

# Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten

Von

**Dr.-Ing. H. Marcus**

Vorstandsmitglied der HUTA Hoch- und Tiefbau-Akt.-Ges.,  
Breslau

Zweite, erweiterte Auflage

Mit 65 Abbildungen  
im Text



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1929

ISBN-13:978-3-642-90076-1 e-ISBN-13:978-3-642-91933-6  
DOI: 10.1007/978-3-642-91933-6

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1929

## Vorwort zur ersten Auflage.

Der vom Deutschen Ausschuß für Eisenbeton eingesetzte Sonderausschuß für die Ausarbeitung der neuen amtlichen Bestimmungen hat mich im vorigen Jahre aufgefordert, neue Vorschriften und Formeln für die Berechnung und Ausbildung kreuzweise bewehrter Decken vorzuschlagen.

Ich habe auf Grund der genauen, in meinem Buch über die „Theorie elastischer Gewebe“ durchgeführten Untersuchungen ein einheitliches Näherungsverfahren für die Behandlung aller Lagerungsarten ausgearbeitet und in einem ausführlichen Bericht dem Sonderausschuß unterbreitet. Nach eingehender Prüfung wurde von diesem Ausschuß beschlossen, die Anwendung des neuen Verfahrens in den amtlichen Bestimmungen zu empfehlen und die wichtigsten Formeln in den Vorschriften aufzunehmen. Da zugleich der Wunsch ausgesprochen wurde, den Bericht einem größeren Kreis von Fachgenossen vorzulegen, habe ich im vorigen Jahre den Aufsatz über „Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten“ in der Zeitschrift „Der Bauingenieur“ veröffentlicht. In dieser Arbeit werden die Grundlagen des Näherungsverfahrens behandelt und seine Anwendung auf gleichförmig belastete Platten erläutert.

In der vorliegenden Schrift habe ich den vorjährigen Aufsatz und eine neue Untersuchung über den Einfluß von Einzellasten zusammengefaßt. Um die Ingenieure bei der Durchführung und die baupolizeilichen Behörden bei der Prüfung des Verfahrens zu unterstützen, ist für jede Lagerungsart der Platten die praktische Handhabung der Näherungsformeln durch ein ausführliches Zahlenbeispiel veranschaulicht.

Ich hoffe, daß die überaus einfache und doch sehr zuverlässige Berechnung zu einer häufigeren und umfassenderen Anwendung kreuzweise bewehrter Eisenbetondecken, zu einer besseren Ausnutzung ihrer Tragfähigkeit führen wird. Ist dies Ziel erreicht, so wird diese kleine Schrift ihren Zweck erfüllt<sup>1</sup> haben.

Carlowitz bei Breslau, März 1925.

H. Marcus.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Die in meiner Schrift entwickelten Formeln für die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten sind in den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton vom September 1925 als Grundlage für die Bemessung kreuzweise bewehrter Decken empfohlen worden. Ihre häufige Anwendung und die zahlreichen Veröffentlichungen, die sich mit ihrer rechnerischen Auswertung befassen, lassen wohl erkennen, daß das neue Verfahren sich als brauchbar erwiesen hat und veranlassen mich, der ersten, rasch vergriffenen Auflage eine zweite folgen zu lassen.

Sie bringt im Anschluß an meine Aufsätze in der Zeitschrift „Der Bauingenieur“ 1926 und 1929 im Abschnitt III eine umfassendere Behandlung der Drillungsmomente, im Abschnitt VI eine ausführliche Untersuchung über die Beanspruchung der Bewehrung unter Berücksichtigung der schiefen Hauptspannungen, während die Abschnitte I und II, auf die sich in erster Linie die Empfehlung des Deutschen Ausschusses bezieht, im wesentlichen unverändert geblieben und die Abschnitte IV und V in einigen Einzelheiten ergänzt und verbessert worden sind.

Die bisher vorliegenden Ergebnisse der neuen Plattenversuche des Deutschen Ausschusses haben diese Erweiterung veranlaßt und zu wichtigen, neuen Erkenntnissen geführt.

Bei dem fortschreitenden Ausbau der in der ersten Auflage durchgeführten Untersuchungen habe ich mir stets als Ziel vorgehalten, die vielseitigen Ergebnisse der genauen Berechnungen in tunlichst einfachen, anschaulichen und wirklich zuverlässigen Näherungsformeln zusammenzufassen, welche den praktischen Anforderungen möglichst entsprechen und den Ingenieuren hoffentlich gute Dienste leisten werden.

Möge das Buch mit seinem erweiterten Inhalt die gleiche wohlwollende Aufnahme finden, wie sie der ersten Auflage beschieden war.

Breslau-Carlowitz, im Juli 1929.

**H. Marcus.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Platte und Trägerrost . . . . .	1
§ 1. Die Wirkung der Drillungsmomente . . . . .	2
§ 2. Die Grundlagen des neuen Näherungsverfahrens . . . . .	5
II. Die Biegemomente der gleichförmig belasteten Platte. . . . .	8
§ 3. Die ringsum frei aufliegende Platte . . . . .	8
§ 4. Die ringsum eingeklemmte Platte . . . . .	14
§ 5. Platten an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt . . . . .	20
§ 6. Platten an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt . . . . .	22
§ 7. Platten an zwei benachbarten Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. . . . .	23
§ 8. Platten an drei Seiten fest eingeklemmt und an einem Rande frei aufliegend. . . . .	24
§ 9. Durchlaufende Platten:	
1. Der Einfluß einer gleichmäßigen Belastung aller Felder. . . . .	25
2. Der Einfluß einer wechselweisen Belastung der Felder . . . . .	31
3. Beispiel . . . . .	33
III. Die Drillungsmomente der gleichförmig belasteten Platte . . . . .	39
§ 10. Die zugeordneten Momentenflächen. . . . .	39
§ 11. Die ringsum frei aufliegende Platte. . . . .	43
§ 12. Die ringsum eingeklemmte Platte . . . . .	47
§ 13. Platten an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt . . . . .	51
§ 14. Platten an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. . . . .	54
§ 15. Platten an zwei benachbarten Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt . . . . .	55
§ 16. Platten an drei Seiten fest eingeklemmt und an einem Rande frei aufliegend . . . . .	56
§ 17. Durchlaufende Platten. . . . .	56
§ 18. Die Ersatzmomente der Hauptspannungen . . . . .	57
IV. § 19. Auflagerkräfte der gleichförmig belasteten Platte. . . . .	63
V. Der Einfluß von Einzellasten. . . . .	69
§ 20. Die ringsum frei aufliegende Platte. . . . .	69
§ 21. Die ringsum eingeklemmte Platte . . . . .	82
§ 22. Die durchlaufende Platte . . . . .	90
VI. Die Beanspruchung der Bewehrung . . . . .	100
§ 23. Die Ersatzbewehrung . . . . .	102
§ 24. Die Ersatzmomente . . . . .	106
§ 25. Die Verankerung der Randbewehrung. . . . .	115
§ 26. Beispiel für die Querschnittsbemessung der kreuzweisen Bewehrung einer drillungsfesten Platte . . . . .	120

## I. Platte und Trägerrost.

Die grundlegende Bedeutung der mathematischen Theorie biegsamer Platten für eine einwandfreie Berechnung und bauliche Ausbildung der Decken ist bisher im Eisenbetonbau nicht genügend gewürdigt und aus der neuen Entwicklung dieses wichtigen Abschnittes der Festigkeitslehre, aus den großen Fortschritten in ihrer Anwendung noch kein Nutzen gezogen worden.

Jede Decke wird, obgleich sie meistens an allen Rändern gestützt ist, nicht als Platte, sondern fast immer nur als Balken behandelt und nur in einer Richtung bewehrt; da ihre Berechnung und Ausbildung weder den vorhandenen Auflagerbedingungen noch der wirklichen Anstrengung entspricht, so ist sehr häufig die Platte zu stark, die Bewehrung zu reichlich und unrichtig verteilt.

