Suite de théorèmes et de résultats concernant la géométrie du triangle

Émile Lemoine

Extrait des Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences
Congrès de Paris, 1900 [séance du 4 août]

Traduction française établie par Pierre L. Douillet

Table des matières

French translation of Lemoine 1900
Pierre L. Douillet

Foreword

This book was written by Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912) for the 1900 Congress of the Association française pour l'avancement des sciences. A digitalized image of this work can be obtained at the Library Preservation Office, University of Michigan :
http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ACA0898

In 1900, Lemoine was leading an attempt to reform French spelling... and his book was printed in strict compliance with this "next coming novlangue". More than a century afterwards, the net result is rather irritating. On the one hand, typesetters have paid a great attention to rewrite carefully each occurrence of ordinary words like "théorème", "hyperbole" etc. by their tentative counterparts "téorème", "iperbole" etc.

On the other hand, typesetters have dramatically paid less attention to a correct spelling of mathematical formulae. Instead of the standard scientific level of at most an error per book, there are about two mathematical misspelling per page. In addition to these specificities, mathematical usages have evolved with time and nowadays, a "length" is a length, not a segment nor any other thing that "an efficient reader should guess by himself". In several occasions, looking at the answer is the only way to guess what the question could mean.

For all these reasons, the Lemoine's book has fallen in a dark oblivion. Nevertheless, it contains many interesting things, among them a method to specify a pair of orthogonal directions (e.g. the axes of a conic). In the French translation that follows, each statement has been checked for mathematical correctness and each formula has been re-obtained from a formal computing tool. Corrections to the original are indicated by footnotes. A table of contents is given, and titles have been added where they were missing.

To provide a better usefulness, each object, point, line or cubic is tagged with its nowadays usual inventory number. Kimberling's numbers X(..) are used for points, Gibert's numbers K.. for cubics while lines are tagged by the Kimberling's number of their tripolar, noted T(..). For example T(1) is the anti-orthic axis. All these inventory numbers are summarized in an index.

We hope that such a critic edition will provide a better access to the work of an author that is credited to be a founder of the modern geometry of Triangles.

Pierre L. Douillet, 2009-12-04

Introduction (Émile Lemoine)

Le mémoire que nous présentons ici n'est pas le développement d'un sujet unique, c'est une série de théorèmes dont beaucoup sont indépendants de ceux qui les entourent, ou encore ce sont de simples résultats de calculs exécutés, mais qui ont pour lien commun l'intérêt qu'ils peuvent présenter dans l'étude de la géométrie du triangle.

Soit ABC le triangle de référence. Les coordonnées utilisées sont les coordonnées barycentriques[1]. Quand nous passerons aux coordonnées cartésiennes CB sera l'axe des x, CA celui des y ;
I, I_a, I_b, I_c, O les centres des cercles tri-tangents et du cercle circonscrit ;
r, r_a, r_b, r_c, R leurs rayons ;
δ, δ_a, δ_b, δ_c seront[2] $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$;
d, d_a, d_b, d_c seront les longueurs OI, OI_a, OI_b, OI_c ;
$\widehat{\omega}$ l'angle de Brocard;
ω, ω' les points de Brocard, direct $a^2b^2 : b^2c^2 : c^2a^2$ et rétrograde $c^2a^2 : a^2b^2 : b^2c^2$, leur milieu étant X(39) ;
K, G, H seront le point de Lemoine X(6), le barycentre X(2), l'orthocentre X(4) ;
Φ le point X(194)$=a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2$, etc. ;
$A(\rho)$ ou $A(MN)$ signifiera un cercle de centre A et de rayon ρ ou MN ;
S sera la surface du triangle ABC.

1 Théorèmes auxquels s'applique la transformation continue

J'ai exposé la théorie de la transformation continue dans divers mémoires, entre autres dans celui que j'ai présenté au Congres de Marseille à l'AFAS (1891) et j'en ai depuis fréquemment fait des applications ; mais la méthode a une telle fécondité, est d'un usage si facile, elle a une telle importance dans la géométrie du triangle que je veux en donner ici de nouveaux exemples. Je me suis aperçu, depuis 1891, que les mêmes résultats pourraient s'obtenir avec la théorie des cycles et des demi-droites de Laguerre, seulement la transformation continue est plus immédiate, plus mécanique pour ainsi dire et semble faite exprès pour élargir les vues dans la géométrie du triangle.

1.1 X(3083), X(3084)

Soit un triangle ABC, M_a le point sur BC tel que la somme des distances de M_a à C et à la droite CA égale la somme des distances de M_a à B et à BA, M_b, M_c les points analogues sur CA et sur AB. Les triangles ABC et $M_aM_bM_c$ admettent comme perspecteur le point $M = 2R{+}a : 2R{+}b : 2R{+}c$=X(3083).

Si au lieu du point M_a on considère le point M'_a tel que la différence de ses distances à C et à CA, égale la différence de ses distances à B et à BA, etc., les triangles ABC et $M'_aM'_bM'_c$ admettent pour perspecteur le point $M' = 2R-a : 2R-b : 2R-c$=X(3084).

La droite MM' se confond avec la droite IG. On a :

$$\overrightarrow{IM} \div \overrightarrow{IG} = \frac{3R}{3R+p}, \overrightarrow{IM'} \div \overrightarrow{IG} = \frac{3R}{3R-p}, \overrightarrow{IM} \div \overrightarrow{GM} = \frac{-3R}{p}, \overrightarrow{IM'} \div \overrightarrow{GM'} = \frac{3R}{p}$$

et la division I, G, M, M' est harmonique. Le point $6R^2-ap$ est le milieu de MM' tandis que X(519)$=2p-3a$, etc. est[3] le point à l'infini de la droite.

En appliquant la transformation continue en A on trouve immédiatement les théorèmes correspondants pour les points :

$$\begin{aligned} M_A &= 2R-a : 2R+b : 2R+c \\ M'_A &= 2R+a : 2R-b : 2R-c \end{aligned}$$

et les propriétés analogues à celles des points M et M'. Il y a aussi évidemment des points $M_B, M'_B; MC, M'_C$.

[1] Le document original utilisait des coordonnées trilinéaires (NdT).
[2] La quantité δ est définie de façon à ce que :
$$a^2-2\,ab-2\,ac-2\,bc+c^2+b^2 = -8\,\delta\,S/\,(a+b+c). \qquad \text{(NdT)}$$
[3] *erreur dans l'original :* ce point était présenté comme le milieu de MM'.

1.2 La droite T(57)

La droite T(57), tripolaire du point X(57), a pour équation : $\sum x\,(p-a)\,/a = 0$. Cette droite est parallèle à l'axe antiorthique, qui est T(1) . La table suivante donne les distances à cette droite d'un certain nombre de points.

kim	*bar*	$\lvert X\Delta\rvert$
1	a	$\dfrac{Rr}{d}$
3	$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)$	$\dfrac{(R-r)\,R}{d}$
8	$b-a+c$	$\dfrac{p^2+r^2-12\,Rr}{2d}$
7	$\dfrac{1}{b+c-a}$	$\dfrac{\left(p^2+r^2+4\,Rr\right)r}{2d\,(4\,R+r)}$
6	a^2	$\dfrac{2\,(4\,R+r)\,Rr^2}{d\,(p^2-r^2-4\,Rr)}$
2	1	$\dfrac{p^2+r^2-8\,Rr}{6d}$
9	$a\,(b-a+c)$	$\dfrac{\left(p^2-2\,r^2-8\,Rr\right)R}{d\,(4\,R+r)}$
57	$\dfrac{a}{b-a+c}$	$\dfrac{3Rr^2}{d\,(2\,R-r)}$
661	$\left(b^2-c^2\right)a$	$\dfrac{2Rr}{d}$
55	$(b-a+c)\,a^2$	$\dfrac{(2\,R-r)\,Rr}{d\,(R+r)}$

Le point X(661) appartient à l'axe antiorthique T(1) et à la droite T(65)[1] : $\sum x/a = 0$. Le point X(55) est le pôle de l'axe antiorthique par rapport au cercle circonscrit. La transformation continue multiplie ces résultats.

1.3 Opérateur cevadiff

Soient dans un triangle ABC deux points $P = p : q : r$ et $U = u : v : w$ non situés sur les côtés du triangle. Je considère les triangles ceviens $\mathcal{T}_1 = A_P B_P C_P$ et $\mathcal{T}_2 = A_U B_U C_U$ et je construis $A_X = B_P C_p \cap B_U C_u$ etc. Alors le triangle de référence ABC et le triangle $\mathcal{T}_3 = A_X B_X C_X$ admettent pour perspecteur le point X :

$$X = pu\,(qw-rv) : qv\,(rv-pu) : rv\,(pu-qw)$$

Pour $P = I$, $Q = G$ le point obtenu est X(513)=$a\,(b-c) : b\,(c-a) : c\,(a-b)$. La droite AA_X est parallèle à la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures (axe antiorthique). La droite $B_X C_X$ a pour équation $y \div b\,(c-a) + z \div c\,(a-b) = 0$, etc. La transformation continue donne le théorème relatif aux bissectrices extérieures.

1.4 Polaires par rapport aux ellipses de Steiner

L'hyperbole inscrite qui a même centre X(115)=$\left(b^2-c^2\right)^2$, etc. que l'hyperbole de Kiepert a pour équation[2] :

$$\sqrt{\frac{x}{b^2-c^2}} \pm \sqrt{\frac{y}{c^2-a^2}} \pm \sqrt{\frac{z}{a^2-b^2}} = 0$$

Les deux coniques ont même point de Gergonne (perspecteur), qui est le point à l'infini X(523)=b^2-c^2, etc. de l'axe orthique T(4). La polaire du point de Lemoine X(6) par rapport à l'hyperbole de Kiepert est la droite d'Euler.

Les polaires d'un point $U = u : v : w$ par rapport aux coniques inscrite et circonscrite de Steiner sont $\sum (v+w-u)\,x = 0$ et $\sum (v+w)\,x = 0$. Elles ont parallèles, et leur point commun à l'infini est $v-w : w-u : u-v$.

[1] *erreur dans l'original :* équation indiquée : $\sum x^2/a = 0$.

[2] *erreur dans l'original :* cette équation ne s'écrit pas $\sqrt{\frac{x}{b^2-c^2}} + \sqrt{\frac{y}{c^2-a^2}} + \sqrt{\frac{z}{a^2-b^2}} = 0$.

Les polaires du point de Lemoine sont l'axe orthique T(4) $\sum x\left(b^2+c^2-a^2\right)=0$ et sa parallèle T(83) $\sum x\left(b^2+c^2\right)=0$; point à l'infini X(523)=$b^2-c^2:c^2-a^2:a^2-b^2$. Les polaires de H sont T(253) et T(264) ; point à l'infini X(525)= $\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)$, etc. Les polaires de O sont T(69) $\sum x/\left(b^2+c^2-a^2\right)=0$ et sa parallèle T(95) $\sum ax\cos\left(B-C\right)=0$; point à l'infini : X(525) (comme H).

Les polaires de I par rapport à ces deux coniques sont les droites T(7) $\sum x\left(b+c-a\right)=0$ et sa parallèle T(86) $\sum x\left(b+c\right)=0$ qui ont pour point à l'infini X(514)=$b-c:c-a:a-b$. La transformation continue donne les polaires de I_a, I_b, I_c.

1.5 Périmètres découpés par des parallèles

Si par le point $M=u:v:w$ du plan d'un triangle on mène des parallèles aux trois cotés, chacune d'elles forme un triangle avec les deux autres côtés ; les périmètres de ces triangles sont proportionnels à $v+w:w+u:u+v$. Cela posé, si M est le point de Nagel X(8)=$b+c-a:c+a-b:a+b-c$, les périmètres de ces triangles sont proportionnels à a,b,c. Si M est le point X(192)= $ca+ab-bc$, etc, ils sont proportionnels à $1/a$, $1/b$, $1/c$. Théorèmes analogues déduits par transformation continue. Qu'est-ce qu'un périmètre négatif ?

Si M est le point X(69)=$\cos A/a$, etc, ces périmètres sont proportionnels à $a^2:b^2:c^2$. Si M est le point de Lemoine X(6), ils sont proportionnels à b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2. Si M est le barycentre X(2), la somme des carrés de ces périmètres est minima. Pour ces trois derniers théorèmes, la transformation continue les reproduit sans modifications.

Par le point de Gergonne X(7)=$1/(b+c-a)$, etc d'un triangle ABC, je mène des parallèles à 2 cotés ; la somme des segments de ces parallèles compris entre le point de Gergonne et ces deux côtés c'est pas clair est constante et égale à $2p\left(2R+r\right)/\delta$. La transformation continue donne d'autres théorèmes analogues.

