

Maercks

---

# Bergbaumechanik

Zweite Auflage

# Bergbaumechanik

Lehrbuch für bergmännische Lehranstalten  
Handbuch für den praktischen Bergbau

von

**Dipl.-Ing. J. Maercks**

Bergschule Bochum

Zweite Auflage

Mit 521 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1940

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

**Copyright 1930 and 1940 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1940.  
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1940.  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1940**

ISBN 978-3-662-36215-0      ISBN 978-3-662-37045-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-37045-2

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Als „Lehrbuch für Mechanik“ ist die erste Auflage ihren Pionierweg durch die Bochumer Bergschule gegangen. Jedes Lehrbuch zwingt dem Unterrichtenden einen bestimmten Lehrweg und eine dem Verfasser des Buches denkeigene Lehrmethode auf. Daher erfordert der Unterricht mit einem Lehrbuch, das den Schülern in die Hand gegeben wird, für den Lehrer zunächst eine Arbeit und Zeit erfordernde Umstellung, die aber gerne hingenommen werden sollte mit Rücksicht auf den außerordentlichen Zeitgewinn, den die Ersparung der fortlaufenden Diktate, die für die Ableitung der Gesetze sonst erforderlich sind, bringt. Der Jüngere sollte auch gerne auf den in mühevoller und jahrelanger Berufsarbeit erworbenen Erfahrungen des Älteren aufbauen, denn der einfachste Weg wird meistens erst nach vielen, vielen Umwegen gefunden.

Wenn die Stoffgestaltung trotz großer Einschränkung den Umfang des Buches erforderlich gemacht hat, so liegt das an der vielgestaltigen Lehraufgabe der großen Bochumer Bergschule, die diese grundlegende Wissenschaft lehren muß:

1. für Grubensteiger auf der Unterklasse,
2. für Grubenbetriebsführer auf der Oberklasse,
3. für Maschinensteiger über Tage auf der Unterklasse,
4. für Maschinensteiger unter Tage auf der Unterklasse,
5. für Maschinenbetriebsführer auf der Oberklasse,
6. für Elektroteiger auf der Unterklasse,
7. für Elektrobetriebsführer auf der Oberklasse,
8. für Vermessungssteiger auf der Unterklasse.

Das Lehrbuch umfaßt den Stoff für alle diese Sonderklassen, und es ist Sache des Lehrers, sich auf den für die entsprechende Sonderklasse besonders geeigneten Stoff zu beschränken.

Hierfür seien folgende Richtlinien gegeben:

Unterklasse für Grubensteiger:

1. und 2. Halbjahr: Bewegungslehre S. 163—205. Das Gesetz der mechanischen Arbeit und Leistung S. 210—243. — Beschleunigung der Massen bei Seilförderungen, Seilrutsch S. 259—264.
3. Halbjahr: Statik der festen Körper mit Anwendungen auf den Grubenausbau S. 1—37 und 41—73. — Schiefe Ebene und Reibungswiderstände S. 87—124. — Bremsen und Bandreibung S. 137—155.
4. Halbjahr: Schüttelrutsche, gleitende Förderung durch Kratzbänder, Bremsförderer, Wendelrutschen und Seigerförderer, Bandförderung S. 292—332. — Festigkeitslehre S. 359—406.

Oberklasse für Grubenbetriebsführer: Seilrutschgefahr S. 155—160 und S. 259—264. Zeichnerische Lösung der Seilrutschfrage S. 264—274. — Dynamische Seilbelastung durch Anfahrkräfte S. 275—281. — Hammerrückschlag S. 281—291.

Die Strömungslehre, insbesondere die Bewegung von Luft S. 448 bis 456, Druckluftleitungen, Gasleitungen und Blasversatzleitungen S. 456—470, Grubenweite und Grubentemperatur, Streckentemperatur, der Grubenventilator, Zunahme des Luftdrucks in der Teufe S. 477—499, das Messen von Strömungswiderständen im Grubengebäude, der natürliche Wetterzug S. 500—512, praktische Widerstandsmessungen in Wetterwegen S. 518—522, die durch die Bewetterung abgeführte Grubenwärme S. 526—529, das Katathermometer zur Bestimmung der Arbeitseigenschaften im Grubenraum und zum Messen kleiner Geschwindigkeiten S. 531—534.

Die nicht genannten Abschnitte sind den Sonderklassen der Maschinensteiger und Elektrosteiger in erster Linie vorbehalten. Der Fachlehrer wird dieses oder jenes Gebiet je nach Neigung mehr oder weniger heranziehen.

Allgemein sei gesagt, daß das Lehrbuch keine fertige Formel dem Leser vorsetzt, sondern in einfachster, elementarer Form die Mechanik-gesetze entwickelt. Daß der Lehrer in manchen Fällen die Entwicklung überschlägt wie z. B. bei der Bandreibung oder Stoßtheorie und nur mit den fertigen Formeln die Anwendung der Gesetze zeigt, ist eine berechtigte Maßnahme. Man wird überhaupt die Schüler nicht mit langen Ableitungen beschweren, sondern in der Hauptsache das Verständnis für die praktische Anwendung der Gesetze fördern. Das habe ich in allen Fällen durch eingefügte Beispiele eingeleitet.

Die Neubearbeitung hat das Buch entsprechend der fortschreitenden Verfeinerung der Mechanisierung vielseitiger und tiefer eindringend gestaltet.

Der Abschnitt Rutschen ist neu bearbeitet und die Förderung durch Kratzbänder, Bremsförderer, Seigerförderer, Bänder und Wendelrutschen als neues Gebiet behandelt. Neu ist ferner die Schwingungslehre, die Entwicklung des starren eisernen Grubenstempels, der Nachweis der statischen Sicherheiten bei Schachtförderungen.

In der Strömungslehre ist die Theorie durch praktische Beispiele ergänzt worden. Hierbei wurden Versuche des Verfassers an Druckluftleitungen und Blasversatzanlagen herangezogen. Auch das praktische Messen von Strömungswiderständen in Wetterwegen und die Bestimmung des natürlichen Wetterzuges durch Ventilatorversuche ist ausführlich behandelt.

Das Buch sollte in diesem Umfang nicht nur ein Lehrbuch der Bergschule, sondern ein praktisches Nachschlagebuch für den Bergbau werden, das alle Fragen technischer Vorgänge unter und über Tage in elementarer Weise theoretisch beantwortet.

Bochum, im April 1940.

**Maercks.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seit
Einleitung. . . . .	1
Erster Abschnitt.	
<b>Die Statik der festen Körper . . . . .</b>	<b>2</b>
1. Allgemeines von den Kräften . . . . .	2
2. Zusammensetzung von Kräften, welche in derselben Geraden wirken . . . . .	4
3. Zusammensetzung von Kräften, welche nicht in derselben Geraden wirken, aber denselben Angriffspunkt haben . . . . .	5
Zwei Kräfte. — Beliebig viele Kräfte.	
4. Das Zerlegen einer Kraft in zwei Seitenkräfte. . . . .	12
5. Zweimaliges Zerlegen in zwei Seitenkräfte . . . . .	19
6. Zusammensetzung von Kräften, welche nicht denselben Angriffspunkt haben . . . . .	20
7. Zusammensetzung paralleler Kräfte. . . . .	22
8. Das Gesetz der Wechselwirkung oder Reaktion . . . . .	23
9. Die ersten zwei Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	25
10. Die zeichnerische Gleichgewichtsbedingung . . . . .	27
11. Das Kräftepaar und das statische Moment einer Kraft . . . . .	28
12. Das Aufsuchen der dritten Gleichgewichtsbedingung . . . . .	29
13. Anwendungen der Gleichgewichtsbedingungen, Balken auf zwei Stützen. . . . .	30
14. Der Balken auf zwei Stützen mit überragendem Ende . . . . .	33
15. Der Balken auf zwei Stützen mit Schrägbelastung . . . . .	35
16. Der Kräfteplan nach Cremona . . . . .	37
17. Eine Verbindung von zwei sich stützenden Stangen . . . . .	41
18. Das Stabdreieck . . . . .	42
19. Der Dreigelenkbogen im Grubenausbau . . . . .	43
Gleichmäßige Vertikalbelastung. — Einseitige Vertikalbelastung. — Einseitige Schrägbelastung. — Allgemeines über den Dreigelenkbogen.	
20. Das Stabviereck . . . . .	49
Belastung der Kappenstange. — Belastung der Seitenstange.	
21. Das Stabviereck im Grubenausbau . . . . .	53
22. Das symmetrische Stabfünfeck. . . . .	56
23. Das Stabfünfeck im Grubenausbau. . . . .	58
24. Das Stabpolygon . . . . .	62
25. Das Stabpolygon im Grubenausbau . . . . .	63
26. Der Ausbau in Abbaustrecken . . . . .	66
27. Der Gebirgsdruck . . . . .	68
28. Das Gleichgewicht von Körpern mit fest gelagerter Drehachse . . . . .	73
Die Belastungskräfte wirken in derselben Richtung und haben verschiedene Angriffspunkte. — Die Belastungskräfte wirken in verschiedenen Richtungen mit gleichem Angriffspunkt. — Die Belastungskräfte haben verschiedene Richtungen und verschiedene Angriffspunkte. — Zahnradwellen. — Kurbelwellen.	
29. Bewegliche Hebel. . . . .	77
Hebebaum — Zeigerwaage — Dezimalwaage — feste Rolle — lose Rolle — Differentialflaschenzug.	
30. Das Übersetzungsverhältnis . . . . .	84
Kurbelwelle. — Haspeltriebwerk. — Zahnstangenwinde.	
31. Die schiefe Ebene . . . . .	87
32. Die Reibungswiderstände . . . . .	90

	Seite
Gleitende Reibung. — Reibungswinkel. — Reibungsvorstellung. — Reibungswiderstand auf der schiefen Ebene. — Reibungswiderstand der Bewegung. — Zapfenreibung. — Rollende Reibung. — Reibung der Schienenwagen. — Reibung im Rollenlager. — Reibung im Kugellager. — Fahrzeuge auf schiefer Ebene. — Bremsberg- und Haspel-förderung. — Lokomotivförderung.	
33. Der Keil . . . . .	113
Heben durch Keilkraft. — Aufkeilen von Scheiben. — Nachgiebiger Grubenstempel. — Bewegung in Keilnuten. — Grubenstempel mit Keilbahn.	
34. Die Schraube . . . . .	124
Schraubenlinie als schiefe Ebene. — Schraubenflaschenzug. — Wirkungsgrad der Schraube. — Schneckengetriebe im Maschinenbau. — Vorbaustempel. — Scharfgängige Schraube.	
35. Die Backenbremse . . . . .	137
Einfache Backenbremse. — Selbstsperrende Backenbremse. — Doppelte Backenbremse für Fördermaschinen. — Doppelte Backenbremse für Haspel.	
36. Die Bandreibung . . . . .	145
37. Die Bandbremse . . . . .	148
Einfache Bandbremse. — Differentialbandbremse. — Förderhaspelbandbremse.	
38. Die Seilrutschgefahr . . . . .	155
39. Der Riemenzug . . . . .	157
40. Der Kettenbiegungswiderstand . . . . .	160
41. Der Seilbiegungswiderstand . . . . .	162

#### Zweiter Abschnitt.

<b>Die Dynamik fester Körper</b> . . . . .	<b>163</b>
1. Die Bewegungsarten . . . . .	163
2. Gleichförmige Bewegung . . . . .	163
Zeichnerische Darstellung der gleichförmigen Bewegung. — Das Zeitwegediagramm. — Das Zeitgeschwindigkeitsdiagramm. — Die gleichförmige Kreisbewegung. — Die mittlere Kolbengeschwindigkeit. — Die größte Kolbengeschwindigkeit. — Bewegungsübertragung durch Zahnräder, Riemen und Seile. — Gleichförmige Bewegung in Rohrleitungen. — Gleichförmige Bewegung in Kanälen und Wetterstrecken.	
3. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung . . . . .	173
Bewegung aus der Ruhelage heraus. — Bewegung aus einer Anfangsgeschwindigkeit heraus.	
4. Die gleichförmig verzögerte Bewegung . . . . .	178
5. Die ungleichförmige Bewegung . . . . .	180
6. Das Fahrtdiagramm einer Fördermaschine . . . . .	184
Produktenförderung. — Seilfahrt.	
7. Das unvorschriftsmäßige Fahren einer Fördermaschine . . . . .	186
8. Der freie Fall und der senkrechte Wurf aufwärts . . . . .	191
9. Der Fall auf schiefer Ebene . . . . .	194
10. Zusammensetzung gleichartiger und verschiedenartiger Bewegungen. . . . .	196
Zwei geradlinige, gleichförmige Bewegungen. — Zwei geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegungen. — Zwei verschiedenartige Bewegungen.	
11. Die parabolische Bewegung . . . . .	199
12. Die gleichförmige Kreisbewegung, Zentripetalbeschleunigung . . . . .	201
13. Der horizontale Wurf . . . . .	202
14. Die Relativbewegung eines Körpers . . . . .	205
15. Der Bewegungsvorgang in Schaufelrädern. . . . .	206
16. Das Gesetz der mechanischen Arbeit und Leistung . . . . .	210
Mechanische Arbeit. — Leistung einer Kraft. — Der Schlepper. — Das Grubenpferd. — Das Schachtpferd.	

	Seite
17. Umsetzung von Wärme in mechanische Arbeit . . . . .	217
Pferdestunde. — Kilowattstunde.	
18. Der mechanische Wirkungsgrad der Maschinen . . . . .	218
19. Der isothermische Wirkungsgrad bei Druckluftantrieben . . . . .	221
20. Leistungsmessung durch Abbremsen . . . . .	223
Der Bremszaun. — Bremsversuch an einem Zahnradmotor.	
21. Das Trägheitsgesetz. . . . .	225
22. Masse und Beschleunigungsgesetz . . . . .	225
23. Das Gesetz der Schwere . . . . .	226
24. Anwendungen des Beschleunigungsgesetzes . . . . .	227
Abbauhammer arbeitet horizontal — vertikal abwärts — vertikal aufwärts.	
25. Die Zentrifugalkraft . . . . .	229
Die Zentrifugalkraft im Drehkolbenmotor. — Bahnkurve einer Schie- nenbahn. — Schwingkugelregulator. — Das Kreiselrad als Pumpe.	
26. Das Prinzip der lebendigen Kraft (Wucht) . . . . .	236
Vorschub der Kohle in der Schüttelrutsche. — Schlagarbeit der Druck- luftschlämmer. — Die Fangvorrichtungen.	
27. Die lebendige Kraft umlaufender Scheiben . . . . .	243
Trägheitsmomente. — Reduzierte Masse. — Trägheitshalbmesser-Um- rechnung von Seilscheibengewichten auf Seilmitte.	
28. Die Wirkung der Schwungräder . . . . .	248
29. Der Satz vom Antrieb. — Anwendung bei Schaufelrädern . . . . .	252
30. Die Beschleunigung der Massen bei Seilförderungen . . . . .	259
Der dynamische Einfluß auf das Seilkraftverhältnis. — Die Seil- rutschgefahr. — Größte zulässige Anfahrbeschleunigung. — Größte zulässige Verzögerung. — Fahren mit eingehängter Last.	
31. Zeichnerische Lösung der Seilrutschfrage nach Weih. . . . .	264
Das Anfahren. — Das Stillsetzen. — Das Fahren mit eingehängter Last. — Dasselbe Verfahren bei Seilscheibenmaschinen. — Berück- sichtigung der Schachttreibung beim Ziehen.	
32. Turmfördermaschinen mit Gegenseibe. . . . .	271
Ziehen der Nutzlast. — Stillsetzen. — Das Einhängen bei der Seilfahrt.	
33. Die Fallmaschine. . . . .	275
34. Die dynamische Seilbelastung und die Anfahrkräfte beim Förderzug. . . . .	277
35. Der Hammerrückschlag . . . . .	281
Der Hammer arbeitet horizontal — vertikal nach unten — vertikal nach oben. — Wirkung des Rückschlags auf den Arbeiter.	
36. Die Schüttelrutsche. . . . .	292
Einteilung der Förderverfahren. — Das Beschleunigungsverfahren. — Kraftverhältnisse. — Bewegungsverhältnisse. — Zeitwege- und Zeit- geschwindigkeitsdiagramm. — Hubzahl. — Fördermenge. — Luftver- brauch. — Das Beschleunigungsverfahren unter Anwendung von schie- fen Ebenen. — Zusammenstellung der Ergebnisse für das Beschleuni- gungsverfahren. — Das Regeln der Förderleistung. Das Schwerkraftverfahren. — Söhlige Förderung. — Förderung mit Einfallen. — Lagerung, Antrieb und Kraftverbrauch.	
37. Gleitende Förderung durch Kratzbänder und Bremsförderer . . . . .	317
38. Gleitende Förderung in Wendelrutschen . . . . .	324
39. Gleitende Förderung in Seigerförderern . . . . .	326
40. Die Bandförderung . . . . .	329
41. Theorie des Stoßes . . . . .	333
Der gerade und zentrale Stoß. — Einführung des Stoßelastizitätskoeffi- zienten in die Bewegungsformeln. — Der vollkommen unelastische Stoß. — Der unvollkommen elastische Stoß. — Der vollkommen ela- stische Stoß beim Abbauhammer. — Ermittlung des Stoßwirkungsgrades.	
42. Geradlinige Schwingungen . . . . .	349
Schwingung eines Körpers zwischen zwei Federn. — Schwingungen einer Seillast. — Resonanzbedingung. — Kritische Drehzahl von Ma- schinenwellen.	



## Dritter Abschnitt.

<b>Festigkeitslehre</b> . . . . .	359
1. Begriffsbestimmungen . . . . .	359
Spannung und Dehnung. — Proportionalitätsgrenze, Elastizitätsgrenze, Fließgrenze, Bruch. — Zulässige Spannung.	
2. Die Zugfestigkeit . . . . .	365
3. Förderseile . . . . .	368
4. Die Druckfestigkeit . . . . .	373
5. Die Biegezugfestigkeit . . . . .	374
Schwerpunktslage bei Querschnittsflächen. — Trägheitsmomente und Widerstandsmomente von Querschnittsflächen. — Die einfachen Bie- gungsfälle. — Die Form vom gleichen Widerstand. — Die elastische Linie. — Der Balken auf zwei Stützen mit Einzellast und mit Strecken- last.	
6. Nachweis der statischen Sicherheiten für eine Blindschacht-Förderung .	391
7. Die Knickfestigkeit . . . . .	399
Eulersche Zerknickungsformel. — Grenze zwischen Zerdrücken und Zerknicken. — Versuchswerte und Berechnungswerte. — Geteiltes Grubenholz. — Der nachgiebige Eisenstempel. — Knickfestigkeit für Baukonstruktionen.	
8. Die Scherfestigkeit . . . . .	406
9. Die Verdrehungsfestigkeit . . . . .	408
Polares Trägheitsmoment der Kreisfläche. — Berechnung der Wellen- durchmesser.	

## Vierter Abschnitt.

<b>Strömungslehre</b> . . . . .	412
1. Gleichgewicht im ruhenden Wasser. . . . .	412
2. Die potentielle Energie einer Wassermenge . . . . .	414
3. Der Satz von Pascal . . . . .	415
4. Der statische Wasserdruck auf ebene Gefäßwände . . . . .	416
5. Statischer und dynamischer Druck . . . . .	416
6. Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit . . . . .	417
Die Stetigkeitsgleichung. — Der Satz von Bernoulli.	
7. Anwendungen des Bernoullischen Satzes . . . . .	424
Querschnittsveränderungen. — Wasserstrahlpumpe.	
8. Die Energiegleichung mit Berücksichtigung der Reibung . . . . .	427
9. Die Rohrreibung . . . . .	428
Die Reibungsgleichung für Rohre. — Ableitung der Reynoldsschen Zahl. — Die Reibungsziffer als Abhängige der Reynoldsschen Zahl.	
10. Laminare und turbulente Strömung . . . . .	437
11. Widerstand bewegter Körper in Flüssigkeiten . . . . .	441
12. Auftrieb und spezifisches Gewicht der Körper . . . . .	444
13. Im Wasser niedersinkende Körper . . . . .	446
14. Die Bewegung von Luft . . . . .	448
Dynamische Druckhöhe. — Statische Druckhöhe. — Gesamtdruck.	
15. Der Reibungswiderstand in Luftleitungen . . . . .	452
Der Reibungsbeiwert der Luft als Abhängige der Reynoldsschen Zahl. — Berechnung der Reibungswerte nach der neueren Strömungs- forschung. — Vergleich mit den bisherigen Rechnungswerten.	
16. Druckluftleitungen . . . . .	456
17. Gasleitungen . . . . .	462
18. Blasversatzleitungen . . . . .	464
19. Die Wettermengen der Lutten . . . . .	470
20. Das Temperament der Wetterwege . . . . .	472
21. Das Längentemperament der Lutten . . . . .	473
22. Die Temperamentwerte als Maßstab der Bewetterungsfähigkeit . . .	475
23. Die gleichwertige Grubenöffnung oder Grubenweite . . . . .	477

	Seite
24. Zeichnerische Darstellung der äquivalenten Grubenweite . . . . .	479
25. Der Grubenventilator . . . . .	481
26. Das Grubentemperament . . . . .	485
27. Das Streckentemperament . . . . .	488
28. Das Ventilatorkenbild . . . . .	491
29. Physikalische Gesetze für trockene Luft . . . . .	494
30. Feuchte Luft. . . . .	496
31. Hypsometer oder Thermobarometer . . . . .	497
32. Das spezifische Gewicht der Luft und die Zunahme des Luftdrucks in der Teufe . . . . .	497
33. Das Messen von Strömungswiderständen im Grubengebäude. . . . . Der horizontale Wetterweg. — Der Wetterweg mit Gefälle. — Der Wetterweg mit Steigung.	500
34. Der natürliche Wetterzug . . . . .	504
35. Die Bestimmung des natürlichen Wetterzuges durch Ventilatorversuche.	506
36. Der Strömungswiderstand der Schächte. . . . . Einziehender Schacht. — Grubengebäude. — Ausziehender Schacht.	512
37. Praktische Widerstandsmessung in Wetterwegen . . . . .	518
38. Das Daltonsche Gesetz, relative Feuchtigkeit . . . . .	522
39. Der Wassergehalt der feuchten Luft . . . . .	525
40. Der Wärmeinhalt feuchter Luft . . . . .	526
41. Die durch die Bewetterung abgeführte Grubenwärme . . . . .	527
42. Die Verdunstung auf feuchten Oberflächen . . . . .	529
43. Die Verdunstung durch Nebeldüsen . . . . .	530
44. Das Katethermometer. . . . .	531
45. Düsen für Mengmessungen in Rohrleitungen . . . . . Die Durchflußzahl der VDI-Normaldüse als Abhängige von der Reynoldsschen Zahl. — Wassermengmessung. — Luftmengemes- sung. — Druckluftmessung.	534
46. Stauränder für Mengmessungen in Rohrleitungen . . . . . Die Durchflußzahlen der Stauränder als Abhängige von der Reynoldss- schen Zahl. — Wettermengmessung in der Lutte. — Der Druckver- lust durch den Staurand. — Mengmessung von Kokereigas.	540
Anhang . . . . .	547

## Einleitung.

Die Mechanisierung unserer Betriebe vollzieht sich bewußt oder unbewußt nach den Gesetzen der Mechanik. Man mechanisiert, indem man Kräfte und Bewegungen, welche bisher der Mensch oder das Tier mit seinen Muskeln hervorrief, mechanisch hervorbringen und mechanisch ausführen läßt.

Einer unserer ältesten mechanischen Apparate ist die Uhr. In einem Gehäuse ist ein Räderwerk zusammengestellt, das durch Entspannen einer aufgezogenen Feder eine Antriebskraft erhält und nun eine ganz bestimmte Bewegung in ganz bestimmter Zeit ausführt. Die mechanische Kraft, die Federkraft, erzeugt eine mechanische Bewegung, die Zeigerbewegung.

Die Mechanik befaßt sich mit solchen Kräfte- und Bewegungs-Aufgaben. Sie lehrt uns, wie Körper Kräfte aufnehmen, ohne in Bewegung zu geraten, und ebenso, wie Körper Kräfte aufnehmen und dann eine gewollte Bewegung ausführen.

Beide Aufgaben löst die Technik im Großen. Sie baut Brücken, Hallen und Häuser, das sind Bauwerke, welche trotz Einwirkung äußerer Kräfte feststehen müssen. Würden sie in Bewegung geraten, so würden sie einstürzen. Sie baut Maschinen, das sind Konstruktionen, welche unter Einwirkung äußerer Kräfte Bewegungen ausführen sollen. So soll die Fördermaschine den Förderkorb hochziehen, die Lokomotive Wagen bewegen und das Schwungrad der Dampfmaschine die Transmissionswellen der Fabrik treiben.

Die Technik löst diese Aufgaben auf Grund der Gesetze, welche die Mechanik vermittelt. Die Mechanik wird daher zwei Hauptarbeitsgebiete haben, sie wird lehren

1. die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand der Körper, der im allgemeinen der Ruhezustand der Körper sein wird,
2. die Bedingungen für das Zustandekommen einer Bewegung und das Aufrechterhalten des Bewegungszustandes.

Die Lehre von dem Gleichgewichtszustand der Körper nennt man Statik, die Lehre von dem Bewegungszustand der Körper Dynamik.

Als Baustoffe stehen der Technik feste Körper, z. B. Eisen, Holz und Steine zur Verfügung. Diese festen Körper müssen so widerstandsfähig sein, daß sie bei der Verwendung für Bauzwecke fest genug bleiben. Die Festigkeitslehre wird diese Aufgabe zu lösen haben.

Bei flüssigen und gasförmigen Körpern erzeugt die Störung des Gleichgewichtszustandes eine Strömung. Solche Strömungsvorgänge hat die Strömungslehre zu untersuchen.

## Die Statik der festen Körper.

### 1. Allgemeines von den Kräften.

Um sich eine Kraft vorzustellen, denke man an eine natürliche Kraft, an das Gewicht der Körper. Hängt man ein Gewicht an einem Gummifaden auf, so wird der Faden länger, d. h. es findet eine Bewegung in der Krafrichtung statt. Man könnte daher die Kraft auch als Ursache einer Bewegung deuten. Die Kraft äußert sich in diesem Fall als eine Zugwirkung.

Setzt man ein Gewicht auf einen Gummiball, so wird der Ball zusammengedrückt. Es tritt ebenfalls wieder eine Bewegung in der Krafrichtung ein, aber nicht in Form einer Verlängerung sondern einer Verkürzung des Stützkörpers. Auch hier kann die Kraft wieder als Ursache dieser Bewegung betrachtet werden. Die Kraft äußert sich jetzt als Druckwirkung.

Wir erkennen daraus, daß Kräfte sich im allgemeinen durch Zug- oder Druckwirkungen bemerkbar machen. Diese Wirkungen hat die Mechanik zu untersuchen, ohne sich um die physikalische Art der Kraft zu kümmern, d. h. ohne zu berücksichtigen, ob die Kraft als Gewichtskraft, als Federkraft oder als Explosionskraft eines Gases oder als Expansionskraft eines hochgespannten Dampfes zustande kommt.

Die Wirkung einer Kraft wird von verschiedenen Umständen beeinflußt. Man sagt, drei Bestimmungsgrößen legen die Wirkung einer Kraft eindeutig fest. Diese sind:

1. der Angriffspunkt,
2. die Richtung,
3. die Größe oder Intensität der Kraft.

Zwei Arbeiter wollen einen Baum umlegen. Sie befestigen das Seil im Punkte *A* (Abb. 1) unmittelbar über dem Boden, der Baum wird nicht weichen. Verlegen sie aber den Angriffspunkt nach oben, wählen sie also *B* als Angriffspunkt, so wird der Baum dem Seilzug folgen und sich umlegen, d. h. der Angriffspunkt beeinflußt die Wirkung einer Kraft.

Auch die Richtung der Zugkraft spielt eine Rolle. Bleiben die Arbeiter auf ihrem ersten Standort stehen und ziehen in der Richtung *C*, so werden sie wenig Erfolg haben. Je weiter sie sich aber von dem Baum entfernen, und je flacher sie die Neigung *D* der Zugkraft werden lassen, um so leichter werden sie den Baum umlegen können.

Daß die Größe der Zugkraft auch entscheidend ist, ist ohne weiteres klar. Würde die Kraft der beiden Arbeiter nicht ausreichen, so würde man ein Pferd an dem Seil ziehen lassen und mit dieser größeren Kraft den Baum umlegen können.

Da man die Gewichte der Körper als Kräfte auffaßt und diese mit anderen Kräften vergleicht, so ist es ganz natürlich, daß man als Kraft-

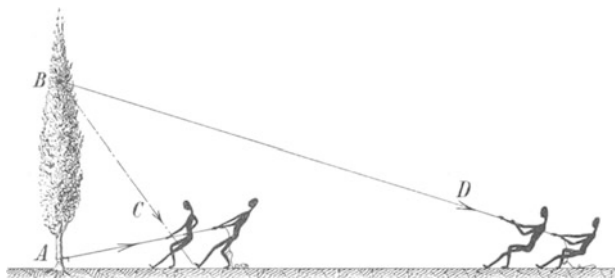


Abb. 1. Die Wirkung einer Kraft.

einheit die Gewichtseinheit nimmt. Als Gewichtseinheit gilt das Kilogramm (kg), das ist ein Gewichtsstück, dessen Gewicht mit dem Gewicht von einem Liter Wasser übereinstimmt.

So wie man rechnerisch die Größe oder Intensität einer Kraft

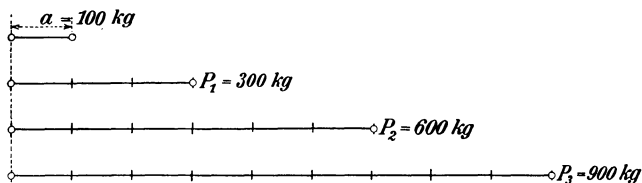


Abb. 2. Zeichnerische Darstellung von Kraftgrößen.

durch Zahlengrößen darstellt, stellt man sie zeichnerisch durch Linienlängen dar. Man muß dann für die Kräfteinheit eine beliebige Längeneinheit zugrunde legen, z. B. für 100 kg die Linienlänge 1 cm, dann wird



Abb. 3. Zeichnerische Darstellung der Kräfterichtungen.

für  $P_1 = 300$  kg die Linienlänge  $P_1 = 3$  cm, für  $P_2 = 600$  kg die Linienlänge  $P_2 = 6$  cm und für  $P_3 = 900$  kg die Linienlänge  $P_3 = 9$  cm.

In Abb. 2 sei  $a$  die Längeneinheit für 100 kg, dann wird der Darsteller der Kraft  $P_2 = 600$  kg sechsmal und der Darsteller der Kraft  $P_3 = 900$  kg neunmal so lang.

Zeichnerisch den Angriffspunkt festzulegen, ist ebenfalls möglich, denn der Körper, auf den die Kraft wirkt, wird durch eine Figur dargestellt. Der Körper sei z. B. ein Förderwagen (Abb. 3), der durch einen

Arbeiter fortbewegt wird. Legt der Arbeiter seine Fäuste auf den oberen Wagenrand, so ist die Berührungsstelle  $A$  der Angriffspunkt der Kraft.

Die Richtung, in welcher die Kraft wirkt, wird zeichnerisch durch eine Linie angegeben, welche durch den Angriffspunkt geht. In Abb. 3 soll der Arbeiter in horizontaler Richtung seine Kraft zur Wirkung bringen, also muß man durch den Angriffspunkt  $A$  eine horizontale Richtungslinie legen. In dieser Horizontalen sind aber zwei Richtungen möglich, der Arbeiter kann den Wagen vor sich her drücken, er kann aber auch den Wagen auf sich zu ziehen. Welche Richtung die Kraft nimmt, ist durch einen Pfeil anzugeben.

## 2. Zusammensetzung von Kräften, welche in derselben Geraden wirken.

In Abb. 4 wird ein Förderwagen von zwei Arbeitern bewegt, der eine drückt gegen den Förderwagen mit einer Kraft  $P_1 = 80$  kg, der andere zieht rückwärts in derselben Krafrichtung mit der Kraft  $P_2 = 60$  kg.

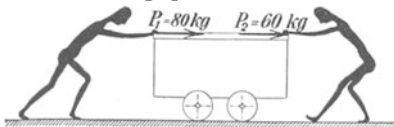


Abb. 4. Zwei Kräfte in derselben Richtung.

Die beiden Kräfte unterstützen sich, rechnerisch wird die Summe der beiden Kräfte, also die zusammengesetzte Kraft  $R = P_1 + P_2 = 80 + 60 = 140$  kg den Wagen bewegen. Man nennt diese summarische Kraft  $R$ , welche dieselbe Wirkung bezüglich der Bewegung des Wagens hat wie die beiden Einzelkräfte, die Resultierende oder Resultante der Einzelkräfte.

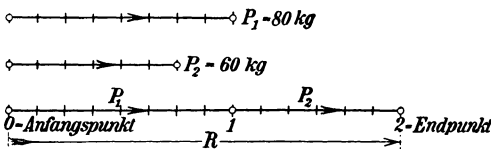


Abb. 5. Die Summe von zwei Einzelkräften.

**Satz:** *Wirken zwei Kräfte in derselben Richtung, so ist die Resultierende gleich der Summe der beiden Kräfte.*

Zeichnerisch läßt sich die Resultierende ebenfalls leicht darstellen. In Abb. 5 sind die beiden Kräfte  $P_1 = 80$  kg und  $P_2 = 60$  kg durch Linienlängen dargestellt. Will man die Resultierende zeichnen, so wählt man einen beliebigen Punkt  $0$  als Anfangspunkt und zieht eine Linie  $\overline{01}$  gleich und parallel  $P_1$  und anschließend eine Linie  $\overline{12}$  gleich

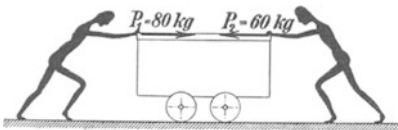


Abb. 6. Zwei Kräfte in entgegengesetzten Richtungen.

und parallel  $P_2$ . Den Punkt  $2$  nennt man den Endpunkt. Die Resultierende ist dann die Linie  $\overline{02}$ , d. h. die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt.

In Abb. 6 sind sich die beiden Arbeiter nicht einig, beide wollen den Wagen nach entgegengesetzten Richtungen drücken. Der Wagen wird dem Stärkeren folgen. Die resultierende Kraft wird gleich der

Differenz der beiden Einzelkräfte sein, da die Kräfte entgegengesetzt wirken. Sind diese  $P_1 = 80 \text{ kg}$  und  $P_2 = 60 \text{ kg}$ , so wird

$$R = P_1 - P_2 = 80 - 60 = 20 \text{ kg}.$$

Die Resultierende nimmt die Richtung der größeren Kraft, also die Richtung der Kraft  $P_1$  an. Der Stärkere überwindet den Schwächeren und drückt den Wagen vorwärts.

Die zeichnerische Lösung bringt Abb. 7. Man sieht die beiden Einzelkräfte  $P_1 = 80 \text{ kg}$  und  $P_2 = 60 \text{ kg}$  wieder durch Linienlängen gegeben. Um die Resultierende zu finden, wählt man einen beliebigen Punkt  $O$  als Anfangspunkt, zieht eine Linie  $\overline{O1}$  gleich und parallel der Kraft  $P_1$  und anschließend in entgegengesetzter Richtung eine Linie  $\overline{12}$  gleich und parallel der Kraft  $P_2$ . Der Punkt  $2$  wird wieder Endpunkt genannt.

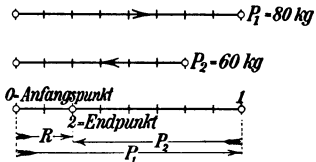


Abb. 7. Die Differenz von zwei Einzelkräften.

Die Linie  $\overline{O2}$ , d. i. die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt, ist nun als Differenz der beiden Einzelstrecken die gesuchte Resultierende  $R$ .

**Satz:** *Wirken zwei Kräfte einander entgegengesetzt, so ist die Resultierende gleich der Differenz der beiden Kräfte.*

*Die Richtung der größeren Kraft bestimmt die Richtung der Resultierenden.*

*Bei zeichnerischer Lösung zieht die Resultierende immer vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt der Kräftelinie.*

### 3. Zusammensetzung von Kräften, welche nicht in derselben Geraden wirken, aber denselben Angriffspunkt haben.

#### a) Zwei Kräfte.

In Abb. 8 sei  $T$  eine Tischplatte. Auf der Tischplatte liege eine Kugel. An der Kugel ziehen zwei Kräfte in verschiedenen Richtungen, die Kraft  $P_1 = 100 \text{ kg}$ , und rechtwinkelig hierzu die Kraft  $P_2 = 200 \text{ kg}$ . In welcher Richtung wird die Kugel sich bewegen?

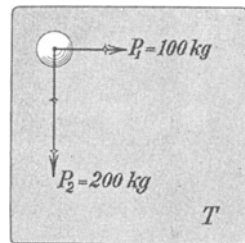


Abb. 8. Zwei Kräfte in verschiedenen Richtungen.

Wenn eine einzige Kraft auf die Kugel wirkt, ist die Bewegung der Kugel sofort bestimmbar, sie wird sich geradlinig in Richtung dieser Kraft bewegen, und zwar um so schneller, je größer die Kraft ist.

Hat z. B. in Abb. 9 eine Kugel unter dem Einfluß einer Kraft  $P_1$  in einer bestimmten Zeit den Weg  $s_1$  zurückgelegt, so wird dieselbe Kugel unter dem Einfluß der doppelt so großen Kraft  $P_2 = 2 \cdot P_1$  in derselben Zeit den doppelten Weg  $s_2 = 2 \cdot s_1$  zurückgelegt haben, d. h. die Wegestrecken wachsen proportional mit den Bewegungskräften.

Um die Bewegung unserer Kugel auf der Tischplatte (Abb. 10) zu verfolgen, denke man sich die beiden Kräfte nicht gleichzeitig, sondern nach einander wirkend. Die Kugel bewege sich zunächst nur unter dem Einfluß der Kraft  $P_1$ , dann läuft die Kugel in der Krafrichtung  $P_1$  und legt in einer bestimmten Zeit den Weg  $s_1$  zurück. In Stellung *II* angekommen, stehe die Kugel still, und nun wirke die zweite Kraft  $P_2$  ebenso lange auf die Kugel. Da  $P_2$  doppelt so groß ist wie  $P_1$ , legt nun die Kugel den doppelten Weg  $s_2 = 2 \cdot s_1$  in der neuen

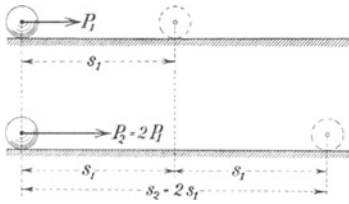


Abb. 9. Doppelte Kraft = doppelter Weg.

Krafrichtung  $P_2$  zurück. Sie gelangt nach Stellung *III*.

Nach dieser Stellung *III* hätte die Kugel auch einfacher gelangen können, wenn sie den direkten Weg  $I III = s_R$  durchlaufen hätte, und den hätte sie durchlaufen, wenn die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  nicht nacheinander, sondern gleichzeitig gewirkt hätten.

Da nun die Wege  $s_1$  und  $s_2$  proportional den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  sind, so muß auch der resultierende Weg  $s_R$  proportional der resultierenden

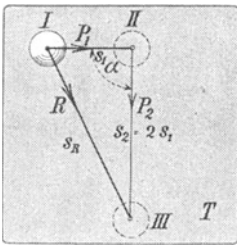


Abb. 10. Die Kräfte wirken nacheinander.

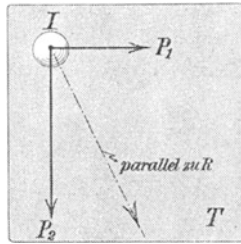
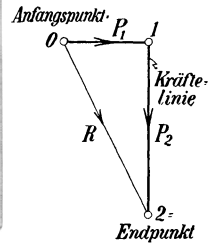


Abb. 11. Zeichnerische Lösung durch Bildung des Kräftecks.



Kraft  $R$  sein, welche wir suchen, d. h. wir finden die resultierende Kraft  $R$  als dritte Seite eines Dreiecks, von dem die beiden Seiten  $P_1$  und  $P_2$  und der eingeschlossene Winkel  $\alpha$  gegeben sind.

Somit findet unsere Aufgabe eine einfache zeichnerische Lösung (Abb. 11).

Man wähle einen beliebigen Punkt  $O$  der Zeichenebene als Anfangspunkt, ziehe eine Gerade  $\overline{O1}$  gleich und parallel  $P_1$ , anschließend eine Gerade  $\overline{12}$  gleich und parallel  $P_2$ , dann ist Punkt  $2$  der Endpunkt der Kräfte-linie und die Linie  $\overline{O2}$  als Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt die Resultierende der beiden Einzelkräfte; sie zieht vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt.

Diese resultierende Kraft  $R$  ersetzt die beiden Einzelkräfte. Die Kugel bewegt sich genau so, als wenn sie nur unter dem Einfluß der Kraft  $R$  stände. Zieht man daher auf der Tischplatte durch den Angriffspunkt  $I$  der Kräfte eine Parallele zu  $R$ , so hat man die gesuchte Bewegungsrichtung der Kugel. Soll die Bewegung verhindert werden, so muß die Kugel in dieser Richtung abgestützt werden.



Die in Abb. 11 gezeichnete Kräftefigur wird durch die Resultierende  $R$  eine geschlossene Liniengfigur. Man nennt diesen Linienzug ein *Kräfte-eck*, und da dieses Kräfteeck drei Seiten hat, ein *Kräftedreieck*.

Das Kräftedreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das wie folgt gebildet wird. Sind in Abb. 12 die beiden Kräfte  $P_1 = ab$  und  $P_2 = ac$  gegeben, so zieht man durch den Punkt  $b$  eine Parallele zu  $P_2$  und durch den Punkt  $c$  eine Parallele zu  $P_1$ , dann schneiden sich diese im Punkte  $d$  und bilden das Parallelogramm  $abdc$ . Zieht man die Diagonale  $ad$ , so ist  $ad = R$  die Resultierende der beiden Einzelkräfte.

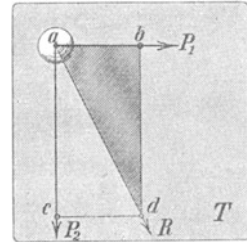


Abb. 12. Das Kräfteparallelogramm.

**Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte:** *Gehen zwei Kräfte mit verschiedenen Richtungen von demselben Angriffspunkt aus, so wird die Resultierende der Größe und Richtung nach dargestellt durch die vom Angriffspunkt ausgehende Diagonale des mit den Einzelkräften als Seiten konstruierten Parallelogramms.*

Der Satz ist in Abb. 13 und 14 für zwei verschiedene Winkel, den die beiden Kräfte  $P_1 = 400$  kg und  $P_2 = 300$  kg miteinander bilden, zur Anwendung gebracht. In Abb. 13 ist der Winkel  $\alpha$  kleiner als  $90^\circ$ , in

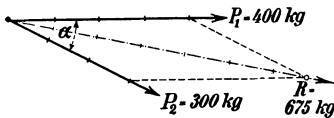


Abb. 13. Das Kräfteparallelogramm mit  $\alpha < 90^\circ$ .

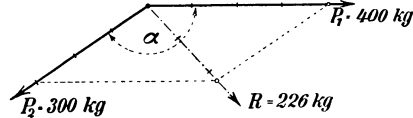


Abb. 14. Das Kräfteparallelogramm mit  $\alpha > 90^\circ$ .

Abb. 14 größer als  $90^\circ$ , die Resultierende wird im 1. Fall  $R = 675$  kg, im 2. Fall  $R = 226$  kg. Je kleiner also der Winkel  $\alpha$  wird, desto größer wird der Wert von  $R$ , der Grenzfall für  $\alpha = 0$ , beide Kräfte wirken in derselben Geraden mit gleicher Richtung, würde den größten Wert  $R = P_1 + P_2 = 400 + 300 = 700$  kg ergeben.

Je größer der Winkel  $\alpha$  wird, desto kleiner wird der Wert von  $R$ , der Grenzfall für  $\alpha = 180^\circ$ , beide Kräfte wirken in derselben Geraden, aber mit entgegengesetzter Richtung, würde den kleinsten Wert  $R = P_1 - P_2 = 400 - 300 = 100$  kg ergeben.

### b) Beliebige viele Kräfte.

Ob nun zwei Kräfte oder eine Reihe von Einzelkräften mit demselben Angriffspunkt auf einen Körper wirken, das Aufsuchen der resultierenden Kraft geschieht immer nach derselben Methode, nämlich durch Aufzeichnen der Kräftelinie.

Es wirken z. B. in Abb. 15 auf eine Kugel vier Kräfte in verschiedenen Richtungen, die Kräfte  $P_1 = 40$  kg,  $P_2 = 60$  kg,  $P_3 = 30$  kg und  $P_4 = 50$  kg, in welcher Richtung und mit welcher Kraft wird die Kugel sich bewegen?

Man zeichnet die Kräftelinie, indem man einen beliebigen Punkt  $0$  als Anfangspunkt wählt und eine Linie  $\overline{01}$  gleich und parallel  $P_1$  zieht. Zieht man anschließend eine Linie  $\overline{12}$  gleich und parallel  $P_2$ , daran anschließend eine Linie  $\overline{23}$  gleich und parallel  $P_3$ , und wiederum an-

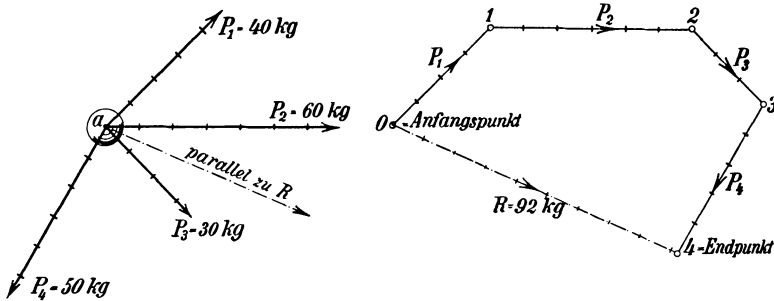


Abb. 15. Beliebige viele Kräfte mit gleichem Angriffspunkt.

schließend eine Linie  $\overline{34}$  gleich und parallel  $P_4$ , so ist Punkt 4 der Endpunkt der Kräftelinie.

Schließt man die Figur durch die Verbindungslinie  $\overline{04}$ , so ist die Länge der Linie  $\overline{04}$  die Größe der resultierenden Kraft  $R$ . Wir messen  $R = 92 \text{ kg}$  als Bewegungskraft der Kugel.

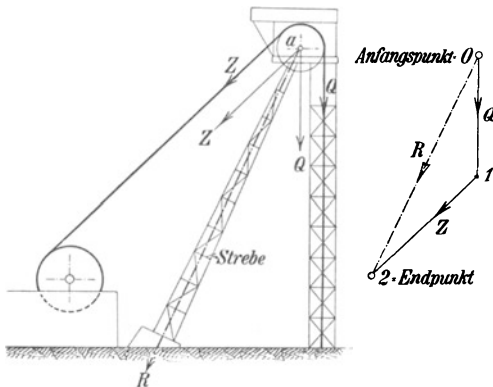


Abb. 16. Die Strebenkraft im Fördergerüst.

Die Resultierende zieht immer vom Anfangs- nach dem Endpunkt und damit ist auch die Pfeilrichtung der Resultierenden gegeben.

Legt man durch den Angriffspunkt  $a$  der vier Kräfte eine Parallele zur Resultierenden  $R$ , so ist die Richtung gefunden, in welcher die Kugel abrollt.

Man nennt die geschlossene Figur (Abb. 15)

ein Kräfteviereck, die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt der Kräftelinie nennt man die Schlußseite.

**Satz:** Die Resultierende aller Einzelkräfte, welche mit gemeinsamem Angriffspunkt auf einen Körper wirken, wird durch die Schlußseite des Kräftelinienzuges gebildet. Sie zieht immer vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt.

**1. Beispiel:** Die Seilscheibe eines Fördergerüsts (Abb. 16) wird am Umfang durch die beiden Kräfte  $Q$  und  $Z$  belastet. Wie groß ist der resultierende Lagerdruck und welche Richtung hat er?

Die Kräfte  $Q$  und  $Z$  müssen durch die Wellenzapfen auf das Lager, und von diesem auf den Turm übertragen werden. Der Wellenmittelpunkt  $a$  ist daher der gemeinsame Angriffspunkt der beiden Kräfte. Um die Resultierende der Größe und Richtung nach zu finden, zeichnet man das Kräfteeck. Man wählt einen beliebigen Punkt  $O$  als Anfangspunkt, zieht die Linie  $\overline{O1}$  gleich und parallel  $Q$  und anschließend die Linie  $\overline{12}$  gleich und parallel  $Z$ . Die Verbindungslinie  $\overline{O2}$  vom Anfangs- und Endpunkt ist die gesuchte Resultierende  $R$ . Sie zieht vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt.

Zieht man durch den Wellenmittelpunkt  $a$  die Linie  $R$  parallel zur Linie  $R$  des Kräfteedreiecks, so ist die Richtung gefunden, in welcher das Lager auf den Turm drückt. In dieser Richtung muß die Strebe den Turm abstützen, damit der Turm sicher steht.

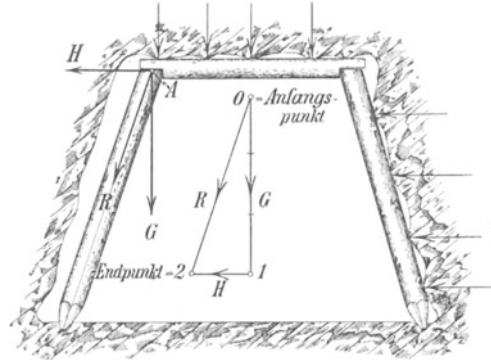


Abb. 17. Streckenzimmerung mit Stoßdruck und Druck aus dem Hangenden.

**2. Beispiel:** Bei einer Streckenzimmerung (Abb. 17) ist Druck aus dem Hangenden und Druck vom rechten Stoß aufzunehmen. In welcher Richtung wird der Kappenstützpunkt  $A$  ausweichen wollen?

Im Stützpunkt  $A$  der Kappe wirken zwei Kräfte, die aus dem Druck des Hangenden entstehende Gewichtsbelastung  $G$  und die in Richtung der Kappe vom Seitendruck herrührende Horizontalkraft  $H$ . Es wird das Kräfteeck gezeichnet, und zwar ist  $H = \frac{1}{2} G$  angenommen. Die Schlußseite  $\overline{O2}$  des aus  $G$  und  $H$  gebildeten Kräfteedrecks liefert die Resultierende  $R$  der Größe und Richtung nach. Zieht man durch den Stützpunkt  $A$  der Kappe die Linie  $R$  parallel zur Linie  $R$  des Kräfteedreiecks, so ist damit die Richtung gegeben, in welcher der Stützpunkt  $A$  ausweichen will. Es ist daher zweckmäßig, dem stützenden Stempel diese Richtung zu geben, ihn also schräg zu stellen.

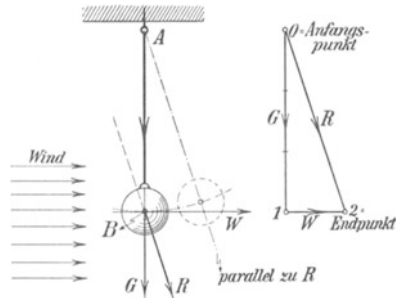


Abb. 18. Kugelpendel, vom Wind getroffen.

**3. Beispiel:** In Abb. 18 ist eine Kugel an einem Faden aufgehängt. Man beobachtet, daß bei starkem Wind die Kugel aus der senkrechten in eine schräge Fadenlage kommt und in dieser Lage verharrt, wie erklärt sich diese Erscheinung?

Bei windstillen Luft wirkt auf die Kugel nur eine Kraft, das ist das Kugelgewicht  $G$ , dessen Angriffspunkt der Mittelpunkt  $B$  der Kugel ist. Die Verlängerung der Krafttrichtung  $G$  nach oben hin geht durch den

festen Aufhängepunkt  $A$ , so daß die Kugel bei dieser vertikalen Fadenrichtung in Ruhe bleibt.

Bei bewegter Luft drückt der Wind in horizontaler Richtung auf die Kugel, so daß zu der senkrechten Kraft  $G$  noch die Horizontalkraft  $W$  hinzukommt, welche ebenfalls im Punkt  $B$  angreift. Nimmt man z. B. an, daß  $W = \frac{1}{3} \cdot G$  ist, und zeichnet in bekannter Weise das Kräfte-dreieck auf, so erhält man in  $R$  die Resultierende der beiden Kräfte. Zieht man durch  $B$  die Linie  $R$  parallel zur Resultierenden  $R$  des Kräfte-dreiecks, so geht diese Linie nicht durch den festen Aufhängepunkt.

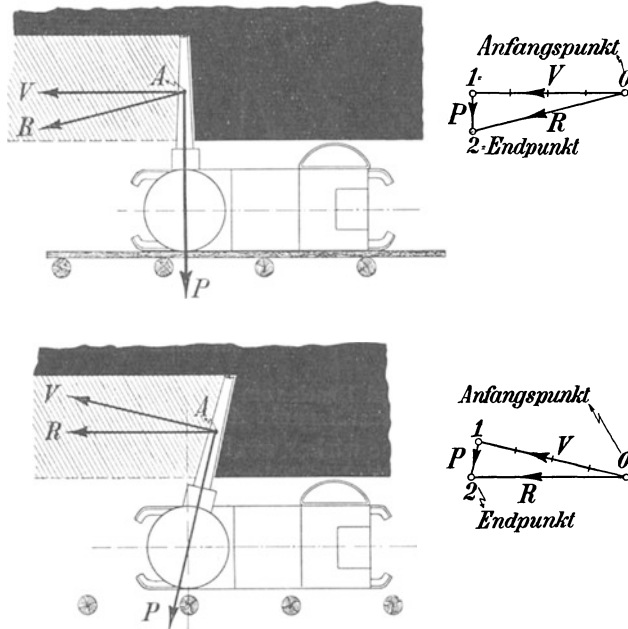


Abb. 19. Der Kohlenschneider im Schram.

Mithin schwingt die Kugel so weit nach der Seite, bis die Fadenrichtung parallel zu  $R$  geworden ist. In dieser schrägen Lage bleibt dann die Kugel stehen.

Man könnte mit dieser einfachen Einrichtung eine Messung der Windgeschwindigkeit oder Windstärke vornehmen, wenn man die Ausschlaggrößen bei Luftströmen von bekannter Geschwindigkeit einmal empirisch festlegt.

Auch ist zu beachten, daß Lotungen fehlerhaft werden, wenn das Lot in stark bewegter Luft hängt.

**4. Beispiel:** Warum will der Kohlenschneider (Abb. 19) aus dem Schram gehen?

An der Schrämspindel wirken zwei Widerstände, die Kraft  $V$  vertikal zur Schrämspindel und die Kraft  $P$  parallel zur Schrämspindel oder in Richtung der Schrämspindel. Unter Annahme, daß  $P = \frac{1}{3} V$  ist, ist das Kräfte-ecck gezeichnet. Es liefert die Resultierende  $R$ , zu der durch den Angriffspunkt  $A$  die Parallele

gezogen ist. In dieser Richtung will die Schrämspindel ausweichen, d. h. sie dreht sich aus dem Schram heraus, wenn keine Abstützung erfolgt.

In dem unteren Bild ist die Spindel so schräg gestellt, daß die Resultierende  $R$  parallel zum Kohlenstoß läuft. Dadurch bleibt die Spindel besser im Schram.

**5. Beispiel:** Wie ist die Seilführungsrolle eines in Abb. 20 dargestellten Rutschenantriebes abzustützen?

Der Rutschenwiderstand  $W = \frac{3}{4} P$  und die Kolbenkraft  $P$  werden vom Rollenzapfen aufgenommen. Der Rollenzapfen will daher in Richtung der Re-

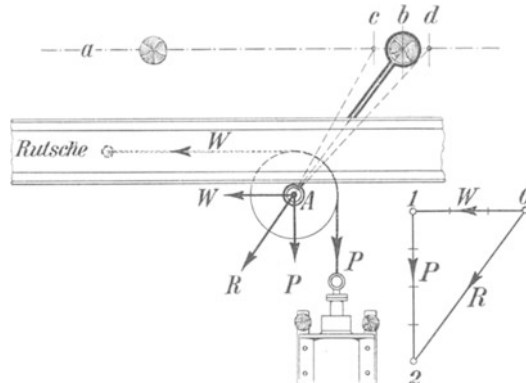


Abb. 20. Abstützung einer Seilführungsrolle.

sultierenden, die in bekannter Weise gefunden wird, ausweichen wollen. Er wird festgehalten durch eine Zugstange, die sich in Richtung  $R$  einstellt. Im Schnittpunkt  $b$  mit der Stempelreihe  $ad$  muß der Stützstempel stehen. Die Stützpunkte  $c$  oder  $d$  würden eine andere Lage des Rollenmittelpunktes  $A$  und damit eine schlechtere Seilrichtung ergeben.

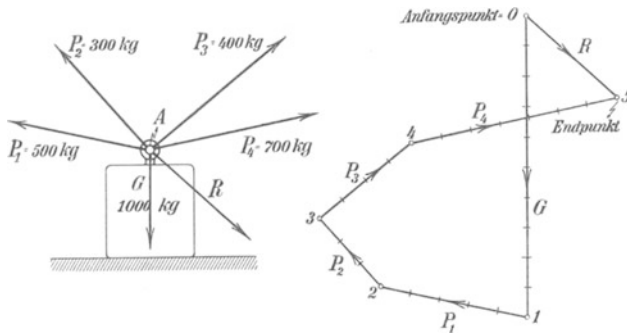


Abb. 21. Die zeichnerische Bestimmung der Resultierenden.

**6. Beispiel:** An einem Gewicht von  $G = 1000$  kg ziehen (Abb. 21) die Kräfte  $P_1 = 500$  kg,  $P_2 = 300$  kg,  $P_3 = 400$  kg,  $P_4 = 700$  kg in verschiedenen Richtungen schräg nach oben, wird das Gewichtstück gehoben?

Sämtliche Kräfte haben denselben Angriffspunkt  $A$ , folglich lassen sie sich in bekannter Weise im Kräfteck zu einer Resultierenden zusammenfassen.

Zieht man durch den Angriffspunkt  $A$  der Kräfte eine Pfeillinie  $R$  parallel zur Linie  $R$  des Kräftecks, so wird das Gewicht in dieser Rich-

tung sich fortbewegen wollen. Da die Kraft  $R$  schräg nach unten wirkt, so wird ein Hochheben des Gewichtes nicht erfolgen können.

#### 4. Das Zerlegen einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Zwei in  $B$  und  $C$  gelenkartig gestützte Eisenstäbe (Abb. 22) legen sich im Punkte  $A$  gelenkartig gegeneinander. Im Punkte  $A$  werde ein Gewicht  $G$  aufgehängt. Dann muß das Gewicht von den Eisenstäben getragen werden. Und da das Gewicht auf den Kopf der Stäbe drückt, so muß eine Druckkraft in jedem Stabe auftreten. Diese Druckkräfte verlaufen in Richtung der Stäbe. Folglich sind die Stabrichtungen die Richtungen der Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ .

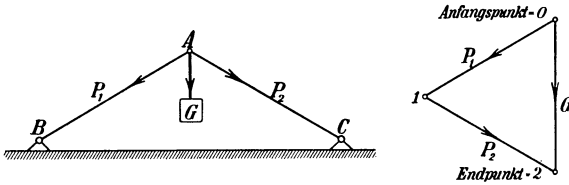


Abb. 22. Das Zerlegen einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Man zeichnet, von einem beliebigen Punkte  $O$  als Anfangspunkt ausgehend, die Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $G$ , legt durch den Anfangspunkt  $O$  eine Parallele zur Stabrichtung  $AB$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zur Stabrichtung  $AC$ . Beide schneiden sich im Punkte  $1$ .

Die Linie  $\overline{O1}$  stellt die gesuchte Seitenkraft  $P_1$  und die Linie  $\overline{I2}$  die gesuchte Seitenkraft  $P_2$  dar. Auch hier findet man die Pfeilrichtungen, indem man die Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt ziehen läßt.

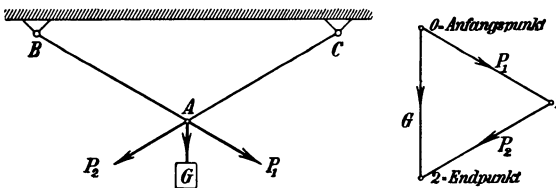


Abb. 23. Das Zerlegen einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

In Abb 23 sind zwei Eisenstäbe in den Punkten  $B$  und  $C$  gelenkartig an der Decke aufgehängt und im Punkte  $A$  gelenkartig miteinander verbunden. Im Punkte  $A$  ist ein Gewicht  $G$  angehängt. Es werden die Stabkräfte  $P_1$  und  $P_2$  gesucht. Da das Gewicht am Fuß der Stäbe zieht, so muß in jedem Stab eine Zugkraft auftreten. Diese Zugkräfte verlaufen in der Richtung der Stäbe, folglich sind die Stabrichtungen die Richtungen der gesuchten Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Das Kräfteeck liefert die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  der Größe und Richtung nach.

Das Körpergewicht  $G$  des Menschen (Abb. 24) verteilt sich bei lotrechter Beinstellung zu gleichen Teilen auf beide Beinstützen. Jedes Bein nimmt die Druckkraft  $\frac{1}{2} \cdot G$  auf. Bei schräger Beinstellung stellt sich aber eine größere Belastung ein. Man findet sie, indem man die bekannte Kraft  $G$  in die beiden Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  zerlegt, deren Richtungen durch die Beinstellungen gegeben sind. Die Kraftgrößen  $P_1$  und  $P_2$  ergeben sich aus dem Kräfteeck, das man findet, indem man durch den

Anfangspunkt  $O$  der Kraft  $G$  eine Parallele zur Beinrichtung  $P_1$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zur Beinrichtung  $P_2$  legt.

Geht der Mensch durch Spreizen der Beine in die tiefere Lage über, so entstehen infolge der starken Schrägstellung der Beine die Seitenkräfte  $P_1'$  und  $P_2'$ , welche, wie das Kräfteck zeigt, ganz bedenklich groß werden. Hat man z. B. das Kräfteck mit  $G = 70$  kg auf-

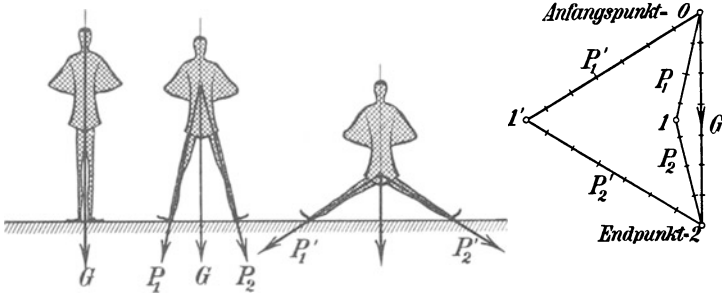


Abb. 24. Körpergewicht und Beinkräfte.

gezeichnet, so wird in Abb. 24 die Seitenkraft  $P_1' = 68$  kg und die Seitenkraft  $P_2' = 68$  kg.

Wenn auf die Achse eines Schienenfahrzeuges (Abb. 25) eine Zugkraft  $R$  schräg zur Schienenrichtung ausgeübt wird, so wird nur ein Teil der Zugkraft  $R$  zur Fortbewegung des Wagens ausgenutzt, denn der Spurrads des einen Rades wird gegen die Schienen gedrückt. Man zerlegt die ge-

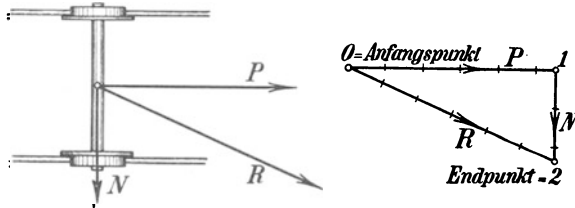


Abb. 25. Der Schienenendruck bei Schrägkräften.

gebene Kraft  $R$ , in zwei Seitenkräfte, in eine Kraft  $P$  parallel zum Schienenlauf und in eine Kraft  $N$  normal zum Schienenlauf. Im Kräfteck ist  $\overline{O2} = R$  die gegebene Zugkraft, zieht man durch Punkt  $O$  ein Parallele zur gegebenen Krafrichtung  $P$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zur gegebenen Krafrichtung  $N$ , so stellt die Linie  $\overline{O1}$  die Kraftgröße  $P$  und die Linie  $\overline{12}$  die Kraftgröße  $N$  dar. Man erkennt, daß die Kraft  $P$  kleiner ist als die Zugkraft  $R$ . Sie wird um so kleiner, je schräger die Kraft gegen die Schienen zieht. Am günstigsten zieht die Kraft in der Schienenrichtung.

Beim gewöhnlichen Gehschritt des Menschen (Abb. 26) wirkt eine Schrägkraft  $D$  gegen den Boden, deren Größe sich aus dem Körpergewicht  $G$  bestimmt.  $D$  ist die Resultierende aus der Seitenkraft  $V$  und der Seitenkraft  $H$ . Bekannt ist in diesem Fall  $V$ , denn  $V$  ist und kann

nicht größer als das Körpergewicht  $G$  sein. Also zieht man durch den Anfangspunkt  $O$  der Kraft  $V = G$  eine Parallele zur Beinrichtung  $D$  und durch den Punkt  $I$  eine Horizontale  $H$ , wodurch der Schnittpunkt  $2$  entsteht.

Je schräger die Beinstellung  $D$  wird, um so größer wird die Horizontalkraft  $H$ . Diese will aber den Fuß zum Ausgleiten oder den Körper zum Fallen bringen. Ist der Boden sehr glatt, so tritt Gleiten ein. Dem sucht der Mensch aber zu entgehen, indem er bei Glatt-eis nur kurze Trippelschritte macht, wodurch die Horizontalkraft  $H$  infolge der steileren Beinstellung sehr klein bleibt.

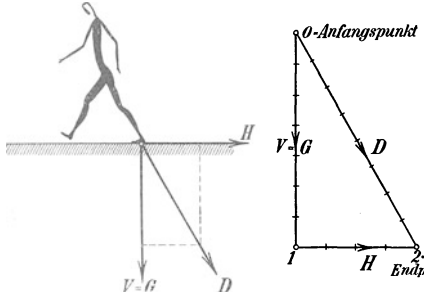


Abb. 26. Der Gang des Menschen.

Beim Kurbeltrieb einer Kolbenkraftmaschine (Lufthaspel, Dampfmaschine) wird in der

Kurbelstellung  $A$  (Abb. 27) der Widerstand  $D$  der Schubstange auf den Kreuzkopf drücken, denn das Gewicht  $G$  will rechtsherum ab-

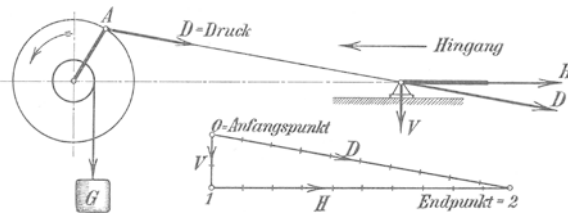


Abb. 27. Der Kurbeltrieb beim Hingang, Linksdrehung.

sinken. Der Widerstand  $D$  zerlegt sich in eine horizontale Seitenkraft  $H$ , welche von der Pleuenkraft überwunden werden muß,

und in eine vertikale Seitenkraft  $V$ , welche von der Pleuenkraftbahn aufzunehmen ist. Das Kräfteck ist in bekannter Weise zu zeichnen.  $D = \overline{O2}$  ist die bekannte Kraft, sie ist in die Seitenkräfte  $V$  und  $H$  zerlegt.

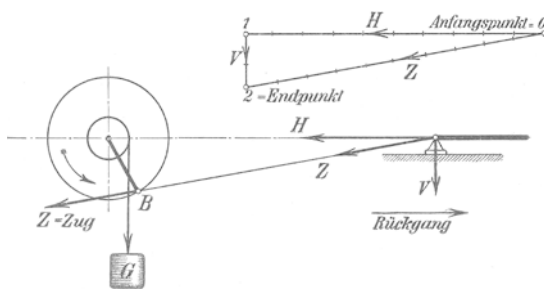


Abb. 28. Der Kurbeltrieb beim Rückgang, Linksdrehung.

In der Kurbelstellung  $B$  (Abb. 28) zieht das Gewicht  $G$  mit der Zugkraft  $Z$  am Kreuzkopf.  $Z$  liefert eine Horizontalkraft  $H$  entgegengesetzt wie vorher, dagegen eine Vertikalkraft  $V$ , welche wieder in derselben Richtung nach unten auf den Kreuzkopf drückt. Bei dem gezeichneten Drehsinn der Kurbel wird also der Kreuzkopf sowohl beim Hingang als auch beim Rückgang



gegen die untere Kreuzkopfbahn gedrückt, so daß bei gleichbleibender Drehrichtung die obere Kreuzkopfbahn fehlen kann.

Hat die Kurbel entgegengesetzten Drehsinn (Abb. 29), so wird sowohl in der Kurbelstellung *A* wie in der Kurbelstellung *B* die Vertikalkraft *V* den Kreuzkopf nach oben drücken, so daß nun die obere Kreuzkopfbahn ausgeführt werden muß, während die untere Bahn fehlen könnte.

Ist die Maschine umsteuerbar, so daß beide Drehrichtungen abwechseln wie beim Lufthaspel und der Fördermaschine, so muß der Kreuzkopf demnach oben und unten geführt werden.

Ein Bohrhammer muß durch die Fäuste des Bergmanns abgestützt werden. In Abb. 30 ist die falsche Abstützung gezeigt. Der Arbeiter sitzt viel zu weit rückwärts und stützt den Hammer infolgedessen schräg ab. Der rechte Arm hat den Rückstoß des Hammers am Handgriff aufzufangen. Der Rückstoß *P* erzeugt in dem Arm die Schrägkraft *D* parallel zur Armrichtung *D*. Diese

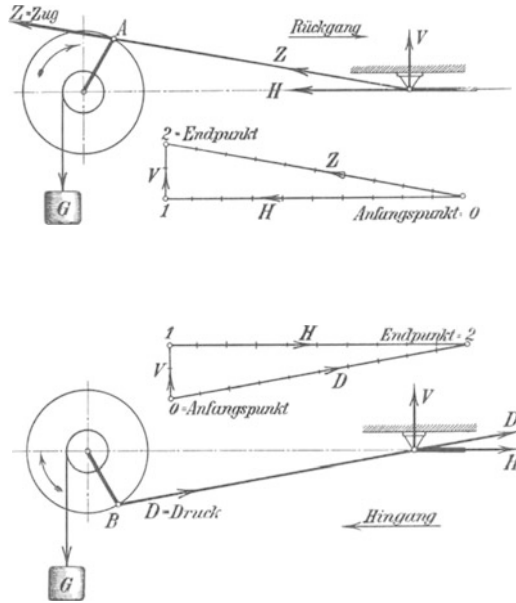


Abb. 29. Rechtsdrehung.

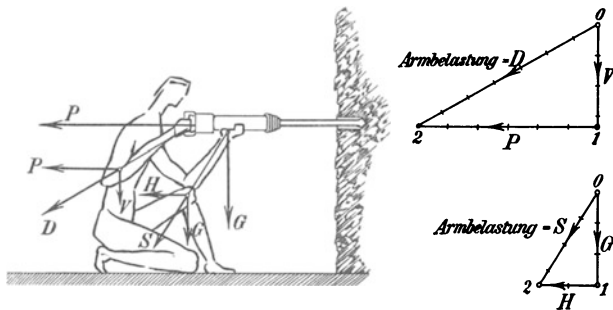


Abb. 30. Falsche Hammerhaltung.

ist, wie das Kräfteck zeigt, größer als *P*. Die Armmuskel wird dadurch unnötig belastet, denn der Arm hat außer der Horizontalkomponente *P* noch die Vertikalkomponente *V* aufzunehmen. Auch der linke Arm, welcher das Gewicht *G* des Hammers abzufangen hat, erhält durch die

schräge Armlage die Druckkraft  $S$ , welche größer ist als  $G$ , denn zu der Vertikalkomponente  $G$  tritt noch die Horizontalkomponente  $H$ .

Die richtige Führung des Hammers zeigt Abb. 31. Der Arbeiter setzt das Knie so weit vor, daß der linke Unterarm den Hammer senkrecht abstützt. Dadurch wird die Armbelastung nicht größer als  $G$ . Der rechte Unterarm steht vollständig horizontal in der Verlängerung des Hammers, so daß der Rückstoß  $P$  in der Armrichtung

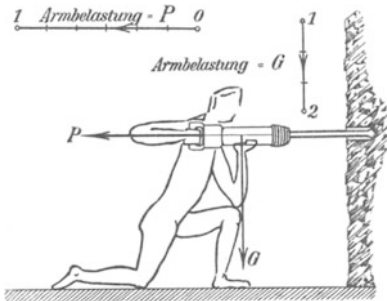


Abb. 31. Richtige Hammerhaltung.

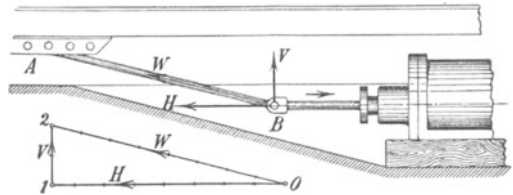


Abb. 32. Falscher Angriffspunkt des Rutschenmotors.

liegt. Dadurch wird der Arm nur durch den horizontalen Rückstoß  $P$  und nicht mehr zusätzlich durch eine vertikale Stoßkomponente belastet.

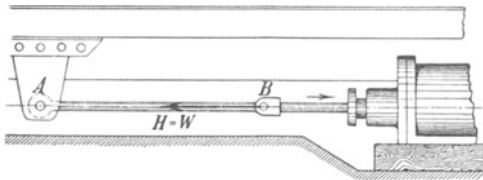


Abb. 33. Richtiger Angriffspunkt des Rutschenmotors.

Fehlerhafte Aufstellung von Rutschenmotoren verursachen häufig Betriebsstörungen. Liegt z. B. der Angriffspunkt  $A$  (Abb. 32) an der Rutsche wesentlich höher wie der Kolbenstangengelenkpunkt  $B$ , so wirkt der Rutschenwiderstand  $W$  in der schrägen Richtung der Verbindungsstange.  $W$  zerlegt sich aber in eine horizontale Seitenkraft  $H$ , welche von der Kolben-

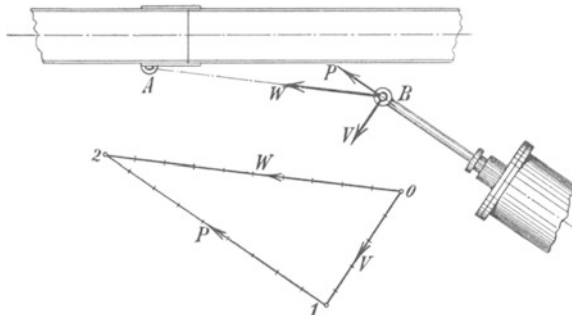


Abb. 34. Falsche Schräglage des Motors.

kraft überwunden werden muß, und in eine vertikale Seitenkraft  $V$ , welche die Kolbenstange nach oben biegt. Diese Kraft verursacht einen

schnellen Verschleiß der Führungsbüchse, kann aber auch so groß werden, daß die Kolbenstange derart verbogen wird, daß der Motor nicht mehr arbeitet, oder daß die Kolbenstange bricht.

In Abb. 33 ist die richtige Aufstellung gezeigt. Der Angriffspunkt  $A$  ist so tief gelegt, daß die Verbindungsstange  $AB$  in Richtung der Kolben-

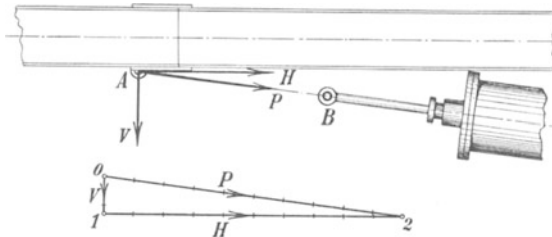


Abb. 35. Richtige Schräglage des Motors.

stange liegt, so daß der Rutschenwiderstand  $W$  nur eine Kolbenstangenbelastung  $H = W$  hervorruft.

Wird die Rutsche von einem seitlich der Rutsche liegenden Motor angezogen (Abb. 34), so ist die Aufstellung des Motors wieder fehlerhaft, wenn die Seilrichtung  $AB$  mit der Kolbenstangenrichtung einen Knick macht. Der Rutschenwiderstand  $W$  erzeugt einen Seitenwiderstand  $P$  parallel zur Kolbenstangenrichtung und einen Seitenwiderstand  $V$  vertikal zur Stangenrichtung. Die Kolbenstange wird durch die Vertikalbelastung  $V$  wieder zur Seite gebogen.

Der Motor muß so gestellt werden wie Abb. 35 zeigt. Es müssen Seilrichtung  $AB$  und Kolbenstangenrichtung in eine Gerade fallen. Trotzdem ist diese Angriffsweise des Motors nicht günstig, denn der Motor zieht schräg zur Bewegungsrichtung, so daß die Kolbenkraft  $P$  sich in die Komponente  $H$  parallel zur Bewegungsrichtung der Rutsche und in die Komponente  $V$  senkrecht hierzu zerlegt. Die Seitenkraft  $V$  will aber die Rutsche aus der Bewegungsrichtung herausdrängen, so daß die Rutsche unruhig arbeitet. Jedenfalls darf der Winkel zwischen Seilrichtung und Rutschenrichtung nur klein sein.

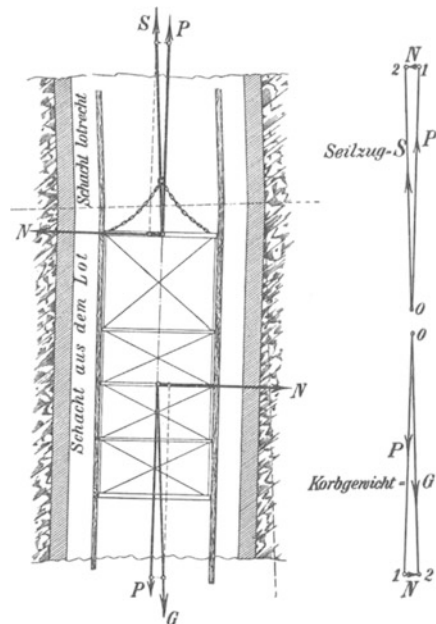


Abb. 36. Der Förderkorb im schiefen Schacht.

Jedenfalls darf der Winkel zwischen Seilrichtung und Rutschenrichtung nur klein sein.

Bei Schächten, die stellenweise erheblich aus dem Lot geraten sind, können zusätzliche Seilbelastungen und starker Spurlattenverschleiß entstehen. Sowohl der vertikale Seilzug  $S$  (Abb. 36) als auch das Korbgewicht  $G$  zerlegt sich in eine Seitenkraft  $P$  parallel zur Schräglage der Spurlatten und in eine Seitenkraft  $N$  normal zur Spurlattenrichtung. Die Kräfte  $N$  drücken senkrecht auf die Spurlatten und

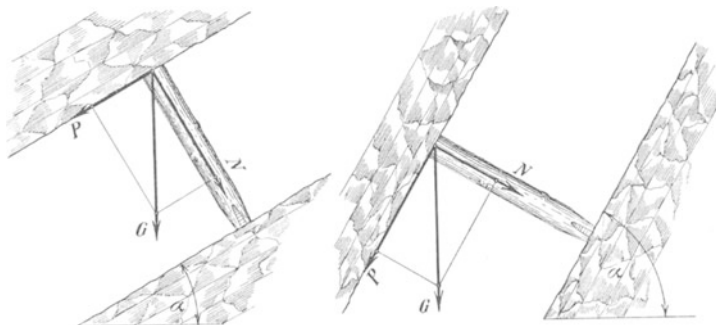


Abb. 37. Die Stempelbelastung bei verschiedenem Einfallen.

erzeugen einen Reibungswiderstand, der das Seil zusätzlich belastet und außerdem die Spurlatten zum schnellen Verschleiß bringt. Starker Spurlattenverschleiß an derselben Stelle des Schachtes ist daher meistens auf Schräglage des Schachtes zurückzuführen. Nebenher können auch

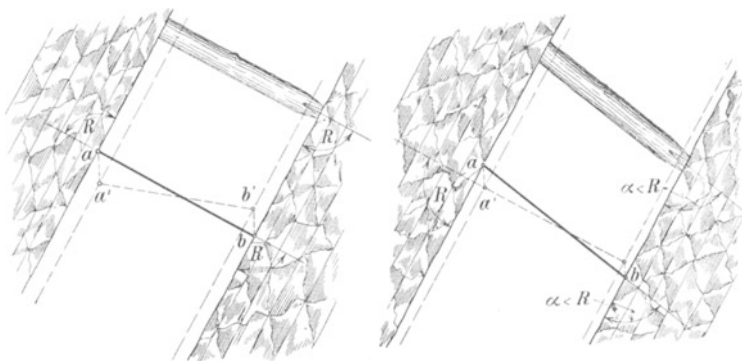


Abb. 38. Die Stempelstellung mit Rücksicht auf die Bewegung der Gebirgsschichten.

Klemmungen des Korbes auftreten, wodurch ganz bedeutende Seilbelastungen auftreten können. Sie wirken stoßartig und erzeugen vertikale Schwingungen des fahrenden Korbes, die von den Mitfahrenden leicht wahrgenommen werden können.

Bei einfallenden Schichten (Abb. 37) hängt die Stempelbelastung von der Größe des Einfallwinkels  $\alpha$  ab. Auf den Kopf des Stempels drückt in vertikaler Richtung das Gewicht  $G$  der hangenden Schicht. Es zerlegt sich in die Komponenten  $P$  und  $N$ . Die Normalkomponente  $N$  erzeugt die Stempelbelastung. Sie wird um so kleiner, je größer der Ein-

fallwinkel  $\alpha$  wird. Die parallel zum Hangenden verlaufende Komponente  $P$  will den Stempelkopf nach unten schieben.

In Abb. 38 ist gezeigt, wie durch die Bewegung der Gebirgsschichten sich die Lage des Stempels verändert. Wird der Stempel genau senkrecht zum Schichtenverlauf gestellt, so steht der Stempel nach dem Setzungsvorgang schräg, denn der Punkt  $a$  senkt sich nach  $a'$ , während der Punkt  $b$  sich nach  $b'$  hebt, die Linie  $a'b'$  steht dann schräg, so daß der Stempel fallen kann.

Stellt man den Stempel aber von Anfang an schräg, wie die zweite Figur zeigt, so geht die schräge Linie  $ab$  nach dem Bewegungsvorgang in die senkrechte Lage  $a'b'$  über und der Stempel steht gut.

## 5. Zweimaliges Zerlegen in zwei Seitenkräfte.

Das Verfahren des Zerlegens einer gegebenen Kraft in zwei Seitenkräfte ist unter Umständen zweimal anzuwenden. Das ist in Abb. 39 und 40 gezeigt. Die treibende Kraft eines Segelbootes ist die Windkraftkomponente, die senkrecht auf die Segelfläche drückt. Liegt diese Komponente aber nicht in der Kiel- bzw. Fahrtrichtung, so ist hiervon

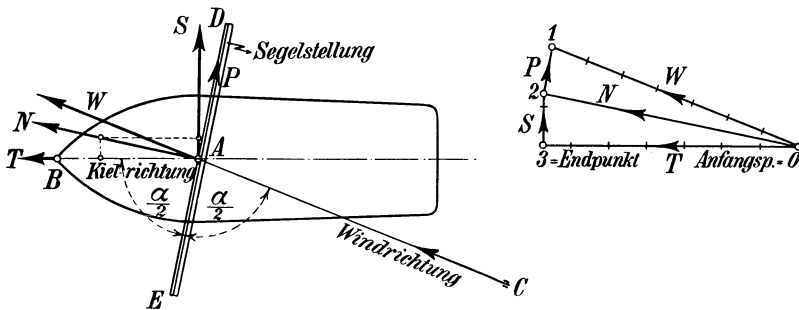


Abb. 39. Segelboot mit Rückenwind.

wieder nur die Komponente treibend, die in der Kielrichtung liegt, während die Komponente senkrecht zur Kielrichtung das Schiff seitlich abdrängen will.

In Abb. 39 fährt das Segelboot mit Rückenwind. Das Segel wird so gestellt, daß die Segelfläche den Winkel zwischen Windrichtung und Kielrichtung halbiert. Der Winddruck  $W$  ist zu zerlegen in die Komponente  $N$  senkrecht und  $P$  parallel zur Segelfläche.  $P$  bleibt wirkungslos.  $N$  ist weiter zu zerlegen in die Komponente  $T$  parallel und  $S$  senkrecht zur Kielrichtung. In der Kräftefigur ist  $W = 700$  kg und damit wird  $T = 680$  kg, so daß bei Rückenwind das Segelboot gute Fahrt macht.

In Abb. 40 fährt das Segelboot mit Gegenwind. Die Segelfläche wird wieder so gedreht, daß sie den Winkel zwischen Kielrichtung und Windrichtung halbiert. Man zerlegt den Winddruck  $W$  in die Komponente  $N$  senkrecht und  $P$  parallel zur Segelfläche. Nun erfolgte die zweite Zerlegung, indem man  $N$  in die Komponente  $T$  parallel und  $S$  senkrecht zur

Kielrichtung zerlegt. Die treibende Kraft  $T$  ist sehr klein geworden. In der Kräftefigur wird  $T = \overline{O3} = 40 \text{ kg}$  gemessen bei einem Winddruck von  $W = 1000 \text{ kg}$ , so daß das Boot nur sehr langsame Fahrt machen kann.

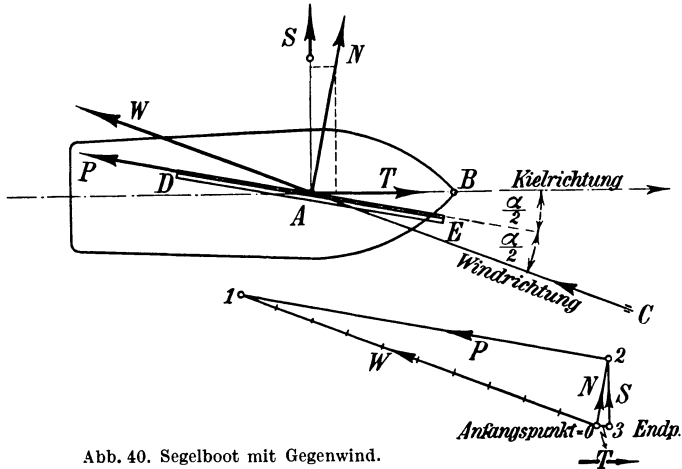


Abb. 40. Segelboot mit Gegenwind.

### 6. Zusammensetzung von Kräften, welche nicht denselben Angriffspunkt haben.

In Abb. 41 wirken auf einen Körper zwei Kräfte, die Kraft  $P_1$  mit dem Angriffspunkt  $A$  und die Kraft  $P_2 = 3 P_1$  mit dem Angriffspunkt  $B$ .

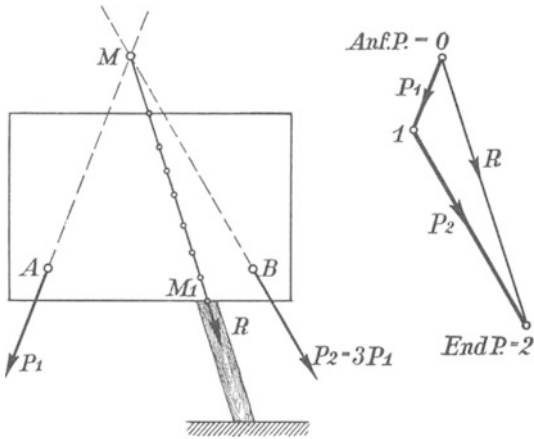


Abb. 41. Zwei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

Es soll die resultierende Kraft  $R$  gesucht werden. Man zeichnet in bekannter Weise das Kräfteeck und findet die Resultierende  $R$  der Größe und Richtung nach als die Verbindungslinie des Anfangspunktes  $0$  mit dem Endpunkt  $2$ . Es fehlt noch der Angriffspunkt. Er wird in der Bildfigur gefunden, indem man die Krafrichtungen  $P_1$  und  $P_2$  bis zum Schnitt verlängert. Der Schnittpunkt  $M$  ist der Angriffspunkt. Man legt

dann durch  $M$  eine Parallele  $R$  zur Resultierenden  $R$  im Kräfteeck. In dieser Richtung zieht die Resultierende, sie kann an einem beliebigen Punkt dieser Linie ihren Angriff am Körper tätigen, das zeigen die Punkte in der Bildfigur an.

Will man die Bewegung des Körpers, die nur in der Richtung  $R$  erfolgen kann, aufhalten, so muß man einen Stützstempel in Richtung  $R$  setzen.

In Abb. 42 wirken auf einen Körper drei Kräfte, die Kraft  $P_1$  mit dem Angriffspunkt  $A$ , die Kraft  $P_2 = \frac{1}{2} P_1$  mit dem Angriffspunkt  $B$  und die Kraft  $P_3 = 1,5 P_1$  mit dem Angriffspunkt  $C$ . Es soll die Resultierende  $R$  gefunden werden. Das Kräfteck liefert die Resultierende  $R$  der Größe und Richtung nach als die Verbindungslinie  $\overline{O\bar{3}}$  von Anfangs- und Endpunkt. Der Angriffspunkt muß in der Bildfigur gefunden werden, die zu dieser Ausführung wiederholt ist.

Man faßt zunächst die beiden ersten Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Hilfsresultierenden  $\mathfrak{R}$  zusammen, ihre Richtung liegt als Verbindungslinie  $\overline{O\bar{2}}$  im Kräfteck fest. Ihr Angriffspunkt ermittelt sich in der Bildfigur als Schnittpunkt  $M_1$  der Richtungslinien  $P_1$  und  $P_2$ . Zieht man durch  $M_1$  eine Parallele zu  $\mathfrak{R}$  des Kräftecks und bringt diese Parallele zum Schnitt mit der dritten Kraft  $P_3$ , so ist der Schnittpunkt  $M_2$  der Angriffspunkt der Resultierenden  $R$ . In der Figur ist durch  $M_2$  die Parallele zu  $R$  im Kräfteck gezogen, sie zeigt die Bewegung an, die der Körper ausführen will. Der Gleichgewichtszustand kann nur durch Abstützung in dieser Richtung erhalten werden.

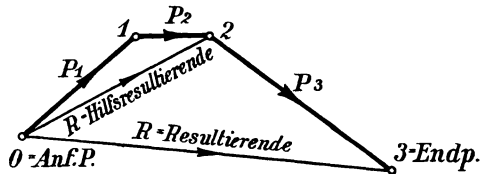
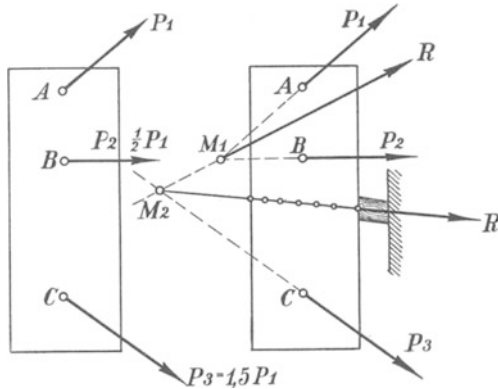


Abb. 42. Drei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

Auf das Kappenholz eines Türstocks (Abb. 43) drücken zwei Schrägkräfte mit den Angriffspunkten  $I$  und  $II$ . Beide Kräfte sollen durch eine Resultierende ersetzt werden. Die Resultierende der Größe und Richtung nach zu finden, gelingt uns durch Aufzeichnen des Kräftecks. Aber der Angriffspunkt fehlt noch. In der Zeichnung könnte er gefunden werden, wenn man die Kraftrichtungen  $P_1$  und  $P_2$  bis zum Schnitt verlängern könnte, denn die Resultierende muß immer durch den Schnittpunkt der beiden Einzelkräfte gehen. Aber der Schnittpunkt fällt nicht mehr in die Zeichenebene.

Man muß daher in anderer Weise den Schnittpunkt finden, und

zwar so: zerlegt man  $R$  in zwei beliebige Seitenkräfte, die sich in der Zeichenebene schneiden, so ist in diesem Schnittpunkt der Angriffspunkt gefunden. Wählt man z. B. außerhalb der Linie  $R$  des Kräfteecks einen beliebigen Punkt  $O$  und zieht die Strahlen  $i_0$  und  $i_2$ , so sind diese Strahlen zwei solche Seitenkräfte. Außerdem zieht man noch den mittleren Strahl  $i_1$ , dann zerlegt sich  $P_1$  in die Seitenkräfte  $i_0$  und  $i_1$  und  $P_2$  in die Seitenkräfte  $i_1$  und  $i_2$ . Diese Kräfte  $i_0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  müssen nun in die Kräftefigur übertragen werden.

Man wählt auf der Krafrichtung  $P_1$  einen beliebigen Punkt  $a$ , zieht durch  $a$  eine Parallele  $i_0$  zur Linie  $i_0$  des Kräfteecks und ebenfalls eine Parallele  $i_1$  zur Linie  $i_1$  des Kräfteecks. Diese Parallele schneidet die Krafrichtung  $P_2$  im Punkte  $b$ . Zieht man durch  $b$  eine Parallele  $i_2$  zur

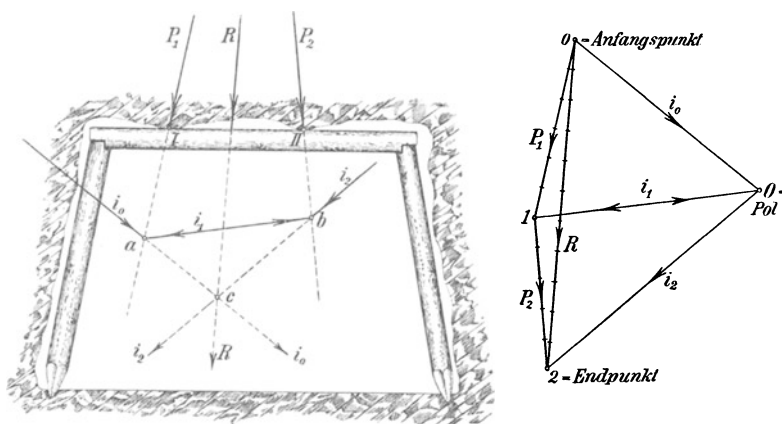


Abb. 43. Der Türstock mit Kappenlast.

Linie  $i_2$  des Kräfteecks und verlängert die Parallelen  $i_2$  und  $i_0$  bis zum Schnittpunkte  $c$ , so ist dieser der gesuchte Angriffspunkt der Resultierenden  $R$ . Man legt nun durch  $c$  eine Parallele  $R$  zur Linie  $R$  des Kräfteecks, in dieser Linie erfolgt der resultierende Druck auf das Kappenholz.

Der seitlich des Kräfteecks beliebig gewählte Punkt  $O$  wird Pol genannt, die von  $O$  ausgehenden Strahlen  $i_0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  heißen Polstrahlen. In der Kräftefigur heißen die Parallelen  $i_0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  Seilstrahlen, der erste Seilstrahl  $i_0$  und der letzte Seilstrahl  $i_2$  heißen die beiden äußeren Seilstrahlen. Der aus den Seilstrahlen gebildete Linienzug heißt das Seileck. Der Schnittpunkt der beiden äußeren Seilstrahlen liefert den gesuchten Angriffspunkt.

## 7. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Auf das Kappenholz einer Türstockzimmerung (Abb. 44) drücken die Vertikalkräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$ , es sollen diese Einzelkräfte durch eine resultierende Kraft ersetzt werden.



Vom Anfangspunkt  $O$  ausgehend, werden die Vertikalkräfte nacheinander aufgetragen, Punkt  $4$  wird dann der Endpunkt der Kräftelinie. Die ganze Linie  $O4$  liefert die Resultierende  $R$  der Größe und Richtung nach.

Um den Angriffspunkt oder die Angriffslage in der Türstockzeichnung zu finden, muß unter beliebiger Wahl des Poles  $O$  den Polstrahlen entsprechend das Seileck gebildet werden, indem man auf der ersten Kraftrichtung  $P_1$  einen beliebigen Punkt  $a$  annimmt und die Parallelen  $i_0$  und  $i_1$  zu den Polstrahlen  $i_0$  und  $i_1$  zieht. Setzt man das Parallelenziehen fort, so entsteht das Seileck.

Verlängert man die beiden äußeren Seilstrahlen  $i_0$  und  $i_4$  bis zum Schnitt, so ist der Schnittpunkt  $c$  derjenige Punkt, durch den die Re-

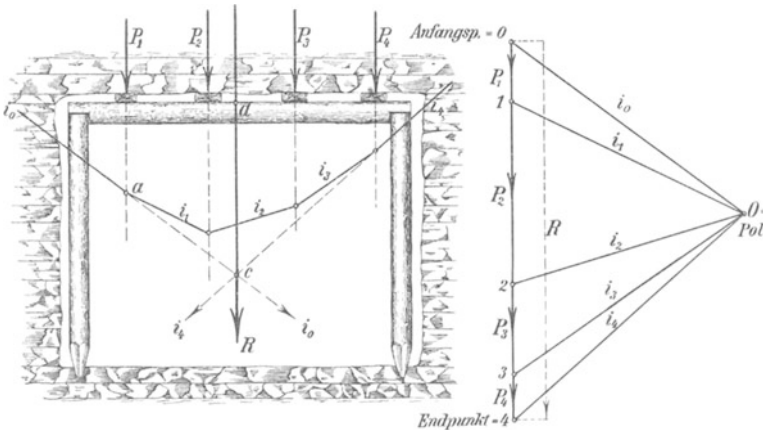


Abb. 44. Der resultierende Kappendruck.

sultierende  $R$  gehen muß. Die Kraftrichtung  $R$  trifft das Kappenholz im Punkte  $d$ , und das Kappenholz würde unter dem Einfluß der Belastung genau so auf die Stempel drücken, als wenn nur die einzige Kraft  $R$  im Punkte  $d$  die Belastung bringen würde.

## 8. Das Gesetz der Wechselwirkung oder Reaktion.

Das Gesetz der Wechselwirkung ist ein Erfahrungsgesetz. Es heißt, Druck erzeugt Gegendruck, jede Kraft erzeugt eine Gegenkraft oder Reaktionskraft. Diese Gegenkraft hat stets gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie die äußere Kraft.

Legt man sich z. B. mit dem Rücken gegen die Wand (Abb. 45), so drückt der Körper mit der Kraft  $P$  gegen die Wandfläche. Mit der gleichen Kraft  $P$  drückt aber die Wand auch gegen den Körper. Denn würde man die Wand durch einen Menschen ersetzen, so würde dieser, um denselben Zustand herzustellen, sich mit derselben Kraft  $P$  gegen den Rücken des Körpers stemmen müssen.

Tritt man mit dem Fuß auf harten Boden (Abb. 46), so bleibt der Fuß in dieser Höhenlage stehen, denn der Widerstand des Bodens

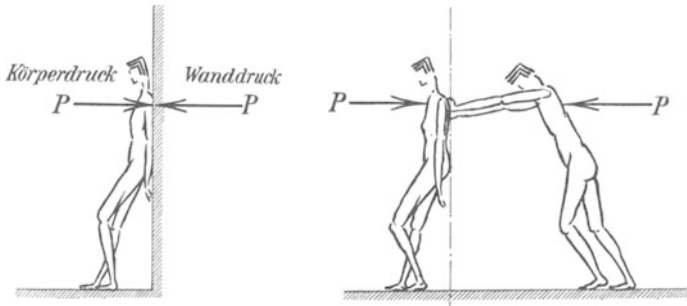


Abb. 45. Druck und Gegendruck.

reicht aus, um das Körpergewicht  $G$  aufzunehmen. In diesem Fall drückt der Boden mit der Widerstandskraft  $W = G$  gegen den Fuß.

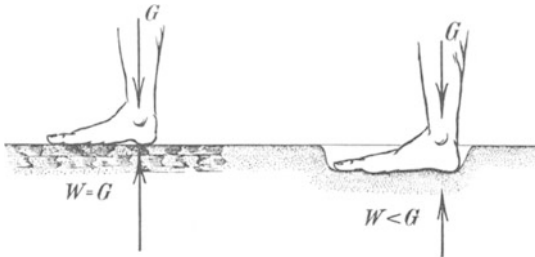


Abb. 46. Druck und Gegendruck.

Ist der Boden aber schlammig, so sinkt der Fuß ein, d. h. er kommt aus dem Zustand des Gleichgewichts, denn die Widerstandskraft  $W$  des Bodens ist nicht ausreichend, um das Gewicht  $G$  aufzunehmen. Sobald also der

Gegendruck  $W$  kleiner ist als  $G$ , das Gesetz der Wechselwirkung demnach nicht erfüllt ist, ist der Gleichgewichtszustand gestört.

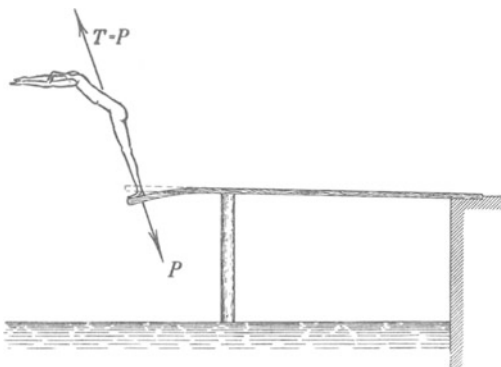


Abb. 47. Druck und Gegendruck.

Man nennt die Gegenwirkung einer Kraft auch Reaktion. Diese Reaktionskräfte treten oft fühlbar und sichtbar auf; z. B. fühlt der Schütze beim Schießen den Rückstoß des Gewehrkolbens in der Schulter. Der Artillerist sieht beim Abfeuern als Reaktionsstoß den Rücklauf der Lafette, der Bergmann fühlt beim Arbeiten mit dem Abbauhämmer

den Rückstoß des vorwärts getriebenen Schlagkolbens als Zurückprallen des ganzen Hammers.

Ein Schwimmer (Abb. 47), der mit der Stoßkraft  $P$  das Sprungbrett herunterdrückt, wird vom Sprungbrett mit derselben Kraft  $T = P$  abgeschleudert.

## 9. Die ersten zwei Gleichgewichtsbedingungen.

Ein Körper, der auf dem Boden steht (Abb. 48) und nur durch eine Vertikalkraft  $G$  belastet wird, ist im Gleichgewichtszustand, er verharrt an derselben Stelle und kommt nicht in Bewegung.

Will man die Bedingung für diesen Gleichgewichtszustand untersuchen, so muß man sämtliche Kräfte aufsuchen, die an dem Körper zur Wirkung kommen. Nach dem Gesetz der Wechselwirkung ist die Stützwirkung der Bodenfläche durch die Reaktionskraft  $V = G$  zu ersetzen. Diese Gleichung  $V = G$  läßt sich auch schreiben

$$V - G = 0.$$

Beide Kräfte wirken in derselben Angriffslinie, aber in entgegengesetzter

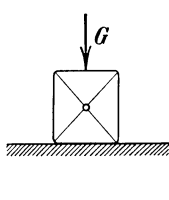


Abb. 48. Der Gleichgewichtszustand bei Vertikalbelastung.

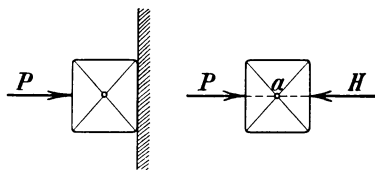
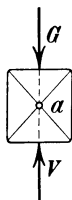


Abb. 49. Der Gleichgewichtszustand bei Horizontalbelastung.

Richtung. Rechnerisch kommt das dadurch zum Ausdruck, daß man der einen Kraftgröße  $V$  ein positives Vorzeichen gibt, also diese Größe  $+V$  schreibt, und der entgegengesetzt gerichteten Kraft  $G$  das entgegengesetzte Vorzeichen, also ein Minus-Zeichen gibt und  $-G$  schreibt.

Bildet man die algebraische Summe dieser beiden Kraftgrößen, so lautet die Summe

$$+V + (-G) \text{ oder } V - G.$$

Nach dem Gesetz der Wechselwirkung ist aber

$$\boxed{V - G = 0,}$$

das ist für den vorliegenden Fall die Gleichgewichtsbedingung. Die erste Gleichgewichtsbedingung lautet demnach allgemein:

Wirken auf einen Körper nur Vertikalkräfte, so ist der Körper im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Vertikalkräfte gleich Null ist. Hierbei sind nach unten gerichtete Kräfte negativ, nach oben gerichtete Kräfte positiv zu setzen.

In Abb. 49 werde ein gewichtsloser Körper mit der horizontalen Kraft  $P$  gegen eine senkrechte Wand gedrückt. Auch dieser Körper wird in dieser Lage verharren, d. h. er ist im Gleichgewichtszustand. Unter-

sucht man den Gleichgewichtszustand, so ersetzt man die Stützfläche der Wand durch die horizontale Gegenkraft  $H$ . Nach dem Gesetz der Wechselwirkung ist wieder

$$P = H \quad \text{oder} \quad P - H = 0.$$

Beide Kräfte wirken in derselben Angriffslinie, aber sie wirken in entgegengesetzter Richtung. Bezeichnet man die eine Kraft mit  $+P$ , so muß die andere Kraft  $H$  das entgegengesetzte Vorzeichen haben, also  $-H$  genannt werden. Die Summe beider Kräfte ist

$$+P + (-H) = P - H.$$

Da nach dem Gesetz der Wechselwirkung

$$\boxed{P - H = 0}$$

ist, so lautet die 2. Gleichgewichtsbedingung:

Wirken auf einen Körper nur Horizontalkräfte, so ist der Körper im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Horizontalkräfte gleich Null ist; hierbei sind nach

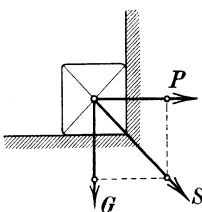
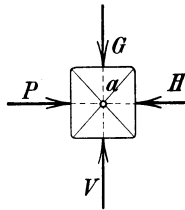


Abb. 50. Der Gleichgewichtszustand bei Schrägbelastung.



rechts ziehende Kräfte positiv, nach links ziehende negativ zu setzen.

Denkt man sich, wie in Abb. 50 gezeigt, die beiden Kräfte  $G$  und  $P$  gleichzeitig wirkend, so muß man zur Abstützung auch beide Wände an-

bringen. Der Gleichgewichtszustand herrscht wieder vor, denn der Körper verharrt in seiner Lage.

Zur Untersuchung des Gleichgewichtszustandes ersetzt man die Wandflächen wieder durch die Reaktionskräfte  $V$  und  $H$ . Und nun kommt das Gesetz der Wechselwirkung zweimal zur Anwendung. Es muß sein

$$1) \quad V - G = 0,$$

$$2) \quad P - H = 0.$$

In der Wandflächenfigur kann man die beiden Seitenkräfte  $G$  und  $P$  ersetzen durch die resultierende Schrägkraft  $S$ , welche als Einzelkraft auf den Körper dieselbe Wirkung ausübt wie die beiden Kräfte  $G$  und  $P$ , und für diese würden dann auch die beiden vorstehenden Gleichungen gelten.

Wenn daher Schrägkräfte auf den Körper wirken, so zerlegt man diese in Vertikal- und Horizontalkräfte, so daß man wieder die beiden schon bekannten Gleichgewichtsbedingungen anwenden kann.

Allgemein lauten nun die beiden Gleichgewichtsbedingungen:

Wirken auf einen Körper Kräfte in verschiedenen Richtungen, so herrscht Gleichgewicht, wenn

1. die Summe aller Vertikalkräfte und aller Vertikal-komponenten der Schrägkräfte gleich Null ist, und
2. die Summe aller Horizontalkräfte und aller Horizontalkomponenten der Schrägkräfte gleich Null ist.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist die Resultierende aller Kräfte, welche auf den Körper wirken, gleich Null, d. h. die Kräfte heben sich gegenseitig auf.

## 10. Die zeichnerische Gleichgewichtsbedingung.

Denkt man sich in Abb. 51 eine Kugel auf dem Blatt des Buches liegend und in horizontaler Ebene von den Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  gedrückt, so findet man im Kräfteeck bekanntlich die Resultierende als Verbindungslinie  $\overline{03}$  vom Anfangs- und Endpunkt der Kräftelinie.

Diese Resultierende zieht vom Anfangspunkt  $0$  nach dem Endpunkt  $3$ . Lasse ich die gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung als Widerstand  $W$  wirken, so wird dadurch die Resultierende aufgehoben und der Körper bleibt in Ruhe.

Zieht man daher durch den Angriffspunkt  $a$  der Einzelkräfte eine Parallele  $W$  zur Linie  $W$  des Kräfteecks und läßt in dieser Richtung die Kraft  $W$  gegen die Kugel drücken, so bleibt die Kugel im Gleichgewicht. Man könnte auch dieselbe Wirkung durch eine Stützfläche erzielen, welche man senkrecht zur  $W$ -Richtung gegen die Kugel legt.

Betrachtet man das Kräfteeck, so erkennt man, daß die Kräftelinie mit dem Anfangspunkt  $0$  und dem Endpunkt  $3$  durch die Linie  $W$  eine geschlossene Figur wird, und geht man vom Anfangspunkt  $0$  aus über die Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $W$  nach dem Anfangspunkt  $0$  zurück, so liegen sämtliche Pfeile in der Richtung dieser Bewegung, d. h. alle Kräfte haben gleichen Pfeillauf. Demnach können wir für die zeichnerische Lösung folgende zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

Wirken auf einen Körper Kräfte in verschiedenen Richtungen, so herrscht Gleichgewicht, wenn

1. das Kräfteeck eine geschlossene Figur bildet, und
2. im Kräfteeck gleichbleibender Pfeillauf herrscht.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist die Resultierende aller Kräfte, welche auf den Körper wirken, gleich Null, denn die Gegenkraft  $W$  hebt die Resultierende  $R$  vollständig auf, so daß der Körper bewegungslos, d. h. in Ruhe oder im Gleichgewicht bleibt.

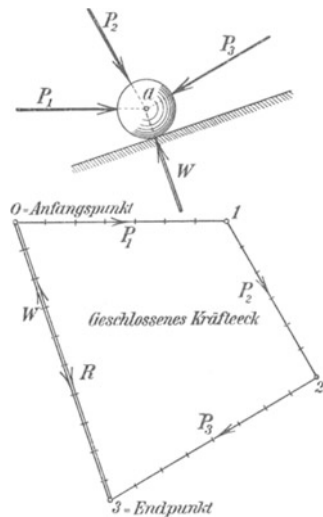
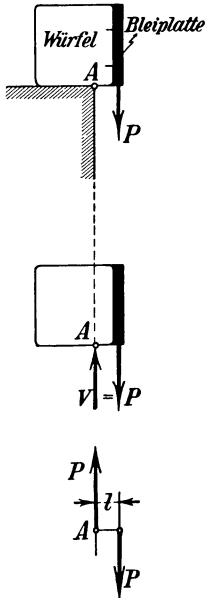


Abb. 51. Die zeichnerische Gleichgewichtsbedingung.

## 11. Das Kräftepaar und das statische Moment einer Kraft.

An einem Beispiel soll gezeigt werden, daß ein Körper unter dem Einfluß von Kräften trotz Erfüllung der algebraischen Gleichgewichtsbedingung nicht im Gleichgewicht zu sein braucht. In Abb. 52 sei ein Würfel an seiner rechten Seitenfläche mit einer schweren Bleiplatte belastet, die ihn mit der Kraft  $P$  nach unten drückt. Er sei so auf eine Bodenfläche gesetzt, daß die Grundfläche über die Bodenfläche herausragt.



Nach dem Gesetz der Wechselwirkung muß die Stützfläche mit derselben Kraft  $V = P$  in entgegengesetzter Richtung gegen den Würfel drücken. Diese Kraft  $V$  hat aber einen anderen Angriffspunkt als  $P$ , sie kann günstigsten Falles in dem Kantenpunkt  $A$  angreifen, und es entstehen zwei gleiche aber entgegengesetzte Parallelkräfte  $P$  oder ein Kräftepaar  $P$  mit der Abstandslänge  $l$ .

Ein solches Kräftepaar ruft eine Drehung hervor, der Würfel wird rechts herum gedreht, kommt also aus dem Gleichgewicht, trotzdem die Gleichgewichtsbedingung

$$V - P = 0$$

erfüllt ist.

Daraus schließen wir, daß die abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen nur unter bestimmten Voraussetzungen genügen. Sieht man sich die Kräftefiguren Abb. 48, 49, 50 und 51, welche zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen dienten, darauf hin an, so fällt auf, daß in allen vier Figuren die Kräfte durch einen gemeinsamen Punkt  $a$  gehen, d. h. die Kräfte haben einen gemeinsamen Angriffspunkt gehabt. Das ist nicht mehr der Fall in Abb. 52.

Voraussetzung für ein Genügen der beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen ist also immer, die an dem Körper wirkenden Kräfte müssen einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Ist

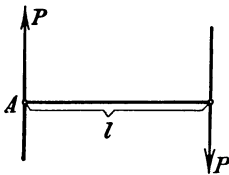


Abb. 53. Das Kräftepaar.

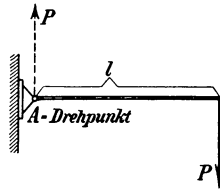


Abb. 54. Das Drehmoment rechts herum.

diese Voraussetzung nicht erfüllt, so genügen die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr. Es muß jedenfalls noch eine weitere Bedingung erfüllt werden, die noch zu suchen ist.

Das Gleichgewicht wird durch ein Kräftepaar (Abb. 53), das eine Drehung des Körpers verursacht, gestört. Diese Drehwirkung kommt besser zum Ausdruck, wenn man, wie in Abb. 54 geschehen, die beiden Parallelkräfte durch einen Stab, der rechtwinkelig zu den Kräften steht,

verbindet und den Endpunkt  $A$  des Stabes gelenkartig an einer Wand befestigt. Jetzt geht die eine Kraft  $P$  durch den festen Gelenkpunkt und übt keine Drehwirkung mehr aus, dagegen will die andere Kraft  $P$  den Stab im vorigen Sinn weiter drehen. Die Drehwirkung ändert sich also am Stabe nicht. Und nun sieht man, daß die Drehwirkung von zwei Faktoren abhängig ist:

1. von der Größe  $P$ ,
2. von der Größe  $l$ .

Würde man die Kraft zweimal so groß machen, so würde die Drehwirkung ebenfalls zweimal so groß, und würde man den Hebelarm  $l$  dreimal so groß machen, so würde die Drehwirkung auch dreimal so groß, d. h. die Gesamtdrehwirkung würde das  $2 \cdot 3 = 6$ fache betragen. Die Drehwirkung wird daher durch das

Produkt  $P \cdot l$

bestimmt. Dieses Produkt nennt man das statische Moment der Kraft und bezeichnet es mit dem Buchstaben  $M$ . Man setzt daher:

$$M = P \cdot l.$$

Da man  $P$  in kg und  $l$  in cm zu messen pflegt, so ist das cmkg die Einheit für die Momentengröße. Der feste Gelenkpunkt  $A$  heißt der Drehpunkt, der Abstand  $l$  des Drehpunktes von der Wirkungslinie der Kraft heißt der Hebelarm der Kraft. Man kann daher auch sagen:

Drehmoment = statisches Moment = Kraft  $\times$  Hebelarm.

Das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Drehpunkt ist gleich dem Produkt aus Kraft mal Hebelarm.

Würde man, wie in Abb. 55, an demselben Hebelarm  $l$  dieselbe Kraft  $P$  in entgegengesetzter Richtung wirken lassen, so hat das statische Moment wieder dieselbe Größe

$$M = P \cdot l$$

und doch unterscheiden sich die beiden Wirkungen voneinander, denn in Abb. 54 erfolgt eine Rechtsdrehung des Stabes und in Abb. 55 eine Linksdrehung. Folglich ist durch das Produkt  $P \cdot l$  das statische Moment noch nicht vollständig bestimmt, man muß noch den Drehsinn berücksichtigen.

Man ist übereingekommen, den Drehsinn im Sinne des Uhrzeigers, also rechts herum, als positiv und den Drehsinn links herum als negativ zu bezeichnen. Daher heißt das statische Moment

in Abb. 54  $M = +P \cdot l$ ,      in Abb. 55  $M = -P \cdot l$ .

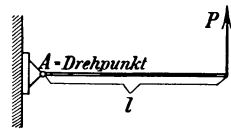


Abb. 55. Das Drehmoment links herum.

## 12. Das Aufsuchen der 3. Gleichgewichtsbedingung.

Auf einer Achse (Abb. 56) sitzen zwei Scheiben, eine kleine Scheibe mit dem Radius  $r$  und eine große Scheibe mit dem Radius  $R$ . Um die kleine Scheibe schlingt sich ein Seil, das nach links abläuft und mit dem

Gewicht  $G$  belastet ist. Das Gewicht will die Scheibe links herum drehen, es hat in bezug auf den Achsenmittelpunkt als Drehpunkt das statische Moment

$$M = - G \cdot r.$$

Um die Drehung zu verhindern, kann man um die große Scheibe ein Seil schlingen, das nach rechts abläuft. Zieht man mit der Kraft  $X$  am Seilende, so wird eine Drehbewegung nach rechts entstehen. Die Wirkung dieser Drehbewegung wird durch das statische Moment:

$$M = + X \cdot R$$

gekennzeichnet. An der Achse herrscht Gleichgewicht, wenn die Wirkung der Rechtsdrehung gleich der Wirkung der Linksdrehung ist, d. h. wenn die absoluten Werte der beiden Momente einander gleich sind. Also muß sein:

$$X \cdot R = G \cdot r \quad \text{oder} \quad + X \cdot R - G \cdot r = 0.$$

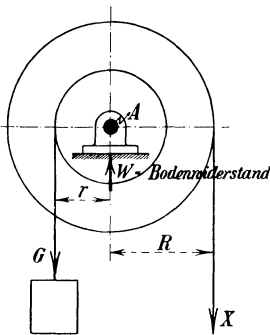


Abb. 56. Der Gleichgewichtszustand.

Diese Gleichung liefert die 3. Gleichgewichtsbedingung: Wirken auf einen Körper Kräfte in verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen Angriffspunkten, so herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe aller statischen Momente in bezug auf ein und denselben Drehpunkt gleich Null ist. Hierbei ist zu beachten, daß rechtsdrehende Momente positiv und linksdrehende Momente negativ sind.

Außer dieser 3. Gleichgewichtsbedingung sind die früher abgeleiteten ersten zwei Gleichgewichtsbedingungen: 1. Summe aller Vertikalkräfte gleich Null und 2. die Summe aller Horizontalkräfte gleich Null, zu erfüllen.

In Abb. 56 kommen Horizontalkräfte nicht vor, die Belastung erfolgt nur durch Vertikalkräfte, daher ist für diesen Belastungsfall nur noch die erste Gleichgewichtsbedingung: „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“, zu erfüllen.

Denkt man sich das Stützlager der Achse auf weichen Boden gesetzt, so würde das Lager so lange einsinken, also nicht im Gleichgewicht sein, bis der Bodenwiderstand  $W$  der ersten Gleichgewichtsbedingung genügt. Diese lautet:

$$W - G - X = 0 \quad \text{oder} \quad W = G + X,$$

d. h. der Bodenwiderstand muß gleich der Summe der Belastungskräfte sein.

### 13. Anwendungen der Gleichgewichtsbedingungen, Balken auf zwei Stützen.

Die Gleichgewichtsbedingungen finden Anwendung, um unbekannte Kräfte zu ermitteln. Solche unbekanntes Kräfte sind z. B. die Auflagerkräfte eines an den beiden Endpunkten gestützten Balkens, der



unter dem Druck einer Belastung steht. In Abb. 57 ist  $R$  die resultierende Belastungskraft. Der Balken ist in den Endpunkten  $A$  und  $B$  durch Auflager gestützt. Nimmt man die Stützlager fort, so würde der Balken absinken. Um dieses zu verhindern, muß man an den Endpunkten zwei Kräfte  $A$  und  $B$  anbringen, welche entgegengesetzt gerichtet sind wie die Belastungskraft  $R$ . Diese Kräfte heißen die Auflagerkräfte oder Stützenwiderstände. Sie lassen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.

Da nur Vertikalkräfte wirken, ist die erste Gleichgewichtsbedingung, Summe aller Vertikalkräfte gleich Null, zu erfüllen. Also muß sein

$$+ A - R + B = 0 \quad \text{oder} \quad A + B = R.$$

Wir sehen, daß die Summe der Auflagerkräfte gleich der Belastungskraft  $R$  sein muß, wissen aber noch nicht, wie groß  $A$  und  $B$  für sich werden, denn aus einer Gleichung, welche zwei Unbekannte enthält, lassen sich die Unbekannten nicht berechnen.

Da die Kräfte keinen gemeinsamen Angriffspunkt haben, muß auch die dritte Gleichgewichtsbedingung oder der Momentensatz erfüllt werden, und da man bei der Anwendung des Momentensatzes den Drehpunkt beliebig wählen kann, legt man ihn so, daß eine der Unbekannten aus der Gleichung herausfällt.

Wählt man z. B. den Endpunkt  $B$  des Balkens als Drehpunkt, wie die dritte Figur der Abb. 57 zeigt, so fällt die Unbekannte  $B$  aus der Momentengleichung heraus, weil die Kraft  $B$  durch den Drehpunkt geht und den Hebelarm null hat.

An dem Balken wirkt die Kraft  $A$  am Hebelarm  $l$  rechtsdrehend und die Kraft  $R$  am Hebelarm  $a$  linksdrehend, also lautet die Momentengleichung

$$+ A \cdot l - R \cdot a = 0.$$

In dieser Gleichung ist  $A$  die einzige Unbekannte, sie läßt sich also berechnen. Man bildet

$$A \cdot l = R \cdot a \quad \text{oder} \quad A = \frac{R \cdot a}{l}.$$

Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung war

$$A + B = R, \quad \text{also} \quad B = R - A.$$

Damit sind die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  berechnet.

Dieselbe Aufgabe kann auch zeichnerisch gelöst werden, wie Abb. 58 zeigt. Man zeichnet eine Strecke  $\overline{OI}$  gleich und parallel der Belastungskraft  $R$ , wählt einen beliebigen Punkt  $O$  als Pol und zieht die Polstrahlen

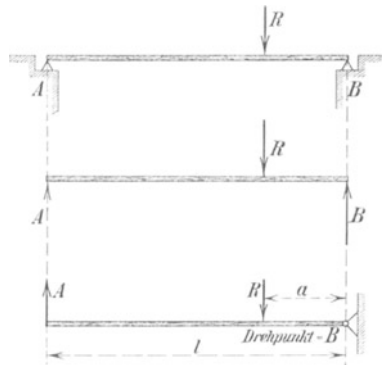


Abb. 57. Der Balken auf zwei Stützen.

$i_0$  und  $i_1$ . Nun zeichnet man in der anderen Figur das Seileck, indem man auf der Krafrichtung  $R$  einen beliebigen Punkt  $m$  wählt und die Seilstrahlen  $i_0$  und  $i_1$  parallel zu den Polstrahlen zieht. Seilstrahl  $i_0$  schneidet die Auflagervertikale  $A$  im Punkte  $a$ , Seilstrahl  $i_1$  die Auf-

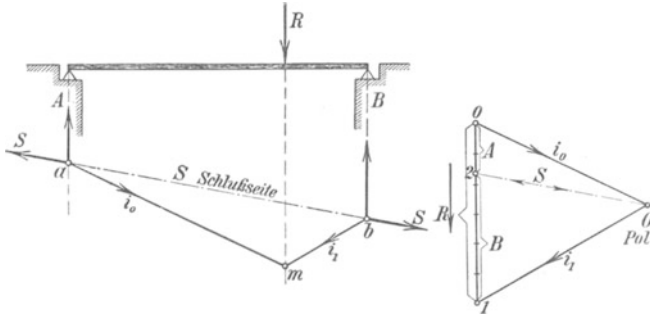


Abb. 58. Zeichnerische Bestimmung der Auflagerdrücke.

lagervertikale  $B$  im Punkte  $b$ . Zieht man die Linie  $ab$ , so ist  $ab$  die Schlußseite  $S$  des Seilecks.

Zieht man durch den Pol  $O$  eine Linie  $S$  parallel zur Schlußseite, so schneidet diese mit dem Punkt  $2$  auf der Kräftenlinie  $R$  die Auflagerkräfte  $A$  und  $B$  aus.

Die Begründung ist leicht, wenn man sich in der Schlußseitenlinie zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $S$  denkt, die eine Kraft  $S$  zieht im Punkte  $a$  nach links, die andere Kraft  $S$  im Punkte  $b$  nach rechts.

Im Punkte  $a$  wirken drei Kräfte, nämlich  $A$ ,  $S$  und  $i_0$ . Sie sind im Gleichgewicht, weil das Kräfteeck  $OO2$  geschlossen ist und ununterbrochenen Pfeillauf zeigt. Man sieht ferner, daß am Seileck die Kraft  $A$  den beiden Kräften  $S$  und  $i_0$  das Gleichgewicht hält.

Im Punkte  $b$  wirken ebenfalls drei Kräfte. Diese drei Kräfte  $B$ ,  $S$  und  $i_1$  sind im Gleichgewicht, weil das Kräfteeck  $2OI$  geschlossen ist und ununterbrochenen Pfeillauf zeigt. Am Seileck sieht man wieder, daß die Kraft  $B$  den beiden Kräften  $S$  und  $i_1$  das Gleichgewicht hält.

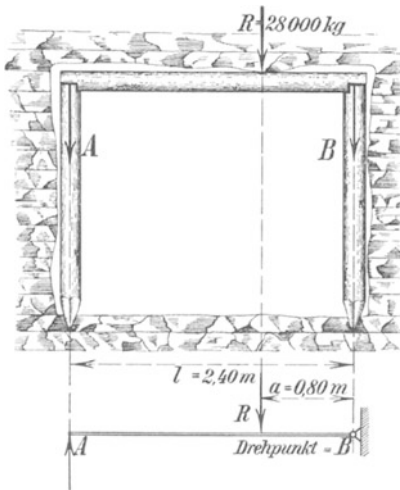


Abb. 59. Bestimmung der Stempelbelastungen.

Das Kappenholz eines Türstockes (Abb. 59) ist ein Balken auf zwei Stützen. Die Stützendrücke  $A$  und  $B$  belasten die Stempel, welche die Kappe abstützen. Der Gebirgsdruck  $R$  wirke einseitig auf die Kappe, wie groß sind die Stempeldrücke  $A$  und  $B$ ?

Man wendet den Momentensatz an und wählt wieder den Endpunkt

$B$  als Drehpunkt, dann muß die Summe aller statischen Momente in bezug auf  $B$  als Drehpunkt gleich Null sein.

$$+ A \cdot l - R \cdot a = 0,$$

$$A = \frac{R \cdot a}{l} = \frac{28000 \cdot 0,80}{2,40} = 9330 \text{ kg.}$$

Nach der 1. Gleichgewichtsbedingung ist

$$A + B = R \text{ oder } B = R - A = 28000 - 9330 = 18670 \text{ kg.}$$

Die Stempel werden also sehr ungleichmäßig belastet, weil der Gebirgsdruck einseitig auf der Kappe liegt.

In Abb. 60 ist eine Last  $P$  mit einem Handkarren fortzubewegen.

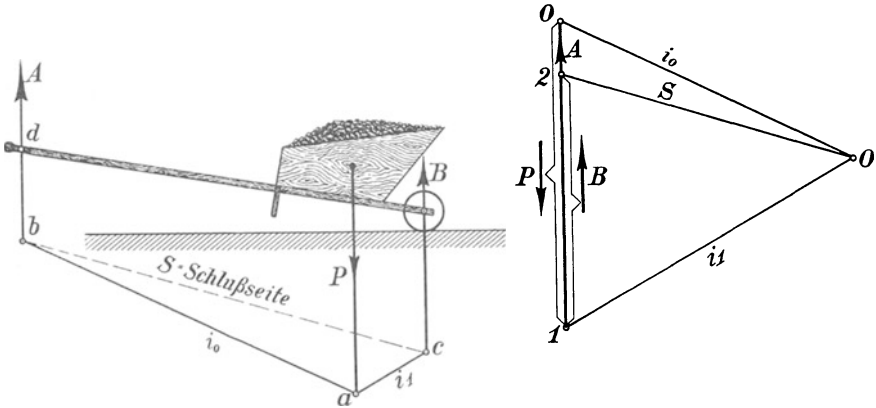


Abb. 60. Die Abstützung eines Handkarrens.

Es sollen die Stützendrücke bestimmt werden. Stützen sind der Punkt  $d$  und der Zapfen des Karrenrades. Man zeichnet die Kräfteinie  $OI$  gleich und parallel  $P$ , wählt einen beliebigen Punkt  $O$  als Pol und zieht die Polstrahlen  $i_0$  und  $i_1$ .

In der Bildfigur wählt man auf der Kraftrichtung  $P$  einen beliebigen Punkt  $a$  und zieht die Seilstrahlen  $i_0$  und  $i_1$  parallel zu den Polstrahlen bis zu den Schnittpunkten  $b$  und  $c$  mit den Auflagervertikalen. Die durch den Pol  $O$  parallel zur Schlupfseite  $bc$  gelegte Linie  $S$  schneidet durch den Punkt  $2$  die Stützendrücke  $A$  und  $B$  auf der Kräfteinie aus. Der Stützendruck  $A$  belastet die Hand des Arbeiters. Er trägt nur einen Bruchteil der Last  $P$ , so daß in dem Handkarren ein Übersetzungsverhältnis liegt.

## 14. Der Balken auf zwei Stützen mit überragendem Ende.

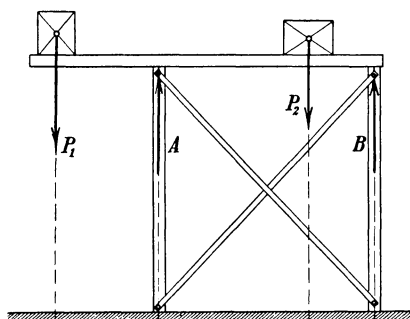
Um Lasten hochzuziehen, legt man oft Bühnenbalken (Abb. 61) so, daß das eine Ende über seine Unterstützung herausragt. Es wirke am freien Ende des Balkens die Last  $P_1$  und zwischen den

Stützpunkten die Last  $P_2$ , es sollen die Stützendrücke  $A$  und  $B$  bestimmt werden.

Um den Stützendruck  $A$  zu berechnen, wählt man den Endpunkt  $B$  des Balkens als Drehpunkt und stellt nach Fig. a den Momentensatz auf:

$$-P_1 \cdot (a+l) + A \cdot l - P_2 \cdot b = 0, \quad A \cdot l = P_1 \cdot (a+l) + P_2 \cdot b,$$

$$A = \frac{P_1 \cdot (a+l) + P_2 \cdot b}{l}.$$



Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung, Summe aller Vertikalkräfte gleich Null, muß sein

$$-P_1 + A - P_2 + B = 0$$

$$\text{oder } B = P_1 + P_2 - A.$$

Die zeichnerische Lösung dieser Aufgabe ist in Fig. b und c gezeigt. In Fig. b ist die Linie  $\overline{OI} = P_1$ , die Linie  $\overline{I\bar{2}} = P_2$ . Der beliebig gewählte Punkt  $O$  ist der Pol,  $i_0, i_1$  und  $i_2$  sind die Polstrahlen.

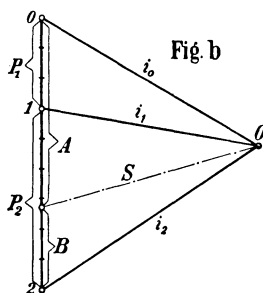
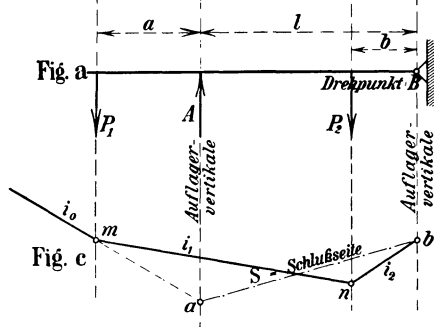


Abb. 61. Der Balken auf zwei Stützen mit überragendem Ende.

In Fig. c ist  $m$  ein auf der Krafttrichtungslinie  $P_1$  beliebig gewählter Punkt. Durch  $m$  ist der Seilstrahl  $i_0$  parallel zum Polstrahl  $i_0$  und der Seilstrahl  $i_1$  parallel zum Polstrahl  $i_1$  gezogen. Der Seilstrahl  $i_1$  schneidet die Richtungslinie der Kraft  $P_2$  im Punkte  $n$ , durch  $n$  ist der Seilstrahl  $i_2$  parallel zum Polstrahl  $i_2$  gezogen.

Nun bringt man die äußersten Seilstrahlen zum Schnitt mit den Auflagervertikalen, d. h. man verlängert  $i_0$  bis zum Schnittpunkt  $a$  und  $i_2$  bis zum Schnittpunkt  $b$ . Die Verbindungslinie  $ab$  ist die Schlußseite  $S$  des Seilecks.

Zieht man in Fig. b durch den Pol  $O$  eine Linie  $S$  parallel zur Schlußseite  $S$  des Seilecks, so schneidet diese auf der Kräftenlinie  $\overline{O\bar{2}}$  die Auflagerkräfte  $A$  und  $B$  aus.

### 15. Der Balken auf zwei Stützen mit Schrägbelastung.

Ein Balken sei auf zwei Schneiden reibungslos gelagert, er werde in schräger Richtung durch die Resultierende  $R$  (Abb. 62) belastet. Soll man den Gleichgewichtszustand untersuchen, so muß man die Schräglast  $R$  in zwei Seitenkräfte zerlegen, in die senkrechte Seitenkraft  $V$  und die horizontale Seitenkraft  $H$ .

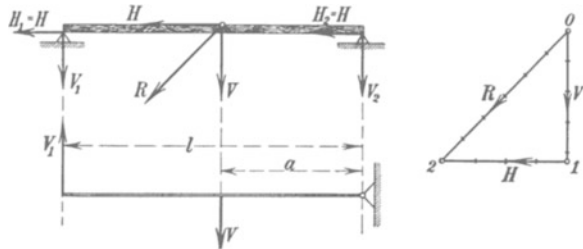


Abb. 62. Der Balken auf zwei Schneiden unter Schräglast.

Die Vertikalbelastung  $V$  wird von den Schneiden aufgenommen. Die vertikalen Schneidendrucke  $V_1$  und  $V_2$  berechnen sich in bekannter Weise.

$$+ V_1 \cdot l - V \cdot a = 0, \quad V_1 = \frac{V \cdot a}{l}.$$

Ferner ist

$$V_1 + V_2 = V \quad \text{oder} \quad V_2 = V - V_1.$$

Die horizontale Seitenkraft  $H$  will den Balken von den Schneiden herunterschieben. Da der Balken nur reibungslos aufliegt, so erfolgt diese Bewegung tatsächlich und der Balken stürzt ab, d. h. der Gleichgewichtszustand ist in dieser Lagerung unmöglich.

Um den Balken zu halten, muß man ihn einspannen. Das kann nach Abb. 63 durch feste Gelenke an den Auflagern geschehen. Und nun kann

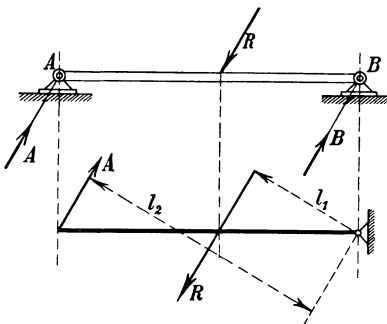


Abb. 63. Der Balken mit zwei Gelenkpunkten unter Schräglast.

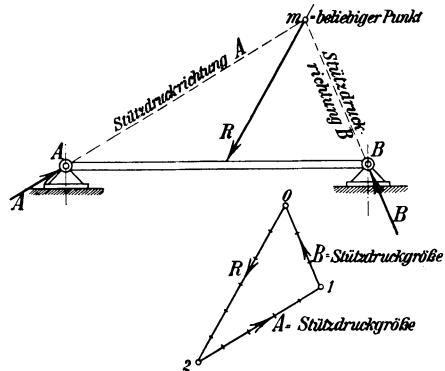


Abb. 64. Der statisch unbestimmte Balken.

man sich denken, daß die schräge Last  $R$  in den beiden Gelenkpunkten parallel zu  $R$  die Auflagerkräfte  $A$  und  $B$  erzeugt. Um  $A$  zu berechnen, wendet man den Momentensatz an:

$$+ A \cdot l_2 - R \cdot l_1 = 0, \quad A = \frac{R \cdot l_1}{l_2}.$$

Ferner ist  $A + B - R = 0$  oder  $B = R - A$ .

Damit wären die Auflagerdrücke bestimmt.

Aber nun ist folgendes zu bedenken:  $R$  ist die Resultierende von  $A$  und  $B$ , d. h.  $A$  und  $B$  sind die Seitenkräfte von  $R$ . Wir wissen aber, daß die Resultierende immer durch den Schnittpunkt der Seitenkräfte gehen muß. Hier liegt der Schnittpunkt im Unendlichen. Er könnte aber ebensogut im Endlichen liegen, da die festen Gelenkpunkte Widerstand nach jeder Richtung hin geben.

Man könnte also, wie in Abb. 64 geschehen, auf der Kraftrichtung  $R$  einen beliebigen Punkt  $m$  annehmen und diesen mit den Gelenkpunkten des Balkens verbinden, dann erhielte man auch zwei Seitenkraftrichtungen  $A$  und  $B$ . Würde man eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $R$  zeichnen, durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Auflagerrichtung  $B$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zur Auflagerrichtung  $A$ , so schnei-

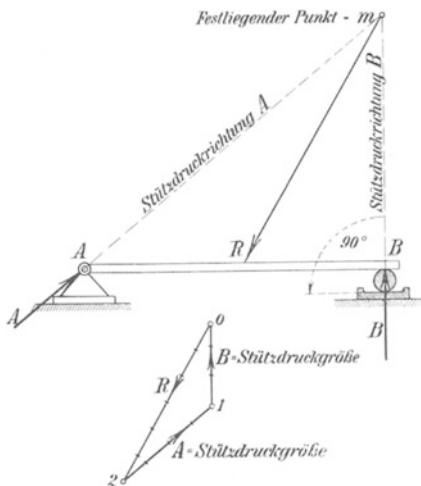


Abb. 65. Der statisch bestimmte Balken.

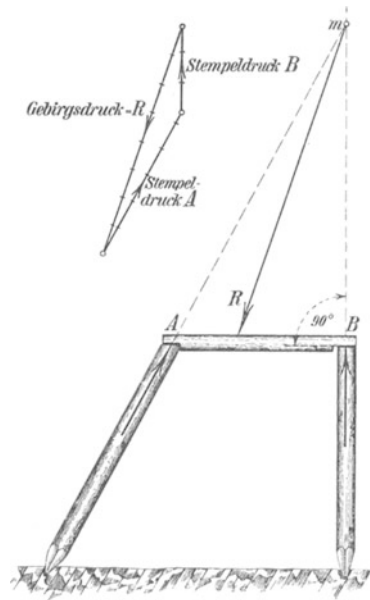


Abb. 66. Schrägstellung des Türstockstempels.

den sich diese im Punkt  $1$ , und es würde die Linienlänge  $\overline{O1}$  die Stützdruckgröße  $B$  und die Linienlänge  $\overline{O2}$  die Stützdruckgröße  $A$  ergeben.

Da der Punkt  $m$  beliebig gewählt werden kann, so läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu, d. h. die Aufgabe ist statisch unbestimmt.

Um die statische Bestimmbarkeit herzustellen, macht man nur den einen Endpunkt des Balkens, z. B. den Punkt  $A$ , gelenkartig fest; dagegen lagert man das andere Ende des Balkens frei auf einer Walze, welche sich auf einer horizontalen Stützfläche frei verschieben kann. Die Walze bleibt nur dann in Ruhe, wenn sie senkrecht zur Stützfläche belastet wird, d. h. das Walzenende des Balkens kann nur einen Stützdruck  $B$  (Abb. 65) senkrecht zur Gleitfläche der Walze aufnehmen.

Der Stützendruck  $B$  senkrecht zur Stützfläche (Abb. 65) schneidet aber die Resultierende  $R$  im Punkte  $m$ . Damit ist der Punkt  $m$  auf der Resultierenden  $R$  nicht mehr beliebig, sondern er ist jetzt eindeutig festgelegt. Der Stützendruck  $A$  muß in die Richtung der Verbindungslinie  $mA$  fallen.

Die Stützendrücke  $A$  und  $B$  sind damit eindeutig bestimmbar. Man zeichnet eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $R$ , zieht durch Punkt  $O$  eine Parallele zu  $mB$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zu  $mA$ . Beide schneiden sich im Punkte  $I$ , und es ist die Linienlänge  $\overline{IO} =$  Auflagerdruck  $B$  und die Linienlänge  $\overline{2I} =$  Auflagerdruck  $A$ .

In Abb. 66 ist das Kappenholz einer Türstockzimmerung durch eine Schräglast  $R$  belastet. Die Kappe ist an beiden Auflagerenden verblattet. Die Schrägkraft  $R$  hat das Bestreben, das Kappenholz nach links zu verschieben, folglich ist die senkrechte Blattfläche am Auflager  $B$  unwirksam, nur die horizontale Blattfläche kann einen Druck senkrecht zur Auflagerfläche aufnehmen. Damit ist die Richtung des Auflagerdruckes  $B$  bestimmt, die Krafrichtung  $B$  schneidet die Resultierende  $R$  im Punkte  $m$ . Verbindet man  $m$  mit dem Auflagerpunkt  $A$ , so ist  $mA$  die Richtung der Auflagerkraft  $A$ . Soll der Türstock besonders widerstandsfähig sein, so muß das linke Stempelholz mit dieser Neigung gesetzt werden, während das rechte Stempelholz senkrecht stehen muß.

Das Kräftedreieck in Abb. 66 liefert die von der Schräglast  $R$  hervorgerufenen Stempeldrücke  $A$  und  $B$ .

## 16. Der Kräfteplan nach Cremona.

Bei Eisenkonstruktionen werden die Stabkräfte in den Fachwerken nach demselben Verfahren bestimmt, das bisher als Zerlegen einer Kraft in zwei Seitenkräfte gezeigt wurde. Die Stabrichtungen sind die Kraftrichtungen, daher treten an einem Knotenpunkt so viele Kräfte auf als Stäbe und Außenkräfte vorhanden sind. Von diesen Kräften dürfen nur zwei unbekannt sein, man kann dann die bekannten Kräfte zu einer Resultierenden zusammenfassen und diese in die beiden Unbekannten zerlegen.

**Grundsatz:** *Die an einem Knotenpunkt auftretenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie sich zu einem geschlossenen Kräfteck zusammenfassen lassen und in dem Kräfteck gleichbleibender Pfeillauf herrscht.*

Bei der Pfeilgebung in den Stäben ist zu beachten, daß durch die Pfeile die inneren Kräfte angegeben werden müssen. Das sind die Kräfte, die die Knotenpunkte des Stabes im Gleichgewicht halten, wenn man sich ein Stück aus dem Stab herausgeschnitten denkt. In Abb. 67 ist ein Stab durch Außenkräfte auf Zug, der andere auf Druck beansprucht. Schneidet man in den Stäben ein Stück aus der Mitte heraus, so müssen beim Zugstab die Pfeile die Knotenpunkte nach innen ziehen, während beim Druckstab die Pfeile die Knotenpunkte nach außen drücken müssen,

In Abb. 68 trägt ein einfaches Fachwerk in der Mitte des Obergurtes die Last  $P = 8000$  kg. Es sollen die Stabkräfte ermittelt werden. Man beginnt mit dem Knotenpunkt am Auflager  $A$  und denkt sich die hier

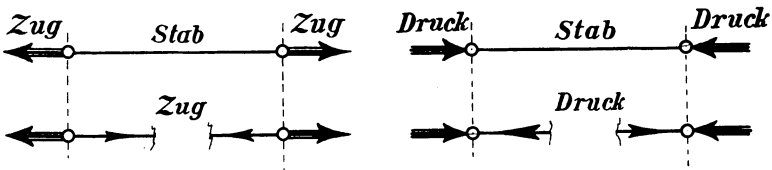


Abb. 67. Kennzeichen von Zug- und Druckstäben.

zusammenlaufenden Stäbe 1 und 2 durchschneiden. Die bekannte Kraft  $A = P/2$  ist zu zerlegen in die Seitenkräfte 1 und 2. Das geschieht im Kräfteck. Man zeichnet eine Linie  $\overline{O1}$  gleich und parallel  $P$ . Die

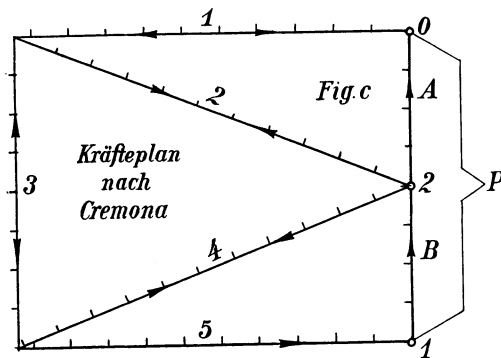
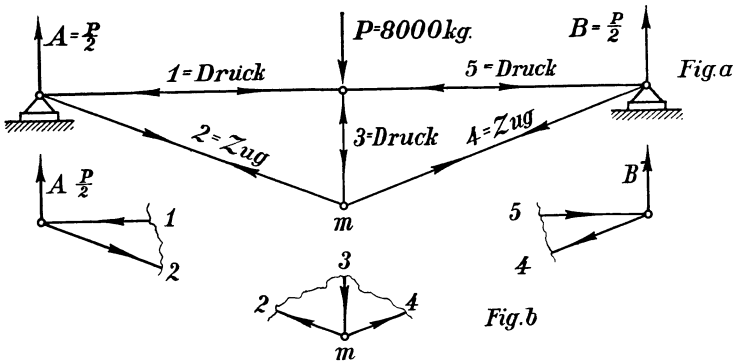


Abb. 68. Untersuchung eines einfachen Fachwerks.

Hälfte  $\overline{O2}$  dieser Linie ist die Auflagerkraft  $A$ . Legt man durch Punkt  $0$  eine Parallele zur Stabrichtung 1 und durch 2 eine Parallele zur Stabrichtung 2, so stellen die Linienlängen 1 und 2 die Stabkräfte in den Stäben 1 und 2 dar. Das Kräfteedreieck muß gleichbleibenden Pfeillauf



haben, er wird gegeben durch den nach oben zeigenden Pfeil der Kraft  $A$ . In diesem Sinn muß das Kräfteeck durchlaufen werden, d. h. die Linie 1 nach links und die Linie 2 nach rechts. Diese Pfeile sind am Auflagerknotenpunkt  $A$  einzutragen. Im Kräfteeck müssen die Pfeile links von den Zahlen 1 und 2 stehen.

Man schneidet dann den Knotenpunkt  $m$  aus. Bekannt ist die Kraft 2 mit entgegengesetztem Pfeil wie am Auflager  $A$ . Unbekannt sind die Stabkräfte 3 und 4. Man legt im Kräfteplan durch den linken Endpunkt von 2 eine Parallele zum Stab 3 und durch den anderen Endpunkt eine Parallele zum Stab 4. Es entsteht ein neues Kräftedreieck mit dem Pfeillauf der bekannten Kraft 2, der nach links zeigt. Also muß ich in diesem Sinn das Dreieck durchlaufen, d. h. die Linie 3 nach unten und die Linie 4 nach rechts. Dieselben Pfeile sind am Knotenpunkt  $m$  einzutragen.

Am Auflagerknotenpunkt  $B$  ist der Stützendruck  $B = P/2$  die bekannte Kraft. Die geschnittenen Stäbe sind 4 und 5. Im Kräfteplan ist die Kraft 4 schon da. Die Parallele zur Stabrichtung 5 durch den Punkt 1 vollendet das letzte Kräftedreieck. Die Pfeilrichtung wird durch den nach oben zeigenden Pfeil der Kraft  $B$  bestimmt, d. h. Linie 4 wird nach links, Linie 5 nach rechts durchlaufen. In diesem Sinne sind die Pfeile am Knotenpunkt  $B$  einzutragen.

Das so entwickelte Kräfteeck nennt man nach dem Urheber Cremona einen Cremonaschen Kräfteplan. In der Bildfigur ersehen wir, daß der Obergurt und der Vertikalstab 3 auf Druck und der Untergurt auf Zug beansprucht wird. Zahlenmäßig ergeben sich folgende Kräfte:

In Abb. 69 ist ein Auslegerfachwerkkran für die Kranlast  $P = 8000\text{ kg}$  zu untersuchen. Man muß zunächst die Stützendrücke  $A$  und  $B$  ermitteln. Das geschehe zeichnerisch. Man zeichnet die Kräftelinie  $\overline{OI}$  gleich und parallel  $P$ , wählt einen beliebigen Punkt  $O$  als Pol und zieht

Stab Nr.	Zug in kg	Druck in kg
1	—	— 10400
2	+ 11200	—
3	—	— 8000
4	+ 11200	—
5	—	— 10400

die Polstrahlen  $i_0$  und  $i_1$ . In der Bildfigur wählt man auf der Kraft- richtung  $P$  einen beliebigen Punkt  $a$  und zieht parallel zu den Polstrahlen die Seilstrahlen  $i_0$  und  $i_1$ , welche die Auflagervertikalen  $A$  und  $B$  in  $m$  bzw.  $n$  schneiden. Parallel zur Schlußseite  $mn = S$  des Seilecks zieht man durch Pol  $O$  die Linie  $S$ , welche auf der verlängerten Kräfte- linie den Punkt 2 ausschneidet und damit die Stützendrücke

$$\overline{2O} = A = + 22000 \text{ kg}$$

$$\text{und } \overline{12} = B = - 14000 \text{ kg}$$

festlegt.

Den Cremonaschen Kräfteplan beginnt man mit dem Knotenpunkt  $I$ . Die bekannte Kraft  $P = 8000 \text{ kg}$  ist in die Seitenkräfte 1 und 2 zu zerlegen, d. h. man zieht auf der Kräftelinie durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Stabrichtung 2 und durch den Punkt 1 eine Parallele zur Stab- richtung 1. Die Linielängen 1 und 2 sind die gesuchten Stabkräfte.

Der Pfeillauf im Kräftedreieck wird durch  $P$  bestimmt. Er zeigt abwärts, also muß der Pfeil in  $I$  nach rechts, in  $2$  nach links gehen. Die Pfeile müssen links von den Ziffern  $1$  und  $2$  stehen. In der Bildfigur sind am Knotenpunkt  $I$  dieselben Pfeile einzutragen und in den gleichen Stäben an den anderen Knotenpunkten umzukehren.

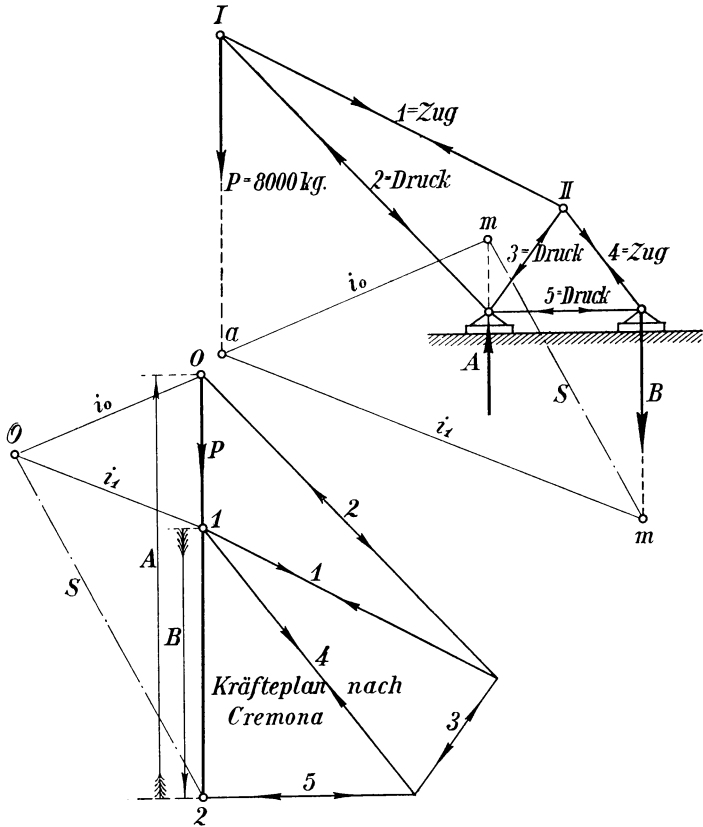


Abb. 69. Untersuchung eines Auslegerfachwerks.

Dann geht man zum Knotenpunkt  $II$  und zerlegt die bekannte Kraft  $I$  in die Seitenkräfte  $3$  und  $4$ .

Der Knotenpunkt  $B$  liefert das letzte Kräftedreieck mit den Seiten  $4$ ,  $B$  und  $5$ .

Stab Nr.	Zugkraft in kg	Druckkraft in kg
1	+ 17600	—
2	—	— 22400
3	—	— 7600
4	+ 17600	—
5	—	— 11200

Die Bildfigur zeigt, daß der Obergurt auf Zug, der Untergurt und der Diagonalstab  $3$  auf Druck beansprucht wird. Zahlenmäßig ergeben sich durch die Linielängen im Cremonaschen Kräfteplan nebenstehende Stabkräfte:

### 17. Eine Verbindung von zwei sich stützenden Stangen.

Die beiden Stangen  $AC$  und  $BC$  (Abb. 70) sind bei  $C$  durch einen Gelenkbolzen derartig verbunden, daß jede Stange sich in der Bildebene drehen läßt. Am anderen Endpunkt ist jede Stange durch einen festliegenden Gelenkbolzen in  $A$  bzw.  $B$  unterstützt. Nur die Stange  $AC$  sei durch eine resultierende Last  $R$  belastet.

Die Belastung  $R$  erzeugt in den Auflagerpunkten  $A$  und  $B$  Stützendrücke, d. h.  $R$  muß sich in zwei Seitenkräfte  $A$  und  $B$  zerlegen, die durch diese Stützpunkte gehen. Wie bestimmen sich diese Krafrichtungen?

Die unbelastete Stange  $CB$  (Fig. a) hat in  $B$  ihren festen Drehpunkt. Die einzige Kraft, welche außerhalb des Drehpunktes an der Stange angreift, ist der von der anderen Stange herkommende Gelenkdruck in  $C$ . Soll die Stange im

Gleichgewichtszustand sein, so muß der Gelenkdruck in  $C$  so gerichtet sein, daß er durch den festen Drehpunkt  $B$  der Stange geht, weil sonst die Stange sich um  $B$  drehen würde. Der Gelenkdruck geht durch den festen Drehpunkt  $B$ , wenn er dieselbe Richtung hat wie die Stange  $BC$ . Das ergibt folgende Gleichgewichtsbedingung:

Die Richtungslinie des Druckes in dem gemeinsamen Stützpunkt der Stangen muß mit der Richtung der **unbelasteten** Stange, d. h. mit der Verbindungslinie ihrer Stützpunkte zusammenfallen.

Verlängert man daher die Stangenrichtung  $BC$  über  $C$  hinaus bis zum Schnittpunkt  $m$  mit der Krafrichtung  $R$ , so liegt damit auch die Krafrichtung für den Stützendruck  $A$  fest. Sie muß durch diesen Punkt  $m$  gehen, denn die drei Kräfte  $R$ ,  $A$  und  $B$  müssen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Nachdem nun die Richtungen der Kräfte  $A$  und  $B$  bekannt sind, findet man zeichnerisch die Größen dieser Kräfte, indem man (Fig. b) eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $R$  zeichnet, durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Krafrichtung  $B$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zur Kraft-

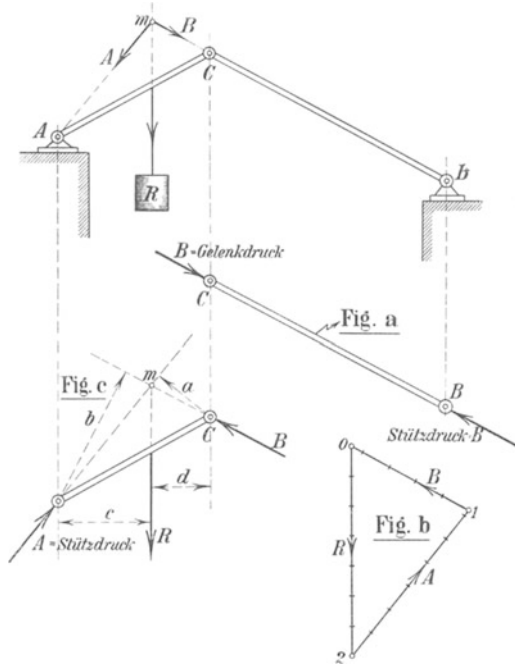


Abb. 70. Zwei sich stützende Stangen.

richtung  $A$  legt. Beide schneiden sich im Punkte  $I$ , so daß Linienlänge  $\overline{OI} = B$  und Linienlänge  $\overline{I2} = A$  ist.

Rechnerisch findet man die Stützkkräfte  $A$  und  $B$  durch Anwendung des Momentensatzes. Wählt man in Fig. c den Punkt  $C$  als Drehpunkt, so ist

$$+ A \cdot a - R \cdot d = 0 \quad \text{oder} \quad A = \frac{R \cdot d}{a}.$$

Wählt man den Punkt  $A$  als Drehpunkt, so ist

$$- B \cdot b + R \cdot c = 0 \quad \text{oder} \quad B = \frac{R \cdot c}{b}.$$

## 18. Das Stabdreieck (Abb. 71).

Ein Stab  $AB$  werde fest eingespannt. An seinem Endpunkt  $A$  werde der Stab  $AC_1$ , an dem Endpunkt  $B$  der Stab  $BC_2$  gelenkartig angeschlossen.

Diese beiden Stäbe lassen sich um ihre festen Gelenkpunkte drehen,

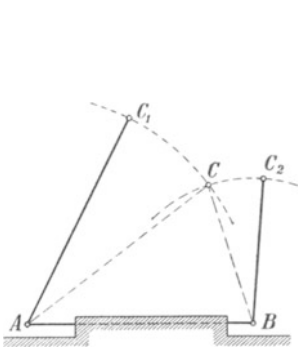


Abb. 71. Das Stabdreieck.

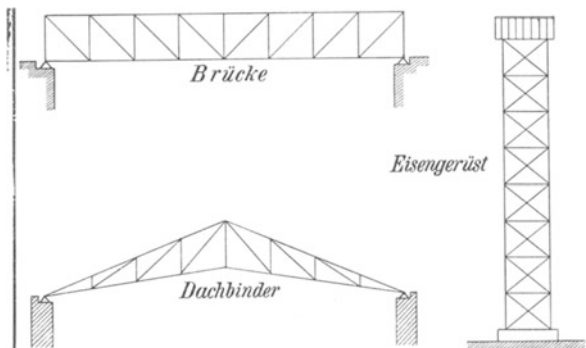


Abb. 72. Die Anwendung des Stabdreiecks.

Stabpunkt  $C_1$  bewegt sich auf einem Kreisbogen vom Radius  $AC_1$  um den Punkt  $A$  als Mittelpunkt, Stabpunkt  $C_2$  auf einem Kreisbogen vom Radius  $BC_2$  um  $B$  als Mittelpunkt.

Beide Kreisbögen schneiden sich im Punkte  $C$ , d. h. man kann die eine Stange in die Lage  $AC$  und die andere in die Lage  $BC$  bringen, und beide Stäbe im Punkte  $C$  gelenkartig miteinander verbinden. Dadurch wird der Punkt  $C$  unverrückbar fest. Die Gelenkpunkte  $A$  und  $B$  liegen schon durch das Einspannen der Stange  $AB$  fest, so daß nunmehr das ganze Stabdreieck ein starres System bildet, das trotz der Gelenke in sich keine Bewegung mehr zuläßt.

Wegen seiner Starrheit verwendet man das Stabdreieck bei allen Eisenkonstruktionen. Brücken, Eisengerüste und eiserne Dachbinder (Abb. 72) setzen sich immer aus Stabdreiecken zusammen, weil diese Konstruktion mit dem geringsten Materialaufwand die größte Starrheit erzielt.

## 19. Der Dreigelenkbogen im Grubenausbau.

Zum Ausbau der Grubenstrecken verwendet man vielfach Beton oder Eisenbeton.

Solche Streckengestelle in Eisenbeton besitzen in der Firste ein Gelenk. Die Auflagerung der Fußpunkte auf dem Gebirge oder auf einer besonderen Sohlensaukleidung kann ebenfalls als gelenkig angesehen werden. So zeigt Abb. 73 einen Betonausbau, der aus zwei Segmenten besteht, die in der Firste gelenkartig ineinander greifen.

### a) Gleichmäßige Vertikalbelastung.

Die günstigste Belastung tritt ein, wenn beide Segmente den gleichen Firstendruck  $G$  symmetrisch aufzunehmen haben. Alsdann geht durch den

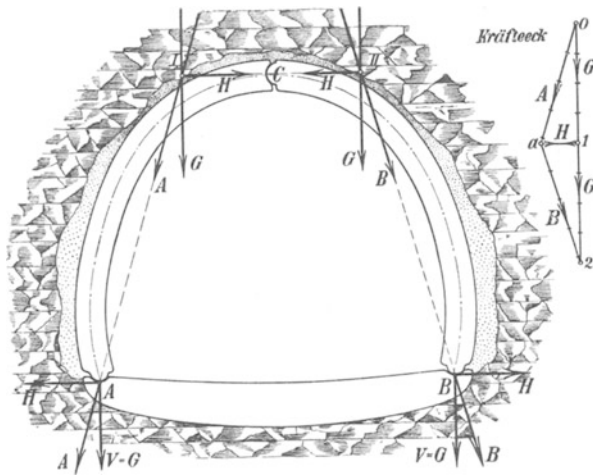


Abb. 73. Das Stabdreieck im Grubenausbau.

Firstengelenkpunkt  $C$  eine Horizontalkraft  $H$ . Die Horizontale durch  $C$  schneidet auf der linken Seite die Krafrichtung  $G$  im Punkte  $I$ , auf der rechten Seite im Punkte  $II$ . Verbindet man Punkt  $I$  mit dem Fußgelenkpunkt  $A$ , so hat man die Stützdruckrichtung  $A$ , verbindet man Punkt  $II$  mit dem Fußgelenkpunkt  $B$ , so hat man die Stützdruckrichtung  $B$ .

Nachdem man die Krafrichtungen  $A$  und  $B$  festgelegt hat, findet man die Größen dieser Kräfte, indem man im Kräfteck eine Linie  $O1$  gleich und parallel  $G$ , anschließend eine Linie  $12$  gleich und parallel dem zweiten Firstendruck  $G$  zieht. Die durch Punkt  $O$  gezogene Parallele zu  $A$  und die durch Punkt  $2$  gezogene Parallele zu  $B$  schneiden sich im Punkte  $a$ , und es ist Linie  $0a =$  Stützdruck  $A$  und Linie  $a2 =$  Stützdruck  $B$ , während Linie  $a1$  die im Firstengelenk auftretende Horizontalkraft  $H$  darstellt.

Vergleicht man die Stützelenkkräfte  $A$ ,  $B$  und  $H$  miteinander, so erkennt man, daß  $A$  und  $B$  einander gleich und größer als der Belastungsdruck  $G$  sind, dagegen fällt  $H$  erheblich kleiner als  $G$  aus.

Da die Gelenkpunkte die schwächsten Stellen der Segmentkörper sind, so wird bei dieser Belastung der Bruch am wahrscheinlichsten in den Gelenken erfolgen. Und da das Firstgelenk nur gering beansprucht wird, so wird die größte Bruchgefahr in den Fußgelenken liegen.

Zerlegt man an den Fußpunktgelenken die Kräfte  $A$  und  $B$  in eine Vertikalkomponente  $V$  und eine Horizontalkomponente  $H$ , so erkennt man, daß die Horizontalkräfte  $H$  die Segmente nach außen auseinanderzerren wollen. Bei Gelenkbruch werden daher die Segmente nach außen abgleiten, womit gleichzeitig eine Senkung des Firstenpunktes  $C$  stattfindet.

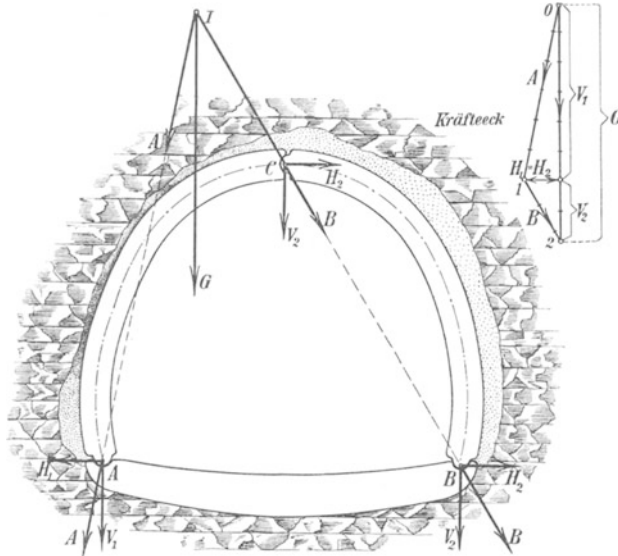


Abb. 74. Einseitige Vertikalbelastung.

In der Kräftefigur erkennt man die Kraftgrößen der Komponenten  $V$  und  $H$ . Die Vertikalkomponente  $V$  wird gleich dem Firstendruck  $G$  und die Horizontalkomponente  $H$  wird ebenso groß wie die Horizontalkraft  $H$  im Firstgelenk.

### b) Einseitige Vertikalbelastung.

Ist nur ein Segment (Abb. 74) durch den vertikalen Firstendruck belastet, dann verläuft der Druck im Firstgelenk  $C$  nicht mehr horizontal.

Die Richtungslinie des Druckes in dem gemeinsamen Stützpunkt  $C$  beider Segmentkörper fällt, wie früher (S. 41) abgeleitet, immer mit der Verbindungslinie der Stützpunkte des unbelasteten Segmentkörpers zusammen. Der unbelastete Segmentkörper hat die Stützpunkte  $C$  und  $B$ , folglich muß der Druck im Firstgelenk  $C$  die Richtung  $CB$  haben.

Die Verlängerung von  $CB$  schneidet die bekannte Krafrichtung  $G$

im Punkte  $I$ . Verbindet man nun Schnittpunkt  $I$  mit Fußgelenkpunkt  $A$ , so muß die Linie  $IA$  die Krafrichtung der gesuchten Auflagerkraft  $A$  sein, denn soll die bekannte Kraft  $G$  die Resultierende der Stützendrücke  $A$  und  $B$  werden, so müssen die drei Kräfte durch einen gemeinsamen Schnittpunkt, hier Punkt  $I$ , gehen.

Nachdem in der Linie  $IA$  die Krafrichtung  $A$  und in der Linie  $IB$  die Krafrichtung  $B$  gefunden ist, ermittelt man im Kräfteeck ihre Größen. Linie  $\overline{O2}$  ist die bekannte Kraft  $G$ , legt man durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Krafrichtung  $A$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zur Krafrichtung  $B$ , so ist Liniengröße  $\overline{O1} =$  Stützendruck  $A$  und Liniengröße  $\overline{I2} =$  Stützendruck  $B$ .  $A$  ist die größte Kraft, d. h. die Bruchgefahr ist bei dieser Belastung im Fußgelenkpunkt  $A$  größer als im Fußgelenkpunkt  $B$ .

Zerlegt man in Abb. 74 wieder die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  in die Horizontal- und Vertikalkomponenten, so drängen die Horizontalkräfte  $H_1$  und  $H_2$  die Fußgelenke nach außen.

Der Firstengelenkdruck im Punkte  $C$  ist in Richtung und Größe dem Stützendruck  $B$  gleich. Zerlegt man im Firstenpunkt die Kraft  $B$  in  $H_2$  und  $V_2$ , so versucht die Kraft  $V_2$  den Gelenkpunkt  $C$  zu senken, d. h. bei einseitiger Belastung besteht die Gefahr, daß der Firstgelenkpunkt in senkrechter Richtung abgebrochen wird.

Im Kräfteeck liefert die Horizontale durch den Punkt  $I$  die Horizontalkomponenten  $H_1$  und  $H_2$  der Stützendrücke  $A$  und  $B$ , sie schneidet gleichzeitig auf der Kräftelinie  $\overline{O2}$  die Vertikalkomponente  $V_1$  der Stützkraft  $A$  und die Vertikalkomponente  $V_2$  der Stützkraft  $B$  aus.

### c) Einseitige Schrägbelastung.

Der Gebirgsdruck  $G$  belaste das eine Bogensegment in schräger Richtung (Abb. 75). Um die Stützendruckrichtung zu finden, bringt man die Krafrichtung  $G$  zum Schnitt mit der Verbindungslinie der Gelenkpunkte  $C$  und  $B$  des unbelasteten Bogensegmentes. Der Schnittpunkt ist Punkt  $I$ . Dann liefert die Verbindungslinie des Gelenkpunktes  $A$  mit dem Schnittpunkt  $I$  die Krafrichtung  $A$ , während die Verbindungslinie  $CB$  die Krafrichtung  $B$  ergibt.

Nach Festlegung der Krafrichtungen  $A$  und  $B$  findet man im Kräfteeck die wirklichen Größen dieser Kräfte, indem man eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel der gegebenen Kraft  $G$  zeichnet, durch den Anfangspunkt  $O$  eine Parallele zur Krafrichtung  $A$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zur Krafrichtung  $B$  legt. Beide schneiden sich im Punkt  $I$ , und es ist Linienlänge  $\overline{O1} =$  Stützkraft  $A$  und Linienlänge  $\overline{I2} =$  Stützkraft  $B$ .

Der gemeinsame Stützendruck im Firstgelenkpunkt  $C$  ist in Richtung und Größe der Stützkraft  $B$  gleich.

Im Kräfteeck findet man  $H_1$  und  $V_1$  als Seitenkomponenten des Auflagerdruckes  $A$ , und ebenfalls  $H_2$  und  $V_2$  als Seitenkomponenten vom Auflagerdruck  $B$ . Am gefährlichsten sind die Horizontalkräfte

an den Fußgelenken. Da  $H_1$  erheblich größer ist als  $H_2$ , so besteht die größte Bruchgefahr im Fußgelenk  $A$ . Bei einem Bruch dieses Gelenkes würde sich der Bogen nach innen schieben.

Für das Firstgelenk ist die Vertikalkomponente  $V_2$  die gefährlichste. Sie ist gleich der Vertikalkomponente des Stützendruckes  $B$ . Bei einem Bruch des Firstgelenkes würde der linke Segmentbogen sich oben absenken.

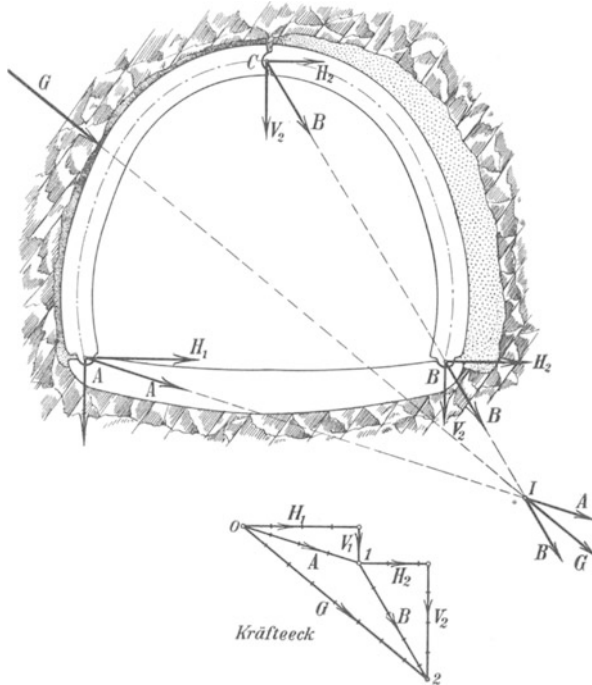


Abb. 75. Einseitige Schrägbelastung.

#### d) Allgemeines über den Dreigelenkbogen.

Der Dreigelenkbogen ist wie ein Stabdreieck ein vollkommen starres System, d. h. er kann in seiner Form den äußeren Kräften nicht elastisch nachgeben. Ein Nachgeben kann nur eintreten, wenn die Fußpunkte sich in wagerechter Richtung verschieben, oder wenn die im Scheiteltgelenk zusammenstoßenden Bogenteile sich in lotrechter Richtung gegeneinander bewegen, das sind aber Bewegungen, die nur möglich sind, wenn die Gelenke zu Bruch gehen.

Praktisch sucht man den ersten Gebirgsdruck dadurch nachgiebig aufzunehmen, daß man um den ganzen Dreigelenkbogen eine Pufferung aus Kesselasche legt. Aber diese Pufferung ist bald zusammengedrückt, und dann erfolgt der Druck auf die starren Segmentbögen, die infolgedessen starke Eisenarmierung und große Querschnitte haben müssen.



Man könnte den Dreigelenkbogen nachgiebig gestalten, wenn man z. B. die Fußgelenkpunkte offen ausbilden würde. In Abb. 76 hat der Sohlenbalken zwei schräge Auflagerflächen. Die Segmente setzen sich mit walzenförmigen Fußpunkten auf diese Auflager und können eine Gleitbewegung ausführen.

Das linke Segmentstück sei durch den schrägen Gebirgsdruck  $G$  belastet. Kraftrichtungen und Kraftgrößen findet man in besproche-

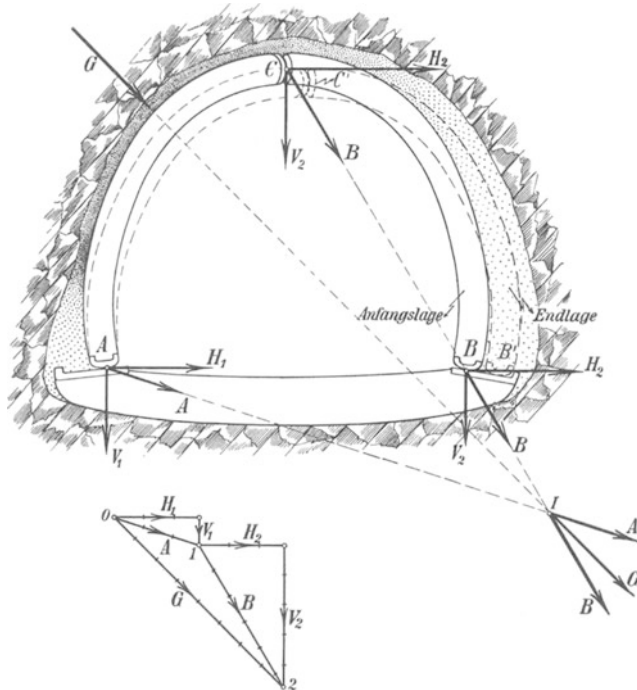


Abb. 76. Nachgiebiger Dreigelenkbogen.

ner Weise. Die Fußpunkte drücken in den Richtungslinien  $A$  und  $B$  auf die Auflagerflächen. Die Horizontalkraft  $H_1$  am Auflager  $A$  wird keine Verschiebung hervorrufen, da im Fall einer Bewegung der linke Gelenkbogen sich heben müßte.

Dagegen wird die Horizontalkraft  $H_2$  am Auflager  $B$  eine Bewegung nach  $B'$  bewirken können, weil der Fußpunkt  $B$  abwärts gleiten kann. Mit diesem Abwärtsgleiten ist eine Senkung des Firstgelenkpunktes  $C$  in die Lage  $C'$  verbunden, d. h. der ganze Bogen kann elastisch nachgeben.

Der in Abb. 77 dargestellte kreisrunde Streckenausbau kann auch als Dreigelenkbogen angesprochen werden, wenn in den drei Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  Holzbolzen oder Holzschichtklötze angeordnet sind. In dieser Ausführung hat der Ausbau eine außerordentlich hohe Standfestigkeit, denn er hat

1. die günstigste Querschnittsform für hohe Festigkeit,
  2. eine elastische Nachgiebigkeit in den Gelenken,
- wodurch das Gebirge sich entspannen kann.

Das untere Bogenstück  $AB$  entspricht dem fest eingespannten Stab

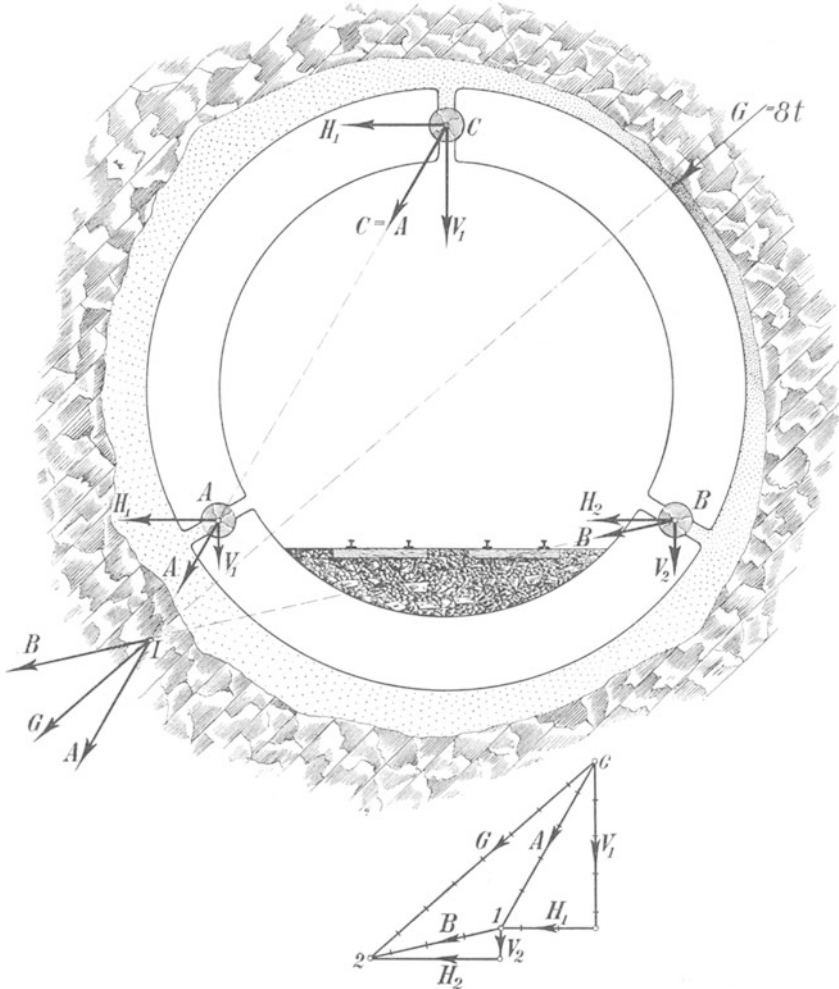


Abb. 77. Kreisrunder Streckenausbau als Dreigelenkbogen.

eines Stabdreiecks, das linke Bogenstück  $AC$  dem unbelasteten Stab und das rechte Bogenstück  $BC$  durch den angenommenen Gebirgsdruck  $G$  dem belasteten Stab.

Der Gebirgsdruck erzeugt Gelenkdrücke, diese sollen ermittelt werden. Verlängert man den unbelasteten Stab  $CA$  über  $A$  hinaus bis zum Schnitt mit der Krafrichtung  $G$ , und verbindet man diesen Schnitt-

punkt  $I$  mit dem Gelenkpunkt  $B$ , so sind  $CI$  und  $BI$  die Richtungen der durch Gebirgsdruck erzeugten Gelenkdrücke.

Im Kräfteeck zieht man durch den Anfangspunkt  $0$  der gegebenen Kraft  $G = 8 \text{ t}$  eine Parallele zu  $CI$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zu  $BI$ . Beide schneiden sich im Punkt  $I$  und es ist

$$\overline{0I} = \text{Gelenkdruck } A = 5 \text{ t}, \quad \overline{I2} = \text{Gelenkdruck } B = 3,5 \text{ t}.$$

Der Gelenkdruck  $C$  ist gleich dem Gelenkdruck  $A$ . Im Kräfteeck ist  $A$  zerlegt in

$$V_1 = 4,3 \text{ t und } H_1 = 2,4 \text{ t}.$$

$V_1$  erzeugt eine hohe Scherbelastung für den Scheitelbolzen  $C$ , so daß dieser der gefährdetste ist. Auch der dem belasteten Bogenstück gegenüber liegende Fußbolzen  $A$  ist gefährdeter als der Fußbolzen  $B$ , der das gedrückte Bogenstück trägt.

## 20. Das Stabviereck.

Verbindet man 4 Stäbe gelenkartig miteinander, wie Abb. 78 zeigt, und spannt einen Stab z. B.  $AB$  fest ein, so bleibt das Stabsystem trotzdem beweglich. Die Stange  $CD$  kann mit ihren Endpunkten auf zwei Kreisbögen wandern; der eine Kreisbogen hat die Stange  $AC$  als Radius und den festen Punkt  $A$  als Mittelpunkt, der andere die Stange  $BD$  als Radius und den festen Punkt  $B$  als Mittelpunkt.

Tritt einseitiger Druck auf, z. B. Druck von links, so erfolgt eine Rechtsdrehung, die Stange  $CD$  bewegt sich nach  $C'D'$ , und so kann das ganze Stabsystem, den äußeren Kräften nachgebend, sich in eine neue Gleichgewichtslage hereindrehen.

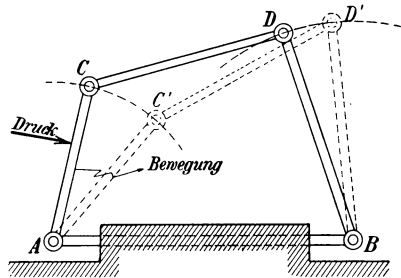


Abb. 78. Das Stabviereck.

Man wird daher das Stabviereck überall da vermeiden, wo das Bauwerk starr und unbeweglich bleiben muß, dagegen mit Vorteil da verwenden, wo eine Nachgiebigkeit von Nutzen ist, wie z. B. im Grubenausbau, wenn die Bewegung durch Anlehnung an eine feste Gebirgswand zur Ruhe kommen kann.

### a) Belastung der Kappenstange.

Da das Stabviereck (Abb. 79) bei Einspannung des Stabes  $AB$  mit den übrigen drei Stangen beweglich bleibt, so kann der Stab  $CD$  eine Belastung  $G$  nur dann tragen, wenn die Gleichgewichtslage nicht gestört wird.

Die Untersuchung der Gleichgewichtslage kann man auf die Gleichgewichtsuntersuchung eines Stabdreiecks zurückführen. Denkt man sich den Punkt  $D$  festgelagert, so ist  $ACD$  ein Stabdreieck, dessen Stab  $CD$  durch das Gewicht  $G$  belastet ist. Für die Gleichgewichtslage muß die Richtungslinie des Druckes im gemeinsamen Stützpunkt  $C$  der Stangen mit der Richtung der unbelasteten Stange  $AC$  zusammenfallen. Verlä-

gert man daher die Richtung  $AC$  bis zum Schnittpunkt  $m$  mit der Krafrichtung  $G$ , so muß  $mD$  die Druckrichtung im Punkte  $D$  sein.

Fällt die Druckrichtung  $mD$  mit der Richtung der zweiten unbelasteten Stange  $DB$  zusammen, so erleidet auch die Stange  $DB$  kein Drehmoment, d. h. das Stabviereck bleibt bewegungslos, es ist im Gleichgewichtszustand.

Die Bedingung für die Gleichgewichtslage lautet: Es müssen die Richtungslinien der beiden unbelasteten Stangen sich auf der Richtungslinie der Belastung schneiden.

In Abb. 79 schneiden sich die Richtungslinien der Stangen  $AC$

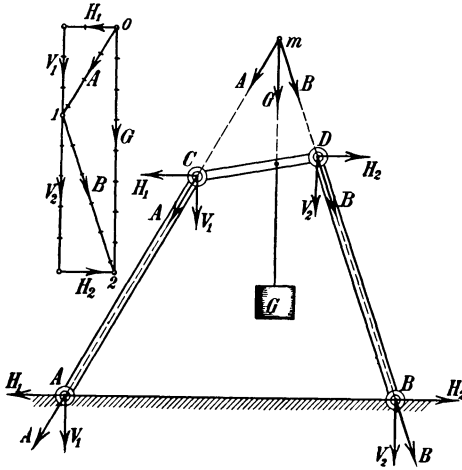


Abb. 79. Belastung der Kappenstange.

und  $BD$  im Punkte  $m$ . Folglich kann das Stangensystem nur dann im Gleichgewicht sein, wenn die Belastung  $G$  der Kappenstange  $CD$  so angreift, daß ihre Richtungslinie ebenfalls durch den Punkt  $m$  geht. Das Stangensystem bleibt dann in sich ohne seitliche Anlehnung im Gleichgewicht.

Für diese Gleichgewichtslage lassen sich durch Aufzeichnen des Kräftecks die Größen der auftretenden Stützkräfte ermitteln. Man zeichnet eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel der bekannten Belastungskraft  $G$ , legt durch Punkt  $O$  eine Parallele  $A$  zur Stangenrichtung  $AC$  und durch

Punkt 2 eine Parallele  $B$  zur Stangenrichtung  $BD$ . Die Parallelen schneiden sich im Punkte 1, und es ist Linie  $\overline{O1} =$  Stützkraft  $A$  und Linie  $\overline{I2} =$  Stützkraft  $B$ .

Die Kraft  $A$  ruft in den Gelenkpunkten  $C$  und  $A$  die Vertikalbelastung  $V_1$  und den Horizontaldruck  $H_1$ , die Kraft  $B$  in den Gelenkpunkten  $D$  und  $B$  die Vertikalbelastung  $V_2$  und den Horizontaldruck  $H_2$  hervor. Man erkennt, daß die Horizontaldrücke  $H_1$  und  $H_2$  gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, und daß ferner sein muß

$$V_1 + V_2 = G,$$

d. h. die Summe der vertikalen Stangendrücke muß gleich der Gewichtsbelastung  $G$  sein.

In Abb. 80 sind die Stangen nicht in der Gleichgewichtslage. Wie erkennt man das? Die Richtungslinien der unbelasteten Stangen  $AC$  und  $BD$  schneiden sich im Punkte  $m$ . Dieser Punkt liegt nicht auf der Krafrichtungslinie  $G$ , folglich ist die Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt. Was tritt ein?

Die Richtungslinie der Stange  $AC$  schneidet die Krafrichtung  $G$  im Punkte  $m_1$ . Verbindet man  $m_1$  mit dem Gelenkpunkt  $D$ , so wirkt in

dieser Richtung  $m_1D$  eine Kraft  $B$ . Diese dreht die Stange  $BD$  nach rechts mit dem Drehmoment

$$M = B \cdot b.$$

Das ganze Stangensystem wird sich daher um die Festpunkte  $A$  und  $B$  nach rechts drehen, und es kann nur dadurch zur Ruhe kommen,

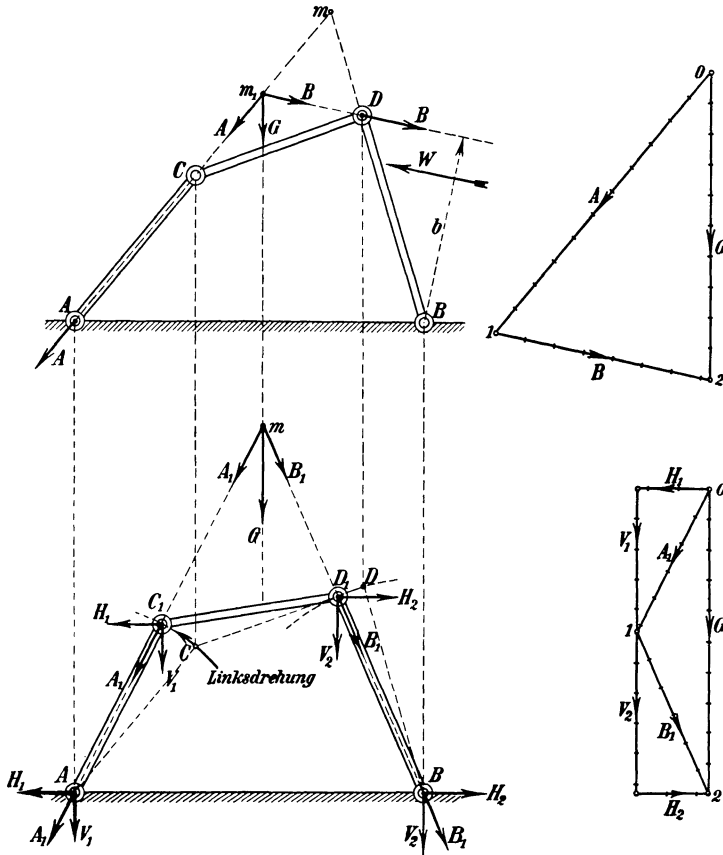


Abb. 80 und 81. Gleichgewichtsuntersuchung am Stabviereck.

daß die Seitenstange  $BD$  durch Anlehnung an eine feste Wand einen Widerstand  $W$  findet, der in entgegengesetzter Richtung drückt. Durch die Drehung ändern sich die Kraftgrößen  $A$  und  $B$  dauernd, in der gezeichneten Lage haben sie die im Kräfteck dargestellten augenblicklichen Größen.

Abb. 81 zeigt, wie man das Stabsystem für die Belastungsrichtung  $G$  einzustellen hätte, wenn die Gleichgewichtslage von Anfang an bestehen soll. Man muß das Stabsystem aus der Anfangslage  $ABDC$  so lange nach links drehen, bis die Lage  $ABD_1C_1$  erreicht ist. In dieser Lage schneiden sich die Richtungslinien der beiden unbelasteten Stangen

auf der Belastungslinie  $G$ , der gemeinsame Schnittpunkt  $m$  liegt auf der Linie  $G$ .

Zeichnet man in Abb. 80 und 81 die Kräfteecke, so findet man die Stützendrücke  $A$  und  $B$ , bzw.  $A_1$  und  $B_1$ . Je kleiner die Stützendrücke werden, um so günstiger wird die Belastung abgefangen. Da die Stützendrücke  $A_1$  und  $B_1$  die kleineren sind, so wird die Stabstellung der Abb. 81 die günstigere sein.

Wird die Kappenstange durch eine Schrägkraft  $G$  belastet, wie in Abb. 82, und würde  $ACDB'$  die anfängliche Lage des Stabvierecks sein, so würde die Belastung sofort eine Bewegung der Kappenstange  $CD$  nach rechts hervorrufen. Um dem Stabsystem das Gleichgewicht zu geben, müßte man die Stangen so stellen, daß die unbelasteten Stäbe sich auf der Krafrichtung  $G$  schneiden. Man könnte z. B.  $AC$  ver-

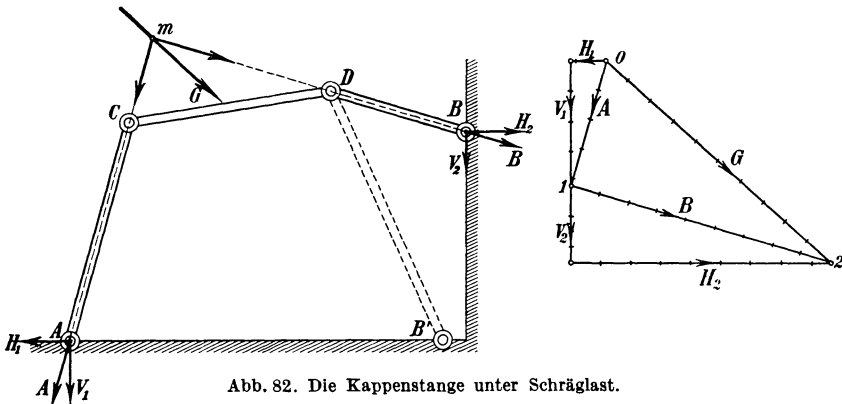


Abb. 82. Die Kappenstange unter Schräglast.

längern bis zum Schnitt  $m$  mit der Krafrichtung  $G$  und der dritten Stange die Richtung  $mD$  geben. Dann würde  $DB$  die Stützstange sein und in dieser Lage das Gleichgewicht herstellen.

Das Kräfteck liefert für diesen Gleichgewichtszustand die Stützenbelastungen  $A$  und  $B$ , d. h. Stützpunkt  $A$  muß die Vertikalbelastung  $V_1$  und die Horizontalbelastung  $H_1$  aufnehmen, Stützpunkt  $B$  die entsprechenden Kräfte  $V_2$  und  $H_2$ .

### b) Belastung der Seitenstange.

Das Stabviereck  $ABDC$  sei von der linken Seite her durch eine Schrägkraft  $G$  belastet (Abb. 83). Man verlängere die Stabrichtung  $DC$  bis zum Schnitt  $m$  mit der Krafrichtung  $G$  und verbinde  $m$  mit dem Stützpunkt  $A$ . Die Schräglast  $G$  zerlegt sich dann in die Komponenten  $A$  und  $H$ , d. h. die Kraft  $H$  würde das Stabsystem nach rechts drehen und diese Verschiebung würde so lange dauern, bis im Stützpunkt  $D$  eine gleichgroße Gegenkraft  $H$  durch Anlehnung an eine feste Wand gefunden wäre.

**Schlußfolgerung:** Ein Stabviereck wird unter dem Einfluß von Belastungskräften nur dann im Gleichgewicht bleiben, wenn die Stäbe

ganz bestimmte Richtungen haben. Sind die Gleichgewichtsrichtungen nicht vorhanden, dann gibt das Stabsystem so lange nach, bis äußere Gegenkräfte das Gleichgewicht hergestellt haben. Sind diese Gegen-

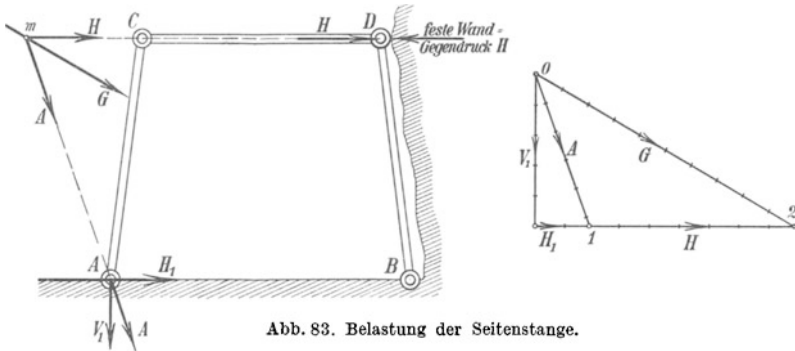


Abb. 83. Belastung der Seitenstange.

kräfte nicht wirksam, dann stürzt das Stabsystem unter Drehung um seine festen Gelenkpunkte zusammen. Man wird also praktisch auf eine Anlehnung des Stabvierecks an eine feste Wand nicht verzichten können.

## 21. Das Stabviereck im Grubenausbau.

Das Stabviereck findet als Streckenausbau vielseitige Verwendung. Der allgemein verwendete Türstock aus Holz ist z. B. ein Stabviereck.

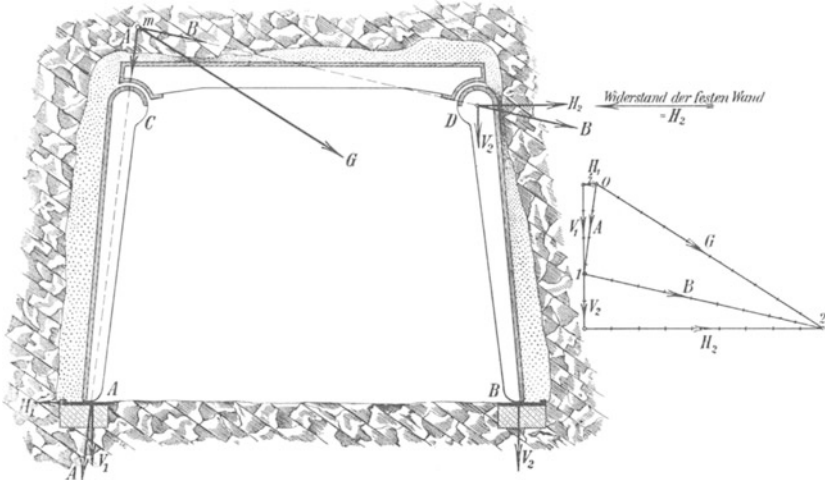


Abb. 84. Das Stabviereck im Grubenausbau.

Diesem nachgebildet sind die Türstöcke aus Eisen und aus Eisenbeton. Sie bestehen aus Stempeln und Kappen und sind, da sie vier Gelenkpunkte besitzen, vollständig beweglich.

Am vorteilhaftesten sind zapfenartige Gelenke, wie sie der Türstock Abb. 84 hat. Die Köpfe der Stempel sind walzenförmig abgerundet und

legen sich in entsprechende Höhlungen der Kappen. Eisenbeschläge an den Enden der Kappen und Stempel sichern die Haltbarkeit.

Wird ein Gebirgsdruck  $G$  in schräger Richtung auf die Kappe wirkend angenommen, und betrachtet man den Gelenkpunkt  $D$  vorläufig als feststehend, so liefert die Verlängerung der unbelasteten Stange  $AC$  auf der Krafrichtung  $G$  den Schnittpunkt  $m$ . Durch diesen Punkt  $m$  sind die Krafrichtungen  $A$  und  $B$  bestimmt. Die Kraftgrößen  $A$  und  $B$  findet man im Kräfteeck, das auch  $A$  in die Komponenten  $H_1$  und  $V_1$  und  $B$  in die Komponenten  $V_2$  und  $H_2$  zerlegt zeigt.

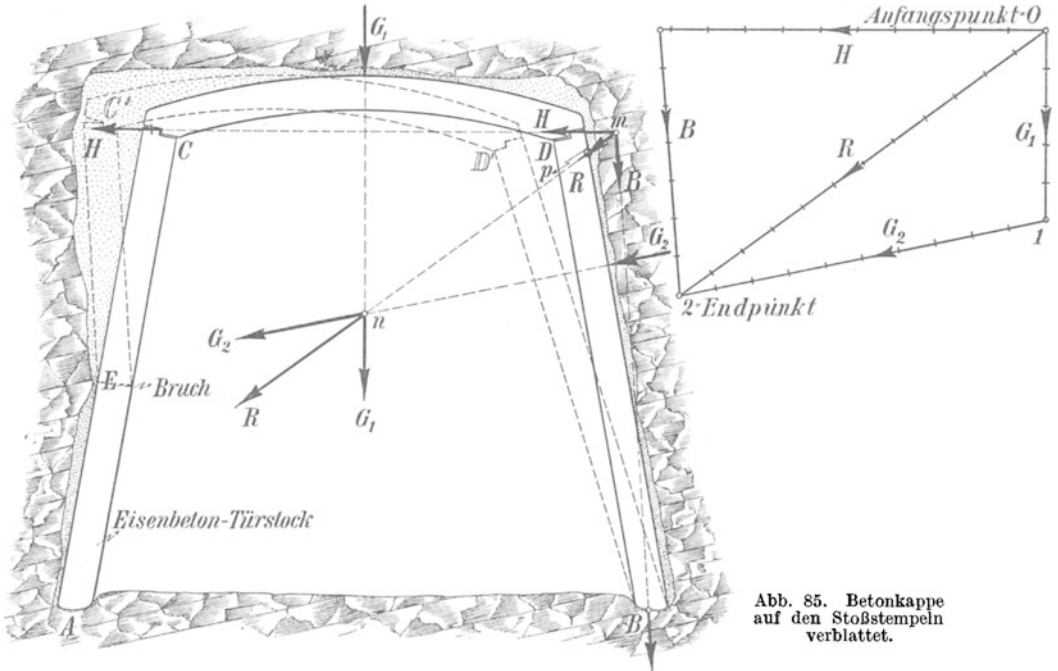


Abb. 85. Betonkappe auf den Stoßstempeln verblattet.

Der Gelenkpunkt  $D$  hat die Horizontalkraft  $H_2$  aufzunehmen, er wird sich daher in der Krafrichtung  $H_2$  bewegen und diese Bewegung so lange fortsetzen, bis er an der festen Wand den Widerstand  $H_2$  gefunden hat. Nach dieser Bewegung ist der Gleichgewichtszustand hergestellt. Der Fußpunkt  $B$  hat die Vertikalkomponente  $V_2$  aufzunehmen, der Fußpunkt  $A$  die Vertikalkomponente  $V_1$  und den verhältnismäßig kleinen Horizontalschub  $H_1$ .

In Abb. 85 ist die Betonkappe auf den Stoßstempeln ähnlich wie beim Holzausbau verblattet. Es sind zwei Belastungen angenommen:

1. ein Druck  $G_1 = 10 \text{ t}$  aus dem Hangenden,
2. ein Druck  $G_2 = 20 \text{ t}$  vom rechten Stoß her.

Es sollen die Gelenkdrücke ermittelt werden. Man findet im Kräfteeck die Resultierende als Verbindungslinie  $\overline{O2}$  vom Anfangs- und Endpunkt,



sie hat die Größe  $R = 24 \text{ t}$  und drückt nach links. In der Bildfigur wird der Angriffspunkt der Resultierenden als Schnittpunkt  $m$  der Kraftrichtungen  $G_1$  und  $G_2$  gefunden. Der Türstock verhält sich statisch nun genau so, als wenn nur die resultierende Kraft  $R$  wirksam wäre. Die Kraft  $R$  trifft den rechten Stoßstempel im Punkt  $p$  und will ihn schräg nach unten in die Strecke hereindrücken. Er wird aber durch die Verblattung am Kopfpunkt  $D$  gehalten.

Im Stabdreieck  $CDB$  ist  $R$  die einzige Außenkraft,  $CD$  ist der unbelastete Stab  $CD$  verlängern bis zum Schnitt mit der Resultierenden  $R$ . Der Schnittpunkt ist  $m$  und damit ist in der Linie  $mB$  die Richtung des Gelenkdruckes im Stützpunkt  $B$  festgelegt.

Die Größen der Gelenkdrücke findet man im Kräfteck, indem man durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele  $B$  zu  $mB$  und durch den Anfangspunkt  $0$  eine Parallele  $H$  zu  $CD$  zieht. Es ergeben sich folgende Größen:

Gelenkdruck  $B=14\text{t}$  und Gelenkdruck  $C$  und  $D = 21 \text{ t} = H$ . Welche Wirkung wird eintreten? Der große Horizontalschub  $H$  der Kappe

muß von der Verblattung des linken Stoßstempels aufgenommen werden. Kann, wie in der Figur angenommen, der Kopf dieses Stempels keinen Gegenhalt am oberen Stoß finden, so tritt eine Bewegung nach links ein. Der linke Stoßstempel wird auf Biegung beansprucht und bricht an der Stelle, wo das Gebirge ihm einen festen Stützpunkt bietet.

Bei starkem Druck aus dem Hangenden ist die Türstockform Abb. 86 zweckmäßig. Man will durch diese Form die Kappenlänge verkleinern, denn die Stempel sind nach innen eingeknickt und ergeben somit eine kürzere Spannweite für das aufzulegende Kappenstück.

Der Gebirgsdruck  $G$  greife genau in der Mitte der Kappe an und wirke senkrecht nach unten. Die Verlängerungen der unbelasteten Stangen  $AC$  und  $BD$  schneiden sich auf der Kraftrichtung  $G$  in dem gemeinsamen Schnittpunkt  $m$ . Das Stabsystem ist daher ohne seitliche Anlehnung in

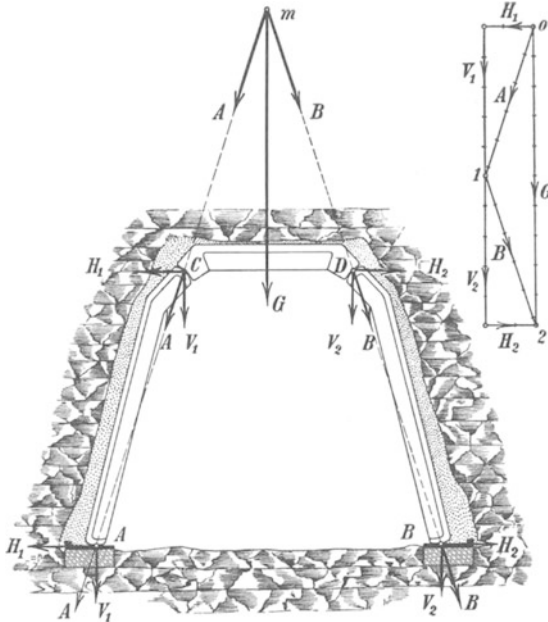


Abb. 86. Türstock für starken Druck aus dem Hangenden.

der Gleichgewichtslage. Im Kräfteeck ergeben sich die Größen der Fußpunktbelastungen  $A$  und  $B$ , die wieder in ihre Horizontal- und Vertikal-komponenten zerlegt sind.

Wird der Gebirgsdruck stärker, so werden auch die Horizontal-kräfte  $H_1$  und  $H_2$  an den Fußpunkten größer. Sie können so groß werden, daß die Fußpunkte nach außen auf der Sohlenplatte ausweichen, damit tritt eine Senkung der Kappe ein, d. h. der Gebirgsdruck wird nachgiebig aufgenommen, wodurch eine Zerstörung der Ausbaurichtung vermieden bleibt.

Beim Aufstellen solcher Türstöcke beachte man immer ihre statische Wirkungsweise. Sie würde z. B. grundsätzlich sofort gestört, wenn man die Füße der Stempel einmauert, weil dann die Gelenkigkeit der Fußpunkte verloren geht.

## 22. Das symmetrische Stabfüneck.

Ein Stabfüneck in symmetrischer Form ist in Abb. 87 dargestellt. Die Stange  $AB$  werde fest eingespannt, dann bleiben die vier anderen Stangen beweglich.

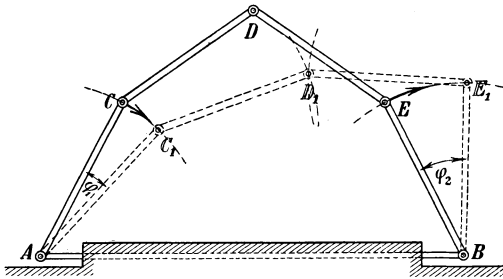


Abb. 87. Das Stabfüneck bei Rechtsdrehung der Stützen.

Die vier anderen Stangen beweglich.

Schwingt der Gelenkpunkt  $C$  den Drehwinkel  $\varphi_1$  nach  $C_1$  und der Gelenkpunkt  $E$  den Drehwinkel  $\varphi_2$  nach  $E_1$ , so ist damit auch die neue Lage  $D_1$  des Punktes  $D$  gegeben.  $D_1$  ist der Schnittpunkt des um  $C_1$  als Mittelpunkt mit  $CD$  als

bogens mit dem Kreisbogen, der um  $E_1$  als Mittelpunkt mit  $ED$  als Radius beschrieben ist.

In Abb. 88 ist die Drehung der beiden Fußpunktstangen nach entgegengesetzten Richtungen vorgenommen.

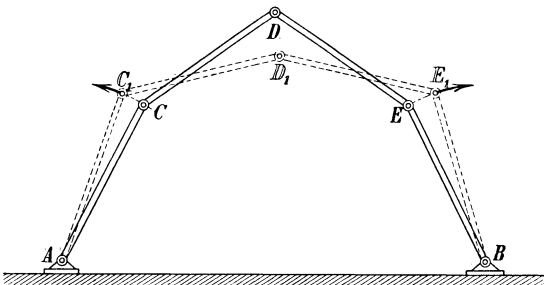


Abb. 88. Das Stabfüneck bei Rechts- und Linksdrehung der Stützen.

gegengesetzten Richtungen vorgenommen. In beiden Fällen ist eine Senkung des Firstpunktes  $D$  eingetreten. Würde die Bewegung durch eine äußere Kraft, welche senkrecht oder schräg auf den Firstpunkt drückte, hervorgerufen sein, so könnte man von einer nachgiebigen Druckaufnahmesprechen.

Es scheint daher auch dieses System von Stäben geeignet zu sein, im Bergbau zur nachgiebigen Aufnahme von Druckkräften verwendet zu werden.

Über die allgemeine Form dieses Stabsystems unterrichtet Abb. 89. Es sollen die Belastungsrichtungen und Belastungsgrößen gegeben sein, und es soll ein Stabsystem gefunden werden, das unter dem Druck dieser Lasten im Gleichgewicht steht. In Abb. 89 ist  $l$  die Spannweite des Tragsystems, in der Mitte sei eine Vertikalkraft  $Q = 6\text{ t}$  und zu beiden Seiten in gleichen Abständen die Last  $P = 2\text{ t}$  aufzunehmen. Das Stabsystem sei einzubauen.

Man zeichnet die Kräfte­linie mit  $\overline{01} = P = 2\text{ t}$ ,  $\overline{12} = Q = 6\text{ t}$  und  $\overline{23} = P = 2\text{ t}$ , dann ist  $\overline{03} = G$  das Gesamtgewicht  $G = 10\text{ t}$ . Dann zieht man durch den Halbierungspunkt  $M$  der Kräfte­linie  $\overline{03}$  eine

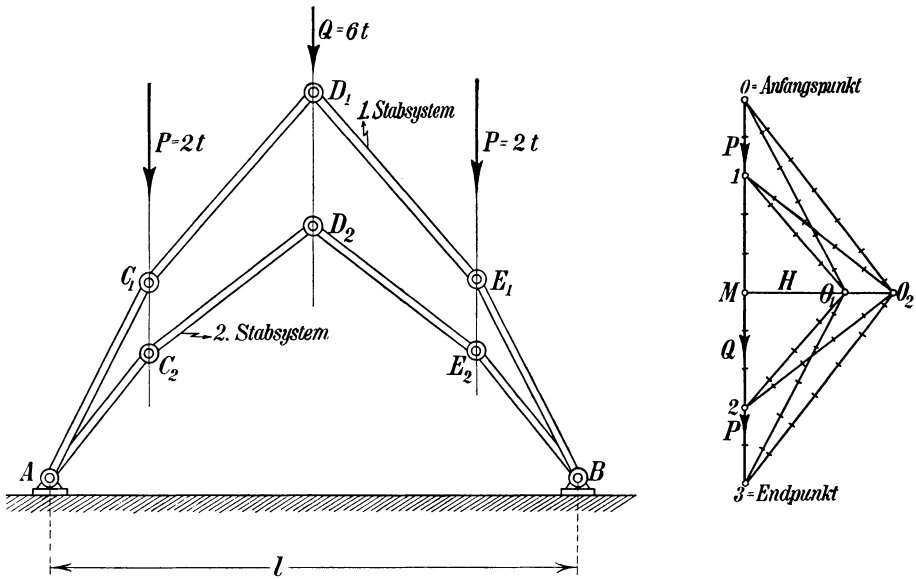


Abb. 89. Stabfünfecke mit gleicher Spannweite und ungleicher Höhe.

Horizontale  $H$  und wählt auf  $H$  einen beliebigen Punkt  $O_1$  als Pol, um von hier aus nach den Punkten  $0, 1, 2$  und  $3$  die Polstrahlen zu ziehen.

Im Stabsystem liegen die Fußpunkte  $A$  und  $B$  durch die Spannweite  $l$  fest. Man zieht also durch  $A$  eine Parallele zum Polstrahl  $O_13$  bis zum Schnittpunkt  $C_1$  mit der Kraft­richtung  $P$  und durch  $C_1$  eine Parallele zum Polstrahl  $O_12$  bis zum Schnittpunkt  $D_1$  mit der Kraft­richtung  $Q$ , dann entsteht die linke Seite des 1. Stabsystems. Ebenso entsteht die rechte Hälfte.

Man kann für diese Belastung auch ein zweites Stabsystem aufbauen, indem man auf der Horizontalen  $H$  der Kräfte­figur einen zweiten Punkt, z. B. den Punkt  $O_2$ , wählt und damit die Polstrahlen und das zweite Stabsystem  $AC_2D_2E_2B$  bildet, es verläuft tiefer als das erste. In gleicher Weise würde die Bildung beliebig vieler anderer Stabsysteme möglich sein, da man jeden beliebigen Punkt auf der Horizontalen  $H$  zur Polstrahlbildung nehmen kann. Je weiter aber der Pol  $O$  von der

Kräftelinie abrückt, um so niedriger verläuft das Stabsystem, und um so größer werden die Druckkräfte in den Stäben, denn die Längen der Polstrahlen geben die Druckkräfte in den parallel verlaufenden Stäben an.

In Abb. 89 liegen folgende Verhältnisse vor:

	1. Stabsystem	2. Stabsystem
Druckkraft . .	$AC_1 = BE_1 = 5,6 \text{ t}$	$AC_2 = BE_2 = 6,4 \text{ t}$
Druckkraft . .	$C_1D_1 = E_1D_1 = 4,0 \text{ t}$	$C_2D_2 = E_2D_2 = 5,0 \text{ t}$

Der niedriger verlaufende 2. Stabzug hat also die größeren Druckkräfte aufzunehmen. Aus dieser Betrachtung lernen wir, daß wir einen Hohlraum gegen schwere Vertikallasten am sichersten abstützen können, wenn wir das Stabsystem mit großer Scheitelhöhe und steil stehenden Stäben ausführen.

### 23. Das Stabfünfeck im Grubenausbau.

Das Stabfünfeck ist ein nachgiebiges System. Infolge seiner Nachgiebigkeit kann der Streckenausbau in Fünfeck-Form verhältnismäßig leicht gehalten werden.

In Abb. 90 ist der Ausbau einer Strecke in Beton-Segmenten dar-

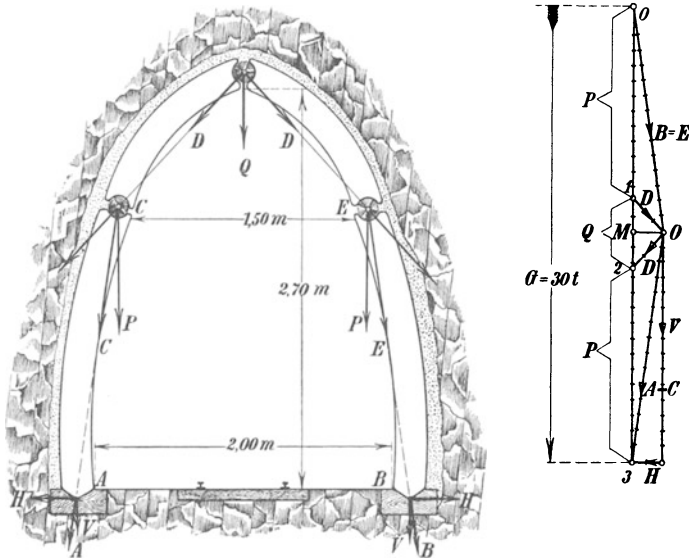


Abb. 90. Das Stabfünfeck im Grubenausbau.

gestellt. Der Ausbau setzt sich gewölbeartig aus vier Segmenten und drei Quetschholzgelenken zusammen, zwei Segmente bilden die Türstöcke und zwei Segmente die Kappen, die Sohle bildet den fest eingespannten fünften Stab.

Schon seine äußere Form verrät, daß er besonders geeignet erscheint, als Spitzbogen großen Firstendruck aufzunehmen. In der Figur ist eine gesamte gleichmäßige Vertikalbelastung von  $G = 30$  t angenommen, und es ist gezeigt, in welcher Weise bei symmetrischer Lastwirkung diese Last sich auf die drei Gelenkpunkte verteilt.

Die senkrechte Kräftelinie  $O\bar{3}$  stellt die Last  $G = 30$  t dar. Der Punkt  $M$  halbiert die Kräftelinie, so daß Linie  $OM = 15$  t die Vertikalbelastung des Fußpunktes  $B$  und  $M\bar{3} = 15$  t =  $V$  die Vertikalbelastung des Fußpunktes  $A$  bildet.

Legt man durch  $M$  eine Horizontale und durch Punkt  $\bar{3}$  eine Parallele zur Verbindungslinie  $AC$  der Gelenke  $A$  und  $C$ , so entsteht der Schnittpunkt  $O$ , und es ist  $O\bar{3} = A = C$  die Gelenkpunktbelastung der Punkte  $A$  und  $C$ . Man mißt  $A = C = 15,2$  t und den Horizontalschub der Fußgelenke  $H = 2$  t.

Durch den Punkt  $O$  zieht man ferner zwei Linien  $D$ , die eine parallel zur Verbindungslinie  $CD$  der Gelenkpunkte  $C$  und  $D$ , die andere parallel zur Verbindungslinie  $ED$  der Gelenkpunkte  $E$  und  $D$ , dann entstehen auf der Kräftelinie die Schnittpunkte  $1$  und  $2$ , und es ist die Linielänge  $\bar{1}\bar{2} = Q =$  Belastung des Firstpunktes  $D$ . Man mißt auf der Kräftelinie  $Q = 4,6$  t.

Und nun fallen auf der Kräftelinie ohne weiteres die Strecken  $\bar{O}1 = P$  und  $\bar{2}\bar{3} = P$  aus als die Teilgewichte, welche auf die Gelenkpunkte  $C$  und  $E$  entfallen. Man mißt  $P = 12,7$  t. Die Gelenkpunkte  $C$  und  $E$  haben daher die größten Kräfte aufzunehmen, hier werden die Quetschhölzer sich zusammendrücken, wenn die Last in voller Größe zur Wirkung kommt. Der Firstgelenkpunkt  $D$  hat dagegen nur verhältnismäßig kleine Kräfte aufzunehmen, hier wird das Quetschholz erhalten bleiben.

Eine gleichmäßige und symmetrische Verteilung der ganzen Gebirgsbelastung stellt den günstigsten Fall der Beanspruchungsarten des Ausbaues dar, er wird nur in den seltensten Fällen praktisch vorkommen. Es soll daher auch der ungünstigste Fall untersucht werden, der eintritt, wenn der Gebirgsdruck  $G$  das Gewölbesegment einseitig belastet wie in Abb. 91.

Um für diesen Fall die Kräfteverteilung zu untersuchen, müssen bestimmte Voraussetzungen festgelegt werden. Es werde angenommen, die Gelenkpunkte  $C$  und  $E$  stehen unnachgiebig fest, dann ist  $CDE$  ein Stabdreieck, dessen belastete Seite  $CD$  und dessen unbelastete Seite  $DE$  ist. Bringt man die Verlängerung der unbelasteten Seite  $ED$  zum Schnitt mit der bekannten Krafrichtung  $G$ , so entsteht der Schnittpunkt  $m$  und die Verbindungslinie  $mC$  und  $mE$  geben die Krafrichtungen  $C$  und  $D$  für die Gelenkdrücke in  $C$  und  $D$ .

Die Kraftgrößen  $C$  und  $D$  findet man in der Kräftefigur, indem man durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Krafrichtung  $C$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zur Krafrichtung  $D$  legt. Man erhält den Schnittpunkt  $1$  und mißt bei einem Gebirgsdruck  $G = 30$  t die Kraftgröße  $C =$  Linie  $\bar{O}1 = 26$  t und die Kraftgröße  $D =$  Linie  $\bar{1}\bar{2} = 16,5$  t.

Die gefährlichste Druckbeanspruchung erhält also das Quetschholz

$C$ , hier wird das Zusammendrücken beginnen. Und nun werde weiter angenommen, daß die Fußpunkte  $A$  und  $B$  nur Vertikalkräfte aufnehmen, da die Stoßsegmente seitlich infolge ihrer losen Außenpolsterung ausweichen können.

Die Auflagervertikale  $A$  schneidet die Kraftrichtung  $C$  im Punkte  $n_1$ , die Auflagervertikale  $B$  die Kraftrichtung  $D$  im Punkte  $n_2$ , und nun sind im Punkte  $n_1$  wirksam die Vertikalkraft  $V_1$ , sie wird aufgenommen vom Fußpunkt  $A$ , und die Horizontalkraft  $H_1$ , sie wird das Segment gegen das Gebirge drücken. Im Punkte  $n_2$  sind ebenfalls zwei Kräfte

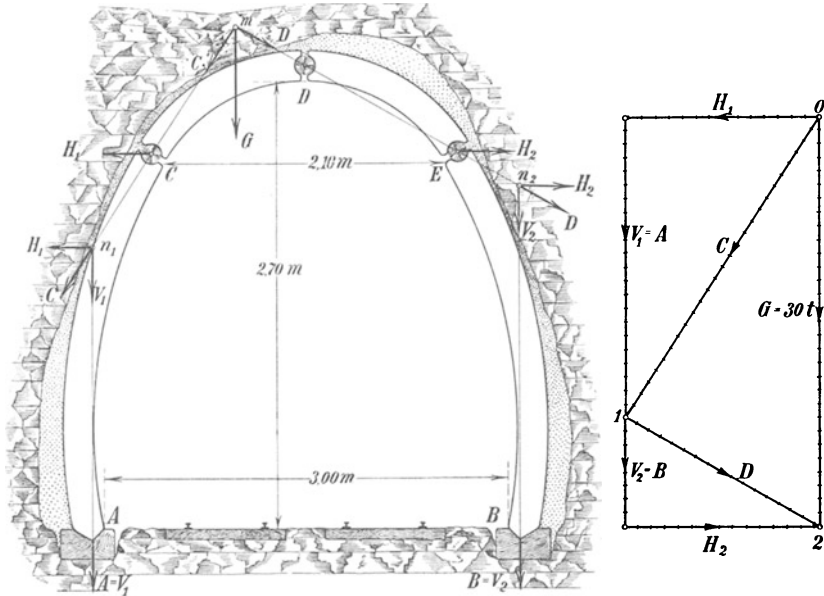


Abb. 91. Einseitige Belastung des Kappenbogens.

tätig, die Vertikalkraft  $V_2$ , sie wird aufgenommen vom Fußpunkt  $B$ , und die Horizontalkraft  $H_2$ , welche das Segment gegen das Gebirge drückt.