Die Decken mit gekreuzten Eiseneinlagen werden eigentlich auch nicht als Platten behandelt, sondern durch einen Rost von Längs- und Querbalken ersetzt. In meinem Buche über die „Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten“<sup>1</sup> habe ich nachgewiesen, daß die wirkliche Anstrengung der Platte und die Beanspruchung dieses gedachten Trägerortes in erheblichem Maße voneinander abweichen und daß die für diesen Rost abgeleiteten und in den früheren amtlichen Bestimmungen empfohlenen Näherungsformeln ein unzulängliches Bild der tatsächlichen Spannungsverteilung liefern und für eine ausreichend sichere und wirtschaftliche Querschnittsbemessung der Platten kaum brauchbar sind.

Da eine einwandfreie Untersuchung auf Grund der mathematischen Elastizitätstheorie, obgleich sie durch die Verwendung räumlicher Seil-ecke oder Gewebe wesentlich erleichtert wird, den meisten Ingenieuren zu schwierig und für die Behandlung einer einfachen Decke viel zu zeitraubend erscheint, so will ich in dem vorliegenden Aufsatz für die Leser, welche die Mühe scheuen, sich in die Grundlagen der strengen Plattentheorie zu vertiefen, den Unterschied zwischen Trägerrost und Platte in einer möglichst leicht verständlichen Fassung zeigen und im Anschluß an den Bericht, den ich dem Deutschen Ausschuß für Eisenbeton unterbreitet habe, neue Näherungsformeln für die Berechnung kreuzweise bewehrter Decken mitteilen, ihre Zuverlässigkeit durch den Vergleich mit den Ergebnissen der genauen Untersuchungen beleuchten und ihre Anwendung an einigen Beispielen eingehend erläutern.

---

<sup>1</sup> Berlin: Julius Springer 1924.

### § 1. Die Wirkung der Drillungsmomente.

Betrachten wir zunächst die in Abb. 1 dargestellte rechteckige

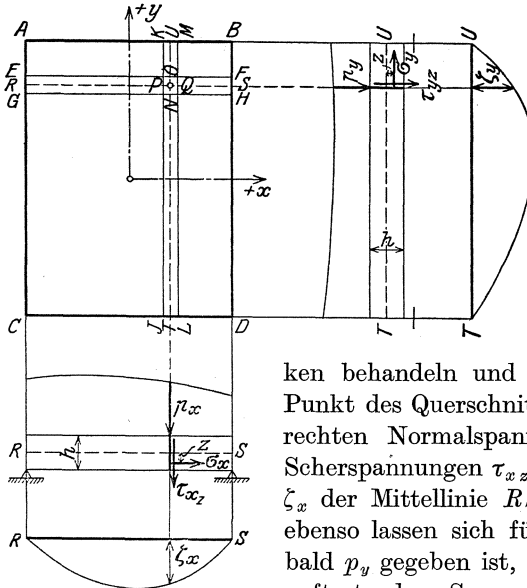


Abb. 1.

Platte  $ABCD$ , welche ringsum frei aufliegt und die stetig verteilte Belastung  $p$  trägt. Wir denken uns zwei Streifen  $EFGH$  und  $JKLM$  parallel zur  $x$ - und zur  $y$ -Richtung herausgeschnitten und  $p$  in die Lastanteile  $p_x$  und  $p_y$  zerlegt. Wenn  $p_x$  bekannt ist, so können wir den Streifen  $EFGH$  als einfachen Balken behandeln und beispielsweise die in jedem Punkt des Querschnittes  $NO$  auftretenden wagerechten Normalspannungen  $\sigma_x$  und lotrechten Scherspannungen  $\tau_{xz}$  wie auch die Durchbiegung  $\zeta_x$  der Mittellinie  $RS$  ohne weiteres ermitteln; ebenso lassen sich für den Streifen  $JKLM$ , sobald  $p_y$  gegeben ist, die in dem Querschnitt  $PQ$  auftretenden Spannungen  $\sigma_y$  und  $\tau_{yz}$  und die Durchbiegung  $\zeta_y$  der Mittellinie  $TU$  bestimmen.

Da offenbar an jeder Kreuzungsstelle von Längs- und Querbalken

$$p_x + p_y = p \quad (1)$$

und

$$\zeta_x = \zeta_y \quad (2)$$

sein muß, so genügen diese beiden Bedingungen, um für jeden Punkt der Mittelfläche der Platte die jeweiligen Anteile  $p_x$  und  $p_y$  und die Spannungen in den zugehörigen Balken zu ermitteln.

So einfach dieser Gedankengang erscheint, so schwierig ist aber auch seine einwandfreie Durchführung. Die Durchbiegung  $\zeta_x$  hängt nämlich nicht allein von  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$ , sondern auch mittelbar von  $\sigma_y$  und  $\tau_{yz}$  ab und wird außerdem wesentlich durch die wagerechten Schubspannungen  $\tau_{xy}$  in den lotrechten Berührungsflächen der beiden Streifen beeinflusst.

Um die Entstehung und die Wirkung dieser Schubspannungen zu veranschaulichen, sind zwei benachbarte Querstreifen  $A_1B_1C_1D_1$  und  $A_2B_2C_2D_2$  in Abb. 2 dargestellt. Da sie im allgemeinen ungleich beansprucht sind, so entsprechen den ungleichen Spannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  der nebeneinanderliegenden Fasern auch ungleiche Kürzungen oder Dehnungen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und ungleiche Neigungswinkel  $\omega_1, \omega_2$  der Quer-

schnittsebenen  $E_1F_1, E_2F_2$ ; die einander zugekehrten Stirnflächen  $C_1D_1$  und  $A_2B_2$  würden, wenn die Balken  $A_1B_1C_1D_1$  und  $A_2B_2C_2D_2$  wirklich vollständig getrennt wären, reibungslos aneinandergleiten. Da sie jedoch gewissermaßen aneinandergekittet sind, so entsteht in den Berührungsflächen der durch die wagerechten Schubspannungen  $\tau_{yx}$  gekennzeichnete Gleitwiderstand.

Ebenso werden in den Berührungs-

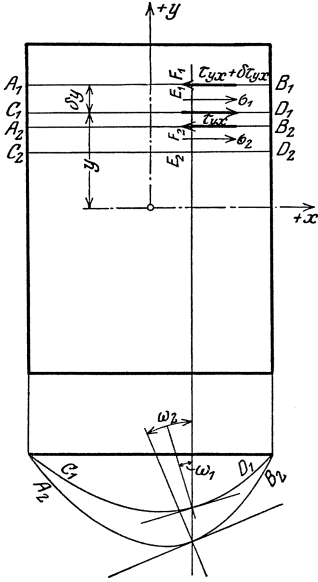


Abb. 2.

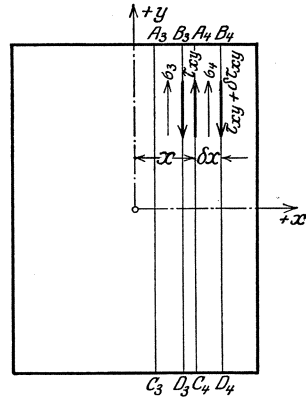


Abb. 2 a.

flächen  $B_3D_3$  und  $A_4C_4$  der beiden benachbarten Längsstreifen  $A_3B_3C_3D_3$  und  $A_4B_4C_4D_4$  die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  hervorrufen (Abb. 2 a).