1.6 Cercles d'Apollonius

Le cercle d'Apollonius correspondant à BC a pour diamètre les pieds des bissectrices issues de A. Il passe par A et par les deux points isodynamiques X(15) et X(16). Son équation est :

$$-a^2c^2y^2+b^2a^2z^2-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)xy+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)xz=0$$

Ce cercle recoupe l'axe antiorthique T(1) au point :

$$\begin{aligned} P_A &= a\left(-2\,R+r+r_a\right):b\left(-R-r+r_b\right):c\left(-R-r+r_c\right) \\ &\simeq \begin{pmatrix} -a\left(-b^3-2\,cab+c^2b+a^2b+a^2c+b^2c-c^3\right) \\ b^2\left(c^2+a^2-ca-b^2\right) \\ c^2\left(a^2+b^2-ab-c^2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Les triangles ABC et $P_AP_BP_C$ admettent le point P=X(36) pour perspecteur. Ce point est défini par :

$$\begin{aligned} P &= a\left(-R-r+r_a\right):b\left(-R-r+r_b\right):c\left(-R-r+r_c\right) \\ &= a^2\left(b^2+c^2-bc-a^2\right):b^2\left(c^2+a^2-ca-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2-ab-c^2\right) \end{aligned}$$

   et est situé sur[1] T(81) $\sum x\left(b+c\right)/a=0$. Cette droite est parallèle à l'axe antiorthique T(1).

2. La somme des distances algébriques[2] de P aux trois cotés est égale à r.

3. Les points I, O, P sont en ligne droite.

4. La distance de P à l'axe antiorthique est Rr/d.

5. On a : $OP=R^2/d$, $IP=2Rr/d$ et en grandeur et en signe : $\overrightarrow{IP}\div\overrightarrow{OP}=2r/R$.

[1] *erreur dans l'original :* l'équation était $\sum\left(b+c\right)/a=0$.

[2] *erreur dans l'original :* la somme porte sur les coordonnées trilinéaires normales et non sur les distances euclidiennes (positives).

Ces théorèmes se multiplient immédiatement par transformation continue. Ainsi en transformant en A, les cercles d'Apollonius sont invariants. Les cercles correspondant aux cotés BC, CA, AB coupent respectivement la droite $-x/a+y/b+z/c=0$ aux points[1] :

$$\begin{aligned} P_A^A &= a\,(-2\,R-r-r_a):b\,(R-r_a-r_c):c\,(R-r_a-r_b) \\ P_B^A &= a\,(-R+r_a-r):b\,(2R+r_a-r_c):c\,(R-r_a-r_b) \\ P_C^A &= a\,(-R+r_a-r):b\,(R-r_a-r_c):c\,(2R+r_a-r_b) \end{aligned}$$

1. Les triangles ABC et $P_A^A P_B^A P_C^A$ admettent pour perspecteur le point P^A défini par :

   $$\begin{aligned} P^A &= a\,(-R+r_a-r):b\,(R-r_a-r_c):c\,(R-r_a-r_b) \\ &= a^2\left(b^2+c^2-bc-a^2\right):b^2\left(c^2+a^2+ca-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2+ab-c^2\right) \end{aligned}$$

   ce point est situé sur $x\,(b+c)\,/a+y\,(a-c)\,/b+z\,(a-b)\,/c=0$. Cette droite est parallèle à $\Delta^A:-x/a+y/b+z/c=0$.

2. La somme des distances algébriques de P^A aux trois côtés est égale à r_a.
3. Les points I_a, O, P^A sont en ligne droite.
4. La distance de P^A à Δ^A est $-Rr_a/d_a$.
5. On a : $OP^A=R^2/d_a$, $I_aP^A=-2Rr_a/d_a$ et en grandeur et en signe : $\overrightarrow{I_aP^A}\div\overrightarrow{OP^A}=-2r_a/R$.

En transformant ces nouveaux résultats en B et en C on aurait d'autres propositions (en A on reproduirait les premiers). En transformant les premiers résultats en B et en C on aurait des résultats analogues, donnant des points P^B, P^C. Les triangles ABC et $P^AP^BP^C$ admettent pour perspecteur le point X(35) :

$$\begin{aligned} X_{35} &= a\,(R-r_b-r_c):b\,(R-r_a-r_c):c\,(R-r_a-r_b) \\ &= a^2\left(b^2+c^2-a^2+bc\right):b^2\left(a^2+ca+c^2-b^2\right):c^2\left(a^2+ab+b^2-c^2\right) \end{aligned}$$

Propriété qu'on peut encore transformer, etc., etc. Sans le fil de la transformation continue, il eut été impossible de prévoir ces résultats qui, avec elle, s'obtiennent sur-le-champ et pour ainsi dire mécaniquement.

1.7 Un théorème de M. Casey

On trouve (Mathesis 1886, p. 108), le théorème suivant dû à M. Casey.

> *Soient un triangle ABC; $A_HB_HC_H$ les pieds des hauteurs, H^A le milieu de AH[2], ω^A le centre du cercle inscrit à AB_HC_H. Alors ω^AH^A passe par le point de Feuerbach F=X(11), contact du cercle d'Euler et du cercle inscrit à ABC.*

Proof. Les côtés de AB_HC_H *sont* $(a,\,c,\,b)\cos A$. *L'expression normalisée de ce triangle est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b^2} & \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b^2} \\ 0 & \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b^2} & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \omega^A &= b^3+c^3-a^2b-a^2c-c^2b-b^2c-2\,cab:-2bS_a:-2cS_a \\ &= a\,(1+\cos B+\cos C):b\cos A:c\cos A \end{aligned} \tag{1}$$

Par ailleurs :

$$F = (b-a+c)\,(b-c)^2:(a+c-b)\,(c-a)^2:(a-b)^2\,(b+a-c) \tag{2}$$
$$H^A = a^2b^2+a^2c^2+2\,b^2c^2-b^4-c^4:2S_aS_c:2S_aS_b \tag{3}$$

et la conclusion suit. □

[1] *erreur dans l'original :* était $P_C^A=a\,(+R+r_a-r):\cdots$.

[2] *erreur dans l'original :* le théorème de Casey met en oeuvre le milieu de AH, qui est sur le cercle des neuf points, et pas le milieu des hauteurs.

Il est évidemment probable *a priori* qu'il existe des théorèmes analogues où figurent, au lieu du centre inscrit dans AB_HC_H et du point de contact du cercle inscrit dans ABC et du cercle d'Euler les centres des cercles exinscrits dans AB_HC_H et les points de contact du cercle d'Euler et des cercles exinscrits dans ABC, mais il n'est pas commode de les deviner d'une façon précise d'autant plus que ABC et AB_HC_H sont symétriquement semblables ; il faudrait en tous cas les démontrer séparément.

La transformation continue les énonce comme mécaniquement et en est la démonstration. Soient ω^A, ω_A^A, ω_B^A, ω_C^A les centres des cercles tritangents à AB_HC_H homologues respectivement aux centres I, I_a, I_b, I_c de ABC et F, F_A, F_B, F_C les points de contact des cercles I, I_a, I_b, I_c avec le cercle d'Euler. Le théorème de M. Casey revient à dire que H^A, F, ω^A sont colinéaires. En faisant la transformation continue en A de ce résultat, on trouve que H^A, F_A, ω_A^A sont colinéaires. En faisant la transformation continue en B du théorème de M. Casey on trouve que H^A, F_B, ω_B^A sont colinéaires[1].

La transformation continue montre cela aussi vite, d'ailleurs, analytiquement que géométriquement. En effet, les coordonnées de H^A, ω^A, F sont données par[2], respectivement, (3), (1) et (2). Faisant la transformation continue en A on trouve H^A invariant et[3] :

$$\begin{aligned} \omega_A^A &= a\left(-1+\cos B+\cos C\right) : b\cos A : c\cos A \\ F_A &= -\left(a+b+c\right)\left(b-c\right)^2 : \left(a+b-c\right)\left(c+a\right)^2 : \left(a+c-b\right)\left(a+b\right)^2 \end{aligned}$$

Faisant la transformation continue en B au lieu de la transformation en A, on trouve H^A invariant et[4],[5] :

$$\begin{aligned} \omega_B^A &= a\left(-1-\cos B+\cos C\right) : -b\cos A : c\cos A \\ F_B &= \left(a+b-c\right)\left(b+c\right)^2 : -\left(a+b+c\right)\left(c-a\right)^2 : \left(b+c-a\right)\left(a+b\right)^2 \end{aligned}$$

Le théorème complet de M. Casey est donc celui-ci : Les points H^A, F, ω^A ; H^A, F_A, ω_A^A ; H^A, F_B, ω_B^A ; H^A, F_C, ω_C^A sont colinéaires.

1.8 Points de Jerabek

Soit un triangle ABC. Je prends sur AB le point M_{ab} et sur AC le point M_{ac} tels que les distances du premier à BC et à AC soient respectivement égales aux distances du second AB et à BC. J'ai sur BA et BC des points N_{ba}, N_{bc} et sur CA et CB des points P_{ca}, P_{cb} analogues. Soient J_1 et J_2 les points de Jerabek $ab : bc : ca$ et $ca : ab : bc$.

1. Les coordonnées des points M_{ab}, M_{ac} sont $a(a-b) : b(a-c) : 0$ et $a(a-c) : 0 : c(a-b)$. On a $M_{ab}M_{ac} = 4Sd/\left(a^2-bc\right)$.

2. Les M_{ab}, N_{bc}, P_{ca}, J_1, I sont alignés et les points M_{ac}, N_{ba}, P_{cb}, J_2, I sont alignés également.

3. Les droites $M_{ab}M_{ac}$, $N_{ba}N_{bc}$ et $P_{ca}P_{cb}$, qui ont pour équations :

$$bc(c-a)(a-b)\,x + ac(a-b)^2\,y + ab(a-c)^2\,z = 0$$

   et circulairement, ont la même direction X(513) qui est aussi celle de J_1J_2 et de l'axe antiorthique T(1).

4. Les points M, N, P, où $M_{ab}M_{ac}$, $N_{ba}N_{bc}$ et $P_{ca}P_{cb}$ coupent respectivement les côtés BC, CA et AB sont alignés sur la droite $\sum x \div a\left(b-c\right)^2 = 0$.

La transformation continue appliquée à ces théorèmes et à ces équations donne immédiatement des résultats qu'il serait bien difficile de deviner sans elle et qu'il faudrait, en tous cas, démontrer à part.

[1] *erreur dans l'original :* indiquait H^A, F_A, ω_B^A colinéaires.
[2] *erreur dans l'original :* les coordonnées indiquées étaient celles du milieu de la hauteur, $a : b\cos C : c\cos B$. Ces coordonnées n'ont pas les propriétés énoncées.
[3] *erreur dans l'original :* $a-c$ au lieu de $a+c$
[4] *erreur dans l'original :* p au lieu de $-p$
[5] *erreur dans l'original :* ω_C^A au lieu de ω_B^A

1.9 Un théorème de M. Laisant

M. Laisant a donné au congres de Limoges (1890) le théorème suivant :

> *ABC étant un triangle, si nous portons sur les 2 côtés AB, AC à partir de B et de C et vers le sommet A, des longueurs BA_c et CA_b, toutes deux égales au côté BC, nous obtiendrons une droite A_bA_c dont la direction sera indépendante du coté BC que nous aurons choisi pour effectuer cette construction.*

Nous allons étudier ce théorème par la transformation continue et développer un peu cet exemple pour mettre en évidence la fécondité de la méthode qui donne, sans recherche, une moisson de résultats auxquels on n'aurait pas songé sans elle. La direction A_cA_b est celle de la perpendiculaire à OI ou celle de l'axe antiorthique $x/a+y/b+z/c=0$. Transformons en A (Fig. 1) A_c devient A'_c, symétrique de A_c par rapport à B, A_b devient A'_b, symétrique de A_b par rapport à C ; O ne varie pas, I devient I_a, donc la direction de $A'_bA'_c$ est celle de la perpendiculaire à OI_a ou celle de l'antibissectrice de A : $-x/a+y/b+y/c=0$.

En transformant en B, on verrait que A_c devient A'_c, A_b reste A_b ; donc $A_bA'_c$ a pour direction la perpendiculaire à OI_b ou celle de l'antibissectrice de B : $x/a-y/b+z/c=0$. De même, en transformant en C, on verrait que $A_cA'_b$ a pour direction la perpendiculaire à OI_c ou celle de l'antibissectrice de C $x/a+y/b-z/c=0$. On obtient donc un quadrilatère $A_bA_cA'_bA'_c$ dont les côtés sont parallèles aux quatre droites $x/a \pm y/b \pm z/c = 0$.

En faisant les constructions analogues en privilégiant le sommet B au lieu de A, on obtiendrait un quadrilatère $B_cB_aB'_cB'_a$ qui aurait ses côtés parallèles à ceux du précédent. Enfin, en privilégiant le sommet C, un quadrilatère $C_aC_bC'_aC'_b$. Ces quadrilatères sont intéressants car, sans être semblables, ils ont leurs côtés parallèles et les côtés parallèles proportionnels. Par une étude détaillée, on obtient le tableau suivant, où le nom de chaque côté est suivi de sa longueur, et où toutes les longueurs contenant le même d_j sont portées par des segments parallèles entre eux.