Finden die Türstöcke hier oben durch Anlehnung an die feste Gebirgswand ein festes Widerlager, so ist der Gleichgewichtszustand hergestellt. Das erscheint besonders günstig, weil dann die Türstöcke nur im Bereich von  $C$  bis  $n_1$  und von  $E$  bis  $n_2$  durch die Horizontalkräfte auf Biegung beansprucht werden, während die darunter liegenden Teile nur den senkrechten Druck aufzunehmen brauchen.

Die Untersuchung liefert wieder ein bemerkenswertes Ergebnis. Es lautet: die Türstocksegmente halten am besten, wenn sie beim Ausweichen die Widerlager am Gebirge möglichst hoch finden, d. h. es ist dafür zu sorgen, daß die Stoßsegmente nach unten zu ein weiteres Polster finden wie oben, wie es ja auch in der Abb. 91 zu erkennen ist.

Die Kräftefigur liefert noch die Kraftgrößen  $H_1 = H_2 = 14,4 \text{ t}$ , die Fuß-

punktbelastung  $A = V_1 = 22 \text{ t}$  und die Fußpunktbelastung  $B = V_2 = 8 \text{ t}$ . Der Fußpunkt  $A$  hat also eine ganz bedeutende Überlast zu tragen.

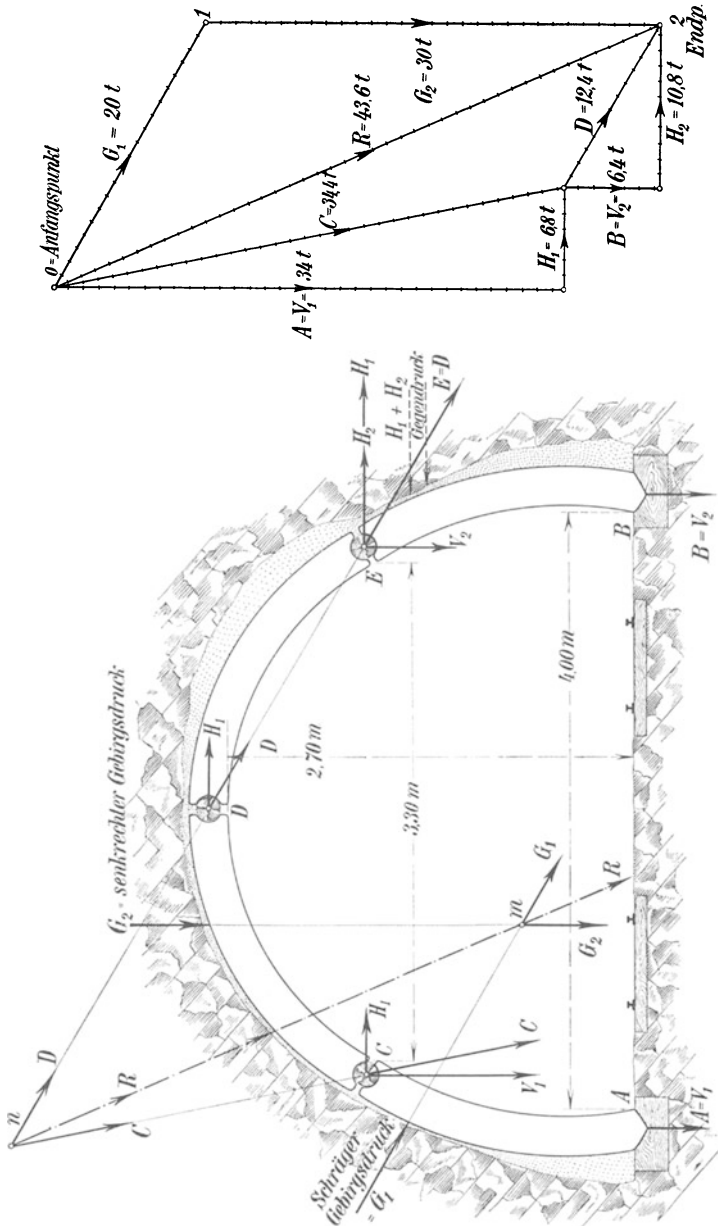


Abb. 92. Einseitig belastetes Stabfünfeck.

In Abb. 92 ist ein Stabfünfeck gebildet, das ganz einseitig belastet ist. Auf der linken Seite drückt

1. der schräge Gebirgsdruck  $G_1 = 20$  t am linken Stoß,
2. der Vertikaldruck  $G_2 = 30$  t aus dem Hangenden.

Es sollen die Gelenkdrücke bestimmt werden. Man zeichnet im Kräfteeck eine Linie  $\overline{01} = G_1 = 20$  t parallel zu  $G_1$  der Bildfigur, anschließend eine Linie  $\overline{12}$  gleich und parallel  $G_2 = 30$  t und findet  $R = 43,6$  t als Verbindungslinie  $\overline{02}$ .

In der Bildfigur findet man den Angriffspunkt von  $R$  als Schnittpunkt  $m$  der Krafrichtungen  $G_1$  und  $G_2$ . Damit steht der Ausbau für die weitere Betrachtung nur unter der Belastung einer Einzelkraft  $R$ , die den Stab  $CD$  des Stabdreiecks  $CDE$  belastet, während der Stab  $DE$  unbelastet ist. Also hat man den unbelasteten Stab  $ED$  über  $D$  hinaus zu verlängern bis zum Schnitt mit der Krafrichtung  $R$ . Der Schnittpunkt heißt  $n$  und die Verbindungslinie  $nC$  liefert die Richtung des Gelenkdruckes  $C$ .

Im Kräfteeck findet man die Größen der Gelenkdrücke  $C$  und  $D$ , indem man durch den Anfangspunkt  $0$  eine Parallele zu  $nC$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zur Stabrichtung  $DE$  legt. Wir messen folgende Größen:

$$\text{Gelenkdruck } C = 34,4 \text{ t,}$$

$$\text{Gelenkdruck } D = \text{Gelenkdruck } E = 12,4 \text{ t.}$$

Im Kräfteeck sind zerlegt  $C$  in die Komponenten  $V_1 = 34$  t und  $H_1 = 6,8$  t, ferner  $D$  in die Komponenten  $V_2 = 6,4$  t und  $H_2 = 10,8$  t. Diese Kräfte müssen ins Gebirge gesetzt werden.  $H_1$  und  $H_2$  werden durch Anlehnung des Bogenausbaus an den rechten Stoß in das Gebirge gesetzt, und es besteht die Gefahr, daß am Anlehnungspunkt das Bogenstück bricht. Die Vertikalkraft  $V_1$  wird durch den Fußpunkt  $A$  und die Vertikalkraft  $V_2$  durch den Fußpunkt  $B$  ins Gebirge gesetzt. Am gefährdetsten ist der Gelenkpunkt  $C$ , er hat die größte Druckwirkung aufzunehmen.

## 24. Das Stabpolygon.

Das Stabpolygon ist eine Verbindung von beliebig vielen Stäben. In Abb. 93 sind z. B. sechs Stäbe gelenkartig zu einem geschlossenen System zusammengesetzt. Um die Bewegungsmöglichkeit zu untersuchen, spannt man einen der Stäbe, z. B. den Stab  $AB$ , fest ein.

Die Gelenkpunkte  $C$  und  $F$  können sich dann nur noch auf einem Kreisbogen bewegen, dessen Mittelpunkt  $A$  bzw.  $B$  und dessen Radius gleich  $AB$  bzw.  $BF$  ist. Die Gelenkpunkte  $D$  und  $E$  bleiben dagegen noch freier beweglich.

Bewegen sich die beiden Stangen  $AC$  und  $BF$  um den gleichen Drehwinkel nach außen, so senkt sich der Stab  $DE$  horizontal bleibend in die Lage  $D_1E_1$ .

In Abb. 94 sind die Gelenkpunkte  $C$  und  $F$  um einen gleichen Drehwinkel nach innen gedreht. Das hat zur Folge, daß der Stab  $DE$  eine parallele Hochschiebung in die Lage  $D_1E_1$  erleidet.



Die erste Bewegung kann durch starken Firstendruck, die zweite Bewegung durch beiderseitigen Seitendruck von außen eingeleitet werden. Demnach scheint auch das Stabpolygon geeignet zu sein, im Gruben-

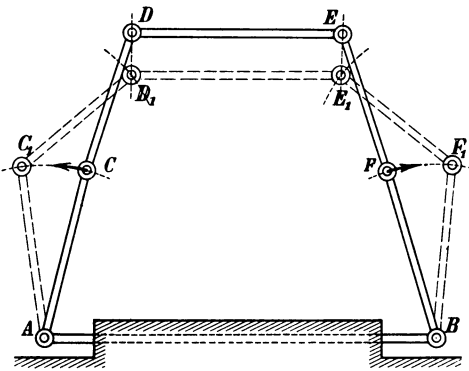


Abb. 93. Das Stabpolygon bei Außendrehung der Stützen.

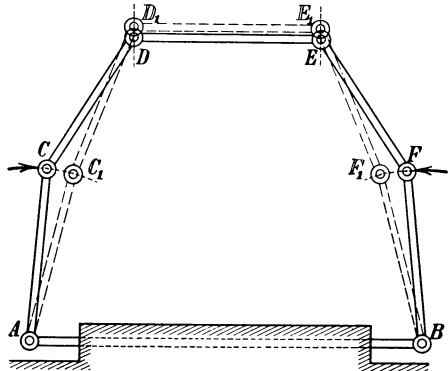


Abb. 94. Das Stabpolygon bei Innendrehung der Stützen.

ausbau Anwendung zu finden, um sowohl Firstendruck als auch Seitendruck nachgiebig aufzunehmen.

## 25. Das Stabpolygon im Grubenausbau.

Das Stabpolygon fand bisher im Ausbau wenig Anwendung. Bekannt ist die Polygonzimmerung zur Verstärkung von gewöhnlichen Türstöcken. Erst in neuerer Zeit ist man zur Verwendung des reinen Stabpolygons übergegangen, von dem eine Ausführungsart Abb. 95 zeigt. Kappe und Stempel bestehen aus I-Eisen oder Schienen. Die Gelenkpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $F$  werden aus Rundhölzern gebildet, die in der Regel durch mehrere Gestelle hindurchgehen. Die Kappe ruht an den Enden  $D$  und  $E$  auf starken Holzkeilen.

Als günstigsten Belastungsfall zeigt Abb. 95 den Gebirgsdruck  $G$  senkrecht und symmetrisch auf die Kappe wirkend. Seine Angriffslinie geht durch den Schnittpunkt  $m$  der verlängerten Stabrichtungen  $CD$  und  $FE$ . Der Gebirgsdruck  $G$  zerlegt sich in zwei Komponenten  $D$  und  $E$ , deren Richtungen mit den eben genannten Stabrichtungen zusammenfallen.

In der Kräftefigur findet man die Größen der Kräfte  $D$  und  $E$ , indem man durch den Anfangspunkt  $O$  der gegebenen Kraft  $G = 12$  t eine Parallele zur Krafrichtung  $D$  und durch den Endpunkt  $2$  eine Parallele zur Krafrichtung  $E$  legt, sie schneiden sich im Punkte  $1$ , und es ist Linie  $\overline{O1} = D = 7,3$  t und Linie  $\overline{12} = E = 7,3$  t.

Die Kraft  $D$  pflanzt sich auf den Gelenkpunkt  $C$ , die Kraft  $E$  auf den Gelenkpunkt  $F$  fort.  $C$  zerlegt sich in die Komponenten  $H_1$  und  $A$ ,  $F$  in die Komponenten  $H_1$  und  $B$ . In der Kräftefigur findet man  $H_1 = H_2 = 3,6$  t und  $A = B = 6,2$  t.

Die in den Gelenkpunkten  $C$  und  $F$  nach außen wirkenden Horizon-

talkräfte  $H_1$  drücken die Gelenkpunkte so lange nach außen, bis die Gegenpolsterungen oder die Stöße die gleichen Kräfte als Widerstand entgegensetzen. Mit dem Herausdrücken der Gelenkpunkte findet eine Senkung der Kappe statt, so daß der Gebirgsdruck nachgiebig oder elastisch aufgenommen wird.

Die unteren Stoßstempel  $CA$  und  $FB$  übertragen die Schrägkräfte  $A$  und  $B$  durch die Fußpunkte in das Liegende. Man kann  $A$  und  $B$  in die Komponenten  $V$  und  $H_2$  zerlegen und findet in der Kräftefigur  $V = 6 \text{ t}$  und  $H_2 = 0,6 \text{ t}$ .

Sobald eine Schrägbelastung durch den Gebirgsdruck eintritt, wird der Belastungsfall schon ungünstiger, weil dann die einzelnen Ausbauteile ganz ungleich beansprucht werden. In Abb. 96 ist der Ge-

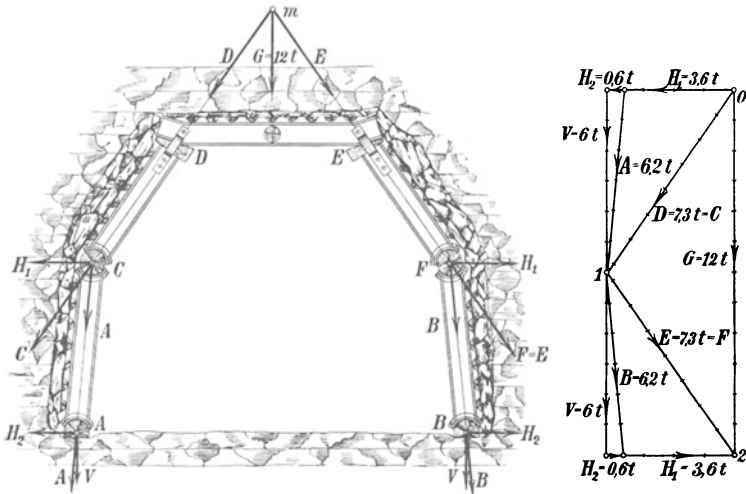


Abb. 95. Das Stabpolygon im Grubenausbau.

birgsdruck von rechts oben kommend angenommen, er belastet die Mitte der Kappe mit  $G = 10 \text{ t}$ .

Eine Deutung der Kräfteverteilung ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Nimmt man an, daß die Gelenkpunkte  $C$  und  $E$  vorläufig starr und fest sind, so entsteht das Stabdreieck  $CDE$ , dessen Schenkel  $DE$  der belastete Teil und dessen Schenkel  $CD$  der unbelastete Teil ist.

Die Stabrichtung  $CD$  des unbelasteten Stabes schneidet die verlängerte Krafrichtung  $G$  im Punkte  $m$ . Verbindet man  $m$  mit dem Schenkelpunkt  $E$ , so ist diese Linie die Richtungslinie für den Gelenkdruck in  $E$ , während die Verbindungslinie von  $m$  mit dem Gelenkpunkt  $C$  die Richtungslinie für den Gelenkdruck in  $C$  liefert.

In der Kräftefigur findet man durch Parallele zu diesen Krafrichtungen die gegebene Kraft  $G = 10 \text{ t}$  zerlegt in die Komponenten  $E = 6,2 \text{ t}$  und  $C = 4,5 \text{ t}$ .

Im Knickpunkt  $E$  wirkt die Schrägkraft  $E$ , sie zerlegt sich in eine Horizontalkomponente und in eine Vertikalkomponente, deren Größen man aus der Kräftefigur abliest zu  $H_2 = 6 \text{ t}$  und  $V_2 = 1,5 \text{ t}$ . Die Horizontalkraft  $H_2$  zieht die Kappe nach links und setzt sich auf den Gelenkpunkt  $D$  fort. Die Vertikalkraft  $V_2$  drückt auf den Gelenkpunkt  $F$  und weiter auf das Fußgelenk  $B$ , das den Druck auf die Streckensohle setzt.

Wenn sich die Kappe im Endpunkt  $D$  nicht gegen den Stoß setzt, wird die Horizontalkraft  $H_2$  auch auf den Gelenkpunkt  $C$  übertragen. Dieser hat aber außerdem die Schrägkraft  $C$  aufzunehmen, die sich in die Horizontalkomponente  $H_1$  und in die Vertikalkomponente  $V_1$  zerlegt, deren Größen in der Kräftefigur zu suchen sind. Man findet  $H_1 = 2,6 \text{ t}$  und  $V_1 = 3,7 \text{ t}$ .

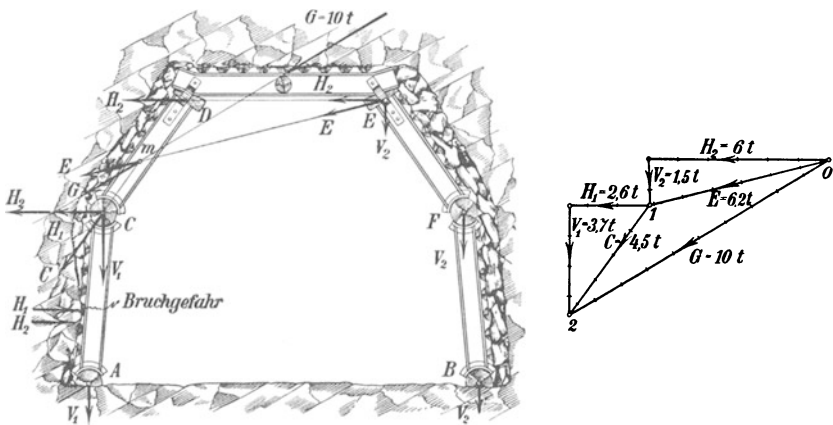


Abb. 96. Schräger Druck aus dem Hangenden.

Der Gelenkpunkt  $C$  wird also sehr stark belastet. Die Summe der Horizontalkräfte ( $H_1 + H_2$ ) drückt ihn nach links, so daß er gegen den Stoß gedreht wird. Findet er hier keinen Widerstand, so dreht sich Stab  $CA$  um  $A$  als Drehpunkt gegen den Stoß. Kommt der Stab nun in der unteren Hälfte zuerst zur Anlehnung, so drückt der Stoß mit Kraft ( $H_1 + H_2$ ) gegen den Stab und bricht ihn in die Strecke herein, da das Biegemoment sehr groß ist. Daher ist eine Hauptforderung für die Sicherheit dieses Ausbaues, daß der Stoßstempel nicht in der unteren Hälfte an der Drehung durch Anlehnung an den Stoß gehindert wird. Er soll sich drehen können, muß dann aber seine Anlehnung möglichst in Höhe des Gelenkpunktes  $C$  finden.

Die Vertikalkomponente  $V_1$  drückt weiter auf den Fußpunkt  $A$ , und dieser setzt den Druck auf die Streckensohle.

Im ersten Belastungsbeispiel würden beide Seiten des Ausbaues ganz gleichmäßig beansprucht, hier liegt die größte Belastung auf

der linken Ausbauseite, welche den ganzen Horizontalschub  $H_1 + H_2 = 2,6 + 6 = 8,6$  t und den größten Vertikaldruck  $V_1 = 3,7$  t gegenüber  $V_2 = 1,5$  t der anderen Seite aufzunehmen hat.

## 26. Der Ausbau in Abbaustrecken.

Der Ausbau von Abbaustrecken erfolgt nach praktischen Gesichtspunkten, wobei die Art der Kräfteaufnahme oft nicht erkannt wird. Untersucht man die Kräfteverteilung nach den Gesetzen der Mechanik, so lernt man auch hier die Schwächen im Ausbau kennen.

In Abb. 97 ist ein Ausbau bei geringem Einfallen dargestellt. Der Strangstempel ist schräg zur Einfallrichtung gestellt, der Damm-

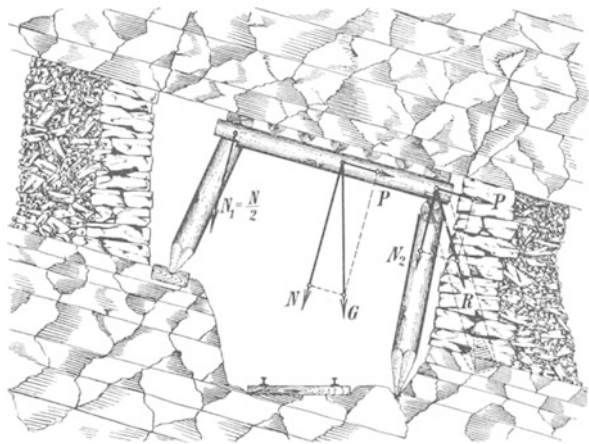


Abb. 97. Abbaustreckenausbau bei geringem Einfallen, Druck aus dem Hangenden.

stempel steht fast senkrecht zur Einfallrichtung. Zwischen dem Kappenholz und dem Dammstempel ist ein Quetschholz gesetzt. Das gelockerte Hangende drückt in senkrechter Richtung mit dem Gewicht  $G$  seiner Bruchmassen auf das Kappenholz.

Die Belastung  $G$  zerlegt sich in zwei Komponenten

1. in die Komponente  $N$  normal zur Einfallrichtung,
2. in die Komponente  $P$  parallel zur Einfallrichtung.

Die Normalkomponente  $N$  erzeugt bei gleichmäßiger Druckverteilung links den Stempeldruck  $N_1 = 0,5 N$  und rechts den Stempeldruck  $N_2 = 0,5 N$ .

Da das Kappenholz sich nicht gegen die Bergwand stützt, so drückt am Kopf des Dammstempels die Kraft  $P$  und die Kraft  $N_2$ , beide bilden die Resultierende  $R$ . In dieser Richtung will der Auflagerpunkt des Kappenholzes ausweichen. Am vorteilhaftesten würde das Ausweichen verhindert, wenn der Dammstempel — wie gestrichelt gezeichnet — in der Richtung  $R$  stehen würde. Die Steilstellung ist also ungünstig.

Auch die Anspitzung des Dammstempels ist nicht günstig. Besser wäre eine Schneide, und diese muß so stehen, daß die Keilfläche senkrecht zur Streckenrichtung steht, da die Schneide in dieser Richtung den Horizontalschub ins Liegende setzen muß.

Der Strangstempel, der nur durch die Kraft  $N_1$  belastet wird, steht schräg. Er stände aber besser in der Richtung der Kraft  $N_1$ .

Bei starkem Einfallen (Abb. 98) zeigt die Zerlegung des Hangendendrucks  $G$  eine Abnahme der Komponente  $N$ , dagegen eine Zunahme der Komponente  $P$ . Die Normalbelastung  $N$  des hangenden Holzes erzeugt auf jeder Seite die Kopfbelastung  $\frac{1}{2} N$  für die Stempel.

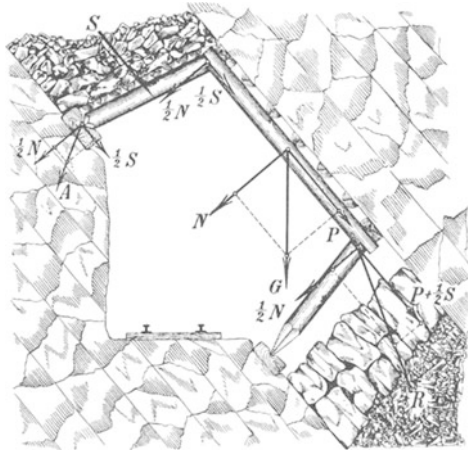


Abb. 98. Starkes Einfallen.

Der Strangstempel wird außerdem noch durch den Bergedruck  $S$  belastet, so daß Fußpunkt und Kopfpunkt des Stempels noch mit der Kraft  $\frac{1}{2} S$  auf ihre Stützpunkte drücken.

Am Fußpunkt des Strangstempels setzen sich die Kräfte  $\frac{1}{2} N$  und  $\frac{1}{2} S$  zur Resultierenden  $A$  zusammen. In dieser Richtung  $A$  setzt sich die Stempelbelastung ins Liegende. Ein Abrutschen des unteren Quetschholzes kann also nicht eintreten.

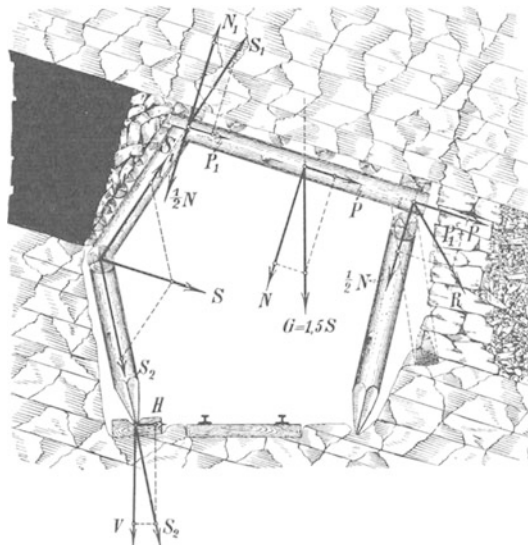


Abb. 99. Starker Seitendruck.

Der Kopfpunkt des Dammstempels hat die Kraft  $(P + \frac{1}{2} S)$  und die Kraft  $\frac{1}{2} N$  aufzunehmen, beide Kräfte bilden zusammen die Resultierende  $R$ , in deren Richtung der Kopfpunkt ausweichen will. Theoretisch müßte also die Abstützung des hangenden Holzes in der Richtung  $R$  erfolgen. Das würde aber praktisch schlecht gehen, denn die Krafrichtung  $R$  geht in den Versatz herein, und der Versatz ist keine sichere Stütze. Das ist aber auch nicht nötig,

denn die Kraft  $(P + \frac{1}{2}S)$  dreht den Dammstempel gegen das Hangende ein, wodurch das Kappenholz so fest gegen das Hangende gepreßt wird, daß ein Abrutschen verhindert wird. Es ist daher streng darauf zu achten, daß der Dammstempel schräg zum Hangenden steht, damit ein Eindrehen durch die Belastung möglich ist.

Der Strangstempel oben würde noch besser stehen, wenn er parallel zum Dammstempel stände, dann würde auch dieser Stempel beim Eindrehen gegen das Hangende drücken und die Standfestigkeit der Zimmerung erhöhen.

Bei starkem Seitendruck  $S$  (Abb. 99) muß der Stoßdruck durch besondere Maßnahmen aufgefangen werden. Man bricht den Stempel, indem man ein Knie bildet. Die Schubkraft  $S$  zerlegt sich in die Seitenkomponenten  $S_1$  und  $S_2$ . Die Stempelbelastung  $S_2$  wird am Fußpunkt des Stempels in das Liegende gesetzt. Hier zerlegt sich  $S_2$  in die Vertikalkomponente  $V$  und in die Horizontalkomponente  $H$ . Da die Kraft  $H$  verhältnismäßig klein ist, wird sie die Spitze wohl nicht abbrechen.

Die Stempelkraft  $S_1$  des oberen Knieholzes drückt mit der Normalkomponente  $N_1$  gegen das Hangende und mit der Kraft  $P_1$  in das Kappenholz. Die Komponente  $N_1$  drückt das Holz so fest gegen das Hangende, daß die Komponente  $P_1$  wahrscheinlich durch den Reibungswiderstand aufgehoben wird. Wenn nicht, verstärkt  $P_1$  die Schubkraft  $P$ , welche durch die Belastung  $G$  aus dem Hangenden entsteht.

In der Figur ist angenommen

$$G = 1,5 \cdot S.$$

Die Normalkomponente  $N$  des hangenden Druckes  $G$  verteilt sich mit dem Druck  $0,5 N$  gleichmäßig auf die Stützpunkte des Kappenholzes, die mit der Kraft  $0,5 N$  auf die Stützstempel drücken. Der rechte Stützpunkt hat noch ein Quetschholz zwischengeschaltet. Wie drückt die Belastung?

Die Belastung ist eine zweifache, sie erfolgt

1. durch den Druck  $\frac{1}{2} N$ ,
2. durch die Schubkraft  $(P_1 + P)$ ,

beide bilden zusammen die Resultierende  $R$ , welche das Quetschholz schräg belastet. In der Richtung  $R$  will der Stützpunkt ausweichen. Nun sieht man, daß der Dammstempel ungünstig steht, er steht fast normal zur Einfallrichtung, so daß er beim Eindrehen des Stempels sich nicht fester setzt, sondern sich lockert, d. h. der Ausbau kommt nach rechts in Bewegung und setzt sich gegen die Dammmauer.

Das würde verhindert werden, wenn man den Stempel schräg zur Einfallrichtung setzt, wie gestrichelt angedeutet ist. Auch die Anspitzung ist falsch, es muß eine Schneide gemacht werden, welche senkrecht zur Strecke steht.

## 27. Der Gebirgsdruck.

Der Druck der Gebirgsschichten oder der Spannungszustand im Gebirgsinnern wird in der Hauptsache durch das Gewicht der übergelagerten Massen beeinflusst.

Wird unter Tage eine Strecke vorgetrieben, so wird bei absolut standfestem Gebirge die Strecke ohne jeden Ausbau stehen bleiben. Bei ziemlich standfestem Gebirge genügt ein verhältnismäßig schwacher Ausbau, um die Strecke zu halten. Man schließt daraus, daß die Lasten der übergelagerten Schichten vom Hohlraum ferngehalten werden. Die Ursachen dieses Verhaltens sollen untersucht werden.

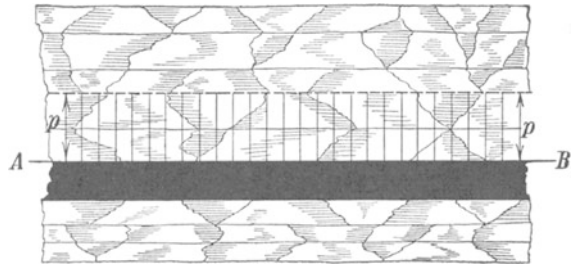


Abb. 100. Der Druck bei unverletztem Gebirge.

Im unverletzten Gebirge der Abb. 100 wird eine Horizontalschicht, z. B. die Firstschicht AB eines Kohlenflözes, einen gleichmäßig verteilten Druck aufnehmen, dessen Größe durch die Ordinatenhöhe  $p$  dargestellt werden kann.

Wird im Flöz eine Strecke (Abb. 101) auf gefahren, so fällt in der Firstenbreite der Gegendruck weg, die Belastung der Strecke  $\overline{12}$  muß daher von den Seitenwänden aufgenommen werden.

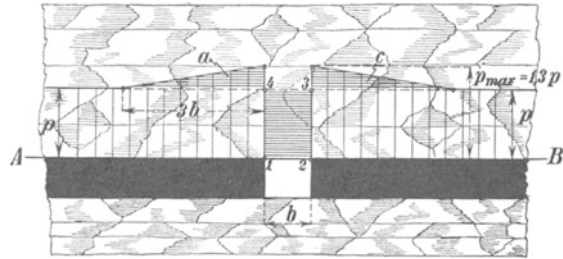


Abb. 101. Der Druck nach Auffahren einer Strecke, weiches Gebirge.

Die Druckfläche  $\overline{1234}$  muß inhaltsgleich aufgeteilt werden in die Flächen  $a$  und  $c$ . Wird angenommen, daß bei mildem Gebirge der Druck zu beiden Seiten der Firste  $\overline{12}$  sich auf die dreifache Streckenbreite verteilt, so entstehen als Spannungsfigur zwei Dreiecke von der Breite  $3b$  und der Höhe  $x$ , und es muß sein

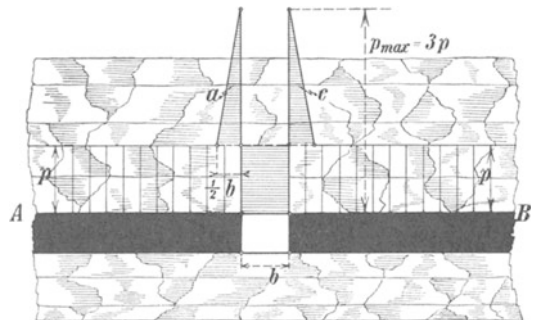


Abb. 102. Kantenpressung bei hartem Gebirge.

$$\text{Dreieckfläche } a + \text{Dreieckfläche } c = \text{Rechteck } \overline{1234}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3b \cdot x = b \cdot p$$

$$x = \frac{1}{3} p = 0,33 \cdot p,$$

$$\text{d. h. } p_{\max} = p + x = p + 0,33 p = 1,33 \cdot p,$$

Ist das Gestein hart, so wird sich der Druck auf eine geringere seitliche Entfernung verteilen. Nimmt man eine Druckverteilung auf die halbe Streckenbreite (Abb. 102) beiderseitig an, so wächst die höchste Kantenpressung an auf

$$p_{\max} = 3 \cdot p.$$

Die Stöße haben also nicht nur den vollen Betrag des lotrechten Gebirgsdrucks aufzunehmen, sondern sie werden noch zusätzlich durch Übernahme des Firstendruckes belastet.

Diese starke lotrechte Belastung ruft in den Stößen nach dem Streckeninnern hin Seitendrücke hervor. In Abb. 103 ist das dargestellt. Der Seitendruck drückt in die Strecke herein, es entsteht ein Treiben der Stöße, das durch wagerechte Lagerung noch begünstigt wird, namentlich dann, wenn das Gebirge zum Druckhaftwerden neigt. Wir erkennen hieraus auch, daß der Seitendruck im unmittelbaren Zusammenhang mit der übergelagerten Gebirgshöhe steht.

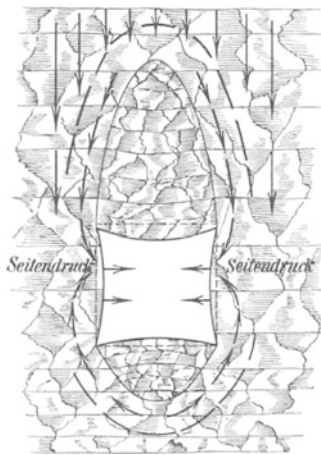


Abb. 103. Die Streckenbelastung.

Im Gegensatz hierzu besteht zwischen Firstendruck und übergelagerter Gebirgshöhe keine Beziehung. Man erklärt das so:

In der Firste ist durch die Aushöhlung der Gegendruck weggenommen. Das im Hangenden stehende Gestein biegt sich daher elastisch nach unten durch und wird dadurch unfähig, den von oben kommenden Druck weiter zu tragen. Es bildet sich infolgedessen über der hangenden Schicht eine Art Gewölbebogen von parabolischer Form (Abb. 103).

Dieser Bogen trägt den übergelagerten Druck und setzt ihn auf die Stöße. Der parabolische Körper, der von dem Gewölbebogen umschlossen wird, ist die gelockerte Gebirgsmasse. Diese Masse steht nur noch unter der Wirkung der Eigengewichtsbelastung, und diese Eigengewichtsbelastung drückt nur noch als hangende Last.

Die Höhe des parabolischen Körpers ist von der Beschaffenheit des Gebirges abhängig. Im harten Gestein ist die Höhe gering, in Geröllen und Schuttmassen mit geringer Zusammenhaftbarkeit (Kohäsion) kann die Höhe bedeutend werden, so daß dann der durch das Eigengewicht entstehende Druck aus dem Hangenden den Ausbau noch erheblich belasten kann.

Die Höhe des parabolischen Körpers ist von der Beschaffenheit des Gebirges abhängig. Im harten Gestein ist die Höhe gering, in Geröllen und Schuttmassen mit geringer Zusammenhaftbarkeit (Kohäsion) kann die Höhe bedeutend werden, so daß dann der durch das Eigengewicht entstehende Druck aus dem Hangenden den Ausbau noch erheblich belasten kann.

Für gewöhnlich tritt aber die ganze Überlastungshöhe der Gebirgsschichten als Firstendruck nicht auf. Das beweisen auch die Erfahrungen im Grubenausbau. Die Bruchlast eines Grubenstempels von 10 cm Durchmesser und 125 cm Länge ist durch Versuche ermittelt worden zu  $P = 15400$  kg. Hat der Stempel z. B.  $1 \text{ m}^2$  Hangendes zu tragen, so würde der Stempel (Abb. 104) für 1 m Gebirgshöhe ein Belastungsgewicht von 2000 kg aufzunehmen haben, wenn  $1 \text{ m}^3$  Gebirgsmasse 2000 kg wiegt.



Ist  $x$  die Belastungshöhe, bei welcher der Bruch erfolgt, so würde sein

$$2000 \cdot x = 15400$$

$$x = \frac{15400}{2000} = 7,7 \text{ m,}$$

d. h. wenn der Stempel im Ausbau hält, so trägt er nicht mehr als das Gewicht einer hangenden Schicht von 7,7 m Höhe.

Im allgemeinen wird also der Druck auf das Hangende von der auflagernden Gebirgshöhe unabhängig sein. Vor Herstellung des Hohlräumcs verläuft die hangende Schicht (Abb. 105) in der Horizontalen  $A C B$ . Ist der Hohlraum hergestellt, so senkt sich die Linie. Am meisten senkt sich der Firstpunkt  $C$ , er senkt sich um

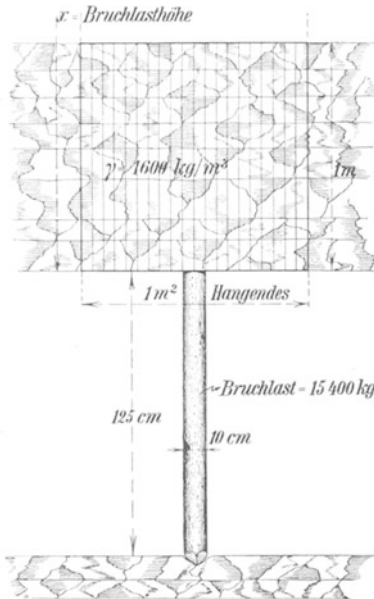


Abb. 104. Die Bruchlasthöhe eines Stempels.

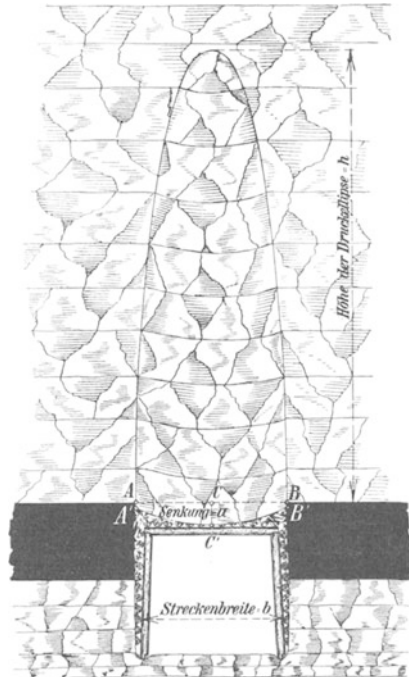


Abb. 105. Die Druckellipse bei hereinbrechendem Hangenden.

das Maß  $a$  nach  $C'$ . Auch die Endpunkte  $A$  und  $B$  senken sich in die Lagen  $A'$  und  $B'$ .

Die Senkungen können beobachtet und gemessen werden. Sie verursachen in auflockerungsfähigem Gebirge eine Entspannung und Auflockerung der darüber liegenden Massen. Es entsteht ein Bruchkörper von parabolischer Gestalt. Kommerell<sup>1</sup> ersetzt die Parabelform durch eine Ellipse und nennt sie Druckellipse. Die größte Höhe  $h$

<sup>1</sup> Kommerell: Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk. Berlin: W. Ernst & Sohn 1912.

der Bruchmassen berechnet Kommerell aus der gemessenen Senkung  $a$  zu

$$h = \frac{100 \cdot a}{p},$$

wenn  $p$  die bleibende Auflockerung der Ausbruchmassen in Prozent angibt. Die Werte von  $p$  können durch einfache Messungen festgestellt werden, schätzungsweise kann man annehmen für

Sand und Kies . . . . .	$p = 1$ bis 1,5 vH
Lehm . . . . .	= 2 „ 4 „
Mergel, Keuper u. dgl. . . .	= 4 „ 5 „
Fester Ton . . . . .	= 6 „ 7 „
Felsen . . . . .	= 8 „ 15 „

Für  $p = 0$  (Wasser, Schwimmsand, Schlamm) würde  $h = \infty$  werden, in diesem Fall geht die Druckellipse in zwei durch  $A$  und  $B$  gehende senkrechte Linien über, d. h. die ganze Überlagerung würde das Hangende belasten.

Neigt das Hangende zu Spaltenbildungen, so soll man zu der berechneten Höhe einen entsprechenden Zuschlag (20 bis 50%) machen.

Für die Streckenbreite  $b$  ist der Flächeninhalt der Halbellipse

$$F = \pi \cdot \frac{h \cdot b}{4}.$$

Ist  $\gamma$  das Gewicht von 1 m<sup>3</sup> Ausbruchmasse, so ist das Gewicht der Ausbruchmassen für 1 m Streckenlänge

$$G = \gamma \cdot \pi \cdot \frac{h \cdot b}{4}.$$

Dieses Gewicht würde die Kappe des Streckenausbaues belasten, wenn sie 1 m Streckenlänge zu tragen hätte.

Es sei z. B. ein Türstock von  $b = 2$  m Breite für den Streckenquerschnitt Abb. 105 rechnerisch zu untersuchen, wenn gemessen wurde

$$\begin{aligned} \text{größte Senkung } a &= 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}, \\ \text{Auflockerung } p &= 4 \text{ vH}. \end{aligned}$$

Die Höhe der Druckellipse ist

$$h = \frac{100 \cdot a}{p} = \frac{100 \cdot 0,3}{4} = 7,5 \text{ m}.$$

Aus dem Hangenden drückt dann auf 1 m Streckenlänge das Gewicht

$$G = \gamma \cdot \pi \cdot \frac{h \cdot b}{4}.$$

Es sei  $\gamma = 1800$  kg/m<sup>3</sup>, dann ist

$$G = 1800 \cdot \pi \cdot \frac{7,5 \cdot 2}{4} = 21300 \text{ kg}.$$

Diese Last verteile sich gleichmäßig auf die beiden Stempelhölzer, dann hat jeder Stempel eine Drucklast von  $\frac{G}{2} = 10650$  kg aufzunehmen.

Der Ausbau verwende Stempel von  $d = 15$  cm Stärke und  $l = 200$  cm Länge. Ein solcher Stempel hält nach Versuchen eine Knicklast von 33000 kg aus, also steht dann der Stempel mit einer

$$\frac{33000}{10650} = 3,1 \text{ fachen Sicherheit.}$$

## 28. Das Gleichgewicht von Körpern mit fest gelagerter Drehachse.

Achsen und Wellen haben Drehachsen, deren Abstützung in feststehenden Lagern erfolgt. In der Regel sind die Belastungskräfte dieser Körper bekannt, unbekannt sind aber die in den Lagern erzeugten Drücke, die Lagerdrücke oder Stützendrücke. Sie können mit Hilfe der bekannten Gleichgewichtsbedingungen errechnet werden.

### a) Die Belastungskräfte wirken in derselben Richtung und haben verschiedene Angriffspunkte.

In Abb. 106 werde eine Achse durch die Schwungscheibengewichte  $G_1$  und  $G_2$  belastet, wie groß sind die Lagerdrücke  $A$  und  $B$ ?

Man wende die 3. Gleichgewichtsbedingung — Summe aller statisch gleich Null — an. Denkt

man sich die Lager entfernt, so kann die Achse nur dann in der gezeichneten Lage verharren, wenn an den Auflagerpunkten zwei Kräfte  $A$  und  $B$  von unten nach oben gegen die Achse drücken, also entgegengesetzt den Belastungsgewichten  $G_1$  und  $G_2$ .

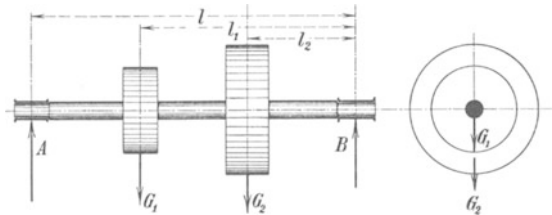


Abb. 106. Die Lagerdrücke bei Vertikalbelastung.

Bei der Wahl des Drehpunktes beachte man, daß zwei unbekannte Kräfte  $A$  und  $B$  vorhanden sind, daß aber nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkommen darf. Man wählt daher den Angriffspunkt einer Unbekannten als Drehpunkt, z. B. den Angriffspunkt der Unbekannten  $B$ , und findet

$$+ A \cdot l - G_1 \cdot l_1 - G_2 \cdot l_2 = 0$$

$$A = \frac{G_1 \cdot l_1 + G_2 \cdot l_2}{l}.$$

Die zweite Unbekannte  $B$  findet man aus der ersten Gleichgewichtsbedingung: Summe aller Vertikalkräfte gleich Null, dann ist

$$+ A - G_1 - G_2 + B = 0,$$

$$B = G_1 + G_2 - A.$$

**Beispiel:** Die Gewichte der Scheiben seien  $G_1 = 2000$  kg und  $G_2 = 5000$  kg und die Abmessungen

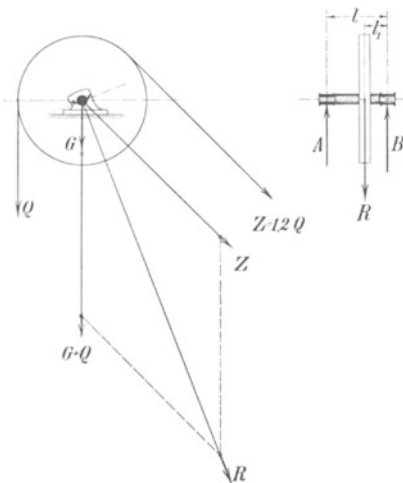
$$l = 300 \text{ cm}, \quad l_1 = 200 \text{ cm}, \quad l_2 = 100 \text{ cm}.$$

$$A = \frac{2000 \cdot 200 + 5000 \cdot 100}{300} = \frac{900000}{300} = 3000 \text{ kg}.$$

$$B = 2000 + 5000 - 3000 = 4000 \text{ kg}.$$

### b) Die Belastungskräfte wirken in verschiedenen Richtungen, haben aber denselben Angriffspunkt.

Eine in den Lagern  $A$  und  $B$  gestützte Achse (Abb. 107) sei im Abstände  $l_1$  vom Lager  $B$  durch eine Seilscheibe belastet. Das Gewicht der Seilscheibe sei gleich  $G$ . Am Seil hängt eine Belastung  $Q$ , die durch die Zugkraft  $Z = 1,20 \cdot Q$  hochgezogen werde.



Die Umfangskräfte  $Z$  und  $Q$  übertragen sich durch die Nabe der Seilscheibe auf die Achse, so daß der Achsenquerschnitt in der Nabe in senkrechter Richtung durch die Kräfte  $Q$  und  $G$ , in schräger Richtung durch die Kraft  $Z$  beansprucht wird.

Um die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  zu finden, ersetzt man diese drei Kräfte durch die Resultierende  $R$ . Man findet  $R$  der Größe und Richtung nach durch die bekannte Parallelogrammkonstruktion,  $Z$  ist die eine Seite,  $(Q + G)$  die andere

Abb. 107. Die Lagerdrücke bei Schrägbelastung.

Seite und  $R$  die Diagonale des aus den beiden Seiten konstruierten Parallelogramms.

Nun ist die Aufgabe einfach, eine in  $A$  und  $B$  gestützte Achse ist durch die Einzelkraft  $R$  belastet. Man stellt mit  $B$  als Drehpunkt die Momentengleichung auf:

$$+ A \cdot l - R \cdot l_1 = 0, \quad A = \frac{R \cdot l_1}{l}.$$

Nach der 1. Gleichgewichtsbedingung ist

$$A - R + B = 0, \quad B = R - A.$$

Da die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  schräge Richtung haben — sie haben die Richtung von  $R$  —, so wird man zweckmäßig den Lagerdeckel so stellen, daß die Schnittlinie der Lagerschalen senkrecht zu  $R$  steht, wie es in Abb. 107 angedeutet ist.

### c) Die Belastungskräfte wirken in verschiedenen Richtungen und haben verschiedene Angriffspunkte.

Verschiedene Richtungen haben z. B. die Kräfte, wenn außer den Gewichtsbelastungen noch Riemenspannungen auftreten. Die beiden

Schwungscheiben der Abb. 108 sind gleichzeitig Riemenscheiben, die Riemen laufen in horizontaler Richtung ab, der Riemen der kleinen Scheibe belastet die Welle mit der Horizontalkraft  $Z_1$ , der Riemen der großen Scheibe mit der Horizontalkraft  $Z_2$ .

Man macht zwei getrennte Berechnungen

1. für die Kräfte in der Vertikalebene,
2. für die Kräfte in der Horizontalebene.

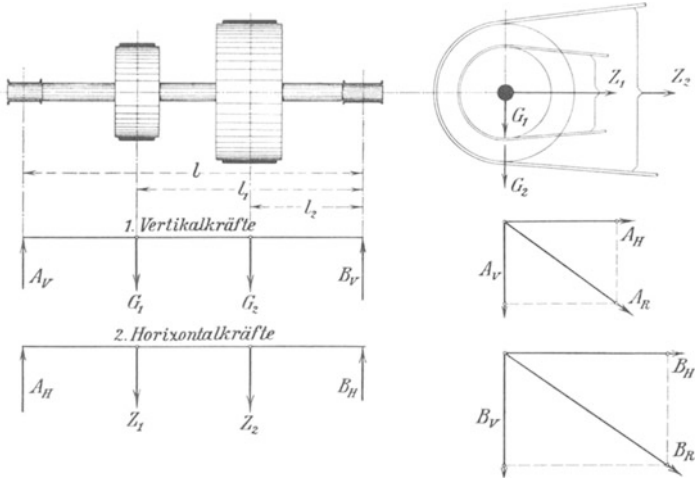


Abb. 108. Die Lagerdrücke bei Vertikal- und Horizontalbelastung.

### 1. Die Kräfte in der Vertikalebene.

In der Vertikalebene erzeugen die Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  die vertikalen Lagerdrücke  $A_v$  und  $B_v$ . Die Momentengleichung mit dem Drehpunkt im rechten Auflager lautet:

$$+ A_v \cdot l - G_1 \cdot l_1 - G_2 \cdot l_2 = 0, \quad A_v = \frac{G_1 \cdot l_1 + G_2 \cdot l_2}{l};$$

ferner ist

$$B_v = G_1 + G_2 - A_v.$$

### 2. Die Kräfte in der Horizontalebene.

In der Horizontalebene erzeugen die Zugkräfte  $Z_1$  und  $Z_2$  die horizontalen Lagerdrücke  $A_H$  und  $B_H$ . Aus der Momentengleichung

$$+ A_H \cdot l - Z_1 \cdot l_1 - Z_2 \cdot l_2 = 0$$

folgt

$$A_H = \frac{Z_1 \cdot l_1 + Z_2 \cdot l_2}{l}.$$

Ferner ist wieder  $B_H = Z_1 + Z_2 - A_H$ .

Die Komponenten  $A_v$  und  $A_H$  lassen sich durch Parallelogrammkonstruktion zur Resultierenden  $A_R$ , die Komponenten  $B_v$  und  $B_H$  zur Resultierenden  $B_R$  zusammensetzen. Diese resultierenden Lagerdrücke belasten die Lager in schräger Richtung.

### d) Zahnräderwellen.

In Abb. 109 ist eine Zwischenwelle dargestellt, sie trägt zwei Zahnräder, das Rad 2, welches durch ein Ritzel 1 in Linksdrehung versetzt wird, und das Rad 3, welches die Bewegung nach dem Rad 4 weiterleitet.

Es entstehen die vertikal nach unten gerichteten Zahndrücke  $Z_1$  und  $Z_2$ , sie erzeugen zusammen mit den Zahnradgewichten  $G_1$  und  $G_2$  die Lagerdrücke  $A$  und  $B$ .

Der Zahndruck  $Z_1$  wird durch die vom Ritzel übertragene Leistung gegeben sein. Der Zahndruck  $Z_2$  berechnet sich aus  $Z_1$ .

$$+ Z_2 \cdot r_2 - Z_1 \cdot r_1 = 0,$$

$$Z_2 = \frac{Z_1 \cdot r_1}{r_2}.$$

Ist z. B.  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{1}$ , so ist  $Z_2 = 3 \cdot Z_1$ , d. h. der Zahndruck ist auf den dreifachen Betrag angewachsen, so daß das Rad 3 mit stärkeren Zähnen versehen werden muß als das Rad 2.

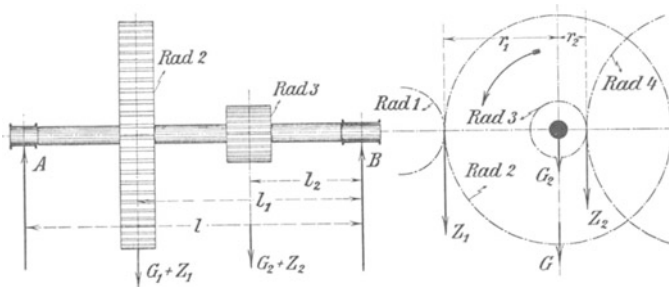


Abb. 109. Die Lagerdrücke bei Zahnradwellen

Sind die Zahndrücke und Gewichte bekannt, so berechnen sich die Lagerdrücke in bekannter Weise.

Mit dem Drehpunkt in der Lagermitte  $B$  lautet die Momentengleichung

$$+ A \cdot l - (G_1 + Z_1) \cdot l_1 - (G_2 + Z_2) \cdot l_2 = 0,$$

$$A = \frac{(G_1 + Z_1) \cdot l_1 + (G_2 + Z_2) \cdot l_2}{l}.$$

Damit wird

$$B = (G_1 + Z_1) + (G_2 + Z_2) - A.$$

### e) Kurbelwellen.

Bei Maschinenwellen mit Kröpfung oder mit Kurbelarm werden bei einer bestimmten Kurbelstellung Riemenzug und Kolbenkraft in derselben Richtung ziehen, so daß dann die Lagerdrücke ein Maximum werden. Beim Riemenantrieb wird die Umfangskraft  $P$  an der Riemenscheibe eine Wellenbelastung von der Größe  $3P$  hervorrufen, da der Riemen fest gespannt werden muß, um das Gleiten des Riemens zu verhindern.

In Abb. 110a soll durch eine Riemenscheibe ein stehender Kompressor von der Wellenkröpfung aus angetrieben werden. Der Antriebsmotor stehe vertikal unter der Riemenscheibe und treibe mittels Spannrolle die Riemenscheibe an.

Der Riemen belastet daher die Welle in vertikaler Richtung mit der Kraft  $3P$ , in derselben Richtung wirkt das Gewicht  $G$  der Scheibe. Am Zapfen der Wellenkröpfung greift der Kolbenwiderstand  $K$  ebenfalls vertikal nach unten ziehend an.

Zur Berechnung der Lagerdrücke wird die Momentengleichung aufgestellt; für das Auflager  $B$  als Drehpunkt lautet sie:

$$-(3P + G) \cdot (a + l) + A \cdot l - K \cdot \frac{1}{2}l = 0,$$

$$A = \frac{(3P + G) \cdot (a + l) + K \cdot \frac{1}{2}l}{l}.$$

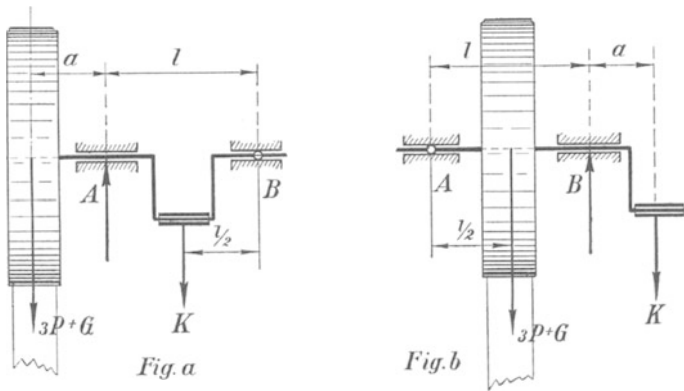


Abb. 110. a) gekröpfte Welle, b) Stirnkurbelwelle.

Der Auflagerdruck  $B$  errechnet sich nach der Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma(V) = 0,$$

$$B = (3P + G) + K - A.$$

In Abb. 110b wird der Kolben eines stehenden Kompressors durch eine Stirnkurbel angetrieben, die Antriebsriemenscheibe sitzt in der Mitte zwischen den Wellenlagern. Man wählt das Auflager  $A$  als Drehpunkt, dann lautet die Momentengleichung

$$+ K(a + l) - B \cdot l + (3P + G) \cdot \frac{1}{2}l = 0,$$

$$B = \frac{K(a + l) + (3P + G) \frac{1}{2}l}{l}.$$

Wenn  $B$  nach dieser Gleichung berechnet ist, wird

$$A = (3P + G) + K - B.$$

## 29. Bewegliche Hebel.

Der Hebel findet vielseitige Verwendung, z. B. als Werkzeug in Form von Zangen und Scheren, im Haushalt als Nußknacker und Dosenöffner, im Transportwesen als Hebebaum. Im allgemeinen versteht

man unter einem Hebel einen Stab, der an einem seiner Endpunkte oder auch zwischen den Endpunkten drehbar gelagert ist. Im ersten Fall nennt man den Hebel einarmig, im zweiten Fall zweiarstig. Man verwendet den Hebel, um eine Kraftübersetzung zu erzielen, so z. B. in Abb. 111. Ein Arbeiter setzt durch Druck auf einen Hebebaum einen schweren Eisenbahnwagen in Bewegung. Der Hebebaum ist als zweiarstiger Hebel in  $D$  drehbar. Der Arbeiter drückt mit der Kraft  $G$  auf den Hebebaum und erzeugt am Eisenbahnrad die Umfangskraft  $P$ . Mit  $D$  als Drehpunkt lautet die Momentengleichung:

$$+ G \cdot a - P \cdot b = 0$$

oder 
$$P = G \cdot \frac{a}{b}.$$

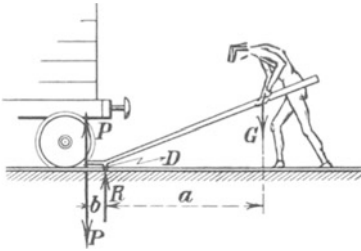


Abb. 111. Der Hebebaum.

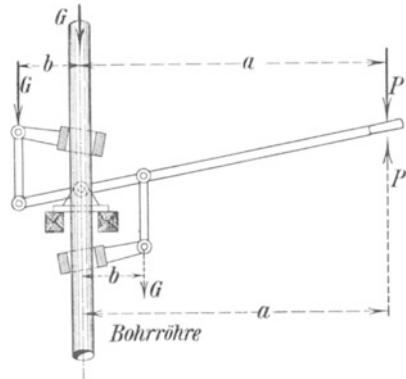


Abb. 112. Das Ausheben von Bohrröhren.

Die Gegenkraft von  $P$  drückt vertikal nach oben gegen das Rad. Der Drehpunkt  $D$  hat den Druck

$$R = P + G$$

aufzunehmen.

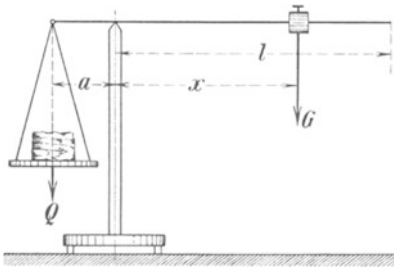


Abb. 113. Die Schnellwaage.

hebt die linksseitige Klemme das Rohr, während die rechtsseitige Klemme sich löst. Es ist

$$+ P \cdot a - G \cdot b = 0 \quad \text{oder} \quad P = G \cdot \frac{b}{a}.$$

Beim Hochziehen des Handhebels hängt das Gewicht  $G$  an der rechtsseitigen Klemme, und es ist

$$- P \cdot a + G \cdot b = 0, \quad P = \frac{G \cdot b}{a}.$$

Beim Ausheben von Bohrröhren leistet ein doppelwirkendes Hebelwerk (Abb. 112) gute Dienste. Der Handhebel hat einen festen Drehpunkt, der hinter der Bohrröhre liegt. Das Gewicht  $G$  der Bohrröhre wird einmal auf die linke Seite, das andere Mal auf die rechte Seite übertragen. Das bewirken die beiden Klemmengesperre. Wird der Handhebel mit der Kraft  $P$  heruntergedrückt, so



Die Gleichgewichtsbedingung für die Schnellwaage (Abb. 113) mit der Schneidenstütze als Drehpunkt lautet

$$+ G \cdot x - Q \cdot a = 0, \quad Q = \frac{G \cdot x}{a}.$$

Es können also mit demselben Gewicht  $G$  größere Lasten  $Q$  gewogen werden, indem man den Hebelarm  $x$  durch Hinausschieben des Gewichtes  $G$  vergrößert.

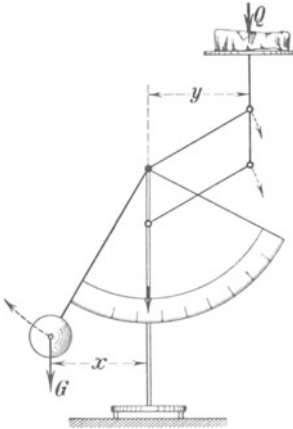


Abb. 114. Die Zeigerwaage.

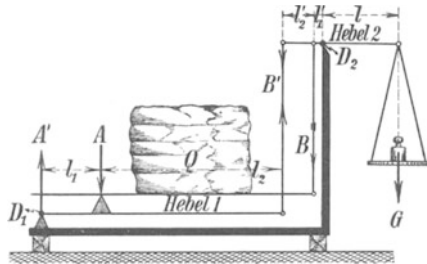


Abb. 115. Die Dezimalwaage.

Die Zeigerwaage (Abb. 114) hat zwei veränderliche Hebelarme, es ändert sich der Hebelarm  $x$  des konstanten Gewichtes  $G$  und der

Hebelarm  $y$  der Belastung  $Q$ . Aber das Anwachsen von  $x$  erfolgt schneller als das Anwachsen von  $y$ , so daß die Belastung  $Q$  vermehrt werden muß, wenn man das Gewicht zum Ausschlagen bringen will.

Man kann die Momentengleichung aufstellen

$$- G \cdot x + Q \cdot y = 0, \quad Q = \frac{G \cdot x}{y}.$$

Große Lasten können mit kleinen Gewichten auf der Brückenwaage (Abb. 115) gewogen werden. Die Last  $Q$  erzeugt in der Schneide den Druck  $A$  und in der Zugstange die Zugkraft  $B$ .

Der Schneidendruck  $A$  überträgt sich auf den Hebel 1, die Zugkraft  $B$  auf den Hebel 2, für beide Hebel müssen die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

a) Gleichgewichtsbedingung für Hebel 1.

Der Schneidendruck  $A$  erzeugt die Auflagerkräfte  $A'$  und  $B'$ . Mit  $D_1$  als Drehpunkt lautet die Momentengleichung

$$+ A \cdot l_1 - B' \cdot (l_1 + l_2) = 0,$$

$$B' = A \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

b) Gleichgewichtsbedingung für Hebel 2.

Mit  $D_2$  als Drehpunkt wird

$$+ G \cdot l - B' \cdot (l'_1 + l'_2) - B \cdot l'_1 = 0,$$

$$G \cdot l = B' \cdot (l'_1 + l'_2) + B \cdot l'_1.$$

Nun ist

$$B' = A \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

$$G \cdot l = A \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot (l'_1 + l'_2) + B \cdot l'_1,$$

$$G = A \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{l'_1 + l'_2}{l} + B \cdot \frac{l'_1}{l}.$$

Bei der Brückenwaage ist nun das Hebelverhältnis

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l'_1}{l'_1 + l'_2}$$

gemacht, also ist

$$\begin{aligned} G &= A \cdot \frac{l'_1}{l'_1 + l'_2} \cdot \frac{l'_1 + l'_2}{l} + B \cdot \frac{l'_1}{l} \\ &= A \cdot \frac{l'_1}{l} + B \cdot \frac{l'_1}{l} = (A + B) \cdot \frac{l'_1}{l}. \end{aligned}$$

Da nach der 1. Gleichgewichtsbedingung  $A + B = Q$  ist, so wird

$$G = Q \cdot \frac{l'_1}{l} \quad \text{oder} \quad G : Q = l'_1 : l.$$

Macht man  $l'_1 : l = 1 : 10$ , so hat man die Dezimalwaage, macht man  $l'_1 : l = 1 : 100$ , so hat man die Zentesimalwaage, d. h. man kann im ersten Fall mit 1 kg auf der Waagschale einer Brückenlast von 10 kg, im zweiten Fall einer Brückenlast von 100 kg das Gleichgewicht halten.

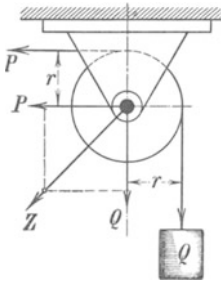


Abb. 116. Feste Rolle mit horizontaler Zugkraft.

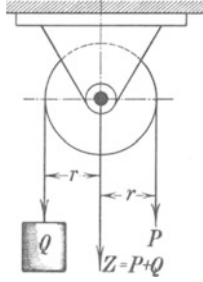


Abb. 117. Feste Rolle mit vertikaler Zugkraft.

verändern. In Abb. 116 wird die Last  $Q$  durch eine Horizontalkraft  $P$  hochgezogen, in Abb. 117 durch eine Kraft  $P$ , welche nach unten zieht.

Mit dem Zapfenmittelpunkt als Drehpunkt lautet in beiden Fällen die Gleichgewichtsbedingung

$$P \cdot r = Q \cdot r \quad \text{oder} \quad P = Q.$$

Der Zapfen der ersten Rolle erfährt einen schrägen Zapfendruck  $Z$ , der sich zeichnerisch als Diagonale des mit  $P$  und  $Q$  konstruierten Parallelogramms ergibt. Rechnerisch ist

$$Z = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Der Zapfen der zweiten Rolle erleidet einen größeren Zapfendruck, und zwar

$$Z = P + Q.$$

Bei der festen Rolle sind die Wege von Kraft und Last gleichgroß. In Abb. 118 ist eine lose Rolle dargestellt. Das linke Seilende ist an einem festen Punkt aufgehängt, am rechten Seilende greift die Kraft an, während die Last  $Q$  an der losen Rolle hängt. Die Kräfte in den beiden Seilenden seien  $P_1$  und  $P_2$ . Betrachtet man den horizontalen Rollendurchmesser als Hebel mit dem Drehpunkt  $D$ , so heißt die Momentengleichung

$$-P_2 \cdot 2r + Q \cdot r = 0 \quad \text{oder} \quad P_2 = \frac{Q \cdot r}{2r} = \frac{Q}{2}.$$

Die treibende Kraft ist also halb so groß wie die Last. Hebt sich die Rolle um den Weg  $s$ , so müssen beide Seilenden um das Maß  $s$  gekürzt werden, daher ist der Weg der treibenden Kraft  $2s$ , also doppelt so groß wie der Weg der Last.

Man benutzt die lose Rolle meistens in Verbindung mit einer festen Rolle, wie Abb. 119 zeigt, damit die Zugkraft  $P$  nach unten gerichtet werden kann.

Die lose Rolle kann auch versteckt vorkommen, das sollen Abb. 120 und 121 erläutern. Ein Mann steht in Abb. 120 auf einem Schlitten und zieht sich an einem Seil, das an einer festen Wand verankert ist, vorwärts.  $W$  ist der Widerstand des Schlittens. Der Mann muß daher mit der Kraft  $P = W$  an dem Seil ziehen. Durch seine Füße wird die Gegenkraft  $P$  auf den Schlitten übertragen, und der Schlitten geht vorwärts. Zieht er sich um den Seilweg  $s$  weiter, so muß auch der Schlitten um den gleichen Weg  $s$  weitergehen.

In Abb. 121 sitzt an der festen Wand eine Rolle, um welche sich ein Seil schlingt. Das eine Seilende ist am Schlitten befestigt, das andere Seilende hält der Mann, um sich vorwärts zu ziehen.

Der Widerstand des Schlittens verlangt, daß die Rolle von der Wand mit der Kraft  $W$  gehalten wird.  $P_1$  und  $P_2$  sind die Seilkräfte. Betrachtet man den vertikalen Rollendurchmesser als Hebel mit  $D$  als Drehpunkt, so ist

$$P_2 \cdot 2r - W \cdot r = 0, \quad P_2 = \frac{W \cdot r}{2r} = \frac{W}{2},$$

also ist auch  $P_1 = \frac{1}{2} W$ , denn es muß sein  $P_1 + P_2 = W$ . Der Mann hat also jetzt nur mit der Kraft  $P = \frac{1}{2} W$  an dem Seil zu ziehen, seine Füße übertragen als Gegenkraft die Kraft  $P_2 = \frac{1}{2} W$  auf den Schlitten,

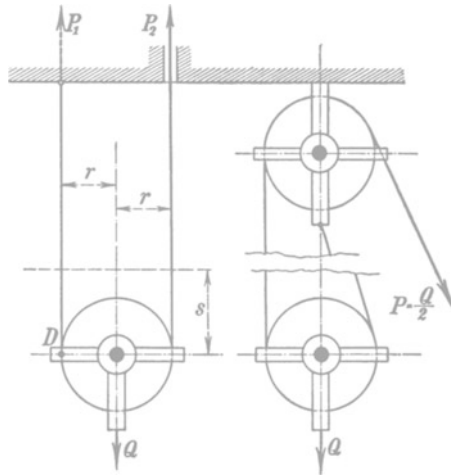


Abb. 118. Die lose Rolle.

Abb. 119. Lose Rolle in Verbindung mit einer festen Rolle.

während das andere Seilende, das am Schlitten befestigt ist, die Kraft  $P_1 = \frac{1}{2} W$  auf den Schlitten überträgt, so daß dieser mit der Gesamtkraft  $P_1 + P_2 = W$  vorwärts bewegt wird.

Wie groß sind nun die Wege? Zieht der Mann das Seil um das Stück  $s$  an, so kommt seine Hand vom Punkt  $a$  nach  $a_1$ , der Schlitten folgt um den gleichen Weg  $s$ , also kommt sein Fuß vom Punkt  $b$  nach  $b_1$ . Sollen Hand und Fuß aber wieder vertikal übereinander stehen, so muß er das Seil um den Weg  $2s$  verkürzen, d. h. einem Schlittenweg  $s$  entspricht nun ein Seilweg  $2s$ , also genau so wie bei der losen Rolle.

Bei der losen Rolle ist demnach auch die Umkehrung möglich, so daß

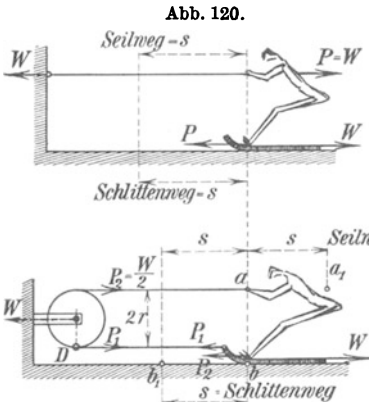


Abb. 120.

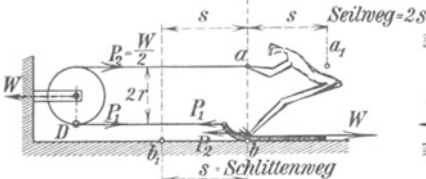


Abb. 121.

Abb. 120. Der Schlittenweg ohne lose Rolle.  
Abb. 121. Der Schlittenweg mit loser Rolle.

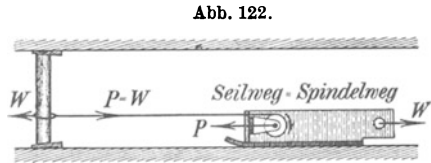


Abb. 122.

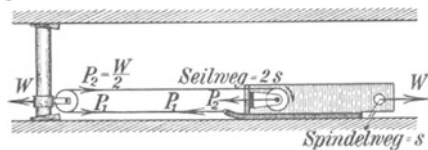


Abb. 123.

Abb. 122. Der Schrämmaschinenvorschub ohne lose Rolle.  
Abb. 123. Der Schrämmaschinenvorschub mit loser Rolle.

die obere Seilablaufrolle der Abb. 119 beweglich und die untere Rolle fest wird.

Der Schlittenbewegung ähnlich ist die Vorschubbewegung der Kohlschrämmaschinen. Die Schrämmaschine (Abb. 122 und 123) erzeugt den Widerstand  $W$ . Der Mann auf dem Schlitten wird durch eine Windetrommel ersetzt. Schlägt man das Seilende an einen Stempel, so hat das Seil die Zugkraft  $P = W$  aufzunehmen. Die Gegenkraft  $P$  als Lagerdruck an der Trommelwelle schiebt die Maschine vorwärts. In diesem Fall ist Seilweg  $s =$  Maschinenweg  $s$ .

Man kann aber auch an dem Stempel eine Rolle (Abb. 123) befestigen, dann ist die Zugkraft im Seil nur  $P = \frac{1}{2} W$ .

Als Gegenkraft von  $P_2$  drückt der Lagerdruck die Maschine mit der Kraft  $P_2 = \frac{1}{2} W$  vorwärts, während das am Schlitten angeschlagene Seilende ebenfalls mit der Kraft  $P_1 = \frac{1}{2} W$  die Maschine vorwärts zieht.

Trommellager und Seil werden nun nur noch mit der Kraft  $\frac{1}{2} W$  belastet, so daß die Konstruktionsteile leichter gehalten werden können. Allerdings ist dafür auch der Seilweg  $= 2s$ , wenn die Maschine sich um den Weg  $s$  weiterzieht, d. h. die Trommelgeschwindigkeit muß doppelt so groß sein wie die Fahrgeschwindigkeit und die Seillänge wird doppelt so groß wie der Fahrweg.

In Abb. 124 erkennen wir sofort, daß die Bewegungen der Rollen-anordnung in Abb. 119 sich umkehren lassen. Die eigentliche lose Rolle bleibt stehen, während die Seilablaufrolle beweglich wird.

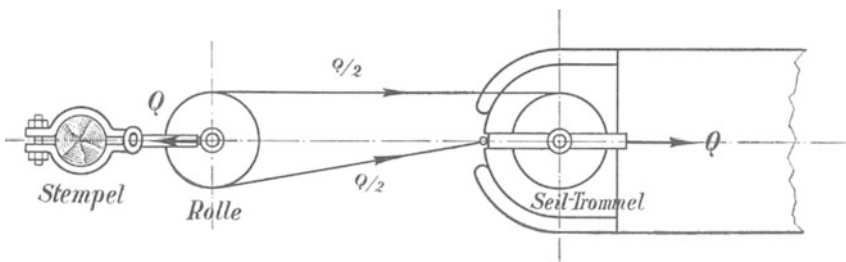


Abb. 124. Umkehrung der losen Rolle an der Schrämmaschine.

### Der Differentialflaschenzug.

Diese Rollenverbindung besitzt bei gedränkter Anordnung und geringem Eigengewicht ein großes Übersetzungsverhältnis von Kraft zu Last.

Eine Kette ohne Ende (Abb. 125) läuft über drei Kettenrollen, von denen die beiden oberen aus einem Stück bestehen. Die untere Rolle ist eine lose Rolle, daher verteilt sich die Last  $Q$  gleichmäßig auf die beiden Kettenzweige. Mit dem Wellenmittelpunkt der oberen Rollen als Drehpunkt lautet die Momentengleichung

$$-P \cdot R - \frac{Q}{2} \cdot r + \frac{Q}{2} \cdot R = 0, \quad P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R-r}{R}.$$

Die Kraft  $P$  wird um so kleiner

1. je kleiner die Radiendifferenz  $(R-r)$  ist,
2. je größer  $R$  ist.

Dem Verhältnis der Radien proportional kann das Verhältnis der Zähnezahle  $Z$  und  $z$  der beiden Kettenräder gesetzt werden, also lautet die Gleichung auch

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{Z-z}{Z}.$$

Gewöhnlich macht man  $Z-z=1$ , dann wird

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{Z}.$$

**Beispiel:** Die Kettenräder eines Differentialflaschenzuges haben die Zähnezahle  $Z=20$  und  $z=19$ ; wie groß wird die Zugkraft  $P$ , um die Last  $Q$  zu heben?

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{Q}{40}.$$

Bei schweren Flaschenzügen wählt man größere Zähnezahle und geht mit der Differenz auf 2 bis 3 herauf.

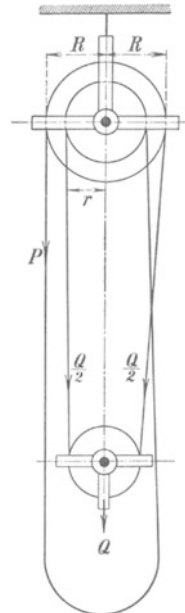


Abb. 125. Der Differentialflaschenzug.

### 30. Das Übersetzungsverhältnis.

Bei der losen Rolle und bei dem Differentialflaschenzug ist die treibende Kraft  $P$  kleiner als die gehobene Last  $Q$ , es war z. B. bei der losen Rolle  $P : Q = 1 : 2$  und beim Differentialflaschenzug  $P : Q = 1 : 40$ . Dieses Verhältnis nennt man das Übersetzungsverhältnis.

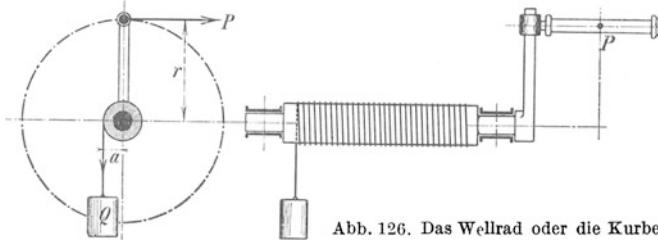


Abb. 126. Das Wellrad oder die Kurbelwelle.

Beim Wellrad (Abb. 126) wirken Kraft und Last an derselben Welle. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$+ P \cdot r - Q \cdot a = 0, \quad P \cdot r = Q \cdot a,$$

d. h. das Drehmoment der Kraft muß gleich dem Drehmoment der Last sein, und es ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad P = Q \cdot \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad \frac{P \cdot r}{Q \cdot a} = 1.$$

Ein solches Übersetzungsverhältnis nennt man ein einfaches Übersetzungsverhältnis.

Beim Heben großer Lasten genügt ein einfaches Übersetzungsverhältnis, welches durch verschiedene Hebellängen erreicht wird, nicht mehr. Man muß Zwischengetriebe einschalten, d. h. man trennt die Kraft-

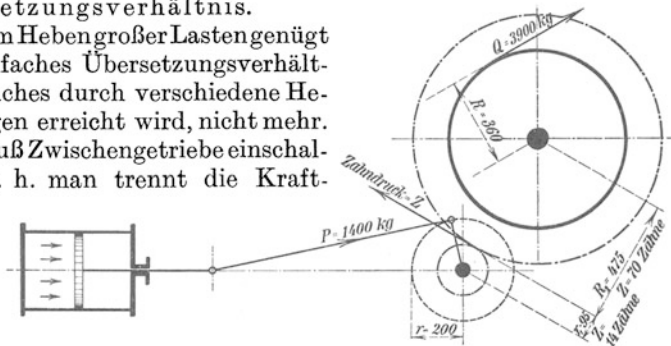


Abb. 127. Das Förderhaspeltriebwerk bei der gewöhnlichen Zylindermaschine.

welle von der Lastwelle. Alsdann wird das Drehmoment der Last immer größer sein als das Drehmoment der Kraft. Ist z. B.

$$\frac{P \cdot r}{Q \cdot a} = \frac{1}{5},$$

so muß das Zwischengetriebe diese Übersetzung 1:5 haben, d. h. man muß ein Zahnradpaar vom Verhältnis

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{1}{5}$$

zwischenalten. Das gesamte Übersetzungsverhältnis wird dann

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{r} \cdot \frac{r_1}{R_1}.$$

Man nennt dieses Übersetzungsverhältnis ein doppeltes Übersetzungsverhältnis, es wird durch ein Hebelverhältnis und ein Räderverhältnis gebildet.

Bei einem Förderhaspel (Abb. 127) soll z. B. mit einer Trommel vom Radius  $R = 360$  mm eine Last  $Q = 3900$  kg gehoben werden. Zum Antrieb stehe an der Maschinenkurbel  $r = 200$  mm eine Kraft  $P = 1400$  kg zur Verfügung.

$$\frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Lastmoment}} = \frac{P \cdot r}{Q \cdot R} = \frac{1400 \cdot 20}{3900 \cdot 36} = \frac{1}{5} = \frac{r_1}{R_1}.$$

Es muß also ein einfaches Rädergetriebe mit der Übersetzung 1:5 eingeschaltet werden, man setzt auf die Kurbelwelle das kleine Zahnrad ( $r_1 = 95$  mm), auf die Trommelwelle das große Zahnrad ( $R_1 = 5 \cdot 95 = 475$  mm).

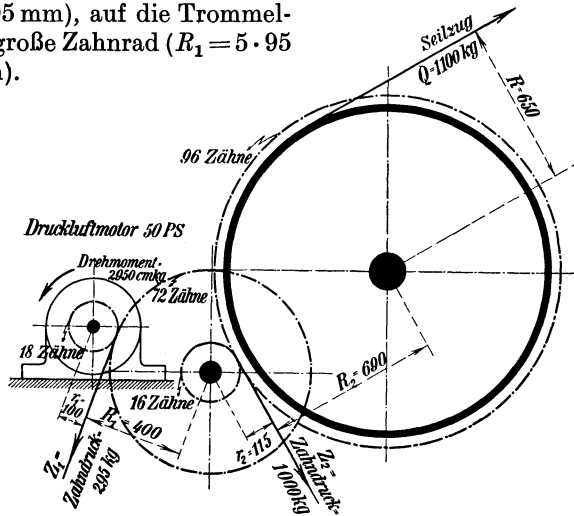


Abb. 128. Das Förderhaspeltriebwerk bei schnelllaufendem Drehkolbenmotor.

Das gesamte Übersetzungsverhältnis ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{r} \cdot \frac{r_1}{R_1} = \frac{36}{20} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2,78}.$$

Der Zahndruck  $Z$  errechnet sich aus der Momentengleichung

$$+ P \cdot r - Z \cdot r_1 = 0,$$

$$Z = \frac{P \cdot r}{r_1} = \frac{1400 \cdot 20}{9,5} = 2950 \text{ kg}.$$

Neuere Förderhaspel arbeiten mit umsteuerbaren Druckluftmotoren von hoher Drehzahl. Einen solchen Haspel zeigt Abb. 128. Der Drehkolbenmotor habe ein Drehmoment

$$P \cdot r = 2950 \text{ cmkg} = \text{Kraftmoment}.$$

Am Trommelradius  $R = 65$  cm soll eine Last  $Q = 1100$  kg gehoben werden, dann ist

$$Q \cdot R = 1100 \cdot 65 = 71500 \text{ cmkg} = \text{Lastmoment}.$$

$$\frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Lastmoment}} = \frac{2950}{71500} = \frac{1}{24}.$$

Das Übersetzungsverhältnis ist groß, wollte man durch ein einziges Zahnradpaar diese Übersetzung schaffen, so müßte

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{1}{24}$$

sein. Bei einem Durchmesser des kleinen Rades von  $r_1 = 100$  mm würde dann das große Rad den Radius

$$R_1 = 24 \cdot r_1 = 24 \cdot 100 = 2400 \text{ mm}$$

erhalten. Solche großen Räder lassen sich aber nicht unterbringen, man muß daher das Übersetzungsverhältnis teilen und zwei Räderpaare nehmen. Man wählt z. B.

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2}$$

Auf der Antriebswelle sitzt das Rad mit  $r_1 = 100$  mm und 18 Zähnen, auf der Zwischenwelle das Rad mit  $R_1 = 4 \cdot 100 = 400$  mm und  $4 \cdot 18 = 72$  Zähnen.

Da die Antriebswelle das Drehmoment  $M = 2950$  cmkg vom Druckluftmotor erhält, so wird der Zahndruck

$$Z_1 = \frac{M}{r_1} = \frac{2950}{10} = 295 \text{ kg.}$$

Die Zwischenwelle überträgt mit dem Rad  $r_2 = 115$  mm und 16 Zähnen die Bewegung auf das Scheibenrad mit  $R_2 = 6 \cdot 115 = 690$  mm, welches  $6 \cdot 16 = 96$  Zähne hat.

Die Momentengleichung für die Zwischenwelle lautet

$$-Z_1 \cdot R_1 + Z_2 \cdot r_2 = 0,$$

$$\text{Zahndruck } Z_2 = \frac{Z_1 \cdot R_1}{r_2} = \frac{295 \cdot 400}{115} = 1000 \text{ kg.}$$

Das zweite Zahnradpaar hat also den dreifachen Zahndruck vom ersten Räderpaar aufzunehmen, es wird daher die größere Zahnstärke haben.

Bei Wagenwinden mit Zahnstangengetriebe (Abb. 129) wird die Last durch eine Zahnstange auf ein Zahnrad gesetzt.

An der Handkurbel vom Hebelarm  $l = 40$  cm wirke eine Kraft  $P = 30$  kg, dann ist das Kraftmoment

$$P \cdot l = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ cmkg.}$$

Die Zahnstange soll eine Last  $Q = 3000$  kg haben, diese setzt sich auf den Zahn eines kleinen Zahnrades vom Radius  $r = 4$  cm. Das Lastmoment ist daher

$$Q \cdot r = 3000 \cdot 4 = 12000 \text{ cmkg.}$$

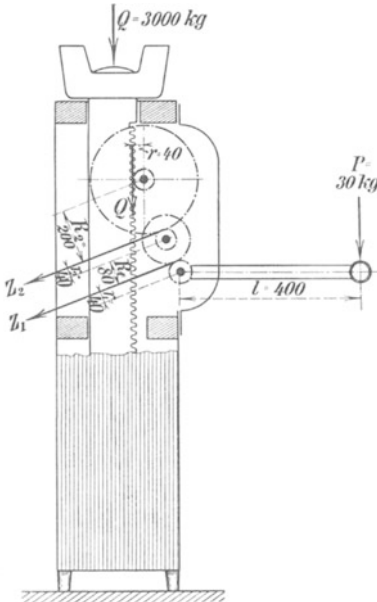


Abb. 129. Die Zahnstangenwinde.



Das Übersetzungsverhältnis muß also sein

$$\frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Lastmoment}} = \frac{P \cdot l}{Q \cdot r} = \frac{1200}{12000} = \frac{1}{10}.$$

Das Übersetzungsverhältnis wird, um kleine Räder zu erhalten, geteilt. Man wählt

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}.$$

Auf der Handkurbelwelle sitzt das kleine Rad  $r_1 = 40$  mm, auf der Zwischenwelle das große Rad  $R_1 = 2 \cdot 40 = 80$  mm.

Der Zahndruck an diesem Räderpaar berechnet sich aus der Momentengleichung

$$+ P \cdot l - Z_1 \cdot r_1 = 0,$$

$$Z_1 = \frac{P \cdot l}{r_1} = \frac{30 \cdot 40}{4} = 300 \text{ kg}.$$

Auf der Zwischenwelle überträgt das kleine Zahnrad  $r_2 = 40$  mm den Zahndruck  $Z_2$  auf die Zahnstangenwelle, bzw. auf das große Zahnrad  $R_2 = 5 \cdot 40 = 200$  mm.

Der Zahndruck  $Z_2$  berechnet sich mit dem Mittelpunkt der Zwischenwelle als Drehpunkt aus der Momentengleichung

$$+ Z_1 \cdot R_1 - Z_2 \cdot r_2 = 0,$$

$$Z_2 = \frac{Z_1 \cdot R_1}{r_2} = \frac{300 \cdot 8}{4} = 600 \text{ kg}.$$

Es ist also

$$Z_2 = 2 \cdot Z_1 = 2 \cdot 300 = 600 \text{ kg}$$

und

$$Q = \frac{200}{40} \cdot Z_2 = 5 \cdot Z_2 = 5 \cdot 600 = 3000 \text{ kg}.$$

### 31. Die schiefe Ebene.

Um Lasten zu heben oder zu senken, wendet man in vielen Fällen schiefe Ebenen an, so sind z. B. die Anfahrten zu den Eisenbahnrampen schiefe Ebenen, auf denen die Fuhrwerke herauffahren, um dann horizontal verladen zu werden. Bekannt ist die Schrotleiter, auf denen der Frachtfuhrmann die schweren Lasten heruntergleiten läßt. Die Anwendung der schiefen Ebene erfolgt also sicher mit dem Zweck, schwere Lasten durch kleine Kräfte zu heben oder zu senken, so daß in der schiefen Ebene eine Kraftübersetzung zu suchen ist.

Auf der schiefen Ebene (Abb. 130) liege eine Last  $G$ , welche vertikal nach unten drückt. Es sei

$\alpha$  = Neigungswinkel der schiefen Ebene,

$l$  = Länge der schiefen Ebene,

$b$  = Basis „ „ „

$h$  = Höhe „ „ „

Bei reibungsloser Lagerung wird die Last abrutschen. Zerlegt man die Last  $G$  in zwei Komponenten, und zwar

1. in die Komponente  $P$  parallel zur schiefen Ebene,
  2. in die Komponente  $N$  normal zur schiefen Ebene,
- so wird die Kraft  $P$  das Abrutschen bewirken, während die Kraft  $N$  die Bahn der schiefen Ebene belastet.

Das schraffierte Kräftedreieck ist dem Dreieck, das durch die schiefe Ebene gebildet wird, ähnlich. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgert man

$$\frac{P}{G} = \frac{h}{l} \quad \text{oder} \quad P = G \cdot \frac{h}{l},$$

ferner

$$\frac{N}{G} = \frac{b}{l} \quad \text{oder} \quad N = G \cdot \frac{b}{l}.$$

Nach der Trigonometrie ist in dem rechtwinkligen Kräftedreieck

$$\frac{P}{G} = \sin \alpha \quad \text{oder} \quad P = G \cdot \sin \alpha,$$

ferner

$$\frac{N}{G} = \cos \alpha \quad \text{oder} \quad N = G \cdot \cos \alpha.$$

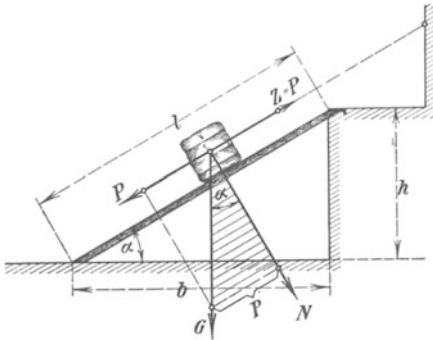


Abb. 130. Die schiefe Ebene, Zugkraft parallel zur schrägen Bahn.

Wollte man das Herabrutschen der Last  $G$  verhindern, so müßte man an dem Körper ein Seil anbringen und dieses an einer festen Wand anschlagen. Das Seil müßte in diesem Fall die Zugkraft

$$Z = P = G \cdot \sin \alpha$$

aushalten, eine Kraft, welche jedenfalls kleiner ist als  $G$ . Man sieht, in der schiefen Ebene liegt ein Übersetzungsverhältnis, man kann mit einer kleineren Kraft  $Z$  einer größeren Last  $G$  das Gleichgewicht halten.

In Abb. 131 wird die Last  $G$  durch ein Seil gehalten, das nicht parallel zur Bahnlänge  $l$  sondern

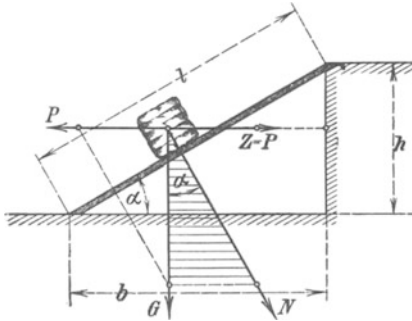


Abb. 131. Die schiefe Ebene, Zugkraft parallel zur Basis.

parallel zur Basis  $b$  gespannt ist. Wie groß werden nun die Kräfte  $P$  und  $N$ ?

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgert man wieder

$$\frac{P}{G} = \frac{h}{b} \quad \text{oder} \quad P = G \cdot \frac{h}{b},$$

ferner

$$\frac{N}{G} = \frac{l}{b} \quad \text{oder} \quad N = G \cdot \frac{l}{b}.$$

Trigonometrisch ist im rechtwinkligen Kräftedreieck

$$\frac{P}{G} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad P = G \operatorname{tg} \alpha,$$

ferner

$$\frac{G}{N} = \cos \alpha \quad \text{oder} \quad N = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Die schiefe Ebene habe z. B. die Längenwerte  $l = 87$  m,  $b = 75$  m und  $h = 45$  m, dann ist

im 1. Fall:

$$P = G \cdot \frac{45}{87} = 0,52 \cdot G,$$

$$N = G \cdot \frac{75}{87} = 0,86 \cdot G;$$

im 2. Fall:

$$P = G \cdot \frac{45}{75} = 0,60 \cdot G,$$

$$N = G \cdot \frac{87}{75} = 1,16 \cdot G.$$

Der 2. Fall liefert also ungünstigere Werte und wird daher weniger zum Heben von Lasten Anwendung finden.

Gleichgewichtssätze der schiefen Ebene:

1. Zieht die Kraft parallel zur Bahnlänge, so herrscht Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe zur Bahnlänge.

2. Zieht die Kraft parallel zur Basis, so herrscht Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe zur Basis.

Die Neigung der schiefen Ebene:

Wenn man an einer Bahnstrecke oder an einer Fahrstraße oder an einer Keilneigung die Bezeichnung

1:100

liest, so versteht man darunter immer das Verhältnis

$$\frac{h}{b} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Basis}}$$

und nicht das Verhältnis

$$\frac{h}{l} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Bahnlänge}}.$$

Trotzdem ist es in der Praxis vielfach Brauch, das letztere Verhältnis damit zu messen. Bei geringen Neigungen ist der Unterschied aber so gering, daß es gleichgültig ist, ob man die Basis oder die Bahnlänge mißt, z. B. ist

$$\frac{1}{80} = 0,0125, \quad \text{für } \sin \alpha = \frac{h}{l} = 0,0125 \text{ wird } \alpha = 0^\circ 43',$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b} = 0,0125 \text{ wird ebenfalls } \alpha = 0^\circ 43'.$$

**Aufgabe:** Eine Kettenbahn von 40 m Länge hat 5 m Höhenunterschied zu überwinden, sie zieht gleichzeitig 20 beladene Förderwagen von 1500 kg. Welche Zugkraft muß die Kette unter Vernachlässigung der sonstigen Widerstände aufbringen?

**Lösung:** Es ist  $G = 20 \cdot 1500 = 30000$  kg.

$$h = 5 \text{ m}, \quad l = 40 \text{ m}.$$

$$\text{Zugkraft } P = G \cdot \frac{h}{l} = 30000 \cdot \frac{5}{40} = 3750 \text{ kg}.$$

**Aufgabe:** Eine Grubenlokomotive fährt ein Zuggewicht von 35 t auf einer Bahn mit einer Steigung 1 : 70. Welche Lokomotivzugkraft ist allein zur Überwindung der Steigung aufzubringen ?

**Lösung:** Zugkraft  $P = G \cdot \frac{h}{l} = 35000 \cdot \frac{1}{70} = 500 \text{ kg.}$

**Aufgabe:** Auf einer 3 m langen Leiter, die sich auf eine 1,5 m hohe Rampe stützt, liegt eine 300 kg schwere Kiste. Wie groß ist der Normaldruck gegen die Leiter ?

**Lösung:** Der Druck senkrecht zur Leiter ist

$$N = G \cdot \frac{b}{l} = G \cdot \cos \alpha,$$

$$b = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,6 \text{ m,}$$

$$N = 300 \cdot \frac{2,6}{3} = 260 \text{ kg.}$$

## 32. Die Reibungswiderstände.

Widerstände sind Kräfte, welche eine Bewegung hemmen. Erfahrungsgemäß kommt ein Körper, durch eine Kraft angestoßen, nach einiger Zeit wieder zur Ruhe. Will man die Bewegung aber aufrechterhalten, so muß man ständig eine Kraft aufwenden, die gerade so groß sein muß wie der Widerstand, der die Bewegung hemmt. Man nennt diese Widerstände Reibungswiderstände.

### a) Die gleitende Reibung.

Schiebt man ein Buch auf einer Tischplatte vorwärts oder dreht man einen Zapfen in einem Lager, so gleiten die Berührungsflächen aufeinander, man spricht von einer Gleitbewegung. Die Widerstände solcher Gleitbewegungen lassen sich durch Versuche feststellen.

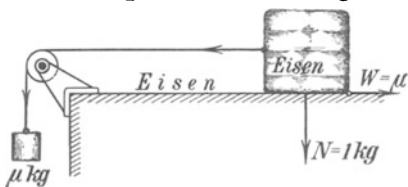


Abb. 132. Der Körper gleitet auf horizontaler Bahn.

Man kann z. B. einen Eisenkörper auf einer horizontalen Eisenplatte durch ein Zugseil, das über eine Rolle geführt (Abb. 132) und durch Gewichte gezogen wird, in Bewegung

setzen. Das Gewicht, welches die Bewegung gerade einleitet, zeigt uns dann den Reibungswiderstand an.

Der Körper übt einen Normaldruck  $N$  auf die Berührungsfläche aus, dieser ist bei horizontaler Berührungsbahn gleich dem Gewicht  $G$  des Körpers.

Die Erfahrung lehrt folgendes:

Macht man	$N = 1 \text{ kg,}$	so ist der Reibungswiderstand	$W = \mu \text{ kg}$
„ „	$N = 2 \text{ kg,}$	„ „ „	$W = 2 \cdot \mu \text{ kg}$
„ „	$N = 3 \text{ kg,}$	„ „ „	$W = 3 \cdot \mu \text{ kg,}$

d. h. der Reibungswiderstand wächst proportional mit dem Normaldruck, oder es ist allgemein

$$W = \mu \cdot N.$$

Den Wert  $\mu$  nennt man die Reibungsziffer, d. i. eine Zahl, welche den Reibungswiderstand bei 1 kg Normaldruck angibt.

Die Werte von  $\mu$  werden sehr verschieden sein, sie sind groß bei rauhen und ungeschmierten Flächen, sie sind klein bei glatten und geschmierten Flächen, d. h. die  $\mu$ -Werte kennzeichnen die Beschaffenheit der Berührungsflächen. Diese  $\mu$ -Werte sind in physikalischen Instituten genau bestimmt worden und uns in Tabellenform bekannt.

Zur Bestimmung der Reibungsziffer kann man auch eine verstellbare schiefe Ebene (Abb. 133) benutzen, deren Gleitfläche ausgewechselt werden kann. Liegt ein Körper vom Gewicht  $G$  auf der schiefen Ebene, so beginnt bei einem bestimmten Neigungswinkel  $\varphi$  die Gleitbewegung. Im Augenblick des Gleitbeginns heißt die Gleichgewichtsbedingung

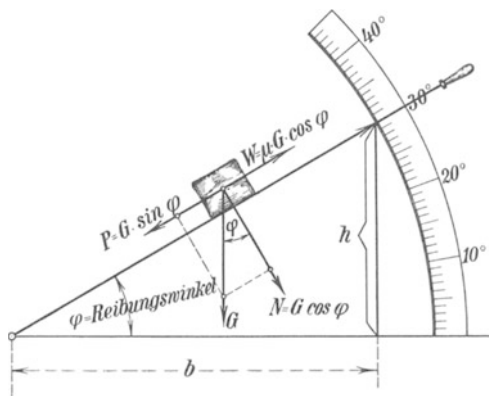


Abb. 133. Bestimmung der Reibungsziffer durch eine schiefe Ebene.

$$P = W = \mu \cdot N,$$

$$G \cdot \sin \varphi = \mu \cdot G \cdot \cos \varphi,$$

$$\sin \varphi = \mu \cdot \cos \varphi,$$

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{b}.$$

Man nennt den so gefundenen Neigungswinkel  $\varphi$  den Reibungswinkel, und es ist immer

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi.$$

Den nachfolgenden Winkelgrößen  $\varphi$  entsprechen die angegebenen Reibungsziffern  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \varphi = 5^{\circ} 50' \dots \mu &= \operatorname{tg} 5^{\circ} 50' = 0,10 \\ &= 8^{\circ} 40' \quad = \operatorname{tg} 8^{\circ} 40' = 0,15 \\ &= 11^{\circ} 20' \quad = \operatorname{tg} 11^{\circ} 20' = 0,20 \\ &= 14^{\circ} 30' \quad = \operatorname{tg} 14^{\circ} 30' = 0,25 \\ &= 17^{\circ} 30' \quad = \operatorname{tg} 17^{\circ} 30' = 0,30 \\ &= 20^{\circ} 30' \quad = \operatorname{tg} 20^{\circ} 30' = 0,35 \\ &= 23^{\circ} 30' \quad = \operatorname{tg} 23^{\circ} 30' = 0,40 \\ &= 26^{\circ} 50' \quad = \operatorname{tg} 26^{\circ} 50' = 0,45 \\ &= 30^{\circ} \quad = \operatorname{tg} 30^{\circ} = 0,50 \end{aligned}$$

## Reibungsvorstellung.

Wir gewinnen über die Wirkung der Reibung folgende Vorstellung: Ein Körper soll auf einer horizontalen Ebene (Abb. 134) verschoben werden. Er drückt mit der Normalkraft  $N=G$  gegen seine Stützfläche, umgekehrt drückt die Stützfläche in entgegengesetzter Richtung mit der Kraft  $G$  gegen den Körper. Der Reibungswiderstand  $W$  ist eine zweite Kraft, welche den Körper an der Stützfläche zurückhalten will, d. h. sie wirkt entgegengesetzt der Bewegungsrichtung.

Aus den Seitenkräften  $G$  und  $W$  läßt sich die resultierende Kraft  $R$  als Diagonale des Kräfteparallelogramms konstruieren. Sie zieht schräg

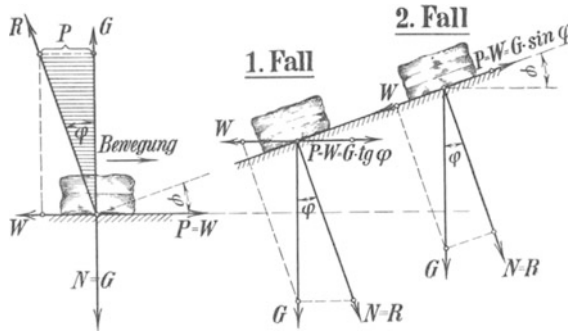


Abb. 134. Deutung des Reibungswiderstandes durch eine schiefe Ebene.

nach oben und bildet mit der Krafttrichtung  $G$  den Winkel  $\varphi$ . Zur Bewegung ist die Kraft

$$P = W$$

erforderlich. Im Kräftedreieck ist aber

$$P = G \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Das ist dieselbe Kraft, die erforderlich ist, um ein Gewicht  $G$  auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel  $\varphi$  reibungslos hochzuziehen, und zwar mit einer Kraft  $P$ , welche horizontal zieht.

In Abb. 134 ist dieser Bewegungsvorgang als 1. Fall bezeichnet. Wir lesen im Kräftedreieck ab

$$P = W = G \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir gewinnen daher von der Wirkung der Reibung folgende Vorstellung:

Um einen Körper horizontal mit Reibung zu bewegen, ist eine Kraft erforderlich, welche gerade so groß ist wie die Kraft, welche den Körper reibungslos auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel  $\alpha = \varphi$  horizontal hochziehen würde.

Günstiger würde der 2. Fall (Abb. 134) sein. Läßt man die Kraft  $P$  unter dem Winkel  $\varphi$  zur Horizontalebene ziehen, also parallel zur schiefen Ebene, so würde sein

$$P = W = G \cdot \sin \varphi.$$

Diese Kraft  $P$  würde kleiner sein, denn der  $\sin \varphi$  ist immer kleiner als  $\operatorname{tg} \varphi$ .

Um mit dem kleinsten Kraftaufwand einen Körper horizontal zu verschieben, sollte man daher die Kraft nicht horizontal sondern unter dem Reibungswinkel  $\varphi$  nach oben gerichtet ziehen lassen.

**Der Reibungswiderstand auf der schiefen Ebene.**

Der Reibungswiderstand auf der schiefen Ebene läßt sich in derselben Weise wie bei der Bewegung auf horizontaler Bahn berücksichtigen, denn die horizontale Bahn ist der Grenzfall der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 0^\circ$ .

Hat die schiefe Ebene den Neigungswinkel  $\alpha$  (Abb. 135), so wird bei reibungsloser Bewegung die Kraft

$$Z_0 = P_0 = G \cdot \sin \alpha$$

das Gewicht  $G$  hochziehen. Bei Reibungsbewegung wird die Kraft größer, denn die Reibung bedeutet eine Vergrößerung des Neigungswinkels  $\alpha$  um den Reibungswinkel  $\varphi$ , d. h. es ist eine Kraft erforderlich, welche gerade ausreicht, um das Gewicht  $G$  reibungslos auf der größeren Steigung  $(\alpha + \varphi)$  hochzuziehen. Dann wird

$$Z = P = G \cdot \sin (\alpha + \varphi).$$

Hierbei ist angenommen, daß die Kraft  $Z$  unter dem Winkel  $(\alpha + \varphi)$  zieht.

In Abb. 136 zieht die Kraft in horizontaler Richtung das Gewicht  $G$  hoch. Bei reibungsloser Bewegung würde sein

$$Z_0 = P_0 = G \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

bei Reibungsbewegung dagegen genügt diese Kraft nicht, sie muß mindestens sein

$$Z = P = G \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$

Beim Abwärtsgleiten der Last  $G$  wirkt, da die Bewegung entgegengesetzt erfolgt, die Reibung in entgegengesetzter Richtung, d. h. die Neigung der schiefen Ebene muß um den Reibungswinkel  $\varphi$  vermindert werden. Das Seil, das das Hinabgleiten vermeiden soll, hat bei schrägem Seilzug (Abb. 137) nicht die Zugkraft  $G \cdot \sin \alpha$ , sondern

$$Z = G \cdot \sin (\alpha - \varphi)$$

(hierbei ist angenommen, das das Seil unter dem Winkel  $(\alpha - \varphi)$  auszuhalten, also eine kleinere Kraft, es wird durch die Reibung entlastet.

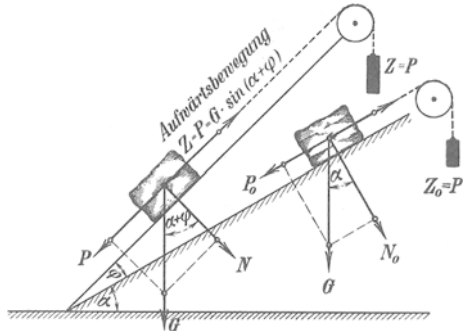


Abb. 135. Der Reibungswiderstand auf schiefer Ebene Zugkraft parallel zur schrägen Bahn.

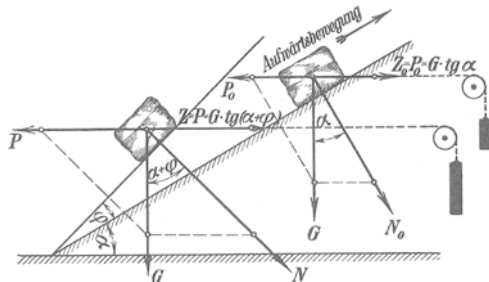


Abb. 136. Der Reibungswiderstand auf schiefer Ebene, Zugkraft parallel zur Basis.

Denkt man sich den Seilzug durch ein Gewicht dargestellt, so erfordert beim Abwärtsgleiten der Last die reibungslose Ebene das größere Gewicht  $G \cdot \sin \alpha$ .

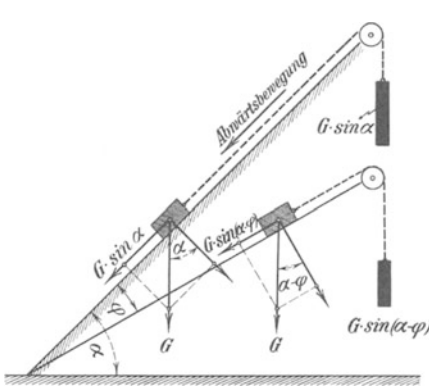


Abb. 137. Das Herabsinken einer Last, Seil parallel zur schrägen Lage.

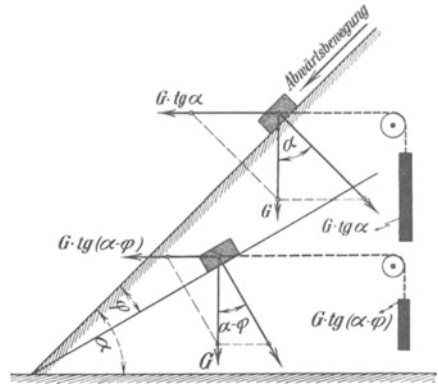


Abb. 138. Das Herabsinken einer Last, Seil parallel zur Basis.

Erfolgt das Abwärtsgleiten bei horizontalem Seilzug (Abb. 138) so ist ohne Reibung

$$Z_0 = P_0 = G \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

mit Reibung

$$Z = P = G \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \varphi).$$

Das Seil wird also durch die Reibung entlastet.

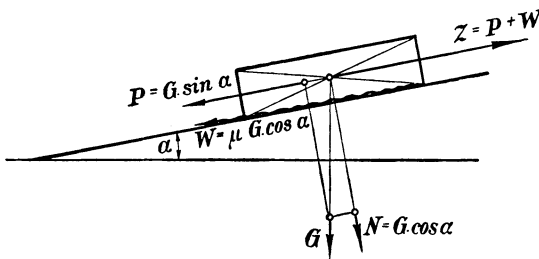


Abb. 139. Reibung auf der schiefen Ebene.

Man kann die Reibung auf der schiefen Ebene anstatt mit dem Reibungswinkel auch mit der Reibungsziffer  $\mu$  berechnen. Nach Abb. 139 erzeugt der Normaldruck  $N = G \cdot \cos \alpha$  den Reibungswiderstand

$$W = \mu \cdot N = \mu \cdot G \cdot \cos \alpha,$$

so daß zum Hochziehen der Last  $G$  die Zugkraft

$$Z = G \cdot \sin \alpha + \mu \cdot G \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot G$$

erforderlich ist.

Soll die Last  $G$  auf der schiefen Ebene absinken, so wirkt der Reibungswiderstand  $W$  in entgegengesetzter Richtung und das Seil hat die Bremskraft

$$Z = G \cdot \sin \alpha - \mu \cdot G \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot G$$

aufzunehmen.

**Beispiel:** Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel  $\alpha = 10^\circ$  soll ein Gewicht  $G$  hochgezogen werden, wenn die Flächen die Reibungsziffer  $\mu = 0,20$  haben, wie groß muß die Zugkraft  $Z$  sein?



**Lösung:** a) Die Zugkraft wird unter Berücksichtigung des Reibungswinkels  $\varphi$  errechnet zu

$$Z = G \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$

Nach der Aufgabe ist  $\operatorname{tg} \varphi = \mu = 0,20$  und damit  $\varphi = 11^\circ 20'$ , also ist  $(\alpha + \varphi) = 10^\circ + 11^\circ 20' = 21^\circ 20'$  und  $\sin(\alpha + \varphi) = \sin 21^\circ 20' = 0,3638$ . Also ist

$$Z = 0,3638 \cdot G.$$

b) Unter Berücksichtigung der Reibungsziffer  $\mu$  ist die Zugkraft

$$\begin{aligned} Z &= G \cdot \sin \alpha + \mu \cdot G \cdot \cos \alpha \\ &= (\sin 10^\circ + 0,20 \cdot \cos 10^\circ) \cdot G \\ &= (0,1736 + 0,20 \cdot 0,9848) \cdot G \\ &= 0,3705 \cdot G \sim 0,371 \cdot G. \end{aligned}$$

Der unter a) errechnete Wert ist kleiner, das Verhältnis beider Werte ist  $0,3638 : 0,3705 = 0,984$ , d. h. der mit dem Reibungswinkel  $\varphi$  errechnete Wert ist 1,6% kleiner. Wie kommt das?

Nach Abb. 140 erfolgt die Berechnung so, als wenn die Zugkraft  $Z$  parallel zur gedachten Ebene mit der Neigung  $(\alpha + \varphi)$  zieht. Tatsächlich zieht aber das Seil parallel zur wirklichen Ebene mit der Neigung  $\alpha$  und hierfür ist die Zugkraft

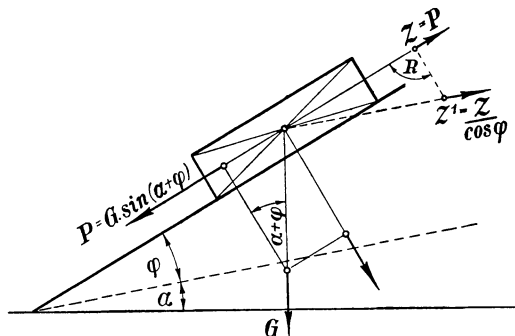


Abb. 140. Die Zugkraft  $Z'$  mit dem Neigungswinkel  $\alpha$ .

$$Z' = \frac{Z}{\cos \varphi} = \frac{Z}{\cos 11^\circ 20'} = \frac{Z}{0,9805}.$$

Da  $Z = 0,3638 \cdot G$  war, wird nun

$$Z' = \frac{0,3638 \cdot G}{0,9805} = 0,371 \cdot G.$$

Damit stimmen beide Werte überein.

Praktisch kann man aber unbedenklich mit dem einfacheren Verfahren rechnen, das ist das Berechnen mit dem Reibungswinkel, da der Fehler unbedenklich ist. Will man ihn aber ganz ausschalten, dann dividiere man das Resultat durch  $\cos \varphi$ .

### Der Reibungswiderstand der Bewegung.

Der Widerstand der gleitenden Reibung ist erfahrungsgemäß während der Bewegung kleiner als während der Ruhelage. Man erklärt sich das so, daß im Ruhezustand die Oberflächen mit ihren feinen Unebenheiten sich in einander verzahnen. Bei Beginn der Bewegung muß diese Verzahnung erst gelöst und der aufliegende Körper von seiner Unterlage etwas abgehoben werden, wodurch der größere Widerstand der Ruhe hervorgerufen wird. Ist der Anfahrreibungs-Widerstand überwunden, dann ist der nachfolgende Fahrwiderstand kleiner.

Der Reibungswiderstand der Bewegung kann wie der Reibungswiderstand der Ruhe an einer schiefen Ebene ermittelt werden. Man muß aber von Anfang an die schiefe Ebene so schräg stellen, daß der Neigungswinkel  $\alpha$  größer ist als der Reibungswinkel  $\varphi$ . Das ist der Fall, wenn der Körper sofort beim Aufsetzen seine Rutschbewegung beginnt.

Er steht dann unter dem Einfluß der Gewichtskomponente. Die Gewichtskomponente in der Bahnrichtung, vermindert um den Reibungswiderstand, ist die Beschleunigungskraft<sup>1</sup>, welche die Beschleunigung  $b$  hervorruft. Die

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Erdbeschleunigung}} = \frac{G}{g}$$

muß beschleunigt werden, und zwar ist nach dem Gesetz der Dynamik

$$\text{Beschleunigungskraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung},$$

$$G \cdot \sin \alpha - \mu \cdot G \cdot \cos \alpha = \frac{G}{g} \cdot b,$$

$$\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha = \frac{b}{g},$$

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{b}{g \cdot \cos \alpha} = \text{tg } \alpha - \frac{b}{g \cdot \cos \alpha}.$$

Nach dieser Gleichung kann  $\mu$  als Reibungsziffer der Bewegung errechnet werden. Man hat den Wert  $b$  durch einen Versuch festzustellen, indem man die Zeit  $t$  abstoppt, die der Körper zum Durchlaufen der Bahnlänge  $s$  gebraucht. Nach den Gesetzen der Dynamik ist

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 \quad \text{oder} \quad b = \frac{2s}{t^2}.$$

**Aufgabe:** Für eine Rutschenanlage sollen die Reibungsziffern der Ruhe und Bewegung für Berge ermittelt werden.

**Lösung:** 1. Reibungsziffer der Ruhe:

Man vergrößert den Neigungswinkel so lange, bis die Rutschbewegung beginnt. Sie beginnt bei

$$\varphi = 21^\circ 50', \quad \text{also ist} \quad \mu = \text{tg } 21^\circ 50' = 0,40.$$

2. Reibungsziffer der Bewegung:

Die Bahnlänge der schiefen Ebene ist  $s = 5$  m und der Neigungswinkel  $\alpha = 40^\circ$  gewählt, also erheblich größer als  $\varphi$ . Man legt oben eine Bergmasse auf und beobachtet die Abrutschzeit, sie beträgt

$$t = 1,44 \text{ sek}$$

$$\text{Dann ist} \quad b = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 5}{1,44^2} = 4,8 \text{ m/sek}^2,$$

$$\mu = \text{tg } \alpha - \frac{b}{g \cdot \cos \alpha},$$

$$= \text{tg } 40^\circ - \frac{4,8}{9,81 \cdot \cos 40^\circ},$$

$$= 0,8391 - \frac{4,8}{9,81 \cdot 0,7660} = 0,1991.$$

<sup>1</sup> Beschleunigungskraft siehe im Abschnitt Dynamik.

Der Versuch bestätigt, daß die Reibungsziffer der Bewegung kleiner ist als die der Ruhe, in diesem Falle ist sie nur halb so groß.

### Die Zapfenreibung.

Ein zylindrischer Tragzapfen, Abb. 141, werde durch den Normaldruck  $N$  belastet. Bei eintretender Drehbewegung wird sich am Umfang der Tragfläche der Reibungswiderstand der Bewegung entgegensetzen. Er wirkt wie ein Seil, das um den Zapfen geschlungen ist und mit dem Gegenzug

$$W = \mu \cdot N$$

den Zapfen festhält. Dadurch entsteht ein Drehwiderstand oder ein Drehmoment von der Größe

$$M = W \cdot r.$$

Zur Überwindung dieses Drehwiderstandes muß an der Kraftkurbel  $R$  eine Kraft  $P$  tätig sein.

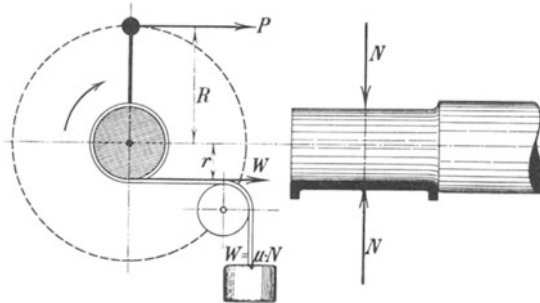


Abb. 141. Die Reibung am Zapfen einer Welle.

Mit dem Wellenmittelpunkt als Drehpunkt lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$+ P \cdot R - W \cdot r = 0, \quad P = \frac{W \cdot r}{R}.$$

Demnach muß die Kraft  $P$  um so größer werden, je größer der Hebelarm  $r$  des Reibungswiderstandes wird. Aus diesem Grunde soll der Zapfenradius  $r$  möglichst klein gehalten werden.

Bei Lagerreibung der Zapfen haben wir es nicht mit trockener Reibung zu tun, sondern mit Reibung auf geschmierten Flächen. Das Schmiermittel bildet einen Schmierfilm um den Zapfen, dessen Stärke dort am geringsten ist, wo der Zapfen dynamisch am dichtesten anliegt. Ist diese geringste Schmierfilmstärke größer als die mikroskopischen Unebenheiten der Gleitflächen, so haben wir Vollschmierung und ein „dynamisches Schwimmen“. Andernfalls liegt Teilschmierung und dazu halbflüssige oder halbtrockene Reibung je nach dem Grad der Berührung mit den Unebenheiten vor.

Die Reibungsziffer ist abhängig von der Zapfengeschwindigkeit. Versuchswerte für Stahlzapfen in Lagermetall sind im Anhang mitgeteilt. Für Eisenbahnwagenachsen aus Flußstahl in Bronzelagern fand man  $\mu = 0,014$ .

## b) Die rollende Reibung.

Eine rollende Bewegung oder Wälzbewegung kann nur stattfinden, wenn an der Berührungsstelle zwischen Walze und Auflagerfläche der Reibungswiderstand groß genug ist, um das Gleiten ganz zu verhindern.

Eine Gartenwalze werde über weichen Boden gerollt (Abb. 142), dann sinkt die Walze um das Maß  $s$  ein. Dem Maß  $s$  entspricht die Projektionsbreite  $f$  der zum Aufliegen kommenden Walzenfläche, die das Gewicht der Walze in den Boden setzt. Das Gewicht  $G$  der Walze bildet die Normalbelastung  $N$  der Fläche.

Um die Walze zu bewegen, zieht die Kraft  $P$  am Zapfen der Walze, welche um den Kantenpunkt  $D$  sich augenblicklich drehen will. Mit  $D$  als Drehpunkt heißt die Gleichgewichtsbedingung

$$+ P \cdot b - N \cdot f = 0, \quad P = N \cdot \frac{f}{b} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

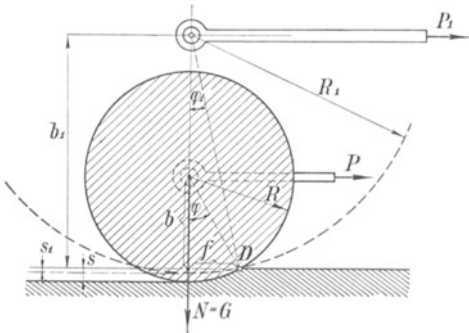


Abb. 142. Gartenwalze auf weichem Boden.

Man könnte auch schreiben  $P = N \cdot \mu$ , wo  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ , und so käme man auf dieselbe Gleichung, die uns für gleitende Reibung bereits bekannt ist.  $\mu$  wäre dann die Reibungsziffer für rollende Reibung.

Aber hier zeigt sich eine Schwierigkeit. Nimmt man eine Walze mit dem größeren Halbmesser  $R_1$ , so bleibt bei derselben Belastung  $N = G$  die Druckflächenbreite  $f$  dieselbe, denn der Boden wird so lange nach-

geben bis wieder die spezifische Bodenpressung, d. i. die Belastung für  $1 \text{ cm}^2$  dieselbe wie bei der ersten Walze ist. Damit wird für die große Walze die Einsinktiefe  $s_1$  kleiner. Die Gleichgewichtsbedingung für  $D$  als Drehpunkt lautet nun

$$+ P_1 \cdot b_1 - N \cdot f = 0, \\ P_1 = N \cdot \frac{f}{b_1} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = N \cdot \mu_1.$$

Der Winkel  $\varphi_1$  ist viel kleiner geworden, und damit ist auch der Reibungswiderstand viel kleiner geworden, obwohl die Oberflächen, Eisen auf weicher Erde, dieselben geblieben sind.

Wir erkennen, daß in diesem Fall der Reibungswinkel  $\varphi$  nicht konstant bleibt und nicht in Tabellen angegeben werden kann, denn er würde sich mit dem Halbmesser der Walze ändern.

Dagegen bleibt der Faktor  $f$  unserer Rechnung konstant, und es liegt nahe, diese Größe  $f$  als konstanten Faktor der rollenden Reibung anzusehen. Man wird also die Formel schreiben:

$$P \cdot b = f \cdot N.$$

Da bei der kleinen Größe von  $f$  der Unterschied zwischen der Hebellänge  $b$  und dem Walzenhalbmesser  $R$  nur gering ist, kann man auch setzen  $b = R$  und es wird

$$P \cdot R = f \cdot N, \quad P = f \cdot \frac{N}{R}.$$

Demnach ist der Reibungswiderstand der rollenden Reibung

1. proportional dem Hebelarm  $f$ ,
2. proportional dem Normaldruck  $N$ ,
3. umgekehrt proportional dem Rollenhalbmesser  $R$ .

Der Hebelarm  $f$  berücksichtigt die Härte oder die Beschaffenheit der Berührungsflächen, er wird um so größer sein, je weicher die Berührungsflächen sind. Die Zahl  $f$  hat also die Bedeutung eines Längenmaßes, denn  $f$

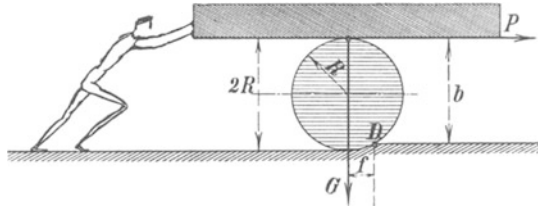


Abb. 143. Die Kraft greift am Rollenumfang an.

ist der Hebelarm einer Kraft. Man wird, da der Rollenhalbmesser  $R$  in cm gemessen wird, auch das Maß  $f$  in cm angeben. Die für  $f$  in Tabellen angegebenen Werte sind also Zentimeter-Maße (siehe Tabelle im Anhang).

Von besonderer Bedeutung ist der Rollenhalbmesser  $R$ , seine Größe beeinflusst den Reibungswiderstand außerordentlich. Je größer man  $R$  macht, um so kleiner wird der Reibungswiderstand. Große Räder an den Fuhrwerken und Fahrzeugen bewirken also leichteren Gang.

Meistens werden die Rollen oder Räder sich um Zapfen drehen, also so wie bei der Gartenwalze in Abb. 142. Es kommen aber auch Fälle vor, wo die Last durch Walzen direkt weitergewälzt wird. In Abb. 143 liegt die Last  $G$  auf einer Walze, es wälzt sich die Last auf der Rolle vorwärts, während die Rolle sich auf der Bodenfläche abrollt. Der Mann drückt gegen die Last, so daß die treibende Kraft  $P$  an der Berührungsstelle von Last und Walze angreifen muß.

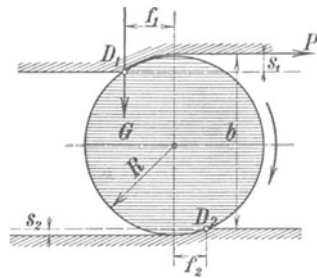


Abb. 144. Rollende Reibung oben und unten.

Mit  $D$  als Drehpunkt lautet die Gleichgewichtsbedingung, wenn man praktisch  $b = 2R$  setzt:

$$+ P \cdot 2R - G \cdot f = 0, \quad P = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot f}{R},$$

d. h. die Bewegungskraft ist nur halb so groß wie im vorigen Fall.

In vielen Fällen wird, wenn die Last sich auf der Walze abwälzt, auch an der Wälzfläche zwischen Last und Walze die rollende Reibung zu berücksichtigen sein. Dieser Fall ist in Abb. 144 gezeigt.

Die obere Wälzfläche wird um den Betrag  $s_1$ , die untere um den

Betrag  $s_2$  eingedrückt, dann entsteht oben  $f_1$  als Hebelarm und unten  $f_2$ . Die Walze steht oben im Punkt  $D_1$ , unten im Punkt  $D_2$  in Berührung, die Last setzt sich also durch den Auflagepunkt  $D_1$  auf die Walze.

Mit  $D_2$  als Drehpunkt heißt die Momentengleichung

$$+ P \cdot b - G \cdot (f_1 + f_2) = 0.$$

Wegen der Kleinheit der Werte  $s_1$  und  $s_2$  kann man setzen

$$b = 2R.$$

Dann wird

$$P \cdot 2R - G \cdot (f_1 + f_2) = 0,$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot (f_1 + f_2)}{R}.$$

In Abb. 145 ist eine Schüttelrutsche mit Wälzrollen dargestellt, bei welcher der eben beschriebene Wälzvorgang sich vollzieht. Man könnte nach der vorstehenden Gleichung den Widerstand der rollenden Reibung berechnen.

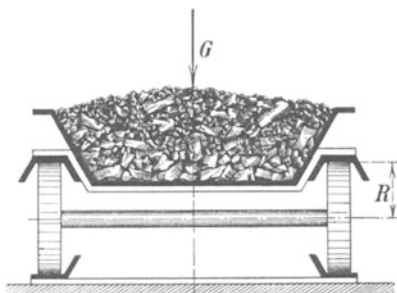


Abb. 145. Schüttelrutsche mit Wälzrollen.

Bei 4 mm Blechstärke und 3 m Muldenlänge ist das Eigengewicht der Rutsche für ein laufendes Meter

$$g = 35 \text{ bis } 50 \text{ kg/m}$$

bei Breiten von 450 bis 550 mm, das Ladegewicht etwa  $k = 50$  bis  $50 \text{ kg/m}$ .

Der Rollenhalmmesser ist im Mittel  $R = 9,5 \text{ cm}$ . Für die obere Wälzfläche würde man setzen

$$\text{Eisen auf Eisen } f_1 = 0,005 \text{ cm}$$

und für die untere Wälzfläche wegen der Verschmutzung

$$f_2 = 0,10 \text{ cm}.$$

Das Gewicht für ein laufendes Meter sei

$$G = g + k = 50 + 60 = 110 \text{ kg},$$

dann ist der Reibungswiderstand für 1 m Rutschenlänge

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{110 \cdot (0,005 + 0,10)}{9,5} = 0,61 \text{ kg/m}$$

oder für 100 m Rutschenlänge  $P = 61 \text{ kg}$ .

### c) Reibung der Schienenwagen.

Der Fahrzeugwiderstand dieser Wagen setzt sich aus zwei Einzelwiderständen zusammen

1. aus dem Widerstand der Zapfenreibung,
2. aus dem Widerstand der rollenden Reibung zwischen Schiene und Laufrad.

## Der Widerstand der Zapfenreibung.

Man kann die Betrachtung vereinfachen und das Gesamtgewicht  $G$  des beladenen Wagens (Abb. 146) auf einen Laufradzapfen setzen.

An welcher Stelle des Wagens die treibende Kraft  $P_1$ , welche den Zapfenwiderstand überwinden soll, angreift, ist gleichgültig, immer wird die Kraft  $P_1$  durch das Lager auf die Laufachse übertragen, es geht also die Kraft  $P_1$  durch die Zapfenmitte.

Der Auflagerpunkt des Rades auf der Schiene hält das Rad zurück, hier greift die Reaktion der Kraft  $P_1$  an, d. h. die Kraft  $P_1$  zieht hier in entgegengesetzte Richtung, es entsteht ein linksdrehendes Kraftmoment von der Größe  $P_1 \cdot R$ .

Die Zapfenreibung wirkt genau so, als wenn das Gewicht  $G \cdot \mu$  auf den Zapfen aufgewickelt werden müßte, d. h. die Zapfenreibung bildet

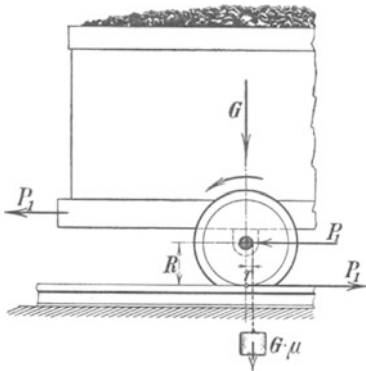


Abb. 146. Die Zapfenreibung am Schienenwagen.

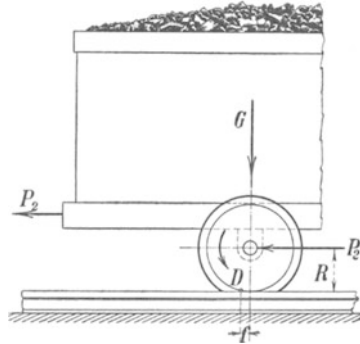


Abb. 147. Die rollende Reibung am Schienenwagen.

rechtsdrehend das Lastmoment  $G \cdot \mu \cdot r$ , so daß die Gleichgewichtsbedingung mit dem Zapfenmittelpunkt als Drehpunkt lautet:

$$- P_1 \cdot R + G \cdot \mu \cdot r = 0, \quad P_1 = \frac{G \cdot \mu \cdot r}{R}.$$

Diese Kraft ist erforderlich, um ausschließlich die Zapfenreibung zu überwinden, sie wird um so kleiner, je kleiner die Reibungsziffer  $\mu$  und der Zapfenradius  $r$  und je größer der Radhalbmesser  $R$  ist.

## Der Widerstand der rollenden Reibung.

Zur Überwindung der rollenden Reibung sei die Kraft  $P_2$  erforderlich. Zwischen Schiene und Rad ist  $f$  der Hebelarm der rollenden Reibung. Nach Abb. 147 ist mit  $D$  als Drehpunkt

$$- P_2 \cdot R + G \cdot f = 0, \quad P_2 = \frac{G \cdot f}{R}.$$

## Der Gesamtwiderstand.

Beide Reibungswiderstände sind gleichzeitig zu überwinden, also ist zur Aufrechterhaltung der gleichförmigen Fahrbewegung eine Gesamt-

kraft erforderlich von der Größe

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= \frac{G \cdot \mu \cdot r}{R} + \frac{G \cdot f}{R} \\ &= G \cdot \frac{\mu \cdot r + f}{R} = G \cdot \mu_g, \end{aligned}$$

wenn  $\mu_g$  = Gesamtreibungsziffer ist.

Diese rechnerisch zu ermittelnde Gesamtreibungsziffer  $\mu_g$  berücksichtigt die Spurkranzreibung an den Schienen nicht. Die Spurkranzreibung kann in vielen Fällen aber größer sein als die berechneten Reibungen, sie entzieht sich jedoch der Berechnung, da man die Seitendrucke am Spurkranz nicht kennt.

In der durch Versuche ermittelten Gesamtreibungsziffer  $\mu_g$  liegen alle Reibungswiderstände der Fahrzeuge auf geradliniger Bahn. Beträgt z. B.  $\mu_g = 0,015$ , so heißt das, zur Überwindung aller Reibungswiderstände sind 1,5% des Zuggewichtes oder für je 1 t Zuggewicht 15 kg Zugkraft aufzuwenden.

Man hat zu unterscheiden zwischen dem Fahrwiderstand und dem Anfahrwiderstand, letzterer entspricht der Reibung der Ruhe und ist daher wesentlich größer als der Fahrwiderstand. Für Förderwagen im guten Zustand ist bei Radsätzen mit Gleitlagern

der Fahrwiderstand  $\mu_g = 0,008 - 0,015$  oder 8–15 kg/t,

der Anfahrwiderstand  $\mu_g = 0,015 - 0,02$  oder 15–20 kg/t.

**Beispiel:** Der Fahrwiderstand eines Förderwagens ist zu berechnen, wenn folgende Verhältnisse vorliegen:

Leergewicht = 500 kg, Ladegewicht = 750 kg,  
Zapfenradius  $r = 2,5$  cm, Radhalbmesser  $R = 15$  cm,  
Koeffizient der gleitenden Reibung  $\mu = 0,15$  (schlechte Schmierung),  
Koeffizient der rollenden Reibung  $f = 0,005$  cm.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} G &= 500 + 750 = 1250 \text{ kg}, \\ P &= 1250 \cdot \frac{0,15 \cdot 2,5 + 0,005}{15} \\ &= 1250 \cdot 0,025 = \mathbf{31,4 \text{ kg}}. \end{aligned}$$

Bei schlechter Schmierung würde der Reibungswiderstand in der Fahrbewegung demnach 2,5% des rollenden Gewichtes betragen. Das ist ein erheblicher Betrag, namentlich im Vergleich mit Eisenbahnfahrzeugen, bei denen der Fahrwiderstand mit 0,25 bis 0,5% des rollenden Gewichtes schon überwunden ist.

Das Beispiel ergab also  $\mu_g = 0,025$  für Förderwagen in schlecht geschmiertem Zustand, während für Eisenbahnfahrzeuge  $\mu_g = 0,0025$  bis 0,005 ist.

#### d) Reibung im Rollenlager.

Zur Verminderung der Zapfenreibung läßt man den Zapfen nicht in einer feststehenden Lagerschale gleiten, sondern umgibt den ganzen Zapfen mit Rollen oder Walzen und schließt darüber die Lagerschale.



Der Zapfen rollt dann auf den Walzen und diese rollen wiederum auf der Lagerschale. Ein reines Rollen findet nicht statt, es entsteht wegen der Differenz der Rollwege innen und außen auch ein Gleiten.

Die durch Versuche festgestellte Reibungsziffer nennt man die ideale Reibungsziffer und bezeichnet sie mit  $\mu_i$ .

Nach Abb. 148 wirkt, wenn  $G$  die Zapfenbelastung ist, am Zapfenumfang der Reibungswiderstand  $\mu_i \cdot G$ , d. h. es entsteht ein Widerstandsmoment der Reibung von der Größe

$$M_r = \mu_i \cdot G \cdot r \text{ cmkg.}$$

Man rechnet nach den Versuchswerten mit

$$\mu_i = 0,002 \text{ bis } 0,008.$$

Die kleinen Werte gelten für große Belastungen, die großen für kleine Belastungen.

Der große Vorteil dieser Rollenlager ist die Unabhängigkeit der Reibungsgröße von der Geschwindigkeit des Zapfens. Die Reibung der Ruhe ist nur unerheblich größer wie die Reibung der Bewegung, so daß der Anlaufwiderstand klein wird.

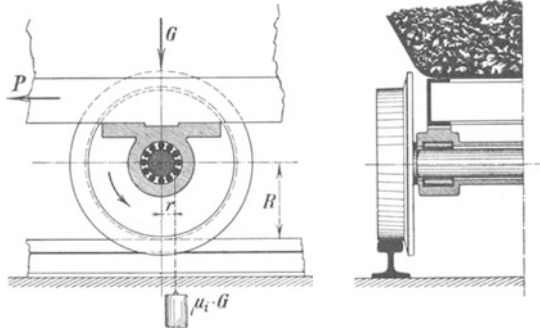


Abb. 148. Reibung im Rollenlager.

Bei Gleitlagern ist das nicht der Fall. Hier kann die Reibung der Ruhe doppelt so groß sein wie die Reibung der Bewegung.

**Beispiel:** Der Förderwagen werde mit Rollenlagern ausgerüstet, wie groß wird dann der Fahrwiderstand?

**Lösung:** Man verwendet die Formel

$$P = G \cdot \frac{\mu_i \cdot r + f}{R}$$

und setzt,  $\mu_i = 0,006$ ,

$$P = 1250 \cdot \frac{0,006 \cdot 2,5 + 0,005}{15},$$

$$P = 1250 \cdot 0,0014 = 1,75 \text{ kg.}$$

Während bei schlechtem Gleitlager der Widerstand der Reibung eine Zugkraft  $P = 31,4$  kg erforderte, ist hier nur der  $31,4 : 1,75 = 18$ . Teil dieser Zugkraft erforderlich, oder gegenüber 2,5% werden nur 0,14% des rollenden Gewichtes als Zugkraft für die gleichförmige Bewegung benötigt.

Für Förderwagen im guten Zustand ist bei Radsätzen mit Wälzlagern

der Fahrwiderstand  $\mu_g = 0,005 - 0,01$  oder  $5 - 10$  kg/t,  
 der Anfahrwiderstand  $\mu_g = 0,01 - 0,015$  oder  $10 - 15$  kg/t.

### e) Reibung im Kugellager.

Bei Kugellagern gilt dasselbe wie das für Walzenlager Gesagte. Sie bilden eine Verfeinerung der Rollenlager und haben noch geringere Reibungswiderstände. Nach Abb. 149 ist das Widerstandsmoment der Zapfenreibung

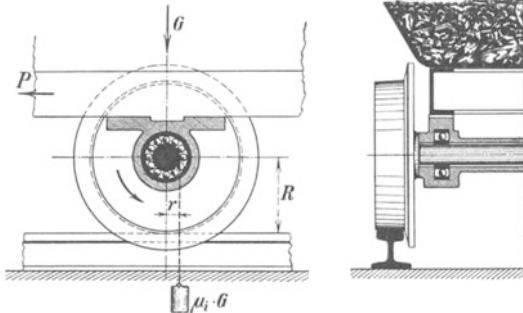


Abb. 149. Reibung im Kugellager.

$$M_r = \mu_i \cdot G \cdot r \text{ cmkg.}$$

Man rechnet nach den Versuchswerten mit

$$\mu_i = 0,0015 \text{ bis } 0,0035.$$

Die kleinen Werte gelten für große Belastungen, die großen für kleine Belastungen.

**Beispiel:** Der Förderwagen werde mit Kugellagern ausgerüstet, wie groß wird der Fahrwiderstand?

**Lösung:** Bei einem Zapfenradius  $r' = 2,5$  cm wird wegen des aufzusetzenden Lauftringes  $r = 3,5$  cm, ferner werde  $\mu_i = 0,0035$  gesetzt.

$$\begin{aligned} P &= G \cdot \frac{\mu_i \cdot r + f}{R} \\ &= 1250 \cdot \frac{0,0035 \cdot 3,5 + 0,005}{15} \\ &= 1250 \cdot 0,0012 = 1,5 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Während bei schlechtem Gleitlager der Widerstand der Reibung eine Zugkraft  $P = 31,4$  kg erforderte, ist hier nur der  $31,4 : 1,5 = 21$ . Teil dieser Zugkraft erforderlich, oder gegenüber 2,5% werden nur 0,12% des rollenden Gewichtes als Zugkraft für die gleichförmige Bewegung erforderlich sein.

Walzen- oder Kugellager bieten daher ein vorzügliches Mittel, den Fahrwiderstand unserer Schienenwagen erheblich herabzusetzen.

Ist  $G$  das Gewicht der rollenden Last, so ist der Zugwiderstand der Gesamtreibung allgemein

$$P = \mu_g \cdot G.$$

Für Förderwagen wird im allgemeinen, je nach den Verhältnissen,  $\mu_g = 0,005$  bis  $0,025$  sein.

Die Formel gilt natürlich nur für Transporte auf söhliger Strecke.

Der Reibungswert  $\mu_g$  kann wie früher auf einer schiefen Ebene ermittelt werden, man stellt den Wagen auf eine schiefe Ebene und vergrößert den Ablaufwinkel der schiefen Ebene so lange, bis der Wagen seine Rollbewegung beginnt (Abb. 150).

Da im Kräftedreieck

$$\frac{W}{G} = \operatorname{tg} \varphi$$

oder

$$W = G \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

ist, so ist

$$P = W = G \cdot \operatorname{tg} \varphi = G \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \mu = \operatorname{tg} \varphi,$$

- z. B. ist für  $\mu_g = \operatorname{tg} \varphi = 0,025 \dots \varphi = 1^\circ 26'$   
 $= 0,020 \dots \varphi = 1^\circ 10'$   
 $= 0,015 \dots \varphi = 0^\circ 52'$   
 $= 0,010 \dots \varphi = 0^\circ 35'$   
 $= 0,005 \dots \varphi = 0^\circ 17'$

Die im Bergbau verwendeten Ablaufbahnen beruhen auf der Verwendung schiefer Ebenen, deren Neigungswinkel  $\alpha$  größer sein muß als der Reibungswinkel  $\varphi$ , der sich aus dem Wert

$$\mu_g = \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmt. Müssen die Wagen aus der Ruhe anfahren, so bestimmt der Anfahrwiderstand die Bahnneigung. Für Gleitlager war  $\mu_g = 0,020 = \operatorname{tg} \varphi$  oder  $\varphi = 1^\circ 10'$ , für Wälzlager war  $\mu_g = 0,015 = \operatorname{tg} \varphi$  oder  $\varphi = 0^\circ 52'$ . Die Bahnneigung muß daher größer als 1,5% bzw.

2,0% sein. Man verwendet aber schon bei Wälzlagern im Hinblick auf den schlechten Zustand mancher Wagen Bahnneigungen von 2,5%. Wagen mit geringerem Fahrwiderstand laufen dann beschleunigt ab, weshalb man am Ende der Ablaufbahn automatische Bremsen vorsieht.

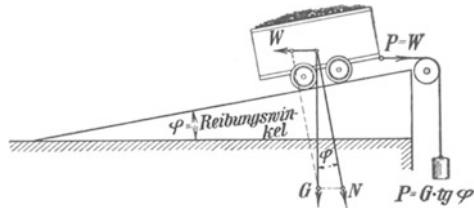


Abb. 150. Die Fahrwiderstandsermittlung durch eine schiefe Ebene.

### f) Fahrzeuge auf schiefer Ebene.

Bei Bewegung auf Strecken, die mit Gefälle oder Steigung angelegt sind, ist das Gesetz der schiefen Ebene anzuwenden. Nach Abb. 151 für die Aufwärtsbewegung zu dem Steigungswinkel  $\alpha$  der Reibungswinkel  $\varphi$  zu addieren, und es ist

$$P = W = G \cdot \sin (\alpha + \varphi) .$$

**Beispiel:** Ein beladener Förderwagen habe das Gewicht  $G = 1250$  kg, welche Zugkraft  $P$  ist erforderlich, wenn die schiefe Ebene mit dem Winkel  $\alpha = 30^\circ$  ansteigt, und der Fahrwiderstand der Reibung 2% beträgt?

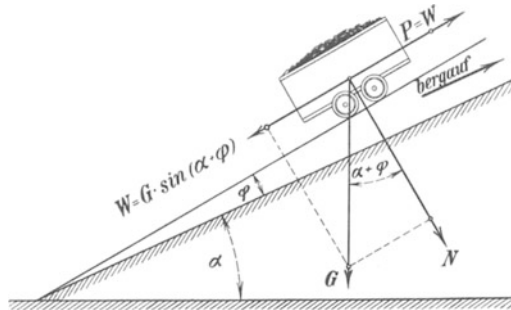


Abb. 151. Das Hochziehen des Förderwagens.

**Lösung:** Der Fahrzeugreibung von 2% entspricht

$$\mu_g = 0,02 = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = 1^\circ 10' .$$

$$P = G \cdot \sin (\alpha + \varphi) = 1250 \cdot \sin (30^\circ + 1^\circ 10')$$

$$= 1250 \cdot \sin 31^\circ 10' = 1250 \cdot 0,5175 = 650 \text{ kg} .$$

Für die Abwärtsbewegung auf der schiefen Ebene ist der Reibungswinkel  $\varphi$  von dem Steigungswinkel  $\alpha$  abzuziehen. Nach Abb. 152 ist dann der Seilzug, der den Wagen herunterbremst,

$$P = W = G \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

**Beispiel:** Wie groß muß die Bremskraft am Seil werden, wenn der Förderwagen mit  $G=1250$  kg Gewicht eine schiefe Ebene von  $\alpha = 30^\circ$  Gefälle bei 2% Fahrzeugreibung heruntergebremst werden soll?

**Lösung:**

$$\mu_g = 0,02 = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = 1^\circ 10',$$

$$P = G \cdot \sin(\alpha - \varphi) = 1250 \cdot \sin(30^\circ - 1^\circ 10')$$

$$= 1250 \cdot \sin 28^\circ 50' = 1250 \cdot 0,4823 = 600 \text{ kg.}$$

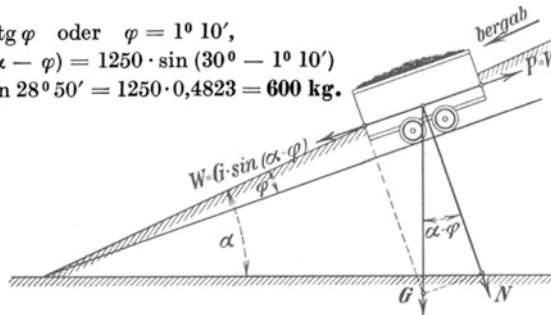


Abb. 152. Das Herunterbremsen des Förderwagens.

Es kann auch vorkommen, daß das Gefälle sehr gering ist, und der Wagen nicht selbsttätig herunterrollt, dann ist der Reibungswinkel  $\varphi$  größer als der Gefällewinkel  $\alpha$ . Zieht man dann (Abb. 153) von dem

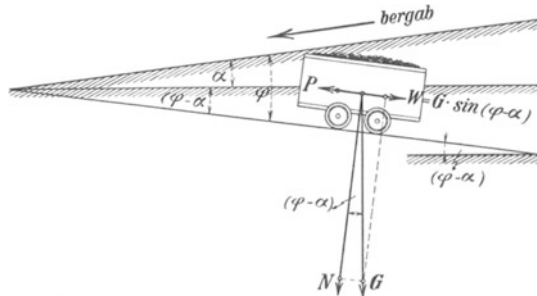


Abb. 153. Bewegung bei sehr geringem Gefälle.

Neigungswinkel  $\alpha$  den Winkel  $\varphi$  ab, so entsteht eine schiefe Ebene mit der Steigung  $(\varphi - \alpha)$  und es wird zum Herabrollen noch eine Zugkraft benötigt von der Größe

$$P = W = G \cdot \sin(\varphi - \alpha).$$

**Beispiel:** Ein beladener Förderwagen von  $G=1250$  kg Gewicht soll im Gefälle 1:200 abwärts gezogen werden, wie groß ist bei 2% Fahrzeugreibung die Zugkraft?

**Lösung:** Es ist

$$\sin \alpha = \frac{1}{200} = 0,005 \dots \alpha = 0^\circ 17'$$

$$\mu_g = \operatorname{tg} \varphi = 0,020 \dots \varphi = 1^\circ 10'.$$

$$P = G \cdot \sin(\varphi - \alpha) = 1250 \cdot \sin(1^\circ 10' - 0^\circ 17')$$

$$= 1250 \cdot \sin 0^\circ 53' = 1250 \cdot 0,0154 = 19,8 \text{ kg.}$$

Gleiche Zugkraft zum Abwärtsziehen der vollen und zum Aufwärtsziehen der leeren Wagen.

Man kann für einen bekannten Reibungswinkel  $\varphi$  und für ein bekanntes Gewichtsverhältnis zwischen vollem und leerem Förderwagen den Streckenneigungswinkel  $\alpha$  so wählen, daß das Abwärtsziehen des vollen Wagens die gleiche Zugkraft benötigt wie das Aufwärtsziehen des leeren Wagens.

Es sei  $G_0$  = Gewicht des leeren Wagens in kg,

$N$  = Nutzlast in kg,

dann ist  $(G_0 + N)$  das Gewicht des vollen Wagens. Für das Abwärtsziehen des vollen Wagens wird die Zugkraft

$$P_1 = \mu \cdot (G_0 + N) \cdot \cos \alpha - (G_0 + N) \cdot \sin \alpha$$

für das Hochziehen des leeren Wagens die Zugkraft

$$P_2 = G_0 \cdot \sin \alpha + \mu \cdot G_0 \cdot \cos \alpha$$

benötigt.

Setzt man  $P_1 = P_2$ , so wird nach der Umformung

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \cdot \frac{N}{2G_0 + N}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{N}{2G_0 + N}.$$

Ist  $h$  = Höhe der schiefen Ebene,  $b$  = Basis, so ist  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$ , d. h.

für  $h = 1$  m ist die sölhliche Länge der Strecke  $b = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  oder

$$b = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{2G_0 + N}{N}.$$

**Beispiel:** Welche sölhliche Länge  $b$  muß eine Streckenförderung für je 1 m Steigung erhalten, wenn das Leergewicht des Wagens  $G_0 = 500$  kg und die Nutzlast  $N = 750$  kg ist, damit das Abwärtsziehen der vollen Wagen dieselbe Zugkraft erfordert wie das Aufwärtsziehen der leeren?

**Lösung:** Die Aufgabe läßt sich nur lösen, wenn die Fahrzeugreibung bekannt ist, denn die Gleichung lautet

$$b = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{2G_0 + N}{N},$$

für  $G_0 = 500$  und  $N = 750$  wird  $\frac{2G_0 + N}{N} = \frac{2 \cdot 500 + 750}{750} = 2,34$ , also wird

$$b = \frac{2,34}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2,34}{\mu},$$

für  $\mu = 0,005$  wird  $b = \frac{2,34}{0,005} = 468$ , d. h. Streckenneigung = 1 : 468,

„  $\mu = 0,010$  „  $b = \frac{2,34}{0,010} = 234$ , „ „ = 1 : 234,

für  $\mu = 0,015$  wird  $b = \frac{2,34}{0,015} = 155$ , d. h. Streckenneigung = 1 : 155 ,

„  $\mu = 0,020$  „  $b = \frac{2,34}{0,020} = 117$ , „ „ = 1 : 117 ,

„  $\mu = 0,025$  „  $b = \frac{2,34}{0,025} = 94$ , „ „ = 1 : 94 .

In Abb. 154 sind diese Streckenneigungen aufgetragen, man erkennt, die Reibung macht so verschiedene Neigungen erforderlich, daß bei den stark veränder-

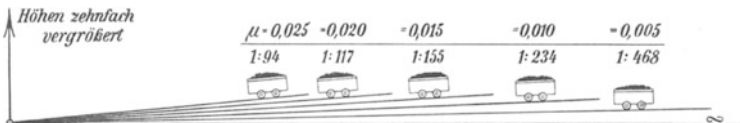


Abb. 154. Gleicher Kraftbedarf für Talfahrt der Beladenen und Bergfahrt der Leeren.

lichen Reibungswerten, wie sie die Grube bringen wird, von einer praktischen Durchführung dieser Forderung wohl abgesehen werden muß.

### g) Bremsberg- und Haspelförderung.

Unter einem Bremsberg versteht man im Bergbau eine mit Geleisen (Gestänge) versehene schiefe Ebene. Auf dem einen Gestänge werden die vollen Wagen vermöge ihres Eigengewichtes herunterbewegt, indem sie an einem Seil ziehen, das sich um eine mit einer Bremsvorrichtung versehene Seilscheibe schlingt und am anderen Ende auf dem zweiten Gestänge einen Gegengewichtswagen hochzieht.

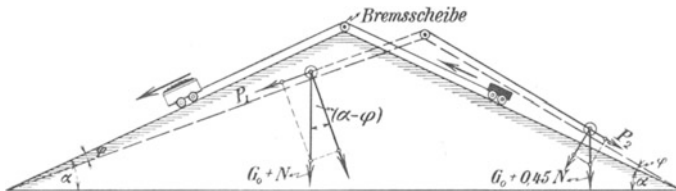


Abb. 155. Die Bremsbergförderung.

Obwohl die beiden Gestänge auf der gleichen schiefen Ebene liegen, kann man sich zur Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen zwei schiefe Ebenen mit der gleichen Horizontalneigung dachförmig gegenüber gestellt denken. Das zeigt Abb. 155.

Auf der linken Seite läuft der beladene Wagen mit dem Gewicht  $(G_0 + N)$  abwärts, auf der rechten Seite der Gegengewichtswagen mit dem Gewicht  $(G_0 + 0,45 \cdot N)$  aufwärts, wenn

$G_0$  = Leergewicht des Förderwagens = Leergewicht des Gegengewichtswagens,

$N$  = Gewicht der Nutzlast

ist. Für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung muß die Fahrzeugreibung ( $\mu_g = \operatorname{tg} \varphi$ ) in Rechnung gestellt werden. Die schiefe Ebene ist auf der Seite der Abwärtsbewegung um den Winkel  $\varphi$  zu sen-

ken, auf der Seite der Aufwärtsbewegung um den Winkel  $\varphi$  zu heben, dann zieht auf der linken Seite der Bremsscheibe der Seilzug

$$P_1 = (G_0 + N) \cdot \sin(\alpha - \varphi),$$

auf der rechten Seite der Bremsscheibe der Seilzug

$$P_2 = (G_0 + 0,45 \cdot N) \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$

Die Bremsscheibe muß die Differenz der beiden Seilzüge abbremsen, d. h. die Bremskraft, auf Mitte Seil bezogen, muß sein

$$B = P_1 - P_2.$$

**Beispiel:** Bei einer Bremsbergförderung sei  $\alpha = 25^\circ$ ,  $G_0 = 500$  kg und  $N = 750$  kg. Welche Bremskraft ist erforderlich, wenn die Fahrzeugreibung 1,5% beträgt?

**Lösung:** Es ist  $\mu_s = 0,015 = \operatorname{tg} \varphi$ , d. h.  $\varphi = 0^\circ 52'$   
 $(\alpha + \varphi) = (25^\circ + 0^\circ 52') = 25^\circ 25'$   
 $(\alpha - \varphi) = (25^\circ - 0^\circ 52') = 24^\circ 8'$   
 $(G_0 + N) = (500 + 750) = 1250$  kg  
 $(G_0 + 0,45 \cdot N) = (500 + 0,45 \cdot 750) = 840$  kg.

Dann ist

$$P_1 = 1250 \cdot \sin 24^\circ 8'$$

$$= 1250 \cdot 0,4089 = 515 \text{ kg,}$$

$$P_2 = 840 \cdot \sin 25^\circ 52'$$

$$= 840 \cdot 0,4363 = 365 \text{ kg.}$$

$$\text{Bremskraft } B = P_1 - P_2 = 515 - 365 = 150 \text{ kg.}$$

Weih<sup>1</sup> gibt für die Lösung dieser Aufgabe ein zeichnerisches Verfahren an, das den trigonometrischen Rechnungsgang ganz entbehrlich macht.

Man braucht hierzu die Kräfte:

$$P_I = \underbrace{G_0 + N}_{\text{linke Last}} - \underbrace{(G_0 + 0,45 \cdot N)}_{\text{rechte Last}}$$

$$P_{II} = \mu_s \cdot \underbrace{(G_0 + N)}_{\text{linke Last}} + \underbrace{G_0 + 0,45 \cdot N}_{\text{rechte Last}}$$

Man zeichnet (Abb. 156) unter dem Steigungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontale eine schräge Linie  $\overline{OI} = P_I$  und rechtwinklig hierzu eine Linie  $\overline{O2} = P_{II}$ .

Die Horizontalen durch Punkt  $I$  und Punkt  $2$  schneiden auf der Senkrechten durch den Punkt  $O$  die Strecke  $\overline{34} = B =$  gesuchte Bremskraft ab.

Die tatsächliche Bremskraft wird durch die Zapfenreibung der Seilscheibe und durch die Seilsteiifigkeit noch kleiner. Wird der Gesamtbetrag dieses Widerstandes mit 5% eingeschätzt, so ist mit  $\mu = 0,05$

$$P_{III} = 0,05 \cdot \underbrace{(G_0 + N)}_{\text{linke Last}} + \underbrace{G_0 + 0,45 \cdot N}_{\text{rechte Last}}$$

Trägt man auf der Schrägen die Strecke  $\overline{I5} = P_{III}$  ab und zieht durch Punkt  $5$  eine Horizontale, so schneidet diese die Strecke  $\overline{36}$  auf der Senkrechten ab, um welche die Bremskraft noch vermindert wird.

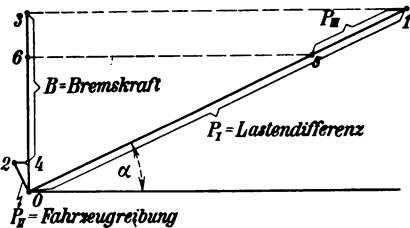


Abb. 156. Zeichnerische Ermittlung der Bremskraft nach Weih.

<sup>1</sup> Weih, Dipl.-Ing.: Förderung auf schiefer Ebene. Siehe Der Bergbau 1927, S. 669.

Bei der Haspelförderung werden die vollen Wagen auf der schiefen Ebene hochgezogen, zum Ausgleich der Lasten läuft auf derselben Ebene ein Gegengewichtswagen abwärts. Es seien folgende Lasten zu bewegen.

Lastenseite:	Gestellgewicht	=	1300 kg
	2 Förderwagen	= 2 · 500	= 1000 „
	2 Ladungen	= 2 · 750	= 1500 „
		Gesamtlast $G_1$	= 3800 kg.

Gegengewichtsseite:	Gestellausgleich	=	1300 kg
	Wagenausgleich	=	1000 „
	Ausgleich der Nutzlast	= 0,55 · 1500	= 850 „
		Gesamtgew. $G_2$	= 3150 kg.

Nach Abb. 157 denkt man sich zwei schiefe Ebenen mit gleichem Neigungswinkel  $\alpha$  dachförmig gegeneinander gestellt. Auf der linken

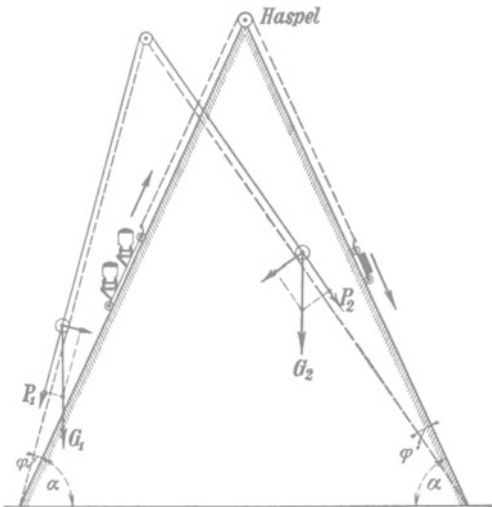


Abb. 157. Die Haspelförderung.

Seite wird die Last  $G_1$  hochgezogen, die schiefe Ebene ist um den Reibungswinkel  $\varphi$  schräger zu stellen. Auf der rechten Seite geht das Gegengewicht  $G_2$  abwärts, die schiefe Ebene ist um den Reibungswinkel  $\varphi$  zu senken. Dann ergibt sich auf der Lastseite der Seilzug

$$P_1 = G_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi),$$

auf der Gegengewichtsseite der Seilzug

$$P_2 = G_2 \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

Die Differenz der Seilzüge muß von der Seiltrommel des Haspels überwunden

werden, also muß die Zugkraft an der Seiltrommel die Größe haben

$$P_1 - P_2 = G_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi) - G_2 \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

**Beispiel:** Es soll für die vorstehenden Lasten die Zugkraft des Haspels berechnet werden, wenn  $\alpha = 65^\circ$  ist und die Fahrzeugreibung mit 2% berücksichtigt werden soll.

**Lösung:** Für 2% Fahrzeugreibung wird

$$\mu_v = 0,02 = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = 1^\circ 10'.$$

Dann ist:

$$(\alpha + \varphi) = (65^\circ + 1^\circ 10') = 66^\circ 10',$$

$$(\alpha - \varphi) = (65^\circ - 1^\circ 10') = 63^\circ 50'$$

$$P_1 = G_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi) = 3800 \cdot 0,9147 = 3470 \text{ kg},$$

$$P_2 = G_2 \cdot \sin(\alpha - \varphi) = 3150 \cdot 0,8975 = 2820 \text{ kg},$$

$$\text{Zugkraft} = P_1 - P_2 = 3470 - 2820 = 650 \text{ kg}.$$



Auch für die Haspelförderung gibt Weh ein zeichnerisches Verfahren an, das den trigonometrischen Rechnungsgang wieder entbehrlich macht. Er benötigt hierzu die Kräfte

$$P_I = G_1 - G_2 = \text{Lastendifferenz}$$

und

$$P_{II} = \mu_g \cdot (G_1 + G_2) = \text{Fahrzeugreibung.}$$

Man zeichnet (Abb. 158) unter dem Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontale eine schräge Linie  $\overline{01} = P_I$  und rechtwinklig hierzu eine Linie  $\overline{02} = P_{II}$ .

Die Horizontalen durch Punkt 1 und Punkt 2 schneiden auf der Senkrechten durch den Punkt 0 die Strecke  $\overline{34} = P_A =$  gesuchte Haspelzugkraft ab.

Das zeichnerische Verfahren liefert wieder denselben Wert

$$P_A = 650 \text{ kg,}$$

wie ihn die Rechnung ergeben hat.

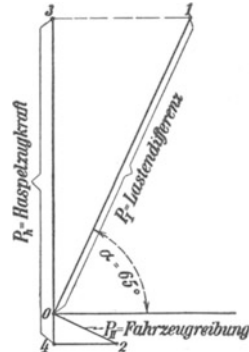


Abb. 158. Zeichnerisches Verfahren zur Ermittlung der Haspelzugkraft nach Weh.

### h) Die Lokomotivförderung.

Die Zugkraft einer Lokomotive (Abb. 159) hängt nicht allein von der Stärke ihrer Maschine, sondern auch von ihrem Dienstgewicht ab. Bekanntlich fangen bei glatten Schienen die Triebräder eine Mahlbewegung an, indem sie auf den Schienen durchgleiten, so daß keine Vorwärtsbewegung zustande kommt. In diesem Fall ist der Bewegungswiderstand der angehängten Last größer als der Gleitwiderstand der Lokomotive.

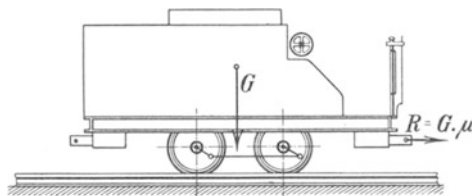


Abb. 159. Die Zugkraft der Lokomotive.

Denkt man sich die Räder der Lokomotive festgebremst, so kann man die Lokomotive nur vorwärtsschieben, wenn man den Widerstand  $R$  der gleitenden Reibung zwischen Rad und Schiene überwindet. Ist

$\mu$  = Reibungsziffer der gleitenden Reibung,

$G$  = Dienstgewicht der Lokomotive in kg,

so ist

$$R = \mu \cdot G$$

der höchste Zugwiderstand, den die Lokomotive überwinden kann, oder es ist

$$Z = R = \mu \cdot G$$

die höchste Zugkraft, welche die Lokomotive leisten kann. Da die Reibungsziffer  $\mu$  sehr verschieden sein kann, sie schwankt in diesem Fall vielleicht zwischen 0,25 bei trockenen Schienen und 0,08 bei schlüpfrigen Schienen, so ist auch die Zugkraft der Maschine keine konstante Größe. Ist z. B.  $G = 5400$  kg das Dienstgewicht einer Grubenlokomotive, so kann die Zugkraft folgende Werte annehmen:

$$\text{für } \mu = 0,08 \text{ wird } Z = 0,08 \cdot 5400 = 432 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,10 \quad ,, \quad Z = 0,10 \cdot 5400 = 540 \quad ,,$$

$$\begin{aligned} \text{für } \mu = 0,15 \text{ wird } Z &= 0,15 \cdot 5400 = 810 \text{ kg} \\ \mu = 0,20 \text{ ,, } Z &= 0,20 \cdot 5400 = 1080 \text{ ,,} \\ \mu = 0,25 \text{ ,, } Z &= 0,25 \cdot 5400 = 1350 \text{ ,,} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Wieviel beladene Förderwagen von 1250 kg Gewicht kann eine Lokomotive sählig ziehen, wenn der Rollwiderstand der Wagen 1,5% des Rollgewichtes beträgt und die Lokomotive ein Dienstgewicht  $G = 5400$  kg hat?

**Lösung:** Bei schlüpfrigen Geleisen ist die Zugkraft mit  $\mu = 0,08$  zu berechnen, dann ist

$$Z = 0,08 \cdot 5400 = 432 \text{ kg.}$$

Der Fahrwiderstand eines Förderwagens ist

$$P = 0,015 \cdot 1250 = 18,8 \text{ kg,}$$

$$\text{Wagenzahl } i = \frac{Z}{P} = \frac{432}{18,8} = 23 \text{ Wagen.}$$

**Beispiel:** Wieviel beladene Förderwagen zieht diese Lokomotive, wenn sie im Gefälle 1:200 fährt und die Schienen eine Reibungsziffer  $\mu = 0,20$  haben?

**Lösung:** Die Zugkraft der Lokomotive ist bei  $\mu = 0,20$

$$Z = 0,20 \cdot 5400 = 1080 \text{ kg.}$$

Für die Abwärtsbewegung des vollen Ladegewichtes  $L$  eines Wagens ist die Zugkraft

$$P = L \cdot \sin(\alpha - \varphi)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{200} = 0,005 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0^\circ 17'$$

$$\text{tg } \varphi = 0,015 \quad \text{,,} \quad \varphi = 0^\circ 52'.$$

Da der Winkel  $\varphi$  größer ist als  $\alpha$ , so setzt man

$$\begin{aligned} P &= L \cdot \sin(\varphi - \alpha) \\ &= 1250 \cdot \sin 0^\circ 35' = 1250 \cdot 0,010 = 12,5 \text{ kg,} \end{aligned}$$

$$\text{Wagenzahl } i = \frac{Z}{P} = \frac{1080}{12,5} = 86 \text{ Wagen.}$$

**Beispiel:** Wieviel Bergewagen von  $L = 1500$  kg Gewicht kann diese Lokomotive auf der Gefällestrecke 1:200 hochziehen?

**Lösung:** Für die Aufwärtsbewegung des vollen Ladegewichtes  $L$  wird folgende Zugkraft benötigt

$$\begin{aligned} P &= L \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ &= 1500 \cdot \sin(0^\circ 17' + 0^\circ 52') \\ &= 1500 \cdot \sin 1^\circ 9' = 1500 \cdot 0,0201 = 30 \text{ kg.} \end{aligned}$$

$$\text{Wagenzahl } i = \frac{Z}{P} = \frac{1080}{30} = 36 \text{ Wagen.}$$

**Beispiel:** Wieviel leere Förderwagen von  $L = 500$  kg Gewicht kann diese Lokomotive auf der Gefällestrecke 1:200 hochziehen?

**Lösung:** Für die Aufwärtsbewegung des leeren Wagens von  $L$  kg Gewicht wird folgende Zugkraft benötigt

$$\begin{aligned} P &= L \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ &= 500 \cdot \sin(0^\circ 17' + 0^\circ 52') \\ &= 500 \cdot \sin 1^\circ 9' = 500 \cdot 0,0201 = 10 \text{ kg.} \end{aligned}$$

$$\text{Wagenzahl } i = \frac{Z}{P} = \frac{1080}{10} = 108 \text{ Wagen.}$$

### 33. Der Keil.

Ein keilförmiger Körper stellt eine schiefe Ebene dar. In Abb. 160 soll ein Gewicht  $G$  durch die Keilkraft  $K$  gehoben werden. Zur Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen kann man sich der bekannten Kräftepläne bedienen.

Angenommen, die Keilkraft  $K$  sei der Größe und Richtung nach bekannt. An den Auflagerflächen entstehen bei reibungsloser Bewegung die Normaldrücke  $W_1$  und  $W_2$ , deren Richtungen somit festliegen. Ihre Größen findet man durch Aufzeichnen des Kräftecks.

Man zeichnet eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $K$ , zieht durch Punkt  $O$  eine Parallele zur Kraftrichtung  $W_2$  und durch Punkt 2 eine Parallele zur Kraftrichtung  $W_1$ . Dann erhält man den Schnittpunkt 1, und es ist

Linie  $\overline{O1}$  = Kraftgröße  $W_2$ ,

Linie  $\overline{I2}$  = Kraftgröße  $W_1$ .

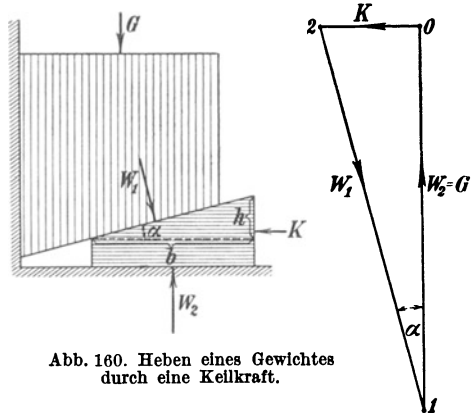


Abb. 160. Heben eines Gewichtes durch eine Keilkraft.

Es ist ohne weiteres zu erkennen, daß auch  $W_2 = G$  ist. Das Kräfteck stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Keilneigungswinkel  $\alpha$ , dar, und es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K}{G} \quad \text{oder} \quad G = \frac{K}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{oder} \quad K = G \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Am Keil ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b},$$

also ist

$$G = \frac{K \cdot b}{h}.$$

Ist z. B. die Keilneigung  $h : b = 1 : 200$ , so wird

$$G = \frac{K \cdot 200}{1} = 200 \cdot K.$$

Je flacher man den Keil nimmt, desto größer ist daher das Übersetzungsverhältnis zwischen Kraft und Last.

**Beispiel:** Welche Last  $G$  kann mit einem reibungslosen Keil, dessen Keilwinkel  $\alpha = 15^\circ$  ist, gehoben werden, wenn die Keilkraft  $K = 35$  kg beträgt?

**Lösung:** Es kann eine Last gehoben werden von der Größe

$$G = \frac{K}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{35}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{35}{0,2679} = 130,5 \text{ kg.}$$

Dieselbe Lösung findet man auch durch Aufzeichnung des in Abb. 160 angegebenen Kräftecks, indem man z. B. die Kraftlinie  $\overline{O2} = K = 35$  mm macht. Man findet dann Linienlänge  $\overline{O1} = G = 130,5$  mm = 130,5 kg.

Bei den Keilpaarungen spielt aber die Reibung eine große Rolle, das Übersetzungsverhältnis wird damit ein ganz anderes.

In Abb. 161 ist die Reibung berücksichtigt. Die Keilkraft  $K$  erzeugt an den Auflagerflächen die Stützendrücke  $N_1$  und  $N_2$  senkrecht zu den Auflagerflächen.

An der schrägen Keilfläche ist ein beliebiger Punkt  $a$  angenommen, an der horizontalen Keilfläche ein beliebiger Punkt  $b$ , in welchen die Kräfte  $N_1$  bzw.  $N_2$  angreifen sollen.

Im Punkte  $a$  wirkt in der Berührungsfläche der Reibungswiderstand  $R_1$ , im Punkte  $b$  der Reibungswiderstand  $R_2$  der Bewegung entgegen, und zwar ist

$$R_1 = \mu \cdot N_1 \quad \text{und} \quad R_2 = \mu \cdot N_2.$$

Macht man z. B.  $N_1 = 100$  mm, so wird für eine gegebene

Reibungsziffer, z. B.  $\mu = 0,33$ ,  $R_1 = 0,33 \cdot 100 = 33$  mm, d. h. man kann aus dem Kräfteparallelogramm  $N_1 = 100$  und  $R_1 = 33$  die Richtung der Resultierenden  $W_1$  finden.

In gleicher Weise kann die Richtung der Resultierenden  $W_2$  gefunden werden. Man sieht, daß die wirklichen Stützendrücke  $W_1$  und  $W_2$  mit den Stütznormalen den Reibungswinkel  $\varphi$  bilden, sie stellen sich schräg gegen die Bewegungsrichtungen.

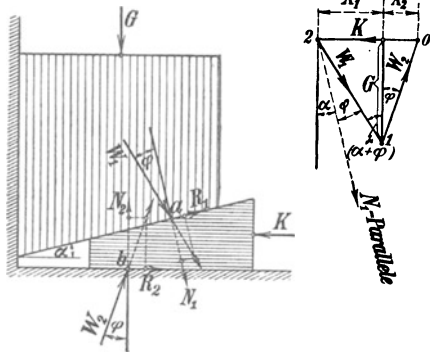


Abb. 161. Das Heben durch Keilkraft unter Berücksichtigung der Reibung.

Nachdem auf diese Weise die Richtungen der Stützenwiderstände festgelegt sind, findet man die Größen der Stützenwiderstände im Kräfteck.

Man zeichnet eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel der gegebenen Kraft  $K$ , zieht durch Punkt  $O$  eine Parallele zu  $W_2$  und durch Punkt  $2$  eine Parallele zu  $W_1$ , dann erhält man den Schnittpunkt  $I$ .

Im Kräfteck ist nun

$$\text{Linie } \overline{OI} = \text{Kraftgröße } W_2, \quad \text{Linie } \overline{I2} = \text{Kraftgröße } W_1.$$

Die Vertikalkomponente von  $W_2$  ist gleich dem Belastungsgewicht  $G$ .

$G$  teilt das Kräfteck in zwei rechtwinklige Dreiecke. In diesen ist

$$\frac{X_1}{G} = \text{tg}(\alpha + \varphi) \quad \text{und} \quad \frac{X_2}{G} = \text{tg} \varphi,$$

$$X_1 = G \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi) \quad \text{und} \quad X_2 = G \cdot \text{tg} \varphi.$$

Nun ist  $X_1 + X_2 = K$ , d. h. es ist

$$K = G \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi) + G \cdot \text{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad K = G \cdot [\text{tg}(\alpha + \varphi) + \text{tg} \varphi]$$

Das Übersetzungsverhältnis ist also

$$\frac{K}{G} = \frac{\text{tg}(\alpha + \varphi) + \text{tg} \varphi}{1}.$$

**Beispiel:** Welche Last  $G$  kann mit einem Keil, dessen Keilwinkel  $\alpha = 15^\circ$  ist, gehoben werden, wenn die Keilskraft  $K = 35$  kg und die Reibungsziffer  $\mu = 0,333$  ist?

**Lösung:** Für  $\mu = \operatorname{tg} \varphi = 0,333$  findet man  $\varphi = 18^\circ 26'$

$$\begin{aligned} \varphi &= 18^\circ 26', \\ \alpha + \varphi &= 15^\circ + 18^\circ 26' = 33^\circ 26', \\ \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) &= \operatorname{tg} 33^\circ 26' = 0,6602, \\ \operatorname{tg} \varphi &= 0,3333, \\ \hline \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi &= 0,9935 = \sim 1, \end{aligned}$$

also ist

$$\frac{K}{G} = \frac{1}{1},$$

d. h.  $K = G$ .

In diesem Fall verzehrt also die Reibung das ganze Übersetzungsverhältnis, und man könnte mit  $K = 35$  kg nur eine Last  $G = 35$  kg heben.

Bei reibungslosem Keil konnte man mit der Kraft  $K = 35$  kg die Last  $G = 130,5$  kg heben, d. h. das Übersetzungsverhältnis war

$$\frac{K}{G} = \frac{35}{130,5} = \frac{1}{3,74}.$$

Im Maschinenbau verwendet man zum Aufkeilen von Radscheiben auf Wellen Nasenkeile (Abb. 162) mit einem Anzug von der Größe  $\operatorname{tg} \alpha = 1:100 = 0,01$ . Schmiert man die Keilflächen beim Einschlagen, so kann man  $\mu = \operatorname{tg} \varphi = 0,05$  setzen. Wie groß wird das Übersetzungsverhältnis?

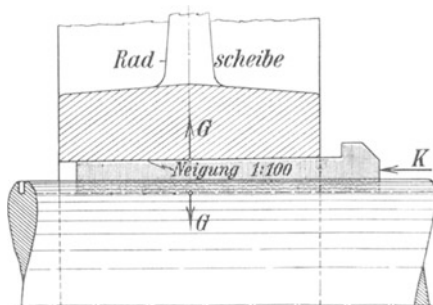


Abb. 162. Das Aufkeilen einer Radscheibe.

$$\frac{K}{G} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi}{1},$$

für  $\operatorname{tg} \alpha = 0,01$  findet man  $\alpha = 0^\circ 34'$

„  $\operatorname{tg} \varphi = 0,05$  „ „  $\varphi = 2^\circ 42'$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(0^\circ 34' + 2^\circ 52') = \operatorname{tg} 3^\circ 26' = 0,060$$

$$\frac{K}{G} = \frac{0,060 + 0,05}{1} = \frac{0,11}{1} = \sim \frac{1}{10}.$$

Schlägt der Hammer z. B. mit  $K = 100$  kg, so würde die Nabe mit  $G = 10 \cdot K = 10 \cdot 100 = 1000$  kg auseinander gepreßt werden.

Man sieht bei diesen Befestigungskeilen den Keilwinkel  $\alpha$  kleiner als den Reibungswinkel  $\varphi$  gewählt. Würde man das nicht tun, so würde, wenn  $\alpha > \varphi$  ist, der Keil bei Stößen in der Maschine sich lockern und sich selbsttätig lösen.

Der nachgiebige Grubenstempel (Abb. 163) beruht auf dem Keilgesetz. Ein bewegliches, keilförmiges Oberteil schiebt sich in ein feststehendes Unterteil. Die schräge Fläche dieses Oberteils drückt gegen einen Eisenkörper  $k$  und dieser gegen ein Holzstück  $h$ . In dem Maße, wie das Holzstück zerquetscht wird, sinkt das Oberteil ein. Es wird die

Gebirgsdruckarbeit in Formänderungsarbeit oder Vernichtungsarbeit verwandelt, das Holzstück wird vernichtet.

Die Untersuchung werde zunächst für reibungslose Bewegung durchgeführt. Dem Gebirgsdruck  $P$  wird das Gleichgewicht gehalten durch die Normalkräfte  $N_1$  und  $N_2$ , welche senkrecht zu den Berührungsflächen stehen. Nachdem hiermit die Richtungen dieser Kräfte festgelegt sind, bestimmt man ihre Größen im Kräfteeck, indem man eine Linie  $\overline{O2}$  gleich und parallel  $P$  zeichnet, durch den Punkt  $O$  eine Parallele zu  $N_1$  und durch den Punkt  $2$  eine Parallele zu  $N_2$  legt. Der Schnittpunkt beider liegt nicht mehr in der Figur, man erkennt aber

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{N_1} = \frac{P}{G}.$$

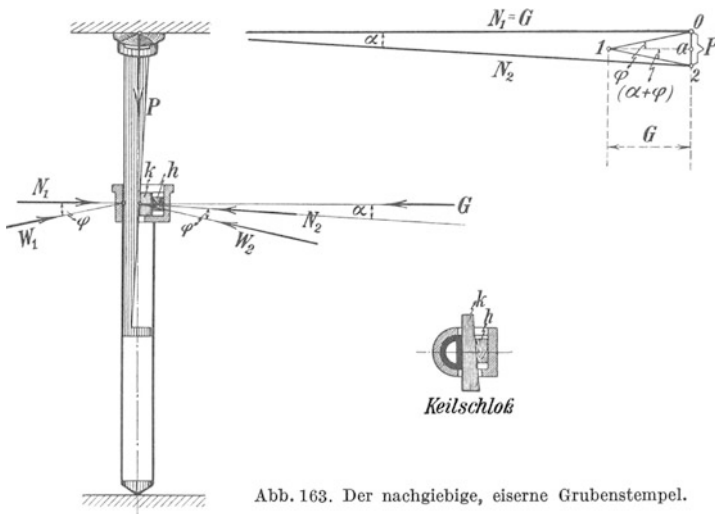


Abb. 163. Der nachgiebige, eiserne Grubenstempel.

$G$  ist die Kraft, welche das Holzstück zerquetscht, ist z. B.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{40}$ , so ist

$$\frac{P}{G} = \frac{1}{40} \quad \text{oder} \quad G = 40 \cdot P,$$

d. h. im Keilschloß würde der 40fache Gebirgsdruck das Holzstück zerquetschen. Es würde das eine außerordentlich große Kraft sein, und das Keilschloß müßte gewaltige Wandstärken erhalten.

Das wird durch die Reibung anders. An den Berührungsflächen sind die Stützkkräfte in Wirklichkeit nicht normal gerichtet, sondern schräg gegen die Bewegungsrichtung. Die Stützkkräfte  $W_1$  und  $W_2$  schließen mit den Stütznormalen die Reibungswinkel  $\varphi$  ein, die mit der Reibungsziffer  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$  gegeben sind.

Im Kräfteeck findet man die Größen von  $W_1$  und  $W_2$ , indem man durch den Punkt  $O$  eine Parallele zu  $W_1$  und durch den Punkt  $2$  eine Parallele zu  $W_2$  legt. Beide schneiden sich im Punkt  $1$ , und es ist

Linie  $\overline{O1}$  = Kraftgröße  $W_1$  und Linie  $\overline{12}$  = Kraftgröße  $W_2$ .

Linie  $\overline{Ia} \perp P$  ist gleich  $G$ , sie bildet im Kräfteeck zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Spitzenwinkeln  $\varphi$  und  $(\alpha + \varphi)$ . Man liest ab

$$\begin{aligned}\overline{0a} &= G \cdot \operatorname{tg} \varphi, \\ \overline{2a} &= G \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi), \\ \hline P = \overline{0a} + \overline{2a} &= G \cdot \operatorname{tg} \varphi + G \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi), \\ \frac{P}{G} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}{1}.\end{aligned}$$

Setzt man für Eisen auf Eisen (trocken)  $\mu = 0,20$ , so ist  $\operatorname{tg} \varphi = 0,2000$  oder der Reibungswinkel  $\varphi = 11^\circ 19'$ , setzt man ferner  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{40} = 0,025$ , so ist  $\alpha = 1^\circ 26'$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) &= 0,2000 + \operatorname{tg} (1^\circ 26' + 11^\circ 19') \\ &= 0,2000 + \operatorname{tg} 12^\circ 45' = 0,2000 + 0,2263 = 0,4263 \\ \frac{P}{G} &= \frac{0,4263}{1} = \frac{1}{2,35},\end{aligned}$$

d. h. für den Gebirgsdruck  $P$  wird im Keilschloß nur eine Gegenkraft

$$G = 2,35 \cdot P$$

wachgerufen und diese zerquetscht das Holz.

**Beispiel:** Welchen Gebirgsdruck  $P$  kann ein nachgiebiger Grubenstempel, dessen Schrägfläche die Neigung 1:40 hat, aufnehmen, wenn das Quetschholz eine Quetschfläche von  $7 \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$  hat?

**Lösung:** Die Druckfestigkeit des Holzes sei 280 kg für  $1 \text{ cm}^2$ , dann ist zum Zerquetschen des Holzes die Kraft

$$G = 28 \cdot 280 = 7840 \text{ kg}$$

erforderlich. Mit dem Reibungskoeffizienten  $\mu = 0,20$  wurde gefunden

$$\frac{P}{G} = \frac{1}{2,35} \quad \text{oder} \quad P = \frac{G}{2,35} = \frac{7840}{2,35} = 3340 \text{ kg},$$

d. h. der nachgiebige Stempel würde bereits bei einem Gebirgsdruck von 3340 kg ineinander geschoben sein.

In der Regel halten die nachgiebigen Stempel nur Drücke von 3000 bis 8000 kg aus.

Würde man in dem vorstehenden Beispiel das Quetschholz aus Eichenholz, dessen Druckfestigkeit 600 kg für  $1 \text{ cm}^2$  ist, nehmen, so würde der Gebirgsdruck das

$$\frac{600}{280} = 2,14 \text{ fache}$$

betragen müssen, also  $2,14 \cdot 3340 = \sim 7000 \text{ kg}$  sein müssen.

Man kann natürlich auch durch Vergrößerung der Quetschfläche den aufzunehmenden Gebirgsdruck steigern.

Bei der Keilneigung 1:40 des Oberteils wird für je 1 mm Quetschweg am Holz das Oberteil um 40 mm einsinken. Wird das Holz im ganzen um 10 mm eingequetscht, so sinkt der Stempel um

$10 \cdot 40 = 400$  mm zusammen, d. h. das Hangende könnte 0,40 m herunterkommen<sup>1</sup>.

Welchen Anteil die Formänderungsarbeit, die durch Zerdrücken des Quetschholzes geleistet wird, an der Vernichtung der Gebirgsdruckarbeit nimmt, zeigt folgende Rechnung:

Es werde angenommen, der Stempel erleide einen Gebirgsdruck von  $P = 0$  bis 7000 kg und sinke hierbei um 0,40 m. Die geleistete Arbeit ist dieselbe, als wenn der Stempel mit der mittleren Belastung

$$\frac{0 + 7000}{2} = 3500 \text{ kg}$$

einsinken würde. Die Gebirgsdruckarbeit ist also

$$A = 3500 \cdot 0,40 = 1400 \text{ mkg.}$$

Das Quetschholz werde mit der 2,35fachen Gebirgsdruckkraft um 1 cm zusammengequetscht, dann ist die Quetscharbeit

$$A' = 2,35 \cdot 3500 \cdot 0,01 = 82 \text{ mkg,}$$

d. h. die Formänderungsarbeit beträgt

$$\frac{82 \cdot 100}{1400} = 6\%$$

der Gebirgsdruckarbeit, und es wird bereits ein sehr großer Teil der Gebirgsdruckarbeit durch Reibung vernichtet.

Es liegt nun der Gedanke nahe, durch mehrfache Anwendung der Keilreibung den Gebirgsdruck ganz durch Reibung zu vernichten. Die mehrfache Anwendung von Keilen nennt man eine Keilkette. Einen nachgiebigen Eisenstempel dieser Art zeigt Abb. 164. Das nachgiebige Oberstück *I* des Stempels legt sich links und rechts gegen Holzflächen. Das Holzstück *II* ist an der Auflagerfläche und gegen den Keil *III* hin eisenarmiert.

Der Keil *I* schiebt beim Einsinken den Keil *II* zur Seite, dieser hebt sich und damit das Keilstück *III*, das sich elastisch gegen eine Feder legt.

Die Untersuchung der Keilkette geschieht am einfachsten zeichnerisch.  $N_1$  und  $N_2$  sind die Normalkräfte an den Berührungsflächen des ersten Keils. Die wirklichen Stützkkräfte  $W_1$  und  $W_2$  schließen den Reibungswinkel  $\varphi_1$  ( $\text{tg } \varphi_1 = \mu_1 = 0,40$  Eisen auf Holz) mit den Normalkräften ein.

Im 1. Kräfteeck ist der Gebirgsdruck  $P$  zerlegt in  $W_1$  und  $W_2$ . Das Keilstück *II* hat an den Stützflächen die Normalkräfte  $N_3$  und  $N_4$ , die wirklichen Stützkkräfte  $W_3$  und  $W_4$  schließen mit diesen den Reibungswinkel  $\varphi$  ( $\text{tg } \varphi = \mu = 0,20$  Eisen auf Eisen) ein. Die bekannte Kraft  $W_2$ , welche gegen das Keilstück *II* drückt, ist im Kräfteplan zerlegt in  $W_3$  und  $W_4$ .

Die Kraft  $W_4$  drückt gegen das Keilstück *III*, an dessen Stütz-

<sup>1</sup> Siehe „Glückauf“ 1925, Nr. 7: „Vergleichende Betrachtungen über Holz- und Eisenstempel“ von Maercks.



flächen die Gegenkräfte  $W_5$  und  $F$  auftreten. Im 2. Kräfteck ist die Strecke  $W_4$  des 1. Kräftecks in 10facher Vergrößerung aufgetragen, und es ist  $W_4$  zerlegt in  $W_5$  und  $F$ . Das Kräfteck liefert eine Federkraft  $F = 350$  kg für die maximale Stempelast  $P = 10000$  kg, d. h. in der Keilkette liegt eine Übersetzung

$$\frac{350}{10000} = \frac{1}{28,6}.$$

Die Feder wird maximal um 3 cm zusammengedrückt, also ist die

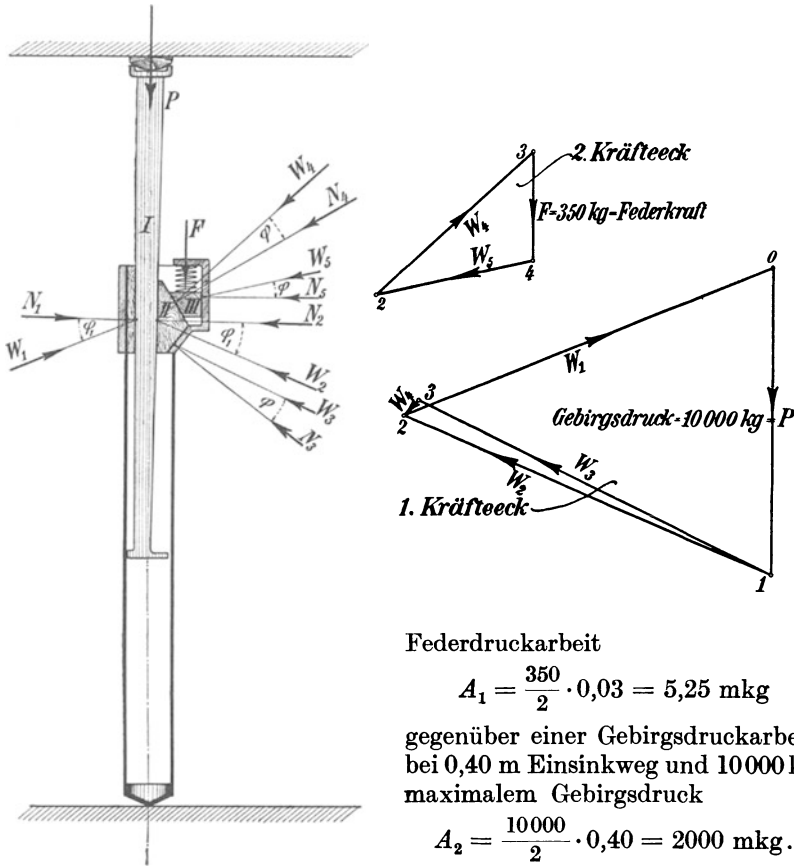


Abb. 164. Stempel mit Keilkette.

Federdruckarbeit

$$A_1 = \frac{350}{2} \cdot 0,03 = 5,25 \text{ mkg}$$

gegenüber einer Gebirgsdruckarbeit bei 0,40 m Einsinkweg und 10000 kg maximalem Gebirgsdruck

$$A_2 = \frac{10000}{2} \cdot 0,40 = 2000 \text{ mkg}.$$

Die Federdruckarbeit macht also nur noch

$$\frac{5,25 \cdot 100}{2000} = 0,26 \%$$

der Gebirgsdruckarbeit aus, d. h. praktisch wird der ganze Gebirgsdruck durch Reibung vernichtet, so daß das letzte Glied der Keilkette, die Feder, leicht entspannt und damit der Stempel leicht geraubt werden kann.

In Abb. 165 ist ein unterschämter Kohlenstoß dargestellt,  $m$  ist die

Mächtigkeit des Flözes,  $h$  die unverletzte Stoßhöhe. Das Hangende wird durch nachgiebige Grubenstempel gesenkt. Das Senken muß so gleichmäßig und vorsichtig erfolgen, daß das Hangende über dem Stoß nicht abreißt, eine Arbeit, die durch nachgiebige, eiserne Grubenstempel sehr begünstigt wird. Der Widerstand gegen das Hereinbrechen der Kohle über dem Schram ist von dem vertikalen Belastungsdruck der hangenden Massen zu überwinden. Wird ein Hohlraum hergestellt, so biegen sich die hangenden Massen durch, und es bildet sich über dem Hangenden eine sich vom Gebirge absetzende Masse von der Höhe  $H$ , die mit ihrem Eigengewicht auf das Hangende drückt. Zur Berechnung von  $H$

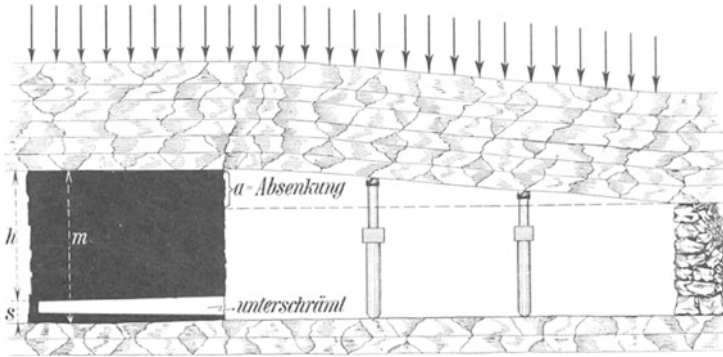


Abb. 165. Unterschrägter Kohlenstoß.

wurde die Formel

$$H = \frac{100 \cdot a}{p}$$

angegeben, wenn  $a$  die größte Senkung des Hangenden und  $p$  die prozentuale Auflockerung der Gebirgsmassen ist. Der Wert  $100 : p = c$  bleibt für eine bestimmte Gebirgsmasse konstant, also ist

$$H = c \cdot a,$$

d. h. der Druck aus dem Hangenden nimmt proportional mit der Absenkung zu.

Die Kante des Abbaustoßes bildet das Auflager für die Aufnahme des Balkendruckes aus dem Hangenden und daher tritt an dieser Stelle die größte Stoßbelastung auf. Der Gebirgs-Balken wird aber um so mehr belastet, je größer die Absenkung  $a$  des Hangenden wird. Wie weit man die Absenkung treiben kann, entscheidet die Güte des Hangenden, ob das Hangende elastisch oder spröde ist. Günstig spielen hier die geologischen Verhältnisse mit, wenn die hangende Schicht aus widerstandsfähigem Gestein besteht. Folgende Bruchzahlen seien zum Vergleich mitgeteilt:

Kohlensandstein	= 300—500 kg/cm <sup>2</sup>
Schiefer hart	= 220 kg/cm <sup>2</sup>
Schiefer mittelhart	170 kg/cm <sup>2</sup>
Schiefer weich	= 80 kg/cm <sup>2</sup>
mittlere Kohle	= 40 kg/cm <sup>2</sup> .

Je größer die Bruchzahl gegenüber der Kohle ist, um so leichter läßt sich die Kohle durch Druck hereinbrechen.

Die Bewegung in Keilnuten.

Wenn ein Körper in einer keilförmigen Rinne fortbewegt wird (Abb. 166), so sind zwei Berührungsflächen vorhanden. An beiden Berührungsflächen entsteht ein Reibungswiderstand, welcher entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt. Die Fortbewegungskraft  $K$  muß also gleich der Summe dieser beiden Reibungswiderstände sein.

Zur Berechnung der Reibungswiderstände müssen die Normalkräfte  $N_1$  und  $N_2$  der beiden Reibungsflächen ermittelt werden. Das geschieht im Kräfteck, welches mit dem Belastungsgewicht  $G$  aufgezeichnet wird. Nennt man den halben Keilwinkel  $\vartheta$ , so erscheint der Winkel  $\vartheta$  im Kräfteck wieder. Man liest ab

$$\frac{\frac{1}{2}G}{N_1} = \sin \vartheta \quad \text{oder} \quad N_1 = \frac{\frac{1}{2}G}{\sin \vartheta},$$

$$\frac{\frac{1}{2}G}{N_2} = \sin \vartheta \quad \text{oder} \quad N_2 = \frac{\frac{1}{2}G}{\sin \vartheta}.$$

Ist  $\mu$  der Reibungskoeffizient der gleitenden Reibung, so ist der Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot N_1 + \mu \cdot N_2,$$

$$R = \mu \cdot \frac{\frac{1}{2}G}{\sin \vartheta} + \mu \cdot \frac{\frac{1}{2}G}{\sin \vartheta} = \frac{\mu}{\sin \vartheta} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot G,$$

$$R = \frac{\mu}{\sin \vartheta} \cdot G.$$

Der Quotient  $\frac{\mu}{\sin \vartheta} = \mu_1$  kann der Reibungskoeffizient für die Bewegung in Keilnuten genannt werden, alsdann wird

$$R = \mu_1 \cdot G.$$

Dieser Reibungswiderstand muß von der Bewegungskraft  $K$  überwunden werden, also ist

$$K = \mu_1 \cdot G.$$

Die Keilnutenform hat also einen bedeutenden Einfluß auf die Größe der Reibung, sie vergrößert den Reibungskoeffizienten  $\mu$  der ebenen Reibung ganz erheblich, und zwar um so mehr, je kleiner der Keilwinkel wird, wie folgende Tabelle zeigt.

Halber Keilwinkel $\vartheta$	$\mu_1$ als Vielfaches von $\mu$	Halber Keilwinkel $\vartheta$	$\mu_1$ als Vielfaches von $\mu$
45°	1,41 · $\mu$	20°	2,93 · $\mu$
40°	1,55 · $\mu$	15°	3,86 · $\mu$
35°	1,74 · $\mu$	10°	5,77 · $\mu$
30°	2,00 · $\mu$	5°	11,50 · $\mu$
25°	2,36 · $\mu$		

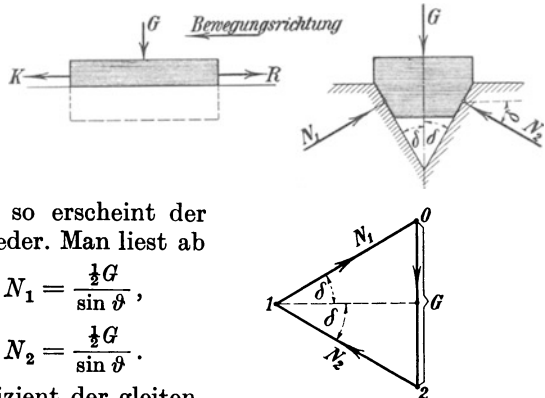


Abb. 166. Bewegung in keilförmiger Rinne.

Wenn z. B. der halbe Keilwinkel  $\vartheta = 30^\circ$ , also  $\sin \vartheta = 0,5$  ist, so wird

$$\mu_1 = 2 \cdot \mu,$$

d. h. die Keilnutenform hat denselben Einfluß, als wenn man bei ebener Bewegungsbahn eine solche Vergrößerung der Rauigkeit der Oberflächen vornehmen würde, daß der Reibungskoeffizient die doppelte Größe erreichte.

Bekanntlich ist der Reibungswinkel bei ebener Bahnfläche

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu.$$

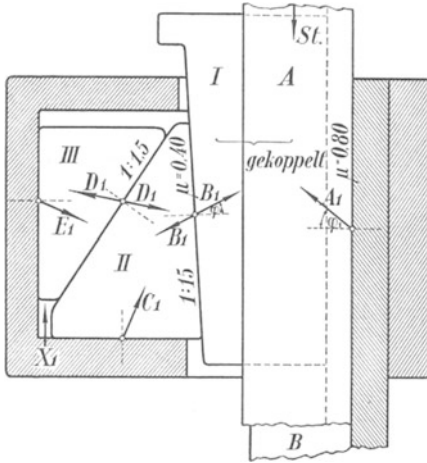
Bei der Keilnutenbahn wird der Reibungswinkel größer, er wird

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \vartheta} = \mu_1$$

und wird als Reibungswinkel für die Keilnutenbewegung bezeichnet.

Sämtliche Gleichungen für die ebenen Gleitflächenbewegungen gelten auch für die Bewegung in Keilnuten, wenn darin  $\mu$  durch  $\mu_1$  und  $\operatorname{tg} \varphi$  durch  $\operatorname{tg} \varphi_1$  ersetzt wird.

Der Bergbau stellt immer größere Anforderungen an eiserne Grubenstempel. Neben dem nachgiebigen Stempel mit Tragfähigkeiten von 3 bis 10 t verlangt er einen möglichst starren Stempel mit höchster Tragfähigkeit, der sich



St	100 %	25000 kg
A <sub>1</sub>	100 %	25000 kg
B <sub>1</sub>	87 %	21800 kg
C <sub>1</sub>	53 %	13250 kg
D <sub>1</sub>	60 %	15000 kg
E <sub>1</sub>	62 %	15500 kg
X <sub>1</sub>	11 %	2750 kg

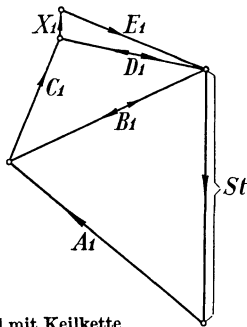


Abb. 167. Starrer Eisenstempel mit Keilkette und Keilnute.

aber leicht rauben läßt. Diese Aufgabe hat die Technik auch gelöst, indem sie die Keilkette im Stempelschloß weiter entwickelte und zur Erhöhung des Reibungswiderstandes zur Verwendung der Keilnute überging. Ein solches Stempelschloß zeigt Abb. 167, der Oberstempel A ist ein Winkeleisen mit dem halben Winkel  $\delta = 30^\circ$ , der sich in den Unterstempel gleicher Form einschleibt.

Mit  $\delta = 30^\circ$ , ist die Reibungsziffer  $\mu_1 = 2 \cdot \mu$ , d. h. war bei Eisenflächen unter hohem Druck für die ebene Berührungsfläche  $\mu = 0,40$ , so ist sie für die keilförmige Berührungsfläche  $\mu_1 = 2 \cdot 0,40 = 0,80$ .

In das Winkeleisen A legt sich keilförmig der Eisenkeil I, so daß zwischen diesen beiden Berührungsflächen auch die Reibungsziffer

$\mu_1 = 0,80$  besteht. Der Keil *I* legt sich mit ebener Berührungsfläche an den Keilkörper *II*, so daß zwischen diesen beiden Flächen die Reibungsziffer  $\mu = 0,40$  besteht. Gegen den Keilkörper *II* legt sich der Keilkörper *III* mit ebener Berührungsfläche, der sich auf der anderen Seite ebenfalls mit ebener Berührungsfläche gegen das Stempelschloßband abstützt.

Der Stempel wird beim Setzen auf die richtige Länge gesetzt, alsdann wird der Keil *I* fest geschlagen, so daß die Keilkette unter starke Spannung kommt und der Stempel tragfähig wird. Wird der Gebirgsdruck größer, so will sich der Oberstempel *A* hereinschieben. Da am Keil *I* links die Reibungsziffer  $\mu = 0,40$  und rechts die Reibungsziffer  $\mu_1 = 0,80$  herrscht, so wird Keil *I* mit dem Oberstempel *A* dynamisch gekuppelt und der Keil *I* gleitet am Keil *II*. Die geringste Senkung bringt aber eine stärkere Spannung der Keilkette, so daß eigentlich eine merkbare Senkung nicht stattfindet. So bleibt der Stempel fast starr, wenn auch der Gebirgsdruck immer stärker wird. Ein Rauben des Stempels durch Lüften des Keils *I* ist unmöglich, da zu große Kräfte ihn belasten, dagegen kann der letzte Keilkörper *III* durch einen Druck  $X_1$  von unten oder durch einen Schlag gelüftet werden, worauf der Stempel absinkt und sich rauben läßt.

In Abb. 167 sind die Kräfteverhältnisse untersucht. Die Reibungswinkel haben folgende Größen

1. für die ebenen Flächen  $\mu = 0,40 = \operatorname{tg} \varphi$  oder  $\varphi = 21^\circ 50'$ ,
2. für die Keilflächen  $\mu_1 = 0,80 = \operatorname{tg} \varphi_1$  oder  $\varphi_1 = 38^\circ 40'$ .

Der Oberstempel *A* wird abgestützt rechts durch den Stützpunkt  $A_1$ , der mit der Stütznormalen den Winkel  $\varphi_1$  bildet, und links durch den Stützendruck  $B_1$ , der mit der Stütznormalen den Winkel  $\varphi$  einschließt.

Im Kräfteplan ist der Stempeldruck  $St$  zerlegt in die Komponenten  $A_1$  und  $B_1$ . Der Stützendruck  $B_1$  am Keil *I* drückt mit der gleichen Kraft  $B_1$  entgegengesetzt gegen den Keilkörper *II*. Der Keilkörper *II* muß nach links ausweichen. Er wird gebremst durch den Stützendruck  $C_1$ , der sich gegen die Bewegungsrichtung stellt und den Winkel  $\varphi$  mit der Stütznormalen bildet. Auf dem Keilkörper *II* liegt der Keilkörper *III*, der nach oben abgleiten will und daran durch den Stützendruck  $D_1$  gehindert wird. Im Eisenkörper *III* hat daher  $D_1$  den Winkel  $\varphi$  mit der Stütznormalen entgegengesetzt zu dessen Bewegungsrichtung. Im Eisenkörper *II* ist  $D_1$  entgegengesetzt gerichtet. Und so ist im Kräfteplan die Kraft  $B_1$  zerlegt in die Komponenten  $C_1$  und  $D_1$ . Der Keil *III* schiebt sich nach oben und erfährt an der Schloßwand den Stützendruck  $E_1$ , der entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung mit der Stütznormalen den Winkel  $\varphi$  einschließt. Im Kräfteplan ist  $D_1$  zerlegt in  $E_1$  und  $X_1$ . Will man daher am letzten Keilstück *III* die Keilkräfte  $D_1$  und  $E_1$  überwinden, so muß man von unten her mit der Kraft  $X_1$  gegen das Keilstück stoßen.

Die Untersuchung zeigt, daß mit den angenommenen Reibungsziffern die Keilkette Selbsthemmung hat. Zum Rauben ist die Kraft  $X_1$  aufzubringen. Man könnte z. B. von unten her das Keilstück *III* mit

einer Druckschraube hochdrücken, und damit den Stempel zum Einsinken bringen. Die Tabelle in Abb. 167 zeigt für  $X_1$ , aus dem Kräfteeck gewonnen, den Wert  $X_1 = 0,11 \cdot St$  und für den Stempeldruck  $St = 25000 \text{ kg}$  den Wert  $X_1 = 0,11 \cdot 25000 = 2750 \text{ kg}$ .

### 34. Die Schraube.

Die Schraube folgt dem Gesetz der schiefen Ebene, denn eine Schraubenlinie entsteht, indem man eine schiefe Ebene um die Mantelfläche eines Zylinders wickelt. In Abb. 168 ist das dargestellt.

Es ist ein Rechteck von der Basis  $b = 2r\pi$  und der Höhe  $h$  gezeichnet, darin die Diagonale, welche eine schiefe Ebene mit dem Stei-

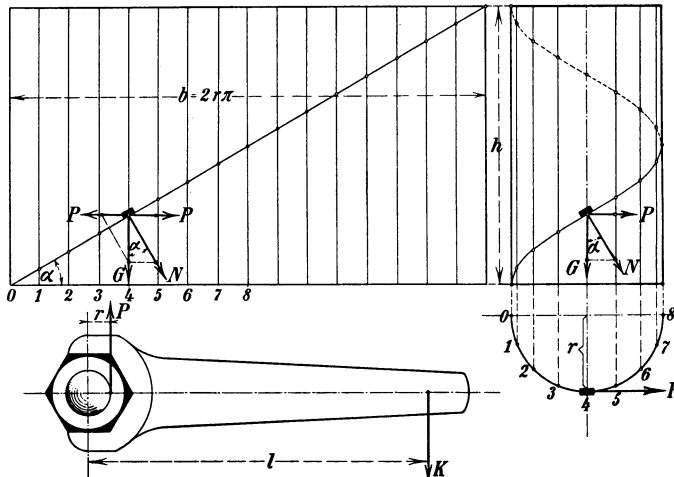


Abb. 168. Die abgewickelte Schraubenlinie als schiefe Ebene.

gungswinkel  $\alpha$  darstellt. Wickelt man das Rechteck um einen Zylinder vom Radius  $r$ , so bildet die Diagonale die Schraubenlinie. Sie legt sich so auf die Mantelfläche, daß ein Punkt, welcher sich auf der Schraubenlinie hochbewegt, bei einem vollen Umlauf um den Zylinder die Höhe  $h$  erreicht hat. Man nennt  $h$  die Steighöhe der Schraube.

Das Steigungsverhältnis der Schraubenlinie berechnet sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi}.$$

Liegt ein Körper vom Gewicht  $G$  auf der schiefen Ebene, so drückt er mit der Normalkraft  $N$  gegen die schiefe Ebene und will mit der Horizontalkomponente  $P$  nach unten abgleiten. Im rechtwinkligen Dreieck ist

$$\frac{P}{G} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Um das Abgleiten zu verhindern, muß in entgegengesetzter Richtung die gleiche Kraft

$$P = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

tätig sein.

Auf der Mantelfläche des Zylinders ist die Schraubenlinie weiter nichts als eine schiefe Ebene. Der Körper vom Gewicht  $G$  kann mit der Horizontalkraft

$$P = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

hochgeschraubt werden.

$P$  ist in diesem Fall die Tangentialkraft an der Schraube und  $G$  die axiale Belastung der Schraube. Nun wird man niemals am Umfang der Schraube mit der Kraft  $P$  angreifen können, man steckt auf die Schraubenmutter einen Schlüssel vom Hebelarm  $l$ , und wird die Schraubenmutter mit der Schlüsselkraft  $K$  anziehen. Um den Widerstand  $P$  am Umfang der Schraube zu überwinden, ist die Kraft  $K$  erforderlich. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$+ K \cdot l - P \cdot r = 0,$$

$$K = P \cdot \frac{r}{l} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{r}{l}.$$

In der Regel wird die Schlüsselkraft  $K$  bekannt sein, man kann dann aus den ebenfalls bekannten Schraubenabmessungen die Kraft  $G$ , mit welcher die Schraube axial pressen kann, berechnen:

$$G = K \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

**Beispiel:** Es sei das in Abb. 169 gezeichnete Flachgewinde gegeben, welche Axialkraft  $G$  kann mit der Kraft  $K$  ausgeübt werden, wenn auf der Schraubenspindel ein Handrad vom Radius  $l = 40$  cm sitzt?

**Lösung:** Der mittlere Schraubenganghalbmesser ist

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{50 + 40}{2} = 45 \text{ mm} = 4,5 \text{ cm},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi} = \frac{20}{2 \cdot 45 \cdot 3,14} = 0,0708,$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot K \\ &= \frac{40}{4,5} \cdot \frac{1}{0,0708} \cdot K = 125 \cdot K. \end{aligned}$$

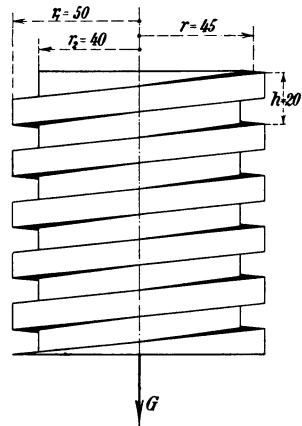


Abb. 169. Das Flachgewinde.

Die Schraube bringt also eine 125fache Übersetzung. Um 1000 kg Spindel-druck auszuüben, müßte das Handrad mit

$$K = \frac{G}{125} = \frac{1000}{125} = 8 \text{ kg}$$

angedreht werden.

Die für die Schraube abgeleiteten Gesetze gelten für reibungslose Bewegung. Praktisch findet aber immer Reibung statt, und in den meisten Fällen ist der Reibungsbetrag so groß, daß er nicht vernachlässigt werden kann.

Soll bei der schiefen Ebene die Reibung berücksichtigt werden, so ist beim Hochziehen der Last der Steigungswinkel  $\alpha$  um den Reibungswinkel  $\varphi$  zu vermehren, beim Heruntergehen der Last um den Reibungswinkel  $\varphi$  zu vermindern. Da die Schraube eine schiefe Ebene ist, so gilt dasselbe für die Schraube.

Bei der mit Reibung arbeitenden Schraube ist zur Ausübung einer Axialkraft  $G$  am Umfang der Schraube eine Kraft  $P$  erforderlich von der Größe

$$P = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Wird an der Schlüssellänge  $l$  die Kraft  $K$  ausgeübt, so ist

$$K = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot \frac{r}{l}$$

oder

$$G = K \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

**Beispiel:** Welche Axialkraft  $G$  kann mit der Schraubenspindel der vorigen Aufgabe ausgeübt werden, wenn der Reibungskoeffizient  $\mu = 0,08$  ist?

**Lösung:** Für  $\mu = 0,08$  wird  $\operatorname{tg} \varphi = 0,08$  oder der Reibungswinkel  $\varphi = 4^\circ 34'$ . Nach der vorigen Aufgabe war

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,0780 \quad \text{oder} \quad \alpha = 4^\circ 3',$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(4^\circ 3' + 4^\circ 34') = \operatorname{tg} 8^\circ 37' = 0,1515,$$

$$G = K \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = K \cdot \frac{40}{4,5} \cdot \frac{1}{0,1515} = 58 \cdot K.$$

Die Schraubenspindel bringt also bei Berücksichtigung der Reibung nur eine 58fache Übersetzung. Um 1000 kg Spindelndruck auszuüben, müßte das Handrad mit

$$K = \frac{G}{58} = \frac{1000}{58} = 17,2 \text{ kg}$$

angezogen werden, bei reibungsloser Schraube fanden wir  $K = 8$  kg, so daß der Wirkungsgrad dieser Spindel

$$\eta = \frac{8}{17,2} = 0,465$$

ist.

Zum Lösen einer mit der Axialkraft  $G$  festgepreßten Schraube ist die Kraft

$$P = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

erforderlich. Ist der Winkel  $\alpha$  kleiner als der Reibungswinkel  $\varphi$ , so setzt man

$$P = G \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha).$$

**Beispiel:** Welche Kraft ist erforderlich, um die mit  $G = 1000$  kg festgepreßte Schraubenspindel der vorigen Aufgabe zu lösen?

**Lösung:**

$$K = G \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \cdot \frac{r}{l},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \operatorname{tg}(4^\circ 34' - 4^\circ 3') = \operatorname{tg} 0^\circ 31' = 0,0090,$$

$$K = 1000 \cdot 0,009 \cdot \frac{4,5}{40} = 1 \text{ kg}.$$

Man müßte also an dem Handrad der Spindel eine Kraft  $K = 1$  kg aufwenden, um die Spindel zu lösen.

Schraubenflaschenzüge. Werden Flaschenzüge mit Schraubengetriebe oder Schneckengetriebe ausgerüstet, so erreicht man große Übersetzungsverhältnisse bei einfachster Konstruktion. In Abb. 170 ist ein Schraubenflaschenzug dargestellt. Die Last  $Q$  hängt an einer losen



Rolle. Die mit  $\frac{1}{2} Q$  belastete Kette wird auf einem Kettenrad vom Radius  $r_1$  aufgewickelt, das von einem Schraubenrad vom Radius  $R_1$  bewegt wird. Eine Schraube vom mittleren Radius  $r_2$  und der Ganghöhe  $t$  bewegt das Schraubenrad. Dieses erhält seinen Antrieb von einem Handrad, an dem die Kraft  $K$  am Hebelarm  $R_2$  dreht.

Für die Kettenradwelle heißt die Gleichgewichtsbedingung

$$+ \frac{Q}{2} \cdot r_1 - Z \cdot R_1 = 0. \tag{1}$$

Da die Schraube eine schiefe Ebene mit dem Steigungswinkel  $\alpha$  darstellt, ist

$$\frac{P}{Z} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad Z = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Damit lautet Gleichung 1:

$$\frac{Q}{2} \cdot r_1 = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot R_1. \tag{2}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Schraubenwelle lautet

$$- P \cdot r_2 + K \cdot R_2 = 0, \\ P = \frac{K \cdot R_2}{r_2}.$$

Gleichung 2 lautet hiermit

$$\frac{Q}{2} \cdot r_1 = K \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_1}{\operatorname{tg} \alpha}. \tag{3}$$

Nun ist  $2\pi \cdot R_1 = z \cdot t$ ,

$$\text{folglich} \quad R_1 = \frac{z \cdot t}{2\pi}$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{2\pi \cdot r_2}.$$

Damit lautet Gleichung 3:

$$\frac{Q}{2} \cdot r_1 = K \cdot \frac{R_2 \cdot z \cdot t \cdot 2\pi \cdot r_2}{r_2 \cdot 2\pi \cdot t},$$

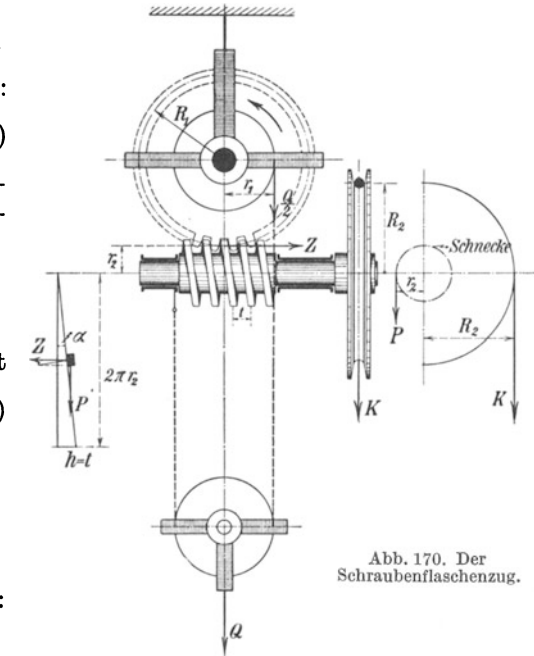


Abb. 170. Der Schraubenflaschenzug.

$$\frac{Q}{2} = K \cdot \frac{R_2}{r_1} \cdot z. \tag{4}$$

Das Schraubenradgetriebe hat also das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{\text{Last}}{\text{Kraft}} = \frac{\frac{1}{2} Q}{K} = \frac{R_2}{r_1} \cdot z \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{K} = 2 \cdot \frac{R_2}{r_1} \cdot z,$$

hierin bedeutet  $R_2$  = Radius des Handrades,  
 $r_1$  = Radius der Kettentrommel,  
 $z$  = Zähnezahl des Schraubenrades.

**Beispiel:** Der Schraubenflaschenzug habe folgende Verhältnisse

$$R_2 = 180 \text{ mm}, \quad r_1 = 60 \text{ mm}, \quad z = 30,$$

wie groß ist das Übersetzungsverhältnis?

**Lösung:**

$$\frac{\text{Last}}{\text{Kraft}} = 2 \cdot \frac{R_2}{r_1} \cdot z = 2 \cdot \frac{180}{60} \cdot 30 = 180.$$

Also ist  $Q = 180 \cdot K$ .

Ist z. B.  $K = 30$  kg, so würde sein

$$Q = 180 \cdot 30 = 5400 \text{ kg.}$$

**Der Wirkungsgrad der Schraube.**

Durch Reibung an den Berührungsflächen geht Kraft verloren, man muß daher immer mehr Kraft aufwenden als theoretisch erforderlich ist. Die Verhältniszahl

$$\frac{\text{theoretische Kraft}}{\text{verbrauchte Kraft}} = \eta$$

heißt der Wirkungsgrad der Schraube. Ist  $\alpha$  der Steigungswinkel und  $\varphi$  der Reibungswinkel, so ist nach unserer früheren Ableitung zum Heben der Last  $Q$  folgende Kraft erforderlich

theoretisch  $P_0 = Q \cdot \text{tg } \alpha$

praktisch  $P = Q \cdot \text{tg } (\alpha + \varphi)$ .