Es ist leicht zu erkennen, daß diese Spannungen um so stärker sein müssen, je mehr die elastischen Formänderungen der angrenzenden Streifen voneinander abweichen. Sie nehmen, wie die Dehnungen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , vom unteren Rande bis zur Mittelfläche der Platte ab und sind dem jeweiligen Unterschied der Neigungswinkel  $\omega_1, \omega_2$  unmittelbar proportional. Bezeichnet man mit  $G$  die Schubelastizitätsziffer des Baustoffes, mit  $z$  den Abstand der wagerechten Fasern von der Plattenmittelfläche, mit  $h$  die Plattenstärke, so findet diese Abhängigkeit ihren Ausdruck in der bekannten Elastizitätsgleichung:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2Gz \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Die auf einen kleinen Abschnitt der Vorderfläche des Streifens  $A_1B_1C_1D_1$  verteilten Spannungen  $\tau_{yx}$  sind in größerem Maßstabe in Abb. 3 dargestellt. Sie bilden ein um die Normale  $n - n$  drehendes

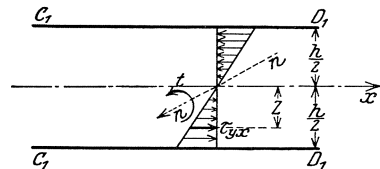


Abb. 3.



Kräftepaar, nämlich das Verdrehungs- oder Drillungsmoment:

$$t = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz = -G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

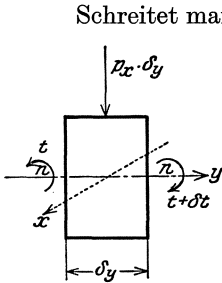


Abb. 3a.

Schreitet man in der Richtung der  $y$ -Achse um die Streifenbreite  $\partial y$  fort, so wachsen die Schubspannungen um  $\partial \tau_{yx}$  und die Drillungsmomente um  $\partial t$ . Betrachtet man den Streifen  $A_1 B_1 C_1 D_1$  von der Fläche  $B_1 D_1$  aus, so sieht man am oberen Rande die eigentliche Belastung  $p_x dy$  (Abb. 3a) und an den seitlichen Begrenzungsflächen die aneinander entgegengerichteten Momente  $t$  und  $(t + \partial t)$ , die sich durch das resultierende Kräftepaar:

$$n_y \partial y = t - (t + \partial t) = -\partial t$$

ersetzen lassen. Der spezifische Wert dieses Kräftepaares ist

$$\left. \begin{aligned} n_y &= -\frac{\partial t}{\partial y} = G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^2 \partial x} \\ &= G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ebenso lassen sich bei den zur  $x$ -Achse senkrecht stehenden Streifen  $A_4 B_4 C_4 D_4$  (Abb. 2a) die Drillungsmomente der Seitenflächen zu einem Kräftepaar:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= -\frac{\partial t}{\partial x} = G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \\ &= G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = G \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

vereinigen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) erkennt man, daß sowohl die Drillungsmomente  $t$  wie auch die zugehörigen Kräftepaare  $n$  von der Neigung der elastischen Linie abhängig sind.

Handelt es sich beispielsweise um eine achsensymmetrische Belastung, so ist  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  in der Mitte gleich Null und nimmt mit wachsender Entfernung von der Mitte zu. Die Momente  $n_y$  müssen daher wie die lotrechten Querkräfte in der Balkenmitte ihren Drehungssinn wechseln und an den aufliegenden Rändern wie in Abb. 4 ersichtlich, ihren Größenwert erreichen. Da sie im Gegensatz zur Belastung  $p$  das Bestreben haben, die Platte nach oben zu wölben, so vermindern sie in ganz erheblichem Maße ihre Durchbiegung und ihre Beanspruchung. In dieser für die Tragfähigkeit der Platte außerordentlich wichtigen

Einwirkung der Drillungsmomente liegt der wesentliche Unterschied zwischen Platte und Trägerrost. Die früher üblichen Näherungsverfahren, welche diesen günstigen Einfluß vollständig außer acht lassen, liefern, wie die eingehenden Untersuchungen in § 9 meines Buches gezeigt haben, unrichtige und häufig zu hohe Werte für die Beanspruchung der Platte und gestatten auch nicht, die wirklichen Auflagerwiderstände mit ausreichender Sicherheit zu bestimmen.

Die Unzulänglichkeit dieser Näherungsverfahren tritt noch deutlicher in Erscheinung, wenn die Anstrengung der Platte beurteilt werden soll. Die für den Trägerrost errechneten Werte  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  reichen zur Ermittlung der größten Beanspruchungen nur für diejenigen Punkte aus, in denen die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  verschwinden; alle Hauptspannungen, welche nicht der  $x$ - oder  $y$ -Achse parallel gerichtet sind, insbesondere die Diagonalspannungen, welche vielfach in der Nähe der Ecken ihren Größtwert erreichen, lassen sich nicht durch das Näherungsverfahren erfassen.

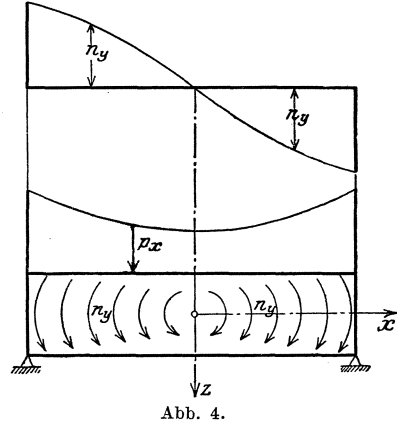


Abb. 4.

## § 2. Die Grundlagen des neuen Näherungsverfahrens.

Unsere nächste Aufgabe ist nunmehr zu untersuchen, ob es möglich ist, den Einfluß der Drillungsmomente in einer für alle Lagerungsarten der Platte gültigen, möglichst einfachen und zuverlässigen Formel zum Ausdruck zu bringen und hierdurch die Fehler des Näherungsverfahrens zu berichtigen.

Ich wähle als erstes Beispiel die gleichmäßig belastete, ringsum frei aufliegende Platte mit den Spannweiten  $l_x$  und  $l_y$  (Abb. 5); ich schneide längs der  $x$ - und  $y$ -Achse zwei Streifen  $EFGH$  und  $JKLM$  mit der gleichen Breite  $b$  ab und weise ihnen die Lastanteile  $p_x$  und  $p_y$  zu.

Schalten wir zuerst die Drillungsmomente aus, so können wir die Biegemomente  $\mathfrak{M}_x$  und  $\mathfrak{M}_y$ , die Durchbiegungen  $\delta_x$  und  $\delta_y$  wie bei einem einfachen Balken errechnen. Für den Mittelpunkt der Streifen ergibt sich

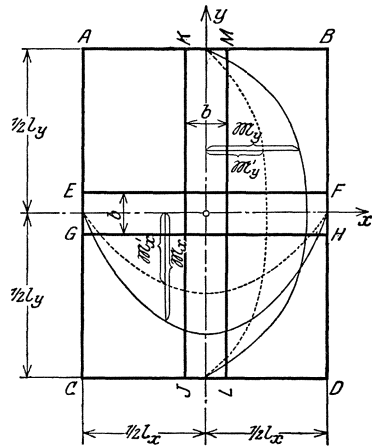


Abb. 5.

Für den Mittelpunkt der Streifen ergibt sich

beispielsweise, wenn auf die Veränderlichkeit von  $p_x$  und  $p_y$  keine Rücksicht genommen wird:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}'_x &= b p_x \frac{l_x^2}{8} \\ \mathfrak{M}'_y &= b p_y \frac{l_y^2}{8} \\ \delta_x &= \frac{5}{32} \cdot \frac{p_x l_x^4}{E h^3} \\ \delta_y &= \frac{5}{32} \cdot \frac{p_y l_y^4}{E h^3} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Unter  $E$  ist hierbei das Elastizitätsmaß des Baustoffes zu verstehen.