A	A_bA_c	$d\frac{a}{R}$	$A_cA'_b$	$d_b\frac{a}{R}$	$A'_bA'_c$	$d_a\frac{a}{R}$	A'_cA_b	$d_c\frac{a}{R}$
B	B_cB_a	$d\frac{b}{R}$	$B_aB'_c$	$d_c\frac{b}{R}$	$B'_cB'_a$	$d_b\frac{b}{R}$	B'_aB_c	$d_a\frac{b}{R}$
C	C_aC_b	$d\frac{c}{R}$	$C_bC'_a$	$d_a\frac{c}{R}$	$C'_aC'_b$	$d_c\frac{c}{R}$	C'_bC_a	$d_b\frac{c}{R}$

Les valeurs que nous venons de donner permettent de calculer très simplement les distances entre deux quelconques des 6 pieds des bissectrices sur des cotés différents. Par exemple, si je veux calculer la distance entre le pied A_1 de la bissectrice extérieure de A sur BC et le pied C' de la bissectrice intérieure de C sur AB, les 2 triangles semblables[1] $C'BA_1$ et $B_cBB'_a$ me donneront $A_1C' \div B'_aB_c = A_1B \div B'_aB$ d'où[2] :

$$A_1C' = \frac{abc\,d_a}{R\,(a+c)\,(b-c)} = \frac{4Sd_a}{(a+c)\,(b-c)}$$

De ce dernier résultat, on déduit d'ailleurs facilement d'autres par transformation continue. Ainsi, si on le transforme en B, A_1 devient A', pied de la bissectrice intérieure de A, C' devient C_1, pied de la bissectrice extérieure de C et l'on a[3] $A'C_1 = 4Sd_c \div (a+c)\,(b-a)$.

Les droites $B'_cB'_a$ et $C'_aC'_b$ se coupent en un point λ_a et nous avons de même des points λ_b et λ_c. Les triangles ABC et $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ admettent pour perspecteur le point X(65)=$(b+c)\,/\,(b+c-a)$, etc. et la perspectrice est $\sum x\,(b+c-a) \div a\,(b+c) = 0$. Dixit : l'axe d'homologie des deux triangles est $\sum x/\,(b+c) = 0$. Ces résultats en donnent d'ailleurs encore d'autres par transformation continue.

Les droites $A_bA'_c$ et A'_bA_c se coupent en un point M_a et AM_a coupe BC en μ_A. On a de même les points μ_B et μ_C. Les points μ_A, μ_B, μ_C sont alignés sur la droite $\sum x \div a\,(b-c)^2 = 0$ qui est la tripolaire de X(661).

Les droites A_bA_c et $A'_bA'_c$ se coupent en un point N_a. On a de même les points N_b et N_c. Les triangles ABC et $N_aN_bN_c$ sont perspectifs. Le perspecteur est $a\left(b^2-c^2\right)$ ::=X(661), sur l'axe antiorthique –tripolar(1)– et sur la droite $\sum ax = 0$ –tripolar(75).

Les droites M_aN_a, M_bN_b, M_cN_c sont parallèles à la droite de Lemoine, point à l'infini X(512). Etc., etc.

---

[1] Comment sait-on qu'il y a similitude des triangles ? Si cela se fait en calculant les longueurs, il suffit d'utiliser AlKashi pour obtenir A_1C' (NdT).

[2] *erreur dans l'original :* le R manquait

[3] *erreur dans l'original :* il y avait $b+a$

1.10 Deux constructions

1. Construction du point X(667)=$a^3(b-c) : b^3(c-a) : c^3(a-b)$. C'est l'intersection de la droite T(81) $\sum x(b+c)/a = 0$ et de la droite de Lemoine T(6). La transformation continue en A permet de construire les points $a^3(b-c) : b^3(c+a) : c^3(a+b)$, etc.

2. Construction du point X(55)=$a^2(b+c-a)$, etc. C'est le centre de similitude intérieur de O et I. Il est sur la droite qui joint le pôle $-a^2 : b^2 : c^2$ d'un coté par rapport au cercle circonscrit au pied $0 : b : c$ de la bissectrice sur ce cote. On construit de même les transformés continus $-a^2(a+b+c) : b(a+b-c) : c^2(a+c-b)$ du point X(55), etc.

1.11 De tout un peu

1. La droite de Simson[1] parallèle à la droite de Lemoine, est la droite de Simson du point de Tarry X(98). La droite de Simson (ou de Wallace) parallèle à l'axe antiorthique est la droite de Simson du point X(104)=$a/(2R-r-r_a)$, etc. On on déduit par transformation continue en A: la droite de Simson parallèle à l'antibissectrice de A, $-x/a+y/b+z/c=0$ est la droite de Simson du point $-a/(2R+r+r_a) : b/(2R+r_a-r_c) : c/(2R+r_a-r_b)$.

2. Si l'on diminue de p^2/δ les distances du point X(9)=$a(p-a) : b(p-b) : c(p-c)$ aux trois côtés, les différences $-ap/d, -bp/d, -cp/d$ sont proportionnelles aux trois côtés. Si par les points ainsi obtenus sur les perpendiculaires aux côtés, on mène des parallèles aux côtés correspondants, on obtient un triangle dont le centre d'homothétie avec ABC est le point de Lemoine X(6) de ABC. La transformation continue en A donne la propriété analogue du point $p : p-c : p-b$ transformé continu de X(9).

3. Soit M un point du plan d'un triangle; je mène par $M = u : v : w$ des parallèles aux trois côtés. La parallèle à BC coupe AC en A_c, AB en A_b et ainsi de suite. On obtient :

$$[MA_b.MA_c,\ MB_c.MB_a,\ MC_a.MC_b] = \left[\frac{a^2}{u}, \frac{b^2}{v}, \frac{c^2}{w}\right] \times \frac{uvw}{(u+v+w)^2}$$

$$[MB_a.MC_a,\ MC_b.MA_b,\ MA_c.MB_c] = \left[\frac{1}{au}, \frac{1}{bv}, \frac{1}{cw}\right] \times \frac{abcuvw}{(u+v+w)^2}$$

   (a) On a $MA_b.MA_c = MB_c.MB_a = MC_a.MC_b$ pour le point X(6)=$a^2 : b^2 : c^2$ et la valeur commune est $\left(abc/\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)^2$.

   (b) On a $MB_a.MC_a = MC_b.MA_b = MA_c.MB_c$ pour le point X(75)=$1/a : 1/b : 1/c$ et la valeur commune est $(abc/(ab+bc+ca))^2$.

   (c) La quantité $q = MB_a.MC_a + MC_b.MA_b + MA_c.MB_c$ atteint son maximum pour le point $(-bc+ca+ab)/a ::= M_L$ (not in ETC) et sa valeur est :

$$q_x = \frac{a^2b^2c^2}{Q} \qquad \text{where } Q = 2abc(a+b+c) - \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Caveat du traducteur. Ce n'est pas si simple. La fonction à étudier est :

$$q = \frac{abuv+bcvw+cawu}{(u+v+w)^2}$$

Le gradient s'annule en trois points, le point M_L et deux points à l'infini. Pour conclure, if faut étudier les signes à l'infini de q, qui est atteint pour $P \in \mathcal{L}_\infty$. Paramétrant le numérateur en $u : v : w = \sigma-\tau : \tau-\rho : \tau-\sigma$, il vient :

$$-a^2c^2\left(2\sigma - \frac{(ac+bc-ab)}{ac}\rho - \frac{(ac-bc+ab)}{ac}\tau\right)^2 - Q(\rho-\tau)^2$$

[1] La droite de Simson ayant une direction donnée $X \in \mathcal{L}_\infty$ est relative au point $(isogon \circ orthopoint)(X)$. Le point dont la droite de Simson est parallèle à Δ est $(isogon \circ orthopoint \circ wedge)(\Delta, \mathcal{L}_\infty)$.

Pour $Q > 0$, la conclusion est donc acquise. Pour $Q < 0$, q prend toutes les valeurs réelles. La nature locale du point M dépend de la hessienne. On obtient $-Q \times$ square $-$ square : lorsque $Q < 0$, le point M est un point selle.

Si l'on se limite au cas où M est à l'intérieur du triangle, on a la positivité de $Cte = \prod (ab + bc - ca)$. Or $(ab + bc + ac)Q = 8a^2b^2c^2 + Cte$. On est donc assuré de $Q > 0$.

La transformation continue appliquée à ces théorèmes en donne de nouveaux.

4. Si $M, M', M"$ sont les trois points colinéaires X(31)=$a^3 : b^3 : c^3$, X(238)=$a^3 - abc$, etc et X(2) (le barycentre), on a : $\overrightarrow{M'M} \div \overrightarrow{MM"} = 6Rr/(p^2 - r\delta)$. La transformation continue donne les théorèmes corrélatifs concernant les points $M =$[1]$-a^3 : b^3 : c^3$, $M' = -a\left(a^2 - bc\right) : b\left(b^2 + ac\right) : c\left(c^2 + ab\right)$ et $M"=$ X(2), inchangé.

   - La tangente commune au cercle inscrit et au cercle d'Euler (des 9 points) est T(514) $\sum x/(b - c) = 0$. Elle touche la conique inscrite de Steiner au point X(1086)=$\left(b^2 - c^2\right)$, etc. La transformation continue donne les théorèmes corrélatifs se rapportant aux cercles exinscrits.

5. Le centre radical de 3 cercles $A(b - c)$, $B(c - a)$, $C(a - b)$ décrits de A, B, C comme centres avec $b - c$, $b - a$, et $a - b$ comme rayons, est le point de Nagel X(8)=$b + c - a$, etc. La transformation continue en A montre que l'axe radical des trois cercles $A(b - c), B(c + a), C(a + b)$ est le point $p : p - c : p - b$.

6. Si la médiane AL d'un triangle rencontre en α la droite qui joint les points B' et C' de contact du cercle inscrit sur AC et sur AB, on a : $\overrightarrow{C'\alpha} \div \overrightarrow{\alpha B'} = b/c$. Si la symédiane AL_1 d'un triangle rencontre en α' cette ligne $B'C'$, on a : $\overrightarrow{C'\alpha'} \div \overrightarrow{\alpha' B'} = c/b$. En appliquant la transformation continue en A, en B et en C à ces deux théorèmes, on a immédiatement, en grandeur et en signe, les rapports dans lesquels les médianes et les symédianes divisent les côtés correspondants des triangles dont les sommets sont les points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés.

7. La droite $\sum x\,(b - c)\cos A = 0$, qui passe par l'orthocentre et par le point X(321)=$(b + c)\,/a$, etc, où elle coupe l'hyperbole de Kiepert, est telle que si λ, μ, ν sont les distances d'un de ses points aux hauteurs, on a $\lambda + \mu + \nu = 0$. Le point à l'infini sur cette droite est X(517)=$a\,(2R - r_a - r)$, etc. On a des théorèmes analogues déduits par transformation continue.

8. Le triangle pédal du centre du cercle inscrit au triangle ABC a pour point de Lemoine le point de Gergonne X(7) de ABC, pour orthocentre le point X(65)=$a\,(b + c)\,/\,(b + c - a)$, etc et pour centre de gravité le point X(354)=$a\,(\delta + r_a)$, etc. La transformation continue multiplie ces résultats.

2 Quelques propriétés des hyperboles Γ_a, Γ_b, Γ_c

Nous avons donné dans nos précédents mémoires présentés à divers congrès de l'AFAS, de nombreuses propriétés des coniques Γ_a, Γ_b, Γ_c, hyperboles équilatères circonscrites qui se rencontrent si souvent dans la géométrie du triangle qu'elles sont peut-être le triple de coniques circonscrites, le plus important. En voici quelques nouvelles propriétés.

Nous rappelons que Γ_a est la courbe inverse de la médiatrice de BC, que Γ_a a pour centre le milieu de BC, et qu'elle a pour équation :

$$\frac{b^2 - c^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{c^2}{z} = 0$$

1. Γ_a recoupe en A_1 la parallèle menée par A à BC ; Γ_b donne de même le point B_1, etc. Les trois points A_1, B_1, C_1 sont sur la droite $\sum a^2 x\left(b^2 + c^2\right) = 0$, dont la direction X(512)=$a^2\left(b^2 - c^2\right)$, etc est celle de la droite de Lemoine.

2. Γ_a est aussi[2] le lieu des points M tels que $\angle\,(BM, BC) = \angle\,(CM, CB)$.

3. Elle coupe le cercle circonscrit à l'extrémité du diamètre passant par A,

[1] *erreur dans l'original :* était $+a^3$
[2] *erreur dans l'original :* la nature isocèle du triangle M, B, C caractérise la médiatrice elle-même, pas l'hyperbole.

4. L'axe transverse de Γ_a (on suppose $B > C$) fait avec BC un angle $\angle(LD, LB)$ de $45° - (B - C)/2$. L est le milieu de AB (centre de Γ_a) et D le point où l'axe transverse coupe BA. $\angle(DL, DB) = 45° + A/2$.

