$c_1 = v_1 + x \qquad c_2 = v_2 + x$$

und:

$$m_1 v_1 = - m_2 v_2$$

wird. Die Bewegung läßt sich also zerlegen in einen Teil von der Beschaffenheit, daß die entsprechenden Bewegungsgrößen einander aufheben, und in einen anderen Teil, der beiden bewegten Körpern gemeinsam ist.

Durch die drei Gleichungen sind die Werte von v_1, v_2, x eindeutig bestimmt, und durch Elimination von v_1 und v_2 ergibt sich wiederum die Stoßgleichung:

$$x = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Es zeigt sich also, daß sich aus dem Grundphänomen der Aufhebung entgegengesetzt gleicher Bewegungsgrößen die Gesetze des unelastischen

[1]) E. Mach, Mechanik (4) 349 ff.

Stoßes ableiten lassen, ohne daß eine Nötigung zur Annahme einer besonderen Reaktionskraft vorhanden ist. —

Wir kehren nun zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurück. Die am Schluß von Nr. 13 angeführten Beispiele, so der Druck des Steins gegen die Unterlage, sind vom Stoß nur unterschieden durch die längere Dauer der Einwirkung. Beiden Erscheinungen gemeinsam ist die Verwandlung von Beschleunigung in Druck, oder anders ausgedrückt: die Identität von aufgehobener Beschleunigung und von Druck; dabei macht es nur hinsichtlich der Begleitvorgänge einen Unterschied, daß es im einen Fall eine erst anhebende (virtuelle) Beschleunigung ist, die aufgehoben wird, im andern Fall eine aktuelle Geschwindigkeitsänderung ins Spiel kommt; infolge davon tritt im zweiten Fall eine Verwandlung von kinetischer Energie auf, im ersten nicht. In der Wesensgleichheit beider Vorgänge aber liegt eine weitere Bestätigung dafür, daß auch bei dem Druck der Hand gegen einen Stein keine Reaktionskraft des letzteren in Wirksamkeit tritt, sondern daß der Vorgang aus den bekannten Eigenschaften bewegter und unbewegter Massen seine zureichende Erklärung findet.

Wir erinnern uns nun noch einmal an jene Schwierigkeit, der Heinrich Hertz mit den folgenden klaren Worten Ausdruck gegeben hat (vgl. das Vorwort):

> „Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, daß die Kräfte stets zwei Körper verbinden und ebensogut vom ersten zum zweiten wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz, und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein geringes verschieden. Dieser geringe Unterschied reicht aber vielleicht aus, um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiel zum Ausbruch kamen.“

Wir finden nunmehr die Lösung dieser Schwierigkeit darin, daß das dritte Gesetz nicht die Allgemeingültigkeit beanspruchen kann wie die ersten beiden, und daß man bisher allzu gewaltsam verfahren ist, wenn man dem Schema zu liebe auch die Einwirkung einer Kraft auf eine Masse (gemäß dem zweiten Gesetz) oder den Stoß zweier unelastischer Körper aufeinander auf das dritte Gesetz von der Aktion und Reaktion zurückzuführen gesucht hat. Es hat sich aber auch weiterhin die Voraussicht bestätigt, die Heinrich Hertz mit außerordentlichem Scharfblick ausgesprochen hat:

> „Wir sind selbst der Überzeugung, daß die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann.“

In dem hier ausgesprochenen Sinn glaubt der Verfasser die Erörterungen dieses Abschnitts als Beiträge zu einer Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze bezeichnen zu dürfen. Als fundamentale Gesetze für die Bewegung der Körper bleiben danach bestehen:

1. Das Beharrungsgesetz in der modifizierten, S. 32 angegebenen Form.
2. Das Gesetz für den Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung, das nicht als eine bloße Definition, sondern als ein der Erfahrung entnommenes Gesetz von uneingeschränkter Gültigkeit anzusehen ist.
3. Das Unabhängigkeitsgesetz, das an die Stelle des Gesetzes der Aktion und Reaktion zu treten hätte, und demzufolge die durch eine Kraft an einem Massenpunkte hervorgebrachte Beschleunigung unabhängig ist von dem jeweilig schon vorhandenen Bewegungszustande des Punktes[1]).

15. Bewegungshindernisse. Krummlinige Bewegung längs einer festen Wand. Wir werden nun auch die am Schlusse von Nr. 7 aufgeworfene Frage, ob Widerstände bewegende Kräfte sind, in verneinendem Sinne entscheiden. Widerstände sind vielmehr stets als mit Massen gleichwertig zu erachten. Und auch die gelegentlich des Beharrungsgesetzes in Betracht gekommenen Bewegungshindernisse schließen sich hinsichtlich ihrer Wirkung eng an den unelastischen Stoß an. Beim Luftwiderstand wird ein Teil der Bewegung von einem bewegten auf einen ruhenden Körper übertragen, weswegen sich z. B. beim Pendel der Luftwiderstand wie eine Vermehrung der Masse des Pendelkörpers in Rechnung setzen läßt. Bei der Reibung wird ebenso wie bei einem schiefen Stoß ein Teil der Bewegungsenergie in Deformationsarbeit oder Wärme übergeführt. Die Verminderung der Geschwindigkeit, die im einen wie im andern Falle eintritt, erklärt sich ausreichend aus den Gesetzen der Bewegungsübertragung von einer Masse auf eine andere, ohne daß es einer besonderen Kraft im Newtonschen Sinn bedürfte. Man hat zwar von einer bewegenden Kraft der Reibung gesprochen, indessen erscheint bei genauerem Zusehen das Mitnehmen durch die Reibung nur als eine Form derselben Bewegungsübertragung wie beim unelastischen Stoß.

Durch dieses Ergebnis wird überdies auch die Fassung gerechtfertigt, die oben (S. 32) dem Beharrungsgesetz gegeben worden ist.

Aus dem Bisherigen ergibt sich endlich, daß auch bei der Bewegung eines materiellen Punktes längs einer gekrümmten unelastischen Wand keine Reaktionskraft der Wand anzunehmen ist. Nur vermöge ihrer Eigenschaft als unbewegliche Masse beeinflußt die Wand den Bewegungsvorgang, indem sie eine vertikal zu ihr gerichtete Bewegungkomponente aufhebt. Damit ist die in Nr. 8 aufgeworfene Frage beantwortet, und es ist für diesen

[1]) Höflers Physik, S. 49.

Fall das Auftreten einer auch nur sekundären Zentripetalkraft endgültig verneint. Nur im uneigentlichen Sinn kann man hier von einer Zentripetalkraft sprechen, indem man diese als eine solche Kraft einführt, die den Einfluß der festen Wand ersetzt. Diese Zentripetalkraft wäre also gemäß Nr. 12 bloß eine **substituierte Kraft.**

Ist dagegen die Wand elastisch, so wird infolge des von dem bewegten Körper ausgeübten Druckes ein Reaktionsdruck der Wand ins Spiel treten. Wie schon in Nr. 8 gezeigt, wird bei vollkommener Elastizität der Reaktionsdruck dem Drucke gleich sein; man kann den Vorgang dann so auffassen, als träte beständig zu den beiden Komponenten der Geschwindigkeit (also zu dieser selber) der durch die eine von ihnen hervorgerufene Reaktionsdruck der Wand hinzu und bewirke die beständige Ablenkung von der geraden Richtung, spiele also die Rolle einer Zentripetalkraft. Wir haben dann in der Tat einen Vorgang, der auch hinsichtlich des Kräftespiels völlig der freien Zentralbewegung entspricht. Nur daß die Zentripetalkraft hier eine sekundäre, durch die Bewegung erst hervorgerufene ist. Wir wollen diese sekundäre Kraft künftig als **induzierte Kraft** bezeichnen.

Mit dem bewegten Körper schreitet an der elastischen Wand ein Spannungszustand entlang (vgl. Nr. 8). Es wird zwar mit der elastischen Spannung zugleich eine (vorübergehende oder zum Teil bleibende) Deformation Hand in Hand gehn; aber diese wird bei gleichmäßiger Beschaffenheit und gleicher Krümmung der Bahn überall gleich groß sein, und der Körper wird in einem Kreise umlaufen, dessen Umfang nur um ein geringes vergrößert ist. —

Über die Bewegung eines an einem Faden in Umschwung versetzten Körpers wird erst in Nr. 22 Näheres dargelegt werden.

IV.

Die Zentrifugalkraft an rotierenden Körpern.

16. Übergang. Wir denken uns wieder eine Kugel mit einer gewissen Geschwindigkeit von tangentialer Richtung an die Wand des früher (Nr. 8) angenommenen zylindrischen Gefäßes gebracht, nunmehr aber auch das Gefäß mit genau gleicher Geschwindigkeit gedreht. Dann wird (nach Eintritt des stationären Zustandes) die Kugel stets an derselben Stelle der Wand bleiben, und es wird auch auf diesen Fall die Poissonsche Betrachtung Anwendung finden. Wir gelangen so zur Einsicht in das Verhalten der Teile eines rotierenden Körpers gegen einander.

Auch hier ist also eine Zerlegung der Geschwindigkeit vorzunehmen, und auch hier ist der von der Komponente $v \sin \delta$ herrührende, nach außen gerichtete Druck das Primäre, der Gegendruck der Wand, sofern diese vollkommen elastisch ist, das Sekundäre.

Denken wir uns endlich die Kugel mit der Wand fest verbunden (also als einen Teil der Wand) und das Ganze in Rotation versetzt, so erhalten wir den bei Betrachtungen über die Schwungkraft gewöhnlich zugrunde gelegten Fall eines rotierenden Körpers.

Nicht wesentlich verschieden hiervon ist der an einem Faden im Kreise umlaufende Körper, wenn wir voraussetzen, daß diesem seine Geschwindigkeit nicht durch einen Zug der Hand am Faden, sondern durch einen einmaligen Stoß in tangentialer Richtung erteilt sei, und daß von der Schwere des Körpers abgesehen werde.

17. Der am Faden rotierende Massenpunkt. Wir betrachten gemäß den eben gemachten Voraussetzungen einen Körper, dessen Volumen so klein sei, daß wir ihn als einen Massenpunkt ansehen und allen seinen Teilen die gleiche Geschwindigkeit zuschreiben können.

Auch für ihn gilt, da die Bewegung keine freie ist, die Poissonsche Zerlegung. Wieder wird $v \sin \delta$ durch den Widerstand des Fadens aufgehoben. Wäre der Faden eine unelastische starre Linie, so würde diese Komponente einen einseitigen Zug in der Richtung nach außen, d. h. einen zentrifugalen Zug hervorbringen, und dieser Zug würde durch die starre Verbindung auf die Achse übertragen werden, die ihrerseits durch ihre feste Verbindung mit dem Erdkörper dem Zug eine unendlich große Masse entgegensetzt. Ist der Faden elastisch, so bleibt der Zug und die Wirkung auf die Achse dieselbe, und der Faden nimmt überdies einen Spannungszustand an, der auf das Auftreten einer induzierten elastischen Gegenkraft (Nr. 15) zurückgeführt werden könnte. Es verdient aber Beachtung, daß eine solche elastische Gegenkraft kein notwendiges Zubehör zu dem Vorgang ist; sie folgt nicht aus der Rotation selbst, sondern aus der hinzukommenden und für das Verständnis wie für das Zustandekommen des Vorgangs nicht unbedingt erforderlichen Voraussetzung einer elastischen Verbindung zwischen dem Körper und der Achse. Das elastische System ist auch in diesem Falle ein Zwischenglied, das an dem Hauptvorgang, der Wirkung des im Kreise bewegten Körpers auf die Achse, nichts ändert.

Auf die Voraussetzung einer solchen elastischen Verbindung und der damit gegebenen Reaktionskraft — die als Zentripetalkraft (vgl. Nr. 5) eingeführt wird — ist aber die heut allgemein übliche Behandlung des Rotationsvorgangs gegründet. Und wir können nun auch den Irrtum klar durchschauen, dem man hierbei anheimzufallen pflegt. Es bezeichne (Fig. 15) v die tangentiale Geschwindigkeit, a und b ihre Komponenten in Richtung des nächsten Bahnelements und senkrecht dazu, c die von einer gleichzeitig auftretenden elastischen Reaktionskraft hervorgerufene Beschleunigung, so heben sich b und c auf, und der

Körper bewegt sich allein vermöge der Komponente a weiter. Sieht man den Vorgang aber so an, als ob eine von selbst auftretende Zentripetalkraft mit der ursprünglichen tangentialen Geschwindigkeit v zusammenwirkte, so entfällt jede Möglichkeit, nun noch eine eigene Zentrifugalkraft in der Mechanik des Vorgangs nachzuweisen. Daher das Wort von der „sogenannten“ Zentrifugalkraft bei Helmholtz[1]). Man übersieht eben, daß jene Zentripetalkraft erst durch diese Zentrifugalkraft hervorgerufen zu denken ist.

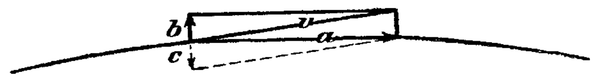

Fig. 15.