Lassen wir jetzt die auf den Stirnflächen  $EF$ ,  $GH$  verteilten Drillungsmomente allein für sich wirken, so erscheint der Streifen  $EF GH$  mit Kräftepaaren

$$b n_y = G \frac{b h^3}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

belastet. Unter ihrem Einfluß entstehen die elastischen Verschiebungen  $\delta'$  und die zusätzlichen Biegemomente:

$$\mathfrak{M}'_x = \int b n_y dx = G \frac{b h^3}{6} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + C.$$

Bei achsensymmetrischer Belastung und freier Randauflagerung fällt die Integrationskonstante  $C$  fort, und wir können, wenn wir mit

$$\frac{1}{\varrho_y} = - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$$

die Krümmung der elastischen Fläche in der  $y, z$ -Ebene bezeichnen,

$$\mathfrak{M}'_x = - G \frac{b h^3}{6 \varrho_y}$$

setzen.

Durch ähnliche Betrachtungen findet man für die Biegemomente  $\mathfrak{M}'_y$ , welche unter dem alleinigen Einfluß der Drillungsmomente im Streifen  $JKLM$  entstehen, die Beziehung:

$$\mathfrak{M}'_y = - G \frac{b h^3}{6 \varrho_x}$$

wobei

$$\frac{1}{\varrho_x} = - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

die Krümmung der elastischen Fläche in der  $x, z$ -Ebene bedeutet.

Da wir wissen, daß bei einer achsensymmetrischen, durchweg positiven und stetig verteilten Belastung die Krümmung der frei aufliegenden Streifen in der Mitte ihren Größtwert erreicht und an den Rändern verschwindet, so ist es nicht schwer, den wahrscheinlichen

Verlauf der Krümmungsveränderlichkeit und mithin auch der Biegemomente  $\mathfrak{M}'_x, \mathfrak{M}'_y$  von vornherein anzugeben. Die Abb. 5, welche diesen Verlauf für die beiden Streifen veranschaulicht, zeigt, daß die  $\mathfrak{M}'_x, \mathfrak{M}'_y$ - den  $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y$ -Linien ähnlich sein können.

Aus dieser Ähnlichkeit darf auch für die durch die Momente  $\mathfrak{M}'_x, \mathfrak{M}'_y$  hervorgerufenen zusätzlichen Durchbiegungen  $\delta'_x, \delta'_y$  eine entsprechende Verknüpfung mit den Verschiebungen  $\delta_x, \delta_y$  gefolgert und daher in erster Annäherung:

$$\frac{\delta'_x}{\delta_x} = \frac{\delta'_y}{\delta_y} \quad (7)$$

gesetzt werden.

Der wirkliche Spannungszustand und die zugehörige elastische Fläche sind durch die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}'_x \\ M_y &= \mathfrak{M}_y + \mathfrak{M}'_y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

und die Verschiebungen

$$\left. \begin{aligned} \zeta_x &= \delta_x + \delta'_x \\ \zeta_y &= \delta_y + \delta'_y \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

gekennzeichnet. Da an der Kreuzungsstelle der beiden Streifen

$$\zeta_x = \zeta_y$$

ist, so folgt aus dem Ansatz (7), daß an dieser Stelle auch

$$\delta_x = \delta_y \quad (9)$$

oder entsprechend den Gleichungen (6)

$$p_x l_x^4 = p_y l_y^4$$

sein muß.

Es ist andererseits

$$p_x + p_y = p,$$

daher

$$p_x = p \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

$$p_y = p \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Nachdem  $p_x$  und  $p_y$  ermittelt worden sind, können wir zwar die Grundwerte  $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y$  bestimmen, um jedoch die wirklichen Biegemomente  $M_x, M_y$  zu ermitteln, fehlen noch die von den Drillungsmomenten herrührenden zusätzlichen Werte  $\mathfrak{M}'_x, \mathfrak{M}'_y$ . Wenn wir die letzteren berücksichtigen, die bisher gebräuchlichen Formeln jedoch behalten wollen, so können wir die Gleichungen (8) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \mathfrak{M}_x (1 - \varphi_x) \\ M_y &= \mathfrak{M}_y (1 - \varphi_y) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

schreiben.

Um einen Anhalt über die Größe der Beizahlen  $\varphi$ , welche den Einfluß der Drillungsmomente zum Ausdruck bringen, zu gewinnen, habe ich für die wichtigsten Lagerungsarten und für achsensymmetrische Belastungen die genauen Werte  $M_x, M_y$  auf Grund der Plattentheorie in meinem Buche ermittelt und bei dem Vergleich mit den Näherungswerten einen Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{M}$  und  $\varphi$  von auffallender Gesetzmäßigkeit festgestellt.

Bezeichnet man nämlich mit  $M_{\max}$  das größte positive Biegemoment des Streifens mit der kürzeren Spannweite  $l_x$  und der Belastung  $p_x$ , mit  $\mathfrak{M}_{0x}$  dasjenige eines gleich langen, frei aufliegenden und die volle Last  $p$  tragenden Balkens, so zeigt sich, daß an der Stelle, an der die größten positiven Momente  $M_x$  in der Platte entstehen, die Beizahl  $\varphi_x$  ihren Größtwert:

$$\varphi_x = \frac{5}{6} \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{\mathfrak{M}_{x\max}}{\mathfrak{M}_{0x}} \quad (11)$$

erreicht.

Für die andere Spannrichtung besteht die ähnliche Beziehung:

$$\varphi_y = \frac{5}{6} \left( \frac{l_y}{l_x} \right)^2 \frac{\mathfrak{M}_{y\max}}{\mathfrak{M}_{0y}} \quad (11a)$$

Um die Richtigkeit dieser Formeln zu beweisen, werde ich in den nachstehenden Entwicklungen die Größen  $\varphi, M_x$  und  $M_y$  für die wichtigsten Lagerungsarten bestimmen und den genauen Werten gegenüberstellen.

Nachdem die Zuverlässigkeit des Näherungsverfahrens nachgewiesen worden ist, werde ich in den weiteren Untersuchungen die Ableitung der Drillungsmomente  $t$  aus den Biegemomenten  $M_x, M_y$  darstellen und schließlich die Richtlinien für die Querschnittsbemessung der Platten erörtern.

## II. Die Biegemomente der gleichförmig belasteten Platte.

### § 3. Die ringsum frei aufliegende Platte.

Wir haben bereits vorhin die Lastanteile

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ p_y &= p \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ermittelt und erhalten nunmehr, wenn wir die Streifenbreite  $b = 1$

wählen, der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}_{x_{\max}} &= p \frac{l_x^2}{8} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}, & \mathfrak{M}_{0x} &= p \frac{l_x^2}{8}, \\
 \mathfrak{M}_{y_{\max}} &= p \frac{l_y^2}{8} \cdot \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}, & \mathfrak{M}_{0y} &= p \frac{l_y^2}{8}, \\
 \frac{\mathfrak{M}_{x_{\max}}}{\mathfrak{M}_{0x}} &= \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}, & \frac{\mathfrak{M}_{y_{\max}}}{\mathfrak{M}_{0y}} &= \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}, \\
 \left. \begin{aligned}
 \varphi_x = \varphi_y = \varphi &= \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4} \\
 M_{x_{\max}} &= p_x \frac{l_x^2}{8} \nu_a \\
 M_{y_{\max}} &= p_y \frac{l_y^2}{8} \nu_a
 \end{aligned} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\nu_a = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln habe ich für verschiedene Längenverhältnisse  $\frac{l_y}{l_x}$  die größten Biegemomente  $M_x$  und  $M_y$  errechnet und ihre Werte in Tafel 1 eingetragen. Die zum Vergleich herangezogenen Werte  $\bar{s}_y$  und  $\bar{s}_x$  stellen die in der genauen Untersuchung unter Zugrundelegung einer Querdehnungsziffer  $m = \infty$  ermittelten Grenzwerte der Spannungsmomente dar.

Tafel 1. Biegemomente ringsum frei aufliegender, gleichmäßig belasteter rechteckiger Platten.