5. La conique $T_A : x^2 - yz = 0$ est tangente en B à AB, en C à AC, passe par G, est centrée en $-1 : 2 : 2$ et est la translatée de l'ellipse de Steiner $xy + yz + zx = 0$. Ses deux autres points communs avec Γ_a sont les points $1 : -1 : -1$, $b^2c^2 : b^4 : c^4$. La droite D_a qui les joint passe en outre par le pied de la symédiane. Avec Γ_b et la courbe $y^2 - zx = 0$ on a une droite D_b, etc. Les trois droites D_a, D_b, D_c se coupent au point X(194)$=a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$, etc.

6. L'ellipse $U_A : b^2c^2x^2 - a^4yz = 0$ est tangente en AC en C, à AB en B et passe au point de Lemoine X(6). Elle coupe $\Gamma_a$suivant une droite D'_a d'équation $b^2c^2(b^2-c^2)x - c^2a^4y + a^4b^2z = 0$, et qui passe aussi au pied de la symédiane. Les trois droites D'_a, D'_b, D'_c se coupent au point X(32)$=a^4 : b^4 : c^4$.

7. Le quatrième point d'intersection de Γ_a et de l'ellipse circonscrite de Steiner est $V_a = -b^2c^2 : c^2(b^2 + c^2) : b^2(b^2 + c^2)$. Les triangleS ABC et $V_aV_bV_c$ admettent pour perspecteur[1] le point X(76)$=1/a^2$, etc.

8. Le demi-axe transverse $(B > C)$ de Γ_a est $\frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)\sin A}$.

9. La tangente à Γ_a en l'orthocentre est parallèle à la droite qui joint le point A au point X(64)$=$ $a/(\cos A - \cos B \cos C)$, etc.[2]

3 Sur quelques cubiques liées au triangle

3.1 Cubique de McCay, K003

On considère la cubique K003=pK(X6,X3), ayant pour équation :

$$\sum a^2 S_a x\left(c^2y^2 - b^2z^2\right) = 0 \tag{4}$$

Cette cubique passe par A, B, C, H, O, I, I_a, I_b, I_c et par les ceviens de O. Cette courbe est sa propre inverse et est le lieu des points M tels que[3] :

$$\angle(AM, AC) + \angle(BM, BA) + \angle(CM, CA) \underset{ever}{=} \angle(AM, AB) + \angle(BM, BC) + \angle(CM, CB) \underset{K003}{=} \frac{\pi}{2}$$

3.2 Cubique de Lucas, K007

Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des hauteurs du triangle ABC. Soit M un point variable $x : y : z$; AM, BM, CM coupent BC, CA, AB en A', B', C'. Si les triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$ admettent un perspecteur N, le lieu de M est la cubique de Lucas K007=pK(X2,X69), ayant pour équation :

$$\sum ayz(by\cos C - cz\cos B) = 0 \tag{5}$$

et le lieu de N est la cubique[4] de Thomson K002=pK(X6,X2) ayant pour équation :

$$\sum x(y^2c^2 - b^2z^2) = 0 \tag{6}$$

[1] *erreur dans l'original :* était V_a, V_b, V_c concourent

[2] *erreur dans l'original :* suivait une reprise à l'identique du n°7 avec en prime $b^2 - c^2$ au lieu de $b^2 + c^2$.

[3] *erreur dans l'original :* seule la première égalité, toujours vraie, était donnée.

[4] in EK, this result is described as :
HaHbHc is the orthic triangle and MaMbMc the cevian triangle of M. Da is the line passing through Ma and the midpoint of AHa, Db and Dc similarly. These lines are concurrent (at Q) if and only if M lies on the Lucas cubic. The locus of Q is the Thomson cubic. (Philippe Deléham, 17 nov. 2003)

3.3 Cubique de Neuberg, K001

Soit M un point du plan du triangle ABC. Appelons M_a, M_b, M_c les symétriques de M par rapport à BC, CA, AB. Si M décrit la cubique de Neuberg K001=pK(X6, X30), ayant pour équation :

$$\sum x\left(c^2y^2 - b^2z^2\right)\left(a^2S_a - 2S_bS_c\right) = 0 \tag{7}$$

alors les triangles ABC et $M_aM_bM_c$ admettent un perspecteur M', qui décrit la cubique K060=pK(X1989, X265), orthopivotal cubique O(X5), dont l'équation est :

$$\sum a^3yz\left(c^2y\cos C\sin 3B - b^2z\cos B\sin 3C\right) = 0 \tag{8}$$

3.4 Cubique de Darboux, K004

1. Soit M un point de la cubique de Darboux K004=pK(X6, X20), ayant pour équation :

$$\sum ax\left(y^2c^2 - b^2z^2\right)(\cos A - \cos B\,\cos C) = 0 \tag{9}$$

   Appelons μ_a, μ_b, μ_c les projections de M sur BC, CA, AB. Alors les triangles ABC et $\mu_a\mu_b\mu_c$ admettent un perspecteur M", dont le lieu est la cubique de Lucas (5) K007.

2. Les cubiques (7) et (9) sont à elles-mêmes leur propre inverse (par conjugation isogonale).

3. Ces cubiques (7) et (9) ont pour points communs l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, les trois sommets et les quatre centres des cercles tri-tangents à ABC.

4. La cubique K004 est aussi le lieu des points M tels qu'il y ait une conique circonscrite à ABC et qui ait AM, BM, CM pour normales en A, B, C (le centre étant alors sur K002).

5. Elle passe par le point J =X(20)=$a\left(\cos A - \cos B\cos C\right)$, etc, qui est le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre O du cercle circonscrit. Elle a O pour centre. Elle touche en A la droite qui joint A au point X(64) qui est le conjugué isogonal de J.

6. La tangente en I passe par le point de Gergonne X(7) et a pour équation $\sum x(b-c)(b+c-a)^2 = 0$. Par transformation continue en A, on voit immédiatement que la tangente en I_a est :

$$x\,(b-c)\,(a+b+c)^2 + y\,(c+a)\,(b+a-c)^2 - z\,(a+b)\,(a+c-b)^2$$

7. La tangente en O passe par K[1].

8. La tangente en H passe par K et par le point X(393)=$\tan^2 A$, etc. Son équation est :

$$\sum xb^2c^2\cos^2 A\left(b^2 - c^2\right) = 0$$

4 Angles de Steiner et cercles de Neuberg

1. La somme des angles de Steiner ω_1, ω_2 et de l'angle $\widehat{\omega}$ de Brocard égale 90°, c'est-à-dire que $\omega_1 + \omega_2 + \widehat{\omega} = 90°$. C'est une remarquable relation puisqu'elle a lieu entre les angles eux-mêmes; elle avait passé inaperçue, quoiqu'elle soit implicitement contenue dans le mémoire que MM. Neuberg et Gob ont présenté au Congrès de Paris, à l'AFAS, en 1889. En effet, pour calculer les valeurs de $\cot\omega_1$ et de $\cot\omega_2$, en fonction de $\widehat{\omega}$, ces géomètres ont écrit les équations $2\omega_1 = 90° - \omega - \lambda$, $2\omega_2 = 90° - \omega + \lambda$[2], λ désignant un certain angle qu'ils considéraient. En ajoutant, on trouve immédiatement $\omega_1 + \omega_2 + \widehat{\omega} = 90°$. Il est donc impossible de passer plus près de ce résultat, d'autant plus qu'il se voit aussi sur la figure tracée dans le mémoire; ils ne l'ont point observé, probablement, parce que le but du calcul était de trouver une expression de $\cot\omega_1$ et de $\cot\omega_2$, et que, de plus, on cherche rarement une relation directe entre trois angles.

2. Soit ABC un triangle, N_a, N_b, N_c les centres des cercles de Neuberg, les tangentes en A, B, C aux cercles N_a, N_b, N_c se coupent au point de Steiner X(99).

[1] *erreur dans l'original :* c'est le point de Lemoine, et pas le centre du cercle inscrit

[2] *erreur dans l'original :* deux fois ω_1.

3. BA et CA coupent N_a en A'_b, A'_c ; CB et AB coupent N_b en B'_c, B'_a ; AC et BC coupent N_c en C'_a, C'_b. Les droites $A'_bA'_c$, $B'_cB'_a$, $C'_aC'_b$ ont même direction X(512) que la droite de Lemoine de ABC.

4. Les coordonnées de N_a sont :

$$N_a \simeq \left(\begin{array}{c} a^2\left(c^2+a^2+b^2\right) \\ \left(a^2+b^2\right)c^2-b^4-a^4 \\ \left(a^2+c^2\right)b^2-c^4-a^4 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{c} -a\cos\widehat{\omega} \\ b\cos\left(C+\widehat{\omega}\right) \\ c\cos\left(B+\widehat{\omega}\right) \end{array}\right)$$

Si par N_a, N_b, N_c on mène des parallèles respectivement à BC, CA, AB, on a un triangle $A'B'C'$ qui a le point de Lemoine pour centre d'homothétie avec ABC, le rapport d'homothétie étant $B'C' \div BC = \cot^2\widehat{\omega} - 1$.

5. Si BC reste fixe et que A décrive le cercle N_a, l'enveloppe de $A'_bA'_c$ est une ellipse et le point de Lemoine décrit une parallèle à BC.

6. L'angle 2ϑ sous lequel on voit, depuis l'un des sommets d'un triangle, un cercle de Neuberg correspondant à un autre sommet est est donné par $\cos(\vartheta) = 2\sin\widehat{\omega} = \sin(2\omega_j + \widehat{\omega})$.

5 Divers résultats concernant des coniques remarquables

1. Lorsque M' et M" sont deux points inverses isogonaux $x : y : z$ et $a^2x : b^2y : c^2z$, les pieds de leurs céviennes se trouvent sur une même conique, ayant pour équation :

$$\sum \frac{x^2}{a^2} - \sum \frac{c^2q^2+b^2r^2}{b^2c^2qr}\, zy = 0$$

2. La parabole circonscrite P_a dont la corde BC intercepte sur la courbe l'aire minima $4S/3$ a pour équation :

$$4yz + zx + xy = 0$$

3. L'hyperbole équilatère circonscrite dont la tangente en A est parallèle à BC a pour équation :

$$-\frac{a^2}{x} + bc\cos A\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 0$$

4. La parabole $\sum x^2/(a^4(b^4-c^4)) = 0$, centre X(688), touche la droite de Lemoine T(6) au point X(3005)=$a^2\left(b^4-c^4\right)$, etc où cette droite coupe la droite de de Longchamps T(76) $\sum a^2x = 0$.

5. La conique $\sum a^2 \div \left(x\cos^2 A\right) = 0$ circonscrite à ABC coupe les hauteurs en A', B', C'; en ces points les hauteurs sont normales à la conique. Les coordonnées de A' sont :

$$-\frac{a\cos^2 B\cos^2 C}{\cos^2 A} : b\cos C : c\cos B$$

C'est une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que la quantité $\prod(\cos A - \cos B\,\cos C)$ est négative, nulle ou positive.

6. La conique circonscrite qui a CA pour normale en C et BC pour normale en B a pour équation :

$$a\,\cos C\,yz + b\,xz + c\,\cos C\cos B\,xy = 0$$

La conique circonscrite qui a CB pour normale en C et AB pour normale en B a pour équation :

$$a\,\cos B\,yz + b\,\cos B\cos C\,xz + c\,xy = 0$$

Elles se coupent au point[1] :

$$\frac{a\cos B\cos C}{\cos^2 B\cos^2 C - 1}, 4\,\frac{R^2\cos B}{b}, 4\,\frac{R^2\cos C}{c}$$

[1] *erreur dans l'original :* et pas en X(69)=cot A, etc.

7. La conique circonscrite E_a dont. l'un des axes est BC a pour équation :

$$\frac{a}{x}+\frac{b\cos(C)}{y}+\frac{c\cos(B)}{z}=0$$

E_b, E_c se coupent en M_a. Les triangles ABC et $M_aM_bM_c$ admettent pour perspecteur le point X(20)=$a\,(\cos A-\cos B\cos C)$, etc. L'autre axe de E_a est : $2S/\sqrt{bc\cos B\cos C}$. La tangente en A est la droite $\cos(B)\,cy+zb\cos(C)$, conjuguée harmonique de la hauteur par rapport à AC et AB.

8. Points de Frégier.

   (a) Si une parabole variable est circonscrite à un triangle ABC, les points de Frégier des sommets décrivent des coniques.

   (b) Le point de Frégier en A de la conique $L/x+M/y+N/z=0$ est

   $$-L\cos A\,bc : M\cos A\,bc-Nb^2 : N\cos A\,bc-Mc^2$$

   (c) Le point de Frégier en un point d'une hyperbole équilatère est à l'infini ; on peut énoncer ainsi ce théorème :
   Soient P et Q deux points d'une hyperbole équilatère. Le cercle décrit sur PQ comme diamètre recoupe la courbe en P' et Q'. La droite $P'Q'$ est un diamètre et les normales à la courbe en P' et en Q' sont parallèles à PQ.