Wir müssen aber noch hinzufügen, daß auch von der Achse eine Reaktionskraft ausgehen kann. Die Achse sei als unbeweglich, d. h. durch ihre Achsenlager mit der Erde fest verbunden vorausgesetzt. Ist die Achse überdies unbiegsam (starr), so wird, wie der Druck gegen eine unelastische Wand ohne Gegendruck, auch hier der Zug des bewegten Körpers ohne Gegenzug bleiben und eine elastische Gegenwirkung nur von dem Faden ausgehen können. Ist die Achse elastisch (d. h. besitzt sie Biegungselastizität), dann wird auch in ihr eine Gegenkraft geweckt werden, die man wieder als Reaktionskraft bezeichnen kann.

Es ist ohne weiteres klar, daß es eine völlige Verkehrung des Sachverhalts ist, wenn man in diesen Fällen von einer vermeintlichen Reaktion des im Kreise umlaufenden Körpers redet. Eine solche ist ebensowenig wirklich wie die „Trägheitskraft“ bei einem in freier Zentralbewegung laufenden Körper (Nr. 4).

An dieser Stelle löst sich wieder eine der Schwierigkeiten, mit denen H. Hertz den Begriff der Zentrifugalkraft verknüpft findet. Hertz fragt, nachdem er die Schwungkraft gemäß dem konsequent durchgeführten Newtonschen System als eine uneigentliche bezeichnet hat: „Aber wo bleiben alsdann die Ansprüche des dritten Gesetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt, und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen bloßen Namen befriedigt sein will?“ — Wir können dem jetzt entgegenhalten, daß weder die Schwungkraft selbst als uneigentlich, noch das dritte Gesetz Newtons als auf diesen Fall schlechthin anwendbar bezeichnet werden muß, daß demnach beide Glieder des vermeintlichen Widerspruchs hinfällig werden.

18. Exkurs über die schiefe Ebene. Die Verwirrung, zu der die Einführung der Reaktionskräfte in der Mechanik Anlaß geben kann, sei noch an einem einfachen Schulbeispiel verdeutlicht. Wenn sich auf einer schiefen Ebene von der Neigung α ein schwerer Körper m befindet, so läßt sich die vertikal nach unten gerichtete, durch $m\,g$ dargestellte Kraft in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine, $m\,g \sin \alpha$, in der Richtung der schiefen

[1]) Vgl. oben S. 19, Anm. 2 und überdies S. 29.

Ebene, die andere, $m g \cos \alpha$, senkrecht zu ihr gelegen ist (Fig. 16 a). Die erste (a) bestimmt die Bewegung längs der schiefen Ebene, die zweite (c) wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben und erscheint als Druck gegen die Ebene.

Man pflegt nun häufig den Reaktionsdruck c' einzuführen, den die widerstehende Fläche auf den Körper ausübt, und der dem Drucke c gleich und entgegengerichtet sein soll (Fig. 16 b). Man setzt diesen mit der Kraft der Schwere, also $m g$ nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen und erhält als Resultierende die bewegende Kraft längs der schiefen Ebene, also a $= m g \sin \alpha$. Bei diesem Verfahren ersetzt man, wie früher nachgewiesen die vorgeschriebene Bahn durch eine Kraft, die daher als eine substituierte Kraft (S. 53) zu bezeichnen ist.

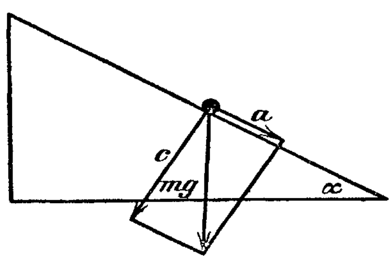

Fig. 16 a.

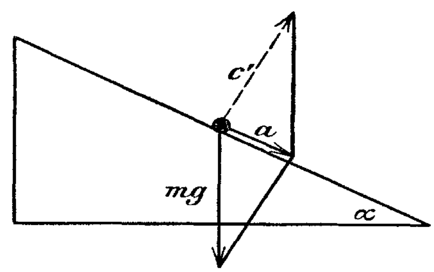

Fig. 16 b.

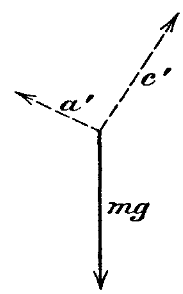

Fig. 16 c.

Nur wenn wenigstens einer der beiden Körper — der bewegliche Körper oder das Material, aus dem die schiefe Ebene besteht — vollkommen elastisch wäre, könnte man von einer wirklich vorhandenen elastischen Gegenkraft c' reden. In der Regel aber wird diese Voraussetzung, die auch nicht allgemein genug wäre, nicht gemacht, man spricht nur von der Reaktionskraft der festen Ebene schlechthin.

Inwiefern die Einführung einer solchen substituierten Kraft ihren guten Sinn hat, ist früher (Nr. 11) dargelegt. Es ist aber eine Versündigung am gesunden Sinn der Lernenden, wenn man ihnen zumutet, diese Fiktion ohne weiteres als eine Realität zu nehmen und damit zu arbeiten. Es wird dadurch die Schablone an die Stelle des Naturverständnisses gesetzt.

Die erste Darstellungsart ist sozusagen physikalisch, die zweite ist von mathematischem Charakter, sie ersetzt die natürlichen Bedingungen durch ein Schema, das zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen sehr bequem ist, bei dem man aber nicht vergessen darf, daß es an Stelle der schiefen Ebene gesetzt ist und strenggenommen deren Vorhandensein ausschließt. Genau das gleiche gilt auch für die in der vorigen Nr. behandelte Einführung der Zentripetalkraft bei der gezwungenen Kreisbewegung.

Es sei endlich schon hier noch auf eine dritte Betrachtungsweise hingewiesen, auf die wir später (in Nr. 24) zurückkommen müssen. Man kann nämlich die Bewegungsaufgabe auch auf ein Gleichgewichtsproblem zurückführen, indem man (wie in der Nebenfigur Fig. 16c) zu den im Fall 2 als vorhanden gedachten beiden Kräften noch eine dritte hinzufügt, die der Resultierenden der ersten beiden gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist, und kann nun für alle drei Kräfte die Gleichgewichtsbedingung aufstellen. Natürlich ist die hinzugefügte neue Kraft eine fingierte, in Wirklichkeit nicht vorhandene. An der ganzen Kräftekombination ist allein die Schwere wirklich, die Reaktion der schiefen Ebene ist substituiert, die dritte ist fingiert.

19. Der rotierende Körper. Die in Nr. 17 angestellten Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf einen Körper, der um eine feste Achse rotiert, anwenden. Wir setzen auch hier wieder voraus, daß dem Körper nicht durch eine etwa am Umfang der Achse wirkende Kraft fortwährend neue Bewegungsimpulse zugeführt werden, sondern daß der Körper durch eine einmalige Einwirkung in Rotation versetzt ist und bei Ausschließung von Bewegungswiderständen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit weiter rotiert. Wir denken uns den Körper in sehr dünne Scheiben senkrecht zur Achse zerlegt und aus einer solchen Scheibe einen Sektor von sehr kleinem Zentriwinkel herausgeschnitten (Fig. 17). Denken wir diesen wieder durch Schnitte senkrecht zur radialen Richtung zerteilt, so erhalten wir Körperelemente, für deren jedes die obigen Betrachtungen gelten. Jedes dieser Elemente wird in radialer Richtung eine Zentrifugalkraft von angebbarer Größe ausüben und die Zentrifugalkräfte aller werden sich zu einer an der Achse angreifenden Zugkraft vereinigen. Ist die Masse des Körpers symmetrisch um die Achse verteilt, so werden sich je zwei entgegengesetzte Zugkräfte aufheben, und die Achse wird, abgesehen von der Spannung, keine einseitige Beanspruchung erfahren. Ist jene Voraussetzung nicht erfüllt, so treten die bekannten Einwirkungen des rotierenden Körpers auf die Achse ein.

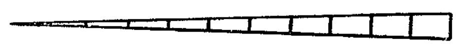
Fig. 17.

Hierbei ist es gleichgültig, ob der Zusammenhang der Elemente des Körpers als starr oder als elastisch gedacht wird. Im ersten Fall summieren sich die gleichgerichteten Zugkräfte ohne weiteres, im zweiten Fall treten zwischen den Elementen elastische Spannungen auf, die aber an der Kräfteverteilung nichts ändern, sondern nur die Übertragung der Zugkräfte von der Peripherie auf die Achse vermitteln.

Eine eigentliche Reaktion kann auch hier nur von seiten der Achse, sofern diese Biegungselastizität besitzt, ausgeübt werden, ist sie starr, so entfällt wie früher jede Nötigung zur Annahme einer besonderen Reaktionskraft. Findet die Rotation um eine freie Achse statt, so bestimmt sich deren Lage eben dadurch, daß die an ihr auftretenden entgegengesetzten Zentrifugalkräfte einander aufheben.

Man hat gemeint[1]) aus der Art, wie Poinsot die Rotation der Körper be-

[1]) M. Koppe. Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht III, 307.

handelt, entnehmen zu sollen, daß Poinsot zu den vorhandenen, an jedem Molekül angreifenden Kräften noch je zwei neue, einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte in der Richtung des Radius hinzugefügt habe. Dies ist indessen nicht der Fall. Poinsot sagt vielmehr ganz deutlich[1]): „Aus der Rotation selbst entspringen für alle gleichen Moleküle des Körpers Zentrifugalkräfte, die den Radien der von diesen Molekülen beschriebenen Kreise proportional sind und mit ihnen gleiche Richtung haben."

Daß Poinsot den wahren Sachverhalt so klar durchschaut, nimmt nicht wunder, denn dieser geniale Mathematiker zeigt gerade in der hier in Betracht kommenden Schrift das bewußte Bestreben, sich von den Fesseln des überlieferten mathematischen Formalismus freizumachen. Er sagt u. a.: „Hüten wir uns zu glauben, daß eine Wissenschaft am Ende angelangt sei, wenn man sie auf analytische Formeln zurückgeführt hat. Nichts überhebt uns der Pflicht, die Dinge selbst zu studieren und uns Rechenschaft von den Ideen zu geben, die den Gegenstand unserer Spekulationen bilden."[2])

Um so bemerkenswerter ist es, daß auch G. Kirchhoff uns ein einwandfreier Zeuge für die Richtigkeit unserer Auffassung von der Zentrifugalkraft sein kann. Er leitet[3]) die Veränderungen ab, die an den Gleichungen der Kräfte auftreten, wenn man sie statt auf ein ruhendes, auf ein sich mit dem Körper drehendes Koordinatensystem bezieht. Durch einfache Transformationen ergibt sich, daß in dem bewegten System noch neue Kräfte zu den vorhandenen hinzugefügt werden müssen, wenn die Bewegungen richtig beschrieben werden sollen. Diese Kräfte sind die Zentrifugalkräfte, die durch Ausdrücke von der Form:

$$m\,w^2\,x',\quad m\,w^2\,y',\quad m\,w^2\sqrt{x'^2+y'^2}$$

dargestellt sind. Kircchoff drückt sich folgendermaßen aus:

> „Bei einem System von materiellen Punkten, welche ohne Änderung ihrer relativen Lage mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit um eine Achse rotieren, kann man, um die Beziehungen zwischen den Kräften zu beurteilen, die auf sie wirken, von der Rotation absehen, falls man zu diesen Kräften die Zentrifugalkräfte hinzufügt, die der Rotation entsprechen."

Und speziell bezüglich der Bewegungen der Körper auf der rotierenden Erde:

> „Man darf bei ihnen von der Rotation der Erde absehen, wenn man zu den auf die Körper wirkenden Kräften die dieser Rotation entsprechenden Zentrifugalkräfte hinzufügt . . . Die Schwere ist die Resultante aus der Anziehung, die die Masseneinheit von der Erde nach dem Gesetz der Gravitation

[1]) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, im Anhang zu den Éléments de statique, 8. ed., Paris 1842, p. 503.

[2]) a. a. O., p. 509, vgl. das Motto vor dem Vorwort dieser Abhandlung.

[3]) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 9. Vorlesung.

erfährt, und der aus der Rotation der Erde entspringenden Zentrifugalkraft; diese Resultante ist es, welche durch die . . . Pendelversuche gemessen wird.“ [1])

Es unterliegt hiernach keinem Zweifel, daß Kirchhoff hier die Zentrifugalkräfte als reale Kräfte einführt. Es könnte allerdings der Schein entstehen, als ob das Auftreten dieser Zentrifugalkräfte nur die Folge einer Koordinatentransformation, also einer rein formalen Operation sei, womit dann freilich die Realität dieser Kräfte verneint würde.