Der Wirkungsgrad der Schraube ist damit

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q \cdot \text{tg } \alpha}{Q \cdot \text{tg } (\alpha + \varphi)} = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } (\alpha + \varphi)}$$

Der Wirkungsgrad ist demnach unabhängig von der Belastung, er ist nur abhängig vom Steigungswinkel der Schraube und von dem Reibungswinkel.

Berechnet man für verschiedene Steigungswinkel und für einen konstant bleibenden Reibungswinkel die Wirkungsgrade, so erkennt man, daß der

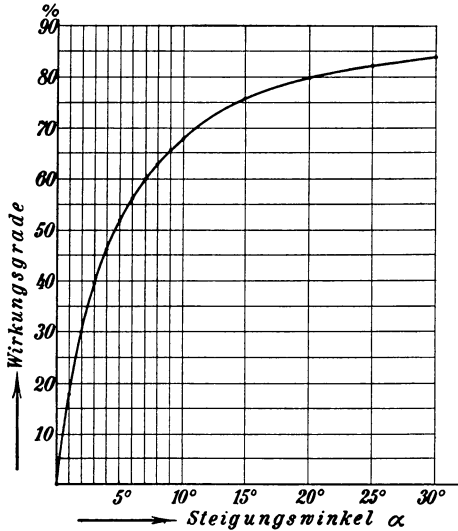


Abb. 171. Der Schraubenwirkungsgrad in Abhängigkeit vom Steigungswinkel.

Wirkungsgrad mit dem Steigungswinkel wächst. Folgende Tabelle ist mit  $\mu = 0,08 = \text{tg } \varphi$  oder  $\varphi = 4^\circ 34'$  errechnet.

Wirkungsgrade für  $\mu = 0,08$ .

Steigungswinkel $\alpha$	$\eta$	Steigungswinkel $\alpha$	$\eta$	Steigungswinkel $\alpha$	$\eta$
1°	0,18	6°	0,56	15°	0,76
2°	0,30	7°	0,60	20°	0,80
3°	0,39	8°	0,63	25°	0,82
4°	0,46	9°	0,66	30°	0,84
5°	0,52	10°	0,68		

Die Zahlenwerte sind in Abb. 171 graphisch aufgetragen. Man sieht, große Steigungswinkel sind günstig.

**Beispiel:** Wie groß wird der Wirkungsgrad des Schraubenradgetriebes der vorigen Aufgabe sein, wenn die Schnecke einen mittleren Radius  $r_2 = 54,5$  mm und eine Ganghöhe  $h = t = 36,2$  mm hat, wenn  $\mu = 0,08$  ist?

**Lösung:** Es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{2\pi r_2} = \frac{36,2}{2\pi \cdot 54,5} = 0,1051,$$

$$\alpha = 6^\circ,$$

für  $\mu = \operatorname{tg} \varphi = 0,08$  ist  $\varphi = 4^\circ 34'$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} (6^\circ + 4^\circ 34') = \operatorname{tg} 10^\circ 34' = 0,1865,$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} = \frac{0,1051}{0,1865} = 0,564.$$

Der Wirkungsgrad ist also 56,4%, so daß man unter Beachtung der Zapfenreibung höchstens mit einem Gesamtwirkungsgrad von 50% rechnen kann.

Für den reibungslosen Zustand war gefunden worden

$$Q = 180 \cdot K.$$

In Wirklichkeit wird man nur erreichen

$$Q = \eta \cdot 180 \cdot K = 0,50 \cdot 180 \cdot K = 90 \cdot K.$$

Das für das Schraubenradgetriebe gefundene Übersetzungsverhältnis

$$\frac{\text{Last}}{\text{Kraft}} = 2 \cdot \frac{R_2}{r_1} \cdot z$$

ist daher immer noch mit dem Wirkungsgrad  $\eta$  zu multiplizieren, man erhält dann

$$\frac{\text{Last}}{\text{Kraft}} = \eta \cdot 2 \cdot \frac{R_2}{r_1} \cdot z.$$

Bei älteren Schraubenflaschenzügen wählte man den Steigungswinkel der Antriebsschnecke gering, um das Getriebe selbstsperrend gegen Sinken der Last zu machen. Die neueren Schraubenflaschenzüge verwenden dagegen steilgängige Antriebsschnecken von günstigerem Wirkungsgrad. Sie verzichten auf die Selbstsperrung und verwenden eine Lastdruckbremse, welche die Schwebehaltung der Last durch das von der Last hervorgerufene Bremsmoment bewirkt.

### Das Schneckengetriebe im Maschinenbau.

Bei Untertagemaschinen müssen die Abmessungen der Antriebsmotore möglichst klein bleiben. Man ist daher gezwungen, Motore mit hohen Drehzahlen zu verwenden, und da die Arbeitswellen meistens mit niedrigen Drehzahlen laufen müssen, so ist die Zwischenschaltung einer hohen Übersetzung erforderlich, die am einfachsten durch Schneckengetriebe erreicht wird.

Man unterscheidet ein- und mehrgängige Schnecken, man geht bis zu viergängigen. Der Unterschied ist in Abb. 172 erläutert. Das Schneckenrad steht im Eingriff mit einer eingängigen Schnecke. Die Ganghöhe  $h$  der eingängigen Schnecke ist der Abstand von Mitte Gang bis Mitte Gang und damit auch gleich dem Abstand von Mitte Zahn bis Mitte Zahn, also ist

$$\text{Ganghöhe } h = \text{Zahnteilung } t.$$

Unter der eingängigen Schnecke ist eine zweigängige Schnecke (der zweite Gewindegang ist mit Strichlinien gezeichnet) dargestellt.

Die Ganghöhe  $h$  entspricht dem Abstand von Mitte Gang bis Mitte des zweiten Ganges, also ist sie doppelt so groß und damit wird

$$h = 2t.$$

Es laufen zwei Gewindegänge parallel neben einander und damit wird der Steigungswinkel  $\alpha$  der schiefen Ebene doppelt so groß. Ist  $m$  die Gängigkeit der Schnecke, so ist

$$h = m \cdot t$$

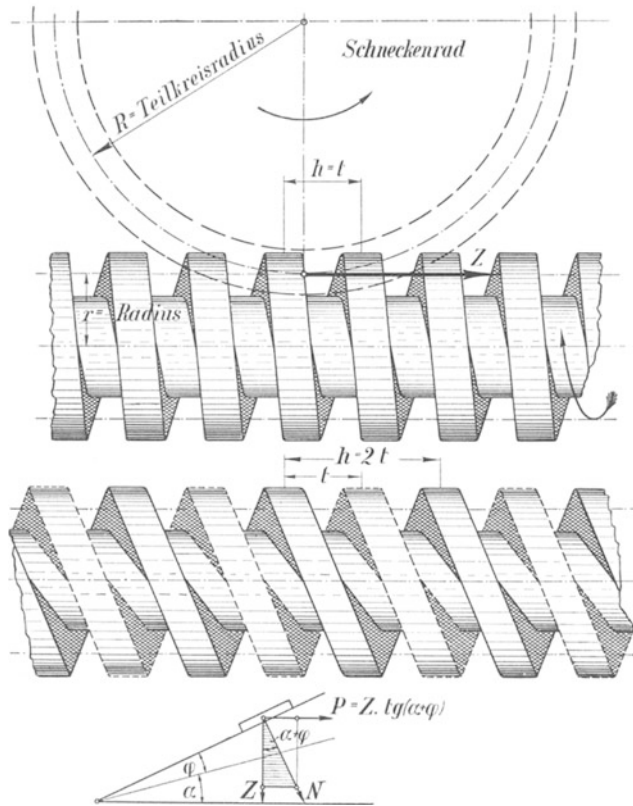


Abb. 172. Ein- und zweigängige Schnecke.

und da  $h = 2\pi \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha$  ist, so ist auch

$$m \cdot t = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Nach Abb. 172 unten ist  $P$  die am Radius  $r$  der Schnecke angreifende Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene und  $Z$  der Zahndruck senkrecht zur Basis und hierfür gilt

$$P = Z \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Durch Multiplikation mit  $2r\pi$  ergibt sich

$$P \cdot 2r\pi = Z \cdot 2r\pi \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (2)$$

Der Wirkungsgrad der schiefen Ebene oder Schnecke ist

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad \text{und daher} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\eta}.$$

Damit wird Gleichung 2

$$P \cdot 2 r \pi = Z \cdot 2 r \pi \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\eta}.$$

Nach Gleichung 1 ist  $2 r \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha = m \cdot t$ , also ist

$$P \cdot 2 r \pi = Z \cdot \frac{m \cdot t}{\eta}.$$

Damit ist das Drehmoment an der Schneckenwelle

$$M = P \cdot r = \frac{Z \cdot m \cdot t}{2 \pi \cdot \eta}$$

und der Zahndruck  $Z$  als Umfangskraft am Schneckenrad

$$Z = \frac{M \cdot 2 \pi \cdot \eta}{m \cdot t}.$$

Das Übersetzungsverhältnis des Schneckengetriebes in der Drehzahl ist, wenn  $n_1 =$  Drehzahl des Rades und  $n_2 =$  Drehzahl der Schnecke ist

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{h}{2 \pi R}.$$

Mit der Teilung  $t$  und der Zähnezahl  $z$  wird

$$i = \frac{m \cdot t}{z \cdot t} \quad \text{oder} \quad i = \frac{m}{z}.$$

Man geht mit dem Übersetzungsverhältnis nicht unter 1 : 6 und nicht über 1 : 25 und mit der Zähnezahl nicht gerne unter 28.

Der Wirkungsgrad der Schnecke ist

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Nun ist  $h = m \cdot t = 2 r \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha$  oder  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot t}{2 r \pi}$  und damit

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{m \cdot t}{2 r \pi}.$$

Hiernach hängt der Wirkungsgrad von der Mehrgängigkeit  $m$  der Schnecke ab, er wächst mit der Mehrgängigkeit. Kommt es auf einen guten Wirkungsgrad an, wird man statt der eingängigen besser zwei- und dreigängige und ausnahmsweise viergängige Schnecken verwenden. Der Grund, weshalb die mehrgängige Schnecke mit besserem Wirkungsgrad arbeitet, liegt darin, daß der Steigungswinkel  $\alpha$  des Schneckenanges größer wird, und daß mit zunehmendem Winkel  $\alpha$  der Wirkungsgrad besser wird, zeigte bereits Abb. 171.

**Aufgabe:** Es sollen  $N = 15$  PS durch eine Schneckenwelle bei der minutlichen Drehzahl  $n = 1200$  mit dem Übersetzungsverhältnis  $i = 1 : 20$  auf ein Schneckenrad übertragen werden. Die Durchmesser der Schnecke sind außen 75 mm, innen 40 mm, die Reibungsziffer Stahl auf Bronze sei  $\mu = 0,03$ . Berechne die Zähnezahl,

den Zahndruck und die abgegebene Leistung für eine ein-, zwei- und dreigängige Schnecke mit der Zahnteilung  $t = 10 \pi$ .

**Lösung:** Das von der Schneckenwelle aufgenommene Drehmoment ist

$$M = 71\,600 \frac{N}{n} \text{ cmkg} = 71\,600 \cdot \frac{15}{1200} = 895 \text{ cmkg},$$

für  $\mu = 0,03 = \operatorname{tg} \varphi$  wird  $\varphi = 1^\circ 40'$ .

1. Eingängige Schnecke  $m = 1$ .

Mittlerer Durchmesser  $d = \frac{1}{2}(40 + 75) = 57,5 \text{ mm}$

mittlerer Radius  $r = 28,75 \text{ mm},$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot t}{2 r \pi} = \frac{1 \cdot 10 \cdot \pi}{2 \cdot 28,75 \cdot \pi} = 0,1739,$$

$$\alpha = 9^\circ 52',$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(9^\circ 52' + 1^\circ 40') = \operatorname{tg} 11^\circ 32' = 0,2040,$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0,1739}{0,2040} = 0,866.$$

Umfangskraft am Schneckenrad = Zahndruck  $Z$

$$Z = \frac{M \cdot 2 \pi \cdot \eta}{m \cdot t} = \frac{895 \cdot 2 \pi \cdot 0,866}{1 \cdot 10 \pi} = 155 \text{ kg}.$$

Die Drehzahl  $n_1$  des Schneckenrades errechnet sich aus dem Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{oder} \quad n_1 = i \cdot n_2 = \frac{1}{20} \cdot 1200 = 60 \text{ i. d. Min.}$$

Die Zähnezahl ist zu errechnen aus der Formel

$$i = \frac{m}{z}, \quad \text{also} \quad z = \frac{m}{i} = \frac{1}{1:20} = 20.$$

Der Durchmesser  $D$  des Schneckenrades errechnet sich aus dem Umfang

$$\pi \cdot D = z \cdot t = z \cdot 10 \pi$$

oder

$$D = 10 \cdot z = 10 \cdot 20 = 200 \text{ mm}.$$

Die abgegebene Leistung ist

$$N_s = \eta \cdot N = 0,866 \cdot 15 = 13,0 \text{ PS}.$$

2. Zweigängige Schnecke  $m = 2$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot t}{2 r \pi} = \frac{2 \cdot 10 \cdot \pi}{2 \cdot 28,75 \cdot \pi} = 0,3478,$$

$$\alpha = 19^\circ 10',$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(19^\circ 10' + 1^\circ 40') = \operatorname{tg} 20^\circ 50' = 0,3805.$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0,3478}{0,3805} = 0,915.$$

$$\text{Umfangskraft } Z = \frac{M \cdot 2 \pi \cdot \eta}{m \cdot t} = \frac{895 \cdot 2 \pi \cdot 0,915}{2 \cdot 10 \pi} = 82 \text{ kg},$$

$$\text{Zähnezahl } z = \frac{m}{i} = \frac{2}{1:20} = 40.$$

Durchmesser des Schneckenrades  $D = 10 \cdot z = 10 \cdot 40 = 400 \text{ mm}.$

Die abgegebene Leistung ist

$$N_s = \eta \cdot N = 0,915 \cdot 15 = 13,72 \text{ PS}.$$

3. Dreigängige Schnecke  $m = 3$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot t}{2 r \pi} = \frac{3 \cdot 10 \cdot \pi}{2 \cdot 28,75 \cdot \pi} = 0,5217,$$

$$\alpha = 27^{\circ} 30',$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(27^{\circ} 30' + 1^{\circ} 40') = \operatorname{tg} 29^{\circ} 10' = 0,5581,$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0,5217}{0,5581} = 0,937.$$

$$\text{Umfangskraft } Z = \frac{M \cdot 2 \pi \cdot \eta}{m \cdot t} = \frac{895 \cdot 2 \pi \cdot 0,937}{3 \cdot 10 \pi} = 56 \text{ kg},$$

$$\text{Zähnezahl } z = \frac{m}{i} = \frac{3}{1:20} = 60.$$

Durchmesser des Schneckenrades  $D = 10 \cdot z = 10 \cdot 60 = 600 \text{ mm}$ .

Die abgegebene Leistung ist

$$N_s = \eta \cdot N = 0,937 \cdot 15 = 14,05 \text{ PS}.$$

Zusammenstellung:

In die Schneckenwelle gesetzte Leistung  $N = 15 \text{ PS}$ ,  $i = 1:20$ .

Gängigkeit m	Zahndruck Z in kg	Zähnezahl z	Raddurchm. D in mm	$\eta$ in %	abgeg. Leistg. $N_s$ in PS
1	155	20	200	0,866	13,00
2	82	40	400	0,915	13,72
3	56	60	600	0,937	14,05

Die Zusammenstellung zeigt, daß mit der Erhöhung der Gängigkeit der Wirkungsgrad des Getriebes und damit die übertragene Leistung gesteigert wird. Dafür muß man aber die Erhöhung der Zähnezahl und damit die Vergrößerung des Durchmessers in Kauf nehmen.

Es werden in den neuerzeitlichen Schneckengetrieben außerordentlich hohe Wirkungsgrade erzielt. Bei besten Werkstoffen und reiner Flüssigkeitsreibung und ununterbrochenem Betrieb kann  $\mu \leq 0,01$  werden. Bei gehärteten und geschliffenen Stahlschnecken und bronzernem Schneckenradkranz wird  $\mu = 0,02$ — $0,03$ , bei Gußeisen kann  $\mu \leq 0,12$  werden.

Soll das Schneckengetriebe selbsthemmend sein, so muß sein

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi} \leq \mu \leq \operatorname{tg} \varphi,$$

also muß dann  $\alpha \leq \varphi$  sein.

## Der Vorbaustempel.

Im Abbau werden Vorbaustempel verwendet, die eine Schraubenspindel tragen. Diese Stempel sind natürlich starr und werden infolgedessen erheblich durch den Gebirgsdruck belastet, falls sie längere Zeit stehen bleiben. Will man den Stempel rauben, so muß der Stempel mit Hilfe der Schraubenspindel ineinander geschoben werden. Dazu bedarf es einer Drehkraft, welche an den Hebelarmen der Spindelmutter angreift.

Abb. 173 zeigt einen Vorbaustempel mit Schraubenspindel. Als Gewinde wird Kordelgewinde, bei welchem der Gewindequerschnitt zylindrisch ist, verwendet, wie Abb. 173 a zeigt. Hier ist

$$d_a = 34,92 \text{ mm}$$

$$d_i = 29,50 \text{ mm}$$

$$d_m = \frac{d_a + d_i}{2} = \frac{64,42}{2} = 32,21 \text{ mm}$$

oder

$$r = 16,1 \text{ mm.}$$

Das Gewinde hat 6 Gänge auf  $1'' = 25,4 \text{ mm}$ , also ist die Ganghöhe

$$h = \frac{25,4}{6} = 4,23 \text{ mm.}$$

Damit wird der Steigungswinkel der Spindel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} = \frac{4,23}{2 \cdot 3,14 \cdot 16,1} = 0,0423,$$

$$\alpha = 2^\circ 25'.$$

In der Grube sind die Stempel starker Verschmutzung ausgesetzt, man kann daher setzen

$$\text{Reibungsziffer } \mu = \operatorname{tg} \varphi = 0,25$$

$$\varphi = 14^\circ 2'.$$

Da der Reibungswinkel  $\varphi$  größer ist als der Steigungswinkel  $\alpha$ , hat man für das Lösen der Spindel zu bilden

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \operatorname{tg}(14^\circ 2' - 2^\circ 25') = \operatorname{tg} 11^\circ 37' \\ = 0,2056.$$

Für das Lösen der Spindel ist folgende Kraft  $K$  erforderlich

$$K = \frac{G \cdot r}{l} \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha).$$

Der Stempeldruck  $G$  werde mit 1000 kg angenommen, ferner ist  $r = 16,1 \text{ mm}$  und  $l = 100 \text{ mm}$ . Damit wird

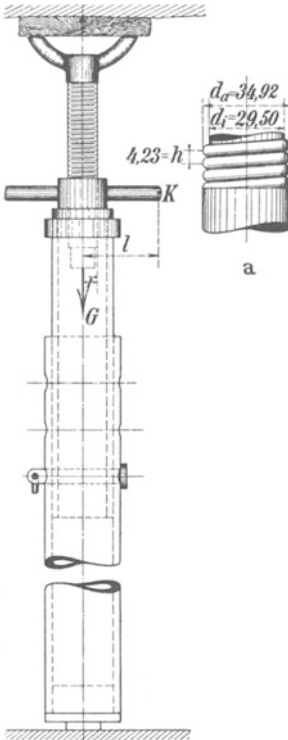
$$K = \frac{1000 \cdot 16,1}{100} \cdot 0,2056 = 31 \text{ kg,}$$

Abb. 173. Der Vorbaustempel.

d. h. für je 1000 kg Stempeldruck sind an der Spindelmutter 31 kg nötig, um die Spindel abwärts zu schrauben.

Ist z. B. der Stempeldruck 4000 kg, so wären  $4 \cdot 31 = 124 \text{ kg}$  am Hebelarm 100 mm aufzuwenden. Das kann man von Hand nicht mehr machen, man wird daher zur Verlängerung des Hebelarmes ein Gasrohrstück aufsetzen müssen, oder der Bergmann wird mit dem Hammer auf den Schraubenspindelarm losschlagen müssen.

Man vermeidet daher zweckmäßig die Anwendung des Stempels, wenn die Standzeit länger währt, da sonst das Rauben infolge des einsetzenden stärkeren Gebirgsdruckes schwierig wird.





Die scharfgängige Schraube.

Bei den bisher betrachteten Schrauben legte sich der Gewindegang mit ebener horizontaler Fläche auf seine Gegenfläche. Der Gewindegang hatte ein Rechteckprofil. Solche Schrauben nennt man flachgängig.

Bei der scharfgängigen Schraube ist die tragende Gewindegangfläche schräg gestellt, der Gewindegang hat ein Dreieckprofil. Man kann die scharfgängige Schraube aus der flachgängigen entwickeln. Das ist in Abb. 174 gezeigt.

In Abb. 174a ist die untere tragende Fläche keilförmig gestaltet. Der Gewindegang bewegt sich in Keilnuten, deren Keilwinkel  $= 2\vartheta$  ist.

In Abb. 174b sind die drei Keilflächen der nebeneinander liegenden Keilnuten zu einer einzigen Fläche vereinigt. Es entsteht eine einzige Keilnute, deren halber Keilwinkel  $= \vartheta$  ist.

Da beim Gewindegang die obere Fläche nicht trägt, so kann man ohne weiteres auch diese obere Fläche schräg stellen, und man erhält das in Abb. 174c dargestellte scharfgängige Gewinde, bei welchem das Gewindeprofil ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Wir haben bei der scharfgängigen Schraube eine Keilnutenbewegung, d. h. der Reibungskoeffizient  $\mu$  der gleitenden Reibung muß durch den Reibungskoeffizienten  $\mu_1$  der Keilnutenbewegung ersetzt werden.

Es ist

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sin \vartheta} \quad \text{und} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\text{tg } \varphi}{\sin \vartheta}.$$

In Abb. 174c ist die Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $c$ , dem Winkel  $\vartheta$  liegt die Seite  $a$  gegenüber, und es ist

$$\sin \vartheta = \frac{a}{c} = \cos \beta,$$

wenn  $\beta$  der halbe Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist, welches den Gewindequerschnitt darstellt.

Man erhält also zur Bestimmung der Keilnutenreibungszahl die Gleichung

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\cos \beta} \quad \text{oder} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \beta}.$$

Ist  $K$  die Kraft am Schlüssel von der Hebellänge  $l$  und  $G$  die axiale

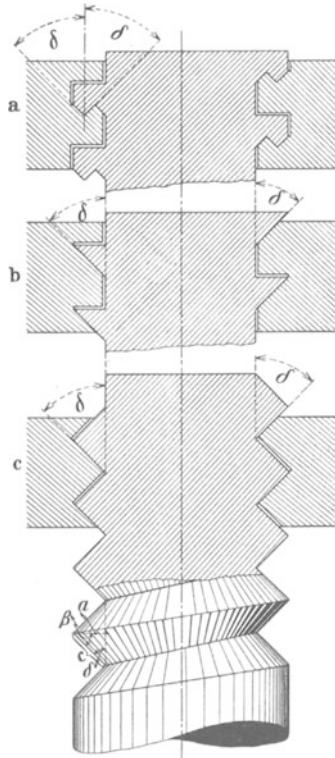


Abb. 174. Die scharfgängige Schraube.

Belastung der Schraube, so ist nach unserer früheren Ableitung

$$K \cdot l = G \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) \quad \text{Anziehen der Schraube,}$$

$$K \cdot l = G \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_1) \quad \text{Lösen der Schraube,}$$

wenn

$r$  = mittlerer Gewindehalbmesser,

$\alpha$  = Steigungswinkel des Gewindes.

Soll durch den Reibungswiderstand allein schon die rückgängige Bewegung der Schraube verhindert werden, so muß sein

$$\alpha \leq \varphi_1.$$

Die flachgängige Schraube würde schon bei dem kleineren Steigungswinkel  $\alpha = \varphi$  von selbst zurückweichen.

In solchen Fällen, wo Sicherheit gegen rückgängige Bewegung das Haupterfordernis ist, wie es bei Befestigungsschrauben gefordert wird, erfüllt die scharfgängige Schraube bei gleichem Steigungswinkel ihren Zweck besser als die flachgängige. Befestigungsschrauben haben daher immer scharfgängiges Gewinde, während Bewegungsschrauben flachgängiges Gewinde erhalten.

**Beispiel:** Eine scharfgängige Schraube habe folgende Abmessungen:

äußerer Gewindedurchmesser = 30 mm

innerer " " = 24 mm

Steigung . . . . . = 3,5 mm

Winkel an der Spitze  $2\beta$  . =  $60^\circ$

Welche Achsialkraft  $G$  kann mit einer Schlüsselkraft  $K = 14$  kg am Hebelarm  $l = 300$  mm ausgeübt werden, wenn die Reibungsziffern für gleitende Reibung  $\mu = 0,105$  ist?

**Lösung:** Der mittlere Gewindedurchmesser ist

$$d = \frac{30 + 24}{2} = 27 \text{ mm,}$$

also

$$r = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ mm.}$$

Der Steigungswinkel  $\alpha$  berechnet sich aus der Steighöhe  $h = 3,5$  mm.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} = \frac{3,5}{2\pi \cdot 13,5} = 0,0407,$$

$$\alpha = 2^\circ 20'.$$

Der Reibungswinkel  $\varphi_1$  errechnet sich aus der Reibungszahl  $\mu = 0,105 = \operatorname{tg} \varphi$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta} = \frac{0,105}{\cos 30^\circ} = \frac{0,105}{0,8660} = 0,1213,$$

$$\varphi_1 = 6^\circ 55'$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) = \operatorname{tg} 9^\circ 15' = 0,1629,$$

$$G = \frac{K \cdot l}{r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1)} = \frac{14 \cdot 300}{13,5 \cdot 0,1629} = 1900 \text{ kg.}$$

**Beispiel:** Welche Schlüsselkraft  $K$  ist nötig, um die mit einer Achsialkraft  $G = 1900$  kg belastete Schraube obiger Abmessungen zu lösen?

**Lösung:** Die Bedingungsgleichung für das Lösen der Schraube ist

$$K \cdot l = G \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_1).$$

Da der Reibungswinkel  $\varphi_1$  größer ist als der Steigungswinkel  $\alpha$ , setzt man

$$K \cdot l = G \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1 - \alpha),$$

$$K = \frac{G \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1 - \alpha)}{l},$$

$$G = 1900 \text{ kg}, \quad r = 13,5 \text{ mm}, \quad l = 300 \text{ mm}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \alpha) = \operatorname{tg}(6^\circ 55' - 2^\circ 20') = \operatorname{tg} 4^\circ 35' = 0,0802$$

$$K = \frac{1900 \cdot 13,5 \cdot 0,0802}{300} = 6,85 \text{ kg}.$$

### 35. Die Backenbremse.

Alle Fördermittel, welche vermittels einer Trommel oder Scheibe eine Last hochziehen, müssen mit einer Bremse versehen werden. Die Bremse muß so stark sein, daß sie die Last hält, vielfach wird auch als Sicherheit ein Mehrfaches der Last verlangt. Bei Fördermaschinen z. B. heißt die Vorschrift:

„Die Fahrbremse sowohl wie die Sicherheitsbremse ist so zu berechnen, daß das größte vorkommende Übergewicht bei der Güterbeförderung der einen Förderseite über die andere mit wenigstens dreifacher Sicherheit gehalten wird.“

Die schematische Darstellung einer einfachen Backenbremse zeigt Abb. 175. Am Bremshebel von der Länge  $a$  wirkt die Bremskraft  $P$  und erzeugt am Bremsklotz die Normalkraft  $N$ , so daß am Umfang der Scheibe der Reibungswiderstand

$$W = \mu \cdot N$$

entsteht. Der Drehpunkt  $D$  des Bremshebels liege in der Richtungslinie des Reibungswiderstandes  $W$ . Ander Trommelwelle herrscht Gleichgewicht, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$-W \cdot R + G \cdot r = 0,$$

$$W = G \cdot \frac{r}{R} = \mu \cdot N,$$

$$N = G \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{R}.$$

Dieser Normaldruck muß von der Bremskraft  $P$  erzeugt werden, um die Last  $G$  festzubremsen zu können. Am Bremshebel herrscht Gleichgewicht, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$+P \cdot a - N \cdot b = 0, \quad P = N \cdot \frac{b}{a}$$

oder, wenn man für  $N$  den eben abgeleiteten Wert einsetzt,

$$P = G \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a}.$$

Soll die Bremse die Last  $G$  mit dreifacher Sicherheit halten, so müßte sein

$$P = 3 \cdot G \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a}.$$

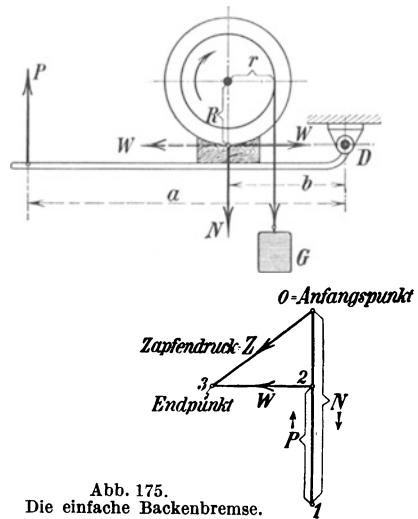


Abb. 175.  
Die einfache Backenbremse.

Um die Bremskraft  $P$  klein zu halten, ist es demnach vorteilhaft, wenn

1. die Reibungsziffer  $\mu$  sehr groß ist,
2. die Abmessungen  $R$  und  $a$  groß sind,
3. die Abmessungen  $b$  und  $r$  klein sind.

Welchen Zapfendruck  $Z$  hat der Drehpunkt  $D$  aufzunehmen?

Das zeigt das Kräfteeck in Abb. 175. Den Zapfen belastet vertikal nach unten die Kraft  $N = \overline{01}$ , vertikal nach oben die Kraft  $P = \overline{12}$ , horizontal nach links ziehend der Reibungswiderstand  $W = \overline{23}$ .

Die Linie  $\overline{03} = Z$ , welche vom Anfangspunkt  $0$  nach dem Endpunkt  $3$  zieht, ist der resultierende Zapfendruck  $Z$ .

Da die Richtungslinie für die Reibungskraft  $W$  durch den Drehpunkt  $D$  geht, erzeugt die Reibungskraft keine Drehwirkung auf den Hebel, so daß es gleichgültig ist, ob die Lasttrommel rechts oder links herumläuft.

In Abb. 176 ist der Drehpunkt  $D$  des Bremshebels außerhalb der Richtungslinie  $W$  angeordnet, so daß  $W$  mit dem Hebelarme  $c$  auch ein Drehmoment  $W \cdot c$  bildet.

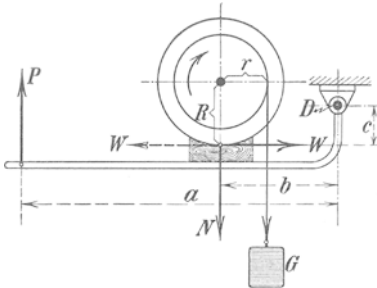


Abb. 176. Dieselbe Backenbremse mit verändertem Bremshebeldrehpunkt.

Mit  $D$  als Drehpunkt lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Hebel

$$+ P \cdot a + W \cdot c - N \cdot b = 0,$$

$$P = N \cdot \frac{b}{a} - W \cdot \frac{c}{a}.$$

Setzt man

$$W = G \cdot \frac{r}{R} \quad \text{und} \quad N = \frac{W}{\mu} = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{r}{R},$$

so wird

$$P = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a} - G \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{c}{a}, \quad (1)$$

d. h.  $P$  wird kleiner wie bei der Anordnung in Abb. 175.

Man kann in diesem Fall die Hebelverhältnisse auch so bemessen, daß  $P = 0$ , d. h. die Bremse selbstsperrend wird, denn Gleichung 1 läßt sich auch schreiben

$$P = \frac{G}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left( \frac{b}{\mu} - c \right).$$

$P$  wird gleich Null, wenn der Klammerwert Null wird.

$$\frac{b}{\mu} - c = 0 \quad \text{oder} \quad c = \frac{b}{\mu}.$$

Ist z. B.  $\mu = 0,5$ , so wird die Bremse selbstsperrend, wenn

$$c = \frac{b}{0,5} = 2b$$

wird.

Macht man außerdem noch  $R = c$ , so müßte für die Selbstsperrung werden:

$$R = \frac{b}{\mu} \quad \text{oder} \quad b = \mu \cdot R.$$

Die in Abb. 177 dargestellte Bremse ist mit  $c = R$  und  $b = \mu \cdot R = 0,5 \cdot R$  gezeichnet, eine solche Bremse würde Selbstsperrung haben.

Einfache Backenbremsen setzen den ganzen Bremsdruck  $N$  in das Wellenlager. Zweckmäßig legt man daher die Bremsbacke unten hin, dann drückt die Bremskraft nach oben und entlastet das Lager vom Druck des Trommelgewichtes.

Doppelte Backenbremsen haben diesen Nachteil nicht. Sie arbeiten, wie Abb. 178 zeigt, mit zwei einander gegenüberstehenden Bremsbacken und erzeugen radiale Drücke, die sich gegenseitig aufheben. Infolgedessen wird das Wellenlager durch die Bremswirkung nicht belastet.

Man ordnet die Hebelstützen, welche die Bremsbacken tragen, schräg gestellt an. Durch die Schrägstellung erreicht man ein selbsttätiges Ablösen der Bremsbacke von der Bremscheibe, sobald die Bremskraft aufhört. Die Bremse lüftet sich also leicht.

Die Schrägstellung liefert außerdem auf beiden Seiten den Hebelarm  $c$  für den Reibungswiderstand  $\frac{1}{2}W$ . Bei einer Linksdrehung der Trommel verstärkt auf der rechten Seite das Drehmoment

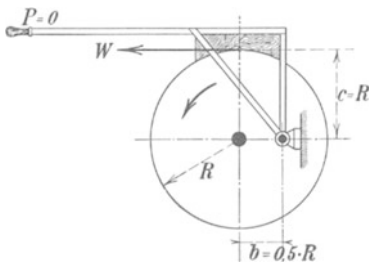


Abb. 177. Selbstsperrende Backenbremse.

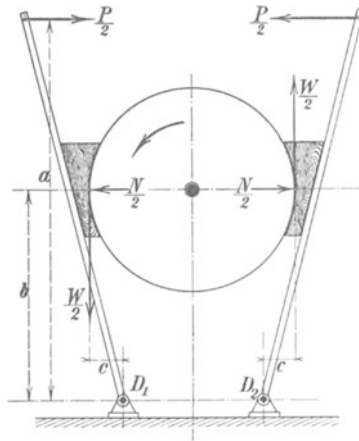


Abb. 178. Die doppelte Backenbremse.

$\frac{1}{2}W \cdot c$  die Bremswirkung, schwächt aber auf der linken Seite die Bremswirkung, denn hier lockert sich durch die Drehwirkung die Bremsbacke. Bei Rechtsdrehung der Trommel sind die Wirkungen genau entgegengesetzt.

Die in Abb. 176 dargestellte einfache Bremse unterliegt auch dem Drehmoment  $W \cdot c$ . Es verstärkt die Bremswirkung beim Rechtsdrehensinn der Trommel, schwächt aber die Bremswirkung bei entgegengesetztem Drehsinn. Soll die einfache Bremse für beide Drehrichtungen mit der gleichen Stärke bremsen, so muß man das Drehmoment  $W \cdot c$  ausschalten. Das ist der Fall, wenn  $c = 0$  wird.

Bei einfachen Bremsen, welche nach beiden Drehrichtungen mit der gleichen Stärke bremsen sollen, ist daher der Drehpunkt des Bremshebels so zu legen, daß die Richtungslinie des Bremswiderstandes  $W$  durch den Drehpunkt geht.

Die doppelte Backenbremse erfordert diese Maßnahme nicht, denn die Drehwirkungen liegen auf beiden Seiten vor, und zwar so, daß die eine Seite die Bremsung unterstützt, die andere Seite genau das Gegenteil macht, so daß diese Wirkungen sich gegenseitig aufheben. Das kann rechnerisch nachgewiesen werden.

In Abb. 178 hat der linke Bremshebel mit  $D_1$  als Drehpunkt die Gleichgewichtsbedingung

$$+\frac{P}{2} \cdot a - \frac{W}{2} \cdot c - \frac{N}{2} \cdot b = 0,$$

$$\frac{P}{2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{b}{a} + \frac{W}{2} \cdot \frac{c}{a}.$$

Der rechte Bremshebel erfüllt die Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{P}{2} \cdot a - \frac{W}{2} \cdot c + \frac{N}{2} \cdot b = 0,$$

$$\frac{P}{2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{b}{a} - \frac{W}{2} \cdot \frac{c}{a}.$$

Demnach ist die Summe beider Bremskräfte

$$\frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P = \frac{N}{2} \cdot \frac{b}{a} + \frac{W}{2} \cdot \frac{c}{a} + \frac{N}{2} \cdot \frac{b}{a} - \frac{W}{2} \cdot \frac{c}{a}$$

oder 
$$P = 2 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{b}{a} = N \cdot \frac{b}{a},$$

d. h. die Wirkung der Drehmomente der beiden Reibungswiderstände  $W/2$

hebt sich auf. Dasselbe gilt auch für den entgegengesetzten Drehsinn der Trommel. Bei der doppelten Backenbremse bleibt demnach der Hebelarm  $c$  der Reibungswiderstände für beide Drehrichtungen ohne Einfluß auf die Größe der Gesamtbremskraft  $P$ .

Die Ausführung einer Doppelbackenbremse zeigt Abb. 179. An der Seiltrommel vom Radius  $R$  zieht die Last  $G$ . Um die Last festzubremsen, müssen die Bremsbacken gegen die Bremscheibe vom Radius  $r$  gepreßt werden. Das geschieht durch die Kraft  $P_1$ , welche an dem Hebelarm  $a$  des Winkelhebels von unten nach oben drückt.

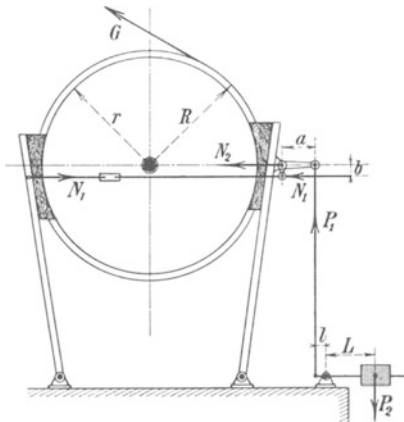


Abb 179. Ausgeführte Doppelbackenbremse.

Die Gleichgewichtsbedingung für den Winkelhebel lautet

$$-P_1 \cdot a + N_1 b = 0, \quad N_1 = P_1 \cdot \frac{a}{b}.$$

Die Kraft  $N_1$  wird durch die Zugstange auf die linke Bremsbacke gesetzt. Das Lager des Winkelhebels erhält denselben Druck  $N_1$  als Lagerdruck  $N_2$ , der sich auf die rechte Bremsbacke setzt, also ist

$$N_2 = N_1 = P_1 \cdot \frac{a}{b}$$

und 
$$N = (N_1 + N_2) = 2 \cdot P_1 \cdot \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Der Anpressungsdruck  $N$  erzeugt an der Bremscheibe die Gesamtreibung  $N \cdot \mu$ , so daß die Gleichgewichtsbedingung der Trommelwelle lautet

$$-G \cdot R + N \cdot \mu \cdot r = 0, \quad N = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r}.$$

Hiermit lautet Gleichung 1, wenn die Seiten vertauscht werden,

$$2 \cdot P_1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r},$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

Die Bremskraft  $P_1$  wird durch ein Gewicht  $P_2$  erzeugt. Für den Gewichtshebel lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$+ P_2 \cdot L - P_1 \cdot l = 0,$$

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{l}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{l}{L}.$$

Soll die Last  $G$  mit dreifacher Sicherheit gehalten werden, so muß die Gewichtskraft werden

$$P_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{l}{L}. \quad (2)$$

Für Fördermaschinenbremsen ist nach den Leitsätzen der preußischen Seilfahrtkommission nunmehr auch der Reibungskoeffizient  $\mu$  festgelegt worden. Man soll bei hölzernen Bremsklötzen auf schmiedeeisernen gedrehten Kränzen rechnen mit

$$\mu = 0,40.$$

**Beispiel:** Berechne das Fallgewicht einer Fördermaschinenbremse, wenn die unausgeglichene Last  $G$  aus der Nutzlast von 6 Förderwagen besteht.

Nutzlast = 600 kg je Wagen,

Trommeldurchmesser = 6000 mm,

$R = 3000$  mm,

Bremskranzdurchmesser = 5900 mm,

$r = 2950$  mm.

**Lösung:** Man setzt nach den Vorschriften  $\mu = 0,40$ . Zweckmäßig ist es, ein Belastungsgewicht anzunehmen und hierfür die Übersetzung auszurechnen. Will man z. B. mit dem Gewicht  $P_2 = 1000$  kg auskommen, so müßte das Übersetzungsverhältnis der Hebel

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{l}{L}$$

eine Größe haben, die sich durch Umstellung der Gleichung 2 errechnet zu

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{l}{L} = \frac{2}{3} \cdot P_2 \cdot \frac{\mu}{G} \cdot \frac{r}{R}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot \frac{0,40}{3600} \cdot \frac{2950}{3000} = \frac{2350}{32400} = \frac{1}{13,8}.$$

Man würde also mit einer Übersetzung von 1:13,8 auskommen. Das rundet man ab auf 1:15 und macht

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{l}{L} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Das Gewicht wird dann

$$P_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3600}{0,40} \cdot \frac{3000}{2950} \cdot \frac{1}{15} = 915 \text{ kg}.$$

**Bremszylinder.** In Abb. 180 werden die Bremsbacken durch einen Bremszylinder zum Anliegen gebracht, die Gewichtsbremse dient

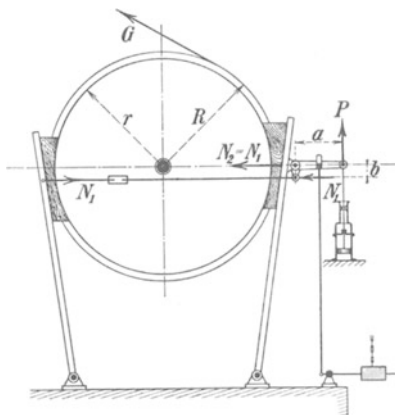


Abb. 180. Doppelte Backenbremse mit Bremszylinder.

als Sicherheitsbremse. Ist  $P$  die Bremskraft an der Kolbenstange des Bremszylinders, so wird

$$N_1 = P \cdot \frac{a}{b},$$

und da  $N_2 = N_1$  ist, so ist der gesamte Bremsdruck

$$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot P \cdot \frac{a}{b},$$

$$P = \frac{1}{2} N \cdot \frac{b}{a}.$$

Mit

$$N = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r}$$

wird

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

Soll die Last  $G$  mit dreifacher Sicherheit gehalten werden, so muß die Kolbenstangenkraft die Größe haben

$$P = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} = 1,5 \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

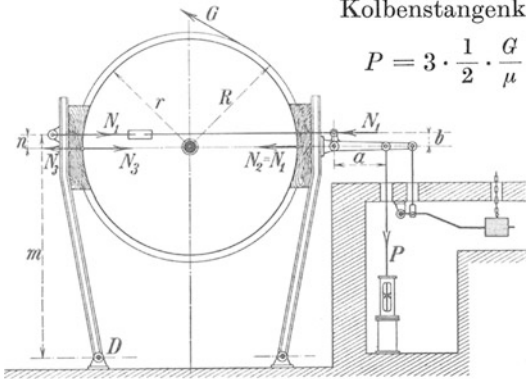


Abb. 181. Doppelte Backenbremse mit Bremszylinder.

**Beispiel:** Welchen Durchmesser muß der Bremszylinder haben, wenn die Verhältnisse der vorigen Aufgabe vorliegen, und die Bremsicherheit noch bei 5 atü gewahrt sein soll?

**Lösung:** Das Hebelverhältnis werde gewählt zu

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}.$$

Es ist

$$P = 1,5 \cdot \frac{3600}{0,40} \cdot \frac{3000}{2950} \cdot \frac{1}{5} \\ = 2750 \text{ kg},$$

$$\text{Kolbenfläche} \quad \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{2750}{5} = 550 \text{ cm}^2,$$

$$\text{Zylinderdurchmesser } d = 26,5 \text{ cm}.$$

Wird die Anordnung der doppelten Backenbremse nach Abb. 181 getroffen, so ist zu beachten, daß auf der linken Seite die Normalkraft  $N_1$  sich nicht auf die Mittellinie der Bremsbacke setzt. Der Bremsdruck  $N_3$  leitet sich aus der Zugkraft  $N_1$  ab, indem man für  $D$  als Drehpunkt die Momentengleichung des linken Bremsgestanges aufstellt:

$$+ N_1 \cdot m - N_3 \cdot (m - n) = 0,$$

$$N_3 = \frac{m}{m - n} \cdot N_1.$$

Der gesamte Anpressungsdruck auf beiden Seiten ist dann

$$N = N_1 + N_3 = \left(1 + \frac{m}{m - n}\right) \cdot N_1.$$



Da

$$N_1 = P \cdot \frac{a}{b}$$

ist, so wird

$$N = \left(1 + \frac{m}{m-n}\right) \cdot P \cdot \frac{a}{b}.$$

$$P = \frac{N}{1 + \frac{m}{m-n}} \cdot \frac{b}{a}.$$

Mit

$$N = \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r}$$

wird

$$P = \frac{1}{1 + \frac{m}{m-n}} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

Soll die Last  $G$  mit dreifacher Sicherheit gehalten werden, so muß an der Kolbenstange des Bremszylinders die Kraft  $P$  folgende Größe haben

$$P = \frac{3}{1 + \frac{m}{m-n}} \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}.$$

**Beispiel:** Wie ändert sich die Bremskraft der vorigen Aufgabe, wenn  $m=4200$  mm und  $n=250$  mm ist?

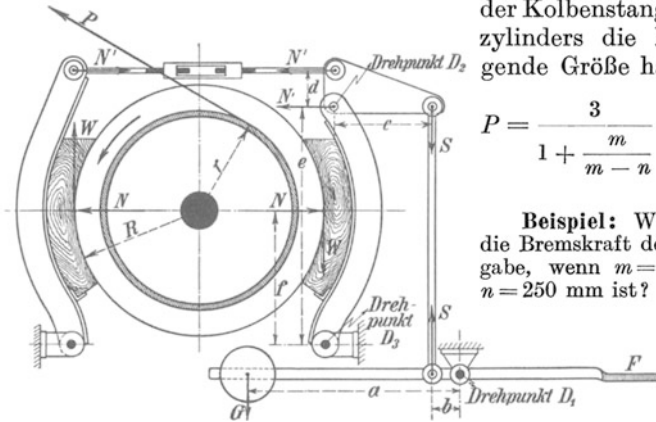


Abb. 182. Doppelte Backenbremse eines Förderhaspels.

**Lösung:**

$$\frac{m}{m-n} = \frac{4200}{4200-250} = 1,06,$$

$$\frac{3}{1 + \frac{m}{m-n}} = \frac{3}{1 + 1,06} = \frac{3}{2,06} = 1,45,$$

$$P = 1,45 \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a} \quad \text{gegenüber} \quad P = 1,50 \cdot \frac{G}{\mu} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{b}{a}$$

der vorigen Aufgabe, d. h. die erforderliche Bremskraft beträgt das

$$\frac{1,45}{1,50} = 0,965 \text{ fache}$$

der vorigen, sie wird also um 3,5% kleiner.

Neuerdings wird auch beim Haspel die Backenbremse wegen ihrer vorzüglichen Bremswirkung angewendet. Eine Ausführung dieser Art zeigt Abb. 182. Die Bremskraft wird durch das Gewicht  $G$  erzeugt, es hält die Bremse ständig geschlossen. Soll gefahren werden, so muß der Haspelführer durch Niedertreten des Fußhebels  $F$  die Bremse öffnen.

Das Gewicht  $G$  erzeugt die Stangenkraft  $S$ , diese errechnet sich aus der Momentengleichung. Sie lautet mit  $D_1$  als Drehpunkt

$$-G \cdot a + S \cdot b = 0 \quad \text{oder} \quad S = G \cdot \frac{a}{b}.$$

Die Stangenkraft  $S$  erzeugt an dem Winkelhebel die Zugkraft  $N'$ . Mit  $D_2$  als Drehpunkt ist

$$\begin{aligned} -N' \cdot d + S \cdot c &= 0, \\ N' &= S \cdot \frac{c}{d} = G \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

Im Drehpunkt  $D_2$  setzt sich die Normalkraft  $N'$  auf die Bremsbacke. Der Bremsbackenhebel hat in  $D_3$  seinen Drehpunkt. Die Bremscheibe drückt mit der Normalkraft  $N$  gegen das Bremsholz. Die Momentengleichung für den Hebel lautet mit  $D_3$  als Drehpunkt

$$\begin{aligned} -N' \cdot e + N \cdot f &= 0, \\ N &= N' \cdot \frac{e}{f} = G \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}. \end{aligned}$$

Diese Normalkraft  $N$  erzeugt am Anfang der Bremscheibe den Reibungswiderstand

$$W = \mu \cdot N.$$

Auf der linken Seite der Bremscheibe wird die zweite Bremsbacke mit der Kraft  $N'$  angezogen. Sie erzeuge dieselbe Normalkraft  $N$ , so daß auch an dieser Seite der Bremswiderstand  $W = \mu \cdot N$  entsteht.

Hat die Seiltrommel am Radius  $r$  die Seilkraft  $P$  aufzunehmen, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für die Maschinenwelle

$$\begin{aligned} -P \cdot r + 2W \cdot R &= 0, \\ P &= 2 \cdot W \cdot \frac{R}{r} = 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \frac{R}{r} \end{aligned}$$

oder

$$P = 2 \cdot \mu \cdot G \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{R}{r}.$$

Diese Seilbelastung  $P$  könnte das Bremsgewicht  $G$  gerade noch halten.

**Beispiel:** Welche Last könnte der Haspel abbremsen, wenn folgende Verhältnisse vorliegen?

Bremsgewicht  $G = 26$  kg,  $\mu = 0,40$  (Holz auf Eisen),  $R = 250$  mm,  $r = 200$  mm,

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{1}, \quad \frac{c}{d} = \frac{2,5}{1} \quad \text{und} \quad \frac{e}{f} = \frac{1,6}{1}.$$

**Lösung:** Das gesamte Übersetzungsverhältnis der Bremse ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{R}{r} = \frac{8}{1} \cdot \frac{2,5}{1} \cdot \frac{1,6}{1} \cdot \frac{250}{200} = \frac{40}{1},$$

also hält die Bremse am Seil

$$P = 2\mu \cdot G \cdot 40 = 2 \cdot 0,40 \cdot 26 \cdot 40 = 832 \text{ kg}.$$

Auch bei den Haspelbremsen wird man eine bestimmte Sicherheit vorschreiben, da der Reibungskoeffizient immer eine unsichere Größe ist.

Die Vorschrift begnügt sich mit einer 1,5fachen Sicherheit. Für unser Beispiel wäre dann

$$1,5 \cdot P = 832 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad P = \frac{832}{1,5} = 550 \text{ kg}.$$

Diese Seillast würde die Bremse mit 1,5facher Sicherheit halten.

Die Dinorm-Vorschrift für elektrische Häspel sagt: „Alle Bremsen sind als Backenbremsen auszubilden. Bei den selbstschließenden Gewichtsbremsen darf der erforderliche Fußdruck nicht größer als 35 kg und der Hub des Fußtritts nicht größer als 400 mm sein. Die mit  $\mu = 0,40$  erzielte statische Sicherheit bei dem größten Übergewicht muß mindestens ein dreifache sein. Ferner muß die erreichbare Verzögerung bei sinkender Last unter den gleichen Belastungsverhältnissen mindestens 2 m/sek<sup>2</sup> betragen.“

### 36. Die Bandreibung.

Um einen nicht drehbaren Zylinder vom Radius  $r$  sei ein Band gelegt (Abb. 183), man will das Gewicht  $G$  durch Ziehen am linken Band-

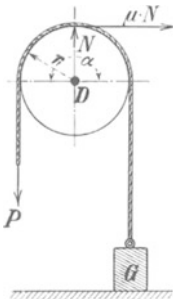


Abb. 183. Das Band gleitet auf feststehendem Zylinder.

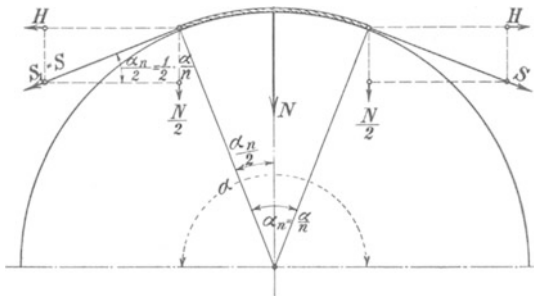


Abb. 184. Die Bandreibung.

ende heben, während das Band auf dem Zylindermantel gleitet. Dann muß man mit einer Kraft  $P$  ziehen, welche wahrscheinlich sehr viel größer sein wird als  $G$ , denn die Kräfte  $P$  und  $G$  erzeugen auf dem Zylinder einen Normaldruck  $N$ , der den Reibungswiderstand  $\mu \cdot N$  der Bewegung entgegensetzt.

Mit  $D$  als Drehpunkt wird die Momentengleichung lauten

$$- P \cdot r + \mu \cdot N \cdot r + G \cdot r = 0 \quad \text{oder} \quad P - G = \mu \cdot N,$$

d. h. die Differenz der beiden Bandspannungen würde gleich der Bandreibung sein.

Um die Bandreibung zu bestimmen, muß man den Normaldruck  $N$  kennen. Diesen findet man durch folgende Überlegung.

Man teilt den vom Band umspannten Bogen in  $n$  gleiche Teile und betrachtet ein herausgelöstes Bogenelement (Abb. 184). Auf der rechten Seite zieht die Bandkraft  $S$ , auf der linken Seite die Bandkraft  $S_1$ . Wenn keine Reibung an diesem Bandteil aufträte, wäre

$$S_1 = S.$$

$S_1$  und  $S$  sind zerlegt in die Komponenten  $H$  und  $\frac{1}{2}N$ , und es ist auf beiden Seiten

$$\frac{N}{2} = S \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{n}.$$

Je größer man die Zahl  $n$  annimmt, um so kleiner werden die Bogen-  
teilchen, und um so kleiner wird der Fehler, den man macht, wenn man  
die Sinuszahl mit der Winkelzahl oder Bogenzahl vertauscht. Also  
schreibt man

$$\frac{N}{2} = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{n} \quad \text{oder} \quad N = S \cdot \frac{\alpha}{n}.$$

Diese Normalkraft  $N$  erzeugt die Reibung

$$\mu \cdot N = \mu \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

und damit wird die Bandspannung

$$S_1 = S + \mu \cdot N = S + \mu \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n} = S \cdot \left(1 + \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right).$$

Um nun die Reibung für den ganzen umspannten Bogen zu erhalten,  
muß man für jedes Bogenelement die Spannung  $S$  mit dem Faktor  
 $\left(1 + \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)$  multiplizieren.

Die Anfangsspannung aber ist  $S = G$ , also ist die Endspannung des  
Bandes

$$P = G \cdot \left(1 + \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)^n.$$

Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\left(1 + \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)^n = 1 + \mu \cdot \alpha + \frac{(\mu \cdot \alpha)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\mu \cdot \alpha)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = e^{\mu \alpha},$$

worin  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist und den  
Wert 2,718... hat.

Demnach erhält man für die Zugkraft  $P$ , die zum Anheben des  
Gewichtes  $G$  nötig ist, die Gleichung

$$P = G \cdot e^{\mu \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{G} = e^{\mu \alpha}.$$

Das Ergebnis der Betrachtung ist insofern besonders bemerkenswert,  
als wir erkennen, daß die Endspannung  $P$  des Bandes nur von den Größen  
 $\alpha$  und  $\mu$  abhängig ist, nicht aber von dem Halbmesser  $r$  des Zylinders.

Der Wert  $\alpha$  der vorstehenden Gleichung bedeutet das Bogenmaß,  
für den ganzen Umspannungswinkel von  $360^\circ$  ist das Bogenmaß  $= 2\pi$ ,  
für einen beliebigen Umspannungswinkel  $\alpha^0$  ist der Umspannungs-  
bogen

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^\circ},$$

z. B. ist für  $\alpha^0 = 360^\circ$  der zugehörige Bogen

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{360}{360} = 2\pi \cdot \frac{1}{1} = 0,628.$$

**Beispiel:** Welche Kraft ist nötig, um bei einem Umspannungsbogen  $\alpha^0 = 180^\circ$   
ein Gewicht von 100 kg hochzuziehen, wenn der Reibungskoeffizient zwischen  
Band und Zylinder  $\mu = 0,40$  ist?

**Lösung:** Für den Umspannungsbogen  $\alpha^0 = 180^0$  ist das Bogenmaß

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{180^0}{360^0} = \pi = 3,14.$$

Die gesuchte Zugkraft hat die Größe

$$P = G \cdot e^{\mu \alpha} = 100 \cdot e^{0,40 \cdot 3,14}.$$

Der Wert  $e^{0,40 \cdot 3,14} = 2,718^{1,256}$  wird logarithmisch berechnet:

$$\log e = \log 2,718 = 0,4342,$$

$$\log e^{0,40 \cdot 3,14} = 1,256 \cdot \log 2,718 = 1,256 \cdot 0,4342 = 0,5450,$$

$$e^{0,40 \cdot 3,14} = \textit{numerous aus } 0,5450 = \mathbf{3,51}.$$

Demnach ist

$$P = G \cdot 3,51 = 100 \cdot 3,51 = 351 \text{ kg.}$$

Durch die Bandreibung kann auch ein Abrutschen der Last verhindert werden, das zeigt Abb. 185. Um den unbeweglichen Zylinder ist ein Band geschlungen, das auf der rechten Seite mit dem Gewicht  $G$  belastet ist. Um das Abrutschen des Bandes zu verhindern, muß auf der linken Seite eine Zugkraft  $P$  tätig sein. Wie groß ist diese Zugkraft?

$P$  und  $G$  erzeugen am Zylinderumfang einen Normaldruck  $N$ , und dieser erzeugt einen Reibungswiderstand  $\mu \cdot N$ , welcher sich der Abrutschbewegung entgegenstellt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$-P \cdot r - \mu N \cdot r + G \cdot r = 0,$$

$$-P - \mu \cdot N + G = 0,$$

$$P = G - \mu \cdot N.$$

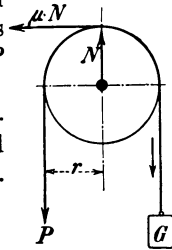


Abb. 185.  
Die Bandreibung hält die Last  $G$ .

Die Anfangsspannung des Bandes ist  $G$ , diese wird um die Reibungsgröße  $\mu \cdot N$  vermindert, die Endspannung  $P$  wird also kleiner als  $G$ . Man müßte nun wieder den ganzen Umspannungsbogen in  $n$  gleiche Teile zerlegen und dieselbe Betrachtung anstellen wie früher. Während man früher

$$P = G \cdot \left(1 + \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)^n$$

fand, würde man in diesem Fall erhalten

$$P = G \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)^n.$$

Da

$$\left(1 - \frac{\mu \cdot \alpha}{n}\right)^n = e^{-\mu \cdot \alpha}$$

ist, so wird

$$P = G \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} \quad \text{oder} \quad P = G \cdot \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha}} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{G} = \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha}}.$$

**Beispiel:** Welche Kraft ist nötig, um bei einem Umspannungsbogen  $\alpha^0 = 180^0$  ein Gewicht von 100 kg gerade am Abrutschen zu hindern, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Band und Zylinder  $\mu = 0,40$  ist?

**Lösung:** Es genügt eine Zugkraft von der Größe

$$P = G \cdot \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha}},$$

$$e^{\mu \cdot \alpha} = 2,718^{0,40 \cdot 3,14} = 3,51,$$

$$P = 100 \cdot \frac{1}{3,51} = 28,5 \text{ kg.}$$

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, daß der Zylinder unbeweglich war, und das Band gleitend über den Zylinder gezogen wurde. Auch für den umgekehrten Bewegungszustand haben die abgeleiteten Gesetze ihre Gültigkeit. In Abb. 186 ist diese Umkehrung dargestellt. Bei einer Rechtsdrehung (Fig. a) des Zylinders entsteht im festgehaltenen Band die Spannung

$$P = G \cdot e^{\mu \cdot \alpha},$$

bei einer Linksdrehung (Fig. b) des Zylinders die Spannung

$$P = G \cdot e^{-\mu \cdot \alpha}.$$

Die Gleichung für die Bandspannung hat daher die allgemeine Form

$$P = G \cdot e^{\pm \mu \cdot \alpha}.$$

Das Plus-Zeichen gilt, wenn die Reibung der Kraft  $P$  entgegen, das Minus-Zeichen, wenn die Reibung im gleichen Sinn wirkt.

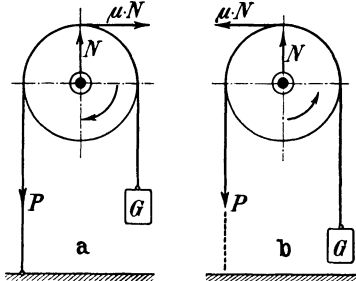


Abb. 186. Die Bandreibung bei festgehaltenem Band und sich drehender Scheibe.

In Abb. 186, Fig. b ist das Prinzip einer Maschine gegeben, welche durch eine rotierende Scheibe Schlagarbeit leisten kann. Zieht man das linke Bandende an, so hebt sich das Gewicht  $G$ , läßt man das Band los, so fällt das Gewicht zurück. Mit diesem Fallgewicht kann Schlagarbeit geleistet werden.

### 37. Die Bandbremse.

Am Hebelarm  $r$  der Windetrommel hänge eine Last  $Q$  (Abb. 187), welche die Trommel nach rechts drehen will. Soll die Last in einer bestimmten Höhenlage stehen bleiben, so muß die Abwärtsbewegung durch eine Bremse verhindert werden. Die Bremsung erfolgt durch ein Bremsband, das auf der Bremscheibe den Umschlingungswinkel  $\alpha$  hat. Die Bandspannung  $S_1$  wird größer als die Bandspannung  $S_2$  sein, sie berechnet sich nach der bekannten Gleichung  $P = G \cdot e^{\mu \alpha}$  zu

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung an der Trommel lautet

$$\begin{aligned} + Q \cdot r + S_2 \cdot R - S_1 \cdot R &= 0, \\ Q \cdot r &= (S_1 - S_2) \cdot R = S_2 \cdot (e^{\mu \alpha} - 1) \cdot R, \\ Q &= S_2 \cdot \frac{R}{r} \cdot (e^{\mu \alpha} - 1). \end{aligned}$$

Das Bremsbandstück  $S_2$  ist an einem Gewichtshebel befestigt, für dessen Drehpunkt die Momentengleichung lautet

$$+ G \cdot b - S_2 \cdot a = 0, \quad S_2 = G \cdot \frac{b}{a}.$$

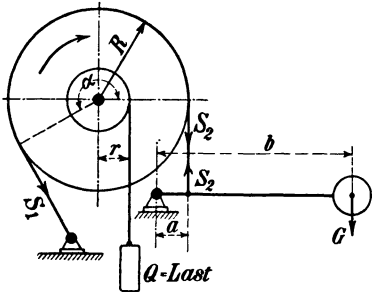


Abb. 187. Die Bandbremse bei Rechtsdrehung der Scheibe.

Die Gleichung für  $Q$  lautet damit

$$Q = G \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{R}{r} \cdot (e^{\mu\alpha} - 1). \quad (I)$$

Nach dieser Gleichung kann für ein bekanntes Bremsgewicht  $G$  diejenige Last  $Q$  berechnet werden, welche die Bremse gerade noch halten kann.

In Abb. 188 ist gezeigt, daß bei einem Wechsel der Lastrichtung und der Drehrichtung die Bandspannungen  $S_1$  und  $S_2$  zu vertauschen sind, denn die größte Bandspannung  $S_1$  ist diejenige, welche der Bewegungsrichtung der Trommel entgegenwirkt. Nunmehr wirkt am Gewichtshebel die Bandspannung  $S_1$ , und es ist die Gleichgewichtsbedingung für den Hebel

$$- S_1 \cdot a + G \cdot b = 0$$

oder

$$G = S_1 \cdot \frac{a}{b} = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \cdot \frac{a}{b}.$$

Da die Hebelkraft  $S_1$  jetzt das  $e^{\mu\alpha}$ -fache von  $S_2$  ist, so muß, um dieselbe Last  $Q$  in der Bremse festzuhalten, das Gewicht  $G$  das  $e^{\mu\alpha}$ -fache des vorigen Gewichtes werden.

Behält man aber dasselbe Gewicht  $G$  bei, so kann nur die  $\frac{1}{e^{\mu\alpha}}$ -fache Last der vorigen Drehrichtung gehalten werden. Das ist natürlich sehr ungünstig.

**Beispiel:** Welche Last kann mit einem Bremsgewicht  $G = 10$  kg abgebremst werden, wenn die Bandbremse folgende Verhältnisse hat?

$$\frac{R}{r} = \frac{4}{1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{20}{1}, \quad \alpha^0 = 240^0, \quad \mu = 0,20.$$

**Lösung:** Für die Bremsanordnung nach Abb. 187 ist

$$Q = G \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{R}{r} \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$$

Nach Tabelle ist für  $\alpha^0 = 240^0$  und  $\mu = 0,20$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 2,31$ , also wird

$$Q = 10 \cdot 20 \cdot 4 \cdot (2,31 - 1) = 1050 \text{ kg.}$$

Läuft die Last  $Q$  nach der entgegengesetzten Seite ab (Abb. 188), so zieht die größere Bandkraft  $S_1$  am Gewichtshebel, und es vermindert sich die Bremslast auf das  $\frac{1}{e^{\mu\alpha}}$ -fache.

Es könnte also nur die Last

$$Q = G \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$$

von der Bremse gehalten werden, das wäre, da  $e^{\mu\alpha} = 2,31$  ist, nur die Last

$$Q = \frac{1050}{2,31} = 455 \text{ kg.}$$

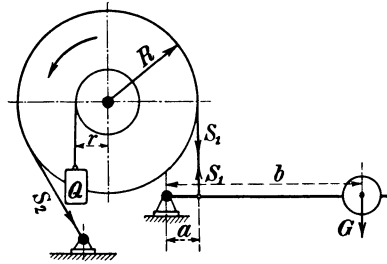


Abb. 188. Die Bandbremse bei Links-drehung der Scheibe.

Wollte man aber dieselbe Bremslast  $Q = 1050 \text{ kg}$  in der Bremse halten, so müßte das Bremsgewicht, welches  $G = 10 \text{ kg}$  betrug, auf den 2,31fachen Betrag gebracht werden, d. h. es müßte sein

$$10 \cdot 2,31 = 23,1 \text{ kg.}$$

Die Differentialbremse.

Eine Steigerung der Bremswirkung des Bandes läßt sich erzielen, wenn man beide Enden des Bremsbandes auf den beweglichen Hebel wirken läßt. Das stärker ziehende Band soll in diesem Fall die Drehung des Bremshebels unterstützen. Das zeigen die Anordnung a und b der Abb. 189.

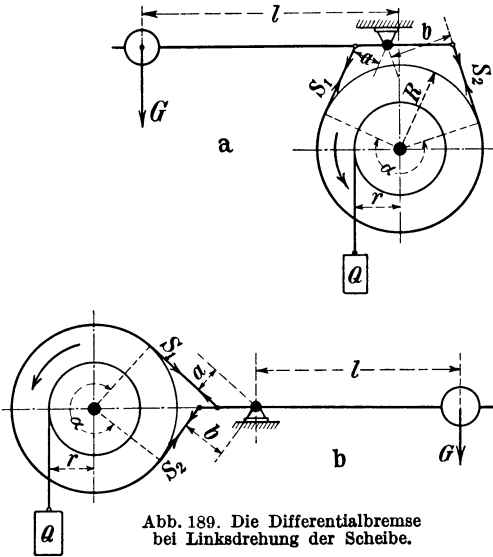


Abb. 189. Die Differentialbremse bei Links-drehung der Scheibe.

Wählt man das Verhältnis der Bandhebelarme  $a$  und  $b$  so, daß

$$S_1 \cdot a = S_2 \cdot b$$

wird, so halten die Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  allein schon den Bremshebel im Gleichgewicht und für die dritte Kraft  $G$  ergibt sich die Größe Null.

Es würde also das kleinste Gewicht  $G$  am Bremshebel ausreichen, um beliebig große Kräfte an den Bremsbändern zu erzeugen und die Brems-scheibe festzuhalten, ganz gleich, wie groß das zu haltende Gewicht auch sein möge.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet für den Fall, daß  $G = 0$  sein soll:

$$- S_1 \cdot a + S_2 \cdot b = 0, \quad S_1 \cdot a = S_2 \cdot b.$$

Da  $S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$  ist, so wird

$$S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \cdot a = S_2 \cdot b, \quad e^{\mu\alpha} \cdot a = b \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = e^{\mu\alpha}.$$

Macht man das Hebelverhältnis

$$\frac{b}{a} > e^{\mu\alpha},$$

so muß noch eine Zusatzkraft  $G$  am Bremshebel tätig sein, um die Bremslast festzuhalten.

Macht man das Hebelverhältnis

$$\frac{b}{a} < e^{\mu\alpha},$$

wobei aber  $b > a$  bleiben muß, so spannt sich die Bremse selbsttätig fest. Damit ist die Einrichtung selbstsperrend, d. h. die Bremse muß, wenn man die Bremsperre aufheben will, durch eine am Hebel entgegengesetzt zu  $G$  wirkende Kraft gelöst werden.

Praktisch wählt man das Hebelverhältnis meistens so, daß noch eine kleine Gewichtskraft  $G$  zusätzlich zur Bremsung erforderlich ist, man



macht also

$$b > a \cdot e^{\mu\alpha}.$$

Für diesen Fall werde die Gleichgewichtsbedingung (Abb. 189a) abgeleitet. Für den Gewichtshebel lautet sie

$$\begin{aligned} -G \cdot l - S_1 \cdot a + S_2 \cdot b &= 0, \\ G \cdot l &= S_2 \cdot b - S_1 \cdot a. \end{aligned}$$

Die Bandspannungen  $S_1$  und  $S_2$  müssen aus der Bremslast  $Q$  hergeleitet werden. Die Differenz der Bandkräfte

$$S_1 - S_2$$

bildet am Umfang der Bremsscheibe die Kraft, deren Drehmoment dem Drehmoment der Last  $Q$  das Gleichgewicht halten muß, also ist

$$(S_1 - S_2) \cdot R = Q \cdot r,$$

$$S_1 - S_2 = Q \cdot \frac{r}{R}.$$

Nun ist  $S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$ , also wird

$$S_2 \cdot e^{\mu\alpha} - S_2 = Q \cdot \frac{r}{R},$$

$$S_2 \cdot (e^{\mu\alpha} - 1) = Q \cdot \frac{r}{R},$$

$$S_2 = \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R},$$

und damit wird

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} = Q \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R}.$$

Setzt man die Werte von  $S_1$  und  $S_2$  in die Gleichung  $G \cdot l = S_2 \cdot b - S_1 \cdot a$  ein, so wird

$$G \cdot l = \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} \cdot b - Q \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} \cdot a,$$

$$G \cdot l = \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} (b - e^{\mu\alpha} \cdot a) \quad \text{oder} \quad Q = G \cdot l \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{b - e^{\mu\alpha} \cdot a}.$$

In Abb. 190 ist dieselbe Hebelanordnung gelassen, es läuft nur die Last  $Q$  nach der anderen Seite ab, so daß die Bremsung mit entgegengesetztem Drehsinn erfolgen muß. Nunmehr wirkt die größere Bandkraft  $S_1$  nicht mehr fördernd auf die Bremsdrehung des Gewichtshebels. Die Gleichgewichtsbedingung für den Gewichtshebel lautet

$$+ S_1 \cdot b - S_2 \cdot a - G \cdot l = 0, \tag{I}$$

$$G \cdot l = S_1 \cdot b - S_2 \cdot a.$$

Nun ist wieder

$$S_1 = Q \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R},$$

$$S_2 = \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R}.$$

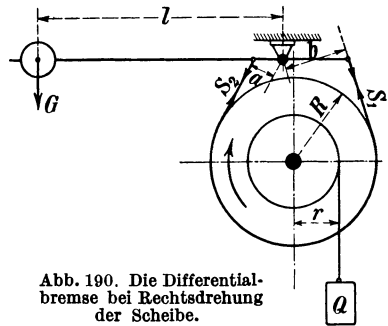


Abb. 190. Die Differentialbremse bei Rechtsdrehung der Scheibe.

Hiermit lautet die Gleichung I

$$G \cdot l = Q \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} \cdot b - \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} \cdot a,$$

$$G \cdot l = \frac{Q}{e^{\mu\alpha} - 1} \cdot \frac{r}{R} \cdot (b \cdot e^{\mu\alpha} - a) \quad \text{oder} \quad Q = G \cdot l \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{b \cdot e^{\mu\alpha} - a}.$$

**Beispiel:** Ein Differentialbremsband arbeite mit dem Umschlingungswinkel  $\alpha = 240^\circ$  auf eine Scheibe vom Radius  $R = 50$  cm, die Last hänge an einer Trommel vom Radius  $r = 40$  cm. Am Gewichtshebel seien die Hebellängen

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 12 \text{ cm}, \quad l = 50 \text{ cm}.$$

Welche Last kann mit dem Bremsgewicht  $G = 5$  kg gehalten werden, wenn  $\mu = 0,20$  ist?

**Lösung:** 1. Die Bremse habe die Anordnung der Abb. 189 a, d. h. die größere Bandkraft  $S_1$  unterstützt die Wirkung des Bremsgewichtes.

Für  $\alpha = 240^\circ$  und  $\mu = 0,20$  ist nach Tabelle

$$e^{\mu\alpha} = 2,31.$$

Das Hebelverhältnis ist

$$\frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2,4 > 2,31,$$

d. h. die Bremse hat keine Selbstsperrung. Nach unserer Ableitung ist

$$Q = G \cdot l \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{b - e^{\mu\alpha} \cdot a},$$

$$Q = 5 \cdot 50 \cdot \frac{50}{40} \cdot \frac{2,31 - 1}{12 - 2,31 \cdot 5} = 915 \text{ kg}.$$

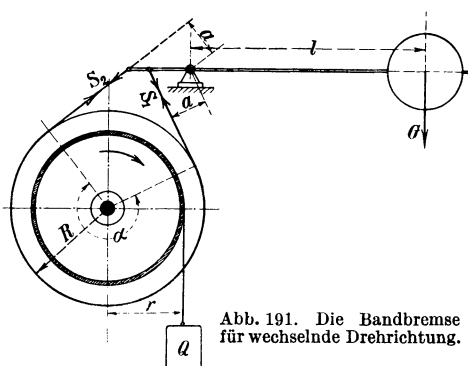


Abb. 191. Die Bandbremse für wechselnde Drehrichtung.

2. Die Bremse habe die Anordnung der Abb. 190, d. h. sie soll in der entgegengesetzten Richtung die Last  $Q$  abbremsen, dann ist nach unserer Ableitung

$$Q = G \cdot l \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{b \cdot e^{\mu\alpha} - a}$$

$$= 5 \cdot 50 \cdot \frac{50}{40} \cdot \frac{2,31 - 1}{12 \cdot 2,31 - 5} = 18 \text{ kg}.$$

Die Bremswirkung für diese Umlaufrichtung ist also fast Null, so daß eine Differentialbremse dieser Anordnung sich nur für eine und nicht für wechselnde Umlaufrichtung eignet.

Die Bandbremse für wechselnde Drehrichtung.

Der für den Grubenbetrieb benutzte Haspel soll für beide Drehrichtungen eine gleichgünstige Bremswirkung haben. Diese Wirkung ist möglich, wenn man beide Bandenden mit gleichem Hebelarm an dem Gewichtshebel anschließt. Abb. 191 zeigt eine solche Ausführungsart.

Die Bandkräfte  $S_1$  und  $S_2$  haben in bezug auf den festen Drehpunkt des Gewichtshebels dieselbe Hebelarmgröße  $a$ . Das Drehmoment der Last  $Q$  muß von dem Drehmoment der Bandreibung aufgenommen werden. Der Bandreibungswiderstand  $P$  ist gleich der Differenz der beiden Bandkräfte, also ist

$$P = S_1 - S_2.$$

Die Gleichgewichtsbedingung der Trommelwelle lautet

$$-P \cdot R + Q \cdot r = 0,$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{(S_1 - S_2) \cdot R}{r}.$$

Nun ist

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha},$$

$$S_1 - S_2 = S_2 \cdot (e^{\mu \alpha} - 1).$$

Damit wird

$$Q = S_2 \cdot (e^{\mu \alpha} - 1) \cdot \frac{R}{r} \quad (\text{Gleichung a}).$$

Für den Gewichtshebel lautet die Gleichgewichtsbedingung

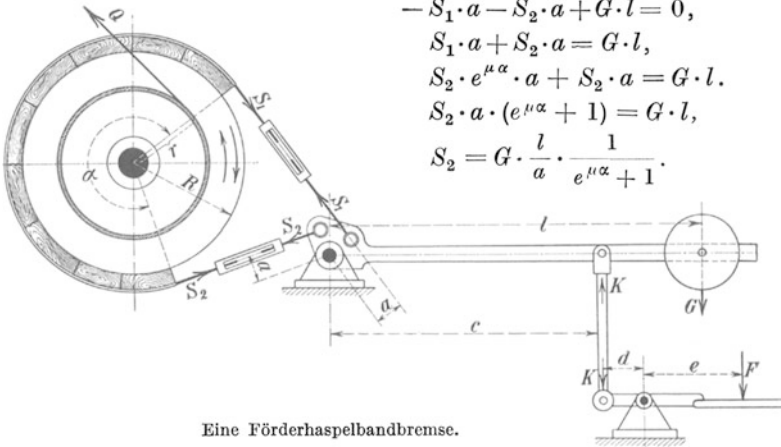
$$-S_1 \cdot a - S_2 \cdot a + G \cdot l = 0,$$

$$S_1 \cdot a + S_2 \cdot a = G \cdot l,$$

$$S_2 \cdot e^{\mu \alpha} \cdot a + S_2 \cdot a = G \cdot l,$$

$$S_2 \cdot a \cdot (e^{\mu \alpha} + 1) = G \cdot l,$$

$$S_2 = G \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{1}{e^{\mu \alpha} + 1}.$$



Eine Förderhaspelbandbremse.

Mit diesem Wert von  $S_2$  lautet die vorige Gleichung a für  $Q$

$$Q = G \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{1}{e^{\mu \alpha} + 1} \cdot (e^{\mu \alpha} - 1) \cdot \frac{R}{r} \quad \text{oder} \quad Q = G \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha} + 1}.$$

Das Bremsgewicht  $G$  kann diese Last  $Q$  nach beiden Drehrichtungen gerade noch halten.

**Beispiel:** Ein Förderhaspel, dessen Antrieb durch einen stehenden Blockmotor erfolgt, hat eine Bandbremse nach Anordnung der Abb. 192. Welche Last  $Q$  kann die Bremse gerade noch halten, wenn folgende Verhältnisse vorliegen?

Reibungsziffer Holz auf Eisen  $\mu = 0,40$ , Umschlingungsbogen  $\alpha^{\circ} = 270^{\circ}$ , Bremsgewicht  $G = 36$  kg, Bremshebellänge  $l = 74$  cm, Hebellängen  $a = 5,2$  cm, Trommelradius  $r = 15$  cm, Brems scheibenradius  $R = 25$  cm.

**Lösung:** Nach Tabelle im Anhang findet man für  $\alpha^{\circ} = 270^{\circ}$  und  $\mu = 0,40$

$$e^{\mu \alpha} = 6,60.$$

Die Bremslast ist

$$Q = G \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha} + 1} = 36 \cdot \frac{74}{5,2} \cdot \frac{25}{15} \cdot \frac{6,60 - 1}{6,60 + 1} = 630 \text{ kg.}$$

Rechnet man, daß die Last mit 1,25facher Sicherheit gehalten werden soll, so ist die wirkliche Bremslast

$$\frac{630}{1,25} = 500 \text{ kg.}$$

An dem Gewichtshebel der Bremse greift noch ein Gestänge an, das mittels Fußhebels und der Fußkraft  $F$  die Bremse lüftet. Wie groß muß die Fußkraft  $F$  sein?

Bei gelüfteter Bremse sind die Bandkräfte  $S_1$  und  $S_2$  gleich Null, der Gleichgewichtszustand am Gewichtshebel herrscht, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$-K \cdot c + G \cdot l = 0 \quad \text{oder} \quad K = G \cdot \frac{l}{c}.$$

Am Fußhebel herrscht Gleichgewicht, wenn ist

$$-K \cdot d + F \cdot e = 0 \quad \text{oder} \quad F = K \cdot \frac{d}{e} = G \cdot \frac{l}{c} \cdot \frac{d}{e}.$$

Für die berechnete Bremse liegen folgende Verhältnisse vor:

$$c = 54 \text{ cm}, \quad l = 74 \text{ cm}, \quad d = 8 \text{ cm}, \quad e = 20 \text{ cm}, \quad G = 36 \text{ kg}.$$

Mit diesen Werten ist die erforderliche Fußkraft

$$F = 36 \cdot \frac{74}{54} \cdot \frac{8}{20} = \sim 20 \text{ kg}.$$

Der Lüftungshub  $s$ , gemessen am Hebelarm  $a$  des Gewichtshebels, berechnet sich wie folgt:

Das Band umspannt die Bremscheibe etwa zu  $\frac{3}{4}$  des Umfangs, also hat die aufliegende Bandlänge beim Scheibendurchmesser  $D$  die Größe  $\frac{3}{4} \pi \cdot D$ . Soll das Band um das Maß  $x$  radial gelüftet werden, so wächst der Durchmesser auf  $(D + 2x)$  und der Bandbogen auf  $\frac{3}{4} (D + 2x) \cdot \pi$ . Die Differenz der Bogenlängen entspricht dem Lüftungshub  $s$ , also ist

$$s = \frac{3}{4} (D + 2x) \cdot \pi - \frac{3}{4} D \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot 2x \cdot \pi = 1,5 \pi \cdot x.$$

Praktisch wählt man die radiale Lüftung  $x$  bis zu 1,5 mm. Der Weg für den Fußhebel ist dann unter Beachtung der Hebelübersetzungen der Abb. 192

$$f = s \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{e}{d}.$$

Dieser Weg soll nicht über 400 mm sein.

Für  $x = 1,5 \text{ mm}$  ist  $s = 1,5 \cdot \pi \cdot 1,5 = 7,1 \text{ mm}$ , ferner ist

$$f = 7,1 \cdot \frac{54}{5,2} \cdot \frac{20}{8} = 185 \text{ mm}.$$

**Beispiel:** Die Bandbremse eines Zwillingshaspels habe wieder die Anordnung der Abb. 192. Die Hebelarme  $a$  der beiden Bandkräfte  $S_1$  und  $S_2$  sind gleich, so daß die Bremswirkung für beide Drehrichtungen gleich gut ist.

Es soll die größte Trommellast  $Q$  berechnet werden, welche die Bremse halten kann. Gegeben sind die Größen:

Umschlingungsbogen  $\alpha = 280^\circ$ ,  $\mu = 0,40$ , Bremsgewicht  $G = 62 \text{ kg}$ , Gewichtshebel  $l = 85 \text{ cm}$ , Hebellängen  $a = 3,5$ , Trommelradius  $r = 35 \text{ cm}$ , Bremscheibenradius  $R = 42,5 \text{ cm}$ .

**Lösung:** Die Lösung werde ohne Benutzung der abgeleiteten Formel durchgeführt.

Die Gleichgewichtsbedingung für den Gewichtshebel lautet:

$$-S_1 \cdot a - S_2 \cdot a + G \cdot l = 0,$$

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$

mit  $\alpha = 280^\circ$  und  $\mu = 0,40$  ist nach Tabelle im Anhang

$$e^{\mu \alpha} = 7,0, \quad \text{also ist} \quad S_1 = 7 \cdot S_2,$$

$$-7 \cdot S_2 \cdot a - S_2 \cdot a + G \cdot l = 0,$$

$$S_2 = \frac{G \cdot l}{8 \cdot a} = \frac{62 \cdot 85}{8 \cdot 3,5} = 189 \text{ kg},$$

$$S_1 = 7 \cdot S_2 = 7 \cdot 189 = 1323 \text{ kg},$$

$$S_1 - S_2 = 1323 - 189 = 1134 \text{ kg} = P.$$

Diese Kraft  $P$  ist der Reibungswiderstand am Umfang der Bremscheibe, welcher der Trommellast das Gleichgewicht halten muß, also ist

$$-Q \cdot r + P \cdot R = 0,$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{1134 \cdot 42,5}{35} = 1380 \text{ kg}.$$

Rechnet man wieder mit 1,25facher Sicherheit, so kann die Bremse die Trommellast

$$\frac{1380}{1,25} = 1100 \text{ kg}$$

halten.

Auch diese Bremse ist mit einem Fußhebel versehen, mittels dessen die Bremse beim Fahren gelüftet wird. Mit den Hebelarmen der Abb. 192 ist die erforderliche Fußkraft

$$F = G \cdot \frac{l}{c} \cdot \frac{d}{e}.$$

Dem Gestänge liegen folgende Ausführungsmaße zugrunde:  $l = 85 \text{ cm}$ ,  $c = 22 \text{ cm}$ ,  $d = 6 \text{ cm}$ ,  $e = 52 \text{ cm}$ .

$$F = 62 \cdot \frac{85}{22} \cdot \frac{6}{52} = \sim 28 \text{ kg}.$$

### 38. Die Seilrutschgefahr.

Bei Treibscheibenförderung muß die Reibung zwischen Seil und Treibscheibe die Maschinenkraft auf das Seil übertragen. In Abb. 193 ist eine Treibscheibenförderung dargestellt. Die Leerlasten auf beiden Seiten seien vollständig ausgeglichen, sie betragen für jede Seite  $G \text{ kg}$ . Der leere Korb stehe auf der linken Seite oben, der volle Korb auf der rechten Seite unten, er habe die Nutzlast  $N$  zu tragen.

Auf der linken Seite zieht also nur die Seilbelastung  $G$ . Soll das Seil auf der festgebremsten Scheibe rutschen, so muß die Seilkraft auf der rechten Seite die Größe

$$G \cdot e^{\mu\alpha}$$

haben. Auf der rechten Seite hängt die Belastung  $(G + N)$ . Sobald diese den Wert  $G \cdot e^{\mu\alpha}$  erreicht hat, wird das Rutschen eintreten. Die Bedingung für das Rutschen des Seiles lautet daher

$$G + N = G \cdot e^{\mu\alpha},$$

$$N = G \cdot e^{\mu\alpha} - G = G \cdot (e^{\mu\alpha} - 1).$$

Die Nutzlast darf diese Größe nicht erreichen, sonst beginnt das Seil zu rutschen.

**Beispiel:** Das Leergewicht auf beiden Seilseiten sei  $G = 10000 \text{ kg}$ . Bei welcher Nutzlast  $N$  beginnt das Seilrutschen, wenn die Reibungsziffer zwischen Seil und Scheibe  $\mu = 0,20$  und der Umschlingungswinkel  $\alpha^0 = 180^0$  ist?

**Lösung:** Nach Tabelle im Anhang ist für  $\alpha^0 = 180^0$  und  $\mu = 0,20$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 1,87$ .

Hiermit wird die Nutzlast

$$N = G \cdot (e^{\mu\alpha} - 1) = 10000 \cdot (1,87 - 1) = 8700 \text{ kg}.$$

Ist die wirkliche Nutzlast im Betriebe aber nur  $2500 \text{ kg}$ , so hätte man eine

$$\frac{8700}{2500} = 3,5 \text{ fache}$$

statische Sicherheit gegen Seilrutschen.

Das Seil in der Keilnute.

Die Gleichungen für die Bandreibung, welche für zylindrische Berührungsflächen aufgestellt sind, gelten auch für den Fall, daß die Zylinder-

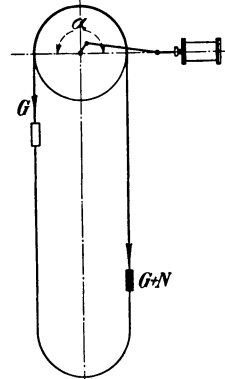


Abb. 193.  
Die Seilrutschgefahr.

derfläche mit einer Keilnute (Abb. 194) versehen wird, an deren Seitenwänden das runde Seil sich anlegt. Man hat für diesen Fall statt  $\mu$  nur den Reibungskoeffizienten für Keilnuten

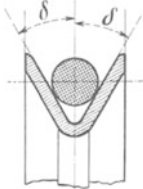


Abb. 194.  
Das Seil in  
der Keilnute.

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sin \vartheta}$$

einzusetzen, worin  $\vartheta$  den halben Keilnutenwinkel bedeutet. Die für die Nutzlast  $N$  abgeleitete Gleichung würde dann lauten

$$N = G \cdot (e^{\mu_1 \cdot \alpha} - 1) = G \cdot \left( e^{\frac{\mu}{\sin \vartheta} \cdot \alpha} - 1 \right).$$

**Beispiel:** Welche Nutzlast  $N$  könnte bis zum Seilrutschen erreicht werden, wenn das Seil der vorigen Aufgabe in einer Keilnute mit dem halben Keilwinkel  $\vartheta = 30^\circ$  laufen würde?

**Lösung:** Es wird

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sin \vartheta} = \frac{0,20}{0,5} = 0,40.$$

Nach Tabelle im Anhang ist für  $\mu_1 = 0,40$  und  $\alpha^\circ = 180^\circ$  der Wert

$$e^{\mu_1 \cdot \alpha} = 3,50.$$

Damit wird  $N = G \cdot (e^{\mu_1 \cdot \alpha} - 1) = 10000 \cdot (3,50 - 1) = 25000$  kg.

Bei einer wirklichen Nutzlast von 2500 kg hätte man nun eine

$$\frac{25000}{2500} = 10 \text{ fache}$$

statische Sicherheit gegen Seilrutschen. Die Keilnutenform scheint daher ganz besonders vorteilhaft für Treibscheiben zu sein. Praktisch macht man aber bei Drahtseilen wegen des Seilverschleißes wohl keine Anwendung davon.

**Beispiel:** Bei einer Treibscheibenförderung mit elektrischem Antrieb (Abb. 195) liegen folgende Verhältnisse vor:

Korbgewicht  $K = 6000$  kg, Gewicht von 6 leeren Wagen  $W = 3600$  kg, Förderseilgewicht (550 m lang, 55 mm Durchmesser)  $S = 5600$  kg, Unterseilgewicht  $S = 5600$  kg, Nutzlast = 6 Wagenfüllungen Kohle  $N = 6 \cdot 600 = 3600$  kg.

Der Umschlingungswinkel ist  $\alpha^\circ = 184^\circ$ , Reibungsziffer  $\mu = 0,20$ .

Wie groß ist die statische Sicherheit gegen Seilrutschen?

**Lösung:** Die toten Lasten auf beiden Seiten sind vollkommen ausgeglichen, sie betragen für jede Seite

$$\text{Korbgewicht } K = 6000 \text{ kg}$$

$$\text{Seilgewicht } S = 5600 \text{ ,,}$$

$$\text{Wagengewicht } W = 2400 \text{ ,,}$$

$$K + S + W = G = 14000 \text{ kg.}$$

Der untere Korb soll die Nutzlast  $N = 3600$  kg hochziehen. Verursacht diese Nutzlast Seilrutsch?

Diejenige Nutzlast, welche bei  $G$  kg Totlast das Seilrutschen einleitet, muß folgende Größe haben:

$$N = G \cdot (e^{\mu \alpha} - 1).$$

Für  $\alpha^\circ = 184^\circ$  ist das Bogenmaß

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{184}{360} = 3,21,$$

$$e^{\mu \alpha} = 2,718^{0,20 \cdot 3,21} = 2,718^{0,642} = 1,9.$$

$$N = 14000 \cdot (1,9 - 1) = 12600 \text{ kg.}$$

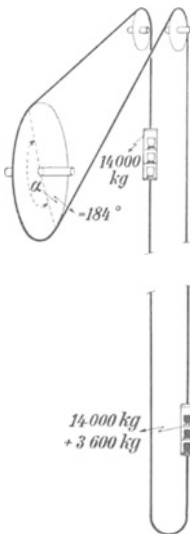


Abb. 195. Treib-  
scheibenförderung.

Da die wirkliche Nutzlast nur 3600 kg beträgt, so hat die Treibscheibenförderung eine

$$\frac{12600}{3600} = 3,5 \text{ fache}$$

statische Sicherheit gegen Seilrutschen.

**Beispiel:** Bei welchem Umschlingungswinkel  $\alpha^0$  würde die Nutzlast  $N = 3600$  kg ausreichen, um die Gefahr des Seilrutschens zu bringen?

**Lösung:** Bei einer beiderseitigen ausgeglichenen Seillast  $G$  lautet die Bedingung für das Seilrutschen

$$G \cdot e^{\mu\alpha} = G + N,$$

$$e^{\mu\alpha} = \frac{G + N}{G} = \frac{14000 + 3600}{14000} = 1,26,$$

$$\mu \cdot \alpha \cdot \log e = \log 1,26,$$

$$\text{Bogenmaß } \alpha = \frac{\log 1,26}{\mu \cdot \log e} = \frac{0,1004}{0,20 \cdot 0,4342} = \frac{0,1004}{0,08684} = 1,16,$$

$$\text{Bogenmaß } 2\pi = 6,28 = 360^0.$$

$$\text{Bogenmaß } 1,16 = \frac{360 \cdot 1,16}{6,28} = 66,5^0.$$

Bei dem Umschlingungswinkel  $\alpha^0 = 66,5^0$  würde eine Nutzlast von 3600 kg das Seil zum Rutschen bringen.

### 39. Der Riemenzug.

In Abb. 196 wird von dem Schwungradriemen einer Dampfmaschine eine Scheibe angetrieben. Die getriebene Scheibe hat den kleineren Durchmesser, also ist der Umspannungsbogen  $\alpha$  dieser Scheibe kleiner wie der Umspannungsbogen auf dem Schwungrad. Daher ist auch die Gefahr des Riemengleitens auf der kleinen Scheibe am größten. Das Gleiten tritt ein, wenn der ziehende Riemen die Zugkraft

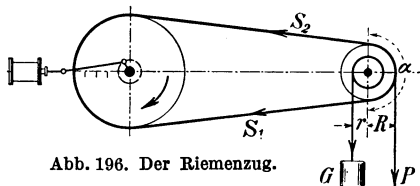


Abb. 196. Der Riemenzug.

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

überschreitet. Die Zugkraft des Riemens ist also eine Funktion der Riemenspannung  $S_2$ .

Da  $e^{\mu\alpha}$  konstant bleibt, kann die Zugkraft  $S_1$  nur größer werden, wenn die Riemenspannung  $S_2$  größer wird, d. h. je größer die zu übertragende Kraft ist, um so stärker muß der Riemen gespannt werden.

Der Widerstand der getriebenen Scheibe kann durch ein Gewicht  $G$  dargestellt werden, das auf der Trommel vom Radius  $r$  hochgezogen wird. Das Lastmoment  $G \cdot r$  muß von der Umfangskraft  $P$  der Riemenscheibe, welche den Radius  $R$  hat, überwunden werden, also ist

$$P \cdot R = G \cdot r, \quad P = G \cdot \frac{r}{R}.$$

Die Differenz der beiden Riemenzugkräfte  $S_1$  und  $S_2$  liefert die Umfangskraft  $P$ , also ist

$$S_1 - S_2 = G \cdot \frac{r}{R}$$

und da

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \quad \text{oder} \quad S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}}$$

ist, so wird

$$S_1 - \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} = G \cdot \frac{r}{R},$$

$$S_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\mu\alpha}}\right) = G \cdot \frac{r}{R},$$

$$S_1 \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} = G \cdot \frac{r}{R} \quad \text{oder} \quad S_1 = G \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Da

$$S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}}$$

ist, so wird

$$S_2 = G \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Meistens aber wird man nicht mit dem Drehmoment  $G \cdot r$  einer Last zu rechnen haben, sondern unmittelbar mit der Umfangskraft  $P$  an der Scheibe. Dann lauten die Gleichungen für die Riemenkräfte

$$S_1 = P \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \quad \text{und} \quad S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

**Beispiel:** Ein Riemen soll eine Umfangskraft  $P = 100$  kg übertragen. Er läuft auf einer gußeisernen Scheibe ( $\mu = 0,28$ ) mit einem Umspannungsbogen von  $\alpha^0 = 144^0$ . Wie groß werden die Riemenkräfte im ziehenden und gezogenen Riemenstück?

**Lösung:** Nach Tabelle im Anhang ist für  $\alpha^0 = 144^0$  und  $\mu = 0,28$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 2,02$

$$S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 100 \cdot \frac{1}{2,02 - 1} = 98 \text{ kg},$$

$$S_1 = e^{\mu\alpha} \cdot S_2 = 2,02 \cdot 98 = 198 \text{ kg}.$$

In diesem Fall hat also der ziehende Riemen rund die doppelte Umfangskraft und der gezogene Riemen die ganze Umfangskraft aufzunehmen. Man müßte daher die Lager der beiden Scheiben mit der dreifachen Umfangskraft gegeneinander spannen.

**Beispiel:** Wie groß müssen die Spannkkräfte werden, wenn der Umspannungsbogen nur  $108^0$  ist?

**Lösung:** Nach Tabelle im Anhang ist für  $\alpha^0 = 108^0$  und  $\mu = 0,28$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 1,69$ .

$$S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 100 \cdot \frac{1}{1,69 - 1} = \frac{100}{0,69} = 145 \text{ kg},$$

$$S_1 = e^{\mu\alpha} \cdot S_2 = 1,69 \cdot 145 = 245 \text{ kg}.$$

Der kleine Umspannungsbogen macht erforderlich, daß der Riemen stärker gespannt werden muß, und zwar ist  $S_1 + S_2 = 245 + 145 = 390$  kg, d. h. die Lager der beiden Scheiben müssen fast mit der vierfachen Umfangskraft gegeneinander gespannt werden. Das wirkt sich ungünstig auf die Lager aus, welche ständig den Spanndruck aufzunehmen und infolgedessen mehr Reibungsarbeit zu leisten haben. Auch der Riemen wird dadurch ungünstig beansprucht, da er nun schon die 2,5fache Umfangskraft aufzunehmen hat. Kleine Umspannungsbogen sind daher außerordentlich nachteilig und sollten vermieden werden.

Um den Umspannungsbogen durch den Riemenlauf nicht zu vermindern, soll man dem ziehenden Riemen den unteren Lauf geben,



wie Abb. 197, Fig. a zeigt. Das Durchhängen des oberen, gezogenen Riemenlaufs vergrößert den Umspannungsbogen. In Fig. b liegt der ziehende Riemen oben, der gezogene Riemen hängt unten im Bogen durch und vermindert dadurch den Umspannungsbogen.

Günstig wirken die neuerdings in Anwendung gekommenen Spannrollen, wie Abb. 198 zeigt. Die Spannrolle, die durch ein Gewicht  $G$  gegen den gezogenen Riemen gedrückt wird, vermehrt an der kleinen Scheibe den Umspannungsbogen.

**Beispiel:** Wie groß werden die Spannkraften für einen Riemen, der 100 kg Umfangskraft übertragen soll, wenn durch Spannrolle an der kleinen Scheibe eine 0,7fache Umspannung ( $\alpha^0 = 252^0$ ) erreicht wird und  $\mu = 0,28$  ist?

**Lösung:** Nach Tabelle im Anhang ist für  $\alpha^0 = 252^0$  und  $\mu = 0,28$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 3,43$ .

$$S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 100 \cdot \frac{1}{3,43 - 1} = 41 \text{ kg,}$$

$$S_1 = e^{\mu\alpha} \cdot S_2 = 3,43 \cdot 41 = 141 \text{ kg.}$$

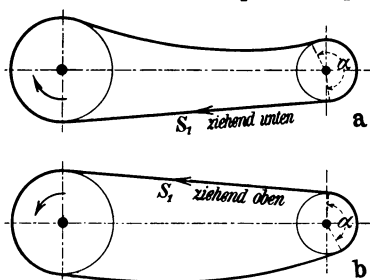


Abb. 197. Der Umspannungsbogen beim Riemenzug.

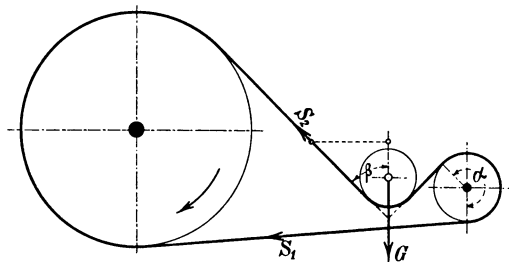


Abb. 198. Vergrößerung des Umspannungsbogens durch Spannrolle.

Der Riemen hat demnach als größte Zugkraft nur die  $141:100 = 1,41$  fache Umfangskraft aufzunehmen, und die Lager werden nur mit der  $(141 + 41):100 = 1,82$  fachen Umfangskraft gegeneinander zu spannen sein.

Das Belastungsgewicht  $G$  der Spannrolle berechnet sich aus dem Riemenzug  $S_2$ . Nach Abb. 198 ist, wenn  $\beta = 45^0$  der halbe Umspannungswinkel der Spannrolle ist,

$$\frac{G}{2} = S_2 \cdot \cos \beta, \text{ also } G = 2 \cdot S_2 \cdot \cos \beta$$

$$G = 2 \cdot 41 \cdot \cos 45^0 = 2 \cdot 41 \cdot 0,7071 = 78 \text{ kg.}$$

Die Verwendung hölzerner Riemenscheiben bringt insofern Vorteile, als die Reibungsziffer zwischen Leder und Holz bedeutend größer ist als zwischen Leder und blankem Gußeisen. Man rechnet für Holzscheiben mit  $\mu = 0,47$ .

Für einen Umspannungsbogen  $\alpha^0 = 144^0$ , der einer Umspannung des 0,4fachen Umfanges entspricht, ist nach Tabelle im Anhang

für  $\mu = 0,47$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 3,26$ ,

für  $\mu = 0,28$  der Wert  $e^{\mu\alpha} = 2,02$ .

Also werden die Riemenspannungen:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = P \cdot \frac{1}{3,26 - 1} = 0,442 \cdot P \\ S_1 &= e^{\mu\alpha} \cdot S_2 = 3,26 \cdot 0,442 \cdot P = 1,44 \cdot P \end{aligned} \right\} \text{für Holzscheibe,}$$

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= P \cdot \frac{1}{2,02 - 1} = 1 \cdot P \\ S_1 &= 2,02 \cdot 1 \cdot P = 2 \cdot P \end{aligned} \right\} \text{für Gußeisenscheibe.}$$

Holzscheiben bringen demnach kleinere Riemenspannungen und kleinere Lagerdrucke.

### 40. Der Kettenbiegungswiderstand.

Obwohl die Ketten außerordentlich biegsam sind und um Rollen kleinster Durchmesser gelegt werden können, tritt bei der Biegebewegung doch ein Widerstand auf, der durch Reibung an den Kettengliedern erzeugt wird. Ein Kettenglied ist ein Ring, der sich um einen Bolzen oder Zapfen legt.

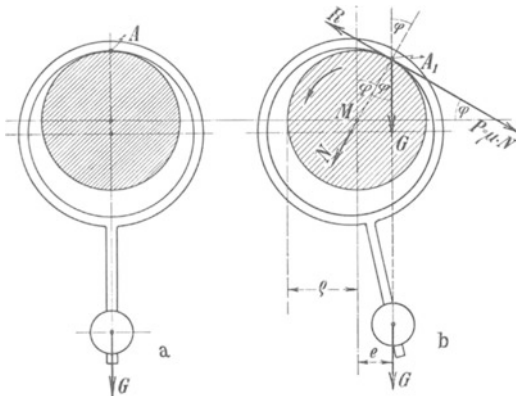


Abb. 199. Bolzen und Ring in Ruhe und Drehung.

Ein mit einem Gewicht  $G$  belasteter Ring (Abb. 199, Fig. a) wird, auf einen ruhenden Zapfen gehängt, sich so einstellen, daß die Krafrichtung  $G$  durch den Stützpunkt  $A$  des Ringes geht.

Ein mit einem Gewicht  $G$  belasteter Ring (Abb. 199, Fig. a) wird, auf einen ruhenden Zapfen gehängt, sich so einstellen, daß die Krafrichtung  $G$  durch den Stützpunkt  $A$  des Ringes geht.

Sobald der Zapfen sich dreht (Fig. b), verändert sich infolge des Reibungswiderstandes die Lage des Stützpunktes, er kommt nach  $A_1$ . Auch in dieser Lage kann nur Gleichgewicht herrschen, wenn die Krafrichtung  $G$  wieder durch den Stützpunkt  $A_1$  geht. Damit ist aber die Richtungslinie des Gewichtes um das Maß  $e$  aus der Mittellage herausgerückt.

Denkt man sich im Stützpunkt  $A_1$  die Tangente an den Zapfenkreis gelegt, und diese Tangente als schiefe Ebene, darauf im Punkte  $A_1$  das Gewicht  $G$ , so wird das Gewicht abrutschen, sobald der Neigungswinkel der Ebene die Größe des Reibungswinkels  $\varphi$  erreicht.

$G$  erzeugt an der Auflagerstelle  $A_1$  die Normalkomponente  $N$  und die Parallelkomponente  $P$ . Die Normalkomponente  $N$  erzeugt den Reibungswiderstand  $\mu \cdot N$ . Sobald

$$P = R = \mu \cdot N$$

wird, tritt das Rutschen ein.

Der Winkel  $\varphi$  erscheint als Winkel zwischen dem Berührungsradius  $A_1M$  und der Mittelpunktsvertikalen wieder. Der Stützpunkt  $A_1$  läßt sich also bestimmen, wenn der Reibungskoeffizient

$$\mu = \text{tg } \varphi$$

bekannt ist. Je größer die Reibung, um so weiter rückt  $A_1$  von der Mittelpunktsvertikalen ab, um so größer wird die exzentrische Aufhängung  $e$  des Gewichtes. In der Abb. 199b liest man ab

$$e = \rho \cdot \sin \varphi.$$

Da der Winkel  $\varphi$  immer sehr klein ist, kann man  $\sin$  durch  $\text{tg}$  ersetzen, und es ist

$$e = \rho \cdot \text{tg} \varphi = \rho \cdot \mu.$$

Die Formel sagt uns, daß die Exzentrizität  $e$  nur abhängig ist von dem Radius  $\rho$  des Zapfens und der Reibungsziffer  $\mu$ , und nicht abhängig ist von der Drehgeschwindigkeit des Zapfens. Der Ring würde also auch in dieser exzentrischen Lage bleiben können, wenn die Drehgeschwindigkeit sehr klein würde.

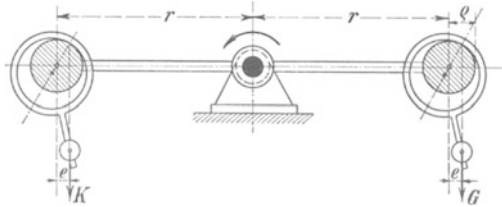


Abb. 200. Kettenbolzen.

Diese kleine Drehgeschwindigkeit des Zapfens liegt in Abb. 200 vor. Die Zapfen sitzen an den beiden Enden eines gleicharmigen, horizontalen Hebels, der sich in Linksdrehung befindet. Die Gleichgewichtslage in der horizontalen Stellung erfordert die Bedingung

$$K \cdot (r - e) = G \cdot (r + e),$$

$$\frac{K}{G} = \frac{r + e}{r - e}.$$

Multipliziert man den Bruch auf der rechten Seite oben und unten mit  $(r + e)$ , so wird

$$\frac{K}{G} = \frac{(r + e) \cdot (r + e)}{(r - e) \cdot (r + e)} = \frac{(r + e)^2}{r^2 - e^2} = \frac{r^2 + 2er + e^2}{r^2 - e^2}.$$

Der Wert  $e$  ist immer sehr klein, so daß der Ausdruck  $e^2$  so klein wird, daß er vernachlässigt werden kann. Dann ist

$$\frac{K}{G} = \frac{r^2 + 2er}{r^2} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Man nennt den Ausdruck  $K:G$  auch den Verlustfaktor. Er sagt, daß  $K$  immer größer sein muß als  $G$ , denn das Verhältnis  $K:G$  ist nach der vorstehenden Gleichung größer als 1. Der größere Betrag dient zur Überwindung des Kettenbiegungswiderstandes.

In Abb. 201 soll durch eine Kettenrolle das Gewicht  $G$  hochgezogen werden. Die Kette ist aus einzelnen Gliedern zusammengesetzt, welche durch Gelenkbolzen miteinander verbunden sind. An der Auflauf- und Ablaufstelle findet eine Reibung der Bolzen in den Gelenken statt. Diese Reibung wirkt an beiden Stellen der Richtungsveränderung der Kette entgegen. Auch für diesen Fall gilt die gefundene Gleichung

$$\frac{K}{G} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Setzt man den früher gefundenen Wert  $e = \varrho \cdot \mu$  ein, wo  $\varrho$  den Bolzenradius bedeutet, so wird

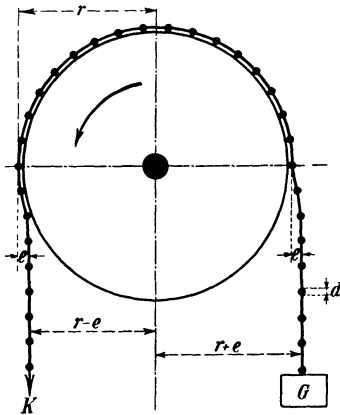


Abb. 201. Die Kettenrolle.

$$\frac{K}{G} = 1 + \mu \cdot \frac{2\varrho}{r}$$

$2\varrho = \delta =$  Dicke der Gelenkbolzen,

$$\frac{K}{G} = 1 + \mu \cdot \frac{\delta}{r}.$$

Die zum Heben der Last  $G$  erforderliche Kraft ist

$$K = G + \mu \cdot \frac{\delta}{r} \cdot G.$$

Der Biegungswiderstand hat also die Größe

$$W_b = \mu \cdot \frac{\delta}{r} \cdot G.$$

Der Biegungswiderstand nimmt daher zu

1. mit der Reibungsziffer  $\mu$ ,
2. mit der Bolzendicke  $\delta$ ,
3. mit der Gewichtsbelastung  $G$ .

Er ist aber umgekehrt proportional dem Halbmesser  $r$  der Kettenrolle.

**Beispiel:** Die Gelenkbolzen einer Kette haben  $\delta = 10$  mm Dicke, der Rollenhalbmesser sei  $r = 100$  mm. Wie groß wird der Biegungswiderstand, wenn der Reibungskoeffizient der Gelenkbolzen  $\mu = 0,15$  ist?

**Lösung:** Der Biegungswiderstand wird

$$W_b = 0,15 \cdot \frac{10}{100} \cdot G = 0,015 \cdot G.$$

Es hat also der Biegungswiderstand dieselbe Wirkung wie eine Vergrößerung der hochziehenden Last um 1,5%.

## 41. Der Seilbiegungswiderstand.

Ähnlich wie bei der Kette die Reibung in den Gelenken, so erzeugt bei geflochtenen Seilen die Reibung zwischen den Litzen und Drähten und der Drahtwiderstand gegen Biegen einen Widerstand, sobald das Seil eine Richtungsänderung erleidet. Die Größe dieses Widerstandes kann jedoch nicht durch Rechnung gefunden werden. Hier müssen Versuche einsetzen und die Grenzwerte dieser Widerstände ermitteln. Nach älteren Versuchen ist

$$W_b = 13 \cdot \frac{\delta^2}{r} \cdot G,$$

wenn bedeutet  $\delta =$  Seildicke in m,  $r =$  Rollenhalbmesser in m. Neuere Versuche, insbesondere mit Drahtseilen, sind nicht bekannt.

**Beispiel:** Wie groß wird der Seilbiegungswiderstand für ein Seil von 55 mm Dicke, wenn der Seilscheibenradius 2 m ist?

**Lösung:** Der Seilbiegungswiderstand wird

$$W_b = 13 \cdot \frac{0,055^2}{2,00} \cdot G = 0,02 \cdot G,$$

d. h. der Biegungswiderstand wirkt wie eine Lastvergrößerung um 2%.

## Zweiter Abschnitt.

# Die Dynamik fester Körper.

## 1. Die Bewegungsarten.

In der Technik erfolgen die Bewegungen zwangläufig, d. h. man zwingt dem Körper eine ganz bestimmte Bahnlinie auf. Schienenfahrzeuge folgen der Richtung der Schienen, Fahrstühle und Förderkörbe der Richtung der führenden Spurlatten, der Kreuzkopf folgt der Richtung der Kreuzkopfbahn, der Kurbelzapfen der Bahn der Kurbel, immer ist die Bahn eine vorgeschriebene.

Nach der Form der durchlaufenen Bahnlinie unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegungen. Von den krummlinigen Bewegungen ist die Kreisbewegung die häufigste.

Aber auch die Bewegung an sich kann verschiedenartig sein. In der Bewegung einer Maschine liegt ein gewisser Rhythmus oder ein Gleichtakt. Die Maschine, die im Gleichtakt läuft, bewegt sich gleichförmig, d. h. sie legt mit ihrem Schwungrad in gleichen Zeiten gleiche Wegestrecken zurück.

Die Bewegung kann auch unrhythmisch oder ungleichförmig erfolgen. Dann legt der Körper in gleichen Zeiten ungleiche Wegestrecken zurück. Werden die Wegelängen in gleichen Zeiten größer, so nennen wir die Bewegung beschleunigt, werden die Wegelängen in gleichen Zeiten kleiner, so nennen wir die Bewegung verzögert.

## 2. Die gleichförmige Bewegung.

Ein Körper lege auf geradliniger Bahn in 2 Minuten einen Weg von 240 m zurück. Aus diesen Angaben läßt sich sofort berechnen, wie groß der in 1 Sekunde durchschnittlich zurückgelegte Weg ist. Er ist

$$\frac{240}{2 \cdot 60} = 2 \text{ m/sek.}$$

Man sagt dann, der Körper hat eine Geschwindigkeit von 2 m/sek und versteht unter der Geschwindigkeit den Sekundenweg des Körpers, in m gemessen.

Bei Eisenbahnzügen pflegt man die Fahrgeschwindigkeit der Züge in km je Stunde anzugeben, ebenso bei Flugzeugen die Fluggeschwindigkeit. Legt ein Verkehrsflugzeug z. B. in der Stunde 180 km zurück, so ist seine Geschwindigkeit

$$\frac{180000 \text{ m}}{3600 \text{ sek}} = 50 \text{ m/sek.}$$

Ein Schnellzug, der in 1 Stunde 90 km fährt, hat die Geschwindigkeit

$$\frac{90000 \text{ m}}{3600 \text{ sek}} = 25 \text{ m/sek.}$$

Bei Ozeandampfern wird die stündliche Fahrstrecke in Knoten angegeben.

1 Knoten = 1 deutsche Seemeile/h =  $\frac{1}{4}$  Landmeile/h = 1852 m/h. Legt das Schiff in 1 Stunde 1 Knoten zurück, so ist seine Geschwindigkeit

$$\frac{1852}{3600} = 0,514 \text{ m/sek.}$$

Der Ozeandampfer, der mit 25 Knoten/h fährt, hat demnach eine Geschwindigkeit von

$$25 \cdot 0,514 = 12,85 \text{ m/sek.}$$

Die größten Geschwindigkeiten werden in der Schießtechnik erzielt, das Infanteriegeschosß hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 620 m/sek, die Granate einer 10,5-cm-Kanone eine Anfangsgeschwindigkeit von 933 m/sek; im Sport wurde beim 100-m-Lauf eine Zeit von 10,8 Sekunden erzielt, d. h. die höchste Laufgeschwindigkeit eines Turners beträgt

$$\frac{100}{10,8} = 9,25 \text{ m/sek.}$$

Es ist üblich, für die Größen Weg, Zeit und Geschwindigkeit feste Bezeichnungen zu nehmen. Man setzt

- $s$  = Weg des Körpers in m ( $s$  = spatium = Zwischenraum),
- $t$  = Zeitdauer der Bewegung in sek ( $t$  = tempus = Zeit),
- $v$  = Geschwindigkeit des Körpers in m/sek ( $v$  = velocitas = Schnelligkeit).

Ein Körper, welcher in 1 Sekunde den Weg  $v$  zurücklegt, legt in  $t$  Sekunden einen Weg zurück von der Länge

$$s = v \cdot t.$$

Ein Körper, welcher in  $t$  Sekunden einen Weg von  $s$  Meter zurücklegt, legt in 1 Sekunde einen Weg zurück von der Größe

$$v = \frac{s}{t}.$$

Legt ein Körper einen Weg von  $s$  Meter zurück und bewegt er sich um  $v$  Meter in 1 Sekunde, so erfordert die Bewegung die Zeit

$$t = \frac{s}{v} \text{ Sekunden.}$$

**Beispiel:** Ein Fußgänger macht in der Minute 70 Doppelschritte zu 1,60 m; welche Geschwindigkeit hat er und wieviel km legt er in einer Stunde zurück? Es ist  $s = 70 \cdot 1,6 = 112$  m in  $t = 60$  sek,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{112}{60} = 1,87 \text{ m/sek,}$$

$$s = v \cdot t = 1,87 \cdot 3600 = 6730 \text{ m} = 6,73 \text{ km/h.}$$

**Beispiel:** Auf dem Äquator ist ein Kabel verlegt, in welcher Zeit würde der Strom den Äquator durchlaufen haben, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität 300000 km/sek beträgt?

Erddurchmesser = 12730 km, Äquatorlänge =  $\pi \cdot 12730 = 40000$  km.

$$t = \frac{s}{v} = \frac{40000}{300000} = 0,13 \text{ sek.}$$

**Beispiel:** Welche Zeit erfordert die Seilfahrt aus 600 m Teufe, wenn die mittlere Seilgeschwindigkeit 5 m beträgt?

$$t = \frac{s}{v} = \frac{600}{5} = 120 \text{ sek} = 2 \text{ min.}$$

**Beispiel:** Eine Seilbahn (Abb. 202) zieht Förderwagen mit 400 kg Ladegewicht in Abständen von 20 m; wieviel Tonnen Stundenleistung hat die Bahn, wenn das Seil mit 0,80 m Geschwindigkeit läuft?

Der Stundenweg des Seils ist  $s = v \cdot t$   
 $= 0,80 \cdot 3600 = 2880$  m, stündliche Wagenzahl =  $\frac{2880}{20} = 144$ .

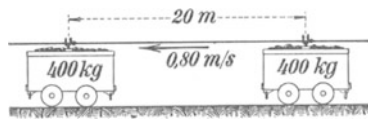


Abb. 202. Die Seilbahn.

$$\text{Stundenleistung} = 144 \cdot 400 = 57\,600 \text{ kg} = 57,6 \text{ t.}$$

**Beispiel:** Ein Becherwerk (Abb. 203) trägt in Abständen von je 50 cm Becher von 60 kg Ladegewicht; mit welcher Geschwindigkeit muß die Kette laufen, wenn in der Stunde 80 t gehoben werden sollen?

$$\text{Becherzahl in der Stunde} = \frac{80000}{60} = 1332,$$

$$\text{stündliche Kettenlänge} = 1332 \cdot 0,50 = 666 \text{ m} = s,$$

$$\text{Kettengeschwindigkeit} = v = \frac{s}{t} = \frac{666}{3600} = 0,185 \text{ m/sek.}$$

**Beispiel:** Ein Transportband (Abb. 204) von 1,00 m Breite bewege sich mit 0,80 m Geschwindigkeit. Wieviel t Kohlen liefert das Band in einer Stunde, wenn die mittlere Beschickungsbreite 0,65 m und die Beschickungshöhe 0,15 m ist?

$$\begin{aligned} \text{Fördervolumen} &= 0,65 \cdot 0,15 \cdot 0,80 = 0,078 \text{ m}^3/\text{sek} \\ &= 3600 \cdot 0,078 = 281 \text{ m}^3/\text{h}, \end{aligned}$$

$$1 \text{ m}^3 \text{ Kohle} = \text{Schüttgewicht} = 0,75 \text{ t}$$

$$281 \text{ m}^3 \text{ Kohle} = 0,75 \cdot 281 = 210 \text{ t/h.}$$

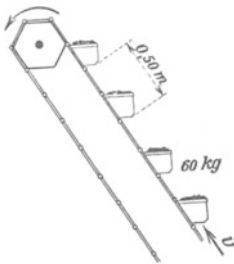


Abb. 203. Das Becherwerk.

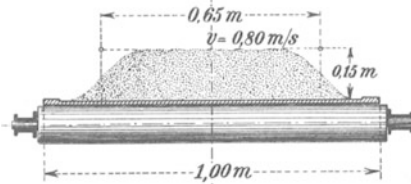


Abb. 204. Das Förderband.

**Beispiel:** Von einem Betriebsort fährt eine Lokomotive 25 Wagen von 850 kg Nutzlast mit einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von 9 km/h nach einem 1800 m entfernt liegenden Stapelschacht. Welche Förderung kann die Lokomotive bewältigen, wenn die Fahrschicht  $7\frac{1}{2}$  h dauert und an der Anfangs- und Endstation je 8 Minuten Wartezeit entstehen?

Weg einer Doppelfahrt =  $2 \cdot 1800 = 3600 \text{ m} = s$ ,

Fahrgeschwindigkeit =  $\frac{9000}{3600} = 2,5 \text{ m/sek} = v$ ,

Zeit für 1 Doppelfahrt  $t = \frac{s}{v} = \frac{3600}{2,5} = 1440 \text{ sek}$ ,

2 Wartezeiten =  $2 \cdot 8 \cdot 60 = 960 \text{ ,,}$

1 Förderzug =  $2400 \text{ sek} = 40 \text{ min}$ .

Schichtdauer =  $7 \frac{1}{2} \text{ h} = 440 \text{ min}$ ,

Anzahl Förderzüge =  $\frac{440}{40} = 11$ ,

1 Förderzug =  $25 \cdot 850 = 21250 \text{ kg} = 21,25 \text{ t}$ ,

Schichtleistung =  $11 \cdot 21,25 = 234 \text{ t}$ .

### Zeichnerische Darstellung der gleichförmigen Bewegung.

#### a) Das Zeit-Wege-Diagramm.

In Abb. 205 schneiden sich im Punkt  $O$  zwei rechtwinkelig zueinander stehende Linien oder Achsen, auf der horizontalen Achse wird die

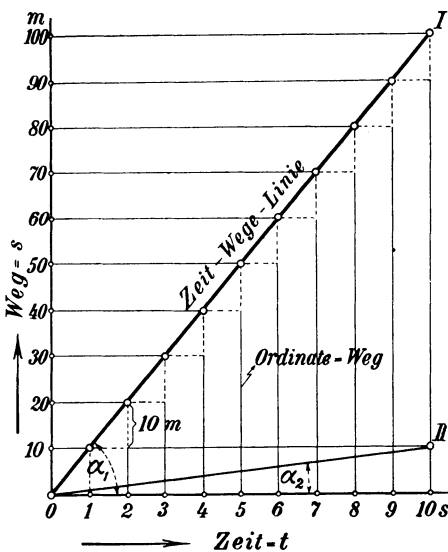


Abb. 205 Das Zeit-Wege-Diagramm.

Zeit  $t$  abgetragen, indem man für die Sekunde eine beliebige Längeneinheit wählt, man sieht 10 Sekunden abgetragen. Auf der anderen Achse werden die Wegestrecken  $s$  abgetragen, in der Figur bedeutet die gewählte Längeneinheit z. B. eine Wegestrecke von 10 m.

Ein Körper bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v = 10 \text{ m/sek}$ , dann heißt das, der Körper legt in jeder Sekunde einen Weg von 10 m zurück. Das stellt man im Diagramm so dar: Am Ende der ersten Sekunde hat der Körper einen Weg von 10 m zurückgelegt, man errichtet im 1. Sekundenpunkt ein Lot von der Länge 10 m. In jedem darauf folgenden Sekundenpunkt

ist die Lotlänge immer um 10 m größer als die vorhergehende Lotlänge. Nach 10 Sekunden ist der Punkt  $I$  erreicht. Verbindet man die Endpunkte dieser Senkrechten, so erhält man die schräge Linie  $OI$ , welche die Zeit-Wege-Linie genannt wird.

Ein Körper, der sich mit 1 m Geschwindigkeit gleichförmig bewegt, hat nach 10 Sekunden erst einen Weg von 10 m zurückgelegt. Im Diagramm ist diese Bewegung durch die schräge Linie  $OII$  dargestellt, welche erheblich flacher verläuft. Demnach ist der Neigungswinkel  $\alpha$



der Zeit-Wege-Linie der Darsteller der Geschwindigkeit des Körpers, denn es ist

im 1. Fall :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{100}{10} = \frac{s}{t} = 10 \text{ m/sek} = v_1,$$

im 2. Fall:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{10}{10} = \frac{s}{t} = 1 \text{ m/sek} = v_2.$$

**Ergebnis:** Im Zeit-Wege-Diagramm wird die gleichförmige Bewegung durch eine schräge Gerade dargestellt, deren Neigungswinkel  $\alpha$  um so größer wird, je größer die Geschwindigkeit ist. Die Tangente dieses Neigungswinkels ist ein Maß für die Größe der Geschwindigkeit.

### b) Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

Man zeichnet ein rechtwinkeliges Achsenkreuz (Abb. 206), auf der horizontalen Achse wird nach einem beliebigen Maßstab die Zeit in Sekunden, auf der senkrechten Achse nach einem beliebigen Maßstab die Geschwindigkeit abgetragen. Es werde wieder dasselbe Zahlenbeispiel gewählt, ein Körper bewege sich gleichförmig mit  $v = 10 \text{ m/sek}$  Geschwindigkeit. In den Sekundenteilpunkten errichtet man Senkrechte, die Länge der Senkrechten soll die Geschwindigkeitszahl darstellen. Da die Geschwindigkeit dieselbe bleibt, so haben die Senkrechten alle dieselbe Länge von 10 m. Die Verbindungslinie der Endpunkte liefert wieder eine gerade Linie, diese verläuft aber parallel zur Horizontalachse.

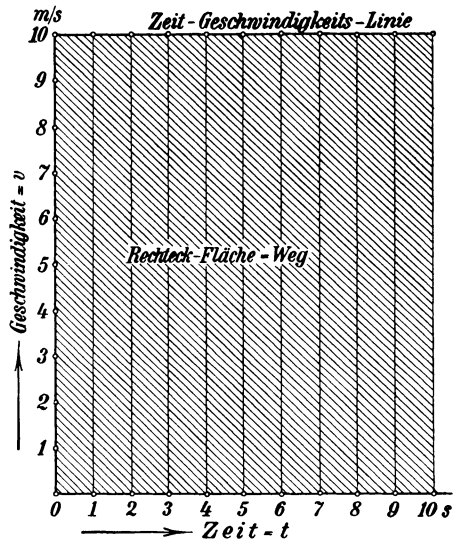


Abb. 206. Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

Es entsteht eine Rechteckfigur, der Flächeninhalt des Rechtecks ist der bildliche Darsteller der zurückgelegten Wegestrecke. Denn der Rechteckinhalt ist gleich dem Produkt aus Grundlinie mal Höhe, oder aus Zeit mal Geschwindigkeit, gleich  $t \cdot v$  und nach der Wegeformel ist

$$v \cdot t = s.$$

**Ergebnis:** Im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm wird die gleichförmige Bewegung durch eine gerade Linie dargestellt, welche parallel zur Horizontalachse läuft. Der Inhalt des entstehenden Rechtecks stellt die zurückgelegte Wegestrecke dar.

### c) Die gleichförmige Kreisbewegung.

Der Umfangspunkt einer Scheibe beschreibt bei der Drehung der Scheibe eine Kreisbahn. Man nennt seine Geschwindigkeit die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe. Um die Umfangsgeschwindigkeit berechnen zu können, muß der Durchmesser der Kreisbahn gemessen sein und beobachtet werden, wie oft der Umfangspunkt die Kreisbahn in der Minute durchlaufen hat. Es sei

$v$  = Umfangsgeschwindigkeit in m/sek,

$d$  = Durchmesser der Kreisbahn in m,

$n$  = Umlaufzahl in der Minute.

Weg nach 1 Umdrehung =  $\pi \cdot d$ ,

Weg nach  $n$  Umdrehungen =  $\pi \cdot d \cdot n$  = Minutenweg,

Sekundenweg  $v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60}$  = Umfangsgeschwindigkeit.

**1. Beispiel:** Ein Schwungrad von 3 m Durchmesser läuft gleichförmig in der Minute mit 120 Umdrehungen; welche Geschwindigkeit hat der aufgelegte Riemen?

$$v = \frac{\pi d \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 120}{60} = 18,84 \text{ m/sek.}$$

**2. Beispiel:** Auf dem Schachtgerüst läuft eine Seilscheibe von 5 m Durchmesser; wie groß ist ihre höchste Umlaufzahl, wenn die größte Seilgeschwindigkeit 20 m beträgt?

$$\text{Aus } v = \frac{\pi d \cdot n}{60} \text{ folgt } n = \frac{60 \cdot v}{\pi d} = \frac{60 \cdot 20}{\pi \cdot 5} = 76,5 \text{ Umdr./min.}$$

**3. Beispiel:** Ein Luttventilator soll mit einer minutlichen Umdrehungszahl von 4200 laufen, wie groß darf sein Durchmesser höchstens sein, wenn die Umfangsgeschwindigkeit nicht größer als 88 m/sek werden soll?

$$\text{Aus } v = \frac{\pi d \cdot n}{60} \text{ folgt } d = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 88}{\pi \cdot 4200} = 0,40 \text{ m.}$$

**Die Winkelgeschwindigkeit:** Bei der gleichförmigen Kreisbewegung werden in gleichen Zeiten von einem Umfangspunkt gleiche Bogenwege und vom zugehörigen Fahrstrahl gleiche Winkelwege durchlaufen. Setzt man den Radius  $r$  in die Umfangsgeschwindigkeits-Formel ein, so ist

$$v = \frac{2r \cdot \pi \cdot n}{60} \text{ m/sek.}$$

Setzt man  $r = 1$ , so nennt man die zugehörige Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit und bezeichnet sie mit  $\omega$ , und es ist

$$\omega = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\text{Drehwinkel}}{\text{zugehörige Zeit}}.$$

Wird dieser Wert in die erste Gleichung eingesetzt, so wird

$$v = r \cdot \omega \text{ m/sek.}$$

**1. Beispiel:** Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit einer Welle, die mit der minutlichen Drehzahl  $n = 60$  läuft?

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 60}{30} = 2\pi \text{ 1/sek,}$$

d. h. der Fahrstrahl durchläuft in 1 Sekunde die Kreisbahn  $2\pi$  einmal.

**2. Beispiel:** Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit dieser Welle für einen Umfangspunkt am Radius  $r = 3$  m?

$$v = r \cdot \omega = 3 \cdot 2\pi = 18,84 \text{ m/sek.}$$



der Zahnräder oder Scheiben ungleich, so wird außer der Bewegungsübertragung noch eine Übersetzung ins Schnelle oder Langsame erzielt. Das Übertragungsgesetz soll abgeleitet werden.

Die treibende Welle trage das große Rad mit dem Durchmesser  $d_1$ , die getriebene das kleine Rad mit dem Durchmesser  $d_2$ , die zugehörigen minutlichen Umdrehungszahlen seien  $n_1$  und  $n_2$ . In allen drei Fällen muß die Umfangsgeschwindigkeit der zusammen arbeitenden Räder oder Scheiben die gleiche sein.

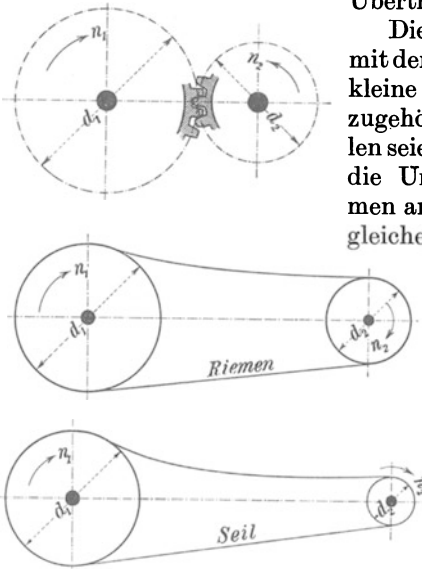


Abb. 208. Bewegungsübertragung durch Zahnräder, Riemen und Seil.

$$\begin{aligned} \text{Großes Rad } v_1 &= \frac{\pi d_1 \cdot n_1}{60}, \\ \text{kleines Rad } v_2 &= \frac{\pi d_2 \cdot n_2}{60}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ \frac{\pi d_1 \cdot n_1}{60} &= \frac{\pi d_2 \cdot n_2}{60}, \\ d_1 \cdot n_1 &= d_2 \cdot n_2, \\ \frac{n_1}{n_2} &= \frac{d_2}{d_1}, \end{aligned}$$

d.h. die minutlichen Umdrehungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Durchmesser.

Bezeichnen  $z_1$  und  $z_2$  die Zähnezahlen der beiden Zahnräder, so haben beide bei der gleichen Zahnteilung  $t$  die Bedingung zu erfüllen

$$\begin{aligned} \pi \cdot d_2 &= z_2 \cdot t \quad \text{und} \quad \pi \cdot d_1 = z_1 \cdot t, \\ \frac{\pi \cdot d_1}{\pi \cdot d_2} &= \frac{z_1 \cdot t}{z_2 \cdot t} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2} \end{aligned}$$

und damit wird die Gleichung  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$  auch lauten können  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ ,

d. h. bei Zahnrädern verhalten sich die minutlichen Umdrehungszahlen umgekehrt wie die Zähnezahlen.

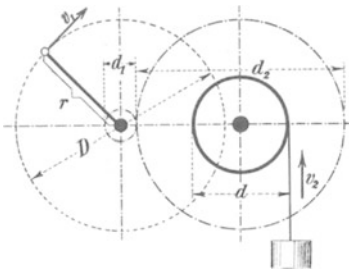


Abb. 209. Das Räderwerk einer Bauwinde.

**Beispiel:** Eine Bauwinde (Abb. 209) soll an einer Trommel von  $d = 32$  cm Durchmesser eine Last mit  $v_2 = 0,05$  m Geschwindigkeit heben. Der Antrieb erfolge durch eine Handkurbel vom Kurbelradius  $r = 35$  cm. Wie groß muß die Übersetzung sein, wenn die Hand-

kurbel mit  $v_1 = 0,77$  m Umfangsgeschwindigkeit gedreht wird?

Aus 
$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \quad \text{folgt} \quad n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d},$$

mithin ist die minutliche Umdrehungszahl

1. der Trommelwelle  $n_2 = \frac{60 \cdot v_2}{\pi \cdot d} = \frac{60 \cdot 0,05}{\pi \cdot 0,32} = 3,$
2. der Kurbelwelle  $n_1 = \frac{60 \cdot v_1}{\pi \cdot D} = \frac{60 \cdot 0,77}{\pi \cdot 0,70} = 21.$

Das Übersetzungsverhältnis wird

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{21}{3} = \frac{7}{1}.$$

Wenn das kleine Zahnrad den Durchmesser  $d_1 = 100$  mm erhält, muß das große Zahnrad den Durchmesser

$$d_2 = 7 \cdot d_1 = 7 \cdot 100 = 700 \text{ mm}$$

erhalten. Ist die Zähnezahzahl des kleinen Rades  $z_1 = 8$ , so muß das große Zahnrad  $z_2 = 7 \cdot z_1 = 7 \cdot 8 = 56$  Zähne erhalten.

**Beispiel:** Ein Aufzug (Abb. 210) soll von einem Drehstrommotor angetrieben werden. Der Motor macht 950 minütliche Umdrehungen. Der Fahrkorb hängt an einer Trommel von 500 mm Durchmesser und soll eine Fahrgeschwindigkeit von 0,80 m haben. Welche Übersetzung muß zwischengeschaltet werden?

Drehzahl der Trommel

$$n_2 = \frac{60 \cdot v_2}{\pi \cdot d_2} = \frac{60 \cdot 0,80}{\pi \cdot 0,50} = 30,6,$$

Drehzahl des Motors  $n_1 = 950$ ,

$$\text{Übersetzung} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{30,6}{950} = \frac{1}{31}.$$

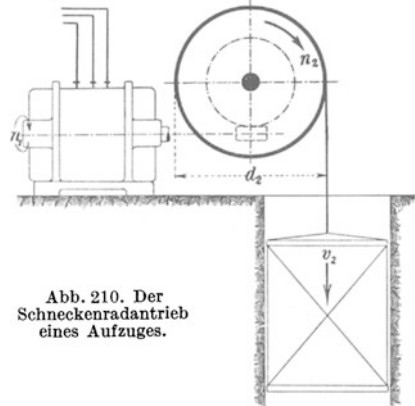


Abb. 210. Der Schneckenradantrieb eines Aufzuges.

Wählt man ein Schneckengetriebe mit eingängiger Schnecke zur Übersetzung, so wird bei einer Umdrehung der Schnecke das Schneckenrad um einen Zahn weitergedreht, das Schneckenrad muß daher 31 Zähne haben.

### g) Gleichförmige Bewegung in Rohrleitungen.

Die Bewegung von Wasser oder Gas in Rohrleitungen wird im allgemeinen gleichförmig erfolgen. Ist in Abb. 211

$F$  = Querschnitt des Rohres in  $m^2$ ,

$v$  = Geschwindigkeit im Rohre in m/sek,

so schiebt sich eine Flüssigkeitssäule vorwärts vom Querschnitt  $F$ , und wenn diese Vorwärtsbewegung in der Sekunde  $v$  Meter beträgt, so wird die sekundliche Durchflußmenge

$$V = F \cdot v.$$

Diese Formel dient zur Berechnung des Rohrquerschnittes

$$F = \frac{V}{v}.$$



Abb. 211. Flüssigkeitsbewegung in Rohrleitungen.

Hiernach ist der Rohrquerschnitt von zwei Faktoren abhängig:

1. von der geforderten Liefermenge  $V$ ,

2. von der gewählten Durchflußgeschwindigkeit  $v$ ,

und zwar nimmt er zu direkt proportional mit der Liefermenge und umgekehrt proportional mit Zunahme der Durchflußgeschwindigkeit.

Die Wahl der Durchflußgeschwindigkeit spielt daher eine große Rolle, man soll sie möglichst niedrig halten, um kleine Reibungsverluste zu erhalten, aber dann werden die Durchmesser groß und die Leitungen

teuer. Erfahrungsgemäß nimmt man

für Wasser  $v = 1$  bis  $2$  m/sek,

für Druckluft  $v = 10$  bis  $20$  m/sek,

für die Wetterbewegung in Lutten  $v = 3$  bis  $8$  m/sek,

für Dampf  $v = 25$  bis  $40$  m/sek.

**Beispiel:** Ein Abbauhammer (Abb. 212) verbrauche  $0,60$  m<sup>3</sup>/min Saugluft und arbeite mit  $4$  atü, wie stark muß der Anschlußschlauch sein, wenn  $20$  m Druckluftgeschwindigkeit zugelassen werden?

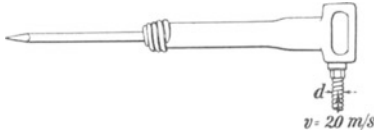


Abb. 212. Der Schlauchanschluß eines Abbauhammers.

Bei  $4$  atü oder  $5$  ata ist das Volumen der Druckluft  $= \frac{1}{5}$  des Saugvolumens, also gehen durch den Schlauch

$$\frac{0,60}{5} = 0,120 \text{ m}^3/\text{min} = 0,002 \text{ m}^3/\text{sek} = V,$$

$$F = \frac{V}{v} = \frac{0,002}{20} = 0,0001 \text{ m}^2 = 1 \text{ cm}^2.$$

Hierzu gehört ein Schlauchdurchmesser von  $d = 1,13$  cm, man wird eine halb-zöllige Schlauchleitung nehmen.

## h) Die gleichförmige Bewegung in Kanälen und Wetterstrecken.

Für die Fortbewegung von Wasser wird man vielfach offene Gerinne oder Kanäle verwenden, die man mit Gefälle verlegt. Je geringer das Gefälle ist, um so kleiner wird die Wassergeschwindigkeit werden, und um so größer muß dann der Durchflußquerschnitt sein. Im allgemeinen wird man kleine Wassergeschwindigkeiten wählen, z. B.

für offene Gerinne  $v = 1$  bis  $2$  m/sek.

Der Querschnitt des Stromgerinnes bestimmt sich wieder nach der Gleichung

$$F = \frac{V}{v}.$$

**Beispiel:** Ein Kolbenkompressor, welcher stündlich  $10000$  m<sup>3</sup> Saugluft verdichtet, verbraucht an Kühlwasser  $3$  l für  $1$  m<sup>3</sup> angesaugte Luft. Das Kühlwasser soll durch ein Rechteck-Gerinne (Abb. 213) einem Kühlturm zugeführt werden, welche Abmessungen gibt man dem Gerinne?

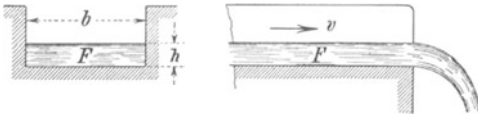


Abb. 213. Flüssigkeitsbewegung in Gerinnen.

Stündliche Kühlwassermenge

$$= 10000 \cdot 3 = 30000 \text{ l} = 30 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{30}{3600} = 0,0084 \text{ m}^3/\text{sek}.$$

Wählt man  $v = 1,2$  m, so wird der Querschnitt

$$F = \frac{V}{v} = \frac{0,0084}{1,2} = 0,007 \text{ m}^2 = 70 \text{ cm}^2.$$

Bei einer Rinnenbreite von  $20$  cm würde die Wasserhöhe  $\frac{70}{20} = 3,5$  cm werden.

Für Strecken und Querschläge kommen in der Regel Querschnitte von Rechteck- oder Trapezform in Frage. Als Wettergeschwindigkeit schreibt die Bergbehörde die Grenzggeschwindigkeit

$$v = 6 \text{ m/sek}$$

vor, welche nicht überschritten werden soll. Bei einem bekannten Querschnitt  $F$  berechnet sich dann die größte Wettermenge nach der Gleichung  $V = F \cdot v$  m<sup>3</sup>/sek.

**Beispiel:** Ein Querschlag habe die in Abb. 214 angegebenen Abmessungen, welche größte Wettermenge ist noch zulässig?

**Lösung:** Das Querschnittstrapez hat die Grundlinien  $a = 2,20$  m und  $b = 1,80$  m, die Höhe ist  $h = 2,00$  m, also ist der Querschnitt

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2,20 + 1,80}{2} \cdot 2 = 4 \text{ m}^2.$$

Die größte zulässige Wettermenge ist

$$Q = F \cdot v = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m}^3/\text{sek} = 2040 \text{ m}^3/\text{min}.$$

**Beispiel:** Der einziehende Schacht einer Zeche habe 6 m Durchmesser, wie groß ist die Wettergeschwindigkeit im Schacht, wenn der Ventilator minutlich  $Q = 6000 \text{ m}^3$  schafft und durch Einstriche und Einbauten 20% des Schachtquerschnitts für den Durchzug fortfallen?

**Lösung:**

$$\text{Theoretischer Querschnitt } \frac{\pi}{4} \cdot 6^2 = 28,27 \text{ m}^2,$$

Durchzug-Querschnitt  $F = 0,80 \cdot 28,27 = 22,6 \text{ m}^2$ ,  
Wettergeschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{60 \cdot F} = \frac{6000}{60 \cdot 22,6} = 4,42 \text{ m/sek}.$$

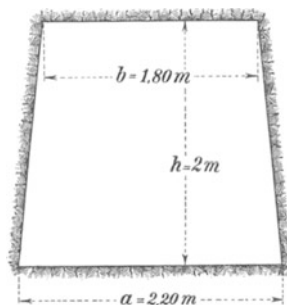


Abb. 214. Die Wetterbewegung in Strecken.

### 3. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Unter Beschleunigung versteht man die Geschwindigkeitszunahme je Sekunde. Unter gleichförmig beschleunigter Bewegung versteht man daher eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeitszunahme konstant bleibt. Zur Ableitung der allgemeinen Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung werden folgende Bezeichnungen festgelegt:

- $s$  = Wegestrecke in m,
- $v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit im m/sek,
- $v$  = Endgeschwindigkeit in m/sek,
- $b$  = Beschleunigung in m/sek<sup>2</sup>.

#### I. Der Körper bewege sich aus der Ruhelage heraus, d. h. mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ .

Es ist die Endgeschwindigkeit

am Ende der 1. Sekunde  $v_1 = b$ ,

„ „ „ 2. „  $v_2 = v_1 + b = 2 \cdot b$ ,

„ „ „ 3. „  $v_3 = v_2 + b = 3 \cdot b$ ,

„ „ „ 4. „  $v_4 = v_3 + b = 4 \cdot b$ ,

„ „ „  $t$ . „  $v = t \cdot b$ .

Die Endgeschwindigkeit des Körpers berechnet sich daher nach der Formel

$$v = t \cdot b.$$

Welchen Weg hat der Körper nach  $t$  Sekunden zurückgelegt? Bewegt sich ein Körper  $t$  Sekunden mit der Beschleunigung  $b$ , dann hat er die Endgeschwindigkeit  $v = t \cdot b$  erreicht, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit null war. Der Körper würde denselben Weg zurückgelegt haben,

wenn er sich während der Zeit  $t$  mit der mittleren Geschwindigkeit gleichförmig bewegt hätte. Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2},$$

da  $v_0 = 0$  und  $v = b \cdot t$  ist, so wird  $v_m = \frac{v}{2} = \frac{b \cdot t}{2}$ .

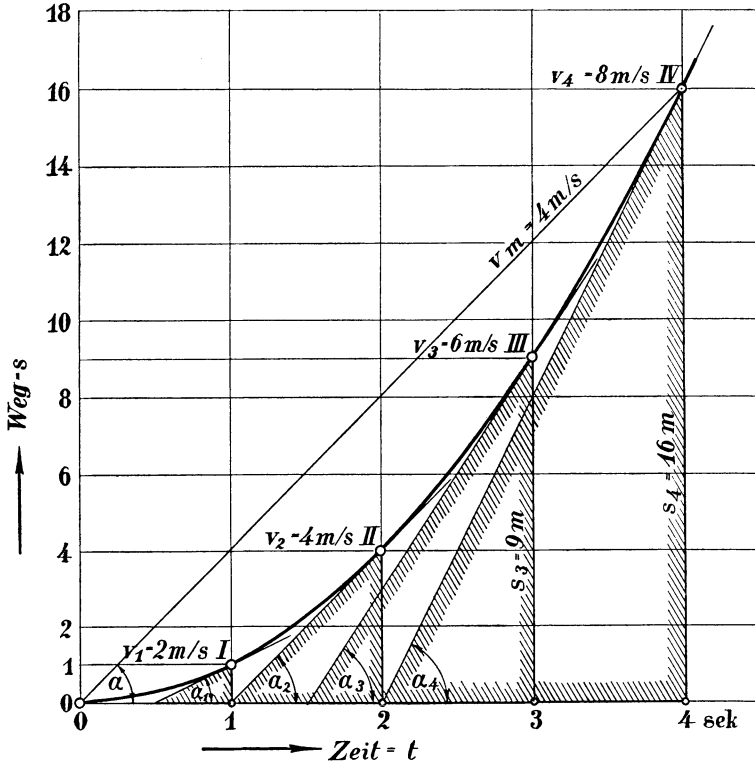


Abb. 215. Das Zeit-Wege-Diagramm.

Bei gleichförmiger Bewegung ist der zurückgelegte Weg

$$s = v_m \cdot t = \frac{b \cdot t}{2} \cdot t,$$

also wird

$$s = \frac{1}{2} \cdot b \cdot t^2$$

oder

$$b = \frac{2s}{t^2} *$$

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung kann auch geometrisch dargestellt werden.

\* Da man den Weg in Meter (m), die Zeit in Sekunden (sek) angibt, so ist die Beschleunigungsbezeichnung =  $\frac{m}{\text{sek}^2}$ ; es wird daher  $b$  in  $m/\text{sek}^2$  angegeben.



1. im Zeit-Wege-Diagramm,
2. im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

a) Das Zeit-Wege-Diagramm.

In Abb. 215 ist die gleichförmig beschleunigte Bewegung für eine Beschleunigung  $b = 2 \text{ m/sek}^2$  aufgezeichnet, auf der Horizontalachse sind die Zeiten  $t$  nach einem beliebigen Sekundenmaßstab, auf der Ordinatenachse die Wegestrecken  $s$  aufgetragen.

Die Längen der Wegeordinaten berechnen sich nach der Wegeformel  $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$ .

Am Ende der 1. Sek. ist der Weg  $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1 \text{ m} = \text{Ordinate } \overline{II}$ ,  
 „ „ „ 2. „ „ „ „  $s_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 4 \text{ m} = \text{ „ } \overline{2II}$ ,  
 „ „ „ 3. „ „ „ „  $s_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ m} = \text{ „ } \overline{3III}$ ,  
 „ „ „ 4. „ „ „ „  $s_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 16 \text{ m} = \text{ „ } \overline{4IV}$ .

Die Verbindungslinie der Ordinatenpunkte  $I$ ,  $II$ ,  $III$  und  $IV$  bildet die Zeitwegelinie, die die Form einer Parabel hat.

Aus der Zeitwegelinie läßt sich für jeden Punkt die zugehörige Geschwindigkeit bestimmen, indem man die Tangente dieses Kurvenpunktes zum Schnitt bringt mit der Horizontalachse, es entsteht dann ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen senkrechte Kathete den Weg  $s$  und dessen horizontale Kathete die Zeit  $t$  darstellt, und damit ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{s}{t} = v \text{ m/sek.}$$

für den Kurvenpunkt  $IV$  ist  $\text{tg } \alpha_4 = 16 : 2 = 8 \text{ m/sek} = v_4$ ,  
 „ „ „  $III$  „  $\text{tg } \alpha_3 = 9 : 1,5 = 6 \text{ m/sek} = v_3$ ,  
 „ „ „  $II$  „  $\text{tg } \alpha_2 = 4 : 1 = 4 \text{ m/sek} = v_2$ ,  
 „ „ „  $I$  „  $\text{tg } \alpha_1 = 1 : 0,5 = 2 \text{ m/sek} = v_1$ .

Zieht man für den Kurvenpunkt  $IV$  den Strahl  $OIV$ , so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem Winkel  $\alpha$  und es ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{s}{t} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/sek} = v_m,$$

d. h. es entsteht die bekannte Zeitwegelinie für die gleichförmige Bewegung, und es würde ein Körper, der sich  $t = 4 \text{ sek}$  mit der mittleren Geschwindigkeit  $v_m = 4 \text{ m/s}$  gleichförmig bewegt, auch den Kurvenpunkt  $IV$  im Diagramm erreicht haben.

Das Tangentenverfahren ist außerordentlich wertvoll für die Auswertung von Zeitwegelinien, die in der Praxis zur Erkennung von Bewegungsvorgängen mit besonderen Meßtrommeln aufgenommen werden.

b) Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

Im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm, Abb. 216, werden auf der Horizontalachse die Sekunden und als Ordinaten die Geschwindigkeiten aufgetragen. Das Diagramm ist für die Beschleunigung  $b = 2 \text{ m/sek}^2$  gezeichnet.

Am Ende der 1. Sekunde ist die Geschwindigkeit von Null bis auf  $v_1 = b = 2$  m/sek gestiegen. In der 2. Sekunde nimmt die Geschwindigkeit wieder um  $b$  Meter zu, so daß am Ende der 2. Sekunde die Endgeschwindigkeit  $v_2 = 2 \cdot b_2$  ist. So wachsen die Geschwindigkeitsordinaten

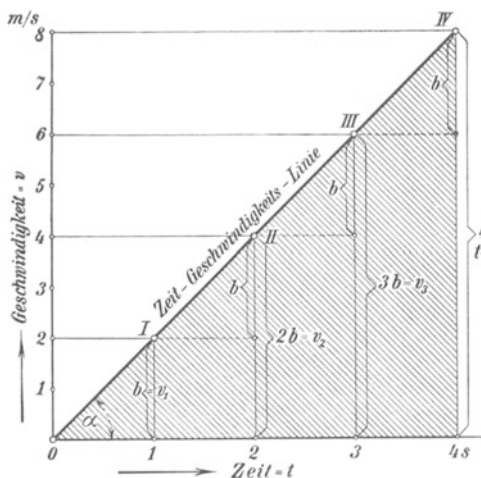


Abb. 216. Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

stetig in jeder Sekunde um  $b$  Meter. Verbindet man die Ordinatenpunkte *I*, *II*, *III* und *IV* miteinander, so erhält man eine gerade Linie, welche durch den Koordinatenanfangspunkt *O* geht und die Zeit-Geschwindigkeitslinie heißt.

Auch in diesem Fall stellt die unterhalb der Zeit-Geschwindigkeitslinie liegende Fläche die zurückgelegte Wegestrecke dar. Die Fläche ist eine Dreieckfläche, deren Inhalt man als das halbe Produkt aus Grundlinie mal Höhe berechnet. In der Figur ist

$$\begin{aligned} \text{Grundlinie} & t = 4 \text{ sek,} \\ \text{Höhe} & v = t \cdot b = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m,} \\ \text{Wegestrecke } s & = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v = \frac{1}{2} b \cdot t^2. \end{aligned}$$

Die früher abgeleitete Formel findet sich also in einfacher Weise auch aus der Diagrammfigur.

Der Neigungswinkel  $\alpha$  der Zeit-Geschwindigkeitslinie hat auch eine Bedeutung. Seine Tangente kennzeichnet die Größe der Beschleunigung  $b$ , denn in der Dreieckfigur ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{t} = \frac{t \cdot b}{t} = b.$$

Im Diagramm Abb. 216 ist z. B.  $v = 8$  m und  $t = 4$  sek, also ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{t} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/sek}^2 = b.$$

## II. Der Körper bewege sich bereits mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ .

In Abb. 217 ist dieser Bewegungsvorgang im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm bildlich dargestellt. Da der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  seine Bewegung beginnt, muß im Koordinatenanfangspunkt die Geschwindigkeitsordinate  $v_0$  eingetragen werden. In der Figur ist  $v_0 = 2$  m/sek. Am Ende der ersten Sekunde ist die Ge-

schwindigkeit um die Beschleunigungsgröße  $b$  größer geworden, in der Figur  $b = 1 \text{ m}$ , also ist die Endgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \text{am Ende der 1. Sekunde } & v = v_0 + b, \\ \text{„ „ „ 2. „} & v = v_0 + 2b, \\ \text{„ „ „ 3. „} & v = v_0 + 3b, \\ \text{„ „ „ } t. \text{ „} & v = v_0 + t \cdot b. \end{aligned}$$

Die Formel für die Endgeschwindigkeit lautet daher ganz allgemein

$$v = v_0 + t \cdot b.$$

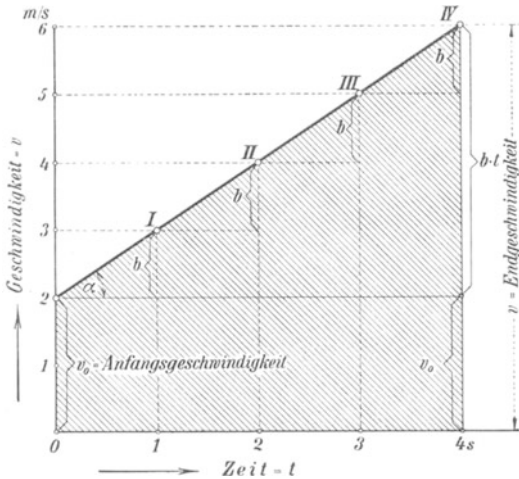


Abb. 217. Der Körper hat die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ .

Wie groß ist der zurückgelegte Weg  $s$ ?

Die Wegeberechnung erfolgt an Hand des Zeitgeschwindigkeits-

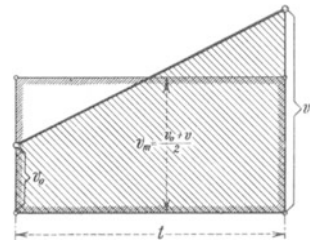


Abb. 218. Ersetzen der Trapezfigur durch eine Rechteckfigur.

Diagramms als einfache Flächenberechnung. Die von der Zeit-Geschwindigkeitslinie begrenzte Fläche setzt sich zusammen aus einer Rechteckfläche und einer Dreieckfläche, also ist

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} b \cdot t^2.$$

Nach Abb. 218 kann man die Trapezfigur auch durch ein inhaltsgleiches Rechteck ersetzen, dessen Höhe

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

ist. Der Inhalt dieses Rechteckes ist dann wieder die Wegestrecke und diese wird

$$s = v_m \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Bildet man aus  $v = v_0 + b \cdot t$  den Wert  $t = \frac{v - v_0}{b}$  und setzt diesen Wert von  $t$  in die letzte Wegegleichung ein, so lautet diese

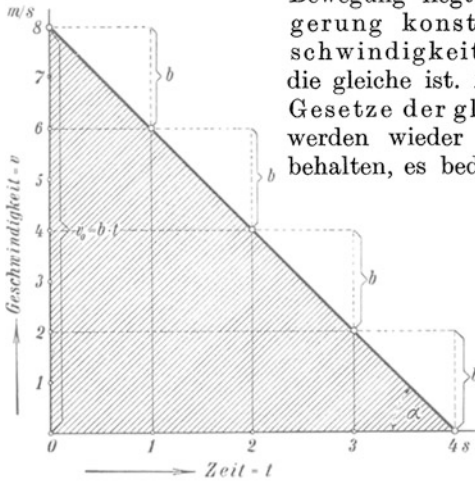
$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{b},$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}.$$

### 4. Die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Unter Verzögerung versteht man die Geschwindigkeitsabnahme in einer Sekunde. Eine gleichförmig verzögerte Bewegung liegt dann vor, wenn die Verzögerung konstant bleibt, so daß die Geschwindigkeitsabnahme in jeder Sekunde die gleiche ist. Zur Ableitung der allgemeinen Gesetze der gleichförmigen Verzögerung werden wieder dieselben Bezeichnungen beibehalten, es bedeutet also

- $s$  = Wegestrecke in m,
- $v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit in m/sek,
- $v$  = Endgeschwindigkeit in m/sek,
- $b$  = Verzögerung in m/sek<sup>2</sup>.



I. Der Körper komme aus einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit zur Ruhe.

Abb. 219. Die gleichförmig verzögerte Bewegung im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm, Abb. 219, zeigt diesen Bewegungsvorgang. Der Körper hat folgende Geschwindigkeiten:

- am Anfang der 1. Sekunde die Geschwindigkeit  $v_0$ ,
- „ Ende „ 1. „ „ Endgeschwindigkeit  $v_1 = v_0 - b$ ,
- „ „ „ 2. „ „ „  $v_2 = v_0 - 2b$ ,
- „ „ „ 3. „ „ „  $v_3 = v_0 - 3b$ ,
- „ „ „  $t$ . „ „ „  $v = v_0 - t \cdot b$ .

Die allgemeine Formel für die Endgeschwindigkeit lautet also

$$v = v_0 - b \cdot t.$$

Für den Endzustand als Ruhezustand muß  $v = 0$  sein, d. h. es wird dann

$$0 = v_0 - b \cdot t \quad \text{oder} \quad v_0 = b \cdot t.$$

Der Körper kommt demnach in folgender Zeit zur Ruhe

$$t = \frac{v_0}{b}.$$

Die Zeit-Geschwindigkeitslinie (Abb. 219) fällt von links nach rechts ab, die Tangente des Neigungswinkels  $\alpha$  kennzeichnet die Verzögerung  $b$ , denn es ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_0}{t} = \frac{b \cdot t}{t} = b.$$

Die zurückgelegte Wegestrecke  $s$  wird durch die Fläche dargestellt, welche von der schrägen Linie begrenzt wird. Der Inhalt dieser Dreiecksfläche ist

$$\frac{1}{2} \cdot t \cdot v_0 = \frac{1}{2} \cdot t \cdot b \cdot t = \frac{1}{2} b \cdot t^2,$$

also ist der zurückgelegte Weg

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2.$$

II. Der Körper verzögere seine Anfangsgeschwindigkeit nicht bis zum Ruhezustand.

In Abb. 220 beginnt der Körper die Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und vermindert diese von Sekunde zu Sekunde um  $b$  Meter. Nach  $t$  Sekunden ist die Endgeschwindigkeit noch

$$v = v_0 - b \cdot t.$$

In der Figur hat also die Endordinate die Größe  $v$ . Der während dieser Bewegung zurückgelegte Weg wird durch die Diagrammfläche dargestellt. Sie läßt sich aus der Differenz zweier Flächen bilden.

Man zieht von dem großen Rechteck die obere Dreiecksfläche ab und erhält

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t \cdot t,$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t^2.$$

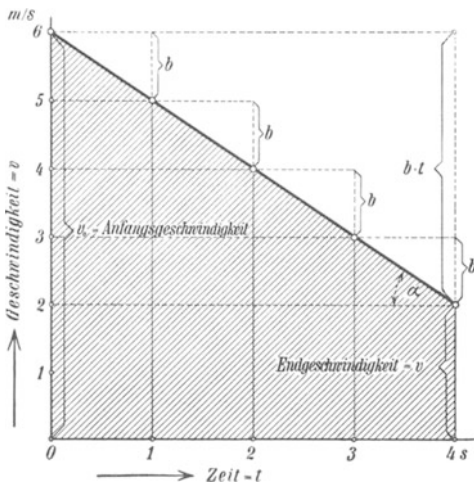


Abb. 220. Die Endgeschwindigkeit wird nicht Null.

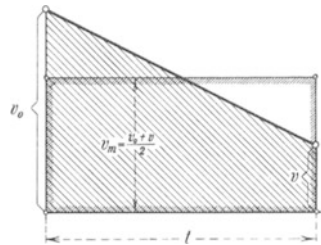


Abb. 221. Ersatz der Trapezfigur durch eine Rechteckfigur.

Nach Abb. 221 kann man die gleichförmig verzögerte Bewegung auch durch eine gleichförmige Bewegung ersetzen, welche mit der mittleren Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

erfolgt, denn das Rechteck mit der Höhe  $v_m$  ist inhaltsgleich der Trapezfläche. Dann lautet die Wegeformel

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Bildet man aus  $v = v_0 - b \cdot t$  den Wert  $t = \frac{v_0 - v}{b}$  und setzt diesen Wert  $t$  in die letzte Wegegleichung ein, so lautet diese

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v_0 - v}{b},$$

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2b}.$$

## Zusammenstellung der Bewegungsformeln.

Gleichförmige Bewegung	Gleichförmig beschleunigte Bewegung		Gleichförmig verzögerte Bewegung	
	mit Anfangsgeschw. $v_0$	aus dem Ruhezustand $v_0 = 0$	bis Endgeschwind. $v$	bis zum Ruhezustand $v = 0$
$v = v_0$	$v = v_0 + b \cdot t$	$v = b \cdot t$	$v = v_0 - b \cdot t$	$v_0 = b \cdot t$
$s = v_0 \cdot t$	$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} b \cdot t^2$	$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$	$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t^2$	$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$
—	$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}$	$s = \frac{v^2}{2b}$	$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2b}$	$s = \frac{v_0^2}{2b}$

## 5. Die ungleichförmige Bewegung.

a) Im Zeit-Wege-Diagramm.

Die ungleichförmige Bewegung ist rechnerisch nur durch Zerlegung in Teilbewegungen zu verfolgen. Diese Teilbewegungen werden dann

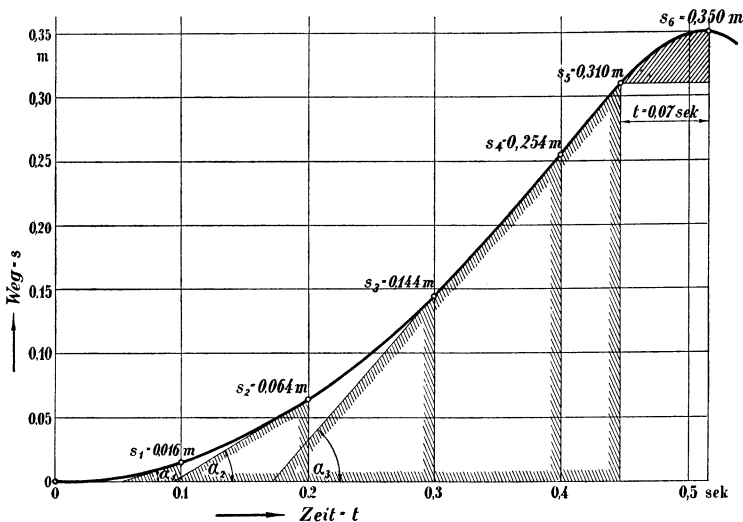


Abb. 222. Das Zeit-Wege-Diagramm einer Rutsche.

in gleichförmige Bewegungen aufgelöst. Das Zeit-Wege-Diagramm kennzeichnet auch die ungleichförmige Bewegung sehr klar. In Abb. 222 ist der Hingang einer Rutsche als Zeit-Wege-Diagramm aufgenommen. Auf der Horizontalen sind 0 bis 0,5 sek als Zeiten, auf der Vertikalen 0 bis 0,35 m als Rutschenwege abzulesen. Es sollen aus dem Diagramm die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ermittelt werden.

Die Zeit-Wege-Linie verläuft vom Achsenschnittpunkt ausgehend zunächst parabelförmig bis zum Wegepunkt  $s_3 = 0,144$  m, d. h. in diesem Wegeabschnitt ist eine beschleunigte Bewegung vorhanden.

Vom Wegepunkt  $s_3 = 0,144$  m bis zum Wegepunkt  $s_5 = 0,310$  m ist die Zeit-Wege-Linie geradlinig, d. h. die Bewegung wird hier gleichförmig mit konstant bleibender Geschwindigkeit. Vom Wegepunkt  $s_5 = 0,310$  m bis zum Wegepunkt  $s_6 = 0,350$  m kommt es zur Bewegungsumkehr, d. h. auf diesem Wegeabschnitt tritt eine Verzögerung bis zum Stillstand ein.

Wie groß ist die Hingangsbeschleunigung beim Hubbeginn? Der Wegepunkt  $s_1 = 0,016$  m ist nach  $t_1 = 0,1$  sek erreicht, also ist die Beschleunigung  $b_1 = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 0,016}{0,1^2} = 3,2$  m/sek<sup>2</sup>.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Rutsche an den Wegestellen  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$ ?

Man zeichnet für die Kurvenpunkte  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$  die Tangenten, dann entstehen drei rechtwinklige Dreiecke mit den Tangentenwinkeln  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  und es ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s_1}{t_1} = v_1.$$

Hierin ist  $s_1 = 0,016$  m die Dreieckshöhe und  $t_1 = 0,05$  sek die Dreiecksgrundlinie. Mit diesen Werten wird

$$v_1 = \frac{0,016}{0,05} = 0,32 \text{ m/sek.}$$

Mit den Werten der Abb. 222 wird ferner

$$v_2 = \frac{0,064}{0,11} = 0,58 \text{ m/sek,}$$

$$v_3 = \frac{0,144}{0,13} = 1,11 \text{ m/sek.}$$

Für die Kurvenpunkte  $s_4$  und  $s_5$  gilt wegen des geradlinigen Verlaufs der Kurve derselbe Tangentenwinkel  $\alpha_3$  und damit ist

$$v_4 = v_3 = 1,11 \text{ m/sek,}$$

$$v_5 = v_3 = 1,11 \text{ m/sek.}$$

Im Kurvenpunkt  $s_5$  verliert die Kurve ihren geradlinigen Verlauf und biegt nach unten ab, d. h. es tritt eine starke Verzögerung der Bewegung bis zum Stillstand ein. Im Punkt  $s_6$  ist die Bewegungsumkehr oder der kurze Stillstand. Der Zeitabstand zwischen  $s_5$  und  $s_6$  ist nach Figur  $t = 0,07$  sek, so daß die im Punkt  $s_5$  herrschende Geschwindigkeit  $v_5 = 1,11$  m/sek in dieser Zeit vernichtet wird, also ist die Verzögerung beim Stillstand

$$b = \frac{v_5}{t} = \frac{1,11}{0,07} = 15,8 \text{ m/sek}^2.$$

Die Rutsche kommt also sehr plötzlich zum Stillstand, so daß die in der Rutsche liegende Kohle vorschießt.

Man kann auch für die zwischen den Kurvenpunkten  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  usw. liegenden Wegestrecken die jeweiligen Beschleunigungen errechnen, z. B. errechnet sich die Beschleunigung zwischen den Kurvenpunkten  $s_1$  und  $s_2$  wie folgt:

$$v_1 = 0,32 \text{ m/sek,} \quad v_2 = 0,58 \text{ m/sek.}$$

Die Zeitdifferenz zwischen  $s_1$  und  $s_2$  ist  $t = 0,1$  sek. Nach der Gleichung

$$v_2 = v_1 + b \cdot t$$

ist 
$$b = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{0,58 - 0,32}{0,1} = 2,6 \text{ m/sek}^2.$$

Zwischen  $s_2$  und  $s_3$  setzt wieder eine stärkere Beschleunigung ein. Mit  $v_2 = 0,58$  m/sek,  $v_3 = 1,11$  m/sek und  $t = 0,1$  sek wird die Beschleunigung

$$b = \frac{v_3 - v_2}{t} = \frac{1,11 - 0,58}{0,1} = 5,3 \text{ m/sek}^2.$$

Diese Beschleunigung ist schon so groß, daß wahrscheinlich die Kohle durch mangelnde Haftreibung zurückbleiben wird.

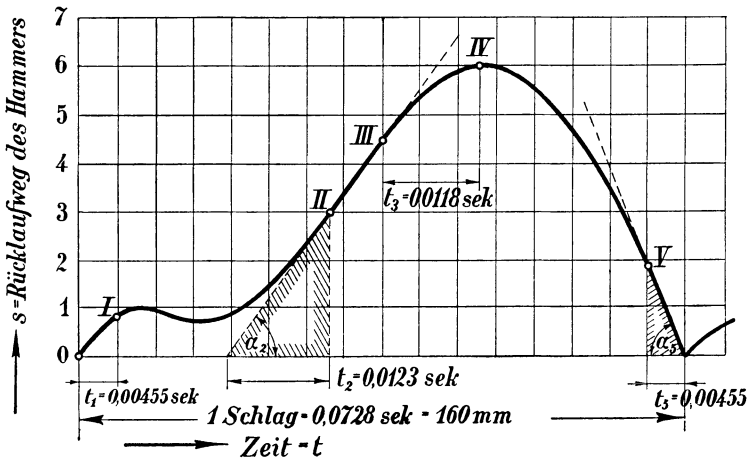


Abb. 223. Der Rücklauf eines Abbauhammers im Zeit-Wege-Diagramm.

In Abb. 223 ist ein Zeit-Wege-Diagramm dargestellt, das an einem Abbauhammer aufgenommen wurde, um die Rücklaufbewegung bzw. den Rückstoß des Hammers zu untersuchen. Der Hammer hat 36 mm Kolbendurchmesser und einen theoretischen Hub von 167 bis 213 mm. Das Kolbengewicht ist 0,825 kg, das Hammergewicht ohne Kappe 10 kg. Das Diagramm ist bei einem Anfangsgegendruck von 25 kg aufgenommen.

Die Zeit-Wege-Linie zeigt am Anfang eine kleine Welle und steigt dann zu einem hohen Wellenberg an.

Mit welcher Anfangsbeschleunigung beginnt die Rücklaufbewegung? Sie werde durch den Kurvenpunkt *I* bestimmt. Der Hammer machte aus der Ruhelage heraus den Weg  $s_1 = 0,8 \text{ mm} = 0,008 \text{ m}$  in  $t_1 = 0,0045$  sek, also ist die Beschleunigung

$$b_1 = \frac{2 s_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 0,0008}{0,0045^2} = 77,4 \text{ m/sek}^2.$$

Das ist ein sehr hoher Wert. Von Punkt *II* bis Punkt *III* verläuft die Kurve geradlinig. Die Verbindungslinie *II III* ist Tangente und



hat den Tangentenwinkel  $\alpha_2$ . Damit entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Höhe  $s_2 = 3 \text{ mm} = 0,003 \text{ m}$  und der Grundlinie  $t_2 = 0,0123 \text{ sek}$ . Zwischen Punkt *II* und *III* ist daher die gleichförmige Rücklaufgeschwindigkeit

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{0,003}{0,0123} = 0,244 \text{ m/sek} = v_3.$$

Diese Geschwindigkeit wird von Punkt *III* bis Punkt *IV*, wo die Bewegungsumkehr erfolgt, durch Verzögerung vernichtet. Die Verzögerungszeit ist  $t_3 = 0,0118 \text{ sek}$ , also ist die Verzögerung bis zur Umkehr

$$b_3 = \frac{v_3}{t_3} = \frac{0,244}{0,0118} = 20,7 \text{ m/sek}^2.$$

Der Hammer läuft nun den Gegenweg. Vom Punkt *V* ab ist die Kurve wieder geradlinig. Die Gerade ist Tangente und bildet den Tangentenwinkel  $\alpha_5$ . Es entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Höhe  $s_5 = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$  und der Grundlinie  $t_5 = 0,00455 \text{ sek}$ . Die Hammergeschwindigkeit an dieser Stelle ist demnach

$$v_5 = \frac{s_5}{t_5} = \frac{0,002}{0,00455} = 0,418 \text{ m/sek}.$$

Diese Geschwindigkeit wird durch Aufprallen des Hammers auf den Bund des Spitzzeisens plötzlich vernichtet.

Im Maschinenlaboratorium der Bergschule wird die Rückstoßstärke durch den zahlenmäßig festzulegenden Ruck des Hammers beurteilt. Die Ruckgröße ist um so höher, je steiler die Tangentenkurve verläuft. Die Ordinaten haben in diesem Fall eine andere Bedeutung, sie bedeuten die Zunahme der Gegendruckgröße am Hammer. Im Diagramm nimmt der Gegendruck am Hammergriff für je 1 mm Hammerweg um 4,82 kg zu.

In der Figur ist für den Tangentenwinkel  $\alpha_2$  die Dreieckshöhe  $\Delta P = 3 \text{ mm} = 3 \cdot 4,82 = 14,46 \text{ kg}$ , die Dreiecksgrundlinie  $t = 0,0123 \text{ sek}$  und damit wird die Ruckgröße

$$R = \text{tg } \alpha = \frac{\Delta P}{t} = \frac{14,46}{0,0123} = 1172 \text{ kg/sek}.$$

Das hat folgende Bedeutung: Die Hand des Arbeiters erfährt in 12,3 Tausendstel = sek eine Rückdruckzunahme von 14,46 kg, oder wenn die Rücklaufdauer 1 sek gedauert hätte, würde die Zunahme 1172 kg betragen haben.

Praktischer Wert: Die Rückstoßstärke wächst und fällt proportional mit dem versuchsmäßig ermittelten Ruckwert, so daß ein Vergleichswert für die Rückstoßwirkung der Hämmer geschaffen ist. Hämmer mit dem Ruckwert  $R \leq 500 \text{ kg/sek}$  können als rückstoßschwach bezeichnet werden.

#### b) Im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

In Abb. 224 ist eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung dargestellt, bei welcher die Beschleunigung abnimmt. Zieht man die Tangenten der Kurvenpunkte *I*, *II* und *III*, so bilden diese mit der Horizontalachse die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ , welche immer kleiner werden.

Nun ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} = b_1 = \text{Beschleunigung im Punkte I.}$$

Würde die Bewegung mit derselben Beschleunigung, also mit konstanter

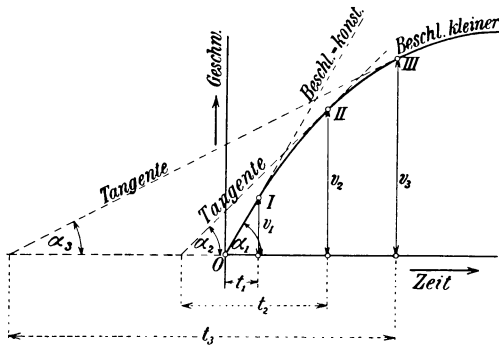


Abb. 224. Die ungleichförmige Bewegung im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

Beschleunigung weitergehen, so müßte die Zeit-Geschwindigkeitslinie in der Verlängerung von  $OI$  weitergehen. Das tut sie nicht, sie fällt ab und deswegen fällt auch die Beschleunigung ab. Der Punkt  $II$  könnte auch mit der gleichförmigen Beschleunigung

$$b_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_2}{t_2}$$

erreicht werden. Dann ist aber  $b_2 < b_1$ , denn es ist  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Ebenso könnte der Punkt  $III$  mit der gleichförmigen

$$b_3 = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{v_3}{t_3}$$

erreicht werden, diese ist aber wieder kleiner als  $b_2$ , denn es ist  $\alpha_3 < \alpha_2$ .

**Regel:** Bei abnehmendem Richtungswinkel  $\alpha$  der Kurvenpunkte nimmt die Beschleunigung ab.

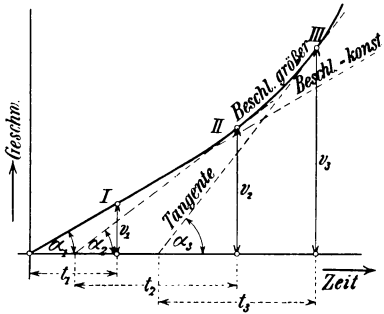


Abb. 225. Die Beschleunigung wächst.

In Abb. 225 ist der entgegengesetzte Fall dargestellt, die Richtungswinkel der Kurvenpunkte  $I$ ,  $II$  und  $III$  werden größer, demnach muß die Beschleunigung wachsen.

**Regel:** Bei zunehmendem Richtungswinkel  $\alpha$  der Kurvenpunkte nimmt die Beschleunigung zu.

## 6. Das Fahrdiagramm einer Fördermaschine.

Man kann durch ein Zentrifugalpendel-Meßinstrument den Geschwindigkeitsverlauf eines Fördermaschinenzuges aufschreiben lassen. Das ideale Fahrdiagramm einer Fördermaschine ist in Abb. 226 dargestellt, als Horizontale sehen wir die Zeitlinie, als Vertikale die Geschwindigkeitslinie. Es entstehen zwei Fahrdiagramme:

1. das Fahrdiagramm für die Produktenförderung mit der höchsten Fahrgeschwindigkeit  $v = 16$  m/sek,
2. das Fahrdiagramm für die Seilfahrt mit der höchsten Fahrgeschwindigkeit  $v = 6$  m/sek.

### a) Produktenförderung.

Das Anfahren geschieht gleichförmig beschleunigt, das zeigt der geradlinig ansteigende Verlauf der Geschwindigkeitslinie. Nach  $t = 16$

Sekunden ist die Höchstgeschwindigkeit  $v = 16$  m/sek erreicht, demnach beträgt die Anfahrbeschleunigung

$$b = \frac{v}{t} = \frac{16}{16} = 1 \text{ m/sek}^2.$$

Die Geschwindigkeitslinie verläuft dann horizontal, d. h. die Fahr- geschwindigkeit  $v = 16$  m/sek bleibt konstant bis zur 40. Sekunde, dann fällt sie geradlinig ab. Der Auslauf erfolgt wegen des geradlinigen Ab- fallens mit gleichförmiger Verzögerung, während der Zeit  $t = 10$

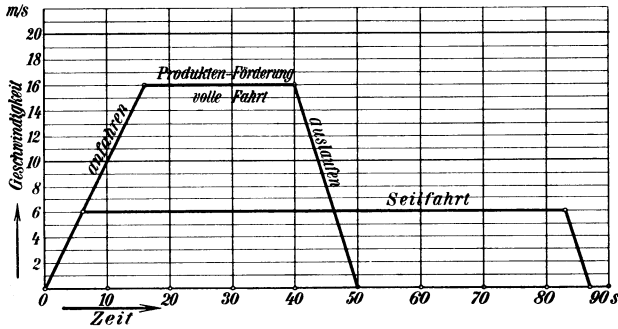


Abb. 226. Das ideale Fahrtdiagramm einer Fördermaschine.

Sekunden wird die Fahrgeschwindigkeit  $v = 16$  m/sek auf Null herab- gemindert, also ist die Verzögerung

$$b = \frac{v}{t} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ m/sek}^2.$$

Die Wegestrecken lassen sich wie folgt berechnen:

- a) Anfahrweg  $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 16^2 = 128 \text{ m,}$
- b) Vollfahrtweg  $s = v \cdot t = 16 \cdot 24 = 384 \text{ m,}$
- c) Auslaufweg  $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 10^2 = 80 \text{ m,}$

$$\text{Gesamtweg} = \text{Teufe } T = 592 \text{ m.}$$

Ein Förderzug dauert 50 Sekunden. Die Pause, welche zwischen zwei Zügen zum Umsetzen und Aufschieben der Förderwagen erforderlich ist, betrage im Mittel 70 Sekunden, also dauert 1 Förderzug mit Pause  $50 + 70 = 120$  Sekunden. In  $1 \text{ h} = 3600$  sek können daher

$$\frac{3600}{120} = 30 \text{ Züge}$$

gemacht werden. Als Nutzlast werden 8 Wagen mit je 650 kg Inhalt gezogen, das ist je Zug eine Nutzlast von  $8 \cdot 650 = 5200 \text{ kg} = 5,2 t$  oder eine stündliche Förderleistung von

$$30 \cdot 5,2 = 156 t.$$

Bei  $6\frac{1}{2}$  stündiger flotter Förderung können je Schicht

$$6,5 \cdot 156 = \sim 1000 t$$

gefördert werden, so daß die Tagesleistung in zwei Schichten 2000 t beträgt.

**b) Seilfahrt.**

Das Anfahren geschieht wieder mit der Beschleunigung  $b = 1 \text{ m/sek}^2$ , denn nach 6 Sekunden ist die zulässige Fahrgeschwindigkeit

$$v = 6 \text{ m/sek}$$

erreicht. Die Vollfahrt beginnt nach der 6. Sekunde und hört bei der 83. Sekunde auf, sie dauert also 77 Sekunden.

Der Auslauf erfolgt mit der Verzögerung  $b = 1,6 \text{ m/sek}^2$ , denn die abfallende Linie ist parallel der abfallenden Linie der Produktförderung. Demnach dauert der Auslauf

$$t = \frac{v}{b} = \frac{6}{1,6} = 3,75 \text{ sek.}$$

Die Wegestrecken sind folgende:

$$\begin{array}{l} \text{a) Anfahrweg} = s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = 18 \text{ m,} \\ \text{b) Vollfahrtweg} = s = v \cdot t = 6 \cdot 77 = 462 \text{ m,} \\ \text{c) Auslaufweg} = s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 3,75^2 = 11 \text{ m,} \\ \hline \text{Gesamtweg} = \text{Teufe } T = 491 \text{ m.} \end{array}$$

Die Seilfahrt ist also auf eine höhere Sohle gemacht worden.

Der volle Zug der Seilfahrt dauert

$$6 + 77 + 3,75 = 86,75 \text{ sek} \sim 87 \text{ sek.}$$

Die Pause zum Personenwechsel betrage 120 Sekunden, so daß eine Seilfahrt mit Pause

$$87 + 120 = 207 \text{ sek}$$

in Anspruch nimmt.

Die zulässige Personenlast betrage 60 Personen, dann sind bei einer Kopffzahl von 660 je Schicht für die Seilfahrt

$$\frac{660}{60} = 11 \text{ Züge}$$

erforderlich, welche in

$$11 \cdot 207 = 2280 \text{ sek} = 38 \text{ Minuten}$$

gemacht werden.

## 7. Das unvorschriftsmäßige Fahren einer Fördermaschine.

In Abb. 227 ist das Fahrdiagramm eines Förderzuges wiedergegeben, der unvorschriftsmäßig gefahren ist. Bei starken Fördermaschinen, die durch Dampf getrieben werden, kann das Anfahren mit unzulässig hoher Beschleunigung erfolgen. Zulässig ist im allgemeinen eine Anfahrbeschleunigung von 1 bis  $1,5 \text{ m/sek}^2$ , ebenso soll beim Auslauf die Verzögerung nicht größer als  $1,5$  bis  $2 \text{ m/sek}^2$  sein.

Im Diagramm erkennen wir eine sehr hohe Anfahrbeschleunigung, denn zieht man durch den Anfangspunkt  $O$  eine Tangente an die Geschwindigkeitskurve, so verläuft diese sehr steil. Zieht man durch einen beliebigen Punkt  $a$  der Tangente eine Senkrechte, so schneidet diese den Abszissenwert 6 Sekunden aus, während Punkt  $a$  den Ordi-

natenwert 22 m hat, folglich ist die Anfangsbeschleunigung

$$b = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{t} = \frac{22}{6} = 3,67 \text{ m/sek}^2.$$

Die Beschleunigung nimmt, wie man aus der Gestalt der Kurve sieht, ab. Die Tangente im Punkte *b* liefert die im Punkt *b* vorherrschende Beschleunigung, sie beträgt nur noch

$$b_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{13,5}{32} = 0,42 \text{ m/sek}^2.$$

Und nun wächst die Beschleunigung wieder bis zum Punkte *c*, hier hat sie die Größe

$$b_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_2}{t_2} = \frac{21}{14} = 1,50 \text{ m/sek}^2.$$

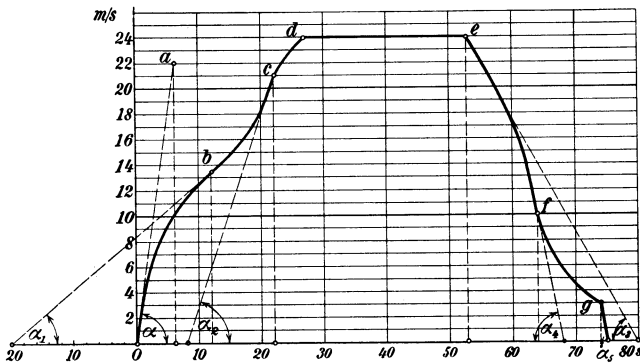


Abb. 227. Das Fahrtdiagramm einer schlecht gefahrenen Maschine.

Dann fällt die Beschleunigung wieder und ist im Punkte *d* gleich Null geworden, so daß bis zum Punkte *e* die volle höchste Fahrgeschwindigkeit  $v = 24 \text{ m/sek}$  beibehalten wird.

Der Auslauf beginnt mit der Verzögerung

$$b_3 = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{v_3}{t_3} = \frac{24}{27} = 0,89 \text{ m/sek}^2.$$

Die Verzögerung wächst dann, sie erreicht im Punkte *f* den Wert

$$b_4 = \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{v_4}{t_4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m/sek}^2.$$

Von *f* bis *g* nimmt die Verzögerung ab, bis im Punkte *g* durch Aufwerfen der Bremse ein starker Knick entsteht. Die Geschwindigkeitslinie fällt nun steil ab, so daß die Verzögerung wieder sehr groß wird. Sie beträgt

$$b_5 = \operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{v_5}{t_0} = \frac{3}{1} = 3 \text{ m/sek}^2.$$

Solche großen Beschleunigungs- und Verzögerungswerte sind sehr gefährlich, sie verursachen bei Treibscheiben den gefährlichen Seilrutsch und bringen außerdem Schwingungen in das Seil, die die Lebensdauer des Seiles herabsetzen.

Die Bergpolizei-Verordnung für die Seilfahrt vom 21. Juli 1927 sagt im § 12:

„Bei allen Seilfahreranlagen, bei denen die Seilgeschwindigkeit mehr als 4 m/sek beträgt, müssen selbstschreibende Geschwindigkeitsmesser vorhanden sein, die eine deutliche Darstellung von der Höhe der Geschwindigkeit während des Treibens geben.

Die Geschwindigkeitsdiagramme sind täglich dem verantwortlichen Betriebsführer vorzulegen und von diesem 3 Monate aufzubewahren.“

In Abb. 228 ist ein Ausschnitt aus einem Geschwindigkeitsdiagramm dargestellt. Man sieht als Horizontale die Zeitlinien. Der Strei-

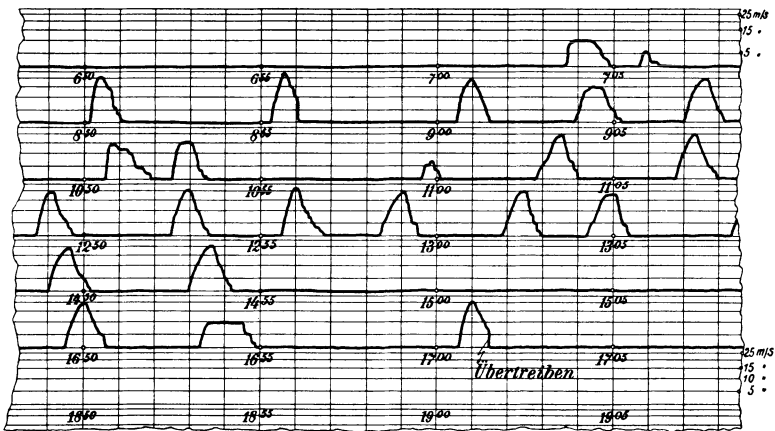


Abb. 228. Der Diagrammstreifen eines Geschwindigkeitsschreibers.

fen legt sich um eine von einem Uhrwerk angetriebene Schreibtrommel, der Trommelumfang wird in 2 Stunden einmal rund gedreht, nach jeder Umdrehung rückt die Trommel um eine Diagrammhöhe höher, so daß die untereinander liegenden Zeitpunkte um 2 Stunden auseinander liegen. Die senkrechten Linien haben einen Abstand von 1 Minute, sie schneiden eine Schar von Horizontallinien und geben in ihren Schnittpunkten die Geschwindigkeitshöhen 5, 10, 15, 20 und 25 m/sek an.

Jeder Förderzug wird aufgezeichnet. Der erste Förderzug des Diagrammausschnitts fand um 8<sup>50</sup> statt, der zweite um 8<sup>55</sup>, der dritte um 9<sup>00</sup>. Es liegt also zwischen jedem Förderzug eine Pause von über 4 Minuten, d. h. die Kohlen kamen schlecht heran, und das beunruhigt den Maschinisten, denn die Kohlen müssen heraus. Man erkennt das an den Fahrdiagrammen, sie verlaufen sehr spitz, das ganze Treiben dauert nur 40 bis 50 Sekunden, also wird mit sehr großer Beschleunigung angefahren, namentlich das Diagramm 8<sup>55</sup> zeigt die steile Anfahrlinie, die fast 25 m/sek Endgeschwindigkeit erreicht, und ebenso steil ist die Auslaufflinie, die zu Ende des Treibens eine sehr starke Verzögerung zeigt. Was an Pausen verloren geht, will der Maschinist durch schnelles Fahren wieder einholen.

Um 12<sup>50</sup> hat sich das Anrollen der Kohlen gebessert. Jetzt folgen

Pausen von nur 3, 2 und  $1\frac{1}{2}$  Minuten. Der Maschinist fährt nun ruhiger, das zeigen die flacheren Auslauflinien, er fährt vorsichtiger ein.

Um 16<sup>55</sup> findet eine Seilfahrt statt, dann kommt eine lange Pause von über 5 Minuten und nun soll die Zeitversäumnis wieder eingeholt werden. Der Maschinist fährt mit sehr großer Beschleunigung an und erreicht in kürzester Zeit seine Fahrgeschwindigkeit für die Vollfahrt, der Auslauf wird sehr unruhig, er hat kurz vor der Hängebank noch eine Geschwindigkeit von 7 m/sek, und das Übertreiben ist geschehen. Der senkrechte Absturz der Auslauflinie zeigt die plötzliche Geschwindigkeitsverminderung durch Auffallen der Bremsen.

Das Diagramm des Übertreibens ist in Abb. 229 vergrößert dargestellt und zum Vergleich hiermit das um 16<sup>50</sup> geschriebene, normale Fahr-diagramm. Das erste Diagramm zeigt eine hohe Anfahrbeschleunigung, in 10 Sekunden ist die Fahrgeschwindigkeit 12,5 m erreicht, d. h. die Anfahrbeschleunigung betrug

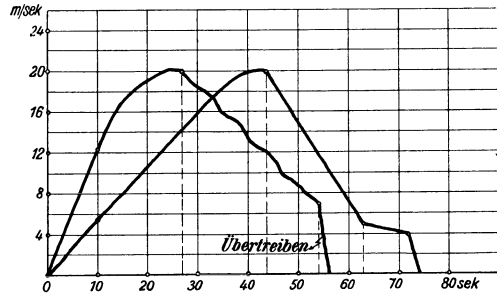


Abb. 229. Das Diagramm des Übertreibens.

$$b = \frac{v}{t} = \frac{12,5}{10} = 1,25 \text{ m/sek}^2.$$

Die Auslauflinie zeigt einen wellenförmigen Verlauf, die Auslaufbewegung wird scheinbar durch Frischdampfstöße hochgehalten. An dem Knickpunkt der Auslauflinie setzen die Bremsen ein, es betrug hier die Geschwindigkeit noch 7 m und nun kommt der Korb in 2 Sekunden zum Stillstand, also mit einer Verzögerung von

$$b = \frac{v}{t} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ m/sek}^2.$$

Im normalen Fahrdiagramm wird in 10 Sekunden erst eine Geschwindigkeit von 5,5 m erreicht, d. h. die Anfahrbeschleunigung beträgt nur

$$b = \frac{v}{t} = \frac{5,5}{10} = 0,55 \text{ m/sek}^2.$$

Nach 4 Sekunden Vollfahrt, welche mit 20 m Höchstgeschwindigkeit erfolgt, fällt die Auslauflinie geradlinig ab, bei Sekunde 44 ist die Geschwindigkeit 20 m, bei Sekunde 63 ist sie 5 m, demnach ist die Verzögerung

$$b = \frac{20 - 5}{63 - 44} = \frac{15}{19} = 0,79 \text{ m/sek}^2.$$

Dann fährt er mit 4 m Geschwindigkeit beim Auffallen der Bremsen und kommt in 2 Sekunden zum Stillstand, d. h. die Bremsverzögerung betrug

$$b = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/sek}^2.$$

Die Teufe des Schachtes beträgt 750 m, die normale Fahrt dauerte 74 Sekunden, also war die mittlere Fahrgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{750}{74} = 10,1 \text{ m/sek.}$$

Die Fahrt, bei welcher das Übertreiben erfolgte, dauerte nur 56 Sekunden, entsprechend einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von

$$v = \frac{750}{56} = 13,4 \text{ m/sek.}$$

Die Bergpolizei-Verordnung für die Seilfahrt sagt im § 9:

„Fördermaschinen, bei denen die Seilfahrtgeschwindigkeit mehr als 6 m/sek beträgt, müssen mit einem amtlich zugelassenen Fahrtregler ausgerüstet sein.

Der Fahrtregler muß sowohl bei der Güterförderung wie bei der Seilfahrt eingeschaltet sein. Bei der regelmäßigen Seilfahrt muß der Fahrtregler auf Seilfahrtgeschwindigkeit eingestellt sein.“

Diese Fahrtregler sollen den Gang der Maschine zwangsläufig regulieren, also auch den Auslauf und das Stillsetzen der Maschine beherrschen. Sie regulieren zunächst durch Veränderung der Steuerung (Füllungsänderung) und bei nicht genügender Geschwindigkeitsabnahme durch Einsetzen einer Schleifbremse. Der Fahrtregler soll das Durchfahren der Hängebank mit mehr als 3 m/sek unmöglich machen und beim Übertreiben eine auf die Treibscheibe unmittelbar wirkende Bremse voll auslösen. Außerdem soll er die Überschreitung der vorgeschriebenen Höchstgeschwindigkeit um mehr als 2 m/sek unmöglich machen.

Auch die im Diagramm vorgeführte Fördermaschine, welche den Korb übertrieben hat, war mit einem Fahrtregler ausgerüstet, er hat also nicht richtig eingegriffen. Daher sind die Fahrtregler nicht unbedingt zuverlässig, und der beste Fahrtregler wird immer der geschulte und gewissenhafte Fördermaschinist bleiben.

Nach § 46, Absatz 3 der neuen Bergpolizei-Verordnung für die Seilfahrt sind die Fördermaschinen jährlich, die Fahrtregler der elektrischen Fördermaschinen halbjährlich durch einen Sachverständigen zu prüfen, und die Fahrtregler der Dampffördermaschinen durch einen besonderen Sachverständigen ebenfalls halbjährlich zu prüfen. Die heute üblichen hydraulischen Fahrtregler arbeiten sehr zuverlässig und bieten eine hohe Sicherheit.

Beim Übertreiben kann der Förderkorb bis unter die Seilscheibe getrieben werden. Das zu verhüten, schreibt § 7 der Seilfahrtverordnung vor:

„Die freie Höhe muß bei größeren Seilfahrplanlagen wenigstens 10 m, bei kleineren Seilfahrplanlagen wenigstens 3 m betragen.“

Fährt der Korb z. B. mit  $v = 6$  m/sek durch die Hängebank, so ist bei  $b = 2$  m/sek<sup>2</sup> Bremsverzögerung der erforderliche Bremsweg schon

$$s = \frac{v^2}{2b} = \frac{6^2}{2 \cdot 2} = 9 \text{ m,}$$

d. h. der Korb sitzt unter der Seilscheibe, und bei  $v = 3$  m/sek, die der Fahrtregler zuläßt, ist der Bremsweg immer noch

$$s = \frac{3^2}{2 \cdot 2} = 2,25 \text{ m.}$$



### 8. Der freie Fall und der senkrechte Wurf aufwärts.

Ein Körper, welcher reibungslos auf einer horizontalen Bahn gleiten kann, wird unter dem Einfluß einer ständig wirkenden Horizontalkraft  $P$  (Abb. 230) sich mit einer gleichbleibenden Beschleunigung  $b$  auf dieser Bahn fortbewegen. Der gleiche Fall liegt vor, wenn ein Körper, seiner Unterlage beraubt, frei nach unten fällt. Sein Gewicht bildet die ständig wirkende Kraft, welche die Abwärtsbewegung zu einer gleichförmig beschleunigten macht. Man nennt diese Beschleunigung die Fallbeschleunigung oder die Erdbeschleunigung und bezeichnet sie mit dem Formelbuchstaben  $g$ . Ihre Größe ist bekannt, sie beträgt für unsere Breitengrade



Abb. 230. Die stetig wirkende Kraft  $P$  erzeugt die Beschleunigung  $b$ .

$$g = 9,81 \text{ m/sek}^2.$$

Es ist üblich, die durchfallene Höhe mit  $h$  zu bezeichnen, und es ergeben sich dann aus den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung die Formeln für den freien Fall.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung		Freier Fall	
Endgeschwindigkeit	$v = b \cdot t$		$v = g \cdot t$
Weg	$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$		$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$
Weg	$s = \frac{v^2}{2b}$		$h = \frac{v^2}{2g}$

Abb. 231 zeigt den Bewegungsvorgang für die ersten 3 Sekunden. Dann ist:

	nach der 1. Sek.	nach der 2. Sek.	nach der 3. Sek.
die Fallgeschwindigkeit . .	$v_1 = 1 \cdot g$	$v_2 = 2 \cdot g$	$v_3 = 3 \cdot g$
die Fallhöhe . . . . .	$h_1 = \frac{1}{2} g$	$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot 2^2$	$h_3 = \frac{1}{2} g \cdot 3^2$

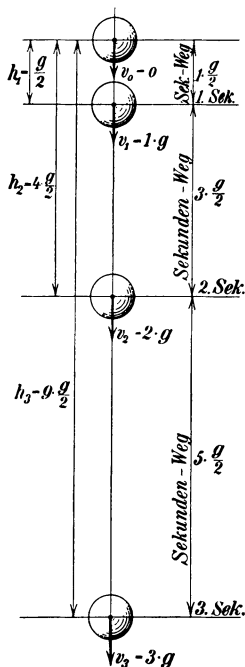
Erfolgt der freie Fall nicht aus der Ruhelage heraus, sondern bereits mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , so leiten sich die geltenden Formeln ebenfalls aus den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung ab.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung		Freier Fall	
Endgeschwindigkeit	$v = v_0 + b \cdot t$		$v = v_0 + g \cdot t$
Weg	$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} b \cdot t^2$		$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$
Weg	$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}$		$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$

Der senkrechte Wurf aufwärts beginnt mit einer größten Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , das Gewicht wirkt der Bewegung entgegen, so daß ein konstant bleibender Widerstand entsteht, der die Bewegung gleichförmig verzögert. Die Größe der Verzögerung ist bekannt, sie ist wieder

$$g = 9,81 \text{ m/sek}^2.$$

Es gelten wieder die bekannten Formeln für die gleichförmig verzögerte Bewegung. Beim senkrechten Hochwurf kommt der Körper in der höchsten Stellung zur Ruhe, so daß die Formeln für die Bewegung bis zum Ruhezustand gelten, der Anfangspunkt der Bahn liegt aber unten.



Gleichförmig verzögerte Bewegung

Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = b \cdot t$

Weg  $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$

Weg  $s = \frac{v_0^2}{2b}$

Senkrechter Hochwurf

Soll der Körper  $t$  Sekunden steigen, so muß die Abwurfgeschwindigkeit sein

$$v_0 = g \cdot t$$

und es wird dann die Steighöhe

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

oder

Die Bewegung kann als eine Umkehrung der in Abb. 231 dargestellten Abwärtsbewegung aufgefaßt werden. Um die einzelnen Bewegungsabschnitte zu errechnen, müssen auch die allgemeinen Formeln der gleichförmig verzögerten Bewegung bekannt sein, sie lauten:

Gleichförmig verzögerte Bewegung

Endgeschwindigkeit  $v = v_0 - b \cdot t$

Weg  $s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t^2$

Weg  $s = \frac{v_0^2 - v^2}{2b}$

Senkrechter Hochwurf

$v = v_0 - g \cdot t$

$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$

Wirft man z. B. eine Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 3 \cdot g$  senkrecht hoch, so ergeben sich für die Sekundenabschnitte folgende Werte:

	nach der 1. Sek.	nach der 2. Sek.	nach der 3. Sek.
die Steiggeschwindigkeit .	$v_1 = 3g - 1 \cdot g = 2g$	$v_2 = 3g - 2 \cdot g = 1 \cdot g$	$v_3 = 3g - 3 \cdot g = 0$
die Steighöhe . . . . .	$h_1 = 3g \cdot 1 - \frac{1}{2} g \cdot 1^2 = \frac{g}{2} \cdot 5$	$h_2 = 3g \cdot 2 - \frac{1}{2} g \cdot 2^2 = \frac{g}{2} \cdot 8$	$h_3 = 3g \cdot 3 - \frac{1}{2} g \cdot 3^2 = \frac{g}{2} \cdot 9$

Diese Bewegungsabschnitte sind in Abb. 232 aufgetragen; man erkennt, der Bewegungsvorgang des Fallens, Abb. 231, wird in umgekehrter Richtung wiederholt. Der hochgeworfene Körper wird also auch mit derselben Geschwindigkeit unten wieder ankommen, mit der er hochgeschleudert wurde, und er wird zum Zurückfallen dieselbe Zeit wie zum Hochsteigen gebrauchen.

Ein mit der Geschwindigkeit  $v_0$  hochgeschleudertes Körper erreicht die Steighöhe

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

und benötigt die Steigzeit

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

In der doppelten Zeit  $\frac{2 \cdot v_0}{g}$  kehrt er zum Ausgangspunkt zurück.

Durchfällt ein Körper die Fallhöhe  $h$ , so ist seine Aufschlaggeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Diese Formel wird uns in der Hydraulik als Ausflußformel wieder begegnen.

Um die Geschwindigkeit  $v$  zu erreichen, muß der Körper die Fallzeit

$$t = \frac{v}{g}$$

haben.

**Beispiel:** Bei einem mit  $v = 10$  m/sek aufwärtsfahrenden Förderkorb tritt ein Seilbruch ein, wo befindet sich der Korb, wenn die Fangvorrichtung erst nach 2 Sekunden wirksam wird?

**Lösung:** Der Korb hat nach dem Seilbruch noch eine

$$\text{Steighöhe } h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{20} = 5 \text{ m}$$

$$\text{und Steigzeit } t = \frac{v}{g} = \frac{10}{10} = 1 \text{ Sekunde.}$$

Wenn nach 2 Sekunden die Fangvorrichtung einsetzt, bleibt ihm zum Fallen noch 1 Sekunde, dann ist seine Fallgeschwindigkeit

$$v = t \cdot g = 1 \cdot 10 = 10 \text{ m}$$

und die durchfallene Höhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{20} = 5 \text{ m,}$$

d. h. er steht beim Einsetzen der Fangvorrichtung wieder genau an der Stelle, an der die Lösung vom Seil erfolgte.

**Beispiel:** Bei einem mit  $v = 10$  m/sek abwärtsfahrenden Förderkorb tritt ein Seilbruch ein, wo befindet sich der abstürzende Korb, wenn die Fangvorrichtung erst nach 2 Sekunden eingreift?

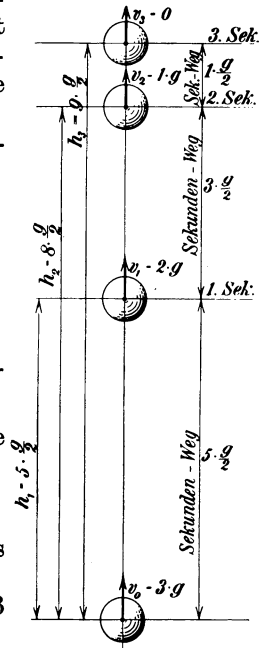


Abb. 232. Der senkrecht hochgeschleuderte Körper.

**Lösung:** Nach 2 Sekunden hat der Korb eine Fallgeschwindigkeit

$$v = v_0 + g \cdot t = 10 + 10 \cdot 2 = 30 \text{ m/sek.}$$

Der durchfallene Weg ist dann

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{30^2 - 10^2}{20} = 40 \text{ m.}$$

Der Korb befindet sich also 40 m unterhalb der Unfallstelle, seine Fallgeschwindigkeit ist mit 30 m/sek schon so groß, daß ein wirksames Fangen ausgeschlossen erscheint.

## 9. Der Fall auf schiefer Ebene.

In Abb. 233 gleitet ein Körper reibungslos auf einer schiefen Ebene herab, er unterliegt auch hier der Schwerkraft und will mit der Fallbeschleunigung  $g$  senkrecht abfallen.

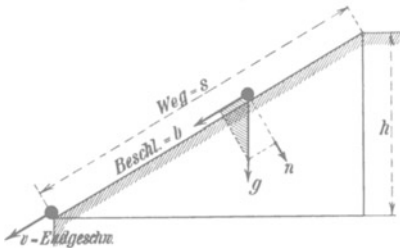


Abb. 233. Der freie Fall auf schiefer Ebene.

Das senkrechte Fallen wird zu einem schrägen Fallen, so daß die Beschleunigung  $g$  nicht ganz zur Auswirkung kommen kann. Man zerlegt die Beschleunigung  $g$  in zwei Komponenten. Eine Komponente  $n$  steht senkrecht zur schiefen Ebene, sie kommt also für die Bewegung nicht in Frage. Die andere Komponente  $b$  zieht parallel zur schiefen Ebene, sie beschleunigt den Körper auf der schiefen Bahn, deren Länge  $= s$  ist.

Nach der Gleichung

$$s = \frac{v^2}{2b}$$

wird die Endgeschwindigkeit  $v = \sqrt{2bs}$ .

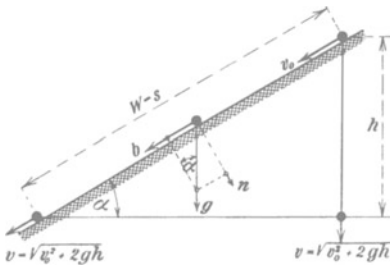


Abb. 234. Das Fallen beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ .

Das im Beschleunigungsparallelogramm liegende schraffierte Dreieck ist dem großen Dreieck der schiefen Ebene ähnlich, also ist

$$\frac{b}{g} = \frac{h}{s} \quad \text{oder} \quad b = \frac{g \cdot h}{s},$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{g \cdot h}{s} \cdot s} = \sqrt{2gh}.$$

**Regel:** Gleitet ein Körper reibungslos eine schiefe Ebene frei herab, so kommt er unten mit derselben Geschwindigkeit an, als ob er die senkrechte Höhe der schiefen Ebene frei durchfallen hätte.

Bisher wurde angenommen, die Fallbewegung auf der schiefen Ebene beginne mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$ , also aus der Ruhelage. Auch für den Fall, daß bereits eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vorherrscht, wie in Abb. 234, kann die Endgeschwindigkeit  $v$  leicht ermittelt werden. Für das senkrechte Fallen

ist die Formel bekannt:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g},$$

also ist

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Dieselbe Endgeschwindigkeit wird auch beim Fall auf der schiefen Ebene erreicht. Man kann auch den Weg  $s$  und die Fallzeit berechnen. Aus dem Beschleunigungsparallelogramm liest man ab

$$b = g \cdot \sin \alpha,$$

also ist

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} b \cdot t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot t^2,$$

ferner ist

$$v = v_0 + b \cdot t = v_0 + g \cdot \sin \alpha \cdot t.$$

$$\text{Fallzeit } t = \frac{v - v_0}{b} = \frac{v - v_0}{g \cdot \sin \alpha}.$$

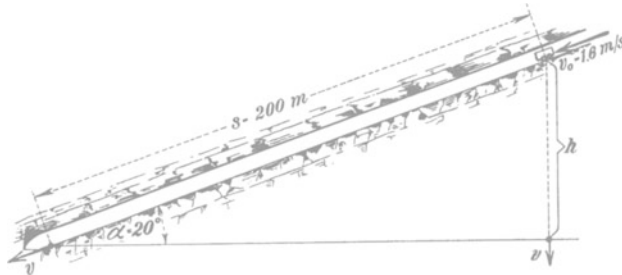


Abb. 235. Der Förderwagen fällt im Bremsberg.

**Beispiel:** Ein Bremsberg, Abb. 235, hat ein Einfallen von  $20^\circ$ , bei der Abwärtsfahrt, welche mit  $v_0 = 1,6$  m/sek erfolgt, reißt das Seil; mit welcher Beschleunigung rollt der Wagen abwärts, und wie groß ist seine Endgeschwindigkeit am Fuß des Bremsberges, wenn er 200 m zurückrollt?

**Lösung:** Der abwärts rollende Wagen hat die Beschleunigung

$$b = g \cdot \sin \alpha = 9,81 \cdot \sin 20^\circ = 9,81 \cdot 0,3576 = 3,5 \text{ m/sek}^2.$$

Er kommt mit derselben Endgeschwindigkeit an, als wenn er die dem Fahrweg  $s = 200$  m entsprechende senkrechte Höhe  $h$  frei durchfallen hätte.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \frac{h}{s} &= \sin \alpha \quad \text{oder} \quad h = s \cdot \sin \alpha \\ &= 200 \cdot 0,3576 = 71,52 \text{ m,} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{1,6^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 71,52} = 37,5 \text{ m/sek.}$$

Das Herabrollen dauert demnach

$$t = \frac{v - v_0}{b} = \frac{37,5 - 1,6}{3,5} = 10,25 \text{ Sekunden.}$$

Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn der Seilbruch an derselben Stelle bei der Aufwärtsfahrt erfolgt wäre?

Da der Förderwagen mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 1,6$  m/sek aufwärts fährt, so wird beim Seilbruch erst eine Verzögerung des Wagens bis zum Stillstand eintreten. Würde ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  hochgeschleudert, so erreicht er die Steighöhe

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1,6^2}{2 \cdot 9,81} = 0,13 \text{ m.}$$

Der Wagen steigt um den gleichen Betrag, d. h. er legt auf der schrägen Bahn noch den Weg

$$s_0 = \frac{h_0}{\sin \alpha} = \frac{0,13}{0,3576} = 0,364 \text{ m}$$

nach oben zurück; denselben Weg fällt er wieder zurück und erreicht nach 0,364 m Abwärtsfahrt seine Fahrgeschwindigkeit  $v_0 = 1,6 \text{ m/sek}$ , d. h. er beginnt dann an der Bruchstelle die Abwärtsfahrt mit derselben Anfangsgeschwindigkeit wie bei der Abwärtsfahrt, er wird also mit derselben Endgeschwindigkeit  $v = 37,5 \text{ m/sek}$  unten ankommen.

Es besteht nur ein Unterschied in der Fallzeit, indem nun die Zeit für das Hochfahren der 0,364 m langen Strecke und für das Zurückfahren dieser Strecke hinzukommt. Seine Verzögerung beim Hochfahren ist

$$b = g \cdot \sin \alpha = 3,5 \text{ m/sek}^2,$$

also ist die Steigzeit

$$t_0 = \frac{v_0}{b} = \frac{1,6}{3,5} = 0,46 \text{ Sekunden},$$

und damit die zusätzliche Zeit für das Hin- und Zurückrollen

$$2 \cdot t_0 = 2 \cdot 0,46 = 0,92 \text{ Sekunden}.$$

Seine gesamte Fallzeit beträgt damit

$$t + 2t_0 = 10,25 + 0,92 = 11,17 \text{ Sekunden}.$$

## 10. Zusammensetzung gleichartiger und verschiedenartiger Bewegungen.

### a) Zwei geradlinige und gleichförmige Bewegungen.

In einem fließenden Wasser, Abb. 236, tauche eine Kugel hoch, das Wasser fließe gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $c = 4 \text{ m/sek}$ , während die Kugel eine gleichförmige<sup>1</sup> Auftriebsgeschwindigkeit  $v = 3 \text{ m/sek}$  habe. Die Bewegung der Kugel ist also eine zweifache, eine horizontale und eine vertikal aufsteigende. Man verfolgt sie, indem man die horizontalen und vertikalen Wegestrecken berechnet und so den Standort der Kugel am Ende einer jeden Sekunde feststellt.

	nach 1 Sek.	nach 2 Sek.	nach 3 Sek.	nach 4 Sek.
Horizontalweg $s_2 =$	$4 \cdot 1 = 4 \text{ m}$	$4 \cdot 2 = 8 \text{ m}$	$4 \cdot 3 = 12 \text{ m}$	$4 \cdot 4 = 16 \text{ m}$
Vertikalweg $s_1 =$	$3 \cdot 1 = 3 \text{ m}$	$3 \cdot 2 = 6 \text{ m}$	$3 \cdot 3 = 9 \text{ m}$	$3 \cdot 4 = 12 \text{ m}$

Trägt man diese Wege in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhält man in den Schnittpunkten *I*, *II*, *III* und *IV* der Horizontal- und Vertikalwegelinien den jeweiligen Standort der Kugel. Die Verbindungslinie dieser Wegpunkte liefert eine gerade Linie, d. h. die resultierende Bewegung erfolgt geradlinig, und zwar ist der resultierende Weg gleich der Diagonalen des aus den beiden Seitenwegen konstruierten Parallelogramms.

<sup>1</sup> In Wirklichkeit wird die Kugel beschleunigt im Wasser hochsteigen, da eine konstante Auftriebskraft nach oben wirkt. Es wird daher eine Stelle angenommen, wo der Bewegungswiderstand und die Auftriebskraft sich das Gleichgewicht halten.

Die Kugel würde also in gerader Richtung eine resultierende Bewegung ausführen, und diese Bewegung würde sie auch ausführen, wenn sie nur eine einzige und zwar eine resultierende Geschwindigkeit hätte. Wie findet man diese? Nach  $t$  Sekunden ist der Vertikalweg  $s_1 = v \cdot t$ , der Horizontalweg  $s_2 = c \cdot t$ , also ist

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v \cdot t}{c \cdot t} = \frac{v}{c},$$

d. h. die zurückgelegten Wege verhalten sich wie die zugehörigen Geschwindigkeiten, also wird man, wenn man den resultierenden Weg durch Parallelogrammkonstruktion findet, die resultierende Geschwindigkeit so finden, daß man aus den beiden Seitengeschwindigkeiten ebenfalls ein Parallelogramm konstruiert und dessen Diagonale zeichnet.

In unserm Beispiel findet man, da das Parallelogramm rechtwinklig ist, die resultierende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{c^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m/sek.}$$

Nach 4 Sekunden befindet sich die Kugel nach Zurücklegung des resultierenden Weges  $s = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m}$  ebenfalls im Standort IV.

**Regel:** Die resultierende Geschwindigkeit wird ihrer Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus den beiden Seitengeschwindigkeiten konstruierten Parallelogramms dargestellt.

### b) Zwei geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegungen.

In einem beschleunigt fließenden Wasser tauche eine Kugel beschleunigt hoch, Abb. 237, die Beschleunigung der Kugel betrage  $b_1 = 1,00 \text{ m/sek}^2$ , die Beschleunigung des Wassers  $b_2 = 2,00 \text{ m/sek}^2$ . Beide Bewegungen sollen gleichzeitig aus dem Ruhezustand erfolgen. Man errechnet wieder die Seitenwege nach der bekannten Formel  $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$  und findet folgende Wege:

	nach 1 Sek.	nach 2 Sek.	nach 3 Sek.	nach 4 Sek.
Vertikalweg $s_1 =$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = 0,5 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2,0 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 = 4,5 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 8,0 \text{ m}$
Horizontalweg $s_2 =$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1,0 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 4,0 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9,0 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 16,0 \text{ m}$

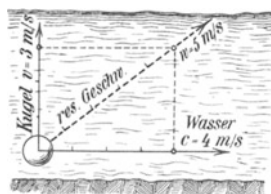
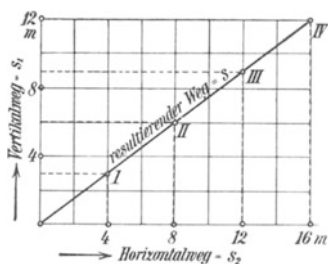


Abb. 236. Der Körper hat zwei verschiedene gleichförmige Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen.

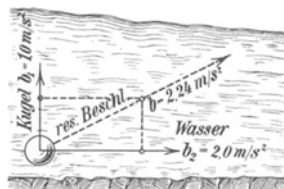
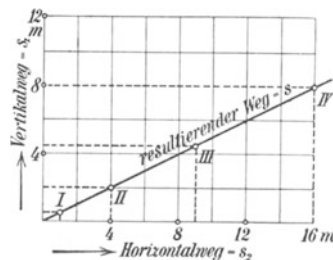


Abb. 237. Zwei gleiche Bewegungsarten nach verschiedenen Richtungen.

Im rechtwinkligen Koordinatensystem geben die Schnittpunkte *I*, *II*, *III* und *IV* der Vertikal- und Horizontalwegelinien wieder den jeweiligen Standort der schwimmenden Kugel. Die Verbindungslinie dieser Standortpunkte ist eine gerade Linie, diese stellt den resultierenden Weg dar. Er wird durch die Diagonale eines aus den beiden Seitenwegen konstruierten Parallelogramms dargestellt. Aus den beiden geradlinigen Seitenbewegungen ergibt sich also wieder eine geradlinige resultierende Bewegung.

Denselben Weg würde die Kugel auch zurücklegen, wenn sie nur eine Beschleunigung erföhre, die resultierende Beschleunigung. Wie findet man diese ?

Nach *t* Sekunden ist der Vertikalweg  $s_1 = \frac{1}{2} b_1 \cdot t^2$  und der Horizontalweg  $s_2 = \frac{1}{2} b_2 \cdot t^2$ , also ist

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{1}{2} b_1 \cdot t^2}{\frac{1}{2} b_2 \cdot t^2} = \frac{b_1}{b_2},$$

d. h. die zurückgelegten Wegestrecken verhalten sich wie die zugehörigen Beschleunigungen, und deshalb wird die resultierende Beschleunigung *b* ebenso wie die resultierende Wegestrecke als Diagonale eines Parallelogramms gefunden, dessen Seiten in den beiden Einzelbeschleunigungen  $b_1$  und  $b_2$  gegeben sind.

Da in unserm Beispiel das Parallelogramm der Beschleunigungen ein Rechteck ist, findet man

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,24 \text{ m/sek}^2.$$

Nach 4 Sekunden legt die Kugel mit der resultierenden Beschleunigung  $b = 2,24 \text{ m/sek}^2$  den resultierenden Weg

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,24 \cdot 4^2 = 18 \text{ m}$$

zurück und befindet sich am Standort *IV*.

**Regel:** Die aus zwei geradlinig beschleunigten Bewegungen hervorgehende resultierende Bewegung ist auch wieder geradlinig.