   (d) Le lieu des points de Frégier du point A des coniques circonscrites à ABC et qui passent par le point $p:q:r$ est la droite :

   $$x\,\frac{\sin^2 A}{p}+y\left(\frac{c}{br}+\frac{\cos A}{q}\right)\cos A+z\left(\frac{b}{qc}+\frac{\cos A}{r}\right)\cos A=0$$

9. Si par un point de la conique inscrite de Steiner, on mène des parallèles aux trois côtés d'un triangle ABC, elles divisent le triangle en trois triangles et en trois parallélogrammes. La somme des surfaces des trois triangles égale la somme des surfaces des trois parallélogrammes.

10. L'hyperbole de Kiepert est CC(X(523)). Son centre X(115) est sur l'ellipse inscrite de Steiner. Les tangentes en ce point à l'ellipse de Steiner et au cercle d'Euler sont respectivement :

$$\sum\frac{x}{b^2-c^2}=0\quad et\quad \sum\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}\,x=0$$

Le pied de la quatrième normale abaissée du centre du cercle circonscrit sur l'ellipse de Steiner est le point X(2482) symétrique de X(115) par rapport au barycentre. De la remarque que X(115) est sur la conique inscrite de Steiner on peut tirer une construction géométrique simple de ce point; en effet comme ce centre est aussi sur le cercle d'Euler, il suffit de trouver le quatrième point commun à l'ellipse de Steiner et au cercle d'Euler qui ont trois points communs, savoir les milieux L, M, N des trois côtés de ABC. L'ellipse de Steiner passe aussi sur les milieux g_b, g_c des segments qui joignent B et C au barycentre. On applique la construction que j'ai donnée (Congrès de Caen 1894, construction V) pour trouver le quatrième point commun a un cercle LMN et à une conique $LMNg_bg_c$: je trace g_cL qui coupe le cercle LMN en I, par I je mène la parallèle à g_bg_c qui coupe le cercle en K, je trace Kg_b qui coupe le cercle LMN au point cherché.

6 Varia

1. A propos d'une question que j'ai posée, il y a quelques années, dans le *Progreso Matematico* et dans laquelle je demandais, entre autres choses, de démontrer que l'orthocentre ne pouvait jamais être sur le cercle de Brocard, M. Ripert me communique un théorème que je tiens à signaler parce qu'il domine la solution dans les sujets analogues à celui qui faisait l'objet de ma question. Appelons Z un point déterminé du plan de ABC, nous supposons que Z est un point unique tel que G, H, K, O, etc., ou accouplé tel qu'un point de Brocard, mais à l'exclusion des points d'un triplet tel que les trois associés d'un point ou les centres des cercles de Neuberg, etc. Soit en outre une courbe continue $\sum$ quelconque dont l'équation est symétrique par rapport aux trois coordonnées.
Si le point Z ne peut être sur la courbe $\sum$ pour aucun triangle isocèle, il ne peut s'y trouver pour

aucun autre triangle.
Considérons en effet tous les triangles pour lesquels Z serait sur la courbe $\sum$ correspondante ; nous pouvons supposer BC constant. Il est visible qu'à tout triangle ABC satisfaisant à la question, correspond un triangle $A'BC$ symétrique de ABC par rapport à la médiatrice de BC. Le lieu des points (Z, Z') de ces triangles sera une certaine courbe symétrique par rapport à cette médiatrice qui la coupera toujours puisque Z étant par hypothèse unique ou accouplé il y a toujours au moins un triangle isocèle (le triangle équilatéral) qui satisfait à la question, etc.

2. Soient A' et $A"$ les points où la symédiane et la droite de Lemoine rencontrent BC; $B', B"$ et $C', C"$ les points analogues sur CA et sur AB. Les trois circonférences qui ont pour diamètres $AA", B'B", C'C"$ se coupent en deux points τ_1, τ_2. Leur axe radical $\tau_1\tau_2$ est la droite X(3)X(695). Les côtés du triangle podaire de chaque τ_j sont inversement proportionnels aux côtés de ABC.

3. Si x_a, x_b, x_c, X sont les distances de A, B, C et du point $U = u : v : w$ à une droite quelconque, on a
$$X = \frac{ux_a + vx_b + wx_c}{u + v + w}$$
Pour le point de Gergonne X(7) du triangle ABC, cela donne :
$$X = (x_a r_a + x_b r_b + c_c r_c) / \delta$$

4. Construction du point X(25)$=a^2 \tan A$, etc. Il est sur la droite qui joint le pôle d'un côté par rapport au cercle circonscrit, au pied de la hauteur de ce côté.

5. Si l, m, n sont les côtés du triangle podaire du point M, on a :
$$16\, RS^4 - 2\, S \sum a \cos A \, \left(b^2c^2l^2 + 4R^2\, n^2m^2\right) + R \sum b^2c^2l^4 = 0$$
Cela se déduit ainsi. Si X, Y, Z sont les distances de M aux sommets de ABC on trouve, par élimination, que :
$$a^2b^2c^2 - 2 \sum bc \cos A(X^2a^2 + Y^2Z^2) + \sum a^2X^4 = 0$$
D'autre part on a : $X/l = 2R/a$, etc. Après substitution, on arrive à la relation cherchée.
Application. Trouver la longueur x des côtés des triangles podaires équilatéraux. On trouve :
$$\frac{1}{x^2} = \frac{8S^2}{a^2 + b^2 + c^2 \pm 4\sqrt{3}S}$$
On peut remarquer qu'on en déduit
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{S} \cot \widehat{\omega}$$

6. Soit ABC un triangle, A_1, B_1, C_1, le triangle podaire du point $P = p : q : r$. On prend sur B_1C_1 le point A_2 tel que $\overline{BA_1} \div \overline{A_1C} = \overline{B_1A_2} \div \overline{A_2C_1}$ et de même les points B_2, C_2, sur C_1A_1, A_1B_1. ***Ne sont pas en perspective*** Tout le reste fonctionne avec N=complément(P). Pourquoi ?
   (a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent au point N dont les coordonnées sont[1] $y + z : z + x : x + y$.
   (b) La droite PN passe toujours par le barycentre, son équation est $\sum (q - r)\, x = 0$.
   (c) On retrouve ainsi une série de théorèmes concernant des points particuliers[2],[3].

	kim	P	kim	N	droite	$G \in PN$
1	194	Φ	76	$1/a^2$	$\sum a^2(b^2 - c^2)\, x = 0$	oui
2	76	$1/a^2$	39	milieu Brocard	???	oui
3	99	Steiner	115	centre Kiepert	???	oui
4	8	Nagel	1	inscrit	$\sum (b - c)\, x = 0$	oui
5	1	inscrit	10	Spieker	$\sum (b - c)\, x = 0$	oui

[1] *erreur dans l'original :* était, en trilinéaires, $(by + bz)$ au lieu de $(by + cz)$.
[2] *erreur dans l'original :* était X(75) au lieu de X(76)
[3] *erreur dans l'original :* la droite #3 ne contient pas x... et rien ne va.

7. Les points ω, ω' étant les points de Brocard, $A\omega$ et $A\omega'$ coupent le cercle circonscrit en deux points A_ω, $A_{\omega'}$. On a de même B_ω, $B_{\omega'}$, C_ω, $C_{\omega'}$. Le triangle formé par les trois droites $A_\omega A_{\omega'}$, etc., a pour centre d'homothétie avec le triangle ABC le point X(32)$=a^4 : b^4 : c^4$. Le rapport est

$$\frac{a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

8. Soient un triangle ABC, une droite Δ qui coupe les côtés BC, CA, AB en A', B', C' et une conique circonscrite K. Soit μ un point de Δ, les droites $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$ coupant la conique en α, β, γ. Les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ concourent en un point M de K. Ce théorème a une certaine importance dans la géométrie du triangle parce qu'il est une mine abondante de théorèmes sur les points, les coniques et les droites remarquables. Il suffit d'en particulariser les données.

9. Soit un point M dont les barycentriques sont $x : y : z$, P_a la projection de M sur BC et Q_a la projection de M sur la hauteur partant de A. Il y a de même les points P_b, Q_b, P_c, Q_c. On sait (Mathesis 1900, p. 152 Sporer) que P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c concourent en un point N. Cela posé, les coordonnées de N sont :
$$\left(x\left(yS_b+zS_c-xS_a\right)+zya^2\right)x,\ \text{etc}$$
Si M est le centre du cercle inscrit ou d'un cercle ex-inscrit, N est le conjugué isogonal X(56) du point de Nagel X(8) ou d'un de ses transformés continus. Si M est le barycentre, N est le point[1] X(1992)$=5a^2-b^2-c^2$, etc.

10. Soit un triangle ABC et un angle ϕ, avec $-90° < \phi < +90°$. Je construis des triangles isocèles semblables $BA'C$, $CB'A$, $AC'B$ avec un angle à la base $\angle(BC,\, BA') = \phi$. On sait que AA', BB', CC' concourent en un point N_ϕ de l'hyperbole de Kiepert. La droite $N_\phi N_\psi$ passe au centre du cercle circonscrit lorsque $\phi+\psi = 90°$.

11. Soient, pour un triangle ABC, $\widehat{\omega}$ l'angle de Brocard, ϕ l'angle de Boutin défini par :
$$\tan\phi = \tan A + \tan B + \tan C$$
et D la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, on a :
$$\cot(\omega)-\cot(\phi) = 2\,\frac{R^2}{S} \qquad \cot(\phi) = \frac{R^2-D^2}{4S}$$
$$\cot(\omega)\tan(\phi) = \frac{c^2+a^2+b^2}{8\,R^2\cos A\cos B\cos C} = \frac{p^2-r\delta}{p^2-(2\,R+r)^2}$$
Les demi-axes de 1'ellipse inscrite[2] qui a pour centre X(3), le centre du cercle circonscrit –et donc pour perspecteur le point de Lemoine X(6)– (Voir Congrès de Bordeaux, 1895) sont $(R\pm D)/2$, expression beaucoup plus simple que celle que nous y avons donnée. On sait (Brocard, Congrès d'Alger, 1881) que les triangles céviens des points de Brocard ω, ω' ont la même surface :
$$\frac{2S\sin^2\widehat{\omega}}{1+\cos^2\widehat{\omega}+2\,\cos A\cos B\cos C\,(C)}$$
Remarquons qu'il vaut mieux la représenter ainsi :
$$\frac{2a^2b^2c^2S}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

12. L'angle de Lemoine ϑ', c'est-à-dire l'angle de Brocard du faisceau des symédianes (Voir J. E., 1883, p. 214) est donné par la formule :
$$\cot\vartheta' = \frac{6S}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{8S}$$

[1] *erreur dans l'original :* était $3a^2$
[2] *erreur dans l'original :* était ellipse circonscrite centrée en O.

13. Si l'on prend le point A' où l'axe orthique –tripolar of X(4)– coupe BC et que l'on joigne A' au barycentre, tout point M de cette droite jouit de la propriété suivante : Si par M je mène des parallèles à AB et à AC les milieux β et γ des parties de ces parallèles comprises entre les deux autres côtés sont sur une perpendiculaire à BC.

14. Soit un triangle ABC; une droite coupe les trois côtés BC, CA, AB en L, M, N. On sait que les trois cercles AMN, BNL, CLM se recoupent en un point P du cercle circonscrit à ABC. Si R_a, R_b, R_c sont les rayons des cercles circonscrits aux triangles AMN, BNL, CLM on (avec la bonne condition d'orientation)
$$a\,R_a + b\,R_b + c\,R_c = 0$$

15. Le lieu des points M du plan d'un triangle ABC tels qu'en les projetant en A', B', C' sur les côtés BC, CA, AB on ait $A'B' = C'A'$, est le cercle d'Apollonius :
$$ac^2y^2 - ab^2z^2 + 2\,c^2b\cos C\,xy - 2\,b^2c\cos B\,xz = 0$$
Comme ce cercle coupe le cercle circonscrit au même point A_1, que la symédiane partant de A, on voit que la droite de Simson correspondant à A_1 est partagée en son milieu par la droite BC. La droite de Simson du point de Tarry X(98) a même direction X(512) que la droite de Lemoine.

16. Soient ABC un triangle et $P = p : q : r$ un point du plan. Je suppose les p, q, r normalisés de façon à ce que $p/a, q/b, r/c$ représentent les distances orientées de P jusqu'aux côtés du triangle. Lorsque ρ varie, le centre radical des cercles $A\,(\rho p/a)$, $B\,(\rho q/b)$, $C\,(\rho r/c)$ décrit la droite[1] :
$$\sum \left(\frac{\left(b^2 - c^2\right) p^2}{a^2} - q^2 + r^2 \right) x = 0$$
qui, naturellement, passe toujours en O. Si M est le Mittenpunkt X(9)= $a\,(b + c - a)$, etc, la droite est T(651), i.e. OI. Si M est le barycentre ou X(20) ou le point X(194), c'est la droite T(110), i.e. OK. Si M est le centre du circonscrit X(3) ou le point de Lemoine X(6), c'est la droite d'Euler T(648).

17. Si une hauteur égale la somme ou la différence des deux autres, alors les points de Brocard et le point[2] X(76)=a^{-2}, etc sont sur la conique inscrite de Steiner.