So ist aber die Sache nicht zu verstehen. Sind nämlich (bei Kirchhoff) die auf die einzelnen materiellen Punkte wirkenden Kräfte für das ruhende Koordinatensystem mit x, y, z bezeichnet, dagegen für das bewegte System mit x', y', z', so müssen zu letzteren noch (bei Drehung um die z-Achse) die Kräfte $m\,w^2\,x'$, $m\,w^2\,y'$ hinzugefügt werden, wenn man die Bewegung in bezug auf das bewegte System darstellen, also von der Drehbewegung des Körpers absehen will. Diese Zusatzkräfte sind in den Kräften x, y, z auch schon enthalten, sie treten nur nach der Transformation gesondert von den auf das bewegte System bezüglichen Kräften x' y' z' hervor. Sie bedeuten also die Änderungen, die infolge der Drehbewegung in den Kräftebeziehungen des Körpers hervorgerufen werden[2]).

Daß diese Kräfte keine fiktiven oder Ersatzkräfte sind, lehrt schließlich vor allem die Erfahrung, die uns bei jeder Drehbewegung die von diesen Kräften bewirkten Spannungen nachweist. Den Technikern ist diese Erfahrung so geläufig, daß sie sich am wenigsten mit dem Wegdisputieren der Zentrifugalkraft von seiten der analytischen Mechanik haben befreunden können. Besonders kennzeichnend in dieser Richtung ist eine Äußerung des hervorragenden englischen Ingenieurs Prof. John Perry[3]):

> „Es gibt allerdings gewichtige Stimmen, die sich gegen diesen Ausdruck (Zentrifugalkraft) erklären, aber alle unsere Ingenieure gebrauchen ihn, und daher benutze ich ihn gern, während unsere hervorragenden Kritiker zu allen möglichen schändlichen Sprachverrenkungen greifen, um ihn zu vermeiden.“

20. Die Behandlung der Zentrifugalkraft bei Huygens. Es ist nun lehrreich zu sehen, wie weit die älteste Behandlung des Gegenstandes bei Huygens[4]) mit unserer Auffassung übereinstimmt. Huygens geht aus von

---

[1]) a. a. O., S. 88, 89.

[2]) Kirchhoffs Betrachtungen beziehen sich nur auf den einfachsten Fall, daß die Koordinaten der betrachteten Massenpunkte bezüglich des rotierenden Koordinatensystems von der Zeit unabhängig sind. Ist dies nicht der Fall, so treten noch die Coriolisschen Kräfte auf, von denen M. Koppe eine schöne elementare Darstellung gegeben hat. (Ztschr. f. d. phys. U. X, 16.)

[3]) John Perry, Der Drehkreisel, deutsch von A. Walzel, Leipzig 1904, S. 46.

[4]) Christian Huygens' nachgelassene Abhandlungen, herausgegeben von F. Hausdorff. Ostwalds Klassiker Nr. 138, S. 35 ff. Es muß hier bemerkt werden, daß E. Mach

der Betrachtung des Zuges, den ein schwerer Körper auf einen Faden, an dem er hängt, ausübt, und setzt diesen Zug in Beziehung zu der Beschleunigung, die derselbe Körper beim freien Fall erleiden würde. Auf einer schiefen Ebene ist sowohl der Zug als auch die Beschleunigung in gleichem Maße vermindert. Wenn nun zwei gleich schwere Körper, an Fäden aufgehängt, mit der gleichen Beschleunigung in der Richtung des Fadens zu entweichen streben, so ist auch die Anspannung der Fäden die gleiche, unabhängig davon, woher jenes Streben entspringt. Und zwar ist hierbei nur der Anfang der Bewegung in Betracht zu ziehen unter Beschränkung auf ein unbegrenzt kleines Zeitteilchen. Dies wird an einer Kugel erläutert, die, an senkrechtem Faden hängend, den oberen Innenrand einer Halbkugelfläche berührt und losgelassen wird. Ist das oberste Element der krummen Fläche vertikal, so wird die Fallbeschleunigung im ersten Moment die gleiche sein wie beim freien Fall. Es kommt daher für die Beurteilung des Zuges auch nur diese anfängliche Bewegung in Betracht, nicht aber die weiterhin folgende, durch die Gestalt der krummen Fläche veränderte.

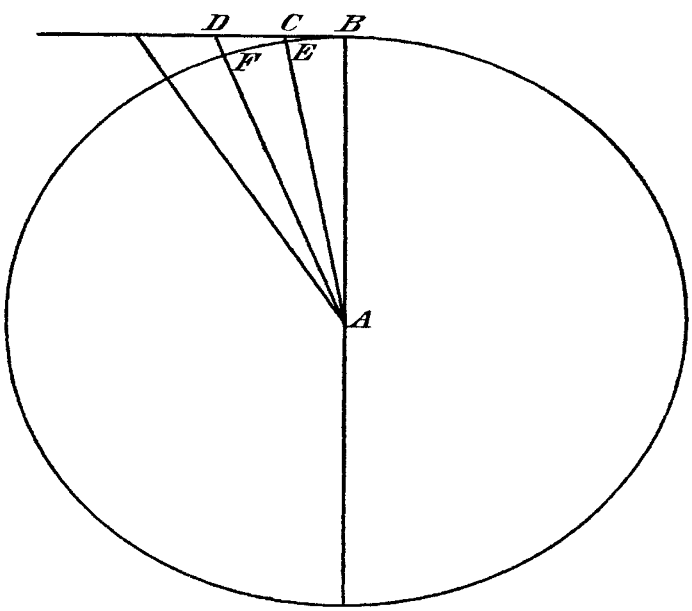

Fig. 18.

Nach dieser Vorbereitung wird ein Rad BG betrachtet, das sich um den Mittelpunkt A in einer horizontalen Ebene dreht (Fig. 18), und es wird von der Schwere abgesehen. Ein an der Peripherie befestigtes Kügelchen hat, in B angelangt, das Bestreben, längs der Tangente BD fortzufliegen. Wir denken uns das Rad so groß, daß ein Mensch auf der Peripherie stehen kann, und dieser möge in seiner Hand einen Faden halten, an dessen anderes Ende eine Bleikugel gebunden ist. Der Faden erleidet dann eine radial nach außen gerichtete Spannung, ebenso als wenn er bis nach dem Mittelpunkt hin verlängert und dort befestigt wäre. Um dies einzusehen, tragen wir auf der Peripherie kleine gleiche Bögen BE, EF .... ab und zeichnen auf der Tangente die kleinen gleichen Strecken BC, CD .. die die Kugel, wenn sie freigelassen würde, in denselben Zeiten zurücklegte. Die Kugel würde demnach, wenn der Mensch in E angelangt ist,

in seiner Mechanik, die im übrigen die Gedanken der großen Forscher so meisterhaft darzustellen weiß, doch der originalen Betrachtungsweise von Huygens nicht gerecht wird, sondern den Gegenstand in zu moderner Beleuchtung vorführt.

sich in C befinden; wenn jener in F anlangt, in D usw., sie würde also in der Tat streben, sich von dem Rade zu entfernen.

Allerdings werden die Punkte C, D . . nicht genau in den Verlängerungen der Radien AE, AF . . liegen, sondern ein wenig nach B hin von diesen Linien abstehen. Lägen die Punkte C, D genau auf den Verlängerungen der Radien, so würde die Kugel sich genau in radialer Richtung zu entfernen streben, und zwar im ersten Zeitteilchen um EC, in den beiden ersten um FD usf. Diese Strecken EC, FD . . aber wachsen wie die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 u. s. f. Je kleiner die Kreisbogen BE, EF . . angenommen werden, desto genauer wird dies zutreffen, und man darf daher im Anfang es so ansehen, als sei gar keine Abweichung vorhanden.

Eine nähere Betrachtung zeigt dann, daß die Bahn, die die abfliegende Kugel relativ zu dem Punkte des Abfliegens beschreiben würde, eine Kreisevolvente ist, die im Anfangspunkte den Radius des Kreises berührt. Auch hieraus ergibt sich wieder, daß die Richtung der abfliegenden Kugel im Anfang ihrer Bewegung als senkrecht zur Peripherie des Rades anzusehen ist. Der Faden, woran sie befestigt ist, wird demnach nicht anders gespannt, als ob die Kugel längs des verlängerten Fadens zu laufen strebte. Und auch das Streben einer auf dem gedrehten Rade befestigten Kugel ist nicht anders, als ob sie sich auf der Verlängerung der Geraden, die den Mittelpunkt mit ihr verbindet, fortbewegen wollte, und zwar mit einer beschleunigten Bewegung, womit sie in gleichen Zeiten Strecken, die wie die Zahlen 1, 3, 5, 7 . . zunehmen, zurücklegen würde. Es genügt auch, daß diese Progression am Anfang innegehalten werde; denn hinterher mag die Kugel nach irgend welchem anderen Verhältnis oder Bewegungsgesetz fliegen, das hat dann keine Beziehung mehr zu dem Streben, das vor dem Beginn der Bewegung vorhanden ist. Dieses Streben aber ist demjenigen sehr ähnlich, mit dem an Fäden hängende schwere Körper zum Herabfallen drängen. Daraus werden wir auch schließen, daß sich die Zentrifugalkräfte[1]) ungleicher bewegter Körper, die jedoch auf gleichen Kreisen mit gleicher Geschwindigkeit geschwungen werden, zueinander verhalten wie die Gewichte der Körper oder wie die Massen. . . Während aber der Antrieb zum Fallen für dieselbe Kugel immer gleich ist, so oft sie an einem Faden aufgehängt wird, so ist andererseits das Streben einer im Kreise geschwungenen Kugel desto kleiner oder größer, je langsamer oder rascher das Rad sich dreht.

Hieraus erwächst für Huygens die Aufgabe, die Gesetze festzustellen, von denen die Größe der Zentrifugalkraft abhängt. Er leitet diese auf umständliche Weise in Form einer Reihe von Proportionen ab. Der Kern seiner Betrachtungen ist jedoch in Lehrsatz II enthalten:

„Wenn gleiche bewegliche Körper auf denselben oder auf gleichen Kreisen oder Rädern mit ungleichen Geschwindigkeiten rotieren, jedoch

[1]) Das Wort tritt hier zum erstenmal ohne vorhergehende Erläuterung auf.

jeder mit gleichförmiger Bewegung, so verhält sich die Kraft des schnelleren, sich vom Mittelpunkt zu entfernen, zur Kraft des langsameren, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten."

Wir geben den Beweis unter Beibehaltung der leitenden Gedanken von Huygens in folgender modernerer Form:

Es sei (vgl. Fig. 18) die Strecke BC auf der Tangente ebensogroß wie der Bogen BE. Sind nun BC und BE verschwindend klein, so kann nach dem vorher Gesagten angenommen werden, daß C auf der Verlängerung des Radius liegt. Ist nun $AB = r$, $BC = v\tau$, so ergibt sich:

$$CE = AC - AE = \sqrt{r^2 + v^2\tau^2} - r = \frac{v^2\tau^2}{2r}.$$

Heißt die Zentrifugalbeschleunigung γ, so folgt weiter:

$$\frac{1}{2}\gamma\tau^2 = \frac{v^2\tau^2}{2r}, \quad \text{woraus} \quad \gamma = \frac{v^2}{r}.$$

Diese Ableitung hat einige Ähnlichkeit mit der Ableitung e (in Nr. 3) für die Zentripetalbeschleunigung. Nur ist sie nicht den dort erhobenen Einwänden ausgesetzt, auch war dort die Annahme einer gleichförmig beschleunigten Bewegung eine willkürliche, während hier der Charakter der Bewegung als einer gleichförmig beschleunigten nach den vorausgegangenen Betrachtungen feststeht. —

Es bedarf kaum noch eines Wortes, wie sehr die klassische, vom System noch unbeeinflußte Betrachtungsweise von Huygens mit der in vorliegender Abhandlung vorgetragenen übereinstimmt. Es tritt auch hier wieder deutlich zutage, daß bei der Rotation eine Kraft auftritt, die auf die rotierenden Massenteilchen selbst in zentrifugaler Richtung wirkt, und die ebenso wirklich ist wie der Druck, den ein Gewichtstück von 1 Kilogramm auf eine Tischplatte ausübt.

21. Zentrifugalkraft und absolute Bewegung. Bereits Newton hat die Bedeutung erkannt, die der Zentrifugalkraft als einem Kriterium für das Vorhandensein absoluter Bewegungen zukommt. Er sagt[1]):

„Die wirkenden Ursachen, durch welche absolute und relative Bewegungen voneinander verschieden sind, sind die Fliehkräfte von der Achse der Bewegung. Bei einer nur relativen Kreisbewegung existieren diese Kräfte nicht, aber sie sind kleiner oder größer, je nach Verhältnis der Größe der Bewegung."