Die resultierende Beschleunigung ist ihrer Größe und Richtung nach als Diagonale des aus den beiden Seitenbeschleunigungen konstruierten Parallelogramms zu finden.

### c) Zwei verschiedenartige Bewegungen, erste Bewegung gleichförmig, zweite Bewegung gleichförmig beschleunigt.

Diese Bewegungsart liegt vor, wenn in einem gleichförmig fließenden Wasser eine Kugel beschleunigt hochsteigt, Abb. 238. Rechnen wir ein Zahlenbeispiel durch, und zwar mit der Wassergeschwindigkeit  $v = 4 \text{ m/sek}$  und der Kugelbeschleunigung  $b = 1 \text{ m/sek}^2$ . Die Vertikalwege rechnen sich nach der Formel

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2,$$

die Horizontalwege nach der Formel

$$s = v \cdot t$$

aus. Es ergeben sich dann folgende Wegestrecken:

	nach 1 Sek.	nach 2 Sek.	nach 3 Sek.	nach 4 Sek.
Vertikalweg $s_1 =$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = 0,5 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2,0 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 = 4,5 \text{ m}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 8,0 \text{ m}$
Horizontalweg $s_2 =$	$4 \cdot 1 = 4 \text{ m}$	$4 \cdot 2 = 8 \text{ m}$	$4 \cdot 3 = 12 \text{ m}$	$4 \cdot 4 = 16 \text{ m}$



Im rechtwinkligen Wegenetz geben die Schnittpunkte *I, II, III* und *IV* der Vertikal- und Horizontalweglinien die augenblicklichen Standorte der schwimmenden Kugel an. Verbindet man diese Standorte miteinander, so erhält man keine gerade Linie mehr, es entsteht eine gekrümmte Bahnlinie, und zwar wird die Bahnlinie nach der Beschleunigungsrichtung abgebogen. Mathematisch ist die Bahnlinie eine Parabel.

Man findet die einzelnen Bahnpunkte wieder durch Parallelogrammkonstruktion aus den beiden Seitenwegen, und zwar ist der dem Ausgangspunkt der Bewegung gegenüberliegende Eckpunkt des Parallelogramms der Standort, an dem die Kugel nach der Zeit *t* steht. Die Diagonale stellt aber nicht mehr den durchlaufenen Weg dar. Die Form der Bewegungsbahn läßt sich also nicht mehr durch eine einzige Parallelogrammkonstruktion finden, man bedarf dazu einer Reihe von Einzelkonstruktionen.

Die resultierende Geschwindigkeit ändert sich in jedem Augenblick, man findet sie z. B. für den Standort *III*, indem man die Tangente an die Bahnkurve legt, sie gibt die augenblickliche Richtung der resultierenden Geschwindigkeit *w* an.

Nach 3 Sekunden (Punkt *III*) ist  
 $v_x = b \cdot t = 1 \cdot 3 = 3 \text{ m/sek,}$   
 $v = 4 \text{ m/sek,}$   
 $w = \sqrt{v_x^2 + v^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m/sek.}$

**Regel:** Die aus zwei geradlinigen Bewegungen verschiedener Art sich ergebende Bewegung ist nicht mehr geradlinig.

Die Bahnkurve muß punktweise gewonnen werden, und zwar ist der dem Ausgangspunkt gegenüberliegende Eckpunkt des aus den Seitenwegen konstruierten Parallelogramms der jeweilige Standort des bewegten Körpers.

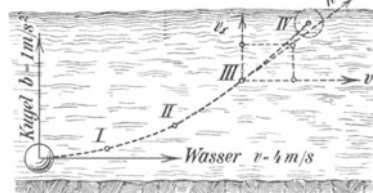
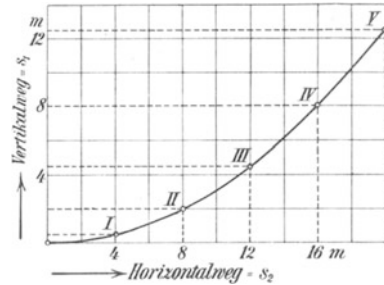


Abb. 238. Der Körper hat zwei ungleiche Bewegungsarten nach verschiedenen Richtungen.

## 11. Die parabolische Bewegung.

Eine Kugel (Abb. 239), welche vertikal aufwärts mit der gleichförmigen Geschwindigkeit *v* hochsteigt und rechtwinkelig zu dieser Bewegungsrichtung, also in horizontaler Richtung eine Beschleunigung *b* erfährt, bewegt sich auf einer parabolischen Bahnlinie. Die Seitenwege sind

1. in senkrechter Richtung  $y = v \cdot t,$
2. in horizontaler Richtung  $x = \frac{1}{2} b \cdot t^2.$

Bildet man  $t = \frac{y}{v}$  und setzt diesen Wert in die Gleichung für  $x$  ein, so wird

$$x = \frac{1}{2} b \cdot \frac{y^2}{v^2} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2 \cdot \frac{v^2}{b} \cdot x.$$

Diese Gleichung erinnert an die Parabelgleichung

$$y^2 = 2px,$$

in welcher der Parameter  $p$  die Form der Parabel bestimmt, und hier würde die Form bestimmt durch den Parameterwert

$$p = \frac{v^2}{b},$$

d. h. für einen bestimmten Wert von  $v$  und einen bestimmten Wert von  $b$  hat die Parabel eine ganz bestimmte Form. Man nimmt für  $x$  beliebige Werte an und berechnet daraus die  $y$ -Werte.

**Beispiel:** Zeichne die Parabelform für eine Bewegung, welche durch die Größen  $v = 2 \text{ m/sek}$  und  $b = 2 \text{ m/sek}^2$  sich ergeben wird.

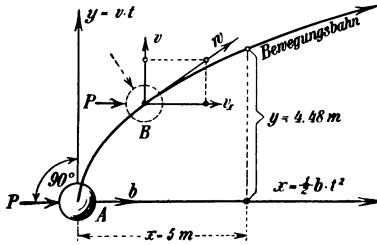


Abb. 239. Die parabolische Bewegung.

**Lösung:** Man berechnet zunächst den Parameter der Parabel

$$p = \frac{v^2}{b} = \frac{2^2}{2} = 2$$

und berechnet dann für angenommene  $x$ -Werte die zugehörigen  $y$ -Werte:

- $x = 1 \text{ m} \quad \dots \quad y = \sqrt{2 \cdot p \cdot x} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \text{ m}$
- $x = 2 \text{ m} \quad \dots \quad y = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2,83 \text{ m}$
- $x = 3 \text{ m} \quad \dots \quad y = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} = 3,47 \text{ m}$
- $x = 4 \text{ m} \quad \dots \quad y = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 4} = 4,00 \text{ m}$
- $x = 5 \text{ m} \quad \dots \quad y = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5} = 4,48 \text{ m}.$

So läßt sich die Bewegungsbahn punktweise als Parabel aufzeichnen.

Sieht man sich die Bewegung auf der Parabelbahn genauer an, so kommt man zu folgender Erkenntnis. Liegt im Ausgangspunkt  $A$  der Bewegung in horizontaler Richtung eine gleichförmige Beschleunigung vor, so wird diese durch eine Horizontalkraft  $P$  hervorgerufen. Sie steht bei Beginn der Bewegung senkrecht zur Bahnrichtung  $y$ , d. h. diese Kraft verursacht nur eine Richtungsänderung der Bewegung, sie drängt die Kugel von der Vertikalbahn ab, verursacht aber keine Geschwindigkeitsänderung, da sie rechtwinkelig zur Bahnrichtung steht und demnach keine Kraftkomponente in der Bahnrichtung hat.

Die Kugel stehe nun im Bahnpunkt  $B$ . In diesem Bahnpunkt ist  $w$  die augenblickliche resultierende Geschwindigkeit. Diese hat eine Horizontalkomponente  $v_x$ , und da die Kraft  $P$  ebenfalls in horizontaler Richtung weiterwirkt, wird nun eine Geschwindigkeitszunahme in horizontaler Richtung die Folge sein, d. h. die Kugel durchläuft die Parabelbahn mit Beschleunigung.

Die Bewegung würde auch in diesem Augenblick gleichförmig sein können, wenn die Kraft  $P$  nicht horizontal, sondern senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung  $w$  stände.

**Regel:** Bei krummliniger Bewegung kann nur dann eine gleichförmige Bewegung erfolgen, wenn die Beschleunigung ständig ihre Richtung so ändert, daß sie rechtwinkelig zur Bewegungslinie steht.

Eine rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung stehende Beschleunigungskraft oder Beschleunigung verursacht nur eine Krümmung der Bahn. Soll diese Krümmung stärker werden, so muß die Kraft größer, soll sie schwächer werden, so muß die Kraft kleiner werden, soll sie gleich bleiben, so muß die Kraft auch gleich bleiben.

Eine krummlinige Bahn mit gleichbleibender Krümmung ist aber ein Kreis. Es kann also eine gleichförmige Kreisbewegung nur dann erfolgen, wenn die Beschleunigung konstant bleibt, und dann ihre Richtung ständig so ändert, daß sie rechtwinkelig zur Kreisbahn bleibt.

## 12. Die gleichförmige Kreisbewegung.

Eine Kugel (Abb. 240) werde an einem Faden von der Länge  $r$  mit der gleichförmigen Umfangsgeschwindigkeit  $v$  im Kreise rundgeschleudert. In  $A$  angekommen, reiße der Faden. Sofort wird die Kugel geradlinig in Richtung der Kreistangente mit derselben Geschwindigkeit  $v$  aus der Kreisbahn herausfliegen.

Soll nach dem Fadenbruch die Kugel auf der Kreisbahn bleiben, so muß eine konstante Beschleunigung  $b$  rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung  $v$  sofort wirksam werden. Diese Beschleunigung  $b$  müßte ständig ihre Richtung ändern, so daß z. B. im Punkte  $D$  auch wieder die Beschleunigung  $b$  senkrecht zur Tangentenrichtung  $v$  steht.

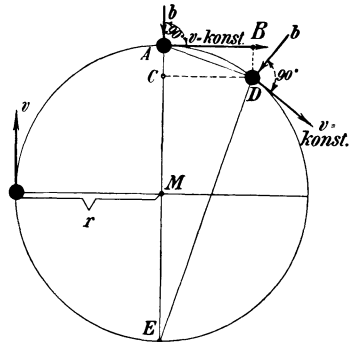


Abb. 240. Die gleichförmige Kreisbewegung.

Die Kreisbogenbahn von  $A$  nach  $D$  ist aus zwei Seitenbewegungen entstanden

1. aus der Horizontalbewegung  $AB$ , welche gleichförmig erfolgt,
2. aus der Vertikalbewegung  $AC$ , welche mit der Beschleunigung  $b$  erfolgt.

Nach  $t$  Sekunden ist der Horizontalweg  $AB = v \cdot t$ ,  
der Vertikalweg  $AC = \frac{1}{2} b \cdot t^2$ .

In Abb. 240 ist der Kugelmittelpunkt  $D$  mit den Punkten  $A$  und  $E$  verbunden worden, dadurch ist das rechtwinkelige Dreieck  $ADE$  entstanden. Im rechtwinkelligen Dreieck ist die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und der Kathetenprojektion auf die Hypotenuse, also ist

$$AE : AD = AD : AC.$$

Nimmt man das Bogenstück  $AD$  unendlich klein, so wird

$$AD = AB$$

und die Proportion lautet  $AE : AB = AB : AC$ .

Nun ist  $AE = 2r$ ,  $AB = v \cdot t$ ,  $AC = \frac{1}{2} b \cdot t^2$ .

Mit diesen Werten lautet die Proportion:

$$2r : v \cdot t = v \cdot t : \frac{1}{2} b \cdot t^2 \quad \text{oder} \quad 2r \cdot \frac{1}{2} b \cdot t^2 = v^2 \cdot t^2$$

$$b = \frac{v^2}{r}.$$

Diesen Wert muß die Beschleunigung  $b$  haben, wenn nach dem Fadenbruch die Kugel auf der Kreisbahn vom Radius  $r$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v$  ihre Bewegung fortsetzen soll.

Man nennt diese Beschleunigung die Zentripetalbeschleunigung, weil sie die Kugel nach dem Zentralpunkt des Kreises, nach dem Mittelpunkt hin, beschleunigt, und so Ursache der Kreisbewegung ist.

Die Zentripetalbeschleunigung wächst nach dem Gesetz

$$b = \frac{v^2}{r}$$

1. proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit,
2. umgekehrt proportional mit dem Radius der Kreisbahn.

Wir werden also bei doppelter Umfangsgeschwindigkeit eine vierfache und bei doppeltem Radius eine  $\frac{1}{2}$ -fache Zentripetalbeschleunigung anwenden müssen. Aus diesem Grunde sind hohe Fahrgeschwindigkeiten und kleine Krümmungsradien in den Kurven unserer Schienenbahnen sehr gefährlich.

**Beispiel:** Eine Grubenbahn durchfähre eine Kurve mit dem Krümmungsradius  $r = 10$  m bei einer Fahrgeschwindigkeit von 18 km/h; mit welcher Beschleunigung muß der Spurkranz die Wagen nach dem Mittelpunkt des Kreises drücken?

$$\text{Fahrgeschwindigkeit} \quad v = \frac{18000}{3600} = 0,5 \text{ m/sek},$$

$$\text{Zentripetalbeschleunigung } b = \frac{v^2}{r} = \frac{0,5^2}{10} = 0,025 \text{ m/sek}^2.$$

### 13. Der horizontale Wurf.

In dem Augenblick, wo der geworfene Körper die Hand des Werfenden verläßt, unterliegt er dem Gesetz der Schwerkraft, er bewegt sich mit der Beschleunigung  $g = 9,81$  m/sek<sup>2</sup> abwärts. Gleichzeitig hat der Körper durch die Hand des Schleudernden eine Horizontalgeschwindigkeit  $v$  erhalten. Und nun läßt sich die Wurfbahn punktweise errechnen, wie schon früher gezeigt wurde. Die Fallhöhen errechnen sich nach der Gleichung

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

die Horizontalwege nach der Gleichung

$$s = v \cdot t.$$

Da die Bahnlinie aus zwei geradlinigen Bewegungen ungleicher Art sich zusammensetzt, entsteht eine gekrümmte Bahn, die bekannte Para-

bel. In Abb. 241 ist der Horizontalwurf für eine horizontale Wurfgeschwindigkeit  $v = 50$  m/sek gezeichnet.

Nach 10 Sekunden ist z. B.

$$\text{die Wurfweite } s = v \cdot t = 50 \cdot 10 = 500 \text{ m,}$$

$$\text{die Fallhöhe } h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 10^2 = 490,5 \text{ m.}$$

Die erreichte Endgeschwindigkeit der Horizontalbewegung ist wegen der gleichförmigen Bewegung so groß wie die Anfangsgeschwindigkeit, also

$$v = 50 \text{ m/sek.}$$

Die Endgeschwindigkeit der vertikalen Bewegung ist nach  $t = 10$  Sek.

$$c = g \cdot t = 9,81 \cdot 10 = 98,1 \text{ m/sek.}$$

Die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers ist nach Abb. 241

$$w = \sqrt{v^2 + c^2} = \sqrt{50^2 + 98,1^2} = 110 \text{ m/sek.}$$

Der Winkel  $\alpha$ , unter welchem der Körper einfällt, bestimmt sich aus der Gleichung

$$\text{tg } \alpha = \frac{c}{v} = \frac{98,1}{50} = 1,9620, \text{ d. i. } \alpha = 62^\circ.$$

Der aufwärts gerichtete schräge Wurf ist die Umkehrung der in Abb. 241 dargestellten Wurfbewegung. Als dann ist  $B$  der Ausgangspunkt der Bewegung. Der Körper wird unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale mit der Geschwindigkeit  $w$  hochgeschleudert und erreicht im Punkte  $A$  seine größte Steighöhe, und es ist  $BC$  die halbe Wurfweite. Diese beiden Größen können rechnerisch leicht ermittelt werden. Man zerlegt die Wurfgeschwindigkeit  $w$  in die Vertikalkomponente  $c$  und in die Horizontalkomponente  $v$ , und zwar ist

$$c = w \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad v = w \cdot \cos \alpha.$$

Die Vertikalbewegung wird, da nun die Erdbeschleunigung  $g$  verzögernd wirkt, eine gleichmäßig verzögerte, die Horizontalbewegung bleibt dagegen gleichförmig. Für unser Beispiel würde sein

$$c = 110 \cdot \sin 62^\circ = 98,1 \text{ m/sek,}$$

$$v = 110 \cdot \cos 62^\circ = 50 \text{ m/sek.}$$

Ein Körper, der mit der Anfangsgeschwindigkeit  $c$  vertikal hochsteigt, erreicht die Steighöhe

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man den Wert  $c = 98,1$  m ein, so wird die Steighöhe

$$h = \frac{98,1^2}{2 \cdot 9,81} = 490 \text{ m.}$$

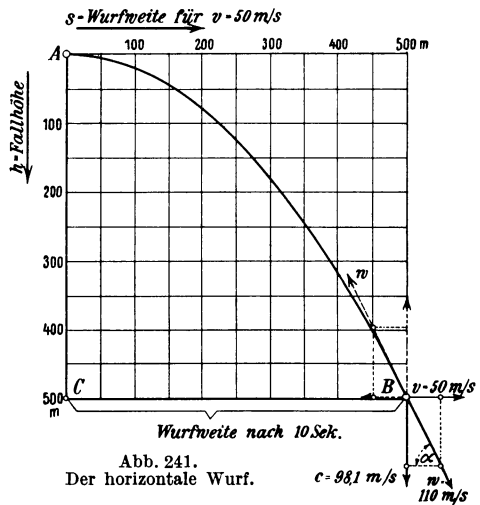


Abb. 241.  
Der horizontale Wurf.

$c = 98,1 \text{ m/s}$   
 $w = 110 \text{ m/s}$

Im höchsten Punkt angekommen, ist die vertikale Endgeschwindigkeit gleich Null, also ist

$$v = c - g \cdot t = 0,$$

daraus ergibt sich die Steigzeit

$$t = \frac{c}{g} = \frac{98,1}{9,81} = 10 \text{ Sekunden.}$$

In dieser Zeit ist der zurückgelegte Horizontalweg

$$s = v \cdot t = 50 \cdot 10 = 500 \text{ m.}$$

Dieser Horizontalweg stellt nunmehr die halbe Wurfweite dar, da der Körper nach der Abstiegsseite noch denselben Horizontalweg zurücklegt. Also ist die ganze Wurfweite

$$l = 2 \cdot s = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ m.}$$

Allgemein ist die Wurfweite

$$l = 2 \cdot v \cdot t = 2 \cdot v \cdot \frac{c}{g},$$

nun ist  $v = w \cdot \cos \alpha$ ,  $c = w \cdot \sin \alpha$ , also wird

$$l = \frac{2 \cdot w^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}.$$

Da nach der Trigonometrie  $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin (2\alpha)$  ist, so wird die ganze Wurfweite

$$l = \frac{w^2}{g} \cdot \sin (2\alpha).$$

Der Wert  $\sin (2\alpha)$  kann niemals größer werden als 1 und erreicht diesen größten Wert für  $2\alpha = 90^\circ$  oder  $\alpha = 45^\circ$ , d. h. man erreicht bei einer bestimmten Wurfgeschwindigkeit  $w$  die größte Wurfweite, wenn man den Körper unter dem Winkel  $\alpha = 45^\circ$  gegen die Horizontale abschleudert. Die größte

Wurfweite ist alsdann

$$l_{\max} = \frac{w^2}{g}.$$

Für unser Beispiel würde sein, weil  $w = 110 \text{ m/sek}$  ist,

$$l_{\max} = \frac{110^2}{9,81} = \frac{12100}{9,81} = 1235 \text{ m.}$$

**Beispiel:** In einem Schacht hat ein heruntergestürzter Förderwagen (Abb. 242), die von der Absturzstelle in horizontaler Richtung um 4,5 m entfernte Spurlatte 20 m unterhalb der Absturzstelle getroffen; mit welcher Geschwindigkeit  $v$  wurde der Wagen in den Schacht gefahren?

**Lösung:** Die Fallzeit des Förderwagens war

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9,81}} = 2,02 \text{ Sekunden.}$$

In dieser Zeit hat der Wagen den Horizontalweg

$$s = v \cdot t$$

zurückgelegt, also war seine Fahrgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4,5}{2,02} = 2,22 \text{ m/sek.}$$

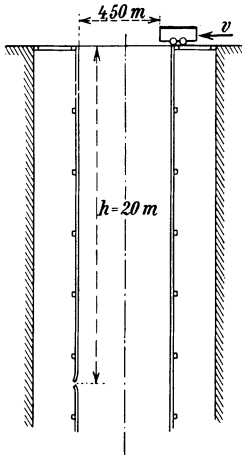


Abb. 242. Ein Förderwagen wird in den Schacht gestoßen.

**Beispiel:** Aus einem Sprengloch, das 1,4 m über der Sohle (Abb. 243) liegt, wird ein Stein horizontal herausgeschleudert. Wie weit fliegt der Stein, wenn die Sprengstoffgase ihm eine Fluggeschwindigkeit  $v = 50$  m/sek geben?

**Lösung:** Der Stein hat eine Fallhöhe  $h = 1,4$  m zu durchfallen, hierzu benötigt er

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{9,81}} = 0,535 \text{ Sekunden.}$$

In dieser Zeit flog er in horizontaler Richtung

$$s = v \cdot t = 50 \cdot 0,535 = 27 \text{ m,}$$

d. h. der Stein flog 27 m weit.

Der Stein flog aber 60 m weit, wie groß muß nun die durch die Sprengstoffgase erteilte Geschwindigkeit gewesen sein?

Da seine Fallzeit dieselbe bleibt, ist  $t = 0,535$  Sekunden, und damit ist

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60}{0,535} = 112 \text{ m/sek.}$$

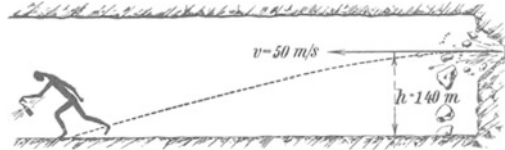


Abb. 243. Die Flugweite der Sprengstücke.

## 14. Die Relativbewegung eines Körpers.

Eine Kugel, welche in fließendem Wasser gleichförmig hoch steigt, unterliegt einer zweifachen Bewegung. Sie steigt (Abb. 244) mit der geradlinigen gleichförmigen Geschwindigkeit  $w$  hoch, und der Raum, in welchem diese Bewegung geschieht, schreitet in anderer Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$  geradlinig fort. Die wirkliche oder absolute Geschwindigkeit  $v$  der Kugel ist bekanntlich die Resultierende dieser beiden Geschwindigkeiten, sie wird der Größe und Richtung nach als Diagonale des aus den beiden Geschwindigkeiten konstruierten Parallelogramms gefunden.

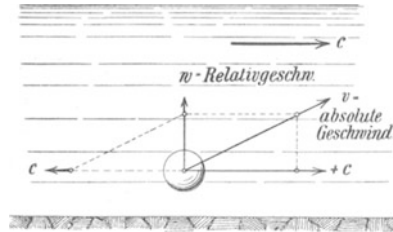


Abb. 244. Die Relativgeschwindigkeit einer Kugel.

Zum Unterschied von dieser absoluten Geschwindigkeit  $v$  wird jene Geschwindigkeit  $w$  die relative Geschwindigkeit in bezug auf den fortschreitenden Raum genannt. Man kann sie auch die scheinbare Geschwindigkeit nennen, insofern als einem mitschwimmenden Beobachter, der von seiner eigenen Bewegung nichts sieht, jene aufsteigende Geschwindigkeitskomponente als die wirkliche Geschwindigkeit der Kugel erscheinen würde.

Im Geschwindigkeitsparallelogramm erscheint die relative Geschwindigkeit  $w$  als Seite eines Parallelogramms. Man kann aber auch  $w$  als Diagonale eines Parallelogramms darstellen, wenn man die entgegengesetzt genommene Geschwindigkeit  $c$  des fortschreitenden Raumes mit der wahren Geschwindigkeit  $v$  zu einem Parallelogramm zusammensetzt. Man gewinnt hieraus folgende Anleitung für die Bestimmung der relativen Geschwindigkeit:

Man füge zu der wahren oder absoluten Geschwindigkeit noch die entgegengesetzt genommene des fortschreitenden Raumes hinzu und bestimme die Resultierende dieser beiden Geschwindigkeiten.

Ein Boot (Abb. 245) soll z. B. in gerader Richtung vom Uferpunkt  $A$  nach dem Uferpunkt  $B$  übersetzen. Dann muß der Steuermann gegen die Stromrichtung fahren. Die Geschwindigkeit  $w$  des Schiffes ist eine Relativgeschwindigkeit in bezug auf den fortschreitenden Raum, der als fließendes Wasser mit der Geschwindigkeit  $c$  sich bewegt. Will man bei der Überfahrt die wahre Geschwindigkeit  $v$  erreichen, so muß das Schiff mit der Relativgeschwindigkeit  $w$  fahren. Man findet  $w$ , indem man aus  $-c$  und  $v$  das Parallelogramm konstruiert, dann ist die Diagonale die gesuchte relative Schiffsgeschwindigkeit  $w$ .

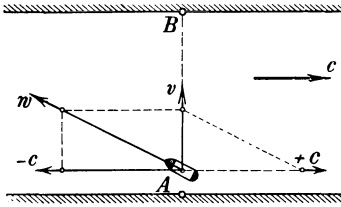


Abb. 245. Die Überfahrt über einen Strom.

Das Schiff hat nun zwei Geschwindigkeitskomponenten, die von der Maschinenkraft verliehene Geschwindigkeit  $w$  und die vom Strom verliehene Geschwindigkeit  $c$ , diese bilden zusammen die wahre oder absolute Geschwindigkeit  $v$ , welche das Schiff geradlinig vom Uferpunkt  $A$  nach  $B$  bringt. Es ist

$$w = \sqrt{v^2 + c^2} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{w^2 - c^2}.$$

Die Überfahrt dauert bei der Strombreite  $b$  demnach

$$t = \frac{b}{v} \text{ Sekunden.}$$

Bei stillstehendem Wasser würde das Schiff geradlinig mit der Geschwindigkeit  $v = w$  übersetzen, alsdann dauerte die Überfahrt nur

$$t = \frac{b}{w} \text{ Sekunden.}$$

Bei einer Strombreite von  $b = 800$  m, einer Schiffsgeschwindigkeit  $w = 2,4$  m/sek und einer Stromgeschwindigkeit von  $c = 1,2$  m/sek erhält man z. B.

$$v = \sqrt{2,4^2 - 1,2^2} = 2,08 \text{ m/sek.}$$

Die Überfahrt dauert

$$t = \frac{b}{v} = \frac{800}{2,08} = 385 \text{ Sekunden,}$$

dagegen würde bei stillstehendem Wasser die Überfahrt schon möglich sein in

$$t = \frac{b}{w} = \frac{800}{2,4} = 333 \text{ Sekunden.}$$

## 15. Der Bewegungsvorgang in Schaufelrädern.

Man kann durch schräg gegen die Windrichtung gestellte Schaufelflächen oder Flügelflächen die Windkraft nutzbar machen. In Abb. 246



bläst der Wind mit der Geschwindigkeit  $c$  in ein Rohr, in welchem ein mit Schaufelflächen versehenes Rad zentral gelagert ist. Das Rad wird durch den Winddruck gedreht, es nimmt eine bestimmte Umfangsgeschwindigkeit  $v$  an.

Denkt man sich das Rad festgehalten, so muß der Wind schräg durch die Schaufelflächen strömen, und es wäre die Geschwindigkeit  $w$  parallel zur Schaufelfläche die wirkliche oder absolute Windgeschwindigkeit. Sobald aber das Rad sich dreht, bewegt sich auch der Schaufelraum, der Wind streicht wieder mit der Geschwindigkeit  $w$  durch die Schaufel, jedoch ist diese Geschwindigkeit nicht mehr die wirkliche Geschwindigkeit sondern die Relativgeschwindigkeit, zu der noch die Radgeschwindigkeit  $v$  hinzutritt, so daß aus der Zusammensetzung beider die wirkliche oder absolute Geschwindigkeit  $c$  sich ergibt.

Das Schaufelrad soll sich so drehen, daß jeder kleine Windpunkt geradlinig in der Richtung  $c$ , d. h. in axialer Richtung durch das Rad wandert. Dann würde jeder Windpunkt auf dem kürzesten Wege und ohne Ablenkung aus der Bewegungsrichtung durch das Radgehen, so daß die geringsten Widerstände auftreten.

Dieser Vorgang bedingt aber eine ganz bestimmte Radgeschwindigkeit  $v$ , die sich bei gegebener Schaufelrichtung  $w$  sofort finden läßt. Man kann  $c$  ganz beliebig in 2 Seitenrichtungen zerlegen, hier sind aber die beiden Seitenrichtungen gegeben, und zwar

1. durch die Schaufelneigung als Richtung  $w$ ,
2. durch die Radbewegung als Richtung  $v$ .

Durch Parallelogrammkonstruktion findet man aus der Diagonalen  $c$  dann die Parallelogrammseiten  $w$  und  $v$ . Soll jeder Windpunkt axial durch das Rad seinen Weg fortsetzen, so muß das Schaufelrad mit der so gefundenen Umfangsgeschwindigkeit  $v$  sich drehen.

In der Technik führt man diesen Bewegungsvorgang umgekehrt aus, man läßt das Schaufelrad motorisch antreiben und bewegt dadurch die Luft in dem Rohr, ein Vorgang, wie er bei der Sonderbewetterung durch Lutten sich vollzieht.

Der Antriebsmotor hat eine bestimmte, festliegende Umdrehungszahl, damit ist die Radgeschwindigkeit  $v$  gegeben. Will man eine bestimmte Wettermenge fördern, so wird bei bekanntem Luttenquerschnitt auch die Windgeschwindigkeit  $c$  festliegen. Somit bleibt nur noch die Bestimmung der Relativgeschwindigkeit  $w$  übrig, d. h. die Schaufelneigung muß noch bestimmt werden.

Man fügt zu der absoluten Geschwindigkeit  $c$  noch die entgegengesetzt genommene  $-v$  des fortschreitenden Raumes, des Schaufelrades, hinzu, dann ist die Resultierende dieser beiden Geschwindig-

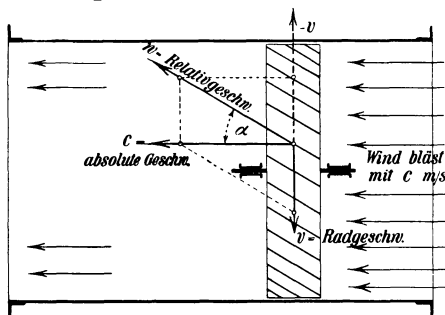


Abb. 246. Der Wind bewegt ein Schaufelrad.

keiten die gesuchte Relativgeschwindigkeit  $w$ . In Abb. 246 ist auch dieses Parallelogramm gezeichnet, die umgekehrte Radgeschwindigkeit  $-v$  zieht vertikal nach oben, die Luftgeschwindigkeit  $c$  horizontal nach links, so daß  $w$  als Diagonale des Parallelogramms gefunden wird.

Die Richtung von  $w$  bestimmt nunmehr die Richtung der Schaufel. Bei dieser Schaufelrichtung und der vorgesehenen Radgeschwindigkeit  $v$  werden alle Luftteilchen in axialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$  durch das Schaufelrad getrieben.

Der Winkel  $\alpha$ , den die Schaufel mit der Achsenrichtung des Rades bildet, ist natürlich nur für eine ganz bestimmte Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Rades richtig. Nun laufen die Schaufelflächen als radiale Schaufelarme (Abb. 247) mit verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten,

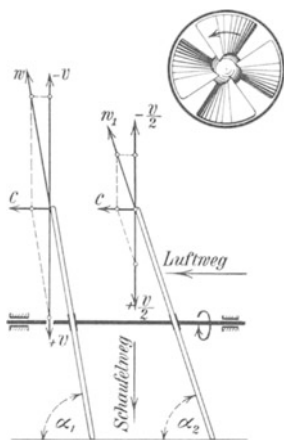


Abb. 247. Die Schrägstellung der Schaufeln.

also muß die Schaufel nach der Nabe hin auch anders gerichtet werden, nach der Nabe hin wird die Schaufel, wenn die Achsenrichtung als Basis einer schiefen Ebene angesprochen wird, mit geringerer Neigung gestellt, der Winkel  $\alpha_2$  am halben Radius wird kleiner als der Winkel  $\alpha_1$  am ganzen Radius, wie es Abb. 247 zeigt. Sieht man in Richtung des Luftweges auf das Schaufelrad, so stehen die Schaufeln am Umfang fast in der Radebene, an der Radnabe aber sehr schräg zur Radebene.

Ist z. B. die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades  $v = 36$  m/sek und die höchste Windgeschwindigkeit  $c = 6$  m/sek, so würde man nach Abb. 247 den Schaufelwinkel für den Umfang gleich  $\alpha_1$  zu machen haben. In der Mitte des Schaufelarmes, also am Radius  $\frac{1}{2}r$  ist die Umfangsgeschwindigkeit nur  $\frac{1}{2}v$ , d. h.

man muß nun mit  $c$  und  $-\frac{1}{2}v$  das Parallelogramm aufzeichnen, und erhält dann den Schaufelwinkel  $\alpha_2$ , welcher kleiner ist als  $\alpha_1$ . Und so wird nach der Radnabe hin der Schaufelwinkel  $\alpha$  immer kleiner werden müssen, dadurch erhält die Schaufel die Gestalt einer Schraubenfläche, weshalb man diese Ventilatoren auch Schraubenventilatoren nennt.

Die Schleuderräder oder Kreiselräder arbeiten anders. Die Schaufeln liegen zwischen einem inneren und äußeren Radkranz und bilden gegeneinander Schaufelkanäle. Durch die motorische Drehbewegung des Rades werden die Luftteilchen von innen nach außen geschleudert, so daß der Lufteintritt am inneren Radkranz, der Luftaustritt am äußeren Radkranz erfolgt.

Man verlangt am inneren Radkranz einen radialen Eintritt der Luft. Soll am Radkranzpunkt  $A$  (Abb. 248) eine Schaufel beginnen, so bestimmt sich die Schaufelrichtung aus der Umfangsgeschwindigkeit  $v_1$  des inneren Radkranzes und der verlangten radialen Eintrittsgeschwindigkeit  $c_1$ . In der Abbildung ist z. B. gewählt

$$v_1 = 30 \text{ m/sek} \quad \text{und} \quad c_1 = 20 \text{ m/sek.}$$

Man findet die relative Geschwindigkeit  $w_1$ , indem man aus der wah-

ren oder absoluten Geschwindigkeit  $c_1$  und der entgegengesetzt angetragenen Umfangsgeschwindigkeit  $-v_1$  das Geschwindigkeitsparallelogramm bildet. Die Diagonale dieses Parallelogramms ist die gesuchte relative Geschwindigkeit  $w_1$ . Die Abbildung liefert

$$w_1 = 36 \text{ m/sek.}$$

Das Luftteilchen macht zwei Bewegungen

1. tangential zur Schaufelfläche in Richtung  $w_1$ ,
2. tangential zum Kreise in Richtung  $v_1$ ,

woraus sich dann die wirkliche Bewegung in Richtung  $c_1$  ergibt.

Kreistangente und Schaufeltangente im Punkte  $A$  bilden den inneren Schaufelwinkel  $\alpha$ . Man wird nun die Schaufel krümmen. In der Abbildung

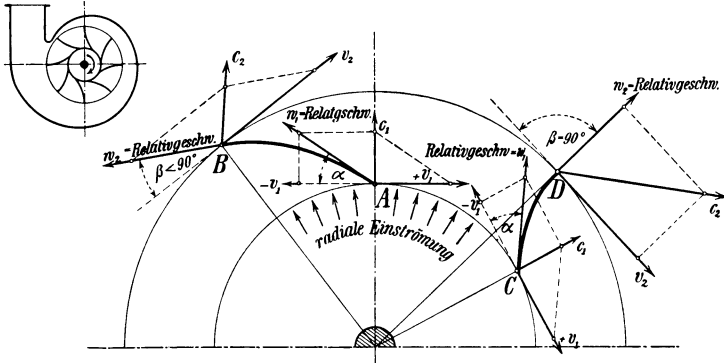


Abb. 248. Schaufelformen bei Schleuderrädern.

ist die Schaufel rückwärts gekrümmt, sie bildet am äußeren Radkranz mit ihrer Tangente und der Kreistangente den Schaufelwinkel  $\beta < 90^\circ$ .

Die Umfangsgeschwindigkeit  $v_2$  am äußeren Radkranz liegt fest, sie ist

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{D}{d},$$

wenn  $D$  und  $d$  die Radkranzdurchmesser sind. Würde nun die Relativgeschwindigkeit  $w_2$  auch bekannt sein, so würde die Austrittsbewegung des Luftteilchens festliegen. Der Konstrukteur hat es nun in der Hand,  $w_2$  zu wählen. Gibt er durch Verringerung der Schaufelbreite nach außen hin dem Schaufelkanal überall gleichen Querschnitt, so wird

$$w_2 = w_1, \quad \text{verengt er den Schaufelkanal, so wird} \quad w_2 > w_1.$$

In der Praxis macht man meistens

$$w_2 = w_1 \text{ bis } 1,2 \cdot w_1.$$

In der Abbildung ist gemacht

$$w_2 = w_1 = 36 \text{ m/sek,}$$

ferner ist in der Abbildung  $d = 320 \text{ mm}$ ,  $D = 500 \text{ mm}$ , also ist

$$v_2 = \frac{500}{320} \cdot v_1 = \frac{500}{320} \cdot 30 = 47 \text{ m/sek.}$$

Das Luftteilchen am äußeren Radkranz macht zwei Bewegungen

1. tangential zur Schaufelfläche in Richtung  $w_2$ ,
2. tangential zum Kreise in Richtung  $v_2$ ,

woraus sich dann die resultierende Bewegung in Richtung  $c_2$  ergibt.

In unserm Beispiel ist  $c_2 = 23$  m/sek.

Die Luftteilchen treten also nicht radial, sondern in schräger Richtung aus dem Rad. Das ist auch zweckmäßig, da bei radialem Austritt die Luft senkrecht gegen die Gehäusewand stoßen würde, wodurch das Abströmen der Luft erschwert würde.

In derselben Abbildung ist eine zweite Schaufel  $CD$  gezeichnet. Sie hat am inneren Radkranz denselben Schaufelwinkel  $\alpha$  wie die Schaufel  $AB$ , auch dieselben Geschwindigkeiten sind gewählt. Die Schaufel endet aber radial mit dem Austrittswinkel  $\beta = 90^\circ$ . Zeichnet man nun mit

$$w_2 = 36 \text{ m/sek} \quad \text{und} \quad v_2 = 47 \text{ m/sek}$$

das Austrittsparallelogramm, so erhält  $c_2$  eine andere Richtung und Größe als  $c_2$  der ersten Schaufelkonstruktion. Man findet

$$c_2 = 59 \text{ m/sek}$$

gegenüber 23 m der ersten Schaufelform. Das Luftteilchen wird also mit viel größerer Geschwindigkeit herausgeschleudert und kann nun größere Widerstände überwinden als vorher. Man findet daher die Ventilatoren meistens mit radialem Schaufelaustritt ausgeführt.

Der Austrittswinkel  $\beta$  kann noch über  $90^\circ$  hinaus vergrößert werden, dann erhält die Schaufel eine vorwärts gekrümmte Form. Solche Schaufel würde eine noch größere absolute Austrittsgeschwindigkeit liefern wie die radial auslaufende Schaufel und daher noch in höherem Maße befähigt sein, große Widerstände im Luftwege zu überwinden. Ventilatoren, welche gegen hohen Druck arbeiten oder eine hohe Depression erzeugen sollen, wird man daher zweckmäßig mit vorwärts gekrümmten Schaufeln ausrüsten.

## 16. Das Gesetz der mechanischen Arbeit und Leistung.

Ein niedergehendes Gewicht  $G$  (Abb. 249) kann Arbeit leisten, z. B. einen Wagen fortbewegen. Erfahrungsgemäß kann das doppelte Gewicht auch die doppelte Wagenzahl ziehen, und wenn das Gewicht doppelt so tief sinkt, sind auch die Wagen doppelt so weit gelaufen. Durch beide Maßnahmen ist in jedem Fall die Arbeit verdoppelt worden.

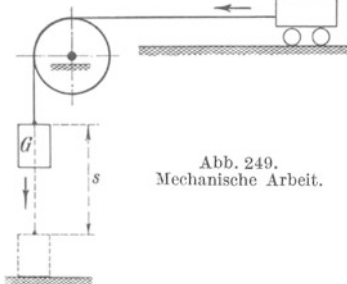


Abb. 249.  
Mechanische Arbeit.

Da das niedergehende Gewicht eine Kraft ist, so kann man sagen, daß bei der Verschiebung einer Kraft Arbeit geleistet wird, und diese ist

1. proportional der Kraft  $G$ ,
2. proportional dem Kraftweg  $s$ .

Bezeichnet man mit  $A$  die geleistete Arbeit, so ist

$$A = G \cdot s.$$

Da  $G$  in kg und  $s$  in m gemessen wird, so wird die Einheit für die Arbeitsgröße das mkg (Meterkilogramm) sein. Allgemein heißt das Gesetz der mechanischen Arbeit:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Kraftweg}.$$

In Abb. 250 geht ein Arbeiter mit der Last  $G$  eine Treppe herauf. Obwohl er den Weg  $s$  zurücklegt, leistet er nur die Arbeit

$$A = G \cdot h,$$

denn das Gewicht ist nur um  $h$  Meter gehoben worden. Als Kraftweg oder Lastweg kommt also nur die in der Richtung der Kraft oder Last zurückgelegte Wegeslänge in Betracht.

Eine ständig horizontal ziehende Kraft  $K$  (Abb. 251) bewege auf einer zwangsläufigen krummen Bahn eine Kugel von  $A$  nach  $B$ , dann ist die Strecke  $BC = s$ , welche durch das vom Ausgangspunkt  $A$  auf die Krafrichtung gefällte Lot auf der Richtungslinie der Kraft abge-

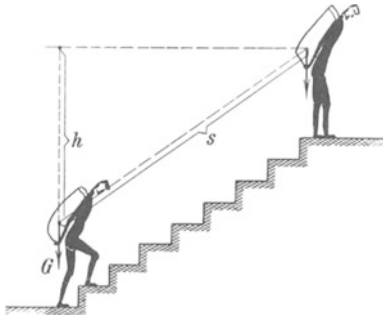


Abb. 250. Wirklicher Weg und Arbeitsweg.

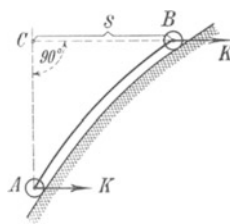


Abb. 251. Kraft- und Bahnrichtung sind verschieden.

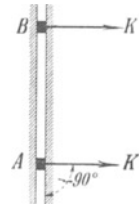


Abb. 252. Die Krafrichtung ist rechtwinkelig zur Bahnrichtung

schnitten wird, in diesem Fall der Kraftweg, und es ist die geleistete Arbeit

$$A = K \cdot s.$$

Würde die Richtung der Kraft  $K$  rechtwinkelig zur Bahnrichtung stehen, wie in Abb. 252, so würde bei der Bewegung der Kugel von  $A$  nach  $B$  die Kraft  $K$  gar keine mechanische Arbeit leisten, denn sie legt in ihrer Krafrichtung den Weg Null zurück.

Auch bei der Kreisbewegung (Abb. 253) ist die sogenannte Zentripetalkraft  $K$  immer rechtwinkelig zur Bahnrichtung gerichtet. Die Zentripetalkraft leistet daher bei der Kreisbewegung keinerlei mechanische Arbeit. So kommen wir zu dem Gesetz:

Die Kraft verrichtet gar keine mechanische Arbeit, wenn ihre Richtung fortwährend einen rechten Winkel mit der Bewegungsrichtung einschließt.

**Beispiel:** Ein Kolben von 50 cm Durchmesser und 0,50 m Hub werde durch Druckluft von 4 atü vorwärts getrieben. Berechne die Arbeit für einen Kolbenhub.

**Lösung:**

$$A = P \cdot s,$$

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 50^2 \cdot 4 = 1960 \cdot 4 = 7840 \text{ kg},$$

$$s = 0,50 \text{ m},$$

$$A = 7840 \cdot 0,50 = 3920 \text{ mkg}.$$

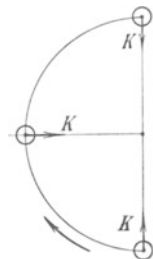


Abb. 253. Die kreisförmige Bewegung.

**Beispiel:** Ein Förderwagen von 1100 kg Gesamtgewicht werde von einem Schlepper auf söhlicher Strecke 300 m fortgedrückt, welche Arbeit leistet der Schlepper, wenn der Fahrwiderstand 2% des Wagengewichtes beträgt?

**Lösung:** Fahrwiderstand  $= W = 0,02 \cdot G = 0,02 \cdot 1100 = 22 \text{ kg}$ ,

$$A = W \cdot s = 22 \cdot 300 = 6600 \text{ mkg.}$$

**Beispiel:** Wie groß ist die Schlepperarbeit, wenn dieser Weg ein Gefälle 1:100 hat?

**Lösung:** Im Gefälle treibt der Wagen (Abb. 254) mit der Kraft

$$P = G \cdot \sin \alpha = 1100 \cdot \frac{1}{100} = 11 \text{ kg}$$

abwärts. Der Fahrwiderstand ist also nur

$$W' = W - P = 22 - 11 = 11 \text{ kg,}$$

also ist die Schlepper-Arbeit auf dem Wege  $s = 300 \text{ m}$

$$A = W' \cdot s = 300 \cdot 11 = 3300 \text{ mkg.}$$

Würde der Schlepper in entgegengesetzter Richtung den Wagen bewegen, also die Steigung überwinden müssen, so wäre

$$W'' = W + P = 22 + 11 = 33 \text{ kg}$$

und seine Arbeit wäre

$$A = W'' \cdot s = 33 \cdot 300 = 9900 \text{ mkg.}$$

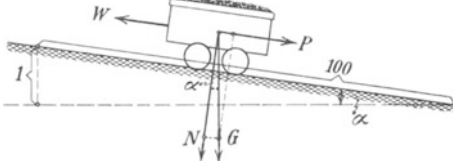


Abb. 254. Die Schlepperarbeit im Gefälle.

### Die Leistung einer Kraft.

Die mechanische Arbeit ist kein Vergleichsmaß, um zwei Arbeitswerte miteinander zu vergleichen. Hierfür ein Beispiel. Ein Bauarbeiter trägt 300 Steine von je 4 kg Gewicht auf eine Höhe von 20 m, dann ist seine mechanische Arbeit

$$A = G \cdot h = 1200 \cdot 20 = 24000 \text{ mkg.}$$

Ein Bauaufzug, der 300 Steine auf 20 m Höhe hebt, hat dieselbe Arbeit verrichtet, nur mit dem Unterschied, daß er sie in viel kürzerer Zeit fertig bringt. Deshalb muß man außer Kraft und Weg noch einen dritten Faktor, die Zeit, berücksichtigen. Man bezieht dann die verrichtete Arbeit auf die Zeiteinheit, d. h. auf 1 Sekunde, und nennt die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit die Leistung.

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{A}{t} = L.$$

Die Einheit für die Leistungsmessung ist also das Sekundenmeterkilogramm (mkg/sek).

Hat der Bauarbeiter 55 Minuten für seine Arbeit gebraucht, so war seine Leistung

$$L = \frac{A}{t} = \frac{24000}{55 \cdot 60} = 7,3 \text{ mkg/sek.}$$

Der Bauaufzug hat aber für dieselbe Arbeit nur 1 Minute gebraucht und daher die Leistung

$$L = \frac{24000}{60} = 400 \text{ mkg/sek.}$$

Für technische Rechnungen hat man zum Vergleich von Maschinenleistungen eine größere Einheit geschaffen, die Pferdestärke = PS und versteht darunter eine sekundliche Arbeit von 75 mkg, d. h.

$$75 \text{ mkg/sek} = 1 \text{ PS.}$$

Wird also 1 kg in der Sekunde 75 m hoch gehoben, oder werden 75 kg

in der Sekunde 1 m hoch gehoben, so ist diese Arbeitsleistung eine Pferdestärke. Der Bauarbeiter hat demnach

$$N = \frac{L}{75} = \frac{7,3}{75} = \sim \frac{1}{10} \text{ PS}$$

und der Bauaufzug

$$N = \frac{L}{75} = \frac{400}{75} = 5,4 \text{ PS}$$

geleistet.

Die Pferdestunde (PSh): Wenn eine Maschine, die 1 PS leistet, eine Stunde lang mit dieser Leistung läuft, so hat sie 1 PSh = 1 Pferdestunde erarbeitet. Der Arbeitswert einer Pferdestunde ist

$$A = 1 \text{ PSh} = 75 \text{ mkg/sek} \cdot 3600 \text{ sek} = 270000 \text{ mkg}.$$

Eine PSh ist daher eine Arbeitsgröße oder Arbeitseinheit. Maschinenleistungen werden nach Pferdestunden bezahlt, und es kostet 1 Pferdestunde 1 bis 3 Pfg., durch Dampf erzeugt, und 8 bis 20 Pfg. durch Druckluft erzeugt.

**Beispiel:** Ein Drucklufthaspel hebt eine Nutzlast von 2000 kg auf 100 m Höhe. Der Förderzug dauert 25 Sekunden. Wieviel PSh verbraucht der Förderzug, wie groß sind die Energiekosten und wieviel PS werden theoretisch benötigt?

**Lösung:** Die mechanische Arbeit ist

1.  $A = G \cdot h = 2000 \cdot 100 = 200000 \text{ mkg},$   
 $270000 \text{ mkg} = 1 \text{ PSh},$   
 $200000 \text{ mkg} = \frac{1 \cdot 200000}{270000} = 0,74 \text{ PSh}.$
2. 1 PSh = 14 Pfg,  
 $0,74 \text{ PSh} = 14 \cdot 0,74 = 10,4 \text{ Pfg}.$
3. in 20 sek = 0,74 PSh,  
in 1 h =  $3600 \text{ sek} = \frac{0,74 \cdot 3600}{20} = 133,5 \text{ PSh}.$

Da die Maschine 1 h gelaufen hat, muß die theoretische Maschinenleistung  $N = 133,5 \text{ PS}$  sein.

**Beziehung zwischen mechanischer und elektrischer Energie:** Mechanische Leistungen lassen sich in elektrische Leistungen umsetzen, eine 1000pferdige Dampfturbine kann durch Kupplung mit einem Generator eine entsprechende Kilowattleistung erzeugen. Die mechanische Leistung von 1 mkg/sek entspricht einer elektrischen Leistung von **9,81 Watt**. Das ist verhältnismäßig leicht zu behalten, da  $9,81 \text{ m/sek}^2 = g$  die Erdbeschleunigung ist.

$$1 \text{ mkg/sek} = 9,81 \text{ Watt},$$

$$1 \text{ mkg} = 9,81 \text{ Wattsekunden}.$$

In der Umkehrung ist

$$1 \text{ Watt} = \frac{1}{9,81} = 0,102 \text{ mkg/sek},$$

$$1 \text{ Kilowatt} = 102 \text{ mkg/sek};$$

ferner ist

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/sek} = 75 \cdot 9,81 = 736 \text{ Watt} = 0,736 \text{ kW},$$

$$1 \text{ kW} = \frac{1}{0,736} = 1,36 \text{ PS}.$$

Wenn ein Motor, der 1 kW leistet, eine Stunde lang mit dieser Leistung läuft, so hat er den Arbeitswert

$$1 \text{ kWh} = A = 102 \cdot 3600 = 367\,200 \text{ mkg}$$

erarbeitet.

**Das Drehmoment:** In Abb. 255 läuft auf einer Scheibe von  $r$  m Radius ein Riemen und überträgt bei  $n$  Umdrehungen in der Minute die Umfangskraft  $P$  kg. Es erfolgt dann die Übertragung der Kraftleistung durch das Drehmoment

$$M_d = P \cdot r \text{ mkg}.$$

Bei  $v$  m/sek Umfangsgeschwindigkeit ist die übertragene Leistung

$$N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{P \cdot 2\pi r \cdot n}{75 \cdot 60},$$

$$N = P \cdot r \frac{2\pi \cdot n}{75 \cdot 60} = M_d \cdot \frac{2\pi \cdot n}{75 \cdot 60},$$

$$M_d = \frac{75 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ mkg},$$

$$M_d = 716 \frac{N}{n} \text{ mkg},$$

$$\text{oder } M_d = 71\,600 \text{ cmkg}.$$

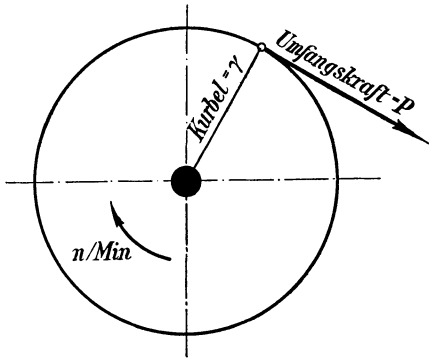


Abb. 255. Die Umfangskraft  $P$  durch Riemen übertragen.

**Beispiel:** Wie groß ist die Umfangskraft einer Förderbandantriebsrolle von 350 mm Durchmesser, die bei der minutlichen Drehzahl  $n = 60$  eine Leistung von 15 PS in das Band setzt?

Das Drehmoment ist

$$M_d = 71\,600 \frac{N}{n} \text{ cmkg},$$

$$= 71\,600 \cdot \frac{15}{60} = 17\,900 \text{ cmkg},$$

$$\text{Umfangskraft } P = \frac{M_d}{r} = \frac{17\,900}{17,5} = 1022 \text{ kg}.$$

Das Drehmoment bei Elektromotoren ist, da  $1 \text{ PS} = 0,736 \text{ kW}$  ist

$$M_d = 71\,600 \cdot 0,736 \cdot \frac{\text{kW}}{n} \text{ cmkg},$$

$$M_d = 52\,600 \frac{\text{kW}}{n} \text{ cmkg}.$$

**Beispiel:** Wieviel kW muß ein Motor leisten, der bei  $n = 1000$  Umdrehungen in der Minute ein Drehmoment von 526 cmkg übertragen soll?

Durch Umstellung folgt

$$\text{kW} = \frac{M_d \cdot n}{52\,600} = \frac{526 \cdot 1000}{52\,600} = 10.$$

Der Motor muß 10 kW leisten.



**Die Leistung in Tonnenkilometer (tkm):** Im Bergbau wird die Förderung in Strecken nach tkm beurteilt, das ist das Produkt der geförderten Tonnenzahl mit dem Förderweg in km, man spricht dann von einem Nutztonnenkilometer (Ntkm) und setzt als Last also nur das Ladegut und ebenso berechnet man nur die geladenen und nicht die leeren Wege.

Rechnet man mit der Lade- und Leerlast und den jeweils zurückgelegten Wegen, so spricht man von Brutto-tkm.

Die Rechnungsgröße tkm ist nicht der Ausdruck für die mechanische Arbeitsleistung, da der Weg nicht in der Krafrichtung der geladenen Tonnen gemessen wird. Die in der Fahrtrichtung liegende Kraft ist der Fahrzeugwiderstand.

Das tkm dient als Rechnungsgröße zur Beurteilung der Ausnutzung einer Abtriebskraft, sei es Schlepper, Pferd oder Lokomotive in der Förderung.

#### Der Schlepper.

Als Dauerleistung eines Arbeiters in Form von Zug oder Druck kann man 20 bis 25 kg rechnen. Wiegt ein beladener Förderwagen 1100 kg bei 800 kg Nutzlast, so ist der Fahrwiderstand in Abbaustrecken erfahrungsgemäß etwa 2% des Wagengewichtes, hier also

$$W = 0,02 \cdot 1100 = 22 \text{ kg.}$$

Nimmt man an, daß der Schlepper 3 Stunden volle Wagen, 2 Stunden leere Wagen schleppt und 2 Stunden Pause macht, so ist damit die 7stündige Schicht abgetan. Wenn er die vollen Wagen mit

$$c = 0,50 \text{ m/sek}$$

bewegt, so fährt die Nutzlast von 800 kg = 0,8 t, den Weg  $3 \cdot 3600 \cdot 0,5 = 5,4$  km, es werden also

$$5,4 \cdot 0,8 = 4,32 \text{ Nutztonnenkilometer/Schicht}$$

geleistet. Bei 7,50  $\mathcal{M}$  Schichtlohn kostet demnach

$$1 \text{ Nutztonnenkilometer} = \frac{7,50}{4,32} = 1,73 \mathcal{M}$$

durch Schlepper geleistet.

#### Das Grubenpferd.

Die normale Leistung eines Grubenpferdes ist kleiner als die Maschinenpferdestärke, sie beträgt nicht 75 mkg/sek, sondern vielleicht 70 mkg/sek. Die Gangart des Pferdes bringt eine mittlere Geschwindigkeit von

$$c = 0,6 \text{ m/sek.}$$

Dieser Geschwindigkeit entspricht eine Zugkraft von

$$P = \frac{70}{0,6} = 116 \text{ kg.}$$

Bei 2% Fahrwiderstand erfordert der 1100 kg schwere Wagen bei 800 kg Nutzlast

$$W = 22 \text{ kg}$$

Zugkraft. Das Pferd zieht also

$$n = \frac{P}{W} = \frac{116}{22} = 5,3 \text{ volle Wagen,}$$

und bewegt damit eine Nutzlast von

$$5,3 \cdot 0,8 = 4,24 \text{ t.}$$

In 4 Stunden fährt diese Nutzlast

$$4 \cdot 3600 \cdot 0,6 = 8,65 \text{ km.}$$

Es werden also

$$4,24 \cdot 8,65 = 36,7 \text{ Nutztonnenkm/Schicht}$$

geleistet. Bei 15  $\mathcal{M}$  Schichtohn für Pferd und Pferdejungen kostet demnach

$$1 \text{ Nutztonnenkm} = \frac{15}{36,7} = 0,41 \mathcal{M}$$

durch Grubenpferde geleistet.

Als bester Leistungswert ist bekannt

45 Nutztonnenkilometer je Pferd und Schicht,

im Durchschnitt ist die Leistung erheblich geringer, man rechnet im Ruhrkohlenrevier etwa mit 35 Nutztonnenkilometer. In Abbaustrecken mit Ponnyförderung geht die Leistung auf 6 Nutztonnenkilometer zurück.

Zum Vergleich seien folgende Zahlen genannt:

Schlepper . . . .	4—5	Ntkm je Schicht
Grubenpferd . . .	35—45	„ „ „
Schlepperhaspel . .	100	„ „ „
Abbaulokomotive .	200	„ „ „

#### Das Schachtpferd.

Die Förderung in Schächten erfordert erheblich mehr Kraftaufwendung als die Förderung in Strecken, da die Nutzlast vertikal gehoben werden muß. Wird die Nutzlast  $G$  kg aus einer Teufe von  $T$  m hochgezogen, so ist die im Schacht aufzuwendende Hubarbeit

$$A = G \cdot T \text{ mkg.}$$

Dauert der Förderzug  $t$  Sekunden, so ist die aufzuwendende Leistung

$$L = \frac{A}{t} \text{ mkg/sek}$$

$$\text{oder } N = \frac{L}{75} \text{ PS.}$$

Diese am Seil zu leistenden PS nennt man Schachtpferde. Der Antriebsmotor muß natürlich als Motorpferde mehr aufbringen, da vom Motor bis zum Förderkorb erhebliche Verluste durch mechanische Widerstände auftreten.

**Beispiel:** Eine Blindschachtförderung zieht eine Nutzlast von  $G = 1500$  kg bei ausgeglichenen Leerlasten aus  $T = 120$  m Teufe. Es soll die Zeit eines Förderzuges  $t = 40$  sek betragen. Wieviel Schacht-PS sind erforderlich und wie groß sind die Druckluftkosten für 1 Förderzug, wenn für 1 Schacht-PSh  $65 \text{ m}^3$  a. L. (angesaugte Luft) verbraucht werden und  $1 \text{ m}^3$  a. L. 0,3 Pfg. kostet?

Die Hubarbeit ist

$$A = G \cdot T = 1500 \cdot 120 = 180000 \text{ mkg.}$$

Die Hubleistung ist

$$L = \frac{A}{t} = \frac{180000}{40} = 4500 \text{ mkg/sek,}$$

$$N = \frac{L}{75} = \frac{4500}{75} = 60 \text{ Schacht-PS.}$$

Die Maschine verbraucht also in 1 h oder in 3600 Sekunden 60 PSh.

Zur Bestimmung des Luftverbrauchs muß die Arbeit in PSh ausgedrückt werden. Der Förderzug dauert 40 sek, also werden verbraucht

$$= \frac{60 \cdot 40}{3600} = 0,67 \text{ PSh},$$

$$\text{Luftverbrauch} = 0,67 \cdot 65 = \sim 44 \text{ m}^3 \text{ a. L.},$$

$$\text{Druckluftkosten für 1 Förderzug} = 0,3 \cdot 44 = 13,2 \text{ Pfg.}$$

Was kostet 1 Nutztonnenkilometer Blindschachtförderung an Druckluftenergie?

$$1 \text{ Förderzug} = 1,5 \cdot 0,120 = 0,18 \text{ Ntkm},$$

$$0,18 \text{ Ntkm} = 13,2 \text{ Pfg.},$$

$$1 \text{ Ntkm} = \frac{13,2}{0,18} = 73 \text{ Pfg.} = 0,73 \mathcal{M}$$

Mit einem Förderzug werden 1,5 t Kohlen gefördert. Da der Förderzug 13,2 Pfg. Energiekosten bringt, kommen auf 1 t Kohle  $13,2 : 1,5 = 8,8$  Pfg. Druckluftkosten für die Blindschachtförderung.

## 17. Umsetzung von Wärme in mechanische Arbeit.

Energie nennt man in der Physik alles, was einer Arbeit gleichwertig ist. Ein Gewicht  $G$ , das z. B.  $h$  Meter über dem Erdboden steht, besitzt eine Energie der Lage von der Größe  $G \cdot h$ . Energie kann nicht erzeugt und nicht zerstört, sondern nur umgewandelt werden. Und so vollzieht sich in unseren Wärmekraftmaschinen auch nur eine Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie.

In Abb. 256 ist ein wärmedichtes Gefäß in Zylinderform dargestellt. In dem Zylinder bewegt sich luftdicht ein Kolben. Erwärmt man die Luftmenge unter dem Kolben, so dehnt sich die Luft aus und hebt das Kolbengewicht. Die Wärme setzt sich in mechanische Arbeit um. Die Arbeitsleistung ist

$$A = G \cdot h.$$

Nun könnte man die verbrauchte Gasmenge durch einen Gasmesser messen und bei bekanntem Heizwert des Gases die verbrauchte Wärmemenge errechnen. Exakte Versuche haben ergeben, daß

$$1 \text{ Kilogrammkalorie (kcal)} = 427 \text{ mkg}$$

Arbeit leistet, hierbei ist 1 kcal die Wärmemenge, durch die 1 kg Wasser von  $14\frac{1}{2}^{\circ}$  auf  $15\frac{1}{2}^{\circ}$  erwärmt wird.

Die Zahl

$$\frac{1}{427} = A \text{ (in der Bedeutung } 1 \text{ mkg} = \frac{1}{427} \text{ kcal)}$$

wird das mechanische Wärmeäquivalent genannt. Wärme und Arbeit sind also gleichwertig oder äquivalent. Der Wärmewert einer Pferdestunde ist demnach

$$1 \text{ PSh} = 270000 \text{ mkg} = 270000 \cdot \frac{1}{427} = 632 \text{ kcal}$$

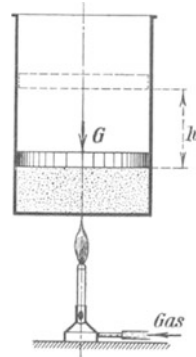


Abb. 256. Umsetzung von Wärme in Arbeit.

und der Wärmewert einer Kilowattstunde

$$1 \text{ kWh} = 367000 \text{ mkg} = 367000 \cdot \frac{1}{427} = 860 \text{ kcal.}$$

Praktisch ist der Wärmeverbrauch viel größer. Das Verhältnis

$$\frac{\text{theoretischer Wärmeverbrauch}}{\text{wirklicher Wärmeverbrauch}} = \text{thermischer Wirkungsgrad} = \eta_{th}$$

kennzeichnet die Güte der Wärmekraftanlage.

In Überlandzentralen ist z. B. der Kohlenverbrauch etwa

$$0,65 \text{ kg für 1 kWh}$$

bei einem Heizwert der Kohle von 7000 kcal. Der wirkliche Wärmeverbrauch ist demnach

$$0,65 \cdot 7000 = 4550 \text{ kcal für 1 kWh}$$

und der thermische Wirkungsgrad der Wärmekraftanlage

$$\eta_{th} = \frac{860}{4550} = 0,19,$$

d. h. nur 19% der Wärmeenergie der Kohle werden in mechanische Arbeit umgesetzt und 81% werden durch Verluste aufgeföhrt.

## 18. Der mechanische Wirkungsgrad der Maschinen.

In jeder Maschine treten Kraftverluste auf. Sie entstehen durch Reibung der aufeinander gleitenden Flächen. Diese Reibungswiderstände verzehren einen Teil der verfügbaren Kraft, so daß die nutzbar gemachte Leistung immer kleiner ist als die theoretisch verfügbare.

Ist z. B. bei einem Förderhaspel

$$N_i = \text{Zylinderleistung in PS,}$$

$$N_0 = \text{Reibungswiderstandsleistung in PS,}$$

so ist die nutzbar gemachte Leistung oder die effektive Leistung

$$N_e = N_i - N_0.$$

Man nennt das Verhältnis

$$\frac{\text{Nutzleistung}}{\text{theor. Leistung}} = \text{mechanischer Wirkungsgrad,}$$

$$\frac{N_e}{N_i} = \eta.$$

Der Wirkungsgrad heißt der mechanische Wirkungsgrad, weil er die mechanischen Verluste in der Maschine kennzeichnet.

Bei einer Zylinderleistung  $N_i$  ist als Nutzleistung nur zu erwarten

$$N_e = \eta \cdot N_i.$$

Der Wirkungsgrad ist immer kleiner als 1, ist z. B.

$$\eta = 0,70,$$

so heißt das: 70% der verfügbaren Leistung werden in Nutzleistung umgesetzt, während 30% durch mechanische Reibung verloren gehen.

**Beispiel:** Welche Zylinderleistung muß ein Förderhaspel haben, wenn er  $Q = 1100 \text{ kg}$  Nutzlast mit einer Seilgeschwindigkeit  $v = 3 \text{ m}$  heben soll, und wenn 36% Verluste in der Maschine entstehen?

**Lösung:** Bei 36% Verlusten ist der mechanische Wirkungsgrad

$$100\% - 36\% = 64\% = 0,64.$$

Die Zylinderleistung muß sein

$$N_i = \frac{N_s}{\eta}.$$

Die Nutzleistung ist

$$N_s = \frac{Q \cdot v}{75} = \frac{1100 \cdot 3}{75} = 44 \text{ PS.}$$

Die Zylinderleistung

$$N_i = \frac{44}{0,64} = 69 \text{ PS.}$$

Gesamtwirkungsgrad und Teilwirkungsgrade.

Bei einem Förderhaspel (Abb. 257) wird die Zylinderleistung durch ein Kurbelgetriebe auf die Zahnradwelle übertragen. Das Kurbeltriebwerk habe den mechanischen Wirkungsgrad  $\eta_1$ , dann ist die an die Kurbelwelle übertragene Leistung

$$N_1 = \eta_1 \cdot N_i.$$

Der Wirkungsgrad des Zwischengetriebes bis zur Trommel sei  $\eta_2$ , dann wird die Trommelleistung

$$N_2 = \eta_2 \cdot N_1 = \eta_2 \cdot \eta_1 \cdot N_i.$$

Der Wirkungsgrad des Seiltriebes (Seilsteifigkeit) sei  $\eta_3$ . Hiermit wird die Nutzleistung am Seil

$$N = \eta_3 \cdot N_2 = \eta_3 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1 \cdot N_i.$$

Demnach ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3,$$

d. h. der Gesamtwirkungsgrad ist gleich dem Produkt aller Teilwirkungsgrade.

**Beispiel:** Ein Förderhaspel soll die Nutzlast  $Q = 1100 \text{ kg}$  mit  $v = 3 \text{ m}$  Seilgeschwindigkeit heben, wieviel PS müssen die Zylinder leisten, wenn durch Seilsteifigkeit 5%, durch das Zwischengetriebe 10% und durch den Kurbeltrieb 25% verloren gehen?

1. Kurbeltrieb  $\eta_1 = 0,75$ ,
2. Zwischengetriebe  $\eta_2 = 0,90$ ,
3. Seilsteifigkeit  $\eta_3 = 0,95$ .

Demnach ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = 0,75 \cdot 0,90 \cdot 0,95 = 0,64,$$

$$\text{Nutzleistung } N_s = \frac{Q \cdot v}{75} = \frac{1100 \cdot 3}{75} = 44 \text{ PS.}$$

$$\text{Zylinderleistung } N_i = \frac{N}{\eta} = \frac{44}{0,64} = 69 \text{ PS.}$$

**Beispiel:** Was kostet 1 tkm Wasserförderung im Hauptschacht, wenn der Pumpensatz aus Kreiselpumpen mit elektrischem Antrieb besteht?

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad 1 \text{ tkm} &= 1000 \cdot 1000 = 1000000 \text{ mkg,} \\ &270000 \text{ mkg} = 1 \text{ PSh} = 0,736 \text{ kWh,} \end{aligned}$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{1000000}{270000} = 3,7 \text{ PSh} = 2,73 \text{ kWh.}$$

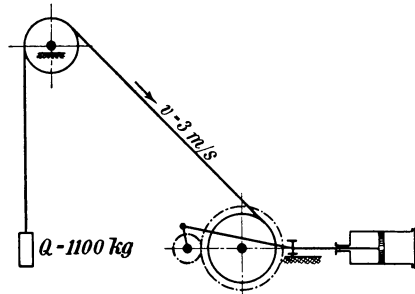


Abb. 257. Das Triebwerk eines Förderhaspels.

Praktisch ist der kWh-Verbrauch viel größer, weil keine Maschine verlustlos arbeitet. Man muß daher alle Wirkungsgrade von der Pumpe bis zur Schalttafel über Tage in Rechnung stellen.

Folgende Verluste sind zu berücksichtigen:

1. in der Pumpe z. B. 28% oder  $\eta_1 = 0,72$ ,
2. in der Steigleitung z. B. 5% oder  $\eta_2 = 0,95$ ,

d. h. Gesamtwirkungsgrad des Pumpensatzes

$$\eta_P = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,72 \cdot 0,95 = 0,684.$$

Der elektrische Teil bringt folgende Verluste:

1. im Drehstrommotor z. B. 18% oder  $\eta_1 = 0,82$ ,
2. Kabelverluste z. B. 2,5% oder  $\eta_2 = 0,975$ ,

d. h. Gesamtwirkungsgrad des elektrischen Antriebs

$$\eta_{ei} = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,82 \cdot 0,975 = 0,80.$$

Demnach ist der Gesamtwirkungsgrad von der Pumpe bis zur Schalttafel über Tage

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_P \cdot \eta_{ei} = 0,684 \cdot 0,80 = 0,55, \\ \text{theoretisch 1 tkm} &= 2,73 \text{ kWh}, \\ \text{praktisch 1 tkm} &= \frac{2,73}{\eta} = \frac{2,73}{0,55} = \sim 5 \text{ kWh}. \end{aligned}$$

Die Zeche wird als Eigenerzeuger mit einem Strompreis von 3 Pfg. für 1 kWh rechnen können, also sind die Energiekosten für

$$1 \text{ tkm Wasserhebung} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ Pfg.}$$

**Beispiel:** Eine Wasserhaltung hat täglich 11 h Laufzeit und drückt  $2,5 \text{ m}^3/\text{min}$  auf 495 m Förderhöhe. Wieviel tkm Wasserförderung werden im Jahr geleistet und welche Stromkosten entstehen dadurch?

Die Zeche fördert täglich 2000 t Kohle, welche Energiekosten für die Wasserhebung kommen auf 1 t Kohle?

$$\begin{aligned} \text{Lösung: Förderhöhe} &= 495 \text{ m} = 0,495 \text{ km}, \\ \text{Jahreswassermenge} &= 2,5 \cdot 60 \cdot 11 \cdot 365 = 600\,000 \text{ m}^3, \\ 1 \text{ m}^3 &= 1,1 \text{ t}, \\ \text{Jahreswassergewicht} &= 600\,000 \cdot 1,1 = 660\,000 \text{ t}, \\ \text{jährlich} &= 660\,000 \cdot 0,495 = 326\,000 \text{ tkm}, \\ 1 \text{ tkm} &= 5 \text{ kWh}, \\ \text{jährlich} &= 5 \cdot 326\,000 = 1\,630\,000 \text{ kWh}, \\ &= 1\,630\,000 \cdot 0,03 = 48\,900 \text{ } \mathcal{M} \end{aligned}$$

Wasserkosten für 1 t Kohle = ?

$$\text{jährlich} = 2000 \cdot 300 = 600\,000 \text{ t Kohle},$$

$$\text{Wasserkosten für 1 t Kohle} = \frac{48\,900}{600\,000} = 0,0815 \text{ } \mathcal{M} = 8,15 \text{ Pfg.}$$

**Aufgabe:** Welche kW-Leistung hat der Motor während der Förderung?

$$\begin{aligned} \text{Lösung: stdl. Pumpenlieferung} &= 2,5 \cdot 60 = 150 \text{ m}^3, \\ \text{stdl. Wassergewicht} &= 1,1 \cdot 150 = 165 \text{ t}, \\ \text{stdl. tkm} &= 165 \cdot 0,495 = 81,75, \\ 1 \text{ tkm} &= 5 \text{ kWh}, \\ \text{stdl.} &= 81,75 \cdot 5 = \sim 410 \text{ kWh}. \end{aligned}$$

Da die Maschine für diese Lieferung gerade 1 h läuft, so ist die Schalttafelleistung über Tage **410 kW**.

## 19. Der isothermische Wirkungsgrad bei Druckluftantrieben.

Dem Förderhaspel wird Druckluft als Energieträger zugeführt. Das Arbeitsvermögen der Druckluft hängt von der Spannung der Druckluft ab. Um 1 m<sup>3</sup> atmosphärische Luft mit dem geringsten Arbeitsaufwand (isothermische Kompression) zu verdichten, sind bei den verschiedenen Enddrücken folgende Arbeitswerte erforderlich:

Enddruck =	1 atü	2 atü	3 atü	4 atü	5 atü
isoth. Kompr.-Arbeit =	6930 mkg	11 000 mkg	13 860 mkg	16 090 mkg	17 920 mkg

Dieselbe Arbeit könnte die Druckluft bei der Expansion in der Arbeitsmaschine wieder als mechanische Arbeitsleistung abgeben. Kennt man also den Luftverbrauch der Maschine, so kann man das theoretische Arbeitsvermögen der zugeführten Luftmenge bestimmen. Das Verhältnis

$$\frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Arbeitsvermögen der Luft}} = \text{isothermischer Wirkungsgrad}$$

kennzeichnet dann die Güte der Maschine.

Man pflegt den Luftverbrauch der Druckluftmaschinen in m<sup>3</sup> Saugluft anzugeben und bezieht bei Maschinen, deren Arbeitsleistung in PS angegeben werden kann, den Luftverbrauch auf die effektive Pferdestunde (PS<sub>e</sub>h). Beim normalen Kolbenhaspel ist der Luftverbrauch z. B. bei 4 atü

$$40 - 80 \text{ m}^3 \text{ je PS}_e\text{h.}$$

Wie groß ist dann der isothermische Wirkungsgrad des Haspels?

$$\text{Arbeitswert einer Pferdestunde} = 270000 \text{ mkg} = A.$$

Da 1 m<sup>3</sup> Saugluft bei 4 atü 16090 mkg leisten kann, ist bei 40 bzw. 80 m<sup>3</sup> Saugluftverbrauch je Pferdestunde das Arbeitsvermögen dieser Luftmenge

$$40 \cdot 16090 = 643600 \text{ mkg} = A_0,$$

$$\text{bzw. } 80 \cdot 16090 = 1287200 \text{ mkg} = A_0,$$

$$\eta_{is} = \frac{270000}{643600} = 0,42 \text{ bzw. } \eta_{is} = \frac{A}{A_0} = \frac{270000}{1287200} = 0,21,$$

d. h. 21 bis 42% der verfügbaren Energie werden in Nutzarbeit umgesetzt, während 79 bis 58% verloren gehen.

Ist  $\eta = 0,64$  der mechanische Wirkungsgrad des Haspels, so verbraucht der Haspel für die indizierte Pferdestunde

$$80 \cdot \eta = 80 \cdot 0,64 = 51,2 \text{ m}^3/\text{PS}_i\text{h} \text{ bzw. } 40 \cdot 0,64 = 25,6 \text{ m}^3/\text{PS}_i\text{h},$$

d. h. der isothermische Wirkungsgrad der Zylinderarbeit ist

$$\text{Zyl.} \cdot \eta_{is} = \frac{270000}{51,2 \cdot 16090} = 0,327 \text{ bzw. } = \frac{270000}{25,6 \cdot 16090} = 0,654.$$

Ferner ist

$$\frac{\text{Nutz} \cdot \eta_{is}}{\text{Zyl.} \cdot \eta_{is}} = \frac{0,21}{0,327} = 0,64 = \eta = \text{mechanischer Wirkungsgrad}$$

oder

$$\text{Zyl.} \cdot \eta_{is} = \frac{\text{Nutz} \cdot \eta_{is}}{\eta}.$$

**Beispiel:** Die Schlagleistung eines Hammers sei 0,69 PS. Der Hammer verbrauche bei 4 atü in der Stunde 60 m<sup>3</sup> Saugluft, wie groß ist der isothermische Wirkungsgrad des Hammers?

**Lösung:** Schlagleistung = 0,69 · 270000 = 186000 mkg =  $A$ ,

Arbeitsvermögen der Luft = 60 · 16090 = 965400 mkg =  $A_0$ ,

$$\eta_{is} = \frac{A}{A_0} = \frac{186000}{965400} = 0,193.$$

Bei Ventilatoren läßt sich, wie später nachgewiesen wird, die mechanische Arbeit oder die Luftleistung errechnen, wenn die sekundlich gelieferte Luftmenge  $V$  in m<sup>3</sup> und der Gegendruck  $h$  in mm Wassersäule bekannt ist; es wird dann die Arbeit geleistet

$$L = V \cdot h \text{ mkg/sek.}$$

Bei Luttenventilatoren mit Druckluftantrieb wird als Wirtschaftlichkeitsmaßstab die spezifische Wettermenge  $q$  gemessen, das ist diejenige Wettermenge, welche mit 1 m<sup>3</sup> Saugluft gefördert wird. Wenn 1 m<sup>3</sup> Saugluft den Arbeitswert  $A_0$  hat, ist der isothermische Wirkungsgrad des Ventilators

$$\eta_{is} = \frac{q \cdot h}{A_0}.$$

**Beispiel:** Wie groß ist der isothermische Wirkungsgrad eines Luttenventilators, der bei 4 atü mit 1 m<sup>3</sup> Saugluftverbrauch  $q = 60$  m<sup>3</sup> Wetter gegen  $h = 25$  mm W.S. liefert?

**Lösung:**  $A = q \cdot h = 60 \cdot 25 = 1500$  mkg,

$A_0 = 1 \cdot 16090 = 16090$  mkg,

$$\eta_{is} = \frac{q \cdot h}{A_0} = \frac{A}{A_0} = \frac{1500}{16090} = 0,093,$$

d. h. nur 9,3% der Luftenergie werden in Nutzarbeit umgesetzt.

Solche Luttenventilatoren sind in der Regel Schraubenventilatoren, welche einen schlechten mechanischen Wirkungsgrad haben. Dieser beträgt meistens kaum 30%, so daß

$$\eta = 0,30$$

ist. Erfolgt der Antrieb durch eine Luftturbine, so ist der isothermische Wirkungsgrad der Turbine

$$\text{Turb.} \cdot \eta_{is} = \frac{\text{Ventil.} \cdot \eta_{is}}{\eta} = \frac{0,093}{0,30} = 0,31.$$

Würde man die Luftturbine auf einen Schleuderventilator arbeiten lassen, dessen mechanischer Wirkungsgrad erheblich höher ist und z. B. 65% beträgt, so würde die Luftenergie erheblich besser ausgenutzt. Man erhielte dann z. B. mit den eben angegebenen Zahlen einen isothermischen Wirkungsgrad

$$\text{Ventil.} \cdot \eta_{is} = \text{Turb.} \cdot \eta_{is} \cdot \eta = 0,31 \cdot 0,65 = 0,20,$$

d. h. es würden 20% der Luftenergie in Wetterleistung umgesetzt, während der Schraubenventilator mit derselben Antriebsturbine nur 9,3% in Wetterleistung umsetzte.



## 20. Leistungsmessung an Maschinen durch Abbremsen.

Die Wellenleistung einer Maschine läßt sich mit einem Bremszaum messen (Abb. 258). Die Bremsbacken werden durch Anziehen der Schrauben gegen die Brems Scheibe gepreßt. Dadurch wird am Umfang der Scheibe ein Reibungswiderstand  $W$  erzeugt, so daß die ganze Maschinenleistung in Reibungsleistung umgesetzt wird. Die Reibungsleistung ist

$$L = W \cdot v \text{ mkg/sek.}$$

Auf den Bremszaum wirkt der Reibungswiderstand  $W$  linksdrehend, er wirkt wie ein an der linken Seite in der Entfernung  $r$  vom Drehpunkt aufgehängtes Gewicht  $W$ . Dieses Gewicht kann dadurch gemessen werden, daß man auf der rechten Seite am Hebelarm  $l$  so viel Gewicht  $P$  anhängt, bis der Balken horizontal einspielt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

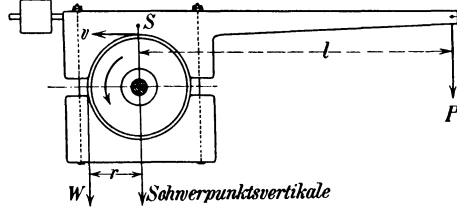


Abb. 258. Der Bremszaum mit angehängtem Gewicht.

$$+ P \cdot l - W \cdot r = 0 \quad \text{oder} \quad W = P \cdot \frac{l}{r}.$$

Damit lautet unsere Leistungsgleichung

$$L = P \cdot \frac{l}{r} \cdot v.$$

Nun ist

$$\frac{l}{r} \cdot v = V = \text{Umfangsgeschw. am Kreise vom Halbmesser } l,$$

so daß man schreiben kann

$$L = P \cdot V \text{ mkg/sek}$$

oder, wenn man die Leistung in PS haben will,

$$N = \frac{P \cdot V}{75} \text{ PS.}$$

Nun ist auch

$$V = \frac{2\pi \cdot l \cdot n}{60},$$

also

$$N = \frac{P \cdot n \cdot 2\pi \cdot l}{60 \cdot 75} \text{ PS.}$$

Man kann den Wert

$$\frac{2\pi l}{60 \cdot 75} = C$$

als Bremszaumkonstante berechnen, alsdann ist die Leistung in PS

$$N = C \cdot P \cdot n.$$

Der Bremszaum muß selbstverständlich so ausbalanciert sein, daß er unbelastet horizontal einspielt. Das ist der Fall, wenn seine Schwerpunktsvertikale durch den Drehpunkt geht.

**Beispiel:** Bei einem Versuch wurde gemessen  $l = 2,50$  m,  $P = 50$  kg,  $n = 120$ ; wie groß ist die Leistung in PS?

**Lösung:** Die Bremszaumkonstante ist

$$C = \frac{2\pi \cdot l}{60 \cdot 75} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2,50}{4500} = 0,0035,$$

$$N = C \cdot P \cdot n = 0,0035 \cdot 50 \cdot 120 = 21 \text{ PS.}$$

### Bremsversuch an einem Zahnradmotor.

Der Pfeilradmotor mit seinen Winkelzähnen wird in neuerer Zeit durch Zahnradmotoren mit einfachen Stirnrädern ersetzt. Ein solcher Motor wurde mit der Bremszaumanordnung nach Abb. 259 untersucht. Der Bremszaumhebel drückt auf die Brücke einer Dezimalwaage. Ist er nicht ausbalanciert, so drückt er mit dem nicht ausbalancierten Gewicht  $G$  auf die Brücke. Dieser Eigengewichtsdruck  $G$  wird durch die Schalenbelastung  $Q$  ausgeglichen, so daß das beim Versuch ermittelte Gewicht  $P'$  das Maß für die Bremsleistung ist.

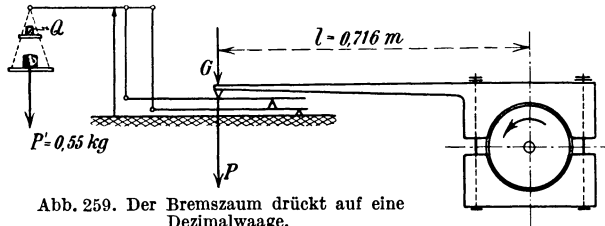


Abb. 259. Der Bremszaum drückt auf eine Dezimalwaage.

Mit  $l = 0,716$  m wird die Bremszaumkonstante

$$C = \frac{2\pi \cdot l}{60 \cdot 75} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,716}{4500} = 0,001.$$

Das bei dem Bremsversuch ermittelte Gewicht  $P' = 0,55$  kg entspricht dem Druck

$$P = 10 \cdot P' = 10 \cdot 0,55 = 5,5 \text{ kg.}$$

Die beobachtete Drehzahl war  $n = 1900$ /min, mit diesen Werten ergibt sich die Bremsleistung

$$N = C \cdot P \cdot n = 0,001 \cdot 5,5 \cdot 1900 = 10,5 \text{ PS.}$$

Gleichzeitig wurde der Luftverbrauch gemessen. Er betrug bei 4 atü Eintrittsspannung in der Minute  $12,1$  m<sup>3</sup> Saugluft. Wie groß ist der isothermische Wirkungsgrad des Motors?

$$\text{Stündlicher Luftverbrauch} = 60 \cdot 12,1 = 726 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$\text{Luftverbrauch für 1 PSh} = \frac{726}{10,5} = 69 \text{ m}^3,$$

$$\text{theoretischer Arbeitswert von 1 m}^3 \text{ Saugluft} = 16090 \text{ mkg},$$

$$\text{theoretischer Arbeitswert von 1 PSh} = 270000 \text{ mkg},$$

$$\text{isothermischer Wirkungsgrad } \eta_{is} = \frac{270000}{69 \cdot 16090} = 0,24,$$

d. h. 24% der in der Druckluft verfügbaren Energie werden in Nutzarbeit umgesetzt.

## 21. Das Trägheitsgesetz.

Das Trägheitsgesetz ist ein Naturgesetz und wie alle Naturgesetze ein Erfahrungsgesetz. Es lehrt: „Es liegt in der Natur eines jeden Körpers, Richtung und Geschwindigkeit seiner einmal vorhandenen Bewegung beizubehalten, also geradlinig und gleichförmig seine Bewegung fortzusetzen.“

Es würde also auch ein Körper mit der Geschwindigkeit null, d. i. ein in Ruhe befindlicher Körper diesen Zustand immer beibehalten.

Jede Bewegungsänderung, sei es in der Richtung oder in der Größe der Geschwindigkeit, muß eine Ursache haben. Diese Ursache nennen wir Kraft.

Das Trägheitsgesetz könnte daher auch lauten: „Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, so lange keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.“

Ein einmal angestoßener Körper wird also mit der Abstoßgeschwindigkeit sich in der Stoßrichtung gleichförmig weiterbewegen. Bleibt aber die Bewegungskraft am Körper weiter tätig, so wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, eine Tatsache, welche wir bei Betrachtung des freien Falls sofort als bewiesen erkennen.

Eine nicht gleichförmige oder eine krummlinige Bewegung erfordert für deren Zustandekommen eine ständige Kraft. In dem Augenblick, in dem diese Kraft zu wirken beginnt, macht sich in dem Körper ein Widerstand gegen die Bewegungsänderung bemerkbar, diesen Widerstand nennt man Trägheitswiderstand. Man führt ihn zurück auf die Masse des Körpers, welche man daher auch die träge Masse nennt. Die Fähigkeit des Körpers, der Änderung der gleichförmig geradlinigen Bewegung einen Widerstand entgegenzusetzen, nennt man das Trägheits- oder Beharrungsvermögen.

## 22. Masse und Beschleunigungsgesetz.

Die uns bekannte Tatsache, daß eine nach Größe und Richtung gleichbleibende Kraft einem Körper eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung erteilt, läßt sich durch Versuche feststellen. Sie ergeben, daß die Beschleunigung um so größer wird, je größer die Kraft ist. Es läßt sich ebenso feststellen, daß ein und demselben Körper durch eine doppelt so große Kraft eine doppelt so große Beschleunigung erteilt wird. Hieraus folgert man als erstes Gesetz:

„Die Kräfte verhalten sich wie die Beschleunigungen, die sie demselben Körper oder derselben Masse erteilen.“

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (\text{wenn } m = \text{konst.}).$$

Zwei Körpermassen  $m_1$  und  $m_2$  sind gleich, wenn sie durch die gleiche Kraft gleiche Beschleunigung erhalten. Die Masse eines Körpers ist dagegen um so größer, je kleiner die Beschleunigung ist, die ihr von ein und derselben Kraft erteilt wird. Hieraus folgert man als zweites Gesetz:

„Die Massen verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, welche gleiche Kräfte ihnen erteilen.“

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad (\text{wenn } P = \text{konst.}).$$

Man kann ferner durch Versuche nachweisen, daß eine Masse doppelt so groß ist wie eine andere, wenn sie durch die doppelte Kraft dieselbe Beschleunigung erhält als die andere Masse. Hieraus folgt das dritte Gesetz:

„Die Massen verhalten sich wie die Kräfte, durch welche ihnen gleiche Beschleunigungen erteilt werden.“

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad (\text{wenn } b = \text{konst.}).$$

Als Einheit der Kraft gilt der Druck, den ein Körper von 1 kg Gewicht auf seine Unterstütsungsfläche ausübt, als Einheit der Masse kann man nun zwangsläufig die Masse eines Körpers annehmen, dem durch eine Kraft von 1 kg die Beschleunigung 1 m/sek<sup>2</sup> erteilt wird. Man folgert dann:

Eine Kraft 1 kg erteilt der Masse 1 die Beschleunigung 1

„ „ 1 „ „ „ „ „  $m$  „ „ „  $\frac{1}{m}$

„ „  $P$  „ „ „ „ „  $m$  „ „ „  $\frac{P}{m}$

d. h.  $b = \frac{P}{m}.$

Dieses sogenannte Beschleunigungsgesetz lautet in Worten:

„Man findet die Beschleunigung, welche eine gegebene Kraft einer gegebenen Masse erteilt, indem man die Kraftzahl durch die Massenzahl dividiert“, d. h.

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$$

oder  $P = m \cdot b$ , d. h.

$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$
---

## 23. Das Gesetz der Schwere.

Um die Massen der Körper zahlenmäßig zu bestimmen, benutzt man ein Naturgesetz, das Gesetz der Schwere. Es lautet:

Jeder Körper an der Erdoberfläche wird in vertikaler Richtung von der Erde mit einer Kraft angezogen, welche man das Gewicht des Körpers nennt. Diese Gewichte der Körper sind Kräfte, welche allen Körpern gleiche Beschleunigung, die Erdbeschleunigung

$$g = 9,81 \text{ m/sek}^2$$

erteilen. Nach dem Beschleunigungsgesetz ist z. B. für einen Körper vom Gewicht  $G$

$$g = \frac{G}{m} \quad \text{oder} \quad m = \frac{G}{g}.$$

Die Massenzahl eines Körpers ist also gleich der Gewichtszahl, dividiert durch die Erdbeschleunigung, d. h.

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Erdbeschleunigung}}.$$

Die Massenzahl nimmt den Wert 1 an, wenn das Körpergewicht  $G = 9,81 \text{ kg}$  ist, alsdann ist

$$\text{Masse} = \frac{G}{g} = \frac{9,81}{9,81} = 1.$$

Eine Kugel von diesem Gewicht (Abb. 260), also von der Masse 1, werde in horizontaler Richtung durch die Kraft

$$P = 1 \text{ kg}$$

beschleunigt. Dann berechnet sich die Beschleunigung  $b$  nach dem Gesetz

$$b : g = P : G \quad \text{zu} \quad b = P \cdot \frac{g}{G} = 1 \cdot \frac{9,81}{9,81} = 1 \text{ m/sek}^2.$$

Das stimmt überein mit unserer früheren Erklärung, nach der diejenige Masse Masseneinheit sein soll, welcher durch eine Kraft von 1 kg die Beschleunigung  $1 \text{ m/sek}^2$  erteilt wird.

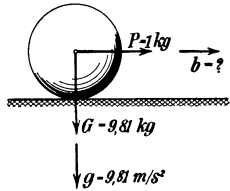


Abb. 260. Eine Kugel von der Masse 1.

## 24. Anwendungen des Beschleunigungsgesetzes.

Das Beschleunigungsgesetz vollzieht sich in der Technik unendlich oft. Das Anfahren aller Transportmittel, das Schlagen aller Schlagwerkzeuge, die Bewegung aller schwingenden Maschinenteile, alles vollzieht sich nach dem Beschleunigungsgesetz.

**Beispiel:** Es soll ein beladener Förderwagen von 800 kg Gewicht mit der Beschleunigung  $b = 0,5 \text{ m/sek}^2$  anfahren, welche Kraft ist aufzuwenden, wenn der Fahrwiderstand 1% der Gewichtslastung beträgt?

**Lösung:** Bewegungskraft = Fahrwiderstand + Beschleunigungskraft.

$$\text{Fahrwiderstand} = 0,01 \cdot 800 = 8 \text{ kg} = W,$$

$$\text{Beschleunigungskraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung},$$

$$P = \frac{800}{9,81} \cdot 0,50 = 40 \text{ kg}.$$

Wir sehen, die Beschleunigungskraft ist in diesem Fall 5 mal so groß wie der Fahrwiderstand des Wagens, insgesamt sind zur Bewegung erforderlich

$$K = W + P = 8 + 40 = 48 \text{ kg}.$$

In welcher Zeit wird die Fahrgeschwindigkeit  $v = 2 \text{ m/sek}$  erreicht, und wie groß ist der Anfahrweg?

$$t = \frac{v}{b} = \frac{2,0}{0,5} = 4 \text{ Sekunden},$$

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,50 \cdot 4^2 = 4 \text{ m}.$$

**Beispiel:** Ein Abbauhammer (Abb. 261) zeigt folgende Verhältnisse: Kolbendurchmesser  $d = 35 \text{ mm}$ , Schlaghub  $s = 115 \text{ mm}$ , Kolbengewicht  $G = 0,745 \text{ kg}$ ; welche Schlagzahl ist bei  $p = 4 \text{ atü}$  zu erwarten, und wie groß ist die Aufschlaggeschwindigkeit?

**Lösung:** a) Der Hammer arbeite horizontal.

Die Kolbenmasse ist

$$m = \frac{G}{g} = \frac{0,745}{9,81} = 0,076.$$

Diese wird von der Kolbenkraft bewegt, deren Größe berechnet sich zu

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot p.$$

Wenn vor dem Hammer  $p = 4$  atü zur Verfügung stehen, so ist während des ganzen Schlaghubes infolge Drosselung in den Steuerkanälen und unvollständiger Füllung eine kleinere Spannung zur Verfügung. Sie beträgt etwa 70 bis 80% des Eintrittsdruckes. Rechnet man in diesem Fall mit 73%, so ist

$$p = 0,73 \cdot 4 = 2,92 \text{ atü},$$

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 3,5^2 \cdot 2,92 = 28 \text{ kg}.$$

Nach dem Beschleunigungsgesetz ist die erteilte Beschleunigung

$$b = \frac{P}{m} = \frac{28}{0,076} = 368 \text{ m/sek}^2.$$

Da die Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit null erfolgt, so ist der nach  $t_1$  Sekunden zurückgelegte Weg

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t_1^2 \quad \text{oder} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b}}.$$

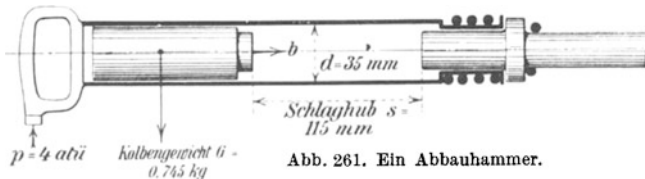


Abb. 261. Ein Abbauhammer.

Für den Schlaghub  $s = 0,115$  m berechnet sich hieraus die Schlagzeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,115}{368}} = 0,025 \text{ Sekunden}.$$

Der Rückweg des Kolbens erfordert wegen der längeren Steuerkanäle und Luftdrosselung 10% mehr Zeit, dann dauert der Rücklauf

$$t_2 = 1,10 \cdot t_1 = 1,10 \cdot 0,025 = 0,0275 \text{ Sekunden}.$$

Der volle Schlag (Hin- und Rückgang) dauert also

$$t = t_1 + t_2 = 0,0250 + 0,0275 = 0,0525 \text{ Sekunden}$$

in  $t$  Sekunden = 1 Schlag

$$\text{„ } 1 \text{ Sekunde} = \frac{1}{t} \text{ „}$$

$$\text{„ } 60 \text{ Sekunden} = \frac{60}{t} = n = \text{minutliche Schlagzahl}.$$

$$n = \frac{60}{0,0525} = 1142/\text{min}.$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit ist

$$v = b \cdot t_1 = 368 \cdot 0,025 = 9,2 \text{ m/sek}.$$

b) Der Hammer arbeite vertikal nach unten.

Erfolgt der Schlaghub nach unten, so unterstützt die Fallbeschleunigung  $g$  die Kolbenbeschleunigung  $b$ , und es ist die Schlagbeschleunigung

$$b_1 = b + g = 368 + 9,81 = \sim 378 \text{ m/sek}^2.$$

$$\text{Schlagzeit abwärts } t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,115}{378}} = 0,0247 \text{ Sekunden}.$$

Beim Aufwärtsgang vermindert die Fallbeschleunigung  $g$  die Kolbenbeschleunigung  $b$ , und es ist

$$b_2 = b - g = 368 - 9,81 = \sim 358 \text{ m/sek}^2.$$

$$\text{Schlagzeit aufwärts } t_2 = \sqrt{\frac{2s}{b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,115}{358}} = 0,0254 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{mit 10 \% Zuschlag wird } t_2 = 0,0279 \text{ sek} \\ \text{hinzu } t_1 = 0,0247 \text{ sek}$$

$$\text{Schlagzeit } t = 0,0526 \text{ sek}$$

$$n = \frac{60}{t} = \frac{60}{0,0526} = 1141/\text{min.}$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit wird

$$v = b_1 \cdot t_1 = 378 \cdot 0,0247 = 9,35 \text{ m/sek.}$$

c) Der Hammer arbeite vertikal nach oben.

Erfolgt der Schlaghub nach oben, so ist die Beschleunigung

$$b_1 = b - g = 358 \text{ m/sek}^2$$

und die Schlagzeit

$$t_1 = 0,0254 \text{ sek.}$$

Die Abwärtsbeschleunigung für den Rückhub ist  $b_2 = 378 \text{ m/sek}^2$  und mit 10% Zuschlag die Rücklaufzeit

$$t_2 = 1,10 \cdot 0,0247 = 0,0272 \text{ sek}$$

$$t_1 = 0,0254 \text{ sek}$$

$$\text{Schlagzeit } t = t_1 + t_2 = 0,0526 \text{ sek}$$

$$n = \frac{60}{t} = \frac{60}{0,0526} = 1141 \text{ Schläge i. d. Min.}$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit wird  $v = b_1 \cdot t_1 = 358 \cdot 0,0254 = 9,10 \text{ m/sek.}$

**Ergebnis:** Die Kolbenbeschleunigung ist im Verhältnis zur Fallbeschleunigung so groß, daß ein Unterschied in der Schlagzahl nicht entsteht, ob der Hammer horizontal, nach unten oder nach oben arbeitet.

Wir werden später sehen, daß die Schlagarbeit mit dem Quadrat der Aufschlaggeschwindigkeit zunimmt. Zahlenmäßig würde daher sein

$$\frac{\text{Schlagarbeit nach unten}}{\text{Schlagarbeit nach oben}} = \frac{9,35^2}{9,10^2} = 1,06,$$

d. h. zahlenmäßig wird in unserem Beispiel der Schlag nach unten um 6% stärker wirken als nach oben.

## 25. Die Zentrifugalkraft.

Eine gleichförmige Kreisbewegung kommt dadurch zustande, daß rechtwinkelig zur Umfangsgeschwindigkeit  $v$  eine Beschleunigung  $b$  hinzutritt. Diese Beschleunigung  $b$  kann nur durch eine konstante Kraft erteilt werden, deren Größe nach dem Beschleunigungsgesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

bestimmt wird. Ist  $G$  das Gewicht der in Abb. 262 rotierenden Kugel, so ist die Beschleunigungskraft

$$K = \frac{G}{g} \cdot b.$$

Die Beschleunigung, welche als Zentripetalbeschleunigung uns schon bekannt ist, hat die Größe

$$b = \frac{v^2}{r}, \quad \text{also wird} \quad K = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Man nennt diese Kraft die Zentripetalkraft, weil sie in allen Stellungen der Kugel rechtwinkelig zur Kreislinie, also nach dem Mittelpunkt  $O$  des Kreises hin gerichtet ist. Sie hat die Eigenschaft, die Bahngeschwindigkeit  $v$  unverändert zu lassen, da sie rechtwinkelig zur Richtung der Geschwindigkeit  $v$  bleibt. Verändert sich ihre Größe nicht, so bleibt auch der Krümmungsradius  $r$  der Bahn konstant.

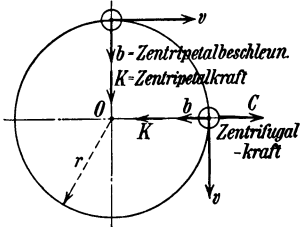


Abb. 262. Die Zentrifugalkraft einer rotierenden Kugel.

Zwangsläufig kann man einen Körper auf einer Schienenbahn im Kreise bewegen. Es muß dann die Schiene ständig mit der Zentripetalkraft

$$K = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

den Körper nach innen drücken. Man kann aber auch den Körper an einem Faden rundschleudern. Erteilt man ihm die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  rechtwinkelig zur Fadenrichtung, so wird er in gleichförmiger Bewegung eine Kreislinie beschreiben.

Die Kugel wird bei der Bewegung den Faden spannen. Nach dem Gesetz der Wechselwirkung ist die von der Kugel auf den Faden ausgeübte Gegenkraft genau so groß wie die Zentripetalkraft, und da sie in der Richtung des Fadens nach außen wirkt, wird sie Zentrifugalkraft genannt und mit  $C$  bezeichnet. Die Zentrifugalkraft hat also auch wieder die Größe

$$C = m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Bei der Kreisbewegung (Abb. 263) ist die Umfangsgeschwindigkeit bekanntlich die Bogenlänge, welche der Endpunkt des Halbmessers  $r$  in der Sekunde durchläuft.

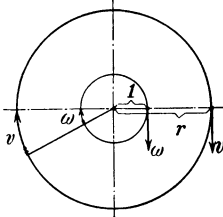


Abb. 263. Die Winkelgeschwindigkeit.

Die Bogenlänge, welche am Radius  $l$  in der Sekunde durchlaufen wird, nennt man Winkelgeschwindigkeit und bezeichnet sie mit  $\omega$ .

Man kann also die Winkelgeschwindigkeit auch als die Umfangsgeschwindigkeit am Radius  $l$  bezeichnen, und es ist

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Ist  $\omega$  gegeben, so ist die Umfangsgeschwindigkeit am Radius  $r$

$$v = r \cdot \omega.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$C = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

ein, so wird

$$C = m \cdot \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2.$$



Die Zentrifugalkraft im Drehkolbenmotor.

Der Drehkolbenmotor (Abb. 264) hat in radialen Einschnitten einer Walze frei fliegende Lamellen. Bei der Drehbewegung der Walze werden die Lamellen nach außen geschleudert, so daß die Zentrifugalkräfte die Lamellen gegen das feststehende Gehäuse drücken. Denkt man sich die Zentrifugalkräfte in den Schwerpunkten der Lamellenflächen angreifend, so haben diese Schwerpunkte folgende Umfangsgeschwindigkeiten:

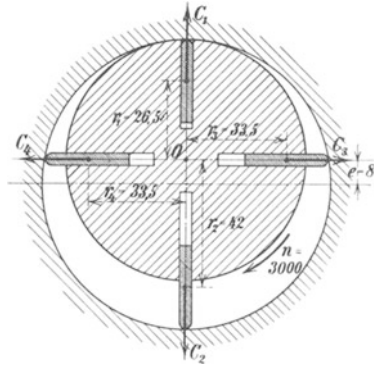


Abb. 264. Die Zentrifugalkraft der Drehkolbenlamellen.

$$v_1 = \frac{2\pi \cdot r_1 \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 0,0265 \cdot 3000}{60}$$

$$= 8,32 \text{ m/sek,}$$

$$v_2 = \frac{2\pi \cdot r_2 \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 0,042 \cdot 3000}{60}$$

$$= 13,2 \text{ m/sek,}$$

$$v_3 = v_4 = \frac{2\pi \cdot r_3 \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 0,0335 \cdot 3000}{60} = 10,5 \text{ m/sek.}$$

Die Zentrifugalkräfte der Lamellen haben folgende Größen (Lamellengewicht = 100 g):

$$C_1 = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{0,100}{9,81} \cdot \frac{8,32^2}{0,0265} = 26,1 \text{ kg,}$$

$$C_2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{0,100}{9,81} \cdot \frac{13,2^2}{0,042} = 41,4 \text{ ,,}$$

$$C_3 = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_3^2}{r_3} = \frac{0,100}{9,81} \cdot \frac{10,5^2}{0,0335} = 32,9 \text{ ,,}$$

$$C_4 = C_3 = 32,9 \text{ ,,}$$

---


$$\text{Gesamtzentrifugalkraft } C = 133,3 \text{ kg.}$$

Diese Kraft  $C$  bremst an der Gehäusewand, so daß bei einer bestimmten Tourenzahl die ganze Energie der Maschine durch innere Bremsarbeit aufgezehrt wird. Bei einem Versuch wurde z. B.  $n = 4000/\text{min}$  als höchste erreichbare Umdrehungszahl bei Leerlauf gefunden.

Daher war man bestrebt, die Lamellen abzufangen, indem man zwei Laufringe um die Lamellen legte, die in Kugellagern gegen das feste Gehäuse abgestützt waren. Aber auch diese Maßnahme ist nicht vollkommen. Bei dem Motor Abb. 265 bleibt ein Druck der Lauf-  
ringe nach unten hin, denn nach unten zieht die größte Zentrifugalkraft  $C_2$ . Die Druckdifferenz ist

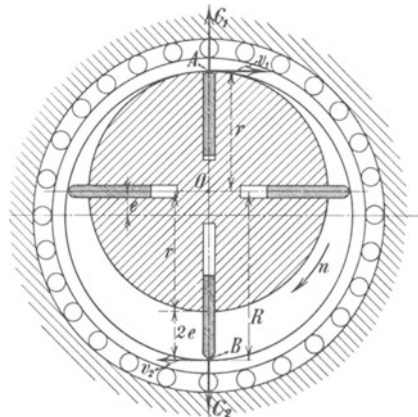


Abb. 265. Aufnahme der Zentrifugalkräfte durch Ringe, auf Kugeln laufend.

$$C_2 - C_1 = 41,4 \text{ kg} - 26,1 \text{ kg} = 15,3 \text{ kg.}$$

Der Laufring wird mit dieser Kraft nach unten gegen das Gehäuse gedrückt und erzeugt ebenfalls Reibungsarbeit, die natürlich erheblich kleiner wie bei nicht abgefangenen Lamellen ist. Bei einem Versuch wurde z. B.  $n = 7500/\text{min}$  als höchste erreichbare Umdrehungszahl bei Leerlauf gefunden.

Auch die Schleifarbeit der Lamellen hört bei der Ringanordnung, Abb. 265, nicht auf. Die obere Lamelle hat die Umfangsgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{2\pi r \cdot n}{60},$$

die untere die Umfangsgeschwindigkeit

$$v_2 = \frac{2\pi R \cdot n}{60} = \frac{2\pi(r + 2e) \cdot n}{60}.$$

Demnach ergibt sich eine Geschwindigkeitsdifferenz

$$v_2 - v_1 = \frac{2\pi r \cdot n + 2\pi \cdot 2en - 2\pi r \cdot n}{60},$$

$$v_2 - v_1 = \frac{4\pi \cdot e \cdot n}{60}.$$

Da die untere Lamelle schärfer gegen den Ring drückt als die obere, wird der Laufring die größere Geschwindigkeit  $v_2$  annehmen, so daß der Ring über die Lamellen klettert, er schleift, indem er eine Relativbewegung gegenüber der langsamer laufenden oberen Lamelle macht. Diese Schleifbewegung wächst proportional mit der Exzentrizität  $e$ . Daher wird man bestrebt sein müssen, den Wert  $e$ , d. h. den Sichelraum möglichst klein zu halten und die erforderliche Druckfläche der Lamellen durch eine entsprechende Breitenausdehnung der Lamellen zu erzielen.

Für  $e = 8 \text{ mm}$  und  $n = 3000$  wird z. B.

$$v_2 - v_1 = \frac{4\pi \cdot 0,008 \cdot 3000}{60} = 5 \text{ m/sek.}$$

Das ist schon ein Betrag, der recht bedeutend ist.

#### Die Bahnkurve einer Schienenbahn.

Beim Durchfahren einer Kurve macht sich der Einfluß der Zentrifugalkraft geltend. Man muß die Schwellen gegen die Horizontale geneigt verlegen, wenn der Spurkranz des Wagens keinen Seitendruck gegen die Schienen ausüben sollen. Aus Abb. 266 ersieht man, daß im Schwerpunkt des beladenen Wagens zwei Kräfte angreifen

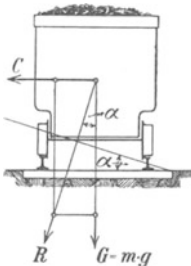


Abb. 266. Der Förderwagen in der Kurve.

1. das Wagengewicht  $G = m \cdot g$ ,
2. die Zentrifugalkraft  $C = m \cdot \frac{v^2}{r}$ .

Aus dem Kräftedreieck folgt

$$\text{tg } \alpha = \frac{C}{G} = \frac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

Die Schwellen müssen um diesen Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale geneigt werden, wenn die Resultierende  $R$  der beiden Kräfte senkrecht zur Schwellenlage verlaufen soll. Aus Abb. 267 ergibt sich die Größe  $h$ , um

welche die außenliegende Schiene gegen die innen liegende überhöht werden muß:

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha \quad \text{oder} \quad h = b \cdot \sin \alpha.$$

**Beispiel:** Bestimme die Schienenüberhöhung einer Grubenbahn, die eine Kurve von  $r = 8 \text{ m}$  Radius mit  $v = 2 \text{ m/sek}$  durchfahren soll.

**Lösung:**

$$\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{2^2}{8 \cdot 9,81} = 0,0510,$$

$$\alpha = 3^\circ$$

Schienenweite  $b = 800 \text{ mm}$ ,

$$h = b \cdot \sin \alpha = 800 \cdot 0,052 = \sim 42 \text{ mm}.$$

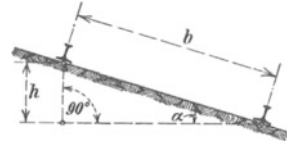


Abb. 267. Bahnneigung in der Kurve.

Der Schwungkugelregulator (Abb. 268).

An einer senkrechten Welle sind zwei Kugeln an Pendelstangen aufgehängt. Bei einer Drehung der Welle tritt zu der Gewichtskraft  $G$  der Kugel noch die Zentrifugalkraft der sich drehenden Kugel hinzu. Die Kugel schwingt nach außen. Zentrifugalkraft  $C$  und Kugelgewicht  $G$  bilden zusammen eine Resultierende  $R$ , und es herrscht erst dann wieder Gleichgewicht, wenn die Resultierende durch den festen Aufhängepunkt  $A$  des Pendels geht. Das ist der Fall, wenn die Richtung der Resultierenden in die Richtung der Pendelstange fällt, alsdann ist

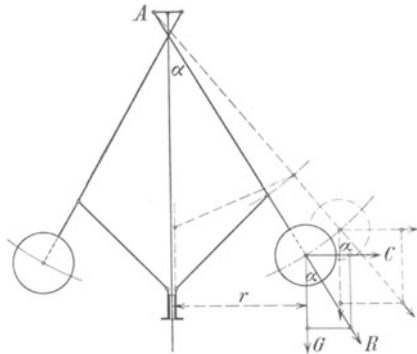


Abb. 268. Der Schwungkugelregulator.

$$\text{tg } \alpha = \frac{C}{G} = \frac{v^2}{r \cdot g}.$$

Wird die Geschwindigkeit  $v$  größer, so muß auch  $\text{tg } \alpha$  bzw. der Winkel  $\alpha$  größer werden, d. h. die Kugel schwingt höher und nimmt die angehängte Hülse mit, diese verstellt die Steuerung der Maschine, so daß ein Durchgehen der Maschine bei Abnahme der Belastung verhindert wird. Nach demselben Prinzip arbeiten auch die Tachometer (Geschwindigkeitsmesser), die Hülse geht hoch und schreibt mit einem Schreibstift die Geschwindigkeit als Ordinatengröße auf.

Ist in Abb. 269  $h$  die Aufhängehöhe des Pendels und  $r$  der Radius des Drehkreises, so ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{r}{h} \quad \text{und} \quad h = \frac{r}{\text{tg } \alpha}.$$

Mit  $\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{r \cdot g}$  wird

$$h = \frac{r^2 \cdot g}{v^2}, \quad v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2 \cdot n^2}{60^2},$$

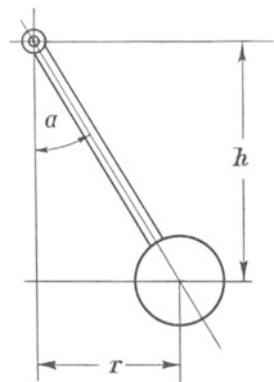


Abb. 269. Die Pendelhöhe  $h$ .

$$h = \frac{r^2 \cdot g \cdot 3600}{4 \pi^2 \cdot r^2 \cdot n^2} = \frac{883}{n^2}.$$

Die Formel lehrt, daß die Pendelhöhe  $h$  nur von der Drehzahl beeinflusst wird, sie ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Drehzahlen.

**Beispiel:** Bei welcher Drehzahl beginnt ein Pendel von 0,50 m Pendelhöhe zu steigen?

Das Pendel beginnt die Steigung bei der Drehzahl

$$n = \sqrt{\frac{883}{h}} = \sqrt{\frac{883}{0,50}} = 42/\text{min}.$$

**Beispiel:** Welche Hubhöhe macht das Pendel, wenn die Drehzahl auf  $n = 50/\text{min}$  steigt?

Die neue Pendelhöhe wird

$$h = \frac{883}{n^2} = \frac{883}{50^2} = 0,35 \text{ m}.$$

Das Pendel macht also die Hubhöhe

$$\Delta h = 0,50 - 0,35 = 0,15 \text{ m}.$$

### Das Kreisrad als Pumpe.

Die Wirkung der Kreisräder bei den Zentrifugal- oder Schleuderpumpen beruht auf der Schleuderkraft einer in Drehung versetzten Wassermasse. In

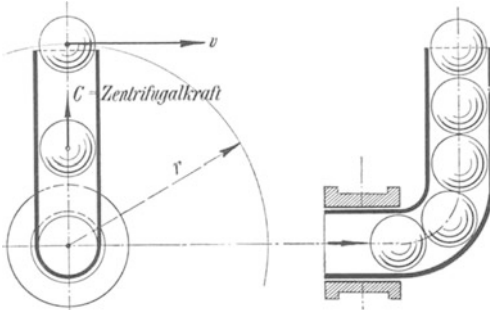


Abb. 270. Rohrkrümmer in Drehung.

Abb. 270 ist ein Rohrkrümmer mit seinem kurzen Schenkel drehbar gelagert, der lange Schenkel wird in Drehung versetzt. Eine zentral einströmende Wasserkugel von der Masse  $m$  wird nach außen geschleudert. Die Zentrifugalkraft ist

1. im Mittelpunkt der Drehbewegung  $C_1 = 0$ ,
2. am Umfang  $C_2 = m \cdot \frac{v^2}{r}$ ,

---


$$\text{Mittelwert } C = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Da die Wasserkugel hierbei den Weg  $r$  zurücklegt, wird die Arbeit der Zentrifugalkraft

$$A_1 = C \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Die Wasserkugel macht aber nicht allein eine radiale Bewegung, sie macht auch eine Kreisbewegung und erhält am Ausgang des Rohres die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  m/sek. Damit hat sie ein zweites Arbeitsvermögen (siehe nachstehendes Kapitel lebendige Kraft) gewonnen von der Größe

$$A_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Die von der Rohrschaufel auf die Wasserkugel übertragene Arbeit ist zusammen

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

oder

$$A = m \cdot v^2. \quad (1)$$

Diese Arbeit kann von der Wasserkugel wieder abgegeben werden, indem sie einen Druckwiderstand überwindet. Ist  $G$  das Gewicht der Wasserkugel in kg und  $H$  die zu überwindende Druckhöhe in m, so ist die Widerstandsarbeit

$$A = G \cdot H. \tag{2}$$

Setzt man (2) gleich (1), so ist

$$G \cdot H = m \cdot v^2 = \frac{G}{g} \cdot v^2$$

oder 
$$H = \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{10} \text{ m Wassersäule.}$$

**Ergebnis:** Die zu überwindende Druckhöhe wächst und fällt proportional mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit des Kreisellrades.

Der in Abb. 270 dargestellte Rohrkrümmer entspricht einem Schaufelrad mit radialer Schaufelendigung. Das Austrittsparallelogramm für die radial endigende Schaufel ist im 1. Bild der Abb. 271 gezeigt. Die relative Austrittsgeschwindigkeit  $w$  ist im Verhältnis zur Umfangsgeschwindigkeit  $v$  immer sehr klein, und da der Schaufelwinkel  $\beta = 90^\circ$  ist, wird die absolute Austrittsgeschwindigkeit ungefähr

$$c = v.$$

Die für die theoretische Druckhöhe abgeleitete Formel schreibt sich dann

$$H = \frac{c^2}{10} = \frac{v^2}{10} \text{ m Wassersäule.}$$

Im 2. Bild ist die vorwärts gekrümmte Schaufel mit derselben Umfangsgeschwindigkeit  $v$  und derselben radialen Relativgeschwindigkeit  $w_r = w$  gezeichnet. Das Austrittsparallelogramm liefert nun für die absolute Austrittsgeschwindigkeit einen Wert  $c > v$ . Ist z. B.  $c = 1,20 \cdot v$ , so ist die erreichbare Druckhöhe mit

$$H = \frac{c^2}{10} = \frac{(1,2 \cdot v)^2}{10} \text{ m Wassersäule}$$

größer geworden.

Im 3. Bild ist unter denselben Verhältnissen eine rückwärts gekrümmte Schaufel und das Austrittsparallelogramm gezeichnet. Es

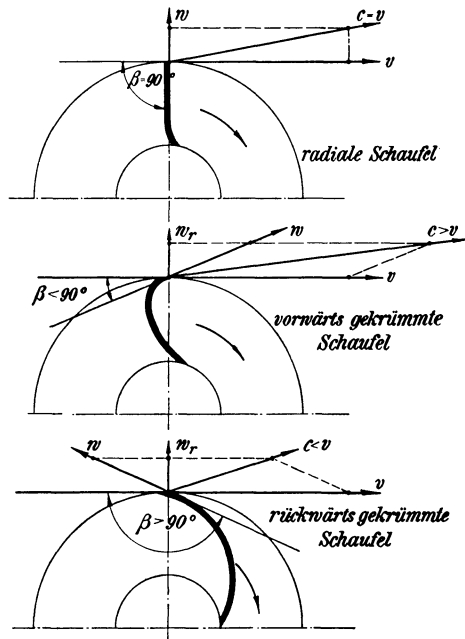


Abb. 271. Schaufelräder mit verschiedener Schaufelendigung.

wird  $c < v$ , ist z. B.  $c = 0,80 v$ , so ist die erreichbare Druckhöhe mit

$$H = \frac{c^2}{10} = \frac{(0,80 \cdot v)^2}{10} \text{ m Wassersäule}$$

kleiner geworden.

**Ergebnis:** Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit liefert die vorwärts gekrümmte Schaufel die größte, die radiale Schaufel eine mittlere und die rückwärts gekrümmte Schaufel die kleinste Druckhöhe.

## 26. Das Prinzip der lebendigen Kraft (Wucht).

Ein in Bewegung befindlicher Körper kann beim Auftreffen auf einen Widerstand Arbeit leisten, so schlägt der niederfallende Hammer zum Beispiel einen Nagel ein und ein Geschoß durchschlägt eine Wand.

Die Wirkung ist um so besser, je größer die Aufschlaggeschwindigkeit ist.

Eine Kugel, Abb. 272, werde durch eine konstante Kraft  $K$  vorwärts getrieben, dann wird sie die Beschleunigung  $b$  annehmen. Nach dem Weg  $s$  ist ihre Geschwindigkeit von  $c$  auf  $v$  gestiegen und nach unserer früheren Bewegungsformel ist

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2b} = \frac{v^2 - c^2}{2} \cdot \frac{1}{b}.$$

Abb. 272. Beschleunigung und Verzögerung einer Kugel.

Nach dem Beschleunigungsgesetz ist, wenn  $m = \frac{G}{g}$  die Masse der Kugel bedeutet,

$$b = \frac{K}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{b} = \frac{m}{K}.$$

Hiermit wird

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2} \cdot \frac{m}{K},$$

$$K \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}.$$

Man nennt den Ausdruck  $\frac{m \cdot v^2}{2}$  und  $\frac{m \cdot c^2}{2}$  die lebendige Kraft,

Wucht oder kinetische Energie des Körpers in dem jeweiligen Bewegungszustand. Das Produkt  $K \cdot s$  ist die von der Kraft  $K$  verrichtete mechanische Arbeit. Die Gleichung lautet daher als Lehrsatz:

Die mechanische Arbeit, welche eine auf einen Körper wirkende Kraft verrichtet, ist eben so groß wie die Zunahme der lebendigen Kraft des Körpers.

Die Gleichung zeigt, daß zwischen der mechanischen Arbeit und der lebendigen Kraft eine gewisse Gleichwertigkeit besteht, daß die eine gleichsam in die andere umgewandelt wird.

In gleicher Weise kann ein Körper, Abb. 272, der mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  sich bewegt, durch eine konstante Widerstandskraft  $W$

verzögert werden, so daß nach dem Weg  $s$  die Geschwindigkeit sich auf den Betrag  $c$  vermindert hat. In diesem Fall ist

$$W \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}$$

und man kann sagen:

Widerstand  $\times$  Weg = verbrauchte lebendige Kraft.

Das Prinzip der lebendigen Kraft verwendet die Technik bei vielen Arbeitsvorgängen, hierfür einige Beispiele.

Der Vorschub der Kohle in der Schüttelrutsche.

Die Rutsche wird nach Erreichung der Höchstgeschwindigkeit  $v$  plötzlich angehalten und zurückgezogen. Das Kohlenstück (Abb. 273) rutscht aber in der Bewegungsrichtung vermöge seiner lebendigen Kraft um den Weg  $s$  weiter.

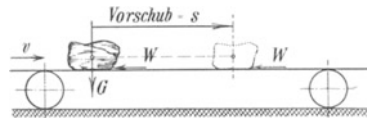


Abb. 273. Der Vorschub der Kohle.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = W \cdot s,$$

wo  $W = \mu \cdot G$  = Reibungswiderstand der Kohle,

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \mu \cdot G \cdot s,$$

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \mu},$$

z. B.  $v = 1,20$  m/sek,  $\mu = 0,30$ ,

$$s = \frac{1,20^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,30} = 0,245 \text{ m.}$$

Demnach erreicht man bei der Rutsche einen guten Vorschub des Materials, wenn man der Rutsche eine hohe Endgeschwindigkeit  $v$  gibt, denn der Vorschub nimmt mit dem Quadrat der Endgeschwindigkeit zu. Der Vorschub ist umgekehrt proportional der Reibungsziffer  $\mu$ , daher gleitet die Kohle um so besser vorwärts, je glatter das Rutschenblech ist.

Die Endgeschwindigkeit  $v$  wird erreicht, nachdem die Kohle bereits um den Rutschenhub  $h$  vorgetragen ist, so daß die Kohle bei jedem Rutschenhub um den Betrag

$$S = h + s$$

sich vorschiebt. Der Vorschubweg  $S$  der Kohle ist daher bei guter Rutschenförderung immer größer als der Rutschenhub  $h$ .

Ist in obigem Beispiel der Rutschenhub  $h = 0,35$  m gewesen, so ist das Material um

$$S = h + s = 0,35 + 0,245 = 0,595 \text{ m}$$

vorgerückt. Bei  $n = 50$  minutlichen Rutschenhuben ist der stündliche Vorrutschweg

$$L = 60 \cdot n \cdot S = 60 \cdot 50 \cdot 0,595 = 1785 \text{ m.}$$

Ist die Beladung der Rutsche  $p = 30$  kg/m, so ist das stündliche Fördergewicht

$$G = p \cdot L = 30 \cdot 1785 = 53550 \text{ kg/h} \sim 53 \text{ t/h.}$$

## Die Schlagarbeit der Drucklufthammer.

Beim Drucklufthammer wird der Schlagkolben mit großer Geschwindigkeit gegen das Werkzeug gestoßen, hierbei wird die lebendige Kraft des Kolbens in mechanische Schlagarbeit umgesetzt.

Besitzt der Kolben, dessen Masse  $m$  ist, im Augenblick des Aufschlagens die Geschwindigkeit  $v$ , so ist seine lebendige Kraft oder sein Arbeitsvermögen

$$A = \frac{m \cdot v^2}{2} \text{ mkg.}$$

Dieses Arbeitsvermögen ist die Schlagarbeit des Einzelschlages. Macht der Hammer  $n$  Schläge je min, so ist seine sekundliche Arbeitsleistung

$$L = \frac{A \cdot n}{60} \text{ mkg/sek}$$

oder seine Leistung in PS

$$N = \frac{A \cdot n}{60 \cdot 75}.$$

**Beispiel:** Wie groß ist die Schlagleistung eines Abbauhammers, der folgende Verhältnisse hat:

Kolbendurchmesser  $d = 35$  mm, Schlaghub  $s = 115$  mm,

Kolbengewicht  $G = 0,745$  kg,

wenn bei 4 atü Eintrittsspannung die mittlere Druckluftspannung 2,92 atü ist?

**Lösung:**

$$\text{Kolbenkraft } P = \frac{\pi}{4} \cdot 3,5^2 \cdot 2,92 = 28 \text{ kg,}$$

$$\text{Kolbenmasse } m = \frac{G}{g} = \frac{0,745}{9,81} = 0,076,$$

$$\text{Kolbenbeschleunigung } b = \frac{P}{m} = \frac{28}{0,076} = 368 \text{ m/sek}^2.$$

$$\text{Der Schlaghub dauert } t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,115}{368}} = 0,025 \text{ Sekunden.}$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit ist  $v = b \cdot t_1 = 368 \cdot 0,025 = 9,2$  m/sek.

Die Einzelschlagleistung ist also

$$A = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{0,076 \cdot 9,2^2}{2} = 2,71 \text{ mkg.}$$

Um die Schlagzahl zu bestimmen, muß auch die Zeit  $t_2$  für den Rücklauf des Kolbens bekannt sein. Der Rücklauf erfordert erfahrungsgemäß wegen stärkerer Drosselung der Luft 10% mehr Zeit, also ist

$$t_2 = 1,10 \cdot 0,025 = 0,0275 \text{ sek.}$$

Der volle Schlag dauert also

$$t = t_1 + t_2 = 0,025 + 0,0275 = 0,0525 \text{ sek.}$$

$$\text{Schlagzahl} = n = \frac{60}{t} = \frac{60}{0,0525} = 1142/\text{min.}$$

Die Schlagleistung in PS ist daher

$$N = \frac{A \cdot n}{60 \cdot 75} = \frac{2,71 \cdot 1142}{4500} = 0,69 \text{ PS.}$$

Wie ändert sich die Hammerleistung, wenn der Kolbendurchmesser vergrößert wird?

Läßt man die Kolbenlänge konstant, dann verhalten sich die Kolbengewichte wie die Quadrate der Kolbendurchmesser. Macht man

$$d_2 = 2 \cdot d_1,$$



dann ist

$$G_2 = G_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = G_1 \cdot \frac{(2d_1)^2}{d_1^2} = 4 \cdot G_1.$$

Die Kolbenkräfte wachsen in gleichem Maße. Es ist

$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 4 \cdot P_1.$$

Die Kolbenbeschleunigungen sind

$$b_1 = \frac{P_1 \cdot g}{G_1} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{P_2 \cdot g}{G_2} = \frac{4 \cdot P_1 \cdot g}{4 \cdot G_1} = b_1.$$

Die Kolbenbeschleunigungen bleiben also gleich. Sind die Beschleunigungen die gleichen, so sind auch bei demselben Kolbenweg die Schlagzahlen und Schlaggeschwindigkeiten die gleichen. Also ist

$$n_2 = n_1 \quad \text{und} \quad v_2 = v_1.$$

Die Arbeitswerte für den Einzelschlag sind:

$$A_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2},$$

$$m_2 = 4 m_1, \quad v_2 = v_1,$$

$$A_2 = \frac{4 \cdot m_1 \cdot v_1^2}{2} = 4 \cdot A_1 = 2^2 \cdot A_1.$$

Die PS-Leistungen sind:

$$N_1 = \frac{n_1 \cdot A_1}{60 \cdot 75} \quad \text{und} \quad N_2 = \frac{n_2 \cdot A_2}{60 \cdot 75} = \frac{n_1 \cdot 2^2 \cdot A_1}{60 \cdot 75} = 2^2 \cdot N_1.$$

Berechnet man dieselben Werte für eine Durchmesservergrößerung auf das 3- und 4-fache, so erhält man zusammengefaßt die nachstehenden Zahlenwerte:

Leistungsänderungen durch Durchmesservergrößerung.

Kolbendurchmesser	$d_1$	$d_2 = 2 \cdot d_1$	$d_3 = 3 \cdot d_1$	$d_4 = 4 \cdot d_1$
Schlagzahl . . . . .	$n_1$	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$	$n_4 = n_1$
Einzelschlagarbeit . . . . .	$A_1$	$A_2 = 2^2 \cdot A_1$	$A_3 = 3^2 \cdot A_1$	$A_4 = 4^2 \cdot A_1$
PS-Leistung . . . . .	$N_1$	$N_2 = 2^2 \cdot N_1$	$N_3 = 3^2 \cdot N_1$	$N_4 = 4^2 \cdot N_1$

**Ergebnis:** Vergrößert man bei gleichbleibender Kolbenlänge und gleichbleibendem Schlaghub das Kolbengewicht durch  $n$ -fache Vergrößerung des Kolbendurchmessers, so bleiben die Schlagzahlen konstant, dagegen wachsen Einzelschlagleistung und PS-Leistung auf das  $n^2$ -fache.

Die Durchmesservergrößerung ist daher ein sehr wirksames Hilfsmittel, um die Leistung des Hammers bedeutend zu steigern. Sie läßt sich aber bei Abbauhämmern nur in engen Grenzen ausnutzen, weil mit ihr der Rückstoß des Hammers in gleichem Maße wächst.

Wie ändert sich die Hammerleistung, wenn der Schlaghub vergrößert wird?

Es sollen zwei gleiche Hämmer mit dem Hub  $s_1$  und  $s_2 = 2s_1$  untersucht werden. Da die Durchmesser gleich sind, so sind bei gleichen Kolbengewichten auch die Kolbenbeschleunigungen gleich. Folglich

sind die Kolbenwege

$$s_1 = \frac{1}{2} b \cdot t_1^2 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{1}{2} b \cdot t_2^2 \quad \text{oder} \quad b = \frac{2s_1}{t_1^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{2s_2}{t_2^2},$$

damit ist

$$\frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2s_2}{t_2^2} = \frac{2 \cdot 2s_1}{t_2^2} \quad \text{oder} \quad t_2^2 = \frac{4s_1}{2s_1} \cdot t_1^2 = 2 \cdot t_1^2,$$

$$t_2 = t_1 \cdot \sqrt{2}.$$

Die Schlagzahlen sind

$$n_1 = \frac{60}{t_1} \quad \text{und} \quad n_2 = \frac{60}{t_2} = \frac{60}{t_1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{n_1}{\sqrt{2}}.$$

Die Schlaggeschwindigkeiten sind

$$v_1 = b \cdot t_1 \quad \text{und} \quad v_2 = b \cdot t_2 = b \cdot t_1 \cdot \sqrt{2} = v_1 \cdot \sqrt{2},$$

hiermit werden die Einzelschlagleistungen

$$A_1 = \frac{m \cdot v_1^2}{2} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} = \frac{m \cdot v_1^2 \cdot 2}{2} = 2 \cdot A_1$$

und die PS-Leistungen

$$N_1 = \frac{A_1 \cdot n_1}{60 \cdot 75} \quad \text{und} \quad N_2 = \frac{A_2 \cdot n_2}{60 \cdot 75} = \frac{2A_1 \cdot n_1}{60 \cdot 75 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot N_1$$

$$\text{oder} \quad N_2 = \sqrt{2} \cdot N_1.$$

Rechnet man dasselbe für eine 3- und 4-fache Hubvergrößerung durch, so ergeben sich die Werte der nachstehenden Tabelle.

Leistungsänderungen durch Hubvergrößerung.

Schlaghub	$s_1$	$s_2 = 2s_1$	$s_3 = 3s_1$	$s_4 = 4s_1$
Schlagzahl . . . .	$n_1$	$n_2 = \frac{n_1}{\sqrt{2}}$	$n_3 = \frac{n_1}{\sqrt{3}}$	$n_4 = \frac{n_1}{\sqrt{4}}$
Einzelschlagarbeit .	$A_1$	$A_2 = 2A_1$	$A_3 = 3 \cdot A_1$	$A_4 = 4 \cdot A_1$
PS-Leistung . . .	$N_1$	$N_2 = \sqrt{2} \cdot N_1$	$N_3 = \sqrt{3} \cdot N_1$	$N_4 = \sqrt{4} \cdot N_1$

**Ergebnis:** Vergrößert man den Schlaghub auf das  $n$ -fache, so nimmt die Schlagzahl ab, sie sinkt auf den  $1:\sqrt{n}$ -fachen Betrag. Dagegen steigt die Schlagstärke (Einzelschlagarbeit) auf das  $n$ -fache, die PS-Leistung aber nur auf das  $\sqrt{n}$ -fache.

Am größten ist also die Steigerung der Schlagstärke. Daher ist die Hubvergrößerung ein wirksames Mittel, um einen besonders schlagkräftigen Hammer zu bauen. Solche Hämmer werden bekanntlich für die Arbeit in harter Kohle verlangt. Eine Vergrößerung des Rückstoßes findet nicht statt, er wird im Gegenteil kleiner werden, weil durch die längere Bauart des Hammers sein Gewicht und damit seine Masse größer wird<sup>1</sup>.

#### Die Fangvorrichtungen.

Die Körbe der für Seilfahrt zugelassenen Fördereinrichtungen sind mit Vorrichtungen ausgerüstet, die im Falle eines Seilbruchs den Korb an den Führungsschienen festbremsen sollen, um den Absturz zu verhindern. Hierbei muß die lebendige Kraft der niedergehenden Ge-

<sup>1</sup> Siehe Glückauf 1927, S. 12: „Die Mechanik der Abbauhämmer“.

wichte durch Bremsarbeit vernichtet werden. Mit welcher größten Verzögerung diese Bremskörper arbeiten dürfen, bestimmt die Bergpolizei-Verordnung. Sie schrieb zuerst eine größte Bremsverzögerung von  $b = 40 \text{ m/sek}^2$  vor und ist heute auf  $b = 30 \text{ m/sek}^2$  zurückgegangen.

Welche größte Verzögerung der menschliche Körper ohne schwere Schädigung aushalten kann, hat man aus folgender Überlegung gewonnen. Der letzte Weltrekord im Stabhochsprung betrug 4,20 m. Man kann also annehmen, daß der Körper einen Sprung in eine Tiefe von 4 m ertragen kann. Beim Auftreffen auf den Boden nimmt er den Anprall elastisch auf, indem er in die Kniebeuge geht. Der vertikale Kniebeugeweg ist dann sein Bremsweg, er betrage z. B.  $s = 1,00 \text{ m}$ . Nach Abb. 274 hat der Körper nach Durchfallen der Höhe  $h$  die Endgeschwindigkeit  $v$ , und es ist  $v^2 = 2gh$ .

Diese Geschwindigkeit  $v$  ist die Anfangsgeschwindigkeit für den Bremsweg  $s$ , sie verzögert sich mit der Bremsverzögerung  $b$  bis auf Null, also ist auch  $v^2 = 2bs$ .

Durch Gleichsetzung beider Werte erhalten wir

$$2bs = 2gh,$$

$$b = \frac{g \cdot h}{s} = \frac{9,81 \cdot 4}{1,00} = 39,2 \text{ m/sek}^2.$$

Das Aufnehmen dieser großen Verzögerung geschieht beim Sprung bewußt, beim Abstürzen eines Förderkorbes wird diese Überlegung aber fehlen, und mit Rücksicht hierauf hat man die Verzögerung auf  $b = 30 \text{ m/sek}^2$  heruntergesetzt.

Es sei im folgenden

- $G$  = Gewicht der abstürzenden Massen in kg,
- $v$  = Fallgeschwindigkeit im Augenblick des Eingreifens der Fangbremsvorrichtung in m/sek,
- $s$  = Bremsweg in m,
- $W$  = Bremswiderstand der gesamten Bremskörper in kg,

dann muß die lebendige Kraft der fallenden Massen und die von dem fallenden Gewicht der Massen auf dem Bremsweg geleistete Arbeit durch den Widerstand  $W$  an den Spurlatten aufgezehrt werden. Also ist

$$\frac{G \cdot v^2}{g \cdot 2} + G \cdot s = W \cdot s. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich der Widerstand  $W$ .

Für die in Abb. 275 angegebenen Massen soll die Rechnung durchgeführt werden, und zwar für den gefährlichsten Fall, daß der niedergehende Korb, welcher mit  $c = 8 \text{ m/sek}$  fährt, abreißt. Die Gewichte der Massen sind

- 1. Förderkorb = 10000 kg
  - 2. 70 Personen = 5250 „
  - 3. Seilgewicht = 10000 „
- 
- Gesamtgewicht  $G = 25250 \text{ kg}$ .

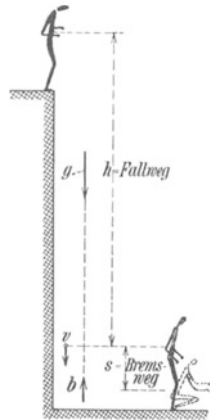


Abb. 274. Die Bremsverzögerung beim Sprung.

Das Auflösen der Fangvorrichtung erfordert Zeit. Nimmt man an, daß die Sturzzeit bis zum Eingreifen der Fänger

$$t = 1 \text{ sek}$$

dauert, so hat der Korb in diesem Augenblick die Fallgeschwindigkeit

$$v = c + g \cdot t = 8 + 9,81 \cdot 1 = \sim 18 \text{ m/sek.}$$

Der freie Fallweg des Korbes beträgt dann schon

$$s = c \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 = \sim 13 \text{ m.}$$

Sollen die Massen mit

$$b = 30 \text{ m/sek}^2$$

verzögert werden, so ist erforderlich ein Bremsweg von der Größe

$$s = \frac{v^2}{2b} = \frac{18^2}{2 \cdot 30} = 5,4 \text{ m.}$$

Mit diesen Werten erhält man nach Gleichung (1)

$$\frac{25250 \cdot 18^2}{9,81 \cdot 2} + 25250 \cdot 5,4 = W \cdot 5,4,$$

$$W = 102500 \text{ kg.}$$

Bei 2 Spurlatten und doppelten Fängen an jeder Spurlatte hat ein Fänger den Widerstand

$$\frac{W}{4} = \frac{102500}{4} = 25600 \text{ kg}$$

aufzubringen.

Das sind außerordentlich große Kräfte, die den ganzen Schachteinbau zerstören können. Sind die Widerstandskräfte kleiner, so wächst proportional der Bremsweg. Das wäre an sich nicht schlimm, denn je länger der Bremsweg ist, um so sanfter wird der Korb stillgesetzt, und um so weniger werden Verletzungen von Personen vorkommen.

Das gleiche Ergebnis läßt sich einfacher durch folgende Überlegung gewinnen. Wenn der Korb mit der Fallbeschleunigung  $g$  fällt, und die Fangfinger mit der Gegenbeschleunigung  $b_1$  arbeiten, wird der Korb mit der Verzögerung

$$b_1 - g = b$$

zur Ruhe kommen. Soll  $b = 30 \text{ m/sek}^2$  sein, so ist

$$b_1 = b + g = 30 + 9,81 = 39,81 \text{ m/sek}^2,$$

Widerstandskraft = Masse  $\times$  Verzögerung

$$\begin{aligned} W &= \frac{G}{g} \cdot b_1 \\ &= \frac{25250}{9,81} \cdot 39,81 = 102500 \text{ kg,} \end{aligned}$$

also

$$\frac{W}{4} = \frac{102500}{4} = 25600 \text{ kg.}$$

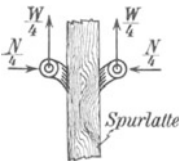
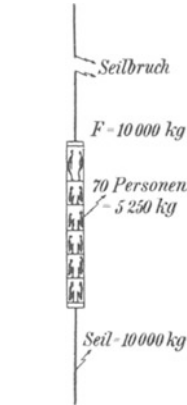


Abb. 275. Der Absturz eines Förderkorbes.

Das ist der gleiche Wert, der vorstehend auch gefunden wurde. Jede Spurlatte hätte also die Kraft

$$2 \cdot \frac{W}{4} = 2 \cdot 25600 = 51200 \text{ kg}$$

aufzunehmen.

Nachstehend sind die errechneten Werte für Bremsverzögerungen von  $b = 5$  bis  $30 \text{ m/sek}^2$  angegeben.

$b$ in $\text{m/sek}^2$	Bremsweg $s$ in m	Bremswiderstand $W$ in kg	$W/4$ in kg Fängerbelastung
5	32,40	38200	9550
10	16,20	51200	12800
15	10,80	64000	16000
20	8,10	77000	19250
25	6,48	90000	22500
30	5,40	102500	25600

Bei der Bremsverzögerung von  $5 \text{ m/sek}^2$  ist demnach schon nach  $32,4 \text{ m}$  Bremsweg der Korb zum Stillstand gebracht und die Fängerbelastung ist hierbei nur  $9550 \text{ kg}$ . Es müßte daher die Möglichkeit bestehen, den Korb an den Spurlatten nicht durch Zerfleischen des Holzes sondern durch Bremsdruck elastisch aufzufangen. Läßt man Holz auf Holz reiben, so wird die Reibungsziffer etwa  $\mu = 0,48$  sein, so daß bei  $9550 \text{ kg}$  Reibungswiderstand ein Anpressungsdruck von

$$N = \frac{9550}{\mu} = \frac{9550}{0,48} = 20000 \text{ kg}$$

erforderlich sein würde. Man könnte Druckluft von  $50 \text{ atü}$  in Stahlflaschen mitführen, die auf 2 Bremszylinder wirkte. Unter Einschaltung einer Hebelübersetzung 1 : 2 würde die Kolbenfläche

$$F = \frac{N}{2 \cdot p} = \frac{20000}{2 \cdot 50} = 200 \text{ cm}^2$$

und der Kolbendurchmesser  $160 \text{ mm}$  werden.

## 27. Die lebendige Kraft umlaufender Scheiben — Trägheitsmoment — reduzierte Masse — Trägheitshalbmesser.

Bewegt sich ein Massenteilchen  $m$  (Abb. 276) mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn vom Radius  $r$ , so ist sein Arbeitsvermögen

$$A = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \text{ da } v = r \cdot \omega \text{ wird}$$

$$A = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot m \cdot r^2.$$

Man nennt die Größe  $m \cdot r^2$  das dynamische oder das Massenträgheitsmoment der umlaufenden Masse.

Bei umlaufenden Scheiben (Abb. 277) haben die einzelnen Massenscheiben ungleiche Geschwindigkeiten, die beim Aufstellen des Arbeitsvermögens zu berücksichtigen sind. Die mittlere Geschwindigkeit kann

nicht genommen werden, da wegen der Multiplikation mit  $r^2$  die äußeren Massenringe viel wirksamer als die inneren sind. Würde man Gewichtsteile von innen nach außen verschieben, so würde das Gesamtgewicht und die Masse unverändert bleiben, aber das Massenträgheitsmoment und damit das Arbeitsvermögen würde erheblich größer werden. Für die Scheibe der Figur ist das Arbeitsvermögen

$$A = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot v_3^2$$

$$\text{oder } A = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2).$$

Schreibt man

$$(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2) = \sum (m \cdot r^2)$$

(gesprochen Summe aller  $m \cdot r^2$ ), so ist

$$A = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum (m \cdot r^2).$$

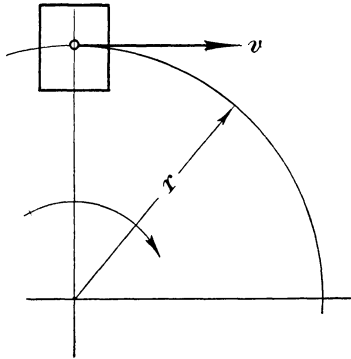


Abb. 276. Ein Massenteilchen auf kreisförmiger Bahn.

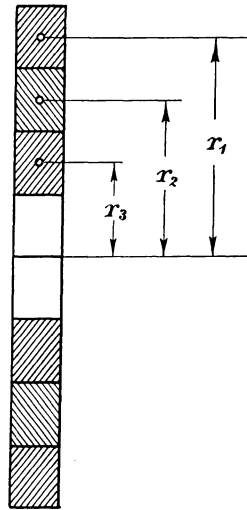


Abb. 277. Umlaufende Scheibe.

Der Ausdruck  $\sum (m \cdot r^2)$  stellt die Summe der Produkte aller Massen und der Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse dar und wird das Massenträgheitsmoment des Körpers in bezug auf diese Drehachse genannt.

Das Massenträgheitsmoment wird mit dem Buchstaben  $J_m$  bezeichnet, also ist

$$\sum (m \cdot r^2) = J_m.$$

Hiermit ist das Arbeitsvermögen der umlaufenden Scheibe

$$A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_m.$$

Die geometrischen und Massenträgheitsmomente der am häufigsten vorkommenden regelmäßigen Figuren sind bekannt, so ist z. B. das Trägheitsmoment einer Kreisfläche in bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Drehachse

$$J_m = \frac{\pi}{32} d^4.$$

Zur Berechnung der lebendigen Kraft bei der Drehbewegung eines Körpers muß man also vorher das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehachse feststellen.

Wenn in Abb. 278 die Massenteile des Körpers gleich weit von der Drehachse  $O$  entfernt liegen, so kann in der Gleichung

$$J_m = \sum (m \cdot r^2)$$

die Größe  $r^2$  als gemeinschaftlicher Faktor ausgeklammert werden, dann ist

$$J_m = r^2 \cdot \sum (m).$$

Die Summe aller Massenteilchen  $\sum (m)$  ist gleich der Gesamtmasse des Körpers  $M$ , also ist auch

$$J_m = r^2 \cdot M,$$

d. h. der ringförmige Körper wird sich in der Auswirkung seiner lebendigen Kraft genau so verhalten wie die Masse  $M$ , welche im Punkte  $A$  konzentriert gedacht werden kann. Den Abstand dieses Punktes  $A$  von der Drehachse nennt man den Trägheitshalbmesser des Körpers und die im Punkte  $A$  konzentrierte Masse die reduzierte Masse.

Man bezeichnet den Trägheitshalbmesser mit  $k$  und schreibt dann

$$J_m = k^2 \cdot M.$$

Allgemein versteht man unter dem Trägheitshalbmesser denjenigen Halbmesser, für welchen die reduzierte Masse gleiche Größe mit der wirklichen Masse des Körpers hat.

Hierfür ein Beispiel: In Abb. 279 sehen wir eine Massenscheibe, sie habe die Masse  $M$  und den Halbmesser  $r$ , es soll

1. die auf den Halbmesser  $r$  reduzierte Masse  $M_r$  der Scheibe und
2. der Trägheitshalbmesser  $k$  der Scheibe bestimmt werden. Als bekannt wird vorausgesetzt das Trägheitsmoment der Kreisfläche in bezug auf ihren Mittelpunkt, d. i. die Größe

$$J_m = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} \cdot (2r)^4 = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot r^2}{2},$$

nun ist  $r^2 \cdot \pi = M = \text{Flächenmasse der Scheibe}$  und damit wird

$$J_m = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = \frac{M \cdot r^2}{2}.$$

Die auf den Halbmesser  $r$  reduzierte Masse  $M_r$  der Scheibe findet man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke

$$J_m = M_r \cdot r^2 \quad \text{und} \quad J_m = \frac{M \cdot r^2}{2},$$

Damit wird 
$$M_r \cdot r^2 = \frac{M \cdot r^2}{2} \quad \text{oder} \quad M_r = \frac{M}{2}.$$

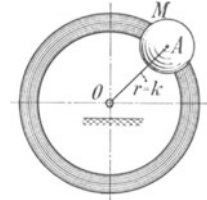


Abb. 278. Die gleichwertige Masse eines rotierenden Ringes.

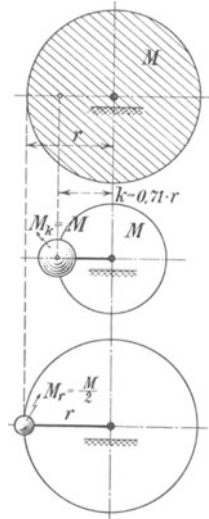


Abb. 279. Die rotierende Scheibe.

d. h. die auf den Umfang der Scheibe reduzierte Masse der Scheibe ist halb so groß wie die wirkliche Masse der Scheibe.

Will man die Masse auf den Trägheitshalbmesser  $k$  reduzieren, so muß sein

$$J_m = M_k \cdot k^2 = \frac{M \cdot r^2}{2}.$$

Gemäß der früheren Erklärung des Trägheitshalbmessers ist in diesem Fall

$$M_k = M,$$

also wird

$$k^2 = \frac{r^2}{2},$$

$$k = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot r.$$

Daraus schließen wir, daß in der Auswirkung der lebendigen Kraft einer Scheibe von der Masse  $M$

1. die Masse  $M_r = \frac{M}{2}$  am äußeren Radius  $r$ ,

2. die Masse  $M_k = M$  am Trägheitshalbmesser  $k = 0,71 \cdot r$  gleichwertig ist.

Ist der Trägheitshalbmesser eines Körpers bekannt, so kann man damit das Trägheitsmoment des Körpers errechnen, z. B. ist für die Scheibe

$$J_m = M_k \cdot k^2,$$

$$M_k = \text{Masse der Kreisfläche} = r^2 \cdot \pi,$$

$$k = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$J_m = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi}{32} \cdot d^4.$$

Umrechnung von Gewichten auf Seilmitte.

Bei umlaufenden Scheiben ist eine Beschleunigung der Drehbewegung durch eine Kraft aufzubringen, welche in ihrer Größe von der Masse der Scheibe abhängig ist. Die Masse der Scheibe denkt man sich am Trägheitshalbmesser  $k$  der Scheibe angreifend. Die Beschleunigungskraft kann an dieser Stelle aber nicht angreifen, sie wird in der Regel durch ein um die Scheibe geschlungenes Seil auf die Scheibe übertragen. In diesem Fall muß man diejenige Masse  $M_u$  oder dasjenige Gewicht  $G_u$  berechnen, welches am Umfangsradius dasselbe Arbeitsvermögen besitzt wie die wirkliche Masse  $M$  am Trägheitsradius. Mithin gilt die Bedingungsgleichung

$$M \cdot k^2 = M_u \cdot r^2 \quad \text{oder} \quad M_u = \left(\frac{k}{r}\right)^2 \cdot M,$$

entsprechend ist  $G \cdot k^2 = G_u \cdot r^2$ ,  $G_u = \left(\frac{k}{r}\right)^2 \cdot G$ .



Tafel der Trägheitshalbmesser (nach Weih),  $r$  = Seillaufradius bzw. Umfangsradius.

Art der Scheibe	Träg.-Halbm. $k$	$\frac{k}{r}$
Gleichdicke Scheiben (z. B. Schleifsteine) . . . . .	$0,71 \cdot r$	0,71
Schwungringe mit sehr leichten Armen <sup>1</sup> . . . . .	$0,71 \sqrt{r^2 - r_1^2}$	—
Illgner-Schwungscheiben (elektr. Förderung) . . . . .	$0,77 \cdot r$	0,77
Dampfmaschinen-Schwungräder (schwere Arme) . . . . .	$0,75 \cdot r$	0,75
Seilscheiben . . . . .	$0,71 \cdot r$	0,71
Zylindrische Fördertrommeln . . . . .	$0,66 \cdot r$	0,66
Spiraltrommeln . . . . .	$0,80 \cdot r$	0,80
Gewöhnliche Treibscheiben . . . . .	$0,71 - 0,73 \cdot r$	$0,71 - 0,73$
Treibscheiben mit breitem Kranz . . . . .	$0,75 - 0,77 \cdot r$	$0,75 - 0,77$

**Beispiel:** Welche Seilkraft ist nötig, um eine Seilscheibe von 6000 kg Gewicht mit der Beschleunigung  $b = 2 \text{ m/sek}^2$  in Bewegung zu setzen?

**Lösung:** Das auf den Umfang der Scheibe reduzierte Gewicht der Scheibe ist

$$G_u = \left(\frac{k}{r}\right)^2 \cdot G.$$

Nach Tabelle ist für Seilscheiben  $\frac{k}{r} = 0,71$ , also ist

$$G_u = 0,71^2 \cdot G = 0,50 \cdot G = 0,50 \cdot 6000 = 3000 \text{ kg.}$$

Demnach ist die Masse, welche am Seil zu beschleunigen ist,

$$M = \frac{G_u}{g} = \frac{3000}{9,81} = \sim 300.$$

Die erforderliche Seilkraft ist

$$K = M \cdot b = 300 \cdot 2 = 600 \text{ kg.}$$

**Beispiel:** Welches Arbeitsvermögen hat eine Seilscheibe von 7000 kg Gewicht, die bei 6 m Seillaufdurchmesser minutlich 56 Umdrehungen macht?

**Lösung:** Nach Tabelle ist  $k = 0,71 \cdot r = 0,71 \cdot \frac{6}{2} = 2,13 \text{ m}$ ,

$$J_m = k^2 \cdot M = 2,13^2 \cdot \frac{7000}{9,81} = 3240 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{m/sek}^2} = 3240 \text{ mkg} \cdot \text{sek}^2,$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 56}{30} = 5,87 \frac{1}{\text{sek}},$$

$$\text{Arbeitsvermögen } A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_m = \frac{5,87^2 \cdot 3240}{2} = 56000 \text{ mkg.}$$

Welche Verzögerungskraft muß am Seil wirken, wenn die Seilscheibe in 20 sek von ihrer Laufgeschwindigkeit zur Ruhe kommen soll?

$$\text{Laufgeschwindigkeit } v = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 56}{60} = 17,6 \text{ m/sek.}$$

$$\text{Verzögerung } b = \frac{v}{t} = \frac{17,6}{20} = 0,88 \text{ m/sek}^2,$$

<sup>1</sup>  $r_1$  = Innenradius des Ringes.

Die auf Seilmitte reduzierte Masse der Scheibe ist

$$M_r = M \left( \frac{k}{r} \right)^2,$$

nach Tabelle ist  $\frac{k}{r} = 0,71$

$$M_r = \frac{7000}{9,81} \cdot 0,71^2 = 360.$$

Verzögerungskraft  $P = M_r \cdot b = 360 \cdot 0,88 = 317 \text{ kg}$ .

**Beispiel:** Eine schwere Treibscheibe mit breitem Kranz von 6 m Seillaufdurchmesser wiege 45 t. Welche Beschleunigungskraft ist am Kurbelradius  $r = 0,90 \text{ m}$  aufzubringen, wenn die Seilgeschwindigkeit  $v = 20 \text{ m/sek}$  in 16 sek erreicht wird?

**Lösung:** Die auf Seilmitte reduzierte Treibscheibenmasse ist

$$M = \frac{G}{g} \cdot \left( \frac{k}{r} \right)^2,$$

nach Tabelle ist für Treibscheiben  $\frac{k}{r} = 0,77$

$$M = \frac{45000}{9,81} \cdot 0,77^2 = 2700,$$

Beschleunigung  $b = \frac{v}{t} = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ m/sek}^2,$

Beschleunigungskraft am Seil  $P = M \cdot b = 2700 \cdot 1,25 = 3380 \text{ kg},$

Beschleunigungskraft an der Kurbel  $K = P \cdot \frac{R}{r} = 3380 \cdot \frac{3,00}{0,90} = 11300 \text{ kg}.$

Fördermaschinen haben demnach zur Beschleunigung der Massen beim Anfahren große Kräfte aufzubringen.

## 28. Die Wirkung der Schwungräder.

Schwungräder sind Kraftspeicher. Sie werden auf Arbeitswellen gesetzt, um die ungleiche Arbeitsabnahme auszugleichen. Überwiegt an der Arbeitswelle der Kraftstoß der Antriebsmaschine, dann wird die Bewegung aller Massen eine Beschleunigung erfahren, auch das Schwungrad. Es kommt auf eine höhere Umfangsgeschwindigkeit und erhält dadurch eine größere kinetische Energie. Wird dagegen die abgenommene Energie größer, dann tritt eine Verzögerung der Massen ein. Das Schwungrad vermindert seine Umfangsgeschwindigkeit, seine kinetische Energie wird kleiner. Die Differenz dieser kinetischen Energie wird von der Arbeitswelle in Form von mechanischer Arbeit verbraucht.

In Abb. 280 hat die Schwungscheibe den äußeren Halbmesser  $r$ , ihr Trägheitshalbmesser ist  $k$ , d. h. die Wirkung der Scheibe in bezug auf ihr kinetisches Arbeitsvermögen ist genau so groß wie die gleichgroße Masse, welche im Abstände  $k$  von der Drehachse rotiert.

Nach unseren früheren Betrachtungen ist die kinetische Energie der Schwungscheibe

$$A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_m.$$

Vermindert die Scheibe ihre Umdrehungszahl von  $n_1$  auf  $n_2$ , so ändert sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , sie sinkt von  $\omega_1$  auf  $\omega_2$ . Hierbei wird die Differenz der lebendigen Kräfte in mechanische Arbeit umgesetzt. Das Arbeitsvermögen der Scheibe ist also

$$A = A_1 - A_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \cdot J_m.$$

Das Trägheitsmoment  $J_m$  der Scheibe ist bekanntlich

$$J = M \cdot k^2.$$

Hiermit wird

$$A = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \cdot M \cdot k^2.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten lassen sich durch die Umfangsgeschwindigkeiten des Massenpunktes am Radius  $k$  ersetzen. Es ist

$$\omega_1 = \frac{v_1}{k} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{k},$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{v_1^2}{k^2} - \frac{v_2^2}{k^2} \right) \cdot M \cdot k^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{k^2} \cdot M \cdot k^2 \\ &= \frac{1}{2} M \cdot (v_1^2 - v_2^2). \end{aligned}$$

Das Arbeitsvermögen einer Schwungscheibe ist demnach gleich der Differenz der lebendigen Kräfte seiner Masse, welche am Trägheitsradius  $k$  mit den Umfangsgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  rotiert.

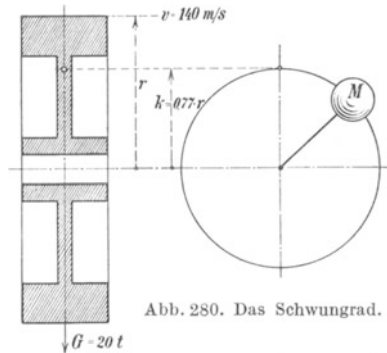


Abb. 280. Das Schwungrad.

**Das Schwungmoment:** Der Trägheitshalbmesser  $k$  ist bekanntlich die Länge des Halbmessers, in dessen Endpunkt die Masse eines Körpers vom Gewicht  $G$  konzentriert gedacht werden muß, um das gleiche Massen-Trägheitsmoment  $J_m$  zu geben, das der Körper besitzt. Setzt man

$$D_i = 2k \quad \text{oder} \quad k = \frac{D_i}{2},$$

so ist

$$J_m = \frac{G}{g} \cdot k^2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{D_i^2}{4}.$$

Man nennt

$$G \cdot D_i^2 = 4g \cdot J_m$$

das Schwungmoment. Das Schwungmoment  $G \cdot D_i^2$  wird beim Antrieb elektrischer Maschinen in einer bestimmten Größe vom Elektriker vorgeschrieben.

Wie groß muß das Schwungmoment eines Schwungrades sein, wenn es beim Fallen der Drehzahl von  $n_1$  auf  $n_2$  eine Arbeit von  $A$  mkg-leisten soll?

Bei der Drehzahl  $n_1$  ist die Winkelgeschw.  $\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30},$

„ „ „ „ „ „  $\omega_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{30}.$

Das Arbeitsvermögen des Schwungrades ist

$$\text{vor Abgabe der Arbeit} = A_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot J_m = J_m \cdot \frac{\pi^2 \cdot n_1^2}{1800},$$

$$\text{nach ,, ,, ,,} = A_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot J_m = J_m \cdot \frac{\pi^2 \cdot n_2^2}{1800}.$$

Also ist

$$A = A_1 - A_2 = J_m \cdot \frac{\pi^2}{1800} \cdot (n_1^2 - n_2^2),$$

$$J_m = \frac{G \cdot D_i^2}{g \cdot 4},$$

$$A = \frac{G \cdot D_i^2}{g \cdot 4} \cdot \frac{\pi^2}{1800} \cdot (n_1^2 - n_2^2),$$

$$\text{Schwungmoment} = G \cdot D_i^2 = \frac{7200 \cdot A}{n_1^2 - n_2^2}.$$

**Beispiel:** Das Schwungrad einer elektrischen Fördermaschinenanlage hat 4,40 m Durchmesser und wiegt 20 t. Es läuft mit einer Umfangsgeschwindigkeit von 140 m/sek. Beim Anfahren geht die Umdrehungszahl in 20 Sekunden um 15% zurück. Welche Arbeit schießt das Schwungrad dem Fördermotor zu?

**Lösung:** Zur Berechnung des Trägheitsmomentes muß der Trägheitshalbmesser  $k$  bekannt sein. Nach unserer Tabelle (Weih) ist

$$k = 0,77 \cdot r = 0,77 \cdot 2,2 = 1,69 \text{ m.}$$

Das Trägheitsmoment der Schwungscheibe ist daher

$$J_m = M \cdot k^2 = \frac{20000}{9,81} \cdot 1,69^2 = \sim 2000 \cdot 2,86 = 5720.$$

Wenn das Schwungrad mit einer Umfangsgeschwindigkeit  $v = 140$  m/sek

läuft, so ist die zugehörige Drehzahl

$$n_1 = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot D} = \frac{60 \cdot 140}{3,14 \cdot 4,40} = 608.$$

Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 608}{30} = 63,6 \frac{1}{\text{sek}}$$

Vermindert sich die Drehzahl um 15%, so vermindert sich die Winkelgeschwindigkeit ebenfalls um diesen Betrag, und es ist dann

$$\omega_2 = 0,85 \cdot \omega_1 = 0,85 \cdot 63,6 = 54 \frac{1}{\text{sek}}$$

Das Arbeitsvermögen des Schwungrades ist hiermit

$$A = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \cdot J_m = \frac{63,6^2 - 54^2}{2} \cdot 5720 = 3230000 \text{ mkg.}$$

Man kann die Aufgabe auch mit der Schwungmomentengleichung lösen

$$G \cdot D_i^2 = \frac{7200 \cdot A}{n_1^2 - n_2^2},$$

$$A = \frac{G \cdot D_i^2 \cdot (n_1^2 - n_2^2)}{7200},$$

$$D_i = 2 \cdot k = 2 \cdot 0,77 r = 2 \cdot 0,77 \cdot 2,2 = 3,38 \text{ m,}$$

$$n_1 = 608, \quad n_2 = 0,85 \cdot 608 = 517,$$

$$A = \frac{20000 \cdot 3,38^2 \cdot (608^2 - 517^2)}{7200} = 3230000 \text{ mkg.}$$

Diese Arbeit wird in 20 Sekunden abgegeben, also ist die Arbeitsleistung in 1 Sekunde

$$A_s = \frac{3230\,000}{20} = 161\,500 \text{ mkg/sek}$$

oder die PS-Leistung

$$N = \frac{161\,500}{75} = 2155 \text{ PS.}$$

Demnach ersetzt die Schwungscheibe während des Anfahrens einen Zusatzmotor von rund 2000 PS. Während der Fördermotor gegen Ende des Förderzuges keine Kraft verbraucht, wird die Schwungscheibe wieder durch den Fördermotor aufgeladen, indem sie auf die normale Umfangsgeschwindigkeit  $v = 140 \text{ m/sek}$  beschleunigt wird.

Die Schwungradarbeit kann ebensogut nach der Formel

$$A = \frac{1}{2} M \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

ausgerechnet werden. Die Geschwindigkeiten sind dann im Trägheitskreise zu messen, d. h. am Halbmesser

$$k = 0,77 \cdot r = 1,69 \text{ m.}$$

Wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1 = 63,6 \text{ m/sek}$  ist, so wird die Geschwindigkeit am Radius  $k$

$$v_1 = k \cdot \omega = 1,69 \cdot 63,6 = 107,5 \text{ m/sek,}$$

$$v_2 = 0,85 \cdot v_1 = 0,85 \cdot 107,5 = 91,4 \text{ m/sek,}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot (107,5^2 - 91,4^2) = 3\,230\,000 \text{ mkg.}$$

**Beispiel:** Wieviel Förderzüge können mit dem Schwungrad allein gemacht werden, wenn die Nutzlast 4000 kg, die Teufe 600 m und der mechanische Wirkungsgrad der Fördereinrichtung 0,60 ist?

**Lösung:**

Theoretische Arbeit für 1 Förderzug =  $4000 \cdot 600 = 2\,400\,000 \text{ mkg}$ ,

Wirkliche Arbeit für 1 Förderzug =  $\frac{2\,400\,000}{0,60} = 4\,000\,000 \text{ mkg}$ .

Ganze lebendige Kraft des Schwungrades =  $\frac{1}{2} M \cdot v_1^2$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 107,5^2 = 11\,560\,000 \text{ mkg}$

Förderzüge =  $\frac{11\,560\,000}{4\,000\,000} = 2,9$ .

**Beispiel:** Welche Auslaufzeit hat der Maschinensatz im Leerlauf, wenn dieser 100 PS verzehrt?

**Lösung:** Die ganze lebendige Kraft des Schwungrades ist

$$L = \frac{1}{2} M \cdot v_1^2 = 11\,560\,000 \text{ mkg.}$$

100 PS verbrauchen in der Sekunde  $100 \cdot 75 = 7500 \text{ mkg}$ ,

Auslaufzeit =  $\frac{11\,560\,000}{7500} = 1540 \text{ Sekunden} = 25,7 \text{ Min.}$

**Beispiel:** Die 120 t schwere Schwungscheibe des Umformermaschinensatzes einer elektrischen Fördermaschine soll aus dem Ruhezustand auf 100 m/sek Umfangsgeschwindigkeit gebracht werden. Wie lange dauert das Anlaufen, wenn zur Beschleunigung 1000 PS zur Verfügung stehen?

**Lösung:** Bei der Schwungscheibe wirkt die Masse so, als wenn sie in einem Abstände

$$k = 0,77 \cdot r$$

vom Drehpunkt angebracht wäre.

Bei 100 m Umfangsgeschwindigkeit hat dieser Punkt die Umfangsgeschwindigkeit

$$v = 0,77 \cdot 100 = 77 \text{ m/sek.}$$

Bei dieser Geschwindigkeit ist das aufgespeicherte Arbeitsvermögen

$$A = \frac{1}{2} M \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{120000}{10} \cdot 77^2 = 35520000 \text{ mkg.}$$

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/sek}$$

$$1000 \text{ PS} = 1000 \cdot 75 = 75000 \text{ mkg/sek}$$

$$75000 \text{ mkg} = 1 \text{ Sekunde}$$

$$35520000 \text{ mkg} = \frac{1 \cdot 35520000}{75000} = 473 \text{ Sekunden.}$$

Wie groß ist die Anlaufbeschleunigung?

$$b = \frac{v}{t} = \frac{77}{473} = 0,16 \text{ m/sek}^2.$$

Sollte das Schwungrad z. B. mit der zehnfachen Beschleunigung, also mit  $1,6 \text{ m/sek}^2$  anlaufen, so wäre der 10fache Kraftbedarf nötig, das wären  $10 \cdot 1000 = 10000 \text{ PS}$ .

## 29. Der Satz vom Antrieb.

Eine Kraft  $P$  erteile einer Kugel (Abb. 281) die Beschleunigung  $b$  dann wächst ihre Geschwindigkeit  $c$  in der Zeit  $t$  auf  $v$ , und es ist

$$v = c + b \cdot t, \quad v - c = b \cdot t.$$

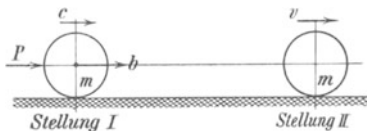


Abb. 281. Die Kugel bewegt sich beschleunigt.

Ist  $m$  die Masse der Kugel, so lautet die Gleichung nach Multiplikation mit  $m$

$$m \cdot v - m \cdot c = m \cdot b \cdot t$$

$$m \cdot b = P$$

$$m \cdot v - m \cdot c = P \cdot t$$

Man nennt das Produkt Masse  $\times$  Geschwindigkeit die Bewegungsgröße des Körpers und das Produkt Kraft  $\times$  Wirkungsdauer den Antrieb.

**Satz:** Die Zunahme der Bewegungsgröße eines Körpers ist gleich dem Antrieb der treibenden Kraft.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit  $c = 0$ , so wird

$$m \cdot v = P \cdot t.$$

In Abb. 282 bewegen sich zwei Kugeln aus dem Ruhezustand heraus, die eine hat die Masse  $m_1$  und wird in der Zeit  $t_1$  auf die Geschwindigkeit  $v_1$  gebracht, die andere hat die Masse  $m_2$  und wird in der Zeit  $t_2$  auf die Geschwindigkeit  $v_2$  gebracht. Für beide Bewegungen gelten die Gleichungen

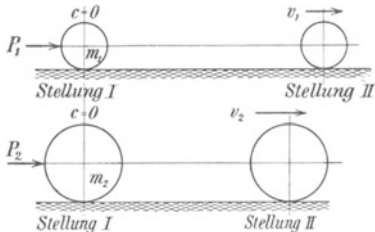


Abb. 282. Bewegung zweier Kugeln aus dem Ruhezustand heraus.

$$m_1 \cdot v_1 = P_1 \cdot t_1,$$

$$m_2 \cdot v_2 = P_2 \cdot t_2,$$

für  $t_1 = t_2$  wird

$$\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2 \cdot v_2} = \frac{P_1}{P_2},$$

d. h. bei gleichen Zeiten verhalten sich die Bewegungsgrößen wie die treibenden Kräfte.

Ist außerdem  $P_1 = P_2$ , so wird

$$\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2 \cdot v_2} = 1,$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad \text{oder} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

d. h. bei gleichen Zeiten und gleichen Kräften verhalten sich die den Massen erteilten Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen.

In dem Augenblick, wo die Massen die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  haben, sind ihre Arbeitsvermögen.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2.$$

Das Verhältnis beider ist

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{m_2 \cdot v_2^2},$$

nun ist  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$ , also wird

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2 \cdot v_1^2}{v_1 \cdot v_2^2} = \frac{v_1}{v_2},$$

d. h. die Arbeitsvermögen der beiden Körper verhalten sich bei gleichen Zeiten und bei gleicher Antriebskraft wie die Endgeschwindigkeiten.

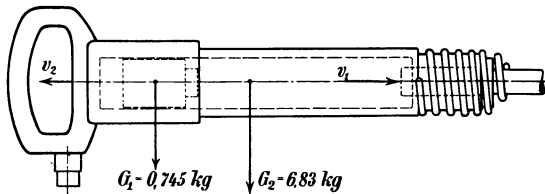


Abb. 283. Die Rücklaufbewegung des Hammerkörpers.

Der in Abb. 283 dargestellte Preßlufthammer unterliegt diesen Bewegungsgesetzen. Der Hammer hat einen Schlagkolben vom Gewicht  $G_1 = 0,745$  kg, während der Hammerkörper selbst  $G_2 = 6,83$  kg Gewicht hat. Die einstoßende Druckluft beschleunigt den Kolben nach vorne, den Hammerkörper nach hinten. Wir hatten früher die Aufschlaggeschwindigkeit  $v_1$  des Schlagkolbens errechnet, sie betrug

$$v_1 = 9,20 \text{ m/sek.}$$

Nach dem Bewegungsgesetz läßt sich die dem Hammerkörper in der Schlagzeit erteilte Rücklaufgeschwindigkeit  $v_2$  errechnen. Sie ist

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = v_1 \cdot \frac{G_1}{G_2} = 9,20 \cdot \frac{0,745}{6,83} = 1,00 \text{ m/sek.}$$

Die einstoßende Druckluft leistet demnach eine zweifache Arbeit, sie schlägt den Kolben vorwärts und stößt den Hammerkörper zurück. Die erste Arbeit ist eine Nutzarbeit, die zweite eine schädliche Arbeit, denn sie schädigt den Arbeiter durch den Rückstoß. Das Verhältnis beider Arbeiten ist nach dem Bewegungsgesetz

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{9,20}{1,00}.$$

Die Gesamtarbeit ist  $A_1 + A_2$ , die Nutzarbeit  $A_1$ , demnach ist

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} = \frac{9,20}{9,20 + 1,00} = 0,90,$$

d. h. 90% der Druckluftarbeit wird in Schlagarbeit umgesetzt, während 10% als Rückstoßarbeit in den Hammerkörper gehen. Man kann die Rücklaufbewegung durch stärkeren Gegendruck am Hammergriff hemmen. Hat man z. B. durch verstärkten Gegendruck die Rücklaufgeschwindigkeit auf  $v_2 = 0,20$  m/sek gemindert, so wird

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{9,20}{0,2} = \frac{46}{1}$$

und 
$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{46}{46 + 1} = 0,98,$$

d. h. man hat erreicht, daß die Schlagleistung von 90% auf 98% sich erhöht und der Verlust durch die Rücklaufbewegung sich von 10% auf 2% vermindert.

**Beispiel:** Eine Grubenlokomotive soll 30 beladene Wagen von je 1200 kg Gewicht in 10 sek auf 3 m/sek Fahrgeschwindigkeit bringen; wieviel PS muß der Motor maximal leisten, wenn der Fahrwiderstand 1,5% des Zuggewichtes beträgt und der mechanische Wirkungsgrad der Lokomotive  $\eta = 0,75$  ist?

**Lösung:** Der Satz vom Antrieb lehrt

$$P \cdot t = M \cdot v,$$

also ist die Beschleunigungskraft

$$P = \frac{M \cdot v}{t} = \frac{36000 \cdot 3}{10 \cdot 9,81} = 1000 \text{ kg},$$

$$\text{Fahrwiderstand } W = 0,015 \cdot G = 0,015 \cdot 36000 = 540 \text{ kg},$$

$$\text{Zugkraft am Haken } Z = P + W = 1000 + 540 = 1540 \text{ kg},$$

$$\text{Hakenleistung } N_0 = \frac{Z \cdot v}{75} = \frac{1540 \cdot 3}{75} = 62 \text{ PS},$$

$$\text{Motorenleistung } N = \frac{N_0}{\eta} = \frac{62}{0,75} = 83 \text{ PS}.$$

Der Satz vom Antrieb bei Schaufelrädern.

Bewegt sich eine Wassermasse  $m$  aus dem Ruhestand heraus und erreicht in der Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v$ , so ist zur Beschleunigung eine Kraft  $P$  erforderlich, die sich aus dem Satz vom Antrieb

$$P \cdot t = m \cdot v$$

errechnen läßt. Auch der umgekehrte Vorgang unterliegt demselben Gesetz. Die Wassermasse kann aus der Bewegung, die mit der Geschwindigkeit  $v$  erfolgte, in der Zeit  $t$  bis zum Stillstand verzögert werden. In beiden Fällen ist die Kraft  $P$  ein **Schaufeldruck**. Da in den Schaufelrädern eine ununterbrochene Bewegung (Strömung) vor sich geht, bezieht man den Bewegungsvorgang zur Vereinfachung der Rechnung auf  $t = 1$  sek und versteht dann unter  $m$  die sekundlich durchströmende Wassermasse. Der Satz vom Antrieb lautet dann einfach

$$\text{Schaufeldruck } P = m \cdot v.$$



Bewegt sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit  $v_x$ , so ergibt sich die Radleistung

$$N = \frac{P \cdot v_x}{75} \text{ PS.}$$

In Abb. 284 ist die Schaufel einer Druckturbine dargestellt. Der Strahl tritt aus einer Düse unter dem Düsenwinkel  $\alpha$  mit der Geschwindigkeit  $c$  in das Laufrad ein. Diese Geschwindigkeit  $c$  ist im Schaupunkt  $A$  angetragen. Trägt man im gleichen Punkt die Umfangsgeschwindigkeit  $v_x$ , z. B.  $v_x = 0,5 c$ , entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung an und zeichnet das Geschwindigkeitsparallelogramm, so ist die Diagonale  $w$  die gesuchte Richtung des Schaufelansfangs, es ergibt sich der Schaufelwinkel  $\beta$ .

Ein zweites Parallelogramm mit  $v_x$  in der Laufrichtung angetragen, zeigt die Strahlgeschwindigkeit  $c$  als Resultierende der Umfangsgeschwindigkeit  $v_x$  und der Relativgeschwindigkeit  $w$  des Wassers an der Schaufel entlang.

Die Horizontalkomponente von  $w$  ist  $w \cdot \cos \beta$ , und wenn man am Austritt denselben Schaufel-

winkel  $\beta$  nimmt, so hat die Horizontalkomponente  $w \cdot \cos \beta$  am Ausgang dieselbe Größe wie am Eingang, aber entgegengesetzte Richtung, d. h. in der oberen Hälfte des Rades wird die Horizontalkomponente  $w \cdot \cos \beta$ , die nach links zeigt, herabgemindert bis auf Null und in der unteren Hälfte wird die Horizontalkomponente, die nach rechts zeigt, von Null bis  $w \cdot \cos \beta$  anwachsen. In der oberen Hälfte wirkt die Verzögerungskraft und in der unteren Hälfte die Reaktion der Beschleunigungskraft als Schaufeldruck. Der Schaufeldruck ist demnach

$$P = m \cdot w \cdot \cos \beta + m \cdot w \cdot \cos \beta,$$

$$P = 2 m \cdot w \cdot \cos \beta,$$

nun ist

$$w \cdot \cos \beta = c \cdot \cos \alpha - v_x$$

und damit

$$P = 2 m \cdot (c \cdot \cos \alpha - v_x).$$

Die Leistungsgleichung lautet nun

$$L = P \cdot v_x = 2 m \cdot (c \cdot \cos \alpha - v_x) \cdot v_x \text{ mkg/sek}$$

oder

$$L = 2 m \cdot v_x (c \cdot \cos \alpha - v_x).$$

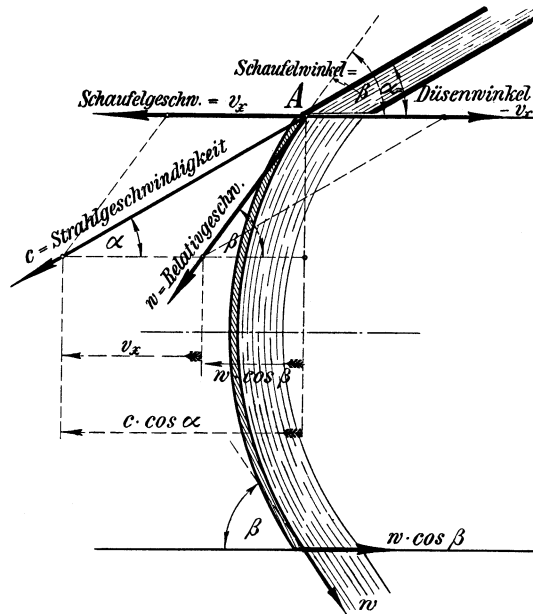


Abb. 284. Der Schaufeldruck an der Schaufel einer Druckturbine.

Die theoretisch mögliche Arbeit ist

$$L_0 = \frac{m \cdot c^2}{2} \text{ mkg/sek},$$

also ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L}{L_0} = \frac{2m \cdot v_x \cdot (c \cdot \cos \alpha - v_x)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot c^2},$$

$$\eta = \frac{4v_x \cdot c \left( \cos \alpha - \frac{v_x}{c} \right)}{c^2} = 4 \cdot \frac{v_x}{c} \left( \cos \alpha - \frac{v_x}{c} \right).$$

Nach dieser Gleichung läßt sich bei einem bestimmten Düsenwinkel  $\alpha$  für jedes Verhältnis  $v_x : c$ , das gewählt wird, der höchste erreichbare Wirkungsgrad des Schaufelrades errechnen.

**Beispiel:** Wie groß ist der höchste erreichbare Wirkungsgrad, wenn  $\alpha = 18^\circ$  und  $v_x : c = 0,5$  gewählt wird?

**Lösung:** Es ist  $\cos \alpha = \cos 18^\circ = 0,9510$  und damit

$$\eta = 4 \cdot 0,5 \cdot (0,9510 - 0,5) = 0,90.$$

Theoretisch kann also kein höherer Wirkungsgrad als 90% erreicht werden.

**Beispiel:** Eine Dampfturbine arbeite mit 10 Druckstufen und verarbeite in einer Stufe eine Strahlgeschwindigkeit von  $c = 300$  m/sek unter dem Düsenwinkel  $\alpha = 18^\circ$ . Was leistet jede Stufe, wenn die Umfangsgeschwindigkeit  $v_x$  halb so groß wie die Strahlgeschwindigkeit ist und der stündliche Dampfverbrauch 36000 kg beträgt?

**Lösung:** Es ist

$$w \cdot \cos \beta = c \cdot \cos \alpha - v_x = 300 \cdot 0,9510 - 150 = 135 \text{ m/sek}.$$

Der Schaufeldruck ist

$$P = 2 \cdot m \cdot w \cdot \cos \beta$$

und die sekundliche Dampfmasse

$$m = \frac{G}{3600 \cdot g} = \frac{36000}{3600 \cdot 9,81} = 1,02,$$

$$P = 2 \cdot 1,02 \cdot 135 = 276 \text{ kg}.$$

Die Radleistung ist

$$L = P \cdot v_x = 276 \cdot 150 = 41400 \text{ mkg/sek}$$

oder

$$N = \frac{L}{75} = \frac{41400}{75} = 553 \text{ PS}.$$

Bei 10 Stufen ist die Turbinenleistung

$$N_t = 10 \cdot 553 = 5530 \text{ PS}$$

und der spezifische Dampfverbrauch

$$q = \frac{36000}{5530} = 6,5 \text{ kg/PS}_1\text{h}.$$

In Abb. 285 ist gezeigt, daß man unter Umgehung der Horizontal-komponenten von  $w$  zu dem gleichen Endergebnis kommt, wenn man die Geschwindigkeiten  $w$  unmittelbar in Rechnung stellt. In dem ersten Bild links ist gezeigt, daß die Schaufel mit demselben Schaufelwinkel  $\beta$  am Eingang und Ausgang arbeitet. Die relative Eintrittsgeschwindigkeit ist  $w$  und ebenso ist die relative Austrittsgeschwindigkeit gleich  $w$ . In

der oberen Hälfte der Radschaufel ist nach dem Satz vom Antrieb der Schaufeldruck

$$P_1 = m \cdot w$$

und in der unteren Radhälfte die Reaktion des Schaufeldrucks

$$P_2 = m \cdot w.$$

Im Bild rechts sind  $P_1$  und  $P_2$  zusammengesetzt zum resultierenden Schaufeldruck  $P$  und dieser ist nach der Figur

$$P = 2 m \cdot w \cdot \cos \beta.$$

Dasselbe Ergebnis wurde unter Zugrundelegung der Horizontalkomponenten von  $w$  gefunden.

Schaufeln dieser Form heißen Druckschaufeln, und die Turbinen, die mit solchen Schaufeln ausgerüstet werden, heißen Druckturbinen oder Aktionsturbinen. Der austretende Düsenstrahl hat das gesamte Druckgefälle  $H$  zwischen Düsen- und Ausströmseite in Geschwindigkeit umgesetzt

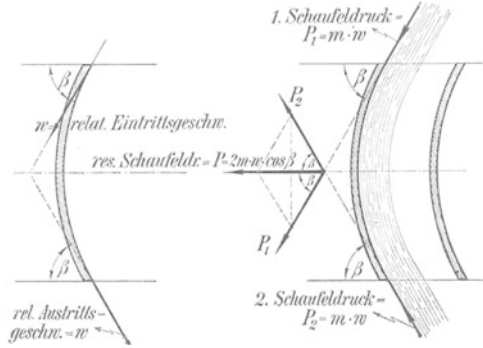


Abb. 285. Der Schaufeldruck an der Schaufel einer Druckturbinen.

$$c = \sqrt{2 g H} \text{ m/sek.},$$

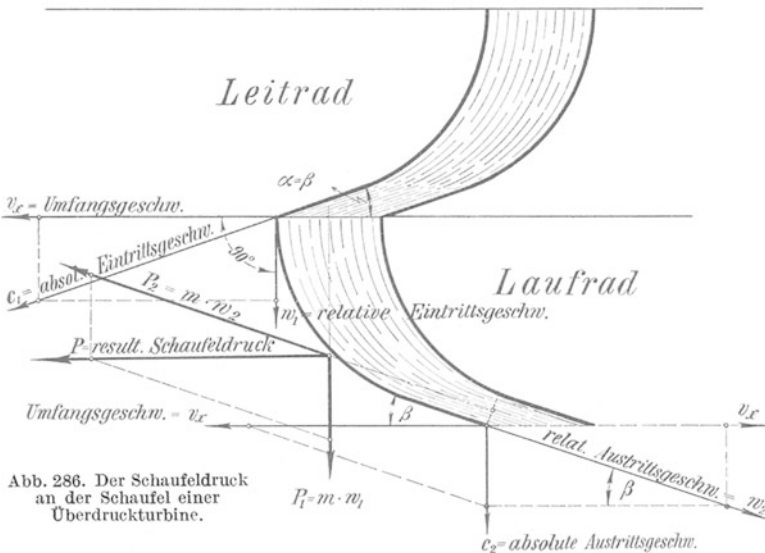


Abb. 286. Der Schaufeldruck an der Schaufel einer Überdruckturbinen.

so daß der austretende Strahl den gleichen Druck hat wie der Schaufelraum. Aus diesem Grund heißen die Turbinen auch Gleichdruckturbinen.

In Abb. 286 ist eine Überdruckschaufel dargestellt. Das Charak-

teristische der Überdruckschaufel ist die Verengung der Laufradschaufel nach dem Ausgang zu. Erst am Ausgang der Laufradschaufel ist nie ganze Druckhöhe in Geschwindigkeit umgesetzt. Der Druck wächst daher vom Austritt nach rückwärts, so daß im Spalt ein starker Überdruck gegenüber dem Austrittsraum herrscht, der ungefähr der halben Druckhöhe  $H$  entspricht. Also ist die Strahlgeschwindigkeit nur

$$c_1 = \sqrt{2g \cdot 0,5 \cdot H}.$$

Ist  $\sqrt{2gH} = c$ , so ist

$$c_1 = \sqrt{0,5} \cdot c = 0,70 c.$$

Dafür besitzt der Strahl aber noch Spannungsenergie, und diese Spannungsenergie setzt sich erst beim Durchfließen der Laufradschaufel in Geschwindigkeit um. Das Strömende erfährt daher im Laufrad eine

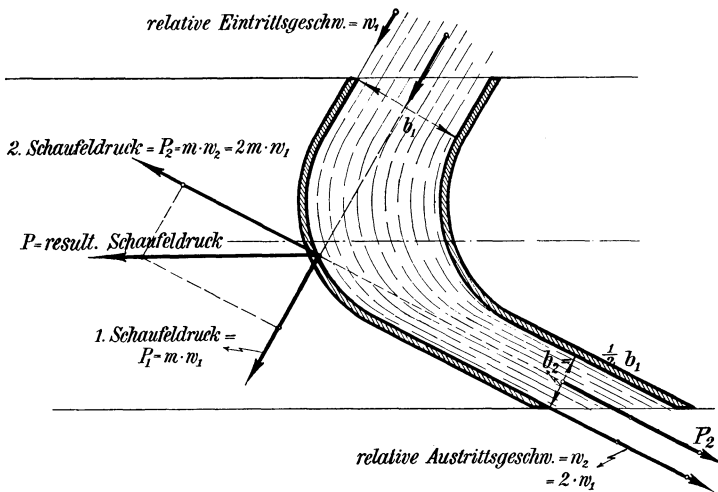


Abb. 287. Der Schaufeldruck an der Schaufel einer Überdruckturbinen.

starke Beschleunigung, und die Reaktion dieser Beschleunigungskraft drückt auf die Schaufel und vermehrt in außerordentlichem Maße den Schaufeldruck. Man nennt daher solche Turbinen Reaktions- oder Überdruckturbinen.

Das Eintrittsparallelogramm zeigt die relative Eintrittsgeschwindigkeit  $w_1$ , das Austrittsparallelogramm die der Kanalverengung entsprechende größere relative Austrittsgeschwindigkeit  $w_2$ . Nach dem Satz vom Antrieb wirkt in der oberen Radhälfte der Schaufeldruck

$$P_1 = m \cdot w_1$$

und in der unteren Radhälfte die Reaktion der Beschleunigungskraft als Schaufeldruck

$$P_2 = m \cdot w_2$$

aus beiden Drücken ergibt sich der resultierende Schaufeldruck

$$P = \sqrt{P_2^2 - P_1^2}.$$

Die Radleistung wird damit

$$L = P \cdot v_x \text{ mkg/sek.}$$

oder

$$N = \frac{P \cdot v_x}{75} \text{ PS.}$$

In Abb. 287 ist für eine andere Schaufelform das Druckparallelogramm dargestellt. Da die Schaufelweite  $b_2 = \frac{1}{2} b_1$  ist, so wird  $w_2 = 2 \cdot w_1$ . Die Schaufeldrücke sind

$$P_1 = m \cdot w_1 \quad \text{und} \quad P_2 = m \cdot w_2 = 2 m \cdot w_1.$$

Der resultierende Schaufeldruck ist  $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ . Mit diesem Schaufeldruck kann wieder in bekannter Weise die Radleistung errechnet werden.

### 30. Die Beschleunigung der Massen bei Seilförderungen.

#### a) Der dynamische Einfluß auf das Seilkraftverhältnis.

In Abb. 288 hänge an einer Seiltrommel eine Last  $G_1$ , dann ist im Ruhezustand der Seilzug

$$S_1 = G_1 = \frac{G_1}{g} \cdot g = M_1 \cdot g.$$

Jetzt werde die Last mit der Beschleunigung  $b$  hochgezogen, dann wird die Gewichtsmasse beschleunigt und der Seilzug ist

$$S_1 = G_1 + \frac{G_1}{g} \cdot b = M_1 \cdot g + M_1 \cdot b = M_1 (g + b).$$

In Abb. 289 hänge an einer Seiltrommel eine Last  $G_2$ , dann ist im Ruhezustand der Seilzug

$$S_2 = G_2 = \frac{G_2}{g} \cdot g = M_2 \cdot g.$$

Wird die Trommel so bewegt, daß die Last mit der Beschleunigung  $b$  gesenkt wird, so wird das Seil durch die Beschleunigungskraft entspannt. Der Seilzug wird kleiner, er wird

$$S_2 = G_2 - \frac{G_2}{g} \cdot b = M_2 \cdot g - M_2 \cdot b = M_2 \cdot (g - b).$$

Das Seil geht selbst mit der Beschleunigung  $b$  abwärts, also zieht das Gewicht nur mit der Beschleunigung  $(g - b)$  am Seil. Läßt man die Beschleunigung

$$b = g$$

werden, so wird

$$S_2 = M_2 \cdot (g - g) = 0,$$

d. h. das Seil wird spannungslos.

Es werden demnach beim Anfahren und Stillsetzen der Trommel die Seilkräfte verändert. Diese Veränderungen können so bedeutend werden, daß bei Treibscheibenförderung trotz statischer Sicherheit Seilrutsch eintritt.

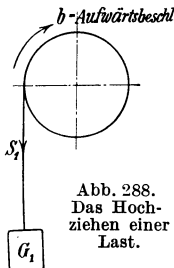


Abb. 288.  
Das Hochziehen einer Last.

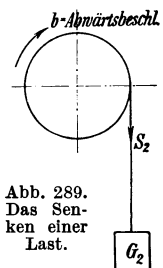


Abb. 289.  
Das Senken einer Last.

In Abb. 290 ist eine Treibscheibe dargestellt, auf der linken Seite hängt die Last  $G_1$ , auf der rechten Seite die Last  $G_2$ . Im Zustand der Ruhe sind dann die Seilbelastungen

$$S_1 = G_1 = M_1 \cdot g,$$

$$S_2 = G_2 = M_2 \cdot g.$$

Das Seillastverhältnis im Ruhezustand ist also

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} = \frac{M_1 \cdot g}{M_2 \cdot g} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Wird nun die Treibscheibe mit der Beschleunigung  $b$  angefahren, so daß die Last  $G_1$  steigt und die Last  $G_2$  fällt, so werden die Seillasten

$$S_1 = M_1 \cdot (g + b),$$

$$S_2 = M_2 \cdot (g - b).$$

Das Lastenverhältnis im Bewegungszustand ist dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} &= \frac{M_1 \cdot (g + b)}{M_2 \cdot (g - b)} \\ &= \left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} \cdot \frac{g + b}{g - b}. \end{aligned}$$

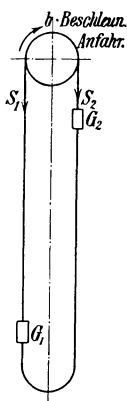


Abb. 290.  
Die Treib-  
scheibe.

Demnach besteht zwischen dem dynamischen und statischen Seillastverhältnis eine bestimmte Beziehung. Es genügt, das statische Lastverhältnis zu ermitteln und dieses mit dem Beschleunigungsfaktor

$$\frac{g + b}{g - b}$$

zu multiplizieren, dann erhält man in einfachster Weise auch das dynamische Lastverhältnis.

Welche Beschleunigungswerte  $b$  vorkommen, hängt ganz von der Art der Antriebsmaschine ab. Im allgemeinen sind unsere Fördermaschinen so eingerichtet, daß die größte Maschinenbeschleunigung selten den Wert

$$b = 2 \text{ m/sek}^2$$

übersteigt.

Für die verschiedenen Beschleunigungswerte ergeben sich folgende Werte für den Beschleunigungsfaktor:

$b =$	1	2	3	4	5	6 m/sek <sup>2</sup>
$\frac{g + b}{g - b} =$	1,225	1,51	1,88	2,38	3,08	4,15

Man sieht, die Steigerung des Lastverhältnisses kann sehr stark werden, so daß die dynamischen Vorgänge bei der Treibscheibenförderung unbedingt zu beachten sind.

### b) Die Seilrutschgefahr.

An einer Treibscheibe (Abb. 291) hänge auf beiden Seiten die gleiche Last  $G$ , außerdem werde die aufsteigende Seite noch mit der

Nutzlast  $N$

beschwert. Dann ist das statische Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} = \frac{G + N}{G}.$$

Wird das Lastenverhältnis

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha},$$

so tritt Seilrutsch ein. Ist z. B.  $G = 10000$  kg und  $N = 2500$  kg, so ist das Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} = \frac{10000 + 2500}{10000} = 1,25.$$

Ist ferner  $\alpha = 180^\circ$  und  $\mu = 0,20$ , so ist der Wert

$$e^{\mu\alpha} = 1,87.$$

Das Lastenverhältnis bei ruhender Last ist aber nur 1,25, so daß im Ruhezustand eine

$$\frac{87}{25} = 3,5\text{fache Sicherheit}$$

gegen Seilrutschen vorherrscht. Man müßte also die Nutzlast auf

$$3,5 \cdot 2500 = 8700 \text{ kg}$$

steigern, wenn das Seil rutschen soll, und es wäre dann

$$\frac{G + N}{G} = \frac{10000 + 8700}{10000} = 1,87.$$

Allgemein ist

$$N = S_1 - S_2 = S_2 \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$$

und

$$N_{\text{max}} = S_{\text{max}} - S_2 = S_2 \cdot (e^{\mu\alpha_{\text{max}}} - 1),$$

$$\frac{N_{\text{max}}}{N} = \frac{S_2 \cdot (e^{\mu\alpha_{\text{max}}} - 1)}{S_2 \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)} = \frac{e^{\mu\alpha_{\text{max}}} - 1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Im vorstehenden Beispiel war  $e^{\mu\alpha_{\text{max}}} = 1,87$  und  $e^{\mu\alpha} = 1,25$ , also ist

$$\frac{N_{\text{max}}}{N} = \frac{1,87 - 1}{1,25 - 1} = \frac{0,87}{0,25} = 3,5,$$

$$N_{\text{max}} = 3,5 \cdot N.$$

Wird die Nutzlast mit der Beschleunigung  $b$  in die Höhe gezogen, so ist das Spannungsverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} \cdot \frac{g + b}{g - b},$$

für  $b = 2$  m/sek<sup>2</sup> wird dann

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} = 1,25 \cdot 1,51 = 1,89.$$

Demnach ist das Verhältnis

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha} = 1,87$$

überschritten, d. h. bei der Anfahrbeschleunigung  $b = 2$  m/sek<sup>2</sup> tritt bereits Seilrutschen ein. Man erkennt, daß das statische Lastenverhältnis trotz 3,5facher Sicherheit keine Gewähr dafür bietet, daß das Seil nicht rutscht.

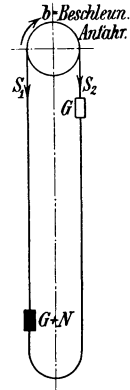


Abb. 291.  
Das Ziehen einer Last.

### c) Welche größte Anfahrbeschleunigung $b$ ist zulässig?

Für das Anfahren gilt das dynamische Seillastverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} = \frac{G + N}{G} \cdot \frac{g + b}{g - b}.$$

Erreicht dieses den Wert  $e^{\mu\alpha}$ , so tritt Seilrutschen ein. Die Bedingungs-  
gleichung für Seilrutschen lautet daher

$$\frac{G + N}{G} \cdot \frac{g + b}{g - b} = e^{\mu\alpha}.$$

Nach einigen Umformungen folgt

$$b = g \cdot \frac{(e^{\mu\alpha} - 1) \cdot G - N}{(e^{\mu\alpha} + 1) \cdot G + N}.$$

Bei dieser Anfahrbeschleunigung  $b$  würde für die gegebenen Lasten  $G$   
und  $N$  das Seilrutschen eintreten. In dem vorigen Beispiel war

$$G = 10000 \text{ kg}, \quad N = 2500 \text{ kg}, \quad e^{\mu\alpha} = 1,87.$$

Mit diesen Werten würde man finden:

$$b = 9,81 \cdot \frac{0,87 \cdot 10000 - 2500}{2,87 \cdot 10000 + 2500} = 1,95 \text{ m/sek}^2.$$

Man sieht, beim Hochziehen von Lasten ist das Anfahren  
gefährlich, es genügt schon eine Anfahrbeschleunigung von verhältnis-  
mäßig geringer Größe, um Seilrutsch zu verursachen.

### d) Das Verzögern am Ende des Hochziehens.

Wenn der Korb mit der Nutzlast oben ankommt, muß die Maschine  
verzögert werden. Auch hier ändert sich dann das Lastenverhältnis  
der beiden Seilseiten. Nach Abb. 292 ist das statische  
Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{stat.}} = \frac{G}{G + N} = \frac{M_G \cdot g}{(M_G + M_N) \cdot g} = \frac{M_G}{M_G + M_N}.$$

Beim Verzögern wird die Seilspannung  $S_2$  größer und  
die Seilspannung  $S_1$  kleiner. Diese Veränderung der  
Seilspannungen kann so groß werden, daß das Ver-  
hältnis

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\alpha}$$

überschritten wird, wodurch Seilrutsch entsteht.  
Bei der Verzögerung  $b$  treten folgende Seilkräfte  
auf:

$$S_2 = M_G \cdot g + M_G \cdot b = M_G \cdot (g + b),$$

$$S_1 = (M_G + M_N) \cdot g - (M_G + M_N) \cdot b$$

$$= (M_G + M_N) \cdot (g - b).$$

Das dynamische Lastenverhältnis ist daher

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{dyn.}} = \frac{M_G}{M_G + M_N} \cdot \frac{g + b}{g - b},$$

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{dyn.}} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{stat.}} \cdot \frac{g + b}{g - b}.$$

Auch hier berechnet sich das dynamische Lastenverhältnis in ein-

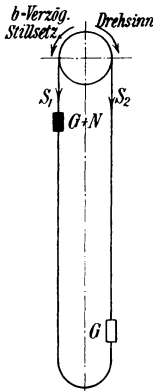


Abb. 292.  
Das Stillsetzen  
beim Hochziehen.



fachster Weise aus dem statischen, indem man mit dem Verzögerungs-  
faktor

$$\frac{g+b}{g-b}$$

einfach multipliziert.

### e) Welche größte Verzögerung $b$ ist zulässig?

Für das Stillsetzen gilt das dynamische Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{dyn.}} = \frac{G}{G+N} \cdot \frac{g+b}{g-b}.$$

Erreicht dieses den Wert  $e^{\mu\alpha}$ , so tritt Seilrutschen ein. Die Bedingungs-  
gleichung für Seilrutsch lautet daher

$$\frac{G}{G+N} \cdot \frac{g+b}{g-b} = e^{\mu\alpha}.$$

Nach einigen Umformungen folgt

$$b = g \cdot \frac{e^{\mu\alpha}(G+N) - G}{e^{\mu\alpha}(G+N) + G}.$$

Bei dieser Stillsetzungsverzögerung  $b$  würde für die gegebenen Lasten  $G$   
und  $N$  das Seilrutschen eintreten.

Für das Beispiel

$$G = 10000 \text{ kg}, \quad N = 2500 \text{ kg}, \quad e^{\mu\alpha} = 1,87$$

wird

$$b = 9,81 \cdot \frac{1,87 \cdot (10000 + 2500) - 10000}{1,87 \cdot (10000 + 2500) + 10000} = 3,92 \text{ m/sek}^2.$$

Demnach ist beim Hochziehen von Lasten das  
Stillsetzen weniger gefährlich als das Anfahren, denn beim  
Anfahren genügte schon eine Beschleunigung von der  
Größe  $b = 1,95 \text{ m/sek}^2$ , um das Seilrutschen einzuleiten.

### f) Das Fahren mit eingehängter Last (negative Nutzlast).

Der untere Korb geht leer hoch, der obere Korb be-  
laden abwärts. Beim Anfahren, das mit der Beschleu-  
nigung  $b$  (Abb. 293) erfolgen soll, kann Seilrutschen ein-  
treten, wenn durch zu große Anfahrbeschleunigung

$$S_1 > S_2$$

wird. Dann ist das dynamische Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{stat.}} \cdot \frac{g+b}{g-b},$$

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}} = \frac{G}{G+N} \cdot \frac{g+b}{g-b}.$$

Erreicht das Lastenverhältnis den Wert  $e^{\mu\alpha}$ , so tritt Seilrutschen ein.  
Die Bedingungs-  
gleichung für das Seilrutschen lautet demnach

$$\frac{G}{G+N} \cdot \frac{g+b}{g-b} = e^{\mu\alpha}.$$

Hieraus ergibt sich die größte zulässige Anfahrbeschleunigung

$$b = g \cdot \frac{e^{\mu\alpha} \cdot (G+N) - G}{e^{\mu\alpha} \cdot (G+N) + G}.$$

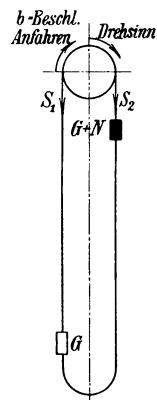


Abb. 293.  
Das Fahren mit  
eingehängter Last.

Für  $G = 10000 \text{ kg}$ ,  $N = 2500 \text{ kg}$  und  $e^{\mu\alpha} = 1,87$   
erhält man den Wert  $b = 3,92 \text{ m/sek}^2$ .

Beim Stillsetzen tritt bei starker Verzögerung  $b$  (Abb. 294) Seilrutschen ein, wenn infolge zu starker Verzögerung der Wert

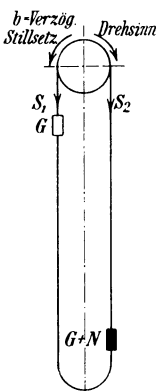


Abb. 294.  
Das Stillsetzen  
bei Hängefahrt.

$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\alpha}$   
überschritten wird. Es ist

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{dyn.}} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{\text{stat.}} \cdot \frac{g+b}{g-b} = \frac{G+N}{G} \cdot \frac{g+b}{g-b}.$$

Aus der Bedingungsgleichung für das Seilrutschen

$$\frac{G+N}{G} \cdot \frac{g+b}{g-b} = e^{\mu\alpha}$$

ergibt sich die größte zulässige Stillsetz-Verzögerung

$$b = g \cdot \frac{(e^{\mu\alpha} - 1) \cdot G - N}{(e^{\mu\alpha} + 1) \cdot G + N}.$$

Für  $G = 10000 \text{ kg}$ ,  $N = 2500 \text{ kg}$  und  $e^{\mu\alpha} = 1,87$   
erhält man den Wert

$$b = 1,95 \text{ m/sek}^2.$$

Bei eingehängter Last ist demnach das Stillsetzen gefährlicher als das Anfahren, denn die geringe Verzögerung  $b = 1,95 \text{ m/sek}^2$  genügt zum Seilrutschen, während beim Anfahren erst eine Beschleunigung  $b = 3,92 \text{ m/sek}^2$  diesen Zustand hervorruft. Man hat hier also die entgegengesetzten Verhältnisse wie beim Hochziehen von Lasten.

### 31. Zeichnerische Lösung der Seilrutschfrage nach Weih.

Eine zeichnerische Lösung der Seilrutschfrage bei Treibscheibenförderung<sup>1</sup> ist von Dipl.-Ing. Weih gegeben worden. Die Methode werde in ihrer einfachsten Form in ihrer Anwendung gezeigt. In Abb. 295 ist ein rechtwinkeliges Achsenkreuz gezeichnet. Die Ordinatenachse geht durch den Mittelpunkt  $O$  der horizontalen Grundlinie. Auf der horizontalen Grundlinie werden nach rechts die Beschleunigungen in der Größe bis zu  $10 \text{ m/sek}^2$  aufgetragen, in gleicher Weise und gleicher Größe nach links die Verzögerungen.

Auf der Ordinatenachse werden die Seilbelastungen aufgetragen. In der Figur ist die Belastung  $G$  und  $N$  aufgetragen. Unter  $G$  versteht man das ganze Leergewicht einer Seilseite, das wird also sein das Seilgewicht  $S$  + Förderkorbgewicht  $F$  + Wagengewicht  $W$ ; dieses Gewicht ist bei Treibscheibenförderungen mit Unterseil auf beiden Seiten gleich.  $N$  ist die Nutzlast der einen Seite, welche also das Übergewicht darstellt, das die Rutschgefahr bringt.

<sup>1</sup> Siehe Glückauf 1925, S. 853: Seilrutsch bei Treibscheibenförderung, von Dipl.-Ing. W. Weih, Lehrer an der Bergschule zu Bochum.

Auf der Horizontalen wird vom Mittelpunkt  $O$  nach rechts und links die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$

abgetragen und in beiden Endpunkten  $a_1$  und  $a_2$  eine Ordinate gezogen. Diese Ordinaten sollen die statischen Seilbelastungen darstellen, sie sind

$$S_1 = G + N \quad \text{und} \quad S_2 = G.$$

Durch die Ordinatenpunkte von  $S_1$  und  $S_2$  sind Horizontale gezogen, sie heißen die statischen Begrenzungslinien. Auf der mittleren Ordinatenachse ist  $c$  der Endpunkt der Seilkraftordinate  $S_2$  und  $d$  der Endpunkt der Seilkraftordinate  $S_1$ . Beim Anfahren wird durch die Beschleunigung  $b$  des Anfahrens  $S_2$  vermindert und  $S_1$  vergrößert. Diese Verminderung und Vergrößerung kann man zeichnerisch darstellen, die Darstellung entspricht den rechnerisch abgeleiteten Gesetzen.

Man verbindet Ordinatenpunkt  $c$  mit  $a_1$ , dann geht die Verminderung der Seilkraft  $S_2$  nach dieser Linie vor sich. Man verbindet Ordinatenpunkt  $d$  mit  $a_2$  und verlängert über  $d$  hinaus, dann geht die Vergrößerung von  $S_1$  nach dieser Verlängerungslinie vor sich.

Beide schrägen Linien schneiden sich im Punkte  $e$ , d. h. hier erreichen die Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$  gleiche Größen, und es ist

$$S_1 = S_2 = S.$$

Dieser Fall würde in der Figur eintreten bei der Verzögerung  $b = 1,1 \text{ m/sek}^2$ .

Bekanntlich tritt Seilrutsch ein, wenn das Lastenverhältnis

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha}$$

wird, d. h. es darf höchstens werden

$$S_1 = e^{\mu\alpha} \cdot S_2.$$

Dieses Lastenverhältnis kann zeichnerisch dargestellt werden. Man verlängert die Lastordinate  $S$  über  $e$  hinaus bis zum Punkte  $f$ , so daß die Ordinate des Punktes  $f$  das  $e^{\mu\alpha}$ -fache von  $S$  ist. In der Figur ist angenommen

$$e^{\mu\alpha} = 1,87$$

$$G = 10000 \text{ kg}$$

$$N = 2500 \text{ kg.}$$

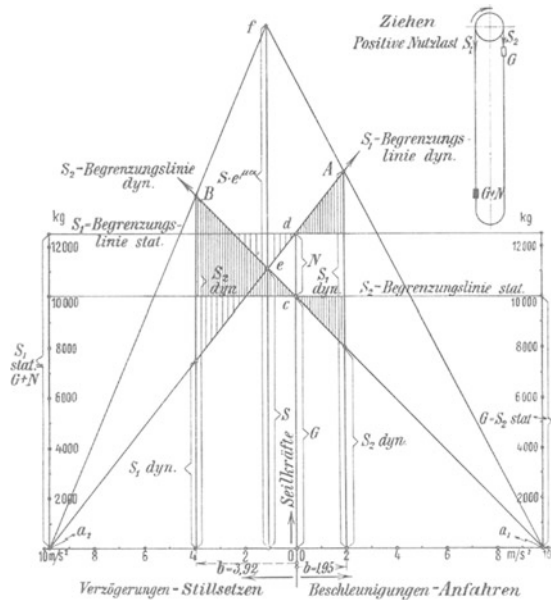


Abb. 295. Zeichnerische Lösung der Seilrutschfrage nach Weih.

Die Ordinate des Punktes  $f$  ist demnach das 1,87fache von  $S$ , wo  $S$  die Ordinatenhöhe bis zum Punkt  $e$  ist.

Verbindet man nun Punkt  $f$  mit den Fußpunkten  $a_1$  und  $a_2$ , so entstehen die Schräglinien  $fa_1$  und  $fa_2$ , deren Ordinate alle um das  $e^{\mu\alpha}$ -fache größer sind als die  $S$ -Ordinaten. Sie begrenzen also die größten Reibungskräfte, welche auftreten können. Ist die eine Seilspannung  $S$ , so darf die andere höchstens  $e^{\mu\alpha} \cdot S$  werden, wenn ein Seilrutschen vermieden werden soll.

### a) Das Anfahren.

Vor dem Anfahren ist die statische Seillast

$$S_1 = G + N = \text{Ordinate } \theta d,$$

$$S_2 = G = \text{Ordinate } \theta c.$$

Beim Anfahren wächst mit dem Wachsen der Anfahrbeschleunigung die Seillast  $S_1$  nach der Linie  $dA$ , während die Seillast  $S_2$  nach der Linie  $ca_1$  abnimmt. Die Lastendifferenz oder das Lastenverhältnis

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_{\text{dyn.}}$$

wird also immer größer. Im Punkte  $A$  ist der höchste Reibungswert erreicht, alsdann ist

$$S_{1 \text{ dyn.}} = e^{\mu\alpha} \cdot S_{2 \text{ dyn.}}$$

Die Senkrechte durch den Punkt  $A$  zeigt unten auf der Beschleunigungslinie den Höchstwert der zulässigen Beschleunigung an. Wir lesen ab

$$b = 1,95 \text{ m/sek}^2,$$

d. i. derselbe Wert, den wir früher bereits durch Rechnung gefunden hatten.

### b) Das Stillsetzen.

Das Stillsetzen erfolgt durch Verzögerung der Treibscheibe. Bei der gleichförmigen Fahrt sind die statischen Seillasten

$$S_1 = G + N = \text{Ordinate } \theta d,$$

$$S_2 = G = \text{Ordinate } \theta c.$$

Diese ändern sich beim Verzögern,  $S_2$  wächst nach der Linie  $cB$ ,  $S_1$  nimmt ab nach der Linie  $da_2$ . Im Punkte  $B$  ist der höchste Reibungswert erreicht, alsdann ist

$$S_{2 \text{ dyn.}} = e^{\mu\alpha} \cdot S_{1 \text{ dyn.}}$$

Die Senkrechte durch den Punkt  $B$  zeigt unten auf der Verzögerungslinie den Höchstwert der zulässigen Verzögerung. Wir lesen ab

$$b = 3,92 \text{ m/sek}^2,$$

d. i. derselbe Wert, der früher auch durch Rechnung gefunden wurde.

### c) Das Fahren mit eingehängter Last.

Beim Fahren mit eingehängter Last (Abb. 296) sind die statischen Seillasten

$$S_1 = G = \text{Ordinate } \theta c,$$

$$S_2 = G + N = \text{Ordinate } \theta d.$$

Beim Anfahren wächst die Seilbelastung  $S_1$  nach der schrägen Linie  $ceA$ , während die Seilbelastung  $S_2$  nach der schrägen Linie  $dea_1$  abnimmt.

$S_1$  erreicht im Schnittpunkt  $A$  seinen höchsten Reibungswert und zwar ist dann

$$S_{1\text{dyn.}} = e^{\mu\alpha} \cdot S_{2\text{dyn.}}$$

Die Senkrechte durch den Punkt  $A$  zeigt unten auf der Beschleunigungslinie den Höchstwert der zulässigen Beschleunigung

$$b = 3,92 \text{ m/sek}^2$$

an.

Beim Stillsetzen muß die Treibscheibe verzögert werden. Während der gleichförmigen Fahrt sind die statischen Seillasten

$$S_1 = G = \text{Ordinate } Oc,$$

$$S_2 = G + N = \text{Ordinate } Od.$$

Bei eintretender Verzögerung ändern sich diese Seillasten.  $S_1$  vermindert sich nach der schrägen Linie  $ca_2$ ,  $S_2$  vergrößert sich nach der schrägen Linie  $dB$ .

Im Schnittpunkt  $B$  ist der höchste Reibungswert erreicht, und es ist dann

$$S_{2\text{dyn.}} = e^{\mu\alpha} \cdot S_{1\text{dyn.}}$$

Die Senkrechte durch den Punkt  $B$  zeigt unten auf der Verzögerungslinie die höchste zulässige Verzögerung

$$b = 1,95 \text{ m/sek}^2$$

an.

Dieselben Werte wurden auch durch Rechnung gefunden.

Die bisher betrachteten Fälle gelten für Turmfördermaschinen ohne Gegenscheibe.

### d) Dasselbe Verfahren bei Seilscheibenmaschinen.

Bei Seilscheibenmaschinen tritt insofern eine Erschwerung ein, als noch die Massen der Seilscheiben an der Beschleunigung teilnehmen. Hier ist das zeichnerische Verfahren besonders elegant, es gestattet in einfachster Weise auch diese Beschleunigungskräfte bei der Seilrutschfrage zu berücksichtigen.

Ist  $G_0$  das Gewicht der Seilscheibe, so ist bei der Bestimmung der Beschleunigungskraft mit dem auf Seilmitte reduziertem Scheibengewicht

$$G_{\text{Sch}} = 0,50 \cdot G_0$$

zu rechnen.

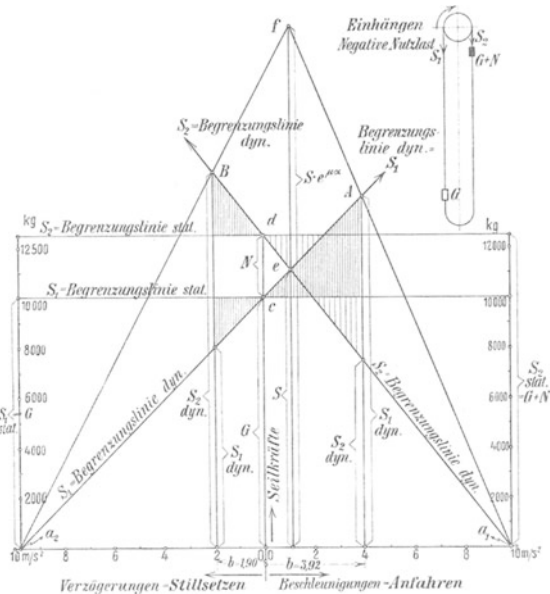


Abb. 296. Das Fahren mit eingehängter Last.

Die in Abb. 297 dargestellte Förderanlage soll auf Seilrutsch untersucht werden. Die Teufe ist 550 m, die Gewichte sind:

Förderkorb  $F = 6000 \text{ kg}$ , Förderseil = Unterseil =  $S = 5600 \text{ kg}$ , Wagen-  
gewicht (6 leere Wagen)  $W = 2400 \text{ kg}$ , Nutzlast = 6 Wagenfüllungen  
Kohle je  $600 \text{ kg} = N = 3600 \text{ kg}$ . Reduziertes Seilscheibengewicht

$$G_{\text{Sch}} = 2300 \text{ kg.}$$

Das Leergewicht beider Seilseiten ist vollkommen ausgeglichen, es beträgt

$$G = F + W + S = 6000 + 2400 + 5600 = 14000 \text{ kg.}$$

Beim Ziehen ist die hochgehende Seil-  
seite noch mit der  
Nutzlast  $N = 3600 \text{ kg}$   
belastet.

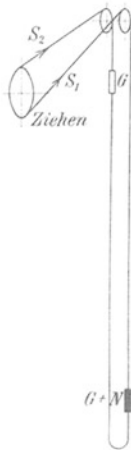


Abb. 297.  
Die Seilscheiben-  
maschine.

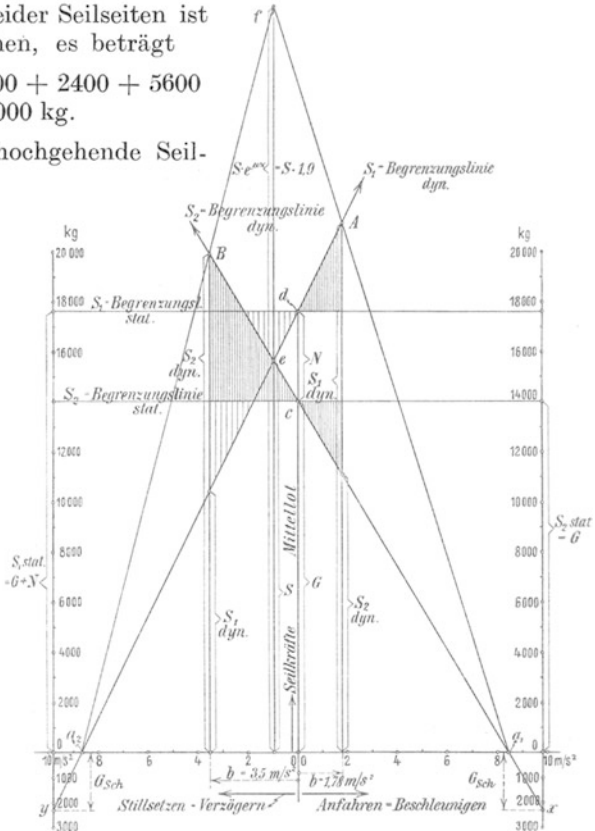


Abb. 298. Das Ziehen der Last.