$l_y : l_x$	Genauere Werte	Näherungswerte	Genauere Werte	Näherungswerte	Bemerkungen
	$\bar{s}_{x_{\max}}$	$M_{x_{\max}}$	$\bar{s}_{y_{\max}}$	$M_{y_{\max}}$	Die Näherungswerte sind mit Hilfe der Formeln (13) und (14) ermittelt.
1	0,0368 $p l_x^2$	0,03646 $p l_x^2$	0,0368 $p l_y^2$	0,03646 $p l_y^2$	
2	0,0938 „	0,09457 „	0,00581 „	0,00591 „	
3	0,1159 „	0,11218 „	0,00238 „	0,00263 „	

Die Tafel zeigt, daß gerade bei den für die Querschnittsbemessung ausschlaggebenden Biegebungsbeanspruchungen der kürzeren Spannungsrichtung die neuen Näherungswerte  $M_x$  und die genauen Werte  $\bar{s}_x$  ganz vorzüglich miteinander übereinstimmen; in dem Bereich  $l_y:l_x = 1:1$  bis  $l_y:l_x = 2:1$ , in dem die Plattenwirkung am stärksten ausgeprägt ist, weichen sie um weniger als 1 vH voneinander ab.

Wie wichtig der Einfluß der Drillingsmomente ist, erkennen wir sofort, wenn wir nach dem in den früheren amtlichen Bestimmungen empfohlenen Verfahren  $\varphi = 0$  und  $\nu_a = 1$  setzen. Für eine quadratische Platte ergibt sich dann beispielsweise:

$$M_{x_{\max}} = p \frac{l_x^2}{16} = 0,0625 p l_x^2$$

ein Wert, der um mehr als 70 vH größer ist als der nach den neuen Formeln (13) ermittelte richtige Wert

$$M_{x_{\max}} = 0,03646 p l_x^2.$$

Wir haben bisher bei der Ableitung der Näherungsgleichungen die Belastung  $p_x$ ,  $p_y$  längs den beiden Mittellinien als unveränderlich angesehen und nur die Streifen, die sich im Mittelpunkt der Platte kreuzen, in Betracht gezogen. In der Wirklichkeit ist an jeder anderen Kreuzungsstelle das Steifigkeitsverhältnis und somit auch die Lastaufteilung verschieden.

Da die Durchbiegung jedes Streifens von der Mitte nach den Rändern abnimmt, so muß die jeweilige Belastung umgekehrt wachsen und an den Auflagern den vollen Wert  $p$  erreichen. Ist die längere Spannrichtung  $l_y$  wesentlich größer als die kürzere  $l_x$ , so leisten die Längsstreifen infolge ihrer geringeren Steifigkeit im Bereiche des Plattenmittelpunktes fast keinen Widerstand und können in diesem Bereiche fast keine Belastung aufnehmen, während sie in der Nähe der Ecken entsprechend ihrer wachsenden Steifigkeit einen erheblichen Teil der Belastung tragen müssen.

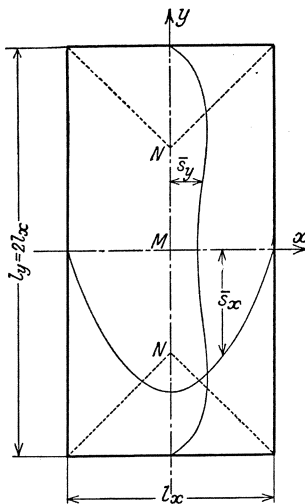


Abb. 6.

Diese doppelte Veränderlichkeit der Steifigkeit und der Belastung tritt, wie bei einem Balken auf elastischer Unterlage, in dem Verlauf der Biegemomente in Erscheinung; die Abb. 6 zeigt uns beispielsweise, daß bei einer Platte mit dem Seitenverhältnis  $l_y:l_x = 2:1$  die Biegemomente  $\bar{s}_y$  der längeren Spannrichtung ihren Größtwert nicht im Mittelpunkt  $M$  der Platte, sondern im Schnittpunkt  $N$  der Winkelhalbierenden der Ecken erreichen. Bemerkenswert ist insbesondere, daß dieser Größtwert auch bei wach-

sender Länglichkeit unverändert bleibt. Für die Bestimmung der Bewehrung in der Längsrichtung ist daher der für  $l_y:l_x = 2:1$  gültige Wert

$$M_{y_{\max}} = \frac{41}{1734} p l_x^2 = 0,0236 p l_x^2 \quad (14)$$

auch dann maßgebend, wenn  $l_y > 2l_x$  ist.

Die Biegemomente der kürzeren Spannrichtung nehmen von der Streifenmitte nach den Auflagern ab; entsprechend der wachsenden Belastung ist der Abfall jedoch langsamer als wenn  $p_x$  unveränderlich bleiben würde. Der Momentenverlauf kann aber mit hinreichender Genauigkeit durch eine Parabel veranschaulicht werden.

Da eine möglichst einfache Darstellung des Spannungsverlaufes für die Querschnittsbemessung erwünscht ist, so empfiehlt es sich, auf eine genauere Berücksichtigung aller Einzelheiten des Spannungsbildes zu verzichten und die in den Näherungsformeln angegebenen Hauptwerte der Biegemomente nicht allein für die nächste Umgebung des Plattenmittelpunktes, sondern auch für einen größeren Bereich als Durchschnittswerte der Querschnittsbemessung zugrunde zu legen. Als Umgrenzung dieses Bereiches kann nach Abb. 7 ein Rechteck mit den Abmessungen:

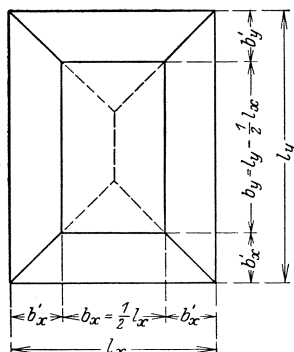


Abb. 7.

$$b_x = \frac{1}{2} l_x$$

$$b_y = l_y - \frac{1}{2} l_x$$

angenommen werden. Außerhalb dieses Gebietes reichen die Größen:

$$M_x = \frac{1}{2} M_{x_{\max}}, \quad M_y = \frac{1}{2} M_{y_{\max}}$$

als Durchschnittswerte für die Querschnittsbemessung vollständig aus.

Die Ingenieure, die sich mit Hilfe fertiger Tafeln die Berechnung erleichtern wollen, finden in den Veröffentlichungen von Luetkens<sup>1</sup>, Klagas<sup>2</sup>, Bernhard<sup>3</sup> und Löser<sup>4</sup> ein ausführliches und brauchbares Zahlenmaterial.

Um die Anwendung des Näherungsverfahrens besser zu veranschaulichen, wähle ich als Beispiel die in Abb. 8 dargestellte Platte mit der Belastung  $p = 1 \text{ t/m}$ , den Seitenlängen  $l_x = 4 \text{ m}$ ,  $l_y = 5 \text{ m}$ .

Die Gleichungen (12) und (13) liefern der Reihe nach:

$$p_x = 1 \cdot \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = 0,71 \text{ t/m}^2$$

$$p_y = 1 \cdot \frac{4^4}{4^4 + 5^4} = 0,29 \text{ t/m}^2$$

$$\nu_a = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,622$$

$$M_{x_{\max}} = 0,71 \cdot \frac{4^2}{8} \cdot 0,622 = 0,884 \frac{\text{tm}}{\text{m}}$$

$$M_{y_{\max}} = 0,29 \cdot \frac{5^2}{8} \cdot 0,622 = 0,564 \frac{\text{tm}}{\text{m}}$$

<sup>1</sup> Siehe: Auswertung der Marcusschen Formeln im „Bauing.“ 1925, S. 659.

<sup>2</sup> Siehe: Auswertung der Marcusschen Formeln im „Bauing.“ 1927, S. 221 u. 251. und: Der durchlaufende Balken unter vierseitig gelagerten Platten im „Bauing.“ 1929, S. 195.