Newton selber hat also die Fliehkräfte als wirklich „existierende", nicht nur als „sogenannte" Kräfte angesehen. Die von uns vertretene Auffassung, die den Anspruch erhebt den wirklichen Sachverhalt darzustellen, bringt daher auch jene Newtonschen Überlegungen, mindestens hinsichtlich ihrer Voraussetzung, zu erneuter Geltung. Die Behauptung Newtons von

[1]) a. a. O., S. 29.

der durch Fliehkräfte gegebenen Möglichkeit, absolute Bewegung von relativer Bewegung zu unterscheiden, ist neuerdings Gegenstand umfassender Kontroversen gewesen[1]), die zumeist an ein von Newton bei derselben Gelegenheit beschriebenes Experiment (den sog. Eimerversuch) anknüpfen. Insbesondere hat Mach geltend gemacht, es sei denkbar, daß bei einem Eimer mit meilendicken Wänden sich Erscheinungen an dem im Eimer befindlichen, an der Rotation (anfänglich) nicht teilnehmenden Wasser herausstellen könnten, die von derselben Art wären, wie die bei Rotation des Wassers relativ zur Umgebung auftretenden. Der experimentellen Prüfung, obwohl man eine solche versucht hat, ist dieser Einwand schwerlich zugänglich. Aber es ist dagegen doch etwas Entscheidendes zu sagen. Rotiert ein Körper um seine Achse, so läßt sich, wie wir gesehen haben, aus den Grundgesetzen der Mechanik das Auftreten der Fliehkräfte ableiten. Wer es für gleichberechtigt hält, die Umgebung als rotierend und den Körper als ruhend anzusehen, dem fällt die Verpflichtung zu nachzuweisen, daß auch in diesem Fall aus den Grundgesetzen der Mechanik dieselben Erscheinungen für den nun als ruhend angesehenen Körper sich ableiten lassen. Solange dieser Nachweis nicht erbracht ist, schwebt die ganze Behauptung in der Luft, und das Ausdenken von etwaigen Ergebnissen unmöglicher Experimente kann daran nichts ändern.

Am ersten noch möchte man auf dem Kirchhoffschen Wege[2]) einen derartigen Nachweis zu führen versucht sein, da dort die Gleichungen für einen beliebigen Bewegungszustand eines Systems materieller Punkte in Bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem (x, y, z) aufgestellt und dann auf ein bewegtes (x', y', z') transformiert werden. Diese Transformation verläuft genau so wie bei Kirchhoff, auch wenn man das neue Koordinatensystem nicht mit dem materiellen Körper, sondern mit dem umgebenden Raum sich drehend vorstellt. Die dann ebenfalls auftretenden Zentrifugalkräfte $m\,w^2\,x'$ $m\,w^2\,y'$ bedeuten dann ebenfalls Kräfte, die zu den im System der x', y', z' vorhandenen hinzugefügt werden müssen, wenn man von der Drehung des Systems absehen will. Aber diese Kräfte gelten für das in Drehung befindliche System der x', y', z', nicht für das der x, y, z, d. h. sie sind für das mit dem ruhenden Körper fest verbundene Koordinatensystem (x, y, z) nicht vorhanden. Nun handelt es sich aber in unserem Fall gerade um den Nachweis solcher Kräfte, die in bezug auf den als ruhend gedachten Körper auftreten. Die Kirchhoffsche Methode versagt also in diesem Falle.

Auf die Kontroverse weiter einzugehen, haben wir hier keinen Anlaß. Es sei nur noch bemerkt, daß auch in der Frage der Gleichwertigkeit des koppernikanischen und des ptolemäischen Weltsystems aus der Anerkennung

---

[1]) Man vgl. besonders Mach, a. a. O., S. 237 ff.; Höfler, Studien z. gegenw. Philosophie der Mechanik, S. 120 ff.

[2]) S. oben Nr. 20.

realer Fliehkräfte eine Entscheidung folgt, die mit der als tatsächlich erkannten absoluten Rotation der Erde auch das koppernikanische System als das allein den Tatsachen entsprechende kennzeichnet.

22. Rotation unter Mitwirkung von Kräften. Die Einwirkung von Kräften auf einen rotierenden Körper kann vom Umfang oder von der Achse aus stattfinden. Der erste Fall liegt vor, wenn man etwa ein Rad mit der Hand durch Mitführung des Radkranzes in immer raschere Umdrehung versetzt, oder wenn man es durch einen darumgelegten Treibriemen in Umlauf bringt. Hierbei kommt eine Vergrößerung der tangentialen Geschwindigkeit zustande, die sich sofort, wie bei der Poissonschen Zwangsbewegung, in die Kreisbewegung und in eine zentrifugale Komponente umsetzt, welch letztere den zentrifugalen Druck vermehrt.

Wirkt die bewegende Kraft an der Achse, so treten Zerrungen und Spannungen auf, die von der Achse auf den Radumfang hin gerichtet sind. Man wird diese Übertragung aber sich nicht so vorzustellen haben, als ob dabei ein rein zentripetaler Zug auf die Teile des Rades erfolgt, sondern die Wirkung wird wie an gewissen Stellen der Bahn eines Planeten (bei der Bewegung vom Aphel nach dem Perihel) schräg vorwärts gerichtet sein und eine Vergrößerung der Umdrehungsgeschwindigkeit zur Folge haben. Damit wird sofort auch der zentrifugale Druck zunehmen und dauernd den größeren Wert beibehalten, solange die Rotationsgeschwindigkeit unverändert bleibt. Auch hier also tritt die Zentrifugalkraft nicht als Reaktion, sondern als unmittelbare Folge der Zwangsbewegung auf.

Hierher gehört endlich auch der Fall, an den H. Hertz einen seiner Einwände anknüpft[1]): „Wir schwingen einen Stein an einer Schnur im Kreise herum, wir üben dabei bewußtermaßen eine Kraft auf den Stein aus; diese Kraft lenkt den Stein beständig von der geraden Bahn ab“ usw. Dieses der gewöhnlichen Erfahrung entnommene Beispiel liegt in der Regel zugrunde, wenn von der Schwungkraft gesprochen wird, und nicht selten wird die von der Hand ausgeübte Kraft geradezu als Schwungkraft bezeichnet. Bei näherer Betrachtung ist indessen gerade das Herumschleudern eines mit der Hand an einem Faden gehaltenen Steins kein so einfacher Vorgang, daß man daraus den Schluß ziehen dürfte, die Hand spüre ja fortwährend den Zug, der auf den Stein ausgeübt werden müsse, um ihn von der geradlinigen Bewegung abzulenken. Betrachtet man den Vorgang vielmehr vorurteilsfrei, so ergibt sich etwa folgendes: Durch rasches Schrägaufwärtsziehen (Fig. 19) des bei A gehaltenen Fadens wird auch der Stein in schnelle fortschreitende Bewegung versetzt; wird nun die Bewegung der Hand plötzlich gehemmt, so bewegt sich der Stein weiter und geht, da er sich am Faden befindet, in die zwangsläufige Bewegung um den Aufhängungspunkt über. Aber selbst wenn seine Geschwindigkeit so groß ist, daß er der Schwere entgegen die vertikale Kreis-

[1]) H. Hertz, a. a. O. Man vgl. das Vorwort, S. 4.

bahn bis zum höchsten Punkt und darüber hinaus durchläuft, so wird seine Geschwindigkeit doch durch die sehr beträchtlichen Reibungswiderstände derart vermindert, daß es einer neuen Einwirkung bedarf, um den Körper wieder in hinreichend rasche Bewegung zu versetzen. Dies geschieht wie bei der ersten Ingangsetzung durch einen raschen und dann plötzlich gehemmten Zug, der bei nahezu wagerechter Lage des Fadens auf diesen ausgeübt wird (Fig. 20). Hierdurch aber wird nicht etwa eine Zentripetalkraft erzeugt, sondern dem Stein wird eine schnellere fortschreitende Bewegung erteilt, die bei plötzlicher Hemmung der Hand wieder in die zwangsläufige kreisförmige Bewegung übergeht. Noch deutlicher wird der Vorgang, wenn man einen am Griff herumgeschwungenen Stock betrachtet.

Fig. 19.

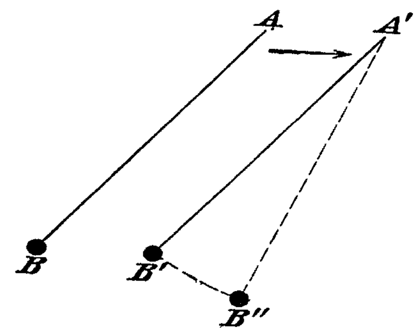

Fig. 20.

Allerdings wird bei der Bewegung der Hand eine Komponente der Zugkraft auch in zentripetaler Richtung wirken, aber das Wesentliche ist die unmittelbare Vermehrung der Geschwindigkeit des Fortschreitens. Durch derartiges intermittierendes Ziehen wird die Geschwindigkeit des umgeschwungenen Körpers immer von neuem wieder auf die Größe gebracht, die zum Durchlaufen der ganzen Kreisbahn erforderlich ist. Bei dem ruckweisen Erteilen eines Geschwindigkeitszuwachses empfindet man jedesmal einen Gegenzug, den man fälschlich für einen unmittelbaren Beweis für das Vorhandensein der Zentrifugalkraft genommen hat. Doch handelt es sich hier in der Hauptsache um einen Widerstand gegen die plötzliche Übertragung einer translatorischen Geschwindigkeit, also um eine analoge Erscheinung wie bei der Bewegungsübertragung durch Stoß. (In der Tat behandelt auch Galilei am 6. Tage der Discorsi den plötzlichen Zug an einem Faden und den Stoß als völlig gleichartige Erscheinungen.)

V.

Das Zentrifugalpendel.

23. Die Schwingungsdauer des Zentrifugalpendels. HUYGENS selbst wendet die von ihm gefundenen Gesetze für die Zentrifugalkraft in der bereits genannten Schrift auf das Zentrifugalpendel oder Kreispendel an. Die grundlegende Betrachtung findet sich dort unter Lehrsatz VIII. Es wird ein Körper betrachtet (Fig. 21), der im Punkte A an einem Faden AC befestigt ist und auf einem horizontalen Kreise mit dem Radius BC rotiert. CE ist die Spur einer Normalebene zur Fadenrichtung. HUYGENS sagt[1]:

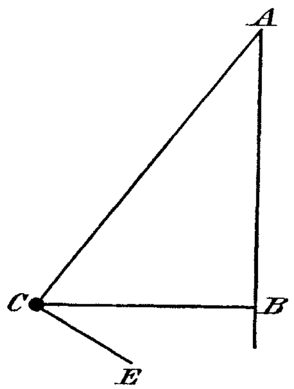

Fig. 21.

„Es steht nun fest, daß es die Zentrifugalkraft ist, die den Faden in dieser Neigung gestreckt erhält. Da der Körper gemäß seiner Schwere denselben Antrieb zum Fall besitzt, als ob er auf der Ebene CE läge, die Zentrifugalkraft aber, der zufolge er strebt, sich von der Achse AB längs BC zu entfernen, diesen Fallantrieb aufhebt, so ist es notwendig, daß die besagte Zentrifugalkraft gleich der Kraft sei, die in horizontaler Richtung BC wirkend den Körper C auf der schiefen Ebene CE festhalten würde.“

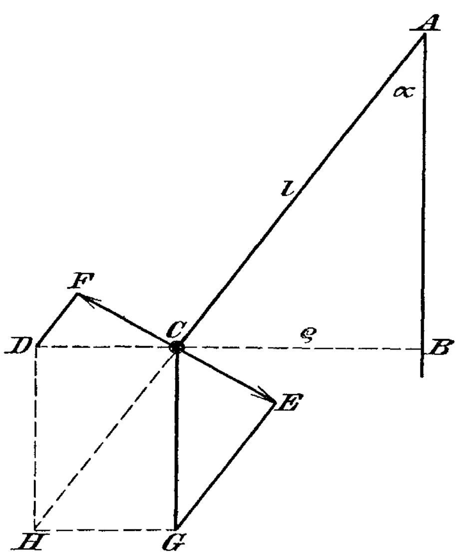

Fig. 22.

HUYGENS leitet auf Grund dieser Überlegung für zwei Kreispendel zunächst den Satz ab, daß bei gleicher Kegelhöhe AB und verschiedenen Ablenkungswinkeln die Zentrifugalkräfte sich wie die Radien der horizontalen Kreisbahnen verhalten.

Auf dieselbe Überlegung gründet sich die folgende sehr verbreitete Ableitung für die Schwingungsdauer des Zentrifugalpendels (Fig. 22).

a) Es sei, die Masseneinheit in C vorausgesetzt, CF die senkrecht zum Faden gelegene Komponente der Schwungkraft $CD = k$, und dementsprechend CE die ebenso gelegene Komponente der Schwere $CG = g$, dann ist die Bedingung für das Gleichgewicht:

$$CF = CE$$

oder:

$$k \cos \alpha = g \sin \alpha$$

[1]) Huygens, a. a. O., S. 52.

woraus:

$$k = g \operatorname{tg} \alpha$$

oder, wenn $BC = \rho$ gesetzt wird:

$$\frac{4\pi^2 \rho}{T^2} = g \operatorname{tg} \alpha$$

woraus wegen $\rho = l \sin \alpha$ folgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

Nur eine Variante hiervon ist es, wenn man die angenommene Zentrifugalkraft mit der Schwere zu einer Resultierenden (CH) zusammensetzt, die in die Richtung des Fadens fällt.