18. Valeurs particulières de l'angle de Brocard. Si dans un triangle ABC on a $\widehat{\omega} = B - C$ alors $b^4 = b^2c^2 + a^2c^2$. Si $\widehat{\omega} = C - B$ alors $c^4 = b^2c^2 + a^2b^2$. Si $\widehat{\omega} = (B - C)/2$ alors $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b-c}{c}$ et si $\widehat{\omega} = (C - B)/2$ alors $\frac{a^2}{c^2} = \frac{c-b}{b}$.

19. Point X(194). Si l'on mène par le point $p : q : r$ des parallèles aux trois côtés, les périmètres des trois triangles que chacune de ces parallèles fait avec les deux autres côtés sont proportionnels à $q + r : r + p : p + q$. Pour X(194), il y a proportionnalité inverse avec a^2, b^2, c^2. Si l'on a $a^2b^2 = c^2\left(a^2 + b^2\right)$ le point Φ (voir Congrès de Carthage 1896) est sur la symédiane partant de C. Si l'on a $ab = c\,(a + b)$, il est sur la bissectrice partant de C et $h_c = h_a + h_b$. Si $ab = \pm c\,(a - b)$, il est sur la bissectrice extérieure et $h_c = \pm\,(h_a - h_b)$. Sur cet exemple, on voit toute la puissance de la transformation continue.

20. L'hyperbole circonscrite qui contient les points de Brocard a pour perspecteur X(385)=$a^4 - b^2c^2$, etc. Son centre est[3] :
$$\left(a^4 - b^4 - c^4 + a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2\right)\left(a^2 - bc\right)\left(a^2 + bc\right), \text{ etc}$$
Elle coupe l'hyperbole de Kiepert au point X(83)=$1/\left(b^2 + c^2\right)$, etc, conjugué isogonal du milieu X(39) du segment des points de Brocard.

21. Si l'on décrit les trois circonférences $A\,(\rho)\,, B\,(\rho)\,, C\,(\rho)$, puis les cercles de centres A, B, C et respectivement orthogonaux à $C\,(\rho)\,, A\,(\rho)\,, B\,(\rho)$, ces trois cercles ont le même centre radical P_1 quelque soit ρ. Il en est de même des trois circonférences de centres, A, B, C et respectivement orthogonales à $B\,(\rho)\,, C\,(\rho)\,, A\,(\rho)$, donnant P_2. Le milieu du segment P_1P_2 est X(5).

[1] Pour une droite donnée, le lieu des P antécédents est une conique diagonale contenant I (NdT)

[2] *erreur dans l'original :* était, en trilinéaires, $a^{1/3}$ au lieu de a^{-3}.

[3] *erreur dans l'original :* il était indiqué $\left(a^2 - bc\right)^2/a$, etc.

22. Soient $A'B'C'$ le triangle orthique de ABC et $A", B", C"$ les projections de A, B, C sur $B'C', C'A'$, $A'B'$. Les trois droites $A'A", B'B", C'C"$ concourent au point X(185)=$a\cos A\left(\cos^2 B + \cos^2 C\right)$.

23. Lorsque trois droites concourantes partant des sommets d'un triangle ABC, coupent les cotés opposés en A_1, B_1, C_1, et que les longueurs AA_1, BB_1, CC_1 sont désignées par L_a, L_b, L_c, les trois symétriques de ces droites par rapport aux hauteurs avec lesquelles elles ont une extrémité commune, concourent également si l'on a :

$$\sum\left(b^2-c^2\right)\left(a^2L_a^2+L_b^2 * L_c^2\right)=0$$

24. M. Maurice d'Ocagne a signalé que si l'on prend sur les hauteurs les points A', B', C' aux 2/3 de ces hauteurs à partir de A, B, C, le cercle circonscrit à $A'B'C'$ admet OH pour diamètre et que ce triangle est inversement semblable à ABC. Cela posé, si l'on appelle D la distance du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre, on trouve que le rapport de similitude est : $BC \div C'B' = 3R/D$.L'équation de ce cercle est $2\sum bc\cos A\, x^2 - \sum a^2yz = 0$. Son centre est X(381), le milieu de OH. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur $B'C', C'A', A'B'$ concourent au point[1] X(74)=$a/\left(\cos A - 2\cos B\cos C\right)$, etc.

25. Si L est le point de DeLongchamps X(20)=$a\left(\cos A - \cos B\cos C\right)$, symétrique de H pour rapport à O, on a :

$$\begin{aligned} a^2-\overline{AL}^2=b^2-\overline{BL}^2=c^2-\overline{CL}^2 &= 16R^2\cos A\cos B\cos C \\ &= (a+b+c)^2-4\left(2R+r\right)^2 \end{aligned}$$

Ces relations sont à remarquer parce qu'elles donnent une expression assez simple de la distance du point L aux trois sommets et que ces distances pour les points remarquables sont le plus souvent compliquées.

26. Le cercle conjugué[2] $\sum\left(b^2+c^2-a^2\right)x^2=0$ ne peut être tangent au cercle de Brocard que si :

$$\sum\frac{\left(a^4+b^4-c^4\right)^2}{a^2+b^2-c^2}=0$$

Cette condition équivaut à :

$$1-16\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C=\left(\frac{b^2-c^2}{a^2}\right)^2\left(\frac{c^2-a^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{a^2-b^2}{c^2}\right)^2$$

Il y a effectivement des triangles ABC qui répondent à cette condition, par exemple les triangles où l'on a :

$$b=c=a\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$$

On trouve facilement la condition de contact en obtenant l'axe radical du cercle conjugué et du cercle de Brocard, obtenant $\sum\left(b^4+c^4-a^4\right)x=0$, i.e. la tripolaire de X(66). Puis en exprimant que cette droite est tangente à l'un des cercles.

27. Si M est un point du cercle conjugué à un triangle, les polaires de M par rapport aux trois cercles décrits sur les cotés comme diamètres sont concourantes.

28. La ligne d'Euler est parallèle[3] ou perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A suivant que l'on a $A=120°$ ou $A=60°$.

29. La droite OK n'est jamais parallèle[4] à une bissectrice intérieure mais elle l'est à la bissectrice extérieure de A si ABC est un triangle moyen en A ($a^2=bc$).

30. Si le triangle ABC est moyen en A, c'est-à-dire si $a^2=bc$, la droite qui joint le point A au point de Steiner X(99) passe par l'intersection A' de la médiane partant de B avec la symédiane partant de C et par l'intersection $A"$ de la médiane partant de C et de la symédiane partant de B[5].

[1] *erreur dans l'original :* était -4 au lieu de -2.

[2] Le cercle conjugué est le seul cercle pour lequel un triangle donné est autopolaire. Il n'est réel que si le triangle est obtus (NdT).

[3] *erreur dans l'original :* il faut exclure le cas isocèle

[4] *erreur dans l'original :* il faut exclure le cas isocèle

[5] Les triangles $A'B'C'$ et $A"B"C"$ admettent –toujours– le point X(39) comme perspecteur. Nous avons donc : la droite $A'A"$X(39) contient en outre A et X(99) lorsque le triangle est médian en A.

7 Formules d'identité

Dans la géométrie du triangle les formules d'identité, surtout celles qui ont lieu entre les côtés et les angles dans un membre et R, p, r, etc. dans l'autre, ont une telle importance, que très souvent arrêté d'abord par 1a longueur de certains calculs lors des premiers temps de la géométrie du triangle, j'ai été amené à en calculer beaucoup et à en donner des séries dans divers mémoires, par ex. : (AFAS, Congres de Toulouse (1887), d'Oran (1888), de Limoges (1800), de Marseille (1891), de Pau (1892), et surtout dans 1e mémoire *Étude sur une nouvelle transformation* paru dans Mathesis (1891), lequel en contient plusieurs centaines. Comme le nombre de ces identités est évidemment infini, les géomètres qui n'ont pas pratiqué personnellement la géométrie du triangle pourraient croire à l'inutilité de tels details, mais ils n'ont qu'à se proposer de trouver sans 1eur secours certaines questions qui se résolvent *finalement* par un résultat simple et ils seront vite éclairés.[1] Je citerai, au hasard, parmi elles, l'évaluation de la distance entre les points O et X(57)$=P = a/\left(b+c-a\right)$, etc qui est : $OP = OI\,(2R+r)\,/\,(2R-r)$. Ou celle de la distance PQ, le point Q étant X(9)$=a\left(b+c-a\right)$, donnée par[2] :

$$\frac{4R^2\left(\left(2\,R+5\,r\right)\left(2\,R-r\right)p^2-r\delta^3\right)}{\delta^2\left(2\,R-r\right)^2}$$

Quant à moi, ces formules et la transformation continue me servent constamment pour tous mes mémoires relatifs à la géométrie du triangle et je crois utile d'ajouter encore ici un certain nombre de ces formules, qui toutes ont été rencontrées dans mes calculs, une ou plusieurs fois.

7.1 Relations entre les rayons

Équation aux cotangentes moitié et transformée[3] en A.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{a\,p+r_a^2}{r_a} &&= r_a + a\cot\left(A/2\right) \\ \delta_a &= \frac{a\left(p-a\right)-r^2}{r} &&= -r + a\cot\left(A/2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Relation au premier degré entre les rayons et transformées en A, B, C.

$$\begin{aligned} r_a + r_b &= \frac{c\,p}{r_c} &&= \frac{c\left(p-c\right)}{r} \\ r_c - r &= \frac{c\left(p-a\right)}{r_b} &&= \frac{c\left(p-b\right)}{r_a} \end{aligned} \tag{6}$$

Trois relations par transformation en A et en B :

$$\begin{aligned} b\,r_c + c\,r_b &= \frac{S}{2\,r\,r_a}\left(\left(b+c\right)a-\left(b-c\right)^2\right) \\ b\,r_b + c\,r_c &= \frac{S}{2\,r\,r_a}\left(\left(b+c\right)a+\left(b-c\right)^2\right) \\ b\,r_a + c\,r &= \frac{S}{2\,r_b r_c}\left(\left(b-c\right)a+\left(b+c\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Relation avec δ et transformation continue.

$$\begin{aligned} a\,r_c + b\delta + cr_a &= a\,r_b + b\,r_a + c\delta &&= \\ & \ a\delta + br_c + cr_b &&= 2p\left(2R+r\right) \\ -ar_b + b\delta_a - c\,r &= -ar_c - b\,r + c\delta_a &&= \\ &= -a\delta_a + br_b + cr_c &&= 2\left(p-a\right)\left(2\,R-r_a\right) \end{aligned} \tag{21}$$

[1] Méthode automatisable : toute expression symétrique est fonction de :

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s \\ ab+bc+ca &= r^2+4rR+s^2 \\ abc &= 4srR \end{aligned}$$

On peut alors identifier certains radicaux particuliers, comme $\sqrt{R\left(R-2r\right)} = OI$ (NdT).

[2] *erreur dans l'original :* formule erronée $\overline{PQ}^2 = 4R^4\left(p^2d\left(2\,R+5\,r\right)-r\delta^3\right) \div \delta^2 d^4$, probablement due à une collision avec $d^2 = OI^2 = R\left(R-2\,r\right)$.

[3] *erreur dans l'original :* il y avait $\tan\left(A/2\right)$.