In Abb. 298 sind die statischen Seillasten als Ordinaten aufgetragen,

rechts die Ordinate  $S_2 = G = 14000 \text{ kg}$ ,

links die Ordinate  $S_1 = G + N = 17600 \text{ kg}$ .

Diese Ordinaten sind nach unten verlängert um die Größe

$$G_{\text{Sch}} = 2300 \text{ kg.}$$

Die Ordinatenendpunkte sind  $x$  und  $y$ .

Auf dem Mittelrot reicht bis Punkt  $c$  die statische Seillast  $S_2 = G$  und bis Punkt  $d$  die statische Seillast  $S_1 = G + N$ . Durch

den Punkt  $c$  geht die Begrenzungslinie für die statischen Seilkräfte  $S_2$ , durch den Punkt  $d$  die Begrenzungslinie für die statischen Seilkräfte  $S_1$ .

Zieht man  $xc$ , so hat man die Begrenzungslinie für die dynamischen Seilkräfte  $S_2$ , sie schneidet die Beschleunigungslinie im Punkte  $a_1$ . Zieht man  $yd$ , so hat man die Begrenzungslinie für die dynamischen Seilkräfte  $S_1$ , sie schneidet die Verzögerungslinie im Punkte  $a_2$ .

Beide Bewegungslinien schneiden sich im Punkte  $e$ , hier sind die dynamischen Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$  gleich groß. In der Figur ist die Ordinate des Punktes  $e$  mit  $S$  bezeichnet.  $S$  wird vergrößert auf  $S \cdot e''^\alpha =$  Ordinate des Punktes  $f$ , und zwar ist in der Figur

$$e''^\alpha = 1,9 \quad (\text{für } \alpha^0 = 184^0 \text{ und } \mu = 0,20).$$

Verbindet man  $f$  mit den Fußpunkten  $a_1$  und  $a_2$ , so entstehen die Schräglinien  $fa_1$  und  $fa_2$ , deren Ordinaten um das  $e''^\alpha$ -fache größer sind als die  $S$ -Ordinaten.

**Das Anfahren:** Vor dem Anfahren sind die statischen Seilkräfte

$$\begin{aligned} S_1 &= G + N = \text{Ordinate } 0d, \\ S_2 &= G = \text{Ordinate } 0c. \end{aligned}$$

Durch die Anfahrbeschleunigung wächst  $S_1$  nach der Linie  $dA$ , während  $S_2$  abnimmt nach der Linie  $ca_1$ . Im Punkte  $A$  ist der höchste Reibungswert erreicht. Die Senkrechte durch den Punkt  $A$  liefert auf der Beschleunigungslinie die höchste zulässige Anfahrbeschleunigung

$$b = 1,78 \text{ m/sek}^2.$$

**Das Stillsetzen:** Bei gleichförmiger Fahrt sind die statischen Seilkräfte

$$\begin{aligned} S_1 &= G + N = \text{Ordinate } 0d, \\ S_2 &= G = \text{Ordinate } 0c. \end{aligned}$$

Da das Stillsetzen durch Verzögerung erfolgt, so ändern sich die Seilkräfte.  $S_1$  nimmt ab nach der Linie  $da_2$ ,  $S_2$  nimmt zu nach der Linie  $cB$ . Im Punkte  $B$  ist der höchste Reibungswert erreicht. Die Senkrechte durch  $B$  liefert auf der Verzögerungslinie die höchste zulässige Verzögerung

$$b = 3,5 \text{ m/sek}^2.$$

Die durch die Fahrbremse hervorgerufene Verzögerung soll nach der Bergpolizei-Verordnung  $b = 2 \text{ m/sek}^2$  gewährleisten, mithin ist in diesem Fall bezüglich der Bremsverzögerung eine

$$\ominus = \frac{3,5}{2} = 1,75 \text{ fache Sicherheit}$$

gegen Seilrutsch beim Stillsetzen vorhanden. Die Bremsverzögerung könnte um 75% gesteigert werden, erst dann wäre der Seilrutsch zu erwarten.

e) Berücksichtigung der Schachtreibung beim Ziehen.

Unter Schachtreibung versteht man die Reibung des Förderkorbes an den Spurlatten, den Luftwiderstand und die Zapfenreibung der Seilscheibe. Eine zahlenmäßige Festlegung dieser Werte ist natürlich sehr schwer und unsicher. Im Schrifttum rechnet man die Schachtreibung im Mittel mit

6% der Nutzlast ein, so daß die zusätzliche Reibungsbelastung

$$R = 0,06 \cdot N$$

ist.

In unserm Beispiel ist  $N = 3600$  kg, es wäre demnach

$$R = 0,06 \cdot 3600 = 216 \text{ kg.}$$

Wegen der Unsicherheit dieser Größe werde gerechnet mit

$$R = 300 \text{ kg.}$$

Beim Ziehen der Nutzlast  $N$  vergrößert die Reibung die Seillast im ziehenden Seil, während sie im niedergehenden Seil die Seillast vermindert. Das ist zeichnerisch in Abb. 299 dargestellt.

Die statische Seillast

$$S_1 = G + N$$

$$= \text{Ordinate } Od$$

wird um den Betrag  $R$  vergrößert, d. h. die Ordinate  $Od$  wird um den

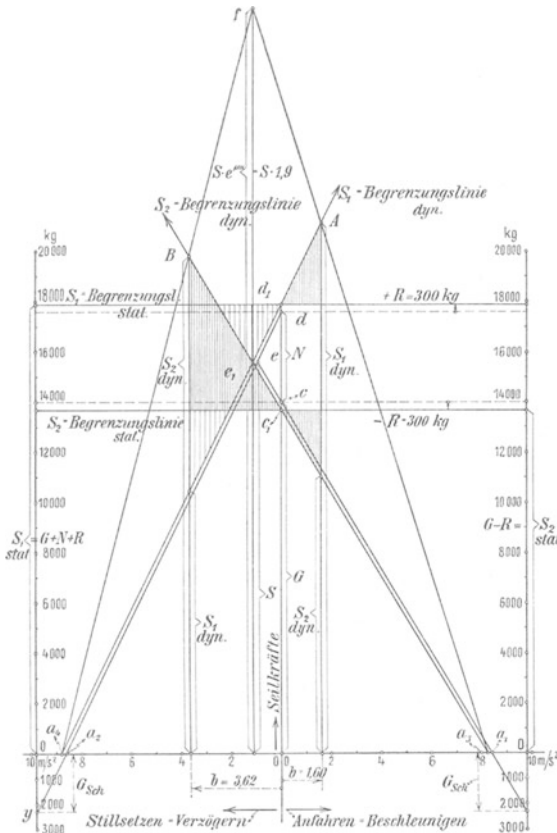


Abb. 299. Die Berücksichtigung der Schachtreibung.

Betrag  $dd_1 = R = 300$  kg vergrößert. Die Horizontale durch  $d_1$  bildet dann die Begrenzungslinie für die statische Seillast  $S_1$ .

Die statische Seillast

$$S_2 = G = \text{Ordinate } Oc$$

wird um den Betrag  $R$  vermindert, d. h. die Ordinate  $Oc$  wird um den Betrag  $cc_1 = R = 300$  kg verkleinert. Die Horizontale durch  $c_1$  bildet dann die Begrenzungslinie für die statische Seillast  $S_2$ .

Die Begrenzungslinien für die dynamischen Seilkräfte findet man wie früher, indem man die schrägen Linien  $dy$  und  $cx$  zieht, sie schneiden sich im Punkte  $e$ . Diese Linien gelten aber nur, wenn die



Schachtreibung  $R$  nicht berücksichtigt wird. Soll sie berücksichtigt werden, so müssen diese Linien durch die Punkte  $d_1$  und  $c_1$  gehen. Das macht man so, indem man durch  $d_1$  eine Parallele zu  $dy$  und durch  $c_1$  eine Parallele zu  $cx$  legt.

Diese schrägen Linien, welche sich im Punkte  $e_1$  schneiden, sind dann die Begrenzungslinien für die dynamischen Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$ . Sie liefern unten auf der Verzögerungs- bzw. Beschleunigungslinie die Fußpunkte  $a_4$  und  $a_3$ .

Im Schnittpunkt  $e_1$  sind die dynamischen Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$  gleich groß. In der Figur ist die Ordinate des Punktes  $e_1$  mit  $S$  bezeichnet.  $S$  wird vergrößert auf

$$S \cdot e^{\mu\alpha} = S \cdot 1,9 = \text{Ordinate des Punktes } f.$$

Verbindet man  $f$  mit den Fußpunkten  $a_3$  und  $a_4$ , so entstehen die Schräglinien  $fa_3$  und  $fa_4$ , deren Ordinaten um das  $e^{\mu\alpha}$ -fache größer sind als die  $S$ -Ordinaten.

**Das Anfahren:** Beim Anfahren wachsen die Seilkräfte  $S_1$  nach der Linie  $d_1A$ , während die Seilkräfte  $S_2$  nach der Linie  $c_1a_3$  abnehmen. Im Punkte  $A$  ist der höchste Reibungswert, den die Treibscheibe geben kann, erreicht. Die Senkrechte durch  $A$  liefert auf der Beschleunigungslinie die höchste zulässige Anfahrbeschleunigung

$$b = 1,60 \text{ m/sek}^2,$$

Wir fanden früher ohne Berücksichtigung der Schachtreibung den Wert

$$b = 1,78 \text{ m/sek}^2.$$

Man sieht, beim Anfahren verschlechtert die Schachtreibung die Sicherheit gegen Seilrutschen, sie ist also zu berücksichtigen.

**Das Stillsetzen:** Beim Stillsetzen werden durch die Massenverzögerungen die Seilkräfte sich folgendermaßen ändern:

$S_2$  wird vergrößert nach der Linie  $c_1B$ ,  $S_1$  wird vermindert nach der Linie  $d_1a_4$ . Im Punkte  $B$  ist der höchste Reibungswert, den die Treibscheibe geben kann, erreicht. Die Senkrechte durch  $B$  liefert auf der Verzögerungslinie die höchste zulässige Verzögerung

$$b = 3,62 \text{ m/sek}^2.$$

Ohne Berücksichtigung der Schachtreibung war gefunden worden

$$b = 3,50 \text{ m/sek}^2.$$

Man sieht, beim Stillsetzen verbessert die Schachtreibung die Sicherheit gegen Seilrutschen. Würde man sie nicht berücksichtigen, so würde man nicht unsicherer gehen.

## 32. Turmfördermaschinen mit Gegenscheibe (Ablenkscheibe).

Elektrische Fördermaschinen werden mit Vorteil in den Förderturm gesetzt, weil sie keine schwingenden Massen haben. Alsdann läßt sich der Umschlingungsbogen des Seils auf der Treibscheibe durch eine

Gegenscheibe vergrößern, wodurch die Seilrutschgefahr vermindert wird.

In Abb. 300 ist eine neuzeitliche Anlage<sup>1</sup> dieser Art dargestellt. Die Gewichte sind außerordentlich groß. Die ausgeglichenen Lasten sind auf jeder Seilseite:

- Korbgewicht . . . . . = 10000 kg
- Wagenleergewicht . . . = 6600 „ (12 Wagen)
- Seilgewicht. . . . . = 10000 „
- Gesamtgewicht  $G = 26600$  kg

Die Nutzlast je Wagen beträgt 750 kg, so daß die unausgeglichene Nutzlast

$$N = 750 \cdot 12 = 9000 \text{ kg}$$

beträgt.

Das Treibscheibengewicht ist 26400 kg, das Gewicht der Ablenkscheibe = 6100 kg.

Für die Güterförderung ist die Fahrgeschwindigkeit

$$v = 16 \text{ m/sek,}$$

für die Seilfahrt (70 Personen auf einem Korb)

$$v = 10 \text{ m/sek.}$$

Der Umspannungsbogen auf der Treibscheibe ist

$$\alpha = 211^\circ$$

$$\text{Bogenmaß } \alpha = 2\pi \cdot \frac{211}{360} = 3,682.$$

Mit  $\mu = 0,20$  wird der Wert

$$e^{\mu\alpha} = 2,718^{0,20 \cdot 3,682} = 2,09.$$

Rechnet man für die Schachtreibung 6% der Nutzlast, so wird die Schachtreibungsgröße

$$R = 0,06 \cdot N = 0,06 \cdot 9000 = 540 \text{ kg.}$$

In der nachfolgenden Rechnung ist gerechnet mit

$$R = 600 \text{ kg}$$

für jede Seilseite.

### a) Das Ziehen der Nutzlast $N = 9000$ kg.

In Abb. 300 befindet sich der volle Korb auf der linken Seite unten, das Seil zieht mit der Kraft  $S_1$  an der Treibscheibe, der Korb mit leeren Wagen befindet sich auf der rechten Seite oben, sein Seil zieht mit der Kraft  $S_2$  an der Treibscheibe.

Die Seilrutschgefahr ist in Abb. 301 zeichnerisch untersucht. Die statische Seillast

$$S_1 = G + N = \text{Ordinate } Od = 35600 \text{ kg}$$

wird beim Hochfahren des Korbes um den Betrag

$$dd_1 = R = 600 \text{ kg}$$

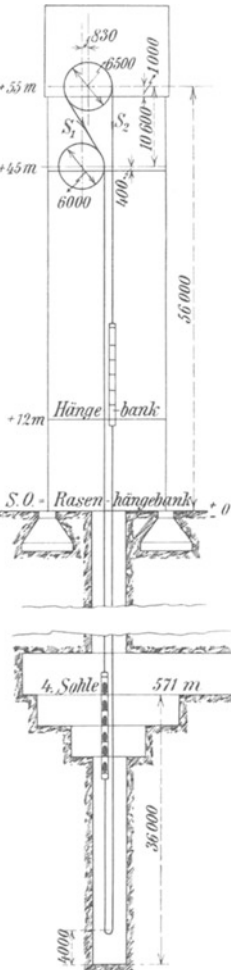


Abb. 300. Turmfördermaschine mit Gegenscheibe.

<sup>1</sup> Fördereinrichtung auf Schacht IV der Zeche Königsborn.

vergrößert. Die Horizontale durch  $d_1$  bildet dann die Bewegungslinie für die statische Seillast  $S_1 = G + N + R = 36200$  kg. Die statische Seillast

$$S_2 = G = \text{Ordinate } 0c = 26600 \text{ kg}$$

wird beim Heruntergehen des Korbes um den gleichen Betrag

$$R = c c_1 = 600 \text{ kg}$$

vermindert. Die Horizontale durch  $c_1$  bildet die Bewegungslinie für die statische Seillast  $S_2 = G - R = 26000$  kg.

Beim **Anfahren** hat das Seil  $S_1$  die Ablenkscheibe mitzubeschleunigen. Man hat daher das reduzierte Seilscheibengewicht

$$G_{\text{Sch}} = \frac{1}{2} \cdot 6100 = 3050 \text{ kg}$$

in der Kräfteordinate links nach unten hin als Ordinate  $0y$  noch zuzusetzen.

Die Begrenzungslinien für die dynamischen Seilkräfte findet man nun wie früher, indem man die schrägen Linien

$$dy \text{ und } cx$$

zieht. Sie schneiden sich im Punkte  $e$ . Diese Linien gelten bekanntlich nur dann, wenn die Schachtreibung  $R$  unberücksichtigt bleibt.

Durch die Schachtreibung verändert sich

$S_1$  von der Größe  $0d$  auf die Ordinatengröße  $0d_1$ ,

$S_2$  von der Größe  $0c$  auf die Ordinatengröße  $0c_1$ .

Man muß daher durch  $d_1$  eine Parallele zu  $dy$  und durch  $c_1$  eine Parallele zu  $cx$  legen.

Diese schrägen Linien schneiden sich im Punkte  $e_1$ , sie sind die Begrenzungslinien für die dynamischen Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$ .

Die Ordinate des Punktes  $e_1$  ist in der Figur mit  $S$  bezeichnet, sie wird vergrößert auf

$$S \cdot e^{\mu\alpha} = S \cdot 2,09 = \text{Ordinate des Punktes } f.$$

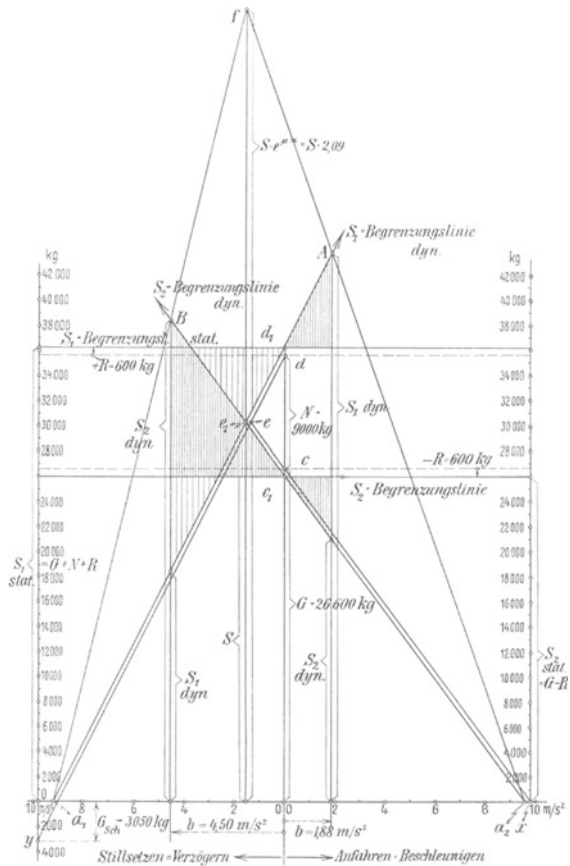


Abb. 301. Ziehen der Nutzlast.

Verbindet man  $f$  mit den Fußpunkten  $a_1$  und  $a_2$ , so entstehen die Schräglinien  $fa_1$  und  $fa_2$ , deren Ordinaten um das  $e^{\mu\alpha}$ -fache größer sind als die Ordinaten der ersten Schräglinien.

Beim Anfahren wachsen die Seilkräfte  $S_1$  nach der schrägen Linie  $d_1A$ , gleichzeitig nehmen die Seilkräfte  $S_2$  nach der schrägen Linie  $c_1a_2$  ab.

Im Punkte  $A$  ist der höchste Reibungswert, den das Seil auf der Treibscheibe findet, erreicht. Die Senkrechte durch  $A$  liefert unten auf der Beschleunigungslinie die höchste zulässige Anfahrbeschleunigung

$$b = 1,88 \text{ m/sek}^2.$$

### b) Das Stillsetzen.

Durch die Massenverzögerungen verändern sich die Seilkräfte:

$$\begin{aligned} S_2 &\text{ vergrößert sich nach der Linie } c_1B, \\ S_1 &\text{ vermindert sich nach der Linie } d_1a_1. \end{aligned}$$

Im Punkte  $B$  ist der höchste Reibungswert, den das Seil auf der Treibscheibe findet, erreicht. Die Senkrechte durch  $B$  liefert auf der Verzögerungslinie unten die höchste zulässige Bremsverzögerung

$$b = 4,50 \text{ m/sek}^2.$$

### c) Das Einhängen bei der Seilfahrt.

Über das Einhängen bei der Seilfahrt sagt die Bergpolizei-Verordnung für die Seilfahrt:

„Beim Einhängen von Personen bei unbelastetem Gegenkorb darf die Seilfahrtgeschwindigkeit bei Dampffördermaschinen höchstens 6 m/sek, bei elektrischen Fördermaschinen höchstens 8 m/sek betragen, falls nicht ein entsprechender Gewichtsausgleich vorgenommen ist.“ (§ 58, Absatz 2.)

„Beim Einhängen von Leuten mit unbelastetem Gegenkorb ist der Fördermaschinist vom Anschläger zu benachrichtigen, daß die Seilfahrt mit überhängender Last stattfindet.“ (§ 63, Absatz 10.)

Die Gefährlichkeit des Fahrens bei eingehängter Last erfordert also besondere Vorsichtsmaßnahmen, man schreibt eine geringere Fahrgeschwindigkeit vor und zwingt dadurch den Maschinisten zu vorsichtigem Fahren. Besondere Vorsicht erfordert aber die Betätigung der Fahrbremse. Und wenn die Bergpolizei-Vorschrift besagt, daß die Fahrbremse **mindestens** eine Verzögerung von

$$b = 2 \text{ m/sek}^2$$

gewährleisten soll, so ist damit die Sicherheit bei der Seilfahrt nicht gehoben, weil dann die Fahrbremsen für größere Verzögerungen gebaut werden, die so groß sein können, daß ein Seilrutschen hervorgerufen wird.

Für vorstehende Turmfördermaschine wurde z. B. nach dem angegebenen zeichnerischen Verfahren diese Seilrutschgefahr untersucht. Hierbei wurde angenommen, daß der obere Korb mit 70 Personen besetzt wird, entsprechend einer Nutzlast von

$$N = 5250 \text{ kg.}$$

Der Gegenkorb soll unbelastet bleiben. Dann ist auf beiden Seiten das Leergewicht

1. Korbleergewicht . . . . = 10000 kg
  2. Seilgewicht . . . . . = 10000 „
- 
- Gesamtleergewicht = 20000 kg =  $G$ .

Die Schachtreibung wurde mit  $R = 400$  kg in Rechnung gestellt. Alsdann ergab sich beim Einhängen

- die höchste zulässige Anfahrbeschleunigung =  $4,10$  m/sek<sup>2</sup>,
- die höchste zulässige Bremsverzögerung =  $2,38$  m/sek<sup>2</sup>.

Demnach liegt hier Gefahr vor, daß bei eingehängter Seilfahrtlast, falls die Bremsverzögerung über  $2$  m/sek<sup>2</sup> steigt, ein Seilrutschen eintritt.

### 33. Die Fallmaschine.

Um eine einfache Scheibe sei ein Faden geschlungen (Abb. 302) und an diesem ein Gewicht  $G$  befestigt. Unter dem Einfluß der Gewichtskraft wird der Scheibe unter Herabsinken des Gewichtes eine Drehbewegung erteilt. Das Gewicht wird mit der Beschleunigung  $b$  sinken. Die Größe dieser Beschleunigung läßt sich nach dem Beschleunigungsgesetz

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Beschleunigungskraft}$$

berechnen. Die Massen, welche zu beschleunigen sind, sind

1. die Scheibe mit dem Gewicht  $G_S$ ,
2. das Gewicht  $G$ .

Ist  $M_S$  die wirkliche Masse der Scheibe, so ist die auf den Umfang reduzierte Masse =  $\frac{1}{2} M_S$ . Die Masse des Gewichtes sei  $M$ .

Die Beschleunigungskraft ist das angehängte Gewicht selbst, dafür setzen wir

$$G = M \cdot g,$$

dann ist nach dem Beschleunigungsgesetz

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} M_S + M) \cdot b &= M \cdot g \\ b &= \frac{M \cdot g}{\frac{1}{2} M_S + M} \end{aligned}$$

Ist z. B.  $M = 2,1$  und  $M_S = 0,8$ , so ist

$$b = \frac{2,1 \cdot 9,81}{\frac{1}{2} \cdot 0,8 + 2,1} = 8,25 \text{ m/sek}^2.$$

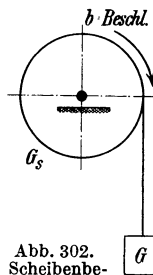


Abb. 302. Scheibenbeschleunigung bei sinkendem Gewicht.

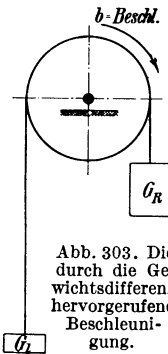


Abb. 303. Die durch die Gewichts-differenz hervorgerufene Beschleunigung.

Man kann nun um die Scheibe einen Faden legen und beide Seiten ungleich belasten (Abb. 303), dann wird die Scheibe durch das Übergewicht der einen Seite bewegt. Das Übergewicht sinkt mit der Beschleunigung  $b$ . Die Masse auf der linken Seite sei  $M_L$ , auf der rechten Seite  $M_R$ , dann

sind die zu beschleunigenden Massen

$$M_l + \frac{1}{2} M_S + M_R.$$

Die Beschleunigungskraft ist die Gewichts­differenz

$$G_R - G_l = g \cdot M_R - g \cdot M_l = g \cdot (M_R - M_l).$$

Nach dem Beschleunigungsgesetz ist:

$$(M_l + \frac{1}{2} M_S + M_R) \cdot b = g \cdot (M_R - M_l),$$

$$\frac{b}{g} = \frac{M_R - M_l}{M_l + \frac{1}{2} M_S + M_R}.$$

Ist z. B.  $M_l = 2,0$ , so wird

$$\frac{b}{g} = \frac{2,1 - 2,0}{2,0 + 0,4 + 2,1} = \frac{0,1}{4,5} = \frac{1}{45},$$

$$b = \frac{1}{45} \cdot 9,81 = 0,218 \text{ m/sek}^2.$$

Macht man die Massendifferenz  $M_R - M_l$  sehr klein im Verhältnis zur ganzen Massensumme, so wird die Beschleunigung  $b$  auch sehr klein, so daß man diese Beschleunigung durch direkte Beobachtung leicht bestimmen kann. Es kann daher durch diese Fallmaschine die Beschleunigung  $b$  experimentell bestimmt und daraus die Beschleunigung  $g$  des freien Falls berechnet werden. Die Formel lautet dann umgestellt

$$g = b \cdot \frac{M_l + \frac{1}{2} M_S + M_R}{M_R - M_l}.$$

Für die Massen können auch die Gewichte eingesetzt werden, dann ist

$$g = b \cdot \frac{G_l + \frac{1}{2} G_S + G_R}{G_R - G_l}.$$

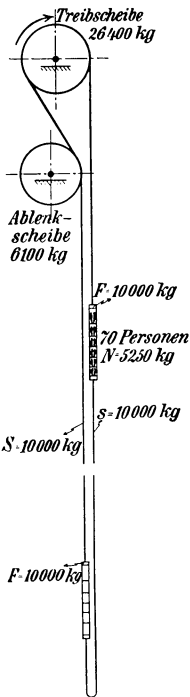


Abb. 304. Das Fahren mit eingehängter Last.

Das gleiche Spiel wie bei der Fallmaschine vollzieht sich bei der Fördermaschine, wenn z. B. bei der Seilfahrt mit eingehängter Last gefahren wird und der Gegenkorb unbelastet ist. Die Turmfördermaschine in Abb. 304 habe die eingetragenen Lasten. Die zu beschleunigenden Massen sind:

1. Das reduzierte Gewicht der Ableskscheibe =  $\frac{6100}{2} = 3050 \text{ kg}$
2. Das reduzierte Treibscheibengewicht =  $\frac{26400}{2} = 13200 \text{ ,,}$
3. Leerlast linke Seite =  $10000 + 10000 \dots = 20000 \text{ ,,}$
4. Leerlast rechte Seite =  $10000 + 10000 \dots = 20000 \text{ ,,}$
5. 70 Personen als eingehängte Last  $N \dots = 5250 \text{ ,,}$

---

Gesamtgewicht der Massen = **61500 kg = G**

Der Gewichtsüberschuß der eingehängten Last  $N = 5250 \text{ kg}$  ist die Beschleunigungskraft, also ist die Beschleunigung, mit welcher der

beladene Korb sinkt,

$$b = g \cdot \frac{N}{G} = 9,81 \cdot \frac{5250}{61500} = 9,81 \cdot \frac{1}{11,72},$$

$$b = 0,836 \text{ m/sek}^2.$$

Sobald also die Bremse losgelassen wird, setzt sich die Fördermaschine ohne Maschinenkraft mit dieser Beschleunigung in Bewegung.

Die höchste zulässige Fahrgeschwindigkeit

$$v = 8 \text{ m/sek}$$

wird in

$$t = \frac{v}{b} = \frac{8}{0,836} = 9,6 \text{ Sekunden}$$

bereits erreicht. In dieser Zeit ist der Anlaufweg

$$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,836 \cdot 9,6^2 = 38,4 \text{ m.}$$

Nach Zurücklegung dieses Weges muß der Fördermaschinist schon die Fahrbremse auflegen, um die Fahrgeschwindigkeit einzuhalten, er muß die Beschleunigung  $b = 0,836 \text{ m/sek}^2$  vernichten, indem er mit der Fahrbremse die gleiche Verzögerung  $b = 0,836 \text{ m/sek}^2$  erzeugt, so daß Beschleunigung und Verzögerung sich aufheben.

Soll unten beim Stillsetzen der Verzögerungsweg = Beschleunigungsweg = 38,4 m sein, so muß 38,4 m vor Erreichung des Füllortes die Bremse noch eine weitere Verzögerung von  $b = 0,836 \text{ m/sek}^2$  erzeugen, so daß für das Stillsetzen eine Bremsverzögerung von

$$b = 2 \cdot 0,836 = 1,672 \text{ m/sek}^2$$

erforderlich ist.

Wenn die Fahrbremse daher eine höchste Bremsverzögerung von  $2 \text{ m/sek}^2$  gewährleisten würde, so wäre diese Bremsverzögerung für die Seilfahrt durchaus ausreichend.

Bei einem Gesamtfahrtweg von 593 m würde die Seilfahrt folgende Zeit in Anspruch nehmen:

1. für den Beschleunigungsweg 38,4 m . . . . .  $t_1 = 9,6 \text{ sek}$
2. für den Verzögerungsweg 38,4 m . . . . .  $t_2 = 9,6 \text{ ,,}$
3. für volle Fahrt auf dem Wege  $593 - 76,8 = 516,2 \text{ m}$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{516,2}{8} \text{ . . . . . } = 64,7 \text{ ,,}$$

---

Gesamtzeit  $t = 83,9 \text{ sek}$

### 34. Die dynamische Seilbelastung und die Anfahrkräfte beim Förderzug.

In Abb. 305 wird die Last  $G$  mit der Beschleunigung  $b$  hochgezogen. Das Seil, welches die statische Last  $G$  zu tragen hat, wird durch die Beschleunigungskraft  $\frac{G}{g} \cdot b$  zusätzlich belastet. Man nennt diesen Zuwachs der Belastung die dynamische Seilbelastung. Die Gesamtbelastung des Seiles ist

$$S = G + \frac{G}{g} \cdot b.$$

Welche Anfahrbeschleunigung  $b$  möglich ist, hängt von der Maschinenstärke ab. Sie wird in der Regel zwischen

$$b = 0,5 - 1,0 - 1,5 \text{ m/sek}^2$$

liegen.

Läßt man in Abb. 305 die Last  $G$  sich senken und wirft die Bremse auf, so entsteht die Bremsverzögerung  $b$ , welche ebenfalls die zusätzliche dynamische Belastung  $\frac{G}{g} \cdot b$  bringt und es entsteht wieder eine Gesamtbelastung

$$S = G + \frac{G}{g} \cdot b.$$

Wie groß die Bremsverzögerung ist, hängt von der Stärke der Bremse ab. Nach der Bergpolizei-Vorschrift soll die Fahrbremse mindestens eine Verzögerung von

$$b = 2 \text{ m/sek}^2$$

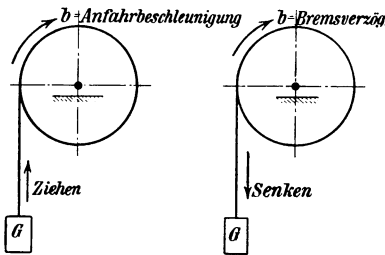


Abb. 305. Anfahrbeschleunigung und Bremsverzögerung.

gewährleisten. Der Höchstwert ist also nicht festgelegt. Bei der Untersuchung der Seilrutschgefahr haben wir aber gefunden, daß bei bestimmten Verzögerungswerten das Seil rutscht. Diese Grenzwerte bilden naturgemäß bei Treibscheibenmaschinen auch die höchsten Verzögerungswerte, so daß die Treibscheibe als das Sicherheitsventil für die Seilbelastung anzusprechen ist.

Bei der Untersuchung der Seilrutschgefahr fanden wir zum Beispiel bei eingehängter Nutzlast

$$N = 9000 \text{ kg}$$

den höchsten Verzögerungswert zu

$$b = 2,15 \text{ m/sek}^2,$$

wie groß wird in diesem Fall die Gesamtbelastung des Seiles ?

$$\text{Statische Last } G = \begin{cases} 1. \text{ Korbgewicht} & = 10000 \text{ kg} \\ 2. \text{ 12 Wagen leer} & = 6600 \text{ ..} \\ 3. \text{ Seilgewicht} & = 10000 \text{ ..} \\ 4. \text{ Nutzlast} & = 9000 \text{ ..} \end{cases}$$

$$G = 35600 \text{ kg}$$

$$\text{Masse} = \frac{35600}{9,81} = 3630$$

$$\text{dynamische Belastung} = M \cdot b = 3630 \cdot 2,15 = 7800 \text{ kg.}$$

Die Gesamtbelastung des Seiles ist demnach

$$S = G + M \cdot b = 35600 + 7800 = 43400 \text{ kg,}$$

d. i. das  $\frac{43400}{35600} = 1,22$  fache der statischen Seilbelastung.

Ebenfalls ist die Seilrutschgefahr beim Ziehen der Nutzlast  $N = 9000 \text{ kg}$  untersucht, hierbei ist die höchste zulässige Bremsverzögerung beim Stillsetzen gefunden zu

$$b = 4,50 \text{ m/sek}^2,$$

wie groß wird nun die Gesamtbelastung des Seiles ?



Die statische Seillast auf der Leerseite ist

$$G = 26\,600 \text{ kg}$$

$$M = \frac{G}{g} = \frac{26\,600}{9,81} = 2715,$$

dynamische Seillast =  $M \cdot b = 2715 \cdot 4,50 = 12\,200 \text{ kg}$ ,

Gesamtbelastung =  $G + M \cdot b = 26\,600 + 12\,200 = 38\,800 \text{ kg}$ .

Obwohl hier die Gesamtbelastung das

$$\frac{38\,800}{26\,600} = 1,45 \text{ fache}$$

der statischen Seilbelastung ist, bleibt der Wert 38 800 kg hinter dem vorher errechneten Wert 43 400 kg zurück, so daß eine dynamische Überlastungsgefahr des Seils bei Treibscheibenförderung nicht zu befürchten ist.

Die Anfahrkräfte, welche die Maschine aufzubringen hat, sind ebenfalls von den Massen abhängig, welche zu beschleunigen sind. In Abb. 306 hänge an jedem Seilende das gleiche Gewicht  $G$ , dann ist beim Anfahren mit der Beschleunigung  $b$

$$\text{Seilzug } S_1 = G + \frac{G}{g} \cdot b,$$

$$\text{Seilzug } S_2 = G - \frac{G}{g} \cdot b.$$

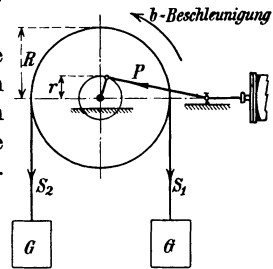


Abb. 306. Die Anfahrkräfte.

Die Seilbelastungsdifferenz

$$S_1 - S_2 = \frac{G}{g} \cdot b + \frac{G}{g} \cdot b = \frac{2 \cdot G}{g} \cdot b$$

muß von der Maschinenkraft überwunden werden. Man sieht, die Maschine hat beide Gewichte  $G$  zu beschleunigen, sowohl das niedergehende wie das hochgehende. Würde an der Scheibe eine Schubstange am Kurbelradius  $r$  angreifen, so würde die Schubstangenkraft  $P$  sich errechnen aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P \cdot r = (S_1 - S_2) \cdot R,$$

$$P \cdot r = \frac{2G}{g} \cdot b \cdot R,$$

$$P = \frac{2G}{g} \cdot b \cdot \frac{R}{r}.$$

Beim Förderzug Abb. 307 sind z. B. folgende Gewichte zu beschleunigen:

Leergewichte der rechten Seite . . . . .	= 26 600 kg
Leergewichte der linken Seite . . . . .	= 26 600 „
reduziertes Treibscheibengewicht = $\frac{1}{2} \cdot 26\,600$ . . . . .	= 13 200 „
reduziertes Ablenkscheibengewicht = $\frac{1}{2} \cdot 6\,100$ . . . . .	= 3 050 „
Nutzlast . . . . .	= 9 000 „

Summe aller Gewichte = 78 450 kg

$$M = \frac{78\,450}{9,81} = 8000.$$

Fährt die Maschine mit der Beschleunigung

$$b = 1,5 \text{ m/sek}^2$$

an, so wird die Beschleunigungskraft am Umfang der Treibscheibe

$$P = 8000 \cdot 1,5 = 12000 \text{ kg.}$$

Außerdem ist die Nutzlast  $N$  als Übergewicht der einen Seite zu heben, so daß die Maschinenkraft am Umfang der Treibscheibe sein muß

$$K = P + N = 12000 + 9000 = 21000 \text{ kg.}$$

Sind die Massen auf die normale Fahrgeschwindigkeit  $v$  gebracht, so hat die Maschine nur die Kraft  $N = 9000 \text{ kg}$  aufzubringen. Die Anfahrkraft ist also das

$$\frac{K}{N} = \frac{21000}{9000} = 2,34 \text{ fache}$$

der normalen Fahrkraft.

Wir sehen, trotz der verhältnismäßig kleinen Anfahrbeschleunigung von  $b = 1,5 \text{ m/sek}^2$  ist die Anfahrkraft schon um 134% größer als die normale Fahrkraft. Wollte man daher noch höhere Anfahrbeschleunigungen, so würden die Fördermaschinen gewaltige Spitzenleistungen aufbringen müssen. Man käme zu schweren Maschinen, die bei normaler Fahrbelastung nur schwach belastet und mit geringem Wirkungsgrad liefen.

Um die Massen zu verringern, hat man vorgeschlagen, Gefäßförderung zu bauen, d. h. ein an das Seil gehängtes Gefäß nimmt die Kohlen unmittelbar auf, so daß dann das Leergewicht der Wagen wegfällt. Außerdem könnte man das Gefäß selbst aus Leichtmetall (Duralumin) herstellen. Welcher Vorteil springt bei dieser Anordnung für das vorstehend durchgerechnete Beispiel heraus?

Das Leergewicht der Wagen auf beiden Seiten fällt fort, das sind

$$2 \cdot 6600 = 13200 \text{ kg,}$$

Gefäßgewicht = 5000 kg anstatt Förderkorb = 10000 kg, hierdurch tritt eine weitere Gewichtsverminderung von

$$2 \cdot 5000 = 10000 \text{ kg}$$

ein, so daß die Gewichtsverminderung

$$13200 + 10000 = 23200 \text{ kg}$$

beträgt. Es ist daher nur folgendes Gewicht zu beschleunigen

$$78450 - 23200 = 55250 \text{ kg} = G$$

$$M = \frac{G}{g} = \frac{55250}{9,81} = 5630.$$

$$\text{Beschleunigungskraft } P = M \cdot b = 5630 \cdot 1,5 = 8450 \text{ kg.}$$

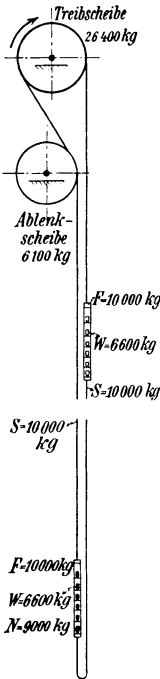


Abb. 307. Die Anfahrkräfte eines Förderzuges.

Bei der Nutzlast  $N = 9000$  kg muß die Maschinenkraft am Umfang der Treibscheibe sein

$$K = P + N = 8450 + 9000 = 17450 \text{ kg,}$$

d. h. in diesem Fall ist die Anfahrkraft

$$\text{das } \frac{K}{N} = \frac{17450}{9000} = 1,94 \text{ fache}$$

der normalen Fahrkraft. Die Spitzenleistung ist damit von 134% auf 94% zurückgegangen. Das Verhältnis wird noch günstiger, wenn man die Seilgewichtsparsparnis noch in Rechnung stellt, denn bei kleineren Seillasten wird entsprechend der Gewichtsverminderung auch das Seil dünner und leichter. Die Gefäßförderung bringt daher unbedingt kraftwirtschaftliche Vorteile.

### 35. Der Hammerrückschlag.

#### a) Der Hammer arbeitet horizontal.

Der Drucklufthammer macht bei jedem Schlag eine rückläufige Bewegung, welche von der Muskelkraft des Arbeiters aufgefangen werden muß. Um den Rückstoß zu untersuchen, werde der Hammer unseres



Abb. 308. Das Aufzeichnen des Rücklaufweges.

früheren Beispiels auf zwei Walzen ruhend gedacht, so daß er zwanglos ohne Gegendruck sich rückläufig bewegen kann.

In Abb. 308 ist die Hammerlagerung dargestellt. An dem Griff des Hammers sei ein Blechstreifen befestigt, dessen Spitze mit einem Schreibstift die Bewegung aufzeichnen kann. Unter dem Schreibstift liege ein Papierband, dann wird die rückläufige Bewegung des Hammers durch den Schreibstift einfach eine kurze horizontale Linie  $ab$  aufzeichnen. Bewegt man aber das Papierband mit konstanter Geschwindigkeit, so entsteht eine schräge Linie oder eine Kurve  $ab_1$ .

Das Hammergewicht ohne Kolben und Spitzseisen betrage  $G = 6,830$  kg, dieses Hammergewicht wird durch die Reaktionskraft der Kolbenkraft, welche  $P = 28$  kg betrage, rückläufig beschleunigt. Die Hammermasse beträgt

$$\frac{G}{g} = \frac{6,830}{9,81} = 0,696 = m.$$

Nach dem Beschleunigungsgesetz ist

$$b = \frac{P}{m} = \frac{28}{0,696} = 40,2 \text{ m/sek}^2.$$

Mit dieser Beschleunigung bewegt sich der Hammer rückwärts, wenn angenommen wird, daß keinerlei Gegenkraft die Bewegung hindert. Da der Schlaghub nach der früheren Aufgabe (siehe S. 228)  $t_1 = 0,025$  Sekunden dauert, so ist der Rücklaufweg in dieser Zeit

$$s_1 = \frac{1}{2} b \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 40,2 \cdot 0,025^2 = 0,0125 \text{ m} = 12,5 \text{ mm.}$$

Nach diesem Weg hat er bereits eine Rücklaufgeschwindigkeit

$$v_0 = b \cdot t_1 = 40,2 \cdot 0,025 = 1 \text{ m/sek.}$$

Wege- und Geschwindigkeitsdiagramm sind in Abb. 309 aufgezeichnet. Die Ordinaten tragen die Zahlen 10, 20, 30 usw., sie bedeuten die Schlagzeiten in  $\frac{1}{1000}$  Sekunden, die Zahl 30 bedeutet also eine Schlagzeit von

$$\frac{30}{1000} = 0,030 \text{ Sekunden.}$$

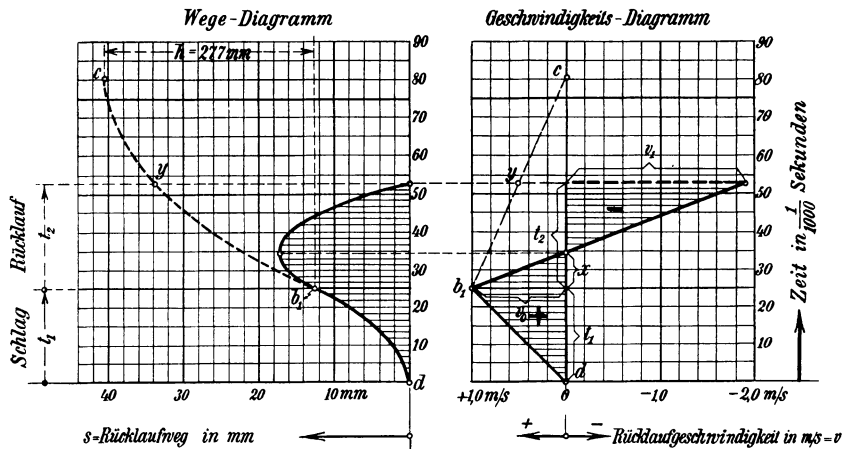


Abb. 309. Wege- und Geschwindigkeitsdiagramm.

Im Wegediagramm sind auf der Horizontalen die Rücklaufwege in mm, im Geschwindigkeitsdiagramm die Geschwindigkeiten der Rücklaufbewegung in m/sek aufgetragen.

Der Schreibstift des Hammers hat in  $\frac{25}{1000}$  Sekunden das Kurvenstück  $db_1$  im Wegediagramm geschrieben. In dem Augenblick, wo der Schreibstift den Punkt  $b_1$  schreibt, schlägt der Schlagkolben auf das Spitzisen, und der Kolben beginnt seinen Rücklauf. Der Kolben wird wieder mit der Kolbenkraft

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot p = \frac{\pi}{4} \cdot 3,5^2 \cdot 2,92 = 28 \text{ kg}$$

zurückbeschleunigt, seine Gegenkraft drückt wieder gegen den Hammer, aber diese verteilt sich auf Hammer und Spitzisen (Abb. 310).

Das Spitzisen-Einsteckende hat 26 mm Durchmesser, also drückt auf die Ringfläche des Hammers nur die Kraft

$$K = \left( \frac{\pi}{4} \cdot 3,5^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 2,6^2 \right) \cdot 2,92 = 12,6 \text{ kg,}$$

während das Spitzisen mit der Kraft

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot 2,6^2 \cdot 2,92 = 15,4 \text{ kg}$$

in die Kohle gedrückt wird.

Für die Vorwärtsbewegung des Hammers steht also nur die Beschleunigung

$$b = \frac{K}{m} = \frac{12,6}{0,696} = 18,1 \text{ m/sek}^2$$

zur Verfügung.

Nach Abb. 311 wird der Hammer, der rückläufig sich mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 1 \text{ m/sek}$  bewegt, plötzlich in entgegengesetzter Rich-

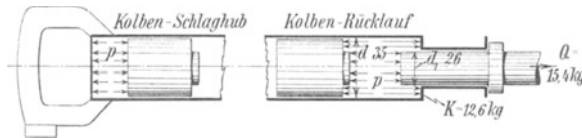


Abb. 310. Die Beschleunigungskräfte beim Schlaghub und beim Rücklauf des Kolbens.

tung mit  $b = 18,1 \text{ m/sek}^2$  beschleunigt. Seine Geschwindigkeit wird sich vermindern nach dem Gesetz

$$v = v_0 - b \cdot t$$

und schließlich null werden, dann ist

$$0 = v_0 - b \cdot t,$$

d. h. die Rücklaufbewegung dauert noch

$$t_x = \frac{v_0}{b} = \frac{1,00}{18,1} = 0,0552 \text{ Sekunden.}$$

In dieser Zeit ist der Rücklaufweg noch

$$h = \frac{v_0^2}{2b} = \frac{1,00^2}{2 \cdot 18,1} = 0,0277 \text{ m} = 27,7 \text{ mm.}$$

Im Wegediagramm (Abb. 309) würde der Schreibstift das Kurvenstück  $b_1c$  aufzeichnen. Im Geschwindigkeitsdiagramm würde die Linie  $b_1c$  durchlaufen. Der Schlagkolben hat aber im Kurvenpunkt  $y$  seinen Rücklauf schon beendet, und nun würde von neuem ein Schlaghub ansetzen, der den Hammer wieder nach rückwärts beschleunigt.

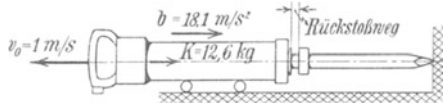


Abb. 311. Umkehr der Beschleunigungskräfte.

Der Hammer würde seine Rücklaufbewegung also gar nicht verlieren, er würde immer weiter nach hinten ausweichen und das Arbeiten unmöglich machen. Daraus folgern wir:

„Ohne Gegendruck weicht der Hammer fortlaufend nach hinten aus, so daß ein Arbeiten wegen der eintretenden Prellschläge auf den Hammer aufhört.“

Wie bringt man die während des Schlaghubes erfolgte rückläufige Bewegung zum Stillstand, und wie führt man den Hammer wieder in seine Anfangsstellung zurück?

Das könnte man durch starken Gegendruck, den man am Griff des Hammers ausüben läßt. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Hammer wird nur während der Kolbenrücklaufzeit  $t_2$  durch Gegendruck belastet.

2. Der Hammer wird während der Schlagzeit  $t_1$  und der Kolbenrücklaufzeit  $t_2$  durch Gegendruck belastet.

Der erste Fall kommt beim Anlauf und Ansetzen des Hammers vor, der zweite Fall beim ordnungsgemäßen Arbeiten.

**1. Fall:** Der Gegendruck wirkt nur während der Kolbenrücklaufzeit  $t_2$ .

Betrachtet man das Geschwindigkeitsdiagramm (Abb. 309), so muß man die Geschwindigkeitsordinate  $v_0$  im Punkte  $b_1$  vermindern auf Null, das möge in der Zeit  $x$  geschehen, und ferner muß man die gegenläufige Bewegung so schnell ausführen, daß der Hammer in die Anfangsstellung zurückgekehrt ist, wenn der Kolbenrücklauf beendet ist. Dieser ist beendet nach der Zeit  $t_2$ , und in diesem Augenblick stoße der Hammer mit der noch unbekanntem Endgeschwindigkeit  $v_1$  auf den Bund des Spitz Eisens.

Zur Berechnung der unbekanntem Größen  $x$  und  $v_1$  lassen sich zwei Gleichungen aufstellen. Da der Vorwärtsweg gleich dem Rückwärtsweg sein muß, so muß im Geschwindigkeitsdiagramm die positive Wegefäche gleich der negativen Wegefäche sein, also ist

$$\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot (t_1 + x) = \frac{1}{2} v_1 \cdot (t_2 - x) \quad (\text{Gleichung 1}).$$

Ferner folgt aus dem Ähnlichkeitsverhältnis der Dreiecke

$$v_0 : x = v_1 : (t_2 - x) \quad (\text{Gleichung 2}).$$

Durch Auflösung der Gleichungen für die zwei Unbekanntem ergibt sich

$$x = \frac{v_0 \cdot t_2^2}{v_0 \cdot t_1 + 2 v_0 \cdot t_2} = \frac{t_2^2}{t_1 + 2 t_2}.$$

Nach Gleichung 2 ist dann

$$v_1 = \frac{v_0}{x} \cdot (t_2 - x).$$

Für unser Beispiel war

$$t_1 = 0,025 \text{ sek}, \quad t_2 = 0,0275 \text{ sek} \quad \text{und} \quad v_0 = 1 \text{ m/sek.}$$

Mit diesen Werten wird

$$x = \frac{0,0275^2}{0,025 + 2 \cdot 0,0275} = 0,0095 \text{ Sekunden,}$$

$$v_1 = \frac{1,00}{0,0095} \cdot (0,0275 - 0,0095) = 1,90 \text{ m/sek.}$$

Im Geschwindigkeitsdiagramm sind diese Werte maßstäblich eingetragen und dadurch ist die schraffierte Diagrammfäche entstanden. Mit dem Wert  $x$  läßt sich nun weiter die Beschleunigung  $b$  berechnen, mit welcher der Gegendruck zu wirken hat.

Nach  $x = 0,0095$  Sekunden ist die Rücklaufgeschwindigkeit von  $v_0 = 1,00$  m/sek auf Null herabgemindert, also ist

$$v_0 = x \cdot b \quad \text{oder} \quad b = \frac{v_0}{x} = \frac{1,00}{0,0095} = 104 \text{ m/sek}^2.$$

Um die Beschleunigung  $b$  zu erzeugen, ist für die Hammermasse  $m = 0,696$  eine Kraft erforderlich von der Größe

$$P = m \cdot b = 0,696 \cdot 104 = 72,4 \text{ kg.}$$

Auf die Ringfläche des Hammers drückt die Preßluft, wie vorstehend gezeigt wurde, mit 12,6 kg, also ist am Griff des Hammers noch ein Gegendruck erforderlich von der Größe

$$F = 72,4 - 12,6 = \sim 60 \text{ kg}$$

Dieser Gegendruck ist außerordentlich groß, und so bestätigt die Rechnung die bekannte Erscheinung, daß der Hammer, wenn beim Anlassen nicht sofort gegengedrückt wird, einen erheblichen Kraftaufwand nach dem Anlassen erforderlich macht, um ihn in die richtige Arbeitsstellung zu bringen. Ist diese erreicht, so genügt ein geringerer Gegendruck, wie nachstehend die Betrachtung des zweiten Falles zeigt.

Im Wegediagramm ist vom Punkt  $b_1$  ausgehend die Wegekurve maßstäblich aufgetragen, welche sich bei dem Gegendruck  $F = 60$  kg ergibt. Die einzelnen Wegeordinaten sind nach der Formel

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t^2$$

für die Werte  $v_0 = 1,00$  m/sek und  $b = 104$  m/sek<sup>2</sup> errechnet. Es entsteht die schraffierte Diagrammfläche.

2. Fall: Der Hammer wird während der Schlagzeit  $t_1$  und der Kolbenrücklaufzeit  $t_2$  durch Gegendruck belastet.

Der Gegendruck betrage  $F = 25$  kg.

Der Gegendruck kann, wie in Abb. 312 dargestellt, durch eine Feder hervorgerufen werden. Da der Hammer mit  $P = 28$  kg zurückgestoßen wird, wirkt als Rückbeschleunigungskraft für die Hammermasse

$$K = P - F = 28 - 25 = 3 \text{ kg.}$$

Diese bringt die Beschleunigung nach rückwärts:

$$b = \frac{K}{m} = \frac{3}{0,696} = 4,31 \text{ m/sek}^2 = 4310 \text{ mm/sek}^2.$$

Die Rückstoßwege werden wie folgt berechnet:

$t = 0,005$ sek	. . . . .	$s = \frac{1}{2} b \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4310 \cdot 0,005^2 = 0,054$ mm
$t = 0,010$ ..	. . . . .	$s = \frac{1}{2} \cdot 4310 \cdot 0,010^2 = 0,2155$ ..
$t = 0,015$ ..	. . . . .	$s = \frac{1}{2} \cdot 4310 \cdot 0,015^2 = 0,4850$ ..
$t = 0,020$ ..	. . . . .	$s = \frac{1}{2} \cdot 4310 \cdot 0,020^2 = 0,8620$ ..
$t = 0,025$ ..	. . . . .	$s = \frac{1}{2} \cdot 4310 \cdot 0,025^2 = 1,3500$ ..

Nach dieser Zeit  $t_1 = 0,025$  sek stößt der Schlagkolben auf das Spitzisen. In diesem Augenblick kehrt der Kolben um, während der Hammer

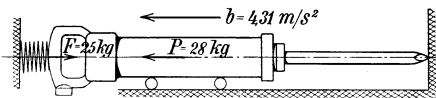


Abb. 312. Der Hammer arbeitet mit 25 kg Gegendruck.

gerade die Rücklaufgeschwindigkeit

$$v = b \cdot t_1 = 4,31 \cdot 0,025 = 0,1075 \text{ m/sek}$$

hat. Durch die Umsteuerung der Druckluft wird nun (Abb. 313) der Hammer mit der Kraft  $P = 12,6 \text{ kg}$  nach dem Spitzisen hin beschleunigt, unterstützt durch die Federkraft  $F = 25 \text{ kg}$ . Die Gesamtschleunigungskraft ist also

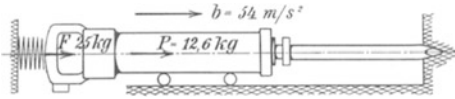


Abb. 313. Der Hammerkörper schwingt nach vorn.

$$K = P + F = 12,6 + 25 = 37,6 \text{ kg.}$$

Diese erzeugt die Beschleunigung

$$b = \frac{K}{m} = \frac{37,6}{0,696} = 54 \text{ m/sek}^2,$$

welche zuerst die Rückstoßbewegung auf Null vermindert. Das dauert

$$t_x = \frac{v}{b} = \frac{0,1075}{54} = 0,002 \text{ sek}$$

und bringt noch den Rücklaufweg

$$h = \frac{v^2}{2b} = \frac{0,1075^2}{2 \cdot 54} = 0,000107 \text{ m} = 0,107 \text{ mm.}$$

Dann muß der ganze Rücklaufweg

$$s + h = 1,35 + 0,107 = 1,457 \text{ mm} = r$$

wieder in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Das erfordert

$$t_y = \sqrt{\frac{2r}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,457}{54000}} = 0,00735 \text{ sek.}$$

Nach der Zeit

$$T = t_x + t_y = 0,002 + 0,00735 = 0,00935 \text{ sek}$$

ist der Rückstoßweg bereits zurückgelaufen, so daß der Hammer wieder in seiner Anfangsstellung steht. Der ganze Bewegungsvorgang des Hammers ist in Abb. 314 nochmals dargestellt. Während der Schlagzeit  $t_1 = 0,025 \text{ sek}$  ist der Hammer um den Weg  $s$  zurückgestoßen, in diesem Augenblick beginnt die Gegenbeschleunigung. Der Hammer kommt nach dem weiteren Rückstoßweg  $h$ , der  $t_x$  Sekunden dauert, zur Ruhe und tritt sofort die gegenläufige Bewegung an. Er läuft den Weg  $s + h$

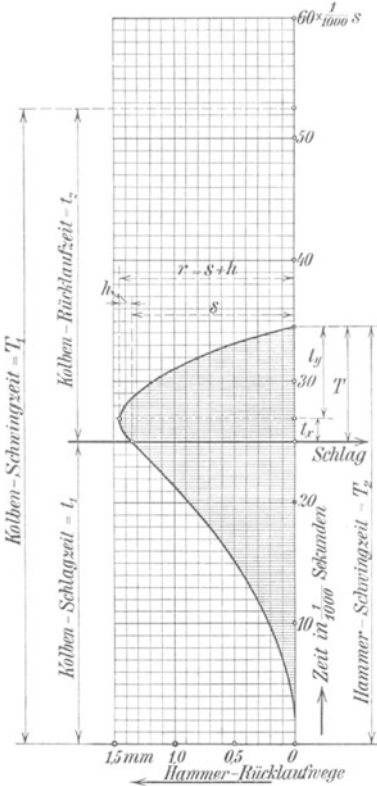


Abb. 314. Der Schwingungsvorgang des Hammerkörpers.

in der Zeit  $t_y$  zurück und hat nach der Zeit  $T_2 = t_1 + t_x + t_y$  seine Anfangsstellung wieder erreicht.

In Abb. 314 ist die Hammerschwingzeit mit  $T_2$  bezeichnet, während die Schwingzeit des Schlagkolbens mit  $T_1$  bezeichnet ist.



Wir sehen, daß im Diagramm die Zeiten  $T_1$  und  $T_2$  verschieden groß sind, und zwar ist

$$T_2 < T_1,$$

d. h. der Hammer hat seine ganze Rückstoßbewegung schneller ausgeführt wie der Schlagkolben seine Schlag- und Rücklaufbewegung. Er ruht daher schon wieder auf dem Bund des Spitzeisens, ehe der zweite Schlag beginnt. Das ist wichtig, wie wir später sehen werden, denn bei geringerem Gegendruck besteht dieses Zeitverhältnis nicht mehr.

Führt man dieselbe Untersuchung für die Gegendrücke  $F = 20$  kg und  $F = 15$  kg durch, so erhält man ähnliche Rücklaufkurven. Zum Vergleich sind in Abb. 315 die Rücklaufkurven der drei Untersuchungen aufgezeichnet. Man sieht, dem größten Gegendruck entspricht die kleinste Rücklaufkurve. Bei dem Gegendruck  $F = 20$  kg rücken die Kurven schon näher aneinander, es ist aber immer noch

$$T_2 < T_1,$$

d. h. der Hammer ist mit seiner ganzen Rücklaufbewegung früher fertig, als der Schlagkolben mit seinem Hin- und Rückgang.

Im dritten Diagrammstreifen ( $F = 15$  kg) überschneiden sich die Kurven, d. h. in diesem Fall ist

$$T_2 > T_1.$$

Das darf nicht sein, denn der Hammer ist mit seiner Rücklaufbewegung noch nicht zu Ende, während der Kolben schon den neuen Schlag beginnt. Der Hammer arbeitet dann nicht mehr im Gleichtakt mit dem Kolben. Hammer und Kolben schwingen sich bei jedem Schlag weiter auseinander, das Arbeiten wird ungleichmäßig, die Leistung muß sinken.

Es wird also jeder Hammer eine Mindestgröße des Gegendrucks erforderlich machen, welche experimentell bestimmt werden kann. Man nahm bisher schätzungsweise an, daß ein Gegendruck von etwa 5 kg für mittlere Hämmer genügen würde. Das ist aber nicht der Fall, wie neue Untersuchungen erwiesen haben. Es sind schon Gegendrücke von 30 bis 50 kg erforderlich, um mit mittelschweren Hämmern auf beste Leistung zu kommen. Für den Arbeiter wird natürlich der Hammer am besten sein, der mit dem geringsten Gegendruck auf höchste

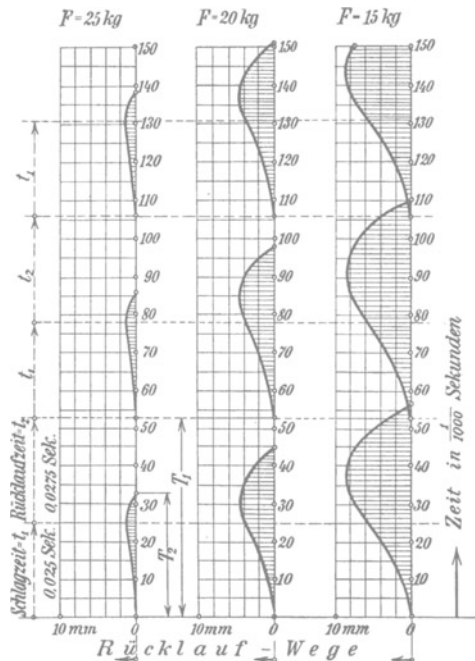


Abb. 315. Die Rücklaufkurven bei verschiedenem Gegendruck.

Leistung kommt. Es ist unbedingt anzustreben, nicht allein Leistungsprüfungen bei der Auswahl eines neuen Hammersystems zu machen, sondern auch Rückschlagprüfungen.

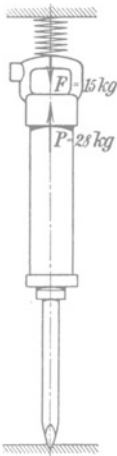


Abb. 316. Der Hammer arbeitet nach unten.

**b) Der Hammer arbeitet vertikal nach unten.**

Man weiß aus Erfahrung, daß der Hammer am leichtesten zu halten ist, wenn man von oben nach unten schlägt. Das Gewicht des Hammers wirkt dann der Rückstoßbewegung entgegen. Der in senkrechter Stellung befindliche Hammer (Abb. 316) soll mit verschiedenen Gegendrücken, welche durch eine Federspannung  $F$  hergestellt werden, belastet werden, und es soll festgestellt werden, bei welchem geringsten Anpressungsdruck der Hammer noch ordnungsgemäß arbeitet.

In Abb. 317 sind für den Hammer des vorigen Beispiels die für die Federdrücke  $F = 15 \text{ kg}$ ,  $F = 13 \text{ kg}$  und  $F = 10 \text{ kg}$  errechneten Rückstoßkurven zum Vergleich aufgezeichnet. Wir sehen, daß die Wellenberge um so höher und länger werden, je geringer der Federdruck ist. Bei den Federdrücken 15 kg und 13 kg ist

$$T_2 < T_1,$$

d. h. der Hammer ist mit seiner ganzen Rückstoßschwingung früher fertig wie der Schlagkolben mit seiner Hin- und Herschwingung,

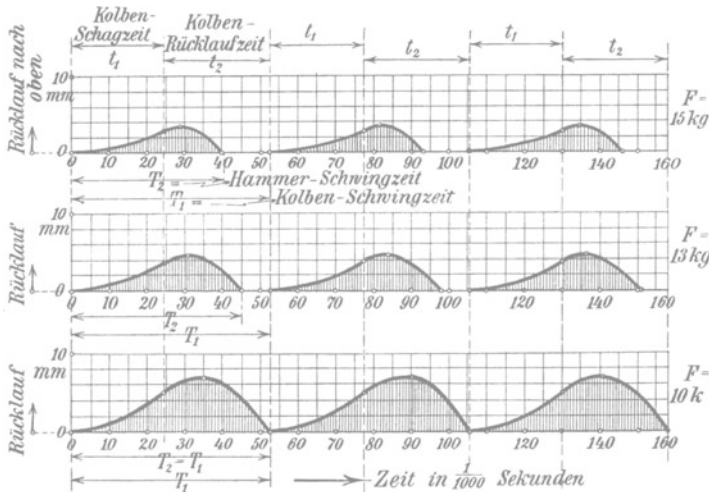


Abb. 317. Schwingungskurven des nach unten arbeitenden Hammers.

so daß Hammer und Schlagkolben im gleichen Takt arbeiten und der Hammer auf gute Leistung kommt.

Aber bei  $F = 10 \text{ kg}$  Gegendruck ist die Grenze des Gleichtaktes erreicht, es sind Schwingzeit des Hammers und Schwingzeit des Kol-

bens gerade gleich. Wird der Gegendruck noch kleiner, so kommen beide aus dem Gleichtakt, das Arbeiten wird unregelmäßig.

**c) Der Hammer arbeitet vertikal nach oben.**

In Abb. 318 arbeitet der Hammer mit veränderlichem Gegendruck vertikal nach oben. Die Untersuchung ist für die Federspannungen  $F = 26$  kg,  $F = 24$  kg und  $F = 22$  kg durchgeführt. Die errechneten Rückstoßkurven sind in Abb. 319 zum Vergleich aufgetragen.

Man sieht oben die Rückstoßkurve für den Gegendruck  $F = 26$  kg, in der Mitte die Rückstoßkurve für  $F = 24$  kg und unten für  $F = 22$  kg. Schon diese geringen Änderungen des Gegendrucks bedingen eine ziemliche Verschiedenheit der Kurven, die Rücklaufwege wachsen und im unteren Diagrammstreifen überschneiden sich die Kurven, d. h. Hammer und Kolben kommen in ihren Schwingungen aus dem Gleichtakt, der Gegendruck von 22 kg reicht schon nicht mehr aus, um mit dem Hammer richtig zu arbeiten.



Abb. 318. Der Hammer arbeitet nach oben.

**Schlußfolgerung:** Die Betrachtungen führen zu einem bemerkenswerten Ergebnis. Bei horizontalem Arbeiten war ein Gegendruck von der Größe

$F = 20$  kg mit der Hammerrückbeschleunigung  $b = 11,50$  m/sek<sup>2</sup>,  
bei vertikalem Abwärtsarbeiten ein Gegendruck von  
 $F = 13$  kg mit der Hammerrückbeschleunigung  $b = 11,80$  m/sek<sup>2</sup>

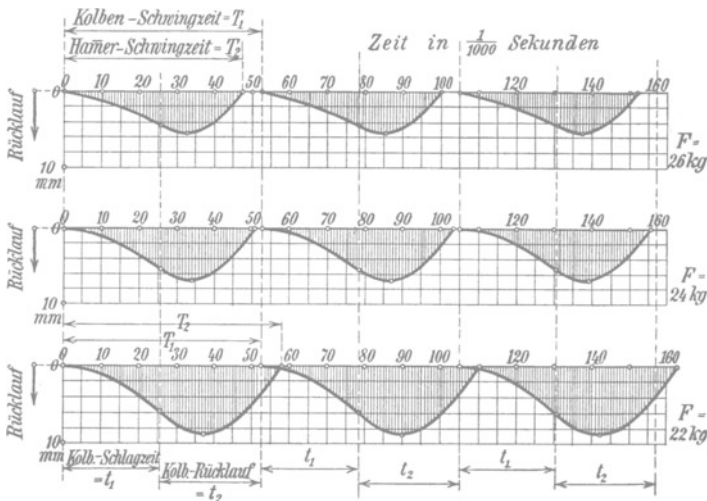


Abb. 319. Schwingungskurven des nach oben arbeitenden Hammers.

erforderlich. Bei vertikalem Aufwärtsarbeiten würde ein Gegendruck von

$F = 27$  kg die ungefähr gleich große Beschleunigung  $b = 11,30$  m/sek<sup>2</sup>

bringen und die Rückstoßkurven würden in allen drei Fällen gleichartigen Verlauf haben, d. h. der Hammer würde dann in den drei verschiedenen Lagen gleich günstig arbeiten.

Der Hammer arbeitet also in den drei verschiedenen Lagen gleichwertig, wenn er in diesen Lagen die gleiche Rückbeschleunigung hat. Diese zu erteilen, muß der Gegendruck der Hammerlage angepaßt werden. Die hierfür erforderlichen Gegendrücke waren in unserem Beispiel

1. bei vertikalem Abwärtsarbeiten  $F = 13$  kg,
2. bei horizontalem Arbeiten  $F = 20$  kg, Differenz = 7 kg,
3. bei vertikalem Aufwärtsarbeiten  $F = 27$  kg, Differenz = 7 kg.

Hierbei ist 7 kg das Hammergewicht ohne Spitzeisen und Kolben. Daraus folgern wir:

Der Gegendruck am Hammergriff ist von der Lage des Hammers abhängig. Er ist am kleinsten beim Abwärtsarbeiten und beträgt hier ungefähr das Doppelte des Hammergewichts. Beim Arbeiten in horizontaler Lage muß der Gegendruck das dreifache Hammergewicht, beim Arbeiten vertikal aufwärts das vierfache Hammergewicht mindestens erreichen.

Die vorstehenden Berechnungen sind für einen Betriebsdruck von 4 atü angestellt, bei höheren Betriebsdrücken muß natürlich der Gegendruck noch proportional mit der Druckzunahme größer werden.

#### d) Die Wirkung des Rückschlags auf den Arbeiter.

Die Rückwirkung des Hammers auf den Arbeiter ist sehr verschieden, sie hängt ganz von dem Gegendruck ab, mit welchem der Hammer angepreßt wird. Dieser Gegendruck beeinflusst die Rückbeschleunigung des Hammers und die Größe des Rücklaufweges, wie folgende Tabelle zeigt.

Horizontaler Schlag.

Gegendruck $F$ am Hammergriff	Rückbeschleunigung des Hammers	Rücklaufweg
0 kg	40,2 m/sek <sup>2</sup>	12,5 mm
15 „	18,7 „	8,6 „
20 „	11,5 „	4,5 „
25 „	4,3 „	1,5 „

Je kleiner der Gegendruck ist, um so heftiger stößt der Hammer, wird der Hammer nur lose ohne Gegendruck in der Hand gehalten, so stößt er mit 40 m Beschleunigung gegen die Hand. Das ist eine Beschleunigung, bei welcher der Muskelstoß sicher schon als schädigend empfunden wird. Der Arbeiter wird daher schon rein gefühlsmäßig den Gegendruck so verstärken, bis er die Stöße nicht mehr als harte Muskelschläge empfindet. Dadurch erreicht er dann weiter, daß der Hammer nur ganz geringe Rückschlagwege macht und besser arbeitet. Diese dauernde Anspannung

der Armuskel durch scharfen Gegendruck ermüdet, er wird also Entspannungspausen einschalten müssen.

In Abb. 320 arbeitet der Hammer mit starkem Gegendruck. Es soll gezeigt werden, daß das Spitzeisen in diesem Fall bei jedem Hammertakt zwei Schläge erhält, da die Hammerschwingzeit  $T_2$  kleiner ist als die Kolbenschwingzeit  $T_1$ . Im Rücklaufdiagramm ist das eingetragen, und zwar

- der 1. Schlag als Kolbenschlag,
- der 2. Schlag als Hammerschlag.

Der zweite Schlag kommt dadurch zustande, daß der Hammerkörper den Rückstoßweg  $r$  wieder nach vorne zurückläuft und mit seiner Stirnfläche auf den Bundring des Spitzeisens schlägt, vorausgesetzt, daß das Spitzeisen in der Kohle fest eingeklemmt bleibt. Dieses Aufprallen des Hammers auf das Spitzeisen empfindet der Arbeiter vielleicht als härteren Stoß als den eigentlichen Rückstoß des Hammerkörpers, denn das Spitzeisen ist fast unnachgiebig in harter Kohle.

Die Aufprallgeschwindigkeit des Hammerkörpers auf den Spitzeisenbund berechnet sich nach der Gleichung

$$v = b \cdot t,$$

sie wird sich mit dem Gegendruck  $F$  verändern, wie folgende Aufstellung zeigt.

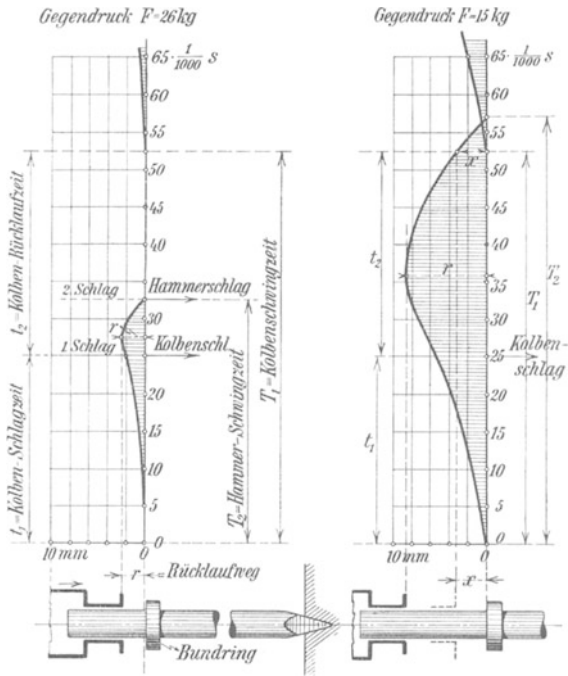


Abb. 320 u. 321. Die Entstehung eines doppelten Rückschlages.

Gegendruck	Gegenbeschleunigung $b$	Zeit $t$	Aufstoßgeschw. $v$
$F = 25$ kg	54,0 m/sek <sup>2</sup>	0,00735 sek	0,40 m/sek
$F = 20$ „	46,8 „	0,01385 „	0,64 „
$F = 15$ „	39,7 „	0,02085 „	0,83 „

Die Aufprallgeschwindigkeit des Hammerkörpers auf den Spitzeisenbund wird also bei abnehmendem Gegendruck immer größer, so daß der Arbeiter bei schwächerem Gegendruck diesen zweiten Schlag härter empfinden muß.

In Abb. 321 ist gezeigt, daß der zweite Schlag ganz ausfällt, wenn

$$T_2 > T_1$$

wird, ein Fall, der eintritt, wenn der Gegendruck  $F$  bedeutend kleiner wird. Dann steht der Hammerkörper bei der Kolbenumkehr noch um das Maß  $x$  von seinem Auftreffpunkt entfernt. Er wird durch den Schlaghub des Kolbens nun wieder rückläufig beschleunigt, so daß er seinen Auftreffpunkt gar nicht mehr erreicht. Dann fällt der zweite Schlag, der harte Schlag, ganz aus, der Hammer wird pneumatisch gepolstert umkehren.

Dieser Vorgang wird dem Arbeiter besonders gut gefallen, da er dann einen harten Aufprall überhaupt nicht mehr empfindet. Er verursacht damit aber auf der anderen Seite wieder eine größere Hammerrückbeschleunigung während des Schlaghubes und eine verminderte Leistung seines Hammers. Er wird also die höchste Leistung bei schwimmendem Hammer nicht mehr erzielen, wenn man den Zustand der pneumatischen Umkehr des Hammers als Schwimmen bezeichnet.

### 36. Die Schüttelrutsche.

Nach dem Trägheitsgesetz will ein Körper die ihm erteilte Geschwindigkeit und Bewegung beibehalten. Bewegt man Kohle und Förderrinne vorwärts und hält die Rinne plötzlich an, um sie schnell zurückzuziehen, so rutscht die Kohle in der ersten Bewegungsrichtung weiter.

Der ganze Bewegungsvorgang besteht also aus zwei Teilen:

1. aus dem Hingang, der in der Förderrichtung erfolgt und der Kohle eine bestimmte Bewegungskraft erteilt,
2. aus dem Rückgang, bei der die Rinne plötzlich zurückgezogen wird, damit die Kohle in der Förderrichtung weitergleitet, bis sie durch die Wirkung der Reibung in der Rinne wieder zum Stillstand kommt.

#### Einteilung der Förderverfahren.

Man kann die Bewegungskraft auf zwei verschiedene Arten auf die Kohle übertragen:

- a) durch Maschinenkraft, indem man eine Rinne beschleunigt bewegt und durch den Reibungsschluß zwischen Kohle und Rinne diese auf die Kohle überträgt (Beschleunigungsverfahren),
- b) durch die Schwerkraft, indem diese die Rinne und Kohle beim Hingang gleichmäßig beschleunigt, wobei ein Reibungsschluß zwischen Kohle und Rinne nicht erforderlich ist (Schwerkraftverfahren). Der Rückgang erfolgt durch Maschinenkraft.

Das Schwerkraftverfahren ist nur möglich, wenn ein Gefälle für den Hingang vorhanden ist. Ist kein natürliches Einfallen vorhanden, so kann das Einfallen auch künstlich erzeugt werden, z. B. bei wagenrechter Förderung durch keilförmige Laufschielen.

### a) Das Beschleunigungsverfahren.

Vorbedingung für die Durchführung dieses Verfahrens ist der Reibungsschluß zwischen Kohle und Rinne. Dieser Reibungsschluß darf während des Hinganges der Rinne nicht verlorengehen. Ein Kohlenstück von 1 kg Gewicht hat den Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot 1 \text{ kg.}$$

Werden Kohle und Rinne mit der Beschleunigung  $b_1$  bewegt, so ist die Bewegungskraft für 1 kg Kohle

$$K = m \cdot b_1 = \frac{1}{g} \cdot b_1.$$

Diese Bewegungskraft darf nicht größer werden als der Reibungswiderstand der Kohle, sonst bleibt die Kohle gleitend hinter der Rinne zurück. Es darf also höchstens werden

$$K = R \quad \text{oder} \quad \frac{1}{g} \cdot b_1 = \mu,$$

$$b_1 = \mu \cdot g,$$

d. h. die Beschleunigung des Hinganges darf höchstens das 9,81fache der Reibungsziffer sein.

Die Reibung der Ruhe zwischen Kohle und Eisen wird im Durchschnitt angenommen zu

$$\mu = 0,40,$$

also darf die Beschleunigung des Hinganges höchstens sein

$$b_1 = 0,40 \cdot 9,81 = 3,924 \text{ m/sek}^2.$$

Nach eingetretenem Gleiten vermindert sich der Reibungswiderstand, denn die Reibungsziffer  $\mu_1$  der Bewegung ist erfahrungsgemäß kleiner als die Reibungsziffer  $\mu$  der Ruhe. Man rechnet mit  $\mu_1 = 0,30$ . Während des Gleitens wird der Reibungswiderstand von 1 kg Kohle daher die Größe

$$R_1 = 1 \cdot \mu_1$$

haben. Dieser verzögert das Gleiten bis zum Ruhezustand, indem er der Kohle die Verzögerung  $b_2$  gibt, und zwar ist

$$m \cdot b_2 = R_1 = \mu_1.$$

Die größte Verzögerung, die die Kohle durch den Reibungswiderstand erleidet, ist demnach

$$b_2 = \frac{\mu_1}{m} = \mu_1 \cdot g = 0,30 \cdot 9,81 = 2,943 \text{ m/sek}^2,$$

d. h. die Verzögerung oder Gegenbeschleunigung der Rinne während des Rückganges muß größer als  $2,943 \text{ m/sek}^2$  bleiben, sonst hört das Gleiten auf.

Der Beginn des Gleitens tritt erst bei der Gegenbeschleunigung  $b_2 = \mu \cdot g = 0,40 \cdot 9,81 = 3,924 \text{ m/sek}^2$  ein, so daß die Gegenbeschleunigung der Rinne diesen Wert überschreiten muß. Man wird also die Rinne mit großer Kraft während des Rückganges zu beschleunigen haben, sonst bleibt der Erfolg der Rinnenförderung aus.

Die Kraftverhältnisse beim Beschleunigungsverfahren.

Bei sölhlicher Förderung (Abb. 322) kann die schwingende Bewegung der Rinne maschinell in folgender Weise bewirkt werden. Der Hingang, d. i. die Bewegung in der Förderrichtung, erfolgt durch einen Gegenzylinder, d. i. ein Zylinder, dessen Kolben einseitig ständig unter Druckluft steht, er arbeitet also ohne Steuerung. Für den Rückgang ist ein Rutschenmotor erforderlich, der einfach wirkend ist, d. h. nur die der Rinne zugewandte Kolbenseite wird durch Druckluft

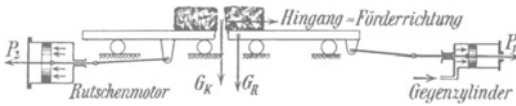


Abb. 322. Sölhliche Förderung mit Gegenzylinder.

beaufschlagt. Dieser Zylinder muß mit Steuerung versehen sein, da nach erfolgtem Rücklauf die Druckluft nicht mehr gegen den Kolben drücken darf.

### 1. Der Hingang.

Der Gegenzylinder muß eine Kolbenkraft  $P_1$  aufbringen. Diese hat folgende Widerstände zu überwinden:

- den Reibungswiderstand der rollenden Rutsche,
- den Beschleunigungswiderstand der zu bewegenden Massen.

Es sei

$$\begin{aligned} G_R &= \text{das Gewicht der ganzen Rutsche in kg,} \\ G_K &= \text{das Gewicht der Kohle in kg,} \end{aligned}$$

dann ist, wenn der Widerstand der rollenden Reibung 1,5% der Gewichtslast beträgt, der Fahrwiderstand

$$W = 0,015 \cdot (G_R + G_K).$$

Für die Gewichtsberechnung mögen folgende Zahlen als Anhalt dienen.

Eigengewicht der Rutsche bei 4 mm Blechstärke und 3 m Muldenlänge = 35 bis 50 kg/m bei Breiten von 450 bis 550 mm.

Ladegewicht = 40—50 kg/m.

Soll der Hingang mit der Beschleunigung  $b_1$  erfolgen, so ist die Beschleunigungskraft

$$K_1 = m \cdot b_1$$

erforderlich.

$$K_1 = \frac{G_R + G_K}{g} \cdot b_1.$$

Demnach muß der Gegenzylinder folgende Kolbenkraft aufbringen:

$$P_1 = 0,015 \cdot (G_R + G_K) + \frac{G_R + G_K}{g} \cdot b_1.$$

### 2. Der Rückgang.

Der Rutschenmotor hat den beschleunigten Rückgang zu vollziehen, seine Kolbenkraft sei  $P_2$ . Sie hat zu überwinden:

- den Reibungswiderstand der rollenden Rutsche,
- den Beschleunigungswiderstand der Rutsche ohne Kohlenlast, denn die Kohle macht die Rücklaufbewegung nicht mit.



- c) den Reibungswiderstand zwischen Kohle und Rinne,  
d) den Gegenzug des Gegenzylinders.

Der Reibungswiderstand der rollenden Rutsche ist

$$W = 0,015 \cdot (G_R + G_K).$$

Der Beschleunigungswiderstand für eine Beschleunigung  $b_2$  ist

$$K_2 = m \cdot b_2 = \frac{G_R}{g} \cdot b_2.$$

Der Reibungswiderstand der gleitenden Kohle ist

$$R = \mu_1 \cdot G_K.$$

Der Gegenzug des Gegenzylinders ist gleich  $P_1$ . Demnach muß der Rutschenmotor folgende Kraft aufbringen.

$$P_2 = W + K_2 + R + P_1.$$

**Beispiel:** Welchen Durchmesser müssen Gegenzylinder und Rutschenmotor erhalten, wenn ein Betriebsdruck von  $p = 4$  atü zur Verfügung steht und eine Rutsche von 80 m Länge (550 mm breit) bewegt werden soll. Für den Hingang soll die Beschleunigung  $b_1 = 1,50$  m/sek<sup>2</sup> und für den Rückgang  $b_2 = 11,00$  m/sek<sup>2</sup> sein.

**Lösung:**

#### 1. Berechnung des Gegenzylinders.

Bei 45 kg Eigengewicht und 50 kg Ladegewicht für je 1 m Rutschenlänge ist

$$G_R = 45 \cdot 80 = 3600 \text{ kg}$$

$$G_K = 50 \cdot 80 = 4000 \text{ ,,}$$

$$P_1 = 0,015 \cdot (3600 + 4000) + \frac{3600 + 4000}{9,81} \cdot 1,50 = 1280 \text{ kg,}$$

$$\text{Kolbenfläche } F_1 = \frac{P_1}{p} = \frac{1280}{4} = 320 \text{ cm}^2,$$

$$\text{Kolbendurchmesser } D_1 = 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm.}$$

#### 2. Berechnung des Rutschenmotors.

$$\text{Fahrwiderstand } W = 0,015 \cdot (3600 + 4000) = 115 \text{ kg}$$

$$\text{Beschleunigungswiderstand } K_2 = \frac{3600}{9,81} \cdot 11,00 = 4040 \text{ ,,}$$

$$\text{Gleitwiderstand der Kohle } R = 0,30 \cdot 4000 = 1200 \text{ ,,}$$

$$\text{Gegenzug des Zylinders } P_1 = 1280 \text{ ,,}$$

$$P_2 = W + K_2 + R + P_1 = 6635 \text{ kg}$$

$$\text{Kolbenfläche } F_2 = \frac{P_2}{p} = \frac{6635}{4} = 1660 \text{ cm}^2,$$

$$\text{Kolbendurchmesser } D_2 = 45 \text{ cm} = 450 \text{ mm.}$$

Der Hub der Rinne wird durch den Hub des Rutschenmotors bestimmt, dieser kann in verschiedenen Größen eingestellt werden.

#### Die Bewegungsverhältnisse beim Beschleunigungsverfahren.

Die Bewegungsverhältnisse lassen sich genau in der gleichen Weise berechnen wie die Rückstoßschwingungen eines Preßlufthammers.

Während des Hingangs erhält die Rutsche durch die gleichbleibende Kolbenkraft des Gegenzylinders die Beschleunigung  $b_1$ . Wirkt diese Kolbenkraft während des Rutschenweges  $s$ , so dauert die Beschleunigung

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b_1}} \text{ Sekunden.}$$

Nach dem Rutschenweg  $s$  setzt plötzlich die Gegenkraft des Rutschenmotors ein und bringt die Gegenbeschleunigung  $b_2$ . Durch diese Gegenbeschleunigung wird die Endgeschwindigkeit der Rutsche

$$v = b_1 \cdot t_1$$

aufgezehrt. Die Rutsche läuft noch ein kurzes Wegestück

$$h = \frac{v^2}{2b_2}$$

weiter, steht einen Augenblick still und kehrt um. Dieser Auslaufweg  $h$  dauert

$$t_x = \frac{v}{b_2} \text{ Sekunden.}$$

Den ganzen Hinweg

$$r = s + h$$

muß die Rutsche mit der Gegenbeschleunigung  $b_2$  zurücklaufen. Dieser Rücklauf dauert

$$t_y = \sqrt{\frac{2r}{b_2}} \text{ Sekunden.}$$

Die ganze Gegenbeschleunigungsperiode der Rutsche dauert

$$t_2 = t_x + t_y \text{ Sekunden.}$$

Die Kohle rutscht während der Gegenbeschleunigungsperiode in der Hingangsrichtung weiter. Ihre Anfangsgeschwindigkeit beim Rutschen ist gleich der Endgeschwindigkeit  $v$  der Rutsche am Ende der Beschleunigungsperiode, und diese Geschwindigkeit wird nun durch den Reibungswiderstand zwischen Kohle und Rutschenblech verzögert. Nach Früherem ist diese Verzögerung

$$b_3 = \mu_1 \cdot g.$$

Diese Verzögerung  $b_3$  verzehrt die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  in

$$t_z = \frac{v}{b_3} \text{ Sekunden.}$$

Sollen Rutsche und Kohle zu gleicher Zeit zur Ruhe kommen, so muß die Verzögerungszeit der Kohle gleich der Gegenbeschleunigungszeit der Rutsche sein, d. h. es muß sein

$$t_z = t_x + t_y = t_2.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so treten Rutsche und Kohle gleichzeitig aus dem Ruhezustand ihre zweite Beschleunigungsperiode an, und so wiederholt sich dasselbe Spiel.

Die Kohle hat während der Zeit  $t_2$  den Vorschubweg

$$s_v = \frac{1}{2} b_3 \cdot t_2^2$$

zurückgelegt.

Die Bewegungsvorgänge sind in Abb. 323 im Zeit-Wege-Diagramm und im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm bildlich dargestellt.

**Das Zeit-Wege-Diagramm:** Als Ordinaten sind die Zeiten, als Abszissen die Wegestrecken abgetragen. In der Beschleunigungsperiode, welche  $t_1$  Sekunden dauert, wächst der Rutschenweg von 0 bis  $s$ , dargestellt durch das Kurvenstück  $Od$ . Im Punkte  $d$  setzt die Gegen-

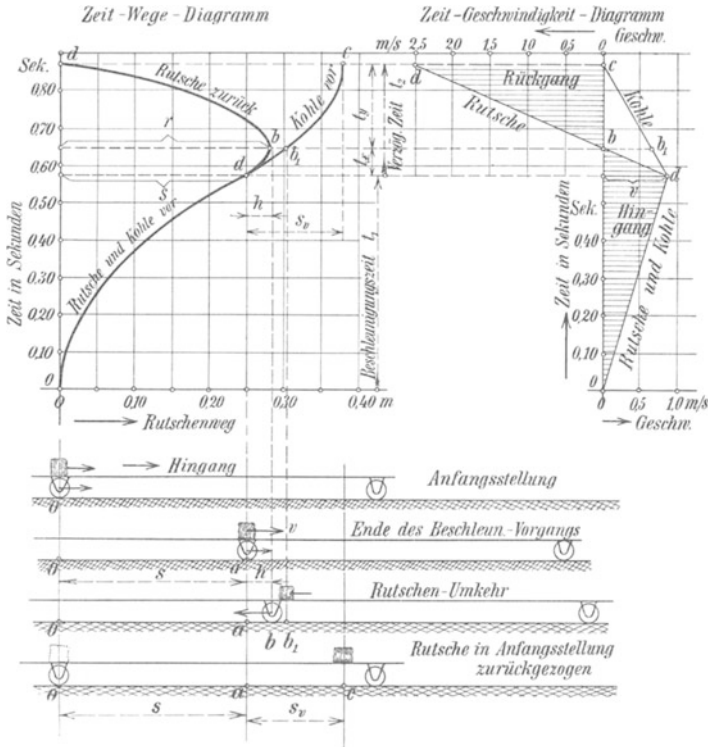


Abb. 323. Das Zeit-Wege-Diagramm und das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm einer Rutsche.

beschleunigung ein, die Rutsche läuft noch um das Wegestück  $h$  weiter (Kurve  $db$ ) und läuft dann den ganzen Weg  $r = s + h$  beschleunigt zurück (Kurve  $bd$ ).

Die Kohle bewegt sich während der Beschleunigungszeit  $t_1$  gleichlaufend mit der Rutsche. Im Punkte  $d$  trennen sich Rutschenbewegung und Kohlenbewegung, die Kohle schiebt sich gleitend vorwärts (Kurve  $db_1c$ ). Im Punkte  $c$  ist die Kohle zur Ruhe gekommen, dieser Punkt fällt zeitlich mit dem Ruhepunkt  $d$  der Rutsche zusammen.

**Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm:** Als Ordinaten sind die Zeiten, als Abszissen die Geschwindigkeiten aufgetragen. In der Beschleunigungszeit  $t_1$  wächst die Geschwindigkeit von Rutsche und Kohle von 0 bis zum Höchstbetrag  $v$  (gerade Linie  $Od$ ). Durch die Gegenbeschleunigung wird die Geschwindigkeit  $v$  der Rutsche rasch

bis auf Null gemindert (Linie  $db$ ), und dann in entgegengesetzter Richtung wieder vergrößert bis zum Endbetrag  $cd$  (schräge Linie  $bd$ ). Im Punkte  $d$  wird die Rutsche durch Stoß augenblicklich in Ruhe gesetzt.

Die Kohle geht vom Punkte  $d$  aus unabhängig von der Rutsche, sie vermindert während der Gegenbeschleunigungszeit  $t_2$  ihre Geschwindigkeit  $v$  auf Null (schräge Linie  $dc$ ).

Der Förderweg der Kohle ist im Rutschenbild (Abb. 323) dargestellt. Im ersten Bild beginnen Rutsche und Kohlenstück gemeinsam ihre Hingangsbewegung, im zweiten Bild haben nach dem Beschleunigungsweg  $s$  Rutsche und Kohle die höchste Geschwindigkeit  $v$ . Im dritten Bild erfolgt nach dem Auslaufweg  $h$  die Bewegungsumkehr der Rutsche, die Kohle ist schon bis zum Punkt  $b_1$  gerutscht. Im vierten Bild ist die Rutsche wieder in die Anfangsstellung zurückgezogen, während die Kohle im Punkte  $c$  steht; ihr ganzer Förderweg für ein Rutschenspiel ist also

$$s + s_v = \text{Beschleunigungshub} + \text{Vorschub.}$$

**Die Hubzahl:** Die Hubzahl bestimmt sich aus der Schwingungsdauer der Rutsche. Die Beschleunigungsdauer ist  $t_1$ , die Verzögerungsdauer  $t_2$ , also ist die Schwingungsdauer

$$T = t_1 + t_2.$$

Die Rutsche macht demnach in der Minute

$$n = \frac{60}{T}$$

Schwingungen oder Hübe.

**Die Fördermenge:** Die Fördermenge bestimmt sich aus der Förderstrecke und dem Füllungsquerschnitt. Die Förderstrecke für ein Spiel ist

$$s + s_v.$$

Bei  $n$  minutlichen Spielen ist der stündliche Förderweg

$$S = 60 \cdot n \cdot (s + s_v).$$

Ist der Füllungsquerschnitt der Rutsche  $= f \text{ m}^2$ , so ist die stündliche Fördermenge

$$Q = f \cdot S = f \cdot 60 \cdot n \cdot (s + s_v) \text{ m}^3.$$

Man kann rund  $1 \text{ m}^3 \text{ Kohle} = 1 \text{ t Kohle}$  setzen, dann ist die stündliche Förderleistung in t

$$G = f \cdot 60 \cdot n \cdot (s + s_v).$$

**Beispiel:** Berechne die Bewegungsverhältnisse der im vorigen Abschnitt behandelten Rutsche, der die Hingangsbeschleunigung  $b_1 = 1,5 \text{ m/sek}^2$  und die Rückgangsbeschleunigung  $b_2 = 11,0 \text{ m/sek}^2$  zugrunde lag, wenn der Beschleunigungshub  $s = 0,25 \text{ m}$  ist. Wie groß ist die Förderleistung, wenn der Füllungsquerschnitt der Rutsche  $f = 0,050 \text{ m}^2$  ist?

**Lösung:**

1. Beschleunigungshub von Rutsche und Kohle.

Dauer des Beschleunigungshubes

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{1,5}} = 0,577 \text{ Sekunden.}$$

Endgeschwindigkeit von Rutsche und Kohle

$$v = b_1 \cdot t_1 = 1,5 \cdot 0,577 = 0,866 \text{ m/sek.}$$

Die einzelnen Wegestrecken berechnen sich nach der Gleichung

$$s = \frac{1}{2} b_1 \cdot t^2$$

nach $t=0,1$ sek ist die Wegestrecke	$s = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,1^2 = 0,0075$ m
„ $t=0,2$ „ „ „	„ $s = 0,75 \cdot 0,2^2 = 0,030$ „
„ $t=0,3$ „ „ „	„ $s = 0,75 \cdot 0,3^2 = 0,0675$ „
„ $t=0,4$ „ „ „	„ $s = 0,75 \cdot 0,4^2 = 0,120$ „
„ $t=0,5$ „ „ „	„ $s = 0,75 \cdot 0,5^2 = 0,186$ „
„ $t=0,577$ „ „ „	„ $s = 0,75 \cdot 0,577^2 = 0,250$ „

## 2. Verzögerungsperiode der Rutsche.

Die durch den Rutschenmotor bewirkte Gegenbeschleunigung  $b_2 = 11,0$  m/sek<sup>2</sup> setzt die Rutsche nach der Wegestrecke

$$h = \frac{v^2}{2 b_2} = \frac{0,866^2}{2 \cdot 11} = 0,034 \text{ m}$$

still. Der Auslaufweg dauert

$$t_x = \frac{v}{b_2} = \frac{0,866}{11} = 0,0786 \text{ Sekunden.}$$

Der ganze Hinweg der Rutsche beträgt

$$r = s + h = 0,25 + 0,034 = 0,284 \text{ m.}$$

Dieser muß von der Rutsche zurückgelaufen werden. Dieser Rücklauf dauert

$$t_v = \sqrt{\frac{2r}{b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,284}{11}} = 0,227 \text{ Sekunden.}$$

Die ganze Verzögerungsperiode der Rutsche dauert

$$t_2 = t_x + t_v = 0,0786 + 0,227 = 0,3056 \text{ Sekunden.}$$

## 3. Der Vorschub der Kohle während der Verzögerungsperiode.

Die Verzögerung durch den Gleitwiderstand ist im Maximum

$$b_3 = \mu_1 \cdot g = 0,3 \cdot 9,81 = 2,943 \text{ m/sek}^2.$$

Die Rechnung werde durchgeführt mit dem Wert

$$b_3 = 2,90 \text{ m/sek}^2.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit

$$v = 0,866 \text{ m/sek}$$

der gleitenden Kohle wird in

$$t_z = \frac{v}{b_3} = \frac{0,866}{2,90} = 0,3 \text{ Sekunden}$$

verzehrt. In diesem Fall ist also

$$t_z = t_2,$$

denn  $t_2 = 0,3056$  Sekunden wurde vorher errechnet.

Der Vorschubweg der Kohle ist

$$\begin{aligned} s_v &= \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot t_z^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2,90 \cdot 0,3^2 = 0,13 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Förderstrecke der Kohle für ein Rutschenspiel ist

$$S = s + s_v = 0,25 + 0,13 = 0,38 \text{ m.}$$

Vorschubweg und Beschleunigungshub stehen im Verhältnis

$$\frac{s_v}{s} = \frac{0,13}{0,25} = 0,52,$$

also ist

$$s_v = 0,52 \cdot s.$$

**Berechnung der Hubzahl:** Schwingungsdauer  $T = t_1 + t_2 = 0,577 + 0,305 = 0,882$  Sekunden.

$$\text{Hubzahl } n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,882} = 68 \text{ min.}$$

**Berechnung der Förderleistung:** Die stündliche Förderleistung in t ist

$$G = f \cdot 60 \cdot n \cdot (s + s_v) = 0,050 \cdot 60 \cdot 68 \cdot (0,25 + 0,13) = 78 \text{ t/h.}$$

**Der Luftverbrauch des Rutschenmotors:** Der früher berechnete Rutschenmotor hat eine Kolbenfläche

$$F = 1660 \text{ cm}^2 = 0,1660 \text{ m}^2.$$

Die Füllungsstrecke beträgt bei Vollfüllung  $s = 0,25$  m.

Stündlicher Druckluftverbrauch:

$$\begin{aligned} L &= 60 \cdot n \cdot F \cdot s \\ &= 60 \cdot 68 \cdot 0,1660 \cdot 0,25 = 170 \text{ m}^3/\text{h.} \end{aligned}$$

Da die Luft mit 5 ata eintritt, ist der Saugluftverbrauch

$$L = 170 \cdot \frac{5}{1} = 850 \text{ m}^3/\text{h.}$$

Demnach werden für 1 t Kohle verbraucht

$$\frac{850}{78} = 11 \text{ m}^3 \text{ Saugluft.}$$

1 t Kohle ist bei 80 m Rutschenlänge um 0,080 km weiter transportiert, und damit sind 0,080 tkm geleistet, für welche an Energie 11 m<sup>3</sup> a. L. verbraucht werden. Daraus folgern wir

$$0,080 \text{ tkm} = 11 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$1 \text{ tkm s\ddot{o}hlige Rutschenf\ddot{o}rderung} = \frac{11 \cdot 1}{0,080} = 138 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

Kostet 1 m<sup>3</sup> a. L. der Druckluftzentrale 0,25 Pf., so sind die Energiekosten für 1 tkm s\ddot{o}hlige Rutschenf\ddot{o}rderung = 138 · 0,25 = **34,5 Pfg.**

**Beispiel:** Wie ändern sich die Bewegungs- und Kraftverhältnisse, wenn die Hingangsbeschleunigung verdoppelt, also  $b_1 = 3,00$  m/sek<sup>2</sup> wird?

**Lösung:** Das Zeit-Wege-Diagramm und das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm ist in Abb. 324 mit den nachstehend errechneten Werten aufgezeichnet. Für die Zurücklegung desselben Beschleunigungshubes

$$s = 0,25 \text{ m}$$

sind nun erforderlich

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{3,0}} = 0,408 \text{ Sekunden.}$$

Die Endgeschwindigkeit der Beschleunigungsperiode wird

$$v = b_1 \cdot t_1 = 3,0 \cdot 0,408 = 1,224 \text{ m/sek.}$$

Mit dieser Geschwindigkeit beginnt die Gleitbewegung der Kohle. Mit der Verzögerung

$$b_3 = 2,9 \text{ m/sek}^2$$

kommt die Kohle nach

$$t_z = \frac{v}{b_3} = \frac{1,224}{2,9} = 0,422 \text{ Sekunden}$$

zur Ruhe.

Sollen Kohle und rücklaufende Rutsche zu gleicher Zeit zur Ruhe kommen, so darf die Verzögerungsperiode der Rutsche nur

$$t_2 = t_z = 0,422 \text{ Sekunden}$$

dauern. Welche Gegenbeschleunigung hierfür erforderlich ist, läßt sich wie folgt berechnen.

Bei der Rückstoßbewegung der Preßlufthämmer wurde abgeleitet (S. 284)

$$x = \frac{t_2^2}{t_1 + 2 t_2} = t_x = \text{Auslaufzeit.}$$

In dieser Zeit  $t_x$  ist die Endgeschwindigkeit  $v$  der Rutsche aufgezehrt und dazu ist eine Gegenbeschleunigung erforderlich von der Größe

$$b_2 = \frac{v}{t_x}.$$

Mit den Zahlenwerten

$$\begin{aligned} t_1 &= 0,408 \text{ Sekunden} \\ t_2 &= 0,422 \text{ „} \\ v &= 1,224 \text{ m} \end{aligned}$$

errechnet man

$$t_x = \frac{0,422^2}{0,408 + 2 \cdot 0,422} = 0,144 \text{ Sekunden,}$$

$$b_2 = \frac{1,224}{0,144} = 8,51 \text{ m/sek}^2.$$

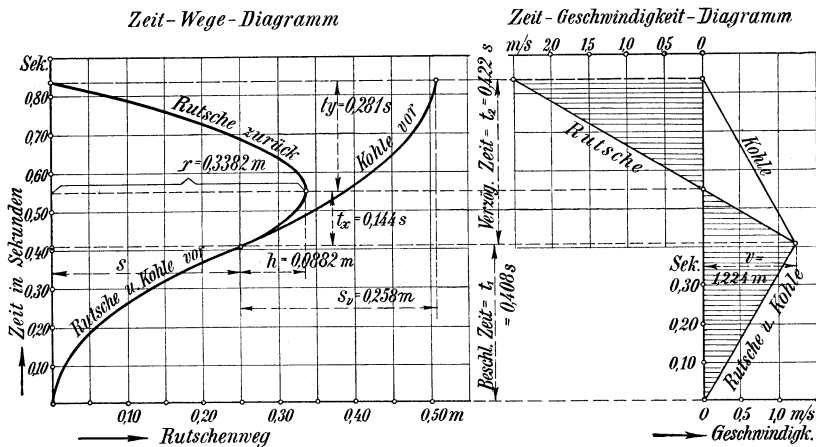


Abb. 324. Zeit-Wege- und Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm des Rutschenbeispiels.

Mit dieser Gegenbeschleunigung muß die Rutsche zurückbewegt werden. Dann ist der Auslaufweg

$$h = \frac{v^2}{2 b_2} = \frac{1,224^2}{17,02} = 0,0882 \text{ m}$$

und der gesamte Rückweg

$$r = s + h = 0,25 + 0,0882 = 0,3382 \text{ m.}$$

Dieser Rückweg erfordert

$$t_y = \sqrt{\frac{2 r}{b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3382}{8,51}} = 0,281 \text{ Sekunden.}$$

Die Dauer der Verzögerungsperiode ist also

$$t_2 = t_x + t_y = 0,144 + 0,281 = 0,425 \text{ Sekunden.}$$

Die Kohle kommt in 0,422 Sekunden zur Ruhe, d. h. praktisch fallen die Ruhepunkte von Rutsche und Kohle zusammen, denn es war  $t_x = 0,422 \text{ sek.}$

Der Vorschubweg der Kohle ist

$$s_v = \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,90 \cdot 0,422^2 = 0,258 \text{ m.}$$

Die Förderstrecke der Kohle für ein Rutschenspiel ist

$$S = s + s_v = 0,25 + 0,258 = 0,508 \text{ m.}$$

Die Schwingungsdauer der Rutsche ist

$$T = t_1 + t_2 = 0,408 + 0,425 = 0,833 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{Hubzahl } n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,833} = 71,6 \text{ min.}$$

Die stündliche Förderleistung in t ist

$$G = f \cdot 60 \cdot n \cdot (s + s_v) = 0,050 \cdot 60 \cdot 71,6 \cdot 0,508 = 109 \text{ t/h.}$$

Die Förderleistung bei der Rutschenbeschleunigung  $b_1 = 1,5 \text{ m/sek}^2$  war 78 t/h, sie ist also jetzt bei doppelter Beschleunigung auf das

$$\frac{109}{78} = 1,40 = \sqrt{2} \text{ -fache}$$

gesteigert.

**Regel:** Steigert man die Hinlaufbeschleunigung auf das  $n$ -fache, so wächst die Förderleistung auf das  $\sqrt{n}$ -fache.

**Wie ändern sich die Kraftverhältnisse?** Um die doppelte Hinlaufbeschleunigung zu erzielen, ist die doppelte Kraft erforderlich. Der Gegendruckzylinder wird in zweifacher Anordnung angewendet.

$$b_1 = 1,50 \text{ m/sek}^2 \text{ . . . . . Kolbenfläche } F_1 = 320 \text{ cm}^2,$$

$$b_1 = 3,00 \text{ ,, . . . . . ,, } = 2F_1 = 640 \text{ ,,}$$

zwei Kolben von  $D_1 = 20 \text{ cm.}$

Der Rutschenmotor hat mit den früheren Werten folgende Kolbenkraft aufzubringen:

$$\text{Fahrwiderstand } W = 115 \text{ kg,}$$

$$\text{Beschleunigungswiderstand } K_2 = \frac{3600}{9,81} \cdot 8,51 = 3120 \text{ ,,}$$

$$\text{Gleitwiderstand der Kohle } R = 1200 \text{ ,,}$$

$$\text{Gegendruckzug } P_1 = 2 \cdot 1280 = 2560 \text{ ,,}$$

$$P_2 = 6995 \text{ kg.}$$

$$\text{Bei 4 atü ist die Kolbenfläche } F_2 = \frac{6995}{4} = 1749 \text{ cm}^2,$$

$$\text{Kolbendurchmesser} = 47 \text{ cm.}$$

**Der Luftverbrauch des Rutschenmotors:** Die Füllungsstrecke beträgt bei Vollfüllung

$$s_2 = s = 0,25 \text{ m.}$$

Stündlicher Druckluftverbrauch

$$L = 60 \cdot n \cdot F_2 \cdot s_2 = 60 \cdot 71,6 \cdot 0,1749 \cdot 0,25 = 188 \text{ m}^3\text{h,}$$

$$\text{Saugluftverbrauch} = 188 \cdot \frac{1}{4} = 940 \text{ m}^3\text{/h.}$$

Demnach werden für 1 t Förderleistung verbraucht

$$\frac{940}{109} = 8,62 \text{ m}^3\text{/t.}$$

Bei der Hingangsbeschleunigung  $b_1 = 1,5 \text{ m/sek}^2$  war der Verbrauch 11 m<sup>3</sup> Saugluft, der Luftverbrauch ist also kleiner geworden.



Für 1 t Kohle auf 0,080 km söhlige Förderstrecke = 0,080 tkm = 8,62 m<sup>3</sup> a. L.,  
 für 1 tkm söhlige Rutschenförderung =  $\frac{8,62 \cdot 1}{0,080} = 108 \text{ m}^3 \text{ a. L.},$   
 Energiekosten = 108 · 0,25 = 27 Pfg./tkm.

Das Beispiel lehrt, daß eine große Hingangsbeschleunigung nicht allein leistungssteigernd ist, sondern auch die Wirtschaftlichkeit erhöht, weil die Kohle länger vorwärts gleitet und damit die Zeit für den Rücklaufweg der Rutsche größer, also die Rückbeschleunigung kleiner wird, wodurch sich eine Kraftersparnis ergibt.

### Das Beschleunigungsverfahren unter Anwendung von schiefen Ebenen.

Unter Beibehaltung des Gegenzylinders und des einfach wirkenden Rutschenmotors sind in Abb. 325 besondere Laufbahnen unter die Laufrollen gesetzt, und zwar so, daß die Rutsche während des Hinganges ansteigen muß. Die Rutsche muß also während des Hinganges vertikal

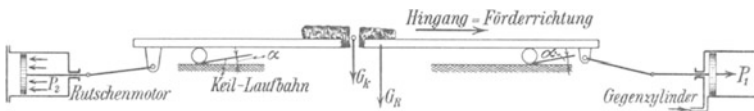


Abb. 325. Anwendung von schiefen Ebenen.

nach oben beschleunigt und während des Rückganges vertikal nach unten beschleunigt werden. Das bringt zweierlei Vorteile:

1. Der Normaldruck zwischen Kohle und Rutsche wird während des Hinganges größer, so daß die Haftreibung zwischen Kohle und Rutsche größer wird. Infolgedessen kann mit größerer Beschleunigung gefahren werden.

2. Der Normaldruck zwischen Kohle und Rutsche wird während des Rückganges kleiner, so daß der Reibungswiderstand zwischen Kohle und Rutsche kleiner wird. Infolgedessen gleitet die Kohle einen größeren Vorschubweg vorwärts.

Ist  $G_K =$  Kohlegewicht in kg,

so ist bei söhliger Laufbahn der Normaldruck

$$N = G_K.$$

Ist die Laufbahn eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha$ , so ist der Normaldruck

$$\begin{aligned} N &= G_K + \text{Beschleunigungsdruck (beim Hingang),} \\ N &= G_K - \text{Beschleunigungsdruck (beim Rückgang).} \end{aligned}$$

Erfährt die Rutsche parallel zur schiefen Ebene (Abb. 326) die Beschleunigung  $b$ , so zerlegt sich diese in die Horizontalkomponente  $b_h$  und in die Vertikalkomponente  $b_v$ , und zwar ist

$$b_v = b_h \cdot \text{tg } \alpha.$$

Der Beschleunigungsdruck ist gleich Masse mal Beschleunigung, also ist der Beschleunigungsdruck in vertikaler Richtung

$$\frac{G_K}{g} \cdot b_v = \frac{G_K}{g} \cdot b_h \cdot \text{tg } \alpha$$

und demnach der Normaldruck

$$N = G_K + \frac{G_K}{g} \cdot b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{Hingang}),$$

$$N = G_K - \frac{G_K}{g} \cdot b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{Rückgang}).$$

Der Reibungswiderstand ist für den Hingang

$$\begin{aligned} R &= \mu \cdot N \\ &= \mu \cdot G_K \cdot \left(1 + \frac{b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g}\right) \\ &= \mu \cdot \frac{G_K}{g} \cdot (g + b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha) \\ &= \mu \cdot M \cdot (g + b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

Der erreichbare Reibungswiderstand ist die größte Kraft, welche die Kohle beschleunigt, also darf die Beschleunigungskraft nicht größer als

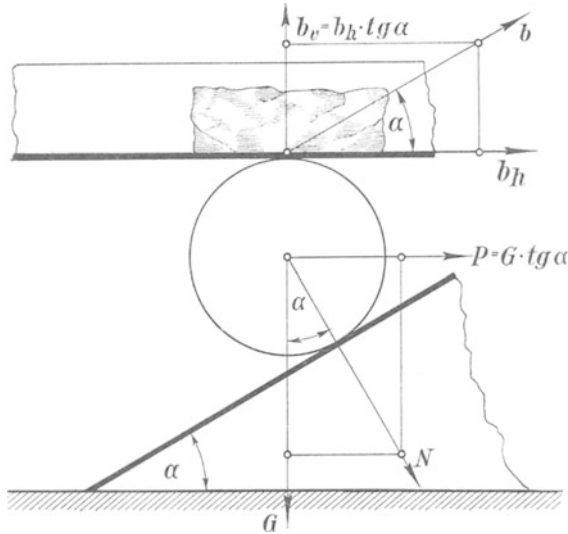


Abb. 326. Beschleunigungskräfte und Beschleunigungen.

der Reibungswiderstand sein, d. h. es muß die Bedingung erfüllt sein

$$M \cdot b_h = R \quad \text{oder} \quad b_h = \frac{R}{M}$$

Daraus folgt die größte zulässige Beschleunigung beim Hingang

$$b_h = \frac{R}{M} = \mu \cdot (g + b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha) \quad \text{oder} \quad b_h - \mu \cdot b_h \cdot \operatorname{tg} \alpha = \mu \cdot g,$$

$$b_h = \frac{\mu \cdot g}{1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Mit  $\mu = 0,40$  ergeben sich für die verschiedenen Neigungswinkel folgende Beschleunigungswerte:

$\alpha = 5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$
$b_h = 4,07$	4,23	4,40	4,60	4,83	5,09	5,46 m/sek <sup>2</sup>

Die Beschleunigungswerte wachsen also mit zunehmendem Neigungswinkel. Für  $\alpha = 0^\circ$  ist der Beschleunigungswert wieder

$$b_h = \mu \cdot g = 0,40 \cdot 9,81 = 3,924 \text{ m/sek}^2.$$

Beim Rückgang verzögert der Reibungswiderstand die Geschwindigkeit der gleitenden Kohle. Die größte Verzögerung, welche eintreten kann, würde durch den größten Reibungswiderstand bestimmt. Ist  $\mu_1 = 0,30$  die Reibungsziffer der Bewegung zwischen Kohle und Eisen, so würde sich in gleicher Weise wie vorstehend ableiten lassen

$$b_h = \frac{\mu_1 \cdot g}{1 + \mu_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Mit  $\mu_1 = 0,30$  ergeben sich für die verschiedenen Neigungswinkel folgende Verzögerungswerte, die den Rutschvorgang der Kohle zum Stillstand bringen:

$\alpha = 5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$
$b_h = 2,88$	2,80	2,73	2,66	2,58	2,51	2,43 m/sek <sup>2</sup>

Die Verzögerungswerte nehmen also mit zunehmendem Neigungswinkel ab. Für  $\alpha = 0^\circ$  ist der Verzögerungswert wieder

$$b_h = \mu_1 \cdot g = 0,30 \cdot 9,81 = 2,943 \text{ m/sek}^2.$$

**Beispiel:** Wie ändern sich die Bewegungs- und Kraftverhältnisse, wenn mit der Hingangsbeschleunigung  $b_h = 5,0 \text{ m/sek}^2$  gefördert wird, aber Laufbahnen mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  angeordnet werden?

**Lösung:** Wird der Beschleunigungshub  $s = 0,25 \text{ m}$  mit der Beschleunigung  $b_1 = b_h = 5,0 \text{ m/sek}^2$  (siehe Tabelle für  $\alpha = 30^\circ$  wird  $b_h = 5,09 \text{ m/sek}^2$ ) zurückgelegt, so sind hierfür

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{5,0}} = 0,316 \text{ sek}$$

erforderlich. Die Endgeschwindigkeit der Beschleunigungsperiode ist dann

$$v = b_1 \cdot t_1 = 5,0 \cdot 0,316 = 1,58 \text{ m/sek}.$$

Mit dieser Anfangsgeschwindigkeit beginnt die Gleitbewegung, die durch Reibungsverzögerung  $b_h$  zum Stillstand gebracht wird. Nach der zweiten Tabelle ist der Verzögerungswert  $b_h = 2,51 \text{ m/sek}^2$  für  $\alpha = 30^\circ$ . Mit  $b_3 = b_h = 2,51 \text{ m/sek}^2$  wird die Verzögerungszeit

$$t_2 = \frac{v}{b_3} = \frac{1,58}{2,51} = 0,63 \text{ sek}.$$

Sollen Kohle und Rutsche zu gleicher Zeit zur Ruhe kommen, so darf die Verzögerungsperiode der Rutsche nur

$$t_2 = t_z = 0,63 \text{ sek}$$

dauern. Welche Gegenbeschleunigung hierfür erforderlich ist, läßt sich wie folgt berechnen. Bei der Rückstoßbewegung der Hämmer wurde abgeleitet

$$x = \frac{t_z^2}{t_1 + 2t_2} = t_x = \text{Auslaufzeit}.$$

Mit  $t_1 = 0,316 \text{ sek}$  und  $t_2 = 0,63 \text{ sek}$  wird

$$t_x = \frac{0,63^2}{0,316 + 2 \cdot 0,63} = 0,251 \text{ sek}.$$

In dieser Zeit  $t_x$  soll die Endgeschwindigkeit  $v = 1,58$  m/sek aufgezehrt sein, d. h. die Gegenbeschleunigung  $b_2$ , die der Rutschenmotor geben muß, muß werden

$$b_2 = \frac{v}{t_x} = \frac{1,58}{0,251} = 6,30 \text{ m/sek}^2.$$

Dann ist der Auslaufweg

$$h = \frac{v^2}{2b_2} = \frac{1,58^2}{2 \cdot 6,30} = 0,198 \text{ m}$$

und der gesamte Rückweg

$$r = s + h = 0,25 + 0,198 = 0,448 \text{ m.}$$

Dieser Rückweg erfordert

$$t_v = \sqrt{\frac{2r}{b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,448}{6,30}} = 0,377 \text{ sek.}$$

Die Dauer der Verzögerungsperiode der Rutsche ist also

$$t_2 = t_x + t_z = 0,251 + 0,377 = 0,628 \text{ sek.}$$

Die Kohle kommt nach  $t_x = 0,63$  sek zur Ruhe, d. h. praktisch fallen die Ruhepunkte für Rutsche und Kohle zusammen.

Der Vorschubweg der Kohle ist

$$s_v = \frac{1}{2} b_3 \cdot t_x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,51 \cdot 0,63^2 = 0,50 \text{ m.}$$

Da der Beschleunigungshub  $s = 0,25$  m war, so ist die Förderstrecke für ein Rutschenspiel

$$S = s + s_v = 0,25 + 0,50 = 0,75 \text{ m.}$$

Die Schwingungsdauer der Rutsche ist

$$T = t_1 + t_2 = 0,316 + 0,628 = 0,944 \text{ sek.}$$

$$\text{Hubzahl } n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,944} = 63,6/\text{min.}$$

Die stündliche Förderleistung ist

$$G = f \cdot 60 \cdot n \cdot S = 0,050 \cdot 60 \cdot 63,6 \cdot 0,75 = 143 \text{ t/h.}$$

Wir fanden früher bei derselben Rutsche und der Hingangsbeschleunigung  $b_1 = 3$  m/sek<sup>2</sup> eine Förderleistung von  $G = 109$  t/h. Der Steigerung der Hingangsbeschleunigung von 3 auf 5 m/sek<sup>2</sup> entspricht nach früherer Ableitung eine Leistungssteigerung auf

$$\text{das } \sqrt{\frac{5}{3}} = 1,29 \text{ fache,}$$

während wir jetzt eine Leistungssteigerung auf

$$\text{das } \frac{143}{109} = 1,31 \text{ fache}$$

haben. Die um 2% höhere Leistungssteigerung entspricht wohl der verminderten Reibung, die durch das Senken der Rutsche entsteht.

Die Kraftverhältnisse und der Luftverbrauch.

1. Hingang:

$$\text{Fahrwiderstand} = 0,015 \cdot (3600 + 4000) = 115 \text{ kg}$$

$$\text{Beschleunigungskraft} = \frac{3600 + 4000}{9,81} \cdot 5,00 = 3970 \text{ ,,}$$

$$\text{Anheben der Rutsche} = 7600 \cdot \text{tg } 30^\circ = 7600 \cdot 0,5774 = 4380 \text{ ,,}$$

$$\text{Der Hingang verbraucht die Zugkraft } P_1 = 8465 \text{ kg}$$

$$\text{bei 4 atü ist die Kolbenfläche } F_1 = \frac{8465}{4} = 2116 \text{ cm}^2.$$

Man nimmt 2 Gegenzylinder von  $D = 36,7$  cm Durchmesser.

## 2. Rückgang:

Der Rutschenmotor hat während des Zurückziehens der Rutsche den Gleitwiderstand der Kohle zu überwinden. Durch das Senken der Rutsche vermindert sich der Normaldruck, er ist

$$\begin{aligned} N &= G_x - \frac{G_x}{g} \cdot b_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ &= 4000 - \frac{4000}{9,81} \cdot 6,30 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 4000 - 1480 = 2520 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Der Gleitwiderstand der rutschenden Kohle ist damit

$$R = \mu_1 \cdot N = 0,30 \cdot 2520 = 756 \text{ kg.}$$

Zusammengefaßt sind die Widerstände:

- |   |          |
|---|----------|
| 1. Fahrwiderstand wie früher $W$ . . . . .                        | = 115 kg |
| 2. Beschleunigungswiderstand $K_2 = \frac{3600}{9,81} \cdot 6,30$ | = 2320 „ |
| 3. Gleitwiderstand der Kohle $R$ . . . . .                        | = 756 „  |
| 4. Zug des Gegenzylinders $P_1$ . . . . .                         | = 8465 „ |
| Summe =   | 11656 kg |

Der Rückwärtslauf senkt die Rutsche, so daß die Gewichtskomponente

$$(G_x + G_R) \cdot \operatorname{tg} \alpha = (4000 + 3600) \cdot 0,5774 = 4350 \text{ kg}$$

den Kolben unterstützt, so daß die Kolbenkraft des Rutschenmotors sein muß

$$P_2 = 11656 - 4350 = 7306 \text{ kg,}$$

mit  $p = 4$  atü wird  $F_2 = \frac{7306}{4} = 1826 \text{ cm}^2$

$$\text{Kolbendurchmesser } D_2 = 48,2 \text{ cm.}$$

Der stündliche Luftverbrauch des Motors ist bei  $s = 0,25$  m Beschleunigungshub

$$Q = 60 \cdot n \cdot F_2 \cdot s = 60 \cdot 63,6 \cdot 0,1826 \cdot 0,25 = 174 \text{ m}^3/\text{h Druckluft von 5 ata}$$

oder

$$Q = 174 \cdot 5 = 870 \text{ m}^3/\text{h a. L.}$$

Die stündliche Förderleistung war 143 t, so daß der Luftverbrauch

$$\text{für 1 t Kohle} = \frac{870}{143} = 6,1 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

ist. Bei 80 m Rutschenlänge erfordern daher

$$0,080 \text{ tkm} = 6,1 \text{ m}^3 \text{ a. L.,}$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{6,1 \cdot 1}{0,080} = 76 \text{ m}^3 \text{ a. L.} = 76 \cdot 0,25 = 19 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

### Zusammenstellung der Ergebnisse für das Beschleunigungsverfahren.

Für söhliche Förderung wurden folgende Ergebnisse errechnet, wenn nachstehende Werte zugrunde liegen: Rutschenlänge = 80 m, Rutschen-eigengewicht = 45 kg/m, Beladung = 50 kg/m, Füllquerschnitt = 0,050 m<sup>3</sup>, 1 m<sup>3</sup> Laderaum = 1 t Kohle, Beschleunigungshub  $s = 0,25$  m, für Hingang ungesteuerte Gegenmotore, für Rückgang einfach wirkenden Rutschenmotor, Betriebsdruck  $p = 4$  atü, Reibungsziffer der Ruhe  $\mu = 0,40$ , Reibungsziffer der Bewegung  $\mu_1 = 0,30$ , 1 m<sup>3</sup> a. L. = 0,25 Pf.

	für Hingangsbeschleunigung $b_1 =$		
	1,5 m/sek <sup>2</sup>	3,0 m/sek <sup>2</sup>	5,0 m/sek <sup>2</sup>
Endgeschwindigkeit der Rutsche $v$ in m/sek . . . . .	0,866	1,224	1,580
Gleitweg der Kohle $s_v$ in m . . . . .	0,130	0,258	0,500
Förderweg der Kohle je Hub in m . . . . .	0,380	0,508	0,750
Hubzahl $n$ /min . . . . .	68,0	71,6	63,6
Förderleistung in t/h . . . . .	78	109	143
Luftverbrauch m <sup>3</sup> a. L. je 1 t . . . . .	11,0	8,62	6,10
Luftverbrauch m <sup>3</sup> a. L. je 1 tkm . . . . .	138	108	76
Energiekosten in Pfg. je 1 tkm. . . . .	34,5	27,0	19,0

Steigerungen der Hingangsbeschleunigungen geben erhebliche Steigerungen der Förderleistungen, bei  $n$ -facher Steigerung ist mit einer  $\sqrt{n}$ -fachen Steigerung der Förderleistung zu rechnen. Ohne Laufbahnen kann man praktisch nicht über  $b_1 = 3,00$  m/sek<sup>2</sup> gehen. Der Vorteil der schrägen Ansteigbahnen ist die Zulassung **höherer** Hingangsbeschleunigungen, für  $\alpha = 30^\circ$  Laufbahnsteigung ist  $b_1 = 5$  m/sek<sup>2</sup> möglich. Ganz wesentlich ist die größere Wirtschaftlichkeit der hohen Hingangsbeschleunigungen.

Das Regeln der Förderleistung.  
Wir haben gelernt, daß die Förderleistung von der Größe der Hingangsbeschleunigung abhängig ist. Diese wird durch den Gegendruckzylinder bestimmt. Man müßte also den Gegendruckzylinder größer oder kleiner nehmen. Praktisch könnte man aber im Betriebe die Leistung durch diese Maßnahme nicht regeln, das würde zu lange Betriebsunterbrechungen geben.

Das Regeln der Förderleistung.

Man regelt daher in anderer Weise, man verändert den Hub, indem man am Rutschenmotor einen größeren oder kleineren Hub einstellt. Wie ändern sich nun Förderleistung und Luftverbrauch, wenn man den Hub verändert?

Durchrechnungen gleicher Beispiele ergaben bemerkenswerte Erkenntnisse. Die Rechnungen wurden durchgeführt für eine Hingangsbeschleunigung von  $b_1 = 2,30$  m/sek<sup>2</sup> unter folgenden Annahmen: Rutschenlänge = 100 m, Füllquerschnitt  $F = 0,060$  m<sup>2</sup>, Rutscheneigengewicht = 50 kg/m, Beladung = 60 kg/m,  $p = 4$  atü, Beschleunigungshübe  $s = 0,125$  m,  $0,25$  m und  $0,375$  m. Die Ergebnisse sind in Abb. 327 graphisch dargestellt.

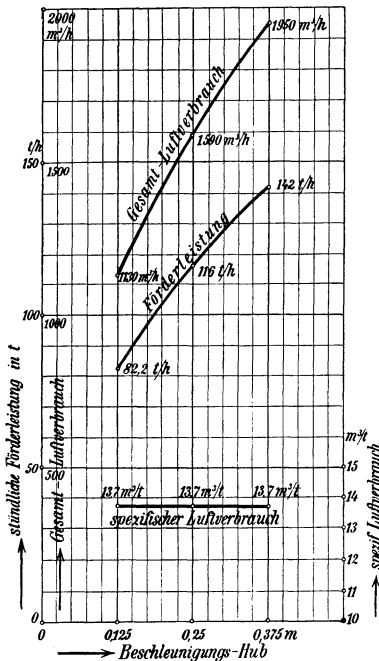


Abb. 327. Förderleistung und Luftverbrauch in Abhängigkeit vom Beschleunigungshub, Rutschenlänge = 100 m,  $F = 0,060$  m<sup>2</sup>.

für eine Hingangsbeschleunigung von  $b_1 = 2,30$  m/sek<sup>2</sup> unter folgenden Annahmen: Rutschenlänge = 100 m, Füllquerschnitt  $F = 0,060$  m<sup>2</sup>, Rutscheneigengewicht = 50 kg/m, Beladung = 60 kg/m,  $p = 4$  atü, Beschleunigungshübe  $s = 0,125$  m,  $0,25$  m und  $0,375$  m. Die Ergebnisse sind in Abb. 327 graphisch dargestellt.

Zunächst ergab sich die Tatsache:

„Ist für einen bestimmten Hub der Rutschenmotor so berechnet, daß Kohle und Rutsche zur gleichen Zeit ausgeschwungen haben, so fallen auch für jeden anderen Hub diese Zeitpunkte zusammen, d. h. bei unvermindertem Rutschengewicht liefert die Rutsche für alle Hublängen jeweilig die größtmögliche Fördermenge.“

Die Förderleistungskurve folgt dem Gesetz: Wächst der Hub auf das  $n$ -fache, so steigt die Förderleistung auf das  $\sqrt{n}$ -fache.

Die Kurve des Gesamtluftverbrauchs folgt gleichfalls dem Gesetz:

Wächst der Hub auf das  $n$ -fache, so steigt der Gesamtverbrauch auf das  $\sqrt{n}$ -fache.

Demnach wächst der Gesamtluftverbrauch direkt proportional mit der Förderleistung, so daß das Gesetz für den spezifischen Luftverbrauch lautet:

Der spezifische Luftverbrauch, d. i. der Saugluftverbrauch für 1 t Förderleistung, bleibt für alle Hübe konstant.

Der Motor arbeitet demnach für alle Hübe mit derselben Wirtschaftlichkeit, und es ist die in der Praxis übliche Regelung der Förderleistung durch Hubveränderung eine durchaus wirtschaftliche Regelung. Man muß dann allerdings auch verlangen, daß die Änderung des Hubes in genügend vielen Abstufungen möglich ist.

### b) Das Schwerkraft-Verfahren.

Während beim Beschleunigungsverfahren Hingang und Rückgang der Rutsche durch Maschinenkraft erfolgt, wird beim Schwerkraftverfahren der Hingang, d. i. die Bewegung der Rutsche in der Förderrichtung der Kohle, durch die Schwerkraft bewirkt.

Soll die Schwerkraft wirken, so muß die Rinne fallen können. Es wird also das natürliche Anwendungsgebiet dieser Förderart die einfallende Förderung sein.

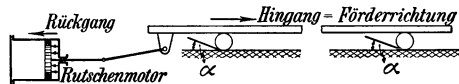


Abb. 328. Das Schwerkraft-Verfahren.

Aber auch bei söhlicher Förderung ist dieses Förderverfahren möglich, indem man keilförmige Laufbahnen unter die Rollen setzt, wie Abb. 328 zeigt. Es stehen jetzt die Keilbahnen entgegengesetzt wie bei der früheren Arbeitsweise. Rutsche und Kohle fallen gemeinsam den Hingangsweg herunter, der Rutschenmotor zieht dann die Rutsche wieder herauf, während die Kohle in der Hingangsrichtung weitergleitet.

Bei der Rückwärtsbewegung wird die Rutsche gegen die Kohle nach oben gedrückt, dadurch wird natürlich der Reibungsdruck zwischen Kohle und Rutsche vergrößert, der Reibungswiderstand erzeugt eine stärkere Verzögerung, so daß die Kohle schwerer rutscht und sich um einen geringeren Weg verschiebt. Damit wird die Zeit für die Zurückführung der Rutsche kleiner, und das bedingt wieder eine größere Gegenbeschleunigung und größere Gegenkraft, die der Rutschenmotor zu leisten hat. Man wird daher eine schlechtere Wirtschaftlichkeit voraussetzen können.

Die Rechnung wurde durchgeführt für eine Hingangsbeschleunigung von  $b_1 = 2,30 \text{ m/sek}^2$  (Keilwinkel  $\alpha = 14^\circ$ ). Es ergab sich bei  $s = 0,25 \text{ m}$  Beschleunigungshub einer  $100 \text{ m}$  langen Rutsche von  $F = 0,060 \text{ m}^2$  Füllquerschnitt ein Luftverbrauch von

$$157 \text{ m}^3 \text{ a. L. für 1 tkm}$$

$$\text{oder } 157 \cdot 0,25 = 39,1 \text{ Pfg. Energiekosten für 1 tkm.}$$

Diese Werte liegen höher wie bei söhlicher Förderung nach dem Beschleunigungsverfahren, so daß das Schwerkraftverfahren bei söhlicher Förderung grundsätzlich auszuschalten ist.

### Einfallende Förderung.

Bei einfallender Förderung liegen die Verhältnisse für das Schwerkraftverfahren günstiger. Bei dem Einfallwinkel  $\alpha$  erhält die Rutsche nach Abb. 329 eine Schwerkraftbeschleunigung

$$b_1 = g \cdot \sin \alpha.$$

Die Normalkomponente der Schwerkraftbeschleunigung zur Rutschenfläche ist

$$b_n = g \cdot \cos \alpha.$$

Diese erzeugt den Normaldruck und beim Rutschen der Kohle wirkt die Komponente

$$\mu_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

verzögernd und bringt die Kohle wieder zur Ruhe. Aber die Beschleunigungskomponente  $g \cdot \sin \alpha$  wirkt der Verzögerung entgegen, so daß sich

eine resultierende Verzögerung einstellt von der Größe

$$b_3 = \mu_1 \cdot g \cdot \cos \alpha - g \cdot \sin \alpha.$$

Die resultierende Verzögerung wird Null, d. h. die Kohle rutscht unter dem Einfluß der Schwerkraft von selbst, wenn

$$\mu_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = g \cdot \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \mu_1$$

wird. Ist z. B.  $\mu_1 = 0,30$ , so rutscht die Kohle von selbst weiter, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha = 0,30$$

wird. Das ist der Fall für den Einfallwinkel

$$\alpha = 16^\circ 42'.$$

Darüber hinaus wäre also die Anwendung einer Schüttelrutsche nicht mehr nötig.

Der Einfallwinkel  $\alpha$  bestimmt die Größe der Hingangsbeschleunigung. Rechnet man nach der Gleichung

$$b_1 = g \cdot \sin \alpha$$

die für die verschiedenen Hingangsbeschleunigungen erforderlichen Einfallwinkel aus, so ergeben sich folgende Werte:

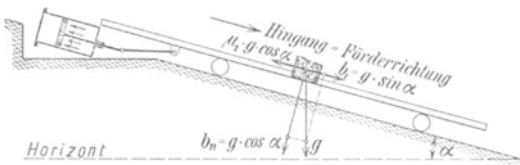


Abb. 329. Förderung im Einfallen.



$b_1 = 0,50 \text{ m/sek}^2$	1,00 m/sek <sup>2</sup>	1,50 m/sek <sup>2</sup>	2,00 m/sek <sup>2</sup>	2,50 m/sek <sup>2</sup>
$\alpha \approx 3^\circ$	6°	9°	12°	15°

Je 3° Winkelzunahme bringen also eine Zunahme der Hingangsbeschleunigung von 0,5 m/sek<sup>2</sup>. Für eine 100 m lange Rutsche von  $f = 0,060 \text{ m}^2$  Füllungsquerschnitt sollen Förderleistung und Luftverbrauch unter Annahme eines Beschleunigungshubes  $s = 0,25 \text{ m}$  ausgerechnet werden. Die Rutsche soll wieder so arbeiten, daß nach jedem Spiel Kohle und Rutsche zu gleicher Zeit ihren Ruhezustand erreichen.

1. Berechnung für  $b_1 = 1,00 \text{ m/sek}^2$ .

Mit den früheren Bezeichnungen wird

$$\sin \alpha = \frac{b_1}{g} = \frac{1,00}{9,81} = 0,1021,$$

Einfallwinkel  $\alpha = 5^\circ 52'$  (also ungefähr 6°)

$$\cos \alpha = \cos 5^\circ 52' = 0,995$$

$$\text{Beschleunigungszeit } t_1 = \sqrt{\frac{2s}{b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{1,0}} = 0,707 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{Endgeschwindigkeit } v = b_1 \cdot t_1 = 1,00 \cdot 0,707 = 0,707 \text{ m/sek.}$$

$$t_z = \frac{v}{b_3} = \text{Rutschkdauer der Kohle,}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \mu_1 \cdot g \cdot \cos \alpha - g \cdot \sin \alpha \\ &= 0,30 \cdot 9,81 \cdot 0,995 - 1,00 = 1,93 \text{ m/sek}^2, \end{aligned}$$

also ist

$$t_z = \frac{0,707}{1,93} = 0,3665 \text{ Sekunden}$$

=  $t_2$  = Dauer der Verzögerungsperiode.

$$\text{Gegenbeschleunigung der Rutsche } b_2 = \frac{v}{t_x},$$

$$\text{Auslaufzeit } t_x = \frac{t_z^2}{t_1 + 2 \cdot t_z} = \frac{0,3665^2}{0,707 + 2 \cdot 0,3665} = 0,0934 \text{ Sekunden,}$$

$$b_2 = \frac{0,707}{0,0934} = 7,58 \text{ m/sek}^2,$$

$$\text{Auslaufweg der Rutsche } h = \frac{v^2}{2b_2} = \frac{0,707}{2 \cdot 7,58} = 0,033 \text{ m,}$$

$$\text{Rücklaufweg der Rutsche } r = s + h = 0,25 + 0,033 = 0,283 \text{ m,}$$

$$\text{Rücklaufzeit } t_y = \sqrt{\frac{2r}{b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,283}{7,58}} = 0,273 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{Verzögerungszeit der Rutsche } t_2 = t_x + t_y = 0,367 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{Schwingungszeit der Rutsche } T = t_1 + t_2 = 0,707 + 0,367 = 1,074 \text{ Sekunden,}$$

$$\text{Schwingungszahl } n = \frac{60}{T} = \frac{60}{1,074} = 55,8/\text{Minute,}$$

$$\text{Vorschubweg der Kohle } s_v = \frac{v^2}{2b_3} = \frac{0,707^2}{2 \cdot 1,93} = 0,1295 \text{ m,}$$

$$\text{Förderstrecke der Kohle } S = s + s_v = 0,25 + 0,1295 = 0,3795 \text{ m.}$$

Stündliche Förderleistung

$$G = 60 \cdot f \cdot n \cdot S = 60 \cdot 0,060 \cdot 55,8 \cdot 0,3795 = 76,4 \text{ t/h.}$$

Zur Bestimmung des Luftverbrauchs muß die Größe des Rutschenmotors berechnet werden. Er hat zu überwinden

1. Reibung der Kohle =  $R = \mu_1 \cdot G_K \cdot \cos \alpha = 0,30 \cdot 6000 \cdot 0,995 = 1800 \text{ kg}$
  2. Beschl. Widerstand für das Eigengewicht der Rutsche =  $\frac{5000}{9,81} \cdot 7,58 = 3860 \text{ ,}$
  3. Fall-Widerstand der vollen Rutsche =  $G \cdot \sin \alpha = 11000 \cdot 0,1021 = 1120 \text{ ,,}$
  4. Fahrwiderstand (wie früher). . . . . = 165 ,,
- Kolbenkraft  $P = 6945 \text{ kg}$

$$F = \text{Kolbenfläche} = \frac{P}{p} = \frac{6945}{4} = 1736 \text{ cm}^2 = 0,1736 \text{ m}^2, D = 47 \text{ cm}.$$

$$\begin{aligned} \text{Stündlicher Druckluftverbrauch} &= 60 \cdot n \cdot F \cdot r \\ &= 60 \cdot 55,8 \cdot 0,1736 \cdot 0,283 = 164,5 \text{ m}^3/\text{h}. \end{aligned}$$

$$\text{Stündlicher Saugluftverbrauch} = 5 \cdot 164,5 = 822,5 \text{ m}^3/\text{h}.$$

$$\text{Spezifischer Luftverbrauch} = \frac{822,5}{76,4} = 10,78 \text{ m}^3/\text{t}.$$

$$1 \text{ t auf } 100 \text{ m Förderstrecke} = 0,100 \text{ tkm} = 10,78 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{10,78 \cdot 1}{0,100} = 107,8 \sim 108 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 108 \cdot 0,25 = 27 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

2. Berechnung für  $b_1 = 2,00 \text{ m}/\text{sek}^2$  und  $\alpha = 12^\circ$  Einfallen.

Die in gleicher Weise auszuführende Berechnung liefert folgende Werte:

$t_1 = 0,50 \text{ sek}$	$t_2 = 1,136 \text{ sek}$
$n = 36,7/\text{min}$	$b_2 = 2,145 \text{ m}/\text{sek}$
Auslaufweg der Rutsche	$h = 0,233 \text{ m}$
Rücklaufweg der Rutsche	$r = s + h = 0,483 \text{ m}$
Vorschubweg der Kohle	$s_e = 0,568 \text{ m}$
Förderstrecke der Kohle	$S = s + s_e = 0,818 \text{ m}$
Förderleistung	$G = 108 \text{ t}/\text{h}$
Kolbenfläche	$F = 1318 \text{ cm}^2$
Saugluftverbrauch	$= 700 \text{ m}^3/\text{h}$
Spezifischer Luftverbrauch	$= 6,48 \text{ m}^3/\text{t}$

$$1 \text{ t auf } 100 \text{ m Förderstrecke} = 0,100 \text{ tkm} = 6,48 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{6,48 \cdot 1}{0,100} = 6,48 \sim 65 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 65 \cdot 0,25 = 16,25 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

Der Luftverbrauch ist also erheblich geringer geworden. Aber der Auslaufweg der Rutsche ist recht groß geworden. Soll das Förderverfahren in dieser günstigen Weise durchgeführt werden, so muß man den Rutschenmotor diesen langen Auslaufweg möglich machen, siehe Abb. 330.



Abb. 330. Die Wegeverhältnisse.

Durch das Eigengewicht der Rutsche wird der Kolben während des beschleunigten Hinganges aus der Stellung A in die Stellung B gezogen. In dieser Stellung stößt die Druckluft gegen die rechte

Kolbenfläche und erzeugt die Gegenbeschleunigung. Der Kolben läuft noch um den Auslaufweg  $h$  weiter und muß dann den ganzen Weg

$$r = s + h$$

wieder bis in die Anfangsstellung zurücklaufen.

Zusammenstellung für Schwerkraftförderung im Einfallen.  
 Rutschenlänge = 100 m, Füllungsquerschnitt = 0,060 m<sup>2</sup>, Beschl. Hub = 0,25 m.

Einfallwinkel $\alpha^\circ$ ungefähr	Hingangs- beschl. in m/sek <sup>2</sup>	Förder- leistung in t/h	Saugluft- verbrauch in m <sup>3</sup> /h	Spezif. Luft- verbrauch in m <sup>3</sup> /t	Luftver- brauch m <sup>3</sup> /tkm	Energie- kosten Pfg./tkm
3°	0,50	54,0	1070	19,8	198	49,5
6°	1,00	76,4	822	10,8	108	27,0
9°	1,50	93,0	737	7,9	79	19,75
12°	2,00	108,0	700	6,5	65	16,25
15°	2,50	120,5	685	5,7	57	14,25

Die in der Tabelle mitgeteilten Werte sind in Abb. 331 graphisch dargestellt. Auffallend ist das starke Anwachsen des spezifischen Luftverbrauches bei geringer Hingangsbeschleunigung, also bei geringem Einfallen. Man kommt wieder zu dem früheren Ergebnis, daß bei geringem Einfallen eine Anwendung des Schwerkraftverfahrens unwirtschaftlich ist.

Die Praxis macht auch keinen Gebrauch vom Schwerkraftverfahren, wenn das Einfallen so gering ist, daß der Hingang zu schleppend und ohne gute Leistung erfolgt. Sie wendet dann das einfachste Mittel an und setzt einen Gegenzylinder vor, der den Hingang ausreichend beschleunigt. Von der Verwendung von Keilbahnen wird nicht gerne Gebrauch gemacht, da sie nur wirksam sind, wenn sie richtig stehen und stehen bleiben, was aber schwer zu erreichen ist.

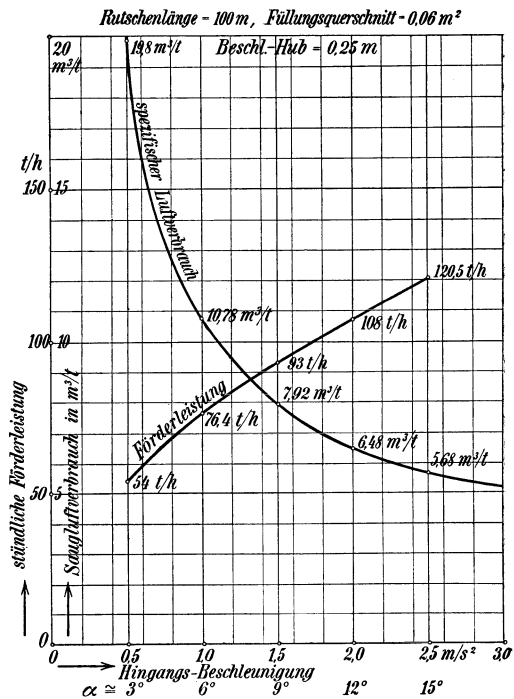


Abb. 331. Förderleistung und Luftverbrauch in Abhängigkeit von der Hingangsbeschleunigung bzw. vom Einfallen.

Lagerung, Antrieb und Kraftverbrauch.

Man hat drei Lagerarten ausgebildet:

1. Die Radlagerung (Abb. 332): Der Zapfen ist feststehend, die Lager-  
 schale als Karrenrad dreht sich. Zur Überwindung der Reibung zwischen  
 Rad und Fahrbahn ist die Zugkraft

$$P = G \cdot \frac{f}{R}$$

erforderlich. Für eine 80 m lange Rutsche mit dem Eigengewicht 50 kg/m und der Beladung 60 kg/m ist  $G = 80 \cdot 110 = 8800$  kg. Ist z. B.  $f = 0,20$  cm (verschmutzte Bahn) und  $R = 7$  cm, so ist

$$P = 8800 \cdot \frac{0,2}{7} = 237 \text{ kg.}$$

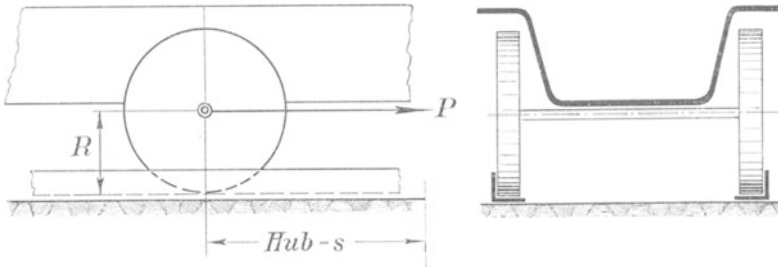


Abb. 332. Lagerung der Rutschen auf Räder.

Die Bahnlänge  $l$  muß gleich dem Rutschenweg  $s$  sein, also

$$l = s.$$

## 2. Die Rollenlagerung (Abb. 333):

Der Bewegungsvorgang ist genau so, als wenn man ein Rollholz unterlegen würde. Die Zugkraft  $P$  greift nun nicht am Zapfen sondern am Umfang mit dem Hebelarm  $2R$  an und damit wird

$$P = G \cdot \frac{f}{2R} = 8800 \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 7} = 118 \text{ kg,}$$

d. h. der Rollwiderstand ist nur halb so groß wie bei der Radlagerung.

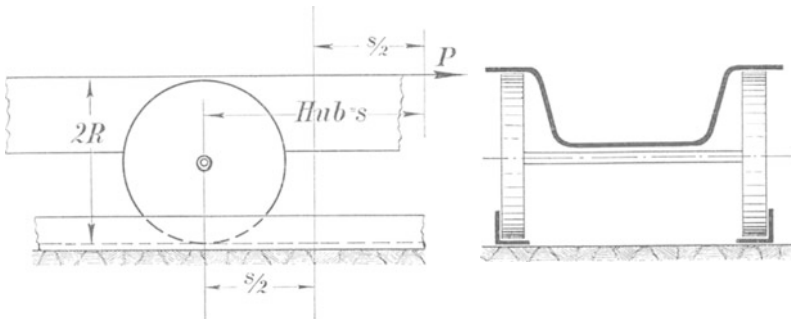


Abb. 333. Lagerung der Rutschen auf Wälzrollen.

Die Rolle wälzt sich auf der unteren Bahn um  $\frac{1}{2} s$  weiter und wälzt gleichzeitig auf der oberen Bahn die Rutsche um  $\frac{1}{2} s$  nach vorne, so daß der Rutschenweg  $= 2 \cdot \frac{1}{2} s = s$  wird und für die Rolle nur beansprucht wird eine Bahnlänge von

$$l = \frac{1}{2} \cdot s.$$

Für die Rutschenlagerung ist die Herabminderung der Bahnlänge auf den halben Rutschenhub von größtem Vorteil, weil damit alle Rollenstühle nur halb so lang zu sein brauchen wie bei der Radlagerung.

Man kann selbstverständlich die Rolle auf jeder Seite für sich laufen lassen. Das ist aber nicht praktisch, weil man sonst jede Rolle nach beiden Seiten führen muß. Man setzt daher die Rollen auf eine gemeinsame Achse und damit ist die Führung nur an den Außenseiten nötig, wie die Figur zeigt.

**3. Die Kugellagerung (Abb. 334):**

Die Rollenscheibe hat Spurkranzreibung an den Seitenwänden zu überwinden, das ist eine reine Gleitreibung, die viel größer werden kann als die Rollreibung. Das zu vermeiden, hat man die Rolle durch eine Kugel ersetzt, die sowohl an den Laufbahnen wie an den Seitenwänden Wälzbewegungen machen kann.

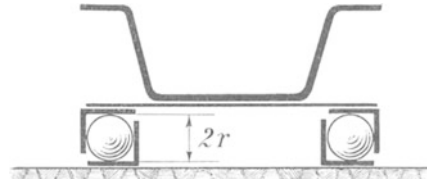


Abb. 334. Lagerung der Rutschen auf Kugeln.

Die damit erzielte Kraftersparnis wird aber zum größten Teil wieder verzehrt durch den kleinen Kugelradius. Denn mit  $r = 3$  cm ist die erforderliche Zugkraft

$$P = G \cdot \frac{l}{2 \cdot r} = 8800 \cdot \frac{0,20}{2 \cdot 3} = 275 \text{ kg.}$$

Praktisch wird man durch diese Maßnahme also keine nennenswerten Vorteile erzielen. Bei der Kugellagerung gibt es keine gemeinsame Achse, daher muß jede Kugel beiderseitig geführt werden. Die Bahnlänge ist wie bei der Rolle

$$l = \frac{1}{2} \cdot s.$$

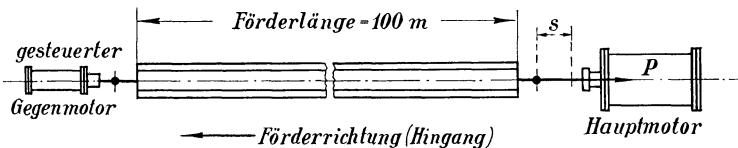


Abb. 335. Direkter Antrieb.

Der Antrieb der Rutsche kann nach Abb. 335 direkt oder nach Abb. 336 indirekt mit dem Hebelverhältnis 2 : 1 erfolgen. Im ersten Fall ist bei der Kolbenkraft  $P$  und dem Rutschenweg  $s$  die Hubarbeit

$$A = P \cdot s \text{ mkg.}$$

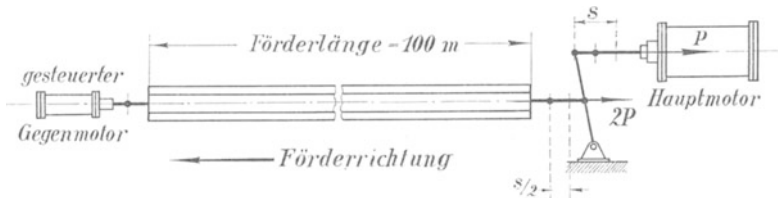


Abb. 336. Indirekter Antrieb.

Im zweiten Fall ist die Kraft an der Rutsche  $2P$  und der Rutschenweg  $\frac{1}{2} s$ , also ist die Hubarbeit an der Rutsche

$$A = 2P \cdot \frac{s}{2} = P \cdot s \text{ mkg,}$$

d. h. auf die Rutsche wird dieselbe Arbeit übertragen, so daß anzunehmen ist, daß beide Antriebe gleiche Förderleistungen haben.

Rechnet man für dieselbe Rutsche beide Antriebe durch, so kommt man nicht zu gleichen Leistungen. Folgende Verhältnisse wurden der Rechnung zugrunde gelegt:

Rutschenlänge = 100 m, Füllquerschnitt = 0,042 m<sup>2</sup>, Eigengewicht = 40 kg/m, Ladegewicht = 45 kg/m, Gegenmotor = 200 mm Durchmesser mit der mittleren Kolbenkraft  $P = 940$  kg, Hauptmotor = 420 mm Durchmesser mit der mittleren Kolbenkraft  $K = 3050$  kg, Hub = 350 mm.

Es sind drei Antriebsarten durchgerechnet

1. direkter Antrieb mit einfachem Gegenmotor.
2. indirekter Antrieb mit demselben Gegenmotor.
3. indirekter Antrieb mit Gegenmotor von doppelter Stärke.

Die Ergebnisse dieser drei Durchrechnungen sind hier mitgeteilt.

	direkter Antrieb, einfacher Gegenmotor	indirekter Antrieb, einfacher Gegenmotor	indirekter Antrieb, doppelter Gegenmotor
Vorrutschweg $s_0$ in m . . . . .	0,168	0,083	0,178
Förderweg $S$ in m je Hub . . . . .	0,52	0,258	0,353
Hubzahl $n$ /min . . . . .	48	77	102
Förderleistung in t/h . . . . .	67	54	97
Luftverbrauch für 1 tkm in m <sup>3</sup> . . . . .	89	160	131
Energiekosten für 1 tkm in Pfg. . . . .	22,5	40	33

**Ergebnis:** Der direkte Antrieb ist der wirtschaftlichste. Eine Notwendigkeit zum Antrieb mit Hebelübersetzung liegt vor, wenn die Kolbenkraft des Rutschenmotors nicht mehr zur direkten Überwindung der Rutschenwiderstände ausreicht. Alsdann ist aber auch die Stärke des Gegenmotors zu verdoppeln, wenn man auf gute Förderleistung kommen will.

Der Kraftverbrauch der Rutschenförderung kann durch eine einfache grundsätzliche Rechnung ermittelt werden, indem man von der tatsächlich geleisteten Nutzarbeit ausgeht.

**Beispiel:** Wie groß sind Kraftverbrauch und Energiekosten für eine Rutsche, die bei 80 m Förderlänge sählig 78 t/h leistet ?

**Lösung:** Der Arbeitsaufwand ist genau so, als wenn ein Gewicht von 78000 kg in der Stunde gleitend 80 m weit gezogen wird. Nimmt man  $\mu = 0,40$  an, so ist der Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot G = 0,40 \cdot 78000 = 31200 \text{ kg.}$$

Für die Förderlänge  $L = 80$  m ist die zu leistende Arbeit

$$A = R \cdot L = 31200 \cdot 80 = 2496000 \text{ mkg} = \frac{2496000}{270000} = 9,25 \text{ PS-h.}$$

Da diese Arbeit in 1 h geleistet wird, ist die Motorstärke

$$N_e = 9,25 \text{ PS.}$$

An ausgeführten Anlagen ist ein Gesamtwirkungsgrad von  $\eta = 0,50$  bis 0,65 er-

mittelt worden, rechnet man mit  $\eta = 0,60$ , so sind

$$N_t = \frac{N_e}{\eta} = \frac{9,25}{0,60} = 15 \text{ PS}$$

im Zylinder erforderlich. Bei einem Luftverbrauch von  $45 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$  für 1 indizierte PSh ist der stündliche Luftbedarf

$$Q = 15 \cdot 45 = 675 \text{ m}^3/\text{h a. L.}$$

Stündlich werden geleistet

$$78 \cdot 0,080 = 6,24 \text{ tkm},$$

$$\text{d. h.} \quad 1 \text{ tkm} = \frac{675}{6,24} = 108 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 108 \cdot 0,25 = 27 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

**Aufgabe:** Wie groß sind Kraftverbrauch und Energiekosten, wenn die Rutsche im Einfallen von  $\alpha = 10^\circ$  arbeitet.

**Lösung:** Im Einfallen von  $\alpha = 10^\circ$  ist der Normaldruck gegen das Rutschenblech nur

$$N = G \cdot \cos \alpha = 78000 \cdot \cos 10^\circ = 78000 \cdot 0,9848 = 76800 \text{ kg.}$$

Bei  $\mu = 0,40$  ist der Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot N = 0,40 \cdot 76800 = 30720 \text{ kg.}$$

Die Gewichtskomponente  $G \cdot \sin \alpha$  unterstützt die Fallbewegung mit der Kraft

$$G \cdot \sin \alpha = 78000 \cdot \sin 10^\circ = 78000 \cdot 0,1736 = 13500 \text{ kg.}$$

Sie ist in Abzug zu bringen, und es ist nur der Widerstand

$$W = R - G \cdot \sin \alpha = 30720 - 13500 = 17220 \text{ kg}$$

zu überwinden. Die Gleitarbeit ist

$$A = W \cdot L = 17220 \cdot 80 = 1377600 \text{ mkg} = \frac{1377600}{270000} = 4,73 \text{ PS-h.}$$

Da diese Arbeit in 1 h verrichtet wird, ist die Nutzleistung des Motors

$$N_e = 4,73 \text{ PS.}$$

Mit  $\eta = 0,55$  wird

$$N_t = \frac{N_e}{\eta} = \frac{4,73}{0,55} = \sim 9 \text{ PS.}$$

Stündlicher Luftverbrauch

$$Q = 45 \cdot 9 = 405 \text{ m}^3/\text{h a. L.},$$

$$\text{stündliche Förderleistung} = 78 \cdot 0,080 = 6,24 \text{ tkm},$$

$$\text{d. h.} \quad 1 \text{ tkm} = \frac{405}{6,24} = 70 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 70 \cdot 0,25 = 17,5 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

## 37. Gleitende Förderung durch Kratzbänder und Bremsförderer.

Diese Fördermittel verwirklichen den Transportvorgang, den man mit einer Handkratze ausführt. Das Kratzblech sitzt an einem Stiel und zieht das Fördergut gleitend auf dem Boden vorwärts. Dann geht das Blech leer zurück, um beim Umkehren den nächsten Förderweg zu machen.

Maschinell wird das Verfahren vollkommener durchgeführt. An einem endlosen Band werden in regelmäßigen Abständen Kratzbleche befestigt, und so wird das Band mit konstanter Geschwindigkeit in einem Trog fortbewegt und nimmt alles auf dem Boden liegende mit.

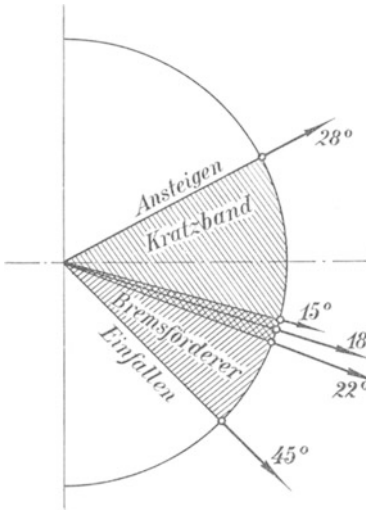
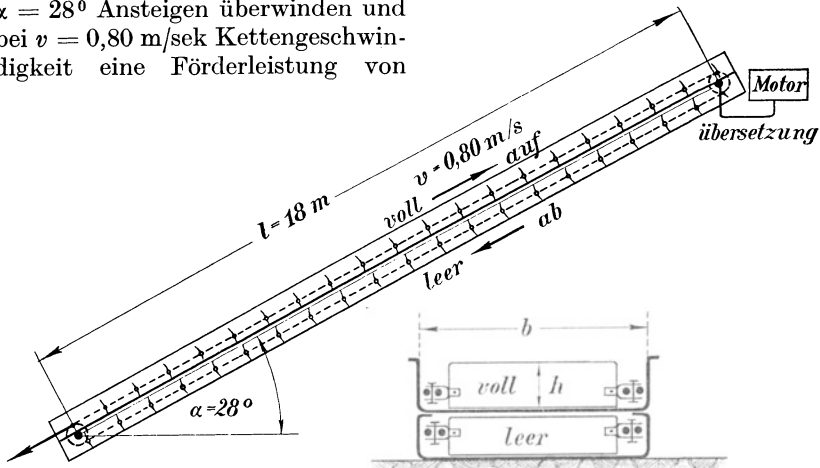


Abb. 337. Das Arbeitsgebiet der Kratzbänder und Bremsförderer.

Kratzförderer und Bremsförderer haben dasselbe Förderelement, die Rundeisenkette mit dem Kratzblech, das keiner Schmierung und Wartung bedarf. Sie unterscheiden sich nur durch den Antrieb, da der Bremsförderer grundsätzlich nur die Abwärtsförderung übernimmt. Der Kratzförderer arbeitet dagegen grundsätzlich am besten in der ansteigenden Förderung, in der Hauptsache zur Überwindung von kurzen Störungsgebieten. Er kann aber auch im Einfallen arbeiten. In Abb. 337 ist das Arbeitsgebiet gezeigt. Hiernach werden Kratzförderer verwendet bis zu 28° Ansteigen und bis zu 18° Einfallen, Bremsförderer übernehmen den Transport zwischen 18° und 45° Einfallen. Dort, wo beide Gebiete

aneinander stoßen, ist die Transportfrage umstritten, d. h. zwischen 15° und 22° sind beide Förderarten möglich.

In Abb. 338 soll ein Kratzförderer eine Förderlänge von 18 m bei  $\alpha = 28^\circ$  Ansteigen überwinden und bei  $v = 0,80$  m/sek Kettengeschwindigkeit eine Förderleistung von



$$Z = G_k \cdot \sin \alpha + \mu \cdot (G_k + G_{kT}) \cdot \cos \alpha$$

Abb. 338. Die Kratzband-Förderung.

68 t/h haben. Welche Motorstärke ist erforderlich und was kostet 1 tkm an Druckluftenergie ?



Bei einem Schüttungsgewicht von  $\gamma = 1 \text{ t/m}^3$  ist bei  $F \text{ m}^2$  Querschnitt das Stundenvolumen

$$3600 \cdot F \cdot v = \frac{G}{\gamma},$$

$$\text{Füllquerschnitt } F = \frac{G}{\gamma \cdot 3600 \cdot v} = \frac{68}{1 \cdot 3600 \cdot 0,8} = 0,0236 \text{ m}^2.$$

Wenn der Füllquerschnitt beim Laden nur zu 50% ausgenutzt wird, sind erforderlich

$$F = 2 \cdot 0,0236 = 0,0472 \text{ m}^2 = 472 \text{ cm}^2.$$

Macht man die Kratzerhöhe  $h = 12 \text{ cm}$ , so wird die Trogbreite  $b = 472 : 12 = \sim 40 \text{ cm} = 400 \text{ mm}$ .

Der Stundenweg der Kette ist

$$L = 3600 \cdot v = 3600 \cdot 0,80 = 2880 \text{ m},$$

also ist die Beladung je 1 m Troglänge

$$\frac{G}{L} = \frac{68000}{2880} = 24 \text{ kg/m}.$$

Das Eigengewicht von 1 Doppelmeter Kratzerkette sei  $12 \text{ kg/m}$ . Es sind daher folgende Gewichte zu ziehen

$$\begin{array}{l} \text{Kohलगewicht } G_K = 24 \cdot 18 = 432 \text{ kg} \\ \text{Kratzergewicht } G_{Kr} = 12 \cdot 18 = 216 \text{ „} \\ \hline G_K + G_{Kr} = 648 \text{ kg.} \end{array}$$

Als Bewegungswiderstände treten auf:

1. Die Gewichtskomponente der Kohlenladung parallel zur schiefen Ebene

$$G_K \cdot \sin \alpha = 432 \cdot \sin 28^\circ = 432 \cdot 0,4695 = 203 \text{ kg.}$$

2. Der Reibungswiderstand des Kratzerketten- und Kohलगewichts. Der Normaldruck zur Bahn ist

$$N = (G_{Kr} + G_K) \cdot \cos \alpha,$$

also ist der Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot N = \mu \cdot (G_{Kr} + G_K) \cdot \cos \alpha.$$

Setzt man  $\mu = 0,60$ , so wird

$$R = 0,60 \cdot 648 \cdot \cos 28^\circ = 388,8 \cdot 0,8829 = 344 \text{ kg.}$$

Die Zugkraft hat demnach zu überwinden

$$Z = G_K \cdot \sin \alpha + \mu \cdot (G_{Kr} + G_K) \cdot \cos \alpha = 203 + 344 = 547 \text{ kg.}$$

Bei  $v = 0,80 \text{ m/sek}$  Kettengeschwindigkeit ist der theoretische Kraftbedarf

$$N_0 = \frac{Z \cdot v}{75} = \frac{547 \cdot 0,80}{75} = 5,85 \text{ PS.}$$

Setzt man den mechanischen Wirkungsgrad des Antriebes  $\eta = 0,60$ , so ist die erforderliche Motorstärke

$$N = \frac{N_0}{\eta} = \frac{5,85}{0,60} = \sim 10 \text{ PS.}$$

Bei einem Luftverbrauch von  $45 \text{ m}^3 \text{ a. L./PSh}$  ist der stündliche Luftverbrauch

$$Q = 10 \cdot 45 = 450 \text{ m}^3/\text{h a. L.}$$

Die stündliche Tonnenkilometerleistung ist bei 18 m Förderweg

$$= 68 \cdot 0,018 = 1,225 \text{ tkm},$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{450}{1,225} = 367 \text{ m}^3 \text{ a. L.},$$

$$= 367 \cdot 0,25 = 92 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

Da in 1 h 68 t Kohlen gefördert werden, sind die Energiekosten für 1 t Kohle

$$\frac{450 \cdot 0,25}{68} = 1,66 \text{ Pfg.}$$

**Kratzbänder für söhlige Förderung:** Eine Maschinenfabrik baut Bänder dieser Art mit einer Trogbreite von  $b = 585 \text{ mm}$  und gibt bei einer ganzen Bauhöhe von 260 mm und  $790 \text{ cm}^2$  Füllquerschnitt eine Leistung von 100 t/h und bei 320 mm ganzer Bauhöhe und  $1125 \text{ cm}^2$  Füllquerschnitt eine Leistung von 150 t/h an.

**Beispiel:** Es sollen auf 68 m Förderlänge bei  $v = 0,40 \text{ m/sek}$  Kratzergeschwindigkeit 50 t/h gefördert werden, welche Motorstärke ist erforderlich und was kostet 1 tkm an Energie?

**Lösung:** Der Stundenweg der Kratzerkette ist

$$L = 3600 \cdot 0,40 = 1440 \text{ m},$$

also ist die Beladung

$$\frac{50000}{1440} = \sim 35 \text{ kg/m.}$$

Das Eigengewicht für 1 Doppelmeter Kratzerkette sei  $20 \text{ kg/m}$ , also ist für 68 m Förderlänge

$$G_K = 68 \cdot 35 = 2380 \text{ kg},$$

$$G_{Kr} = 68 \cdot 20 = 1360 \text{ „}$$

$$G_K + G_{Kr} = 3740 \text{ kg.}$$

Zu überwinden ist nur der Gleitwiderstand, mit  $\mu = 0,60$  ist der Reibungswiderstand

$$R = \mu(G_K + G_{Kr}) = 0,60 \cdot 3740 = 2244 \text{ kg.}$$

Bei  $v = 0,40 \text{ m/sek}$  Kettengeschwindigkeit ist der theoretische Kraftbedarf

$$N_0 = \frac{R \cdot v}{75} = \frac{2244 \cdot 0,40}{75} = 12 \text{ PS.}$$

Setzt man den mechanischen Wirkungsgrad des Antriebes  $\eta = 0,75$ , so ist die erforderliche Motorstärke

$$N = \frac{N_0}{\eta} = \frac{14}{0,75} = 16 \text{ PS.}$$

Bei einem Luftverbrauch von  $45 \text{ m}^3 \text{ a. L./PSh}$  ist der stündliche Luftverbrauch

$$Q = 16 \cdot 45 = 720 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

Die stündliche Tonnenkilometerleistung ist bei 68 m Förderweg

$$= 50 \cdot 0,068 = 3,4 \text{ tkm},$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{720}{3,4} = 212 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 212 \cdot 0,25 = 53 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

Die Energiekosten für 1 t Kohle sind

$$\frac{720 \cdot 0,25}{50} = 3,6 \text{ Pfg.}$$

**Aufgabe:** Ein Kratzband fördert sählig 80 t/h auf 109 m Förderlänge mit einem Druckluftmotor von 32 PS; wie hoch sind die Energiekosten für 1 tkm und für 1 t?

**Lösung:** Stündlicher Luftverbrauch bei 45 m<sup>3</sup>/PSh

$$32 \cdot 45 = 1440 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

Die stündliche Tonnenkilometerleistung ist für 109 m Förderweg

$$= 80 \cdot 0,109 = 8,72 \text{ tkm,}$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{1440}{8,72} = 165 \text{ m}^3 \text{ a. L.}$$

$$= 165 \cdot 0,25 = 41,25 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

Die Energiekosten für 1 t Kohle sind

$$\frac{1440 \cdot 0,25}{80} = 4,5 \text{ Pfg.}$$

**Bremsförderer:** Die Bremsförderer sind nur für Abwärtsförderung gebaut. Konstruktiv genau so wie die Kratzförderer mit Doppelkette und Blechstegen ausgerüstet, sollen die Blechstege die Bremswirkung auf das Material geben. Der Motor kann positiv, also treibend, und negativ, also bremsend, arbeiten. Ist der Abwärtswiderstand der Förderung größer als die Schwerkraftkomponente des Materials, dann muß der Motor das Material nach unten ziehen. Da der Antrieb oben sitzt, muß dann die Unterkette die Oberkette ziehen. Die Kette wird alsdann an der Antriebsstation im Oberlauf locker gehen. Ist die Schwerkraftkomponente des geförderten Materials größer als der Gleitwiderstand der Förderung, dann arbeitet der Motor negativ, d. h. als Bremse und die Kette geht oben am Ablauf stramm.

Eine Maschinenfabrik baut Bremsförderer in zwei Größen, die Leistungen sind in Abb. 339 dargestellt:

1. Motorstärke = 32 PS.

Bei 38° Einfallen 100 t/h auf 310 m höchste Förderlänge

„ 26° „ 100 t/h „ 340 m „ „

„ 18° „ 100 t/h „ 190 m „ „

2. Motorstärke = 16 PS.

Bei 38° Einfallen 100 t/h auf 155 m höchste Förderlänge

„ 26° „ 100 t/h „ 170 m „ „

„ 18° „ 100 t/h „ 95 m „ „

Es sollen für das Band mit 32 PS Motorstärke die Bewegungs- und Kraftverhältnisse untersucht werden.

a) Förderweg  $S = 190$  m, Einfallen  $\alpha = 18^\circ$ , Förderleistung 100 t/h.

Bei  $v = 0,40$  m/sek Kettengeschwindigkeit ist der Stundenweg

$$L = 3600 \cdot v = 3600 \cdot 0,40 = 1440 \text{ m,}$$

$$\text{Beladung} = \frac{100000}{1440} = 70 \text{ kg/m,}$$

Eigengew. Ober- u. Unterkette = 15 kg/m.

Für  $S = 190$  m Förderstrecke ist

$$\text{das Kohlegewicht } G_K = 190 \cdot 70 = 13300 \text{ kg}$$

$$\text{das Kettengewicht } G_{K_r} = 190 \cdot 15 = 2850 \text{ „}$$

$$G = 16150 \text{ kg.}$$

Die Gewichte drücken mit der Normalkomponente

$$N = G \cdot \cos \alpha = 16150 \cdot \cos 18^\circ$$

$$= 16150 \cdot 0,9511 = 15400 \text{ kg}$$

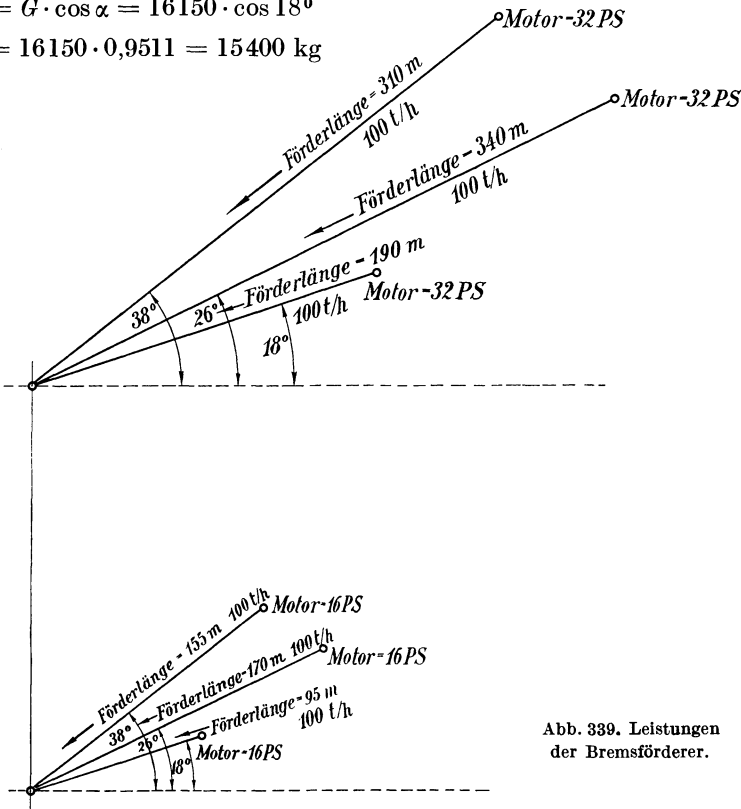


Abb. 339. Leistungen der Bremsförderer.

und erzeugen mit  $\mu = 0,60$  den Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot N = 0,60 \cdot 15400 = 9240 \text{ kg.}$$

Die Gewichtskomponente der Kohlenladung in der Bewegungsrichtung ist

$$G_K \cdot \sin \alpha = 13300 \cdot \sin 18^\circ = 13300 \cdot 0,3090 = 4120 \text{ kg.}$$

Demnach ist der Reibungswiderstand  $R$  größer als die Gewichtskomponente  $G \cdot \sin \alpha$ , so daß der Motor mit der Zugkraft

$$Z = R - G_K \cdot \sin \alpha = 9240 - 4120 = 5120 \text{ kg}$$

treiben muß.

Die Rinnenleistung ist

$$N_0 = \frac{Z \cdot v}{75} = \frac{5120 \cdot 0,40}{75} = 27,4 \text{ PS.}$$

Da der Motor mit der Leistung  $N = 32$  PS ausgeführt ist, ist der mechanische Wirkungsgrad zwischen Motor und Kette

$$\eta = \frac{N_0}{N} = \frac{27,4}{32} = 0,85.$$

b) Förderweg  $S = 340$  m, Einfallen =  $26^\circ$ , Förderleistung = 100 t/h.

$$\text{Stundenweg } L = 3600 \cdot v = 3600 \cdot 0,40 = 1440 \text{ m,}$$

$$\text{Beladung} = \frac{100000}{1440} = 70 \text{ kg/m,}$$

$$\text{Eigengewicht} = 15 \text{ kg/m.}$$

$$\text{Kohlengewicht } G_K = 340 \cdot 70 = 23800 \text{ kg}$$

$$\text{Kettengewicht } G_{Kr} = 340 \cdot 15 = 5100 \text{ ,,}$$

$$G = 28900 \text{ kg.}$$

$$R = \mu \cdot G \cdot \cos \alpha = 0,60 \cdot 28900 \cdot \cos 26^\circ$$

$$= 0,60 \cdot 28900 \cdot 0,8988 = 15600 \text{ kg,}$$

$$G_K \cdot \sin \alpha = 23800 \cdot \sin 26^\circ = 23800 \cdot 0,4384 = 10400 \text{ kg;}$$

$$\text{Zugkraft } Z = \mu \cdot G \cdot \cos \alpha - G_K \cdot \sin \alpha = 15600 - 10400 = 5200 \text{ kg.}$$

Der Motor muß treibend arbeiten und die Rinnenleistung

$$N_0 = \frac{Z \cdot v}{75} = \frac{5200 \cdot 0,40}{75} = 27,8 \text{ PS}$$

hergeben. Mit der ausgeführten Motorstärke  $N = 32$  PS ist der mechanische Wirkungsgrad zwischen Kette und Motor

$$\eta = \frac{N_0}{N} = \frac{27,8}{32} = 0,87.$$

c) Förderweg  $S = 310$  m, Einfallen =  $38^\circ$ , Förderleistung = 100 t/h.

$$\text{Kohlengewicht } G_K = 310 \cdot 70 = 21700 \text{ kg}$$

$$\text{Kettengewicht } G_{Kr} = 310 \cdot 15 = 4650 \text{ ,,}$$

$$G = 26350 \text{ kg.}$$

$$R = \mu \cdot G \cdot \cos \alpha = 0,60 \cdot 26350 \cdot \cos 38^\circ = 0,60 \cdot 26350 \cdot 0,7880 = 12400 \text{ kg,}$$

$$G_K \cdot \sin \alpha = 21700 \cdot \sin 38^\circ = 21700 \cdot 0,6157 = 13300 \text{ kg.}$$

Die Gewichtskomponente der Kohlenladung in der Bewegungsrichtung  $G_K \cdot \sin \alpha$  ist größer als der Reibungswiderstand  $R$ , also muß der Motor bremsend arbeiten und die Rinnenleistung

$$N_0 = \frac{Z \cdot v}{75} = \frac{(G_K \cdot \sin \alpha - R) \cdot v}{75} = \frac{(13300 - 12400) \cdot 0,40}{75} = 4,8 \text{ PS}$$

abbremsen. Bei  $\eta = 0,85$  werden 15 % der Motorleistung für den Leerlauf verbraucht. Die Leerlaufleistung des Motors ist  $N = 0,15 \cdot 32 = 4,8$  PS, so daß das treibende Band die Leerlaufleistung des 32 PS-Motors deckt und dadurch schon ausreichend gebremst wird.

### 38. Gleitende Förderung in Wendelrutschen.

Die Wendelrutschen haben zur Zeit die Abwärtsförderung in vielen Blindschächten übernommen. Sie stellen die senkrechte Förderung um auf eine Gleitförderung mittels schiefer Ebene, auf der die Kohle durch die Schwerkraft abrutscht. Die schiefe Ebene verläuft aber nicht geradlinig, sondern ist in der Schachtröhre wie eine Wendeltreppe verlegt.

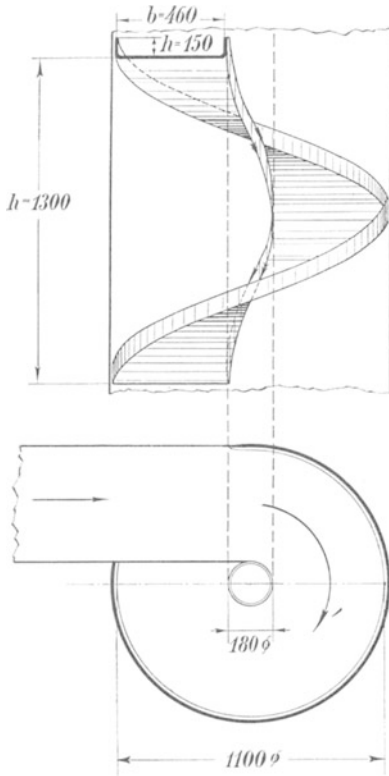


Abb. 340. Der Schraubengang einer Wendelrutsche.

Die Wendel als Schraubenlinie hat eine bestimmte Ganghöhe, die von dem Reibungswiderstand des Materials bestimmt wird. Um die Arbeitsweise klarzulegen, genügt die Betrachtung einer einzigen Ganghöhe. Praktische Ausführungen zeigen die Abmessungen der Abb. 340. Bei einer Ganghöhe von 1300 mm ist der Außendurchmesser  $D = 1100$  mm, in der Mitte bleibt ein freier Kreisquerschnitt vom Durchmesser  $d = 180$  mm, so daß sich eine Rinnenbreite von  $b = 460$  mm ergibt. Ist die nutzbare Rinnenhöhe z. B.  $h = 130$  mm, so ist der Förderquerschnitt

$$F = b \cdot h = 0,46 \cdot 0,13 = 0,060 \text{ m}^2.$$

Mit dem Schüttgewicht  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$  ist die Beladung für 1 m Rutschenlänge = 60 kg/m. Bei  $v = 0,50 \text{ m/sek}$  mittlerer Rutschgeschwindigkeit ist der stündliche Rutschweg

$$L = 3600 \cdot v = 3600 \cdot 0,50 = 1800 \text{ m}$$

und die stündliche Förderleistung

$$G = L \cdot 60 = 1800 \cdot 60 = 108000 \text{ kg/h}$$

oder

$$G = 108 \text{ t/h.}$$

Sie ist ganz unabhängig von der Länge der Rutsche.

In Abb. 341 sind die Schraubenlinien als schiefe Ebenen abgewickelt. Alle Schraubenlinien haben die gleiche Ganghöhe  $h = 1,30$  m. Die Grundlinien der schiefen Ebenen sind verschieden. Sie haben folgende Längen:

am Außenrand	$\pi \cdot D = \pi \cdot 1,10 = 3,46 \text{ m,}$
am mittleren Durchmesser	$\pi \cdot D_m = \pi \cdot 0,64 = 2,01 \text{ m,}$
am Innenrand	$\pi \cdot d = \pi \cdot 0,18 = 0,57 \text{ m.}$

Damit ergeben sich folgende Einfallwinkel:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1,30}{3,46} = 0,3760 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 = 20^\circ 40',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1,30}{2,01} = 0,6415 \quad \text{,,} \quad \alpha_2 = 32^\circ 50',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1,30}{0,57} = 2,2800 \quad \text{,,} \quad \alpha_1 = 66^\circ 20'.$$

Die Kohle gleitet natürlich unter dem Steilwinkel  $\alpha_1$  am schnellsten ab, sie rutscht aber tangential zum Kreis weiter und kommt dadurch auf

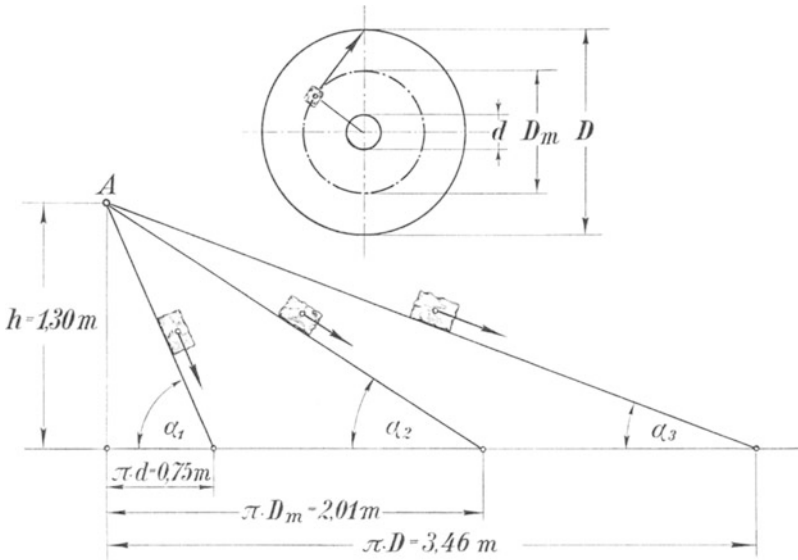


Abb. 341. Die Schraubenlinien als schiefe Ebenen.

die Ebene mit dem Einfallwinkel  $\alpha_2$  und weiter auf die Ebene mit dem kleinsten Neigungswinkel  $\alpha_3$ . Dadurch wird die Fallbewegung immer stärker verzögert und schließlich wird durch den Zentrifugaldruck gegen die Außenwand, also durch Bandendruck die Bewegung so abgebremst, daß der ganze Kohlenstrom fast gleichmäßig mit einer mäßigen Geschwindigkeit abrutscht.

Liegt z. B. ein Kohlenstück an der höchsten Stelle  $A$  der schiefen Ebene und gleitet mit der Reibungsziffer  $\mu = 0,60$  auf der mittleren schiefen Ebene abwärts, so ist bei 1 kg Kohlegewicht der Reibungswiderstand

$$R = \mu \cdot 1 \cdot \cos \alpha_2 = 0,60 \cdot 1 \cdot \cos 32^\circ 50' = 0,60 \cdot 0,8403 = 0,5042 \text{ kg.}$$

Die Schwerkraftkomponente in der Bahnrichtung ist

$$K = 1 \cdot \sin \alpha_2 = 1 \cdot \sin 32^\circ 50' = 0,5422 \text{ kg.}$$

Die Differenz beider Kräfte beschleunigt das Kohlenstück

$$P = K - R = 0,5422 - 0,5042 = 0,038 \text{ kg.}$$

Die Beschleunigung  $b$  errechnet sich nach dem Gesetz

$$P = m \cdot b,$$

$$b = \frac{P}{m} = \frac{0,038 \cdot g}{1} = 0,038 \cdot 9,81 = 0,372 \text{ m/sek}^2.$$

Für eine Ganghöhe ist die Bahnlänge

$$l = \frac{h}{\sin \alpha_2} = \frac{1,30}{0,5422} = 2,40 \text{ m}.$$

Am Ende dieser Bahnlänge hätte das Kohlenstück dann die Rutschgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot b \cdot l} = \sqrt{2 \cdot 0,372 \cdot 2,40} = 1,34 \text{ m/sek}.$$

Das Kohlenstück wird aber nicht auf der gleichen Bahnneigung bleiben, sondern tangential auf die Bahn kleinerer Neigung nach außen rutschen und damit schon gebremst werden. Das tangential Abrutschen ist in der Abb. 341 oben dargestellt.

Ausgeführte Anlagen

Zeche	Außendurchmesser in mm	Höhe in m	Förderleistung t/Schicht
Königin Elisabeth	1100	18	800
Graf Moltke . . .	1050	80	600—800
Zollern . . . . .	1050	100	700
Ewald . . . . .	1050	88	400
Gneisenau . . . .	1050	40	600
Rheinpreußen . .	1050	60	600

Bei großen Höhen bildet die Wendel einen Speicherraum, so daß Beladung und Entladung zeitlich voneinander abweichen können:

Bei 1,30 m Ganghöhe ist die Bahnlänge  $l = 2,40$  m und das Ladevolumen für einen vollen Gang

$$V = l \cdot F = 2,4 \cdot 0,060 = 1,44 \text{ m}^3.$$

Bei 80 Gängen =  $80 \cdot 1,30 = 104$  m Höhe ist das Speichervolumen

$$V = 80 \cdot 1,44 = 115 \text{ m}^3$$

oder

$$G = 115 \text{ t Kohle}.$$

### 39. Gleitende Förderung in Seigerförderern.

In der Wendelrutsche wird die ganze Fallenergie der abwärts gehenden Kohle durch Reibung vernichtet. Die Reibung erzeugt Wärme, und das ist im Untertagebetrieb meist unerwünscht. Der Seigerförderer vernichtet nur einen Teil der Fallenergie durch Gleitreibung auf dem Förderweg selbst, der restliche Teil wird durch einen Bremsmotor vernichtet. Ist der Motor ein Druckluftmotor, so kann der Motor treibend arbeiten oder bremsend als Kompressor, so daß die in Kompressorarbeit verwandelte Fallenergie nutzbar gemacht wird.



Grundsätzlich kann der Seigerförderer nur Lasten senken, er ist im Prinzip in Abb. 342 dargestellt. Das endlose Band, das durch zwei Ketten gebildet wird, trägt in gleichen Abständen in Gelenken drehbare Bleche, die auf der niedergehenden Seite den Boden für eine Füllkammer bilden und vermöge ihrer Schrägstellung durch die Beladung zwischen die Führungsseiten geklemmt werden, so daß an beiden Führungsseiten ein Normaldruck entsteht, der Reibung erzeugt. Diese Reibung vernichtet einen Teil der Fallenergie.

Wie groß ist der Anteil dieser Reibung?

In Abb. 342 greift im Schwerpunkt  $S$  der Lade­fläche das Ladegewicht  $G$  einer Kammer an. Das Bodenblech kann an der Gleit­stelle  $A$  nur eine Auflager­kraft  $A$  annehmen, die horizontal verläuft. Diese schneidet die Krafrichtung  $G$  im Punkte  $a$ . Verbindet man  $a$  mit dem zweiten Auflager­punkt  $B$ , so hat man die Rich­tung der Auflagerkraft  $B$ .

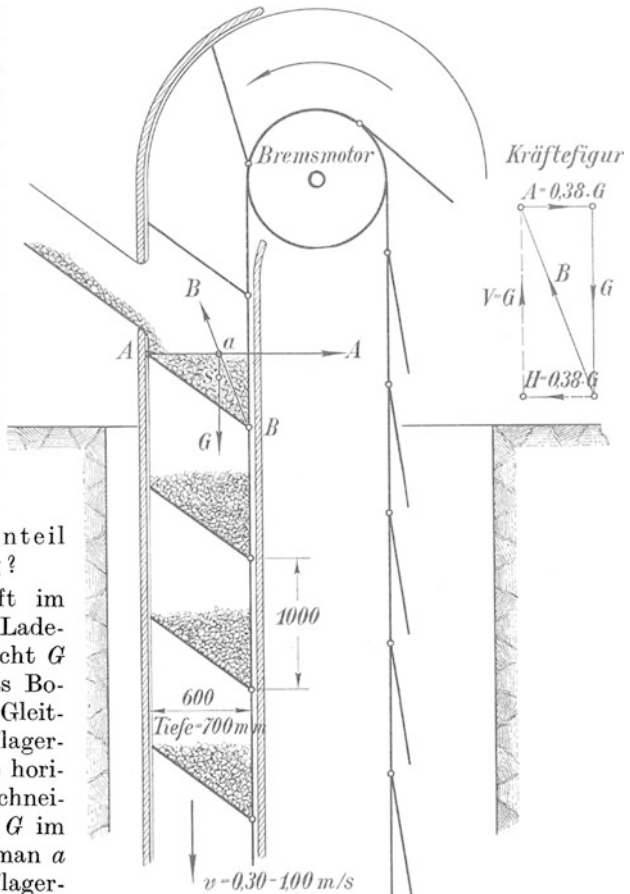


Abb. 342. Das Prinzip eines Seigerförderers.

In der Kräftefigur ist  $G$  zerlegt in die Seitenkräfte  $A$  und  $B$ ; die Kraft  $B$  ist zerlegt in die Vertikalkomponente  $V = G$  und die Horizontalkomponente  $H = A$ . Das Kräfteeck liefert folgende Größen

$$A = H = 0,38 \cdot G.$$

Die Kräfte  $A$  und  $H$  bilden die Normalkraft  $N$  an den Gleitflächen, die die Reibung  $R$  erzeugt, also ist

$$N = A + H = 0,38 \cdot G + 0,38 \cdot G = 0,76 \cdot G,$$

$$R = \mu \cdot N = 0,60 \cdot 0,76 \cdot G = 0,46 G,$$

d. h. 46% der Gewichtsladung wird durch Reibungswiderstände aufgefangen, also ist die Übertragung der Gewichtslast  $G$  auf den Brems-

motor durch den mechanischen Wirkungsgrad

$$\eta_1 = 0,54$$

beeinflußt. Gehen im Getriebe zwischen Kette und Motor auch noch 25% verloren, so ist

$$\eta_2 = 0,75$$

und der Gesamtwirkungsgrad ist

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,54 \cdot 0,75 = 0,40,$$

d. h. nur 40% der niedergehenden Last  $G$  sind vom Bremsmotor aufzunehmen.

### Die Förderleistung und Motorstärke.

Die Förderleistung hängt ab:

1. von dem Fassungsvermögen einer Kammer.

In Abb. 342 hat die Kammer die Grundfläche  $0,600 \cdot 0,700 = 0,42 \text{ m}^2$ , bei 0,30 m Ladehöhe ist

$$V = 0,42 \cdot 0,3 = 0,26 \text{ m}^3$$

$$\text{Schüttgewicht } \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3,$$

$$\text{Ladung einer Kammer} = 126 \text{ kg}.$$

Und da die Kammern einen Abstand von 1 m haben, so ist die Beladung der Kette

$$= 126 \text{ kg/m}.$$

2. von der Kettengeschwindigkeit.

Die Kettengeschwindigkeit wird gewählt zu

$$v = 0,30 - 0,80 \text{ m/sek}.$$

Bei  $v = 0,50 \text{ m/sek}$  ist der Stundenweg der Kette

$$L = 3600 \cdot 0,50 = 1800 \text{ m}.$$

Für die Kettenbeladung 126 kg/m ist die Förderleistung

$$G = 1800 \cdot 126 = 227000 \text{ kg/h}$$

oder

$$G = 227 \text{ t/h}.$$

Für die Förderteufe  $T = 80 \text{ m}$  ist die stündliche Senkarbeit

$$A = G \cdot T = 227000 \cdot 80 = 18160000 \text{ mkg}$$

oder

$$A = \frac{18160000}{270000} = 67 \text{ PSh}.$$

Da der Motor diese Arbeit in 1 h verrichtet, so ist die theoretische Stärke des Bremsmotors  $N_0 = 67 \text{ PS}$ . Da aber 60% der Fallenergie durch Reibung aufgezehrt wird, hat der Motor nur 40% der theoretischen Senkleistung abzubremsen, also ist erforderlich eine Motorstärke von

$$\begin{aligned} N_{\text{Motor}} &= 0,40 \cdot N_0 \\ &= 0,40 \cdot 67 = \sim 27 \text{ PS} \\ &= \frac{27}{1,36} = 20 \text{ kW}. \end{aligned}$$

Der Seigerförderer wird in dem Augenblick, wo der Motor am beladenen Band stillgesetzt wird, mit der Lastseite absinken wollen. Das muß verhindert werden durch eine mechanische Bremse (Sicherheitsbremse).

Die Bremse hat das Lastdrehmoment aufzufangen. Bei  $T = 80$  m Kettenteufe und einer Beladung von 125 kg/m ist auf der Lastseite ein Übergewicht zu halten von

$$G = 80 \cdot 125 = 10000 \text{ kg.}$$

Ist der Kettensternradius  $R = 30$  cm, so ist das Lastdrehmoment

$$M = G \cdot R = 10000 \cdot 30 = 300000 \text{ cmkg,}$$

hiervon werden 60% durch Reibung gehalten, also hat die Bremse am Kettenstern nur das Moment

$$M_e = 0,40 \cdot M = 0,40 \cdot 300000 = 120000 \text{ cmkg}$$

durch Gewichtsbelastung des Bremshebels aufzufangen.

Ausgeführte Anlagen.

Zeche	Senkhöhe in m	Motorstärke		jetzige Förderbean- spruchung t/Schicht
		Druckluft PS	elektrisch kW	
Osterfeld. . .	30	25	—	600
Graf Moltke .	45	38	—	600
Ewald . . . .	80	—	28	500
Rheinpreußen.	80	—	20	800

### 40. Die Bandförderung.

Die Bandförderung ist weiter nichts als die Umkehrung der Zugförderung auf Schienen. Bei der Zugförderung Abb. 343 muß am Kopf

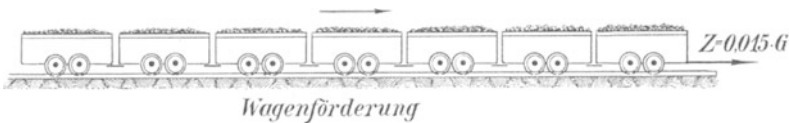


Abb. 343. Die Zugförderung mit Wagen.

des Zuges eine Zugkraft  $Z$  ausgeübt werden, die den Wälzwiderstand der rollenden Last auf den Schienen und den Gleitwiderstand in den Achslagern zu überwinden hat. Die Summe beider beträgt im Mittel 1,5% des rollenden Zuggewichtes. Ist  $G =$  Zuggewicht in kg, so ist die erforderliche Zugkraft

$$Z = 0,015 \cdot G \text{ kg.}$$

Ist  $v =$  Fahrgeschwindigkeit in m/sek, so ist die Zughakenleistung

$$N_e = \frac{Z \cdot v}{75} \text{ PS.}$$

Die Motorstärke der Lokomotive muß größer werden. Ist der mechanische Wirkungsgrad vom Zughaken bis zur Motorwelle z. B.  $\eta = 0,65$ , so ist die Motorstärke

$$N_{\text{Motor}} = \frac{N_e}{\eta}.$$

Bei der Bandförderung Abb. 344 sind die Zugwagen mit den Rädern nach oben gestellt und festgelegt. Der Schienenstrang dagegen ist jetzt als bewegliches Band ausgebildet, das sich endlos um die Antriebsstation und die Umkehrrolle schlingt. Das Band trägt die Last und fördert die Last fließend. Das Bandgewicht wird von den Tragrollen aufgenommen, es entsteht ein Wälz- und ein Gleitwiderstand am Umfang der Rollen und ein Gleitwiderstand in den Zapfenlagern, so daß im oberen Band eine Zugkraft  $Z$  tätig sein muß, die proportional dem rollenden Gewicht sein muß. Diese

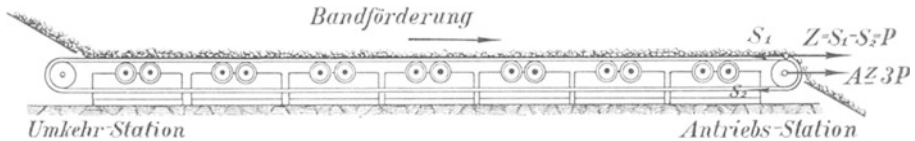


Abb. 344. Die Bandförderung als Umkehrung der Zugförderung.

Zugkraft  $Z$  wird aber erheblich größer sein müssen als bei der Zugförderung, da das Band gespannt werden muß. Die Differenz der beiden Bandkräfte

$$S_1 - S_2 = Z$$

liefert die Umfangs- und Zugkraft an der Treibscheibe. Jedenfalls ist wie bei der Fahrzeugbewegung

$$Z = \mu \cdot G \text{ kg.}$$

Der Wert  $\mu$  ist ein Erfahrungswert, theoretisch wird er, da die Lagerdrücke an der Treib- und Umkehrrolle ein Vielfaches der Rollenumfangskraft werden, auch ein Vielfaches des  $\mu$ -Wertes für Fahrzeugreibung werden. Man wird setzen können

$$\mu = 0,06 - 0,08.$$

### Förderleistung und Motorstärke.

Die Förderleistung hängt ab:

1. von der Bandgeschwindigkeit. Man wählt

$$v = 0,75 - 2,00 \text{ m/sek.}$$

2. von dem Ladequerschnitt  $F$ .

Bei einem Flachband sei

$B$  = Bandbreite in m

$b$  = Ladebreite in m

$h$  = Ladehöhe in m.

Man setzt

$$b = (0,9 \cdot B - 0,05) \text{ m}$$

und

$$h = \frac{1}{12} b \text{ m}$$

und

$$F = \frac{2}{3} b \cdot h \text{ m}^2,$$

z. B. für  $B = 660 \text{ mm}$ , wird

$$b = 0,9 \cdot 0,660 - 0,05 = 0,544 \text{ m},$$

$$h = \frac{1}{12} \cdot 0,544 = 0,045 \text{ m},$$

$$\text{Ladequerschnitt } F = \frac{2}{3} \cdot 0,544 \cdot 0,045 = 0,0163 \text{ m}^2,$$

Wählt man die Bandgeschwindigkeit  $v = 1,30 \text{ m/sek}$ , so ist der

$$\text{Stundenweg } L = 3600 \cdot 1,30 = 4680 \text{ m/h},$$

$$\text{das Fördervolumen } V = F \cdot L = 0,0163 \cdot 4680 = 76,2 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Das ist die Leistung des Bandes als Flachband, als Muldenband fördert das Band praktisch das doppelte, also ist als Muldenband das Fördervolumen

$$V = 2 \cdot 76,2 = 152,4 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Ist das Schüttgewicht der Kohle  $\gamma = 750 \text{ kg/m}^3$ , so ist die Förderleistung des 660 mm breiten Muldenbandes bei  $v = 1,30 \text{ m/sek}$  Bandgeschwindigkeit

$$Q_t = 152,4 \cdot 0,75 = 114 \text{ t/h}.$$

**Wie groß ist der Kraftbedarf dieses Bandes für 100 m Förderlänge?**

Bei dem Stundenweg  $L = 4680 \text{ m}$  des Bandes ist das Ladegewicht

$$= \frac{Q_t}{L} = \frac{114000}{4680} = 24,4 \text{ kg/m}.$$

Das Bandgewicht einschließlich Rollengewicht für Ober- und Unterband betrage  $= 24,6 \text{ kg/m}$ , also ist das Gesamtgewicht je 1 m Förderlänge  $= 24,4 + 24,6 = 49 \text{ kg/m}$ . Bei 100 m Förderlänge ist das Gesamtgewicht

$$G = 100 \cdot 49 = 4900 \text{ kg}.$$

Der Reibungswiderstand in der Bewegung ist

$$R = \mu \cdot G = 0,07 \cdot 4900 = 343 \text{ kg}$$

Also muß die Umfangskraft an der Trommel sein

$$P = Z = R = 343 \text{ kg}$$

und damit die Trommelleistung

$$N_e = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{343 \cdot 1,30}{75} = 6 \text{ PS}.$$

Bei einem mechanischen Wirkungsgrad des Antriebes von  $\eta = 0,80$  ist die erforderliche Motorstärke

$$N = \frac{N_e}{\eta} = \frac{6}{0,80} = 7,5 \text{ PS}.$$

Welche Energiekosten kommen auf 1 tkm dieser Bandförderung?

Der Antrieb erfolge durch einen Druckluftmotor, der  $50 \text{ m}^3$  a. L. für 1 PSh verbraucht, dann ist der stündliche Luftverbrauch

$$Q = 50 \cdot 7,5 = 375 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$\text{Energiekosten} = 375 \cdot 0,25 = 94 \text{ Pfg./h.}$$

In der Stunde werden 114 t um 100 m verschoben, das sind

$$114 \cdot 0,1 = 11,4 \text{ tkm},$$

$$1 \text{ tkm} = \frac{94}{11,4} = 8,24 \text{ Pfg. Energiekosten.}$$

**Allgemeines:** Der Bergbau verwendet Bandförderung mit Gummiband für Förderstrecken bis zu 350 m. Er verwendet folgende Bandbreiten

$$B = 500 \quad 660 \quad 800 \quad \text{und} \quad 1000 \text{ mm}$$

und Trommeldurchmesser von 250, 300 und 350 mm.

Die Bandgeschwindigkeiten liegen in den Grenzen

$$v = 0,75 - 2,00 \text{ m/sek.}$$

Es kann mit Gummibändern bis zu  $22^\circ$  aufwärts und bis zu  $14^\circ$  abwärts gefördert werden.

#### Das Stahlgurtband:

Es wird in 600 mm Breite und 1 mm Stärke in Längen von 20 bis 40 m gewalzt. Förderung bis  $16^\circ$  aufwärts und bis  $12^\circ$  abwärts möglich. Förderlängen bis 600 m sind möglich. Bandgeschwindigkeit  $v = 0,40 - 1,80 \text{ m/sek}$ . Das Eigengewicht für Ober- und Unterband einschließlich Rollen beträgt etwa  $18 \text{ kg/m}$ . Da das Band stark gespannt werden muß, werden die Reibungsverluste größer sein. Der Gang der Rechnung bleibt derselbe, man wähle den  $\mu$ -Wert aber größer, etwa  $\mu = 0,085$ . Die Antriebstrommel hat wegen der geringeren Biegefähigkeit des Stahlbandes 1000 mm Durchmesser.

Ausgeführte Anlagen:

1. Zeche Königin Elisabeth

$$\text{Förderstrecke} = 400 \text{ m, Motorstärke} = 45 \text{ PS.}$$

2. Rheinpreußen

$$\text{Förderstrecke} = 300 \text{ m, Motorstärke} = 20 \text{ kW.}$$

Die normale Leistung der Stahlbänder ist  $80 \text{ t/h}$ , bei  $1,8 \text{ m/sek}$  Fördergeschwindigkeit sind Spitzenleistungen bis zu  $210 \text{ t/h}$  erreicht worden. Versuche, das Stahlband wie das Gummiband zu mulden, waren anfänglich erfolglos. Es scheint, als ob die Schwierigkeiten behoben sind. Bandbreiten von 800 mm werden angestrebt.

## 41. Theorie des Stoßes.

### a) Der gerade und zentrale Stoß.

Eine Kugel von der Masse  $m$  bewege sich in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$ , ihr folge in derselben Richtung eine Kugel von der größeren Masse  $M$  mit der größeren Geschwindigkeit  $C$ , dann wird nach einer bestimmten Zeit ein Aufeinanderstoßen erfolgen. Dieses Aufeinanderstoßen ist in Abb. 345 dargestellt.

Der Stoß heißt zentral, wenn die auf der Berührungsebene errichtete Stütznormale  $NN$  mit der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte zusammenfällt. Er heißt außerdem gerade, wenn die Bewegungsrichtungen beider Körper mit der Stütznormalen zusammenfallen.

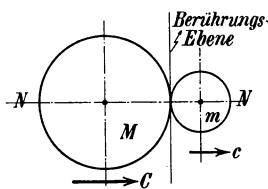


Abb. 345. Das Aufeinanderprallen zweier Kugeln.

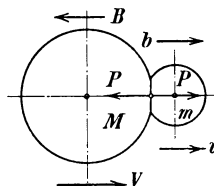


Abb. 346. Die Kugeln drücken sich zusammen.

Durch den Stoß entsteht an der Berührungsstelle (Abb. 346) eine Zusammenplattung, welche durch den Stoßdruck hervorgerufen wird. Dieser wirkt auf den kleinen Körper beschleunigend, auf den großen verzögernd. Das Maß der Beschleunigung ist für den kleinen Körper

$$b = \frac{P}{m}$$

und das Maß der Verzögerung für den großen Körper

$$B = \frac{P}{M}.$$

Daraus folgt

$$\frac{b}{B} = \frac{M}{m},$$

d. h. beim Stoß verhalten sich die Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen.

Während der Stoßdauer erfahre der kleine Körper die Geschwindigkeitszunahme

$$v - c,$$

der große Körper die Geschwindigkeitsabnahme

$$C - V,$$

dann werden sich diese Geschwindigkeitsänderungen auch umgekehrt wie die Massen verhalten, also ist

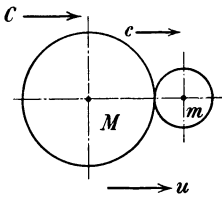
$$\frac{v - c}{C - V} = \frac{M}{m},$$

$$m \cdot v - m \cdot c = M \cdot C - M \cdot V$$

$$m \cdot v + M \cdot V = m \cdot c + M \cdot C,$$

d. h. bei der Bewegung von Massen bleibt die Summe der Bewegungsgrößen vor und nach dem Aufeinanderstoßen konstant.

Wenn während des Zusammenstoßes beide Körper (Abb. 347) zusammenbleiben und mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit  $u$  sich weiter bewegen, so muß nach dem vorstehenden Satz wieder sein:



$$(M + m) \cdot u = M \cdot C + m \cdot c,$$

$$u = \frac{M \cdot C + m \cdot c}{M + m}.$$

Die Geschwindigkeitsabnahme des großen Körpers ist hiermit:

$$C - u = C - \frac{M \cdot C + m \cdot c}{M + m}$$

Abb. 347. Beide Kugeln bewegen sich weiter.

und nach Umformung

$$C - u = \frac{C - c}{1 + \frac{M}{m}} \quad (\text{I})$$

In gleicher Weise errechnet man die Geschwindigkeitszunahme des kleinen Körpers und erhält

$$u - c = \frac{C - c}{1 + \frac{m}{M}} \quad (\text{II})$$

Die Körper werden aber, sofern sie elastisch sind, nicht zusammenbleiben, sondern wieder auseinanderfedern. Der ganze Stoßvorgang ist dann in zwei Perioden zu zerlegen, die in Abb. 348, auseinandergedezogen, dargestellt sind.

1. Periode: Beim Zusammentreffen haben die Körper die Geschwindigkeiten  $C$  und  $c$ , sie drücken sich zusammen und erreichen dann die gemeinsame Geschwindigkeit  $u$ .

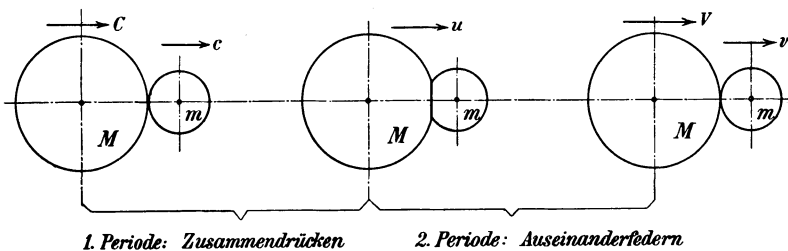


Abb. 348. Die zwei Perioden des Stoßvorganges.

2. Periode: Nach dem Zusammendrücken federn die Körper wieder auseinander, die gemeinsame Geschwindigkeit  $u$  löst sich auf in die Einzelgeschwindigkeiten  $V$  und  $v$ .

Die in der 2. Periode erfolgenden Geschwindigkeitsänderungen sind mathematisch nicht genau bestimmbar. Sie hängen ab von der physikalischen Beschaffenheit der Körper, hier spielt der Grad der Elastizität



eine Hauptrolle, ob das Zusammendrücken ganz wieder zurückfedert oder nur teilweise. Faßt man die Geschwindigkeitsänderung tabellarisch zusammen, so erhält man folgende Werte:

Stoßgeschwindigkeiten,

Masse	Einzelgeschwindigkeiten			Geschwindigkeitsänderungen			
	vor dem Stoß	bei dem Stoß	nach dem Stoß	1. Zus.-Drücken Abnahme	Zunahme	2. Ausein.-Federn Abnahme	Zunahme
$M$	$C$	$u$	$V$	$C - u$	—	$u - V$	—
$m$	$c$	$u$	$v$	—	$u - c$	—	$v - u$

Die Geschwindigkeitsänderungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen, also ist

$$1. \text{ beim Zusammendrücken } \frac{C - u}{u - c} = \frac{m}{M}, \tag{a}$$

$$2. \text{ beim Auseinanderfedern } \frac{u - V}{v - u} = \frac{m}{M} \tag{b}$$

---


$$\frac{u - V}{v - u} = \frac{C - u}{u - c}$$

oder

$$\frac{u - V}{C - u} = \frac{v - u}{u - c} = \varepsilon.$$

Ist der Körper vollkommen elastisch, so ist die Geschwindigkeitsänderung ( $u - V$ ) beim Auseinanderfedern gleich der Geschwindigkeitsänderung ( $C - u$ ) beim Zusammendrücken, und ebenso ist für den kleinen Körper

$$v - u = u - c,$$

d. h. in diesem Fall hat der Koeffizient  $\varepsilon$  den Wert 1. Man nennt  $\varepsilon$  den Koeffizienten der Stoßelastizität. Er kann durch Versuche bestimmt werden.

Bestimmung des Koeffizienten  $\varepsilon$  der Stoßelastizität.

Läßt man eine Glaskugel von der Masse  $M$  auf eine Glasplatte fallen, so wird sie bei einer Fallhöhe von  $H$  m mit der Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gH}$$

aufschlagen. Nun springt sie zurück. Sie wird mit derselben Geschwindigkeit  $v$  wieder hochspringen, wenn Glas vollkommen elastisch wäre und würde dann dieselbe Steighöhe  $H$  wieder erreichen. Erreicht die Kugel aber nur die kleinere Steighöhe  $h$ , so ist auch die Zurückprallgeschwindigkeit kleiner, sie ist dann nur

$$\varepsilon \cdot v = \sqrt{2gh}.$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten ist dann

$$\frac{\varepsilon \cdot v}{v} = \varepsilon = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Für vollkommen elastische Körper ist:

$$h = H, \text{ also } \varepsilon = 1,$$

für vollkommen unelastische Körper ist:

$$h = 0, \text{ also } \varepsilon = 0,$$

für unvollkommen elastische Körper ist  $\varepsilon$  kleiner als 1, aber größer als Null. Man hat gefunden

$$\text{für Glas} \quad \varepsilon = \frac{15}{16}, \quad \text{für Stahl} \quad \varepsilon = \frac{5}{9},$$

$$\text{für Elfenbein} \quad \varepsilon = \frac{8}{9}, \quad \text{für Holz} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Allgemein bestimmt sich also  $\varepsilon$  als Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Rückprallhöhe zur Fallhöhe.

Einführung des Elastizitätskoeffizienten  $\varepsilon$  in die Bewegungsformeln.

Für den ersten Teil des Stoßvorganges (Zusammendrückperiode) fanden wir, daß die Geschwindigkeitsänderung der stoßenden Masse  $M$  sich berechnen ließ nach der Gleichung I

$$C - u = \frac{C - c}{1 + \frac{M}{m}}. \quad (\text{I})$$

Für den zweiten Teil des Stoßvorganges (Auseinanderfederung) fanden wir das Verhältnis

$$\frac{u - V}{C - u} = \varepsilon \quad \text{oder} \quad u - V = \varepsilon \cdot (C - u). \quad (\text{III})$$

Addiert man Gleichung I und III, so erhält man die durch den Stoß hervorgebrachte gesamte Geschwindigkeitsänderung der stoßenden Masse.

$$C - u = \frac{C - c}{1 + \frac{M}{m}} \quad (\text{I})$$

$$u - V = \varepsilon \cdot (C - u) \quad (\text{III})$$

---


$$C - u + u - V = \frac{C - c}{1 + \frac{M}{m}} + \varepsilon \cdot (C - u)$$

Durch Umformung folgt

$$C - V = \frac{C - c + \varepsilon \cdot (C - u) \cdot \left(1 + \frac{M}{m}\right)}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Nach Gleichung (a) ist:

$$\frac{m}{M} = \frac{C - u}{u - c} \quad \text{oder} \quad \frac{M}{m} = \frac{u - c}{C - u}.$$

Setzt man diesen Wert von  $\frac{M}{m}$  in den Zähler der Hauptgleichung ein, so wird

$$C - V = \frac{C - c + \varepsilon \cdot (C - u) \cdot \left(1 + \frac{u - c}{C - u}\right)}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Durch Umformung folgt

$$C - V = \frac{(C - c) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{M}{m}}. \quad (\text{IV})$$

Diese Geschwindigkeitsänderung erleidet der stoßende Körper mit seiner Masse  $M$ .

In gleicher Weise läßt sich für die Geschwindigkeitsänderung der gestoßenen Masse  $m$  ableiten

$$v - c = \frac{(C - c) (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{m}{M}}. \quad (\text{V})$$

Die Gleichungen IV und V dienen zur Berechnung der nach dem Stoß erzielten Endgeschwindigkeiten, sobald der Stoßkoeffizient  $\varepsilon$  bekannt ist.

### b) Der vollkommen unelastische Stoß.

Beim vollkommen unelastischen Stoß ist bekanntlich

$$\varepsilon = 0.$$

Hiermit lauten die Gleichungen IV und V

$$C - V = \frac{C - c}{1 + \frac{M}{m}}, \quad (\text{VI})$$

$$v - c = \frac{C - c}{1 + \frac{m}{M}}. \quad (\text{VII})$$

Der unelastische Stoß kommt z. B. vor, wenn zwei Lehmkugeln auf einander prallen, also wenn die Körper weich sind und nicht elastisch zurückfedern können. Bei Preßluftschlämmern schlägt ein Kolben auf einen Werkzeugstahl. Es soll angenommen werden, Kolben und Werkzeug sollen ungehärtet und unelastisch sein.

In Abb. 349 sehen wir, daß die Schlagkolbenmasse  $M$  mit der Aufschlaggeschwindigkeit  $C$  ankommt und auf die Spitzeisenmasse  $m$  schlägt. Das Spitzeisen war im Ruhezustand, hatte also die Geschwindigkeit  $c = 0$ . Nach dem Aufeinandertreffen bewegen sich beide mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$V = v$$

in die Kohle. Mit  $c = 0$  lautet Gleichung VII

$$v - 0 = \frac{C - 0}{1 + \frac{m}{M}}, \quad v = \frac{C}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{C \cdot M}{M + m}.$$

Durch den Stoß wird nun ein Verlust an lebendiger Kraft eintreten. Vor dem Stoß war die lebendige Kraft des Schlagkolbens

$$L_0 = \frac{1}{2} M \cdot C^2.$$

Ist  $G_1$  das Gewicht des Schlagkolbens, so ist  $M = \frac{G_1}{g}$  und es wird

$$L_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1}{g} \cdot C^2.$$

Setzt man  $\frac{C^2}{2g} = H = \text{Fallhöhe}$ , so wird

$$L_0 = G_1 \cdot H = \text{theoretisches Arbeitsvermögen.}$$

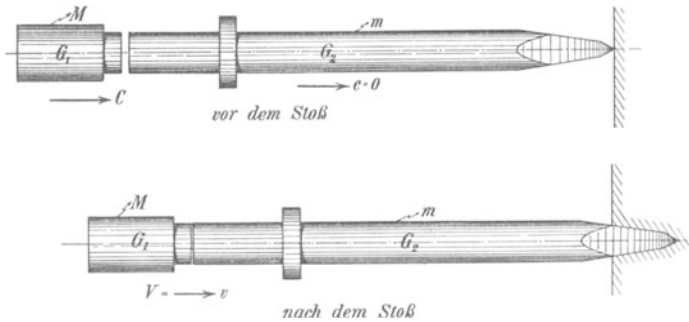


Abb. 349. Schlagkolben und Spitzeisen.

Nach dem Stoß ist die lebendige Kraft beider Massen noch

$$L = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot v^2,$$

$$v = \frac{C \cdot M}{M + m},$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \frac{C^2 \cdot M^2}{(M + m)^2},$$

$$L = \frac{1}{2} M \cdot C^2 \cdot \frac{M}{M + m}.$$

Drückt man die Massen durch die Gewichte aus, so ist

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1}{g} \cdot C^2 \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2},$$

$$L = G_1 \cdot H \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2}.$$

Diese Leistung ist die mögliche Nutzleistung. Sie wird in die Kohle gesetzt.

Der Wirkungsgrad der Schlagarbeit ist

$$\eta = \frac{L}{L_0} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}.$$

Er hängt also in der Hauptsache von dem Gewichtsverhältnis zwischen Schlagkolben und Spitzeisen ab,  $G_1$  ist das Schlagkolbengewicht und  $G_2$  das Spitzeisengewicht.  $G_1$  muß möglichst groß und  $G_2$  möglichst klein werden, damit der  $\eta$ -Wert groß wird.

Praktisch ist das leider nicht der Fall, in der Praxis ist der Schlagkolben  $G_1$  leicht und das Spitz Eisen  $G_2$  schwer. Das wirkt sich natürlich außerordentlich ungünstig aus. Ein Zahlenbeispiel möge das belegen.

**Beispiel:** Wie groß ist die Nutzleistung der Schlagarbeit, wenn der Schlagkolben mit der Geschwindigkeit  $C=9,20$  m/sek aufschlägt, das Schlagkolbengewicht  $G_1=0,745$  kg und das Spitz Eisengewicht bei 350 mm Länge  $G_2=1,37$  kg ist?

**Lösung:** Das theoretische Arbeitsvermögen des Schlagkolbens ist

$$L_0 = G_1 \cdot H = G_1 \cdot \frac{C^2}{2g} = 0,745 \cdot \frac{9,20^2}{2 \cdot 9,81} = 3,21 \text{ mkg.}$$

Der Stoßwirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{0,745}{0,745 + 1,370} = 0,35,$$

d. h. nur 35% der Schlagenergie gehen in die Kohle, während 65% durch den Stoß verlorengehen. Die Nutzleistung der Schlagarbeit ist also nur

$$L = \eta \cdot L_0 = 0,35 \cdot 3,21 = 1,12 \text{ mkg.}$$

**Beispiel:** Wie würde sich die Nutzleistung der Schlagarbeit ändern, wenn das Spitz Eisengewicht auf  $\frac{1}{3}$  herabgemindert würde?