<sup>3</sup> Siehe: Bemessung von Kreuzplatten nach nur einem Feldmoment in „Zement“ 1928, Nr. 48 bis 52.

<sup>4</sup> Siehe: Bemessungsverfahren, Abschnitt VII (Verl. von W. Ernst u. Sohn, 1925).



Mit Hilfe dieser Grundwerte ist sowohl für das Kernstück  $abcd$  mit den Abmessungen:

$$b_x = \frac{1}{2} 4,0 = 2,0 \text{ m}$$

$$b_y = 5 - \frac{1}{2} 4,0 = 3,0 \text{ m}$$

wie auch für den Randbereich die Größe und die Verteilung der Biegemomente bestimmt.

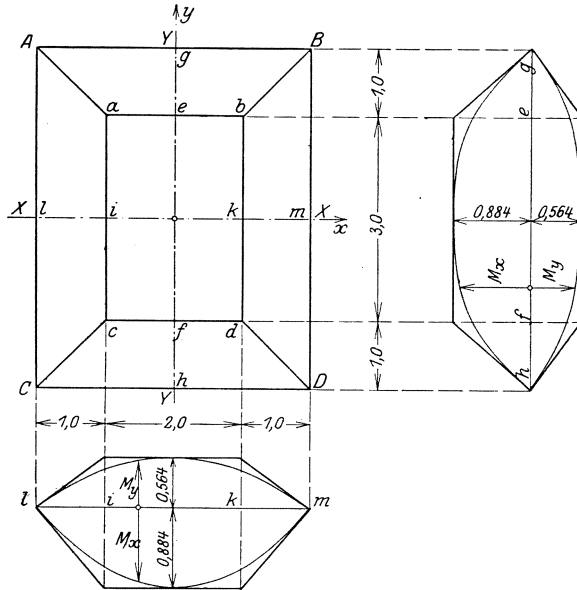


Abb. 8.

In Abb. 8 sind im Sinne der vorhin empfohlenen Richtlinien die parabelförmigen Spannungskurven der beiden Mittelquerschnitte durch eine geradlinige Umgrenzung ersetzt worden.

Betrachtet man zunächst die Schnittfläche  $Y - Y$ , so entfällt auf das Kernstück  $\overline{ef}$  das Kräftepaar:

$$b_y M_{x_{\max}} = 3 \cdot 0,884 = 2,652 \text{ tm},$$

auf die beiden Randabschnitte  $\overline{eg}$  und  $\overline{fh}$  mit der Breite

$$b'_y = \frac{1}{2} (l_y - b_y) = 1,0 \text{ m}$$

je das Moment:

$$b'_y \frac{M_{x_{\max}}}{2} = 1,0 \frac{0,884}{2} = 0,442 \text{ tm}.$$

Ebenso ergibt sich für die Schnittfläche  $X - X$  als Anteil des Kernstückes  $\overline{ik}$ :

$$b_x M_{y_{\max}} = 2 \cdot 0,564 = 1,128 \text{ tm}$$

und für die beiden Randabschnitte  $\overline{li}$  und  $\overline{km}$  mit der Breite

$$b'_x = \frac{1}{2} (l_x - b_x) = 1,0 \text{ m}$$

je 
$$b'_x \frac{M_{y_{\max}}}{2} = 1,0 \cdot \frac{0,564}{2} = 0,282 \text{ tm}.$$

Sind die zulässigen Beanspruchungen:

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = 1200 \text{ kg/cm}^2,$$

so ist in der kürzeren bzw. in der längeren Spannrichtung eine Nutzhöhe:

$$h - a_x = 0,411 \sqrt{884} = 12,2 \text{ cm},$$

bzw. 
$$h - a_y = 0,411 \sqrt{564} = 9,75 \text{ cm}$$
  
erforderlich.

Wird die Plattenstärke  $h = 14,0 \text{ cm}$  gewählt, so steht eine Nutzhöhe:

$$h - a_x = 14 - 1,5 = 12,5 \text{ cm},$$

$$h - a_y = 14 - 2,5 = 11,5 \text{ cm}$$

zur Verfügung.

Als Bewehrung ist in der  $x$ -Richtung auf der Strecke  $\overline{ef}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{265200}{1200 \cdot 12,5} = 19,86 \text{ cm}^2,$$

auf jeder der beiden Seiten  $\overline{eg}$  und  $\overline{fh}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{44200}{1200 \cdot 12,5} = 3,32 \text{ cm}^2,$$

in der  $y$ -Richtung auf der Strecke  $\overline{ik}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{112800}{1200 \cdot 11,5} = 9,2 \text{ cm}^2,$$

auf jeder der beiden Strecken  $\overline{li}$  und  $\overline{km}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{28200}{1200 \cdot 11,5} = 2,3 \text{ cm}^2$$

erforderlich.

Der gesamte Eisenbedarf ist somit für die Schnittfläche  $Y - Y$ :

$$F_{e_x} = 19,86 + 2 \cdot 3,32 = 26,5 \text{ cm}^2,$$

für die Schnittfläche  $X - X$ :

$$F_{e_y} = 9,2 + 2 \cdot 2,3 = 13,8 \text{ cm}^2.$$

Die bisherige Querschnittsbemessung stützt sich lediglich auf die Biegemomente der Mittellinien. Wir werden später zeigen, daß die aus den Drillungs- und Biegemomenten resultierenden Hauptspannungsmomente zwischen dem Mittelpunkt und den Ecken der Platte noch größere Werte erreichen können, welche bei der Bemessung und der Verteilung der Bewehrung, allerdings unter Zulassung höherer Beanspruchungen, besonders berücksichtigt werden müssen.

Wenn auch hierdurch der Eisenaufwand vermehrt wird, so ist demnach nicht zu verkennen, daß die kreuzweise bewehrte Platte eine wesentlich geringere Stärke und zugleich auch eine kleinere Bewehrungsmenge als die einfach bewehrte Platte erfordert und daß auch bei großen Spannweiten und Belastungen eine durchaus wirtschaftliche Ausbildung ringsum aufliegender Decken möglich ist.

#### § 4. Die ringsum eingeklemmte Platte.

Die Längs- und Querstreifen der Abb. 9 sind jetzt als beiderseits eingespannte Balken zu behandeln. Unter Zugrundelegung der Breite  $b = 1$  erhält man für den Mittelpunkt der Streifen die Werte:

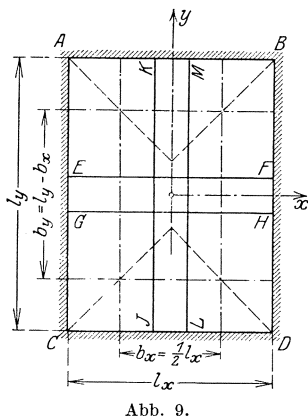


Abb. 9.

$$\mathfrak{M}_{x_{\max}} = p_x \frac{l_x^2}{24},$$

$$\mathfrak{M}_{y_{\max}} = p_y \frac{l_y^2}{24},$$

$$\delta_x = \frac{1}{32} p_x \frac{l_x^4}{E h^3},$$

$$\delta_y = \frac{1}{32} p_y \frac{l_y^4}{E h^3}.$$

Die Bedingung  $\delta_x = \delta_y$

liefert wiederum:  $p_x l_x^4 = p_y l_y^4,$

$$\text{also auch } \left. \begin{aligned} p_x &= p \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ p_y &= p \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Gegenüberstellung mit den Vergleichsgrößen

$$\mathfrak{M}_{0x} = \frac{p l_x^2}{8}, \quad \mathfrak{M}_{0y} = \frac{p l_y^2}{8}$$

ergibt weiterhin auf Grund der Gleichungen (11):

$$\varphi_x = \frac{5}{6} \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{8 p_x}{24 p} = \frac{5}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

$$\varphi_y = \frac{5}{6} \left( \frac{l_y}{l_x} \right)^2 \frac{8 p_y}{24 p} = \frac{5}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

und mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\nu_b = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4};$$

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{p_x l_x^2}{24} \nu_b \\ M_{y_{\max}} &= \frac{p_y l_y^2}{24} \nu_b \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man für das Längenverhältnis  $l_y : l_x = 1 : 1$  die Werte:

$$M_{x_{\max}} = M_{y_{\max}} = \frac{31}{36} \cdot \frac{p l_x^2}{48} = 0,0179 p l_x^2,$$

für das Längenverhältnis  $l_y : l_x = 2 : 1$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{148}{153} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{p l_x^2}{24} = 0,0367 p l_x^2,$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{143}{153} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{p l_y^2}{24} = 0,00229 p l_y^2.$$

Die in meinem Buche durchgeführte genaue Untersuchung hat hingegen die Größen:

$$\bar{s}_{x_{\max}} = \bar{s}_{y_{\max}} = 0,01803 p l_x^2,$$

bzw.  $\bar{s}_{x_{\max}} = 0,0364 p l_x^2,$

$$\bar{s}_{y_{\max}} = 0,00229 p l_y^2$$

liefert.