Diese Ableitung muß von dem Standpunkte aus, der die Zentrifugalkraft als reale Kraft nicht anerkennt, selbstverständlich verworfen werden; dennoch findet sie sich in vielen Lehrbüchern, die jenen Standpunkt einnehmen. Aber auch im Licht unserer Auffassung ist die Ableitung und die ihr zugrunde liegende Huygenssche Betrachtung unhaltbar. Denn der Massenpunkt C erfüllt gar nicht die Voraussetzung, unter der die Zentrifugalkraft eingeführt und die Formel dafür entwickelt worden ist. Seine Zwangläufigkeit ist nicht von der Art, daß er an eine kreisförmige Bahn vom Radius BC gebunden wäre, sondern er kann sich auf der ganzen durch den Radius AC bestimmten Kugelfläche bewegen.

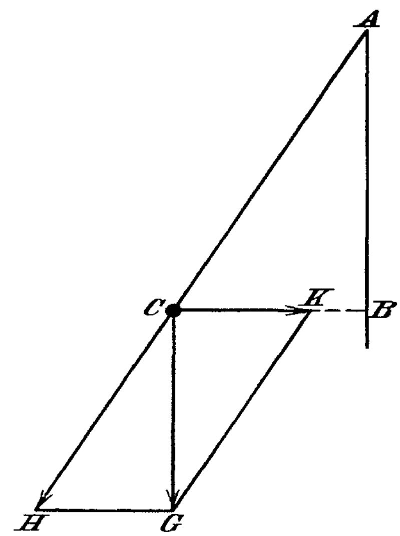

Fig. 23.

b) Man hat gemeint, der Schwierigkeit zu entgehen, indem man den Vorgang lediglich unter dem Gesichtspunkt der Zentripetalkraft behandelte. Aus der Kreisförmigkeit der Bahn schließt man, daß auf den Massenpunkt eine Kraft wirken muß, die ihn beständig nach der Mitte des Kreises zieht. Diese Kraft glaubt man zu erhalten, indem man (Fig. 23) die Schwere CG in eine Komponente in Richtung des Kreisradius, und eine zweite in Richtung der Verlängerung des Fadens zerlegt. Die zweite wird durch den Widerstand des Fadens aufgehoben, die erste liefert die zur Erhaltung der Kreisbewegung erforderliche Zentripetalkraft.

Bei diesem Verfahren ist in formeller Hinsicht der doppelte Irrtum begangen, daß eine Kraftkomponente eingeführt ist, die größer ist als die gegebene Kraft, und daß andererseits die gegebene Kraft eine Komponente haben soll, die senkrecht zu ihr steht. Eine derartige Zerlegung aber ist unzulässig[1]). Das Unzutreffende des Verfahrens tritt auch in sachlicher Hinsicht

[1]) Hierauf hat besonders Grimsehl gelegentlich eines Vortrages des Verfassers auf der Jahresversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften in Halle (1904) hingewiesen. Die Sache sei wiederum an einem

darin zutage, daß zur Erklärung des Zustandekommens der zentripetalen Beschleunigung die Fadenspannung gar nicht zugezogen wird, während sie doch bei der einfachen Zentralbewegung (nach der gewöhnlichen Darstellung) als alleinige Ursache fungiert.

c) Dem eben erhobenen Einwand nicht ausgesetzt ist das folgende Verfahren, das sich an die gewöhnliche Darstellung anschließt. Man führt wie im früheren Falle (§ 5) als mitwirkende Kraft die Spannung des Fadens ein und setzt diese mit der Schwere zu einer Resultierenden zusammen, die nach dem Zentrum der Kreisbahn gerichtet ist. (Fig. 24.)

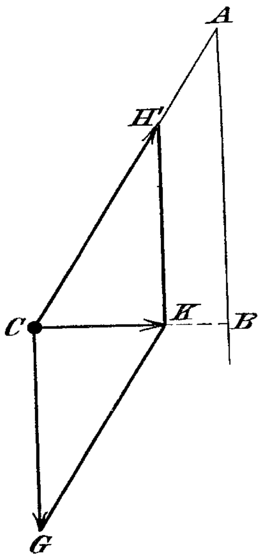

Fig. 24.

Gegen diese Darstellung aber ist derselbe Einwand zu erheben wie gegen die früheren (§ 5), nämlich daß nur die „Reaktionskraft" des Fadens in Betracht gezogen, die eigentlich wirkende Kraft aber, die die Reaktion des Fadens erst hervorruft, nicht ersichtlich gemacht ist.

Will man die Darstellung gleichwohl rechtfertigen, so muß man wie in jenem Falle die Reaktionskraft des Fadens als eine substituierte Kraft bezeichnen, die (wie die Reaktion der schiefen Ebene in Fig. 16) nur zum Zwecke der Rechnung eingeführt ist. Es gelten aber gegen diese Behandlung dann alle in Nr. 18 erhobenen Bedenken. Es wird das wahre Spiel der Kräfte bei dieser Darstellung nicht klargelegt.

24. Die fingierte Zentrifugalkraft. Einen Ausweg, um die zuerst von Huygens angegebene Betrachtungsweise des Zentrifugalpendels zu retten, hat A. Föppl[1]) angegeben. Es sei vorausgeschickt, daß auch A. Föppl der allgemein verbreiteten Auffassung folgt und z. B. bei einem eine Kurve durchfahrenden Eisenbahnwagen von einer Zentripetalkraft spricht, die die Schienen auf den Wagen übertragen, während er den Druck des Wagens gegen das Geleise aus dem Gesetz der Wechselwirkung ableitet. Dann aber sagt er:

Schulbeispiel verdeutlicht. Auf einen schweren Körper A, der auf einer schiefen Ebene liegt (Fig. 25), wirke eine Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene. Man findet dann wohl angegeben, es sei die Schwere AB in die Komponenten AC und AD zu zerlegen, der ersteren müsse die Kraft AE entgegengesetzt gleich sein, wenn Gleichgewicht bestehen solle. In Wahrheit aber hat man AB in die Komponenten AF und AG, ebenso AE in AJ und AH zu zerlegen, dann müssen AF und AJ entgegengesetzt gleich sein. Die Summe der beiden senkrecht zur schiefen Ebene gerichteten Komponenten AH und AG ist gleich AD; letztere ist daher nicht eine einfache Komponente von AB, wie das erste, unzulässige Verfahren glauben machen will.

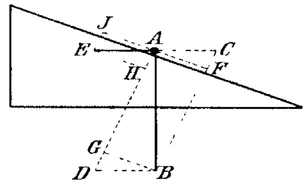

Fig. 25

[1]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. I, § 14.

„Nun ist aber auch noch ein völlig verschiedener Gebrauch der Be-„zeichnung Zentrifugalkraft üblich. . . . An dem Eisenbahnwagen, den wir be-„trachteten, können alle Kräfte, die an ihm wirken, nicht im Gleichgewicht „miteinander stehen, sondern wir wissen schon, daß sie eine Resultierende „ergeben müssen, die die Richtungsänderung der Bewegung hervorruft. „Trotzdem erscheint es aber erwünscht, die Aufgabe auf ein Gleichgewichts-„problem zurückzuführen. Das kann natürlich nur willkürlich oder, wenn man „will, gewaltsam geschehen, indem man sich noch eine Kraft hinzudenkt, die in „Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist. . . . Wie man diese fingierte Kraft „zu wählen hat, um den tatsächlich vorliegenden Fall auf einen ihm ver-„wandten Gleichgewichtsfall zurückzuführen, ist leicht einzusehen; sie muß „die Resultierende aller übrigen Kräfte, also die Zentripetalkraft, gerade auf-„heben, also gleich groß und entgegengesetzt gerichtet mit ihr sein."

„Damit kommen wir auf die Zentrifugalkraft in der zweiten Bedeutung „des Wortes. Der Größe und Richtung nach stimmt sie überein mit der „vorher mit diesem Wort bezeichneten Kraft. Sonst ist aber der Unterschied „sehr erheblich; während die Zentrifugalkraft in der ersten Bedeutung „physikalisch existiert und z. B. durch die elastischen Formänderungen, die sie „an den Schienen hervorruft, nachgewiesen werden kann, ist die Zentrifugal-„kraft im zweiten Sinne des Wortes eine willkürlich eingeführte „Rechnungsgröße, die außerdem an einem ganz anderen Körper angreifend „gedacht wird als jene. Es ist nun auch klar, daß man zu argen Fehlern „verleitet werden kann, wenn man diese bloß erdichtete Kraft des gleichen „Namens wegen mit der tatsächlich vorhandenen verwechselt."[1])

Föppl weist ausdrücklich darauf hin, daß der Kunstgriff, der hier zur Einführung einer „fingierten" Zentrifugalkraft diene, nichts anderes als eine Anwendung des d'Alembertschen Prinzips sei. Wennschon sie vermieden werden könne, sei sie doch zur bequemeren Durchführung der Betrachtung recht wohl geeignet. Das einfachste Beispiel für dieses Verfahren ist bereits oben (Nr. 18) bei der schiefen Ebene angeführt. Föppl erläutert es an dem Beispiel des Eisenbahnwagens auf gekrümmtem Geleise. Ebenso einfach ist die Anwendung auf das Zentrifugalpendel.

Es sei wieder (Fig. 26) die auf den Massenpunkt wirkende Schwere dargestellt durch CG, die Fadenspannung durch CH', die fingierte Zentrifugalkraft durch CD, dann muß nach dem vorher Gesagten letztere mit den ersten beiden im Gleichgewicht stehen, oder die Resultierende aus CG und CD muß in die Richtung des Fadens fallen. Daraus folgt dann leicht, wie aus

---

[1]) Auf die Notwendigkeit der Unterscheidung zweier Arten von Zentrifugalkraft hat schon 1888 E. Maiss aufmerksam gemacht in dem Aufsatze „Zur Lehre von der Zentralbewegung und den dabei auftretenden Kräften" (Zeitschr. f. Realschulw. XIII, 201—217; vgl. Zeitschr. f. d. phys. Unterr. I, 271). Er trennt von der Zentrifugalkraft die sogenannte „Fliehkraft"; diese sei gar keine besondere wirklich auftretende Kraft, sondern nur eine Hilfsvorstellung zur leichteren mathematischen Beschreibung der Tatsache, daß in gewissen Fällen von kreisförmiger Bewegung eine nachweisbare Verminderung der für die Zentripetalwirkung disponiblen Krafte des Systems eintritt.

den früheren Figuren, die Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Radius und Schwere.

Es zeigt sich hier also aufs deutlichste, daß die von HUYGENS in diesem Fall benutzte Zentrifugalkraft keine wirkliche Kraft bedeutet. Sein Verfahren führt zum richtigen Resultat, weil es sich in formaler Hinsicht mit der später erst als D'ALEMBERTsches Prinzip aufgestellten Methode deckt. Andererseits ist aber auch ersichtlich, daß die fingierte Zentrifugalkraft keinen Aufschluß über das Zustandekommen der Kreisbewegung und die Messung des zentrifugalen Zuges an dem Faden AC gewährt. Selbst ein Rechnungsphantom, kann sie hier zur Aufhellung des Kräftespiels nichts beitragen. Sie beweist aber auch nichts gegen das Vorhandensein zentrifugaler Wirkungen, sofern nur solche durch unmittelbare Analyse des Vorgangs sich nachweisen lassen[1]).

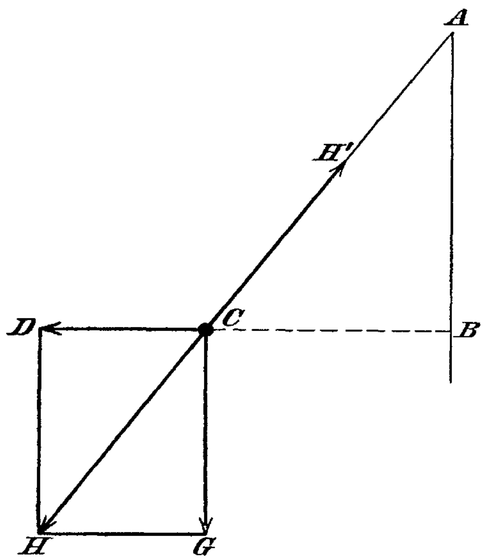

Fig. 26.

25. Analyse der Bewegung des Zentrifugalpendels unter dem Gesichtspunkt der Zwangläufigkeit. Will man zu einem klaren Verständnis der beim Zentrifugalpendel auftretenden Erscheinungen kommen, so muß man seine Bewegung unter dem Gesichtspunkt der Zwangläufigkeit betrachten. Diese Zwangläufigkeit besteht darin, daß der am Endpunkt des Fadens befindliche Massenpunkt auf einer Kugelfläche bleiben muß, deren Radius r gleich der Länge des Pendelfadens ist.