**Lösung:**

$$G_2 = \frac{1,37}{3} = 0,45 \text{ kg,}$$

$$\eta = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{0,745}{0,745 + 0,450} = 0,624,$$

d. h. der Wirkungsgrad steigt von 35% auf 62,4%. Die Nutzleistung wird dann

$$L = \eta \cdot L_0 = 0,624 \cdot 3,21 = 2,00 \text{ mkg.}$$

Nach dem Stoß fliegen Schlagkolben und Spitz Eisen mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$v = \frac{C \cdot M}{M + m} = \frac{C \cdot G_1}{G_1 + G_2} = \frac{9,20 \cdot 0,745}{0,745 + 1,370} = 3,24 \text{ m/sek}$$

weiter. Mit dieser Endgeschwindigkeit läßt sich die Stoßarbeit nachprüfen. Die lebendige Kraft der Körper nach dem Stoß ist bei Verwendung des langen Spitz Eisens:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1 + G_2}{g} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745 + 1,370}{9,81} \cdot 3,24^2 = 1,12 \text{ mkg}$$

---


$$\text{theor. Arbeitsvermögen} = 3,21 \text{ ,,}$$

$$\text{Stoßverlust} = 2,09 \text{ mkg.}$$

Bei Verwendung des kleinen Spitz Eisens ist

$$v = \frac{9,20 \cdot 0,745}{0,745 + 0,450} = 5,72 \text{ m/sek}$$

und die lebendige Kraft nach dem Stoß

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745 + 0,450}{9,81} \cdot 5,72^2 = 2,00 \text{ mkg}$$

---


$$\text{theor. Arbeitsvermögen} = 3,21 \text{ ,,}$$

$$\text{Stoßverlust} = 1,21 \text{ mkg.}$$

Wir finden eine Bestätigung der früher gefundenen Werte.

Der unvollkommen elastische Stoß.

Auch bei diesem Stoßvorgang wird ein Verlust an lebendiger Kraft auftreten.

Lebendige Kraft vor dem Stoß  $L_0 = \frac{1}{2} M \cdot C^2 + \frac{1}{2} m \cdot c^2$ ,

Lebendige Kraft nach dem Stoß  $L = \frac{1}{2} M \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$ ,

Stoßverlust  $L_v = L_0 - L = (\frac{1}{2} M \cdot C^2 + \frac{1}{2} m \cdot c^2) - (\frac{1}{2} M \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2)$ .

Unter Einsetzen der aus den Gleichungen IV und V zu findenden Werte für  $V$  und  $v$  läßt sich folgende Schlußgleichung für den Stoßverlust entwickeln:

$$L_v = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cdot m \cdot M \cdot (C - c)^2}{2 \cdot (M + m)}$$

Ist der gestoßene Körper wie beim Spitz Eisen des Abbauhammers in Ruhe, so wird mit  $c = 0$  der Stoßverlust

$$L_v = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cdot m \cdot M \cdot C^2}{2 \cdot (M + m)}$$

Setzt man für die Massenwerte  $M$  und  $m$  die Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  ein, so wird

$$L_v = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{G_1}{g} \cdot \frac{C^2}{2}, \quad \frac{C^2}{2g} = H$$

$$L_v = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot G_1 \cdot H.$$

Das theoretische Arbeitsvermögen des Schlagkolbens ist

$$L_0 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1}{g} \cdot C^2 = G_1 \cdot H,$$

$$\frac{L_v}{L_0} = \frac{\text{Stoßverlust}}{\text{Arbeitsvermögen}} = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

Demnach wird der Stoßverlust um so kleiner

1. je größer  $\varepsilon$  wird, d. h. je vollkommener der Körper elastisch ist,
2. je kleiner das gestoßene Körpergewicht  $G_2$  ist.

**Beispiel:** Wie groß ist der Stoßverlust des vorigen Abbauhammers, wenn  $\varepsilon = 0,50$  angenommen wird?

**Lösung:** Das theoretische Arbeitsvermögen des Schlagkolbens ist

$$L_0 = \frac{1}{2} M \cdot C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745}{9,81} \cdot 9,20^2 = 3,21 \text{ mkg},$$

$$\frac{\text{Stoßverlust}}{\text{Arbeitsvermögen}} = \frac{L_v}{L_0} = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{(1 - 0,5^2) \cdot 1,370}{0,745 + 1,370} = 0,49,$$

d. h. 49% des Arbeitsvermögens gehen durch den Stoß verloren, während 51% als Nutzarbeit in die Kohle gesetzt werden.

$$\text{Stoßverlust } L_v = 0,49 \cdot L_0 = 0,49 \cdot 3,21 = 1,57 \text{ mkg},$$

$$\text{Nutzarbeit } L = 0,51 \cdot L_0 = 0,51 \cdot 3,21 = 1,64 \text{ mkg}.$$

Wir sehen, auch in diesem Fall ist das hohe Gewicht des Spitz Eisens sehr nachteilig, wenn auch gegenüber dem unelastischen Stoß eine Verbesserung der Nutzarbeit durch Materialvergütung (Härten) von 35% auf 51% zu verzeichnen ist.

**Beispiel:** Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn das Gewicht des Spitz Eisens auf  $\frac{1}{2}$  herabgemindert wird?

**Lösung:**

$$G_2 = \frac{1,370}{3} = 0,45 \text{ kg,}$$

$$\frac{\text{Stoßverlust}}{\text{Arbeitsvermögen}} = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2} = (1 - 0,5^2) \cdot \frac{0,45}{0,745 + 0,45} = 0,28,$$

d. h. der Stoßverlust beträgt 28%, so daß für die Nutzarbeit 72% verfügbar sind.

$$\text{Stoßverlust} = 0,28 \cdot 3,21 = 0,90 \text{ mkg,}$$

$$\text{Nutzarbeit} = 0,72 \cdot 3,21 = 2,31 \text{ mkg.}$$

Vergleichs-Tabelle.

	Vollkommen unelast. Stoß $\varepsilon = 0$	Unvollkommen elast. Stoß $\varepsilon = 0,5$
1. Spitzeisengewicht = $G_2$		
Stoßverlust =	65 %	49 %
Nutzarbeit =	35 %	51 %
2. Spitzeisengewicht = $\frac{1}{3} \cdot G_2$		
Stoßverlust =	37,6 %	28 %
Nutzarbeit =	62,4 %	72 %

Die Verminderung des Spitzeisengewichtes bringt also in beiden Fällen eine bedeutende Steigerung der Nutzleistung. Wie groß werden die Geschwindigkeiten beim Auseinanderprallen der beiden Körper?

Nach Gleichung IV ist:

$$C - V = \frac{(C - c) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{M}{m}} \quad \text{oder} \quad V = C - \frac{(C - c) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Mit den Zahlengrößen der Hammeraufgabe wird die Geschwindigkeit des Schlagkolbens nach dem Stoß für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 1,370 \text{ kg}$  die Größe annehmen

$$V = 9,20 - \frac{(9,20 - 0) \cdot (1 + 0,5)}{1 + \frac{0,745}{1,370}} = 0,30 \text{ m/sek}$$

und für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 0,45 \text{ kg}$

$$V = 9,20 - \frac{(9,20 - 0) \cdot (1 + 0,5)}{1 + \frac{0,745}{0,45}} = 3,98 \text{ m/sek.}$$

Nach Gleichung V ist

$$v - c = \frac{(C - c) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{m}{M}} \quad \text{oder} \quad v = c + \frac{(C - c) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 1,370 \text{ kg}$  wird die Geschwindigkeit des Spitzeisens nach dem Stoß

$$v = 0 + \frac{(9,20 - 0) \cdot (1 + 0,5)}{1 + \frac{1,370}{0,745}} = 4,85 \text{ m/sek}$$

und für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 0,45 \text{ kg}$

$$v = 0 + \frac{(9,20 - 0) \cdot (1 + 0,5)}{1 + \frac{0,45}{0,745}} = 8,60 \text{ m/sek.}$$

Mit den Endgeschwindigkeiten  $V$  und  $v$  lassen sich die Arbeitswerte nachprüfen.

Die lebendige Kraft der Körper nach dem Stoß ist für  $G_2 = 1,370 \text{ kg}$

$$\text{für den Schlagkolben } \frac{1}{2} M \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745}{9,81} \cdot 0,30^2 = 0,004 \text{ mkg}$$

$$\text{für das Spitz Eisen } \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,370}{9,81} \cdot 4,85^2 = 1,636 \text{ ,,}$$

$$\begin{array}{r} \text{Nutzarbeit} = \text{Summe} = 1,640 \text{ mkg} \\ \text{theoretisches Arbeitsvermögen} = 3,210 \text{ ,,} \\ \hline \text{Stoßverlust} = 1,570 \text{ mkg.} \end{array}$$

Für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 0,45 \text{ kg}$  sind die lebendigen Kräfte

$$\frac{1}{2} M \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745}{9,81} \cdot 3,98^2 = 0,61 \text{ mkg}$$

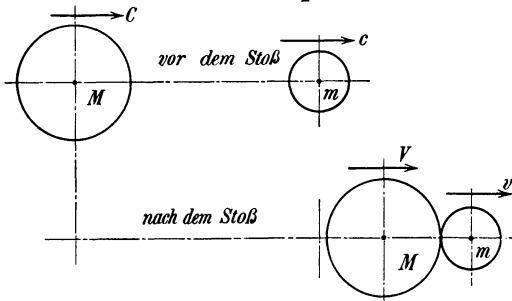
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,45}{9,81} \cdot 8,60^2 = 1,70 \text{ ,,}$$

$$\begin{array}{r} \text{Nutzarbeit} = 2,31 \text{ mkg} \\ \text{theoretisches Arbeitsvermögen} = 3,21 \text{ ,,} \\ \hline \text{Stoßverlust} = 0,90 \text{ mkg.} \end{array}$$

Das sind dieselben Werte, die wir früher auch fanden.

### c) Der vollkommen elastische Stoß.

Beim Aufeinanderprallen haben die Massen  $M$  und  $m$  (Abb. 350)



die als bekannt vorausgesetzten Geschwindigkeiten  $C$  und  $c$ , beim Auseinanderprallen haben sie die Geschwindigkeiten  $V$  und  $v$ , die errechnet werden müssen. Sie werden nach folgenden Gleichungen errechnet:

Abb. 350. Das Aufeinanderprallen zweier elastischer Kugeln.

$$C - V = \frac{(C - c) \cdot (1 + \epsilon)}{1 + \frac{M}{m}} \quad (\text{IV}),$$

$$v - c = \frac{(C - c) \cdot (1 + \epsilon)}{1 + \frac{m}{M}} \quad (\text{V}).$$



Beim vollkommen elastischen Stoß ist  $\varepsilon = 1$ , also vereinfachen sich die Gleichungen:

$$C - V = \frac{2 \cdot (C - c)}{1 + \frac{M}{m}}, \quad V = C - \frac{2 \cdot (C - c)}{1 + \frac{M}{m}} \tag{VI},$$

$$v - c = \frac{2 \cdot (C - c)}{1 + \frac{m}{M}}, \quad v = c + \frac{2 \cdot (C - c)}{1 + \frac{m}{M}} \tag{VII}.$$

Demnach wird die Anfangsgeschwindigkeit  $C$  des stoßenden Körpers verkleinert und die des gestoßenen Körpers  $c$  vergrößert.

**1. Fall:** Die Massen seien gleich und die Bewegungen gleichgerichtet (Abb. 351).

Für  $M = m$  lauten die Gleichungen VI und VII

$$V = C - (C - c) = c, \\ v = c + (C - c) = C,$$

d. h. die Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten gegeneinander aus, so daß der eine die Bewegung des anderen fortsetzt.

**2. Fall:** Die Massen seien gleich und die Bewegungen entgegengesetzt gerichtet (Abb. 352).

Man setzt den Wert  $c$  der letzten Gleichungen negativ, dann wird

$$V = C - [C - (-c)] = -c, \\ v = -c + [C - (-c)] = C,$$

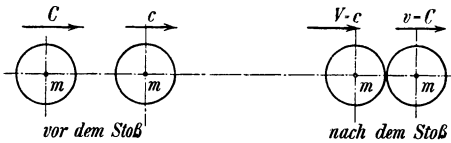
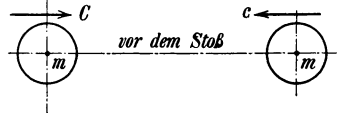


Abb. 351. Zwei gleiche Kugeln mit gleicher Bewegungsrichtung.

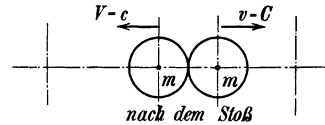


Abb. 352. Zwei gleiche Kugeln mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung.

d. h. die Körper kehren von der Stelle des Zusammenstoßes mit ausgetauschten Geschwindigkeiten wieder zurück.

**3. Fall:** Die Massen seien ungleich und der gestoßene Körper stehe still.

Die Geschwindigkeiten beim Auseinanderprallen sind nach den Gleichungen VI und VII, in denen  $c = 0$  wird,

1. für den stoßenden Körper  $V = C - \frac{2 \cdot C}{1 + \frac{M}{m}},$

2. für den gestoßenen Körper  $v = c + \frac{2 \cdot C}{1 + \frac{m}{M}}.$

**Beispiel:** Berechne für Schlagkolben und Spitzseisen die Geschwindigkeiten beim Auseinanderprallen, wenn der Abbauhammer wieder die bekannten Verhältnisse hat.

Schlagkolbengewicht  $G_1 = 0,745 \text{ kg } (M),$   
 Spitzseisengewicht  $G_2 = 1,370 \text{ kg } (m),$   
 Aufprallgeschwindigkeit  $C = 9,20 \text{ m/sek},$   
 Spitzseisengeschwindigkeit  $c = 0.$

**Lösung:** Der Schlagkolben prallt ab mit der Geschwindigkeit

$$V = 9,20 - \frac{2 \cdot 9,20}{1 + \frac{0,745}{1,370}} = 9,20 - 11,92 = - 2,72 \text{ m/sek,}$$

d. h. der Kolben prallt mit dieser Geschwindigkeit zurück. Durch das Aufprallen des Schlagkolbens erhält das Spitzzeisen die Geschwindigkeit

$$v = 0 + \frac{2 \cdot 9,20}{1 + \frac{1,370}{0,745}} = 6,48 \text{ m/sek.}$$

Mit dieser Geschwindigkeit setzt sich das Spitzzeisen in die Kohle. Die Geschwindigkeitsdifferenz beider Körper ist:

$$\begin{aligned} \text{vor dem Stoß} &= 9,20 - 0 = 9,20 \text{ m/sek.} \\ \text{nach „ „} &= 6,48 - (- 2,72) = 9,20 \text{ „} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz hat sich also durch den Stoß nicht

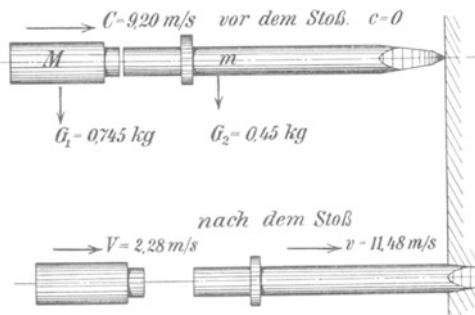


Abb. 353. Das Spitzzeisengewicht ist vermindert.

geändert, eine Eigentümlichkeit des vollkommen elastischen Stoßes, die bedingt, daß beim Stoß keinerlei Verlust an lebendiger Kraft eintritt. Der Stoßverlust beim vollkommen elastischen Stoß ist also gleich Null.

Daß beim unelastischen Stoß und beim unvollkommen elastischen Stoß dagegen immer ein Stoßverlust auftreten wird, ist bereits bekannt.

Setzt man in der Stoßverlustgleichung

$$L_v = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cdot m \cdot M \cdot (C - c)^2}{2 \cdot (M + m)}$$

den Stoßkoeffizienten  $\varepsilon = 1$  (vollkommen elastischer Stoß), so wird auch hiernach der Stoßverlust

$$L_v = 0.$$

Vermindert man das Spitzzeisengewicht (Abb. 353) von 1,370 kg auf  $G_2 = 0,45$  kg, so ergeben sich folgende Geschwindigkeiten

$$\text{Schlagkolben } V = C - \frac{2 \cdot C}{1 + \frac{G_1}{G_2}} = 9,20 - \frac{2 \cdot 9,20}{1 + \frac{0,745}{0,45}} = 2,28 \text{ m/sek,}$$

$$\text{Spitzzeisen } v = \frac{2 \cdot C}{1 + \frac{G_2}{G_1}} = \frac{2 \cdot 9,20}{1 + \frac{0,45}{0,745}} = 11,48 \text{ m/sek.}$$

Der Schlagkolben prallt also nicht zurück, sondern fliegt nach dem Stoß in der Schlagrichtung mit der Geschwindigkeit  $V = 2,28$  m/sek weiter, während das Spitzzeisen durch den Stoß eine Geschwindigkeit von 11,48 m/sek erhält, mit der es sich in die Kohle setzt.

Bildet man die Differenz der Endgeschwindigkeiten

$$v - V = 11,48 - 2,28 = 9,20 \text{ m/sek,}$$

so erkennt man, daß die Geschwindigkeitsdifferenz wieder gleich 9,20 m/sek ist.

Das ist die gleiche Geschwindigkeitsdifferenz wie vor dem Stoß

$$C - c = 9,20 - 0 = 9,20 \text{ m/sek,}$$

d. h. die lebendige Kraft nach dem Stoß ist dieselbe geblieben, so daß keinerlei Stoßverluste aufgetreten sind. Demnach scheint beim vollkommen elastischen Stoß die Verkürzung des Spitzeisens belanglos zu sein.

Mit den Endgeschwindigkeiten  $V$  und  $v$  lassen sich die Arbeitswerte nachprüfen.

Die lebendige Kraft der Körper nach dem Stoß ist für  $G_2 = 1,370 \text{ kg}$ :

$$\text{für den Schlagkolben } \frac{1}{2} M \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745}{9,81} \cdot (-2,72)^2 = 0,28 \text{ mkg}$$

$$\text{für das Spitzeisen } \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,370}{9,81} \cdot 6,48^2 = 2,93 \text{ ,,}$$

---


$$\begin{aligned} \text{Nutzarbeit} &= 3,21 \text{ mkg} \\ \text{theoret. Arbeitsvermögen} &= 3,21 \text{ ,,} \end{aligned}$$


---


$$\text{Stoßverlust} = 0,00$$

Bei jedem Stoß werden allerdings nur 2,93 mkg durch das Spitzeisen in die Kohle gesetzt, das sind

$$\frac{2,93}{3,21} = 0,92 \text{ oder } 92\%$$

des theoretischen Arbeitsvermögens, während 8% zum Zurückwerfen des Schlagkolbens aufgewendet werden. Diese Energie ist aber keineswegs ein Verlust, sie wird die Schlagzahl des Hammers erhöhen, so daß in der Gesamtleistung kein Stoßverlust zu verzeichnen ist.

Für das Spitzeisengewicht  $G_2 = 0,45 \text{ kg}$  sind die lebendigen Kräfte:

$$\text{Schlagkolben } \frac{1}{2} M \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,745}{9,81} \cdot 2,28^2 = 0,19 \text{ mkg}$$

$$\text{Spitzeisen } \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,45}{9,81} \cdot 11,48^2 = 3,02 \text{ ,,}$$

---


$$\begin{aligned} \text{Nutzarbeit} &= 3,21 \text{ mkg} \\ \text{theoret. Arbeitsvermögen} &= 3,21 \text{ ,,} \end{aligned}$$


---


$$\text{Stoßverlust} = 0,00$$

Bei jedem Stoß werden nun 3,02 mkg durch das Spitzeisen in die Kohle gesetzt, das sind

$$\frac{3,02}{3,21} = 0,94 \text{ oder } 94\%$$

des theoretischen Arbeitsvermögens, während 6% als Energie im Schlagkolben bleiben. Der Schlagkolben prallt aber mit dieser Energie nicht zurück, sondern fliegt in der Schlagrichtung weiter. Man kann annehmen, daß er auch diese Energie noch an das Spitzeisen abgibt, da das Spitzeisen ja nicht frei weiterfliegt, sondern durch den Widerstand in der Kohle nur eine geringe Vorwärtsbewegung macht. In diesem Fall würden auch diese 6% noch nutzbar gemacht, so daß tatsächlich kein Stoßverlust eintreten wird.

In Abb. 354 sind die Zahlenwerte für die drei Stoßarten eingetragen. Zusammengefaßt ergeben sich die Werte der nachstehenden Tabelle.

Welche Schlußfolgerungen zieht man aus der Tabelle?

Wir sehen, daß beim unelastischen Stoß die Nutzleistung des Spitzeisens 1,12 mkg, beim unvollkommen elastischen 1,64 mkg und beim vollkommen elastischen Stoß 3,21 mkg je Schlag ist, während der Schlagkolben in allen drei Fällen das gleiche Arbeitsvermögen

Schlagarten	Schlagkolben Aufprallgeschw. $C =$	Endgeschwindigkeiten		Schlagkolben-		nutzbar gemacht	
		Schlagkolben $V =$	Spitzeisen $v =$	Arbeitsvermögen $L_0$	Nutzarbeit $L$		
1. unelastisch $\varepsilon = 0$	langes Spitzeisen	9,20 m/sek	3,24 m/sek	3,24 m/sek	3,21 mkg	1,12 mkg	35%
	kurzes Spitzeisen	9,20 ..	5,72 ..	5,72 ..	3,21 ..	2,00 ..	62,5%
2. unvollkommen elastisch $\varepsilon = 0,5$	langes Spitzeisen	9,20 ..	0,30 ..	4,85 ..	3,21 ..	1,64 ..	51%
	kurzes Spitzeisen	9,20 ..	3,98 ..	8,60 ..	3,21 ..	2,31 ..	71%
3. vollkommen elastisch $\varepsilon = 1,0$	langes Spitzeisen	9,20 ..	-2,70 ..	6,50 ..	3,21 ..	3,21 ..	100%
	kurzes Spitzeisen	9,20 ..	+2,28 ..	11,48 ..	3,21 ..	3,21 ..	100%

3,21 mkg hat. Mithin ist die Materialbeschaffenheit, d. h. die Härte des Kolbens und des Aufschlagkopfes am Spitzeisen von Einfluß

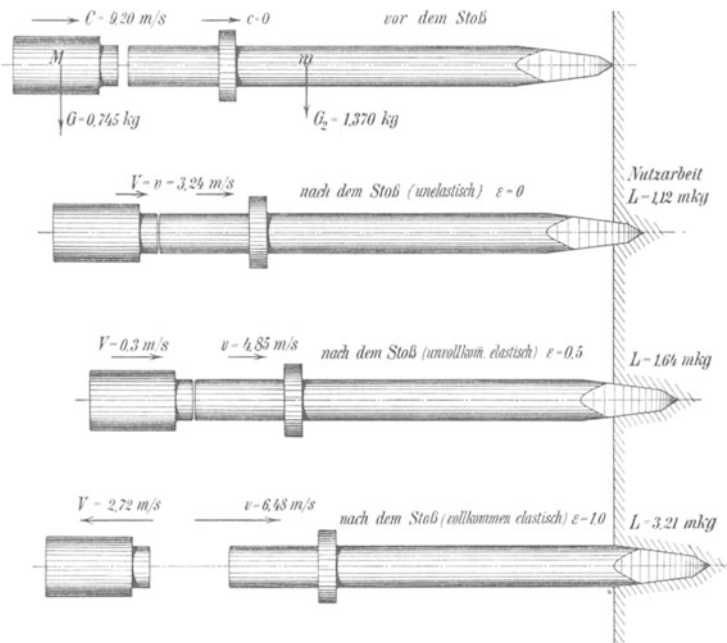


Abb. 354. Die Gegenüberstellung der drei Stoßarten.

auf die Nutzleistung. Und es wird von drei gleich großen Hämmern derjenige die beste Nutzleistung haben, dessen Schlagkolben und Auf-

schlagkopf am Spitzeisen die größte Härte hat, denn je größer die Härte ist, um so mehr nähern wir uns dem vollkommen elastischen Stoß.

#### Versuche von Hoffmann zur Ermittlung des Stoßwirkungsgrades.

In dankenswerter Weise hat Hoffmann<sup>1)</sup> im Maschinenlaboratorium der Bergschule Versuche ausgeführt, um den Stoßwirkungsgrad zwischen Schlagkolben und Spitzeisen von Abbauhämmern zu untersuchen. Er stellte fest, daß der Einfluß der Massenverhältnisse von Kolben und Spitzeisen erheblich größer ist als der Einfluß des Koeffizienten  $\varepsilon$  der Stoßelastizität. Sind Schlagkolben und Spitzeisenkopf so gehärtet, daß sie den Festigkeitsansprüchen genügen, dann werden auch die besten Stoßwirkungsgrade erzielt. Die theoretischen Stoßformeln gehen von der Voraussetzung aus, daß der gestoßene Körper ungehemmt sich bewegen kann. Das ist nicht der Fall beim Spitzeisen, da dieses zwischen Hammer und Kohle fest eingespannt ist, so daß die theoretischen und praktischen Werte von einander abweichen können.

Hoffmann wählte folgende Spitzeisengewichte  $G_2 = 1,0$  und  $1,5$  und  $2,0$  und  $2,5$  kg. Diese wurden mit zwei verschiedenen Abbauhämmern geschlagen.

	Kolben- gewicht kg	minutliche Schlagzahl $n$	Kolben-	
			Einzel- schlagarbeit mkg	Schlag- leistung PS
1. Hammer . . . . .	0,6	1440	2,5	0,8
2. Hammer . . . . .	1,2	720	5,0	0,8

Nach der Stoßverlustgleichung

$$L_v = (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

sind für die Gewichte  $G_1$  beider Kolben und die Gewichte  $G_2$  der Spitzeisen die Stoßverluste so berechnet, daß sie mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen, d. h. für  $\varepsilon$  ist der Zahlenwert eingesetzt, der das Resultat in Übereinstimmung bringt. Es arbeitet also derselbe Kolben mit verschiedenen  $\varepsilon$ -Werten. Das ist praktisch nicht ganz unmöglich, denn meistens haben die gehärteten Flächen an verschiedenen Stellen auch ungleiche Härten, und da Kolben und Spitzeisen immer wieder andere Prallberge finden, kann auch der  $\varepsilon$ -Wert der einzelnen Schläge verschieden sein. Es ergeben sich beim kleinen Schlagkolben die Werte  $\varepsilon = 0,79$  bis  $0,84$  und beim großen Schlagkolben die Werte  $\varepsilon = 0,81$  bis  $0,91$ . Grundsätzlich ist der schwerere Kolben in der erreichten Stoßgüte dem leichteren überlegen.

<sup>1</sup> Hoffmann, C., Dipl.-Ing.: Die Stoßenergieübertragung bei Abbauhämmern. „Glückauf“ 1928, S. 213—223.

1. Kolbengewicht  $G_1 = 0,6$  kg.

Spitzeisen $G_2$ in kg	$\frac{G_2}{G_1 + G_2}$	$\varepsilon$	Stoßverlust $L_v$	Stoßwirkungsgrad $\eta$	
				errechnet	Versuche Hoffmann
1,0	0,625	0,80	0,225	0,775	0,77
1,5	0,715	0,84	0,207	0,793	0,79
2,0	0,770	0,83	0,240	0,760	0,765
2,5	0,810	0,79	0,305	0,695	0,690

2. Kolbengewicht  $G_1 = 1,2$  kg.

1,0	0,453	0,81	0,156	0,844	0,844
1,5	0,556	0,89	0,115	0,885	0,885
2,0	0,625	0,92	0,097	0,903	0,902
2,5	0,675	0,91	0,115	0,885	0,883

Mit dem besten Stoßwirkungsgrad  $\eta = 0,79$  setzt der kleine Kolben  $N_e = 0,79 \cdot N = 0,79 \cdot 0,8 = 0,632$  PS. und der große Kolben mit dem besten Stoßwirkungsgrad  $\eta = 0,902$  die Leistung  $N_e = 0,902 \cdot 0,8 = 0,725$  PS in die Kohle.

**Ergebnis:** Schwere Kolben geben bessere Kohlenleistungen als leichte, wenn dieselben Spitzeisengewichte Anwendung finden.

Bei Bohrhämmern ist das Verhältnis des Bohrergewichts zum Kolbengewicht sehr veränderlich, da man mit kurzen Bohrerlängen das Bohrloch beginnt und oft bis auf 4 m Bohrtiefe geht. Man arbeitet daher schon grundsätzlich mit schwereren Kolbengewichten wie bei Abbauhämmern. Es werde für einen Bohrhammer folgender Bauart die Untersuchung durchgeführt: Hammergewicht ohne Feder = 16,45 kg, Kolbengewicht  $G_1 = 2,03$  kg, Kolbendurchmesser = 60 mm, Hub = 60 mm, minutliche Schlagzahl  $n = 1446$  bei 5 atü. Einzelschlagarbeit  $A = 2,55$  mkg, Kolbenschlagleistung  $N = 0,82$  PS.

Bohrerlängen . . . . . = 400 800 1600 2400 3200 4000 mm  
Bohrergewichte  $G_2$  . . . = 1,35 2,5 4,7 7,0 9,2 11,4 kg

Kolbengewicht  $G_1 = 2,03$  kg.

Bohrer $G_2$ in kg	$\frac{G_2}{G_1 + G_2}$	$\varepsilon$	Stoßverlust $L_v$	Stoßwirkungsgrad $\eta$	Bohrerleistung	
					PS	in %
1,35	0,400	0,80	0,144	0,856	0,70	100
2,5	0,650	0,80	0,234	0,766	0,63	89,5
4,7	0,778	0,80	0,280	0,720	0,59	84,3
7,0	0,840	0,80	0,303	0,697	0,57	81,7
9,2	0,870	0,80	0,313	0,687	0,56	80,2
11,4	0,895	0,80	0,324	0,676	0,55	79,2
1,35	0,400	0,70	0,204	0,796	0,65	100
2,5	0,650	0,70	0,332	0,668	0,55	84
4,7	0,778	0,70	0,394	0,606	0,50	76
7,0	0,840	0,70	0,428	0,572	0,47	72
9,2	0,870	0,70	0,443	0,557	0,46	70
11,4	0,895	0,70	0,456	0,544	0,45	68

Die Berechnung in vorstehender Aufstellung ist durchgeführt erstens für den Wert  $\varepsilon = 0,80$  und zweitens für den Wert  $\varepsilon = 0,70$ . Ist die Bohrer-

leistung beim kürzesten Bohrer 100 %, so ist sie beim längsten Bohrer im ersten Fall noch 79,2 % und im zweiten Fall noch 68 %.

**Ergebnis:** Die Leistung an der Bohrerschneide nimmt mit zunehmender Bohrerlänge merklich ab.

## 42. Geradlinige Schwingungen.

Aus der gleichförmigen Kreisbewegung läßt sich die geradlinige Schwingungsbewegung ableiten. In Abb. 355 rotiert eine Kugel  $M$  auf einer Kreisbahn vom Radius  $r$  mit der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  rechts herum. Die Kreisbewegung kommt dadurch zustande, daß auf die Kugel ständig die Zentripetalkraft  $K$  wirkt. Diese kann man in die Seitenkräfte  $H$  und  $V$  zerlegen. Denkt man sich die Vertikalkräfte  $V$  ausgeschaltet und die Kugel nur unter dem Einfluß der Horizontalkräfte  $H$  stehend, so würde die vom Punkt  $A$  ausgehende Kugel nicht auf dem Kreisbogen  $AM$ , sondern auf der Horizontalen  $AN$  wandern. Statt den Halbkreis  $ACB$  gleichförmig zu durchlaufen, würde die Kugel in derselben Zeit den horizontalen Durchmesser  $AB$  ungleichförmig zurücklegen.

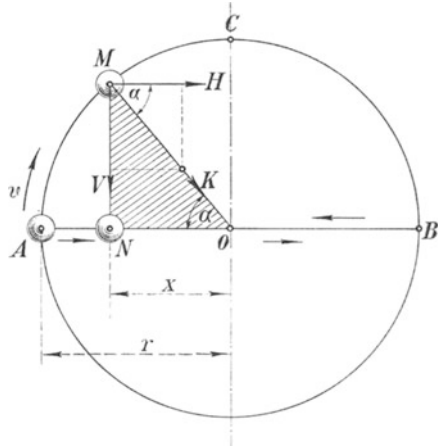


Abb. 355. Geradlinige Schwingungsbewegung oder Kolbenschwingung.

Man nennt eine solche geradlinig hin- und rücklaufende Bewegung,

bei welcher dieselben Bewegungszustände sich periodisch wiederholen, eine Schwingung. Die Zeit, welche die Kugel benötigt, um die geradlinige Schwingungsbahn in einer Richtung zu durchlaufen, nennt man die Schwingungsdauer  $t$ . Sie ist gleich der Umlaufzeit der halben Kreisbahn, also ist

$$t = \frac{r \cdot \pi}{v}.$$

In Abb. 353 befinde sich die Kugel im Punkte  $M$ . Zerlegt man an dieser Stelle die Zentripetalkraft  $K$  in die Komponenten  $H$  und  $V$ , so ist

$$H = K \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \text{ in dem schraffierten Dreieck,}$$

$$H = \frac{K}{r} \cdot x.$$

Demnach ist die Kraft  $H$  abhängig von  $x$ , also vom jeweiligen Horizontalabstand des Kugelmittelpunktes  $M$  vom Schwingungszentrum  $O$ .

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 & \text{ wird Beschl.-Kraft } H = K \cdot \cos 90^\circ = 0, \\ \text{,, } x = r & \text{ ,, ,, ,, } H = K \cdot \cos 0^\circ = K, \\ \text{,, } x = 1 & \text{ ,, ,, ,, } H = \frac{K}{r}. \end{aligned}$$

Nach dem Beschleunigungsgesetz ist

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \text{Beschleunigung},$$

für  $x = 1$  ist die Kraft  $H = \frac{K}{r}$ , es sei  
 Masse der Kugel  $= m$ ,  
 Schwingungsbeschleunigung  $= b$  m/sek<sup>2</sup> in der Entfernung 1 vom  
 Schwingungszentrum.

Mit diesen Werten lautet das obige Gesetz

$$\frac{K}{r \cdot m} = b. \quad (1)$$

Nun ist die Zentripetalkraft

$$K = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{\frac{K \cdot r}{m}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches mit  $r$ , so wird

$$v = \sqrt{\frac{K \cdot r \cdot r}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{K}{m \cdot r} \cdot r^2}.$$

Nach Gleichung 1 ist  $\frac{K}{r \cdot m} = b$ ,

also wird

$$v = r \sqrt{b}. \quad (2)$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$t = \frac{r \cdot \pi}{v}$$

ein, so wird

$$t = \frac{r \cdot \pi}{r \cdot \sqrt{b}} \quad \text{oder} \quad \boxed{t = \frac{\pi}{\sqrt{b}}}, \quad (3)$$

d. h. die Schwingungsdauer  $t$  ist gleich der Zahl  $\pi$ , dividiert durch die Quadratwurzel aus der Schwingungsbeschleunigung im Abstände eins vom Schwingungszentrum.

Man nennt  $AO = OB$  die Schwingungsweite oder Amplitude, den Wert  $T = 2t$  nennt man die Schwingungszeit für eine Doppelschwingung, sie stimmt überein mit der für einen Umlauf der ganzen Kreisbahn erforderlichen Zeit. Ist  $n =$  Umdrehungszahl in der Minute, so erfordert

$$1 \text{ Umdrehung} = \frac{60}{n} \text{ sek} = T \text{ sek}$$



Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kugel ist

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60}, \quad \text{also ist} \quad \frac{60}{n} = \frac{2\pi}{\omega} = T,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ sek} = 1 \text{ Umdrehung} = 1 \text{ Doppelschwingung},$$

$$1 \text{ sek} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Doppelschwingungen},$$

d. h. die Frequenz  $f$  oder Doppelschwingungszahl in der Sekunde ist daher

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

**Beispiel:** Es soll das Schwingungsgesetz auf die Pendelschwingung angewendet werden.

Unter einer Pendelschwingung versteht man die Schwingung einer an einem Faden aufgehängten Kugel (Abb. 356). Sobald die Kugel aus ihrer senkrechten Gleichgewichtslage entfernt und der Wirkung der Schwere überlassen wird, pendelt sie nach links und rechts aus ihrer Gleichgewichtslage heraus. In der Stellung  $M$  hat sie die Tangentialbeschleunigung

$$g \cdot \sin \alpha = g \cdot \frac{x}{l},$$

für  $x = l$  wird die Schwingungsbeschleunigung

$$b = \frac{g}{l}.$$

Die Schwingungsdauer ist nach dem Schwingungsgesetz

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die Schwingungsdauer eines Pendels ist unabhängig von der Schwingungsweite  $x$  und nur abhängig von der Pendellänge  $l$ .

Man kann mittels Pendel die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmen, indem man die Schwingungsdauer  $t$  des Pendels beobachtet und die letzte Gleichung umstellt

$$g = \frac{\pi^2 \cdot l}{t^2}.$$

Ferner kann man die Länge des Sekundenpendels berechnen, wenn die Erdbeschleunigung  $g$  bekannt ist. Für  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$

$$l = \frac{g \cdot t^2}{\pi^2} = \frac{9,81 \cdot 1^2}{\pi^2} = 0,994 \text{ m}.$$

Die Geschwindigkeit  $v$ , mit der das Pendel durch seinen tiefsten Schwingungspunkt geht, ist proportional der Schwingungsweite, denn nach Gleichung (2) ist

$$v = r \cdot \sqrt{b}.$$

Beim Pendel ist  $b = g : l$  und  $r = x$ , also wird

$$v = x \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

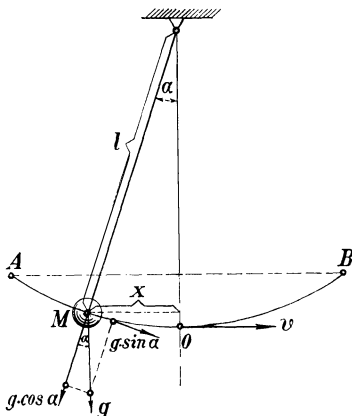


Abb. 356. Schwingung einer aufgehängten Kugel als Pendelschwingung.

Nimmt man die Pendellänge  $l = 1$  m, so erhalten wir für die Schwingungsweiten  $x = 0,10$  und  $0,20$  und  $0,30$  m folgende  $v$ -Werte:

$$\begin{aligned} x = 0,10 \text{ m} & \quad \text{wird} \quad v = 0,10 \cdot \sqrt{\frac{9,81}{0,1}} = 0,99 \text{ m/sek.} \\ x = 0,20 \text{ m} & \quad \quad \quad v = 1,98 \text{ m/sek.} \\ x = 0,30 \text{ m} & \quad \quad \quad v = 2,97 \text{ m/sek.} \end{aligned}$$

### Schwingung eines Körpers zwischen zwei Federn.

In Abb. 357 soll ein Körper zwischen zwei gleichen Schraubenfedern reibungslos gelagert sein. Wenn man den Körper um die Strecke  $OA$  nach links schiebt und ihn dann losläßt, so schwingt er zurück, er schwingt über  $O$  hinaus nach  $B$  und setzt diese Schwingungen zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  mit gleichbleibender Schwingungsdauer fort.

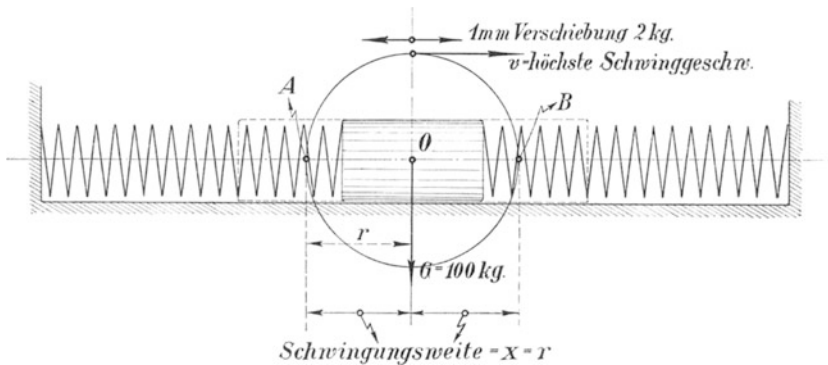


Abb. 357. Ein Körper schwingt zwischen Federn.

Bei der Verschiebung wird die eine Feder gekürzt, der Verkürzung entspricht eine proportionale Drucksteigerung, sie betrage für je  $1 \text{ mm}$  Verkürzung  $1 \text{ kg}$ ; bei der anderen Feder, die verlängert wird, betrage ebenfalls für je  $1 \text{ mm}$  Verlängerung die Zugsteigerung  $1 \text{ kg}$ , so daß

$$1 \text{ mm Schwingungsweg} = 2 \text{ kg Schwingkraft}$$

bedeutet, also  $1000 \text{ mm} = 1 \text{ m Schwingung} = 2000 \text{ kg} = H$ .

Der schwingende Körper habe das Gewicht  $G = 100 \text{ kg}$ , dann ist seine Masse

$$m = \frac{G}{g} = \frac{100}{9,81} = 10,2.$$

Seine Schwingungsbeschleunigung im Abstände  $1 \text{ m}$  vom Schwingungszentrum ist dann

$$b = \frac{H}{m} = \frac{2000}{10,2} = 196 \text{ m/sek}^2.$$

Die Schwingungsdauer ist

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{3,14}{\sqrt{196}} = 0,224 \text{ sek.}$$

Die Schwingungszeit für eine Doppelschwingung hin und her ist

$$T = 2t = 0,448 \text{ sek.}$$

Die minutliche Schwingungszahl ist

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,448} = 134/\text{min}$$

und die Frequenz ist

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,448} = 2,23/\text{sek.}$$

Die maximale Schwingungsgeschwindigkeit  $v$  in der Mitte der Schwingungsbahn ist von der Schwingungsweite  $x$  abhängig, für z. B.  $x = 50 \text{ mm}$  ist

$$v = x \cdot \sqrt{b} = 0,05 \cdot \sqrt{196} = 0,60 \text{ m/sek.}$$

Würde die Feder nur an einer Seite sein, so wäre

$$1 \text{ mm Schwingungsweg} = 1 \text{ kg,}$$

für 1000 mm Schwingungsweg wird  $H = 1000 \text{ kg}$ ,

$$b = \frac{H}{m} = \frac{1000}{10,2} = 98 \text{ m/sek}^2,$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{98}} = 0,317/\text{sek.},$$

$$T = 2t = 0,634 \text{ sek} \quad \text{und} \quad n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,634} = 94,6/\text{min.},$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,634} = 1,58/\text{sek.}$$

### Schwingungen einer Seillast.

Vertikal aufgehängte Seile verhalten sich bei Belastungen wie eine Feder, sie längen und kürzen sich wegen ihrer elastischen Eigenschaft. In Abb. 358 ist ein Gewicht  $G$  unten am Seil befestigt. Senkt man die Unterstüztung, der Dehnung des Seiles entsprechend, langsam ab, so längt sich das Seil um den Betrag  $\lambda$ . Es können aber auch bei derselben Last  $G$  die Verlängerungen sich ändern, wenn das Gewicht in vertikale Schwingungen gerät, und das ist der Fall, wenn die Unterlage plötzlich weggezogen wird und das Gewicht in das Seil hereinfällt.

Die Schwingungszahl eines Seiles ist von zwei Faktoren abhängig

1. von der Elastizität des Seiles,
2. von der Größe der angehängten Last  $G$ .

Beide Faktoren werden durch die Schwingungsbeschleunigung im Abstand  $l$  m vom Schwingungszentrum berücksichtigt.

**Beispiel:** Die eingehängte Last sei  $G = 20000 \text{ kg}$  und das Seil verlängere sich für je 100 kg Belastung um 2 mm.

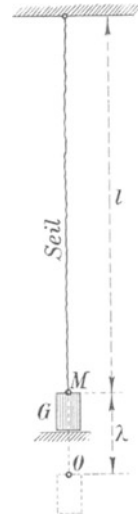


Abb. 358. Vertikalschwingungen einer Last am Seil.

Für 1 m = 1000 mm Längenänderung ist die Kraft  $H$  erforderlich, sie hat folgende Größe

$$H = \frac{100 \cdot 1000}{2} = 50000 \text{ kg,}$$

$$\text{Gewichtsmasse } m = \frac{G}{|g|} = \frac{20000}{9,81} = 2040.$$

Die Schwingungsbeschleunigung im Abstand 1 m wird

$$b = \frac{H}{m} = \frac{50000}{2040} = 24,5 \text{ m/sek}^2.$$

Die Schwingungsdauer ist

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{24,5}} = 0,634 \text{ sek.}$$

Die Schwingungszeit  $T$  für 1 Doppelschwingung ist

$$T = 2t = 1,268/\text{sek.}$$

$$\text{Schwingungszahl } n = \frac{60}{T} = \frac{60}{1,268} = 47,3/\text{min,}$$

$$\text{Frequenz } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,268} = 0,79/\text{sek.}$$

Wird also die angehängte Last  $G$  durch irgend einen Umstand in Schwingung versetzt, so entstehen minutlich 47,3 Auf- und Abschwüngen. Diese Schwüngen bewirken aber eine Vergrößerung des statischen  $\lambda$ -Wertes, und da proportional mit  $\lambda$  auch die Seilbelastung wächst, so bedeuten diese Seilschwüngen ganz bedenkliche Spannungsvergrößerungen für das Seil.

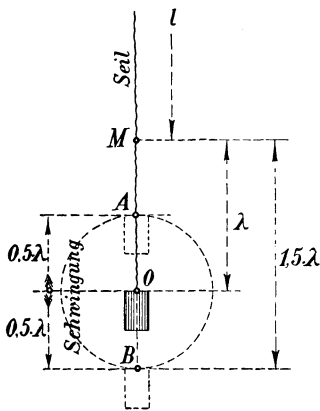


Abb. 359. Der Förderkorb schwingt am Seil.

Ein Anheben der Korblast  $G$  kann z. B. beim niedergehenden Korb dadurch entstehen, daß der Korb durch Druckwirkungen im Schacht in den Führungen sich klemmt und gebremst wird. In Abb. 359 sei  $M$  der Endpunkt des unbelasteten Seiles,  $O$  der Endpunkt des mit  $G$  kg belasteten Seiles, dann haben beide die Entfernung  $\lambda$  von einander. Bleibt nun der Punkt  $O$  durch Klemmungen im Schacht um den Betrag  $0,5 \cdot \lambda$  bis zum Punkt  $A$

gegenüber dem Seil zurück, so schwingt der Korb beim Freiwerden von  $A$  über  $O$  hinaus nach  $B$ , d. h. die Gesamtverlängerung wird nun

$$MB = \lambda + 0,5 \cdot \lambda = 1,5 \cdot \lambda.$$

Diese Schwingung bedeutet aber eine Vergrößerung der Seillast von  $G$  auf  $1,5G$ , also um 50%. Das Anheben auf den Punkt  $A$  bedeutet aber eine Verringerung der Seillast von  $G$  auf  $0,5G$ , so daß jede Schwingung eine Belastungsschwankung zwischen den Grenzen  $1,5G$  und  $0,5G$  be-

deutet. Solche Zerrungen ermüden das Material, so daß die Lebensdauer des Seiles verkürzt wird.

Jedes Hochschwingen der Last, welches den Endpunkt  $M$  des unverlängerten, also unbelasteten Seiles nicht überschreitet, wird eine zusätzliche Schwingungskraft hervorrufen, die der Größe der Hebung direkt proportional ist. Dieses größte Anheben der Last ist in Abb. 360 dargestellt. Hier wird  $O$ , der Endpunkt des durch die Last gelängten Seiles, um  $\lambda$  beim Einhängen durch Klemmung zurückgehalten, also bis zum Punkt  $M$ . Dann schwingt der Korb beim Loslassen von  $A$  herunter über  $O$  hinaus bis  $B$ , d. h. es wird

$$AB = MB = \lambda + \lambda = 2\lambda.$$

Diese Schwingung bedeutet aber eine Vergrößerung der Seillast von  $G$  auf  $2G$ , also eine Vergrößerung um 100%. Solche Belastungsstöße sind natürlich sehr bedenklich. Sie können neben der Seilermüdung bei Koepe-Scheiben auch Seilrutsch bewirken, trotzdem die Lastunterschiede statisch und beim Anfahren dynamisch der Haftreibung des Seiles entsprechen. Diese Seilschwingungen sind wahrscheinlich auch die Ursache der starken Drahtbrüche an den Seileinbandstellen. Zur Bekämpfung der durch die Korblasten hervorgerufenen Seilschwingungen hat man zwischen Korb und Seil Stoßdämpfeinrichtungen geschaffen und praktisch erprobt. In den meisten Fällen hat sich eine längere Liegezeit der Seile ergeben.

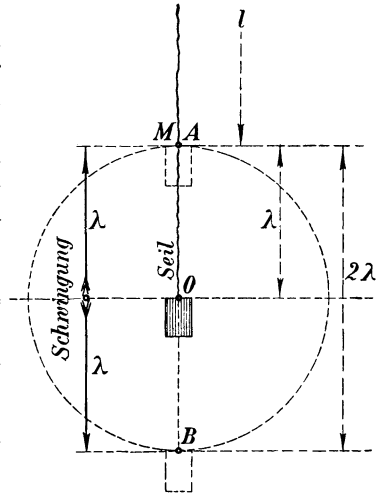


Abb. 360. Die größte Schwingung.

Es ist noch eine weitere Gefahr bedenklicher Seilschwingungen zu erwähnen. Das Seil hat je nach der Stellung des Förderkorbes im Schacht eine veränderliche Eigenschwingungszahl, sie ist in der Hängebankstellung des Korbes groß und in Füllortstellung klein. Nun kann als Erreger der Seilschwingungen der Stoßtakt der Fördermaschine auftreten. Ist z. B. bei einer bestimmten Korbstellung die Eigenschwingungszahl des Seiles  $n = 40/\text{min}$  und drückt die Fördermaschine in diesem Augenblick 40 Stoßtakte in der Minute auf das Seil, so wird die Eigenschwingung des Seils als Resonanzschwingung erregt. Da diese Schwingungen unbegrenzte Größen haben können, wird das Seil gefährdet. Der Korb verändert aber schnell seine Lage, so daß der Zustand von selbst abebbt. Leider wiederholt sich diese Resonanzerscheinung bei jedem Förderzug immer an derselben Stelle, so daß das Seil an der gerade an der Seilscheibe ablaufenden Stelle zu zahlreichen Drahtbrüchen kommt<sup>1</sup>. Versuche dieser Art sind auf die Versuchsgrube in Gelsenkirchen durchgeführt worden.

<sup>1</sup> „Förderseilschwingungen und deren Auswertung für die Seilbeanspruchung“ von Dipl.-Ing. Maercks. Der Bergbau 1938, S. 2—7 und 17—23.

## Die Resonanzbedingung.

Resonanzerscheinung tritt auf, wenn dem Körper eine Stützlage gegeben wird, die durch Taktstöße einer Maschine dieselbe Frequenz hat wie der Körper selbst.

**Beispiel:** Eine Spiralfeder werde bei ruhender Belastung durch ein Gewicht  $G = 20$  kg um 5 cm verlängert, welches ist die Frequenz der Feder?

**Lösung:** Für 5 cm Verlängerung sind erforderlich 20 kg

$$\text{für 1 m Verlängerung} = \frac{20 \cdot 1,00}{0,05} = 400 \text{ kg} = H,$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{20}{9,81} = 2,04.$$

Die Schwingungsbeschleunigung im Abstände 1 m vom Schwingungszentrum ist

$$b = \frac{H}{m} = \frac{400}{2,04} = 196 \text{ m/sek}^2,$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{196}} = 0,224 \text{ sek},$$

$$T = 2 \cdot t = 0,448 \text{ sek},$$

$$\text{Frequenz } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,448} = 2,23/\text{sek},$$

$$n = 60 \cdot f = 60 \cdot 2,23 = 133,8 \text{ Schwingungen/min.}$$

Die Feder würde also nicht verwendbar sein an einer Maschine, die 134 minutliche Stoßakte hat.

Allgemein ist die Resonanzbedingung

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{b}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{b} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{H}{m}}.$$

Da der Wert  $\frac{1}{2\pi}$  eine Konstante ist, so ist die Resonanz abhängig von der Größe

$$\sqrt{\frac{H}{m}}.$$

Bei Bestimmung der Eigenfrequenz elastischer Körper, die selbst gewichtslos mit dem Gewicht  $G$  belastet sind, kann man so vorgehen:

gemessen werde die Durchbiegung

$$y \text{ m unter der Last } G \text{ kg,}$$

dann ist für 1 m Durchbiegung die Kraft  $H = \frac{G}{y}$  kg. Mit diesem Wert wird die Gleichung

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{H}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{y} \cdot \frac{g}{G}},$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y}} \text{ Schwingungen/sek.}$$

In dem vorstehenden Beispiel war errechnet worden

$$f = 2,23 \text{ Schwingungen/sek.}$$

Dasselbe Ergebnis liefert mit  $y = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$  die Formel

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{0,05}} = 2,23 \text{ Schwingungen/sek.}$$

## Die kritische Drehzahl von Maschinenwellen.

Bei Maschinenwellen tritt die Resonanzerscheinung auf, wenn die Eigenfrequenz der Welle mit der Drehzahl in Übereinstimmung kommt. Das kann z. B. beim Anfahren von Turbomaschinen vorkommen. Der Maschinist muß dann über diesen kritischen Punkt schnell herüberfahren, damit er wieder aus dem Gefahrenbereich herauskommt.

In Abb. 361 trage eine Welle das Radgewicht  $G$  kg, das die Durchbiegung  $y$  hervorrufe. Außerdem habe der Schwerpunkt gegenüber dem Wellenmittelpunkt eine geringe Exzentrizität. Die Drehbewegung erzeugt die Zentrifugalkraft

$$C = m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{G}{g} \cdot (y + e) \cdot \omega^2.$$

Ist  $H$  die Kraft, die erforderlich ist, um die Welle um 1 m durchzubiegen, dann ist für  $y$  m Durchbiegung die erforderliche Kraft  $= H \cdot y$ . Setzt man  $C = H \cdot y$ , so wird

$$\frac{G}{g} (y + e) \cdot \omega^2 = H \cdot y.$$

Nach einigen Umformungen wird

$$y = \frac{G \cdot \omega^2 \cdot e}{g \cdot H - G \cdot \omega^2}.$$

Die Drehzahl wird gefährlich, wenn der Ausschlag  $y$  der Welle unendlich groß wird, das ist der Fall, wenn der Nenner des vorstehenden Bruches gleich Null wird, also lautet die Bedingung

$$g \cdot H - G \cdot \omega^2 = 0$$

oder

$$g \cdot H = G \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G} \cdot H} = \sqrt{\frac{H}{m}}.$$

Da die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gleich der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  am Radius 1 ist, so ist

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Also besteht die Beziehung

$$\frac{\pi \cdot n}{30} = \sqrt{\frac{H}{m}}.$$

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{H \cdot g}{G}}.$$

Hebt man  $\sqrt{g}$  gegen  $\pi$ , so lautet die Gleichung

$$n = 30 \cdot \sqrt{\frac{H}{G}}. \quad (4)$$

Bedeutet  $y$  die Durchbiegung der Welle für die Last  $G$ , so ist für  $y$  Meter Durchbiegung die Biegekraft  $G$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{,,} & 1 & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & H = \frac{G \cdot 1}{y}. \end{array}$$

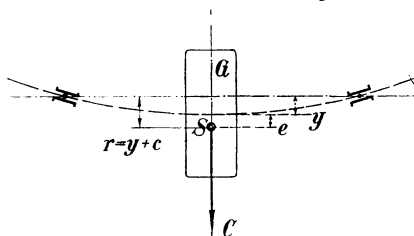


Abb. 361. Schwingung einer Maschinenwelle.

Setzt man diesen Wert in Gleichung (4) ein, so ist

$$n = 30 \cdot \sqrt{\frac{G}{y \cdot G}}$$

$$n = 30 \cdot \sqrt{\frac{1}{y}}$$

Die Durchbiegung  $y$  ist in diesem Fall in Meter eingesetzt, wird  $y$  in cm eingesetzt, so wird

$$n = 300 \cdot \sqrt{\frac{1}{y}} \quad (5)$$

Man nennt diese Umdrehungszahl  $n$  der Welle ihre kritische Drehzahl, denn die durch die Drehzahl erzwungene Schwingungszahl stimmt überein mit der Eigenschwingungszahl der Welle, so daß Resonanz besteht und die Welle bei Beibehaltung dieser Drehzahl immer weiter ausschwingt bis zur Zerstörung.

**Beispiel:** Eine Maschinenwelle habe durch Eigengewicht und Belastung eine elastische Durchbiegung von 0,5 mm. Wie groß ist die kritische Drehzahl?

**Lösung:** Es ist  $y = 0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm}$ , also wird die kritische Drehzahl nach Gleichung

$$n = 300 \cdot \sqrt{\frac{1}{0,05}} = 1500/\text{min}.$$

Je kleiner die Durchbiegung einer Welle ist, um so geringer ist die Gefahr der Resonanzerscheinung, da die kritische Drehzahl dann so hoch liegt, daß sie praktisch überhaupt nicht erreicht wird.



### Dritter Abschnitt.

## Festigkeitslehre.

### 1. Begriffsbestimmungen.

Die Bauelemente unserer Maschinen und Bauwerke haben gewollte Kräfte aufzunehmen, z. B. die Schubstange einer Kolbenmaschine die Kolbenkraft, die Stäbe einer Brücke die durch die Belastung hervorgerufenen Zug- und Druckkräfte, die Hölzer beim Grubenausbau die durch den Gebirgsdruck entstehenden Drücke. Alle diese Bauelemente brechen, wenn die Kräfte übermäßig groß werden. Wie groß die Kräfte werden dürfen, lehrt uns die Festigkeitslehre. Und umgekehrt, wenn die Kräfte gegeben sind, lehrt sie uns, welche Abmessungen die verwendeten Stäbe, Rohre oder Platten haben müssen.

Jeder feste Körper ändert unter der Einwirkung einer äußeren Kraft seine Form; wirkt eine Zugkraft, so wird er länger, wirkt eine Druckkraft, so wird er kürzer. Die Formänderungen sind aber z. B. bei Eisenstäben so gering, daß sie mit bloßem Auge nicht wahrnehmbar sind, sie sind aber so groß, daß sie mit feinen Meßinstrumenten gemessen werden können.

An einem Gummiband kann man die Formänderung unmittelbar beobachten. Es wird durch ein angehängtes Gewicht sichtbar länger. Nimmt man das Gewicht ab, so zieht es sich sichtbar auf seine ursprüngliche Länge zusammen. Man nennt einen Körper, der diese Eigenschaft hat, einen elastischen Körper. Dieselbe Eigenschaft zeigt auch ein Stahlband, also ist auch Stahl elastisch. Ganz allgemein kann man auch bei anderen festen Baustoffen von einer Elastizität sprechen und versteht darunter die Eigenschaft der Baustoffkörper nach Aufhören einer Belastung ihre ursprüngliche Form wieder anzunehmen.

Die Festigkeitslehre lehrt uns die Gesetze, nach denen wir die elastischen Formänderungen fester Körper zahlenmäßig ermitteln können, sie heißt daher auch Elastizitätslehre. Das Grundgesetz, auf dem die ganze Elastizitätslehre beruht, ist ein Erfahrungsgesetz und schon 1660 von dem Engländer Hooke auf Grund von Versuchen mit Stahlfedern aufgestellt. Es lautet: „Die Formänderungen sind proportional den Kräften, die die Formänderung erzeugen.“ Demnach wird eine doppelte Zugkraft denselben Eisenstab auf die doppelte Verlängerung bringen.

Werden zwei Stäbe von gleichem Material, gleicher Länge und gleichem Querschnitt (Abb. 362) durch zwei verschieden große Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  auf Zug beansprucht und sind  $\Delta l_1$  und  $\Delta l_2$  die zugehörigen Verlängerungen, so ist nach dem Hookeschen Gesetz

$$\Delta l_1 : \Delta l_2 = P_1 : P_2.$$

Das Gesetz läßt sich auch bildlich darstellen. Man trägt auf der Horizontalachse die Verlängerungen und als Ordinaten die Kräfte ab. Verbindet man die Ordinatenendpunkte *I* und *II* miteinander, so erhält man eine schräge Linie, welche durch den Achsenschnittpunkt geht. Es entstehen zwei ähnliche Dreiecke, und es sind die Verhältnisse gleichliegender Seiten einander gleich:

$$\frac{\Delta l_1}{P_1} = \frac{\Delta l_2}{P_2} \quad \text{oder} \quad \Delta l_1 : \Delta l_2 = P_1 : P_2.$$

### Spannung und Dehnung.

Bei der Belastungsangabe ist die Angabe des Stabquerschnittes erforderlich, wenn man die Größe der Materialbeanspruchung erkennen will. Es sei

$P$  = Stabbelastung in kg,

$F$  = Querschnitt des Stabes in  $\text{cm}^2$ ,

dann ist

$$\frac{P}{F} = \text{Belastung von } 1 \text{ cm}^2 \\ = \sigma = \text{Spannung in kg/cm}^2.$$

Die Spannung ist die Belastung von  $1 \text{ cm}^2$  Stabquerschnitt.

**Beispiel:** Ein Stab von  $4 \text{ cm}^2$  Querschnitt werde durch ein angehängtes Gewicht mit  $3200 \text{ kg}$  belastet, wie groß ist die Spannung?

**Lösung:** Es ist

$$P = 3200 \text{ kg} \quad \text{und} \quad F = 4 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{3200}{4} = 800 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Verlängerung  $\Delta l$  des Stabes wird um so größer ausfallen, je größer die ursprüngliche Länge  $l$  des Stabes ist, denn die Verlängerung verteilt sich gleichmäßig über die ganze Länge der Stange. Will man die Streckung des Materials beurteilen, so muß man die Verlängerung von je  $1 \text{ cm}$  Stablänge angeben. Man bildet dann das Verhältnis

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \text{Dehnung} = \text{Verlängerung je } 1 \text{ cm}.$$

Man nennt die Verlängerung von  $1 \text{ cm}$  Stablänge die spezifische Verlängerung oder Dehnung.

**Beispiel:** Die im vorigen Beispiel erwähnte Stange soll bei  $2 \text{ m}$  Länge sich um  $0,5 \text{ mm}$  verlängert haben, wie groß ist die Dehnung?

**Lösung:**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,05}{200} = 0,00025 \text{ cm}.$$

### Dehnungskoeffizient und Elastizitätszahl.

Das Hookesche Gesetz lautet

$$\Delta l_1 : \Delta l_2 = P_1 : P_2.$$

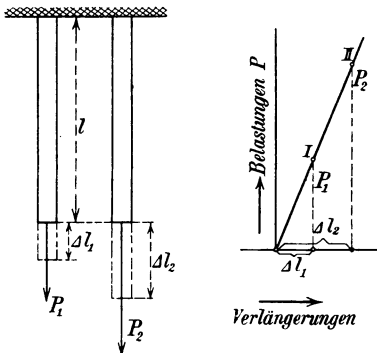
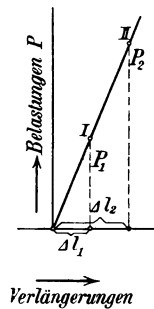


Abb. 362. Die Stabverlängerung durch Zugkräfte.



Dividiert man Zähler und Nenner auf der linken Seite durch  $l$ , auf der rechten Seite durch  $F$ , so heißt die Gleichung

$$\frac{\Delta l_1}{l} : \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{P_1}{F} : \frac{P_2}{F}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l_1}{l} &= \varepsilon_1 & \text{und} & & \frac{P_1}{F} &= \sigma_1, \\ \frac{\Delta l_2}{l} &= \varepsilon_2 & & & \frac{P_2}{F} &= \sigma_2, \end{aligned}$$

also ist

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \sigma_1 : \sigma_2,$$

d. h. die Dehnungen sind proportional den Spannungen.

Das Gesetz läßt sich auch schreiben

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} = \text{konst.} = \alpha.$$

Diesem konstanten Verhältnis  $\frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha$  legte Bach die Bezeichnung Dehnungskoeffizient bei.

Setzt man  $\sigma = 1 \text{ kg/cm}^2$ , so wird

$$\frac{\varepsilon}{1} = \alpha \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \alpha,$$

d. h. der Dehnungskoeffizient gibt an, um wieviel sich 1 cm Stablänge bei 1 kg Spannung verlängert.

Die Zahl  $\alpha$  wird für jedes Material durch Versuche bestimmt, sie wird um so größer, je nachgiebiger das Material ist, so daß die  $\alpha$ -Zahlen die elastischen Eigenschaften der verschiedenen Baustoffe charakterisieren.

Man hat z. B. gefunden für Schmiedeeisen  $\alpha = 1 : 2000000$ , für Kupfer  $\alpha = 1 : 1000000$ , d. h. eine Stange Schmiedeeisen verlängert sich bei 1 kg Spannung für je 1 cm um  $1/2000000$  cm, eine Stange Kupfer um  $1/1000000$  cm, Kupfer ist also doppelt so nachgiebig wie Schmiedeeisen.

Der reziproke Wert der Zahl  $\alpha$  führt die Bezeichnung Elastizitätsmodul oder Elastizitätszahl und wird mit dem Buchstaben  $E$  bezeichnet. Es ist also

$$E = \frac{1}{\alpha},$$

z. B. ist für Schmiedeeisen  $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ ,  
für Kupfer  $E = 1000000$  „

Setzt man in der bekannten Gleichung

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha$$

den Wert  $E = \frac{1}{\alpha}$  oder  $\alpha = \frac{1}{E}$ , so wird

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E} \quad \text{oder} \quad \frac{E}{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon},$$

d. h. die Spannung  $\sigma$  erzeugt die Dehnung  $\varepsilon$ ,  
die Spannung  $E$  erzeugt die Dehnung 1.

Die Dehnung wird aber gleich 1, wenn das Verhältnis

$$\frac{\Delta l}{l} = 1$$

oder wenn  $\Delta l = l$  wird, wenn also der Stab um das Maß seiner ursprünglichen Länge sich gestreckt hat.

Demnach kann man die Elastizitätszahl  $E$  auch als diejenige Spannung deuten, welche einen Stab um das Maß seiner eigenen Länge strecken würde. Für die meisten Baustoffe würde dieser Versuch aber nicht durchführbar sein, da der Stab, bevor er diese Streckung erhielte, schon reißen würde.

Proportionalitätsgrenze, Elastizitätsgrenze, Fließgrenze, Zugfestigkeit (Bruch).

Es werde ein Stab aus Stahl nach und nach immer stärker durch eine Zugkraft belastet und beobachtet, wie groß die jeweiligen Verlängerungen sind. Das Belastungsbild werde schaubildlich aufgetragen (Abb. 363). Das Bild zeigt auf der Horizontalachse die gemessenen Verlängerungen  $\Delta l$  in mm und als Ordinaten die errechneten Spannungen in  $\text{kg/cm}^2$  abgetragen.

Verbindet man die Endpunkte der aufgezeichneten Ordinaten miteinander, so entsteht die Belastungs-Formänderungskurve  $b$ , deren Anfang mit 10facher Vergrößerung als Kurve  $a$  nochmals erscheint.

Bis zur Spannung  $\sigma_p = 2050 \text{ kg/cm}^2$  zeigt die Kurve einen geradlinigen Verlauf, d. h. bis zu dieser Spannung gilt das Hooke-Gesetz: Die Verlängerungen wachsen proportional mit den Spannungen.

Die Grenzspannung, bis zu welcher die Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung gewahrt bleibt, nennt man die Proportionalitätsgrenze des Materials, man bezeichnet sie mit  $\sigma_p$ .

Von dieser Spannung ab wachsen bei weiterer Steigerung der Spannung die Verlängerungen stärker wie die Spannungen, die Belastungslinie biegt nach rechts ab. Und nun prüft man, ob bleibende Verlängerungen des Stabes eintreten, indem man die Belastung wieder auf Null herabsetzt. Sobald der Stab dann zum erstenmal eine bleibende Verlängerung zeigt, ist die Elastizitätsgrenze überschritten.

Die Grenzspannung  $\sigma_E$ , bis zu welcher die Belastung eines Stabes gesteigert werden kann, ohne daß eine bleibende Verlängerung<sup>1</sup> eintritt, nennt man die Elastizitätsgrenze des Materials. Nach dem Gesetz

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

kann man durch den Versuch auch den Elastizitätsmodul  $E$  bestimmen. Es ist z. B. für den Punkt der Proportionalitätsgrenze aus der Kurve  $a$  abzulesen

$$\sigma = 2050 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \Delta l = 0,25 \text{ mm}.$$

<sup>1</sup> Bei den heutigen feinen Meßmethoden durch Spiegelapparate, welche Formänderungen von 1:10000 mm messen, zeigen die Meßinstrumente schon früher eine bleibende Verlängerung. Die Elastizitätsgrenze gilt als überschritten, wenn nach der Entlastung die bleibende Verlängerung größer ist als 0,03 % der Meßlänge.

Da die Meßlänge des Versuchsstabes  $l = 260$  mm war, ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,25}{260} = 0,000962$$

und

$$E = \frac{2050}{0,000962} = 2130000 \text{ kg/cm}^2.$$

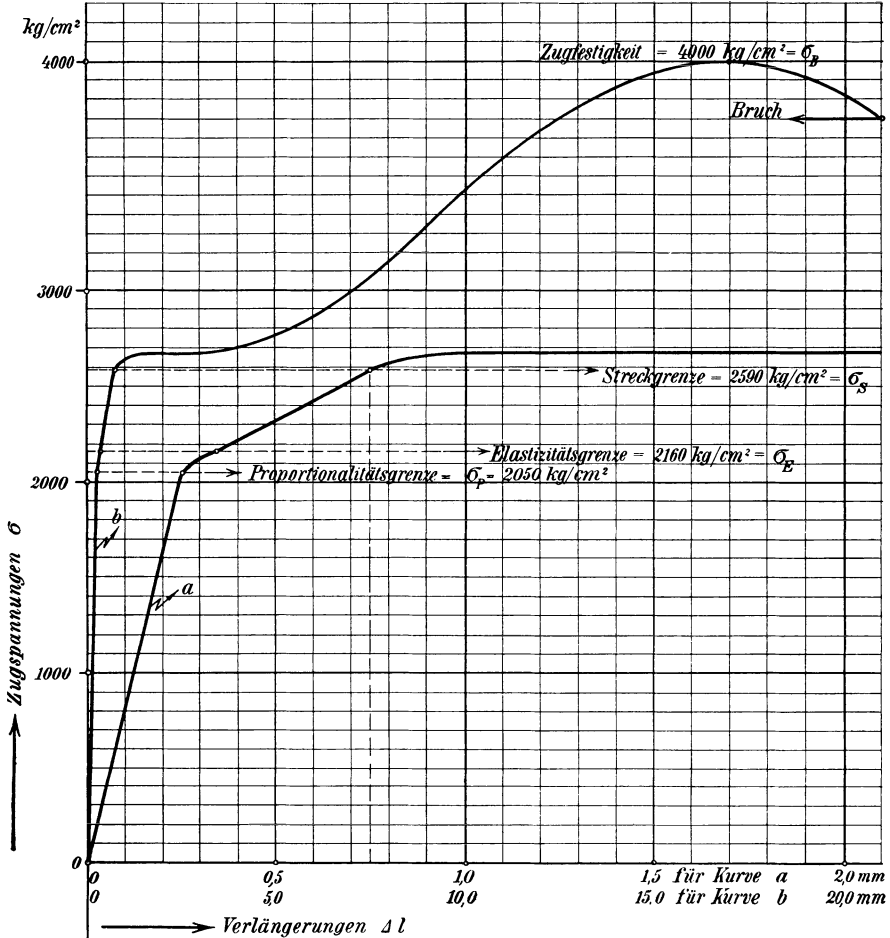


Abb. 363. Das Belastungs-Formänderungsbild.

Nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze wachsen die Verlängerungen ganz bedeutend, ohne daß die Spannung viel gesteigert wird. Man kann die Veränderungen des Stabes mit bloßem Auge verfolgen, das Material fließt.

Die Grenzspannung, bei welcher das Fließen des Materials eintritt, nennt man Streck- oder Fließgrenze. Sie hat in dem Schaubild die Größe  $\sigma_s = 2590$  kg/cm<sup>2</sup>.

Der Stab hält trotzdem nach Aufhören des Fließens noch eine weitere Steigerung der Spannung aus. Im Schaubild erreicht er die höchste

Spannung  $\sigma_B = 4000 \text{ kg/cm}^2$  (Bruchgrenze), und dann reißt er bei abnehmender Spannung.

Diese höchste Spannung, welche der Stab beim Zugversuch getragen hat, nennt man die Zugfestigkeit des Materials.

### Die zulässige Spannung.

Die Festigkeit der Baustoffe ist durch zahlreiche Versuche festgelegt worden. Für den Konstrukteur ist die Kenntnis dieser Festigkeitszahlen eine Notwendigkeit, denn er muß seine Konstruktionen in solchen Abmessungen ausführen, daß in keinem Teil seiner Konstruktion der Baustoff bis zur Festigkeitsgrenze beansprucht wird, da sonst ein Bruch unvermeidlich ist.

Man legt daher bei allen Berechnungen die Festigkeitszahlen zugrunde, indem man mit einem Sicherheitsgrad gegen das Überschreiten der Festigkeitsgrenzen rechnet.

Festigkeitszahlen.

Baustoff	Elastizitätsgrenze $\sigma_E$ kg/cm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit $\sigma_B$ kg/cm <sup>2</sup>	Druckfestigkeit $\sigma_{-B}$ kg/cm <sup>2</sup>	Schubfestigkeit $\tau_B$ kg/cm <sup>2</sup>	Zulässige Spannung $\sigma_{zul}$ kg/cm <sup>2</sup>	Sicherheitsgrad ungefähr
Schweiß Eisen	1600	3600	—	—	800	4,5
Fluß Eisen .	2400	4000-4400	—	—	1000	4,5
Nadelholz .	150-200	800	250	400	80	10
Eichenholz .	150-500	1000	350	800	100	10
Stein . . .	—	—	bis 2500	—	bis 50	10-20 und mehr

Der Konstrukteur legt demnach für Eisen etwa 5fache und für Holz und Stein etwa 10- bis 20fache Sicherheit zugrunde.

Neuerdings versucht man, die zulässigen Spannungen auf Grund der Elastizitätszahlen der Baustoffe festzulegen, indem man verlangt, daß alle Teile der Konstruktion unter dem Einfluß ihrer Belastung vollkommen elastisch bleiben, d. h. daß keine bleibenden Formänderungen zurückbleiben dürfen. Die Erfahrungen haben eine Beanspruchung, welche die Hälfte der Elastizitätszahlen nicht überschreitet, als für zulässig befunden. Der Sicherheitsgrad gegen Überschreiten der Elastizitätsgrenzen ist demnach als ein zweifacher anzusetzen.

Bei dem im Schaubild dargestellten eisernen Probestab war die Elastizitätsgrenze  $\sigma_E = 2160 \text{ kg/cm}^2$ , die Festigkeitsgrenze  $\sigma_B = 4000 \text{ kg/cm}^2$ , damit ergeben sich folgende Zahlen:

$$\text{zulässige Spannung} = \frac{\text{Festigkeitsgrenze}}{\text{Sicherheit}} = \frac{4000}{4,5} = 890 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{oder zulässige Spannung} = \frac{\text{Elastizitätsgrenze}}{\text{Sicherheit}} = \frac{2160}{2} = 1080 \text{ ,,}$$

Die neue Methode bringt in diesem Fall eine größere zulässige Spannung, so daß die Abmessungen der Konstruktionen kleiner und die Konstruktionen selbst billiger werden.

Bei der Festsetzung der zulässigen Spannung ist noch die Art der Belastung zu beachten, ob die Belastung unveränderlich, keinem Wechsel oder einem Wechsel unterworfen ist. Nach vielen Dauerversuchen ist erwiesen, daß ein Spannungswechsel (Zug in Druck und umgekehrt) einen wiederholt belasteten Eisenstab eher zum Bruch bringt, als eine reine Zug- oder Druckbelastung. Ferner ist erwiesen, daß der Spannungswechsel um so gefährlicher ist, je größer der Spannungsunterschied ist. Wird z. B. der 1. Stab zwischen +10000 kg und -20000 kg, der 2. Stab zwischen +20000 kg und -20000 kg belastet, so ist, trotzdem in beiden Fällen die höchste Spannung dieselbe ist, der 2. Stab gefährlicher belastet. Ein Eisenstab, der keinen Spannungswechsel erleidet, bricht dagegen nach vielen Millionen Spannungsänderungen nicht, wenn der Belastungsgrenzwert unter der Elastizitätsgrenze bleibt. Die im Anhang wiedergegebenen zulässigen Spannungszahlen berücksichtigen drei Belastungsarten:

- Belastung I: die Belastung ist eine ruhende.
- Belastung II: Die Belastung wächst beliebig oft von Null bis zu einem Grenzwert.
- Belastung III: Die Belastung schwankt beliebig oft zwischen einem positiven und negativen Grenzwert.

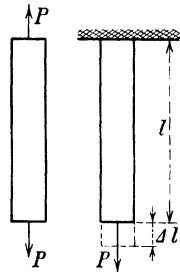


Abb. 364. Der zugbelastete Stab.

## 2. Die Zugfestigkeit.

Wird ein Stab (Abb. 364) durch zwei gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $P$  in seiner Achsenrichtung angegriffen, so wird er auf Zug beansprucht, wenn die Kräfte nach außen ziehen. Man kann die obere Kraft in der Abbildung auch durch Einspannen des Stabes ersetzen. Hat der Stab  $F$  cm<sup>2</sup> Querschnitt, so stellt sich folgende Zugspannung ein

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ kg/cm}^2.$$

Wie groß ist die Verlängerung, wenn die ursprüngliche Stablänge  $l$  cm ist?

- Für 1 cm Stablänge und 1 kg Spannung ist  $\Delta l = \alpha$
- „  $l$  „ „ „ 1 kg „ „  $\Delta l = \alpha \cdot l$
- „  $l$  „ „ „  $\sigma$  kg „ „  $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \sigma$ .

Setzt man ein:

$$\alpha = \frac{1}{E} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{P}{F},$$

so wird

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot l \cdot \frac{P}{F} = \frac{P \cdot l}{F \cdot E} \text{ cm.}$$

Die Verlängerung wächst demnach

1. proportional mit der Belastung  $P$ ,
2. proportional mit der Länge  $l$ ,
3. umgekehrt proportional mit dem Querschnitt  $F$ ,
4. umgekehrt proportional mit der Elastizitätszahl  $E$ .

**Beispiel:** Welchen Durchmesser erhält eine schmeideeiserne Rundstange, welche 5000 kg Zugkraft bei einer zulässigen Spannung  $\sigma_{zul.} = 700 \text{ kg/cm}^2$  aufnehmen soll, und um wieviel verlängert sich die 3 m lange Stange?

**Lösung:** Der Stangenquerschnitt muß werden

$$F = \frac{P}{\sigma_{zul.}} = \frac{5000}{700} = 7,14 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4} d^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,14}{\pi}} = \sim 3 \text{ cm}.$$

Die Verlängerung ist

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{F \cdot E} = \frac{5000 \cdot 300}{7,14 \cdot 2000000} = 0,105 \text{ cm} = 1,05 \text{ mm}.$$

**Beispiel:** Ein Stahlstab ( $E = 2200000 \text{ kg/cm}^2$ ) von 3 m Länge soll 1200 kg Zug aufnehmen, dabei aber höchstens um 0,50 mm verlängert werden. Wie groß darf die Belastungsspannung werden und welchen Durchmesser erhält die Stange?

**Lösung:** Bei vorgeschriebener Verlängerung ist die Dehnung  $\varepsilon$  zu berechnen

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,05}{300} = 0,00017 \text{ cm},$$

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E} \quad \text{oder} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E = 0,00017 \cdot 2200000,$$

$$\sigma = 374 \text{ kg/cm}^2,$$

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{1200}{374} = 3,2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4} d^2,$$

$$d = 2,02 \text{ cm} = 20,2 \text{ mm}.$$

Die Belastung werde nur durch Eigengewicht hervorgerufen.

Der in Abb. 365 eingespannte Stab werde nur durch sein eigenes Gewicht belastet. Das Balkenstück vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $x$  hat das Gewicht

$$P_x = F \cdot x \cdot \gamma,$$

wenn  $\gamma$  das Gewicht von  $1 \text{ cm}^3$  des Materials ist. Die Zugspannung des Querschnitts im Abstände  $x$  vom freien Ende ist

$$\sigma_x = \frac{P_x}{F} = \frac{F \cdot x \cdot \gamma}{F} = x \cdot \gamma.$$

Die größte Zugspannung tritt ein, wenn  $x$  seinen größten Wert erreicht. Der größte Wert ist

$$x = l,$$

d. h. für den Einspannungsquerschnitt ist

$$\sigma = l \cdot \gamma.$$

Abb. 365. Eigengewichtsbelastung.

Der Stab reißt, wenn im Einspannungsquerschnitt die Bruchspannung erreicht wird. Bei der Länge  $l_B$  soll die Bruchspannung  $\sigma_B$  erreicht sein. Dann ist

$$\sigma_B = l_B \cdot \gamma.$$

d. h. der Stab reißt ab bei der Länge

$$l_B = \frac{\sigma_B}{\gamma}.$$



Wie groß ist die durch das Eigengewicht hervorgerufene Verlängerung des Stabes ?

Man denke sich (Abb. 366) das Gesamtgewicht des Stabes im Schwerpunkt  $S$  des Stabes angreifend, dann erhält man einen Stab von der Länge  $\frac{1}{2} l$ , welcher am freien Ende durch das Gewicht des Stabes

$$P = \gamma \cdot F \cdot l$$

belastet wird. Dann ist

$$\Delta l = \frac{P \cdot \frac{l}{2}}{F \cdot E} = \frac{\gamma \cdot F \cdot l \cdot l}{F \cdot E \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot l^2}{E}.$$

**Beispiel:** Bei welcher Länge reißt ein Bleidraht ab, wenn Blei die Bruchfestigkeit  $\sigma_B = 220 \text{ kg/cm}^2$  und das spezifische Gewicht 11,4 hat ?

**Lösung:** Wenn das spezifische Gewicht des Bleies 11,4 ist, so wiegen

$$1000 \text{ cm}^3 \text{ Blei} = 1 l = 11,4 \text{ kg},$$

$$1 \text{ ,, ,, } = 0,0114 \text{ kg} = \gamma,$$

$$\text{Bruchlänge } l_B = \frac{\sigma_B}{\gamma} = \frac{220}{0,0114} = 19300 \text{ cm},$$

$$l_B = 193 \text{ m}.$$

**Beispiel:** Wie lang darf ein aufgehängter Stahldraht sein, dessen Elastizitätsgrenze bei  $\sigma_E = 9000 \text{ kg/cm}^2$  liegt, wenn sein spezifisches Gewicht 7,85 ist und zweifache Sicherheit gegen Überschreiten der Elastizitätsgrenze verlangt wird ?

**Lösung:** Bei zweifacher Sicherheit darf die zulässige Zugspannung sein

$$\sigma_{zul.} = \frac{9000}{2} = 4500 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\gamma = \frac{7,85}{1000} = 0,00785 \text{ kg/cm}^3,$$

zulässige Länge

$$l = \frac{\sigma_{zul.}}{\gamma} = \frac{4500}{0,00785} = 573000 \text{ cm},$$

$$l = 5730 \text{ m}.$$

Wie groß ist dann die Verlängerung des Drahtes ?

$$\Delta l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot l^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,00785 \cdot 573000^2}{2200000}$$

$$\Delta l = 583 \text{ cm} = 5,83 \text{ m}.$$

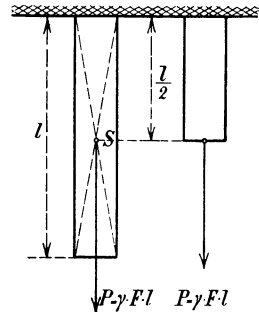


Abb. 366. Eigengewichtsbelastung.

Welche Belastungsspannung kann der Draht bei  $l = 1000 \text{ m}$  Länge noch tragen, wenn die Eigengewichtsspannung und Belastungsspannung zusammen eine Spannung ergeben sollen, die noch eine doppelte Sicherheit gegen Überschreiten der Elastizitätsgrenze bietet ?

$$\text{Eigengewichtsspannung } \sigma_1 = l \cdot \gamma$$

$$l = 1000 \text{ m} = 100000 \text{ cm},$$

$$\gamma = 0,00785 \text{ kg/cm}^3,$$

$$\sigma_1 = 100000 \cdot 0,00785 = 785 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{zulässige Zugspannung } \sigma_{zul.} = 4500 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Belastungsspannung } \sigma_2 = \sigma_{zul.} - \sigma_1 = 4500 - 785 = 3715 \text{ kg/cm}^2.$$

Würde man also aus diesem Stahldraht ein Seil von  $1 \text{ cm}^2$  Querschnitt flechten, so könnte das Seil bei  $1000 \text{ m}$  Länge noch eine Last von  $3715 \text{ kg}$  tragen.

### 3. Förderseile.

Als Drahtmaterial verwendet man heute SM-Stahl von 150 bis 180 kg/mm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit. Das Walzwerk liefert den Draht in Rollen mit einer Drahtstärke von 5 bis 6 mm. In diesem Zustand hat der Draht nur eine Festigkeit von 70 kg/mm<sup>2</sup>. Die Drahtwerke müssen den Draht verfeinern. Das geschieht maschinell durch Kalttreckung auf den Ziehbankn. Der Draht wird durch ein Zieh-eisen (Abb. 367) gezogen, wodurch der Durchmesser vermindert und das Material geknetet wird.

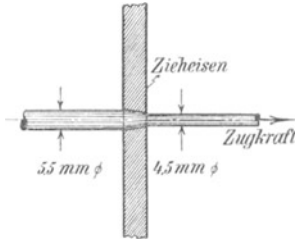


Abb. 367. Der Stahldraht im Zieh-eisen.

Durch die Kalttreckung wird der Werkstoff härter, seine Formnderungsfhigkeit nimmt dabei stark ab. Nach dem Ziehen muß daher jedesmal eine besondere Wärmebehandlung einsetzen, um den Draht wieder

formnderungsfhig zu machen. Diese Wärmebehandlungen sind das Zementieren und das Patentieren.

#### 1. Das Zementieren.

Der ganze Draht ring wird nach der ersten Kalttreckung im Wärmeofen auf eine bestimmte Temperatur gebracht und dann wieder abgekühlt. Dann erfolgt die zweite Streckung auf der Ziehbank. Hiernach erfolgt die zweite Wärmebehandlung, die man Patentieren nennt.

#### 2. Das Patentieren.

Der langgezogene Draht wird in einem Durchlaufofen (Abb. 368) erhitzt und im Bleibad abgeschreckt. Alsdann erfolgt ein nochmaliges Kalttrecken auf der Ziehbank, und dann ist der Draht fertig für die Seilfabrikation.

Im Schaubild (Abb. 369) zeigt die ansteigende Sägezahnkurve, wie durch die Kalttreckung die Zugfestigkeit des Drahtmaterials von 70 kg/mm<sup>2</sup> auf 180 kg/mm<sup>2</sup> zunimmt, und wie die Wärmebehandlung jedesmal die Zugfestigkeit etwas herabsetzt.

Das Drahtmaterial wird auf Zerreimaschinen auf Zugfestigkeit untersucht. Nebenher

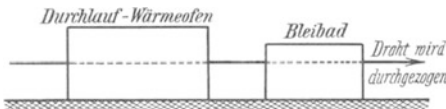


Abb. 368. Das Patentieren des Stahldrahts.

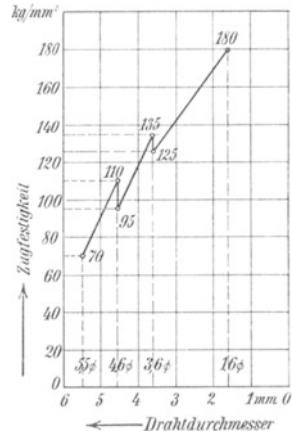


Abb. 369. Das Vergtungsdiagramm.

wird eine Zhigkeitsuntersuchung durchgeführt, um die Brüchigkeit des Materials beim Biegen festzustellen.

Die Zähigkeitsprobe, welche durch Hin- und Herbiegungen vorgenommen wird, verlangt (Abb. 370)

für Drähte bis 2 mm $\varnothing$ . . . . .	8 Biegungen um 180°
„ „ von 2—2,2 $\varnothing$ . . . . .	7 „ „ 180°
„ „ „ 2,2—2,5 $\varnothing$ . . . . .	6 „ „ 180°
„ „ „ 2,5—2,8 $\varnothing$ . . . . .	5 „ „ 180°
„ „ „ 2,8 $\varnothing$ . . . . .	4 „ „ 180°

Die im Betrieb auftretende Seilbelastung setzt sich aus der ruhenden (statischen) Belastung und aus der Bewegungsbelastung (dynamische Belastung) zusammen. Die dynamische Belastung wird beim Beschleunigen und Verzögern einsetzen, sie kann außerdem durch Seilschwingungen noch vergrößert werden. Im allgemeinen ist es schwierig, diese dynamischen Belastungen rechnerisch genau festzulegen, daher verzichtet man auf diese Berechnung ganz und legt der Rechnung nur die ruhende Belastung zugrunde. Dafür wählt man folgende hohen Sicherheitsgrade.

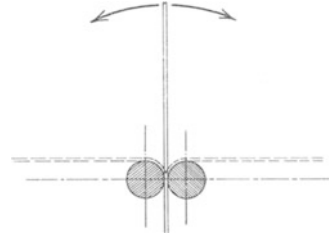


Abb. 370. Die Zähigkeitsprobe.

$\mathcal{S}$  = Betriebssicherheit beim Auflegen des Seils.

$\mathcal{S}_{OB}$  = vorgeschriebene oberbergamtliche Sicherheit.

$$\mathcal{S}_{OB} \left\{ \begin{array}{l} \text{Massenfahrt} = 6 \text{ fach} \\ \text{Seilfahrt} = 8 \text{ fach} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{alle} \\ \text{3 Monate} \\ \text{nachgeprüft} \end{array} = \begin{array}{l} 7 \text{ fach beim Auflegen,} \\ 9,5 \text{ fach (2 Jahre Betriebsdauer)} \end{array}$$

Trommelförderung Koepe-Förderung

Man macht nun zu dem  $\mathcal{S}_{OB}$  einen Zuschlag, da während des Betriebes Verschleiß und Drahtbrüche auftreten, und zwar bei Trommelförderung einen Zuschlag von 20 bis 25%, bei Koepe-Förderung einen Zuschlag von 7 bis 10%; man wählt also

$$\begin{array}{l} \mathcal{S} = 1,20 \text{ bis } 1,25 \quad \mathcal{S}_{OB} = 1,25 \cdot 8 = 10 \text{ fach bei Trommelförderung,} \\ \mathcal{S} = 1,07 \text{ bis } 1,10 \quad \mathcal{S}_{OB} = 1,10 \cdot 9,5 = 10,4 \text{ fach bei Koepe-Förderung.} \end{array}$$

**Das Seilgewicht.** Es sei

$g$  = Gewicht von 1 m Seil in kg,

$\gamma = \frac{g}{F}$  = Gewicht in kg von 1 m Seil für 1 mm<sup>2</sup> Tragfläche.

Die  $\gamma$ -Werte sind durch langjährige Erfahrung festgelegt, sie haben folgende Größen:

$\gamma = \frac{1}{85}$  kg/1 mm<sup>2</sup> und 1 m Seil für Rundseile mit Rundlitzen, Hanfseele und Kerndrähte in jeder Litze und Mittelseele,

$\gamma = \frac{1}{95}$  „ für Rundseile mit Rundlitzen, ohne Hanfseele aber mit Kerndrähten in jeder Litze und Mittelseele. Die Ausführung ist die normale.

$\gamma = \frac{1}{105}$  „ für dreikantlitzige Seile mit Hanfmittelseele.

$\gamma = \frac{1}{115}$  „ für patentverschlossene Seile.

**Die Seilberechnungsformel. 1. Die Bruchlänge.** Unter Bruchlänge versteht man diejenige Seillänge  $l_B$ , bei welcher das Seil durch die Eigengewichtsbelastung reißt.

$$\text{Gewicht der Bruchlänge} = G = l_B \cdot \gamma \cdot F \text{ in kg.}$$

Das Drahtmaterial hat die Bruchfestigkeit  $\sigma_B$ , also ist die Bruchlast bei  $F \text{ mm}^2$  Querschnitt

$$G = \sigma_B \cdot F.$$

Setzt man beide Werte einander gleich, so wird

$$l_B \cdot \gamma \cdot F = \sigma_B \cdot F,$$

$$\text{Bruchlänge } l_B = \frac{\sigma_B}{\gamma}.$$

Bei der Sicherheit  $\ominus$  ist demnach die sichere Traglänge

$$l = \frac{\sigma_B}{\gamma \cdot \ominus}.$$

**2. Die Schachtteufe  $T$ .** Das Seil hat eine bestimmte sichere Traglänge  $l$ , diese wird aber nicht ausgenutzt, sondern das Seil wird nur mit der Teufenlänge  $T$  durch Eigengewicht belastet, mithin kann noch eine bestimmte Nutzlast  $P$  als Differenz beider Gewichte getragen werden.

$$\text{Sicheres Seilgewicht} = l \cdot F \cdot \gamma \text{ kg}$$

$$\text{Teufengewicht} = T \cdot F \cdot \gamma \text{ ,,}$$

$$\text{Nutzlast} = \text{Differenz} = (l - T) \cdot F \cdot \gamma = P$$

oder

$$F = \frac{P}{(l - T) \cdot \gamma}.$$

Setzt man

$$l = \frac{\sigma_B}{\gamma \cdot \ominus},$$

so wird

$$F = \frac{P}{\left(\frac{\sigma_B}{\gamma \cdot \ominus} - T\right) \cdot \gamma} \text{ in mm}^2,$$

für  $\gamma = \frac{1}{105} \text{ kg}$  für  $1 \text{ mm}^2$  und  $1 \text{ m}$  Seil wird

$$F = \frac{105 \cdot P}{\frac{105 \cdot \sigma_B}{\ominus} - T} \text{ in mm}^2.$$

**Beispiel:** Man berechne für  $T = 900 \text{ m}$  Teufe ein Förderseil für Koepe-Förderung, wenn folgende Lasten zu tragen sind:

1. Förderkorb mit Zwischengeschirr	= 6000 kg
2. 8 Wagen mit 750 kg Ladung	= 6000 ,,
3. Leerwagengewicht = 55% der Nutzlast	= 3300 ,,
	<b>15300 kg</b>

Lösung: 1. Als normales Rundseil:

$$\epsilon = 1,10 \cdot \epsilon_{0B} = 1,10 \cdot 7,0 = 7,7,$$

$$\sigma_B = 170 \text{ kg/mm}^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ kg für 1 m Länge und 1 mm}^2,$$

$$F = \frac{15300}{\left(\frac{170}{0,01 \cdot 7,7} - 900\right) \cdot 0,01} = 1180 \text{ mm}^2,$$

1 laufendes Meter Seil wiegt  $g = \gamma \cdot F = \frac{1}{100} \cdot 1180 = 11,8 \text{ kg/m}$ ,

Teufengewicht des Seils  $G = g \cdot T = 11,8 \cdot 900 = 10620 \text{ kg}$ .

Empirisch ist die Seildicke bei Rundseilen

$$d = 1,75 \cdot \sqrt{F} = 1,75 \cdot \sqrt{1180} = 60 \text{ mm}.$$

Mit dem errechneten Querschnitt  $F = 1180 \text{ mm}^2$  und  $\sigma_B = 170 \text{ kg/mm}^2$  ist die Bruchlast des errechneten Seiles

$$B = F \cdot \sigma_B = 1180 \cdot 170 = 201000 \text{ kg}.$$

Das Seil hat aber nur zu tragen

1. Teufengewicht des Seiles = 10620 kg

2. Nutzlast  $P = 15300 \text{ ,,}$

$$\text{Gesamtgewicht } G = 25920 \text{ kg,}$$

also hat das Seil die statische Sicherheit

$$\epsilon = \frac{B}{P} = \frac{201000}{25920} = 7,7 \text{ fach.}$$

2. Als Dreikantlitzenseil:

$$\gamma = \frac{1}{105} \text{ kg/mm}^2;$$

es werde eine höhere Zugfestigkeit angenommen, und zwar

$$\sigma_B = 190 \text{ kg/mm}^2.$$

$$F = \frac{105 \cdot P}{\frac{105 \cdot \sigma_B}{\epsilon} - T} = \frac{105 \cdot 15300}{\frac{105 \cdot 190}{7,7} - 900} = 950 \text{ mm}^2.$$

Metergewicht des Seiles  $g = \gamma \cdot F = \frac{1}{105} \cdot 950 = 9,05 \text{ kg/m}$ .

Teufengewicht des Seiles =  $9,05 \cdot 900 = 8145 \text{ kg}$ .

Empirisch ist die Seildicke für Dreikantlitzenseile

$$d = 1,50 \cdot \sqrt{F} = 1,50 \cdot \sqrt{950} = 46 \text{ mm}.$$

Bei Trommelmaschinen bestimmt die Seildicke die Breite der Trommel. Wie groß wird die Trommelbreite, wenn der Trommeldurchmesser  $D = 7,00 \text{ m}$  ist?

$$\text{Umfang} = \pi \cdot D = 3,14 \cdot 7,00 = 22,00 \text{ m}.$$

$$\text{Anzahl der Seilwindungen} = \frac{T}{\pi \cdot D} = \frac{900}{22} = 41 \text{ Windungen}.$$

Nimmt man noch 3 Reservewindungen, so erhält man

$$Z = 41 + 3 = 44 \text{ Windungen}$$

Legt man die Trommelwindungen mit 2 mm Spielraum, so erhalten wir folgende Trommelbreiten:

1. bei Rundseil  $(60 + 2) \cdot 44 = 2730$  mm,
2. bei Dreikantlitzenseil  $(46 + 2) \cdot 44 = 2110$  mm.

Die gesamte Trommelbreite würde sein:

$$\begin{aligned} \text{für Rundseil} &= 2 \cdot 2730 = 5460 \text{ mm,} \\ \text{für Dreikantlitzenseil} &= 2 \cdot 2110 = 4220 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Der große Vorteil der Koepe-Förderung ist die geringe Breite der Treibscheibe, so daß die Fördermaschinenwelle erheblich leichter und billiger wird.

**Aufgabe:** Es soll das Seil einer Blindschachtförderung berechnet werden, wenn folgende Verhältnisse vorliegen: Teufenlänge des Seiles  $T = 104$  m, Korbgewicht = 1150 kg, zwei Wagen mit Kohle =  $2 \cdot 1200 = 2400$  kg. Die Förderung arbeitet mit Gegengewicht = Korbgewicht + 2 leere Wagen =  $1150 + 2 \cdot 450 = 2050$  kg. Der Seilausgleich erfolgt durch Unterseil. Die Treibscheibe hat 1350 mm Durchmesser.

**Lösung:** Auf der Korbseite ist die Seillast =  $1150 + 2400 = 3550$  kg, auf der Gegengewichtsseite = 2400 kg, also ist das Seil für  $P = 3550$  kg zu berechnen. Da nur Massenfahrt stattfindet, wählt man

$$\mathcal{S} = 1,10 \cdot \mathcal{S}_{OB} = 1,10 \cdot 7 = 7,7 \text{ fach.}$$

Verwendet werde ein Rundseil mit  $\sigma_B = 160$  kg/mm<sup>2</sup> und

$$\gamma = \frac{1}{100} \text{ kg für } 1 \text{ mm}^2 \text{ und } 1 \text{ m Seil.}$$

Der erforderliche Seilquerschnitt ist

$$F = \frac{100 \cdot P}{\frac{100 \cdot \sigma_B}{\mathcal{S}} T} = \frac{100 \cdot 3550}{\frac{100 \cdot 160}{7,7} 104} = 180 \text{ mm}^2.$$

Bei Rundseilen ist die Seildicke

$$d = 1,75 \cdot \sqrt{F} = 1,75 \cdot \sqrt{180} = \sim 24 \text{ mm.}$$

Folgende Tabelle gibt ausgeführte Rundseile an.

1 Hanfseele und	Drahtstärke mm	Seildurchmesser mm	$F$ in mm <sup>2</sup>	Metergewicht kg	Bruchlast in kg für $\sigma_B = 160$ kg/mm <sup>2</sup>
6 × 12 Drähte	2,0	26	226,1	2,13	36190
6 × 14 „	1,8	25	213,8	2,01	34200
6 × 16 „	1,8	27	244,3	2,32	39080
6 × 27 „	1,4	27	249,4	2,36	39900
6 × 30 „	1,2	24	203,6	1,93	32570

Dem errechneten Querschnitt von 180 mm<sup>2</sup> liegt das letzte Seil obiger Tabelle mit 203,6 mm<sup>2</sup> am nächsten. Es verwendet Drähte von 1,2 mm Stärke =  $\vartheta$ .

Der Scheibendurchmesser soll mindestens sein

$$D \geq 500 \cdot \vartheta = 500 \cdot 1,2 = 600 \text{ mm.}$$

Da eine Treibscheibe von  $\vartheta = 1350$  mm verwendet wird, liegen die Biegeungsverhältnisse für das Seil sehr günstig.

Das Metergewicht des Seiles ist 1,93 kg, also ist das Teufengewicht des Seiles =  $104 \cdot 1,93 = 200$  kg, die Seillast ist =  $3550 + 200 = 3750$  kg, die Bruchlast = 32570 kg, also ist die Sicherheit

$$\mathcal{S} = \frac{32570}{3750} = 8,7 \text{ fach.}$$

### 4. Die Druckfestigkeit.

Es gelten dieselben Formeln wie bei der Zugfestigkeit, nur bedeutet  $\Delta l$  die Verkürzung des Stabes in cm und  $\sigma_{d\text{zul}}$  die zulässige Druckspannung in  $\text{kg/cm}^2$  (Abb. 371).

$$P = \sigma_{d\text{zul}} \cdot F,$$

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{F \cdot E}.$$

**Beispiel:** Bei welcher Höhe würde eine Steinsäule (Abb. 372) durch ihr Eigengewicht zerdrückt, wenn das Steinmaterial eine Druckfestigkeit  $\sigma_{-B} = 200 \text{ kg/cm}^2$  hat und das Steingewicht  $2400 \text{ kg/m}^3$  ist?

**Lösung:**  $P = \sigma_{-B} \cdot F = F \cdot h \cdot \gamma,$

$$h = \frac{\sigma_{-B} \cdot F}{F \cdot \gamma} = \frac{\sigma_{-B}}{\gamma},$$

1  $\text{m}^3$  Steinmaterial = 2400 kg,  
 1  $\text{cm}^3$  „ = 0,0024 kg,

$$h = \frac{200}{0,0024} = 83400 \text{ cm} = 834 \text{ m}.$$

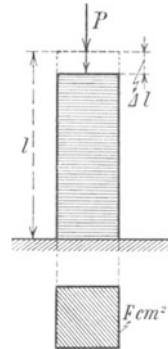


Abb. 371. Der druckbelastete Stab.

**Beispiel:** Welche Last kann ein 2 Stein starker Mauerpfeiler von quadratischem Querschnitt tragen, wenn die zulässige Druckspannung für Ziegel  $\sigma_{d\text{zul}} = 7 \text{ kg/cm}^2$  beträgt?

**Lösung:** Nach Abb. 373 ist die Druckfläche des Mauerpfeilers

$$F = 25 \cdot 25 = 625 \text{ cm}^2,$$

$$P = \sigma_{d\text{zul}} \cdot F = 7 \cdot 625 = 4375 \text{ kg}.$$

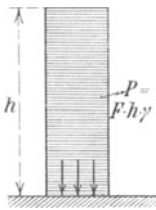


Abb. 372. Eigengewichtsbelastung.

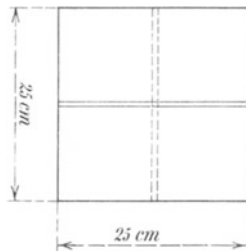


Abb. 373. Mauerpfeiler.

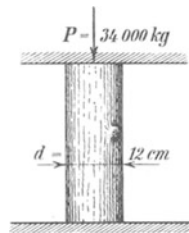


Abb. 374. Der druckbelastete Holzstempel.

**Beispiel:** Ein kurzer Holzstempel (Abb. 374) von 12 cm Durchmesser wurde bei 34000 kg Belastung zerdrückt, wie groß war die Druckfestigkeit  $\sigma_{-B}$  des Holzes?

**Lösung:**

$$P = \sigma_{-B} \cdot F,$$

$$\sigma_{-B} = \frac{P}{F} = \frac{34000}{\frac{\pi}{4} \cdot 12^2} = 300 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei Stäben, die eine größere Länge haben, sind die Druckformeln nicht mehr anwendbar. Solche Stäbe werden nicht zerdrückt, sondern zerknickt, so daß hier eine Berechnung auf Zerknicken einsetzen muß. Das Zerknicken erfolgt in der Hauptsache durch Durchbiegung des Stabes. Es muß daher zunächst die Biegezugfestigkeit behandelt werden.

### 5. Die Biegefestigkeit.

Der einfachste Biegefall ist in Abb. 375 dargestellt. Ein horizontal eingespannter Balken von  $l$  cm Länge ist am freien Ende durch eine Kraft  $P$  belastet. Der Balken biegt sich durch. Ist die gebogene Form eine Kreisform, so hat der Kreisbogen der oberen Faser einen größeren Radius  $R$  als der der unteren Faser, d. h. die obere Faser ist länger wie die untere geworden. Vor der Biegung waren alle Fasern gleich lang. Durch die Biegung ist daher die obere Faser länger, die untere kürzer geworden, d. h. die obere Faser ist gezogen, die untere gedrückt worden. Derselbe Querschnitt wird also im oberen Teil auf Zug, im unteren Teil auf Druck beansprucht.

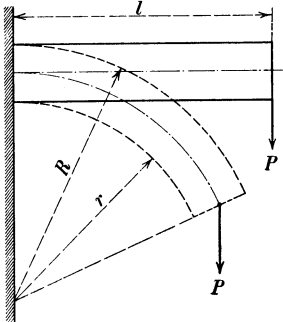


Abb. 375. Der eingespannte Balken.

In Abb. 376 ist der Balken als Kreisbogenstück in übertriebener Durchbiegung dargestellt. Der Endquerschnitt des Balkens ist nun nicht mehr parallel dem Einspannungsquerschnitt. Zieht man durch den Mittelpunkt des Endquerschnitts die Parallele zum Einspannungsquerschnitt, so schneidet diese auf der oberen Faser die größte Verlängerung  $\Delta l_2$  und auf der unteren Faser die größte Verkürzung  $\Delta l_1$  aus. Die mittlere Faser hat demnach keine Verlängerung und keine Verkürzung erfahren, sie heißt daher die neutrale Faser. Sie fällt zusammen mit der Schwerpunktsfaser.

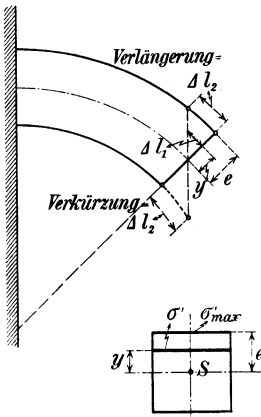


Abb. 376 und 377. Die Formänderung der Balkenfasern.

Man betrachte zwei Faserschichten (Abb. 377), die äußerste Faserschicht im Abstände  $e$  von der Schwerpunktsachse und eine Faserschicht im Abstände  $y$  von der Schwerpunktsachse. In beiden Faserschichten herrschen Spannungen, es sei  $\sigma'$  = Spannung in der Faserschicht mit dem Abstand  $y$ ,  $\sigma'_{max}$  = Spannung in der Faserschicht mit dem Abstand  $e$ .

Nach Abb. 376 ist

$$\Delta l_1 : \Delta l_2 = y : e,$$

d. h. die Verlängerungen oder Verkürzungen der Faserschichten verhalten sich wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Nach dem Proportionalitätsgesetz verhalten sich die Spannungen wie die Dehnungen bzw. die Verlängerungen, und es ist

$$\sigma' : \sigma'_{max} = \Delta l_1 : \Delta l_2$$

$$\Delta l_1 : \Delta l_2 = y : e$$

$$\sigma' : \sigma'_{max} = y : e, \quad \text{also} \quad \sigma' = \sigma'_{max} \cdot \frac{y}{e},$$



d. h. die Spannungen der Faserschichten verhalten sich ebenfalls wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung für den Biegebalken gelingt durch folgende Überlegung:

Man denkt sich in Abb. 378 die Einspannungsstelle beseitigt und stellt den Gleichgewichtszustand durch Anbringung von Kräften her. Dann wirken in der oberen Hälfte Zugkräfte, in der unteren Hälfte Druckkräfte.

Der Punkt  $D$  ist der Drehpunkt. Die äußere Kraft  $P$  wirkt rechtsdrehend. Sie hat das Moment

$$M = + P \cdot x.$$

Die Faserkräfte an der Einspannungsstelle wirken linksdrehend. Sie haben folgende Größe.

In einer Faserschicht vom Querschnitt  $f$  ist bei der Spannung  $\sigma'$  die Faserkraft  $f \cdot \sigma'$ . Der Abstand der Faserschicht  $f$  vom Drehpunkt  $D$  ist  $y$ , also ist das Moment der Faserkraft, da sie linksdrehend ist

$$M = - f \cdot \sigma' \cdot y,$$

nun ist

$$\sigma' = \sigma'_{\max} \cdot \frac{y}{e},$$

also wird

$$M = - f \cdot \sigma'_{\max} \cdot \frac{y^2}{e} = - \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot f \cdot y^2.$$

Diese Betrachtung für den schmalen Flächenstreifen  $f$  wird ausgedehnt auf den ganzen Balkenquerschnitt. Man muß dann die Summe aller Flächenteilchen nehmen und schreibt dafür (Zeichen  $\Sigma$  = Summe aller)

$$\Sigma f.$$

Damit heißt die Momentengleichung

$$M = - \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot \Sigma f \cdot y^2.$$

Für die Flächengröße  $\Sigma f \cdot y^2$  setzt man den Buchstaben  $J$  und nennt diesen Wert das Trägheitsmoment des Querschnitts. Damit lautet die Formel einfacher

$$M = - \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot J.$$

Dieses linksdrehende Moment der inneren Spannungenkräfte hält das Gleichgewicht dem rechtsdrehenden Moment der äußeren Kraft. Die Gleichgewichtsbedingung lautet also

$$+ P \cdot x - \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot J = 0.$$

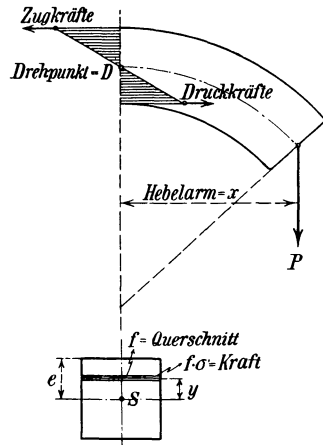


Abb. 378. Der Gleichgewichtszustand.

Für den Einspannungsquerschnitt wird  $x=l$  und für diesen Querschnitt lautet dann die Gleichgewichtsbedingung

$$+ P \cdot l - \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot J = 0 \quad \text{oder} \quad P \cdot l = \frac{\sigma'_{\max}}{e} \cdot J.$$

In dieser Gleichung ist  $e$  als Abstand der äußersten Faser von der Schwerpunktsachse ein Längenmaß des Querschnittes.  $J$  ist auch eine Querschnittszahl, d. h. eine Zahl, welche von der Größe des Querschnitts abhängig ist. Deshalb bringt man diese beiden Zahlen zusammen und setzt für den Verhältniswert

$$\frac{J}{e} \text{ den Buchstaben } W.$$

Man nennt diese Verhältniszahl das Widerstandsmoment des Querschnitts. Die Biegungsgleichung heißt dann einfacher, wenn die zulässige Biegungsspannung mit  $\sigma'_{\text{zul}}$  bezeichnet wird,

$$P \cdot l = \sigma'_{\text{zul}} \cdot W \quad \text{oder} \quad M = \sigma'_{\text{zul}} \cdot W.$$

Nach dieser Gleichung wird das Widerstandsmoment  $W$  des Balkenquerschnitts berechnet

$$W = \frac{M}{\sigma'_{\text{zul}}}.$$

Hierin bedeutet

$M$  das Biegemoment der äußeren Kraft,

$\sigma'_{\text{zul}}$  die höchste zulässige Biegungsspannung in der äußersten Faser.

Nach der letzten Formel wird demnach der Balkenquerschnitt oder das Widerstandsmoment des Querschnitts um so größer sein müssen

1. je größer das Biegemoment der äußeren Kräfte ist,
2. je kleiner die zulässige Biegebbeanspruchung ist.

Das Trägheitsmoment  $J$  ist ein Zahlenwert, welcher die  $J$ -Einheit in  $\text{cm}^4$  angibt, denn es ist

$$J = f \cdot y^2 = \text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2 = \text{cm}^4.$$

Das Widerstandsmoment  $W$  ist ein Zahlenwert, welcher die  $W$ -Einheit in  $\text{cm}^3$  angibt, denn es ist

$$W = \frac{J}{e} = \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} = \text{cm}^3.$$

#### Der Schwerpunkt von Querschnittsflächen.

Man kann sich jede Fläche als aus sehr vielen kleinen Flächenteilchen bestehend vorstellen. Jedes Flächenteilchen hat ein Gewicht, sämtliche Gewichte der Flächenteilchen bilden ein System von parallelen Kräften, das man wieder durch eine Resultierende ersetzen kann. Die Resultierende hat einen bestimmten Angriffspunkt, den man als den Punkt betrachten kann, in dem das Gewicht der Fläche angreift. Dieser Punkt heißt der Schwerpunkt der Fläche.

Für die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes gelten folgende Sätze:

1. Für parallele Kräfte ist das statische Moment der Mittelkraft in bezug auf eine beliebige Parallelachse gleich der Summe der statischen Momente der Parallelkräfte.

Nach Abb. 379 ist demnach

$$G \cdot s = G_1 \cdot s_1 + G_2 \cdot s_2 + G_3 \cdot s_3 + G_4 \cdot s_4.$$

Geht die Parallelachse durch den Schwerpunkt, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich Null, also ist auch die Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in diesem Fall gleich Null. Die Umkehrung dieser Erkenntnis liefert den zweiten Satz:

2. Ist die Summe der statischen Momente der Gewichtskräfte in bezug auf eine Parallelachse gleich Null, so geht die Parallelachse durch den Schwerpunkt.

Man wird also mit Hilfe des Momentensatzes die Schwerpunktslage einer Querschnittsfläche bestimmen können.

In Abb. 380 ist die Querschnittsfläche eines ungleichschenkligen Winkeleisens gegeben, es soll die Schwerpunktslage bestimmt werden. Die Fläche läßt sich in zwei Rechteckflächen  $F_1$  und  $F_2$  zerlegen, deren Mittelpunkte (Schwerpunkte)  $S_1$  und  $S_2$  als Schnittpunkte

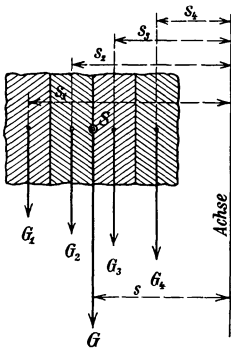


Abb. 379. Die Schwerpunktsbestimmung.

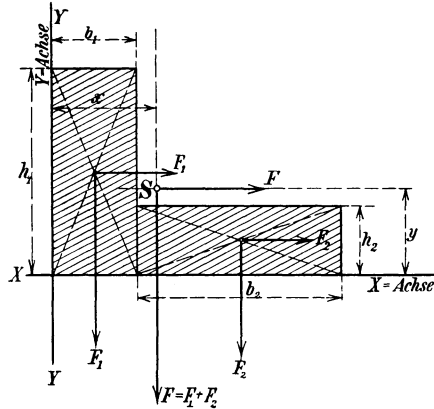


Abb. 380. Schwerpunktsbestimmung eines Winkeleisens.

der Diagonalen bekannt sind. In  $S_1$  greift an das Flächengewicht  $F_1$ , in  $S_2$  das Flächengewicht  $F_2$ .

Als Parallelachse wählt man die Achse  $Y-Y$ , dann ist mit den Bezeichnungen der Figur

$$F \cdot x = F_1 \cdot \frac{b_1}{2} + F_2 \cdot \left( b_1 + \frac{b_2}{2} \right),$$

$$x = \frac{F_1 \cdot \frac{b_1}{2} + F_2 \cdot \left( b_1 + \frac{b_2}{2} \right)}{F}.$$

Hiermit ist der Abstand  $x$  des Schwerpunktes von der  $Y-Y$ -Achse bekannt.

Dieselbe Untersuchung macht man für eine zweite Krafrichtung, indem man die Flächenkräfte horizontal ziehen läßt und als Parallelachse die Achse  $X-X$  wählt.

$$F \cdot y = F_1 \cdot \frac{h_1}{2} + F_2 \cdot \frac{h_2}{2},$$

$$y = \frac{F_1 \cdot \frac{h_1}{2} + F_2 \cdot \frac{h_2}{2}}{F}.$$

Hiermit ist der Abstand  $y$  des Schwerpunktes von der  $X-X$ -Achse bekannt. Zieht man zur  $X-X$ -Achse im Abstande  $y$  die Parallele und zur  $Y-Y$ -Achse im Abstande  $x$  die Parallele, so ist der Schnittpunkt  $S$  dieser beiden Parallelen, der gesuchte Schwerpunkt.

**Beispiel:** Es ist die Schwerpunktslage des ungleichschenkligen Winkel Eisens Nr. 10/15 (Abb. 381) zu bestimmen.

**Lösung:** Es ist  $F_1 = 10 \cdot 1,2 = 12 \text{ cm}^2$  und  $F_2 = 13,8 \cdot 1,2 = 16,6 \text{ cm}^2$

$$F = F_1 + F_2 = 12 + 16,6 = 28,6 \text{ cm}^2$$

1. senkrechte Kräfte

$$x = \frac{F_1 \cdot 0,6 + F_2 \cdot 8,1}{F} = \frac{12 \cdot 0,6 + 16,6 \cdot 8,1}{28,6} = 4,89 \text{ cm},$$

2. horizontale Kräfte

$$y = \frac{F_1 \cdot 5,0 + F_2 \cdot 0,6}{F} = \frac{12 \cdot 5,0 + 16,6 \cdot 0,6}{28,6} = 2,43 \text{ cm}.$$

Zieht man im Abstande  $x = 4,89 \text{ cm}$  eine Parallele zur  $Y$ -Achse und im Abstande  $y = 2,43 \text{ cm}$  eine Parallele zur  $X$ -Achse, so ist der Schnittpunkt  $S$  der beiden Parallelen der gesuchte Schwerpunkt.

Bildet man nach Abb. 382 einen aus zwei ungleichschenkligen Winkel Eisens dieser Größe zusammengesetz-

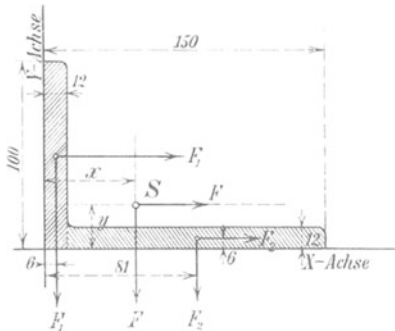


Abb. 381. Das Winkel Eisen Nr. 10/15.

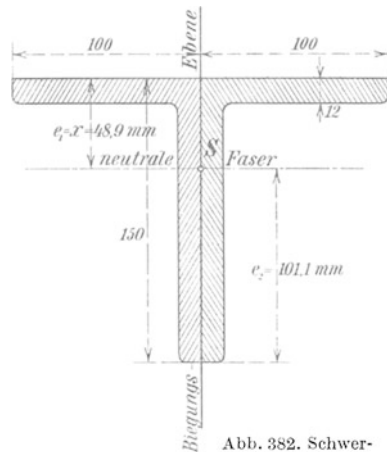


Abb. 382. Schwerpunktsbestimmung.

ten Trägerquerschnitt, so liegt der Schwerpunkt  $S$  in der senkrechten Mittellinie. Ist diese Mittellinie auch die Biegeebene, so hat die neutrale Faser die Abstände

$$e_1 = x = 48,9 \text{ mm},$$

$$e_2 = 150 - 48,9 = 101,1 \text{ mm}$$

von den äußersten Fasern.

### a) Trägheitsmomente und Widerstandsmomente von Querschnittsflächen.

Die Berechnung der Trägheitsmomente der gewöhnlichen Querschnittsformen Rechteck, Dreieck, Kreis läßt sich in einfacher Weise nur mit höherer Mathematik durchführen. Die elementare Berechnung ist umständlich, daher werde sie nicht durchgeführt, sondern es werden nur die fertigen Werte der Trägheitsmomente mitgeteilt.

Hat ein Flächenstreifen vom Querschnitt  $f$  (Abb. 383) den Abstand  $x$  von der Biegungsachse, so ist sein Trägheitsmoment bezogen auf diese Achse

$$J = f \cdot x^2.$$

Da das Trägheitsmoment auf eine bestimmte Achse bezogen und ausgerechnet wird, nennt man diese Trägheitsmomente allgemein achsiale Trägheitsmomente.

1. Rechteck-Querschnitt (Abb. 384):

$h$  = Höhe in cm,  $b$  = Breite in cm.

Das Trägheitsmoment, bezogen auf die horizontale Schwerpunktsachse, ist

$$J = \frac{1}{12} b \cdot h^3.$$

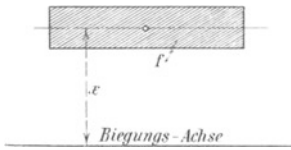


Abb. 383. Das Trägheitsmoment eines Flächenstreifens.

Der Abstand der äußersten Faser von der Biegungsachse ist

$$e = \frac{h}{2},$$

also ist das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{e} = \frac{1 \cdot b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{1}{6} b \cdot h^2.$$

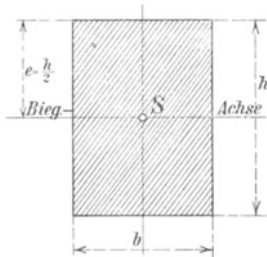


Abb. 384. Hochstehendes Rechteck.

Liegt das Rechteck mit seiner kleinen Seite  $b$  rechtwinkelig zur Biegungsachse (Abb. 385), so wird

$$J = \frac{1}{12} h \cdot b^3 \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{6} h \cdot b^2.$$

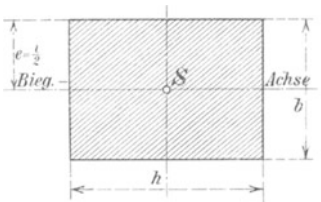


Abb. 385. Liegendes Rechteck.

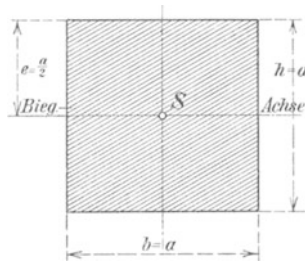


Abb. 386. Quadrat.

Werden die Rechteckseiten gleich (Abb. 386), so entsteht ein Quadrat und es wird

$$h = b = a,$$

$$J = \frac{1}{12} \cdot a \cdot a^3 = \frac{1}{12} a^4, \quad W = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a^2 = \frac{1}{6} a^3.$$

2. Dreieck-Querschnitt (Abb. 387):

Die horizontale Schwerpunktsachse sei die Biegungsachse, dann ist das Trägheitsmoment, bezogen auf diese Achse,

$$J = \frac{1}{36} b \cdot h^3.$$

Die obere, äußerste Faser hat den Abstand  $e_1 = \frac{2}{3}h$ , die untere äußerste Faser den Abstand  $e_2 = \frac{1}{3}h$  von der Biegungsachse, mithin hat der Dreieckquerschnitt zwei Widerstandsmomente

$$W_1 = \frac{J}{e_1} = \frac{1 \cdot b \cdot h^3 \cdot 3}{36 \cdot 2 \cdot h} = \frac{1}{24} b \cdot h^2,$$

$$W_2 = \frac{J}{e_2} = \frac{1 \cdot b \cdot h^3 \cdot 3}{36 \cdot 1 \cdot h} = \frac{1}{12} b \cdot h^2.$$

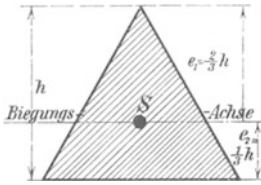


Abb. 387. Dreieckquerschnitt.

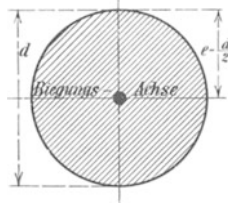


Abb. 388. Kreisquerschnitt.

Bei Festigkeitsrechnungen ist immer mit dem kleinsten Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{24} b \cdot h^2$$

zu rechnen.

### 3. Kreis-Querschnitt (Abb. 388):

Für die horizontale Schwerpunktsachse als Biegungsachse ist

$$J = \frac{\pi}{64} d^4, \quad e = \frac{d}{2},$$

$$W = \frac{J}{e} = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi}{32} d^3 = \sim \frac{1}{10} d^3.$$

### 4. Zusammengesetzte Querschnitte:

a) **Kasten-Querschnitt** (Abb. 389). Der Kastenquerschnitt läßt sich auffassen als entstanden aus der Differenz zweier Rechteckquerschnitte:

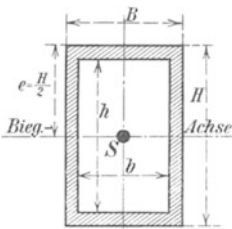


Abb. 389. Der Kastenquerschnitt.

großes Rechteck  $J = \frac{1}{12} B \cdot H^3,$

kleines Rechteck  $J = \frac{1}{12} b \cdot h^3,$

---

Kastenquerschnitt  $J = \frac{1}{12} B \cdot H^3 - \frac{1}{12} b \cdot h^3,$

$$e = \frac{H}{2},$$

Widerstandsmoment  $W = \frac{1 \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3) \cdot 2}{12 \cdot H},$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{H}.$$

b) **Kreuzquerschnitt** (Abb. 390). Beim Kreuzquerschnitt ist das Trägheitsmoment aus der Summe der Trägheitsmomente der beiden

Rechtecke zu errechnen:

1. Rechteck  $J = \frac{1}{12} b_1 \cdot h_1^3,$

2. Rechteck  $J = \frac{1}{12} b_2 \cdot h_2^3,$

---

Kreuzquerschnitt  $J = \frac{1}{12} \cdot (b_1 \cdot h_1^3 + b_2 \cdot h_2^3).$

$$e = \frac{h_1}{2},$$

Widerstandsmoment  $W = \frac{J}{e} = \frac{1 \cdot (b_1 \cdot h_1^3 + b_2 \cdot h_2^3) \cdot 2}{12 \cdot h_1},$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{b_1 \cdot h_1^3 + b_2 \cdot h_2^3}{h_1}.$$

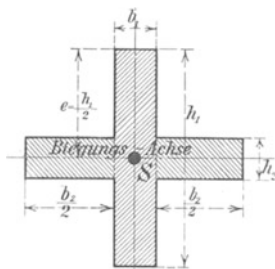


Abb. 390. Der Kreuzquerschnitt.

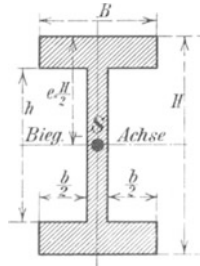


Abb. 391. Der I-Träger.

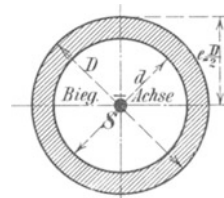


Abb. 392. Der Kreisringquerschnitt.

c) Profileisen (Abb. 391): Für das I-Eisenprofil läßt sich dieselbe Berechnung wie beim Kastenquerschnitt durchführen:

$$J = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3),$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{H}.$$

**Beispiel:** Es soll das Trägheits- und Widerstandsmoment für das Profil Nr. 30, bezogen auf die horizontale Schwerpunktsachse, errechnet werden, wenn für die Rechtecke folgende Breiten- und Höhenmaße vorliegen:

großes Rechteck  $B = 12,5 \text{ cm}$  und  $H = 30,0 \text{ cm},$

kleines Rechteck  $b = 11,42 \text{ cm}$  und  $h = 26,76 \text{ cm}.$

$$J = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3) = \frac{1}{12} \cdot (12,5 \cdot 30^3 - 11,42 \cdot 26,76^3),$$

$$J = 9940 \text{ cm}^3,$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{H} = \frac{J}{e} = \frac{9940}{15} = 662 \text{ cm}^3.$$

d) Kreisring-Querschnitt (Abb. 392). Der Kreisring entsteht aus der Differenz zweier Kreisflächen, also ist das Trägheitsmoment gleich der Differenz der Trägheitsmomente der beiden Kreisflächen

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4),$$

$$e = \frac{D}{2}, \quad W = \frac{J}{e} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

### b) Die einfachen Biegungsfälle.

1. Der an einem Ende eingespannte Balken (Abb. 393).

Der Balken sei am freien Ende durch die Einzellast  $P$  belastet. Für einen Querschnitt im Abstände  $x$  vom freien Ende findet man das Biegemoment, indem man sich den Balken an dieser Stelle eingespannt denkt und diesen Einspannungspunkt  $D$  als Drehpunkt wählt. In bezug auf  $D$  als Drehpunkt ist das Biegemoment

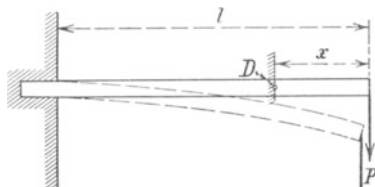


Abb. 393. Der eingespannte Balken mit Einzellast.

$$M_x = P \cdot x.$$

Das Biegemoment erhält seinen größten Wert, wenn  $x$  seinen größten Wert erreicht. Der größte Wert

$$x = l$$

wird an der Einspannungsstelle erreicht, so daß an der Einspannungsstelle das größte Biegemoment

$$M = P \cdot l$$

herrscht. Nach der allgemeinen Biegungsgleichung

$$M = \sigma' \cdot W$$

wird das Widerstandsmoment des Balkens die Größe haben müssen

$$W = \frac{M}{\sigma'} = \frac{P \cdot l}{\sigma'}.$$

2. Derselbe Balken sei durch Streckenlast belastet (Abb. 394).

Unter Streckenlast versteht man eine gleichmäßig über die ganze Länge des Balkens verteilte Belastung. Man könnte sich diese Belastung durch eine Sandschüttung von konstanter Höhe erzeugen denken. Die Belastung sei  $p$  kg/cm, dann ist bei  $l$  cm Länge die Belastung

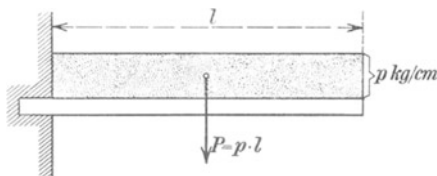


Abb. 394. Der eingespannte Balken mit Streckenlast.

$$P = p \cdot l.$$

Man stellt sich nun vor, die gleichmäßig verteilte Streckenlast wirke als Einzellast im

Schwerpunkt der Belastungsfläche, dann ist das größte Biegemoment an der Einspannungsstelle

$$M = P \cdot \frac{l}{2} = p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = p \cdot \frac{l^2}{2},$$

Vergleicht man die Größe des Biegemoments mit dem 1. Fall der Einzellast, so erkennt man, da in jenem Fall  $M = P \cdot l$  war, daß nun das Biegemoment nur halb so groß ist. Also könnte derselbe Balken bei Streckenbelastung die doppelte Belastung tragen.

**Resultat:** Der einseitig eingespannte Balken trägt als Streckenlast doppelt so viel als am freien Ende.



Für die Streckenlast ist folgendes Widerstandsmoment erforderlich

$$W = \frac{M}{\sigma'} = \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot \sigma'}$$

$$p \cdot l = P,$$

$$W = \frac{P \cdot l}{2 \cdot \sigma'}$$

Das Widerstandsmoment wird also nur halb so groß wie bei der Belastung am freien Ende.

3. Derselbe Balken trage beide Belastungen gleichzeitig (Abb. 395).

Für den Querschnitt  $N$  im Abstände  $x$  vom freien Ende ist

$$M_x = P \cdot x + \frac{1}{2} p \cdot x^2,$$

für den Einspannungsquerschnitt ( $x = l$ ) wird das Biegemoment am größten

$$M = P \cdot l + \frac{1}{2} p \cdot l^2,$$

$$W = \frac{M}{\sigma'}$$

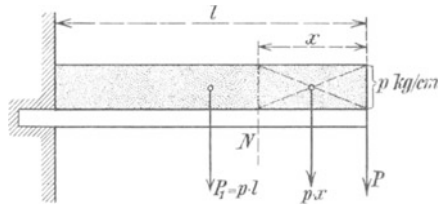


Abb. 395. Der eingespannte Balken mit Strecken- und Endlast.

4. Die Form vom gleichen Widerstand.

Der eingespannte Stab hat an der Einspannungsstelle seinen gefährlichen Querschnitt, d. h. an dieser Stelle ist infolge höchster Beanspruchung der Bruch zu erwarten. Soll der Stab die Last mit Sicherheit tragen, so muß sein Querschnitt für diese gefährliche Stelle berechnet und dimensioniert werden. Die Beanspruchung der einzelnen Querschnitte nimmt nach dem freien Ende hin aber ab, so daß wir hier einen Überschuß an Material haben.

Man könnte nun den Überschuß an Material wegnehmen und den Stab nach dem freien Ende hin derart verjüngen, daß jeder Querschnitt die gleiche Beanspruchung erfährt. Der Stab erhält dann eine Begrenzungsform, die man die Form vom gleichen Widerstand nennt.

Die Gleichung der Form vom gleichen Widerstand muß lauten

$$\text{Spannung } \sigma' = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{M}{W} = \frac{M_x}{W_x} = \text{konst.},$$

wenn  $M$  und  $W$  Biege- und Widerstandsmoment für die Einspannungsstelle und  $M_x$  und  $W_x$  dasselbe für einen Querschnitt im Abstand  $x$  vom freien Ende bedeuten. Der Stab habe an der Einspannungsstelle einen Rechteckquerschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$ , an einer beliebigen Schnittstelle im Abstände  $x$  vom freien Ende die Breite  $z$  und die Höhe  $y$ , dann sind

die Biegemomente

$$M = P \cdot l \quad \text{und} \quad M_x = P \cdot x,$$

die Widerstandsmomente

$$W = \frac{1}{6} b \cdot h^2 \quad \text{und} \quad W_x = \frac{1}{6} z \cdot y^2.$$

Hiermit wird

$$\sigma' = \frac{M}{W} = \frac{M_x}{W_x} = \text{konst.},$$

$$\frac{P \cdot l}{\frac{1}{6} b \cdot h^2} = \frac{P \cdot x}{\frac{1}{6} z \cdot y^2},$$

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{b \cdot x}{z \cdot l}.$$

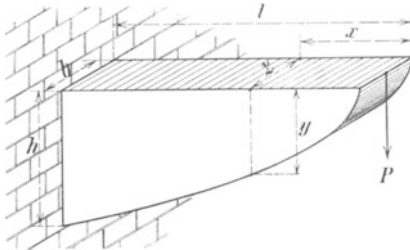


Abb. 396. Die Form vom gleichen Widerstand bei konstanter Balkenbreite.

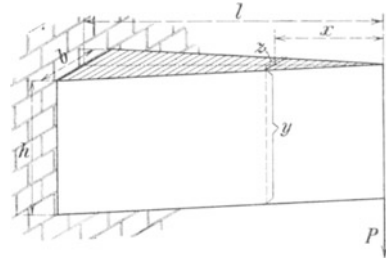


Abb. 397. Die Form vom gleichen Widerstand bei konstanter Balkenhöhe.

Soll der Balken konstante Breite und nur eine veränderliche Höhe erhalten, so ist

$$b = z \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{h^2}{l} \cdot x.$$

Die Form der Begrenzungslinie ist demnach eine Parabel, die nach Abb. 396 als Halbparabel ausgebildet werden kann.

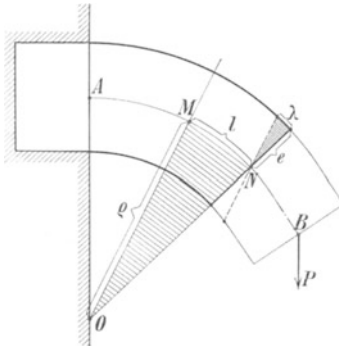


Abb. 398. Der durchgebogene Balken.

Man kann dem Balken auch eine konstante Höhe und veränderliche Breite geben, dann wird

$$y = h \quad \text{und} \quad b \cdot x = z \cdot l \quad \text{oder} \quad z = \frac{b}{l} \cdot x.$$

Die Form der Begrenzungslinie für die veränderliche Breite wird dann eine Gerade (Abb. 397).

### 5. Die elastische Linie.

Der Balken Abb. 398 hat durch die Belastung eine durchgebogene Form angenommen. Die gekrümmte Linie  $AB$ , die die Biegung der neutralen Faser darstellt, nennt man die „elastische Linie“ des Balkens.

Das unendlich kleine Bogenstück  $MN = l$  dieser Linie kann als Kreisbogenlinie angesehen werden. Der Kreis hat den Mittelpunkt  $O$  und den Radius  $\rho = OM$ . Aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke folgt

$$\rho : l = e : \Delta l, \quad (\text{in der Abbildung setze } \lambda = \Delta l)$$

$$\rho = e \cdot \frac{l}{\Delta l} = \frac{e}{\varepsilon} \quad \text{oder, da } \varepsilon = \frac{\sigma'}{E},$$

$$\rho = \frac{e}{\sigma'} \cdot E.$$

Die Gleichung kann benutzt werden, um die größte Spannung in einem Stabe zu berechnen, der durch Anwendung von Gewalt über eine Kreisform (Abb. 399) von bestimmtem Radius  $\varrho$  gekrümmt wird. In der Umstellung lautet die Gleichung

$$\sigma' = \frac{e}{\varrho} \cdot E,$$

d. h. die Biegungsspannung  $\sigma'$  wird um so größer

1. je dicker der Draht ist, denn  $e =$  halbe Drahtstärke,
2. je höher die Elastizitätszahl  $E$ , also je härter der Draht ist,
3. je kleiner der Krümmungsradius  $\varrho$  wird.

Aus diesem Grunde werden die Trommeldurchmesser und Seilscheibendurchmesser für Drahtseile möglichst groß gewählt, damit die Biegungsspannungen klein bleiben.

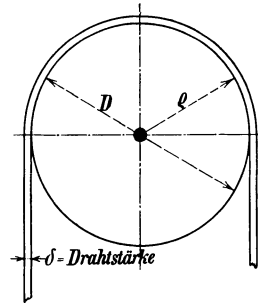


Abb. 399. Die zusätzliche Biegebeanspruchung.

**Beispiel:** Ein Förderseil von 56 mm Durchmesser besteht aus Einzeldrähten von  $\delta = 2,8$  mm Durchmesser. Wie groß wird die Biegebeanspruchung, wenn Trommel und Seilscheiben 6 m Durchmesser haben?  $E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup>.

**Lösung:** Die Biegungsspannung wird, da  $e = \frac{0,28}{2}$  ist,

$$\sigma' = \frac{e}{\varrho} \cdot E = \frac{0,28}{2 \cdot 300} \cdot 2150000 = 1000 \text{ kg/cm}^2 = 10 \text{ kg/mm}^2.$$

Wenn das Drahtmaterial eine Festigkeit von  $\sigma_B = 180$  kg/mm<sup>2</sup> hat, bleiben also  $180 - 10 = 170$  kg/mm<sup>2</sup> für die Belastung übrig, so daß bei 9facher Sicherheit eine Spannung von

$$\frac{170}{9} = 19 \text{ kg/mm}^2$$

für die Belastung frei bleiben.

Das Seil hat einen Querschnitt von  $f = 1108$  mm<sup>2</sup>, es kann also an Eigen-  
gewicht und Belastung tragen

$$19 \cdot 1108 = 21000 \text{ kg.}$$

Bei großen Scheibendurchmessern wird also die Biegungsspannung durch die gewaltsame Krümmung auf den Seilscheiben nicht besonders groß. Daher sollte man nicht so ängstlich sein, dickere Einzeldrähte zu verwenden. Bei dünnen Drähten ist erfahrungsgemäß die Schwächung durch Anrosten viel größer als bei dicken Drähten, denn bei demselben Seilquerschnitt ist die Drahtoberfläche bei dünnen Drähten viel größer als bei dicken. Die Seilprüfungsstelle der Bergschule Bochum empfiehlt daher die Verwendung dicker Drähte.

Bei Kranseilen und Haspelseilen kann man natürlich nicht so große Scheibendurchmesser verwenden. Erfahrungsgemäß macht man für diese Seile den Scheibendurchmesser

$$D \geq 500 \cdot \delta$$

und erhält kleine Scheibendurchmesser, wenn man die Drahtdicke  $\delta$  klein nimmt.

**Beispiel:** Welche Belastung kann ein Haspelseil tragen, wenn das 20 mm starke Seil aus 144 Einzeldrähten von  $\delta = 1,1$  mm Stärke besteht, der Trommeldurchmesser 550 mm ist und mit 6facher Sicherheit gerechnet wird?

$$\text{Festigkeit } \sigma_B = 180 \text{ kg/mm}^2, \quad E = 2150000 \text{ kg/cm}^2.$$

**Lösung:** Durch die gewaltsame Krümmung über die Trommel entsteht die Biegungsspannung

$$\sigma' = \frac{e}{\varrho} \cdot E = \frac{0,11 \cdot 2150000}{2 \cdot 27,5} = 4300 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma' = 43 \text{ kg/mm}^2.$$

Für die Belastung verbleibt daher der Betrag

$$180 - 43 = 137 \text{ kg/mm}^2$$

oder bei 6facher Sicherheit

$$\frac{137}{6} = 23 \text{ kg/mm}^2.$$

Gesamtquerschnitt der Drähte =  $144 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1,1^2 = 136 \text{ mm}^2$ . Das Seil kann daher an Belastung tragen  $P = 136 \cdot 23 = 3100 \text{ kg}$ .

Die Form der elastischen Linie. Es war abgeleitet worden

$$\varrho = \frac{e}{\sigma'} \cdot E,$$

nun ist nach der allgemeinen Biegungsgleichung

$$M = \sigma' \cdot \frac{J}{e} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{\sigma'} = \frac{J}{M},$$

also wird der Krümmungsradius der elastischen Linie

$$\varrho = \frac{J}{M} \cdot E.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der elastischen Linie. Sie sagt aus, daß der Krümmungsradius um so kleiner, d. h. die Krümmung des Balkens um so größer wird,

1. je kleiner das Trägheitsmoment des Querschnitts ist,
2. je kleiner die Elastizitätszahl des Materials ist,
3. je größer das biegende Moment der äußeren Kräfte ist.

Bei Balken mit konstantem Querschnitt ist auch der Wert  $J$  konstant, dagegen nimmt  $M$  nach der Einspannungsstelle zu. Mit zunehmendem  $M$  wird in der Gleichung

$$\varrho = \frac{J}{M} \cdot E$$

der Wert  $\varrho$  immer kleiner, d. h. die Krümmung wird nach der Einspannungsstelle hin immer stärker, die elastische Linie ist eine Kurve, deren Krümmungsradius nach der Einspannungsstelle hin ständig kleiner wird.

Bei Balken, welche nach der Form vom gleichen Widerstand begrenzt werden, ist der Querschnitt nicht konstant, folglich auch das Trägheitsmoment  $J$  nicht konstant. In demselben Maße wie  $M$  abnimmt, nimmt auch  $J$  nach dem freien Ende hin ab, d. h. nunmehr bleibt das Verhältnis

$$\frac{J}{M} = \text{konst.}$$

Da auch der Wert  $E = \text{konst.}$  ist, so ist auch

$$\varrho = \frac{J}{M} \cdot E = \text{konst.},$$

d. h. bei der Form vom gleichen Widerstand ist der Krümmungsradius  $\rho$  der elastischen Linie an allen Stellen gleich groß, so daß die elastische Linie ein durchgehender Kreisbogen wird.

6. Der Balken auf zwei Stützen.

Die Balkenbelastung in Abb. 400 werde durch eine Einzellast  $P$  erzeugt. Diese erzeugt die Stützendrücke  $A$  und  $B$ , und zwar ist, wenn der Auflagerpunkt  $B$  als Drehpunkt genommen wird, die Summe der statischen Momente

$$+ A \cdot l - P \cdot l_2 = 0 \quad \text{oder} \quad A = \frac{P \cdot l_2}{l}.$$

Für den Balkenquerschnitt  $N$  im Abstände  $x$  vom Auflager  $A$  ist das Biegemoment

$$M_x = A \cdot x.$$

Das Moment erreicht seinen größten Wert an der Angriffsstelle der Kraft  $P$ , für welche  $x = l_1$  ist:

$$M = A \cdot l_1 = \frac{P \cdot l_2 \cdot l_1}{l}.$$

Für Querschnitte, welche darüber hinaus liegen, ist nach Abb. 400

$$M_y = A \cdot (l_1 + y) - P \cdot y.$$

Das negative Glied bewirkt, da  $P$  größer ist als  $A$ , eine Abnahme des Momentenwertes, so daß

$$M_y < M_x$$

wird und der Querschnitt im Angriffspunkt der Last  $P$  tatsächlich der gefährliche Querschnitt bleibt.

Liegt der Angriffspunkt der Last  $P$  genau in der Mitte des Balkens, ist also

$$l_1 = \frac{l}{2} = l_2,$$

so wird das Maximalmoment

$$\begin{aligned} M &= A \cdot l_1 = \frac{P \cdot l_2 \cdot l_1}{l} = \frac{P \cdot l \cdot l}{l \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{P \cdot l}{4}. \end{aligned}$$

Das Widerstandsmoment des Balkenquerschnitts wird

$$W = \frac{M}{\sigma'_{zul}},$$

wenn  $\sigma'_{zul}$  = höchste zulässige Biegungsspannung ist.

In Abb. 401 ist derselbe Balken mit Streckenlast dargestellt, der Balken trage die Belastung  $p$  kg/cm.

Die Belastung erzeugt in  $A$  und  $B$  gleiche Stützendrücke von der Größe der halben Gesamtbelastung

$$A = B = \frac{p \cdot l}{2}.$$

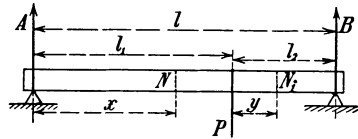


Abb. 400. Der Balken auf zwei Stützen mit Einzellast.



Abb. 401. Der Balken auf zwei Stützen mit Streckenlast.

Für den Balkenquerschnitt  $N$  im Abstände  $x$  von Auflagerpunkt  $A$  ist

$$M_x = A \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}.$$

Für den Querschnitt in der Mitte wird mit  $x = \frac{l}{2}$

$$M = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8} p \cdot l^2.$$

Für die Streckenlast kann man setzen

$$p \cdot l = P,$$

hiermit wird

$$M = \frac{P \cdot l}{8}.$$

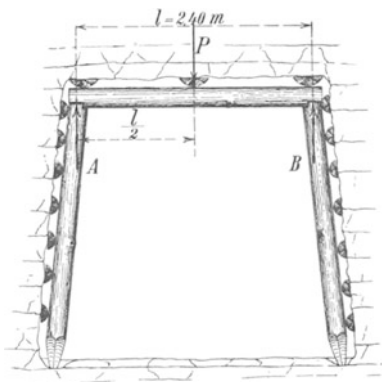


Abb. 402. Einzellast drückt auf die Kappe.

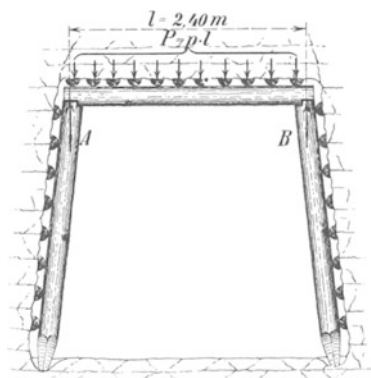


Abb. 403. Streckenlast drückt auf die Kappe.

Wir fanden vorher  $M = \frac{P \cdot l}{4}$ , wenn die Einzellast  $P$  in der Mitte angreift, demnach ist bei Streckenlast die Biegungsbeanspruchung nur halb so groß, d. h. der Balken kann doppelt soviel Streckenlast tragen wie Einzellast.

**Beispiel:** Bei welcher Mittellast  $P$  bricht das Kappenh Holz des in Abb. 402 dargestellten Türstocks, wenn die Biegezugfestigkeit des Holzes  $\sigma'_B = 420 \text{ kg/cm}^2$  ist?

**Lösung:** Das Kappenh Holz sei ein Rundholz von  $d = 18 \text{ cm}$  Durchmesser, dessen Widerstandsmoment ist

$$W = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{10} \cdot 18^3 = 583 \text{ cm}^3.$$

Das größte Biegemoment darf sein

$$M = \sigma'_B \cdot W = 420 \cdot 583 = 245000 \text{ cmkg}.$$

Das Biegemoment für den Querschnitt in der Balkenmitte ist

$$M = \frac{P \cdot l}{4},$$

also

$$P = \frac{4 \cdot M}{l} = \frac{4 \cdot 245000}{240} = \sim 4000 \text{ kg}.$$

**Beispiel:** Welche Streckenlast kann der in Abb. 403 dargestellte Türstock tragen?

**Lösung:** Mit  $\sigma'_B = 420 \text{ kg/cm}^2$  und  $d = 18 \text{ cm}$  Kappenh Holzdurchmesser finden wir

$$M = \sigma'_B \cdot \frac{\pi}{32} d^3 = 245000 \text{ cmkg}.$$

Setzt man die Streckenlast  $p \cdot l = P$ , so wird das größte Biegemoment in der Mitte des Balkens

$$M = \frac{P \cdot l}{8} \quad \text{oder} \quad P = \frac{8 \cdot M}{l} = \frac{8 \cdot 245000}{240},$$

$$P = \sim 8000 \text{ kg}.$$

Als Streckenlast trägt die Kappe also die doppelte Last. Bei 0,80 m Türstockabstand und 2,40 m Spannweite trägt jede Kappe eine Deckenfläche von

$$F = 0,8 \cdot 2,40 = 1,92 \text{ m}^2.$$

Das Hangende bestehe aus Tonschiefer ( $\gamma = 2000 \text{ kg/m}^3$ ), welche Gebirgshöhe kann der Türstock tragen?

$$F \cdot h \cdot \gamma = P,$$

$$h = \frac{P}{F \cdot \gamma} = \frac{8000}{1,92 \cdot 2000} = 2,10 \text{ m}.$$

Wenn also das gebrochene Hangende in einer Stärke von 2,10 m auf die Kappe drückt, ist die Bruchgefahr bereits eingeleitet.

**Beispiel:** Es soll das Kappenh Holz durch ein Schienenprofil, alte preußische Schiene Nr. 8, Schienenhöhe 138 mm, ersetzt werden. Welche Streckenlast kann nun die Kappe bis zum Bruch bei 2,40 m Spannweite tragen?

**Lösung:**

1. Die Schiene liegt hochkantig (Abb. 404).

Für die wagerechte Schwerpunktsachse ist nach den Schientabellen das Widerstandsmoment

$$W = 193 \text{ cm}^3.$$

Die Biegefestigkeit des Schienenmaterials (Stahl) ist

$$\sigma'_B = 5500 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Schienenprofil geht also bei folgendem Biegemoment zu Bruch

$$M = \sigma'_B \cdot W = 5500 \cdot 193 = 1062000 \text{ cmkg}.$$

Setzt man die Streckenlast  $p \cdot l = P$ , so wird das größte Biegemoment

$$M = \frac{P \cdot l}{8} \quad \text{oder} \quad P = \frac{8 \cdot M}{l},$$

$$P = \frac{8 \cdot 1062000}{240} = 35400 \text{ kg}.$$

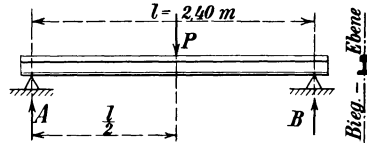


Abb. 404. Die Schiene liegt hochkantig.

Diese Streckenlast würde den Bruch herbeiführen, der bei dem 18-cm-Rundholz schon bei 8000 kg eintrat.

Die Gebirgshöhe, welche bei 0,80 m Türstockabstand den Bruch verursacht, würde sein

$$h = \frac{P}{F \cdot \gamma} = \frac{35400}{1,92 \cdot 2000} = 9,20 \text{ m}.$$

2. Die Schiene liegt mit der Breitseite auf (Abb. 405).

Nach den Schientabellen ist für die wagerechte Biegeachse das Widerstandsmoment jetzt nur noch

$$W = 41,5 \text{ cm}^3,$$

$$M = \sigma'_B \cdot W = 5500 \cdot 41,5 = 228000 \text{ cmkg},$$

$$P = \frac{8 \cdot M}{l} = \frac{8 \cdot 228000}{240} = 7600 \text{ kg}.$$

Diese Streckenlast würde schon den Bruch herbeiführen, der bei 18-cm-Rundholz erst bei 8000 kg eintrat. Es würde also die breitgelegte Schiene noch unsicherer sein als das Rundholz.

Ein auf Biegung beanspruchter Querschnitt ist also immer so zu legen, daß die größte Höhe des Querschnitts in der Biegungsebene liegt.

Welche Belastungsunterschiede sich dadurch ergeben, soll folgendes Beispiel zeigen.

In Abb. 406 ist ein Holzbalken mit dem Seitenverhältnis  $\frac{h}{b} = \frac{4}{1}$  in der Mitte durch die Einzellast  $P$  belastet.

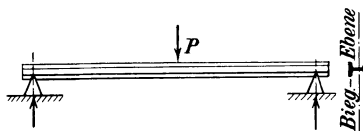


Abb. 405. Die Schiene liegt breit auf.

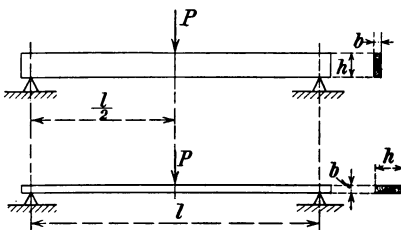


Abb. 406. Der hochkantig und der breit gelegte Balken.

1. Der Balken werde hochkantig gestellt.

$$\text{Widerstandsmoment } W = \frac{1}{6} b \cdot h^2,$$

$$b = \frac{h}{4},$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{h}{4} \cdot h^2 = \frac{1}{24} \cdot h^3,$$

$$M_1 = \sigma'_B \cdot W = \sigma'_B \cdot \frac{1}{24} \cdot h^3.$$

2. Der Balken werde mit der Breitseite aufgelegt.

$$\text{Widerstandsmoment } W = \frac{1}{6} h \cdot b^2,$$

$$b = \frac{h}{4},$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot h \cdot \frac{h^2}{16} = \frac{1}{96} \cdot h^3,$$

$$M_2 = \sigma'_B \cdot W = \sigma'_B \cdot \frac{1}{96} \cdot h^3,$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\frac{1}{24} \cdot \sigma'_B \cdot h^3}{\frac{1}{96} \cdot \sigma'_B \cdot h^3} = \frac{96}{24} = 4,$$

$$M_1 = 4 \cdot M_2,$$

d. h. der hochkantig gestellte Balken hält viermal so viel aus wie der breitkantig gestellte, wenn das Seitenverhältnis  $\frac{h}{b} = 4$  ist.

### 7. Das Pfänden.

Beim Vorfänden wird ein Holz (Abb. 407) in den Punkten  $A$  und  $B$  gegen feste Wände gestützt und am freien Ende durch die Last  $P$  nach unten gedrückt. Man erkennt sofort, daß der Balken ein zweiarmiger



Hebel ist, der in  $A$  seinen Drehpunkt hat. Auf der rechten Hebelseite drückt der Stützendruck  $B$  nach unten.

Der gefährliche Querschnitt liegt über dem Drehpunkt  $A$ . Das größte Biegemoment ist

$$M = P \cdot a.$$

Für ein bestimmtes Holz ist das Widerstandsmoment  $W$  bekannt, und es ist

$$M = \sigma'_B \cdot W \quad \text{oder} \quad P \cdot a = \sigma'_B \cdot W,$$

$$P = \frac{\sigma'_B \cdot W}{a}.$$

Diese Last  $P$  würde das Holz brechen, wenn  $\sigma'_B =$  Bruchfestigkeit des Holzes ist.

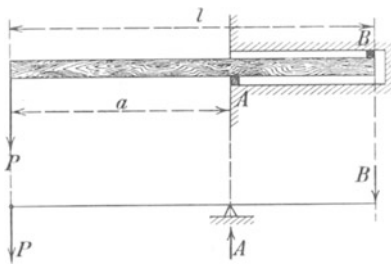


Abb. 407. Der Vorpfändebalken.

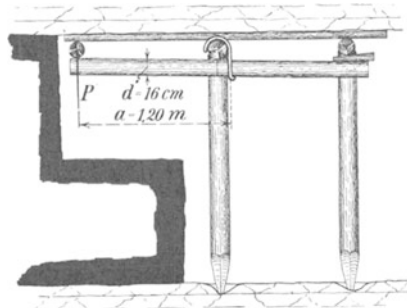


Abb. 408. Das Vorpfänden.

**Beispiel:** Bei welcher Last bricht der in Abb. 408 dargestellte Vorpfändungsbalken ( $d = 16$  cm), wenn  $\sigma'_B = 420$  kg/cm<sup>2</sup> ist?

**Lösung:** Das Widerstandsmoment des Holzes ist

$$W = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{10} d^3 = \frac{1}{10} \cdot 16^3 = 402 \text{ cm}^3,$$

$$P = \frac{\sigma'_B \cdot W}{a} = \frac{420 \cdot 402}{120} = 1410 \text{ kg}.$$

Bei dieser Last wird das Holz brechen.

## 6. Nachweis der statischen Sicherheiten für eine Blindschacht-Förderung.

Eine Stapelförderung (Abb. 409) für einen Teufenweg von 145 m arbeitet mit einem zweibühnigen Förderkorb, Gegengewicht und Unterseil. Die Lastenverteilung ist folgende:

Massenfahrt.

1. Korbseite:		2. Gegengewichtsseite:	
1 Förderkorb . . . . .	1300 kg	1 Gegengewicht . . . . .	2630 kg
2 leere Wagen . . . . .	1060 „	1 Zwischengeschirr . . . . .	40 „
2 Wageninhalte . . . . .	1500 „	1 Unterseilaufh. . . . .	30 „
1 Zwischengeschirr . . . . .	70 „	145 m Seil 2,7 kg/m . . . . .	400 „
1 Unterseilaufh. . . . .	30 „		<u><math>S_2 = 3100</math> kg</u>
145 m Seil von 2,7 kg/m . . . . .	400 „		
	<u><math>S_1 = 4360</math> kg</u>		

## Seilfahrt.

1 Förderkorb . . . . .	1300 kg
1 Zwischengeschirr . . . . .	70 „
1 Unterseilafh. . . . .	30 „
145 m Seil von 2,7 kg/m . . . . .	400 „
Leergewicht . . . . .	1800 kg
10 Personen je 75 kg . . . . .	750 „
	<u><math>S_1 = 2550 \text{ kg}</math></u>

Da eine Abbau-Lokomotive mit Führer auch zu fördern ist:	
Leergewicht . . . . .	1800 kg
1 Akku-Lok mit Führer . . . . .	2000 „
	<u><math>S_1 = 3800 \text{ kg}</math></u>

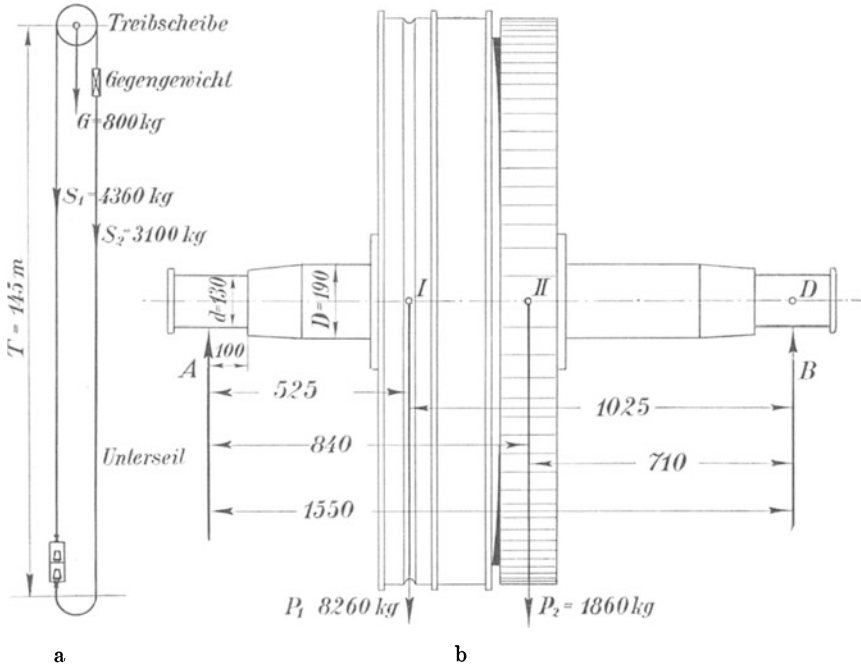
**Blindschacht-Förderung**

Abb. 409. a) Blindschacht-Förderung; b) Treibscheiben-Welle.

Für die Seilfahrt ist die Seilfahrt mit Lok-Förderung die gefährlichste, daher ist diese Belastung in Rechnung zu stellen.

a) Sicherheit der Hauptwelle des Haspels 300 mm Zylinderdurchmesser und 400 mm Hub.

Die Welle ist in Abb. 409 dargestellt. Treibscheibe, Bremsscheibe und Zahnrad bilden einen in sich verbundenen Körper, so daß die Welle nicht auf Verdrehen, sondern nur auf Biegung beansprucht wird. Im Querschnitt I (Treibscheibenmitte) ist die Achsenbelastung  $P_1$  gleich der Summe der Seillasten und des Scheibengewichts  $G$ .

$$P_1 = S_1 + S_2 + G = 4360 + 3100 + 800 = 8260 \text{ kg}.$$

Im Querschnitt II (Zahnradmittellinie) ist die Achsenbelastung  $P_2$  gleich dem Zahndruck  $Z$  und dem Zahnradgewicht  $G_1$ . Der Zahndruck

muß die Differenz der Seillasten überwinden, also ist

$$Z = S_1 - S_2 = 4360 - 3100 = 1260 \text{ kg.}$$

Mit  $G_1 = 600 \text{ kg}$  wird dann

$$P_2 = Z + G_1 = 1260 + 600 = 1860 \text{ kg.}$$

Es werden die Lagerdrücke  $A$  und  $B$  ermittelt, indem man die Momentengleichung  $\Sigma(M) = 0$  in bezug auf Drehpunkt  $D$  im Lager  $B$  aufstellt. Sie lautet

$$A \cdot 155 - P_1 \cdot 102,5 - P_2 \cdot 71 = 0,$$

$$A \cdot 155 - 8260 \cdot 102,5 - 1860 \cdot 71 = 0,$$

$$A = \frac{8260 \cdot 102,5 + 1860 \cdot 71}{155} = 6314 \text{ kg.}$$

Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung ist

$$A + B = P_1 + P_2$$

oder  $B = P_1 + P_2 - A = 8260 + 1860 - 6314 = 3806 \text{ kg.}$

Für den Querschnitt I ist das Biegemoment

$$M_I = A \cdot 52,5 = 6314 \cdot 52,5 = 331485 \text{ cmkg}$$

Die Welle ist ausgeführt mit dem Durchmesser  $D = 190 \text{ mm}$ , also ist das Widerstandsmoment des Wellenquerschnitts

$$W = \frac{1}{10} D^3 = \frac{1}{10} \cdot 19^3 = 686 \text{ cm}^3$$

und damit ist die Biegebeanspruchung

$$\sigma'_B = \frac{M_I}{W} = \frac{331485}{686} = 482 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Wellenmaterial hat die Bruchfestigkeit  $\sigma_B = 5000$  bis  $6000 \text{ kg/cm}^2$ , damit ist die Sicherheit

$$\zeta = \frac{\sigma_B}{\sigma'_B} = \frac{5500}{482} = 11,4 \text{ fach.}$$

Für den Querschnitt II ist das Biegemoment

$$M_{II} = -B \cdot 71 = -3806 \cdot 71 = -270226 \text{ cmkg},$$

$$\sigma'_B = \frac{M_{II}}{W} = \frac{270226}{686} = 395 \text{ kg/cm}^2,$$

Sicherheit  $\zeta = \frac{\sigma_B}{\sigma'_B} = \frac{5500}{395} = 13,9 \text{ fach.}$

Biegebeanspruchung im Lagerzapfen  $A$ :

$$M = A \cdot 10 = 6314 \cdot 10 = 63140 \text{ cmkg.}$$

Der Lagerzapfen hat den Durchmesser  $d = 130 \text{ mm}$  und das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{10} d^3 = \frac{1}{10} \cdot 13^3 = 220 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma'_B = \frac{M}{W} = \frac{63140}{220} = 287 \text{ kg/cm}^2,$$

Sicherheit  $\zeta = \frac{\sigma_B}{\sigma'_B} = \frac{5500}{287} = 19,2 \text{ fach.}$

Flächenpressung im Lager  $A$ :

$$p = \frac{A}{d \cdot l} = \frac{6314}{13 \cdot 20} = 24,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Lagerpressung entspricht den für Hauptlager zulässigen spezifischen Drücken.

b) Sicherheit des Zwischengeschirrs am Förderkorb.

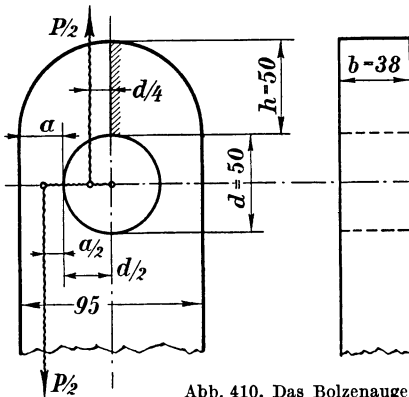


Abb. 410. Das Bolzenauge.

1. Königsstange, Material SM-Flußstahl  $\sigma_B = 4000 \text{ kg/cm}^2$ .

Die gefährlichste Beanspruchung liegt im Bolzenauge (Abb. 410), und zwar im schraffierten Scheitelquerschnitt.

Höchstbelastung:

Massenfahrt  $P = 4360 \text{ kg}$ ,

Seilfahrt  $P_S = 3800 \text{ kg}$ .

Die Biegungsbeanspruchung für den Scheitelquerschnitt ist für folgendes Biegemoment zu berechnen (siehe Abb. 410):

$$\begin{aligned} M &= -\frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \right) + \frac{P}{2} \cdot \frac{d}{4}, \\ &= -\frac{P}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{d}{2} + \frac{P}{2} \cdot \frac{d}{4}, \\ &= -\frac{P}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{d}{4} = -\frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{d}{4} \right). \end{aligned}$$

In Abb. 410 ist

$$a = \frac{1}{2} (95 - 50) = 22,5 \text{ mm} = 2,25 \text{ cm},$$

$$d = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm},$$

$$M = -\frac{4360}{2} \left( \frac{2,25}{2} + \frac{5}{2} \right) = -5180 \text{ cmkg}.$$

Der Scheitelquerschnitt hat die Höhe  $h = 5,0 \text{ cm}$  und die Breite  $b = 3,8 \text{ cm}$ , und damit wird das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 3,8 \cdot 5^2 = 15,8 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma'_B = \frac{M}{W} = \frac{5180}{15,8} = 328 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Sicherheit } \mathcal{C} = \frac{\sigma_B}{\sigma'_B} = \frac{4000}{328} = 12,2 \text{ fach},$$

für die Seilfahrt ist die Sicherheit

$$\mathcal{C}_1 = \frac{P}{P_1} \cdot \mathcal{C} = \frac{4360}{3800} \cdot 12,2 = 14 \text{ fach}.$$

Berechnung auf Zug: Der Stangenquerschnitt wird durch das Bolzenauge geschwächt, hier ist der Querschnitt

$$f = (9,5 - 5,0) \cdot 3,8 = 17,1 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma_z = \frac{P}{f} = \frac{4360}{1,71} = 255 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Sicherheit } \mathfrak{S} = \frac{\sigma_B}{\sigma_z} = \frac{4000}{255} = 15,7 \text{ fach},$$

$$\text{Seilfahrt } \mathfrak{S}_1 = \frac{P}{P_1} \cdot \mathfrak{S} = \frac{4360}{3800} \cdot 15,7 = 18 \text{ fach}.$$

## 2. Seilkausche (Abb. 411).

In der Seilkausche ist der Bolzen, der die Kausche mit den Hängelaschen verbindet, auf Biegung beansprucht. Sein gefährlicher Querschnitt liegt in der Mitte der Kausche. Das Biegemoment für diesen Querschnitt ist

$$\begin{aligned} M &= -\frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) + \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{4}, \\ &= -\frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{b}{4} \right) = -\frac{P}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \right). \end{aligned}$$

In der Ausführung ist  $a = 19 \text{ mm}$ ,  $b = 46 \text{ mm}$ , also ist

$$M = -\frac{4360}{2} \left( \frac{1,9}{2} + \frac{4,6}{4} \right) = -4800 \text{ cmkg}.$$

Der Bolzen hat den Durchmesser  $d = 49 \text{ mm}$ , also ist sein Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{10} \cdot d^3 = \frac{1}{10} \cdot 4,9^3 = 11,76 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma'_B = \frac{M}{W} = \frac{4800}{11,76} = 408 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Bolzen besteht aus Maschinenbaustahl mit der Bruchfestigkeit  $\sigma_B = 5400 \text{ kg/cm}^2$ . Also sind folgende Sicherheiten vorhanden

$$\mathfrak{S} = \frac{\sigma_B}{\sigma'_B} = \frac{5400}{408} = 13,2 \text{ fach},$$

$$\text{Seilfahrt } \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} \cdot \frac{P}{P_1} = 13,2 \cdot \frac{4360}{3800} = 15 \text{ fach}.$$

Die Flächenpressung am Bolzen:

a) in der Seilkausche

$$p_1 = \frac{P}{b \cdot d} = \frac{4360}{4,6 \cdot 4,9} = 195 \text{ kg/cm}^2,$$

$$p_2 = \frac{P}{2a \cdot d} = \frac{4360}{2 \cdot 1,9 \cdot 4,9} = 234 \text{ kg/cm}^2.$$

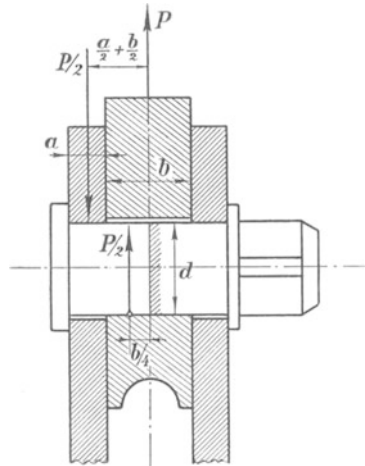


Abb. 411. Der Bolzen in der Seilkausche.

In Abb. 412 ist das ganze Zwischengeschirr dargestellt. An der Seilkauische hängen die beiden Laschen Pos. 2, diese tragen die Verstecklasche Pos. 4, die 4 Löcher zum Verstecken hat, dann folgen die beiden Seitenlaschen Pos. 5, die die Königstange Pos. 9 tragen. Die Sicherheiten der nicht errechneten Bolzen und Laschen genügen, da sie in den Abmessungen den errechneten Elementen entsprechen.

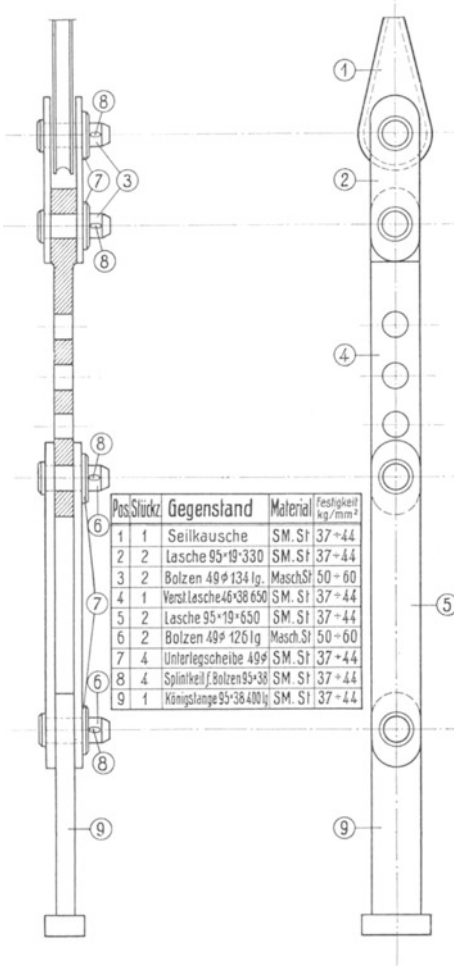


Abb. 412. Das Zwischengeschirr einer Blindschachtförderung.

vorkommende Übergewicht der einen Förderseite über die andere mit wenigstens zweifacher statischer Sicherheit zu halten.

Die Backenbremse ist in Abb. 413 dargestellt. Treibscheibe und Bremsscheibe haben gleichen Durchmesser. Die Backenbremse soll die Überlast  $P$  kg mit der vorgeschriebenen Sicherheit halten.

Folgende Übergewichte kommen vor:

Die „Bestimmungen für die Seilfahrt in Blindschächten“ vom 15. Mai 1937 sagen im § 26: Die Verbindungsstücke zwischen Förderseil und Förderkorb und zwischen Förderkorb und Gegengewicht müssen eine wenigstens zehnfache Sicherheit im Verhältnis zur statischen Höchstbelastung bei der Güterförderung gewähren.

§ 8 der Bestimmungen sagt: Der Förderhaspel muß mit einer selbsttätig schließenden Bremse versehen sein. Befindet sich diese auf der Vorgelegewelle, so muß auf der Treibscheibe eine zweite Bremse als Sicherheitsbremse vorhanden sein.

Ist nur eine Bremse vorhanden, so muß diese als Backenbremse ausgebildet sein.

§ 9 sagt: Jede der Bremsen muß imstande sein, das größte bei der Seilfahrt

## 1. Massenfahrt:

Förderkorbseite . . . . .	= 4360 kg
Gegengewichtseite . . . . .	= 3100 „
Übergewicht $\bar{P}$ . . . . .	= 1260 kg $\sim$ 1300 kg.

## 2. Seilfahrt mit 10 Personen:

Gegengewichtseite . . . . .	= 3100 kg
Förderkorbseite . . . . .	= 2540 „
Übergewicht $\bar{P}$ . . . . .	= 560 kg $\sim$ 600 kg.

## 3. Seilfahrt mit Akku-Lok.:

Förderkorbseite . . . . .	= 3800 kg
Gegengewichtseite . . . . .	= 3100 „
Übergewicht $\bar{P}$ . . . . .	= 700 kg.

Die Überlast bei der Massenfahrt ist am größten, sie werde, um sicher zu gehen, der Berechnung zugrunde gelegt, also wird mit  $P = 1300$  kg gerechnet.

Die Normaldrücke  $N$  der beiden Bremsbacken erzeugen den Reibungswiderstand  $R = 2 \cdot \mu \cdot N$ , der die Überlast  $P$  halten muß, also ist

$$2 \cdot \mu \cdot N = P. \quad (1)$$

Die Normaldrücke  $N$  werden von den Gestängekräften  $p$  erzeugt. Für den Bremsbalken auf der rechten Seite ist nach dem Hebelgesetz

$$p \cdot 155 = N \cdot 90 \quad \text{oder} \quad N = \frac{p \cdot 155}{90} = 1,725 \cdot p.$$

Hiermit lautet Gleichung (1)

$$2 \cdot \mu \cdot 1,725 \cdot p = P,$$

$$p = \frac{P}{3,450 \cdot \mu}.$$

Mit  $P = 1300$  kg und dem Reibungswert  $\mu = 0,40$  wird

$$p = \frac{1300}{3,45 \cdot 0,40} = 944 \text{ kg}.$$

Der Bremsbalken auf der linken Seite trägt oben den Winkelhebel mit dem Drehpunkt  $C$ , am kurzen Schenkel zieht die Kraft  $p$  nach rechts, am langen Schenkel die Kraft  $X$  nach unten, und es ist

$$X \cdot 45 = p \cdot 10 \quad \text{oder} \quad X = \frac{p \cdot 10}{45} = \frac{944 \cdot 10}{45} = 210 \text{ kg}.$$

Diese Kraft  $X$  zieht den Gewichtshebel nach oben. Für den Gewichtshebel ist

$$G \cdot 120 = X \cdot 18,$$

$$G = \frac{X \cdot 18}{120} = \frac{210 \cdot 18}{120} = 32 \text{ kg},$$

d. h. um die Überlast  $P = 1300$  kg an der Bremse zu halten, ist am Ge-





und der Weg der Handkraft, wenn  $D = 315$  mm der Handraddurchmesser ist,

$$U = \pi \cdot D = \pi \cdot 315 = 990 \text{ mm},$$

also ist die Übersetzung zwischen Spindeldruck und Handradkraft

$$i = \frac{h}{U} = \frac{17}{990} = \frac{1}{58}.$$

Mit dieser Übersetzung wird die Handradkraft für den Spindeldruck  $D$

$$H = i \cdot D = \frac{1}{58} \cdot 175 = 3 \text{ kg}.$$

## 7. Die Knickfestigkeit.

Ein gerader dünner Stab wird, wenn er an den beiden Enden durch eine gleich große Kraft  $K$  in Richtung der Stabachse gedrückt wird, sich durchbiegen (Abb. 414). Der Stab erfährt demnach eine zweifache Beanspruchung

1. auf Druck,
2. auf Biegung.

Die Druckbeanspruchung im Querschnitt  $F$  ist

$$\sigma_D = \frac{K}{F} \text{ kg/cm}^2.$$

Die größte Biegungsbeanspruchung tritt an der Stelle der größten Durchbiegung auf; ist diese z. B. in der Mitte  $a$  cm, so ist das größte Biegemoment

$$M = K \cdot a \text{ cmkg}.$$

Nach der allgemeinen Biegungsgleichung  $M = \sigma' \cdot W$  kann die Biegungsbeanspruchung ausgerechnet werden.

$$\sigma' = \frac{M}{W} = \frac{K \cdot a}{W}.$$

Auf derselben Druckseite des Stabes ist also die größte Knickspannung

$$\sigma_K = \sigma_D + \sigma'.$$

Da man aber die Größe der Durchbiegung  $a$  nicht kennt, kann diese Rechnung nicht zum Ziele führen. Man erkennt aber, daß die Elastizität des Materials eine Rolle spielen wird, denn die Größe der Durchbiegung wird von dem elastischen Verhalten des Materials abhängen.

### a) Die Eulersche Zerknickungsformel.

Um den Stab auf Druck und Biegung, d. h. auf Knicken zu berechnen, verwendet man im Maschinenbau und beim Bau von Eisenkonstruktionen meistens die Formel von Euler, welche die Knicklast in folgender Größe angibt:

$$K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}.$$

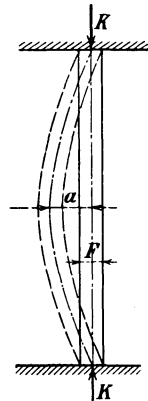


Abb. 414.  
Knickbeanspruchung.

In der Gleichung bedeutet

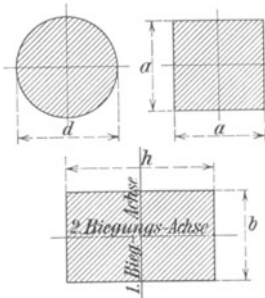
- $E$  = die Elastizitätszahl des Materials in  $\text{kg/cm}^2$ ,
- $J$  = das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts in  $\text{cm}^4$ ,
- $l$  = Stablänge in cm.

Die am häufigsten vorkommenden Querschnitte sind in Abb. 415 dargestellt:

1. Kreisquerschnitt  $J = \frac{\pi}{64} d^4$ ,
2. quadratischer Querschnitt  $J = \frac{1}{12} a^4$ ,
3. rechteckiger Querschnitt

für die 1. Biegungsachse  $J = \frac{1}{12} b \cdot h^3$ ,

für die 2. Biegungsachse  $J = \frac{1}{12} b^3 \cdot h$ .



Da der Balken sich senkrecht zur 2. Biegungsachse durchbiegen wird, ist stets dieses kleinere Trägheitsmoment in Rechnung zu stellen.

Die von der Formel gelieferte Kraft  $K$  bedeutet schon die Bruchkraft für den Stab. In Wirklichkeit darf der Stab nur  $1/n$  dieser Bruchkraft tragen, wenn er die Last mit Sicherheit halten soll. Der Stab ist daher mit  $n$ -facher Sicherheit zu berechnen. Die für die Berechnung verwertbare Formel würde also lauten

Abb. 415. Balkenquerschnitte.

$$n \cdot K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{l^2} \quad \text{oder} \quad J = n \cdot \frac{K \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E}.$$

In dieser Formel bedeutet nun  $K$  die mit  $n$ -facher Sicherheit getragene Last in kg.

Das Trägheitsmoment wächst demnach

1. proportional mit der Last  $K$ ,
2. proportional mit dem Quadrat der Stablänge,
3. umgekehrt proportional mit dem Elastizitätsmodul des Materials.

Man rechnet mit

- $n = 8$  bei Gußeisen,  $n = 4$  bei Stahl,
- $n = 6$  „ Schmiedeeisen,  $n = 10$  „ Holz.

Bei Maschinenteilen, die einer wechselnden Belastung unterworfen sind, geht man mit der Sicherheit noch höher, z. B. bei der Berechnung von Kolbenstangen.

Man nimmt

- $n = 8$  bis  $11$ , wenn die Belastung zwischen  $P$  und Null schwankt,
- $n = 15$  „  $22$ , „ „ „ „ „  $+P$  und  $-P$  wechselt.

**Beispiel:** Es ist der Durchmesser der Kolbenstange einer Dampfmaschine zu berechnen, die eine Zylinderbohrung von 300 mm hat und mit Dampf von 8 atü

arbeitet. Die Kolbenstange bestehe aus Schmiedeeisen ( $E = 2000\,000 \text{ kg/cm}^2$ ) und habe eine Länge von 1200 mm.

**Lösung:**

$$K = \frac{\pi}{4} \cdot 30^2 \cdot 8 = 5650 \text{ kg},$$

$$J = n \cdot \frac{K l^2}{\pi^2 \cdot E} = 15 \cdot \frac{5650 \cdot 120^2}{\pi^2 \cdot 2\,000\,000} = 61 \text{ cm}^4,$$

$$\frac{\pi}{64} d^4 = 61, \quad d = 5,8 \text{ cm}.$$

### b) Die Grenze zwischen Zerdrücken und Zerknicken.

Man kann für einen Stab diejenige Grenzlänge berechnen, für welche die Gefahr des Zerdrückens ebenso groß ist wie die Gefahr des Zerknickens, indem man setzt

$$K = \sigma_D \cdot F = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}, \quad l = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_D} \cdot \frac{J}{F}}.$$

Für kreisförmige Stäbe ist

bei Schmiedeeisen  $\sigma_D = 4000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$l = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_D} \cdot \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2}},$$

$$\frac{l}{d} = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{E}{\sigma_D}} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2\,000\,000}{4000}} = \sim 17,$$

für Holz ist  $\sigma_D = 200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E = 90\,000 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{\sigma_D}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{90\,000}{200}} = \sim 17.$$

Bei einem Holzstempel von  $d = 10 \text{ cm}$  Durchmesser würde demnach die Grenzlänge  $l = 17 \cdot 10 = 170 \text{ cm}$  sein, d. h. erst von der Stempellänge 170 cm ab würde der Stempel auf Zerknicken zu berechnen sein, während kürzere Stempel auf Druck zu berechnen wären.

### c) Versuchswerte und Berechnungswerte.

Man hat Fichtenstempel von  $l = 150 \text{ cm}$  Länge und  $d = 9$  bis 15 cm Durchmesser in einer Druckpresse zerknickt und die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Bruchlasten erhalten. Für den kleinsten Durchmesser  $d = 9 \text{ cm}$  ist die Grenzlänge

$$l = 17 \cdot d = 17 \cdot 9 = 153 \text{ cm}.$$

Da die Versuchsstempel 150 cm lang sind, liegen die Grenzlängen über diesem Wert, so daß die rechnerische Bruchlast nach der Druckformel gefunden werden muß. In der Tabelle sind die mit  $\sigma_D = 200 \text{ kg/cm}^2$  errechneten Bruchlasten eingetragen, sie stimmen mit den Versuchswerten gut überein. Um zu zeigen, daß die Eulersche Formel für kurze Längen (Stempellänge  $l$  unter der Grenzlänge  $17 \cdot d$ ) nicht mehr verwendbar ist, sind in der letzten Zahlenreihe die nach Euler errechneten Bruchlasten eingetragen, sie liegen bis auf den ersten Wert viel zu hoch und sind unbrauchbar.

## Versuche mit Fichtenstempel.

$d$ in cm	Ver- suchs- länge in cm	Quer- schnitt $F$ in cm <sup>2</sup>	Bruchlasten in kg		
			nach Versuch	nach der Druckformel mit $\sigma_D = 200$ kg	nach Euler mit $E = 90000$ kg/cm <sup>2</sup>
9	150	64	12800	12800	12700
10	150	78	15800	15600	unbrauchbar 19350 28400 40000 55000 74000 98800
11	150	95	19000	19000	
12	150	113	22600	22600	
13	150	133	26600	26600	
14	150	154	30800	30800	
15	150	177	35400	35400	

Die Eulersche Formel ist für Fichtenholz also nur anwendbar, wenn die Stempellänge  $l \geq 17 \cdot d$  ist. In der folgenden Tabelle sind die Bruchlasten für die Grenzlängen nach der Eulerschen Formel errechnet. Die Werte liegen den Versuchswerten mit Stempellängen von 150 cm näher.

$d$ in cm	$J = \frac{\pi}{64} d^4$ in cm <sup>4</sup>	Grenzlänge $l = 17 \cdot d$ in cm	Bruchlast in kg nach Euler mit $E = 90000$ kg/cm <sup>2</sup>
9	321	153	12200
10	490	170	15000
11	720	187	18350
12	1020	204	21800
13	1400	222	25200
14	1880	240	29000
15	2500	255	34200

## d) Geteiltes Grubenholz.

Der Mangel an Grubenholz hat zu einer versuchsweisen Verwendung von geteilten Rundhölzern geführt, und zwar wird meistens der viergeteilte Stempel verwendet.

Der viergeteilte Stempel (Abb. 416) liefert 4 Einzelhölzer von gleicher Güte. Bei dreigeteilten Stempeln kann nur die erste Form verwendet werden, da die zweite Form ein Mittelstück herauschneidet, dessen Widerstandsfähigkeit geringer ist, denn man hat gefunden, daß das Stempelholz im Kern weicher ist als nach der Rinde zu.

Versuche an der Bergschule<sup>1</sup> ergaben, daß der viergeteilte Stempel praktisch dieselbe Bruchlast trägt wie der querschnittsgleiche runde Stempel. Jedoch machen hier Aststellen eine Beeinflussung aus, die die Tragfähigkeit stärker einschränken als beim ganzen Holz. Man wird daher im allgemeinen lieber das ganze Rundholz verwenden und nur, wenn die Marktlage es erfordert, zum geteilten Holz übergehen.

Der viergeteilte Stempel: Es besteht folgende Querschnittsgleichung

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} D^2$$

oder  $d = \frac{1}{2} D =$  gleichwertiger Rundholzdurchmesser.

<sup>1</sup> Herbst, Dipl.-Ing. H.: Knickversuche mit Kiefernholz-Grubenstempeln von naturrunden und von geteilten Querschnitten. Glückauf 1926, S. 1409.

**Beispiel:** Ein Rundholz von  $D = 30$  cm ist geviertelt. Welcher Druck bricht das geschnittene Holz bei  $l = 2,00$  m Länge?

**Lösung:** Der gleichwertige Rundholzdurchmesser ist für das Viertelholz

$$d = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ cm.}$$

Der Stempel ist 200 cm lang, die Grenzlänge für die Anwendbarkeit der Knickformel ist  $l = 17 \cdot d = 17 \cdot 15 = 255$  cm, also kann die Bruchlast nur nach der Druckformel berechnet werden.

$$\text{Rundholzquerschnitt } F = \frac{\pi}{4} \cdot 15^2 = 177 \text{ cm}^2.$$

Mit  $\sigma_D = 200$  kg/cm<sup>2</sup> wird die Bruchlast

$$P = \sigma_D \cdot F = 200 \cdot 177 = 35400 \text{ kg.}$$

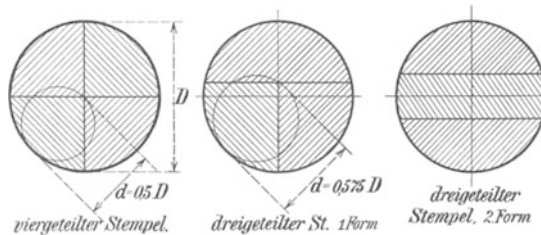


Abb. 416. Geteiltes Grubenholz.

Der dreigeteilte Stempel: Die Querschnittsgleichung lautet

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D = 0,575 \cdot D$$

unter der Bedingung, daß die Widerstandsfähigkeit des Teilstückes ungefähr gleich dem Widerstand des querschnittsgleichen Rundholzes ist. Nach den Versuchen der Bergschule kann man diese Widerstandsgleichheit für den größten Teil der untersuchten Hölzer annehmen.

**Beispiel:** Das Rundholz von  $D = 30$  cm und  $l = 200$  cm Länge wird gedrittelt. Wie groß ist nun die Bruchlast?

**Lösung:** Der gleichwertige Rundholzdurchmesser ist nach Abb. 416

$$d = 0,575 \cdot D = 0,575 \cdot 30 = 17,25 \text{ cm,}$$

$$\text{Rundholzquerschnitt } F = \frac{\pi}{4} \cdot 17,25^2 = 233 \text{ cm}^2.$$

Mit  $\sigma_D = 200$  kg/cm<sup>2</sup> wird die Bruchlast  $P = 200 \cdot 233 = 46600$  kg.

Die Bruchlast ist dem größeren Querschnitt entsprechend größer geworden.

### e) Der nachgiebige Eisenstempel<sup>1</sup>.

Nimmt man den Druck aus dem Hangenden nachgiebig auf, so sind die aufzunehmenden Drücke wesentlich kleiner als bei starrer Unterstützung. Während die Knicklasten beim Holzstempel 20 bis 35 t werden, wird der Widerstand eines Eisenstempels mit 3 bis 8 t vollkommen ausreichend. Versuche mit Eisenstempeln in der Druckpresse der Bergschule haben dieses Ergebnis gebracht, denn bei allen untersuchten nachgiebigen Stempeln war die Nachgiebigkeit erschöpft, d. h. waren die

<sup>1</sup> Maercks: Die Mechanik eiserner Grubenstempel. Glückauf 1925, S. 1617.

Teile vollkommen ineinander geschoben, wenn der Stempeldruck 5 bis 8 t war.

Man stelle sich beim Eisenstempel die Senkung des Hangenden ruckweise vor. Nach jeder Senkung bildet sich eine neue Gleichgewichtslage im Hangenden, so daß der Druck dann während einer gewissen Zeit konstant bleibt oder auch kleiner wird. Der Stempel wird also ruckweise einsinken, und zwar jedesmal dann, wenn der Druck aus dem Hangenden wieder größer geworden ist als der jeweilige Widerstand des Stempels bei der betreffenden Einsinktiefe war.

Die Verwendung von Eisenstempel im Abbau hat erhebliche Fortschritte gemacht. Während man im allgemeinen den leichten, nachgiebigen Stempel verwendet, ist jetzt auch der Bedarf an tragfähigen, fast starren Stempeln da. Das Stempelschloß dient dann in der Hauptsache nur zum Rauben des Stempels, während die Nachgiebigkeit nur in der elastischen Formänderung der eisernen Keilpaarungen liegt. Diese Keilpaarungen verzehren den Gebirgsdruck durch Reibung so vollständig, daß der letzte Keil nur noch einer geringen Kraft zum Lösen bedarf. Stempel dieser Art tragen Lasten von 25 t und mehr und haben nur eine Einsenkung von wenigen cm.

### f) Die Knickformel für Baukonstruktionen.

Nach der Eulerschen Formel ist für einen Stab von der Länge  $l$  cm bei  $K$  kg Knicklast und  $n$ facher Sicherheit das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = n \cdot \frac{K \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} \text{ cm}^4.$$

Bei Konstruktionen, die durch ruhende Lasten, wie z. B. bei Dachbindern, beansprucht werden, verlangt man eine  $n = 4$ fache Sicherheit. Setzt man

die Last  $K$  in t,

die Länge  $l$  in m,

$$\pi^2 = 10 \quad \text{und} \quad n = 4.$$

so wird mit  $E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$  für Stahl

$$J = 1,86 \cdot K \cdot l^2 \text{ cm}^4.$$

Bei Brückenkonstruktionen (bewegliche Lasten) verlangt man eine  $n = 5$ fache Sicherheit. Damit wird für Stahl

$$J = 2,33 \cdot K \cdot l^2 \text{ cm}^4.$$

Für gußeiserne Baukonstruktionsteile wählt man  $n = 8$ . Es wird dann mit  $E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$

$$J = 8 \cdot K \cdot l^2.$$

Für Holz verlangt man  $n = 10$ . Mit  $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$  wird dann

$$J = 100 \cdot K \cdot l^2.$$

**Aufgabe:** Eine Säule aus Profileisen (Abb. 417) soll bei 5 m Höhe eine Last  $K = 80 \text{ t}$  mit  $n = 5$ facher Sicherheit tragen.

**Lösung:** Für Walzeisen läßt man eine Druckspannung

$$\sigma_D = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

zu. Auf Druck beansprucht, würde ein Querschnitt von

$$F = \frac{K}{\sigma_D} = \frac{80000}{1000} = 80 \text{ cm}^2$$

erforderlich sein. Die Knickfestigkeit verlangt aber das Trägheitsmoment

$$J = 2,33 \cdot K \cdot l^2 = 2,33 \cdot 80 \cdot 5^2 = 4660 \text{ cm}^4.$$

Gewählt wird ein U-Profil Nr. 24 nach Abb. 417 in doppelter Anordnung. In bezug auf die  $X - X$ -Linie als Biegungsachse ist das Trägheitsmoment des einfachen Profils nach Tabelle

$$J_x = 3712 \text{ cm}^4,$$

also des Profils in Doppelanordnung

$$J = 2 \cdot J_x = 2 \cdot 3712 = 7424 \text{ cm}^4.$$

Nach Tabelle ist der Querschnitt des einfachen Profils

$$F_1 = 43,2 \text{ cm}^2,$$

also des Profils in Doppelanordnung

$$F = 2 \cdot F_1 = 2 \cdot 43,2 = 86,4 \text{ cm}^2.$$

Nach Abb. 417 müssen die beiden Profile den lichten Abstand

$$i = 129 \text{ mm}$$

haben, damit das kleinere Trägheitsmoment  $J_y$  des einzelnen Profils in bezug auf die  $Y' - Y'$ -Linie ebenso groß wie das Trägheitsmoment  $J_x$  wird.

Zur Errechnung dieses Abstandes  $i$  benutzt man den

**Satz von der Reduktion der Trägheitsmomente:**

*Ist  $J_y$  das Trägheitsmoment für eine  $Y'$ -Achse, so ist das Trägheitsmoment für eine im Abstande  $a$  gezogene Parallelachse*

$$J = J'_y + f \cdot a^2,$$

wenn  $f$  = Querschnitt des Profils in  $\text{cm}^2$  ist.

In Abb. 417 ist durch den Schwerpunkt  $S$  des rechten Profileisens die Vertikalachse  $Y' - Y'$  gezogen. Nach Tabelle ist für diese Linie als Biegungsachse das Trägheitsmoment des Profils

$$J'_y = 297 \text{ cm}^4.$$

Beide Profile sind um das Maß  $a$  von der Mittelachse  $Y - Y$  verschoben, also ist für das Gesamtprofil das Trägheitsmoment in bezug auf die  $Y - Y$ -Achse

$$J_y = 2 \cdot (J'_y + f \cdot a^2)$$

oder

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} J_y - J'_y}{f}},$$

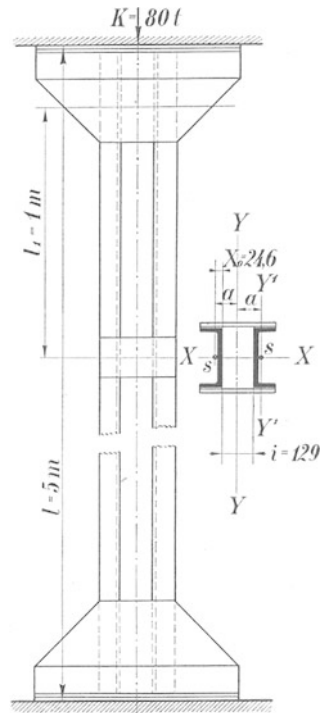


Abb. 417. Säule aus Profileisen für 80 t Last.

Setzt man  $J_y = J_x = 7424 \text{ cm}^4$ ,  $J'_y = 297$  und  $f = 43,2 \text{ cm}^2$  ein, so wird

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 7424 - 297}{43,2}} = 8,9 \text{ cm} = 89 \text{ mm}.$$

Nach Abb. 417 ist der Schwerpunktsabstand  $x_0 = 24,6 \text{ mm}$ , ferner ist  $i = 2a - 2x_0 = 2 \cdot 89 - 2 \cdot 24,6 = 129 \text{ mm}$ , das ist das in Abb. 417 eingetragene Maß  $i = 129$ . Die Berechnung erübrigt sich meistens, da die Profiltabellen die Maße  $i$  als lichten Abstand der beiden Profilquerschnitte angeben.

Die Knotenbleche oder Schnallen:

Damit nicht das einzelne U-Eisen für sich über die  $Y'$ -Achse nach außen ausknicken kann, müssen im Abstände  $l_1$  Knotenbleche oder Schnallen gesetzt werden. Dieser Abstand  $l_1$  ist so zu wählen, daß für das Trägheitsmoment  $J_y$  eines U-Profiles unter der Kraft  $K$  noch die verlangte Sicherheit  $n = 5$  vorhanden ist. Es muß sein

$$J'_y = 2,33 \cdot K \cdot l_1^2$$

oder 
$$l_1 = \sqrt{\frac{J_y}{2,33 \cdot K}} = \sqrt{\frac{297}{2,33 \cdot 80}} = 1,27 \text{ m}.$$

In der Ausführung ist  $l = 1,00 \text{ m}$  gemacht.

## 8. Die Scherfestigkeit.

Beim Schneiden mit einer Schere wird der zerschnittene Körper auf Abscheren beansprucht. Ein Scherenmesser (Abb. 418) drückt mit der Kraft  $P$  auf das Blech. Die Kraft, welche den Blechquerschnitt beansprucht, läuft parallel mit dem Querschnitt. Zwei Querschnitte werden gegeneinander abgeschoben, man spricht daher von einer Schub- oder Scherbeanspruchung und bezeichnet die zulässige Schubspannung mit  $\tau_{zul.}$ , während die Schubfestigkeit mit  $\tau_B$  bezeichnet wird.

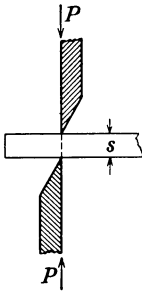


Abb. 418. Der Scherenschnitt.

$\tau_B$  ist also die Schubspannung in  $\text{kg/cm}^2$ , bei der sich zwei parallele Querschnittsebenen gegeneinander verschieben.

Die zulässige Schubspannung setzt Bach

$$\tau_{zul.} = 0,75 \text{ bis } 0,80 \cdot \sigma_{zul.},$$

wo  $\sigma_{zul.}$  die zulässige Zugbeanspruchung bedeutet.

**Beispiel:** Ein Blechband von  $b = 10 \text{ cm}$  Breite und  $s = 10 \text{ mm}$  Dicke soll unter einer Schere abgeschnitten werden, wie groß muß der Scherendruck sein, wenn  $\tau_B = 4000 \text{ kg/cm}^2$  ist?

**Lösung:** Blechquerschnitt  $F = b \cdot s = 10 \cdot 1 = 10 \text{ cm}^2$ ,

$$P = F \cdot \tau_B = 10 \cdot 4000 = 40000 \text{ kg}.$$

**Beispiel:** In ein Flußeisenblech von  $s = 15 \text{ mm}$  Stärke soll ein Loch von  $15 \text{ mm}$  Durchmesser eingestanzt werden, wie groß ist der erforderliche Stanzdruck?

**Lösung:** Die abzuscherende Fläche ist

$$F = \pi \cdot d \cdot s = \pi \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 7,06 \text{ cm}^2,$$

$$P = F \cdot \tau_B = 7,06 \cdot 4000 = 28300 \text{ kg}.$$



Blechverbindungen, die durch Vernietung hergestellt werden, bringen für die Nietschäfte Scherbeanspruchungen. In Abb. 419 ist eine

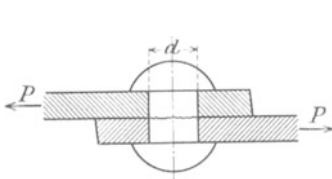


Abb. 419. Die einschnittige Niete.

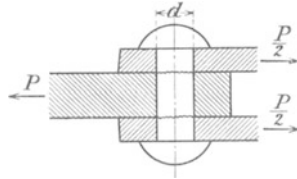


Abb. 420. Die zweischnittige Niete.

einschnittige Nietverbindung dargestellt. Die Verbindung heißt einschnittig, weil die Scherwirkung nur in einer Schnittfläche erfolgt. Es würde sein

$$\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \tau_{zul.} = P,$$

z. B.  $P = 1000 \text{ kg}$ ,  $\tau_{zul.} = 400 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{\tau_{zul.}} = \frac{1000}{400} = 2,5 \text{ cm}^2.$$

Nietdurchmesser  $d = 1,8 \text{ cm} = 18 \text{ mm}$ .

Bei der zweischnittigen Nietverbindung erfolgt die Scherwirkung in zwei Schnittflächen (Abb. 420). In diesem Fall ist

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \tau_{zul.} = P,$$

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{2 \cdot \tau_{zul.}},$$

z. B.  $P = 1000 \text{ kg}$ ,  $\tau_{zul.} = 400 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1000}{2 \cdot 400} = 1,25 \text{ cm}^2.$$

Nietdurchmesser  $d = 1,25 \text{ cm} = 12,5 \text{ mm}$ .

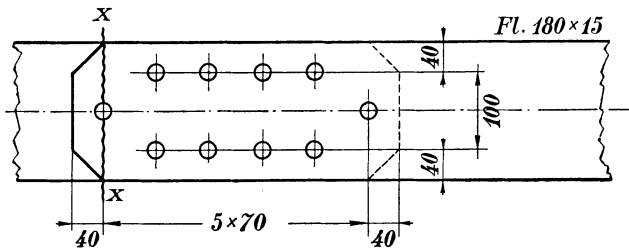


Abb. 421. Vernietung von zwei Flacheisenstäben.

**Aufgabe:** Zwei Flacheisenstäbe  $180 \times 15 \text{ mm}$  sollen mit  $20 \text{ mm}$ -Nieten einschnittig an einander geschlossen werden; wieviel Nieten sind erforderlich?

**Lösung:** Im Querschnitt  $x - x$  des Flacheisens (Abb. 421) ist der Nettoquerschnitt

$$F = (18 - 2) \cdot 1,5 = 24 \text{ cm}^2.$$

Da die Scherbeanspruchung des Nieteisens nur  $\frac{1}{2}$  von der Zugbeanspruchung des

Flacheisens sein soll, muß der Nietquerschnitt größer werden. Der gesamte Scherquerschnitt der Nieten muß sein

$$F_1 = \frac{5}{4} \cdot F = \frac{5}{4} \cdot 24 = 30 \text{ cm}^2.$$

Man wählt 10 Nieten mit 20 mm Durchmesser und hat dann

$$F_1 = 10 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 = 31,4 \text{ cm}^2.$$

Die Nieten werden nach Abb. 420 angeordnet.

## 9. Die Verdrehungsfestigkeit.

In Abb. 422 ist ein runder Stab an dem einen Ende fest eingespannt und am freien Ende durch ein Kräftepaar beansprucht. Der Stab wird verdreht, die Längsfaser  $AB$  nimmt die Lage  $A'B$  an, eine Lage, die dadurch zustande kommt, daß die Stabquerschnitte sich gegeneinander verdrehen und zwar um so mehr, je weiter sie von der Einspannstelle entfernt liegen.

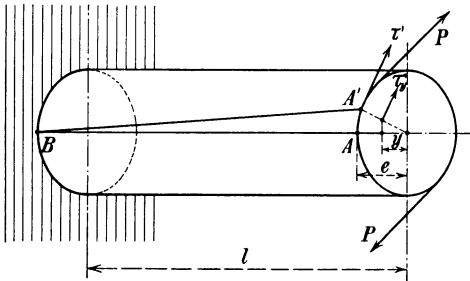


Abb. 422. Das Verdrehen eines Rundstabes.

Betrachten wir einen Kreisquerschnitt, Abb. 422. Die äußere Faser im Abstande  $e$  von der Kreismitte erfährt die Torsionsspannung  $\tau'$ , die Faser im Abstande  $y$  von der Kreismitte die Torsionsspannung  $\tau_y$ . Da die Verschiebung der Fasermittelpunkte nach Abb. 422 proportional zunimmt mit

ihrem Abstand vom Mittelpunkt des Querschnittes, so müssen auch die Spannungen, welche diese Verschiebungen hervorrufen, in derselben Weise proportional mit dem Abstände  $y$  wachsen, d. h. es ist

$$\frac{\tau_y}{\tau'} = \frac{y}{e} \quad \text{oder} \quad \tau_y = \tau' \cdot \frac{y}{e}.$$

Für das Flächenteilchen  $f$  ist demnach die Torsionskraft

$$\tau_y \cdot f$$

und für den gesamten Querschnitt

$$\sum \tau_y \cdot f.$$

Für den Gleichgewichtszustand muß die Summe der Drehmomente aller inneren Kräfte in bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Drehpunkt gleich dem Drehmoment  $M$  der äußeren Kräfte sein, also ist

$$\sum \tau_y \cdot f \cdot y = M,$$

$$\tau_y = \tau' \cdot \frac{y}{e},$$

$$\sum \tau' \cdot \frac{y}{e} \cdot f \cdot y = M,$$

$$\frac{\tau'}{e} \cdot \sum f \cdot y^2 = M.$$

Der Wert  $\sum f \cdot y^2$  wird wie früher als Trägheitsmoment bezeichnet. Da der Abstand  $y$  der Flächenteilchen  $f$  aber nun von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt des Kreises, gemessen wird, nennt man diesen Punkt den Pol, und das Trägheitsmoment das polare Träg-

heitsmoment. Das polare Trägheitsmoment wird mit  $J_p$  bezeichnet, man schreibt daher abgekürzt

$$\sum f \cdot y^2 = J_p$$

und die vorige Gleichung lautet

$$\frac{\tau'}{e} \cdot J_p = M.$$

Diese Gleichung  $M = \frac{\tau'}{e} \cdot J_p$  entspricht der schon bekannten allgemeinen Biegleichung

$$M = \frac{\sigma}{e} \cdot J = \sigma \cdot \frac{J}{e}.$$

Entsprechend kann man die allgemeine Torsionsgleichung schreiben

$$M = \tau'_{zul.} \cdot \frac{J_p}{e}.$$

Setzt man den Quotienten  $\frac{J_p}{e} = W_p$  (polares Widerstandsmoment), so lautet die Torsionsgleichung

$$M = \tau'_{zul.} \cdot W_p.$$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung, nach der alle auf Verdrehung beanspruchten Stäbe berechnet werden, denn bei bekanntem  $M$  der äußeren Kräfte kann unter Zulassung einer höchsten Verdrehungsspannung  $\tau'_{zul.}$  das Widerstandsmoment des Stabquerschnittes ermittelt werden nach der Gleichung

$$W_p = \frac{M}{\tau'_{zul.}}$$

Mit dem Widerstandsmoment liegen die Abmessungen des gesuchten Stabquerschnittes fest.

Auf Verdrehung beanspruchte Stäbe kommen im Maschinenbau sehr zahlreich vor. Diese Stäbe haben immer Kreisquerschnitt und werden Wellen genannt.

### a) Das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche.

Für ein beliebiges Flächenteilchen  $f$  des Kreisquerschnittes (Abb. 423) ist das polare Trägheitsmoment in bezug auf den Pol  $S$

$$J_p = f \cdot r^2.$$

Für die Summe aller Flächenteilchen (gesamte Kreisfläche) ist

$$J_p = \sum f \cdot r^2, \\ r^2 = x^2 + y^2,$$

$$J_p = \sum f \cdot (x^2 + y^2) = \sum f \cdot x^2 + \sum f \cdot y^2.$$

Der Wert  $\sum f \cdot x^2$  bedeutet das axiale Trägheitsmoment der Kreisfläche, bezogen auf die  $Y$ -Achse, und der Wert  $\sum f \cdot y^2$  das axiale Trägheitsmoment der Kreisfläche, bezogen auf die  $X$ -Achse, das von unse-

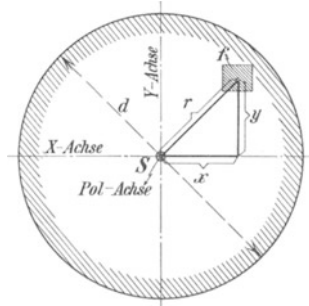


Abb. 423. Das polare Trägheitsmoment einer Kreisfläche.

Abb. 423. Das polare Trägheitsmoment einer Kreisfläche.

ren früheren Rechnungen uns schon bekannt ist durch die Gleichung  $J = \frac{\pi}{64} d^4$ , mithin setzt man

$$\sum f \cdot x^2 = \sum f \cdot y^2 = J = \frac{\pi}{64} d^4$$

und findet

$$J_p = \frac{\pi}{64} d^4 + \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{32} d^4$$

als polares Trägheitsmoment der Kreisfläche. Hieraus berechnet sich das polare Widerstandsmoment der Kreisfläche

$$W_p = \frac{J_p}{e},$$

mit

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4 \quad \text{und} \quad e = \frac{d}{2}$$

wird

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi}{16} d^3.$$

### b) Die Berechnung der Wellendurchmesser.

Auf Grund der allgemeinen Torsionsgleichung können wir schreiben

$$W_p = \frac{M}{\tau'_{zul}},$$

$$\frac{\pi}{16} d^3 = \frac{M}{\tau'_{zul}} \quad \text{oder} \quad d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{M}{\tau'_{zul}}}.$$

Nach dieser Gleichung ist der Durchmesser der Wellen zu berechnen. Man ersetzt aber meistens das Drehmoment  $M$  der äußeren Kräfte durch das Maß der Pferdestärken  $N$  und der Drehzahlen  $n$ .

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg/sek.}$$

Die Arbeit der Welle in der Minute ist  $= 75 \cdot 60 \cdot N$  mkg. Im Abstände 1 m von der Wellenmitte greife die Drehkraft  $M$  an, dann ist deren Arbeit in der Minute  $= M \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot n$  mkg. Beide Arbeiten gleichgesetzt, gibt

$$M \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot n = 75 \cdot 60 \cdot N,$$

$$M = 716 \cdot \frac{N}{n} \text{ mkg} = 71600 \cdot \frac{N}{n} \text{ cmkg.}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{M}{\tau'_{zul}}}$$

ein, so wird

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{71600 \cdot N}{\tau'_{zul} \cdot n}} = \sqrt[3]{\frac{360000}{\tau'_{zul}} \cdot \frac{N}{n}}.$$

Um die bei Triebwerkswellen gleichzeitig auftretenden Biegebungsbeanspruchungen in einfacher Weise zu berücksichtigen, wählt man die zulässige Drehbeanspruchung  $\tau'_{zul}$  sehr gering. Auf Grund von Erfahrungen setzt man

$$\tau'_{zul} = 120 \text{ kg/cm}^2$$

und erhält hiermit

$$d = \sqrt[3]{\frac{360\,000}{120} \cdot \frac{N}{n}} = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{N}{n}}.$$

Mit dieser Gleichung berechnet man die Durchmesser der Triebwerkswellen.

**Beispiel:** Eine Triebwerkswelle soll bei  $n = 120$  Umdr./min  $N = 50$  PS übertragen, wie groß wird der Wellendurchmesser?

**Lösung:**

$$d = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{N}{n}} = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{50}{120}} = 10,8 \text{ cm.}$$

Wir sehen, die Drehzahl der Welle spielt eine große Rolle; je größer die Drehzahl, um so kleiner ist bei einer bestimmten Leistung die treibende Kraft und um so kleiner wird das Drehmoment.

Wie groß würde der Wellendurchmesser, wenn die Welle dieselbe Leistung bei  $n = 180$  übertragen soll?

$$d = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{50}{180}} = 9,4 \text{ cm.}$$

Vierter Abschnitt.  
**Strömungslehre.**

**1. Gleichgewicht im ruhenden Wasser.**

In einem ruhenden Gefäß (Abb. 424) stellt sich der Wasserspiegel horizontal ein. Das Wasser unterliegt dann nur dem Einfluß der Schwerkraft, und da alle Teilchen der Oberfläche in gleicher Höhe liegen, kann keine Bewegung mehr eintreten, der Gleichgewichtszustand ist ein vollkommener.

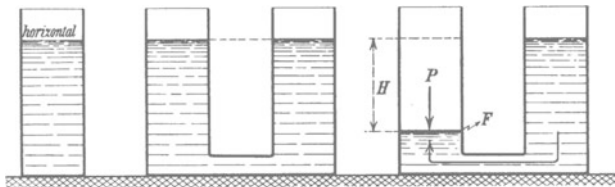


Abb. 424. Gleichgewicht im ruhenden Wasser.

Verbindet man zwei Gefäße durch ein Rohr, so stellt sich der Wasserspiegel in gleicher Höhe ebenfalls horizontal ein. Man denke sich in dem einen Behälter ein Wasservolumen von der Höhe  $H$  entfernt und den tieferen Wasserspiegel durch eine dünne Kolbenscheibe begrenzt, dann muß der Kolben durch eine Kraft  $P$  heruntergedrückt werden, um den Gleichgewichtszustand zu erhalten. Die fortgenommene Wassermenge hielt vorher den Gleichgewichtszustand aufrecht, also muß die Kraft  $P$  gleich dem Gewicht dieser Wassermenge sein. Ist  $F$  die Kolbenfläche in  $\text{m}^2$  und  $\gamma$  das Raumgewicht des Wassers in  $\text{kg}/\text{m}^3$ , so ist

$$P = F \cdot H \cdot \gamma.$$

In der Tiefe  $H$  unter dem Wasserspiegel ist demnach der spezifische Druck, d. i. der Druck auf die Flächeninheit.

$$p = \frac{P}{F} = H \cdot \gamma,$$

für Wasser ist  $\gamma = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ , also  $p = 1000 \cdot H \text{ kg}/\text{m}^2$ , für  $H = 10 \text{ m}$  wird  $p = 1000 \cdot 10 = 10000 \text{ kg}/\text{m}^2 = 1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ .

Der Druck von  $1 \text{ kg}/\text{cm}^2$  wird als Atmosphäre bezeichnet, er entspricht einer Wassersäulenhöhe von  $10 \text{ m}$ . Ist die Druckhöhe durch  $H$  Meter Wassersäule gegeben, so ist der in Atmosphären umgewandelte Druck demnach

$$p = \frac{H}{10} \text{ kg}/\text{cm}^2.$$

Man kann den Atmosphärendruck auch durch eine andere Flüssigkeitssäule messen, z. B. durch eine Quecksilbersäule, deren spezifisches Gewicht  $\gamma_1 = 13596 \text{ kg/m}^3$  ist. Nach der Gleichung

$$p = H_1 \cdot \gamma_1$$

wird zu schreiben sein

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kg/cm}^2 = 10000 \text{ kg/m}^2 = H_1 \cdot 13596$$

oder

$$H_1 = \frac{10000}{13596} = 0,7355 \text{ m} = 735,5 \text{ mm.}$$

Der Druck von 1 at entspricht demnach einer Quecksilberhöhe von 735,5 mm. Man nennt diesen Druck von  $1 \text{ kg/cm}^2$  die technische Atmosphäre im Gegensatz zu dem mittleren Atmosphärendruck in Meereshöhe, welcher durch eine Quecksilbersäule von 760 mm bei  $0^\circ$  gemessen wird. Dieser mittlere Atmosphärendruck ergibt den Druck

$$p = H_1 \cdot \gamma_1 = 0,760 \cdot 13596 = 10336 \text{ kg/m}^2$$

oder

$$p = 1,0336 \text{ kg/cm}^2 = 1,0336 \text{ ata.}$$

Will man geringe Druckhöhen messen, wie es z. B. bei der Luftbewegung für die Bewetterung erforderlich ist, so ist das Wassermanometer ein äußerst fein messender Druckmesser. Man kann 1 mm Wassersäule mit bloßem Auge noch genau ablesen und mit besonderen Maßinstrumenten noch  $\frac{1}{100}$  mm Wassersäule. Was bedeutet das?

$$10 \text{ m Wassersäule} = 1 \text{ kg/cm}^2,$$

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm} \quad ,, \quad = 0,1 \text{ kg/cm}^2,$$

$$1 \text{ mm} \quad ,, \quad = 0,0001 \text{ kg/cm}^2 = \frac{1}{10000} \text{ at} = 1 \text{ kg/m}^2,$$

$$\frac{1}{100} \text{ mm} \quad ,, \quad = 0,000001 \text{ kg/cm}^2 = \frac{1}{1000000} \text{ at.}$$

Das bedeutet also, daß man mit einem Wassermanometer noch Druckunterschiede von einer Millionstel Atmosphäre messen kann.

In einem Lutenrohr (Abb. 425) kann Überdruck oder Unterdruck herrschen. Bläst der Ventilator in die Lutte herein, so ist der Druck in der Lutte größer als der Atmosphärendruck, die Wassersäule wird im äußersten Schenkel der Wasserröhre um den Betrag  $h$  mm hochgedrückt. Saugt der Ventilator die Luft aus der Lutte heraus, so wird in dem inneren Schenkel der Wasserröhre die Wassersäule um  $h$  mm hochgesaugt, der Bergmann nennt diesen Unterdruck Depression.

Man kann den Unterdruck auch als Saugdruck bezeichnen, wie groß kann dieser Saugdruck höchstens werden? Das erklärt man sich so. Man zieht ein langes Glasrohr (Abb. 426), das oben geschlossen und unten offen ist, mit Wasser gefüllt senkrecht aus dem Wasser hoch, dann läuft das Wasser nicht aus. Übersteigt aber die herausgezogene Höhe den Betrag von 10 m, so bleibt der Wasserspiegel bei dieser Höhe

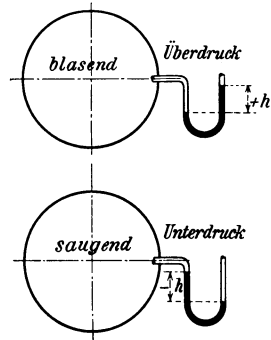


Abb. 425. Überdruck und Unterdruck im Lutenrohr.

stehen und über dem Wasserspiegel entsteht im Rohr ein luftleerer Raum (Vakuum). Da die Luft nur mit 1 at auf den Wasserspiegel drückt, kann sie auch nur eine Wassersäule von 10 m Höhe in den luftleeren Raum drücken, d. h. der Saugdruck kann höchstens 1 at betragen. Aus diesem Grunde müssen Pumpen, welche aus einem Brunnen Wasser ansaugen sollen, eine Höhenlage über dem Wasserspiegel haben, welche kleiner ist als 10 m, da sonst die Wassersäule abreißt.

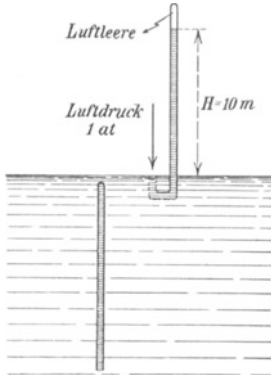


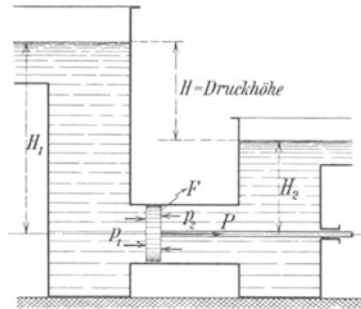
Abb. 426. Die Luftleere.

Denselben Versuch kann man mit Quecksilber machen. Das Quecksilber würde nur eine Höhe von 735,5 mm im Glasrohr erreichen, wenn der Luftdruck 1 kg/cm<sup>2</sup> beträgt.