Relation entre les rayons et transformation en B.

$$\begin{aligned}(r+r_a)(r_b+r_c) &= (b+c)\,a \qquad (22)\\ (r_b-r_c)(r_a-r) &= (b-c)\,a\end{aligned}$$

Formules invariantes par transformation continue :

$$\begin{aligned}r\,r_a+r_b\,r_c &= bc \qquad (23)\\ (r_a-r)(r_b+r_c) &= a^2 \qquad (24)\\ r_b\,r_c-r\,r_a &= bc\cos A \qquad (25)\end{aligned}$$

7.2 Formules en cosinus

Formules invariantes par transformation continue :

$$a^2-4\,bc\cos B\cos C=\frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{a^2} \qquad (26)$$

$$b^3\cos C+c^3\cos B-a^3=4\,RS\,(\cos A-2\,\cos B\cos C) \qquad (28)$$

Trois formules par transformation en A et en B :

$$\begin{aligned}a^2+b^2\cos C+c^2\cos B &= 2\,ap-bc\,(\cos B+\cos C) \qquad (29)\\ a^2-b^2\cos C-c^2\cos B &= -2\,a\,(p-a)+bc\,(\cos B+\cos C)\\ a^2-b^2\cos C+c^2\cos B &= 2\,a\,(p-b)+bc\,(\cos B-\cos C)\end{aligned}$$

7.3 Formules symétriques (sans cosinus)

Formule de degré deux et sa transformée.

$$\begin{aligned}\sum bc &= p^2+r\,\delta \qquad (4)\\ ab+ac-bc &= -\,(p-a)^2+r_a\,\delta_a\end{aligned}$$

Une formule et sa transformée en A.

$$\begin{aligned}\sum a^2\,(br_c+cr_b) &= 2\,S\left(p^2+(2\,R+r)\,\delta\right) \qquad (2)\\ \begin{pmatrix}b^2\,(cr+ar_b)\,c^2\,(br+ar_c)\\ \cdots-a^2\,(br_b+cr_c)\end{pmatrix} &= 2\,S\left((p-a)^2-(r_a-2\,R)\,\delta_a\right)\end{aligned}$$

Degré quatre, et sa transformée en A.

$$\begin{aligned}\sum bcr_a^2 &= r\,\left(\delta^3-(8\,R-r)\,p^2\right) \qquad (8)\\ bc\,r^2-ca\,r_c^2-ab\,r_b^2 &= r_a\,\left((p-a)^2\,(8\,R+r_a)-\delta_a^3\right)\end{aligned}$$

Degré cinq, et sa transformée en A :

$$\begin{aligned}\sum b^2c^2r_a &= r\,\left(p^4-2\,r\,(2\,R-r)\,p^2+r\,\delta^3\right) \qquad (9)\\ b^2c^2r-c^2a^2r_c-a^2b^2r_b &= r_a\left((a-p)^4+2\,r_a\,(2\,R+r_a)\,(p-a)^2-r_a\delta_a^3\right)\end{aligned}$$

Degré six

$$\sum a^6=2\,\left(p^2-r\,\delta\right)^3-24\,p^2r^2\,\left(p^2-r\,\delta\right)+48\,R^2p^2r^2 \qquad (7)$$

Une relation et sa transformée en A.

$$\begin{aligned}\sum\frac{a\left(r^2+r_a^2\right)}{r_a-r} &= 2\,p\,(2\,R+r) \qquad (11)\\ -\frac{a\left(r^2+r_a^2\right)}{r_a-r}+\frac{b\left(r_a^2+r_c^2\right)}{r_a+r_c}+\frac{c\left(r_a^2+r_b^2\right)}{r_a+r_b} &= 2\,(p-a)\,(2\,R-r_a)\end{aligned}$$

Une relation et sa transformée en A.

$$\sum \frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{a} = \frac{2p\,(R-2\,r)\left(p^2+r\,\left(r+2\,R\right)\right)}{R} \tag{18}$$

$$-\frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{a}+\frac{\left(c^2-a^2\right)^2}{b}+\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{c} = \frac{2\,(p-a)\,(R+2\,r_a)}{R}\,\left((p-a)^2-r_a\,\left(2\,R-r_a\right)\right)$$

7.4 Formules symétriques (avec cosinus)

Une relation invariante.

$$\sum \frac{\left(b^2+c^2\right)}{bc}\,\cos A = 3 \tag{4}$$

Une relation et sa transformée en A[1].

$$\begin{aligned} \sum r_a\,\cos A &= \frac{p^2-R\delta}{R} && (16)\\ r\,\cos A + r_c\,\cos B + r_b\,\cos C &= \frac{R\delta_a-(a-p)^2}{R} \end{aligned}$$

Une formule et sa transformée en A[2].

$$\begin{aligned} \sum a\,(b+c)\cos A &= \frac{r}{R}\,\left(p^2+(2\,R+r)\,\delta\right) && (1)\\ \begin{pmatrix} b\,(a-c)\cos B + c\,(a-b)\cos C \\ \cdots - a\,(b+c)\cos A \end{pmatrix} &= \frac{r_a}{R}\,ra\,\left(\left(r_a-2\,R\right)\delta_a-(p-a)^2\right) \end{aligned}$$

Une relation.

$$\sum (b-c)\,(3\,a-2\,p)\cos(A) = \frac{p\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{2\,Rr} \tag{17}$$

Une formule et sa transformée en A.

$$\begin{aligned} \sum a\,(p-a)^2\cos A &= \frac{2S}{R}\,\left(2\,R^2-2\,Rr-r^2\right) && (4)\\ a\,p^2\cos A + b\,(p-c)^2\cos B + c\,(p-b)^2\cos C &= \frac{2S}{R}\,\left(2R^2+2Rr_a-r_a^2\right) \end{aligned}$$

Une relation et sa transformée en A.

$$\begin{aligned} \sum \frac{r_a^2\cos A}{a} &= \frac{1}{4Rp}\,\left((16\,R+r)\,p^2-\delta^3\right) && (10)\\ \frac{r^2\cos A}{a}+\frac{r_c^2\cos B}{b}+\frac{r_b^2\cos C}{c} &= \frac{\delta_a^3-(16\,R-r_a)\,(a-p)^2}{4R\,(p-a)} \end{aligned}$$

Une relation et sa transformée en A.

$$\sum a r_b^2 r_c^2\cos A = 2\,\frac{p^3 r}{R}\,\left(2\,R^2-2\,R\,r-r^2\right) \tag{12}$$

$$a\,r_b^2\,r_c^2\cos A + b\,r_b^2\,r^2\cos B + c\,r^2\,r_c^2\cos C = \frac{2\,(a-p)^3\,r_a}{R}\,\left(2\,R^2+2\,R\,r_a-r_a^2\right)$$

[1] *erreur dans l'original :* plusieurs erreurs de signe.
[2] *erreur dans l'original :* il manquait $\cos A$ dans la transformée.

Une relation et sa transformée en A.

$$\begin{aligned}\sum bc\cos^2 A &= \frac{1}{R}\left((R-2\,r)\,p^2 + R\,r\,\delta\right) \qquad (13)\\ -bc\cos^2 A + ca\cos^2 B + ab\cos^2 C &= \frac{1}{R}\left(R\,r_a\,\delta_a - (R+2\,r_a)\,(a-p)^2\right)\end{aligned}$$

Une relation et sa transformée en A.

$$\begin{aligned}\sum a\cos^2 A &= \frac{p}{2R^2}\left(4\,R^2 + 6\,Rr + 3\,r^2 - p^2\right) \qquad (14)\\ b\cos^2 B + c\cos^2 C - a\cos^2 A &= \frac{(p-a)}{2R^2}\left(4R^2 - 6Rr_a + 3\,r_a^2 - (a-p)^2\right)\end{aligned}$$

Une relation et sa transformée en A[1].

$$\sum a^4\cos(A) = \frac{r}{R}\left(5\,p^4 - 2p^2\left(8\,R^2 + 15\,Rr + 5\,r^2\right) + r\,\delta^2\,(2\,R+r)\right) \qquad (15)$$

$$\begin{aligned}&-a^4\cos(A) + b^4\cos(B) + c^4\cos(C) =\\ &\qquad = \frac{r_a}{R}\left(5\,(p-a)^4 - 2\,(p-a)^2\left(5\,r_a^2 + 8\,R^2 - 15\,Rr_a\right) + r_a\,\delta_a^2\,(r_a - 2\,R)\right)\end{aligned}$$

Inclassable.

$$\begin{aligned}&3\,a^2b^2c^2 + \sum a^6 - \sum a^4\left(b^2+c^2\right) = 16\,S^2\overline{OH}^2\\ &\qquad = 16\,S^2\left(9\,R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right)\right) = 16\,R^2S^2\,(1 - 8\cos A\cos B\cos C) \qquad (29)\end{aligned}$$

Enfin, remarquons, quoique n'ayant pas de rapport avec la transformation continue, l'identité :

$$\begin{aligned}&\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right) - (by+cz-xa)^2\\ &\qquad = (bz-yc)^2 - (xc-za)^2 - (ya-bx)^2 \qquad (30)\end{aligned}$$

analogue à l'identité connue : $\sum a^2\sum x^2 - \left(\sum ax\right)^2 = \sum (bz-cy)^2$.

8 Propriétés de maximum et de minimum

8.1 Trois exemples

1. Soit[2] un triangle ABC; M un point de son plan; A', B', C' les points où AM, BM, CM coupent BC, CA, AB. Alors

$$\min\sum\left(b\,\overline{A'B}^2 + c\,\overline{A'C}^2\right) = \frac{8RS\left(p^2 - r^2 - Rr\right)}{p^2 + 2\,Rr + r^2}$$

est atteint lorsque M est X(1), le centre du cercle inscrit. D'autre part,

$$\min\sum\left(c\,\overline{A'B}^2 + b\,\overline{A'C}^2\right) = idem$$

est atteint lorsque M est X(75), le réciproque (=isotomique) de X(1). Cela se démontre par des calculs assez courts en faisant voir que, sur BC pour le premier, le point A' pour lequel $b\,\overline{A'B}^2 + c\,\overline{A'C}^2$ est minimum est le pied de la bissectrice de A, et pour le second que $c\,\overline{A'B}^2 + b\,\overline{A'C}^2$ est minimum si A' est l'isotomique du pied de la bissectrice, c'est-à-dire dire le point symétrique de ce pied par rapport au milieu de BC.

2. Soit L un point du côté BC d'un triangle ABC; soient λ_b, λ_c les projections de L sur AC et sur AB. Le point L qui réalise le minimum de $\overline{L\lambda_b}^2 + \overline{\lambda_b\lambda_c}^2 + \overline{\lambda_c L}^2$ est la projection du point de Lemoine X(6) sur la droite AB.

[1] *erreur dans l'original :* était $5\,(p-a)^2$ au lieu de $5\,(p-a)^4$

[2] Regroupement des sous-sections Ea, Eb, Ec.

3. L'antiparallèle à BC menée par M coupe CA en Ba, AB en Ca. L'antiparallèle à CA donne C_b, A_b et l'antiparallèle à AB donne A_c, B_c. Le point qui réalise :

$$\min \overline{B_aC_a}^2 + \overline{C_bA_b}^2 + \overline{A_cB_c}^2 = \frac{16\,R^2S^2}{\left(p^2 - r\delta\right)^2 - 8\,S^2}$$

est X(3053)$=a^2\left(3\,a^2 - b^2 - c^2\right)$, etc, appartenant à l'axe de Brocard T(110) qui joint le point de Lemoine au centre du cercle circonscrit.

8.2 Concernant les parallèles issues d'un point donné

Soit M un point du plan d'un triangle ABC[1]. Par M je mène des parallèles aux trois côtés dont j'appelle l, m, n les longueurs comprises entre les côtés.

1. Le point P pour lequel $\sum \overline{AP}^2 + \sum l^2$ est minimum est :

$$\frac{1}{-a^2 + 3b^2 + 3c^2}, \text{ etc}$$

Le point général de l'hyperbole de Kiepert CC(X(523)) étant de la forme $1/\left(-\lambda a^2 + b^2 + c^2\right)$, etc, on voit que P appartient à cette hyperbole et on en déduit une construction du point P (cf 10) : $\widehat{\omega}$ étant l'angle de Brocard, on trace l'angle ϕ tel que $\cot\phi = (1/2)\cot\widehat{\omega}$; on forme les triangles isocèles BCA', CAB', ABC' (il suffit d'en tracer deux) qui ont ϕ pour angle à la base, i.e. $\phi = \angle(CA', CB)$. Et alors AA', BB', CC' se coupent en P.

2. Le lieu des points tels $\sum \overline{AM}^2 = \sum l^2$ est l'hyperbole[2] :

$$\sum\left(b^2 + c^2 - 3a^2\right)yz = 0$$

qui passe au point de Steiner X(99)[3]. Elle a pour centre le point :

$$\left(a^2 - bc\cos A\right)\left(a^2 - 3bc\cos A\right), \text{ etc}$$

8.3 Projections liées au triangle pédal

1. Soit $P = p : q : r$ un point du plan d'un triangle ABC qui se projette en A', B', C' sur BC, CA, AB. On désigne par $[p]$, $[q]$, $[r]$ les projections des vecteurs PA', PB', PC' sur un axe orienté de direction Δ. On considère la quantité[4] :

$$V = [p] + [q] + [r]$$

   (a) Lorsque P est le point de Lemoine X(6), la quantité V est nulle pour toute direction.

   (b) Pour chaque point P, cette quantité est nulle pour la direction dont le point à l'infini est

$$\frac{q}{b^2} - \frac{r}{c^2} : \frac{r}{c^2} - \frac{p}{a^2} : \frac{p}{a^2} - \frac{q}{b^2}$$

   (c) Elle est donc extrémale dans la direction orthogonale, dont le point à l'infini est :

$$-p + \frac{S_c}{b^2}\,q + \frac{S_b}{c^2}\,r, \text{ etc}$$

2. On considère maintenant la quantité :

$$W = -[p] + [q] + [r]$$

   (a) Pour $P = -a^2 : b^2 : c^2$, la quantité W est nulle pour toute direction.

   (b) Pour chaque point P, cette quantité est nulle pour la direction[5]

$$\frac{q}{b^2} - \frac{r}{c^2} : \frac{r}{c^2} + \frac{p}{a^2} : -\frac{p}{a^2} - \frac{q}{b^2}$$

[1] Ancienne sous-section Ed

[2] *erreur dans l'original :* l'équation donnée était $\sum\left(b^2 + c^2 - a^2\right)yz = 0$. En outre, ni cette hyperbole, ni l'autre, ne sont équilatère. Le centre donné n'est pas sur le cercle des neuf points... et n'a pas à y être.