Wir denken den Massenpunkt zunächst schwerelos. Es werde ihm,

[1]) Während Föppl ausdrücklich zwischen zwei Arten der Zentrifugalkraft unterscheidet, findet man in anderen Lehrbüchern der Mechanik die Zentrifugalkraft durchweg als fingierte Kraft behandelt. So in dem sonst mustergültigen Lehrbuch von W. Keck, Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen (2. Aufl., 1900). Es sind dort die Erscheinungen, die an rotierenden Körpern auftreten, in Parallele gestellt zu den Relativbewegungen und Relativkräften in einem translatorisch bewegten Raum. Die Zentrifugalkraft wird als eine gedachte, zu den vorhandenen Kräften hinzuzufügende Ergänzungskraft eingeführt, die mit den wirkenden Kräften im Gleichgewicht stehen soll. Doch werden als wirkende Kräfte die Zentrifugalkräfte angesehen, die ihrerseits nicht dem ruhenden Raume, sondern dem bewegten Körper angehören und daher nicht den „wirklichen Kräften bei der translatorischen Relativbewegung" entsprechen. Die Betrachtung findet ihre Rechtfertigung erst durch die von FÖPPL ausgesprochene Berufung auf d'ALEMBERTS Prinzip und ist daher auch nur in der hierdurch gebotenen Beschränkung anwendbar. Die Folgerung: „Nur muß man sich hüten, die Zentrifugalkraft als eine wirkliche Kraft anzusehen", gilt daher auch nur für die fingierte Zentrifugalkraft, nicht für die bei der Rotation eines starren Körpers auftretende und in Abschnitt III dieser Abhandlung besprochene.

nachdem der Faden um den Winkel α aus der Ruhelage abgelenkt ist, eine Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung und senkrecht zum Faden (also auch tangential zu dem kleinen Kugelkreis, der in horizontaler Lage durch den Massenpunkt geführt ist) erteilt. Durch das Wegelement und den Mittelpunkt O der Kugelfläche ist ein größter Kreis bestimmt (Fig. 27), längs dessen, da von der Schwere abgesehen wird, der Massenpunkt sich bewegen muß. Die Schwungkraft ist in diesem Fall ebenso wie früher durch den Ausdruck v^2/r dargestellt.

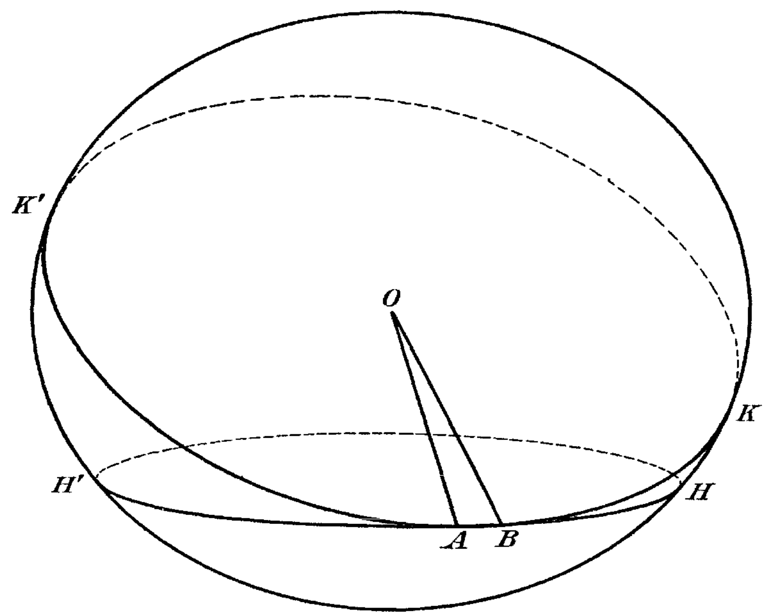

Fig 27.

Die Rolle der Schwere besteht darin, daß sie den Massenpunkt am Aufsteigen in dem größten Kreise hindert und in eine andere Bahn lenkt. Es läßt sich nun die Frage stellen: Wie groß muß die Geschwindigkeit v gewählt sein, damit der Massenpunkt sich unter Mitwirkung der Schwere in einer horizontalen Ebene längs des kleinen Kugelkreises HH' und mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit v bewegt? (Eine Änderung der Geschwindigkeit v kann hierbei nicht eintreten, da die Beschleunigung durch die Schwere stets senkrecht zu der Geschwindigkeit v gerichtet ist.)

Wir bezeichnen, um diese Frage zu beantworten, in Fig. 27 die Strecke, die in dem kleinen Zeitteil dt ohne Mitwirkung der Schwere auf dem großen Kugelkreise zurückgelegt werden würde, mit AB, dann ist:

$$AB = v\,dt = r\,\omega\,dt,$$

worin ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Es ist ferner dieselbe Strecke, als Bogenelement des horizontalen Kugelkreises HH' aufgefaßt:

$$AB = v\,dt = \varrho\,\omega'\,dt$$

worin ρ den Radius dieses Kugelkreises und ω' die entsprechende Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Es ergibt sich sofort:

$$r\,\omega = \varrho\,\omega' \quad \text{oder} \quad \varrho : r = \omega : \omega'$$

und wenn $\rho = r \sin \alpha$, so folgt:

$$1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \omega = \omega' . \sin \alpha .$$

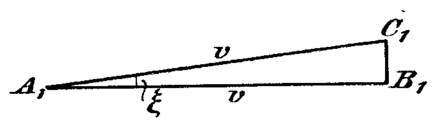

Fig. 28.

Wir bestimmen nun nach der Hodographenmethode die Beschleunigung γ, die zur Geschwindigkeit v, genommen auf dem größten Kreise durch A, hinzukommen muß, damit sie in die Geschwindigkeit v, genommen auf dem Kreise HH', übergeht. Es bezeichne $A_1 C_1$ die erste, $A_1 B_1$ die zweite Geschwindigkeit (Fig. 28), dann ist $C_1 B_1$ die Änderung der Geschwindigkeit in dem Zeitteil dt, also, wenn γ die Beschleunigung längs der Vertikaltangente bedeutet:

$$C_1 B_1 = \gamma\, dt.$$

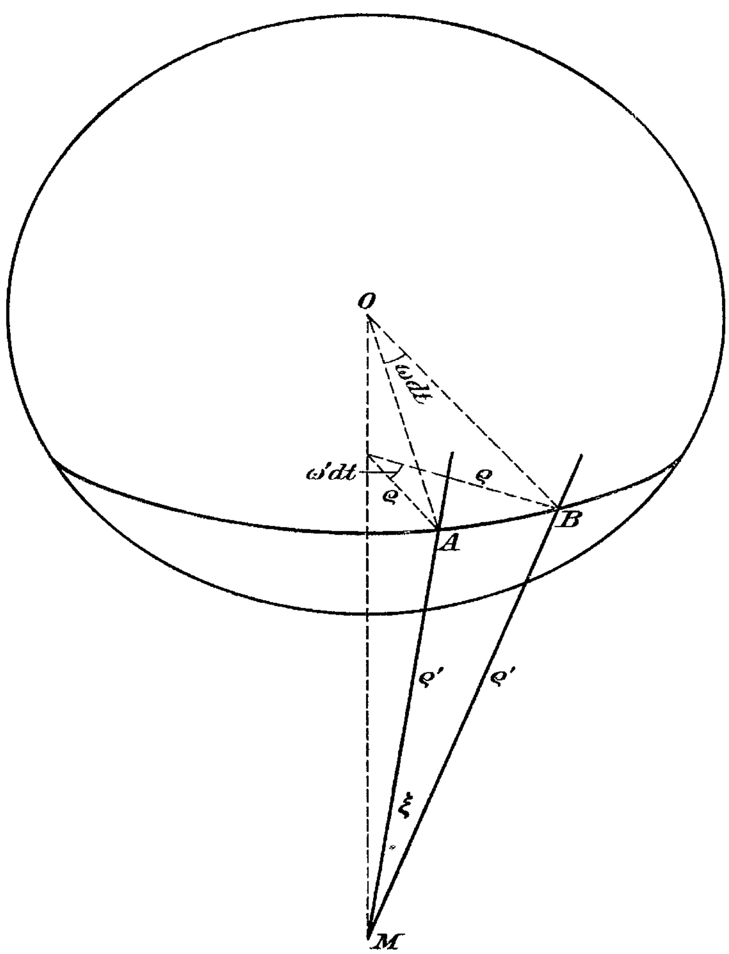

Fig. 29.

Nun ist, wenn ξ die Winkelabweichung von $A_1 B_1$ gegen $A_1 C_1$ bezeichnet, $C_1 B_1 = v\,\xi$, daher:

$$2) \quad . \; . \quad \gamma = \frac{v\,\xi}{dt}.$$

Um nun die infinitesimale Größe ξ zu ermitteln, bedienen wir uns derselben Methode, wie die beim Foucaultschen Pendel übliche. Es sei wieder (Fig. 29) AB der in der Zeit dt zurückgelegte Bogen des horizontalen Kreises, also $AB = \rho\,\omega'\,dt$. Wir legen in A und B an die Kugel Tangenten, die zugleich in den durch die Radien OA und OB gelegten Vertikalebenen liegen. Der Winkel zwischen diesen Tangenten ist gleich dem Winkel, den die durch das Bogenelement AB und das nächstfolgende gelegten größten Kreise miteinander bilden, also gleich der Richtungsänderung, die ein längs des kleinen

Kreises bewegter Massenpunkt erfahren muß, um auf diesem Kreise zu bleiben. Es ist also, wenn $AM = BM = \rho'$ gesetzt wird:

$$\varrho' . \xi = r\,\omega\,dt$$

oder, da $\rho' = r \operatorname{tg} \alpha$ (Fig. 30), so folgt:

$$r \operatorname{tg} \alpha . \xi = r\,\omega\,dt,$$

$$\xi \operatorname{tg} \alpha = \omega\,dt = \frac{v}{r}\,dt,$$

demnach durch Einsetzen von ξ in Gleichung 2):

$$3) \quad \gamma = \frac{v^2 \cos \alpha}{r \sin \alpha} = \frac{v^2 \cos \alpha}{\varrho}.$$

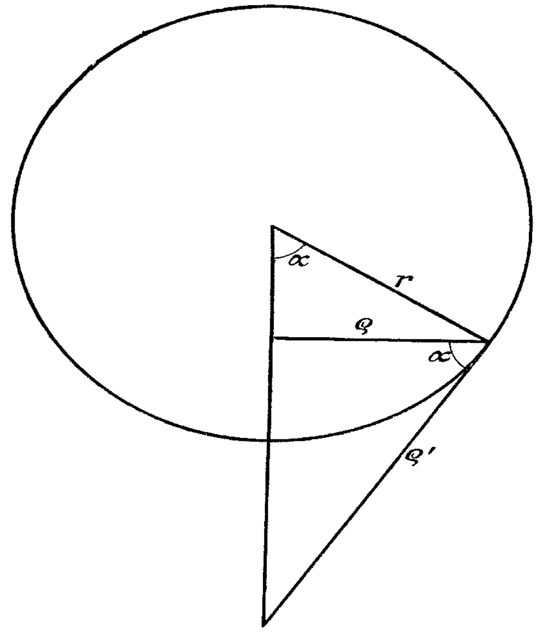

Fig. 30.

Diese Beschleunigung längs der Vertikaltangenten wird aber durch die Schwere geliefert, also ist:

$$4) \quad . \quad . \quad \gamma = g \sin \alpha.$$

Aus 3) und 4) folgt nun:

$$5) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{v^2}{\varrho} = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Durch diese Gleichung ist der oben gesuchte Wert von v bestimmt, und es folgt daraus weiter:

$$\frac{4\,\pi^2\,\varrho}{T^2} = \frac{4\,\pi^2\,r \sin \alpha}{T^2} = g \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus:

$$6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T = 2\,\pi \sqrt{\frac{r \cos \alpha}{g}}.$$

Diese Formel ist dieselbe wie die gewöhnlich auf einem der früheren Wege abgeleitete.

Zugleich ergibt sich für den zentrifugalen Zug am Faden wie oben (für die Masse 1):

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\varrho} \sin \alpha.$$

Dieser Wert ist also ebensogroß, **als wäre er die Komponente einer** in der Ebene des horizontalen Kreises liegenden **Zentrifugalkraft** $\frac{v^2}{\varrho}$, genommen nach der Richtung des Fadens. Eine solche Zentrifugalkraft $\frac{v^2}{\varrho}$ **ist in Wirklichkeit nicht vorhanden**; vorhanden ist vielmehr der zentrifugale Zug $\frac{v^2}{r}$ in der Richtung des Fadens.