Die bekannten Metallmanometer, welche allgemein als Druckmesser gebräuchlich sind, beginnen mit der Zeigerstellung Null. Bei dieser Zeigerstellung zeigt das Manometer bereits den Atmosphärendruck, die Zahlen bedeuten also Überdruck (atü).

## 2. Die potentielle Energie einer Wassermenge.

Eine ihre Höhe verändernde Wassermenge kann Arbeit leisten, sie enthält also vorrätige oder potentielle Energie. In Abb. 427 drückt

Abb. 427.  
Einseitiger Druck  
auf die  
Kolbenfläche.Abb. 428. Doppelseitiger Druck auf die  
Kolbenfläche.

die Wassersäulenhöhe  $H$  gegen die Kolbenfläche  $F$ , der Druck auf 1 m<sup>2</sup> ist

$$p = 1 \cdot H \cdot \gamma,$$

also ist die Kolbenkraft  $P = p \cdot F = H \cdot \gamma \cdot F$ .

Wird der Kolben um den Weg  $s$  nach außen gedrückt, so verrichtet der Wasserdruck die Arbeit

$$A = P \cdot s = H \cdot \gamma \cdot F \cdot s$$

$$\gamma \cdot F \cdot s = G = \text{Wassergewicht,}$$

$$A = H \cdot G.$$

In Abb. 428 drückt von der anderen Seite eine Wassersäulenhöhe  $H_2$  gegen die Kolbenfläche. Da von der einen Kolbenseite die größere Wasser-



säulenhöhe  $H_1$  wirkt, wird der Kolben nach rechts gedrückt, und zwar ist

$$\begin{aligned} p &= p_1 - p_2 = H_1 \cdot \gamma - H_2 \cdot \gamma, \\ P &= p \cdot F = H_1 \cdot \gamma \cdot F - H_2 \cdot \gamma \cdot F, \\ A &= P \cdot s = H_1 \cdot \gamma \cdot F \cdot s - H_2 \cdot \gamma \cdot F \cdot s, \\ &\qquad \qquad \qquad \gamma \cdot F \cdot s = G \end{aligned}$$

---


$$A = H_1 \cdot G - H_2 \cdot G = (H_1 - H_2) \cdot G = H \cdot G,$$

für  $G = 1 \text{ kg}$  wird

$$A = H,$$

d. h. die auf die Gewichtseinheit bezogene potentielle Energie oder Spannungsenergie des Wassers wird durch die Ausflußdruckhöhe gemessen.

Die verfügbare potentielle Energie der Wassermasse ist gleich dem Produkt aus dem Gefälle und dem Wassergewicht.

Wird z. B. in einem Staubecken von 50 m Wasserhöhe das Wasser auf konstanter Höhe erhalten, so ist die potentielle Energie von 1 kg Wasser

$$A = 1 \cdot 50 = 50 \text{ mkg}.$$

Wenn aus einer Ausflußöffnung am Boden des Staubeckens minutlich  $6 \text{ m}^3$  zum Abfluß kommen, so ist die minutlich verfügbare potentielle Energie

$$A = 6 \cdot 1000 \cdot 50 = 300000 \text{ mkg/min}$$

oder die Leistung in PS

$$N = \frac{A}{60 \cdot 75} = \frac{300000}{4500} = 67 \text{ PS}.$$

Die Bewegungsursache für eine Wassermasse ist in allen Fällen ein Druckunterschied. Bei Fortnahme des Kolbens in Abb. 428 wird die Wassermasse aus dem Gefäß mit dem hohen Wasserspiegel in das Gefäß mit dem niedrigen Wasserspiegel strömen, es tritt eine strömende Bewegung ein, die konstant bleibt, wenn sich die Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel nicht ändert.

### 3. Der Satz von Pascal.

Pascal stellte den Satz auf: „Der Druck im Wasser pflanzt sich nach allen Richtungen hin gleichmäßig fort.“

Schließt man das Wasser ringsum durch feste Wände ein, wie in Abb. 429 bei einer Wasserdruckpresse, so ist der unter dem kleinen Kolben erzeugte Flächendruck  $p$  innerhalb der Wasserfüllung gleichmäßig fortpflanzbar. Er drückt also auch unter den großen Kolben, so

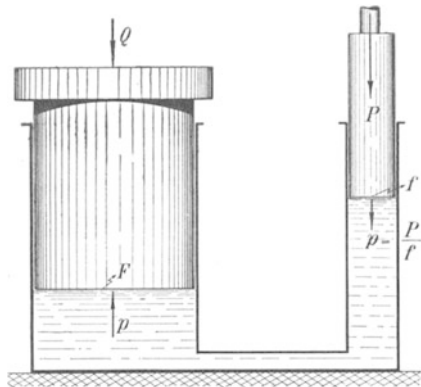


Abb. 429. Wasserdruckpresse.

daß man mit einer kleinen Kolbenkraft  $P$  ein schweres Gewicht  $Q$  heben kann. Es ist

$$P = p \cdot f \quad \text{und} \quad Q = p \cdot F.$$

Ist z. B.  $F = 100 \cdot f$ , so wird  $Q = p \cdot 100 \cdot f = 100 \cdot P$ .

#### 4. Der statische Wasserdruck auf ebene Gefäßwände.

In Abb. 430 steht das Wasser nur unter dem Druck seines Eigengewichts. In jeder Horizontalschicht, die man auch Niveaufläche nennt, ist der Druck nach allen Richtungen hin gleich. Für die erste Horizontalschicht ist der Druck vertikal und horizontal

$$p_1 = h_1 \cdot \gamma,$$

für die zweite Horizontalschicht

$$p_2 = h_2 \cdot \gamma,$$

für die dritte Horizontalschicht

$$p_3 = h_3 \cdot \gamma,$$

d. h. der Seitendruck ist immer gleich dem zugehörigen Bodendruck.

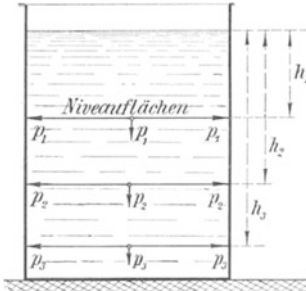


Abb. 430. Der Wasserdruck auf Seitenwände.

#### 5. Statischer und dynamischer Druck.

In Abb. 431 ist ein Behälter mit Zuflußrinne und Bodenöffnung dargestellt. Schließt man die Ausflußöffnung durch eine Bodenplatte ab, so stellt sich am Boden überall der statische Druck

$$p = h \cdot \gamma \quad (1)$$

ein, das ist der Druck der ruhenden Wassersäule über der Platte.

Öffnet man den Bodenausfluß, so fällt jedes Wasserteilchen, vom Wasserspiegel angefangen, um die Fallhöhe  $h$  herunter und erreicht im Ausfluß die Fallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2gh}.$$

Damit wird

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Abb. 431. Umsetzung des statischen Drucks in dynamischen Druck.

Setzt man für  $h$  diesen Wert in Gleichung (1) ein, so wird

$$p = \frac{c^2}{2g} \cdot \gamma.$$

Man nennt diesen Druck den dynamischen Druck. Das ausfließende Wasser kann gegen die Seitenwand der Ausströmöffnung keinen Druck mehr ausüben, denn im strömenden Wasserfaden ist

$h = 0$  geworden, der ganze Druck ist in Geschwindigkeit umgesetzt. Umgekehrt kann man den dynamischen Druck wieder in statischen Druck umsetzen, wenn man den ausfließenden Strahl auf eine Widerstandsfläche auftreffen läßt, die wieder den Staudruck

$$p = h \cdot \gamma$$

auszuhalten hat.

## 6. Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit.

### a) Die Stetigkeitsgleichung.

Es ist nützlich, die Strömungsvorgänge zunächst unter Ausschaltung der Reibung zu betrachten, obwohl jede Flüssigkeit

1. an der Kanalwand reibt und
2. zwischen ihren einzelnen Teilchen Reibungskräften unterliegt.

Wir betrachten die stetige Strömung, eine Strömung, bei der das durch einen beliebigen Querschnitt  $F$  in der Sekunde durchfließende Flüssigkeitsvolumen  $V$  unveränderlich oder stetig bleibt.

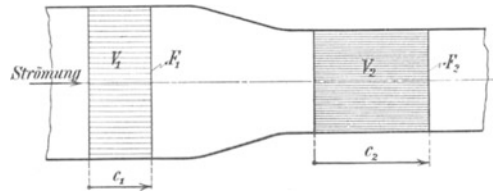


Abb. 432. Die stetige Strömung.

Abb. 432 stellt einen Abschnitt einer gefüllten Leitung dar, in der eine Flüssigkeit stetig strömt. Die Leitung hat zwei verschiedene Querschnitte  $F_1$  und  $F_2$ . Die sekundlichen Volumina sind

$$V_1 = F_1 \cdot c_1 \quad \text{und} \quad V_2 = F_2 \cdot c_2.$$

Damit die Flüssigkeitssäule nicht abreißt, muß sein

$$V_1 = V_2 \quad \text{oder} \quad F_1 \cdot c_1 = F_2 \cdot c_2 = F \cdot c = \text{konst.}$$

Die Gleichung

$$V = F \cdot c = \text{konst.}$$

nennt man die Stetigkeitsgleichung (Kontinuitätsgleichung), sie sagt aus, daß das Wasser sich in gleichen Zeiten um gleiche Volumina vorwärts schiebt. Teilt man die Leitung durch Querschnitte in gleichgroße Volumina, so messen die Entfernungen dieser Querschnitte voneinander die Durchflußgeschwindigkeiten. So ist in Abb. 432 im großen Querschnitt der Abstand  $c_1$  und im kleinen Querschnitt der Abstand  $c_2$  der zeichnerische Darsteller der jeweiligen Strömungsgeschwindigkeit. Man kann die Stetigkeitsgleichung auch schreiben

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

und sagen:

Die Geschwindigkeiten sind den Querschnitten umgekehrt proportional.

### b) Der Satz von Bernoulli.

In Abb. 433 ist eine Strömung in einem geneigten Rohr dargestellt, dessen Querschnitt sich nach der Ausflußöffnung verjüngt. Das strömende Wasser in dieser Leitung hat ein Arbeitsvermögen, das sich für jeden Querschnitt errechnen läßt. Im Rohr ist das Volumen von  $G$  kg Wassergewicht durch Schichtlinien dargestellt. Wegen des abnehmenden Querschnitts wird für das gleiche Volumen die Schichtbreite immer größer. In der Stellung *I* ist die Breite  $c_1$  und entsprechend  $c_2$  und  $c_3$  in den Stellungen *II* und *III*.

Diese Größen  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  sind die bildlichen Darsteller der in diesen Querschnitten herrschenden Strömungsgeschwindigkeiten.

Es werde der Wassertropfen von  $G$  kg Gewicht in der Stel-

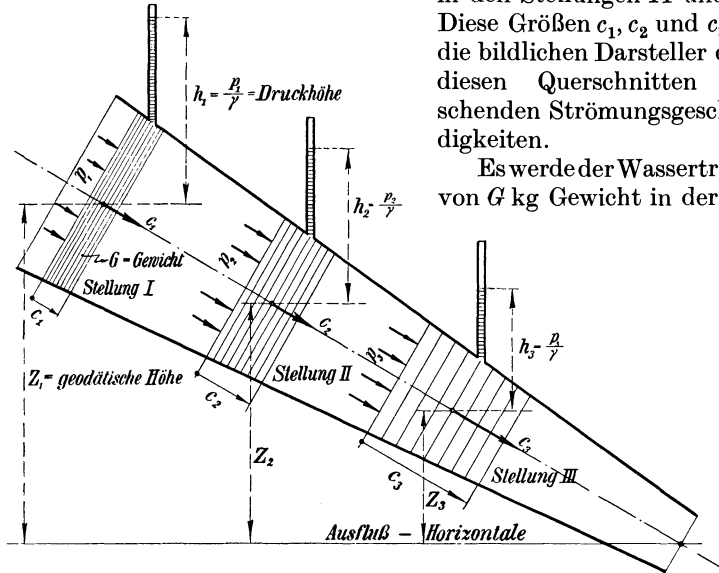


Abb. 433. Wasserströmung in einem geneigten Rohr mit Verjüngung.

lung *I* betrachtet. Sein Schwerpunkt liegt  $z_1$  m über der Ausflußöffnung, auf seine obere Fläche drückt ein Druck  $p_1$ , dessen Größe durch die Wassersäulenhöhe

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

gemessen wird. Die Geschwindigkeit des Wasserkolbens an dieser Stelle ist  $c_1$ . Unter dieser Voraussetzung setzt sich die Energie des Wasserkolbens aus drei Teilen zusammen. Diese sind:

1. die Energie der Lage; das Wassergewicht  $G$  kann noch bis zur Ausflußöffnung die geodätische Höhe  $z_1$  durchfallen und damit die Arbeit  $G \cdot z_1$  leisten.

2. die Energie des Drucks; der auf dem Wasserkolben lastende Druck  $p_1$  verleiht ebenfalls ein Arbeitsvermögen, denn durch den Druck  $p_1$  könnte der Kolben auf die Höhe

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

gehoben werden, wodurch die geodätische Fallhöhe vergrößert würde.

Dieser Arbeitsbetrag hat die Größe

$$G \cdot h_1 = G \cdot \frac{p_1}{\gamma}.$$

Die Größe  $h_1 = \frac{p_1}{\gamma}$  bezeichnet man bekanntlich als statische Druckhöhe.

3. die Energie der Bewegung oder die kinetische Energie; der Wasserkolben hat in der Stellung  $I$  die Geschwindigkeit  $c_1$ , die man sich durch Herabfallen von der Höhe

$$h = \frac{c_1^2}{2g}$$

erzeugt denken kann. Um diesen Betrag wird daher die geodätische Fallhöhe auch noch vermehrt, wodurch die Arbeitsleistung noch um den Betrag

$$G \cdot h = G \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

gesteigert wird. Man nennt bekanntlich  $c_1^2 : 2g$  die dynamische oder Geschwindigkeitshöhe.

**Ergebnis:** Die Energie des Wasserkolbens in der Stellung  $I$  ist zusammengefaßt

$$E_1 = G \cdot \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} \right) \text{ mkg.}$$

1. Folgerung: Die Energie des Wasserkolbens in der Stellung  $II$  ist

$$E_2 = G \cdot \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} \right) \text{ mkg.}$$

Für die Stellung  $III$  ist die Energie des Wasserkolbens

$$E_3 = G \cdot \left( z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{c_3^2}{2g} \right) \text{ mkg.}$$

2. Folgerung: Wird auf dem ganzen Wege von Stellung  $I$  nach Stellung  $III$  keine Reibungsarbeit geleistet, so muß der Energieinhalt des Wasserkolbens konstant bleiben, d. h. es ist

$$E_1 = E_2 = E_3 = \text{konst.}$$

oder

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{konst.}$$

Diese Gleichung ist von Bernouilli aufgestellt. Der Bernouillische Satz lautet:

*In einer reibungsfrei strömenden Flüssigkeit bleibt die Summe der geodätischen Höhe, der statischen Druckhöhe und der dynamischen Druckhöhe an jeder Stelle des Stromkanals konstant.*

Bei waagerechem Kanal fallen die Höhenunterschiede fort, alsdann bleibt die Summe der statischen und dynamischen Druckhöhe an jeder Stelle des Stromkanals konstant.

In Abb. 434 ist an den Boden eines Wasserbehälters, dessen Spiegel durch Zufluß auf konstanter Höhe erhalten wird, ein senkrecht abfallendes Rohr mit veränderlichem Querschnitt angeschlossen. Für jeden Wassertropfen, der von der Niveaufläche  $A$  bis zur Niveaufläche  $B$

abwärts strömt, steht die durch die Ausflußdruckhöhe  $H$  gemessene potentielle Energie  $E$  zur Verfügung, d. h. jeder Wassertropfen vom Gewicht  $G$  hat das gleiche Arbeitsvermögen:

$$A = G \cdot H.$$

Im Abflußrohr sind an den Querschnitten  $I$ ,  $II$ ,  $III$  und  $IV$  Meßröhrchen angebracht, um die Drücke zu messen. Würde man die Ausflußöffnung schließen, so würde sich in allen Meßröhrchen der Wasserspiegel horizontal auf die Behälterwasserhöhe einspielen, und man würde die Druckhöhen  $H_1, H_2, H_3$  und  $H_4 = H$  messen. Bei geöffneter Ausflußmündung fallen die Wasserspiegel.

Im Querschnitt  $I$  herrsche die Wassergeschwindigkeit  $v_1$ . Um diese zu erzeugen, ist von der Teilhöhe  $H_1$  die Druckhöhe

$$h_{d_1} = \frac{v_1^2}{2g}$$

verbraucht, man wird also in dem Meßröhrchen nur die Druckhöhe

$$h_1 = H_1 - h_{d_1}$$

messen. Man nennt die zu messende Druckhöhe  $h_1$  die statische Druckhöhe und die zu berechnende Druckhöhe  $h_{d_1}$  die dynamische Druckhöhe.

Nach der Figur ist

$$H_1 = h_1 + h_{d_1}.$$

Das Wasser kann aber vom Querschnitt  $I$  bis zur Ausflußöffnung noch die geodätische Höhe  $z_1$  durchfallen, also ist an dieser Stelle die ganze Energie für 1 kg strömendes Wasser

$$E = H = H_1 + z_1 = (h_1 + h_{d_1} + z_1) \text{ mkg},$$

d. h. die ganze Energie des strömenden Wassers setzt sich an dieser Stelle des Stromkanals aus drei Energien oder Druckhöhen zusammen:

1. aus der Energie des Druckes  $E_1 = h_1 =$  statische Druckhöhe;
2. aus der Energie der Bewegung (kinetische Energie)  $E_2 = h_{d_1} =$  dynamische Druckhöhe;
3. aus der Energie der Lage  $E_3 = z_1 =$  geodätische Druckhöhe.

Nach dem Satz von Bernoulli gilt diese Beziehung für alle Querschnitte des Stromkanals, also ist

für Querschnitt  $II$ : 
$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

$$H = h_2 + h_{d_2} + z_2,$$

für Querschnitt  $III$ : 
$$H = h_3 + h_{d_3} + z_3.$$

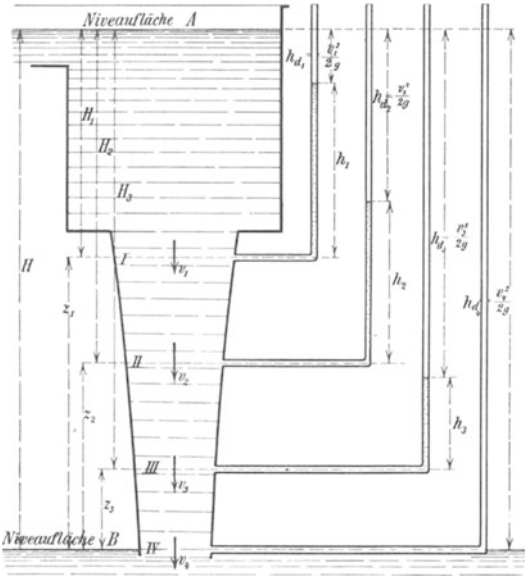


Abb. 434. Die Druckverhältnisse beim Fließen.

Im Ausflußquerschnitt, der in der Niveauebene  $B$  liegt, ist die gesamte potentielle Energie in kinetische Energie umgesetzt, d. h. es ist

$$H = \frac{v_4^2}{2g} = h_{d_4}$$

und es ist die statische Druckhöhe  $h_4 = 0$  und die geodätische Druckhöhe  $z_4 = 0$ , also gilt auch hier der Bernoullische Satz

$$H = h_4 + h_{d_4} + z_4,$$

$$H = 0 + h_{d_4} + 0.$$

Man kann nach der Bernoullischen Gleichung die Geschwindigkeiten in den Querschnitten errechnen, z. B. ist für Querschnitt  $III$

$$H = h_3 + h_{d_3} + z_3 \quad \text{oder} \quad h_{d_3} = H - h_3 - z_{d_3},$$

hat man z. B. gemessen  $H = 17$  m,  $h_3 = 7$  m und  $z_3 = 3$  m, so ist

$$h_{d_3} = 17 - 7 - 3 = 7 \text{ m},$$

$$\frac{v_3^2}{2g} = 7 \quad \text{oder} \quad v_3 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 7} = 11,7 \text{ m/sek.}$$

In Abb. 435 ist am Behälter ein Bodenrohr mit konstantem Querschnitt angebracht. Die Wasserteilchen können von der Niveauebene  $A$  bis zur Niveauebene  $B$  abwärts strömen, d. h. es steht die potentielle Energie  $H$  zur Verfügung. Es werde der Mündungsquerschnitt  $I$  und der Rohrquerschnitt  $II$  am Bodenanschluß nach Bernoulli untersucht. Hält man die Ausflußmündung zu, so spielt in beiden Meßröhren der Wasserspiegel sich horizontal mit dem Behälterwasserspiegel ein. Bei geöffneter Ausflußmündung verschwindet die Wassersäulenhöhe im Meßrohr  $I$  ganz, d. h. der statische Druck ist

$$h_1 = 0,$$

und da bis zur Niveauebene  $B$  keine weitere geodätische Höhe durchfallen wird, ist ferner die geodätische Höhe

$$z_1 = 0.$$

Nach Bernoulli ist

$$H = h_1 + h_{d_1} + z_1,$$

oder, da  $h_1 = 0$  und  $z_1 = 0$  ist,

$$H = h_{d_1} = \frac{v_1^2}{2g},$$

d. h. die ganze potentielle Energie wird in kinetische Energie umgesetzt.

Im Querschnitt  $II$  muß sein

$$v_2 = v_1, \quad \text{also auch} \quad \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{oder} \quad h_{d_2} = h_{d_1} = H,$$

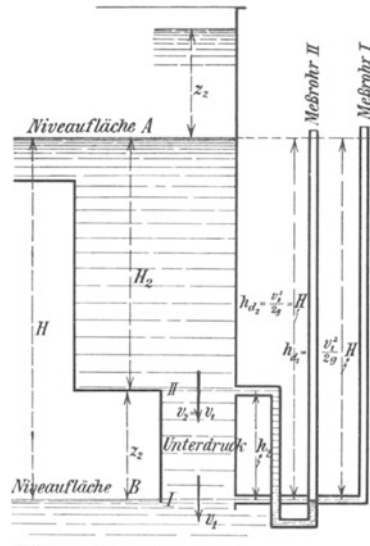


Abb. 435. Das Saugrohr.

denn sonst würde die Wassersäule abreißen, wenn die Geschwindigkeit  $v_2$  kleiner als  $v_1$  wäre.

Nach Bernoulli ist wieder

$$H = h_2 + h_{d_2} + z_2$$

oder, da  $h_{d_2} = H$  ist,

$$H = h_2 + H + z_2,$$

$$h_2 = H - H - z_2 = -z_2,$$

d. h. im Querschnitt *II* muß sich ein Unterdruck von  $z_2$  Meter Wassersäule einstellen. Das angesetzte Bodenrohr wirkt also wie ein Saugrohr, es stellt in der Bodenöffnung eine erhöhte Ausflußgeschwindigkeit her, und wirkt für die Bodenöffnung genau so wie eine Erhöhung des Wasserspiegels um den Betrag

der Saugrohrlänge unter Fortnahme des Saugrohres. Das ist in der Figur auch angedeutet.

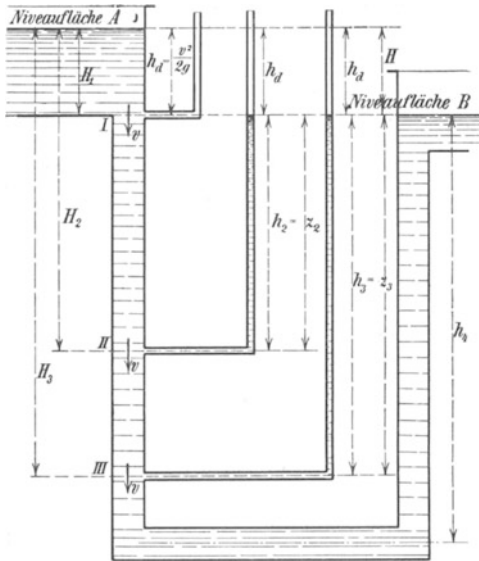


Abb. 436. Die Druckverhältnisse beim Strömen durch ein U-Rohr.

In der Wetterlehre stehen wir vor der Aufgabe, die Bewegung des Wetterstromes im ein- und ausziehenden Schacht zu verfolgen. Dieser Strömungsvorgang ist im Prinzip derselbe, wie der in Abb. 436 dargestellte. Ein U-Rohr verbindet zwei Wasserbehälter, so daß das Wasser von der Niveaufläche *A* nach der Niveaufläche *B* abströmen kann. Der Satz von Bernoulli erklärt uns diesen Strömungsvorgang, indem er aussagt, daß die

Summe der statischen, dynamischen und geodätischen Druckhöhe an jeder Stelle des Stromkanals konstant sein muß.

Im Abflußrohr sind in den Querschnitten *I*, *II* und *III* Meßröhrchen angebracht, um die statischen Drucke zu messen.

Im Querschnitt *I* herrsche die Wassergeschwindigkeit  $v$ . Um diese zu erzeugen, werde die Teilhöhe  $H_1$  vollständig verbraucht, dann ist

$$h_d = \frac{v^2}{2g} = H_1,$$

d. h. in dem angeschlossenen Meßröhrchen wird die statische Druckhöhe

$$h_1 = H_1 - h_d = H_1 - H_1 = 0$$

gemessen. Nun liegt die Niveaufläche *B* im Abstände

$$H = H_1$$



von der oberen Niveaulfläche  $A$  und demnach kann durch weiteres Durchfallen einer geodätischen Höhe keine Arbeit hinzugeleistet werden, da von hier ab die geodätische Höhe  $z_1 = 0$  ist, wenn unter geodätischer Höhe der senkrechte Abstand des betrachteten Querschnittes von der unteren Niveaulfläche verstanden ist. Weil die gesamte Ausflußdruckhöhe  $H$  in kinetische Energie umgesetzt ist, kann auch keine größere Geschwindigkeit mehr möglich sein, wenn das Rohr überall denselben Querschnitt behält.

Im Querschnitt  $II$  steht das Wasser unter dem statischen Druck

$$H_2 - h_d = h_2.$$

Nach Bernoulli ist

$$H = h_2 + h_d - z_2,$$

denn um die geodätische Höhe  $z_2$  muß das Wasser wieder gehoben werden. Mit  $h_d = H$  wird

$$H = h_2 + H - z_2 \quad \text{oder} \quad h_2 = z_2.$$

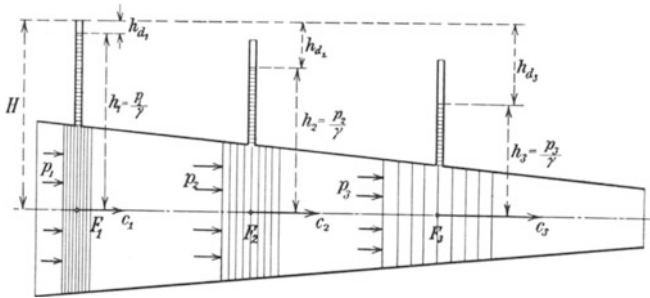


Abb. 437. Das Strömen im horizontalen Rohr bei abnehmendem Querschnitt.

Für den Querschnitt  $III$  erhalten wir in gleicher Weise den statischen Druck

$$H_3 - h_d = h_3$$

und nach Bernoulli

$$H = h_3 + h_d - z_3,$$

mit  $h_d = H$  wird wieder

$$H = h_3 + H - z_3 \quad \text{oder} \quad h_3 = z_3.$$

Wir sehen, die statischen Drücke werden um so größer, je tiefer der Querschnitt liegt, er wird am größten im unteren Verbindungsrohr. Dieser Rohrquerschnitt hat an allen Stellen den gleichen statischen Druck  $h_4$  Meter Wassersäule.

Eine Strömung in einem wagerechten Kanal mit veränderlichem Querschnitt zeigt Abb. 437. Auch hier gilt der Satz von Bernoulli, da die einzelnen Querschnitte aber in gleicher Höhe liegen, fällt die Energie der Lage bei der Aufstellung der Gleichung fort. Der Bernoullische Satz lautet daher für diese Strömung:

Die Summe der statischen und dynamischen Druckhöhe ist an jeder Stelle des Stromkanals konstant.

In den Querschnitten  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  sind Meßröhrchen angebracht, in diesen Querschnitten herrschen die Drücke  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ , in  $\text{kg/m}^2$  gemessen. Für  $1 \text{ m}^2$  Druckfläche ist also

$$p \cdot 1 = 1 \cdot h \cdot \gamma,$$

wenn bedeutet

$$h = \text{Druckhöhe in m} \quad \text{und} \quad \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

Allgemein ist dann  $h = \frac{p}{\gamma}$ , also messen wir in den Meßröhrchen

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}, \quad h_2 = \frac{p_2}{\gamma} \quad \text{und} \quad h_3 = \frac{p_3}{\gamma} \text{ Meter Wassersäule.}$$

Die Geschwindigkeiten in diesen Querschnitten sind  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$ . Die Bernoullische Gleichung lautet dann

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{c_3^2}{2g} = \text{konst.}$$

oder

$$h_1 + h_{d_1} = h_2 + h_{d_2} = h_3 + h_{d_3} = H.$$

Man sieht aus der Figur, daß die statischen Druckhöhen kleiner, dagegen die dynamischen Druckhöhen größer werden. Man kann daher auch schreiben

$$h_1 - h_2 = h_{d_2} - h_{d_1} \quad \text{und} \quad h_2 - h_3 = h_{d_3} - h_{d_2},$$

d. h. die Abnahme an potentieller Energie ist gleich der Zunahme an kinetischer Energie.

## 7. Anwendungen des Bernoullischen Satzes.

### a) Querschnittsveränderungen.

An einen Wasserbehälter, Abb. 438, ist eine horizontale Rohrleitung mit Verengungen und Erweiterungen angeschlossen. In den

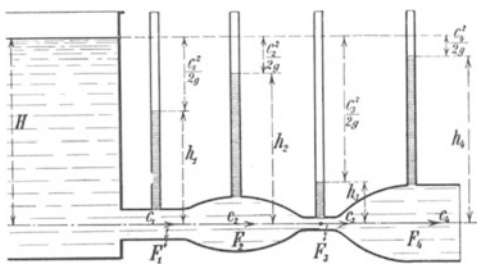


Abb. 438. Die Druckverhältnisse bei Querschnittsänderungen.

Querschnitten  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  und  $F_4$  sind Standrohre angebracht, um die Drücke zu messen. Bei geschlossener Ausflußöffnung steht der Wasserspiegel in allen Rohren in gleicher Höhe wie im Behälter. In jedem Querschnitt herrscht derselbe Druck, der statische Druck  $H$  oder die potentielle Energie  $H$ .

Sobald die Bewegung des Wassers in der Rohrleitung einsetzt, stellen sich die Wasserspiegel verschieden hoch ein. In jedem Röhrchen sinkt der Wasserspiegel um die dynamische Druckhöhe, und es ist nach Bernoulli

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2g} = h_2 + \frac{c_2^2}{2g} = h_3 + \frac{c_3^2}{2g} = h_4 + \frac{c_4^2}{2g} = H = \text{konst.}$$

In dem engsten Querschnitt  $F_3$  herrscht die größte Geschwindigkeit  $c_3$ , so daß die statische Druckhöhe  $h_3$  am kleinsten wird. Und nun könnte man die Verengung so weit treiben, daß der statische Druck unter den

atmosphärischen Druck fällt, d. h. man könnte sogar eine Saugspannung herstellen.

Dieser Fall ist in Abb. 439 dargestellt. Durch ein horizontales, ins Freie mündende Rohr vom Querschnitt  $F$  fließt unter dem Druck von  $H$  Meter Wassersäule Wasser aus. Welchen Querschnitt  $f$  muß die Verengung haben, damit an dieser Stelle ein Unterdruck von der Größe  $-\frac{p}{\gamma}$  entsteht?

An der Mündung ist die ganze Druckhöhe  $H$  in die Geschwindigkeit  $v$  umgesetzt, d. h. hier herrscht der statische Druck Null. An der engsten Stelle  $f$  soll die Geschwindigkeit  $c$  und der statische Druck  $-\frac{p}{\gamma}$  sein. Nach dem Satz von Bernoulli ist

$$-\frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = 0 + \frac{v^2}{2g} = H,$$

$$\frac{c^2}{2g} = H + \frac{p}{\gamma} \quad \text{oder} \quad c = \sqrt{2g \cdot \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)}.$$

Nach der Stetigkeitsgleichung muß sein

$$f \cdot c = F \cdot v,$$

$$f = F \cdot \frac{v}{c} = F \cdot \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{2g \cdot \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)}} \quad \text{oder} \quad f = F \cdot \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H + \frac{p}{\gamma}}}.$$

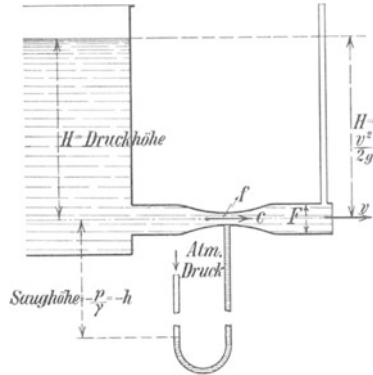


Abb. 439. Saugwirkung im engsten Querschnitt.

### b) Die Wasserstrahlpumpe.

Wenn in der Rohrverengung Saugspannung herrscht, kann man diese Saugspannung auch ausnützen, um Wasser hochzusaugen. Man nennt solche Vorrichtungen Wasserstrahlpumpen. Der Wirkungsgrad der Strahlpumpen ist schlecht, er beträgt erfahrungsgemäß

$$\eta = 0,15 \text{ bis } 0,40,$$

d. h. es werden nur 15 bis 40% der theoretisch verfügbaren Leistung in Wasserhebeleistung umgesetzt. In Abb. 440 soll mittels einer Wasserstrahlpumpe das Wasser aus einem Sumpf gehoben werden. Es stehe im Druckbehälter eine Druckhöhe von  $H = 4$  m zur Verfügung. Die Druckleitung habe eine lichte Weite von  $D = 50$  mm und die zu überwindende Saughöhe sei  $h_1 = 4$  m. Welche Einschnürung muß das Ausflußrohr erhalten?

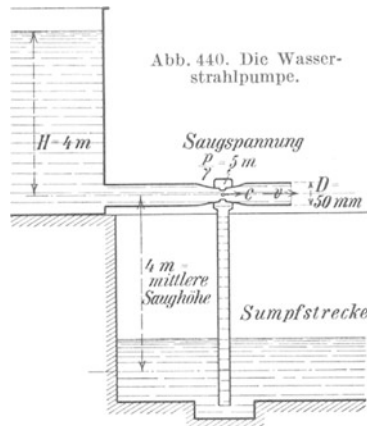


Abb. 440. Die Wasserstrahlpumpe.

Um eine Saughöhe von 4 m zu überwinden, muß man eine größere Saugspannung anwenden, man rechne zur Überwindung aller Widerstände mit

$$\frac{p}{\gamma} = h = 8 \text{ m.}$$

Die Verengung des Rohrquerschnitts muß sein

$$f = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H + \frac{p}{\gamma}}} \cdot F = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4 + 8}} \cdot F = 0,576 \cdot F,$$

$$f = 0,576 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 = 11,3 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{\pi}{4} d^2 = 11,3 \text{ cm}^2 \quad \text{oder} \quad d = 3,8 \text{ cm} = 38 \text{ mm.}$$

Die verfügbare Energie liefert die unter  $H = 4$  m Druck ausfließende Wassermenge. Der Querschnitt der Ausflußleitung ist

$$F' = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 = 19,6 \text{ cm}^2 = 0,00196 \text{ m}^2.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,85 \text{ m/sek.}$$

Das ausströmende Wasservolumen ist

$$V = F' \cdot v = 0,00196 \cdot 8,85 = 0,01735 \text{ m}^3/\text{sek}$$

oder

$$G = 17,35 \text{ kg/sek.}$$

Die Arbeitsleistung des Wassers ist

$$L_0 = G \cdot H = 17,35 \cdot 4 = \sim 69 \text{ mkg/sek.}$$

Mit dem Wirkungsgrad  $\eta = 0,20$  der Strahlpumpe wird dann die Pumpenleistung

$$L_e = \eta \cdot L_0 = 0,20 \cdot 69 = 13,8 \text{ mkg/sek.}$$

Ist  $G_1$  kg das sekundlich angesaugte Wassergewicht und  $h_1 = 4$  m die Saughöhe, so wird

$$G_1 \cdot h_1 = L_e \quad \text{oder} \quad G_1 = \frac{L_e}{h_1} = \frac{13,8}{4} = 3,45 \text{ kg/sek,}$$

d. h. es steht von der Strahlpumpe eine Wasserförderung von

$$Q = 3,45 \text{ l/sek} = 207 \text{ l/min}$$

zu erwarten.

Mit Rücksicht auf die hinzukommende Wassermenge müßte man von der Anschlußstelle der Saugleitung bis zum Ausfluß das Rohr erweitern auf

$$F = \frac{0,01735 + 0,00345}{v} = \frac{0,0208}{8,85} = 0,00235 \text{ m}^2 = 23,5 \text{ cm}^2.$$

Damit wird  $D = 5,5 \text{ cm} = 55 \text{ mm.}$

Von der Saugspannungssäule 8 m werden 4 m durch die Saughöhe verbraucht, 3 m sollen durch Widerstände verbraucht werden, so daß 1 m Wassersäulenhöhe übrig bleiben zur Geschwindigkeitserzeugung in der Saugleitung. Also kann im Saugrohr höchstens die Wassergeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2g \cdot 1} = 4,43 \text{ m/sek} = 443 \text{ cm/sek}$$

sein. Der erforderliche Saugrohrquerschnitt ist für  $V_1 = 3,45 \text{ kg/sek} = 3450 \text{ cm}^3/\text{sek}$

$$F_1 = \frac{V_1}{c} = \frac{3450}{443} = 7,8 \text{ cm}^2,$$

Rohrdurchmesser  $D_1 = 3,15 \text{ cm} = 31,5 \text{ mm}$ .

Die Wasserstrahlpumpe findet wegen ihres schlechten Wirkungsgrades nur dann Anwendung, wenn die Wasserhebung nur vorübergehend erfolgt, z. B. zum Sumpfen von kleinen Wassereinbrüchen in Strecken.

### 8. Die Energiegleichung mit Berücksichtigung der Reibung.

Die Strömungsvorgänge erfordern eine Berücksichtigung der Reibungsvorgänge. In Abb. 441 ist eine Rohrstrecke mit zwei verschiedenen Querschnitten dargestellt. Im Querschnitt  $I$  ist die vorhandene Energie

$$E = \frac{c_1^2}{2g} + h_1.$$

Auf dem Wege vom Querschnitt  $F$  bis zur Meßstelle des Querschnitts  $f$  wird ein Teil dieser Energie zur Überwindung der Reibungswiderstände verbraucht. Dieser Energieverlust wird durch die Reibungswiderstandshöhe  $h_r$  in Rechnung gestellt, man beobachtet an der zweiten Meßstelle die statische Druckhöhe  $h_2$ , dann muß nach der Bernoullischen Energiegleichung sein

$$\frac{c_2^2}{2g} + h_r + h_2 = \frac{c_1^2}{2g} + h_1$$

und es ist die Widerstandshöhe

$$h_r = h_1 - h_2 - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}.$$

Unter  $c_1$  und  $c_2$  sind die mittleren Geschwindigkeiten verstanden, die sich aus den Gleichungen

$$c_1 = \frac{V}{F} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{V}{f}$$

errechnen lassen.



Abb. 441. Der Reibungswiderstand beim Strömen.

## 9. Die Rohrreibung.

### a) Die Reibungsgleichung für Rohre.

Strömt Wasser aus einem Behälter in eine Rohrleitung über, so ist zur Erzeugung der Strömungsgeschwindigkeit  $v$  die Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} \text{ Meter Wassersäule}$$

erforderlich. Zur Überwindung des Rohrwiderstandes, der aus Reibung der Flüssigkeitsteilchen an der Rohrwand und aus Wirbelwiderständen in der Flüssigkeit selbst besteht, ist eine zusätzliche Druckhöhe  $h_r$  erforderlich, welche ein Bruchteil oder ein Vielfaches der Geschwindigkeitshöhe  $h$  ist. Hat dieser Bruchteil für 1 m Rohrlänge bei 1 m Rohrdurchmesser den Wert  $\lambda$ , so würde sein

$$h_r = \lambda \cdot h.$$

Nun hat man durch Messungen an Versuchsanlagen festgestellt, daß der Reibungswiderstand wächst

1. direkt proportional mit der Länge  $l$  der Rohrleitung,
2. umgekehrt proportional mit dem Durchmesser  $d$ .

Demnach muß die zusätzliche Druckhöhe unter Einsetzung dieser Größen nach dem Gesetz

$$h_r = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter Wassersäule}$$

errechnet werden. Ist z. B.  $l=1000$  m,  $d=0,10$  m,  $v=0,50$  m/sek und  $\lambda=0,022$ , so ist die zusätzliche Druckhöhe

$$h_r = 0,022 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 2,8 \text{ m W.S.} \quad \text{oder} \quad p = \frac{2,8}{10} = 0,28 \text{ at.}$$

Die Durchführung solcher Rechnung ist nur möglich, wenn für alle Betriebszustände die Reibungsbeiwerte  $\lambda$  bekannt sind. Die Strömungsforschung erbrachte ein überraschendes Ergebnis. Sie fand, daß der Reibungsbeiwert  $\lambda$  bei der Strömung durch Rohre ein und denselben Wert hat, ob Wasser, Öl, Luft oder Gas strömt, wenn nur die Strömungsvorgänge dynamisch ähnlich sind. Diese dynamische Ähnlichkeit hängt von drei Faktoren ab:

1. von der Strömungsgeschwindigkeit,
2. von dem Rohrdurchmesser,
3. von der inneren Reibung der strömenden Flüssigkeit.

Diese drei Faktoren schließen sich zu einem Zahlenwert zusammen, den man die Reynoldssche Zahl nennt. Der Reibungsbeiwert  $\lambda$  wird eine Abhängige von der Reynoldsschen Zahl. Kennt man dieses Abhängigkeitsverhältnis, so hat man für alle strömenden Stoffe und für alle Betriebszustände den richtigen Reibungsbeiwert.

### b) Die Ableitung der Reynoldsschen Zahl.

#### 1. Die Zähigkeit der Flüssigkeiten.

Bei Strömungsvorgängen spielt das Aneinanderhaften der Stoffteilchen — die innere Reibung — eine große Rolle. Man spricht von einer Zähigkeit der Flüssigkeiten und versteht darunter den Wider-

stand, den das Verschieben eines Stoffteilchens gegen den anderen hervorruft. Dieser Verschiebungswiderstand wird bei dickflüssigen Massen größer sein als bei dünnflüssigen. Zieht man z. B. ein Messer durch eine flüssige Honigmasse, so wird man einen größeren Widerstand als beim Ziehen durch eine Wassermasse empfinden, d. h. der Honig ist zäher als Wasser.

In Abb. 442 sind zwei Platten durch eine zähe  $l$  cm dicke Flüssigkeitsschicht voneinander getrennt. Die untere Platte liege fest, während die obere parallel zur festen verschoben werden kann. Die Verschiebungsgeschwindigkeit sei  $v$  cm/sek. Die Flüssigkeit haftet oder klebt an den Platten. Vor der Verschiebung liegen die beiden Flüssigkeitsteilchen  $P_1$  und  $P_2$  vertikal übereinander, nach der Verschiebung ist  $P_1$  nach  $P_1'$  gerückt, während  $P_2$  stehengeblieben ist. Die Verschiebung der einzelnen Niveauschichten wird



Abb. 442. Der Verschiebungswiderstand einer Platte.

durch die schräge Linie  $P_1'P_2$  gekennzeichnet, d. h. die Schichtverschiebung wird um so geringer, je größer der Abstand der Schichten von der beweglichen Platte wird, denn an der beweglichen Platte ist  $P_1P_1'$  der größte Verschiebungsweg, der mit der Richtung nach der festen Platte hin bei zunehmendem  $l$  immer kleiner wird.

Die Verschiebung erfordert zur Überwindung der Flüssigkeitszähigkeit eine Kraft. Diese Verschiebungskraft habe für  $1 \text{ cm}^2$  Verschiebungsfläche die Größe  $\tau$ . Poiseulle stellte für die Größe der Verschiebungskraft auf Grund von Versuchen folgendes Gesetz auf:

$$\tau = \mu \cdot \frac{v}{l}. \tag{1}$$

Der Beiwert  $\mu$  ist eine Naturkonstante der Flüssigkeit, man nennt ihn die Zähigkeit und versteht darunter diejenige Verschiebungskraft, welche für  $1 \text{ cm}^2$  Verschiebungsfläche bei  $v = 1 \text{ cm}$  Geschwindigkeit und  $l = 1 \text{ cm}$  Abstand aufzuwenden ist.

Nach Poiseulle wächst demnach der Zähigkeits- oder Reibungswiderstand

1. direkt proportional mit der Zähigkeit  $\mu$  der Flüssigkeit,
2. direkt proportional mit der Verschiebungsgeschwindigkeit  $v$ ,
3. umgekehrt proportional mit dem Abstand  $l$  von der Wand.

Die Zähigkeitskonstante eines Stoffes errechnet sich demnach durch Umstellung der Gleichung (1) zu

$$\mu = \frac{\tau \cdot l}{v}. \tag{2}$$

Man rechnet aber in der Strömungslehre nicht mit den Zähigkeitswerten  $\mu$ , sondern mit der kinematischen Zähigkeit der Strömungsflüssigkeiten. Darunter versteht man die Verhältniszahl

$$\frac{\text{Zähigkeit}}{\text{Dichte}} = \frac{\mu}{\rho}.$$

$\rho$  hat folgende Bedeutung, ist  $\gamma$  das Gewicht der Volumeneinheit, so nennt man die Masse der Volumeneinheit, also die Größe

$$\frac{\gamma}{g} = \text{spezifische Masse} = \text{Dichte} = \rho.$$

Die kinematische Zähigkeit, welche mit  $\nu$  bezeichnet wird, ist demnach

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu \cdot g}{\gamma}.$$

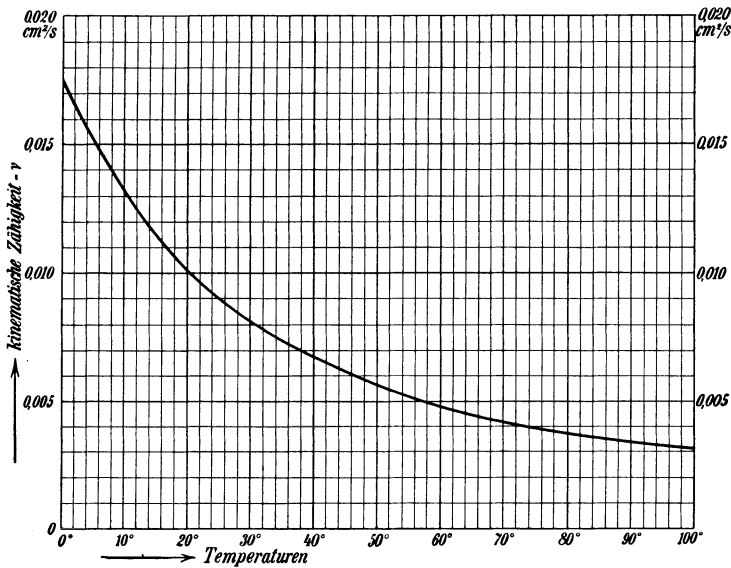


Abb. 443. Die kinematische Zähigkeit des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Kinematik heißt Bewegung, man könnte also auch sagen Bewegungszähigkeit. Die Ableitung erinnert an die bekannte Mechanikformel

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \text{Beschleunigung}, \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu.$$

$\nu$  ist also eine Beschleunigungszahl, denn  $\mu$  ist eine Kraftzahl und  $\rho$  eine Massenzahl

Welche Dimension hat die kinematische Zähigkeit? Setzt man unter Beachtung von Gleichung (2) in der Gleichung

$$\nu = \frac{\mu \cdot g}{\gamma} = \frac{\tau \cdot l \cdot g}{v \cdot \gamma}$$

für die einzelnen Formelgrößen die Maßeinheiten ein, so ist

$$\nu = \frac{\text{kg/cm}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm/sek}^2}{\text{cm/sek} \cdot \text{kg/cm}^3} = \frac{\text{kg} \cdot \text{sek} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}^3}{\text{cm}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{kg} \cdot \text{sek}^2} = \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}.$$

Man wird daher nachstehend die Zahlenwerte  $\nu$  mit der Einheitsbezeichnung cm<sup>2</sup>/sek benannt finden.



Zähigkeit und kinematische Zähigkeit sind Zahlenwerte, welche als Naturkonstanten der Flüssigkeit für jede Flüssigkeit andere Größe haben. Sie sind in hohem Maße von der Temperatur der Flüssigkeit abhängig, bei gasförmigen Stoffen besteht auch eine Abhängigkeit vom Druck. Die Werte sind von Physikern experimentell bestimmt.

In Abb. 443 ist für Wasser die kinematische Zähigkeit  $\nu$  in  $\text{cm}^2/\text{sek}$  als Funktion der Temperaturen aufgetragen. Man liest z. B. bei  $20^\circ$  den Wert

$$\nu = 0,0101 \text{ cm}^2/\text{sek.}$$

Die kinematische Zähigkeit einiger anderer Flüssigkeiten ist bei  $15^\circ \text{ C}$  z. B.

Glyzerin	$\nu = 11,600 \text{ cm}^2/\text{sek}$ ,	Alkohol	$\nu = 0,0167 \text{ cm}^2/\text{sek}$ ,
Benzol	$\nu = 0,079$ „	Äther	$\nu = 0,00268$ „

## 2. Die dynamische Ähnlichkeit zweier Strömungsvorgänge.

Der englische Physiker Reynolds stellte 1881 die Bedingungen für den dynamisch ähnlichen Verlauf zweier Strömungsvorgänge auf. Die erste Bedingung ist die geometrische Ähnlichkeit der Strömungskanäle, d. h. erfolgt der erste Strömungsvorgang in einem Rohr, so kann der geometrisch ähnliche Strömungsvorgang auch wieder nur in einem Rohr erfolgen. Die geometrische Ähnlichkeit der Rohre ist vorhanden, wenn die Rauheit des zweiten Rohres geometrisch ähnlich der Rauheit des ersten Rohres ist. Ist die Rohrwand des einen Rohres vollkommen glatt, so kann auch nur dann eine geometrische Ähnlichkeit bestehen, wenn das andere Rohr auch vollkommen glatt ist.

Die zweite Bedingung für die dynamische Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge ist die Ähnlichkeit der Kräfte. Was für Kräfte kommen vor? Die strömende Flüssigkeit kann vermöge ihrer kinetischen Energie oder ihrer lebendigen Kraft oder Trägheitskraft Widerstände überwinden. Der Strömungsvorgang bringt aber infolge innerer Flüssigkeitsreibung und Wandreibung eine Widerstandskraft. Wir haben also zwei Kräfte

1. eine lebendige Kraft  $L$ ,
2. eine Widerstandskraft  $W$ .

Ist das Verhältnis dieser beiden Kräfte für zwei Strömungsvorgänge gleich, so verlaufen sie dynamisch ähnlich.

Wenn z. B. für die erste Strömung die Werte  $L_1$  und  $W_1$  und für die zweite die Werte  $L_2$  und  $W_2$  vorherrschen, so heißt die Ähnlichkeitsbedingung

$$\frac{L_1}{W_1} = \frac{L_2}{W_2} = \text{konst.}$$

Man muß nun für die Werte  $L$  und  $W$  allgemein gültige Gesetze finden. Die lebendige Kraft  $L$  der mit der Geschwindigkeit  $v$  strömenden Masse  $m$  ist

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Für die spezifische Masse, d. i. die Masse der Volumeneinheit

$$m = \frac{\gamma}{g} = \rho$$

ist

$$L = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2.$$

Der Verschiebungswiderstand für die Flächeneinheit ist nach dem Poiseulleschen Gesetz

$$W = \tau = \frac{\mu \cdot v}{l}.$$

Das Verhältnis beider Werte ist

$$\frac{L}{W} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}{\frac{\mu \cdot v}{l}} = \frac{\rho \cdot v^2 \cdot l}{2 \cdot \mu \cdot v} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{2 \cdot \mu}.$$

Nun ist

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu \quad \text{oder} \quad \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{\nu},$$

also wird allgemein

$$\frac{L}{W} = \frac{v \cdot l}{2 \cdot \nu}.$$

Für die beiden Strömungsvorgänge ist demnach

$$\frac{L_1}{W_1} = \frac{v_1 \cdot l_1}{2 \cdot \nu_1} \quad \text{und} \quad \frac{L_2}{W_2} = \frac{v_2 \cdot l_2}{2 \cdot \nu_2},$$

und da

$$\frac{L_1}{W_1} = \frac{L_2}{W_2}$$

sein muß, so lautet die Bedingungsgleichung allgemein

$$\frac{v_1 \cdot l_1}{2 \cdot \nu_1} = \frac{v_2 \cdot l_2}{2 \cdot \nu_2} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1 \cdot l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \cdot l_2}{\nu_2} = \text{konst.}$$

Man nennt das Zahlenverhältnis

$$\frac{v \cdot l}{\nu} = R \quad \text{die Reynoldssche Zahl.}$$

Bei Strömungsvorgängen in Rohren hat der mittlere Stromfaden den größten Abstand von der festen Wand, also ist der Größenfaktor  $l$  für Rohre

$$l = \frac{d}{2},$$

d. h. für Rohre lautet die Ähnlichkeitsbedingung

$$\frac{v_1 \cdot d_1}{\nu_1 \cdot 2} = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu_2 \cdot 2} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu_2} = \text{konst.}$$

Demnach heißt die Reynoldssche Zahl für Strömungsvorgänge in Rohren allgemein

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu}.$$

Strömt dieselbe Flüssigkeit in Rohren von verschiedenem Durchmesser, so lautet die Bedingung für dynamische Ähnlichkeit beider Strömungsvorgänge, da  $\nu_1 = \nu_2$  ist,

$$v_1 \cdot d_1 = v_2 \cdot d_2 \quad \text{oder} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

d. h. die Strömungsgeschwindigkeiten müssen sich umgekehrt wie die Rohrdurchmesser verhalten.

**Beispiel:** In einem Rohr von  $d_1 = 30$  cm Durchmesser ströme Wasser mit  $v_1 = 0,80$  m/sek, dann ist der Strömungsvorgang in einem Rohr von  $d_2 = 60$  cm Durchmesser dem ersten dynamisch ähnlich, wenn

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} = 0,80 \cdot \frac{30}{60} = 0,40 \text{ m/sek}$$

ist, d. h. bei diesen beiden Geschwindigkeiten hat die Reynoldssche Zahl für beide Strömungsvorgänge dieselbe Größe, und damit ist der Reibungsbeiwert  $\lambda$  für beide Strömungsvorgänge derselbe.

Beim Strömen verschiedener Flüssigkeiten ist auch der  $\nu$ -Wert verschieden, also ist dann die Gleichung

$$\frac{v_1 \cdot d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu_2}$$

zu erfüllen und es muß die zweite Strömungsgeschwindigkeit

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

sein.

**Beispiel:** In einem Rohr von  $d_1 = 3$  cm Durchmesser ströme Wasser mit  $v_1 = 0,80$  m/sek; wann ist in einer Rohrleitung von  $d_2 = 6$  cm Durchmesser der Strömungsvorgang dynamisch ähnlich, wenn in der Leitung Benzol strömt?

**Lösung:** Nach Abb. 443 ist für Wasser bei  $15^\circ$

$$\nu_1 = 0,0115 \text{ cm}^2/\text{sek},$$

für Benzol ist bei  $15^\circ$

$$\nu_2 = 0,079 \text{ cm}^2/\text{sek},$$

also ist

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} = 0,80 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{0,079}{0,0115} = 2,74 \text{ m/sek}.$$

In der Benzoleitung muß 2,74 m/sek Geschwindigkeit herrschen, damit der Strömungsvorgang dynamisch ähnlich verläuft. Bei diesen beiden Geschwindigkeiten haben die Rohre denselben Reibungsbeiwert  $\lambda$ , da sie dieselbe Reynoldssche Zahl haben.

Man kann also sagen, daß der Reibungsbeiwert oder die Widerstandszahl  $\lambda$  nur eine Abhängige oder Funktion der Reynoldsschen Zahl ist. Hiernach braucht man den  $\lambda$ -Wert nur für einen Rohrdurchmesser bei allen vorkommenden Geschwindigkeiten zu bestimmen und hat dann für alle anderen Rohrdurchmesser im entsprechenden Geschwindigkeitsbereich ohne weiteres die  $\lambda$ -Werte.

Die Bestimmung durch den Versuch geschieht durch die nach  $\lambda$  umgestellte Rohrwiderstandsgleichung

$$\lambda = \frac{h}{l/d \cdot v^2/2g}.$$

Man beobachtet z. B.

beim 1. Versuch: die Geschwindigkeit  $v_1$  und den Druckhöhenverlust  $h_1$ ,

beim 2. Versuch: „ „ „  $v_2$  „ „ „  $h_2$ .

Dann berechnet man

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{l/d \cdot v_1^2/2g} \quad \text{und} \quad \frac{v_1 \cdot d}{\nu} = R_1 = \text{Reynoldssche Zahl},$$

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{l/d \cdot v_2^2/2g} \quad \text{und} \quad \frac{v_2 \cdot d}{\nu} = R_2 = \text{Reynoldssche Zahl}.$$

Wird nach Abb. 444 der  $\lambda$ -Wert als Ordinate über der Reynoldsschen Zahl als Abszisse jedesmal aufgetragen, so liefert die Verbindungslinie

der Ordinatenendpunkte eine Kurve, welche man die Kennlinie der Widerstandszahlen nennt.

Diese Kennlinie gilt ganz allgemein für geometrisch ähnliche Rohroberflächen und für jede Art von Flüssigkeit, ob sie tropfbar flüssig oder gasförmig ist. Sie findet folgende Anwendung.

Man berechnet für den Strömungsvorgang die Reynoldssche Zahl, sucht diese Zahl auf der Abszissenachse auf und findet die Widerstandsziffer  $\lambda$  als Ordinate dieser Abszissenzahl.

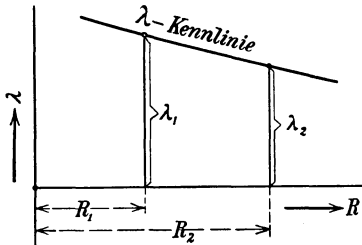


Abb. 444. Die Kennlinie der Widerstandszahlen.

Diese Erkenntnis bringt eine außerordentliche Erleichterung in der Berechnung der Strömungswiderstände in Rohrleitungen. Die Gültigkeit des Reynoldsschen Gesetzes ist durch eine große Zahl von Versuchen<sup>1</sup> bestätigt. Alle glatten Rohre haben hiernach dasselbe Gesetz der Widerstandszahlen, sie fügen sich dem Ähnlichkeitsgesetz, das lautet:

„ $\lambda$  ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl“.

Welche Dimension hat die Reynoldssche Zahl? Die Reynoldssche Zahl lautet

$$R = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

Es werde gemessen z. B.  $v$  in cm/sek,  $l$  in cm und die Zähigkeit  $\nu$  in cm<sup>2</sup>/sek. Damit wird

$$R = \frac{\text{cm/sek} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2/\text{sek}} = \frac{\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2} = \text{dimensionslos.}$$

Die Zahl  $R$  ist also eine dimensionslose Größe, die nicht vom Maßsystem abhängig ist. Ob man also nach Zentimeter, Meter oder nach englischem Fuß die Abmessungen einsetzt, ist gleichgültig, man erhält dieselbe Reynoldssche Zahl.

Bei der Berechnung der Reynoldsschen Zahl ist aber folgendes zu beachten: Wenn man die kinematische Zähigkeit  $\nu$  aus Abb. 443 in cm<sup>2</sup>/sek abliest, so muß man auch die Geschwindigkeit  $v$  in cm/sek und den Durchmesser  $d$  der Rohre in cm einsetzen. Will man mit Meter als Maßeinheit rechnen, so muß man die abgelesenen  $\nu$ -Werte der Kurve mit  $\frac{1}{10000}$  multiplizieren.

In Abb. 445 und 446 ist die Kennlinie der Widerstandszahl  $\lambda$  wiedergegeben<sup>2</sup>

für  $R = 3000 - 110000$  in Abb. 445,

für  $R = 110000 - 220000$  in Abb. 446.

Aus diesem Kurvenbild gewinnt man alle Widerstandszahlen für glatte Rohre. Kleine Reynoldssche Zahlen bedeuten große, große Reynoldssche Zahlen kleine Reibungswerte.

<sup>1</sup> Blasius, H.: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitt. Forschungsarb. H. 131.

<sup>2</sup> Im Anhang sind für  $R = 3000$  bis  $4000000$  die Zahlenwerte für die Widerstandszahl  $\lambda$  tabellarisch zusammengestellt.

**[Beispiel:** In einer Wasserleitung von  $l = 1000$  m Länge und  $d = 100$  mm Durchmesser fließt Wasser von  $15^\circ$  mit  $v = 0,50$  m/sek Geschwindigkeit; wie groß ist der Druckverlust dieser Leitung?

**Lösung:** Der Druckverlust in Meter Wassersäule beträgt

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

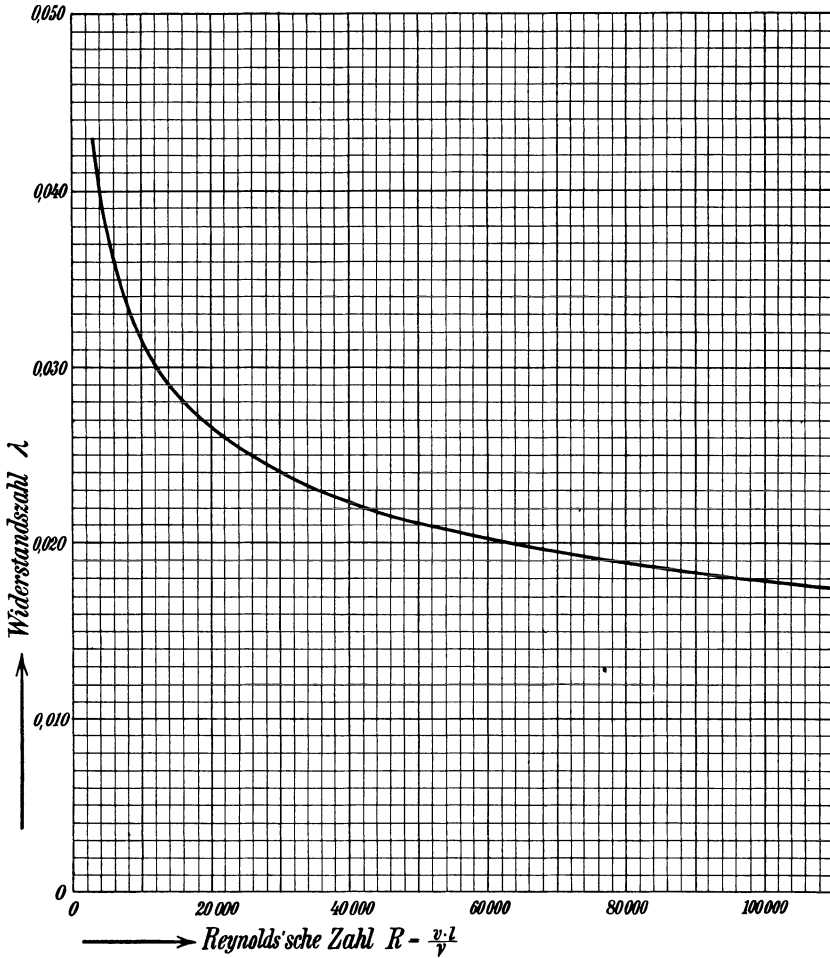


Abb. 445. Die Widerstandszahl als Abhängige der Reynoldsschen Zahl.

Der  $\lambda$ -Wert ist zunächst zu bestimmen, er ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl. Für den vorliegenden Strömungsvorgang — Wasser von  $15^\circ$  — entnehmen wir die kinematische Zähigkeit des Wassers aus Abb. 443 und finden für  $15^\circ$  Temperatur

$$\nu = 0,0115 \text{ cm}^2/\text{sek}.$$

Da wir diesen Wert nach der Maßeinheit cm gemessen haben, müssen wir auch die anderen Werte in cm einsetzen und schreiben

$$v = 0,5 \text{ m/sek} = 50 \text{ cm/sek}, \quad d = 100 \text{ mm} = 10 \text{ cm},$$

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{50 \cdot 10}{0,0115} = 43500.$$

In Abb. 445 finden wir für  $R = 43500$  den Widerstandswert

$$\lambda = 0,019.$$

Hiermit wird

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,019 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 2,42 \text{ m W.S.}$$

$$\Delta p = \frac{2,42}{10} = 0,242 \text{ at.}$$

Der Druckabfall in der Wasserleitung beträgt also mindestens  $0,242 \text{ at}^1$ .

**Beispiel:** Wie groß ist der Druckabfall, wenn Benzol durch diese Rohrleitung fließt?

**Lösung:** Für Benzol ist die Zähigkeit  $\nu = 0,079 \text{ cm}^2/\text{sek}$

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{50 \cdot 10}{0,079} = 6320.$$

In Abb. 445 findet man für  $R = 6320$  den Widerstandswert

$$\lambda = 0,0355.$$

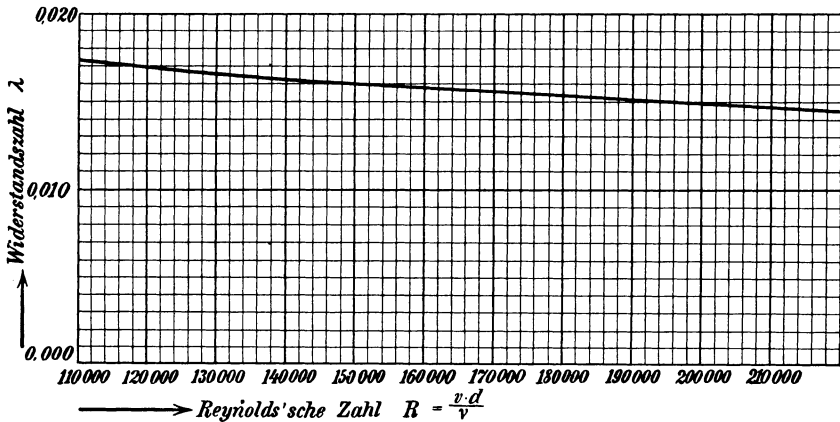


Abb. 446. Die Widerstandszahl als Abhängige der Reynoldsschen Zahl.

Hiermit wird der Druckhöhenverlust

$$h_B = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0355 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 4,5 \text{ m Benzolsäule.}$$

Will man den Druckabfall in Meter Wassersäule haben, so muß man das spezifische Gewicht des Benzols kennen. Das spezifische Gewicht des Benzols ist

$$\begin{aligned} \gamma_B &= 880 \text{ kg/m}^3, \\ \gamma &= 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ Wasser.} \end{aligned}$$

Die Wassersäule muß genau so schwer wie die Benzolsäule sein, also ist

$$h \cdot \gamma = h_B \cdot \gamma_B,$$

$$h = \frac{\gamma_B}{\gamma} \cdot h_B = \frac{880}{1000} \cdot 4,5 = 4 \text{ m Wassersäule,}$$

$$\text{oder } \Delta p = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ at.}$$

<sup>1</sup> Dieser Druckabfall, der für glatte, gezogene Rohre gilt, ist praktisch größer, z. B. ist für asphaltiertes Eisenblech  $\lambda_w = 1,20$  bis  $1,50 \cdot \lambda$ . d. h. in Wirklichkeit kann der Druckabfall 20 bis 50 % größer werden.

Der Druckverlust in der Benzolleitung beträgt also 0,4 at, d. h. der Reibungswiderstand von Benzol ist

$$\frac{0,4}{0,242} = 1,65 \text{ mal so groß}$$

als von Wasser.

**Beispiel:** Wie groß ist der Druckabfall, wenn Alkohol durch diese Rohrleitung fließt?

**Lösung:** Für Alkohol kennen wir die Zähigkeitszahl

$$\nu = 0,0167 \text{ cm}^2/\text{sek},$$

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{50 \cdot 10}{0,0167} = 30000.$$

In Abb. 445 finden wir für  $R = 30000$  die Widerstandszahl

$$\lambda = 0,024.$$

Der Druckverlust wird dann

$$h_A = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,024 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 3,06 \text{ m Alkoholsäule},$$

$\gamma_A = 793 \text{ kg/m}^3$  für Alkohol,

$\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$  für Wasser,

$$h = \frac{\gamma_A}{\gamma} \cdot h_A = \frac{793}{1000} \cdot 3,06 = 2,42 \text{ m W.S.}$$

$$\Delta p = \frac{2,42}{10} = 0,242 \text{ at},$$

d. h. der Reibungswiderstand von Alkohol ist dem Reibungswiderstand des Wassers gleich.

## 10. Laminare und turbulente Strömung.

In Abb. 447 ist eine Bandströmung oder laminare Strömung gezeigt. Die einzelnen Stromfäden laufen vollkommen parallel zu den Wandungen des Rohres, ohne daß eine Wirbelung aufkommt. Es ist nachgewiesen, daß bei dieser Strömungsart die Geschwindigkeit von

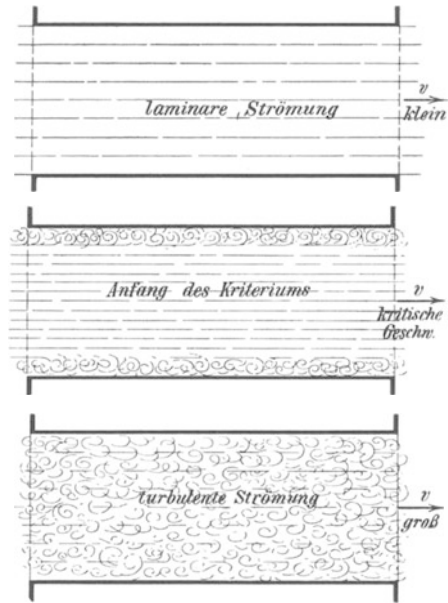


Abb. 447. Laminare und turbulente Strömung.

$v = 0$  an der Wandung

bis  $v = v_{\max}$  in der Rohrachse (Abb. 448)

nach einer Parabel wächst. Verwandelt man den kubischen Parabelkörper in einen Zylinder, so gibt die Zylinderlänge

$$v = v_m$$

die mittlere Geschwindigkeit im Rohrquerschnitt an, mit der die Wassermenge

$$Q = F \cdot v_m$$

errechnet wird. In diesem Fall ist

$$v_m = \frac{1}{2} v_{\max} \quad \text{oder} \quad v_{\max} = 2 \cdot v_m.$$

Würde man genau in der Rohrachse die Geschwindigkeit messen, und mit dem gemessenen Wert die Wassermenge berechnen, so würde

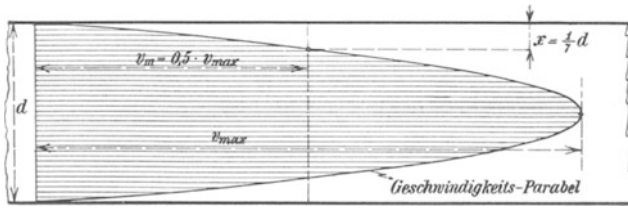


Abb. 448. Die Geschwindigkeitsparabel bei laminarer Strömung.

man die doppelte der wirklichen Wassermenge messen. Man müßte, um die wirkliche Wassermenge zu messen, in einem Abstände

$$x = \frac{1}{7} \cdot d$$

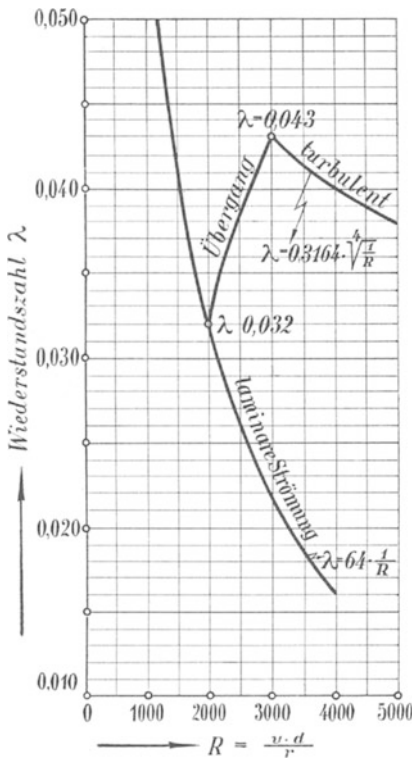


Abb. 449. Der Übergang von laminarer Strömung in turbulente Strömung.

von der Rohrwand messen, also erkennt man, wie schwer solche Messungen sind.

Bei technischen Strömungen kommt die laminare Strömung nur selten vor, wie wir später sehen werden. Nur bei kleinen Geschwindigkeiten und kleinen Querschnitten ist dieser Strömungszustand vorhanden. Reynolds hat an Versuchen mit Glasröhren diese Bedingungen bestätigt, indem er Farbstoff in die Rohrachse einfuhrte. Nur bei kleinen Geschwindigkeiten blieb der Farbstoff geradlinig, während er bei größeren Geschwindigkeiten sich wirbelförmig auflöste und sich über die ganze strömende Menge verteilte.

Von einer bestimmten Geschwindigkeit an tritt bei Wasserströmung kein paralleler Stromfadenverlauf mehr auf. Es beginnt eine Wirbelung und damit ein Umschlag des Betriebszustandes. Der Beginn dieses Kriteriums ist im mittleren Bild der Abb. 447 dargestellt, an den Wandungen sehen wir den Anfang der Wirbelbildung, und steigt die Ge-

schwindigkeit noch weiter, so setzt eine Wirbelbildung im ganzen Rohrquerschnitt ein, wie sie das untere Bild zeigt. Diesen Strömungszustand, der in unseren Rohrleitungen fast ausschließlich eintritt, nennt man turbulent und die Strömung eine Flechtströmung

In Abb. 449 ist die Kennlinie der Widerstandszahl  $\lambda$  für den



Umschlag des Betriebszustandes aufgezeichnet. Bei laminarer Strömung fällt der  $\lambda$ -Wert nach einer steilen Kurve ab, bis die Reynoldssche Zahl den Wert

$$R = 2000$$

erreicht. Dann beginnt das Kriterium des Umschlagens des Betriebszustandes. Der  $\lambda$ -Wert steigt an

$$\text{von } \lambda = 0,032 \text{ auf } \lambda = 0,043.$$

Dieser Wert ist erreicht bei

$$R = 3000$$

und nun ist die Strömung vollkommen turbulent, die  $\lambda$ -Werte nehmen weiterhin mit wachsendem  $R$  nach einer bestimmten Kurve gesetzmäßig ab.

Man kann mit dem Wert

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = 3000$$

die kritische Geschwindigkeit  $v$ , bei der die Strömung turbulent verlaufen wird, errechnen. Für Wasser von  $15^\circ$  ist z. B.  $\nu = 0,0115 \text{ cm}^2/\text{sek}$ , mit diesem Wert wird

$$v = \frac{R \cdot \nu}{d} = \frac{3000 \cdot 0,0115}{d} = \frac{34,5}{d},$$

z. B.	$d = 2 \text{ cm}$	$v = 17,25 \text{ cm/sek} = 0,173 \text{ m/sek}$
	$= 4 \text{ ,,}$	$v = 8,60 \text{ ,,} = 0,086 \text{ ,,}$
	$= 6 \text{ ,,}$	$v = 5,75 \text{ ,,} = 0,058 \text{ ,,}$
	$= 8 \text{ ,,}$	$v = 4,30 \text{ ,,} = 0,043 \text{ ,,}$
	$= 10 \text{ ,,}$	$v = 3,45 \text{ ,,} = 0,035 \text{ ,,}$

Wir sehen daraus, daß die Grenzgeschwindigkeiten außerordentlich niedrig sind, so daß wir technisch wohl immer mit turbulenter Strömung rechnen müssen.

Die Turbulenz verändert den Geschwindigkeitsverlauf im Rohrquerschnitt (Abb. 450) vollständig. Die Geschwindigkeit ist viel gleichmäßiger verteilt, sie ist noch in der Nähe der Wand sehr hoch und fällt

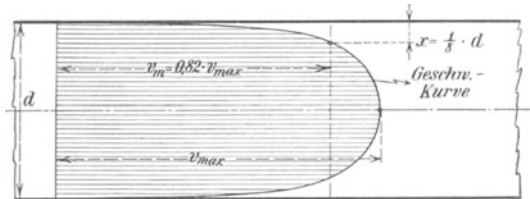


Abb. 450. Die Geschwindigkeitskurve bei turbulenter Strömung.

dann in einer dünnen Grenzschicht plötzlich auf Null ab. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit in der Rohrachse mit  $v_{\max}$ , so ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = 0,82 \text{ bis } 0,86 \cdot v_{\max}.$$

Würde man jetzt die Geschwindigkeit in der Rohrachse messen und mit  $v_{\max}$  die Wassermenge nach der Gleichung

$$Q = F \cdot v$$

berechnen, so würde der Fehler nicht so groß werden. Wir messen

$$Q = F \cdot v_{\max} = F \cdot \frac{v_m}{0,82} = F \cdot 1,22 \cdot v_m,$$

d. h. wir messen 22% zu viel. Man würde richtig messen, wenn man die Geschwindigkeit im Abstände

$$x = \frac{1}{8} \cdot d$$

von der Rohrwand und nicht in der Rohrachse feststellen würde. Diese Erkenntnis ist überaus wertvoll und erklärt so manche Fehlmessung.

Das Kurvengesetz der laminaren und turbulenten Strömung.

Das Ähnlichkeitsgesetz von Reynolds beantwortet die Frage, welcher Form die Kennlinienkurve für die Widerstandszahl  $\lambda$  folgt, nicht. Für glatte Rohre sind aber die Gesetze der beiden Kennlinienkurven aus den Versuchswerten bestimmt worden. Die Kennlinienkurve für laminare Strömung befolgt das Gesetz

$$\lambda = 64 \cdot \frac{\nu}{v \cdot d} = 64 \cdot \frac{1}{R}$$

die Kennlinienkurve für turbulente Strömung das Gesetz

$$\lambda = 0,3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{\nu}{v \cdot d}} = 0,3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{R}},$$

so daß der  $\lambda$ -Wert auch ohne Kenntnis der Kennlinienkurve berechnet werden kann, wenn die Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

des Strömungsvorganges bekannt ist.

Die  $\lambda$ -Werte gelten für glatte Rohre, also für den Grenzfall „Rauhigkeit null“, ein geringerer Widerstand ist nicht möglich. Rauhe Rohre müssen diese Werte mindestens haben.

Beispiel für laminare Strömung.

In einer Rohrleitung von  $l = 1000$  m Länge und  $d = 100$  mm Durchmesser fließt Glycerin von  $15^\circ$  mit  $v = 0,50$  m/sek Geschwindigkeit; wie groß ist der Druckverlust dieser Leitung?

Für Glycerin ist bei  $15^\circ$  die Zähigkeit  $\nu = 11,60$ , hiermit wird

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{50 \cdot 10}{11,60} = 43.$$

Die Reynoldssche Zahl ist kleiner als 2000, also ist die Strömung laminar und die Widerstandszahl zu berechnen nach der Gleichung

$$\lambda = 64 \cdot \frac{1}{R} = 64 \cdot \frac{1}{43} = 1,49.$$

Hiermit wird der Druckhöhenverlust

$$h_G = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 1,49 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 190 \text{ m Glycerinsäule.}$$

Will man den Druckverlust in Meter Wassersäule haben, so muß man das spezifische Gewicht des Glycerins berücksichtigen.

$$\gamma_G = 1260 \text{ kg/m}^3,$$

$$\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ Wasser,}$$

$$\text{Wassersäulenhöhe } h = h_G \cdot \frac{\gamma_G}{\gamma} = 190 \cdot \frac{1260}{1000} = 240 \text{ m,}$$

$$\text{Druckabfall } p = \frac{h}{10} = \frac{240}{10} = 24 \text{ at.}$$

Unter den gleichen Verhältnissen berechneten wir früher den Druckabfall für Wasser zu 0,242 at, d. h. der Reibungswiderstand von Glyzerin ist

$$\frac{24}{0,242} = 100 \text{ mal so groß}$$

als von Wasser.

**Beispiel:** Wie groß ist der Druckverlust, wenn Rüböl von 15° durch die Rohrleitung fließt (spezifisches Gewicht  $\gamma_R = 920 \text{ kg/m}^3$ )?

**Lösung:** Mit  $v = 2,8$  wird

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{50 \cdot 10}{2,8} = 179,$$

$$\lambda = 64 \cdot \frac{1}{R} = 64 \cdot \frac{1}{179} = 0,358,$$

$$h_R = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,358 \cdot \frac{1000}{0,10} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 45,5 \text{ m Rübölsäule.}$$

$$\text{Wassersäule } h = h_R \cdot \frac{\gamma_R}{\gamma}$$

$$= 45,5 \cdot \frac{920}{1000} = 42 \text{ m,}$$

$$\text{Druckabfall } p = \frac{h}{10}$$

$$= \frac{42}{10} = 4,2 \text{ at,}$$

d. h. der Reibungswiderstand von Rüböl ist

$\frac{4,2}{0,242} = 17$  mal so groß als von Wasser.

In Abb. 451 ist die kinematische Zähigkeit  $\nu$  von Rüböl als Funktion der Temperatur aufgetragen. Man sieht, daß beim Strömen von Öl die Temperatur eine ganz bedeutende Rolle spielt, denn es ist für

$$t = 0^\circ \dots \nu = 26,0$$

$$= 2,5^\circ \dots = 10,5$$

$$= 5^\circ \dots = 7,0$$

$$t = 10^\circ \dots \nu = 4,20$$

$$= 15^\circ \dots = 2,80$$

$$t = 20^\circ \dots = 2,00$$

$$= 30^\circ \dots = 1,10$$

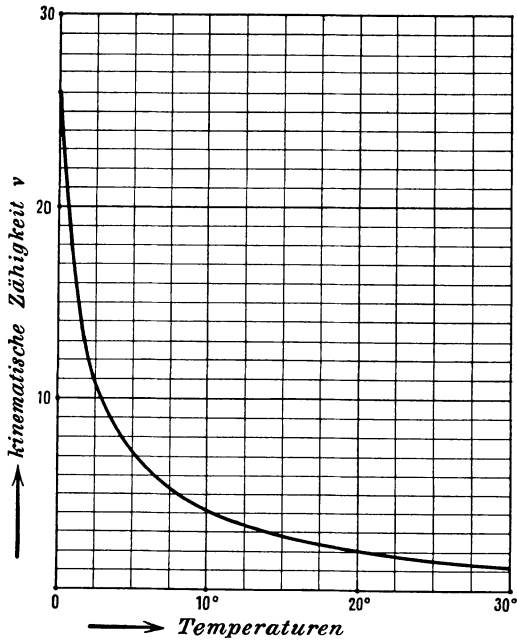


Abb. 451. Die kinematische Zähigkeit von Öl in Abhängigkeit von der Temperatur.

## 11. Widerstand bewegter Körper in Flüssigkeiten.

In einer Flüssigkeit soll ein fester Körper vom Querschnitt  $F$  mit der Geschwindigkeit  $v$  (Abb. 452) vorwärts gezogen werden. Hierzu ist die Zugkraft  $K$  erforderlich, welche den Flüssigkeitswiderstand zu überwinden hat. Nach Erfahrungswerten hat man festgelegt, daß der Widerstand in außerordentlichem Maße von der Geschwindigkeit ab-

hängig ist. Er ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit oder der Geschwindigkeitshöhe  $\frac{v^2}{2g} = h$ .

Ist  $p$  der Druck auf die Flächeneinheit des Körpers, so ist

$$h = \frac{p}{\gamma} \quad \text{oder} \quad p = h \cdot \gamma,$$

$$K = p \cdot F = h \cdot \gamma \cdot F = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \cdot F.$$

Aber es spielt noch die Form des Körpers eine Rolle, und diese wird berücksichtigt durch einen Beiwert  $C$ , so daß man die Formel zu schreiben hat

$$K = C \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

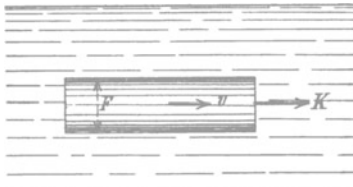


Abb. 452. Der Bewegungswiderstand in einer Flüssigkeit.

Die Zahlenwerte der Beiwerte  $C$  sind im allgemeinen unsicher. Man rechnet z. B. mit folgenden Werten:

Zylinder oder Prisma, Länge = 4- bis 6facher Durchmesser, in Richtung der Längsachse bewegt  $C = 4$ ,

Zylinder, rechtwinkelig zur Achsenrichtung bewegt  $C = 2$ ,

Kugel  $C = 0,5$ ,

hohle Halbkugel (konkave Fläche als Vorderfläche-Fallschirm)  $C = 2,5$ .

Man nahm an, daß der Beiwert  $C$  nur von der Form des Körpers, nicht aber von der Geschwindigkeit abhängig ist. Nach den neueren Forschungen ist diese Anschauung nicht mehr haltbar. Der Beiwert  $C$  ist vielmehr eine Funktion der Reynoldsschen Zahl

$$C = f\left(\frac{v \cdot d}{\nu}\right),$$

hierin bedeutet

$v$  = Strömungsgeschwindigkeit in cm,

$d$  = Längenmaß des Körpers quer zur Bewegungsrichtung, bei der Kugel z. B. der Durchmesser in cm,

$\nu$  = kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit in  $\text{cm}^2/\text{sek}$ , für Wasser von  $20^\circ$  z. B. =  $0,010 \text{ cm}^2/\text{sek}$ .

In Abb. 453 sind verschiedene Strömungskörper dargestellt, eine Kreisplatte, ein Kreiszylinder, eine Kugel, ein abgeplattetes und ein verlängertes Ellipsoid. Für diese Körperformen sind die Beiwerte  $C$  in Abb. 454 als Funktion der Reynoldsschen Zahl  $\frac{v \cdot d}{\nu}$  dargestellt.

Wir erkennen bei allen Kurven im Bereich von

$$\frac{v \cdot d}{\nu} = 100000 \text{ bis } 500000$$

ein starkes Abfallen der Beiwertgröße  $C$ . Das erklärt man so:

In der Nähe der festen Körperwand findet sich eine Übergangsschicht oder Grenzschicht, in der die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  durch die Reibung an der Wand vermindert wird. Diese Grenzschicht kann la-

minar oder turbulent strömen. Im ersten Fall sind die Stromlinien parallel, im letzten Fall sind heftige Querbewegungen oder Wirbel vorhanden. Je höher die Reynoldssche Zahl wird, um so kleinere Störungen genügen, um die Strömung turbulent zu machen. Die Turbulenz bewirkt eine Ablösung der Flüssigkeitsschicht von der festen Körperwand, so daß der Widerstand wesentlich kleiner wird. Dort, wo die  $C$ -Kurven plötzlich abfallen, ist also der Umschlag von laminarer Strömung in turbulente Strömung. Praktisch wird man also anzustreben haben, die Bewegung turbulent sich vollziehen zu lassen, dann wird der Bewegungswiderstand erheblich kleiner.

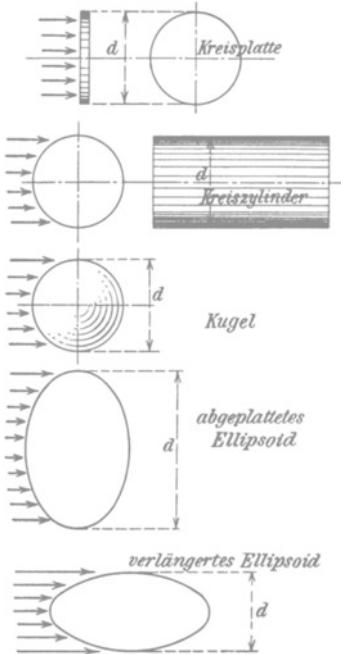


Abb. 453. Verschiedene Formen der Strömungskörper.

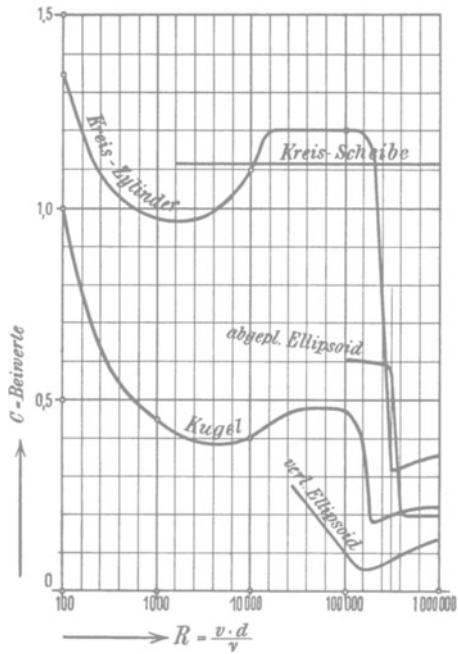


Abb. 454. Die Beiwerte für Strömungskörper als Abhängige der Reynoldsschen Zahl.

Die Reynoldssche Zahl, bei welcher die untere Grenze der turbulenten Strömung liegt, heißt die kritische Reynoldssche Zahl, sie ist z. B. nach Abb. 454 für die Kugel

$$R = 300000.$$

Die Geschwindigkeit, welche dieser Reynoldsschen Zahl bei gegebenem  $d$  und bekanntem  $\nu$ -Wert entspricht, heißt die kritische Geschwindigkeit.

**Beispiel:** Eine Kugel von  $d = 4$  cm Durchmesser sinke mit  $v = 0,10$  m/sek im Wasser unter. Wie groß ist der Flüssigkeitswiderstand  $W$ ?

**Lösung:** Es ist

$$W = C \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Der Beiwert  $C$  ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{10 \cdot 4}{0,010} = 4000.$$

Nach Abb. 454 ist für  $R=4000$  der Wert  $C=0,4$ ; ferner ist  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $F = \frac{\pi}{4} \cdot 0,04^2 = 0,001256 \text{ m}^2$  und  $v=0,10 \text{ m/sek}$ , also ist

$$W = 0,4 \cdot 1000 \cdot 0,001256 \cdot 0,10^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 9,81} = 0,000256 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad W = 0,256 \text{ g}.$$

Nach Abb. 454 erkennt man sofort, daß die Kugel sich im laminaren Strömungszustand befindet.

**Beispiel:** Mit welcher Geschwindigkeit  $v$  muß eine Kugel von  $d=40 \text{ cm}$  sich bewegen, wenn der Reibungsbeiwert  $C=0,4$ , also derselbe sein soll, wie in der vorigen Aufgabe?

**Lösung:** Es soll der Reibungsbeiwert derselbe sein, das ist der Fall, wenn die Reynoldssche Zahl für diesen Bewegungsvorgang dieselbe Größe behält, also muß sein

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = 4000 \quad \text{oder} \quad v = \frac{4000 \cdot \nu}{d} = \frac{4000 \cdot 0,010}{40} = 1 \text{ cm/sek}.$$

Der Flüssigkeitswiderstand ist dann für  $F = \frac{\pi}{4} \cdot 0,4^2 = 0,1256 \text{ m}^2$

$$W = C \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,4 \cdot 1000 \cdot 0,1256 \cdot \frac{0,01^2}{2 \cdot 9,81} = 0,00256 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad W = 2,560 \text{ g},$$

d. h. der Flüssigkeitswiderstand ist in diesem Fall auf das zehnfache gestiegen.

**Ergebnis:** *Bewegen sich zwei geometrisch ähnliche Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten in einer Flüssigkeit, so ist der Reibungsbeiwert derselbe, wenn für beide Bewegungsvorgänge die Reynoldssche Zahl dieselbe Größe hat, der Bewegungswiderstand wächst aber mit dem Vergrößerungsverhältnis.*

## 12. Auftrieb und spezifisches Gewicht der Körper.

In Abb. 455 schwimmt ein zylindrischer Stab vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  im Wasser. Er hat die Eintauchtiefe  $H$ . Während die Seitendrücke des Wassers gegen die Wandfläche sich gegenseitig aufheben, wird der Bodendruck nicht aufgehoben. Er beträgt

$$P = F \cdot H \cdot \gamma,$$

wenn  $\gamma$  das Gewicht der Volumeneinheit Wasser ist. Setzt man

$$F \cdot H = V,$$

so ist der Bodendruck, welcher als Auftrieb nach oben wirkt,

$$P = V \cdot \gamma.$$

Der eingetauchte Stab habe das Volumen  $V_1$  und das Gewicht seiner Volumeneinheit sei  $\gamma_1$ , dann ist sein Gewicht

$$G = V_1 \cdot \gamma_1.$$

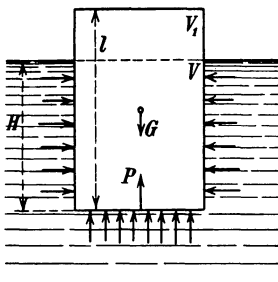


Abb. 455. Der Auftrieb eines eingetauchten Körpers.

Ist der Körper leichter als Wasser, so taucht er noch ein Stück aus dem Wasser heraus. Der Gleichgewichtszustand ist hergestellt,

wenn die Bedingung erfüllt wird

$$G = P, \quad V_1 \cdot \gamma_1 = V \cdot \gamma,$$

$$\gamma_1 = \frac{V}{V_1} \cdot \gamma \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = \frac{H}{l} \cdot \gamma.$$

Man kann auf diese Weise experimentell das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers oder sein spezifisches Gewicht bestimmen.

**Satz:** Der auf den eingetauchten Körper vertikal aufwärts wirkende Auftrieb ist gleich dem Gewicht der aus dem eingetauchten Raum verdrängten Flüssigkeit.

Ist der Körper schwerer wie Wasser, so sinkt er unter. Um ihn schwimmend zu erhalten, muß man ihn an einem Faden aufhängen und den Faden mit der Kraft (Abb. 456)

$$Z = G - P$$

nach oben ziehen. In diesem Fall ist das Volumen der verdrängten Wassermasse gleich dem Volumen des Körpers, und es ist

$$G = V \cdot \gamma_1 \quad \text{und} \quad P = V \cdot \gamma$$

oder

$$V = \frac{G}{\gamma_1} \quad \text{und} \quad V = \frac{P}{\gamma}.$$

Daraus folgt

$$\frac{G}{\gamma_1} = \frac{P}{\gamma} \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = \frac{G}{P} \cdot \gamma = \frac{G}{G - Z} \cdot \gamma.$$

Setzt man das spezifische Gewicht des Wassers  $\gamma = 1$ , so wird

$$\gamma_1 = \frac{G}{G - Z}.$$

Den Überschuß des wirklichen Körpergewichtes  $G$  über den Auftrieb  $P$ , also die Größe

$$G - P = Z,$$

nennt man das „relative Gewicht“ des Körpers.

Wenn man also einmal das absolute Gewicht, das andere Mal das relative Gewicht des in Wasser eingetauchten Körpers bestimmt, so errechnet man das spezifische Gewicht des Körpers, indem man das absolute Gewicht durch den Überschuß des absoluten Gewichts über das relative Gewicht dividiert.

Das spezifische Gewicht des Wassers  $\gamma = 1$  gesetzt, liefert die Untersuchung für die spezifischen Gewichte anderer Körper folgende Zahlenwerte:

Gußeisen . . .	6,6 bis 7,9	Sandstein . . .	1,9 bis 2,7
Schmiedeeisen . . .	7,4 „ 7,9	Ziegelstein . . .	1,4 „ 2,3
Stahl . . . . .	7,8 „ 8,1	Kalkmörtel . . .	1,6 „ 1,8
Kupfer . . . . .	8,6 „ 9,0	Sand . . . . .	1,2 „ 1,9
Zink . . . . .	6,9 „ 7,8	Erde . . . . .	1,4 „ 2,4
Zinn . . . . .	7,1 „ 7,6	Lehm . . . . .	1,5 „ 2,8
Blei . . . . .	11,2 „ 11,5	Steinkohle . . .	1,2 „ 1,8
Aluminium . . .	2,3 „ 2,5	Eichenholz . . .	0,62 „ 1,17
Quecksilber . . .	13,6	Tannenholz . . .	0,5 „ 0,9
		Öl . . . . .	0,91 „ 0,94

atmosphärische Luft 0,001293  
Wasserstoffgas . . . 0,0000894

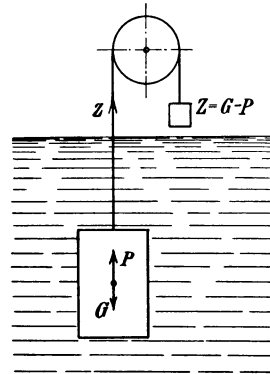


Abb. 456. Das relative Gewicht eines Körpers.

### 13. Im Wasser niedersinkende Körper.

Auf einen Körper (Abb. 457), welcher im Wasser niedersinkt, wirken drei Kräfte:

1. das Gewicht  $G$  des Körpers,
2. der Auftrieb  $P$  der verdrängten Flüssigkeit,
3. der Flüssigkeitswiderstand  $W$ .

Die Kräfte  $P$  und  $W$  wirken der Bewegung entgegengesetzt. Sie werden die Fallbeschleunigung verringern. In dem Augenblick, wo die Kraft

$$G - P = W$$

ist, wird die Beschleunigung der Fallbewegung aufhören und der Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit weitersinken. Setzt man

$$G = V \cdot \gamma_1 \quad \text{und} \quad P = V \cdot \gamma,$$

ferner

$$W = C \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{v^2}{2g},$$

so lautet die Gleichung

$$V \cdot \gamma_1 - V \cdot \gamma = C \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

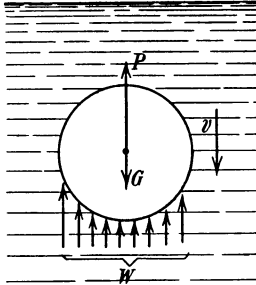


Abb. 457. Im Wasser niedersinkende Kugel.

Aus dieser Gleichung läßt sich die Endgeschwindigkeit  $v$ , mit der der Körper gleichförmig weiter sinken wird, errechnen

$$v^2 = \frac{V \cdot (\gamma_1 - \gamma) \cdot 2g}{C \cdot \gamma \cdot F},$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{V}{F}}.$$

Zwei Kugeln von verschiedenem Durchmesser  $d_1$  und  $d_2$ , welche ein gleiches spezifisches Gewicht  $\gamma_1$  haben, sollen gleichzeitig im Wasser herabfallen, wie verhalten sich die Endgeschwindigkeiten zueinander?

1. Kugel vom Durchmesser  $d_1$ .

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{V_1}{F_1}}.$$

Für die Kugel ist

$$V_1 = \frac{\pi}{6} \cdot d_1^3 \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2,$$

$$\frac{V_1}{F_1} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot d_1^3}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} = \frac{2}{3} \cdot d_1.$$

Hiermit wird

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{2}{3} \cdot d_1} = K \cdot \sqrt{d_1},$$

wenn

$$K = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{2}{3}}$$

ist.



2. Kugel vom Durchmesser  $d_2$ .

In gleicher Weise wird

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{2}{3} \cdot d_2} = K \cdot \sqrt{d_2}.$$

Mithin ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K \cdot \sqrt{d_2}}{K \cdot \sqrt{d_1}} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}.$$

Ist z. B. die zweite Kugel doppelt so groß wie die erste, so ist

$$\frac{d_2}{d_1} = 2 \quad \text{und} \quad v_2 = v_1 \cdot \sqrt{2} = 1,41 \cdot v_1,$$

d. h. die doppelt so große Kugel sinkt im Wasser mit  $\sqrt{2} = 1,41$ facher Geschwindigkeit, so daß man allgemein sagt, daß die größere Kugel im Wasser schneller vorankommt als die kleinere.

Zwei Kugeln vom gleichen Durchmesser  $d$ , aber verschiedenem spezifischen Gewicht  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sollen gleichzeitig im Wasser herabsinken, wie verhalten sich die Endgeschwindigkeiten?

Die erste Kugel hat die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{V}{F}} = K \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1}.$$

Die zweite Kugel hat die Endgeschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma} - 1\right) \cdot \frac{2g}{C} \cdot \frac{V}{F}} = K \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma} - 1}.$$

Das Verhältnis der Endgeschwindigkeiten ist also

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma} - 1}}{K \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1}} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma} - 1}}{\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1}}.$$

Ist z. B. die eine Kugel aus Kohle ( $\gamma_1 = 1,2$ ), die andere aus Bergschiefer ( $\gamma_2 = 1,8$ ), so wird

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{1,8}{1} - 1}}{\sqrt{\frac{1,2}{1} - 1}} = \frac{\sqrt{0,8}}{\sqrt{0,2}} = 2,$$

$$v_2 = 2 \cdot v_1,$$

d. h. die Bergkugel fällt doppelt so schnell als die Kohlenkugel. Allgemein kann man daher sagen, daß die spezifisch schwerere Kugel im Wasser schneller vorankommt als die leichtere.

Diese Tatsachen verwertet man praktisch. Man kann im Strömungsbett gleiche Stoffe verschiedener Körnung sortieren (Abb. 458). Die groben Stücke fallen zuerst nieder und in weiterer Entfernung die mittleren und feinen. Die Körnung wird also um so feiner, je weiter man den

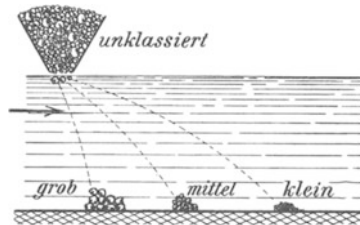


Abb. 458. Klassieren im Strömungsbett.

Stoff von der Einwurfstelle entfernt auffängt. Beim Schlämmen werden Körper gleichen spezifischen Gewichts, aber verschiedener Stückgröße in einen mit Wasser gefüllten Behälter geworfen. Hierbei erreichen die größten Stücke zuerst den Boden, sammeln sich also als unterste Schicht, während nach oben die Stückgröße immer mehr abnimmt und die feinsten Stücke die obere Schicht bilden.

Beim Aufbereiten der Erze werden Stücke von möglichst gleichem Korn hergestellt und alle zusammen ins Wasser geworfen, dann werden die spezifisch schwersten Stücke am Boden abgelagert, die leichteren liegen darüber.

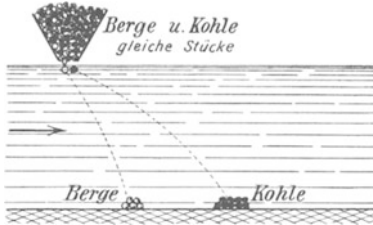


Abb. 459. Aufbereiten im Strömungsbett.

Man kann auch Kohle im Strömungsbett (Abb. 459) aufbereiten. Nach vorausgegangener Klassierung werden die gleichgroßen Stücke in ein Strombett geworfen, die Berge

sinken zuerst nieder, während die Kohlen weitergetragen werden.

Das Verfahren in der Setzmaschine beruht auch auf der größeren Sinkgeschwindigkeit der Berge. Wird das Wasser in auf- und niedergehende Bewegung gebracht, so werden bei der Aufwärtsbewegung die Kohlen schneller steigen als die Berge, während bei der Abwärtsbewegung die Berge schneller fallen als die Kohlen. Beide Vorgänge bewirken aber, daß die Bergeschicht sich nach unten setzt. Man erhält also eine vollkommene Trennung von Kohle und Berge. Die Trennung wird um so schärfer, je größer die Unterschiede der spezifischen Gewichte sind. Verwachsene Stücke werden daher schwerer ausgeschieden.

## 14. Die Bewegung von Luft.

Um Luft in Bewegung zu setzen, ist ein Kraftaufwand erforderlich. Der Vorgang ist derselbe wie bei Wasser, das aus einem großen Behälter

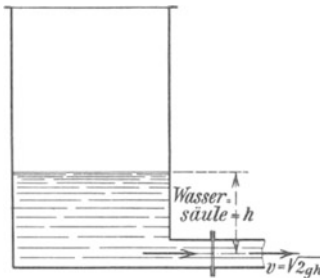


Abb. 460. Die Ausflußgeschwindigkeit von Wasser.

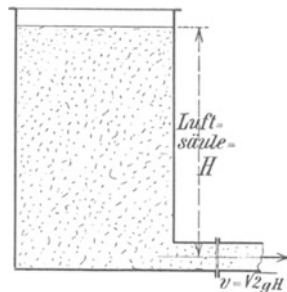


Abb. 461. Die Ausflußgeschwindigkeit von Luft.

in eine Rohrleitung eintreten soll. Damit das Wasser mit der Geschwindigkeit  $v$  in die Rohrleitung (Abb. 460) eintritt, ist der Druck einer Wassersäule von der Höhe  $h$  erforderlich, sie erzeugt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}.$$

In Abb. 461 soll aus dem Behälter Luft in die Rohrleitung überströmen. Auch hier ist zur Erzeugung der Geschwindigkeit  $v$  der Druck einer Luftsäule erforderlich, deren Höhe sich nach der gleichen Formel berechnet

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Nun ist es üblich, das Luftsäulengewicht durch ein gleichwertiges Wassersäulengewicht zu ersetzen. Bezeichnet  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Luft,  $\gamma_w$  das spezifische Gewicht des Wassers, so sind die Säulengewichte, welche dieselbe Grundfläche haben, einander gleich, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$H \cdot \gamma = h \cdot \gamma_w,$$

$$H = h \cdot \frac{\gamma_w}{\gamma} \text{ m W.S.}$$

Setzt man für Wasser  $\gamma_w = 1000 \text{ kg/m}^3$  ein, so wird

$$H = \frac{h}{\gamma} \cdot 1000 \text{ m W.S.}$$

oder

$$H = \frac{h}{\gamma} \text{ mm W.S.}$$

Hiermit wird

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{\gamma}} \quad \text{oder} \quad h = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

Diese Druckhöhe wird lediglich verbraucht, um die Luft aus dem Zustand der Ruhe in den Bewegungszustand zu versetzen, man nennt sie daher die dynamische Druckhöhe und bezeichnet sie mit  $h_d$ , so daß wir setzen

$$h_d = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

**Beispiel:** Wie groß ist die dynamische Druckhöhe, wenn der Luft bei einem spezifischen Gewicht  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$  die Geschwindigkeit  $v = 10 \text{ m/sek}$  erteilt werden soll?

**Lösung:** Es ist eine dynamische Druckhöhe erforderlich von der Größe

$$h_d = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma = \frac{10^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,20 = 6,13 \text{ mm W.S.}$$

Dynamische Druckhöhen für Luft von  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$ .

$v$ in m/sek	$h_d$ in mm W.S.	$v$ in m/sek	$h_d$ in mm W.S.
2,0	0,25	6,5	2,60
2,5	0,39	7,0	3,02
3,0	0,55	7,5	3,46
3,5	0,75	8,0	3,90
4,0	0,98	8,5	4,40
4,5	1,23	9,0	5,00
5,0	1,53	9,5	5,50
5,5	1,88	10,0	6,13
6,0	2,20	10,5	6,75

Die Luft soll nach Abb. 462 durch eine Rohrleitung von der Länge  $l$  und dem Durchmesser  $d$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt werden. Bei dieser Bewegung ist der Reibungswiderstand der Luft zu überwinden. Dieser Reibungswiderstand wächst, wie wir früher bei der Berechnung von Rohrleitungen für Flüssigkeiten schon gelernt haben,

1. proportional mit der Länge der Rohrleitung,
2. proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit,
3. umgekehrt proportional mit dem Durchmesser der Leitung.

Die zur Überwindung dieses Widerstandes erforderliche Kraft wird durch eine Luftsäulenhöhe gemessen. Sie hat die Größe

$$H = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ m Luftsäule.}$$

Der Wert  $\lambda$  ist die sogenannte Widerstandszahl oder der Reibungsbeiwert, welcher durch Versuche bestimmt werden muß.

Man kann die Luftsäulenhöhe  $H$  durch eine gleichwertige Wassersäule ersetzen, und zwar ist

$$H = \frac{h}{\gamma} \text{ mm W.S.}$$

wenn  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Luft ist. Setzt man

$$\frac{h}{\gamma} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

so wird

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

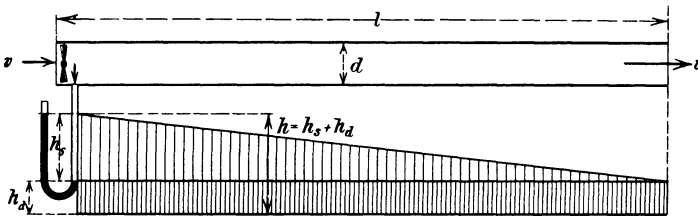


Abb. 462. Die Bewegungswiderstände in gerader Rohrstrecke.

Man nennt diese Wassersäulenhöhe die statische Druckhöhe, weil sie dem Reibungswiderstand das Gleichgewicht halten muß, und bezeichnet sie allgemein mit dem Buchstaben  $h_s$ . Wir setzen also bei der weiteren Betrachtung immer

$$h_s = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

Zur Fortbewegung der Luft sind also zwei Kräfte erforderlich, deren Größen durch die dynamische und durch die statische Druckhöhe gemessen werden. Die Gesamtkraft wird durch die Summe der beiden Druckhöhen gemessen, sie hat die Größe

$$h = h_d + h_s \text{ mm W.S. oder kg/m}^2 \text{ Rohrfläche.}$$

Der Ventilator muß nach Abb. 462 am Eingang der Lutte für die Luftbewegung diesen Überdruck  $h$  erzeugen, von dem die statische Druckhöhe hinter dem Ventilator als Wassersäulenhöhe  $h_s$  gemessen wird. Diese Größe  $h_s$  nimmt nach dem Ausgang hin geradlinig ab bis auf Null, während  $h_d$  unverändert in dem Luftstrom als kinetische Energie erhalten bleibt, solange die Geschwindigkeit  $v$  ihren Wert nicht ändert.

Die Bedeutung der Wassersäulenhöhe  $h$  zeigt Abb. 463. In einem

Zylinder ist ein Kolben von der Fläche  $F \text{ m}^2$  mit einer Wassersäule von  $h \text{ mm}$  Höhe belastet. Der Kolben würde unter dem Druck des Wassergewichts nach unten gehen, wenn nicht in entgegengesetzter Richtung eine Kolbenkraft  $P$  wirken würde. Diese muß die Größe haben

$$P = F \cdot \frac{h}{1000} \cdot \gamma_w = F \cdot \frac{h}{1000} \cdot 1000 = F \cdot h \text{ kg.}$$

Der Druck auf  $1 \text{ m}^2$  Kolbenfläche ist daher

$$p = \frac{P}{F} = \frac{F \cdot h}{F} = h \text{ kg/m}^2,$$

d. h. beträgt die Wassersäulenhöhe  $h = 1 \text{ mm}$ , so bedeutet das eine Kolbenbelastung von  $1 \text{ kg/m}^2$ .

Die Fortbewegung der Luft in einer Luttenleitung von  $l \text{ m}$  Länge kann man sich durch einen Kolben, der sich mit der Luftgeschwindigkeit  $v$  vorwärts schiebt, hervorgehoben denken. Das zeigt Abb. 464.

Der Druck der Luftsäule auf die Kolbenfläche  $F$  ist

$$P = F \cdot p.$$

Bei der Kolbengeschwindigkeit  $v$  ist die Arbeitsleistung

$$L = P \cdot v \text{ mkg/sek} = \frac{P \cdot v}{75} \text{ PS.}$$

Setzt man  $P = p \cdot F$  ein, so wird

$$L = \frac{p \cdot F \cdot v}{75} \text{ PS.}$$

Nun ist

$$F \cdot v = V = \text{Wettermenge in m}^3/\text{sek}$$

und

$$p = h,$$

also ist

$$L = \frac{V \cdot h}{75} \text{ PS.}$$

**Beispiel:** Eine Luttenleitung von  $400 \text{ mm}$  Durchmesser und  $100 \text{ m}$  Länge liefere bei einer statischen Druckhöhe von  $h_s = 19 \text{ mm W.S.}$  eine minutliche Wettermenge von  $Q = 60 \text{ m}^3$ ; wie groß ist der theoretische Kraftbedarf?

**Lösung:** Die Luftbewegung erfordert die Überwindung zweier Druckhöhen:

1. der dynamischen Druckhöhe  $h_d$

$$= \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma,$$

2. der statischen Druckhöhe  $h_s$ .

Um die dynamische Druckhöhe zu errechnen, muß die Wettergeschwindigkeit  $v$  bekannt sein.

$$\text{Sekundliche Wettermenge } V = \frac{Q}{60} = \frac{60}{60} = 1 \text{ m}^3/\text{sek},$$

$$\text{Wettergeschwindigkeit } v = \frac{V}{F} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot 0,4^2} = 8 \text{ m/sek.}$$

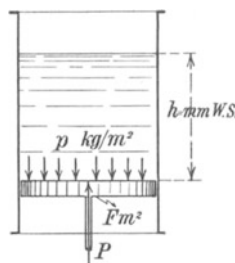


Abb. 463. Die Bedeutung der Wassersäulenhöhe.

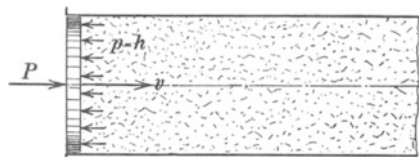


Abb. 464. Der Kolben schiebt die Luftsäule vorwärts.

Mit  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$  wird

$$h_a = \frac{8^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,20 = 3,9 \sim 4 \text{ mm W.S.}$$

Die Gesamtdruckhöhe ist

$$h = h_s + h_a = 19 + 4 = 23 \text{ mm W.S.}$$

Der theoretische Kraftbedarf ist also

$$L = \frac{V \cdot h}{75} = \frac{1 \cdot 23}{75} = \sim \frac{1}{3} \text{ PS.}$$

## 15. Der Reibungswiderstand in Luftleitungen.

Der Reibungswiderstand gasförmiger Körper bei der Fortleitung durch Rohre ist im allgemeinen sehr klein. Er wird daher in Millimeter Wassersäule angegeben. Strömt eine Luftmenge mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein Rohr vom Durchmesser  $d$  und der Länge  $l$ , so ist der Reibungswiderstand

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}, \quad (1)$$

wo  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Luft ist.

Wie bei der Strömung von Wasser schon bekannt geworden ist, verändert der Reibungsbeiwert  $\lambda$  seine Größe in ein und demselben Rohr mit der Wassergeschwindigkeit. So wird auch bei der Reibung von Luft in ein und demselben Rohr der Wert  $\lambda$  eine veränderliche Größe sein. Er ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl  $R$ . Das Abhängigkeitsverhältnis für glatte Rohre ist durch Versuche im Strömungslaboratorium der Universität Göttingen untersucht worden. Die Versuche ergaben die in Abb. 445 und 446 dargestellte Kurve. Das Gesetz dieser Kurve ist nach Blasius

$$\lambda = 0,3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{R}},$$

wo  $R$  die Reynoldssche Zahl bedeutet. Setzt man diesen Wert in Gleichung (1) ein, so wird der Reibungswiderstand

$$h = 0,3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{R}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.},$$

d. h. der Reibungswiderstand ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl.

Zunächst muß man, um die Reynoldssche Zahl  $R$  berechnen zu können, die kinematische Zähigkeit  $\nu$  der atmosphärischen Luft kennen. Diese Zahlenwerte können aus Abb. 465 entnommen werden. Man sieht auf der Horizontalen die Temperaturen der Luft von 0 bis 100° und auf der Senkrechten die  $\nu$ -Werte abgetragen. Die Werte gelten für atmosphärische Luft von 735 mm Barometerdruck. Bei Gasen ist die Abhängigkeit der kinematischen Zähigkeit vom Druck zu beachten. Das zeigt folgende Überlegung. Es ist bekanntlich die kinematische Zähigkeit

$$\nu = \frac{\mu \cdot g}{\gamma}.$$

Das Gewicht  $\gamma$  der Volumeneinheit ändert sich aber mit dem Druck. Über Tage sei der Barometerstand  $B_1 = 735$  mm Q.S. und unter Tage  $B_2 = 815$  mm Q.S., wie ändert sich der  $\nu$  = Wert ?

$$\nu_1 = \frac{\mu \cdot g}{\gamma_1}, \quad \nu_2 = \frac{\mu \cdot g}{\gamma_2},$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Bei Gasen verhalten sich die spezifischen Gewichte bei gleichbleibender Temperatur wie die Drücke, also ist auch

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{B_2}{B_1}$$

und damit wird

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{B_2}{B_1} \quad \text{oder} \quad \nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{B_1}{B_2}$$

für Luft von  $20^\circ$  und 735 mm Q.S. ist nach Abb. 465

$$\nu_1 = 0,160 \text{ cm}^2/\text{sek},$$

also für Luft von  $20^\circ$  und 815 mm Q.S.

$$\nu_2 = 0,160 \cdot \frac{735}{815} = 0,1442 \text{ cm}^2/\text{sek}.$$

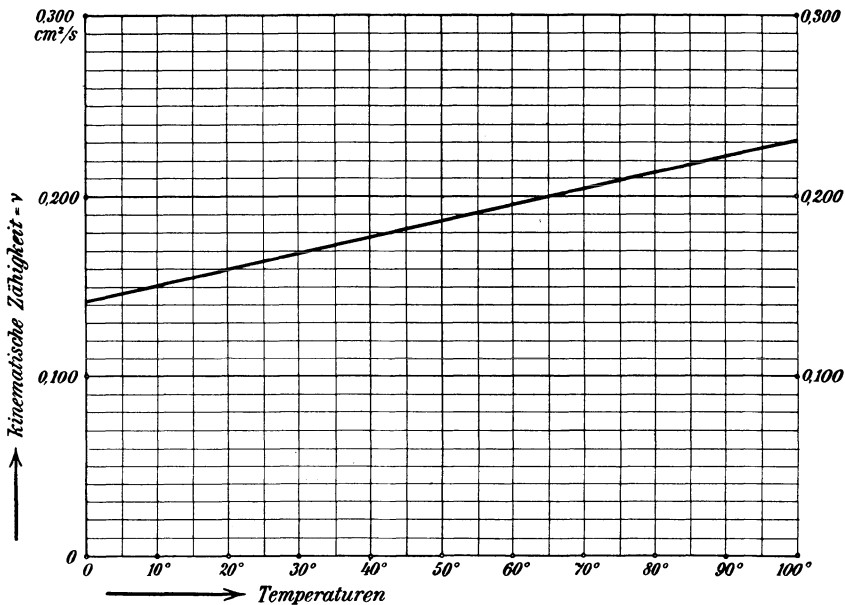


Abb. 465. Die kinematische Zähigkeit der atmosphärischen Luft als Abhängige der Temperatur.

Es soll für eine Lutte von  $d = 300$  mm Durchmesser und  $l = 100$  m Länge der Reibungswiderstand errechnet werden für Luft von  $20^\circ$  und 760 mm Q.S.

Zunächst werden die Strömungsgeschwindigkeiten für die zu fördern- den minutlichen Wettermengen errechnet.

$$Q = 5 \text{ m}^3/\text{min} \dots v = \frac{Q}{60 \cdot F} = 1,18 \text{ m/sek},$$

$$Q = 10 \quad ,, \quad v = 2,36 \quad ,,$$

$$Q = 20 \quad ,, \quad = 4,72 \quad ,,$$

$$Q = 30 \quad ,, \quad = 7,08 \quad ,,$$

$$Q = 34 \quad ,, \quad = 8,00 \quad ,,$$

Größere Wettergeschwindigkeiten als 8 m verwendet man im allgemeinen in Lutten nicht, damit ist also die größte Wettermenge der 300 mm Lutte festgelegt.

Das spezifische Gewicht der Luft bei  $B = 760 \text{ mm Q.S.} = 13,6 \cdot 760 = 10330 \text{ mm W.S.} = 10330 \text{ kg/m}^2 = p$  und  $t = 20^\circ$  ist

$$\gamma = \frac{p}{\mathfrak{R} \cdot T} \text{ kg/m}^3.$$

Die Luftkonstante ist  $\mathfrak{R} = 29,27$  und die absolute Temperatur  $T = 273^\circ + 20^\circ = 293^\circ$ , und damit ist

$$\gamma = \frac{10330}{29,27 \cdot 293} = 1,20 \text{ kg/m}^3.$$

Für  $B = 735 \text{ mm Q.S.}$  und  $t = 20^\circ$  ist nach Abb. 465 die kinematische Zähigkeit der Luft

$$\nu = 0,16 \text{ cm}^2/\text{sek},$$

also ist für  $B = 760 \text{ mm Q.S.}$

$$\nu = 0,16 \cdot \frac{735}{760} = 0,155 \text{ cm}^2/\text{sek}.$$

Mit diesem  $\nu$ -Wert sind nachstehend die Reynoldsschen Zahlen errechnet.

Aus den Abb. 445 und 446 findet man für die nachfolgenden Reynoldsschen Zahlen folgende  $\lambda$ -Werte.

$$Q = 5 \text{ m}^3/\text{min} \dots v = 1,18 \text{ m/sek} \dots R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{118 \cdot 30}{0,155} = 22800 \dots \lambda = 0,0258,$$

$$= 10 \quad ,, \quad = 2,36 \quad ,, \quad = \frac{236 \cdot 30}{0,155} = 44700 \dots \lambda = 0,0218,$$

$$= 20 \quad ,, \quad = 4,72 \quad ,, \quad = \frac{472 \cdot 30}{0,155} = 91100 \dots \lambda = 0,0182,$$

$$= 30 \quad ,, \quad = 7,08 \quad ,, \quad = \frac{708 \cdot 30}{0,155} = 137000 \dots \lambda = 0,0162,$$

$$= 34 \quad ,, \quad = 8,00 \quad ,, \quad = \frac{800 \cdot 30}{0,155} = 155000 \dots \lambda = 0,0159,$$

---


$$\text{Mittelwert } \lambda_m = 0,0196.$$

Man setzt die vorstehend gefundenen  $\lambda$ -Werte in die Formel

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma$$

ein und erhält folgende  $h$ -Werte:

$$Q = 5 \text{ m}^3/\text{min} \dots h = 0,0258 \cdot \frac{100}{0,30} \cdot \frac{1,18^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,20 = 0,74 \text{ mm W.S.},$$

$$= 10 \quad ,, \quad \dots h = 2,5 \quad ,, \quad ,,$$

$$= 20 \quad ,, \quad \dots h = 7,9 \quad ,, \quad ,,$$

$$= 30 \quad ,, \quad \dots h = 17,0 \quad ,, \quad ,,$$

$$= 34 \quad ,, \quad \dots h = 21,0 \quad ,, \quad ,,$$



Dieselbe Rechnung für Lutten von 400, 500 und 600 mm Durchmesser durchgeführt, liefert für die Reibungsbeiwerte folgende Mittelwerte:

$$\begin{aligned} \text{für 400 mm} \dots \lambda_m &= 0,0170, \\ \text{„ 500 „} &= 0,0157, \\ \text{„ 600 „} &= 0,0149. \end{aligned}$$

Vergleich mit den bisherigen Rechnungswerten.

Die auf Grund der neueren Strömungsforschung gefundenen Reibungsbeiwerte sollen mit den bisherigen Rechnungswerten verglichen werden. In der Bergbaukunde (Heise-Herbst) rechnet man die Widerstandshöhe  $h$  aus nach dem Gesetz

$$h = k \cdot \frac{L \cdot U \cdot v^2}{F} \text{ mm W.S.}$$

Hierin bedeutet

$$L = \text{Rohrlänge in m} = l,$$

$$U = \text{Rohrumfang } \pi \cdot d \text{ in m,}$$

$$F = \text{Rohrquerschnitt } \frac{\pi}{4} d^2 \text{ in m}^2$$

Setzt man

$$\frac{U}{F} = \frac{\pi \cdot d}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4}{d},$$

so lautet die Gleichung

$$h = k \cdot \frac{4}{d} \cdot l \cdot v^2 = 4k \cdot \frac{l}{d} \cdot v^2.$$

Die Strömungslehre rechnet mit der Gleichung

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma.$$

Setzt man die beiden  $h$ -Werte gleich, so wird

$$4k \cdot \frac{l}{d} \cdot v^2 = \frac{\lambda}{2g} \cdot \gamma \cdot \frac{l}{d} \cdot v^2$$

oder

$$4k = \frac{\lambda}{2g} \cdot \gamma \quad \text{und} \quad k = \frac{\lambda}{8g} \cdot \gamma$$

Setzt man  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$ , dann wird

$$\frac{\gamma}{8 \cdot g} = \frac{1,20}{8 \cdot 9,81} = 0,0153 \quad \text{und} \quad k = 0,0153 \cdot \lambda,$$

	Strömungslehre	Heise-Herbst
für 300 $\varnothing$ wird $k = 0,0153 \cdot 0,0196 = 0,000300$		0,0004
„ 400 $\varnothing$ „ $= 0,0153 \cdot 0,0170 = 0,000260$		0,0003
„ 500 $\varnothing$ „ $= 0,0153 \cdot 0,0157 = 0,000241$		0,00025
„ 600 $\varnothing$ „ $= 0,0153 \cdot 0,0149 = 0,000228$		0,0002

Die nach den Regeln der Strömungslehre gefundenen Werte für  $k$  sind die Mindestwerte, welche bei glatten Rohren mindestens vorkommen. Die in Heise-Herbst angegebenen Werte liegen höher als diese Mindestwerte mit Ausnahme des Wertes  $k = 0,0002$  für 600 mm-Lutten, dieser müßte erhöht werden auf  $k = 0,00025$ . Man wird also bei der Berechnung mit den  $k$ -Werten Ergebnisse erzielen, die höher liegen als sie wahrscheinlich sein werden,

Was bedeuten die  $k$ -Werte ?

Setzt man in der Gleichung

$$h = k \cdot \frac{L \cdot U}{F} \cdot v^2$$

den Quotienten

$$\frac{L \cdot U}{F} = 1 \quad \text{und} \quad v = 1,$$

so wird

$$h = k.$$

$k$  bedeutet also die Widerstandshöhe  $h$  in mm W. S. für eine bestimmte Rohrlänge  $x$  bei einer Wettersgeschwindigkeit von 1 m/sek. Diese Rohrlängen sind

$$\begin{aligned} \text{für } 300 \text{ } \varnothing \text{ ist } \frac{L \cdot U}{F} &= \frac{x \cdot \pi \cdot 0,3}{4} \cdot 0,3^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x = 0,075 \text{ m Rohrlänge,} \\ \text{,, } 400 \text{ } \varnothing &= \frac{x \cdot \pi \cdot 0,4}{4} \cdot 0,4^2 = 1 \quad \text{,, } x = 0,10 \text{ ,, } \\ \text{,, } 500 \text{ } \varnothing &= \frac{x \cdot \pi \cdot 0,5}{4} \cdot 0,5^2 = 1 \quad \text{,, } x = 0,125 \text{ ,, } \\ \text{,, } 600 \text{ } \varnothing &= \frac{x \cdot \pi \cdot 0,6}{4} \cdot 0,6^2 = 1 \quad \text{,, } x = 0,15 \text{ ,, } \end{aligned}$$

## 16. Druckluftleitungen.

Der Reibungswiderstand in Druckluftleitungen läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Reynoldsschen Zahl berechnen. Zur Bestimmung der Reynoldsschen Zahl muß die kinematische Zähigkeit der Druckluft bekannt sein, die von der Temperatur und dem Druck der Druckluft abhängig ist, wie nachstehende Tabelle zeigt.

$\nu$ -Werte für Druckluft.

Druck ata	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°
1	0,142	0,160	0,178	0,196	0,212	0,230	0,249	0,266
2	0,071	0,080	0,089	0,098	0,106	0,115	0,125	0,134
3	0,047	0,053	0,059	0,065	0,071	0,077	0,083	0,089
4	0,036	0,040	0,045	0,049	0,052	0,058	0,062	0,067
5	0,028	0,032	0,036	0,039	0,042	0,046	0,050	0,053
6	0,024	0,026	0,028	0,033	0,035	0,038	0,042	0,045
7	0,020	0,022	0,025	0,027	0,030	0,033	0,035	0,038

In Abb. 466 ist die Abhängigkeit der kinematischen Zähigkeit der Luft von Druck und Temperatur dargestellt, sie dient zur Ablesung der in der Zahlentafel nicht angegebenen Zwischenwerte.

In welchen Grenzen die Reynoldsche Zahl bei Druckluftleitungen auftritt, sei nachgeprüft. Als kleinster Durchmesser für längere Leitungen können 50 mm, als niedrigste Temperatur 20° und als Leitungs-

druck 4 atü angenommen werden. Für  $p = 5 \text{ ata}$  und  $t = 20^\circ$  ist nach der Zahlentafel der Wert  $\nu = 0,032 \text{ cm}^2/\text{sek}$ . Mit der geringsten Strömungsgeschwindigkeit  $v = 5 \text{ m/sek} = 500 \text{ cm/sek}$  und  $d = 5 \text{ cm}$  Rohrdurchmesser wird die Reynoldssche Zahl

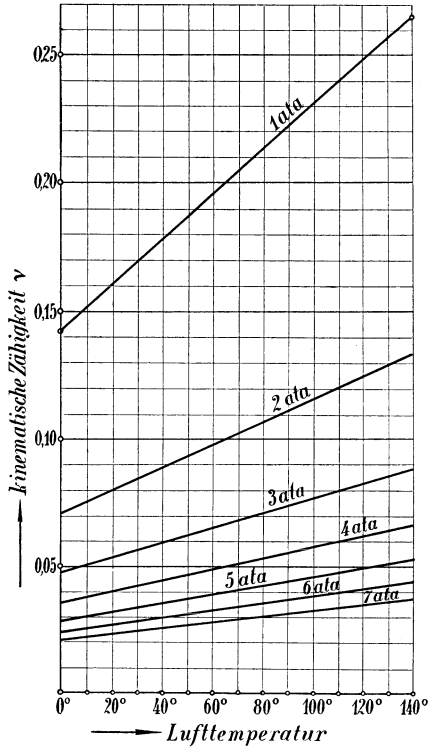
$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{500 \cdot 5}{0,032} = 78150.$$

Als größten Durchmesser kann man 400 mm, als höchste Temperatur  $100^\circ$  und als höchsten Leitungsdruck 6 atü annehmen. Für  $p = 7 \text{ ata}$  und  $t = 100^\circ$  ist nach der Zahlentafel der Wert  $\nu = 0,033$ , und damit wird, wenn die größte Strömungsgeschwindigkeit  $v = 30 \text{ m/sek} = 3000 \text{ cm/sek}$  ist,

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{3000 \cdot 40}{0,033} = 3640000.$$

Demnach liegt der Wert  $R$  zwischen den Grenzen 70000 und 4000000. Im Anhang sind hierfür die  $\lambda$ -Werte angegeben.

Der Verfasser hat Versuche angestellt, um einen Vergleich zwischen gemessenen und errechneten Druckverlusten zu ermöglichen. Die Versuche wurden an zwei Rohrstrecken von 50 mm und 94 mm Durchmesser vorgenommen. Am Anfang der Meßstrecke wurde ein Überdruck von 4,5 atü gehalten, die gemessenen Werte wurden auf eine Rohrlänge von 100 m umgerechnet.



sehen Zähigkeit der Druckluft von Druck und Temperatur.

v m/sek	Rohrdurchmesser d = 50 mm			Rohrdurchmesser d = 94 mm		
	Druckverlust für l = 100 m		gemessener Mehrwert %	Druckverlust für l = 100 m		gemessener Mehrwert %
	errechnet at	gemessen at		errechnet at	gemessen at	
5	0,0301	0,0330	9,5	0,0137	0,0150	9,3
10	0,1008	0,1250	25,0	0,0460	0,0542	18,0
15	0,2050	0,2700	31,8	0,0932	0,1088	16,2
20	0,3380	0,4800	42,0	0,1535	0,1790	16,5
25	0,5050	0,7540	49,5	0,2260	0,2660	18,8
30	0,6900	1,0850	57,2	0,3140	0,3670	17,0

Die Werte sind in Abb. 467 und 468 graphisch aufgetragen. Für beide Rohre liegen die gemessenen Werte höher als die errechneten. Für das enge Rohr wird die Abweichung bei großen Strömungsgeschwindigkeiten immer größer, sie steigt bis auf einen Mehrwert von 57%. Für das

weitere Rohr ist die Annäherung schon viel besser, von 10 m/sek Strömungsgeschwindigkeit aufwärts steigt der Mehrwert nicht mehr an, er hält sich auf 16 bis 19%, also folgt das weitere Rohr dem physikalischen Gesetz gut. Dafür läßt sich folgende Erklärung geben. Je größer der Durchmesser wird, um so dicker wird der Stron und desto geringer der Einfluß der rauhen Rohrwandung bei der Strömung, denn die Querschnittsfläche nimmt mit dem Quadrat, die Umfangsfläche nur mit der einfachen Durchmesserzunahme zu.

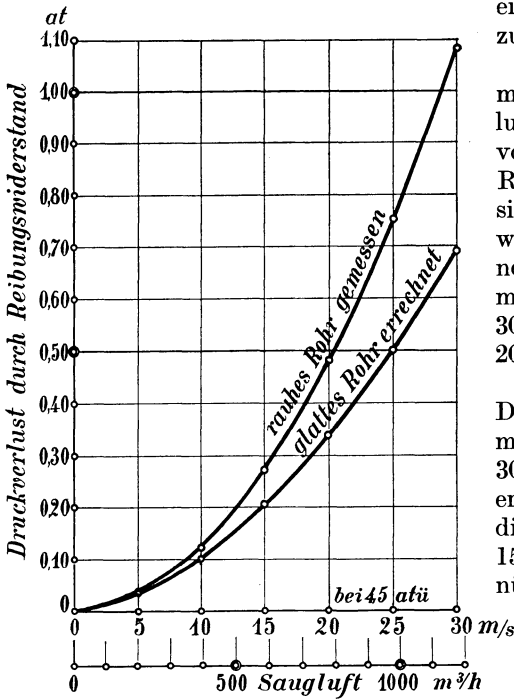


Abb. 467. Druckverluste in einem Rohr von 50 mm Durchm. und 100 m Länge.

Aus dieser Überlegung kann man folgern, daß auch Druckluftrohre, die den Durchmesser von 94 mm des untersuchten Rohres überschreiten, dem physikalischen Gesetz gehorchen werden. Man hat den errechneten Druckverlusten bei Strömungsgeschwindigkeiten bis zu 30 m/sek einen Zuschlag von 20% zu machen.

Bei Rohren unter 90 mm Durchmesser sind bei Strömungsgeschwindigkeiten bis zu 30 m/sek Zuschläge von 60% erforderlich. Man sollte aber bei diesen engen Rohren nicht über 15 m/sek gehen, und dann genügt ein Zuschlag von 30%.

**Beispiel:** Die Leistungsfähigkeit einer Hauptschachtleitung von 400 mm Durchmesser soll nachgeprüft werden, wenn die Druckluft mit 6 atü und 70° im Mittel durchströmt.

**Lösung:** Bei 7 ata und 7° ist die kinematische Zähigkeit der Luft nach Abb. 466

$$\nu = 0,029 \text{ kg/cm}^2$$

und damit ergeben sich für die Strömungsgeschwindigkeit von  $v = 5$  bis 30 m/sek folgende Reynoldssche Zahlen durch Rechnung und folgende  $\lambda$ -Werte (nach Tabelle im Anhang):

$$v = 5 \text{ m/sek, } R = \frac{500 \cdot 40}{0,029} = 690000 \dots \lambda = 0,01093,$$

$$v = 10 \text{ m/sek, } R = \frac{1000 \cdot 40}{0,029} = 1380000 \dots \lambda = 0,00920.$$

$$v = 15 \text{ m/sek, } R = 2070000 \dots \lambda = 0,00830,$$

$$v = 20 \text{ m/sek, } R = 2760000 \dots \lambda = 0,00780,$$

$$v = 25 \text{ m/sek, } R = 3450000 \dots \lambda = 0,00730,$$

$$v = 30 \text{ m/sek, } R = 4140000 \dots \lambda = 0,00700,$$

Das spezifische Gewicht der Druckluft ist bei  $p = 7,0 \text{ kg/cm}^2 = 70000 \text{ kg/m}^2$  und  $t = 70^\circ$

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{70000}{29,27 \cdot (273 + 70)} = 7,0 \text{ kg/m}^3.$$

Für  $l = 100 \text{ m}$  Rohrlänge und  $v = 5 \text{ m/sek}$  ist der Druckverlust

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma = 0,01093 \cdot \frac{100}{0,400} \cdot \frac{5^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 7,0 = 24,4 \text{ mm W.S.},$$

ebenso wird für

$v = 10 \text{ m/sek}$	der Druckabfall	$h = 82 \text{ mm W.S.}$
$v = 15 \text{ ,, ,, ,,}$		$= 166 \text{ ,, ,,}$
$v = 15 \text{ ,, ,, ,,}$		$= 278 \text{ ,, ,,}$
$v = 25 \text{ ,, ,, ,,}$		$= 407 \text{ ,, ,,}$
$v = 30 \text{ ,, ,, ,,}$		$= 562 \text{ ,, ,,}$

Zu diesen errechneten Mindestwerten wird ein Zuschlag von 20% gemacht, so daß folgende Druckverluste zu erwarten stehen

$v = 5 \text{ m/sek}$	. . . . .	$h = 1,20 \cdot 24,4 = 29,3 \text{ mm W.S.}$
$= 10 \text{ ,, ,, ,,}$	. . . . .	$= 1,20 \cdot 82 = 88,4 \text{ ,, ,,}$
$= 15 \text{ ,, ,, ,,}$	. . . . .	$= 1,20 \cdot 166 = 199,0 \text{ ,, ,,}$
$= 20 \text{ ,, ,, ,,}$	. . . . .	$= 1,20 \cdot 278 = 333,0 \text{ ,, ,,}$
$= 25 \text{ ,, ,, ,,}$	. . . . .	$= 1,20 \cdot 407 = 488,0 \text{ ,, ,,}$
$= 30 \text{ ,, ,, ,,}$	. . . . .	$= 1,20 \cdot 562 = 675,0 \text{ ,, ,,}$

Die Druckverluste sind in Abb. 469 als Ordinaten zu den Strömungsgeschwindigkeiten aufgetragen. Sie ergeben zwei Kurven, die obere ist aus der unteren mit 20% Zuschlag entstanden. Die Kurven zeigen die Abhängigkeit des Druckverlustes von der Strömungsgeschwindigkeit.

Bei  $D = 400 \text{ mm}$  Rohrdurchmesser ist der Rohrquerschnitt

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot 0,40^2 = 0,1256 \text{ m}^2$$

und bei  $v = 30 \text{ m/sek}$  die stündliche Luftmenge

$$Q = 3600 \cdot F \cdot v = 3600 \cdot 0,1256 \cdot 30 = 13580 \text{ m}^3/\text{h},$$

das sind, da die Strömungsluft einen Druck von 7 ata hat,

$$Q = 7 \cdot 13580 = 95000 \text{ m}^3/\text{h von 1 ata.}$$

Diese Saugluftmenge ist in Abb. 469 unten eingezeichnet und damit der Maßstab für die Saugluftmenge gebildet.

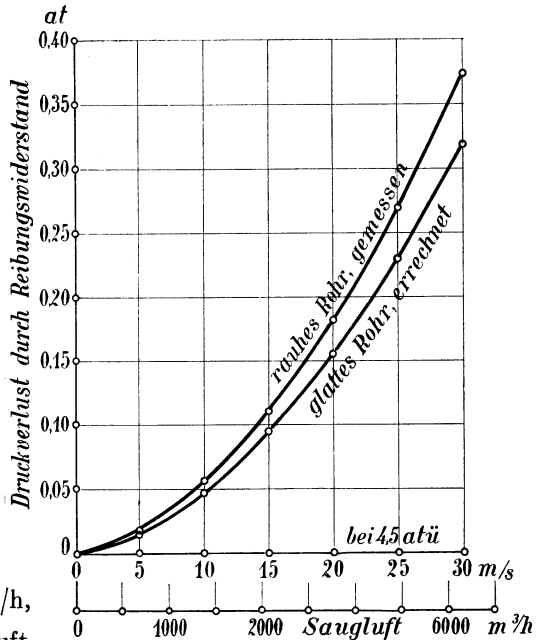


Abb. 468. Druckverluste in einem Rohr von 94 mm Durchm. und 100 m Länge.

Nimmt man eine Schachtleitung von  $l = 900$  m Länge an, so ist der Druckverlust für  $v = 30$  m/sek

$$\Delta p = 9 \cdot 675 = 6075 \text{ mm W.S.} = 0,6 \text{ at,}$$

d. h. saugt der Kompressor stündlich  $95000 \text{ m}^3$  an, so entsteht ein Druckabfall von  $0,6$  at, der wahrscheinlich durch den Druckgewinn in der Falleitung wieder ausgeglichen wird. Die Falleitung habe  $800$  m Länge, wie groß ist der Druckgewinn durch das Gewicht der Druckluftsäule?

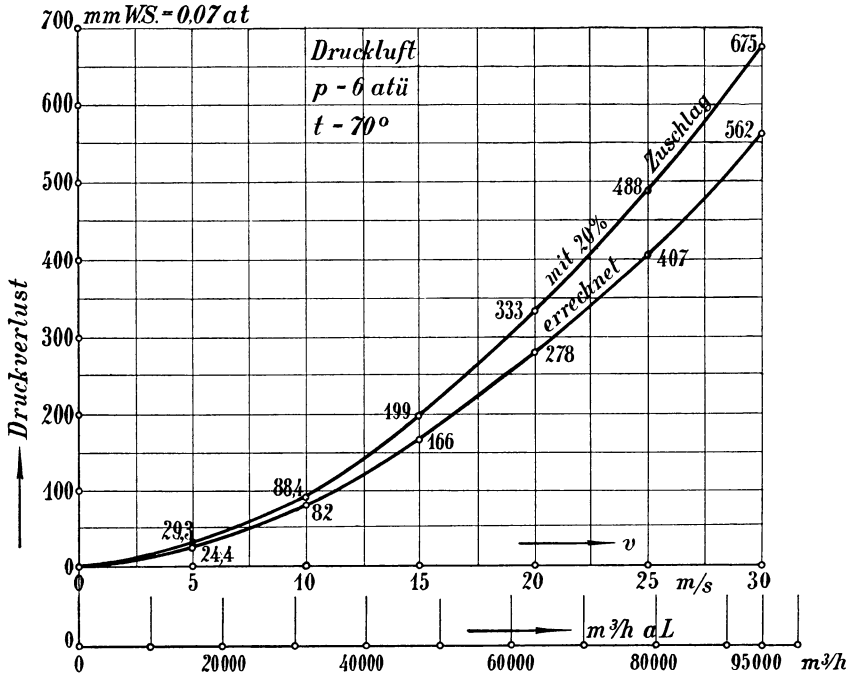


Abb. 463. Die Druckverluste in einer Schachtleitung von 400 mm Durchmesser und 100 m Länge.

### Der Druckgewinn in fallenden Druckluftleitungen.

Der Druckgewinn wird durch das spezifische Gewicht der Luft bestimmt. Im vorstehenden Beispiel war für  $p = 7 \text{ ata}$  und  $t = 70^\circ$  Temperatur das spezifische Gewicht der Druckluft

$$\gamma = 7,0 \text{ kg/m}^3,$$

d. h.  $1 \text{ m}^3$  Druckluft wiegt  $7 \text{ kg}$ . Nun hat  $1 \text{ m}^3$  als Würfel die Grundfläche  $1 \text{ m}^2$  und die Höhe  $1 \text{ m}$ , d. h.  $1 \text{ m}$  Luftsäule drückt mit  $7 \text{ kg}$  auf  $1 \text{ m}^2$ , oder

$1 \text{ m}$  Luftsäule bringt  $7 \text{ mm W.S.}$  Druckgewinn.

In dem Beispiel war der Druckgewinn für  $800 \text{ m}$  Fallhöhe zu bestimmen, er beträgt

$$\Delta p = 800 \cdot 7 = 5600 \text{ mm W.S.} = 0,56 \text{ at.}$$

Dem Druckgewinn von  $\Delta p = 0,56$  at steht ein errechneter Druckabfall  $\Delta p = 0,60$  at für Strömungswiderstände gegenüber, so daß praktisch sich beide ausgleichen und bei einer Druckluftspannung von 6 atü über Tage am Füllort derselbe Druck 6 atü zu erwarten steht. Eine Hauptschachtleitung von 400 mm Durchmesser zeigt demnach für eine Kompressorleistung von 95000 m<sup>3</sup>/h a. L. noch keinen Druckabfall.

**Aufgabe:** Ein Hochdruckkompressor hält über Tage einen Überdruck von 200 at. Wie groß ist der Druckgewinn bis zur 650 m-Sohle, wenn die mittlere Temperatur der Hochdruckluft 40° ist?

**Lösung:** Das spezifische Gewicht der Hochdruckluft ist für

$$p = 201 \text{ ata} = 201 \text{ kg/cm}^2 = 2010000 \text{ kg/m}^2,$$

$$t = 40^\circ, \text{ also } T = 273^\circ + 40^\circ = 313^\circ,$$

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{2010000}{29,27 \cdot 313} = 220 \text{ kg/m}^3,$$

d. h. 1 m Luftsäule = 220 kg/m<sup>2</sup> = 220 mm W.S.

$$\begin{aligned} 650 \text{ m Luftsäule} &= 650 \cdot 220 = 143000 \text{ mm W.S.} \\ &= \mathbf{14,3 \text{ at Druckgewinn.}} \end{aligned}$$

Am Füllort mußten daher bei 200 atü über Tage, falls keine Druckverluste durch Strömung auftreten, am Manometer 200 + 14,3 = 214,3 atü abzulesen sein. Während einer Schicht wurde unter Tage abgelesen

$$p_{\max} = 210 \text{ atü},$$

$$p_{\min} = 190 \text{ atü},$$

so daß dauernd mit einer Strömung gerechnet werden muß, die Druckabfall erzeugt. Theoretisch schwankt dann der Druckabfall zwischen 214,3 - 210 = 4,3 at und 214,3 - 190 = 24,3 at, falls der Hochdruckkompressor 200 atü dauernd halten konnte.

**Beispiel:** Ein 30 PS-Druckluftmotor, der 60 m<sup>3</sup> Saugluft für die PS-Stunde bei 5 ata verbraucht, sei durch eine 120 m lange Leitung von 65 mm Durchmesser an das Drucklufthauptnetz angeschlossen. Wie groß ist der Druckabfall in der Leitung?

**Lösung:** Der Motor verbraucht in der Stunde

$$30 \cdot 60 = 1800 \text{ m}^3 \text{ Luft von 1 ata}$$

$$= \frac{1800}{5} = 360 \text{ m}^3 \text{ Druckluft von 5 ata.}$$

Die sekundliche Druckluftmenge ist

$$V = \frac{360}{3600} = 0,1 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Das bedingt eine Luftgeschwindigkeit von

$$v = \frac{V}{F} = \frac{0,1}{\frac{\pi}{4} \cdot 0,065^2} = \frac{0,1}{0,00332} = 30 \text{ m/sek} = 3000 \text{ cm/sek.}$$

Die Reynoldssche Zahl ist für diesen Strömungsvorgang mit  $\nu = 0,026$  für 6 ata und 20°

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{3000 \cdot 6,5}{0,026} = 750000.$$

Nach der Tabelle im Anhang ist für  $R = 750000$  der Wert  $\lambda = 0,01074$ . Hiermit wird der Druckverlust

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma.$$

Hat die Luft bei 1 ata und 20° das spezifische Gewicht 1,20, so ist das spezifische Gewicht der Druckluft bei 5 ata

$$\gamma = 5 \cdot 1,20 = 6 \text{ kg/m}^3.$$

Unter Einsetzung der übrigen Zahlenwerte erhält man

$$h = 0,01074 \cdot \frac{120}{0,065} \cdot \frac{30^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 6 = 5500 \text{ mm W.S.}$$

oder

$$h = 5,5 \text{ m W.S.} = \mathbf{0,55 \text{ at.}}$$

Dieser Wert gilt für glatte Rohrleitungen als Mindestwert<sup>1</sup>.

## 17. Gasleitungen.

Die kinematische Zähigkeit  $\nu$  eines Gases wird sich aus der kinematischen Zähigkeit der Luft errechnen lassen. Bei Druckluft war der  $\nu$ -Wert für den höheren Druck umgekehrt proportional der Druckänderung, und da das spezifische Gewicht mit dem Druck proportional wächst, so kann man auch sagen, daß der  $\nu$ -Wert sich umgekehrt proportional mit der Änderung des spezifischen Gewichtes ändert.

Das spezifische Gewicht von Leuchtgas ist

$$\begin{aligned} \gamma_g &= 0,67 \text{ bis } 0,45 \text{ kg/m}^3, \\ &= 0,56 \text{ kg/m}^3 \text{ im Mittel.} \end{aligned}$$

Das spezifische Gewicht der Luft bei 20° ist  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$ . Also ist das Verhältnis

$$\frac{\gamma_g}{\gamma} = \frac{0,56}{1,20} = 0,47,$$

und wenn die kinematische Zähigkeit für Luft  $\nu = 0,16$  war, so ist sie für Gas

$$\nu = \frac{0,16}{0,47} = 0,341.$$

**Beispiel:** Wie groß ist der Reibungswiderstand in einer Gasleitung von 400 mm Durchmesser und 100 m Länge, wenn die Gasgeschwindigkeit 8 m/sek beträgt?

**Lösung:** Man rechnet wieder nach der Formel

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma_g.$$

Der  $\lambda$ -Wert bestimmt sich als Funktion der Reynoldsschen Zahl:

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{800 \cdot 40}{0,341} = 94000.$$

Nach Abb. 445 ist

für  $R = 94000$  der Wert  $\lambda = 0,0180$ ,

$$h = 0,0180 \cdot \frac{100}{0,4} \cdot \frac{8^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 0,56 = 8,25 \text{ mm W.S.}$$

Für dieselbe Rohrleitung erhält man bei Luftströmung mit derselben Geschwindigkeit den Wert

$$h = 15,2 \text{ mm W.S.,}$$

<sup>1</sup> Für raue Wände ist die Widerstandshöhe um 20 bis 60% größer. Im Lehrbuch der Bergwerksmaschinen rechnet Dr. Hoffmann für dasselbe Beispiel (S. 81)  $h = 0,91 \text{ at}$  aus, das würde 65% mehr sein.



d. h. die Fortleitung von Gas erfordert einen erheblich geringeren Kraftaufwand als die Fortleitung von Luft.

**Beispiel:** Eine Gasfernleitung von 50 km Länge und 800 mm Durchmesser soll 300 Millionen Kubikmeter im Jahre liefern. Wie groß ist der Kraftaufwand für die Fortleitung?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} 300000000 \text{ m}^3/\text{Jahr} &= \frac{300000000}{365 \cdot 24} = 34300 \text{ m}^3/\text{h} \\ &= \frac{34300}{3600} = 9,54 \text{ m}^3/\text{sek} = V, \end{aligned}$$

$$\text{Gasgeschwindigkeit } v = \frac{V}{F} = \frac{9,54}{\frac{\pi}{4} \cdot 0,8^2} = 19 \text{ m/sek.}$$

Schätzt man den Fortleitungsdruck auf 2 atü, so hat das Gas einen mittleren Druck von 1 atü oder 2 ata, sein spezifisches Gewicht ist dann

$$\gamma_g = 0,56 \cdot \frac{2}{1} = 1,12 \text{ kg/m}^3,$$

$$\text{Luft } \gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3 \dots v = 0,16,$$

$$\text{Gas } v = \frac{0,16}{\frac{\gamma_g}{\gamma}} = \frac{0,16}{\frac{1,12}{1,20}} = 0,172,$$

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{1900 \cdot 80}{0,172} = 880000.$$

Nach Tabelle im Anhang ist für  $R = 880000$

der Reibungswert  $\lambda = 0,0102$ ,

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma_g = 0,0102 \cdot \frac{50000}{0,80} \cdot \frac{19^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,12 = 13400 \text{ mm W.S.} = 1,34 \text{ at.}$$

Der Fortleitungsdruck war auf 2 at geschätzt, dieser Betrag wird auch praktisch annähernd erreicht werden, da man mit einem üblichen Zuschlag von 50% den Wert  $1,50 \cdot 1,34 = 2,0$  at erhält.

Der Kraftbedarf für die Fortleitung ist theoretisch

$$N_0 = \frac{V \cdot h}{75} \text{ PS,}$$

$$V = 9,54 \text{ m}^3/\text{sek,}$$

$$h = 2 \text{ at} = 20000 \text{ mm W.S.,}$$

$$N_0 = \frac{9,54 \cdot 20000}{75} = 2550 \text{ PS.}$$

Rechnet man für den Kompressor einen Wirkungsgrad von 70%, so wird die Kompressorleistung

$$N_e = \frac{2550}{0,70} = 3650 \text{ PS.}$$

Kostet die Pferdestunde 2 Pfg., dann sind die stündlichen Energiekosten

$$3650 \cdot 2 = 7300 \text{ Pfg.}$$

Die stündliche Gaslieferung ist  $34300 \text{ m}^3$ , also kommen auf  $1 \text{ m}^3$  Gas folgende Energiekosten für die Fortleitung

$$\frac{7300}{34300} = 0,215 \text{ Pfg./m}^3.$$

## 18. Blasversatzleitungen.

Um die Vorgänge in einer Blasversatzleitung zu untersuchen, seien folgende Verhältnisse aus der Praxis zugrunde gelegt. In Abb. 470 strömt Druckluft von 4 atü und 25° durch eine Düse, die sich von 50 mm kleinstem Durchmesser bei 350 mm Länge auf 130 mm Durchmesser erweitert. Hinter der Düse stellt sich am Anfang der 300 m langen Blasleitung ein Druck von 2 atü ein, der bis zum Ende der Blasleitung auf 0,05 atü absinkt. Die Blasleitung hat einen Durchmesser von 150 mm, das Versatzgut wird eingeschleust.

$$\begin{aligned} \text{Betriebszahlen: Versatzmenge} &= 60 \text{ m}^3/\text{h}, \\ \text{Blasluftverbrauch} &= 7500 \text{ m}^3/\text{h von 1 ata.} \end{aligned}$$

### 1. Die Luftgeschwindigkeit in der Blasleitung.

Bei einem Barometerdruck von 815 mm Q.S. = 1,11 ata und 0,05 atü Überdruck ist am Ende der Blasleitung  $p = 1,11 + 0,05 = 1,16 \text{ ata}$ .  $Q = 7500 \text{ m}^3/\text{h}$  von 1 ata sind

$$Q = \frac{7500 \cdot 1}{1,16} = 6450 \text{ m}^3/\text{h von 1,16 ata},$$

$$\text{sekundliche Luftmenge } V = \frac{6450}{3600} = 1,792 \text{ m}^3/\text{sek}.$$

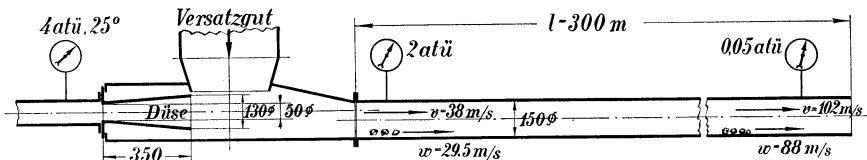


Abb. 470. Die Vorgänge in einer Blasversatzleitung.

Der Rohrquerschnitt ist  $F = 0,0176 \text{ m}^2$ , also ist die Ausblasegeschwindigkeit am Ende der Blasleitung

$$v = \frac{V}{F} = \frac{1,792}{0,0176} = 102 \text{ m/sek}.$$

Am Anfang der Blasleitung:

$$p = 1,11 + 2,0 = 3,11 \text{ ata und } Q = \frac{7500 \cdot 1}{3,11} = 2410 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{mit } V = \frac{2410}{3600} = 0,670 \text{ m}^3/\text{sek wird } v = \frac{0,670}{0,0176} = 38 \text{ m/sek}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit nimmt vom Anfang bis zum Ende der Blasleitung entsprechend der Druckminderung stetig zu, sie steigt von 38 m/sek auf 102 m/sek, so daß in der Blasleitung die mittlere Luftgeschwindigkeit

$$v = \frac{38 + 102}{2} = 70 \text{ m/sek}$$

herrscht. Das ist eine sehr hohe Geschwindigkeit im Hinblick darauf, daß man sonst bei Luft- und Dampfleitungen nur 25 bis 30 m/sek zuläßt.

## 2. Die Geschwindigkeit des Versatzgutes.

Bei der Strömung wird durch das Zurückbleiben des Bergstückes gegenüber dem Luftstrom ein Druck auf das Bergstück in der Bewegungsrichtung ausgeübt. Das Zurückbleiben erfolgt bis zum Gleichgewichtszustand, der dann erreicht ist, wenn der Winddruck auf die Auftrefffläche gerade so groß ist wie der Bewegungswiderstand des Bergeteils. Bewegt sich eine Fläche von  $F$  m<sup>2</sup> in der Windrichtung mit  $w$  m/sek vorwärts, so beträgt bei der Windgeschwindigkeit  $v$  m/sek der Druck auf die bewegte Fläche

$$P = k \cdot F \cdot \frac{(v - w)^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}, \quad (1)$$

worin  $k = 1$  bis  $3$  eine Erfahrungszahl ist.

Am Ende der Blasleitung ist das spezifische Gewicht der Blasluft mit  $p = 1,16 \text{ ata} = 11600 \text{ kg/m}^2$  und  $T = 273 + 17 = 290^\circ$

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{11600}{29,27 \cdot 290} = 1,365 \text{ kg/m}^3.$$

Angenommen sei, daß ein Würfelstück von 1 cm Kantenlänge auf der Sohle des Rohres weitergeschoben wird und daß das Blasgut das Gewicht  $2000 \text{ kg/m}^3$  hat. Das Würfelstück vom Volumen  $1 \text{ cm}^3$  wiegt dann  $G = 2 \text{ g}$ . Bei der Reibungszahl  $\mu = 0,65$  ist der Reibungswiderstand  $W = \mu \cdot G = 0,65 \cdot 2 = 1,3 \text{ g}$ . Das Würfelstück hat die Auftrefffläche  $1 \text{ cm}^2$ , folglich muß der Winddruck  $P$  auf den Würfel die Größe

$$P = 1,3 \text{ g}$$

für  $1 \text{ cm}^2$  oder  $P = 13000 \text{ g} = 13 \text{ kg/m}^2$  haben, d. h. verlangt wird ein Druck von

$$h = 13 \text{ mm W.S.}$$

auf das Bergestückchen.

Setzt man in Gleichung (1)  $k = 1$  und  $F = 1 \text{ m}^2$ , so ist

$$P = \frac{(v - w)^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

Der erforderliche Geschwindigkeitsunterschied muß sein

$$v - w = \sqrt{\frac{2g \cdot P}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 13}{1,365}} = 14 \text{ m/sek},$$

d. h. das Bergestückchen hat bei der Blasluftgeschwindigkeit  $v = 102 \text{ m/sek}$  am Ende der Blasleitung eine Strömungsgeschwindigkeit

$$w = v - 14 = 102 - 14 = 88 \text{ m/sek}.$$

Am Anfang der Blasleitung herrscht ein anderer Bewegungszustand. Mit  $p = 3,11 \text{ ata} = 31100 \text{ kg/m}^2$  und  $T = 273 + 27 = 300^\circ$  ist das spezifische Gewicht der Blasluft

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{31100}{29,27 \cdot 300} = 3,53 \text{ kg/m}^3.$$

Der für das Bergestückchen erforderliche Geschwindigkeits-Unterschied wird hiermit

$$v - w = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 13}{3,53}} = 8,5 \text{ m/sek},$$

d. h. das Bergestückchen hat bei der Blasluftgeschwindigkeit  $v = 38 \text{ m/sek}$  am Anfang der Leitung eine Strömungsgeschwindigkeit

$$w = v - 8,5 = 38 - 8,5 = 29,5 \text{ m/sek}.$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Versatzgutes ist

$$w = \frac{88 + 29,5}{2} = 59 \text{ m/sek}.$$

Auch hier handelt es sich um eine außerordentlich hohe Geschwindigkeit, so daß der starke Verschleiß der Rohrwände sich durch die Schleifwirkung der Bergestücke erklären läßt.

### 3. Der Strömungswiderstand der Luft in der Blasleitung.

Für die Blasleitung wurden folgende Strömungsverhältnisse ermittelt

$$\text{mittlere Luftgeschwindigkeit } v = 70 \text{ m/sek} = 7000 \text{ cm/sek},$$

$$\text{Leitungslänge } l = 300 \text{ m}, \quad \text{Leitungsdurchmesser } d = 15 \text{ cm},$$

$$\text{mittleres spez. Gewicht der Luft } \gamma = \frac{3,53 + 1,365}{2} = 2,45 \text{ kg/m}^3$$

für  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$  ist die kinematische Zähigkeit der Luft

$$\nu = 0,16 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{für } \gamma = 2,45 \text{ kg/m}^3 \text{ wird } \nu = 0,16 \cdot \frac{1,20}{2,45} = 0,078 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Reynoldssche Zahl wird

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{7000 \cdot 15}{0,078} = 1350000,$$

für  $R = 1350000$  wird  $\lambda = 0,00930$ .

$$\text{Reibungswiderstand } h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.},$$

$$= 0,0093 \cdot \frac{300}{0,15} \cdot \frac{70^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 2,45 = 11340 \text{ mm W.S.}$$

oder

$$p_1 = 11340 \text{ kg/m}^2 = 1,134 \text{ at}.$$

### 4. Der Strömungswiderstand der Berge in der Blasleitung.

$$\text{Stündliche Versatzmenge} \dots\dots = 60 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$\text{stündliches Bergegewicht} \dots\dots = 60 \cdot 2000 = 120000 \text{ kg/h},$$

$$\text{mittlere Strömungsgeschwindigkeit } w = 59 \text{ m/sek},$$

$$\text{stündlicher Förderweg} \dots\dots L = 3600 \cdot w = 3600 \cdot 59 = 212200 \text{ m/h},$$

$$\text{Ladegewicht für 1 m Rohrlänge} \dots = \frac{120000}{212200} = 0,612 \text{ kg/m},$$

$$\text{Ladegewicht bei 300 m Rohrlänge } G = 0,612 \cdot 300 = 183,6 \text{ kg},$$

$$\text{Reibungsziffer Eisenblech-Berge} \dots \mu = 0,65,$$

$$\text{Reibungswiderstand} \dots\dots W = \mu \cdot G = 0,65 \cdot 183,6 = 120 \text{ kg}.$$

Dieser Widerstand muß vom Luftkolben, der den Durchmesser der Leitung und die Kolbenfläche  $F = 176 \text{ cm}^2$  hat, überwunden werden durch den Überdruck  $p_2$  auf die Kolbenfläche

$$F \cdot p_2 = W \quad \text{oder} \quad p_2 = \frac{W}{F} = \frac{120}{176} = 0,68 \text{ at.}$$

5. Der Strömungswiderstand von Luft und Berge.

a)	Strömungswiderstand der Luft	$p_1 = 1,134$	at
b)	„ „ „ Berge	$p_2 = 0,680$	„
		$\text{Summe } p = 1,814$	

d. h. die Rechnung verlangt einen Überdruck von 1,814 at am Anfang der Blasleitung, während der Betrieb 2 at, also

$$\text{das } \frac{2,0}{1,814} = 1,10 \text{ fache}$$

verbraucht hat.

6. Die Form der Bergestückchen.

Die geometrische Form der Bergestückchen ist von Einfluß auf die Fortschiebungsfähigkeit. Hat ein Bergestück Plattenform wie ein Schieferstück, so wird die Fortschiebung sehr erschwert, weil sich das Stückchen im Luftstrom so einstellt, daß es dem Winddruck stets die kleinste Körperfläche entgegenstellt. Es möge ein Schieferstück mit den Abmessungen 5 mm Dicke, 10 mm Breite und 60 mm Länge bewegt werden.

$$\text{Volumen} = 0,5 \cdot 1,0 \cdot 6 = 3 \text{ cm}^3, \quad (1 \text{ cm}^3 = 2 \text{ g})$$

$$\text{Gewicht} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ g} = G,$$

$$\text{Reibungswiderstand } W = \mu \cdot G = 0,65 \cdot 6 = 3,9 \text{ g}.$$

Das Schieferstück hat die kleinste Körperfläche

$$f = 0,5 \cdot 1,0 = 0,5 \text{ cm}^2.$$

Die Fläche  $0,5 \text{ cm}^2$  muß einen Winddruck von  $W = 3,9 \text{ g}$  aufnehmen, d. h.  $1 \text{ cm}^2$  muß aufnehmen

$$P = 2 \cdot 3,9 = 7,8 \text{ g},$$

für  $1 \text{ m}^2$  wird  $P = 10000 \cdot 7,8 = 78000 \text{ g} = 78 \text{ kg/m}^2 = 78 \text{ mm W.S.}$ ,

Am Ende der Blasleitung ist hierfür der erforderliche Geschwindigkeitsunterschied

$$v - w = \sqrt{\frac{2g \cdot P}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 78}{1,365}} = 33,5 \text{ m/sek.}$$

Mit  $v = 102 \text{ m/sek}$  Luftgeschwindigkeit wird die Geschwindigkeit des Bergestückes nur

$$w = 102 - 33,5 = 68,5 \text{ m/sek.}$$

Am Anfang der Blasleitung ist der erforderliche Geschwindigkeitsunterschied

$$v - w = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 78}{3,53}} = 20,8 \text{ m/sek.}$$

Mit  $v = 38$  m/sek Luftgeschwindigkeit wird

$$w = v - 20,8 = 17,2 \text{ m/sek.}$$

Das Schieferstück hat also die mittlere Geschwindigkeit

$$w = \frac{68,5 + 17,2}{2} = 43 \text{ m/sek,}$$

während das Würfelstück die mittlere Geschwindigkeit  $w = 59$  m/sek hatte. Daraus ergibt sich die Folgerung, daß Schieferstücke sich träge bewegen und vor Aufgabe als Versatzgut zweckmäßig zu brechen sind.

#### 7. Wieviel vom Rohrquerschnitt nimmt das Versatzgut in Anspruch?

Unter Ziffer 4 wurde ein Ladegewicht von 0,612 kg je laufendes Meter Rohr errechnet, wenn die mittlere Strömungsgeschwindigkeit eingehalten wird. Also ist das Ladevolumen, da 1 cm<sup>3</sup> Berge 2 g wiegen

$$V = \frac{612}{2} = 306 \text{ cm}^3 \text{ für 1 m Rohrlänge.}$$

Ein Zylinder von 1 m = 100 cm Länge für dieses Volumen hat den Querschnitt

$$f = \frac{306}{100} = 3,06 \text{ cm}^2.$$

Der Rohrquerschnitt ist  $F = 176 \text{ cm}^2$ , also nimmt das Blasgut nur

$$\frac{3,06 \cdot 100}{176} = 1,74 \%$$

der Rohrfläche in Anspruch, so daß eigentlich überhaupt keine Verstopfungsgefahr besteht, wenn die Berge regelmäßig zufließen.

#### 8. Arbeitsleistung der Blasluft in und hinter der Blasleitung und der Gesamtwirkungsgrad.

Die Luft hat zwei Arbeiten zu leisten:

- a) Verschiebearbeit,
- b) Beschleunigungsarbeit.

Es werde die stündliche Verschiebearbeit errechnet. Das stündliche Berggewicht ist  $G = 60 \cdot 2000 = 120000$  kg. Der Reibungswiderstand ist  $W = \mu \cdot G = 0,65 \cdot 120000 = 78000$  kg, und da der Verschiebeweg  $s = 300$  m ist, ist die Verschiebearbeit

$$A_1 = W \cdot s = 78000 \cdot 300 = 23400000 \text{ mkg,}$$

da 270000 mkg = 1 PSh ist, so ist auch

$$A_1 = 23400000 : 270000 = 86,5 \text{ PSh.}$$

Da der Wärmewert für 1 PSh = 632 kcal, so ist der Wärmewert der Verschiebearbeit

$$W_1 = 86,5 \cdot 632 = 54700 \text{ kcal/h.}$$

Dieser Wärmewert wird der Blasluft für die Verschiebearbeit entzogen, andererseits aber durch die Reibung wieder in Wärme umgesetzt, so daß

dieser Abkühlungsbetrag der Luft nach außen keine fühlbare Abkühlung bringt.

Die Beschleunigungsarbeit errechnet sich am einfachsten aus der kinetischen Energie der am Leitungsende herausfliegenden Bergestücke.

$$\begin{aligned} \text{Austrittsgeschwindigkeit } w &= 68,5 \text{ m/sek,} \\ G &= 120\,000 \text{ kg/h} \quad \text{oder} \quad M = \frac{G}{g} = \frac{120\,000}{9,81} = 12\,240, \\ A_2 &= \frac{1}{2} m \cdot w^2 = \frac{1}{2} \cdot 12\,240 \cdot 68,5^2 = 28\,800\,000 \text{ mkg/h} \\ &= 28\,800\,000 : 270\,000 = 106,6 \text{ PSh,} \\ W_2 &= 106,6 \cdot 632 = 67\,500 \text{ kcal/h.} \end{aligned}$$

Dieser Wärmewert wird der Blasluft unter Arbeitsleistung entzogen, wodurch in der Blasleitung eine fühlbare Abkühlung eintreten müßte. Die ganze kinetische Energie wird aber beim Aufschlagen der Bergestücke im Versatz durch Stopfarbeit wieder in Wärme umgesetzt, so daß auch dieser Betrag praktisch keine nützliche Abkühlung bringt.

Diese Wärmewerte sollen mit dem theoretisch verfügbaren Wärmewert der verbrauchten Luft verglichen werden, wobei adiabatische Arbeitsleistung der Luft angenommen werde. Verbraucht werden

$$V = 7500 \text{ m}^3/\text{h} \text{ von } 1 \text{ ata und } 25^\circ \text{ C}$$

mit dem spezifischen Gewicht

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{10\,000}{29,27 \cdot (273 + 25)} = 1,155 \text{ kg/m}^3.$$

Das stündliche Luftgewicht ist

$$G = V \cdot \gamma = 7500 \cdot 1,155 = 8670 \text{ kg/h.}$$

Die Luft hat vor der Blasdüse den Zustand 5 ata und  $25^\circ$ , am Ende der Blasleitung den Druck 1,16 ata. Nach der Luftentropietafel<sup>1</sup> ist der Wärmewert der Luft

$$\begin{array}{r} \text{im Anfangszustand} = 25 \text{ kcal/kg} \\ \text{im Endzustand} \quad = 1 \text{ kcal/kg} \\ \hline \text{Wärmeabgabe} \quad = 24 \text{ kcal/kg.} \end{array}$$

Der Wärmewert der verbrauchten Druckluft ist

$$W_0 = 8670 \cdot 24 = 208\,000 \text{ kcal/h} = 100\%.$$

Verbraucht werden hiervon

$$\begin{array}{l} W_1 = 54\,700 \text{ kcal/h} = 26,3\% \text{ für Verschiebearbeit} \\ W_2 = 67\,500 \text{ kcal/h} = 32,5\% \text{ für Beschleunigungsarbeit} \\ \hline \text{Nutzarbeit} = 58,8\% \sim 59\% \\ \text{Rest} = 41,2\% \text{ als Verlust.} \end{array}$$

Ein Wirkungsgrad von  $\eta = 59\%$  muß bei der Umsetzung von Druckluftenergie in mechanische Arbeit als sehr hoch bezeichnet werden.

<sup>1</sup> Siehe Hoffmann: Lehrbuch der Bergwerksmaschinen.

Die für die Verschiebe- und Beschleunigungsarbeit errechneten PSh-Werte gelten für eine Arbeitszeit von 1 h, sie sind also auch die PS-Leistungen. Daher ist der Kraftverbrauch

$$\begin{array}{r} \text{für Verschiebeleistung} \quad N_1 = 86,5 \text{ PS} \\ \text{für Beschleunigungsleistung} \quad N_2 = 106,6 \text{ PS} \\ \hline \text{Gesamtverbrauch} \quad N = 193,1 \text{ PS} \end{array}$$

Bei einem Blasluftverbrauch von 7500 m<sup>3</sup>/h ist der spezifische Luftverbrauch

$$7500 : 193,1 = 39 \text{ m}^3 \text{ a. L. für 1 PSh.}$$

## 19. Die Wettermengen der Lutten.

Die Wettermenge einer Luttenleitung bestimmt sich, wenn  $F$  der Querschnitt in m<sup>2</sup> und  $v$  m/sek die Strömungsgeschwindigkeit ist aus der Gleichung

$$V = F \cdot v \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Welche Wettergeschwindigkeit  $v$  sich in der Lutte einstellt, hängt von der Energie des Ventilators ab. Der Ventilator muß eine Druckhöhe  $h$  mm W.S. erzeugen, um den Reibungswiderstand der Strömung zu überwinden.

Es soll der Rechnungsgang an einer 400 mm-Lutte gezeigt werden. Die Luttenleitung soll  $l = 50$  m lang sein und die Wettermenge  $Q = 60$  m<sup>3</sup>/min liefern. Die Temperatur der Grubenluft sei 20° und der Barometerdruck  $B = 815$  mm Q.S.

Für 20° und 1 ata = 735 mm Q.S. ist nach Tabelle S.456 die kinematische Zähigkeit der Luft  $\nu = 0,16$  kg/cm<sup>2</sup>, also ist für die gleiche Temperatur und  $B = 815$  mm Q.S.

$$\nu = 0,16 \frac{735}{815} = 0,144 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{Q}{60 \cdot F},$$

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot 0,4^2 = 0,1256 \quad \text{und} \quad Q = 60 \text{ m}^3/\text{min},$$

$$v = \frac{60}{60 \cdot 0,1256} = 8 \text{ m/sek} = 800 \text{ cm/sek.}$$

Mit  $d = 40$  cm und  $\nu = 0,144$  wird die Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{800 \cdot 40}{0,144} = 220000.$$

Für  $R = 220000$  ist nach der Tabelle im Anhang  $\lambda = 0,01460$ . Dem Barometerstand  $B = 815$  mm Q.S. entspricht der Druck

$$p = 815 \cdot 13,6 = 11100 \text{ kg/m}^2,$$

und damit wird das spezifische Gewicht der Luft

$$\gamma = \frac{p}{\mathfrak{R} \cdot T} = \frac{11100}{29,27 \cdot (273 + 20)} = 1,29 \text{ kg/m}^3.$$



Der Reibungswiderstand ist

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

Mit den Werten  $\lambda = 0,01460$ ,  $l = 50 \text{ m}$ ,  $d = 0,400 \text{ m}$ ,  $v = 8 \text{ m/sek}$  und  $\gamma = 1,29 \text{ kg/m}$  wird

$$h = 0,01460 \cdot \frac{50}{0,400} \cdot \frac{8^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,29 = 7,7 \text{ mm W.S.} \sim 8 \text{ mm W.S.}$$

In Abb. 471 ist eine zeichnerische Darstellung der errechneten Werte gegeben, auf der Horizontalen sind nach zwei Maßstäben die minutlichen

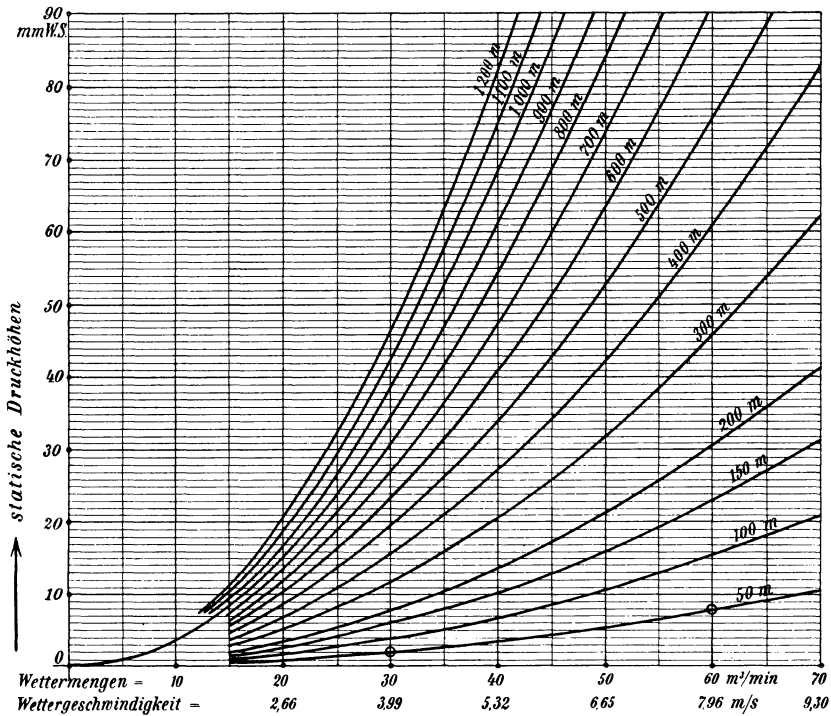


Abb. 471. Die Wettermengen der 400-mm-Lutten bei verschiedenen Druckhöhen.

Wettermengen und die Wettergeschwindigkeit abzulesen, auf der Vertikalen die zugehörigen Druckhöhen  $h$ . Der errechnete Wert liefert einen Punkt der Diagrammkurve 50 m. Für  $Q = 60 \text{ m}^3/\text{min}$  ist die Druckhöhe  $h = 8 \text{ mm}$  aufgetragen.

In gleicher Weise werden für die Wettermengen 50, 40 und 30  $\text{m}^3/\text{min}$  die  $h$ -Werte errechnet, für  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{min}$  ist z. B.  $h = 2 \text{ mm W.S.}$  eingetragen, d. h. geht die Wettermenge auf die Hälfte zurück, so fällt die Druckhöhe quadratisch, sie geht also auf  $\frac{1}{4}$  zurück, d. i.  $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \text{ mm}$ .

Aus der unteren Kurve  $l = 50 \text{ m}$  können alle anderen Kurven für die Vielfachen von 50 m Luttenlänge entwickelt werden, da die Druckhöhen  $h$  proportional mit den Längen  $l$  zunehmen. In Abb. 471 ist z. B.

bei $Q = 30 \text{ m}^3/\text{min}$ für	$l = 50 \text{ m}$	. . .	$h = 2 \text{ mm}$
	„ $l = 100$ „	. . .	$h = 2 \cdot 2 = 4 \text{ mm}$
	„ $l = 150$ „	. . .	$h = 3 \cdot 2 = 6 \text{ „}$
	„ $l = 200$ „	. . .	$h = 4 \cdot 2 = 8 \text{ „}$
	„ $l = 300$ „	. . .	$h = 6 \cdot 2 = 12 \text{ „}$

Man kann also aus der einen errechneten Kurve alle anderen durch Ordinatenvergrößerung einzeichnen. Dann erhält man das Kurvenbild der Abb. 471.

Auf diese Weise erhält man für jede Luttenlänge eine besondere Widerstandskurve, welche die Form einer Parabel hat. Man nennt diese Widerstandsparabel die Kennlinie der Lutte, weil sie uns mit der Wettermenge bekannt macht, die bei einer bestimmten Druckhöhe  $h$  geliefert wird. Aus Abb. 471 lassen sich nun die Höchstwerte ablesen, welche in dichten Lutten bei der jeweiligen Druckhöhe  $h$  praktisch erreicht werden können. Als höchste Strömungsgeschwindigkeit nehme man etwa  $v = 8 \text{ m}/\text{sek}$ ; damit erhält man dann die maximale Wettermenge der Lutte. Über 8 m hinaus zu gehen empfiehlt sich nicht, weil sonst die Reibungswiderstände und damit die Betriebskosten zu groß werden. Aus Abb. 471 sind für alle vorkommenden Luttenlängen und Druckhöhen die gelieferten Wettermengen dichter Lutten zu entnehmen.

## 20. Das Temperament der Wetterwege.

Man weiß, daß der Widerstand bei der Bewegung der Wetter durch einen Wetterweg ein Reibungswiderstand ist, der sich nach dem bekannten Gesetz

$$h = k \cdot \frac{L \cdot U}{F} \cdot v^2$$

errechnen läßt. Ist dieser Wetterweg z. B. eine Lutte von  $L$  Meter Länge und  $d$  Meter Durchmesser, so ändern sich die Werte

$$L, \quad U = \pi \cdot d \quad \text{und} \quad F = \frac{\pi}{4} d^2$$

nicht. Ebenso kann der Reibungsbeiwert  $k$  als konstant angenommen werden, so daß der Ausdruck

$$k \cdot \frac{L \cdot U}{F} = C = \text{konst.}$$

gesetzt werden kann. Damit lautet das Reibungsgesetz in seiner einfachsten Form

$$h = C \cdot v^2,$$

d. h. der Reibungswiderstand ist nur noch eine Abhängige von dem Quadrat der Geschwindigkeit. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{v^2}{h} = \frac{1}{C},$$

so ist

$$\frac{v^2}{h} = \text{konst.}$$

Da die Wettergeschwindigkeit  $v$  proportional der Wettermenge  $V$  ist,

so kann man auch schreiben

$$\frac{V^2}{h} = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{V}{\sqrt{h}} = \text{konst.}$$

Diese Verhältniszahl

$$\frac{\text{sekundliche Wettermenge in m}^3}{\text{Quadratwurzel aus Reibungshöhe in mm W.S.}} = \frac{V}{\sqrt{h}}.$$

nennt man das Temperament des Wetterweges und bezeichnet es mit dem Buchstaben  $T$ . Man schreibt also

$$\frac{V}{\sqrt{h}} = T.$$

Ist das Temperament eines Wetterweges bekannt, so lassen sich durch einfache Druckmessungen die Wettermengen errechnen, denn es ist

$$V = T \cdot \sqrt{h}.$$

d. h. die Wettermengen wachsen

1. mit dem Temperament des Wetterweges,
2. mit der Quadratwurzel aus der Druckhöhe.

Ein Wetterweg ist demnach um so leistungsfähiger, je größer sein Temperamentwert ist.

Aus Abb. 471 läßt sich z. B. das Temperament einer 100 m langen Luttenleitung von 400 mm Durchmesser errechnen. Man liest ab

$$Q = 70 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{und} \quad h = 21 \text{ mm W.S.}$$

Damit ist

$$V = \frac{Q}{60} = \frac{70}{60} = 1,166 \text{ m}^3/\text{sek} \quad \text{und} \quad \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{1,166}{\sqrt{21}} = 0,255 = T.$$

In gleicher Weise würde man für eine 100 m lange Luttenleitung von 300, 500 und 600 mm Durchmesser die Temperamentwerte gewinnen.

Temperamentwerte einer 100 m langen Luttenleitung.

Luttendurchmesser =	300 mm	400 mm	500 mm	600 mm
$T =$	0,167	0,255	0,422	0,727

Man sieht, die Temperamentwerte wachsen mit Zunahme des Lutten-durchmessers ganz bedeutend, und hiermit wachsen auch die Wetter-mengen, z. B. ist bei derselben Druckhöhe  $h$  die Wettermenge der 600-Lutte

$$\frac{T_{600}}{T_{300}} = \frac{0,727}{0,167} = 4,35$$

mal so groß wie in einer 300-Lutte.

## 21. Das Längentemperament der Lutten.

Eine Lutte von  $l_1$  m Länge möge bei einem Druck von  $h_1$  mm W.S. die sekundliche Wettermenge  $V$  liefern, dann ist ihr Temperament

$$T_1 = \frac{V}{\sqrt{h_1}} \quad \text{oder} \quad V = T_1 \cdot \sqrt{h_1}.$$

Dieselbe Lutte werde auf das Doppelte verlängert, so daß

$$l_2 = 2 \cdot l_1$$

wird, dann ist zur Förderung derselben Wettermenge  $V$  auch die doppelte Druckhöhe

$$h_2 = 2 \cdot h_1$$

erforderlich, d. h. es besteht das Verhältnis

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Das Temperament der verdoppelten Lutte ist

$$T_2 = \frac{V}{\sqrt{h_2}} \quad \text{oder} \quad V = T_2 \cdot \sqrt{h_2}.$$

Setzt man die beiden  $V$ -Werte einander gleich, so ist

$$T_1 \cdot \sqrt{h_1} = T_2 \cdot \sqrt{h_2}.$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1}} \quad \text{oder} \quad T_1 \cdot \sqrt{l_1} = T_2 \cdot \sqrt{l_2}.$$

Verlängert man die Lutte auf  $l_3$ , so würde ebenfalls sein

$$T_1 \cdot \sqrt{l_1} = T_3 \cdot \sqrt{l_3},$$

d. h. es wird allgemein

$$T_1 \cdot \sqrt{l_1} = T_2 \cdot \sqrt{l_2} = T_3 \cdot \sqrt{l_3} = \text{konst.}$$

Diesen konstanten Wert nenne ich das Längentemperament des Wetterweges.

Hat man also für eine bestimmte Luttenlänge den Temperamentwert durch einen Versuch bestimmt, so lassen sich für alle anderen Luttenlängen die Temperamentwerte errechnen. Es ist dann

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot \sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}, \quad T_3 = \frac{T_1 \cdot \sqrt{l_1}}{\sqrt{l_3}}.$$

Aus den Temperamentwerten der 100 m langen Lutten finden wir folgende Längentemperaturen:

300 mm Durchmesser . . . . .	$T \cdot \sqrt{l} = 0,167 \cdot \sqrt{100} = 1,670,$
400 mm Durchmesser . . . . .	$= 0,255 \cdot \sqrt{100} = 2,550,$
500 mm Durchmesser . . . . .	$= 0,422 \cdot \sqrt{100} = 4,220,$
600 mm Durchmesser . . . . .	$= 0,727 \cdot \sqrt{100} = 7,270.$

**Beispiel:** Wie groß ist das Temperament einer 1200 m langen Lutte von 600 mm Durchmesser?

**Lösung:** Das Längentemperament der 600-mm-Lutte ist

$$T \cdot \sqrt{l} = 7,270,$$

also ist das Temperament der 1200 m langen Lutte

$$T = \frac{T \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{1200}} = \frac{7,270}{34,7} = 0,210.$$

**Beispiel:** Wieviel  $m^3$  liefert die dichte Lutte von 600 mm Durchmesser und 1200 m Länge, wenn der Ventilator eine Druckhöhe  $h = 40$  mm erzeugt?

**Lösung:** Da das Temperament

$$\frac{V}{\sqrt{h}} = T = 0,210$$

bekannt ist, wird die Wettermenge

$$V = T \cdot \sqrt{h} = 0,210 \cdot \sqrt{40} = 1,33 \text{ m}^3/\text{sek},$$

$$Q = 60 \cdot V = 60 \cdot 1,33 = 80 \text{ m}^3/\text{min}.$$

## 22. Die Temperamentwerte als Maßstab der Bewetterungsfähigkeit.

Sobald das Temperament eines Wetterweges bekannt ist, ist seine Wetterlieferung für alle vorkommenden Druckhöhen auch bekannt. Es ist daher die Bewetterungsfähigkeit eines Wetterweges ausschließlich

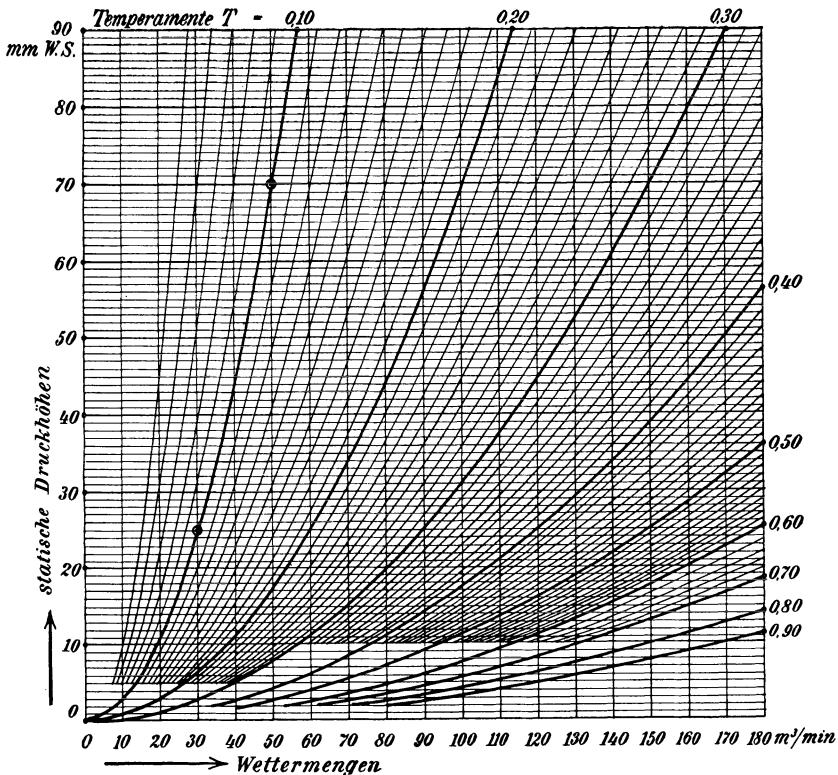


Abb. 472. Die Temperamente der Luttenwege.

eine Funktion seines Temperamentes. Daher liegt es nahe, allgemein gültige Tafeln für die Temperamentgrößen herzustellen. Eine solche Temperamenttafel zeigt Abb. 472. Sie ist in folgender Weise gewonnen. Man rechne aus

$$\frac{V}{\sqrt{h}} = T$$

die Druckhöhe

$$h = \frac{V^2}{T^2},$$

indem man für  $T$  einen bestimmten Wert annimmt, z. B.

$$T = 0,10,$$

dann ist

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{0,10^2} = 100 \quad \text{und} \quad h = 100 \cdot V^2.$$

In der Regel geht man von den minutlichen Wettermengen  $Q$  weiter aus, für  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{min}$  ist  $V = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ m}^3/\text{sek}$ . Für diesen Wert ist

$$h = 100 \cdot V^2 = 100 \cdot 0,5^2 = 25 \text{ mm}.$$

In Abb. 472 ist dieser Wert aufgetragen, als Abszisse liest man  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{min}$  und als Ordinate  $h = 25 \text{ mm}$ .

Für  $Q = 50 \text{ m}^3/\text{min}$  ist

$$V = \frac{50}{60} = 0,832 \text{ m}^3/\text{sek},$$

also ist

$$h = 100 \cdot V^2 = 100 \cdot 0,832^2 = 70 \text{ mm}.$$

Auch dieser Punkt ist in Abb. 472 eingezeichnet. So kann man beliebig viele Punkte ausrechnen, die, miteinander verbunden, die Parabel als Temperamentkurve

$$T = 0,10$$

liefern.

Die Anwendung der Tafel werde an einem Beispiel gezeigt.

**Beispiel:** Eine 625 m lange Luttenleitung soll  $80 \text{ m}^3/\text{min}$  liefern, wie groß sind die erforderlichen Druckhöhen für verschiedene Lutten Durchmesser?

**Lösung:**

1. Durchmesser 600 mm:

Das Längentemperament dieser Lutte ist nach S. 474

$$T \cdot \sqrt{l} = 7,27,$$

also ist das Temperament der 625 m langen Lutte

$$T = \frac{T \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{625}} = \frac{7,27}{25} = 0,29.$$

Nach Abb. 472 schneidet die Temperaturkurve  $T = 0,29$  auf der  $80\text{-m}^3$ -Ordinate die Druckhöhe

$$h = 21 \text{ mm}$$

ab.

2. Durchmesser 500 mm:

Nach S. 474 ist das Längentemperament dieser Lutte

$$T \cdot \sqrt{l} = 4,22,$$

also ist das Temperament der 625 m langen Lutte

$$T = \frac{4,22}{\sqrt{625}} = \frac{4,22}{25} = 0,17.$$

Nach Abb. 472 schneidet die Temperamentkurve  $T = 0,17$  auf der  $80\text{-m}^3$ -Ordi-naten die Druckhöhe

$$h = 61,5 \text{ mm}$$

ab.

3. Durchmesser 400 mm:

Nach S. 474 ist das Längentemperament

$$T \cdot \sqrt{l} = 2,55,$$

also ist das Temperament der 625 m langen Lutte

$$T = \frac{2,55}{\sqrt{625}} = \frac{2,55}{25} = 0,10.$$

Nach Abb. 472 schneidet die Temperamentkurve  $T=0,10$  die  $80 \text{ m}^3$ -Ordinate überhaupt nicht mehr, d. h. die 400-Lutte wäre für diese Wetterlieferung unbrauchbar.

### 23. Die gleichwertige (äquivalente) Grubenöffnung oder Grubenweite.

Der Grubenventilator ist durch einen Saugkanal an das Grubengebäude angeschlossen. Auf dem ganzen Wege durch das Grubengebäude stößt die Wettermenge auf Widerstände, die durch die Saugwirkung des Ventilators überwunden werden müssen. Der Ventilator muß einen bestimmten Unterdruck oder eine Depression oben im Saugkanal erzeugen. Es besteht also zwischen Ventilator und Grubengebäude eine bestimmte Wechselwirkung. Um diese Wechselwirkung zu erkennen und rechnerisch zu erfassen, hat man eine Hilfsgröße eingeführt, die Grubenweite oder äquivalente Grubenöffnung.

Man trennt den Saugkanal vom Grubengebäude ab und schließt den abgeschnittenen Kanal durch eine Platte ab, in der sich eine ausgeschnittene Öffnung befindet. Diese Öffnung ändert man so lange, bis der Ventilator dieselbe Depression wie beim Anschluß an das Grubengebäude liefert. Diese Öffnung, in  $\text{m}^2$  gemessen, nennt man die Grubenweite. Ein Grubengebäude mit großen Widerständen wird eine kleine Grubenweite haben, je geringer der Grubenwiderstand wird, um so größer wird die Grubenweite. Man kann also die Bewetterungsfähigkeit einer Grube nach seiner Grubenweite beurteilen.

Strömt durch eine Öffnung mit scharfen Rändern (Abb. 473) Luft aus einem Raum mit höherem Druck  $p_2$  in einen Raum mit niedrigerem Druck  $p_1$ , so errechnet sich die sekundlich ausströmende Luftmenge aus der Gleichung

$$V = A \cdot w,$$

wenn  $A$  die Ausflußöffnung und  $w$  die Ausflußgeschwindigkeit ist. Der Ausflußstrahl wird aber an den scharfen Kanten eine Kontraktion erfahren, so daß der Strahlquerschnitt nur die Größe

$$\alpha \cdot A$$

hat, wenn  $\alpha$  der Kontraktionskoeffizient ist. Da im engsten Querschnitt die Geschwindigkeit  $v$  herrscht, ist die ausströmende Luftmenge

$$V = \alpha \cdot A \cdot v.$$

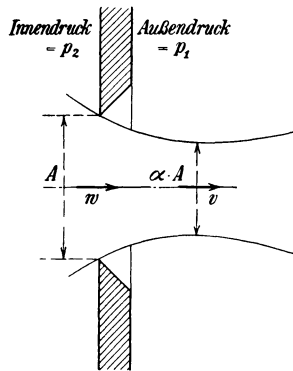


Abb. 473. Die gleichwertige Grubenöffnung als Öffnung mit scharfen Rändern.

Steht im Behälter eine Druckhöhe von  $H$  m Luftsäule zur Verfügung, so ist bekanntlich

$$H = \frac{v^2}{2g} \text{ m Luftsäule.}$$

Man ersetzt die Höhe der Luftsäule durch eine gleichwertige Wassersäulenhöhe und schreibt dann

$$h = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma \text{ mm Wassersäule,}$$

worin  $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$  das spezifische Gewicht der Luft bedeutet. Demnach ist bei der Druckhöhe  $h$  die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}}.$$

Hiermit wird

$$V = \alpha \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}}$$

und die Ausflußöffnung

$$A = \frac{V}{\alpha \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{V}{\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Setzt man  $\alpha = 0,65$ ,  $\gamma = 1,20$  und  $g = 9,81$ , so wird

$$A = 0,38 \cdot \frac{V}{\sqrt{h}}.$$

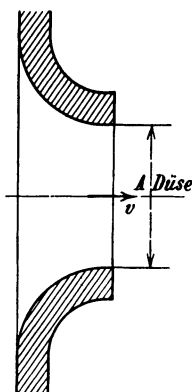


Abb. 474. Die gleichwertige Düse.

**Beispiel:** Wie groß ist die Grubenweite, wenn der Ventilator  $Q = 7200 \text{ m}^3/\text{min}$  bei  $h = 225 \text{ mm}$  Depression liefert?

**Lösung:** Man muß die sekundliche Wettermenge errechnen:

$$V = \frac{Q}{60} = \frac{7200}{60} = 120 \text{ m}^3/\text{sek}$$

und findet

$$A = 0,38 \cdot \frac{V}{\sqrt{h}} = 0,38 \cdot \frac{120}{\sqrt{225}} = 3,04 \text{ m}^2.$$

Der Ventilatorenausschuß des VDI empfiehlt in seinen „Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren“ (VDI-Verlag 1925) die Verwendung der Hilfsgröße

„gleichwertige Düse“

(Abb. 474), da bei der Öffnung in dünner Wand die Kontraktionszahl  $\alpha$  zu berücksichtigen ist. Er rechnet dann bei der Düse mit dem  $\alpha$ -Wert 1, obwohl das auch nur innerhalb gewisser Grenzen gilt.

Mit  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1,20$  und  $g = 9,81$  errechnet sich der Querschnitt der gleichwertigen Düse zu

$$A_1 = 0,25 \cdot \frac{V}{\sqrt{h}}.$$

In Bergbaukreisen ist von dieser Anregung kein Gebrauch gemacht worden.



## 24. Zeichnerische Darstellung der äquivalenten Grubenweite.

Die Grubenweite kann in der Gleichung

$$A = 0,38 \cdot \frac{V}{\sqrt{h}}$$

bildlich dargestellt werden. Die Umstellung der Gleichung liefert

$$h = \frac{0,38^2}{A^2} \cdot V^2,$$

d. h. setzt man für  $A$  einen bestimmten Wert ein, z. B.  $A = 1 \text{ m}^2$ , so ist  $h$  nur eine Funktion von  $V$

$$h = \frac{0,38^2}{1^2} \cdot V^2 = 0,144 \cdot V^2,$$

welche sich als Parabelkurve darstellen läßt.

Für  $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{min}$  ist  $V = \frac{1000}{60} = 16,7 \text{ m}^3/\text{sek}$  und  $h_1 = 0,144 \cdot 16,7^2 = 40 \text{ mm}$ ,

„  $Q = 2000$  „ „ „  $h_2 = 4 \cdot h_1 = 4 \cdot 40 = 160 \text{ mm}$ ,

„  $Q = 3000$  „ „ „  $h_3 = 9 \cdot h_1 = 9 \cdot 40 = 360$  „

Trägt man auf der Horizontalen die  $Q$ -Werte und als Ordinaten die  $h$ -Werte auf und verbindet die Ordinatenendpunkte, so erhält man eine Parabelkurve. Sie ist in Abb. 475 mit Grubenweite  $A = 1 \text{ m}^2$  bezeichnet. In derselben Weise werden die Kurven für  $A = 2 \text{ m}^2$ ,  $A = 3 \text{ m}^2$ ,  $A = 4 \text{ m}^2$  usw. gefunden.

Das Schaubild läßt sofort die Bewetterungsfähigkeit einer Grube erkennen. Je höher die Depression wird, um so größer wird der Kraftbedarf der Bewetterung. Man wird daher bestrebt sein, mit möglichst geringer Depression eine große Wettermenge zu schaffen, das wird um so vollkommener möglich, je größer die Grubenweite ist. Die höchste Depression, mit welcher zur Zeit im Ruhrrevier gearbeitet wird, beträgt 330 mm, die kleinste etwa 70 mm. Das Arbeitsgebiet liegt also etwa zwischen 100 und 300 mm. Diese Grenzwerte ergeben für die verschiedenen Grubenweiten folgende Wettermengen:

Grubenweite $A$	Wettermengen in $\text{m}^3/\text{min}$		
	bei $h = 100 \text{ mm}$	$h = 200 \text{ mm}$	$h = 300 \text{ mm}$
$1 \text{ m}^2$	1550 $\text{m}^3/\text{min}$	2200 $\text{m}^3/\text{min}$	2750 $\text{m}^3/\text{min}$
$2 \text{ m}^2$	3100 „	4400 „	5500 „
$3 \text{ m}^2$	4650 „	6600 „	8250 „
$4 \text{ m}^2$	6200 „	8800 „	11000 „
$5 \text{ m}^2$	7750 „	11000 „	13750 „
$6 \text{ m}^2$	9300 „	13200 „	16500 „

In Abb. 475 ist eine Kurve mit den Punkten 1, 2, 3 und 4 gezeichnet. Die Kurvenpunkte sind aus den auf den Zechen gemessenen Wettermengen  $Q$  und den gemessenen Depressionen  $h$  aufgezeichnet. Es fällt jeder Meßpunkt auf eine bestimmte Grubenweitenkurve, diese zeigt

dann die Grubenweite der betreffenden Zeche an. Den Kurvenpunkten entsprechen folgende Zahlenwerte.

Zeche	Minutl. Wettermenge $Q$ in $m^3$	Depression $h$ in mm W.S.	Grubenweite $A$ in $m^2$
1 = Mont Cenis, Schacht 2 .	4000	220	1,71
2 = Holland, Schacht 5 . .	6650	280	2,52
3 = Minister Stein, Schacht 1	11230	330	3,92
4 = de Wendel . . . . .	16500	310	5,96

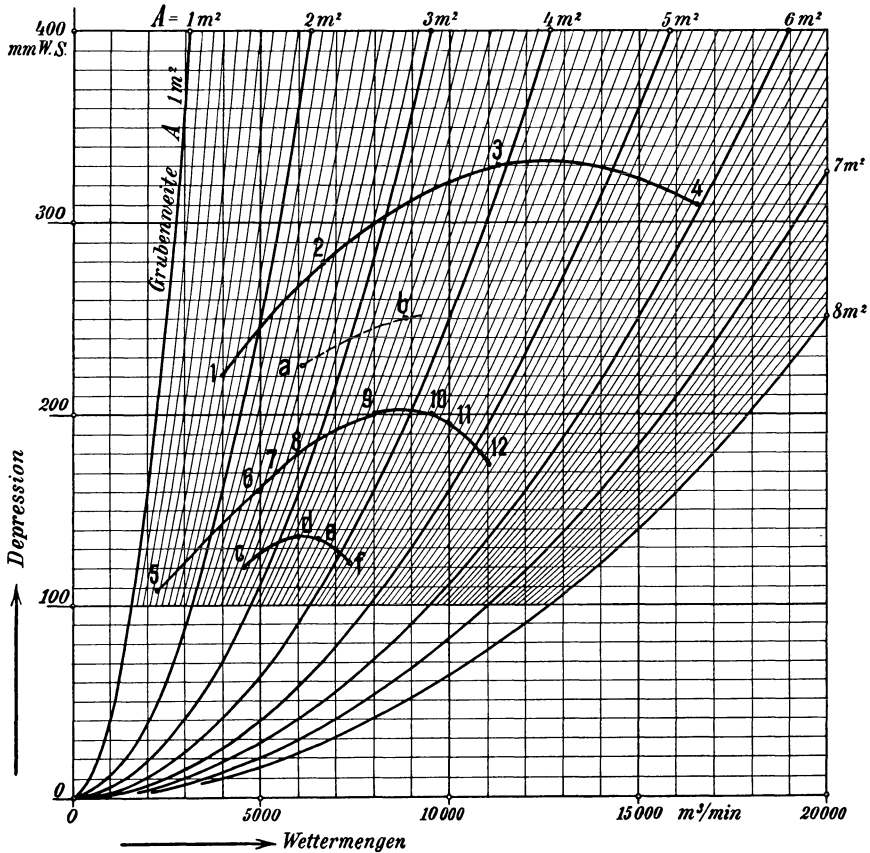


Abb. 475. Zeichnerische Darstellung der äquivalenten Grubenweiten.

1. Kurve: 1 = Zeche-Mont Cenis, 2 = Holland, Schacht 5; 3 = Minister Stein, Schacht 1; 4 = de Wendel.
2. Kurve: a = Shamrock, Schacht 7; b = Ewald.
3. Kurve: 5 = Zeche Heinrich; 6 = Lothringen, Schacht 4; 7 = Consolidation, Schacht 1/6; 8 = Dahlbusch, Schacht 8; 9 = Friedr. Thyssen, Schacht 3/7; 10 = Minister Stein, Schacht 3; 11 = Holland, Schacht 1/2; 12 = Mathias Stinnes, Schacht 1/2/5.
4. Kurve: c = Karoline, d = Bismarck 1/4, e = Bismarck 3/5, f = Bismarck 2/6/9.

Aus einer Reihe von Meßwerten gruppieren sich auch die Punkte 5 bis 12 zu einer regelmäßig verlaufenden Kurve zusammen. Den Kurvenpunkten entsprechen folgende Zahlenwerte:

Zeche	Minutl. Wettermenge $Q$ in $m^3$	Depression $h$ in mm W.S.	Grubenweite $A$ in $m^2$
5 = Zeche Heinrich . . . . .	2250	108	1,37
6 = Lothringen, Schacht 4 . . . . .	4950	160	2,48
7 = Konsolidation 1/8 . . . . .	5400	170	2,63
8 = Dahlbusch, Schacht 8 . . . . .	6000	180	2,83
9 = Friedr. Thyssen 3/7 . . . . .	8000	200	3,58
10 = Minister Stein, Schacht 3 . . . . .	9534	200	4,27
11 = Holland 1/2 . . . . .	10000	196	4,53
12 = Mathias Stinnes 1/2/5 . . . . .	10800	180	5,10

Außerdem lassen noch die Kurvenpunkte  $a$  und  $b$  eine Zusammengehörigkeit erkennen, und darunter die Kurvenscharpunkte  $c$  bis  $f$  ebenfalls.

Zeche	$Q$ in $m^3/\text{min}$	$h$ in mm W.S.	$A$ in $m^2$
$a$ = Zeche Shamrock 7 . . . . .	6081	225	2,57
$b$ = Ewald . . . . .	8820	250	3,54
$c$ = Caroline . . . . .	4560	120	2,64
$d$ = Bismarck 1/4 . . . . .	6000	136	3,26
$e$ = Bismarck 3/5 . . . . .	6500	135	3,54
$f$ = Bismarck 2/6/9 . . . . .	7300	122	4,23

## 25. Der Grubenventilator.

Bei der Schleuderpumpe wurde nachgewiesen, daß die Druckhöhe proportional mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  wächst. Sie berechnet sich bei radial auslaufenden Schaufeln nach der Gleichung

$$h = \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{10} \text{ m W.S.}$$

Dasselbe gilt auch für Luftschleuderräder, so daß wir schreiben können

$$h = \frac{v^2}{10} \text{ m Luftsäule.}$$

Ist  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Luft in  $\text{kg}/\text{m}^3$ , so erzeugt die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Schleuderrades die Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{10} \cdot \gamma \text{ mm W.S.}$$

Man geht bei großen Ventilatoren auf Umfangsgeschwindigkeiten bis zu

$$v = 60 \text{ m/sek}$$

und erzielt damit bei  $\gamma = 1,25 \text{ kg}/\text{m}^3$  eine theoretische Druckhöhe

$$h = \frac{60^2}{10} \cdot 1,25 = 450 \text{ mm W.S.}$$

Diese theoretischen Werte werden praktisch nicht erreicht. Gibt ein ausgeführter Ventilator den Druck  $h_s$  und errechnete man den theoretischen Druck  $h$ , so ist das Verhältnis

$$\mu = \frac{h_s}{h}$$

das Güteverhältnis des praktisch ausgeführten Ventilators zum theoretisch vollkommenen. Man nennt dieses Verhältnis den manometrischen Wirkungsgrad des Ventilators, der folgende Größen haben kann.

Schaufelform	große Ventilatoren	kleine Ventilatoren
vorwärts gekrümmt . . . . .	$\mu \leq 0,78$	0,40
radiale Endigung . . . . .	$\mu \leq 0,66$	0,30
rückwärts gekrümmt . . . . .	$\mu \leq 0,54$	0,25

**Beispiel:** In Abb. 475 schneidet die Kurve  $1234'$  die Grubenweiteparabel  $4 \text{ m}^2$  in dem Punkt

$$h = 331 \text{ mm W.S. und } Q = 11500 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Welche Umfangsgeschwindigkeit  $v$  muß dieser Ventilator haben, wenn  $\mu = 0,77$  ist?

**Lösung:** Die theoretische Druckhöhe wird

$$h = \frac{h_e}{\mu} = \frac{331}{0,77} = 430 \text{ mm W.S.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit wird

$$v = \sqrt{\frac{10 \cdot h}{\gamma}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 430}{1,25}} = 58 \text{ m/sek.}$$

Bei  $D = 6,50$  Raddurchmesser wird die zugehörige Drehzahl

$$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot D} = \frac{60 \cdot 58}{3,14 \cdot 6,50} = 170 \text{ Umdrehungen/min.}$$

Da die Umfangsgeschwindigkeiten  $v$  den Drehzahlen  $n$  proportional sind und proportional mit  $v$  die Wettermengen wachsen, gilt der 1. Satz:

1. Die Wettermengen wachsen proportional mit den Drehzahlen.

$$Q_1 : Q_2 = n_1 : n_2.$$

Da die Druckhöhen proportional mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeiten wachsen, gilt der 2. Satz:

2. Die Druckhöhen wachsen proportional mit dem Quadrat der Drehzahlen.

$$h_1 : h_2 = n_1^2 : n_2^2.$$

Da die Ventilatorleistung sich aus dem Produkt der sekundlichen Wettermenge und der Druckhöhe errechnet, so gilt der 3. Satz:

3. Die PS-Stärken wachsen proportional mit der dritten Potenz der Drehzahlen.

**Beispiel:** In Abb. 475 schneidet die Kurve Punkt 5 bis  $12$  die Grubenweiteparabel  $4 \text{ m}^2$  in dem Punkt

$$Q = 9000 \text{ m}^3/\text{min und } h = 202 \text{ mm W.S.}$$

Kann der oben errechnete Ventilator diese Wetterleistung übernehmen?

**Lösung:** Die Wetterleistung sinkt ab von  $Q_1 = 11500 \text{ m}^3/\text{min}$  auf  $Q_2 = 9000 \text{ m}^3/\text{min}$ , also muß sein

$$n_2 : n_1 = Q_2 : Q_1 \quad \text{oder} \quad n_2 = \frac{Q_2}{Q_1} \cdot n_1 = \frac{9000}{11500} \cdot 170 = 133/\text{min},$$

d. h. der Ventilator muß in der Drehzahl von 170 auf 133 in der Minute heruntersgesetzt werden.

Welche Depression erzeugt dann der Ventilator ?

$$h_2 : h_1 = n_2^2 : n_1^2 \quad \text{oder} \quad h_2 = h_1 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 331 \cdot \left(\frac{133}{170}\right)^2 = 202 \text{ mm W.S.},$$

d. h. der Ventilator liefert die verlangte Depression.

**Beispiel:** In Abb. 475 schneidet die Kurve Punkt *c* bis *f* die Grubenweiteparabel 4 m<sup>2</sup> im Punkt

$$Q = 7200 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{und} \quad h = 128 \text{ mm W.S.}$$

Kann der Ventilator auch diese Wetterleistung übernehmen ?

**Lösung:** Die Drehzahländerung muß sein

$$n_3 = \frac{Q_3}{Q_1} \cdot n_1 = \frac{7200}{11500} \cdot 170 = 106,5/\text{min}$$

und damit wird

$$h_3 = h_1 \cdot \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2 = 331 \cdot \left(\frac{106,5}{170}\right)^2 = 129 \text{ mm W.S.}$$

Der Ventilator kann also auch diese Leistung übernehmen.

**Ergebnis:** Ändert man die Grubenweite nicht, so fällt und wächst die Wettermenge proportional mit der Drehzahländerung, die Depression proportional mit dem Quadrat der Drehzahländerung.

Eine zweite Regelung ist noch möglich. Wenn der Ventilator einen Antrieb hat, der keine Drehzahländerung zuläßt, so muß man ihn, um kleinere Wettermengen zu erhalten, auf einen größeren Grubenwiderstand setzen, d. h. man schließt den Wetterschieber mehr zu und verkleinert damit die Grubenweite. Es werde angenommen die Kurve  $\overline{1234}$  sei die Kennlinie, die der Ventilator fährt, dann kann die Wettermenge

$$Q = 9000 \text{ m}^3/\text{min},$$

auch erhalten werden, indem man die Senkrechte durch  $Q = 9000 \text{ m}^3/\text{min}$  zum Schnitt bringt mit der Kurve  $\overline{1234}$ . Durch den Schnittpunkt geht die Grubenweiteparabel 3,2 m<sup>2</sup> und die Depression stellt sich auf  $h = 312 \text{ mm W.S.}$  ein.

Das ist aber höchst unwirtschaftlich, wie folgende Rechnung zeigt:

1. Regelung durch Drehzahländerung:

$$\text{Theoretischer Kraftverbrauch } N_0 = \frac{V \cdot h}{75} = \frac{9000 \cdot 202}{60 \cdot 75} = 404 \text{ PS.}$$

2. Regelung durch Verkleinerung der Grubenweite (Schieberdrosselung):

$$\text{Theoretischer Kraftverbrauch } N_0 = \frac{V \cdot h}{75} = \frac{9000 \cdot 312}{60 \cdot 75} = 625 \text{ PS},$$

d. h. jetzt arbeitet der Ventilator mit einem

$$\frac{625}{404} = 1,545\text{fachen Kraftverbrauch.}$$

**Ergebnis:** Muß man auf kleinere Wettermengen gehen, so soll man nur durch Drehzahländerung regeln.

Der Ausblaseschlot des Ventilators: Um die kinetische Energie der herausgeschleuderten Luftmassen auszunutzen, umgibt man das Schaufelrad Abb. 476 mit einem Gehäuse. Der Auslauf des Gehäuses wird trichterförmig erweitert, so daß sich die Luftgeschwindigkeit entsprechend der Querschnittszunahme vermindert. Es wird die Strömungsenergie in Druck umgesetzt. Vermindert sich die Geschwindigkeit der sekundlich abströmenden Luftmasse  $m$  von  $v_2$  auf  $v_1$  m/sek, so ist das Leistungsvermögen für die Druckzunahme

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \text{ mkg/sek.}$$

**Aufgabe:** Ein Ventilator arbeite in Abb. 475 auf dem Kurvenpunkt 3, liefert also  $Q = 11500 \text{ m}^3/\text{min}$  bei  $h = 331 \text{ mm}$  Depression; welcher Druckgewinn wird erzielt, wenn im Schlot die Strömungsgeschwindigkeit  $v_2 = 30 \text{ m/sek}$  auf  $v_1 = 10 \text{ m/sek}$  herabgesetzt wird und  $\gamma = 1,29 \text{ kg/m}^3$  ist?

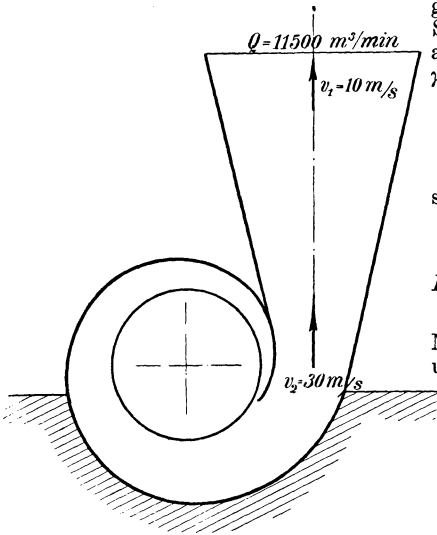


Abb. 476. Der Ausblaseschlot eines Grubenventilators.

**Lösung:** Sekundliches Luftgewicht

$$G = \frac{Q}{60} \cdot \gamma = \frac{11500 \cdot 1,29}{60} = 242 \text{ kg/sek,}$$

sekundliche Luftmasse

$$m = \frac{G}{g} = \frac{242}{9,81} = 24,7,$$

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 24,7 \cdot (30^2 - 10^2) = 9880 \text{ mkg/sek.}$$

Mit 65% Wirkungsgrad in der Druckumsetzung wird die Nutzleistung

$$L_e = 0,65 \cdot L = 0,65 \cdot 9880 = 6400 \text{ mkg/sek.}$$

Das sekundliche Luftvolumen ist

$$V = \frac{Q}{60} = \frac{11500}{60} = 193 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Damit wird

$$L_e = V \cdot h$$

$$\text{oder } h = \frac{L_e}{V} = \frac{6400}{193} = 33 \text{ mm W.S.,}$$

d. h. von der Ventilatordepression 331 mm W.S. werden 33 mm W.S. durch den Ausblaseschlot erzeugt. Würde man ihn nicht so ausbilden sondern die Wetter mit 30 m/sek in die Atmosphäre strömen lassen, so müßte die Ventilatormaschine

$$N = \frac{L_e}{75} = \frac{6400}{75} = 85 \text{ PS}$$

mehr leisten.

Theoretisch muß die Ventilatormaschine

$$N_0 = \frac{V \cdot h}{75} = \frac{193 \cdot 331}{75} = 855 \text{ PS}$$

oder mit dem mechanischen Wirkungsgrad  $\eta = 0,75$  des Ventilators

$$N_e = \frac{N_0}{\eta} = \frac{855}{0,75} = 1140 \text{ PS}$$

aufbringen.

## 26. Das Grubentemperament.

Man hat zur Vorstellung der Widerstandsgröße des ganzen Wetterweges einer Grube die Hilfsgröße „äquivalente Grubenöffnung“ gebildet und schreibt dafür

$$A = 0,38 \cdot \frac{V}{\sqrt{h}}.$$

Man erkennt aber sofort, daß der Wert

$$\frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{A}{0,38} = T$$

der konstante Wert des ganzen Grubenwetterweges ist, den man allgemein als Temperament und hier als Grubentemperament bezeichnet. Dieser konstante Wert  $T$  ist als Rechnungsgröße einfacher, da man bei allen Rechnungen nicht mehr den Faktor 0,38 mitzuschleppen nötig hat.

Es zeigt sich daher das Bestreben, die Widerstände der Wetterwege, ob sie Lutten, Strecken oder ganze Grubengebäude sind, einheitlich durch ihre Temperamentwerte zu vergleichen.

Da die Bezeichnung „Temperament“ nicht besonders glücklich gewählt ist, sucht man hierfür eine andere Benennung, v. Rosen hat die Benennung

„Durchlaßvermögen“

vorgeschlagen. Ist das Temperament einer Grube z. B.  $T = 12$ , so wird für  $h = 1$  mm Depression das Durchlaßvermögen

$$V = \sqrt{h} \cdot T = \sqrt{1} \cdot T = T = 12 \text{ m}^3/\text{sek},$$

d. h. man versteht unter Durchlaßvermögen die sekundliche Wettermenge, welche bei 1 mm Depression durch das Grubengebäude gesaugt wird.

Die Aufstellung der Grubentemperaturente macht keine Schwierigkeiten. Nach der Formel

$$\frac{V}{\sqrt{h}} = T \quad \text{ist} \quad h = \frac{1}{T^2} \cdot V^2,$$

d. h. man kann für einen bestimmten Wert von  $T$ , z. B. für  $T = 3,0$ , die Depression  $h$  als Funktion der sekundlichen Wettermenge  $V$  darstellen:

$$h = \frac{1}{3^2} \cdot V^2 = \frac{1}{9} \cdot V^2,$$

z. B. für  $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{min}$  wird  $V = \frac{1000}{60} = 16,67 \text{ m}^3/\text{sek}$  und  $h = \frac{1}{9} \cdot 16,67^2 = 31 \text{ mm}$ ,

„  $Q = 2000$  „ wird  $h = 4 \cdot 31 = 124 \text{ mm}$ ,  
 „  $Q = 3000$  „ „  $h = 9 \cdot 31 = 279$  „  
 „  $Q = 4000$  „ „  $h = 16 \cdot 31 = 496$  „

In Abb. 477 sind die Werte bildlich dargestellt. Auf der Horizontalen werden die minutlichen Wettermengen  $Q$  und als Ordinaten die  $h$ -Werte aufgetragen. Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten miteinander, so erhält man die als Grubentemperament = 3,00 bezeichnete parabel-

förmige Kurve, die bekannte Temperamentkurve. In gleicher Weise sind die Temperamentkurven

$$T = 4 \text{ bis } 22$$

gefunden. Man sieht, es entsteht wieder ein Strahlenbüschel von Kurven, das dem Strahlenbüschel der Abb. 475, welches die Grubenweiten-Kurven darstellt, durchaus ähnlich sieht.

Die Kennlinie des Ventilators kann in derselben Weise benutzt werden wie in Abb. 475. Es ist nur die Ventilatorcurve mit den Punkten 1, 2, 3 und 4 eingezeichnet. Man erhält aus den gemessenen Betriebspunkten 1, 2, 3 und 4 sofort die Grubentemperaturwerte.