Die Ergebnisse der scharfen und der angenäherten Berechnung stimmen, wie man sieht, ganz vorzüglich miteinander überein.

Ist die Länge der Platte  $l_y$  größer als die doppelte Breite  $l_x$ , so wird man bei der Verwendung der Näherungsformeln im Auge behalten müssen, daß aus den gleichen Gründen wie bei der ringsum aufliegenden Platte die größten Beanspruchungen in der Längsrichtung auch bei der eingeklemmten Platte nicht im Plattenmittelpunkt, sondern, wie die Abb. 10 zeigt, im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Ecken entstehen und bei wachsender Länglichkeit unverändert bleiben. Es empfiehlt sich daher, die für das Längenverhältnis  $l_y : l_x = 2 : 1$  gültige Formel:

$$M_{y_{\max}} = \frac{143}{153} \cdot \frac{1}{17} p \frac{4l_x^2}{24} = 0,00916 p l_x^2 \quad (16)$$

der Querschnittsbemessung auch dann zugrunde zu legen, wenn  $l_y > 2l_x$  ist.

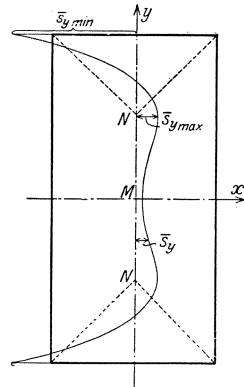


Abb. 10.

Die Einspannungsmomente für die kürzere Spannrichtung lassen sich ausreichend genau mit Hilfe der Gleichung

$$M_{x_{\min}} = - \frac{p_x l_x^2}{12 \nu_b} \quad (17)$$

bestimmen. Sie liefert beispielsweise für das Längenverhältnis  $l_y : l_x = 1 : 1$

$$M_{x_{\min}} = - 0,0484 p l_x^2,$$

für  $l_y : l_x = 3 : 2$

$$M_{x_{\min}} = - 0,0775 p l_x^2.$$

Die in der scharfen Untersuchung ermittelten Größen

$$s_{x_{\min}} = - 0,04737 p l_x^2,$$

bzw.

$$\bar{s}_{x_{\min}} = - 0,0765 p l_x^2,$$

weichen nur in geringem Maße von unseren Näherungswerten ab. Der Unterschied ist an sich ohne Belang, weil die Größen  $M_{x_{\min}}$  in den Näherungsformeln den Durchschnittswert der Einspannungsmomente für die Streifenbreite  $b = 1$ , die Größen  $\bar{s}_{x_{\min}}$  hingegen den Höchstwert für die Randmitte darstellen. Da für die Anstrengung der Platte, wie durch Versuche nachgewiesen, nicht der Höchst-, sondern der Durchschnittswert der Beanspruchung in der nächsten Umgebung der gefährdeten Stelle maßgebend ist, und da die Einspannungsmomente von der Randmitte nach den Ecken abnehmen, so stimmt der wirkliche Durchschnittswert der Einspannungsmomente selbst bei kleinen Streifenbreiten mit unserem Näherungswert recht gut überein.

Für die kurzen Ränder und die längere Spannrichtung tritt an Stelle der Gleichung (17) die Formel

$$M_{y_{\min}} = - \frac{p_x l_y^2}{12 \nu_b} \quad (17a)$$

Da die genaue Untersuchung gezeigt hat, daß die Einspannungsmomente ebenso wie die Auflagerkräfte der kurzen Ränder nur von der kurzen Spannrichtung abhängig sind und bei wachsender Länglichkeit unverändert bleiben, so ist es richtiger, den für die quadratische Platte gültigen Grenzwert:

$$M_{y_{\min}} = - \frac{p l_x^2}{24 \nu_b} = \sim - \frac{p l_x^2}{20} \quad (18)$$

als Höchstwert für jedes Längenverhältnis zu betrachten.

Um die Berechnung zu vereinfachen, empfiehlt es sich, im übrigen auch bei der eingeklemmten Platte auf eine genaue Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Biegemomente längs der Ränder zu ver-

zichten und als Mittelwerte für den Bereich der größten Randbeanspruchungen die Momente:

$$\left. \begin{aligned} M_{xr} &= -\frac{p l_x^2}{12} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ M_{yr} &= -\frac{p l_y^2}{24} \end{aligned} \right\} (19)$$

der Querschnittsbemessung zugrunde zu legen; als Umgrenzung dieses Bereiches können, wie bei der ringsum aufliegenden Platte, die in Abb. 9 angegebenen Maße:

$$b_x = \frac{1}{2} l_x,$$

$$b_y = l_y - \frac{1}{2} l_x$$

genommen werden.

Auf Grund der Formeln (19) ergibt sich beispielsweise für das Längenverhältnis  $l_y : l_x = 1 : 1$

$$b_y M_{xr} = -\frac{p l_x^3}{48} = -0,02083 p l_x^3,$$

für  $l_y : l_x = 2 : 1$

$$b_y M_{xr} = -\frac{3}{2} l_x \frac{16}{17} \cdot \frac{p l_x^2}{12} = -0,1177 p l_x^3;$$

die genaue Untersuchung liefert hingegen:

$$\text{für } l_y : l_x = 1 : 1 \text{ den Wert: } -0,02087 p l_x^3$$

$$\text{für } l_y : l_x = 2 : 1 \text{ den Wert: } -0,1082 p l_x^3.$$

Die beiden Ergebnisse stimmen wiederum recht gut miteinander überein.

Als weiteres Beispiel für die Anwendung der vorstehenden Formeln sei, wie im vorigen Abschnitt, die in Abb. 11 dargestellte Platte mit den Abmessungen:

$$l_x = 4,0 \text{ m,}$$

$$l_y = 5,0 \text{ m,}$$

mit der Belastung  $p = 1,0 \text{ t/m}^2$  gewählt.

Die Lastanteile sind wie früher:

$$p_x = 1,0 \cdot \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = 0,71 \text{ t/m}^2,$$

$$p_y = 1,0 \cdot \frac{4^4}{4^4 + 5^4} = 0,29 \text{ t/m}^2.$$

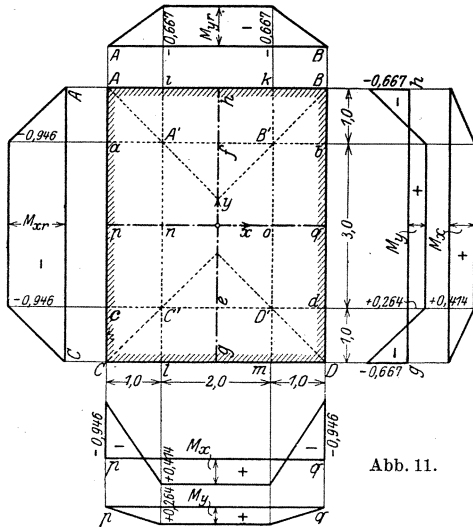


Abb. 11.