Ebensowenig ist eine zweite Komponente $\frac{v^2}{\varrho} \cos \alpha$ vorhanden, die durch die Komponente $g \sin \alpha$ der Schwere aufgehoben würde (vgl. Fig. 22) Sondern die letztere setzt sich mit der dem Massenpunkt erteilten Geschwindigkeit v zu einer längs des Horizontalkreises verlaufenden Bewegung zusammen. Auch der Ursprung des Zuges, den der rotierende Massenpunkt in der Richtung des Fadens auf diesen ausübt, ist nunmehr klar ersichtlich. Er setzt sich zusammen aus der oben berechneten Zentrifugalkraft:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{m v^2}{\varrho} \sin\alpha = m g \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\alpha$$

und aus der Komponente $m g \cos\alpha$ der Schwere. Man erhält also:

$$m g \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha + m g \cos\alpha = m g \frac{(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2)}{\cos\alpha} = \frac{m g}{\cos\alpha}\,.$$

Diesem Zuge ist die sogenannte Reaktion des Fadens entgegengesetzt gleich. Aus Fig. 24 ist die berechnete Größe des Zuges unmittelbar zu erkennen, doch treten ihre beiden Summanden erst hervor, wenn man CK und CG auf CH' projiziert.

Durch diese Betrachtung dürfte einwandfrei dargelegt sein, was es mit der Zentrifugalkraft beim Zentrifugalpendel für eine Bewandtnis hat.

26. Schulmäßige Darstellung des Zentrifugalpendels. Bei richtiger Deutung läßt sich auch ein früheres Verfahren (Nr. 23 c) für Unterrichtszwecke verwerten. Es wird auf folgende Weise vorzugehen sein[1]).

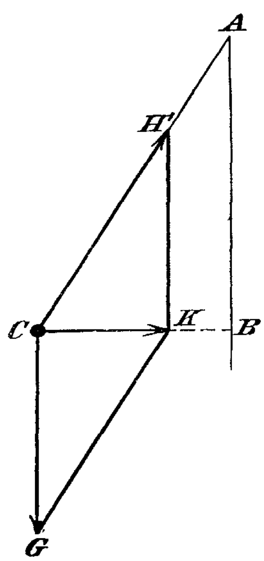

Fig. 31.

Die zwangläufige Bewegung des Massenpunktes m in der horizontalen Kreisbahn läßt sich vergleichen mit der freien Bewegung eines Punktes in derselben Bahn. Im letzteren Falle müßte eine Zentripetalkraft wirksam sein, die den Punkt beständig von der geradlinigen Bewegung ablenkt. Bei der zwangläufigen Bewegung muß dasselbe durch die Schwere im Verein mit dem durch die Festigkeit des Fadens hervorgerufenen Zwange bewirkt werden. Ersetzt man den letzteren durch eine in Richtung des Fadens wirksame Kraft CH' (Fig. 31), so muß diese zusammen mit der Schwere CG eine horizontale Resultierende CK ergeben. Die Figur liefert dann leicht die Gleichung:

$$\frac{m v^2}{\varrho} = m g \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Die Ersatzkraft CH' ist aber nur ein Ausdruck dafür, daß am Ende des Fadens in Wirklichkeit eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft CH (Fig. 23) als Zug wirksam ist. Von diesem Zuge ist ein Teil durch die Komponente der Schwere hervorgerufen, nämlich $m g \cos\alpha$, der übrige Teil muß also durch die Kreisbewegung bewirkt sein. Seine Größe ergibt sich, da $CH' = \frac{m g}{\cos\alpha}$ ist, als:

$$\frac{m g}{\cos\alpha} - m g \cos\alpha = m g \frac{1 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha} = m g \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\alpha$$

[1]) Dieses Verfahren hat der Verfasser in seiner Oberstufe § 18 eingeschlagen.

d. h. der zentrifugale Zug am Faden ist ebensogroß, als wäre er die Komponente einer Zentrifugalkraft $m\,g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ oder $\frac{m\,v^2}{\varrho}$, die in der Ebene der Kreisbahn radial nach außen gerichtet ist.

In derselben Weise läßt sich auch die Bewegung eines Radfahrers oder eines Eisenbahnwagens auf geneigter Schienenbahn behandeln.

In der Figur 32 bezeichne S den Schwerpunkt eines Wagens, der auf einer Schienenbahn von der Neigung α gegen die Horizontalebene steht, $S\,G$ die Schwere, $S\,R$ die an Stelle des Schienenwiderstandes substituierte Kraft, dann bewegt sich der Wagen wie ein freier Körper, und es ist $S\,C$ die resultierende Zentripetalkraft. Demnach wird $\frac{m\,v^2}{\varrho} = m\,g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Es muß nun wieder der Druck $S\,R'$, den der bewegte Wagen auf die Schienen ausübt, der Kraft $S\,R$ gleich und entgegengesetzt sein. Hieraus folgt für $S\,R'$ die Größe $\frac{m\,g}{\cos\alpha}$ wie im vorigen Fall. Diese Druckkraft setzt sich wieder aus einer Komponente der Schwere, nämlich $m\,g\cos\alpha$, und einer zentrifugalen Druckkomponente zusammen, deren Größe wie früher dargestellt wird durch:

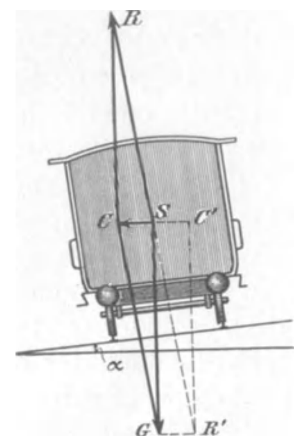

Fig. 32.

$$\frac{m\,g}{\cos\alpha} - m\,g\cos\alpha = \frac{m\,g\sin\alpha^2}{\cos\alpha} = m\,g\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha$$

und die demnach als Komponente einer Zentrifugalkraft $S\,C = m\,g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ aufgefaßt werden kann. Die Annahme einer solchen Zentrifugalkraft ist in diesem Falle gerechtfertigt, sofern man den Wagen samt der Schienenbahn als Teile eines um eine vertikale Achse rotierenden Körpers betrachten kann. Man wird daher in diesem Falle auch einfacher so verfahren können, daß man die Zentrifugalkraft $S\,C'$ mit der Schwere $S\,G$ zu einer gegen die Bahn normalen Resultierenden $S\,R'$ zusammensetzt. Um die bei gegebenem Bahnradius und gegebener Geschwindigkeit erforderliche Überhöhung h der Außenschiene gegen die Innenschiene zu finden, hat man $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{s}$ zu benutzen, worin s die Spurweite der Schienen bedeutet, und erhält:

$$\frac{h}{s}g = \frac{v^2}{\varrho}, \text{ woraus } h = \frac{v^2\,s}{\varrho\,g}.$$

Ist der Wagen gezwungen, sich auf einer kreisförmigen Schienenbahn von gegebenem Radius ρ zu bewegen, so hat man es mit einer Zwangsbewegung im Sinne des Abschnittes III zu tun, und dann ist wirklich (im Unterschied von dem Zentrifugalpendel) eine Zentrifugalkraft von der angegebenen Größe und Richtung vorhanden. Wird dagegen ein Fahrrad auf ebener — horizontaler oder geneigter — Bahn im Kreise bewegt, so kommt ähnlich wie bei dem Zentrifugalpendel ein höherer Grad von Bewegungsfreiheit in Betracht (dem

Schwerpunkt ist eine Zylinderfläche vorgeschrieben), und es bedürfte hier wiederum einer eingehenderen Analyse, um den Vorgang völlig kar zu legen.

Schluß. Wir sind jetzt in der Lage zu übersehen, wie die Verwirrung entstanden ist, die bezüglich der Zentrifugalkraft herrscht. Die Ursache liegt einerseits in der irreführenden Newtonschen Fassung des Beharrungsgesetzes und des damit zusammenhängenden Kraftbegriffs, andrerseits aber darin, daß man die sehr verschiedenartigen Erscheinungen, um die es sich hier handelt, sämtlich nach einem Schema behandeln zu können meinte. Offenbar aber sind es sehr verschiedene Vorgänge, wenn eine Bleikugel durch eine am Faden ziehende Hand, oder wenn sie durch einen gebogenen Blechstreifen (oder eine Kugelschale) zur krummlinigen Bewegung gebracht wird. Man hat namentlich aber scharf zu unterscheiden, ob auf den rotierenden Körper von der Achse aus eine Kraft ausgeübt wird, oder ob dies nicht der Fall ist; allgemein ausgedrückt, ob bewegende Kräfte oder ob nur Widerstände im Spiel sind. Im ersten Fall erleidet der Körper zentripetale Einwirkungen, im zweiten übt er selber zentrifugale Wirkungen aus.

Die zentrifugalen Wirkungen hat man in einigen Fällen auf einen Trägheitswiderstand des bewegten Körpers, in anderen auf eine Reaktion gegen die nach der Achse hin wirkende Zentripetalkraft, in noch anderen auf eine fingierte Kraft zurückgeführt. Abgesehen davon, ob diese Auffassungen im besonderen Fall zutreffend sind, ist eine erhebliche Verdunkelung des wahren Sachverhalts auch dadurch hervorgerufen worden, daß ein jedes dieser Erklärungsprinzipien als gültig für den ganzen Bereich der zu untersuchenden Vorgänge angesehen wurde.

Die Untersuchung hat auch zu der Frage geführt, ob Widerstände mit Recht den Kräften gleichwertig zu setzen sind. Diese Frage ist verneint worden. Wie man aber auch hierüber urteilen mag, unberührt davon bleibt das Resultat, daß die Zentrifugalkraft bei der zwangläufigen Bewegung keine uneigentliche, sondern eine wirkliche Kraft ist, und daß sie nicht als eine Reaktionskraft, sondern nach dem Vorgange Eulers als eine aus der Bewegung selbst entspringende Kraft angesehen werden muß.

In bezug auf die prinzipiellen Abänderungsvorschläge für die Grundgesetze der Bewegung sei auf Abschnitt III, und besonders bezüglich des Gesetzes der Aktion und Reaktion auf Nr. 13 und 14 verwiesen.

Anhang.

Einige neuere Apparate zur Messung der Zentrifugalkraft.

1. John Perry sagt in seinem Buche *Applied Mechanics*[1]), er kenne nur einen Apparat, der es ermögliche, über die Gesetze der Zentrifugalkraft systematische Versuche anzustellen. Er beschreibt den Apparat wie folgt:

In der nebenstehenden Figur 33 stellt A einen flachzylindrischen Hohlkörper aus Gußeisen dar, der an einer Seite durch eine dünne, feste und zugleich biegsame Stahlplatte C begrenzt ist. In die zylindrische Wand des Hohlkörpers ist ein Glasrohr B eingesetzt, und der Hohlraum ist mit Quecksilber gefüllt, das in dem Glas-

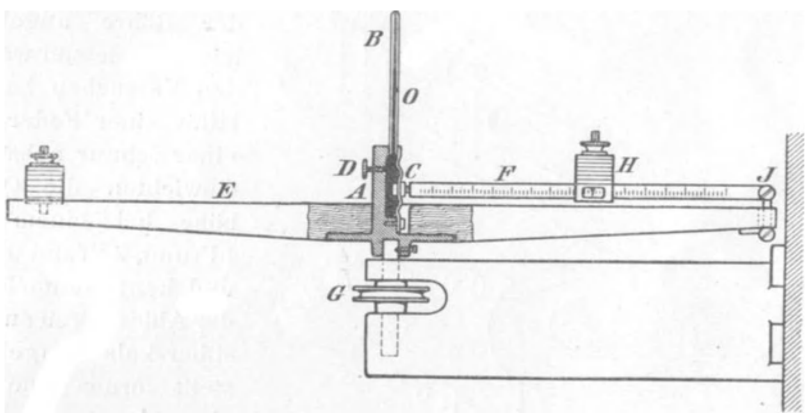

Fig. 33

rohr bis zur Höhe b reicht. Wird gegen C ein Druck oder Zug ausgeübt, so sieht man das Quecksilber in der Röhre steigen oder fallen. An der Seite des Hohlkörpers, die der Stahlplatte gegenüber liegt, ist eine Schraube D durch die Wand des Hohlkörpers hindurchgeführt; sie dient zur Regulierung des Quecksilberstandes in der Röhre. Der Körper A ist in die Mitte einer Kreisscheibe E eingefügt, die in Rotation versetzt werden kann, und zwar befindet sich die Glasröhre B genau in der Rotationsachse, so daß der Stand des Quecksilbers bei jeder Umdrehungsgeschwindigkeit genau abgelesen werden kann. In der Mitte der elastischen Platte C ist das eine Ende eines langen Metallstabes F befestigt, während dessen anderes Ende bei J mit einem kurzen Hebelarm verbunden ist, so daß der Stab sich leichter vor- und rückwärts verschieben kann, als wenn man ihn auf einer Stütze gleiten ließe.

[1]) Applied Mechanics, a treatise for the use of students who have time to work experimental, numerical and graphical exercises illustrating the subject. By John Perry, London, Cassel and Co, 1897. Chapter XXVII: Centrifugal Force. Vgl. auch John Perry, Angewandte Technik, deutsch von Rud. Schick (B. G. Teubner, 1908), S. 599. Nach ähnlichem Prinzip ist ein Apparat von K. Bruno konstruiert, der in Zeitschr. f. d. physik. Unterricht XIX, 299 beschrieben ist.