Zeche	$Q$ in $\text{m}^3/\text{min}$	$h$ in mm W. S.	Grubentemperatur $T$
1 = Mont Cenis . . .	4000	220	4,50
2 = Holland 5 . . .	6650	280	6,63
3 = Minister Stein 1 .	11230	330	10,30
4 = de Wendel . . .	16500	310	15,70

Wir sehen, daß z. B. der Punkt 1 auf der Temperamentkurve 4,50 liegt, mithin ist das Grubentemperament dieser Zeche gleich 4,50, und so entspricht jedem  $Q - h$ -Punkt eine ganz bestimmte Temperamentkurve. Der Schnittpunkt der Ventilator Kennlinie mit der Temperamentkurve der betreffenden Grube liefert wieder den Betriebspunkt des Ventilators. Will z. B. die Zeche Minister Stein für ihr Grubentemperament 10,3 einen neuen Ventilator bestellen, so sucht sie in Abb. 477 die Temperamentkurve 10,3 auf und bringt diese zum Schnitt mit der Kennlinie des neuen Ventilators. Schnittpunkt ist Punkt 3, d. h. Punkt 3 wird Betriebspunkt des Ventilators. Der Ventilator wird dann bei 330 mm Depression in der Minute  $Q = 11230 \text{ m}^3$  liefern, so daß bei bekannter Ventilator Kennlinie die Liefermenge im voraus genau bestimmt werden kann.

Die Grubentemperaturen werden verschieden groß, je nachdem ob man mit den reinen Ventilatordepressionen  $h$  oder bei Vorhandensein eines natürlichen Wetterzuges  $h_n$  mit der Gesamtd Depression

$$h_g = h + h_n$$

rechnet. Der Einfluß des natürlichen Wetterzuges werde an einem Beispiel gezeigt.

Auf einer Grube ist der Ventilatorbetriebspunkt 3 mit  $h = 330 \text{ mm}$  Ventilatordepression und

$$Q = 11300 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{oder} \quad V = \frac{11300}{60} = 188,5 \text{ m}^3/\text{sek}$$

gemessen worden, dann ist das Grubentemperament nach der Ventilatordepression errechnet

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{188,5}{\sqrt{330}} = 10,35.$$

Hat man für diese Grube einen natürlichen Wetterzug von  $h_n = 30 \text{ mm W. S.}$  festgestellt, dann ist das Grubentemperament



nach der Gesamtdepression errechnet

$$T = \frac{V}{\sqrt{h + h_n}} = \frac{188,5}{\sqrt{330 + 30}} = 9,90.$$

Würde der natürliche Wetterzug im Sommer fehlen, so müßte der Ventilator die Arbeit des natürlichen Wetterzuges mit übernehmen, d. h. er würde stärker belastet werden oder bei gleicher Arbeitsleistung

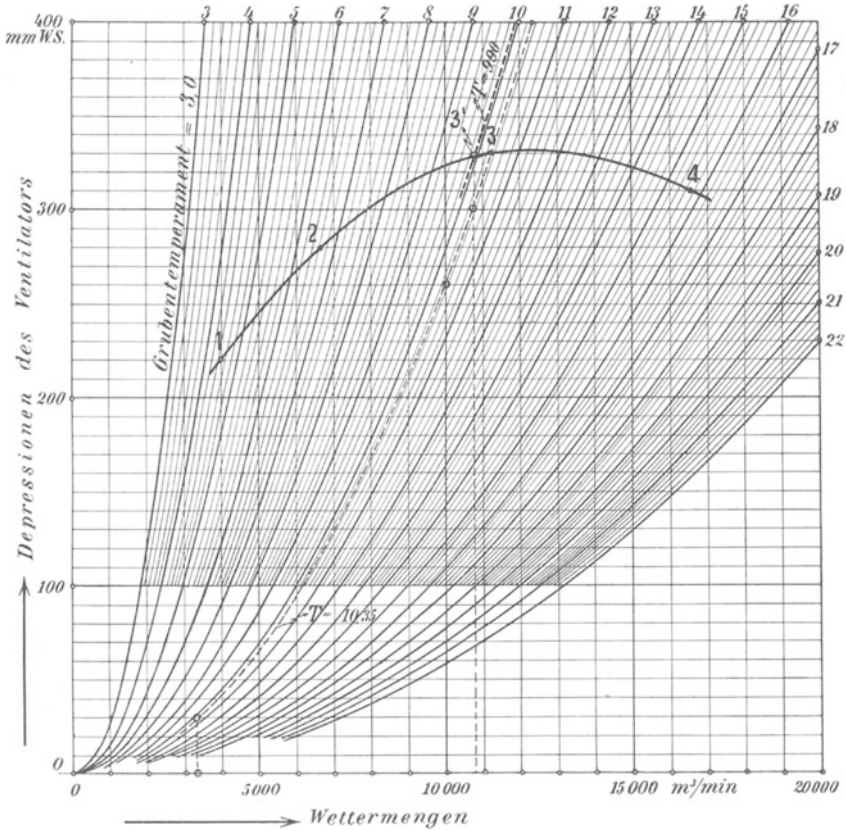


Abb. 477. Zeichnerische Darstellung der Grubentemperature.

weniger Wetter bringen. Er arbeitet ohne natürlichen Wetterzug so, als ob das Temperament von 10,35 auf 9,90 verschlechtert wäre. Bringt man die Temperamentlinie 9,9 zum Schnitt mit der Ventilator Kennlinie, so erhalten wir den Betriebspunkt 3', d. h. der Ventilator liefert nun bei unveränderter Drehzahl nur noch

$$Q = 10700 \text{ m}^3/\text{min} \text{ bei } h = 228 \text{ mm.}$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man von der ursprünglich erreichten Depression  $h = 330 \text{ mm}$  die natürliche Depression  $h_n = 30 \text{ mm}$  abzieht, dann erhält man auf der unveränderten Temperamentlinie

$$T = 10,35$$

bei der Depression  $h = 300$  mm die gleiche Wettermenge

$$Q = 10700 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Durch das Fehlen des natürlichen Wetterzuges hat sich daher die Wettermenge verringert um

$$11300 - 10700 = 600 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Mit natürlichem Wetterzug war die Wettermenge das

$$\frac{11300}{10700} = 1,055 \text{ fache,}$$

d. h. die Wettermenge war um **5,5 % größer**. Man sieht, der Ausfall ist so gering, daß er praktisch kaum fühlbar ist. Man sollte daher wegen der geringen Bedeutung des natürlichen Wetterzuges die Grubentemperaturen grundsätzlich nur mit der Ventilatordepression errechnen, da die Bestimmung des natürlichen Wetterzuges ohnedies in den meisten Fällen nur recht unsicher möglich ist.

Setzt man den Ventilator still, dann hat der natürliche Wetterzug eine ganz andere Bedeutung. Das zeigt uns Abb. 477. Dann zeigt uns die Temperamentlinie

$$T = 10,35 \text{ für } h_n = 30 \text{ mm}$$

eine Wetterlieferung von

$$Q = 3200 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Das ist auch ganz erklärlich, bei dieser geringen Wettergeschwindigkeit sind die Reibungswiderstände bedeutend geringer, so daß wir nun mit  $h = 30$  mm W. S. eine ganz andere Wettermenge liefern, als wenn wir bei  $h = 300$  mm die Depression auf  $h = 330$  mm erhöhen.

Selbst bei sehr hohen Werten des natürlichen Wetterzuges ist der Ausfall nicht so bedeutend. Würde z. B

$$h_n = 70 \text{ mm W. S.,}$$

so würde der Ventilator, der bei diesem natürlichen Wetterzug mit der Ventilatordepression  $h = 330$  mm W. S. (Punkt 3 der Abb. 477) arbeitet und  $Q = 11300 \text{ m}^3/\text{min}$  bringt, auf der  $T = 10,3$  Temperamentlinie bei  $h = 260$  mm W. S. nur noch  $Q = 10000 \text{ m}^3/\text{min}$  zeigen, das Lieferverhältnis ist dann

$$\frac{10000}{11300} = 0,885,$$

d. h. es werden 11,5% weniger Wetter geliefert, trotzdem bei Stillstand des Ventilators ein natürlicher Wetterzug von 70 mm W. S.

$$Q = 5200 \text{ m}^3/\text{min}$$

liefern würde, denn die Temperamentkurve  $T = 10,3$  zeigt diesen Wert bei  $h = 70$  mm.

## 27. Das Streckentemperament.

Die Strecken sind Wetterwege, welche je nach Länge, Querschnitt und Ausbau dem durchgehenden Wetterstrom verschieden großen Widerstand entgegensetzen. Soll die Luft vom Querschnitt  $A$  nach dem

Querschnitt  $B$  (Abb. 478) strömen, so muß ein Druckgefälle vorhanden sein und zwar im gleichen Maße wie bei der Strömung des Wassers ein Höhengefälle vorhanden sein muß.

Setzt man den Druckunterschied

$$(p_1 - p_2) \text{ kg/m}^2 = h \text{ mm W. S.},$$

so ist

$$h = k \cdot \frac{L \cdot U}{F} \cdot v^2.$$

Setzt man  $v = \frac{V}{F}$ , so ist

$$h = k \cdot \frac{L \cdot U}{F} \cdot \frac{V^2}{F^2} = k \cdot \frac{L \cdot U}{F^3} \cdot V^2 \quad \text{oder} \quad \frac{V}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{F^3}{k \cdot L \cdot U}} = T.$$

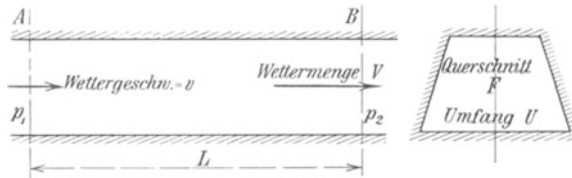


Abb. 478. Eine sölige Strecke.

Bei einem Wetterweg mit gleichbleibendem Querschnitt ist dieser Wert eine konstante Größe, die — wie uns bereits bekannt ist — als Temperatur bezeichnet wird. Kennt man die Reibungsziffer  $k$ , so kann man nach der Gleichung

$$T = \sqrt{\frac{F^3}{k \cdot L \cdot U}}$$

das Temperament einer Strecke berechnen und darnach ihre Bewettungsfähigkeit beurteilen. Es bedeuten

$F$  = Querschnitt der Strecke in  $\text{m}^2$ ,

$L$  = Länge der Strecke in  $\text{m}$ ,

$U$  = Umfang des Streckenquerschnitts in  $\text{m}$ ,

$k$  = Reibungsziffer.

Leider liegen neuere Versuchswerte über den Widerstand der Strecken noch wenig vor, so daß man immer noch mit den von Murgue angegebenen Werten rechnet. Murgue gibt an

$k = 0,0016$  für Strecken in Türstockzimmerung,

$k = 0,0009$  „ „ im rohen Gestein,

$k = 0,0003$  „ „ mit glatter Ausmauerung.

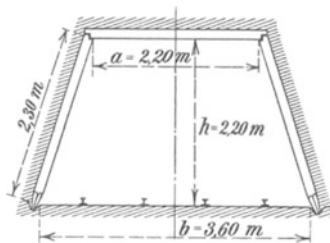


Abb. 479. Der Streckenquerschnitt.

**Beispiel:** Wie groß ist das Temperament der in Abb. 479 dargestellten Strecke in Türstockzimmerung, wenn die Strecke 970 m lang ist?

**Lösung:** Der Querschnitt der Strecke ist

$$F = \frac{3,6 + 2,2}{2} \cdot 2,2 = 6,38 \text{ m}^2.$$

Der Umfang des Streckenquerschnittes ist

$$U = 2,2 + 3,6 + 2 \cdot 2,3 = 10,4 \text{ m,}$$

ferner ist

$$L = 970 \text{ m und } k = 0,0016.$$

Mit diesen Werten wird

$$T = \sqrt{\frac{F^3}{k \cdot L \cdot U}} = \sqrt{\frac{6,38^3}{0,0016 \cdot 970 \cdot 10,4}} = 4,0.$$

Man kann für alle vorkommenden Werte von  $T$  die Temperamentkurven in bekannter Weise aufzeichnen. Das ist in Abb. 480 geschehen. Sie zeigt die Temperamentkurven für die Werte

$$T = 0,7 \text{ bis } 6,2.$$

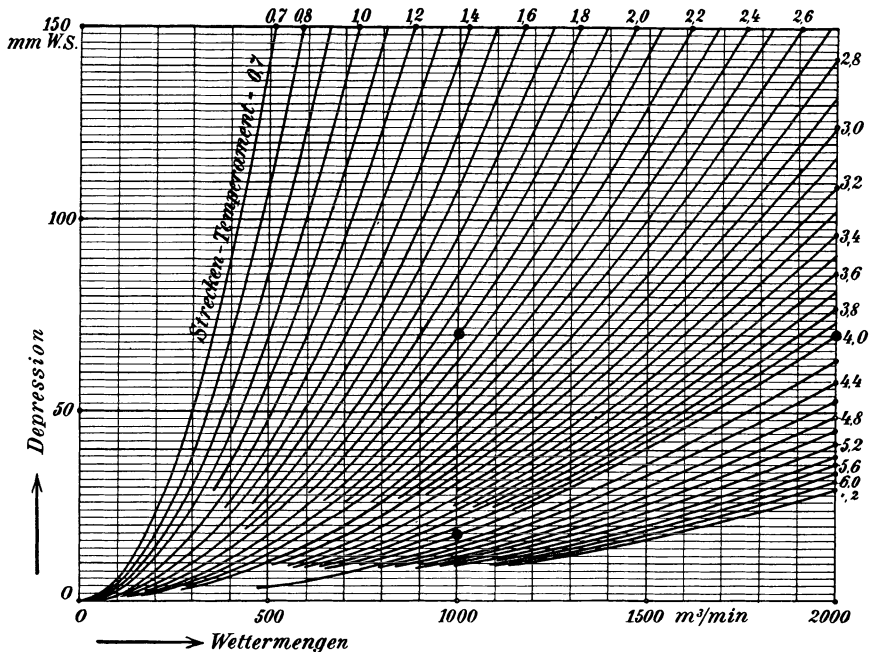


Abb. 480. Zeichnerische Darstellung der Streckentemperature.

Man verfolge nun die Temperamentkurve  $T = 4,0$  für die im vorstehenden Beispiel berechnete Strecke. Soll die Strecke

$$Q = 1000 \text{ m}^3/\text{min}$$

durchlassen, so zeigt die Temperamentkurve einen Druckhöhenverlust

$$h = 17,5 \text{ mm,}$$

und soll die Wettermenge auf  $Q = 2000 \text{ m}^3/\text{min}$  gesteigert werden, so steigt der Druckhöhenverlust auf

$$h = 70 \text{ mm.}$$

**Beispiel:** Wie groß ist das Streckentemperament, wenn die Strecke nur ein-spurig ausgeführt wird?

Lösung:

$$\text{Streckenquerschnitt } F = \frac{6,38}{2} = 3,19 \text{ m}^2,$$

$$\text{Streckenumfang } U = \frac{10,4}{2} = 5,2 \text{ m}^2,$$

$$T = \sqrt{\frac{F^3}{k \cdot L \cdot U}} = \sqrt{\frac{3,19^3}{0,0016 \cdot 970 \cdot 5,2}} = 2,0.$$

Aus dem Temperamentbild Abb. 480 lesen wir an Hand der Temperamentkurve  $T=2,0$  nun ab, daß für die Wettermenge  $Q=1000 \text{ m}^3/\text{min}$  ein Druckhöhenverlust von  $h=70 \text{ mm}$  eintritt. Bei einem Streckenquerschnitt  $F=3,19 \text{ m}^2$  ist für diese Wettermenge die Wettergeschwindigkeit bereits

$$v = \frac{Q}{60} : F = \frac{1000}{60} : 3,19 = 5,25 \text{ m/sek},$$

woraus sich sofort der große Reibungsverlust von 70 mm Wassersäule erklärt.

In der Grube wird man das Temperament der einzelnen Strecken leicht durch Messung von  $V$  und  $h$  bestimmen können, indem man

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}}$$

errechnet.

## 28. Das Ventilator-kennbild.

Wenn der Bergingenieur auch keine Ventilatoren zu bauen hat, so wird er sich doch mit den Betriebseigenschaften der Ventilatoren vertraut machen müssen. Er muß wissen, daß der Ventilator seine Liefermenge stets nach dem Widerstand einstellt, den er zu überwinden hat. Würde man die Liefermengen auf der Horizontalen und die zugehörigen Druckhöhen, die der Ventilator überwindet, als Ordinaten auftragen, so würde man nach Abb. 481 durch die Verbindung der Ordinatenendpunkte eine Kurve erhalten, welche uns das Verhalten des Ventilators bei den verschiedenen Widerständen kennzeichnet. Man nennt daher diese Kurve die Kennlinie des Ventilators. Sie wird auf dem Versuchsstand durch Messung der Luftmengen  $Q$  und der statischen Druckhöhen  $h$  gewonnen, indem man den Ventilator gegen eine kurze Rohrleitung arbeiten läßt, die am Ende durch einen Schieber abgeschlossen werden kann. Man läßt den Ventilator zuerst gegen den geschlossenen Schieber (Luftmenge = Null) arbeiten und öffnet allmählich den Schieber bis auf den vollen Betrag (Druckhöhe = Null).

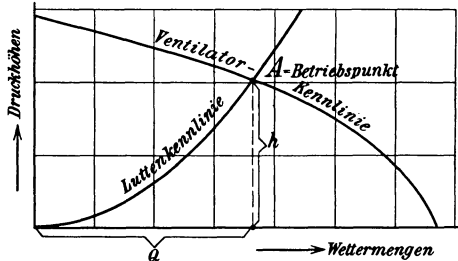


Abb. 481. Ventilator- und Luttenkennlinie.

Soll der Ventilator auf eine bestimmte Lutte arbeiten, so lernt man den Betriebszustand des Ventilators kennen, indem man in das Ventilator-kennbild die Kennlinie der Lutte einzeichnet (Abb. 481). Beide Kennlinien schneiden sich im Punkte A. Diesen Punkt nennt man den

Betriebspunkt, denn der Ventilator wird seine Wettermenge  $Q$  so einstellen, daß er gerade noch den Widerstand  $h$  der Lutte überwinden kann. Größer kann die Wettermenge nicht werden, denn sonst würde der  $h$ -Wert des Ventilators kleiner werden als der  $h$ -Wert der Lutte, d. h. die Kraft  $h$  des Ventilators würde kleiner als der Widerstand  $h$  der Lutte werden. Das ist betrieblich nicht möglich, es muß der Gleichgewichtszustand

$$\text{Kraft} = \text{Widerstand}$$

vorherrschen, d. h. der Punkt  $A$  ist der einzige Punkt der Ventilator-kennlinie, der diese Gleichgewichtsforderung erfüllt.

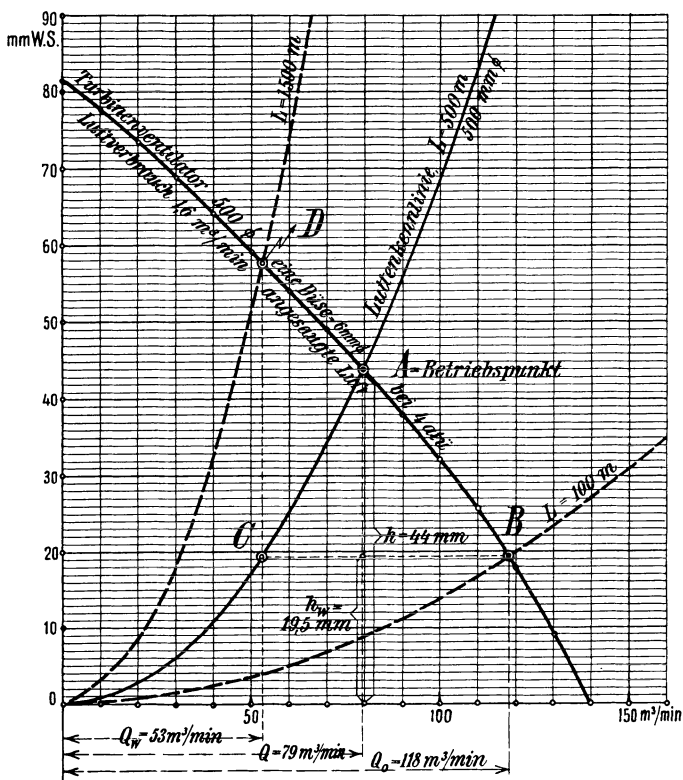


Abb. 482. Der Betriebspunkt des Ventilators.

In Abb. 482 ist dieser Vorgang an einem praktischen Beispiel gezeigt. Wir sehen die Kennlinie eines Luftturbinenventilators von 500 mm Raddurchmesser, der bei 4 atü mit einer Düse von 6 mm  $\varnothing$  arbeitet. Der Ventilator liefert bei geschlossenem Schieber die Wettermenge  $Q = 0$  und die Druckhöhe  $h = 81,5$  mm, bei ganz geöffnetem Schieber die Wettermenge  $Q = 140$   $m^3/min$  und die Druckhöhe  $h = 0$ . Der Ventilator werde in eine Lutte von 500 mm  $\varnothing$  und  $L = 500$  m Länge eingesetzt. Die Luttenkennlinie für  $L = 500$  m ist eingezeichnet. Sie schnei-

det die Ventilator Kennlinie im Punkte  $A$ , d. h. der Ventilator stellt sich auf den Betriebspunkt  $A$  ein.

Der Betriebspunkt  $A$  sagt aus, daß der Ventilator in der Lutte die Druckhöhe  $h = 44$  mm erzeugt und hierbei die Wettermenge

$$Q = 79 \text{ m}^3/\text{min}$$

liefert. Das gilt natürlich nur für eine absolute dichte Luttenleitung.

Erfahrungsgemäß sind die Lutten an den Einsteckenden undicht, so daß bei 500 m Luttenlänge und 2 m Einzelrohrlänge im ganzen

$$\frac{500}{2} = 250 \text{ undichte Stellen}$$

entstehen. Was geschieht nun? Die undichten Stellen verursachen einen Druckabfall, der praktisch gemessen werden kann. Man mißt z. B. hinter dem Ventilator nur eine wirkliche Druckhöhe

$$h_w = 19,5 \text{ mm.}$$

Und nun stellt sich der Ventilator von selbst auf einen neuen Betriebspunkt ein. Dieser Betriebspunkt ist der Punkt  $B$ , der die Ordinate  $h_w = 19,5$  mm hat, d. h. der Ventilator wird der unvollkommenen Lutte gerecht, indem er seine eingesaugte Wettermenge auf

$$Q_0 = 118 \text{ m}^3/\text{min}$$

steigert. Wo bleibt diese Wettermenge? Sie geht wahrscheinlich zum großen Teil durch die 250 undichten Stellen verloren. Legt man durch den Punkt  $B$  eine Horizontale, so schneidet diese die Luttenkennlinie im Punkte  $C$ . Der Punkt  $C$  zeigt uns die Wettermenge

$$Q_w = 53 \text{ m}^3/\text{min},$$

d. h. in der 500 m langen Lutte können bei dem Druck  $h = 19,5$  mm höchstens  $53 \text{ m}^3/\text{min}$  geliefert werden. Man kann also mit Sicherheit sagen, daß die ausströmende Wettermenge höchstens diesen Wert erreichen kann. Demnach würde der Lieferungsgrad der Lutte

$$\eta = \frac{53}{118} = 0,45$$

sein, d. h. nur 45% der eingesaugten Wettermenge kommt vor Ort an.

Es werden also Druckmessungen hinter dem Ventilator wertvollen Aufschluß geben über den betrieblichen Zustand der Lutte. Ob die Lutte dicht oder undicht ist, in beiden Fällen zeigt die Druckmessung hinter dem Ventilator diejenige Wettermenge in der Luttenkennlinie an, welche am Ausgang der Lutte höchstens erwartet werden kann.

In Abb. 482 geht durch den Punkt  $B$  die Luttenkennlinie  $L = 100$  m, d. h. die 500 m lange undichte Lutte hat bei dem vorliegenden Druckabfall nur den Widerstand einer 100 m langen dichten Lutte. Wir können noch eine weitere Folgerung ziehen. Der wirklichen Wetterlieferung

$$Q_w = 53 \text{ m}^3/\text{min}$$

entspricht auf der Ventilator Kennlinie der Punkt  $D$  und durch diesen Punkt  $D$  geht die Luttenkennlinie  $L = 1500$  m, d. h. bei dem gemessenen Druckabfall liefert die 500 m lange undichte Lutte genau so wenig

wie die 1500 m lange dichte Lutte. So liefern uns die Luttenkennlinien in Verbindung mit der Ventilator Kennlinie wertvolle Einblicke in die bisher unbekanntten Betriebsvorgänge, ohne daß irgendwelche Rechenoperationen auszuführen sind.

In Abb. 483 ist das Ergebnis nochmals bildlich dargestellt. Der Ventilator findet bei  $h = 19,5$  mm Druckhöhe nur den Widerstand einer

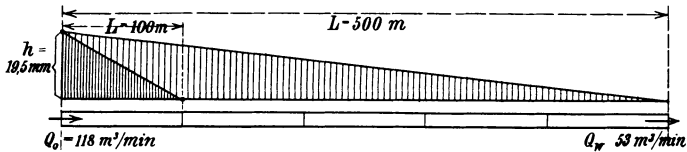


Abb. 483. Vergleich der 500 m langen, undichten Lutte mit der 100 m langen, dichten Lutte.

100 m langen dichten Lutte, so daß er nach der Ventilator Kennlinie die Wettermenge

$$Q_0 = 118 \text{ m}^3/\text{min}$$

einsaugen muß. Bei dieser Druckhöhe könnte aber eine 500 m lange und dichte Lutte höchstens die Wettermenge

$$Q_w = 53 \text{ m}^3/\text{min}$$

liefern, so daß die Differenz dieser beiden Wettermengen unterwegs verloren gehen muß.

## 29. Physikalische Gesetze für trockene Luft.

Die Luft dehnt sich wie jedes Gas bei  $1^\circ$  Erwärmung um  $\frac{1}{273} = \alpha$  ihres Anfangsvolumens aus. Dieser Wert ist der Ausdehnungskoeffizient der Luft, der für alle Temperaturlagen gültig ist. Ebenso wird bei Abkühlung der Luft ein Zusammenziehen erfolgen. Ist  $v_0$  das Volumen bei  $0^\circ$ , so ist z. B. das Volumen bei  $-1^\circ$

$$v_1 = v_0 - \frac{1}{273} \cdot v_0.$$

Bei einer Temperatur von  $-273^\circ$  würde daher sein

$$v_1 = v_0 - \frac{273}{273} \cdot v_0 = 0.$$

Wir sehen, daß bei  $-273^\circ$  das Volumen Null geworden ist. Da wir Temperaturen aber nur durch Volumenänderung messen können, so haben wir bei  $-273^\circ$  die tiefste Temperatur erreicht. Der absolute Nullpunkt unserer Temperaturmessung liegt daher bei  $-273^\circ$ .

Wird eine Luftmenge, die bei  $0^\circ$  das Volumen  $v_0$  hat, auf  $t^\circ$  erwärmt, so beträgt das neue Volumen, wenn die Spannung dieselbe geblieben ist,

$$v = v_0 + t \cdot \alpha \cdot v_0 = (1 + \alpha \cdot t) \cdot v_0.$$

Eine Luftmenge, die bei  $t^\circ$  das Volumen  $v$  hat, hat bei  $0^\circ$  ein Volumen

$$v_0 = \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \cdot v.$$



Wird diese Luftmenge nun wieder auf  $t_1^0$  erwärmt, so ist das neue Volumen

$$v_1 = \frac{1 + \alpha \cdot t_1}{1 + \alpha \cdot t} \cdot v = \frac{273 + t_1}{273 + t} \cdot v = \frac{T_1}{T} \cdot v \quad \text{oder} \quad v_1 : v = T_1 : T.$$

$T_1$  und  $T$  nennt man die absoluten Temperaturen, sie sind um  $273^0$  größer als die auf den gewöhnlichen Nullpunkt bezogenen Temperaturen.

Die abgeleitete Gleichung stellt das Gay-Lussacsche Gesetz dar, das aussagt:

„Bei gleichbleibender Spannung verhalten sich die Volumina wie ihre absoluten Temperaturen.“

Läßt man die Temperatur konstant und verändert die Spannung durch Volumenverminderung (Verdichtung), so wird

$$v_1 : v = p : p_1,$$

wenn  $p$  und  $p_1$  die zugehörigen Drücke bedeuten. Dieses Gesetz ist das Mariottesche Gesetz, es sagt aus:

„Bei gleicher Temperatur verhalten sich die Volumina umgekehrt wie die Spannungen.“

Das Luftgewicht von 1 kg habe im Anfangszustand das Volumen  $v$ , die Spannung  $p$  und die absolute Temperatur  $T$ . Es soll eine Zustandsänderung bei konstanter Temperatur vor sich gehen, dann ist das neue Volumen

$$v_x = \frac{v \cdot p}{p_1}.$$

Von diesem Zustand an soll die Spannung  $p_1$  konstant bleiben und die Temperatur auf  $T_1$  steigen, dann ist das Endvolumen

$$v_1 = v_x \cdot \frac{T_1}{T}$$

oder, wenn für  $v_x$  der vorige Wert eingesetzt wird,

$$v_1 = \frac{v \cdot p}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T},$$

$$\frac{v_1 \cdot p_1}{T_1} = \frac{v \cdot p}{T} = \text{konst.} = R \quad \text{oder} \quad v \cdot p = R \cdot T,$$

d. i. eine Gleichung, welche man als die allgemeine Zustandsgleichung der Gase bezeichnet. Kennt man die sogenannte Gaskonstante  $R$ , so kann man bei gleichzeitiger Änderung von Druck und Temperatur die Volumenänderung für jeden neuen Endzustand berechnen. Wir bestimmen die Gaskonstante für Luft.

1 m<sup>3</sup> Luft wiegt bei 0<sup>0</sup> und 1 kg/cm<sup>2</sup> = 735,5 mm Q.S. = 10000 kg/m<sup>2</sup> 1,25139 kg, also ist das Volumen von 1 kg Luft in diesem Zustand

$$v = \frac{1}{1,25139} = 0,79911 \text{ m}^3.$$

Mit diesen Werten wird

$$R = \frac{v \cdot p}{T} = \frac{0,79911 \cdot 10000}{273} = 29,272.$$

Und nun kann man nach der allgemeinen Zustandsgleichung für jeden anderen Luftzustand das Gewicht von 1 m<sup>3</sup> Luft berechnen.

**Beispiel:** Wieviel wiegt 1 m<sup>3</sup> Luft bei 630 mm Q.S.-Druck und 28° C?

**Lösung:** Es sind, wenn 13,6 das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist, 630 mm Q.S. = 630 · 13,6 = 8570 mm W.S. = 8570 kg/m<sup>2</sup>. Wenn 1 kg Luft das Volumen  $v$  m<sup>3</sup> hat, dann hat 1 m<sup>3</sup> Luft das Gewicht

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{8570}{29,272 \cdot (273 + 28)},$$

$$\gamma = 0,972 \text{ kg/m}^3.$$

### 30. Feuchte Luft.

Bei allen Luftbewegungen handelt es sich immer um feuchte Luft. Feuchte Luft ist eine Mischung von trockener Luft und Wasserdampf, hierbei verhalten sich Luft und Wasserdampf so, als ob jeder Stoff allein den Raum ausfüllte. Jeder Raum kann bei einer bestimmten Temperatur nicht mehr als eine bestimmte Menge Wasserdampf aufnehmen. Ist diese Menge erreicht, so nennt man den Raum gesättigt und der ihn ausfüllende Wasserdampf heißt ebenfalls gesättigt. Ein Raum, welcher Luft enthält, vermag ebensoviel Wasserdampf aufzunehmen als ein gleich großer luftleerer Raum von derselben Temperatur, nur geschieht der Übergang im luftgefüllten Raum viel langsamer.

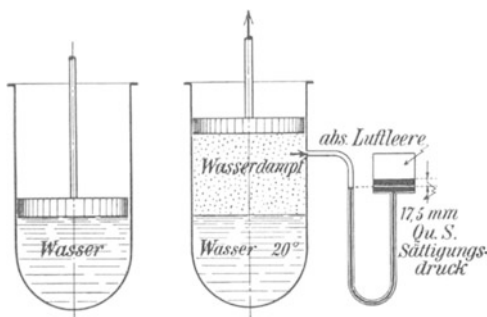


Abb. 484. Verdampfung im luftverdünnten Raum.

Wasser verwandelt sich schon bei gewöhnlicher Temperatur an der Wasseroberfläche in Dampf, der unsichtbar ist und in die umgebende Luft diffundiert. Der Übergang des flüssigen Wassers in Dampfform von der Oberfläche her heißt Verdunstung. Dieses Verdunsten geschieht um so rascher, je höher die Temperatur der Umgebung ist.

Für gewöhnliche Temperaturen sind die Spannkraft der gesättigten Dämpfe kleiner als der Atmosphärendruck. Die Dämpfe können daher nicht aus dem Innern des Wassers entweichen, weil sie die Flüssigkeit und den darauf lastenden Atmosphärendruck zu überwinden haben und sich im Entstehen sofort wieder verdichten.

Steigert man aber die Temperatur z. B. auf 100°, so ist die Spannkraft der gesättigten Dämpfe so groß wie der äußere Druck geworden, und nun beginnt die Dampfbildung von innen heraus, das Wasser verdampft. Man nennt diesen Druck den Sättigungsdruck des Wasserdampfes, er beträgt demnach bei 100°, in Quecksilber gemessen, 760 mm. Und nun folgen wir hieraus, daß dieser Zustand viel früher erreicht wird, wenn wir die Oberfläche vom Druck entlasten.

Das ist in Abb. 484 gezeigt. Auf der Wasseroberfläche ruht ein Kolben. Zieht man den Kolben hoch, so entsteht durch Verdunstung ein mit Wasserdampf erfüllter Raum, und bei einer bestimmten Kolbenstellung

bemerkt man, daß das Wasser zu kochen beginnt, d. h. verdampft. In diesem Augenblick ist der äußere Druck des freigelegten Raumes gleich der Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes geworden. Zieht man den Kolben weiter hoch, so bleibt dieser Druck konstant erhalten, das Wasser füllt entsprechend der Volumenvergrößerung den Raum durch Wasserdampf sofort aus.

Hat das Wasser z. B. eine Temperatur von  $20^{\circ}$ , so würde man an einem Quecksilbermanometer den Druck 17,5 mm messen. Dieser Druck ist der Sättigungsdruck des Wassers bei  $20^{\circ}$ . So entspricht jeder Temperatur ein bestimmter Sättigungsdruck, wie nachstehende Zahlenreihe zeigt:

$t =$	$0^{\circ}$	$20^{\circ}$	$40^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$100^{\circ}$
$p_s =$	4,6	17,5	55,3	149	355	760 mm Q.S.

### 31. Hypsometer oder Thermo-Barometer.

Auf Grund der genauen Tabellen über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes kann man aus der Siedetemperatur auf den Barometerstand oder den Luftdruck, der an der Meßstelle herrscht, schließen. Apparate, welche diesem Zwecke dienen, heißen Thermo-Barometer oder Hypsometer. Sie bestehen in der Hauptsache aus einem fein geteilten Thermometer, das im Dampf eines kochenden Wasserraumes steht. In Abb. 485 ist der Dampf in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung geleitet, um das Thermometer vor Abkühlung zu schützen. Die Sättigungsdrücke der einzelnen Siedetemperaturen sind aus Abb. 486 zu entnehmen.

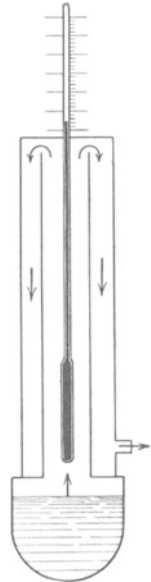


Abb. 485. Das Hypsometer.

Sie zeigt auf der Horizontalen die Temperaturwerte  $97^{\circ}$  bis  $103^{\circ}$  abgetragen und zwar so, daß man noch  $\frac{1}{20}^{\circ}$  ablesen kann. Als Ordinaten sind die Sättigungsdrücke abgetragen, die Verbindungslinie der Ordinatenendpunkte ergibt eine sehr flach verlaufende Kurve, also fast eine gerade Linie.

### 32. Das spezifische Gewicht der Luft und die Zunahme des Luftdrucks in der Teufe.

Wie bei der Berechnung der Reibungsverluste in fallenden Druckluftleitungen schon gezeigt wurde, daß das Gewicht der in der Fallleitung stehenden Druckluftsäule einen Druckgewinn am Füllort bringt, so bringt auch das Gewicht der im Schacht stehenden Luftsäule am Füllort einen höheren Barometerdruck als an der Rasenhängebank. Die Berechnung der Druckzunahme ist möglich, wenn man das spezifische Gewicht der Luft kennt. Eine einfache Berechnung ist aber nur möglich, wenn es sich um kleine Höhenunterschiede handelt. An der Rasenhängebank sei z. B.  $B = 745$  mm Q.S. und  $t = 15^{\circ}$  gemessen,

wie groß ist der Luftdruck, wenn der Förderkorb 10 m tiefer steht?

$$p = 745 \cdot 13,6 = 10130 \text{ mm W.S.} = 10130 \text{ kg/m}^2,$$

$$T = 273 + 15 = 288^\circ,$$

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{10130}{29,27 \cdot 288} = 1,20 \text{ kg/m}^2.$$

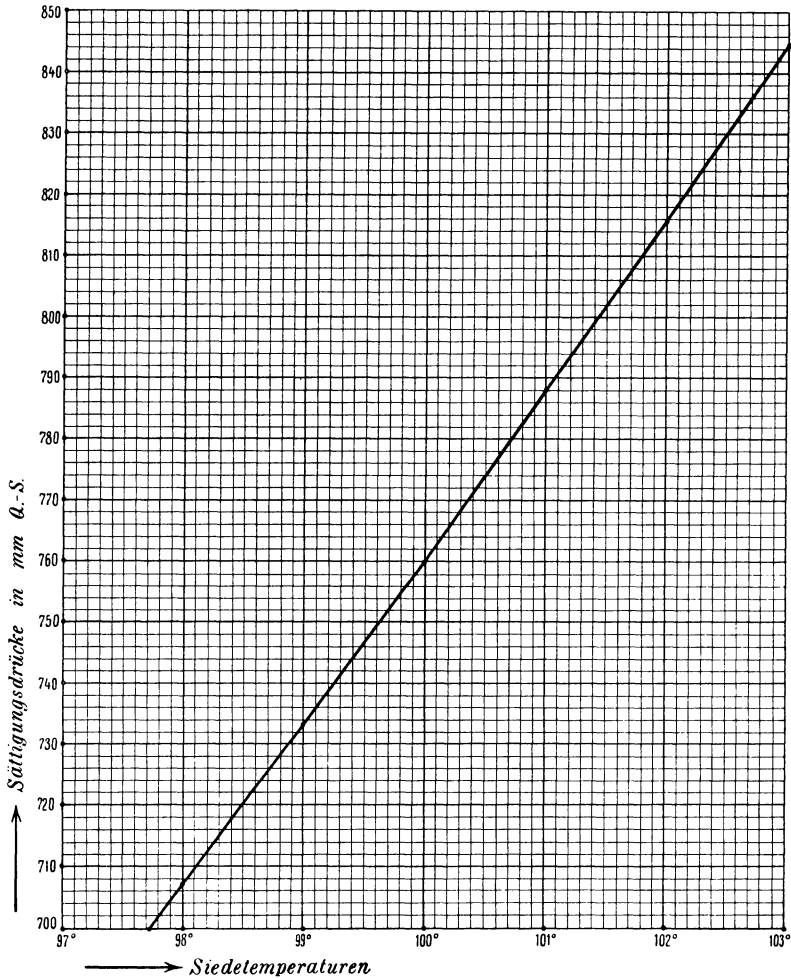


Abb. 486. Die Siedetemperatur des Wassers als Abhängige vom Luftdruck.

Ein Luftwürfel von 1 m Kantenlänge drückt demnach bei 1 m Luftsäulenhöhe mit 1,2 mm W.S. auf 1 m<sup>2</sup> Grundfläche, d. h. je 1 m Luftsäulenzunahme in der Tiefe bringt einen Druckgewinn von 1,2 mm W.S., daher ist für 10 m Tiefenzunahme der Druckgewinn

$$\Delta p = 10 \cdot 1,2 \text{ mm} = 12 \text{ mm W.S.} = 0,883 \text{ mm Q.S.}$$

Am neuen Standort des Förderkorbes ist daher der Luftdruck

$$B_1 = B + \Delta p = 745 + 0,9 = 745,9 \text{ mm Q.S.}$$

Bei großen Höhenunterschieden macht die Zunahme des Luftdrucks die Berechnung des mittleren spezifischen Gewichts schwierig, da die Gewichtszunahme berücksichtigt werden muß.

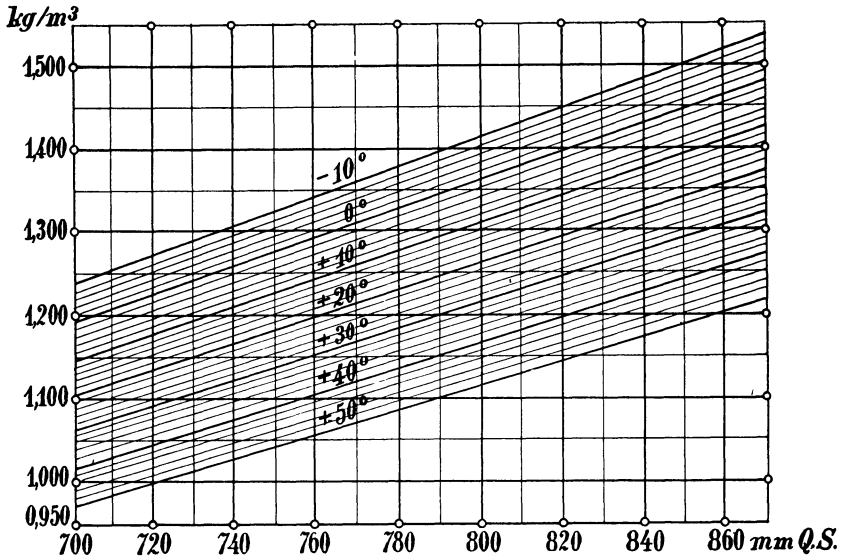


Abb. 487. Das spezifische Gewicht der Luft in Abhängigkeit von Druck und Temperatur.

Dr. Drehkopf<sup>1</sup> gibt für die Berechnung folgende Formel an

$$\log p_1 = \log p + \frac{H}{18450 + 67,5 t_m + 0,085 \cdot \varphi_m \cdot e_m}$$

Hierin bedeutet

$p$  = den an der Rasenhängebank gemessenen Barometerdruck in mm Q.S.,

$p_1$  = den gesuchten Barometerdruck am Füllort,

$H = T$  = Teufe bis zur Hängebank in m,

$t_m$  = mittlere Temperatur der Schachtsäule in  $^\circ\text{C}$ ,

$\varphi_m$  = mittlere relative Feuchtigkeit in %,

$e_m$  = mittlere Sättigungsspannung des Wasserdampfes bei der Temperatur  $t_m$  in mm Q.S. =  $p_s$  auf S. 497.

Es sei z. B.  $B = 760 \text{ mm Q.S.}$ ,  $H = T = 500 \text{ m}$ ,  $t_m = 20^\circ$ ,  $\varphi = 70\%$ , dann ist nach S. 497  $e_m = p_s = 17,5 \text{ mm Q.S.}$  für  $t = 20^\circ$ , also

$$\log p_1 = \log 760 + \frac{500}{18450 + 67,6 \cdot 20 + 0,085 \cdot 70 \cdot 17,5} = 2,90593,$$

$$p_1 = 805,25 \text{ mm Q.S.}$$

<sup>1</sup> Siehe Glückauf 1927, S. 329.

Da das spezifische Gewicht der Luft bei der Wetterströmung eine wichtige Zahl ist, ist in Abb. 487 eine graphische Tafel zum Ablesen der  $\gamma$ -Werte gegeben, welche die Barometer- und Temperaturwerte berücksichtigt und genau für 70% Luftfeuchtigkeit gilt.

### 33. Das Messen von Strömungswiderständen im Grubengebäude.

Das Hypsometer findet immer mehr Anwendung zum Messen von Strömungswiderständen im Grubengebäude, da man sehr geringe Spannungsdifferenzen mit großer Genauigkeit messen kann. Das Wasserbad wird durch eine elektrische Heizschlange erwärmt, die von einem Akkumulator den Strom erhält. In der Regel ist dann das Thermometer mit einer Druckskala anstatt mit einer Temperaturskala versehen.

#### a) Der horizontale Wetterweg.

Es soll der Strömungswiderstand einer horizontalen Strecke (Abb. 488) gemessen werden. Nach dem Satz von Bernoulli muß in jedem Querschnitt der Strecke die Energie der Strömung konstant sein. Die Energie setzt sich aus drei Teilenergien zusammen. Diese sind

1. die Energie des Druckes, statischer Druck =  $E_1$ ,
2. die kinetische Energie, dynamischer Druck =  $E_2$ ,
3. die Energie der Lage, geodätische Höhendifferenz =  $E_3$ .

Diese Energiesumme wird in dem zweiten Querschnitt noch um die verbrauchte Reibungsenergie  $E_w$  vermehrt.

In unserm Beispiel ist in beiden Querschnitten, da der Querschnitt

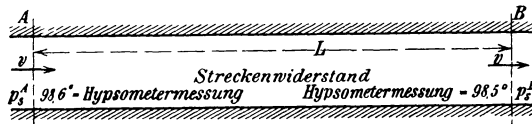


Abb. 488. Streckenwiderstandsmessung bei sölhlicher Strecke.

konstant bleibt, die kinetische Energie gleich, und, da die Höhenlage dieselbe bleibt, ist die Energie der Lage auch gleich. Sie fallen daher als gleiche Größen, welche auf beiden Seiten einer Gleichung stehen, aus der Rechnung heraus, und es muß sein

$$E_1^A = E_1^B + E_w \quad \text{oder} \quad E_w = E_1^A - E_1^B.$$

Die Energien werden durch Druckhöhen gemessen. Im Querschnitt  $A$  sei mittels des Hypsometer gemessen

Siedetemperatur =  $98,6^\circ$ , entsprechend  $p_s^A = 722,8$  mm Q.S. =  $E_1^A$   
im Querschnitt  $B$  sei gemessen

Siedetemperatur =  $98,5^\circ$ , entsprechend  $p_s^B = 720$  mm Q.S. =  $E_1^B$ .

Also ist die Widerstandsenergie

$$\begin{aligned} E_w &= E_1^A - E_1^B = 722,8 - 720 = 2,8 \text{ mm Q.S.} \\ &= 2,8 \cdot 13,6 = 38,1 \text{ mm W.S.} \end{aligned}$$

Der Reibungswiderstand der Strecke ist also

$$h = 38,1 \text{ mm W. S.}$$

Eine gleichzeitig vorgenommene Wettermessung hat ergeben

$$Q = 1200 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{oder} \quad V = \frac{1200}{60} = 20 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Hieraus berechnet man das Temperament der Strecke

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{20}{\sqrt{38,1}} = 3,24.$$

Die Strecke habe folgende Größenverhältnisse

$$F = 6 \text{ m}^2, \quad U = 10 \text{ m} \quad \text{und} \quad L = 1030 \text{ m.}$$

Durch Umstellung der bekannten Gleichung

$$T = \sqrt{\frac{F^3}{k \cdot L \cdot U}}$$

läßt sich der Reibungsbeiwert der Strecke berechnen zu

$$k = \frac{F^3}{T^2 \cdot L \cdot U} = \frac{6^3}{3,24^2 \cdot 1030 \cdot 10} = 0,0020.$$

### b) Der Wetterstrom im Wetterweg mit Gefälle.

Dieselbe Strecke werde, wie Abb. 489 zeigt, mit Gefälle angenommen. Der Höhenunterschied der beiden Meßpunkte sei

$$z = 10 \text{ m.}$$

Man stellt für die Meßquerschnitte  $A$  und  $B$  die Energiebeträge auf.

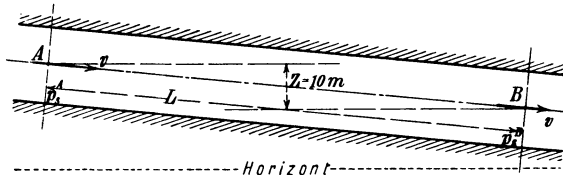


Abb. 489. Der Streckenwiderstand im Gefälle eines Wetterweges.

a) Anfangslage  $A$ : Die Gesamtenergie umfaßt folgende Einzelenergien:

1. die Energie des Drucks  $E_1 = p_s^A$ ,
2. die kinetische Energie  $E_2 = \frac{v^2}{2g}$  Meter Luftsäule =  $H$ ,  
 $= H \cdot \gamma$  mm Wassersäule ( $\gamma$  = Raumgewicht der Luft),  
 $= \frac{H \cdot \gamma}{13,6}$  mm Quecksilber =  $h_a$ ,
3. die Energie der Lage =  $E_3 = z_1$ .

Das Luftteilchen muß von  $A$  bis  $B$  noch die geodätische Höhe  $z$  durchfallen, also kann mit dieser Fallhöhe noch Arbeit geleistet werden. Es ist

$$E_3 = z_1 \text{ Meter Luftsäule} = 10 \cdot \gamma = 10 \cdot 1,25 = 12,5 \text{ mm W.S.},$$

$$= \frac{12,5}{13,6} = 0,92 \text{ mm Q.S.}$$

b) Endlage  $B$ :

1. die Energie des Drucks  $E_1 = p_s^B$ ,
2. die kinetische Energie  $E_2 = h_d$ ,
3. die Energie der Lage  $E_3 = 0$ .

Hier kommt noch die zur Überwindung des Reibungswiderstandes der Strecke verbrauchte Energie hinzu, die Energie  $E_w$ .

Nach Bernoulli muß für beide Querschnitte die Summe der Energien konstant sein, also ist

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3}{\text{Anfangslage } A} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_w}{\text{Endlage } B},$$

$$p_s^A + h_d + z = p_s^B + h_d + 0 + E_w,$$

$$E_w = \text{Reibungswiderstandshöhe } h = (p_s^A - p_s^B) + (h_d - h_d) + z.$$

Es sei, wie im vorigen Beispiel, gemessen worden

$$p_s^A = 722,8 \text{ mm Q.S.} \quad \text{und} \quad p_s^B = 720 \text{ mm Q.S.},$$

dann ist

$$h = (722,8 - 720) + 0 + 0,92 = 3,72 \text{ mm Q.S.}$$

$$\text{oder } h = 3,72 \cdot 13,6 = 50,6 \text{ mm W.S.}$$

Gleichzeitig sei wieder gemessen worden

$$\text{Wettermenge } V = 20 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Mit diesen Werten errechnet sich das Temperament der Strecke zu

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{20}{\sqrt{50,6}} = 2,82$$

und der Reibungsbeiwert der Strecke

$$k = \frac{F^3}{T^2 \cdot L \cdot U} = \frac{6^3}{2,82^2 \cdot 1030 \cdot 10} = 0,00264.$$

### c) Der Wetterstrom im Wetterweg mit Steigung.

Es werde wieder dieselbe Strecke untersucht, und zwar, wie Abb. 490 zeigt, mit demselben Höhenunterschied

$$z = 10 \text{ m}$$

als Steigung für den Wetterstrom.

a) Anfangslage  $A$ : Die Gesamtenergie umfaßt folgende Einzelenergien:

1. die Energie des Drucks  $E_1 = p_s^A$ ,
2. die kinetische Energie  $E_2 = h_d$ ,
3. die Energie der Lage  $E_3$ .

Das Luftteilchen muß von  $A$  um die Höhe  $z$  nach  $B$  gehoben werden, d. h. es wird für diese Arbeit Energie verbraucht. Die geodätische Höhe  $z$  ist in Abzug zu bringen, mithin ist die Summe aller Energien

$$E_1 + E_2 + E_3 = p_s^A + h_d - z.$$



b) Endlage *B*: Es sind die Einzelenergien:

1. die Energie des Drucks  $B_1 = p_s^B$ ,
2. die kinetische Energie  $E_2 = h_d$ ,
3. die Energie der Lage  $E_3 = 0$ .

Hier kommt wieder die verbrauchte Energie zur Überwindung des Streckenwiderstandes hinzu, die Energie  $E_w$ . Die Summe aller Energien ist

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_w = p_s^B + h_d + 0 + E_w.$$

Nach Bernoulli muß für beide Querschnitte die Summe der Energien konstant sein, also ist

$$\begin{aligned} p_s^A + h_d - z &= p_s^B + h_d + 0 + E_w, \\ E_w = h &= (p_s^A - p_s^B) + (h_d - h_d) - z \\ &= 2,8 \quad + \quad 0 \quad - 0,92 = 1,88 \text{ mm Q.S.} \end{aligned}$$

oder 
$$h = 1,88 \cdot 13,6 = 25,6 \text{ mm W.S.}$$

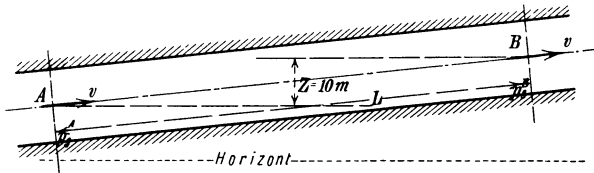


Abb. 490. Widerstandsmessung im steigenden Wetterstrom.

Es sei wieder gemessen worden

$$V = 20 \text{ m}^3/\text{sek},$$

dann ist das Streckentemperament

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{20}{\sqrt{25,6}} = 3,96$$

und der Reibungsbeiwert der Strecke

$$k = \frac{F^3}{T^2 \cdot L \cdot U} = \frac{6^3}{3,96^2 \cdot 1030 \cdot 10} = 0,00134,$$

Man muß Gefälle und Steigung der Strecken bei solchen Messungen berücksichtigen, sonst erhält man bedeutende Fehler. Das merke man sich durch folgende Regel:

*Bei fallendem Wetterstrom ist die durchfallene Höhe zwischen den beiden Meßpunkten der gemessenen Druckdifferenz hinzuzufügen, bei steigendem Wetterstrom ist die Steighöhe zwischen den beiden Meßpunkten von der gemessenen Druckdifferenz abzuziehen.*

Fehlmessungen können auch bei horizontalen Strecken entstehen, wenn man das Hypsometer an den beiden Meßquerschnitten verschieden hoch hält beim Messen. Wenn  $H$  Meter Luftsäule vom spezifischen Gewicht  $\gamma$  gleichwertig sein sollen einer Wassersäule von  $h$  Meter, so muß die Bedingungs-gleichung gelten

$$h \cdot \gamma_w = H \cdot \gamma \quad \text{oder} \quad h = \frac{H \cdot \gamma}{\gamma_w}.$$

Setzt man  $H = 1$  m,  $\gamma = 1,25$  kg/m<sup>3</sup>, so ist

$$h = \frac{1 \cdot 1,25}{1000} = 0,00125 \text{ m} = 1,25 \text{ mm W.S.},$$

d. h. 1 m Höhenunterschied des Instruments bringt bereits einen Fehler von 1,25 mm W.S.

### 34. Der natürliche Wetterzug.

Ein natürliches Mittel, Zug zu erzeugen, besitzen wir im Auftrieb der Luft. Der Auftrieb entsteht durch das verschiedene Gewicht zweier gleich hohen Luftsäulen. Die Differenz der Gewichte liefert den Auftrieb der Luft.

Wenn im einziehenden Schacht das mittlere spezifische Gewicht der Wettersäule

$$\gamma_e = 1,261 \text{ kg/m}^3$$

ist, so heißt das, die Luftsäule von 1 m Höhe übt auf 1 m<sup>2</sup> Grundfläche den Druck von 1,261 kg aus, d. h. es ist der Bodendruck für 1 m Höhe der Luftsäule

$$p_e = 1,261 \text{ mm W.S.}$$

Bei einem mittleren spezifischen Gewicht der ausziehenden Wettersäule von

$$\gamma_a = 1,146 \text{ kg/m}^3$$

ist dementsprechend der Bodendruck für 1 m Höhe der Luftsäule

$$p_a = 1,146 \text{ mm W.S.}$$

Die Differenz der beiden Drücke liefert die für  $H = 1$  m Luftsäulenhöhe erzeugte Auftriebsgröße

$$p_e - p_a = 1,261 - 1,146 = 0,115 \text{ mm W.S./m Luftsäulenhöhe.}$$

Für  $H$  Meter Luftsäule ist der Auftrieb oder der natürliche Zug

$$h_n = (p_e - p_a) \cdot H,$$

z. B. ist dann für  $H = 800$  m Teufe der natürliche Zug

$$h_n = 0,115 \cdot 800 = 92 \text{ mm W.S.}$$

Besonders günstig wirken im ausziehenden Schacht Druckluftleitungen, welche warme Druckluft in den Schacht führen, oder Dampfleitungen, sie erwärmen die ausziehenden Wetter und verstärken den Auftrieb. Würden solche Leitungen im einziehenden Schacht liegen, so würden sie den natürlichen Zug verschlechtern.

Kann man den natürlichen Wetterzug messen?

Diese Frage ist an Hand der Abb. 491 zu beantworten. Der ausziehende Schacht wirkt wie ein Schornstein. Der Schornsteinzug läßt sich immer nur am Fuß des Schornsteins messen, niemals aber an der Mündung. Messen wir daher im Saugkanal des Ventilators über Tage den Zug oder die Depression, so wird der natürliche Zug nicht mitgemessen. Die gemessene Depression ist daher die reine Ventilatordepression.

Man stelle sich vor, der ausziehende Schacht sei ein Schornstein,

dann könnte man am Fuß des Schornsteins ein Wassermanometer ansetzen und bei stillgesetztem Ventilator den natürlichen Zug  $h_n$  messen. Der offene Schenkel des Wassermanometers ist durch den Atmosphärendruck belastet. Unter Annahme eines Barometerstandes

$$B = 730 \text{ mm Q. S.}$$

an der Mündung, würde bei  $\gamma_a = 1,261 \text{ kg/m}^3$  Raumgewicht der äußeren Luftsäule unten der Druck um

$$\frac{800 \cdot 1,261}{13,6} = 74 \text{ mm Q. S.}$$

höher sein, d. h. unten würde der offene Schenkel mit dem Atmosphärendruck

$$730 + 74 = 804 \text{ mm Q. S.}$$

belastet sein. Beim Schacht habe ich aber unten keinen offenen Schenkel am Wassermanometer, man müßte, um wie beim Schornstein zu messen, den offenen Schenkel bis über Tage hochführen. Das ist praktisch natürlich nicht ausführbar. Man kann aber bei abgestelltem Ventilator unten im Schacht mit dem Hypsometer messen, wie Abb. 492 zeigt. Man müßte dann zwei Messungen bei stillstehenden Luftsäulen machen:

1. den Barometerdruck messen am Fuß des warmen ausziehenden Schachtes,
2. den Barometerdruck messen am Fuß des kalten einziehenden Schachtes.

Der ausziehende Schacht müßte bei stillgesetztem Ventilator für diese Messung unten gegen den einziehenden Schacht abgeschlossen werden. In ihm steht eine Luftsäule vom mittleren spezifischen Gewicht

$$\gamma_a = 1,146 \text{ kg/m}^3.$$

Bei einem Barometerstand von  $B = 730 \text{ mm}$  über Tage würde man dann bei  $T = 800 \text{ m}$  Teufe am Fuß des ausziehenden Schachtes den Luftdruck

$$B = 730 + \frac{800 \cdot 1,146}{13,6} = 797,4 \text{ mm}$$

messen.

Im einziehenden Schacht ist bei demselben Barometerdruck der Luftdruck unten

$$B' = 730 + \frac{800 \cdot 1,261}{13,6} = 804,2 \text{ mm.}$$

Die Differenz beider Luftdrücke ist der Auftrieb der Luft, er hat die Größe

$$\begin{aligned} h_n &= B' - B = 804,2 - 797,4 = 6,8 \text{ mm Q. S.} \\ &= 6,8 \cdot 13,6 = 92 \text{ mm W. S.} \end{aligned}$$

Man hat noch eine andere Möglichkeit, den natürlichen Wetterzug zu messen, das zeigt Abb. 493. Es wird bei stillgesetztem Ventilator der

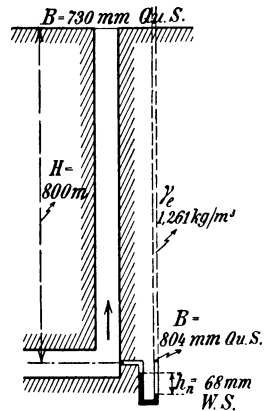


Abb. 491. Der ausziehende Schacht als Schornstein.

ausziehende Schacht oben durch einen Deckel luftdicht abgeschlossen und durch ein Wassermanometer der statische Druck gemessen, den die Auftriebssäule gegen den Deckel ausübt. Diese Wassermanometerhöhe würde den natürlichen Wetterzug darstellen.

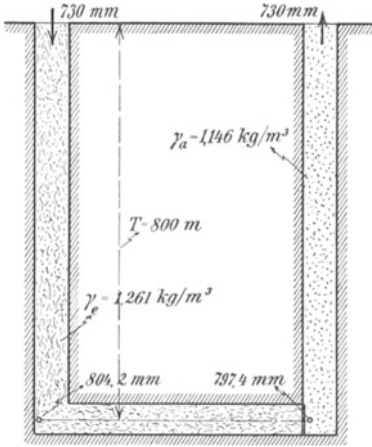


Abb. 492. Messung des natürlichen Wetterzuges durch Druckmessung der ruhenden Schachtsäulen unter Tage.

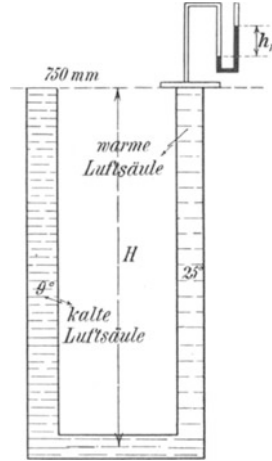


Abb. 493. Messung des natürlichen Wetterzuges durch Druckmessung auf dem Schachtdeckel.

Beide Messungen sind ungenau, denn der Ventilator stellt einen anderen Betriebszustand her, er verdünnt die Luftsäule, so daß der natürliche Wetterzug des Betriebszustandes größer sein wird.

### 35. Die Bestimmung des natürlichen Wetterzuges durch Ventilatorversuche.

Der Bergmann pflegt die Grubentemperamentwerte anders aufzuzeichnen wie der Maschinenmann, der für die Ventilator Kennlinie auf der Horizontalen die Wettermengen und auf der Vertikalen die Depressionen aufträgt. Umgekehrt macht es der Bergmann (siehe Heise-Herbst, Bergbaukunde, I. Band); er trägt auf der Horizontalen die Depressionen  $h$  und auf der Vertikalen die Wettermengen  $V$  auf, wodurch die Achse der Temperamentparabel nicht mehr senkrecht sondern horizontal verläuft.

Ein Beispiel zeigt Abb. 494, Fig. a, der folgende Meßwerte zugrunde liegen:

$$Q = 4800 \text{ m}^3/\text{min}, \quad \text{Ventilatordepression } h = 150 \text{ mm W.S.}$$

Man errechnet das Temperament mit der sekundlichen Wettermenge  $V = Q : 60 = 4800 : 60 = 80 \text{ m}^3/\text{sek}$  zu

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{80}{\sqrt{150}} = 6,53.$$

Es soll die Temperamentparabel  $T = 6,53$  aufgezeichnet werden. Man stellt um auf

$$V = T \cdot \sqrt{h} = 6,53 \sqrt{h} \text{ m}^3/\text{sek}$$

und errechnet

$h = 10$ mm W.S.	wird $V = 6,53 \cdot \sqrt{10} = 20,6$ m <sup>3</sup> /sek
$= 30$ „ „ „	$= 6,53 \cdot \sqrt{30} = 35,7$ „
$= 60$ „ „ „	$= 6,53 \cdot \sqrt{60} = 50,5$ „
$= 90$ „ „ „	$= 6,53 \cdot \sqrt{90} = 61,8$ „
$= 120$ „ „ „	$= 6,53 \cdot \sqrt{120} = 71,5$ „
$= 180$ „ „ „	$= 6,53 \cdot \sqrt{180} = 87,5$ „

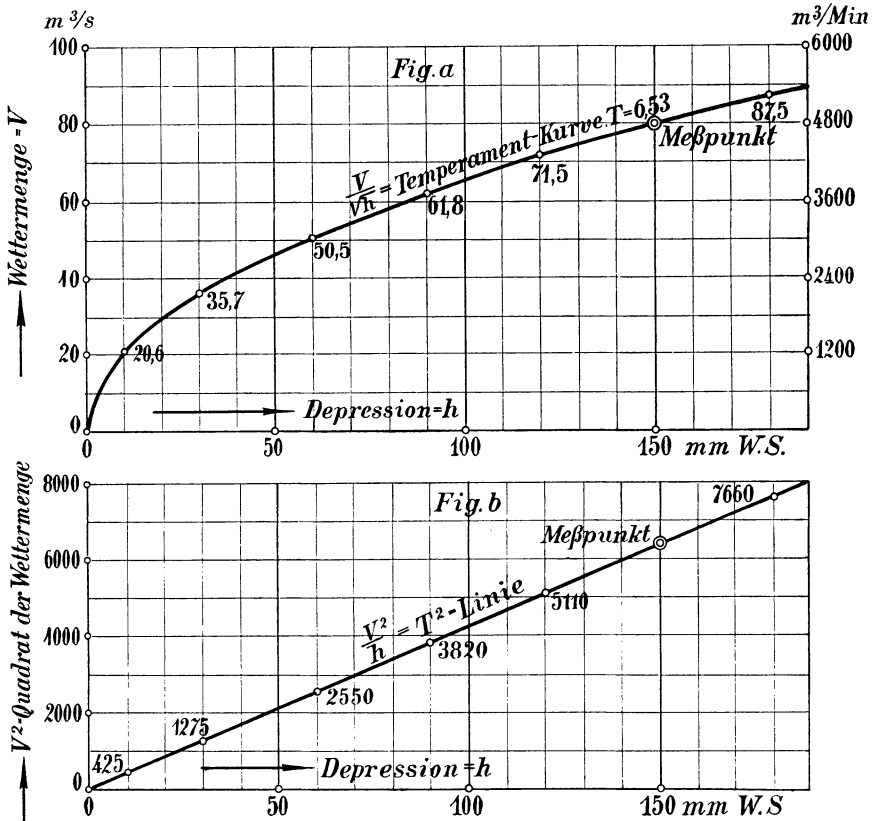


Abb. 494. Das Temperament als Kurve und als gerade Linie.

Die errechneten  $V$ -Werte sind in Fig. a als Ordinaten aufgetragen, die Verbindungslinie der Ordinatenendpunkte liefert die Temperamentlinie als Parabel.

Bildet man das Quadrat der Temperamentgleichung, also

$$T^2 = \frac{V^2}{h}$$

und trägt die  $V^2$ -Werte als Ordinaten auf, so entsteht als Verbindungslinie der Ordinatenendpunkte eine gerade Linie, siehe Fig. b. Aufgetragen ist für

für $h = 10$ mm W.S. die Ordinate $V^2 = 20,6^2 = 425$	
$= 30$ „ „ „ „ „ $= 35,7^2 = 1275$	
$= 60$ „ „ „ „ „ $= 50,5^2 = 2550$	
$= 90$ „ „ „ „ „ $= 61,8^2 = 3820$	
$= 120$ „ „ „ „ „ $= 71,5^2 = 5110$	
$= 180$ „ „ „ „ „ $= 87,5^2 = 7660$	

Da sich eine gerade Linie durch die Verbindungslinie von zwei Punkten eindeutig zeichnen läßt, ist durch zwei Versuchspunkte die Temperamentlinie einer Grube, ob sie mit oder ohne natürlichen Wetterzug arbeitet, festgelegt.

Will man untersuchen, ob eine Grube mit oder ohne natürlichen Wetterzug arbeitet, so hat man nur zwei Ventilatorversuche zu machen. Diese müssen bei demselben Grubenwiderstand, d. h. bei demselben Temperamentwert der Grube, also bei unveränderter Schieberstellung gemacht werden.

1. Methode: Man macht einen Ventilatorversuch bei der normalen Betriebsdrehzahl des Ventilators und erhält die Meßwerte

$$Q = 4800 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{und} \quad \text{Ventilatordepression } h = 150 \text{ mm.}$$

Damit wird  $V = 4800 : 60 = 80 \text{ m}^3/\text{sek}$  und  $V^2 = 80^2 = 6400$ . In Abb. 495, Fig. a, ist der Meßpunkt  $I$  mit  $V^2 = 6400$  und  $h = 150$  mm aufgetragen.

Dann macht man eine zweite Messung bei stillgesetztem Ventilator und hat gemessen

$$Q = 2075 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{bei} \quad h = 0 \text{ mm.}$$

Damit wird  $V = 2075 : 60 = 34,6 \text{ m}^3/\text{sek}$  und  $V^2 = 34,6^2 = 1200$ . In Fig. a ist dieser Wert als Meßpunkt  $II$  mit  $V^2 = 1200$  und  $h = 0$  aufgetragen. Die Verbindungslinie der Meßpunkte  $I$  und  $II$  liefert die  $T^2$ -Linie, und diese schneidet auf der nach links verlängerten Horizontalachse den natürlichen Wetterzug

$$h_n = 34 \text{ mm W.S.}$$

ab. Die Grube hat also mit der Gesamtdepression

$$h_{\text{ges.}} = h + h_n = 150 + 34 = 184 \text{ mm W.S.}$$

gearbeitet und hierfür ist das Grubentemperament

$$T = \frac{V}{\sqrt{h_{\text{ges.}}}} = \frac{80}{\sqrt{184}} = 5,88.$$

Nach der Ventilatordepression  $h$  hat die Grube das größere Grubentemperament

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{80}{\sqrt{150}} = 6,53.$$

In Fig. b sind die Meßergebnisse in der Parabeldarstellung gezeigt. Nachdem man  $h_n$  nach Fig. a gefunden hat, liegt der Scheitelpunkt der Parabel mit 34 mm Abstand vom Achsenschnittpunkt fest. Die übrigen

Parabelpunkte werden mit der Temperamentgleichung

$$T = \frac{V}{\sqrt{h_{ges.}}} = 5,88,$$

wie schon gezeigt wurde, errechnet

$$V = T \cdot \sqrt{h_{ges.}} = 5,88 \cdot \sqrt{h_{ges.}}$$

für $h = 10$ mm W.S. wird	$V = 5,88 \cdot \sqrt{10} = 18,6$ m <sup>3</sup> /sek
= 30 " " "	= 32,1 " "
= 60 " " "	= 45,5 " "
= 90 " " "	= 55,7 " "
= 120 " " "	= 64,4 " "

Fig. a

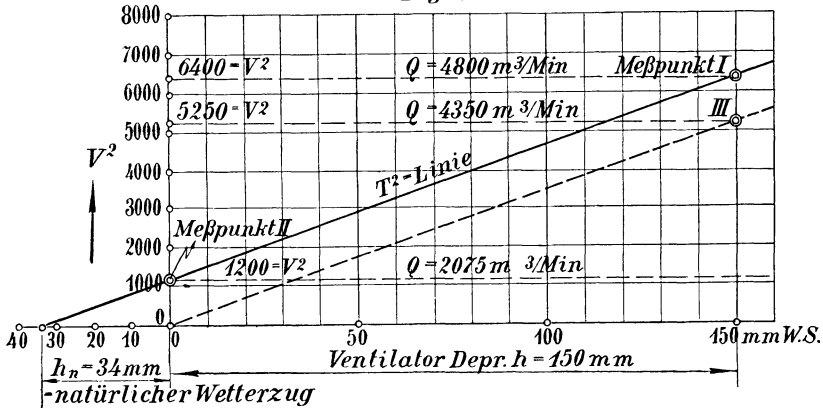


Fig. b

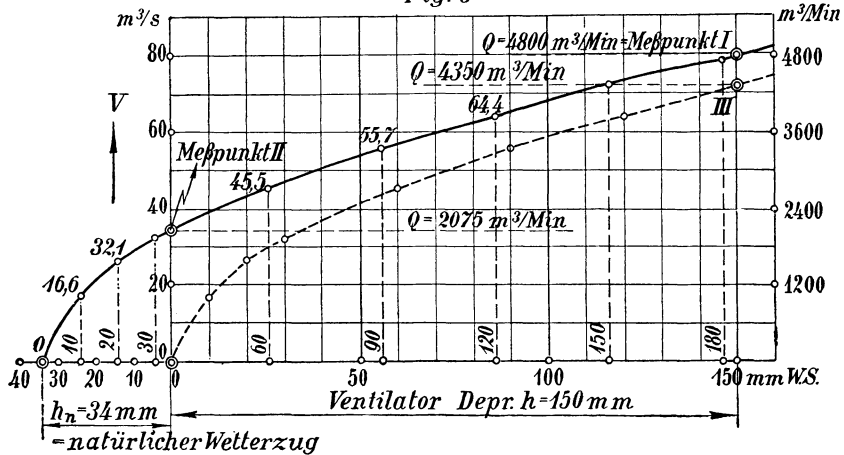


Abb. 495. Bestimmung des natürlichen Wetterzuges durch zwei Versuchspunkte.

Es sind hierbei die  $h$ -Werte vom Scheitelpunkt der Parabel aus abzutragen.

Wie ändert sich die Ventilatorlieferung, wenn der natürliche Wetterzug ausbleibt?

In Fig. a verschiebe man die  $T^2$ -Linie horizontal nach rechts bis  $h_n = 0$  ist. Die  $T^2$ -Linie nimmt dann die gestrichelte Lage ein und schneidet bei der Ventilatordepression  $h = 150$  mm den Lieferpunkt *III* aus. Der Punkt *III* liefert den Wert  $V^2 = 5250$ , oder

$$V = \sqrt{5250} = 72,5 \text{ m}^3/\text{sek} \quad \text{oder} \quad Q = 60 \cdot 72,5 = 4350 \text{ m}^3/\text{min},$$

d. h. der Ventilator liefert bei  $h = 150$  mm Ventilatordepression  
 ohne natürlichen Wetterzug  $Q = 4350 \text{ m}^3/\text{min}$ ,  
 mit natürlichem Wetterzug  $Q = 4800 \text{ m}^3/\text{min}$ .

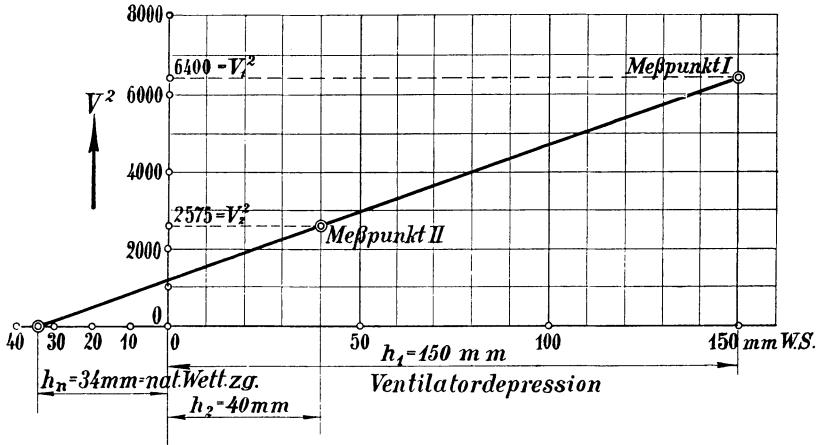


Abb. 496. Die Bestimmung des natürlichen Wetterzuges durch zwei Versuche mit verschiedenen Drehzahlen.

Der natürliche Wetterzug bringt bei dieser Grube eine Liefersteigerung auf das  $4800 : 4350 = 1,10$ fache, oder er beteiligt sich mit 10% an der Wetterlieferung.

In Fig. b verschiebe man die Parabel horizontal nach rechts bis  $h_n = 0$  ist. Die Parabel schneidet dann auf der Ordinate für die Ventilatordepression  $h = 150$  mm den Lieferpunkt *III* aus mit der Lieferung  $Q = 4350 \text{ m}^3/\text{min}$ . Das Ergebnis ist dasselbe wie bei Fig. a.

2. Methode: Ist der natürliche Wetterzug sehr klein, so sind die Messungen bei der geringen Wettergeschwindigkeit sehr schwierig. Man wird daher besser zwei Ventilatorversuche ausführen, die bei demselben Grubentemperament, also derselben Schieberstellung, aber bei verschiedenen Drehzahlen gemacht werden.

1. Versuch: Betriebszustand des Ventilators

$$n_1 = 85 \text{ U/min}, \quad Q_1 = 4800 \text{ m}^3/\text{min}, \quad h_1 = 150 \text{ mm W.S.}$$

es wird errechnet

$$V_1 = \frac{Q_1}{60} = \frac{4800}{60} = 80 \text{ m}^3/\text{sek} \quad \text{und} \quad V_1^2 = 80^2 = 6400.$$

Die Werte  $V_1^2 = 6400$  und  $h_1 = 150 \text{ mm W.S.}$  werden als Meßpunkt *I* in Abb. 496 eingetragen.



2. Versuch: Die Drehzahl ist vermindert auf  $n_2 = 61$  U/min, gemessen wird

$$Q_2 = 3040 \text{ m}^3/\text{min} \quad \text{und} \quad h_2 = 40 \text{ mm W.S.}$$

es wird errechnet

$$V_2 = \frac{3040}{60} = 50,7 \text{ m}^3/\text{sek} \quad \text{und} \quad V_2^2 = 2575.$$

Die Werte  $V_2^2 = 2575$  und  $h_2 = 40$  mm W.S. Depression werden als Meßpunkt *II* in Abb. 496 eingetragen.

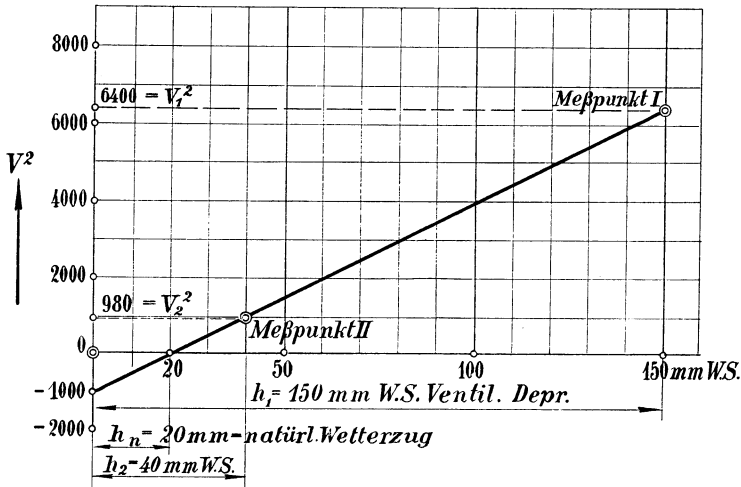


Abb. 497. Der natürliche Wetterzug wirkt vermindern.

**Ergebnis:** Verbindet man die Meßpunkte *I* und *II* durch eine gerade Linie, so schneidet diese Gerade auf der nach links verlängerten Horizontalachse die Strecke

$$h_n = 34 \text{ mm W.S.}$$

als natürlichen Wetterzug ab.

Die Aufzeichnung der Meßwerte, wie oben beschrieben, kann durch Rechnung erspart werden.

Das Grubentemperament ist:

$$\text{nach dem 1. Versuch } T_1 = \frac{V_1}{\sqrt{h_1 + h_n}},$$

$$\text{nach dem 2. Versuch } T_2 = \frac{V_2}{\sqrt{h_2 + h_n}}.$$

Beide Temperamentwerte müssen gleich sein, also setzt man

$$T_1 = T_2,$$

$$\frac{V_1}{\sqrt{h_1 + h_n}} = \frac{V_2}{\sqrt{h_2 + h_n}}.$$

Durch Umwandlung der Gleichung wird

$$h_n = \frac{V_2^2 \cdot h_1 - V_1^2 \cdot h_2}{V_1^2 - V_2^2},$$

z. B. 1. Versuch:  $V_1^2 = 6400$  und  $h_1 = 150$  mm W.S.

2. Versuch:  $V_2^2 = 2575$  und  $h_2 = 40$  mm W.S.

$$h_n = \frac{2575 \cdot 150 - 6400 \cdot 40}{6400 - 2575} = 34,2 \text{ mm W.S.}$$

Der natürliche Wetterzug zieht entgegengesetzt zur Ventilatorströmung.

Es kommt vor, daß bei stillgesetztem Ventilator der Wetterstrom umkehrt und den ausziehenden Schacht zum einziehenden macht. Das ist in Abb. 497 gezeigt.

Die beiden Ventilatorversuche mögen folgende Werte ergeben haben:

1. Versuch:  $Q_1 = 4800$  m<sup>3</sup>/min und  $h_1 = 150$  mm W.S.

2. Versuch:  $Q_2 = 1880$  m<sup>3</sup>/min und  $h_2 = 40$  mm W.S.

Meßpunkt I:  $V_1 = \frac{4800}{60} = 80$  m<sup>3</sup>/sek und  $V_1^2 = 80^2 = 6400$ ,

Meßpunkt II:  $V_2 = \frac{1880}{60} = 31,4$  m<sup>3</sup>/sek und  $V_2^2 = 31,4^2 = 980$ .

Verbindet man die Meßpunkte I und II durch eine gerade Linie, so schneidet diese Gerade die Horizontalachse im Punkt  $h = 20$  mm W.S. und die Vertikalachse im Punkte  $-1000 = V^2$ , d. h. der Wetterstrom zieht bei  $h = 0$  (stillgesetztem Ventilator) entgegengesetzt zum Ventilatorstrom. Der natürliche Wetterzug vermindert die Ventilatordepression um  $h_n = 20$  mm.

Die Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{V_2^2 \cdot h_1 - V_1^2 \cdot h_2}{V_1^2 - V_2^2} = \frac{980 \cdot 150 - 6400 \cdot 40}{6400 - 980} \\ &= \frac{150000 - 256000}{5420} = -20 \text{ mm W.S.}, \end{aligned}$$

d. h. der natürliche Wetterzug arbeitet mit 20 mm W.S. gegen den Ventilator.

### 36. Der Strömungswiderstand der Schächte.

In Abb. 498 ist das einfachste Bild einer Schachthanlage dargestellt, um das Prinzip der Messung und Rechnung zu zeigen, links der einziehende Schacht, rechts der ausziehende Schacht, dazwischen durch eine Drosselöffnung dargestellt der Grubenwiderstand.

Die rechnerische Verfolgung der Strömungswiderstände wird am einfachsten, wenn man in derselben Weise wie bei der Wasserströmung zwei Niveauflächen bildet, deren Abstand die zur Verfügung stehende potentielle Gesamtenergie  $E$  darstellt. Man macht sich von der üblichen Anschauung eines vom Ventilator hergestellten Unterdrucks oder negativen Druckes frei, indem man sich vorstellt,

daß der Ventilator eine Druckdifferenz erzeugt, so daß die Luft von dem Ort höheren Druckes nach dem Ort niedrigen Druckes strömen muß. Die Ventilatordepression betrage z. B.

$$h = 340 \text{ mm W.S.}$$

bei einem Barometerstand von  $B = 730 \text{ mm Q.S.}$ , ferner sei im einziehenden Schacht ein mittleres Raumbgewicht der Wettersäule von

$$\gamma_e = 1,261 \text{ kg/m}^3$$

und im ausziehenden Schacht ein mittleres Raumbgewicht von

$$\gamma_a = 1,146 \text{ kg/m}^3$$

festgestellt. Mit diesen Werten baut man die strömende Wettersäule auf. Zunächst verwandelt man die Ventilatordepression  $h$  in eine Luftsäulenhöhe von  $H$  Meter.

$$h = H \cdot \gamma_e \quad \text{oder} \quad H = \frac{h}{\gamma_e} = \frac{340}{1,261} = 270 \text{ m Luftsäule.}$$

Man setzt, wie Abb. 498 zeigt, auf den einziehenden Schacht die Luftsäulenhöhe  $H$  auf und erhält damit die Niveaufläche  $A$ . Nun denkt man sich einen Hochbehälter, aus dem die Luft unter dem konstanten Spiegel der Niveaufläche  $A$  abfließt. Die Rasenhängebank würde die Niveaufläche  $B$  darstellen. Hier ist der Ort niedrigen Drucks. Die Depression

$$h = 340 \text{ mm W.S.}$$

entspricht einer Quecksilbersäulenhöhe

$$h = \frac{340}{13,6} = 25 \text{ mm,}$$

d. h. die Niveaufläche  $B$  entspricht dem Barometerdruck

$$B = 730 - 25 = 705 \text{ mm.}$$

Die Luft strömt nun von der oberen Niveaufläche durch den Schacht nach der unteren Niveaufläche ab.

Dieser Betriebszustand würde richtig sein, wenn die Grube ohne natürlichen Wetterzug arbeiten würde. Sie arbeitet aber mit natürlichem Wetterzug, denn im ausziehenden Schacht ist das Raumbgewicht der Wettersäule kleiner als im einziehenden, und deshalb stellt sich bei

$$T = 800 \text{ m Teufe}$$

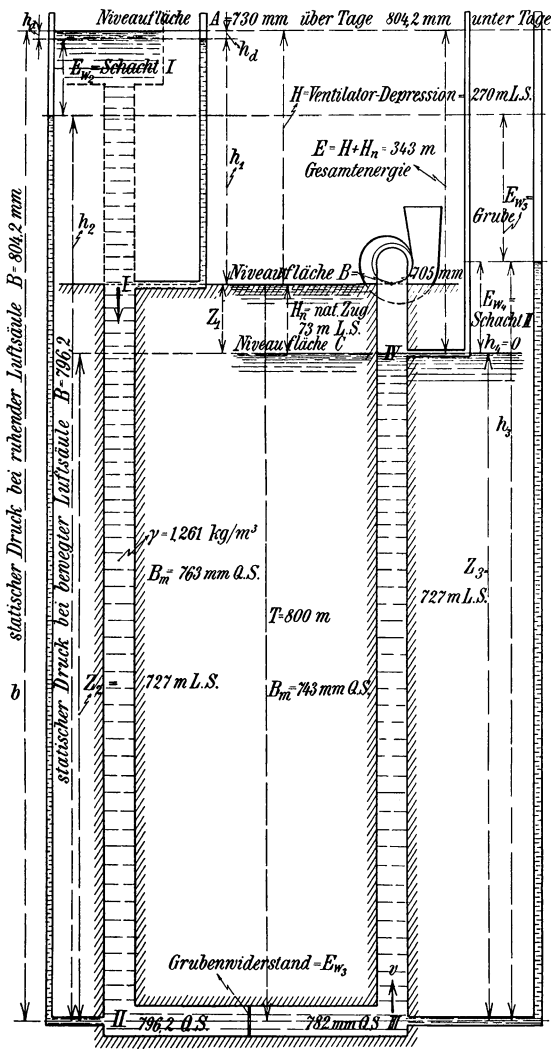
ein natürlicher Zug ein von der Größe

$$h_n = (\gamma_e - \gamma_a) \cdot T = (1,261 - 1,146) \cdot 800 = 92 \text{ mm W.S.}$$

Um dieselben Verhältnisse wie bei Wasserströmung zu haben, gibt man der ganzen Wettersäule das mittlere spezifische Gewicht  $\gamma_e = 1,261$  des einziehenden Schachtes und berücksichtigt das kleinere Gewicht der ausziehenden Wettersäule, indem man die Wettersäulenhöhe des ausziehenden Schachtes kleiner macht. Das Maß der Verkleinerung ist durch den ausgerechneten natürlichen Zug  $h_n$  gegeben, den man in Luftsäulenhöhe verwandeln muß.

$$H_n = \frac{h_n}{\gamma_e} = \frac{92}{1,261} = 73 \text{ m Luftsäule.}$$

Es steht also darnach die Gegendruckluftsäule im ausziehenden Schacht nicht bis zur Rasenhängebank, sondern um die Höhe  $H_n = 73$  m tiefer. Hier liegt die Niveaufläche C, d. h. die Luft fällt nicht bis zur



Niveaufläche B, sondern infolge des natürlichen Wetterzuges fällt sie bis zur Niveaufläche C. Die gesamte potentielle Energie wird durch das Luftsäulengefälle

$$E = H + H_n = 270 + 73 = 343 \text{ m}$$

in der Zeichnung zum Ausdruck gebracht.

Die Berechnung der Strömungswiderstände der einzelnen Teilstrecken des Wetterweges erfolgt nach dem Satz von Bernoulli, welcher aussagt:

Auf dem ganzen Wetterweg muß in jedem Querschnitt die Summe der Teilenergien gleich der zur Verfügung stehenden potentiellen Gesamtenergie sein.

Wir betrachten nun einzelne Querschnitte des Wetterweges.

**a) Querschnitt I.**

Er liegt in der Rasenhängebank des

Abb. 498. Der Strömungswiderstand eines ganzen Wetterweges.

einziehenden Schachtes. Die Abb. 498 zeigt im angesetzten Standrohr die statische Druckhöhe  $h_1$ . Sie ist um den Betrag  $h_a$

$$h_a = \frac{v^2}{2g}$$

kleiner als die wirklich vorhandene Druckhöhe, denn die Wettersäule muß auf die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  gebracht werden.

Die Teilenergien des Querschnitts sind

1. die Energie des Drucks  $= h_1 = E_1$ ,
2. die kinetische Energie  $= h_d = E_2$ ,
3. die Energie der Lage  $= z_1 = E_3$ , denn die Luft kann vom Querschnitt  $I$  noch bis zur Niveauläche  $C$  arbeitsverrichtend weiterfallen.

Nach Bernoulli ist

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = (h_1 + h_d + z_1) \text{ Meter Luftsäule.}$$

### b) Querschnitt $II$ .

Der Querschnitt  $II$  liegt am Fuß des einziehenden Schachtes. Wir messen im Standrohr die statische Druckhöhe  $h_2$ , sie ist um den Strömungswiderstand  $E_{w_2}$  des Schachtes kleiner als  $h_1$ . Die Teilenergien sind

1. die Energie des Drucks  $= h_2 = E_1$ ,
2. die kinetische Energie  $= h_d = E_2$ ,
3. die Energie der Lage  $= -z_2 = E_3$ , denn die Luft muß um die Höhe  $z_2$  arbeitsverzehrend bis auf die Niveauläche  $C$  wieder gehoben werden,
4. die Widerstandsenergie für Schachtreibung  $= E_{w_2}$ .

Nach Bernoulli ist

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_{w_2} = (h_2 + h_d - z_2 + E_{w_2}) \text{ m Luftsäule.}$$

Hieraus errechnet sich die Schachtreibung

$$E_{w_2} = E + z_2 - h_2 - h_d.$$

Sieht man sich die Figur an, so erkennt man, daß die Größe

$$E + z_2 = B$$

ist, d. i. der unten im Schachtfuß bei ruhender Luftsäule gemessene Barometerdruck. Man könnte ihn messen, wenn man bei stillgesetztem Ventilator und Abdeckung des ausziehenden Schachtes messen würde, so daß die ganze Wettersäule in Ruhe wäre. Das ist aber kaum möglich. Man begnügt sich daher mit einer Berechnung dieses Barometerdruckes, und darin liegt eine gewisse Unsicherheit der Rechnung.

Hat man über Tage den Barometerstand  $B_0$  gemessen, so ist bei dem mittleren spezifischen Gewicht  $\gamma_e$  der einziehenden Wettersäule für  $T$  Meter Teufe unten der Barometerdruck

$$B_u = B_0 + \frac{T \cdot \gamma_e}{13,6},$$

z. B. ist für  $B_0 = 730$  mm,  $T = 800$  m und  $\gamma_e = 1,261$  kg/m<sup>3</sup>

$$B_u = 730 + \frac{800 \cdot 1,261}{13,6} = 804,2 \text{ mm} = B.$$

Der im Standrohr gemessene statische Druck  $h_2$  ist der bei bewegter Wettersäule am Schachtfuß gemessene Barometerdruck, der mit dem Hypsometer leicht zu messen ist.

Die dynamische Druckhöhe  $h_d$  kann aus der Wettergeschwindigkeit  $v$  errechnet werden.

In unserm Beispiel sei  $v = 5$  m/sek bei 8 m Schachtdurchmesser. Dann ist

$$\begin{aligned} h_d &= \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,81} = 1,27 \text{ m Luftsäule} \\ &= \frac{1,27 \cdot \gamma_e}{13,6} = \frac{1,27 \cdot 1,261}{13,6} = 0,12 \text{ mm Q.S.} \end{aligned}$$

Hat man ferner mit dem Hypsometer gemessen

$$h_2 = 796,20 \text{ mm Q.S.},$$

so ist der Schachtwiderstand

$$\begin{aligned} E_{w_2} &= B - h_2 - h_d = 804,2 - 796,20 - 0,12 = 7,88 \text{ mm Q.S.} \\ &= 7,88 \cdot 13,6 = 107 \text{ mm W.S.} \end{aligned}$$

Das Temperament des Wetterweges im einziehenden Schacht ist, wenn die Wettermenge  $Q = 15000$  m<sup>3</sup>/min oder

$$V = \frac{15000}{60} = 250 \text{ m}^3/\text{sek}$$

ist,

$$T = \frac{V}{\sqrt{h}} = \frac{250}{\sqrt{107}} = 24,2.$$

Der Schachtquerschnitt ist  $F = \frac{\pi}{4} \cdot 8^2 = 50,5 \text{ m}^2$ ,

der Schachtumfang ist  $U = \pi \cdot D = \pi \cdot 8 = 25,1 \text{ m}$ ,

Teufe  $T = 800 \text{ m} = L$ .

Dann ist die Reibungsziffer des Schachtes

$$k = \frac{F^3}{T^2 \cdot L \cdot U} = \frac{50,5^3}{24,2^2 \cdot 800 \cdot 25,1} = 0,011.$$

### c) Querschnitt III.

Der Querschnitt III liegt am Fuß des ausziehenden Schachtes, er liegt in gleicher Höhe wie der Querschnitt II, so daß die Energie der Lage sich nicht ändert. Da ebenfalls dieselbe Wettergeschwindigkeit  $v$  angenommen ist, ändert sich auch nicht die kinetische Energie. Es ändert sich nur die Energie des Druckes, weil der Widerstand  $E_{w_3}$  der Grubenbaue dazwischen liegt. In dem Standrohr des Querschnittes III sehen wir daher die statische Druckhöhe  $h_3$  um das Maß  $E_{w_3}$  kleiner als die statische Druckhöhe  $h_2$  im Querschnitt II. Es ist also der Widerstand der Grubenbaue

$$E_{w_3} = h_2 - h_3.$$

Durch Hypsometer-Messung sei bekannt  $h_3 = 782$  mm Q.S., dann ist der Widerstand der Grubenbaue

$$\begin{aligned} E_{w_3} &= h_2 - h_3 = 796,2 - 782 = 14,2 \text{ mm Q.S.} \\ &= 14,2 \cdot 13,6 = 194 \text{ mm W.S.} \end{aligned}$$

### d) Der Querschnitt IV.

Im Querschnitt IV, der ideell in der Niveauläche C, praktisch aber in der Rasenhängebank des ausziehenden Schachtes liegt, messen wir im Standrohr die statische Druckhöhe  $h_4 = 0$ .

Die Teilenergien sind:

1. die Energie des Drucks  $h_a = 0 = E_1$ ,
2. die kinetische Energie  $h_d = E_2$ ,
3. die Energie der Lage  $z_4 = 0 = E_3$ , denn die Luftteilchen befinden sich nun in der unteren Niveauläche  $C$ , so daß die gesamte potentielle Energie verarbeitet ist;
4. die Widerstandsenergie  $E_{w_2} + E_{w_3} + E_{w_4} =$  Widerstand des einziehenden Schachtes + Widerstand im Grubenbau + Widerstand des ausziehenden Schachtes.

Nach Bernoulli ist

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_{w_2} + E_{w_3} + E_{w_4},$$

$$E = 0 + h_d + 0 + E_{w_2} + E_{w_3} + E_{w_4}.$$

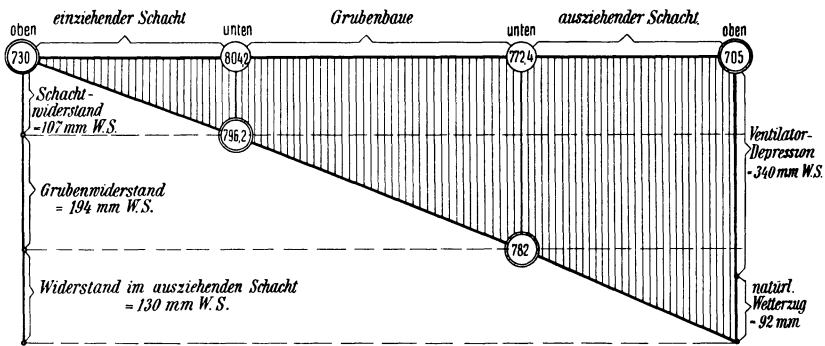


Abb. 499. Das Potentialgefälle des ganzen Wetterweges.

Der Widerstand des ausziehenden Schachtes ist demnach

$$E_{w_4} = E - h_d - E_{w_2} - E_{w_3}.$$

Setzt man ein

$$E = 340 + 92 = 432 \text{ mm W.S.},$$

$$h_d = 0,12 \text{ mm Q.S.} = 0,12 \cdot 13,6 = 1,6 \text{ mm W.S.},$$

$$E_{w_2} = 107 \text{ mm W.S.} \quad \text{und} \quad E_{w_3} = 194 \text{ mm W.S.},$$

so ist

$$E_{w_4} = 432 - 1,6 - 107 - 194 = 129,4 \text{ mm W.S.}$$

Man kommt zu demselben Ergebnis noch auf einem andern Wege. Nach Abb. 498 ist

$$E_{w_4} = h_3 - z_3.$$

$h_3$  ist der bei strömender Wettersäule unten im Schacht gemessene Druck 782 mm Q.S.,  $z_3$  würde der an derselben Stelle gemessene Druck der ruhenden Wettersäule sein. Es ist, da in der Niveauläche der Rasenhängebank  $B = 705$  mm Q.S. ist und derselbe Druck in der ideellen Niveauläche  $C$  herrscht, bei 727 m Luftsäulenhöhe

$$z_3 = 705 + 727 \cdot \frac{1,261}{13,6} = 772,4 \text{ mm},$$

also ist

$$\begin{aligned} E_{w_4} &= 782 - 772,4 = 9,6 \text{ mm Q.S.} \\ &= 9,6 \cdot 13,6 = 130 \text{ mm W.S.} \end{aligned}$$

Die errechneten Werte sind in Abb. 499 aufgetragen. Wir sehen auf der Horizontalen den ganzen Wetterweg und als Ordinaten die Bewegungskräfte und die Bewegungswiderstände aufgetragen. Als Bewegungskräfte sehen wir rechts die Ventilatordepression  $h$  und den natürlichen Wetterzug  $h_n$ . Die Barometerdrücke sind ebenfalls eingetragen, die gemessenen mit 2 Kreisen umrahmt, die errechneten mit einem Kreis. Im einziehenden Schacht ist das Potentialgefälle 804,2—796,2, im Grubengebäude 796,2—782 und im ausziehenden Schacht 782—772,4. Man sieht aus der Figur, daß der natürliche Wetterzug noch nicht ausreicht, um den Schachtwiderstand im ausziehenden Schacht zu überwinden.

### 37. Praktische Widerstandsmessung in Wetterwegen.

Die Widerstandsmessung einzelner Wetterwege läßt sich einfacher gestalten. Man hat nur die auf S. 503 angegebene Regel zu beachten:

„Bei fallendem Wetterstrom ist die durchfallene Höhe zwischen den Meßpunkten der gemessenen Druckdifferenz hinzuzufügen, bei steigendem Wetterstrom ist die Steighöhe zwischen den beiden Meßpunkten von der gemessenen Druckdifferenz abzuziehen.“

In Abb. 500 ist die Meßstrecke

1. Der einziehende Schacht.

Meßpunkt 1 an der Rasenhängebank mit den Meßwerten

a) Druckmessung mit dem Hypsometer  $p = 752,7$  mm Q.S.

b) Temperaturmessung  $t_o = 14,6^\circ$ .

Meßpunkt 2 am Füllort der 2. Sohle, der  $z = 727,6$  m tiefer liegt:

a) Druckmessung mit dem Hypsometer  $p_u = 816$  mm Q.S.

b) Temperaturmessung  $t_u = 23,2^\circ$ .

Der Wetterstrom fällt, also muß der Druck der durchfallenen Luftsäulenhöhe  $z_1 = 727,6$  m, der mit  $p_{ou}$  bezeichnet werden möge, der gemessenen Druckdifferenz hinzugefügt werden.

$$\text{Schachtwiderstand } r = p_o + p_{ou} - p_u \text{ mm W.S.}$$

Wie groß ist  $p_{ou}$ ?

Mit  $p_o = 752,7 \cdot 13,6 = 10230$  kg/m<sup>2</sup> und  $T_o = 273 + 14,6 = 287,6^\circ$  wird

$$\gamma_o = \frac{p_o}{\mathfrak{R} \cdot T_o} = \frac{10230}{29,27 \cdot 287,6} = 1,212 \text{ kg/m}^3,$$

ferner mit  $p_u = 816 \cdot 13,6 = 11100$  kg/m<sup>2</sup> und  $T_u = 273 + 23,2 = 296,2^\circ$  wird

$$\gamma_u = \frac{p_u}{\mathfrak{R} \cdot T_u} = \frac{11100}{29,27 \cdot 296,2} = 1,278 \text{ kg/m}^3,$$

$$\text{Mittelwert } \gamma_m = \frac{1,212 + 1,278}{2} = 1,245 \text{ kg/m}^3,$$

d. h. bei 1 m Luftsäulenhöhe ist der Bodendruck = 1,245 mm W.S., also ist bei  $z_1 = 727,6$  m Luftsäulenhöhe der Bodendruck

$$\begin{aligned} p_{ou} &= 727,6 \cdot 1,245 = 905,0 \text{ mm W.S.} \\ &= 905,0 : 13,6 = 66,5 \text{ mm Q.S.} \end{aligned}$$



Hiermit wird der Schachtwiderstand

$$r = p_o + p_{ou} - p_u = 752,7 + 66,5 - 816 = 3,2 \text{ mm Q.S.}$$

oder 
$$r = 3,2 \cdot 13,6 = 43,5 \text{ mm W.S.}$$

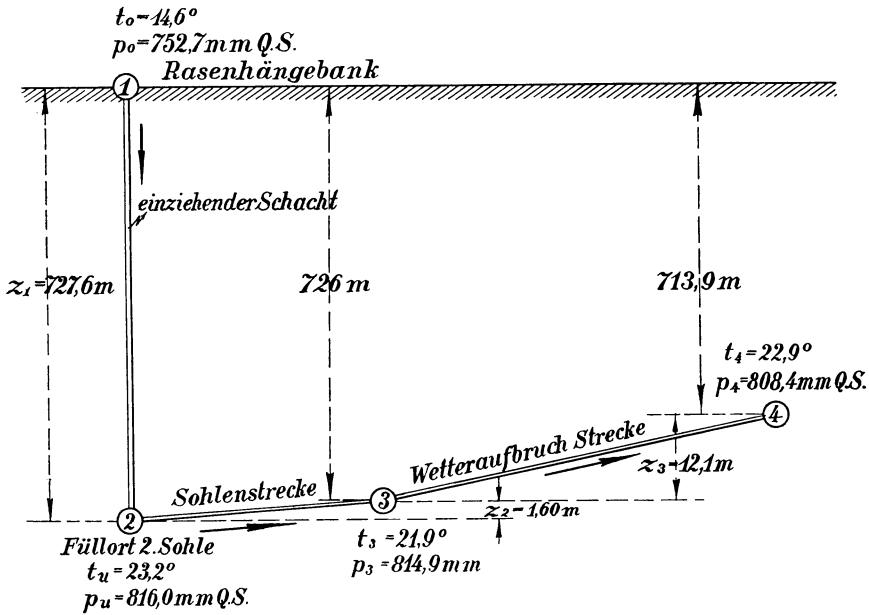


Abb. 500. Die Meßstrecken einer Grubenmessung.

Der Vergleichsdruck der ruhenden Luftsäule im Schacht am Füllort der 2. Sohle läßt sich auch nach der Höhenformel von Drehkopf errechnen.

$$\begin{aligned} \log p &= \log p_o + \frac{Z}{18450 + 67,5 \cdot t_m + 0,085 \cdot \varphi_m \cdot e_m}, \\ &= \log 752,7 + \frac{727,6}{18450 + 67,5 \cdot 18,9 + 0,085 \cdot 70 \cdot 16,3}, \\ &= 2,87662 + 0,03670 = 2,91332, \\ p &= 819,1 \text{ mm Q.S.} \end{aligned}$$

Gemessen wurden bei bewegter Luftsäule  $p_u = 816,0 \text{ mm Q.S.}$ , also ist der Schachtwiderstand

$$r = p - p_u = 819,1 - 816,0 = 3,1 \text{ mm Q.S.}$$

oder 
$$r = 3,1 \cdot 13,6 = 42,2 \text{ mm W.S.}$$

2. Die Sohlenstrecke mit den Meßpunkten 2 und 3.

Meßpunkt 2: Druckmessung  $p_u = 816 \text{ mm Q.S.}$ , Temperaturmessung  $t_u = 23,2^\circ$ .

Meßpunkt 3: Druckmessung  $p_3 = 814,9 \text{ mm Q.S.}$ , Temperaturmessung  $t_3 = 21,9^\circ$ .

Der Wetterstrom steigt, also muß der Druck der erkletterten Luftsäulenhöhe  $z_2 = 1,6$  m, der mit  $p_{u3}$  bezeichnet werden möge, von der gemessenen Druckdifferenz abgezogen werden. Die spezifischen Gewichte werden in bekannter Weise errechnet zu  $\gamma_u = 1,278$  kg/m<sup>3</sup> und  $\gamma_3 = 1,282$  kg/m<sup>3</sup>, also ist

$$\gamma_m = \frac{1,278 + 1,282}{2} = 1,280 \text{ kg/m}^3,$$

d. h. 1 m Luftsäulenhöhe = 1,280 mm W.S.

$$z_2 = 1,6 \text{ m Luftsäulenhöhe} = 1,6 \cdot 1,28 = 2,05 \text{ mm W.S.}$$

$$p_{u3} = 2,05 : 13,6 = 0,15 \text{ mm Q.S.}$$

Mit den genannten Druckwerten wird der Widerstand der Sohlenstrecke

$$r = p_u - p_{u3} - p_3 = 816,0 - 0,15 - 814,9 = 0,95 \text{ mm Q.S.}$$

oder

$$r = 13,6 \cdot 0,95 = 12,9 \text{ mm W.S.}$$

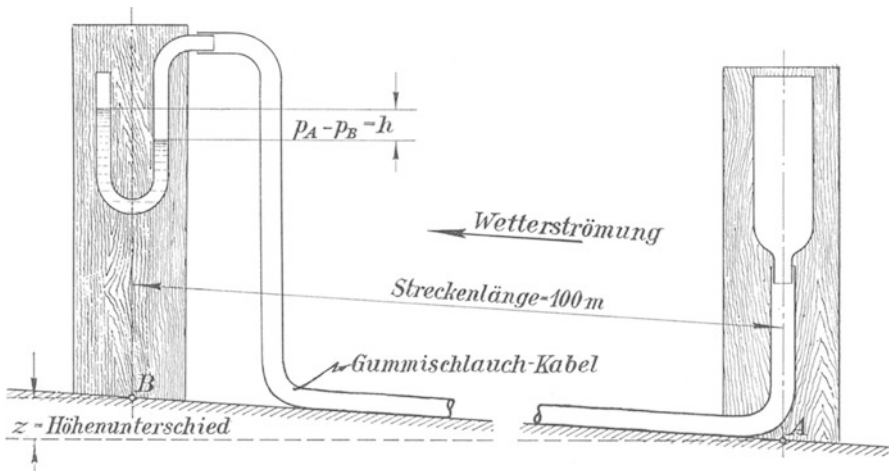


Abb. 501. Direkte Differenzdruckmessung zwischen zwei Meßorten durch ein Wassermancometer.

### 3. Wetteraufbruchstrecke zur 1. Sohle.

Meßpunkt 3: Druckmessung  $p_3 = 814,9$  mm Q.S., Temperaturmessung  $t_3 = 21,9^\circ$ .

Meßpunkt 4: Druckmessung  $p_4 = 808,4$  mm Q.S., Temperaturmessung  $t_4 = 22,9^\circ$ .

Der Wetterstrom steigt wieder an, also muß der Druck der erströmten Luftsäulenhöhe  $z_3 = 12,1$  m, der mit  $p_{34}$  bezeichnet werden möge, von der gemessenen Druckdifferenz abgezogen werden. Die spezifischen Gewichte sind errechnet zu  $\gamma_3 = 1,282$  kg/m<sup>3</sup> und  $\gamma_4 = 1,265$  kg/m<sup>3</sup>, also ist

$$\gamma_m = \frac{1,282 + 1,265}{2} = 1,274 \text{ kg/m}^3,$$

d. h. 1 m Luftsäulenhöhe = 1,274 mm W.S.

$z_3 = 12,1$  m Luftsäulenhöhe =  $12,1 \cdot 1,274 = 15,42$  mm W.S.

oder  $p_{34} = 15,42 : 13,6 = 1,133$  mm Q.S.

Mit den bekannten Druckwerten wird der Strömungswiderstand der gemessenen Strecke

$$r = p_3 - p_{34} - p_4 = 814,9 - 1,133 - 808,4 = 5,37 \text{ mm Q.S.}$$

oder  $r = 13,6 \cdot 5,37 = 73$  mm W.S.

An diesem Beispiel sollte das praktische Messen gezeigt werden. Es

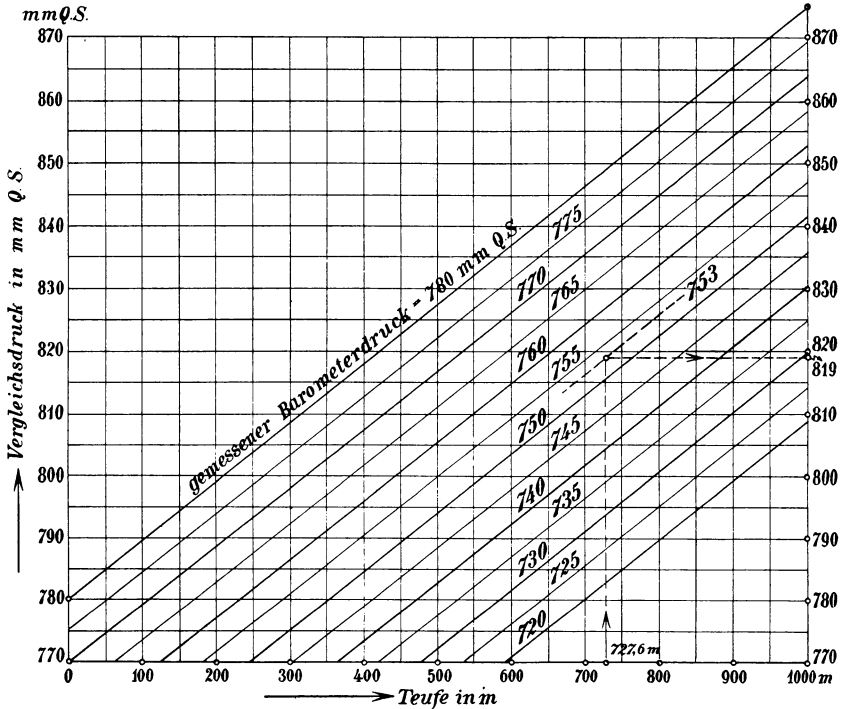


Abb. 502. Der Vergleichsdruck bei Schachtwiderstandsmessungen.

ist wichtig, daß die Druckmessungen an den beiden Meßpunkten, deren Druckdifferenz man feststellen will, zu gleicher Zeit gemessen werden, da Barometerdruckänderungen Fehler verursachen. Zweckmäßig müßte man also mit zwei Hypsometern messen.

Die einfachste Messung würde sein, die Druckdifferenz zwischen den beiden Meßpunkten unmittelbar durch ein Wassermanometer zu messen, wie Abb. 501 zeigt. Transportabel an einem Brett links das Wassermanometer, ebenso transportabel an einem Brett rechts ein oben offenes Gefäß, das unten den Schlauchanschluß hat. Wassermanometer und Druckgefäß werden durch ein Schlauchkabel miteinander verbunden. Die Wassersäule  $h = p_A - p_B$  liefert die gewünschte Druckdifferenz unmittelbar in mm W.S. Bei geeigneten Strecken muß die Höhendifferenz

$z$  der Sohlenpunkte  $A$  und  $B$  berücksichtigt werden. Hierfür ist das spezifische Gewicht der Luft erforderlich, das man aus Druck und Temperatur, gemessen in der Mitte zwischen den Streckenpunkten  $A$  und  $B$ , in bekannter Weise errechnet. Man könnte so Streckenlängen von 100 zu 100 m anschließend vermessen.

In neuerer Zeit wird an Stelle des Hypsometers ein Meßgerät mit dem Namen Bergwerksstatoskop benutzt, das von den Askania-Werken, Bambergwerk in Berlin-Friedenau, hergestellt wird.

Um den Vergleichsdruck bei Schachtwiderstandsmessungen, die man sonst nach der barometrischen Höhenformel berechnet, ohne Rechnung zu finden, ist in Abb. 502 ein Diagramm mitgeteilt, das den Vergleichsdruck abgreifen läßt, z. B. über Tage ist der Luftdruck 753 mm Q.S. gemessen, es soll der Vergleichsdruck in 727,6 m Teufe gefunden werden. Man sucht auf der Horizontalachse den Teufenpunkt 727,6 m, legt durch diesen Punkt eine Senkrechte bis zur Schräglinie 753 mm Q.S., durch den Schnittpunkt legt man eine Horizontale, die auf der senkrechten Achse rechts den Vergleichsdruck 819 mm Q.S. ausschneidet.

### 38. Das Daltonsche Gesetz, relative Feuchtigkeit.

Jeder Temperatur des Wassers entspricht ein bestimmter Sättigungsdruck der Verdampfung, der in Millimeter Quecksilber gemessen wird. Er ist bei  $100^{\circ}\text{C}$  z. B. 760 mm und bei  $20^{\circ}$  nur noch 17,5 mm. Soll daher Wasser bei  $20^{\circ}$  verdampfen, so muß man die Wasseroberfläche durch Luftverdünnung so lange entlasten, bis der Luftdruck an der Oberfläche nur noch 17,5 mm Q.S. beträgt.

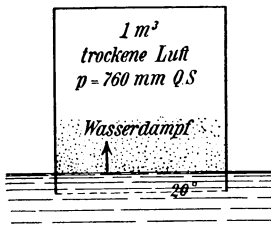


Abb. 503. Die Verdunstung an der Wasseroberfläche.

Solange der Druck auf der Wasseroberfläche größer ist als der Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei der vorherrschenden Temperatur, kann nur eine Verdunstung an der Oberfläche vor sich gehen, niemals aber eine Verdampfung.

In Abb. 503 ist auf eine Wasseroberfläche eine Glocke von  $1\text{ m}^3$  Inhalt gestülpt, welche mit trockener atmosphärischer Luft gefüllt ist. Das Wasser habe eine Temperatur von  $20^{\circ}$  und der Luftdruck in der Glocke sei 760 mm. Dann beginnt an der Wasseroberfläche ein Verdunsten des Wassers, die Luft mischt sich mit Wasserdampf, so daß nach einiger Zeit eine Mischung von Luft und Wasserdampf vorhanden ist. Durch Messungen kann man feststellen, daß der Wasserdampfgehalt oder die Feuchtigkeit der Luft allmählich größer wird.

Man versteht nun unter dem Teildruck der Luft denjenigen Druck, den die Luft auf die Glockenwand ausüben würde, wenn sie den Raum allein ausfüllen würde, er wird mit  $p_L$  bezeichnet. Und unter dem Teildruck des Wasserdampfes versteht man denjenigen Druck, den der

Wasserdampf auf die Glockenwand ausüben würde, wenn er allein vorhanden wäre, er werde mit  $p_D$  bezeichnet.

Nach dem Daltonschen Gesetz ist nun der Teildruck eines Bestandteiles einer Mischung genau so groß, als wenn der Bestandteil allein vorhanden wäre, und der Gesamtdruck der Mischung ist gleich der Summe der Teildrücke.

Der Teildruck des Wasserdampfes kann niemals über einen bestimmten Druck, den man den Sättigungsdruck nennt, ansteigen. Werte für den Sättigungsdruck  $p_s$  sind auf S. 525 angegeben.

Der unter der Glocke vorhandene Teildruck  $p_D$  des Dampfes wird also anfangs nur ein Bruchteil des Sättigungsdruckes  $p_s$  sein, der bei 20° bekanntlich den Wert  $p_s = 17,5$  mm hat. Man setzt daher

$$p_D = \varphi \cdot p_s,$$

wo  $\varphi$  eine Zahl ist, welche kleiner als 1 sein muß. Die Größe  $\varphi$  ist ein Maß für die Luftfeuchtigkeit, denn bei einer bestimmten Lufttemperatur ist nur ein ganz bestimmter Wassergehalt möglich. Man nennt ihn den Sättigungsgehalt. In der Größe  $\varphi$  ist daher der Bruchteil dieser Höchstmenge an Wasserdampf gekennzeichnet. Man nennt darum  $\varphi$  die relative Feuchtigkeit.

Die Bedeutung der relativen Feuchtigkeit werde rechnerisch tiefer ergründet. Grundlegend ist mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} G &= \text{Gewicht der Mischung } V \text{ m}^3 \text{ in kg,} \\ G_D &= \text{Dampfgewicht dieser Mischung (Volumen } V_D), \\ G_L &= \text{Luftgewicht dieser Mischung (Volumen } V_L), \\ G_D + G_L &= G \quad \text{und} \quad V_D = V_L = V. \end{aligned}$$

Rechnet man den Wasserdampf zu den idealen Gasen, so gilt allgemein für das Gemisch die allgemeine Zustandsgleichung der Gase

$$p \cdot v = R \cdot T,$$

$v$  ist in dieser Gleichung das Volumen von 1 kg Gas. Für  $G$  kg Gas vom Volumen  $V$  heißt die Zustandsgleichung

$$p \cdot V = G \cdot R \cdot T,$$

woraus sich das Gewicht der  $V$  m<sup>3</sup> Gas berechnet zu

$$G = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{V}{T} \cdot \frac{1}{R} \cdot p.$$

Bei Feuchtigkeitsrechnungen rechnet man den Druck nicht in kg/m<sup>2</sup>, sondern in mm Q.S., damit erhalten die Gaskonstanten unter Berücksichtigung des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers, das 13,6 beträgt, folgende Werte:

Gaskonstante für Luft  $R_L = 29,27$

$$R_L = \frac{29,27}{13,6} = 2,15 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_L} = \frac{1}{2,15} = 0,465,$$

Gaskonstante für Wasserdampf  $R_D = 47,06$

$$R_D = \frac{47,06}{13,6} = 3,46 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_D} = \frac{1}{3,46} = 0,289.$$

Der Teildruck des Wasserdampfes ist

$$p_D = \varphi \cdot p_s,$$

ist der Gesamtdruck  $p$ , so ist der Teildruck der Luft

$$p_L = p - p_D = p - \varphi \cdot p_s.$$

Das Luftgewicht ist

$$G_L = \frac{V}{T} \cdot \frac{1}{R_L} \cdot p_L = \frac{V}{T} \cdot 0,465 \cdot (p - \varphi \cdot p_s).$$

Das Dampfgewicht ist

$$G_D = \frac{V}{T} \cdot \frac{1}{R_D} \cdot p_D = \frac{V}{T} \cdot 0,289 \cdot \varphi \cdot p_s.$$

Das Gemischtgewicht ist

$$\begin{aligned} G &= G_L + G_D = \frac{V}{T} \cdot 0,465 \cdot (p - \varphi \cdot p_s) + \frac{V}{T} \cdot 0,289 \cdot \varphi \cdot p_s \\ &= \frac{V}{T} \cdot (0,465 p - 0,465 \cdot \varphi \cdot p_s + 0,289 \cdot \varphi \cdot p_s) \end{aligned}$$

oder

$$G = \frac{V}{T} \cdot (0,465 p - 0,176 \varphi \cdot p_s).$$

Hieraus ergibt sich das spezifische Gewicht des Gemisches, indem wir  $V = 1$  setzen, zu

$$\gamma_\varphi = \frac{0,465 \cdot p}{T} - \frac{0,176 \cdot \varphi \cdot p_s}{T},$$

$$\gamma_\varphi = \gamma_{\text{trocken}} - \frac{0,176 \cdot \varphi \cdot p_s}{T},$$

d. h. feuchte Luft ist immer leichter als trockene Luft.

**Beispiel:** Im einziehenden Schacht, Abb. 504, habe die Luft eine mittlere Temperatur von  $9^\circ$  und 75% Feuchtigkeit bei einem mittleren Druck von 748 mm, im ausziehenden Schacht habe die Luft  $25^\circ$  und 100% Feuchtigkeit bei einem mittleren Druck von 739 mm, wie verhalten sich die spezifischen Gewichte zueinander?

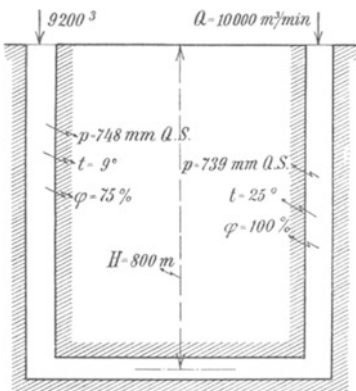


Abb. 504. Der Gewichtsunterschied der beiden Schachtsäulen.

**Lösung:** 1. Einziehender Schacht:

$$t = 9^\circ, \quad T = 273 + 9 = 281^\circ.$$

Nach Tabelle ist für  $9^\circ$  der Sättigungsdruck  $p_s = 8,574$  mm Q.S., nach der Aufgabe ist  $p = 748$  und  $\varphi = 0,75$ .

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi &= \frac{0,465 \cdot p}{T} - \frac{0,176 \cdot \varphi \cdot p_s}{T} = \frac{0,465 \cdot 748}{281} - \frac{0,176 \cdot 0,75 \cdot 8,574}{281}, \\ \gamma_\varphi &= 1,240 - 0,004 = 1,236 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

2. Ausziehender Schacht:

$$t = 25^\circ \text{ oder } T = 25 + 273 = 298^\circ.$$

Nach Tabelle ist für  $25^\circ$  der Sättigungsdruck  $p_s = 23,55$  mm Q.S., nach der Aufgabe ist  $p = 739$  und  $\varphi = 1,0$ .

$$\gamma_\varphi = \frac{0,465 \cdot 739}{298} - \frac{0,176 \cdot 1,0 \cdot 23,55}{298} = 1,152 - 0,014 = 1,138 \text{ kg/m}^3.$$

Im einziehenden Schacht ist demnach die Luft

$$\frac{1,236}{1,138} = 1,085 \text{ mal so schwer}$$

als im ausziehenden Schacht, so daß sich ein natürlicher Wetterzug ergibt.

Nachstehend sind die Sättigungsspannungen tabellarisch mitgeteilt.

Sättigungsspannungen  $p_s$  in mm Q.S.

$t^{\circ}$	$p_s$	$t^{\circ}$	$p_s$	$t^{\circ}$	$p_s$	$t^{\circ}$	$p_s$
1 <sup>o</sup>	4,940	11 <sup>o</sup>	9,762	21 <sup>o</sup>	18,495	31 <sup>o</sup>	33,406
2 <sup>o</sup>	5,302	12 <sup>o</sup>	10,457	22 <sup>o</sup>	19,659	32 <sup>o</sup>	35,359
3 <sup>o</sup>	5,687	13 <sup>o</sup>	11,162	23 <sup>o</sup>	20,888	33 <sup>o</sup>	37,411
4 <sup>o</sup>	6,097	14 <sup>o</sup>	11,908	24 <sup>o</sup>	22,184	34 <sup>o</sup>	39,565
5 <sup>o</sup>	6,543	15 <sup>o</sup>	12,699	25 <sup>o</sup>	23,550	35 <sup>o</sup>	41,827
6 <sup>o</sup>	6,998	16 <sup>o</sup>	13,536	26 <sup>o</sup>	24,988	36 <sup>o</sup>	44,201
7 <sup>o</sup>	7,492	17 <sup>o</sup>	14,421	27 <sup>o</sup>	26,505	37 <sup>o</sup>	46,691
8 <sup>o</sup>	8,017	18 <sup>o</sup>	15,357	28 <sup>o</sup>	28,101	38 <sup>o</sup>	49,302
9 <sup>o</sup>	8,574	19 <sup>o</sup>	16,346	29 <sup>o</sup>	29,782	39 <sup>o</sup>	52,039
10 <sup>o</sup>	9,165	20 <sup>o</sup>	17,391	30 <sup>o</sup>	31,548	40 <sup>o</sup>	54,906

Nach unserer Ableitung war das Dampfgewicht in  $V \text{ m}^3$  Gemisch

$$G_D = \frac{V}{T} \cdot 0,289 \cdot \varphi \cdot p_s \text{ kg im ungesättigten Zustand}$$

und

$$G_{D_s} = \frac{V}{T} \cdot 0,289 \cdot p_s \text{ kg im gesättigten Zustand.}$$

Das Dampfgewicht im gesättigten Zustand ist der Höchstgehalt an Wasserdampf, der bei der vorherrschenden Temperatur überhaupt möglich ist. Das Verhältnis

$$\frac{\text{tatsächliches Wasserdampfgewicht}}{\text{Höchstwert des Wassergewichts}} = \frac{G_D}{G_{D_s}} = \frac{\varphi \cdot p_s}{p_s} = \varphi$$

heißt die relative Feuchtigkeit. Dieses Verhältnis stimmt also überein mit dem Verhältnis

$$\frac{\text{Teildruck des Dampfes}}{\text{Sättigungsdruck des Dampfes}}$$

### 39. Der Wassergehalt der feuchten Luft.

Bei der Luftströmung durch Wetterwege ändert sich infolge von Wasseraufnahme oder Wasserausscheidung das Gewicht des Luftdampfes, auch das Volumen der anteiligen „trockenen Luft“ ändert sich infolge von Temperaturänderungen. Man kann daher mit dem Volumen nur umständlich rechnen. Es ist daher besser, mit dem Gewicht des Anteiles trockener Luft zu rechnen, weil diese Größe konstant bleibt. Man wählt daher das Gewicht  $G_L$  der trockenen Luft als Bezugsgrößen und führt die Bezeichnung  $x$  für den Gewichtsanteil an Wasserdampf ein. Man sagt:

$x$  kg Dampf kommen auf 1 kg trockene Luft.

Im Gegensatz zur relativen Feuchtigkeit  $\varphi$  nennt man  $x$  die absolute Feuchtigkeit.

Das Dampfgewicht ist:

$$G_D = x \cdot G_L \quad \text{oder} \quad x = \frac{G_D}{G_L}.$$

Früher fanden wir

$$G_D = \frac{V}{T} \cdot 0,289 \cdot \varphi \cdot p_s \quad \text{und} \quad G_L = \frac{V}{T} \cdot 0,465 \cdot (p - \varphi \cdot p_s),$$

also ist

$$x = \frac{0,289}{0,465} \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s}.$$

Für den Sättigungszustand ist  $\varphi = 1$ , d. h. die größte Wassermenge, welche 1 kg Luft aufnehmen kann, ist

$$x = 0,622 \cdot \frac{p_s}{p - p_s}.$$

**Beispiel:** Welche größte Wassermenge kann 1 kg Luft bei 760 mm Druck und  $t = 25^\circ$  Temperatur aufnehmen?

**Lösung:** Für  $t = 25^\circ$  ist  $p_s = 23,55$  mm Q.S.

$$x = 0,622 \cdot \frac{23,55}{760 - 23,55} = 0,020 \text{ kg} = 20 \text{ g}.$$

**Beispiel:** Wie groß ist der Wassergehalt bei  $\varphi = 75\%$  Feuchtigkeit?

**Lösung:**

$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} = 0,622 \cdot \frac{0,75 \cdot 23,55}{760 - 23,55} = 0,0147 \text{ kg} = 14,7 \text{ g}.$$

Aus der Gleichung

$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s}$$

läßt sich ableiten, daß die relative Feuchtigkeit bei bekanntem Wassergehalt  $x$  folgende Größe hat

$$\varphi = \frac{p}{p_s} \cdot \frac{x}{0,622 + x}.$$

Der Teildruck des Wasserdampfes ist

$$p_D = \varphi \cdot p_s.$$

Setzt man für  $\varphi$  den vorstehenden Wert ein, so wird

$$p_D = p \cdot \frac{x}{0,622 + x}.$$

Der Teildruck der Luft ist

$$p_L = p - p_D,$$

unter Einsetzung des obigen Wertes von  $p_D$  erhält man

$$p_L = p \cdot \frac{0,622}{0,622 + x}.$$

Nach vorstehenden Gleichungen lassen sich die Teildrücke bei bekanntem Wassergehalt  $x$  berechnen.

## 40. Der Wärmeinhalt feuchter Luft.

Zur Berechnung des Wärmeinhalts von 1 kg feuchter Luft muß man die spezifischen Wärmen von Luft und Wasserdampf und außerdem die Verdampfungswärme des Wassers kennen. Es ist



0,24 die spezifische Wärme der trockenen Luft,  
 0,46 die spezifische Wärme des Wasserdampfes,  
 595 die Verdampfwärme des Wassers bei 0° in kcal.

Hiernach ist der Wärmeinhalt von 1 kg trockener Luft bei  $t^{\circ}$  Temperatur

$$i_L = 0,24 \cdot t \text{ kcal/kg}$$

und der Wärmeinhalt von 1 kg Wasserdampf

$$i_D = (595 + 0,46 \cdot t) \text{ kcal/kg.}$$

Der Wärmeinhalt eines Gemisches von 1 kg trockener Luft und  $x$  kg Wasserdampf ist

$$i = (0,24 \cdot t + 0,46 \cdot x \cdot t + 595 \cdot x) \text{ kcal/kg,}$$

wenn  $t$  die Temperatur des Gemisches bedeutet.

#### 41. Die durch die Bewetterung abgeführte Grubenwärme.

Die Kühlung tiefer Gruben erfolgt auch heute noch ausschließlich durch die Bewetterung. Man macht sich kaum ein Bild davon, welche gewaltigen Wärmemengen durch die ausziehenden Wettermengen in die Atmosphäre zurückstrahlen, wenn man nicht rechnungsmäßig die Wärmemengen feststellt. Das ist uns nun auf Grund der aufgestellten Gleichungen

$$\text{Wasserdampfgewicht } x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} \text{ für 1 kg Luft}$$

und Wärmeinhalt  $i = (0,24 \cdot t + 0,46 \cdot x \cdot t + 595 \cdot x)$  kcal für 1 kg Luft möglich. Es möge ein praktisches Beispiel ausgewertet werden. In Abb. 504 liegen folgende Verhältnisse vor:

einziehender Schacht:

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Luftdruck} &= 748 \text{ mm Q.S.} = p, \\ \text{mittlere Lufttemperatur} &= 9^{\circ} = t, \\ \text{relative Luftfeuchtigkeit} &= 75\% \text{ oder } \varphi = 0,75, \end{aligned}$$

ausziehender Schacht:

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Luftdruck} &= 739 \text{ mm Q.S.} = p, \\ \text{mittlere Lufttemperatur} &= 25^{\circ} = t, \\ \text{relative Luftfeuchtigkeit} &= 100\% \text{ oder } \varphi = 1,00. \end{aligned}$$

Wettermenge am ausziehenden Schacht  $Q = 10000 \text{ m}^3/\text{min.}$

1. Wärmeinhalt der einziehenden Wettermenge.

Der Wassergehalt der einziehenden Wetter ist, da für  $t = 9^{\circ}$  der Sättigungsdruck  $p_s = 8,74 \text{ mm Q.S.}$  ist,

$$x = 0,622 \cdot \frac{0,75 \cdot 8,574}{748 - 0,75 \cdot 8,574} = 0,0054 \text{ kg für 1 kg Luft,}$$

also ist der Wärmeinhalt von 1 kg Luft

$$i = 0,24 \cdot 9 + 0,46 \cdot 0,0054 + 595 \cdot 0,0054 = 5,39 \text{ kcal.}$$

## 2. Wärmehalt der ausziehenden Wettermenge.

Der Wassergehalt der ausziehenden Wetter ist, da für  $t = 25^{\circ}$  der Sättigungsdruck  $p_s = 23,55$  mm Q.S. ist,

$$x = 0,622 \cdot \frac{1,0 \cdot 23,55}{739 - 1,0 \cdot 23,55} = 0,0204 \text{ kg für 1 kg Luft}$$

also ist der Wärmehalt von 1 kg Luft

$$i = 0,24 \cdot 25 + 0,46 \cdot 0,0204 \cdot 25 + 595 \cdot 0,0204 = 18,39 \text{ kcal.}$$

Die Wärmehaufnahme von 1 kg der Wettermenge ist demnach

$$i = 18,39 - 5,39 = 13 \text{ kcal.}$$

Das spezifische Gewicht der ausziehenden Wetter ist

$$\gamma = 1,138 \text{ kg,}$$

d. h.  $1 \text{ m}^3$  Wetter wiegen 1,138 kg  
und  $10000 \text{ m}^3$  „ „ 11 138 kg =  $G$ .

Die minutliche Wärmehaufnahme aus dem Grubengebäude ist daher

$$J = G \cdot i = 11138 \cdot 13 = 145000 \text{ kcal/min,}$$

das sind in der Stunde

$$145000 \cdot 60 = 8700000 \text{ kcal/h.}$$

Würde man über Tage die ausziehenden Wetter wieder von  $25^{\circ}$  abkühlen auf  $9^{\circ}$  und die Feuchtigkeit von 100% herabsetzen können auf 75%, so würde die aufgenommene Wärme wieder frei. Gäbe es eine Wärmemaschine, welche diese frei werdende Wärme in mechanische Arbeit umsetzen könnte, so gäbe die Maschine, da der theoretische Wärmeverbrauch für eine Pferdestunde mit 632 kcal anzusetzen ist, eine Leistung von

$$\frac{8700000}{632} = 13750 \text{ PS.}$$

Die ausziehenden Wetter haben infolge ihres kleineren spezifischen Gewichtes ein größeres Volumen als die einziehenden.

Im einziehenden Schacht wiegt:

$$1 \text{ m}^3 = 1,236 \text{ kg}$$

oder 1 kg hat das Volumen  $\frac{1}{1,236} = 0,81 \text{ m}^3$ .

Im ausziehenden Schacht wiegt:

$$1 \text{ m}^3 = 1,138 \text{ kg}$$

oder 1 kg hat das Volumen  $\frac{1}{1,138} = 0,88 \text{ m}^3$ .

Die Volumenvergrößerung ist also eine

$$\frac{0,88}{0,81} = 1,085 \text{ fache,}$$

d. h. wenn im ausziehenden Schacht gemessen wurde

$$Q = 10000 \text{ m}^3/\text{min,}$$

so zieht im einziehenden Schacht nur die Luftmenge

$$Q = \frac{10000}{1,085} = 9200 \text{ m}^3/\text{min}$$

ein.

## 42. Die Verdunstung auf feuchten Oberflächen.

Die Wärmeaufnahme des Wetterstromes hängt im hohen Maße von der Beschaffenheit der Oberfläche des Wetterstromes ab. Trockene Oberflächen zeigen eine geringere Wärmeabgabe als nasse. An nassen Flächen verdunstet das Oberflächenwasser, so daß die Fläche an sich gekühlt, der Wetterstrom dagegen mit Wärme beladen wird. Für die Fortleitung des Wetterstromes ist daher der trockene Wetterweg der beste. Ein solcher trockener Wetterweg ist z. B. ein langer Luttenstrang. Aber selbst warme Strecken sind nicht ungünstig, wenn sie trockene Oberflächen haben. Wenn sie auch den Wetterstrom erwärmen, so trocknen sie ihn auch.

**Beispiel:** Der Wetterstrom soll bei einem mittleren Druck von  $p = 790$  mm Q.S. mit  $15^\circ$  Anfangstemperatur und 60% Feuchtigkeit durch warme, aber trockene Strecken strömen und hierbei eine Endtemperatur von  $25^\circ$  erreichen, wie groß ist seine Wärmeaufnahme?

**Lösung:** Der Wassergehalt von 1 kg Luft ist im Anfangszustand

$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s}.$$

für  $t = 15^\circ$  ist nach Tabelle  $\varphi_s = 12,7$  mm Q.S.

$$x = 0,622 \cdot \frac{0,60 \cdot 12,7}{790 - 0,60 \cdot 12,7} = 0,00607 \text{ kg Wasser in 1 kg Luft.}$$

Der Wärmehalt von 1 kg Luft ist dann

$$\begin{aligned} i &= 0,24 \cdot t + 0,46 \cdot x \cdot t + 595 \cdot x \\ &= 0,24 \cdot 15 + 0,46 \cdot 0,00607 \cdot 15 + 595 \cdot 0,00607 = \mathbf{7,251 \text{ kcal.}} \end{aligned}$$

Der Wetterstrom soll auf dem ganzen Wege kein Wasser aufnehmen, sondern nur seine Temperatur auf  $25^\circ$  erhöhen, dann ist bei  $25^\circ$  der Wärmehalt

$$i = 0,24 \cdot 25 + 0,46 \cdot 0,00607 \cdot 25 + 595 \cdot 0,00607 = \mathbf{9,680 \text{ kcal,}}$$

d. h. der Wetterstrom hat auf dem ganzen Strömungswege nur  $9,680 - 7,251 = 2,43$  kcal je kg Wettermenge aufgenommen. Die Luft ist dadurch trockener geworden. Ihre relative Feuchtigkeit ist nur noch

$$\varphi = \frac{p}{p_s} \cdot \frac{x}{0,622 + x}.$$

für  $t = 25^\circ$  ist nach Tabelle  $p_s = 23,55$  mm Q.S.

$$\varphi = \frac{790}{23,55} \cdot \frac{0,00607}{0,622 + 0,00607} = 0,324 = \mathbf{32,4\%}.$$

Dieser Wetterstrom komme an eine Arbeitsstelle. Hier sollen die Oberflächen künstlich befeuchtet werden, so daß eine starke Verdunstung eintritt. Und nun wird die trockene Luft in hohem Maße Wärme aufnehmen können, ohne die Temperatur zu steigern.

Wie groß ist die Wärmeaufnahme, wenn der Feuchtigkeitsgehalt auf 90% steigt?

$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} = 0,622 \cdot \frac{0,90 \cdot 23,55}{790 - 0,90 \cdot 23,55} = 0,0172 \text{ kg Wasser in 1 kg Luft.}$$

Der Wärmehalt der Luft ist dann

$$i = 0,24 \cdot t + 0,46 \cdot x \cdot t + 595 \cdot x \\ = 0,24 \cdot 25 + 0,46 \cdot 0,0172 \cdot 25 + 595 \cdot 0,0172 = \mathbf{16,42 \text{ kcal.}}$$

Ohne Temperatursteigerung hat daher die Luft mit je 1 kg Wettermenge  
 $16,42 - 9,680 = 6,74 \text{ kcal}$

aufgenommen und der Arbeitsstelle entzogen.

Derselbe Vorgang spielt sich z. B. ab, wenn im Sommer das heiße Pflaster einer Straße mit Wasser besprengt wird. Man empfindet eine angenehme Abkühlung. Je heißer die Oberfläche und je trockener die Luft ist, um so besser wirkt die Verdunstungskühlung.

### 43. Die Verdunstung durch Nebeldüsen.

Man könnte bei der Sonderbewetterung die ausströmenden Wetter durch eine Nebeldüse kühlen. In Abb. 505 ist am Ausgang der Lutte eine Wasserstaubdüse angebracht. Die Düse spritzt Wasserstaub in den Wetterstrom, der Wasserstaub soll verdunsten, und da zur Verdunstung Wärme verbraucht wird, so muß diese Wärme dem Wetterstrom entzogen werden. Der Luftstrom

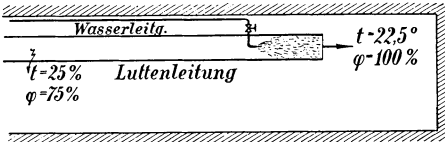


Abb. 505. Die Wirkung einer Nebeldüse.

wird kälter. Über die Wirksamkeit solcher Nebeldüsen soll eine kurze Rechnung Aufschluß geben.

Die Wetter sollen bei einem mittleren Druck  $p_s = 790 \text{ mm Q.S.}$  mit  $25^\circ$  und 75% relativer Feuchtigkeit an der Nebeldüse ankommen, die Nebeldüse soll die relative Feuchtigkeit auf 85% erhöhen, wie groß ist der Temperaturabfall?

Für  $t = 25^\circ$  ist die Sättigungsspannung  $p_s = 23,55 \text{ mm Q.S.}$ , also der absolute Wassergehalt vor der Einspritzung

$$x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p - \varphi \cdot p_s} = 0,622 \cdot \frac{0,75 \cdot 23,55}{790 - 0,75 \cdot 23,55} = 0,0142 \text{ kg für 1 kg Luft.}$$

Nach der Einspritzung ist der Wassergehalt bei 85% Feuchtigkeit

$$x = 0,622 \cdot \frac{0,85 \cdot 23,55}{790 - 0,85 \cdot 23,55} = 0,0162 \text{ kg für 1 kg Luft.}$$

Dieser Zustand, 85% relative Feuchtigkeit, würde bleiben, wenn die Luft sich nicht abkühlen würde. Sie muß sich abkühlen, da die Verdunstungswärme dem Wetterstrom entzogen wird. Die Abkühlung wird so lange anhalten, bis die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, d. h. bis  $\varphi = 1,00$  geworden ist. In diesem Zustand ist

$$x = 0,622 \cdot \frac{p_s}{p - p_s}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Sättigungsspannung  $p_s$  berechnen, welche der tiefsten Temperatur entspricht. Es wird

$$p_s = \frac{x \cdot p}{0,622 + x} = \frac{0,0171 \cdot 790}{0,622 + 0,0162} = 21,2 \text{ mm Q.S.}$$

Dieser Sättigungsspannung entspricht nach der Tabelle ungefähr die Temperatur

$$t = 23,2^{\circ},$$

also kann sich die Temperatur des Wetterstromes nur um

$$25 - 23,2 = 1,8^{\circ}$$

erniedrigen.

Der Wasserverbrauch der Nebeldüse muß möglichst klein gehalten werden, damit der Sättigungszustand bei  $25^{\circ}$  nicht erreicht wird. Er beträgt für den vorliegenden Fall

$$0,0162 - 0,0142 = 0,002 \text{ kg je kg Luft.}$$

Ist  $\gamma = 1,25 \text{ kg/m}^3$  das spezifische Gewicht des Wetterstromes und kommt die Wettermenge

$$Q = 120 \text{ m}^3/\text{min}$$

an, so ist das Luftgewicht

$$G = 120 \cdot 1,25 = 150 \text{ kg}$$

und die erforderliche Wassermenge

$$150 \cdot 0,002 = 0,3 \text{ kg} = 0,3 \text{ Liter/min.}$$

Solche Nebeldüsen müssen, sollen sie ihrer Eigenart entsprechend wirksam bleiben, tatsächlich nur Wassernebel erzeugen. Düsen, welche Wasser in großen Mengen ausspritzen, so daß der ganze Ausgangsort mit Wasser besprengt wird, wirken nicht mehr als Nebeldüsen. Die kühlende Wirkung erfolgt vielmehr durch Oberflächenverdunstung.

Im allgemeinen kann man sagen, daß Nebeldüsen nur dann Erfolg versprechen, wenn die Luft in der Luttenleitung trocken herangeführt werden kann. Sie muß aufnahmefähig für Wasserdampf sein. Der Wasserzusatz ist so zu bemessen, daß keine Übersättigung stattfindet.

#### 44. Das Katathermometer.

Die Arbeitsfähigkeit des Menschen hängt in großem Maße von den äußeren Umständen ab, unter denen er arbeiten muß. Arbeitet er in freier, kühler Luft, so ist seine körperliche Muskelleistung erheblich höher, als wenn er in einem dunklen, dumpfen Raum arbeitet. Der Körper muß bei der Arbeit Wärme ausstrahlen können, dazu ist eine Raumtemperatur erforderlich, die unter der Hauttemperatur liegt. Sonst steigt die Hautwärme beträchtlich, und es kann zu gesundheitsschädlichen Wärmestauungen kommen, von denen z. B. der Hitzschlag tödlich sein kann.

Die Bestimmung der Körpertemperatur erfolgt in der Achselhöhe, als Mittelwerte gelten hierbei  $36,5$  bis  $37^{\circ}$ . Messungen bei Bergleuten ergaben folgende Werte

Lufttemperatur . . . . .	$20,8^{\circ}$	Achselhöhlentemperatur . . .	$36,8^{\circ}$
„ . . . . .	$24 - 25^{\circ}$	„ . . . . .	$37,2^{\circ}$
„ . . . . .	$27 - 28^{\circ}$	„ . . . . .	$37,5^{\circ}$
„ . . . . .	$29^{\circ}$	„ . . . . .	$37,6^{\circ}$

Bei  $25^{\circ}$  zeigt sich demnach schon eine übernormale Körpertemperatur, so daß die physische Kraft des Arbeiters sinkt, da er durch Wärmestauung gehemmt wird.

Um die Arbeitseigenschaft eines Raumes festzustellen, benutzt man ein Instrument, das die Bewegungen der Hautwärme unter dem Einfluß von Lufttemperatur, Feuchtigkeit und Luftströmung kennzeichnen soll, das Katathermometer nach Hill, siehe Abb. 506. Es ist ein Alkoholthermometer, das unten eine Erweiterung für die Aufnahme der Alkoholflüssigkeit hat und nach oben in eine Röhre von etwa 20 cm Länge ausläuft, die sich oben wieder zylindrisch erweitert.

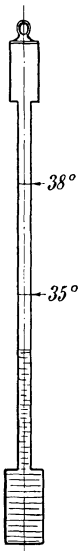


Abb. 506.  
Das Kata-  
thermo-  
meter  
nach Hill.

Die Röhre trägt zwei Marken, bezeichnet mit 38° und 35°. Vor dem Versuch erwärmt man das Thermometer langsam auf 45° bis 50°, wobei die Alkoholflüssigkeit sich ausdehnt und in das obere Gefäß strömt. Dann trocknet man das Thermometer sorgfältig ab und hängt es in dem zu untersuchenden Raum frei auf. Mit einer Stoppuhr mißt man nun genau die Zeit in Sekunden, innerhalb welcher die Alkoholsäule von 38° bis 35° sinkt.

Ist  $F$  die Konstante des Instrumentes, durch Eichung bestimmt, und  $T$  die beobachtete Sekundenzahl, so ist der Kataindex

$$H = \frac{F}{T}.$$

Die Konstante  $F$  ist der Wärmeverlust des Instruments beim Absinken des Thermometers von 38° auf 35° in Milligrammkalorien, dividiert durch die Oberfläche des Instruments in  $\text{cm}^2$  und muß für jedes Instrument durch Eichung bestimmt sein. Der Wert  $H$  ist also in Wirklichkeit die Wärmemenge, die in 1 Sekunde durch 1  $\text{cm}^2$  des Gefäßes abströmt.

Der Wärmeverlust ist bei verschiedenen Außentemperaturen und Feuchtigkeitsgraden der gleiche, nur die Geschwindigkeit des Verlierens dieser Wärmemenge ändert sich. In heißen Räumen ist die Wärmeabgabe nur langsam möglich, wir erhalten einen großen  $T$ -Wert, und da  $T$  im Nenner steht, einen kleinen  $H$ -Wert. Kleine  $H$ -Werte verraten daher ungünstige Arbeitsbedingungen.

Die Angaben des Instrumentes sind mit dem Wärmeempfinden des Menschen verglichen. Heymanns und Weiß geben nach Versuchen an ruhenden Menschen an:

$H = 5$  bis 6,5 in ruhender Luft bei mittlerer Feuchtigkeit als normal.  
unter 5 empfindet man warm, über 6,5 kalt.

$H < 5$  bei bewegter Luft als sehr warm.

$H > 9,5$  bei bewegter Luft als sehr kühl.

In Abb. 507 sind die Versuchswerte an Hand von Kurven mitgeteilt. Auf der Horizontalachse sind die Stirntemperaturen und das Wärmeempfinden des Menschen abgetragen, auf der Vertikalachse die gemessenen trockenen Katawerte. Man kann durch Umwickeln des unteren Gefäßes mit feuchtem Musselin auch die feuchten Katawerte messen, man hat aber noch keine Gesetzmäßigkeit zwischen feuchten Katawerten und subjektivem Empfinden feststellen können. Die schrägen Geraden

in Abb. 507 geben die Luftgeschwindigkeiten und die Kurven die Raumtemperaturen an.

Hat man z. B. bei  $t = 22,5^\circ$  Raumtemperatur den Katawert  $H = 7$  gemessen, so entspricht das in Abb. 507 dem Punkt  $P$ . Er zeigt, daß eine Luftgeschwindigkeit  $v = 0,50$  m/sek vorgeherrscht hat, und daß die Stirntemperatur  $32,7^\circ$  sich einstellen würde mit dem Empfinden „sehr warm“.

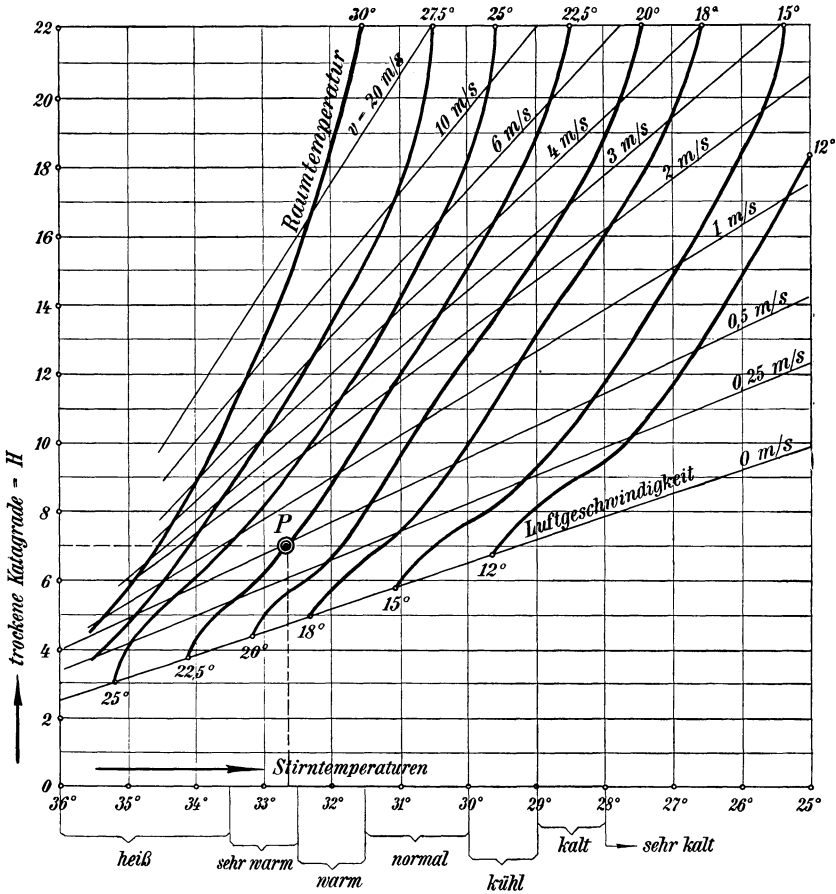


Abb. 507. Die Auswertung der Katathermometer-Messungen.

Man kann das Katathermometer auch zur Bestimmung von geringen Strömungsgeschwindigkeiten benutzen. Hill gibt hierfür folgende Formeln an:

$$\text{für } v > 1 \text{ m/sek} \dots H = (0,13 + 0,47 \sqrt{v}) \cdot (36,5 - t),$$

$$\text{,, } v < 1 \text{ m/sek} \dots H = (0,20 + 0,40 \sqrt{v}) \cdot (36,5 - t),$$

wenn  $t =$  Raumtemperatur ist.

Löst man die Hillsche Formel nach der Geschwindigkeit  $v$  auf, so wird

$$v = \left[ \frac{H}{36,5 - t - 0,13} - 0,47 \right]^2, \quad (1)$$

$$v = \left[ \frac{H}{36,5 - t - 0,20} - 0,40 \right]^2. \quad (2)$$

Das Wetterlaboratorium der Bergakademie Clausthal führte auf diesem Meßgebiet eine große Versuchsarbeit durch. Es sei auf die Schrift „Das Katathermometer als Anemometer“ von Dr.-Ing. Faber verwiesen, die zu folgenden Ergebnissen kommt:

1. Der Versuch Hills, zwischen zwei Bereichen mit verschiedenen Geschwindigkeitsstufen zu unterscheiden, ist unnötig.
2. Der Aufbau der Hill-Weißschen Formel

$$F = (A + B \sqrt{v}) \cdot (36,5 - t) \cdot T$$

wird seiner Form nach bestätigt. Die Zahlenwerte  $A$  und  $B$  schwanken jedoch innerhalb gewisser Grenzen etwas, je nach der Form des verwandten Katathermometers.

Faber fand für Instrument 402 und 197 z. B. folgende Werte:

$$\text{Instrument 402: } A = 0,129 \pm 0,002$$

$$B = 0,471 \pm 0,002$$

$$\text{Instrument 197: } A = 0,142 \pm 0,004$$

$$B = 0,454 \pm 0,003.$$

3. Von den bisher im Bergbau zur Messung kleiner Geschwindigkeiten gebräuchlichen Instrumenten ist keines brauchbar. Es kommt lediglich das Katathermometer in Frage<sup>1</sup>.

## 45. Düsen für Mengenmessungen in Rohrleitungen.

Die Düse, Abb. 508, stellt für durchströmende Flüssigkeit oder durchströmendes Gas einen Drosselquerschnitt dar, durch den das Medium mit erhöhter Geschwindigkeit strömen muß. Die Arbeit hierfür wird vom statischen Druck geleistet, es entsteht ein Druckabfall. Dieser Druckabfall ist die eigentliche Meßgröße.

<sup>1</sup> Im Maschinenlaboratorium der Bergschule Bochum ist vom Betriebsingenieur Schulz ein neuer Geschwindigkeitsmesser für 3 Meßbereiche

$$w = 0,20 - 1,00 \text{ m/sek}$$

$$w = 0,30 - 6,00 \text{ „}$$

$$w = 0,50 - 12,00 \text{ „}$$

praktisch bis zur Vollkommenheit entwickelt worden. Er beruht auf der direkten Messung der Geschwindigkeit durch den dynamischen Druck  $p_d$  nach dem Gesetz

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot \gamma_d}{\gamma}}$$

Der dynamische Druck wirkt auf zwei Flügel einer feinen Federdrehwaage. Das Instrument, das von der Fa. Fueß in Berlin-Steglitz hergestellt wird, zeigt die Geschwindigkeit unmittelbar auf einer Skala an, kann aber auch auf einer Meßtrommel schreibend eingerichtet werden.



Die Form und die Abmessungen solcher Meßdüsen sind durch die VDI-Normaldüse gegeben. Die VDI-Normaldüse hat das Öffnungsverhältnis

$$\frac{D}{d} = 2,5.$$

Sie verlangt eine gerade Rohrstrecke, vor der Düse soll diese mindestens  $L \geq 5 \cdot D$  sein. Die Anordnung am Ende einer Rohrleitung ist zulässig, jedoch bedingt die Verwendung im Einlauf z. B. als Saugöffnung oder im Anschluß an Behälter jedesmalige besondere Eichung, weil das Verhältnis

$$\frac{\text{Zuströmgeschwindigkeit } v_0}{\text{Düsengeschwindigkeit } v} = \frac{v_0}{v}$$

sich ändert

Das durchfließende Volumen ist für Wasser

$$V = \alpha \cdot f \cdot \sqrt{2gh} \text{ m}^3/\text{sek},$$

hierin bedeutet

- $\alpha$  = Durchflußzahl der Düse,
- $f = \frac{\pi}{4} d^2$  = Düsenquerschnitt in  $\text{m}^2$ ,
- $h$  = Druckabfall in Meter Wassersäule.

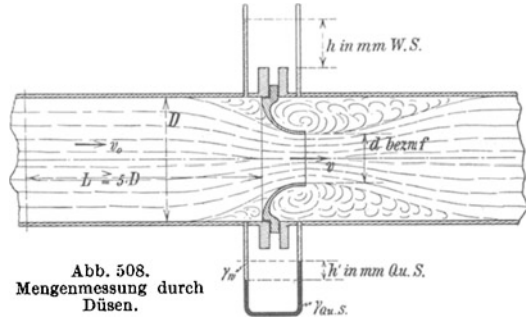


Abb. 508. Mengenumessung durch Düsen.

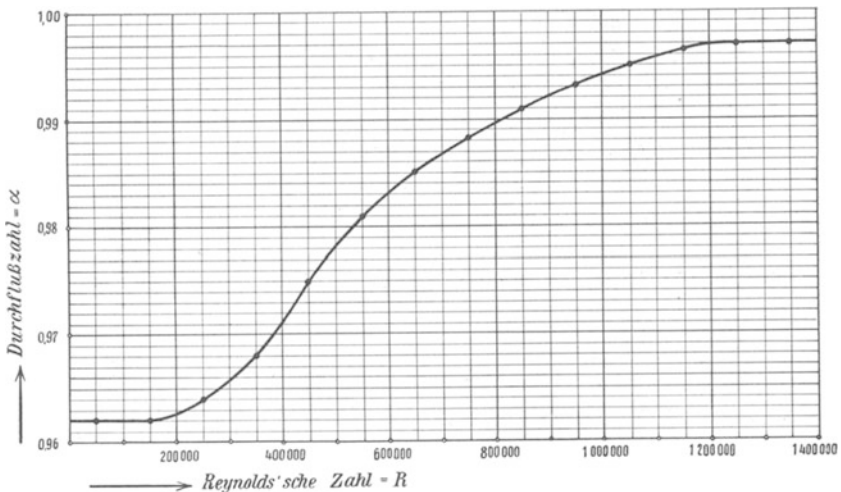


Abb. 509. Die Düsendurchflußzahl als Abhängige der Reynoldsschen Zahl.

In Abb. 509 ist der Druckabfall oben in Millimeter Wassersäule direkt gemessen, unten in der Höhe  $h'$  in Millimeter Quecksilber.

**Beispiel:** Welche Wassersäulenhöhe  $h$  entspricht einer Quecksilberhöhe  $h' = 20 \text{ mm}$ ?

**Lösung:** Mit dem spezifischen Gewicht 13,6 für Quecksilber wird

$$h_1 = 13,6 \cdot h' = 13,6 \cdot 20 = 272 \text{ mm W. S.}$$

Hiervon ist aber die Wassersäulenhöhe  $h' = 20$  mm abzuziehen, so daß der wirkliche Spannungsabfall nur die Größe hat

$$h = 272 - 20 = 252 \text{ mm W. S.}$$

Nach der neueren Strömungsforschung ist die Durchflußzahl  $\alpha$  ohne Rücksicht auf die Art der Flüssigkeit eine Funktion der Reynoldsschen Zahl, d. h. abhängig von der Größe

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu}.$$

Man ermittelt  $R$ , indem man  $v$  und  $d$  in cm einsetzt und den Wert  $\nu$  der kinematischen Zähigkeit den bekannten Kurven für Wasser und Luft entnimmt. Der Wert  $\nu$  berücksichtigt in jedem Fall die Art der Flüssigkeit und die Temperatur.

Nach neuen Versuchen von Jakob und Kretschmer<sup>1</sup> besteht für Normaldüsen mit dem Öffnungsverhältnis  $\frac{D}{d} = 2,5$  die in Abb. 509 angegebene Abhängigkeit zwischen  $\alpha$  und  $R$ . Hiernach nimmt der  $\alpha$ -Wert mit Zunahme der Zahl  $R$  auch zu, um dann bei  $R > 1250000$  wieder konstant zu bleiben.

Durchflußzahlen der Normaldüsen.

$R$	$\alpha$	$R$	$\alpha$	$R$	$\alpha$
50000	0,96 <sub>2</sub>	550000	0,98 <sub>1</sub>	1050000	0,99 <sub>5</sub>
150000	0,96 <sub>3</sub>	650000	0,98 <sub>5</sub>	1150000	0,99 <sub>6</sub>
250000	0,96 <sub>4</sub>	750000	0,98 <sub>8</sub>	1250000	0,99 <sub>7</sub>
350000	0,96 <sub>8</sub>	850000	0,99 <sub>1</sub>	1350000	0,99 <sub>7</sub>
450000	0,97 <sub>5</sub>	950000	0,99 <sub>3</sub>		

**Beispiel:** Wie groß ist die minutlich durchfließende Wassermenge, wenn bei einer Rohrleitung von  $D = 250$  mm Durchmesser mit der Normaldüse ein Druckabfall von  $h = 252$  mm W. S. gemessen wurde?

**Lösung:** Die minutliche Wassermenge ist

$$Q = 60 \cdot V = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{2gh} \text{ m}^3.$$

Für  $h = 252$  mm = 0,252 m ist

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{19,62 \cdot 0,252} = 2,22 \text{ m/sek.}$$

Um den richtigen Wert für  $\alpha$  zu finden, muß die Reynoldssche Zahl berechnet werden:

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu}.$$

Der Düsendurchmesser ist  $d = \frac{D}{2,5} = \frac{250}{2,5} = 100$  mm = 10 cm, die Düsen-  
geschwindigkeit ist  $v = 222$  cm/sek.

Unter Annahme einer Wassertemperatur von  $10^\circ$  wird nach Abb. 443 die kinematische Zähigkeit des Wassers

$$\nu = 0,0132,$$

also

$$R = \frac{222 \cdot 10}{0,0132} = 168000,$$

für  $R = 168000$  ist  $\alpha = 0,962$ ,

$$f = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 78,5 \text{ cm}^2 = 0,00785 \text{ m}^2,$$

$$Q = 60 \cdot 0,962 \cdot 0,00785 \cdot 2,22 = 1 \text{ m}^3/\text{min.}$$

<sup>1</sup> Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Forschungsheft 300, VDI-Verlag 1928.

Durch den Einbau der Düse entsteht ein Druckverlust, denn die Ausflußgeschwindigkeit aus der Düse setzt sich hinter der Düse nicht mehr vollständig in Druck um. Ist  $v_0$  die Rohrgeschwindigkeit,  $v$  die Düsendurchmesser, so ist nach der Stoßtheorie der Stoßverlust

$$\Delta h = \frac{(v - v_0)^2}{2g},$$

da  $v_0 = \frac{\alpha \cdot f}{F} \cdot v$  ist, so wird

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g} \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha \cdot f}{F} \right]^2.$$

Setzt man

$$\alpha = 1 \text{ und } \frac{f}{F} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 = 0,40^2,$$

so wird

$$\left[ 1 - \alpha \cdot \frac{f}{F} \right]^2 = [1 - 0,40^2]^2 = 0,705 \text{ und } \Delta h = 0,705 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Also wird der Verlust rund 70% der Geschwindigkeitshöhe in der Düse betragen.

In unserem Beispiel war

$$v = 2,22 \text{ m/sek und } v_0 = \frac{2,22}{2,5^2} = 0,35 \text{ m/sek.}$$

Damit wird

$$\Delta h = \frac{(v - v_0)^2}{2g} = \frac{(2,22 - 0,35)^2}{19,62} = 0,18 \text{ m} = 180 \text{ mm.}$$

Die Geschwindigkeitshöhe in der Düse war  $h = 252 \text{ mm}$ , d. h. es gehen von 252 mm Druckabfall 180 mm verloren, das sind

$$\frac{180 \cdot 100}{252} = 71 \%,$$

also derselbe Betrag, den wir oben allgemein festgestellt haben.

Nachdem sich die Düsendurchmesser  $v = 2,22 \text{ m}$  hinter der Düse wieder in die Rohrgeschwindigkeit  $v_0 = 0,35 \text{ m}$  umgesetzt hat, hat sich der statische Druck im Rohr nur um 180 mm W.S. = 0,18 m W.S. = 0,018 at vermindert. Der Druckverlust durch die Düse bleibt also sehr niedrig.

Luftmessungen mit Düsen erfolgen genau in der beschriebenen Weise. In Abb. 510 ist z. B. ein Lutenrohr mit eingebauter Düse gezeigt. Hat das Lutenrohr den Durchmesser  $D$ , dann soll der Düsendurchmesser

$$d = \frac{D}{2,5} = 0,40 \cdot D$$

sein. Als Druckmesser verwendet man ein Wassermanometer. Aus dem abgelesenen Differenzdruck  $h$  der statischen Drücke vor und hinter

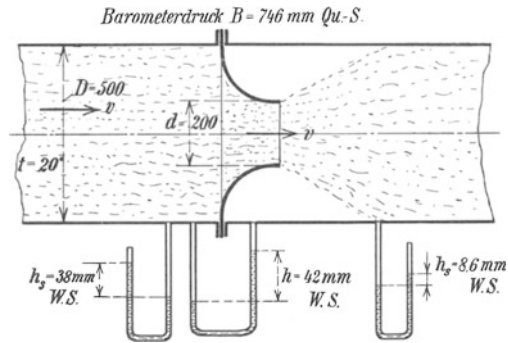


Abb. 510. Luftmessung mit Düsen.

der Düse errechnet sich die Düsegeschwindigkeit aus der Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}},$$

wenn bedeutet

$h$  = Wassersäulenhöhe in mm,

$\gamma$  = spezifisches Gewicht der Luft in  $\text{kg/m}^3$ .

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Luft ist die Beobachtung des Barometerdruckes  $p$  in mm Q.S., der Lufttemperatur  $t$  und des Feuchtigkeitsgehaltes  $\varphi$  erforderlich. Man berechnet  $\gamma$  nach der bereits bekannten Gleichung

$$\gamma = \frac{0,465 \cdot p}{T} - \frac{0,176 \cdot \varphi \cdot p_s}{T},$$

$p_s$  ist der Sättigungsdruck des Wasserdampfes in mm Q.S. bei der Lufttemperatur  $t$ ,  $T = 273^\circ + t$  ist die absolute Temperatur der Luft. Die minutliche Luftmenge ist

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} \text{ m}^3/\text{min},$$

wenn  $f$  der Düsenquerschnitt in  $\text{m}^2$  und  $\alpha$  die Durchfließzahl der Düse ist, die in bekannter Weise unter Berücksichtigung der Reynoldsschen Zahl gefunden wird.

**Beispiel:** In einer Lutte von 500 mm Durchmesser soll die Liefermenge eines Luttenventilators gemessen werden. Man hat eine Normaldüse vom Durchmesser

$$d = \frac{D}{2,5} = 0,40 \cdot D = 0,40 \cdot 500 = 200 \text{ mm}$$

eingebaut und folgende Werte gemessen: Lufttemperatur  $t = 20^\circ$ , Druckabfall in der Düse  $h = 42$  mm W.S., statischer Druck vor der Düse  $h_s = 38$  mm W.S., Barometerdruck  $B = 746$  mm.Q.S., relativer Feuchtigkeitsgrad  $\varphi = 0,75$ .

**Lösung:** Der Druck vor der Düse ist

$$p = 746 + \frac{38}{13,6} = 748 \text{ mm Q.S.}$$

Der Sättigungsdruck hat nach Tabelle S. 525 bei  $t = 20^\circ$  den Wert  $p_s = 17,391$  mm Q.S.

Das Gewicht von 1  $\text{m}^3$  Strömungsluft ist

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{0,465 \cdot p}{T} - \frac{0,176 \cdot \varphi \cdot p_s}{T} \\ &= \frac{0,465 \cdot 748}{293} - \frac{0,176 \cdot 0,75 \cdot 17,391}{293} \\ &= 1,188 - 0,008 = 1,180 \text{ kg/m}^3, \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 42}{1,180}} = 26,5 \text{ m/sek} = 2650 \text{ cm/sek.}$$

Die kinematische Zähigkeit der Luft ist nach dem Kurvenbild Abb. 465 bei  $20^\circ$   $\nu = 0,16$ , also ist die Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{2650 \cdot 20}{0,16} = 331000.$$

Nach dem Kurvenbild Abb. 509 ist für  $R = 331000$  der Wert  $\alpha = 0,967$ , ferner ist

$$f = \frac{\pi}{4} \cdot 0,20^2 = 0,0314 \text{ m}^2$$

also ist die minutliche Luftmenge

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} = 60 \cdot 0,967 \cdot 0,0314 \cdot 26,5 = 48,3 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Das Querschnittsverhältnis zwischen Düse und Rohr ist

$$\frac{f}{F} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0,40^2 = 0,16,$$

also ist die Luftgeschwindigkeit im Rohr

$$v_0 = 0,16 \cdot v = 0,16 \cdot 26,5 = 4,23 \text{ m/sek.}$$

**Beispiel:** Wie groß ist der Druckverlust, den der Strömungsvorgang im Rohr durch die Düse erleidet und unter welchem statischen Druck strömt die Luft hinter der Düse weiter, wenn vor der Düse  $h_s = 38 \text{ mm W.S.}$  ist?

**Lösung:** Der Druckverlust einer Normaldüse ist nach früherem etwa 70% der Geschwindigkeitshöhe in der Düse, also ist der Druckverlust

$$\Delta h = 0,70 \cdot h = 0,70 \cdot 42 = 29,4 \text{ mm W.S.}$$

Die Luft wird daher hinter der Düse nur mit dem statischen Druck

$$h_s - \Delta h = 38 - 29,4 = 8,6 \text{ mm W.S.}$$

weiterströmen. In diesem Fall ist also, da der Druck im Rohr an sich sehr niedrig ist, der Druckverlust sehr bedeutend, und man würde diese Düsenmeßeinrichtung nicht als Dauerkontrolle für die Luftlieferung verwenden dürfen.

Für Luftmessungen in Druckluftleitungen dagegen eignet sich die Düse auch für die Dauerkontrolle des Preßluftverbrauchs, denn in diesem Fall ist der Druck in der Leitung an sich sehr hoch. Auch hierfür ein Beispiel.

**Beispiel:** In Abb. 511 soll der Druckluftverbrauch in einer Druckluftleitung von 50 mm Durchmesser gemessen werden. Man baut eine Normaldüse mit dem Durchmesser  $d = 0,40 \cdot D = 0,40 \cdot 50 = 20 \text{ mm}$  Durchmesser ein, mißt den Druckabfall  $h$  in der Düse an einem Wassertmanometer, ferner die Druckluftspannung  $p$  in ata und die Temperatur  $t$  der Druckluft.

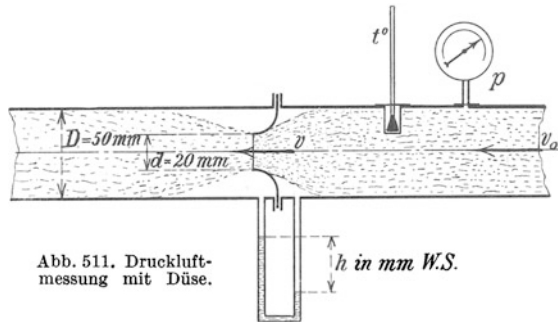


Abb. 511. Druckluftmessung mit Düse.

Wie groß ist die stündliche Druckluftmenge  $Q$ , wenn folgende Ablesungen gemacht sind?

$$h = 140 \text{ mm W.S.}, \quad p = 5,2 \text{ ata}, \quad t = 22^\circ.$$

**Lösung:** Man berechnet das Gewicht von 1 m<sup>3</sup> Druckluft nach der Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{R \cdot T}$$

und setzt ein

$$\begin{aligned} p &= 5,2 \text{ ata} = 52000 \text{ kg/m}^2, \\ T &= 273^\circ + t^\circ = 273 + 22 = 295^\circ, \\ R &= 29,272 = \text{Gaskonstante für Luft}, \\ \gamma &= \frac{52000}{29,272 \cdot 295} = 5,95 \text{ kg/m}^3, \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 140}{5,95}} = 21,55 \text{ m/sek} = 2155 \text{ cm/sek}.$$

Die kinematische Zähigkeit der Luft ist nach dem Kurvenbild Abb. 465

$$\text{für } 1 \text{ ata und } 22^\circ \dots \nu = 0,162,$$

$$\text{also ist sie für } 5,2 \text{ ata und } 22^\circ \dots \nu = \frac{0,162}{5,2} = 0,0312.$$

Die Reynoldssche Zahl hat demnach den Wert

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{2155 \cdot 2}{0,0312} = 138000.$$

Nach dem Kurvenbild Abb. 509 ist für  $R = 138000$  der Wert  $\alpha = 0,962$ , ferner ist der Düsenquerschnitt

$$f = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 0,02^2 = 0,000314 \text{ m}^2.$$

Die stündliche Druckluftmenge ist

$$Q = 3600 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2g h}{\gamma}} \\ = 3600 \cdot 0,962 \cdot 0,000314 \cdot 21,55 = 23,4 \text{ m}^3/\text{Stunde}.$$

Es ist üblich, den Druckluftverbrauch der Maschinen immer in  $\text{m}^3$  Saugluft des Kompressors anzugeben. Da die Druckluft die Spannung  $p = 5,2$  ata hat, so ist ihr Saugluftvolumen bei  $p = 1$  ata

$$Q = \frac{5,2}{1} \cdot 23,4 = 121,5 \text{ m}^3/\text{Stunde}.$$

Wie groß ist der Spannungsverlust, den der Einbau der Düse bringt?

Der Spannungsverlust beträgt bekanntlich 70% der Düsen Geschwindigkeitshöhe

$$\Delta h = 0,70 \cdot h = 0,70 \cdot 140 = 98 \text{ mm W.S.} \\ = 0,098 \text{ m W.S.} = 0,0098 \text{ at} \sim 0,01 \text{ at}.$$

Hinter der Düse ist die Druckluftspannung demnach

$$4,20 - 0,01 = 4,19 \text{ atü.}$$

Der Spannungsabfall ist also so gering, daß man die Düse für die Dauerkontrolle des Luftverbrauchs ohne wirtschaftlichen Schaden verwenden kann. Die Rohrgeschwindigkeit der Druckluft ist in unserm Beispiel nur

$$v_0 = 0,16 \cdot v = 0,16 \cdot 21,55 = 3,45 \text{ m/sek.}$$

## 46. Stauränder für Mengmessungen in Rohrleitungen.

Gasmessungen spielen heute in technischen Betrieben eine außerordentliche Rolle. Auch für Zechen werden, wenn die Ferngasversorgung mit Kokereigas sich durchsetzt, Gasmengmessungen in großem Umfang notwendig werden. Die auf den Gaswerken üblichen großen Volumengasmesser reichen für Gasmengen, wie sie die geplanten Zentralkokereien liefern werden, nicht mehr aus. Es wiegt z. B. einer der größten Stationsgasmesser für eine tägliche Maximalleistung von  $96000 \text{ m}^3$  bei einem Trommelinhalt von  $30 \text{ m}^3$  bereits etwa 19 t. Diese Gasmenge ist aber für die Zechengaserzeugung noch klein zu nennen. Eine Kokerei von  $2000 \text{ t}$  Kohlendurchsatz im Tage erzeugt je nach der Kohlenbeschaffenheit bis zu  $700000 \text{ m}^3$  Gas in 24 Stunden, hiervon werden etwa  $250000 \text{ m}^3$  für die Unterfeuerung der Öfen selbst verbraucht, so daß  $450000 \text{ m}^3$  täglich abgegeben werden können. Das sind

$$V = \frac{450000}{24 \cdot 3600} = 5,21 \text{ m}^3/\text{sek}.$$

Bei einem Rohrdurchmesser von 500 mm mit  $F = 0,1963 \text{ m}^2$  Querschnitt würde dann das Gas in der Rohrleitung mit

$$v = \frac{V}{F} = \frac{5,21}{0,1963} = 26,6 \text{ m/sek}$$

strömen. Zum Vergleich sei der tägliche Gasverbrauch einer Großstadt von 500000 Einwohner angeführt. Er beträgt nur etwa 150000 m<sup>3</sup> je Tag.

Der Staurand, Abb. 512, stellt in gleicher Weise wie die Düse für das strömende Medium einen Drosselquerschnitt dar, der einen Druckabfall erzeugt. Dieser Druckabfall ist die Meßgröße für die Gasmengenmessung.

Der Staurand wird hergestellt, indem die Öffnung auf der dem Strom abgekehrten Seite unter 45° abgedreht wird, wobei der Rand der Meßöffnung nicht breiter als  $\frac{2}{1000}$  des Rohrdurchmessers sein soll. Die eigentliche Scheibendicke ist auf die Meßgenauigkeit ohne Einfluß. Sie beträgt bei größeren Scheiben etwa 10 mm, bei kleineren 3 bis 4 mm. Wegen der

leichten Einbaumöglichkeit und Auswechselbarkeit und der geringen Herstellungskosten, der Staurand kann ohne Schwierigkeit im eigenen Betrieb hergestellt werden, wird der Staurand meistens der Düse vorgezogen. Das Verhältnis des Stauquerschnitts zum Rohrquerschnitt kann beliebig gewählt werden, jedoch soll man nach den Meßerfahrungen von Jakob und Kretzschmer<sup>1</sup> Öffnungsverhältnisse über 0,5 nur bei Rohrdurchmessern von etwa 500 mm aufwärts verwenden, da bei kleinen Rohrdurchmessern und großen Öffnungsverhältnissen infolge Einflusses der Rauigkeit die Meßgenauigkeit sinkt.

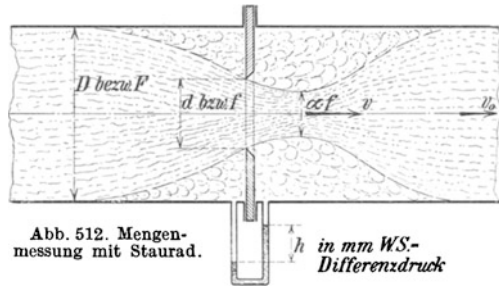


Abb. 512. Mengenumessung mit Staurand.  $h$  in mm WS-Differenzdruck

leichter gewählt werden, jedoch soll man nach den Meßerfahrungen von Jakob und Kretzschmer<sup>1</sup> Öffnungsverhältnisse über 0,5 nur bei Rohrdurchmessern von etwa 500 mm aufwärts verwenden, da bei kleinen Rohrdurchmessern und großen Öffnungsverhältnissen infolge Einflusses der Rauigkeit die Meßgenauigkeit sinkt.

Ist  $d$  = Durchmesser der Staurandöffnung,  
 $D$  = Durchmesser (lichte Weite) des Rohres,

so ist das Öffnungsverhältnis

$$m = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{f}{F}$$

Man wählt also folgende Öffnungsverhältnisse:

für Rohre bis zu 500 mm Durchmesser . .  $m = 0,1$  bis  $0,5$ ,  
 „ „ von 500 mm und mehr . . . .  $m = 0,1$  bis  $0,7$ .

Die minutliche Gasmenge ist

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} \text{ m}^3/\text{min},$$

<sup>1</sup> Prof. Dr.-Ing. Jakob, M. u. Dr.-Ing. Fr. Kretzschmer: Die Durchflußzahlen von Normaldüsen und Normalstaurändern für Rohrdurchmesser von 100 bis 1000 mm. Forschungsheft Nr. 311. VDI-Verlag 1928.

hierin bedeutet:

- $f$  = Staurandquerschnitt in  $\text{m}^2$ ,  
 $\alpha$  = die Durchflußzahl des Staurands,  
 $h$  = Druckabfall in mm W. S.,  
 $\gamma$  = Gewicht von  $1 \text{ m}^3$  Gas vor dem Staurand.

Bei großem Druckabfall kann man mit der mittleren Dichte des Gases rechnen, dann wird

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}} \text{ m}^3/\text{min}.$$

$\gamma_1$  = Gewicht von  $1 \text{ m}^3$  Gas vor dem Staurand,

$\gamma_2$  = „ „  $1 \text{ m}^3$  „ hinter „ „

Im allgemeinen werden aber die  $h$ -Werte so gering sein, daß man mit der Dichte des Gases vor dem Staurand rechnen kann. In Zweifelsfällen sind Kontrollrechnungen anzustellen.

Die Durchflußzahl  $\alpha$  ist eine Erfahrungszahl. Sie ist nach den umfangreichen Versuchen von Jakob und Kretschmer, die im Forschungsheft 311 niedergelegt sind, eine Funktion des Öffnungsverhältnisses  $m$  und der Reynoldsschen Zahl  $R$ . Je größer das Öffnungsverhältnis, um so größer wird der  $\alpha$ -Wert, er sinkt dagegen mit Zunahme des Rohrdurchmessers, so daß für die üblichen Rohrdurchmesser von 100 bis 1000 mm die Werte besonders bestimmt werden müßten. Der  $\alpha$ -Wert wächst aber mit Zunahme der Reynoldsschen Zahl  $R$ . Die Werte sind in Abb. 513 bis 520 graphisch mitgeteilt.

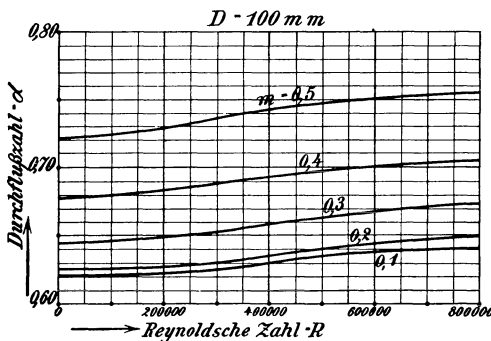


Abb. 513. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 100-mm-Rohr.

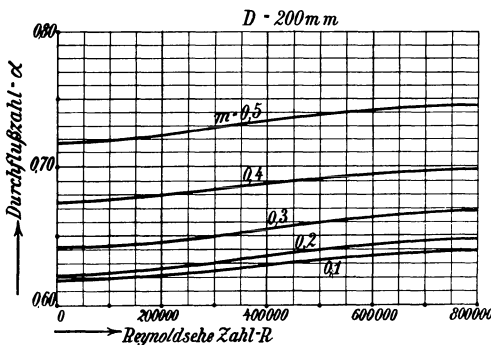


Abb. 514. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 200-mm-Rohr.

einer Staurandmessung in einem Luttenrohr von 500 mm Durchmesser soll die vom Luttenventilator gelieferte Wettermenge bestimmt werden, wenn das spezifische Gewicht der Luft  $\gamma = 1,180 \text{ kg/m}^3$  ist.

**Lösung:** Die minutliche Wettermenge ist

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot v \text{ m}^3/\text{min}.$$



Die Luftgeschwindigkeit  $v$  im Staurandquerschnitt berechnet sich aus dem gemessenen Differenzdruck

$$h = 42 \text{ mm W. S.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g h}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 42}{1,180}}$$

$$= 26,4 \text{ m/sek} = 2640 \text{ cm/sek.}$$

Die Durchflußzahl  $\alpha$  ist eine Funktion der Reynoldsschen Zahl, also muß  $R$  bestimmt werden.

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

Nach dem Kurvenbild Abb. 465 ist bei  $20^\circ$  gemessener Wassertemperatur die kinematische Zähigkeit der Luft  $\nu = 0,16$ .

$$R = \frac{2640 \cdot 35}{0,16} = 578000.$$

Nach Abb. 517 ist beim Rohrdurchmesser  $D = 500 \text{ mm}$  und dem Öffnungsverhältnis  $\left(\frac{350}{500}\right)^2 = 0,49 = m$  des Staurandes für  $R = 578000$

$$\alpha = 0,718,$$

ferner ist

$$f = \frac{\pi}{4} \cdot 0,35^2 = 0,0962 \text{ m}^2.$$

Hiermit wird die Wettermenge

$$Q = 60 \cdot \alpha \cdot f \cdot v = 60 \cdot 0,718 \cdot 0,0962 \cdot 26,4 = 109 \text{ m}^3/\text{min.}$$

Wie groß ist der Druckverlust im Staurand?

Die Geschwindigkeit im Staurand wird hinter dem Staurand wieder in Druck umgesetzt, allerdings mit Verlust. Der Druckverlust berechnet sich nach der Stoßtheorie zu

$$\Delta h = \frac{(v - v_0)^2}{2g}$$

$v$  = Luftgeschwindigkeit im Querschnitt  $f$  des Staurandes,

$v_0$  = Luftgeschwindigkeit im Querschnitt  $F$  des Rohres

$$v_0 = \frac{f}{F} \cdot v = m \cdot v, \quad \Delta h = \frac{v^2}{2g} \cdot (1 - m),$$

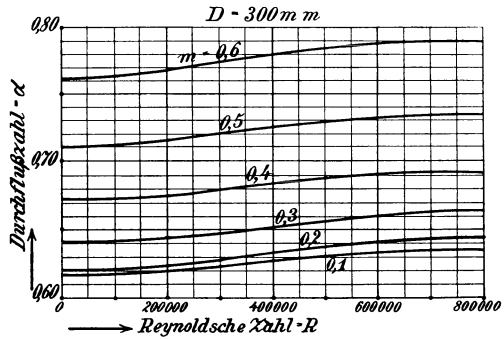


Abb. 515. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 300-mm-Rohr.

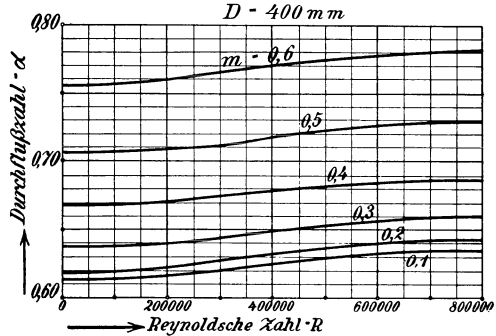


Abb. 516. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 400-mm-Rohr.

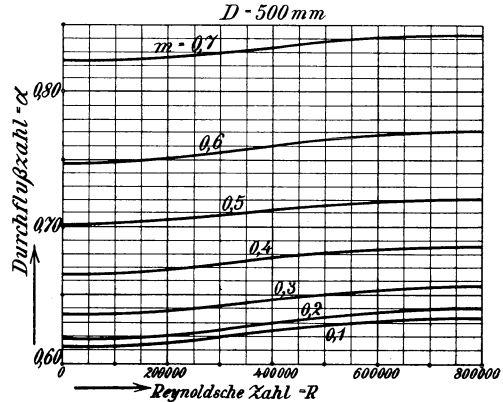


Abb. 517. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 500-mm-Rohr.

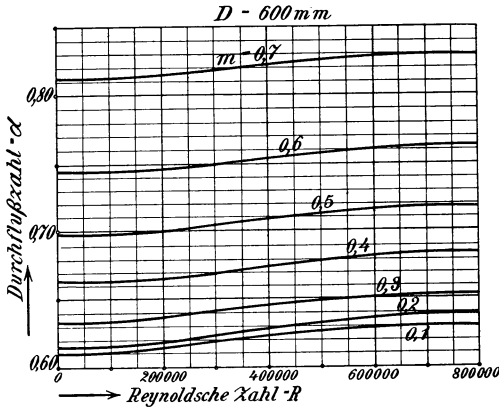


Abb. 518. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 600-mm-Rohr.

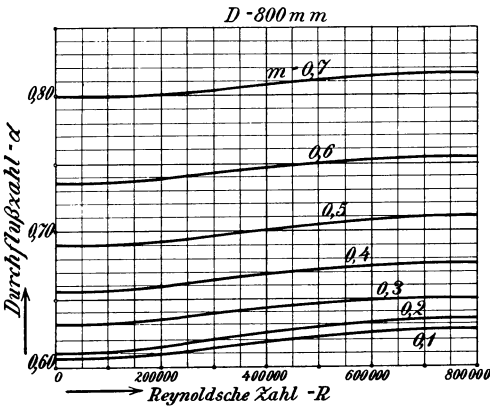


Abb. 519. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 800-mm-Rohr.

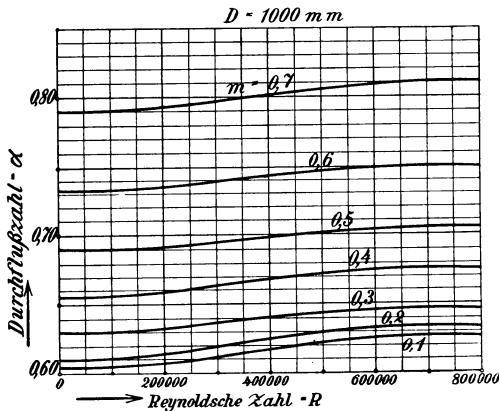


Abb. 520. Die Durchflußzahlen für Stauränder im 1000-mm-Rohr.

mit  $m = 0,49$  wird

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g} (1 - 0,49)$$

$$= 0,51 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. h. 51% der Geschwindigkeitshöhe im Staurand geht verloren, während 49% zurückgewonnen werden.

**Merkregel:** Der Druckrückgewinn eines Staurandes ist numerisch gleich seinem Öffnungsverhältnis.

Auf unser Beispiel, Abb. 521 angewendet, erhalten wir folgende im Druckdiagramm eingezeichnete Werte:

Vor dem Staurand war der statische Druck

$$h_s = 24 \text{ mm W.S.}$$

gemessen. Der Druckverlust im Staurand ist

$$h_a = 42 \text{ mm W.S.},$$

so daß hinter dem Staurand eine Depression entsteht von der Größe

$$h_1 = h_s - h_a = 24 - 42$$

$$= -18 \text{ mm W.S.}$$

Der Druckrückgewinn beträgt 49% des Staurandabfalls, also

$$\text{Druckrückgewinn} = 0,49 \cdot h_a$$

$$= 0,49 \cdot 42 = 20,6 \text{ mm W.S.}$$

Der Druckgewinn liefert nach der Druckumsetzung den statischen Druck hinter dem Staurand

$$h_2 = -18 + 20,6 = +2,6 \text{ mm W.S.}$$

Nach Versuchen von Kretzschmer hat sich die Druckumsetzung etwa in einer Entfernung von

$$L = 5 \cdot D$$

vom Staurand bereits vollzogen. Von dieser Stelle ab würden also die Wetter mit einem Überdruck von 2,5 mm W. S. weiterströmen.

Dieses Meßergebnis ist außerordentlich lehrreich. Es

bestätigt die bei der Strahlpumpe gezeigte Erscheinung, daß bei niedrigem Druck vor einer **Querschnittseinschnürung** ein Vakuum hinter der Einschnürung entstehen muß, so daß man an dieser Stelle infolge der Saugwirkung des Vakuums Luft oder Wasser in den Strahl hereinsaugen kann.

**Beispiel:** Eine Zeche soll den Wärmebedarf feststellen, den die Kokerei zur Verkokung von 1 kg feuchter Kokskohle verbraucht. Der stündliche Kohlendurchsatz beträgt bei 11% Wassergehalt 26684 kg.

**Lösung:** Die Zeche baut in die Heizgasleitung, welche 450 mm Durchmesser hat, einen Staurand von 288,5 mm Durchmesser ein. Es wird ein Staudruck von  $h = 12$  mm W.S. gemessen, ferner ist die Gastemperatur  $20^\circ$  und das spezifische Gewicht des Heizgases  $\gamma = 0,4716$  kg/m<sup>3</sup>.

Die stündliche Heizgasmenge ist

$$Q = 3600 \cdot \alpha \cdot f \cdot \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}}$$

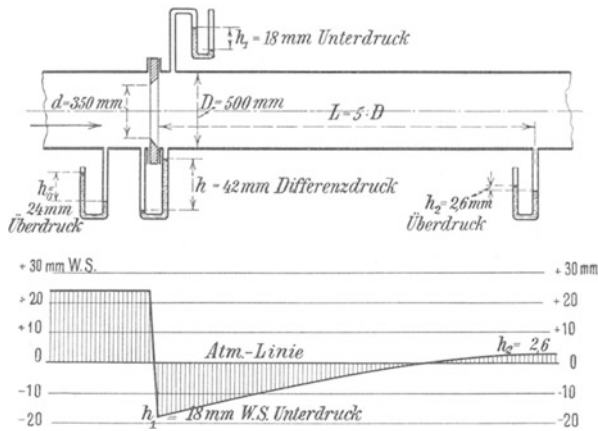


Abb. 521. Wettermengenmessung in der Lutte durch Staurand.

Es muß zunächst die Geschwindigkeit  $v$  im Staurand ermittelt werden.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 12}{0,4716}} = 22,4 \text{ m/sek} = 2240 \text{ cm/sek.}$$

Zur Bestimmung der Durchflußzahl  $\alpha$  muß das Öffnungsverhältnis des Staurandes und die Reynoldssche Zahl errechnet werden.

$$m = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{288,5}{450}\right)^2 = 0,41.$$

Nach dem Kurvenbild Abb. 465 ist bei  $20^\circ$  die kinematische Zähigkeit der Luft  $\nu = 0,16$  und das spezifische Gewicht der Luft  $\gamma_l = 1,18$  kg/m<sup>3</sup>, also ist

$$\frac{\gamma}{\gamma_l} = \frac{0,4716}{1,18} = 0,40.$$

Die kinematische Zähigkeit des Gases ist dann

$$\nu = \frac{0,16}{0,40} = 0,40.$$

Hiermit wird

$$R = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{2240 \cdot 28,85}{0,40} = 160000.$$

Für  $R = 160\,000$  findet man nach Abb. 517 als Durchflußzahl

$$\alpha = 0,668.$$

Der Staurandquerschnitt ist  $f = \frac{\pi}{4} \cdot 0,2885^2 = 0,0653 \text{ m}^2$ . Mit diesen Werten wird

$$Q = 3600 \cdot 0,668 \cdot 0,0653 \cdot 22,4 = 3510 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Der Heizwert des Gases war gemessen zu

$$H = 3841 \text{ kcal},$$

also ist der stündliche Wärmeverbrauch

$$W = Q \cdot H = 3510 \cdot 3841 = 13\,500\,000 \text{ kcal}.$$

Bei einem stündlichen Kohlendurchsatz von  $G = 26\,684 \text{ kg}$  ist der Wärmebedarf für 1 kg feuchte Kohle

$$\frac{W}{G} = \frac{13\,500\,000}{26\,684} = 507 \text{ kcal/kg}.$$

## Anhang.

## Tabellen.

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>50</b>	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	<b>50</b>
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
<b>60</b>	36 00	216 000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	<b>60</b>
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
<b>70</b>	49 00	343 000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	<b>70</b>
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
<b>80</b>	64 00	512 000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	<b>80</b>
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
<b>90</b>	81 00	729 000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	<b>90</b>
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
<b>100</b>	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	<b>100</b>

Grad	Sinus							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
Cosinus								

Grad	Cosinus							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	Sinus							



Grad	Tangens							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	Cotangens							

Grad	Cotangens							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	Tangens							

**Reibungszahlen für gleitende Reibung in Abhängigkeit vom Flächendruck.**

Flächen- druck kg/cm <sup>2</sup>	Schweißeisen auf Schweißeisen	Stahl auf Gußeisen	Flächen- druck kg/cm <sup>2</sup>	Schweißeisen auf Schweißeisen	Stahl auf Gußeisen
	$\mu =$			$\mu =$	
8,8	0,140	0,166	31,5	0,395	0,354
13,1	0,250	0,300	34,1	0,403	0,356
15,8	0,271	0,333	36,8	0,409	0,357
18,3	0,285	0,340	39,4	Flächen an- gegriffen	0,358
21,0	0,297	0,344	42,2		0,359
23,6	0,312	0,347	44,6		0,367
26,2	0,350	0,351	47,3		0,403
27,4	0,376	0,353	—		—

**Traglager-Reibungszahlen für Stahl auf Lagermetall.**

Flächen- druck kg/cm <sup>2</sup>	für die Umfangsgeschwindigkeiten $v$ in m/sek					
	0,5	1	2	5	10	18
	Reibungsziffer $\mu$ für 50° Lagertemp. und 20° Raumtemp.					
2	0,010	0,013	0,020	0,028	0,035	0,070
6	0,006	0,008	0,010	0,015	0,018	0,033
10	0,004	0,005	0,007	0,011	0,011	0,025
14	0,003	0,004	0,006	0,009	0,010	0,021
18	0,003	0,004	0,005	0,008	0,009	0,019
22	0,003	0,004	0,005	0,007	0,009	0,018
26	0,003	0,003	0,004	0,007	0,008	0,017
30	0,003	0,003	0,004	0,006	0,008	0,016

**Reibungszahlen für Backenbremsen.**

$\mu$  ist fast unveränderlich für Umfangsgeschwindigkeiten  $v = 1$  bis 20 m/sek und für Flächenpressungen . . . . .  $p = 0,5$  bis 10 kg/cm<sup>2</sup>

Brems- scheibe	$\mu$ für Bremsklötze mit Längsfasern auf abgedrehten Brems scheiben					
	Buche	Eiche	Pappel	Ulme	Weide	Aluminium mit Ferrodo
Gußeisen. Schmiede- eisen	0,29—0,37	0,30—0,34	0,35—0,40	0,36—0,37	0,46—0,47	0,30—0,35
	0,35—0,54	0,51—0,40	0,65—0,60	0,60—0,49	0,63—0,60	0,35—0,45

Werte  $e^{\mu\alpha}$  für Bandbremsen.

Umspannungswinkel			Werte $e^{\mu\alpha}$ für folgende $\mu$ -Werte						
$\alpha^0$	Bogenmaß	$n$ -fache Umschlingung	0,10	0,18	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
45 <sup>0</sup>	0,25· $\pi$	0,125	1,08	1,15	1,17	1,22	1,26	1,37	1,48
90 <sup>0</sup>	0,50· $\pi$	0,250	1,17	1,30	1,37	1,48	1,60	1,90	2,20
180 <sup>0</sup>	1,00· $\pi$	0,500	1,37	1,76	1,87	2,20	2,60	3,50	4,80
240 <sup>0</sup>	1,33· $\pi$	0,665	1,52	2,12	2,31	2,84	3,51	5,32	8,13
250 <sup>0</sup>	1,39· $\pi$	0,695	1,55	2,20	2,40	2,99	3,71	5,75	8,90
260 <sup>0</sup>	1,45· $\pi$	0,725	1,58	2,27	2,49	3,12	3,93	6,20	9,78
270 <sup>0</sup>	1,50· $\pi$	0,750	1,60	2,34	2,57	3,25	4,10	6,60	10,5
280 <sup>0</sup>	1,55· $\pi$	0,775	1,63	2,40	2,64	3,38	4,31	7,00	11,5
290 <sup>0</sup>	1,61· $\pi$	0,805	1,66	2,49	2,75	3,54	4,57	7,58	12,6
300 <sup>0</sup>	1,67· $\pi$	0,835	1,69	2,57	2,86	3,71	4,83	8,16	13,8
310 <sup>0</sup>	1,72· $\pi$	0,860	1,72	2,64	2,95	3,86	5,06	8,70	15,1
320 <sup>0</sup>	1,78· $\pi$	0,890	1,75	2,74	3,06	4,03	5,35	9,38	16,4
330 <sup>0</sup>	1,83· $\pi$	0,915	1,78	2,82	3,16	4,21	5,61	10,00	17,8
340 <sup>0</sup>	1,89· $\pi$	0,945	1,81	2,92	3,28	4,41	5,95	10,7	19,5
360 <sup>0</sup>	2· $\pi$	1,00	1,87	3,10	3,50	4,80	6,60	12,3	23,1

Werte  $e^{\mu\alpha}$  für Riemenreibung.

$\alpha^0$	$n$ -fache Umschlingung	Holzscheiben $\mu = 0,47$	Gußeisenscheiben		
			sehr gefettet $\mu = 0,12$	wenig gefettet $\mu = 0,28$	feucht $\mu = 0,38$
36 <sup>0</sup>	0,1	1,34	1,01	1,19	1,27
72 <sup>0</sup>	0,2	1,81	1,16	1,42	1,61
108 <sup>0</sup>	0,3	2,43	1,25	1,69	2,05
144 <sup>0</sup>	0,4	3,26	1,35	2,02	2,60
153 <sup>0</sup>	0,425	3,51	1,38	2,11	2,76
162 <sup>0</sup>	0,45	3,78	1,40	2,21	2,93
171 <sup>0</sup>	0,475	4,07	1,43	2,31	3,11
180 <sup>0</sup>	0,5	4,38	1,46	2,41	3,30
189 <sup>0</sup>	0,525	4,71	1,49	2,52	3,50
198 <sup>0</sup>	0,55	5,63	1,51	2,63	3,72
216 <sup>0</sup>	0,6	5,88	1,57	2,81	4,19
252 <sup>0</sup>	0,7	7,90	1,66	3,43	5,32
288 <sup>0</sup>	0,8	10,60	1,83	4,09	6,75
324 <sup>0</sup>	0,9	14,30	1,97	4,87	8,57
360 <sup>0</sup>	1,0	19,20	2,12	5,81	10,90

Werte  $e^{\mu\alpha}$  für Drahtseile auf Eisentrommeln.

$\alpha^0$	$\mu = 0,18$	$\mu = 0,25$	$\alpha^0$	$\mu = 0,18$	$\mu = 0,25$
36 <sup>0</sup>	1,11	1,17	189 <sup>0</sup>	1,81	2,28
72 <sup>0</sup>	1,25	1,37	198 <sup>0</sup>	1,86	2,37
108 <sup>0</sup>	1,40	1,60	216 <sup>0</sup>	1,97	2,57
144 <sup>0</sup>	1,57	1,87	252 <sup>0</sup>	2,21	3,00
153 <sup>0</sup>	1,62	1,95	288 <sup>0</sup>	2,47	3,51
162 <sup>0</sup>	1,66	2,03	324 <sup>0</sup>	2,75	4,11
171 <sup>0</sup>	1,71	2,11	360 <sup>0</sup>	3,10	4,81
180 <sup>0</sup>	1,76	2,19	540 <sup>0</sup>	5,50	10,55
			720 <sup>0</sup>	9,60	23,14

## Mittelwerte der gleitenden Reibung für feuchte Schienen.

Fahrgeschw. km/h	=	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\mu$	=	0,25	0,20	0,16	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10	0,10	0,09

## Rollende Reibung.

Rollende Körper	Hebelarm $f$ in cm
Pockholz auf Pockholz . . . . .	0,0547
Ulmenholz auf Pockholz . . . . .	0,081
Eisen auf Eisen oder Stahl . . . . .	0,005
Stahlkugeln in Kugellagern . . . . .	0,0009 bis 0,0015

## Reibungsziffern der Gesamtreibung für Fahrzeuge.

Gleise der Straßenbahnen im Mittel . . . . .	$\mu_g = 0,006$ bis $0,008$
Gute Asphaltstraße . . . . .	$= 0,010$
Gutes Steinpflaster . . . . .	$= 0,020$
Gutes Holzpflaster . . . . .	$= 0,018$
Chaussierte Straße, in gutem Zustand . . . . .	$= 0,023$
mit Staub bedeckt . . . . .	$= 0,028$
mit Schlamm bedeckt . . . . .	$= 0,035$
Erdwege, gute bis schlechte . . . . .	$= 0,08$ bis $0,16$
Loser Sand . . . . .	$= 0,15$ bis $0,30$
Automobile, Gummi auf Asphalt . . . . .	$= 0,021$ bis $0,031$

## Zugfestigkeit, Streckgrenze, Elastizitätszahl und spezifisches Gewicht.

Baustoff	Zugfestigkeit $K_z$ in kg/cm <sup>2</sup>	Streckgrenze $\sigma_s$ in kg/cm <sup>2</sup>	Elastizitäts- modul $E = \frac{1}{\alpha}$ in kg/cm <sup>2</sup>	Spezif. Gewicht $\gamma$ in g/cm <sup>3</sup>
Guß-Werkstoffe				
Grauguß . . . . .	1 800—2 400	—	750 000 bis 1 050 000 2 150 000	7,80 7,85 8,00
Temperguß . . . . .	2 400—3 600	—		
Stahlguß . . . . .	3 800—6 000	2 200—2 600		
Unlegierter Stahl				
Schweißisen . . . . .	3 300—4 000	1 800	2 000 000 2 100 000 2 150 000 2 200 000 2 200 000	7,60
Flußisen . . . . .	3 400—5 000	2 000		
Flußstahl . . . . .	5 000—20 000	3 000		
Federstahl, gehärtet . . . . .	13 500—15 000	12 500—14 000		
Werkzeugstahl . . . . .	6 000—6 800	4 200—5 200		
Legierter Stahl				
Nickelstahl . . . . .	4 800—6 000	3 400—5 000	2 150 000 2 100 000 — 2 100 000	7,80—8,00
Chrom-Nickelstahl . . . . .	8 500—10 000	7 200		
Nickelstahl, nicht rostend . . . . .	6 000—7 000	3 000—4 000		
Chromstahl . . . . .	8 000	—		
Leicht-Metalle				
Elektron . . . . .	1 200—4 500	600—3 000	41 000—48 000	1,80
Silumin . . . . .	1 800—2 000	600—800	—	2,60
Duralumin . . . . .	3 200—4 800	2 000—3 000	500 000	2,80
Aluminium, rein . . . . .	900—1 500	440	685 000	2,70
Verschiedene Metalle				
Kupferbleche . . . . .	2 000—2 300	—	1 150 000	8,90
Zink . . . . .	2 000—2 300	—	—	6,9—7,2
Zinn . . . . .	350	—	960 000	7,2—7,3
Rotguß . . . . .	2 000	—	900 000	8,5
Messing . . . . .	1 500	—	800 000	8,6
Hartblei . . . . .	250	50—100	50 000	11,2—11,3

**Bruchfestigkeit, Proportionalitätsgrenze, Elastizitätszahl verschiedener Hölzer.**

Art der Beanspruchung	Bruchfest.	Proport.-Grenze	Elastizitätszahl	Bruchfest.	Proport.-Grenze	Elastizitätszahl
	$\sigma_B$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_P$ kg/cm <sup>2</sup>	$E = \frac{1}{\alpha}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_B$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_P$ kg/cm <sup>2</sup>	$E = \frac{1}{\alpha}$ kg/cm <sup>2</sup>
	Kiefer $\gamma = (0,42-0,60)$			Eiche ( $\gamma = 0,61-1,05$ )		
Zug } parallel	790	—	90 000	965	475	108 000
Druck } zur Faser	280	155	96 000	345	150	103 000
Biegung . . . . .	470	200	108 000	600	215	100 000
Schub . . . . .	45	—	—	75	—	—
	Fichte ( $\gamma = 0,40-0,59$ )			Buche ( $\gamma = 0,79-0,85$ )		
Zug } parallel	750	—	92 000	1340	580	180 000
Druck } zur Faser	245	150	99 000	320	100	169 000
Biegung . . . . .	420	230	111 000	670	240	128 000
Schub . . . . .	40	—	—	85	—	—

**Druckfestigkeit, zulässiger Druck, spezifisches Gewicht der Steine.**

	Basalt	Porphyr	Granit	Kalkstein	Sandstein	Ziegelstein
Druckfestigkeit kg/cm <sup>2</sup>	1000—2000	500—2000	800—2000	400—1600	250—1800	100—300
zul. Druck kg/cm <sup>2</sup>	25—60	20—40	25—60	15—30	10—20	8—18
spez. Gewicht .	2,7—3,1	2,5—2,7	2,6—2,8	2,2—3,0	2,2—2,5	1,5—1,7

**Zulässige Spannungen für Eisen und Stahl.**

Art der Festigkeit und Belastung		Schweiß-eisen	Flußeisen	Flußstahl	Stahlguß	Gußeisen
		kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
Zug $\sigma_{zul.}$	I	900	900—1500	1200—1800	600—1200	300
	II	540	540—900	720—1080	360—720	180
	III	450	450—750	600—900	300—600	150
Druck $\sigma_{zul.}$	I	900	900—1500	1200—1800	900—1500	900
	II	540	540—900	720—1080	540—900	540
	III	—	—	—	—	—
Biegung $\sigma'_{zul.}$	I	900	900—1500	1200—1800	750—1200	—
	II	540	540—900	720—1080	450—720	—
	III	450	450—750	600—900	375—600	—
Schub $\tau_{zul.}$	I	720	720—1200	960—1440	480—960	300
	II	430	430—720	580—860	290—580	180
	III	360	360—600	480—720	240—480	180
Drehung $\tau'_{zul.}$	I	360	600—1200	900—1440	480—960	—
	II	220	360—720	540—860	290—580	—
	III	180	300—600	450—720	240—480	—

**Grubenseile aus blankem oder verzinktem Gußstahldraht**

(nach Klöckner-Werke A.G. Düsseldorf).

Machart  $7 \times 61$  und  $1$  Hanfseele.

Durchmesser mm	Umfang engl. Zoll	tragender Metall- querschnitt mm <sup>2</sup>	Draht- stärke mm	Gewicht kg/m	rechnerische Bruchfestig- keit bei	
					150 kg/mm <sup>2</sup> kg	180 kg/mm <sup>2</sup> kg
8	1	24	0,27	0,23	3 600	4 325
9	1 1/8	30	0,30	0,28	4 450	5 350
10	1 1/4	36	0,33	0,34	5 400	6 500
11	1 3/8	45	0,37	0,43	6 750	8 200
12	1 1/2	53	0,40	0,50	8 000	9 500
13	1 5/8	61	0,43	0,57	9 200	11 000
14	1 3/4	73	0,47	0,69	10 900	13 100
15	1 7/8	83	0,50	0,78	12 400	14 800
16	2	93	0,53	0,88	13 900	16 700
17	2 1/8	107	0,57	1,01	16 100	19 300
18	2 1/4	119	0,60	1,12	17 800	21 400
19	2 3/8	131	0,63	1,24	19 700	23 600
20	2 1/2	148	0,67	1,40	22 200	26 700
21	2 5/8	161	0,70	1,53	24 200	29 100
22	2 3/4	176	0,73	1,66	26 400	31 600
23	2 7/8	196	0,77	1,85	29 400	35 200
24	3	211	0,80	2,00	31 700	38 000
26	3 1/4	249	0,87	2,35	37 500	44 900
28	3 1/2	285	0,93	2,70	42 800	51 200
30	3 3/4	330	1,00	3,12	49 600	59 200
32	4	400	1,10	3,77	60 100	71 800
34	4 1/4	436	1,15	4,12	65 500	78 500
36	4 1/2	476	1,20	4,49	71 400	85 700
40	5	603	1,35	5,68	90 300	108 400

Seilscheibendurchmesser nicht unter 100facher Drahtstärke, aber nicht unter 1 m.

**Förderkorbgewichte.**

Zahl der Etagen		Förderkorb mit Zwischengeschirr kg	Zahl der Etagen		Förderkorb mit Zwischengeschirr kg
	Wagen			Wagen	
1	1	840—1030	4	4	3 500—4 000
1 oder 2	2	1 200—1 900	4	8	5 000—7 000
2	4	2 800—3 200	6	6	4 200—5 000
3	3	2 550—2 900	8	8	5 000—6 000
3	6	4 500—6 000	4	16	9 800—11 800

**Förderwagen genormt für 600 mm Spur.**

750 l Inhalt und	535 kg Eigengewicht
875 l „ „	615 kg „
1000 l „ „	720 kg „

## Schüttgewichte für 1000 l.

Steinkohle, westf. Gas- und Flammkohle . . .	720 kg
„ westf. Fettkohle . . . . .	750 „
„ westf. Magerkohle . . . . .	765 „
„ westf. Preßkohlen . . . . .	1090 „
„ Wurmrevier, Flammkohle . . . . .	765 „
„ Wurmrevier, Magerkohle . . . . .	775 „
„ oberschlesische . . . . .	745 „
„ niederschlesische . . . . .	705 „
„ Saarkohle . . . . .	750 „
„ englische Kohle. . . . .	735 „
„ schottische Gaskohle . . . . .	675 „
Koks, westfälischer . . . . .	450 „
„ Saar- . . . . .	435 „
„ Gaskoks . . . . .	350 „
Braunkohle, lufttrocken und in Stücken 650—780 „	
Torf, lufttrocken. . . . .	325—410 „
Torf, feucht. . . . .	550—650 „
Berge. . . . .	1900—2100 „
Bruchsteine, im Mittel . . . . .	2000 „
Ziegelsteine, gewöhnliche . . . . .	1375—1500 „
Ziegelsteine, Klinker . . . . .	1600—1800 „
Mörtel aus Sand und Kalk . . . . .	1800 „
Sand und Schutt, trocken . . . . .	1330 „
feuchter Flußsand . . . . .	1770 „
Lehm, feucht . . . . .	1650 „
Lehm, trocken . . . . .	1500 „

## Normalien für Grubenschienen.

	Abmessungen und Gewichte						Momente		Belastungen $P$ und Durchbiegungen bei $k_0 = 1000 \text{ kg/cm}^2$					
	Höhe	Fußbreite	Kopfbreite	Stegstärke	Länge	Gewicht	$J$	$W$	$l = 60 \text{ cm}$		$l = 75 \text{ cm}$		$l = 100 \text{ cm}$	
	mm	mm	mm	mm	m	kg/m			$P$	$f$	$P$	$f$	$P$	$f$
1	65	50	25	5	5	7	52,16	15,34	1022	0,4	818	0,62	614	1,12
2	75	58	30	6	5	10	99,29	25,75	1717	0,35	1373	0,55	1030	0,98
3	80	66	35	7	7	12	129,1	31,17	2077	0,33	1662	0,51	1247	0,91
4	80	70	38	9,5	7	14	152,2	37,26	2486	0,33	1987	0,52	1490	0,92
5	93	80	40	8	8	16	253,3	52,3	3487	0,28	2789	0,44	2092	0,78
6	93	83	43	11	8	18	273,4	56,6	3773	0,28	3018	0,44	2264	0,78
7	100	82	44	10	8	20	346	66,2	4414	0,26	3531	0,41	2648	0,73
8	115	90	53	12	8	24	569	98,0	6550	0,24	5250	0,37	3920	0,66

Raddruck bei Druckluft-Lokomotiven (schwerster Bauart) . . . . . 2,4 t  
 Raddruck bei elektrischen Lokomotiven (schwerster Bauart) . . . . . 2,8 t



**Die Reibungszahl  $\lambda$  für Rohrleitungen als Abhängige der Reynoldssehen Zahl  $R$ .**

$R$	$\lambda$	$R$	$\lambda$	$R$	$\lambda$
200000	0,01490	700000	0,01095	2 200000	0,00824
220000	1460	750000	1077	2 300000	813
240000	1430	800000	1060	2 400000	804
260000	1400	850000	1042	2 500000	796
280000	1376	900000	1025	2 600000	789
300000	0,01352	950000	1012	2 700000	782
320000	1330	1 000000	0,01000	2 800000	775
340000	1308	1 100000	0,00980	2 900000	768
360000	1292	1 200000	960	3 000000	0,00761
380000	1276	1 300000	940	3 100000	755
400000	0,01260	1 400000	920	3 200000	749
420000	1245	1 500000	906	3 300000	743
440000	1230	1 600000	893	3 400000	738
460000	1216	1 700000	880	3 500000	733
480000	1202	1 800000	867	3 600000	727
500000	0,01190	1 900000	854	3 700000	722
550000	1160	2 000000	0,00842	3 800000	717
600000	0,01130	2 100000	833	3 900000	712
650000	1112			4 000000	707

Kommen höhere Zahlen als  $R = 4\,000\,000$  vor, so rechne man die zugehörigen  $\lambda$ -Werte nach der Formel

$$\lambda = 0,3164 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{R}}$$

aus.

**Heise-Herbst-Fritzsche, Lehrbuch der Bergbaukunde**

mit besonderer Berücksichtigung des Steinkohlenbergbaues.

Band I: Gebirgs- und Lagerstättenlehre. Das Aufsuchen der Lagerstätten (Schürf- und Bohrarbeiten). Gewinnungsarbeiten. Die Grubenbaue. Grubenbewetterung. Siebente Auflage. Im Auftrage der Westfälischen Berggewerkschaftskasse in Bochum neubearbeitet von Prof. Dr. Dr.-Ing. **C. H. Fritzsche**, Aachen. Mit 576 Abbildungen im Text und einer farbigen Tafel. XX, 667 Seiten. 1938.

Gebunden RM 22.50

Band II: Grubenausbau. Schachtabteufen. Förderung. Wasserhaltung. Grubenbrände. Atmungs- und Rettungsgeräte. Von Prof. Dr.-Ing. e. h. **F. Heise** und Prof. Dr.-Ing. e. h. **F. Herbst**. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 864 Abbildungen im Text. XIX, 805 Seiten. 1932.

Gebunden RM 24.—

---

**Lehrbuch der Bergwerksmaschinen** (Kraft- und Arbeits-

maschinen). Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Bearbeitet von Dr. **H. Hoffmann** †, Bergschule Bochum, und Dipl.-Ing. **C. Hoffmann**, Bergschule Bochum. Mit 547 Textabbildungen. VIII, 402 Seiten. 1931.

Gebunden RM 21.60

---

**Die Entstehung der Gesteine.** Ein Lehrbuch der Petrogenese.

Bearbeitet von Dr. **Tom F. W. Barth**, Professor an der Universität Oslo, Dr. **Carl W. Correns**, Professor an der Universität Göttingen, Dr. **Pentti Eskola**, Professor an der Universität Helsinki. Herausgegeben von Dr. **Carl W. Correns**. Mit 210 Textabbildungen. VIII, 422 Seiten. 1939.

RM 30.—; gebunden RM 33.—

---

**Geologie des Niederrheinisch-Westfälischen Steinkohlengebietes.** Im Auftrage der Westfälischen Berggewerkschafts-

kasse zu Bochum verfaßt von Professor Dr. phil. habil. **Paul Kukuk**. Mit Beiträgen zahlreicher Fachgenossen. Text- und Tafelband. Mit 743 Abbildungen und 48 Tabellen im Text, einem Titelbild und 14 zum Teil farbigen Tafeln. XVII, IV, 706 Seiten. 1938.

Richtpreis gebunden RM 66.—

---

**Einführung in die deutsche Bodenkunde.** Von Prof. **Jo-**

**hannes Walther**, Halle. (Verständliche Wissenschaft, Band 26.) Mit 30 Original-Zeichnungen und -Karten. VIII, 172 Seiten. 1935. Gebunden RM 4.80

---

**Erdöl.** Von **Karl Krejci-Graf**, Berlin. (Verständliche Wissenschaft, Band 28.)

Mit 30 Abbildungen. VIII, 164 Seiten. 1936. Gebunden RM 4.80

---

**Kohle.** Von Dozent Dr. **K. A. Jurasky**, Freiberg i. Sa. (Verständliche Wissenschaft, Bd. 45.) Mit etwa 65 Abbildungen. Etwa 175 Seiten.

Erscheint im Frühjahr 1940.

**Die Drahtselle in der Praxis.** Von Obergeringieur Dipl.-Ing. **Richard Meebold**, Saarbrücken. Mit 75 Abbildungen im Text. IV, 68 Seiten. 1938. RM 6.60

---

**Leitfaden der Tiefbohrtechnik.** Von Tiefbohr-Ingenieur **Paul Stein**. Dritte, neu ausgearbeitete und erweiterte Auflage von „Verfahren und Einrichtungen zum Tiefbohren“. Mit 61 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. IV, 52 Seiten. 1932. RM 4.20

---

**Sprengstoffe und Zündmittel** mit besonderer Berücksichtigung der Sprengarbeit unter Tage. Von Bergassessor Dr. Ing. e. h. **C. Beyling** und Dr. phil. **K. Drekopf**, Dortmund-Derne. Mit 137 Textabbildungen. VIII, 465 Seiten. 1936. Gebunden RM 36.—

---

**Grundlagen der Errichtung elektrischer Anlagen in explosionsgefährdeten Betrieben.** Von Dr.-Ing. **Dietrich Müller-Hillebrand**. Mit 92 Textabbildungen. VIII, 160 Seiten. 1940. RM 15.—; gebunden RM 16.80

---

**Bekämpfung hoher Grubentemperaturen.** Von Prof. Dr. mont. **B. Stočes** und Prof. Dr. mont. **B. Černik**, Ingenieure in Příbram. Mit 110 Textabbildungen und 2 Tafeln. XII, 311 Seiten. 1931. Gebunden RM 36.—

---

**Die Flotation in Theorie und Praxis.** Von Dr.-Ing. **W. Luyken**, Düsseldorf, und Prof. Dr.-Ing. **E. Bierbrauer**, Leoben. Mit 123 Textabbildungen und 40 Zahlentafeln sowie einem englisch-deutschen und deutsch-englischen Fachwörterverzeichnis. VIII, 284 Seiten. 1931. Gebunden RM 26.10

---

**Lehrbuch der Bergwirtschaft.** Von Prof. Dipl.-Bergingenieur **K. Kegel**, Freiberg. Mit 167 Abbildungen und 20 Formularen im Text und auf einer Tafel. XV, 653 Seiten. 1931. Gebunden RM 43.20

---

**Kohlenwirtschaftsorganisationen.** Von **Oswig Lüttig**, stellv. Geschäftsführer des Reichskohlenrates. III, 43 Seiten und 15 Anlageblätter. 1937. RM 4.80

---

---