[3] *erreur dans l'original :* la conique n'a pas même direction d'axes que la conique de Steiner

[4] Cette Section, ancienne Ee1, revient à expliquer que le vecteur $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}$ est vu de front sur sa propre direction, et vu d'en bout sur la direction orthogonale.

[5] *erreur dans l'original :* pas les bons signes (conjugaison en a^2).

8.4 Méthode pour spécifier deux directions orthogonales

Lorsque l'on veut spécifier[1] analytiquement ou construire deux directions remarquables perpendiculaires l'une à l'autre, comme, par exemple, lorsque que l'on recherche la direction des axes de la plupart des coniques remarquables, inscrites ou circonscrites à un triangle, on trouve analytiquement des expressions compliquées de radicaux et, géométriquement, des constructions souvent complexes ; cette circonstance s'explique parfaitement par la nature des choses, mais il n'est pas impossible de trouver une interprétation élégante des résultats. Elle est, le plus souvent, donnée analytiquement et géométriquement par le théorème suivant :

Soit M un point du cercle circonscrit d'un triangle ABC, je joins M à un sommet quelconque du triangle, A par exemple; les bissectrices des angles que la direction AM fait avec la direction BC ont une direction constante, quel que soit le sommet choisi.

Il suit de là qu'au point M correspondent deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, bien déterminées, et réciproquement, de sorte que chaque direction de deux droites remarquables associées par la perpendicularité, correspond un point remarquable M qui détermine leur direction. Nous allons énoncer quelques théorèmes qui feront ressortir l'avantage de ces considérations, et nous emploierons, dans le sens que nous venons de définir, l'expression de : point M correspondant à telles directions et réciproquement.

Pour toute conique circonscrite à ABC, les directions des axes ont évidemment pour point M, le quatrième point d'intersection de la conique et du cercle circonscrit.

8.5 Projections d'un vecteur fixé

1. J'appelle l, m, n les mesures algébriques des projections sur les axes BC, CA, AB d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de module ρ fixé et de direction variable[2]. Alors la quantité $l+m+n$ est nulle lorsque la direction de $\overrightarrow{V}$ est X(517), point à l'infini de la droite OI. Pour la direction orthogonale, X(513), qui est celle de l'axe antiorthique, cette même quantité est extrémale et vaut $\rho\, OI/R$. Le point $M \in \Gamma$ est ici X(901).

2. Par transformation continue, la quantité $-l+m+n$ est nulle pour la direction de OI_a et maximale et valant $\rho\, OI_a/R$ pour la direction orthogonale, celle de l'interbissectrice en A $-x/a+y/b+z/c=0$.

3. Si l'on s'intéresse à la somme $\overrightarrow{S}$ des vecteurs obtenus par projection d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de module ρ fixé et de direction variable[3], cette somme n'est jamais nulle. Elle est maximale pour la direction X(2574) :

$$abcW^2 + a^2\left(a^2b^2+a^2c^2-b^4-c^4\right)W - 3\,a^3bc\left(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2\right)$$
$$\text{where } W = \sqrt{\sum a^6 - \sum a^4b^2 + 3\,a^2b^2c^2}$$

   et minimale pour la direction X(2575) obtenue avec le radical opposé. On obtient $\left(3 \pm W/abc\right)/2$ comme valeurs de $\left|\overrightarrow{S}\right| \div \left|\overrightarrow{V}\right|$.

4. Si l'on s'intéresse à la quantité[4] $l^2+m^2+n^2$, on obtient à nouveau X(2574) et X(2575) comme directions produisant les valeurs extrémales. On a même, pour toute direction, les encadrements :

$$\frac{3}{2} - \frac{W}{2abc} \leq \frac{\left|\overrightarrow{S}\right|^2}{\Sigma l^2}, \frac{\Sigma l^2}{\left|\overrightarrow{V}\right|^2}, \frac{\left|\overrightarrow{S}\right|}{\left|\overrightarrow{V}\right|} \leq \frac{3}{2} + \frac{W}{2abc}$$

5. Le point M du cercle circonscrit correspondant à X(2574) et X(2575) est X(110)$=a^2/\left(b^2-c^2\right)$, etc. Rappelons que les directions voulues correspondent aux bissectrices de l'angle que fait AM avec BC.

[1] Ce paragraphe, anciennement placé en Ef1, a été placé ici car il permet un éclairage remarquable des paragraphes Ee2 et Ee3 à venir (NdT).

[2] Ancienne Section Ee2.

[3] Paragraphe ajouté. L'original indiquait : la somme des projections, sans autre précision. Les deux interprétations sont intéressantes (NdT).

[4] *erreur dans l'original :* il s'agit bien de $l^2+m^2+n^2$ et pas de -$l^2+m^2+n^2$.

6. On considère le vecteur $\overrightarrow{S} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA} + c\overrightarrow{AB}$, ce qui revient à porter sur chaque côté une longueur égale au carré de ce côté[1]. La direction pour laquelle la projection de $\overrightarrow{S}$ sur cette direction est maximum ou nulle est, pour le premier cas, X(514)=$b-c$, etc qui est la direction de l'axe de Gergonne et de la droite $\sum ax = 0$; pour le second cas c'est la direction perpendiculaire X(516)=$a\left(a^2 - b^2\cos C - c^2\cos B\right)$, etc. Le point $M \in \Gamma$ correspondant est X(927).

8.6 Autres projections

1. En appelant $[m]$ ou $[MN]$ la projection de m ou de MN sur une direction Δ, on demande de déterminer la direction Δ telle que $[BC]^2 + [CA]^2 + [AB]^2$ soit maximum ou minimum. Voici le résumé du calcul. Soit α l'angle que la direction cherchée fait avec BC, il faut rendre :

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2(\alpha - C) + c^2\cos^2(\alpha + B)$$

maximum ou minimum. On en déduit[2] :

$$\tan(2\alpha) = \frac{b^2c^2\left(b^2-c^2\right)}{a^2 + b^2\cos 2C + c^2\cos 2B} = \frac{b^2c^2\left(b^2-c^2\right)}{4S\left(m^2R^2 - b^2c^2\right)}$$

avec $m^2 = a^2 + b^2 + c^2$. On voit que si je mène par A une parallèle à la direction que détermine cette valeur de 2α, parallèle coupant BC en A', et le cercle circonscrit en M, les bissectrices des angles que BC fait avec $A'M$ auront les directions cherchées. De la valeur de $\tan 2\alpha$, je déduis que le coefficient angulaire de cette direction est $\left(b^2-c^2\right)/\left(a^2-c^2\right)$. Le point à l'infini est donc $b^2 - c^2 : a^2 - b^2 : c^2 - a^2$[3]. La droite parallèle menée par A est donc: $y/z = \left(a^2-b^2\right)/\left(c^2-a^2\right)$. D'où enfin le point M sur le cercle circonscrit est X(99)=$1/\left(b^2-c^2\right)$, etc. Ces directions sont celles des axes des coniques inscrites ou circonscrites de Steiner. C'est aussi là un moyen de les construire.

2. Si l'on cherche la direction des axes des ellipses de Césaro[4] :

$$\sum \frac{x^2}{a^2} - Cte\,(x+y+z)^2 = 0$$

on trouve le point X(110)=$a^2/\left(b^2-c^2\right)$, etc comme point M. Ce point détermine leur direction de la façon que nous avons indiquée, et cela donne un moyen simple de tracer ces directions.

3. $P = x : y : z$ est un point du plan d'un triangle que je projette en A', B', C' sur les côtés. Déterminer la direction Δ pour laquelle $Q = [PA']^2 + [PB']^2 + [PC']^2$ est maximum ou minimum. On trouve que les directions Δ correspondent au point M du cercle circonscrit qui a pour coordonnées :

$$\frac{a^2}{\left(c^2y^2 - z^2b^2\right)a^4 + b^2c^2\left(b^2-c^2\right)x^2}, \text{ etc} \tag{31}$$

Si P est par exemple X(6)=K, X(3)=O, X(2)=G, on voit que le point M est respectivement le point de Steiner X(99), le point X(110)= $a^2/\left(b^2-c^2\right)$, etc, le point X(805)=$a^2 \div \left(b^2-c^2\right)\left(a^4 - b^2c^2\right)$, etc. Enfin on a un curieux théorème d'invariance : si P est le point $P_0 = a\sqrt{a\cos A}$, etc ou l'un de ses associés, la quantité Q est constante quelle que soit la direction Δ. Pour le point P_0 lui-même, cette constante est:

$$\frac{4S^3}{R\left(a\sqrt{a\cos A} + b\sqrt{b\cos B} + c\sqrt{c\cos C}\right)^2}$$

A cette invariance ne correspondent de points réels que si le triangle ABC est acutangle. Connaissant le point $M = l : m : n$ du cercle circonscrit, trouver lieu des points P. Le lieu de P est, d'après l'énoncé même de la question $m/M_m = n/M_n$ soit :

$$\frac{b^2c^2(m+n)}{a^2}x^2 + \frac{c^2\left(ma^2 - mc^2 - nb^2\right)}{b^2}y^2 + \frac{b^2\left(-mc^2 + na^2 - nb^2\right)}{c^2}z^2 = 0 \tag{32}$$

[1] Ceci peut se réaliser en considérant BB' avec $B' = 0 : 1-a : a \in BC$ etc.
[2] *erreur dans l'original :* il y avait $-b^2\cos 2C$.
[3] Cette expression n'est pas circulaire en a, b, c. Elle n'a pas à l'être car elle est relative à l'angle α, qui privilégie BC.
[4] Leur centre commun est le point de Lemoine X(6).

qu'on aurait sous deux autres formes, si l'on avait employé les coordonnées n, l ou l, m du point M. Ce lieu est une conique qui passe toujours par P_0 et ses associés. Si l'on particularise le point M, la conique (32) reprend une forme symétrique. Par exemple, si M est le point de Steiner X(99), le lieu (32) de P devient :

$$b^4c^4\left(b^2-c^2\right)x^2+c^4a^4\left(c^2-a^2\right)y^2+a^4b^4\left(a^2-b^2\right)z^2=0$$

Cette propriété d'invariance, comme d'ailleurs, les autres propriétés de ce paragraphe relatives aux projections, se conservent quand au lieu de trois droites on en prend un plus grand nombre. Ainsi, si l'on a n droites dans le plan, il existe toujours quatre points P tels que A', B', C', D', etc. étant les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur ces droites, on ait $[PA']^2+[PB']^2+[PC']^2+[PD']^2+\cdots=$constante, quelle que soit la direction Δ.

4. La quantité[1] $l.[BC]+m.[CA]+n.[AB]$ est extremale si M est le point X(100)$=a/\left(b-c\right)$, etc. du cercle circonscrit, auquel correspondent aussi les directions des axes de $ayz+bzx+cxy=0$. La quantité[2] -$l.[BC]+m.[CA]+n.[AB]$ est maximale si M est le point $a/\left(b-c\right):-b/\left(a+c\right):c/\left(a+b\right)$ du cercle circonscrit, auquel correspondent aussi les directions[3] des axes de $-ayz+bzx+cxy=0$.

5. Voici un problème pour lequel la considération du point M correspondant à deux directions rectangulaires, permet d'arriver à une interprétation *imagée* du résultat qui, sans elle, se présente sous une forme bien peu élégante et nous ne voyons guère de moyen naturel d'y arriver autrement.
   Soient dans un triangle ABC un point M_1 et une force M_1F de direction donnée, appliquée en M_1. On la décompose en trois forces f_a, f_b, f_c dirigées suivant M_1A, M_1B, M_1C sous la condition que $f_a^2+f_b^2+f_c^2$ soit minimum. Quelles directions faut-il donner à M_1F pour que cette somme $f_a^2+f_b^2+f_c^2$ soit le maximum minimorum ct le minimum minimorum ?
   Il faut faire un triangle $A'B'C'$ dont les trois côtés a', b', c' sont parallèles à M_1A, M_1B, M_1C; chercher le point μ du cercle circonscrit à $A'B'C'$ qui a pour coordonnées $a'^2/\left(b'^2-c'^2\right)$, etc. par rapport au triangle de référence $A'B'C'$. Ce point μ est le point M correspondant aux directions cherchées. On peut remarquer que ce sont les directions des axes des ellipses de Césaro du triangle $A'B'C'$ (lieux des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés soit constante).

6. Les directions des axes de la conique :

$$lx^2+my^2+nz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

sont données par le point M du cercle circonscrit qui a pour coordonnées

$$\frac{1}{\left(l+m-2h\right)b^2-\left(n+l-2g\right)c^2},\text{ etc.}$$

cette expression étant toujours entendue dans le sens où elle est expliquée Subsection 8.4. Nous avons donné plusieurs des résultats compris dans les paragraphes ci-dessus comme questions proposées, dans *Mathesis*, questions 1222 (1899); 1257 (1900), etc.

[1] Que peuvent bien être ces l, m, n ?
[2] Que peuvent bien être ces l, m, n ?
[3] *erreur dans l'original :* Le point donné était $a/\left(b-a\right):b/\left(a+c\right):c/\left(a+b\right)$, qui n'est pas sur le cercle circonscrit.

Index