Auf dem Metallstabe läßt sich eine Masse festklemmen, deren Größe nach Belieben von 0,5 bis 8 Pfund (ca. 250 g bis 4 kg) verändert werden kann. Der Abstand von der Achse ist ebenfalls zwischen 1,5 und 11,5 Zoll (3,8 bis 29,2 cm) veränderlich und kann an einer Skala mit Hilfe eines Zeigers bis auf Zehntel und Hundertstel Fuß (1 Fuß = 12 Zoll) abgelesen werden. Der ganze Rotationsapparat ist auf ein festes Wandbrett aufgesetzt. Der Beobachter dreht die Kurbel einer Schwungmaschine, die mit der Riemscheibe G verbunden ist, richtet sein Augenmerk auf die Höhe des Quecksilbers und ist so imstande, die Rotationsgeschwindigkeit in hohem Grade konstant zu halten. Er zählt die von seiner Hand ausgeführten Umdrehungen, während ein Gehilfe die Zeit beobachtet, so daß kein besonderer Geschwindigkeitsmesser oder Tourenzähler erforderlich ist. Die Zentrifugalkraft des Stabes und der auf ihm sitzenden Masse bewirkt einen Zug an der elastischen Platte C, und dieser hat ein Sinken des Quecksilbers in der Röhre zur Folge. Die Veränderung des Quecksilberstandes kann an einer festen Skala, die an der Röhre angebracht ist, leicht gemessen werden. Vor den Versuchen hat man mit Hilfe einer Federwage oder einer Schnur nebst Rolle und Gewichten die Quecksilberhöhe bei einem Zug von 1 Pfund, 2 Pfund usf. ermittelt und kann nunmehr den Wert der Ablesungen an der Quecksilberskala angeben. Man stellt ferner eine Reihe von Versuchen an, bei denen die Masse ganz von dem Stabe F entfernt ist, und findet so die Zentrifugalwirkung des Stabes usw., die man bei den eigentlichen Versuchen in Abzug zu bringen hat. Mit diesem Apparat lassen sich die Gesetze der Zentrifugalkraft leicht bestätigen.

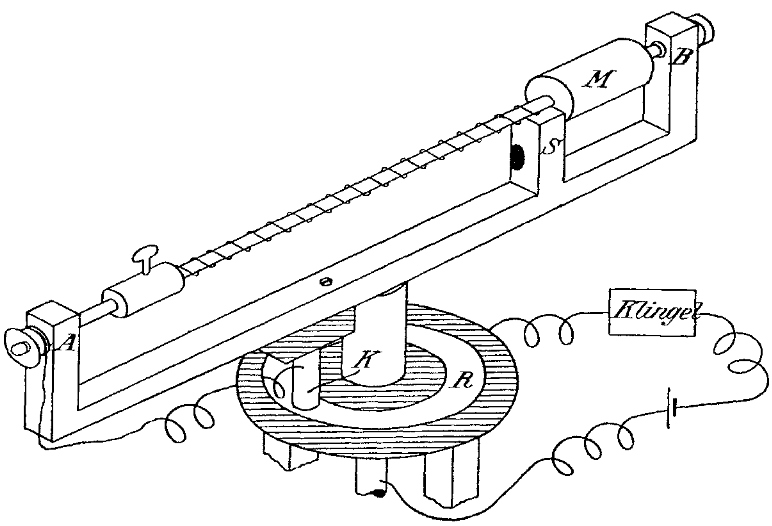

Fig. 34.

2. Ein zweiter Apparat ist von HENRY CREW in *School Science and Mathematics* (*V No. 5, May 1905*) beschrieben worden [1]). Auf der Achse einer Rotationsvorrichtung (Fig. 34) ist unter rechtem Winkel ein Tragbalken angebracht, zwischen dessen senkrecht nach oben gerichteten Ansatzstücken A und B sich ein Stahlstab befindet; auf diesem ist ein dünner Klaviersaitendraht in engen Windungen aufgewickelt. Das eine Ende des Drahts wird durch eine Klemmschraube an einer bestimmten Stelle des Stahlstabes festgehalten; auf den Stab ist ferner eine mit dem andern Ende des Drahtes verbundene Masse M, etwa von 100 g aufgesetzt. Überschreitet nun die Rotationsgeschwindigkeit eine gewisse Größe, so gleitet die Masse M auf dem Stabe nach außen bis zum Kontakt mit dem Ansatzstück B. Eine hölzerne Stütze S ist so angebracht, daß die Masse M verhindert ist, mehr als etwa 1 mm zurückzugleiten, wenn die Geschwindigkeit unter den kritischen Wert sinkt,

[1]) Ein Bericht darüber in Zeitschr. f. d. physik. Unterricht XIX, S. 32 (1906).

der erforderlich ist, die Masse zwischen S und B oszillierend zu erhalten. Es ist nun noch ein Stromkreis mit einer elektrischen Klingel und einem Trockenelement so geführt, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit, die zum Kontakt der Masse M an B erforderlich ist, gemessen werden kann. Zu dem Zweck ist der Metallstab an beiden Enden durch Hartgummibuchsen isoliert; auf die Tischplatte, innerhalb deren die vertikale Achse rotiert, ist ein isolierter ringförmiger Kollektor gesetzt, und auf diesem schleift eine Kontaktbürste, die von dem rotierenden Gestell durch eine Hartgummiplatte isoliert und mit dem einen Ende des Stahlstabes durch einen Draht verbunden ist. Von dem andern Ende des Stahlstabes ist der Strom nach der Achse und durch diese nach der Klingel geführt. Diese ertönt, sobald die Masse M das Ansatzstück B des Tragbalkens berührt; gleichzeitig wird dann die Rotationsgeschwindigkeit auf eine der üblichen Arten gemessen. Durch Verstellung der Klemmschraube auf den Stahlstab können verschiedene Spannungen der Spiralfeder und demnach verschiedene kritische Geschwindigkeiten angewendet werden. Mißt man überdies die jedesmalige Verlängerung e der Feder und bestimmt noch den Dehnungsmodul K, so ist $K \cdot e = m r w^2$, und damit die jedesmalige Größe der Zentrifugalkraft gemessen. Die Genauigkeit der Methode ist daraus zu beurteilen, daß der Verfasser den Vergleich der so gemessenen Zentrifugalkraft mit der Schwere auch zur Bestimmung der Größe g benutzt und deren Wert (als Mittelwert aus einer größeren Zahl von Versuchen) genauer als mit der Atwoodschen Fallmaschine ermittelt hat.

3. Eine vereinfachte, der vorigen ähnliche Vorrichtung hat unabhängig davon Emil Schulze angegeben (*Zeitschr. f. d. physikalischen Unterricht XVIII, 1905*). Ein kurzer Gummischlauch (bzw. starker Gummifaden) hat an seinen beiden Enden je einen kleinen Ring. Mit dem einen Ringe wird der Schlauch an der Achse der Schwungmaschine befestigt, während am anderen Ringe die Masse m angebracht ist. Läßt man den Schlauch mit der Masse m rotieren, so dehnt er sich aus. Bei nicht zu schneller gleichmäßiger Drehung kann man bequem die Anzahl der Umdrehungen in der Minute zählen, zumal wenn an der Masse m ein Papierstreifen befestigt ist, der bei jeder Umdrehung an einen Schirm schlägt. Nähert man darauf den Schirm der Masse m, bis diese den Schirm streift, so gelingt es, den Radius r hinreichend genau zu bestimmen. Nachdem der Wert von k mittels der Fliehkraftformel berechnet worden ist, wird der Schlauch an einem Haken aufgehängt und durch Gewichte bis zu derselben Länge ausgedehnt, die er vorher unter Einfluß der Fliehkraft angenommen hatte. Bezeichnet man mit k' die Kraft, die zu dieser Ausdehnung nötig ist, so muß der Versuch denselben Wert für k' wie für k ergeben. Bei einem Versuch war z. B. $m = 50$ g, $r = 42{,}5$ cm, die Winkelgeschwindigkeit $w = 5\pi$, woraus sich ergibt $k = 525500$ Dynen; ein Gewicht von 540 g war nötig, um den Schlauch bis zu derselben Länge wie vorher auszudehnen, der Wert von k' betrug also 529500 Dynen.

4. Ein anderes Verfahren, das aber nicht die Variationen wie die ersten beiden gestattet hat H. Hartl in den *Wiener Vierteljahresberichten VIII, Heft 2* beschrieben[1]). Doch ist hier die Zwangläufigkeit eine andere als bei den einfachen Rotationsversuchen in den vorigen Fällen, daher auch Versuch sowohl wie Rechnung weniger durchsichtig. Die Kugel k, deren Fliehkraft gemessen werden soll, ist zwischen drei unter 45°

[1]) Vgl. den Bericht in Zeitschr. XVI, S. 225 (1904).

geneigten Stahldrähten s angebracht (Fig. 35), längs deren sie mit verschwindend kleiner Reibung auf- und abrollen kann. Die drei Drähte sind an dem Rahmen R befestigt, der in drei verschiedenen Stellungen auf die wagerechte Schiene S aufgesetzt und durch die Schraube i darin festgehalten werden kann. In diesen Stellungen hat der Mittelpunkt der ruhenden Kugel von der Drehachse die Abstände 1, 2 und 3 cm.

Zur Erläuterung des bei der Rotation eintretenden Vorgangs wird angenommen, daß auf die Kugel außer ihrem Gewichte P noch die wagerecht gerichtete Fliehkraft F wirkt. Zerlegt man diese beiden Kräfte in je zwei Komponenten, parallel und senkrecht zu den Stahldrähten (Fig. 36), so werden die Komponenten senkrecht zu den Stahldrähten aufgehoben, während die dazu parallelen Komponenten die Kugel nach entgegengesetzten Richtungen antreiben. Nennt man die letzteren f und p, so ist $f = F \cos 45^0$ und $p = G \cos 45^0$, und demnach $f \gtreqless p$, wenn $F \gtreqless G$ ist.

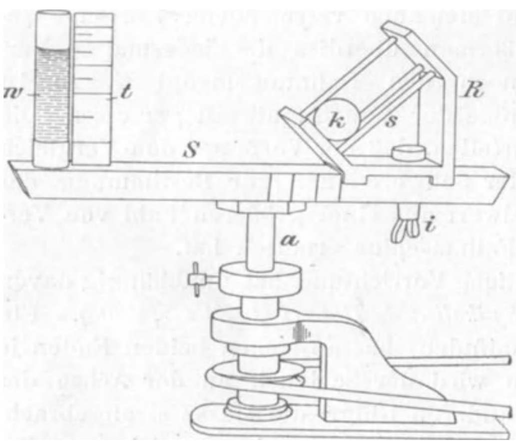

Fig. 35.

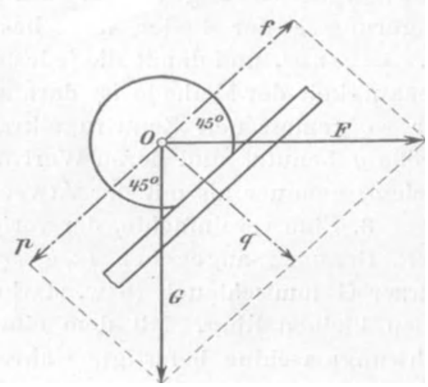

Fig. 36.

Sobald also bei der Drehung, deren Geschwindigkeit man allmählich steigert, $F > P$ wird, wird auch $f > p$, und die Kugel läuft aufwärts. Da hierbei ihr Achsenabstand, also auch die Fliehkraft rasch wächst, so rollt die Kugel sehr schnell empor und schlägt mit stark hörbarem Schlage an den Rahmen R an. Man kann nun sagen: Sobald man die Kugel anschlagen hört, hat F den Wert von G gerade erst überschritten: es muß also annähernd $F = G$ sein. Diese Gleichheit muß sich nun auch aus der zu bestätigenden Fliehkraftformel $F = G \cdot v^2/g\,r$ ergeben. Der Drehungshalbmesser r ist je nach der Einstellung des Rahmens R 1, 2 oder 3 cm, und die Geschwindigkeit v wird aus der Tourenzahl n berechnet. Diese aber wird durch folgende Vorrichtung ermittelt. Das Glasröhrchen w wird vor dem Versuche mit Wasser gefüllt, das während der Drehung teilweise, und zwar nach Maßgabe der erreichten höchsten Geschwindigkeit, herausgeschleudert wird. Wenn man, unmittelbar nach dem Anschlagen der Kugel, zu drehen aufhört, so zeigt der Wasserstand in w an der empirischen Skala t die entsprechende Tourenzahl n an.

Die Genauigkeit des Verfahrens dürfte indessen schwerlich so groß sein, wie eine von dem Verfasser mitgeteilte Versuchsreihe sie erscheinen läßt. Zur ersten Einführung in den Begriff der Zentrifugalkraft ist das Verfahren weniger geeignet, weil wegen der Benutzung nur einer Komponente der Schwungkraft die Demonstration nicht unmittelbar genug ist.