Auf Grund der Gleichungen (15) und (19) erhält man der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \nu_b &= 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,874 \\ M_{x_{\max}} &= 0,71 \cdot \frac{4^2}{24} \cdot 0,874 = 0,414 \text{ tm/m} \\ M_{y_{\max}} &= 0,29 \cdot \frac{5^2}{24} \cdot 0,874 = 0,264 \text{ tm/m} \\ M_{x_r} &= -0,71 \cdot \frac{4^2}{12} = -0,946 \text{ tm/m} \\ M_{y_r} &= -1,0 \cdot \frac{4^2}{24} = -0,667 \text{ tm/m}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Grundwerte und entsprechend den Maßen:

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{1}{2} l_x = 2,0 \text{ m} \\ b_y &= l_y - \frac{1}{2} l_x = 3,0 \text{ m} \end{aligned}$$

sind in Abb. 11 die vereinfachten geradlinigen Momentendiagramme für die Mittel- und Randschnitte ermittelt worden. Die zugehörigen Gesamtwerte der Biegemomente sind:

a) für die Schnittfläche  $\overline{gh}$ :

$$M_{x_{\max}} \left( b_y + \frac{2}{2} \cdot \frac{l_x}{4} \right) = 4 \cdot 0,414 = 1,656 \text{ tm},$$

b) für die Randfläche  $\overline{AC}$  oder  $\overline{BD}$ :

$$M_{y_r} \left( b_y + \frac{2}{2} \cdot \frac{l_x}{4} \right) = -4 \cdot 0,946 = -3,784 \text{ tm},$$

c) für die Schnittfläche  $\overline{pq}$ :

$$M_{y_{\max}} \left( b_x + \frac{2}{2} \cdot \frac{l_r}{4} \right) = 3 \cdot 0,264 = 0,792 \text{ tm},$$

d) für die Randfläche  $\overline{AB}$  oder  $\overline{CD}$ :

$$M_{y_r} \left( b_y + \frac{2}{2} \cdot \frac{l_x}{4} \right) = -3 \cdot 0,667 = -2,0 \text{ tm}.$$

In der kürzeren bzw. in der längeren Spannrichtung ist im Bereich des Plattenmittelpunktes die Nutzhöhe:

$$h - a_x = 0,411 \sqrt{414} = 8,35 \text{ cm},$$

bzw.

$$h - a_y = 0,411 \sqrt{264} = 6,68 \text{ cm},$$

an den langen Rändern:

$$h - a_x = 0,411 \sqrt{946} = 12,6 \text{ cm},$$

an den kurzen:

$$h - a_y = 0,411 \sqrt{667} = 10,6 \text{ cm}$$

erforderlich.

Wird für den Plattenmittelpunkt  $h = 10$  cm, für die Ränder  $h = 14$  cm gewählt, so stehen die Nutzhöhen

$$h - a_x = 10 - 1,5 = 8,5 \text{ cm},$$

$$h - a_y = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ cm},$$

bzw.

$$h - a_x = h - a_y = 14 - 1,5 = 12,5 \text{ cm}$$

zur Verfügung.

Die für eine Streifenbreite von 1 m erforderliche Bewehrung ist:

a) für die Strecke  $\overline{ef}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{41400}{1200 \cdot 8,5} = 4,57 \text{ cm}^2,$$

b) für die Strecke  $\overline{ac}$  oder  $\overline{bd}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{94600}{1200 \cdot 12,5} = 7,1 \text{ cm}^2,$$

c) für die Strecke  $\overline{no}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{26400}{1200 \cdot 7,5} = 3,3 \text{ cm}^2,$$

d) für die Strecke  $\overline{ik}$  oder  $\overline{lm}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{66700}{1200 \cdot 12,5} = 5,0 \text{ cm}^2.$$

Im ganzen muß:

a) in der Schnittfläche  $\overline{gh}$  der Eisenquerschnitt:

$$F_{e_x} = 4,57 \left( 3,0 + 2 \cdot \frac{1,0}{2} \right) = 18,28 \text{ cm}^2,$$

b) in der Schnittfläche  $\overline{AC}$  oder  $\overline{BD}$ :

$$F_{e_x} = 7,1 \left( 3,0 + 2 \cdot \frac{1,0}{2} \right) = 28,4 \text{ cm}^2,$$

c) in der Schnittfläche  $\overline{pq}$ :

$$F_{e_y} = 3,3 \left( 2,0 + 2 \cdot \frac{1,0}{2} \right) = 9,9 \text{ cm}^2,$$

d) in der Schnittfläche  $\overline{AB}$  oder  $\overline{CD}$ :

$$F_{e_y} = 5,0 \left( 2,0 + 2 \cdot \frac{1,0}{2} \right) = 15,0 \text{ cm}^2$$

vorhanden sein.



Die durch die Einspannung bedingte obere Bewehrung ist nur für den Außenring  $A B C D$ ,  $A' B' C' D'$  erforderlich. In den übrigen Schnittflächen wird der Eisenbedarf unter dem Einfluß der Drillungsmomente an einzelnen Stellen, jedoch nur im geringen Maße erhöht.

Die vorstehenden Untersuchungen haben sowohl die Zuverlässigkeit als die Einfachheit des neuen Näherungsverfahrens wohl zur Genüge erwiesen. Um auch seine Vielseitigkeit zu zeigen, werde ich noch in den nachfolgenden Entwicklungen die Hauptformeln für einige wichtige Lagerungsarten ableiten und ihre Verwendung bei der Behandlung der durchlaufenden Platten eingehend erläutern.

### § 5. Platten an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt. (Abb. 12a.)

Der Streifen in der  $x$ -Richtung stellt einen Balken, der links frei aufliegt und rechts eingespannt ist, dar. Sein größtes positives bzw. negatives Biegemoment bei einer Breite  $b = 1$  ist:

$$\mathfrak{M}_{x_{\max}} = \frac{9}{128} p_x l_x^2,$$

$$\mathfrak{M}_{x_{\min}} = -\frac{1}{8} p_x l_x^2,$$

die Durchbiegung in der Balkenmitte

$$\delta_x = \frac{2}{32} p_x \frac{l_x^4}{E h^3}.$$

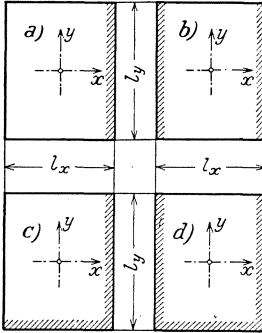


Abb. 12. Die schraffierten Ränder sind eingeklemmt, die übrigen frei aufliegend.

Der Streifen in der  $y$ -Richtung ist als beiderseits frei aufliegender Balken zu behandeln.

Die zugehörigen Werte des Biegemomentes und der Durchbiegung in Balkenmitte sind:

$$\mathfrak{M}_{y_{\max}} = p_y \frac{l_y^2}{8},$$

$$\delta_y = \frac{5}{32} \cdot \frac{p_y l_y^4}{E h^3}.$$

Aus den beiden Bedingungen:

$$\delta_x = \delta_y,$$

$$p_x + p_y = p$$

folgt:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4} \\ p_y &= p \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + 5l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

also:

$$\mathfrak{M}_{x_{\max}} = \frac{9}{128} p l_x^2 \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4},$$

$$\mathfrak{M}_{y_{\max}} = \frac{1}{8} p l_y^2 \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}.$$

Die Gegenüberstellung mit den Vergleichsgrößen

$$\mathfrak{M}_{0x} = \frac{p l_x^2}{8}, \quad \mathfrak{M}_{0y} = \frac{p l_y^2}{8}$$

liefert weiterhin auf Grund der Gleichungen (11):

$$\varphi_x = \frac{5}{6} \cdot \frac{9 \cdot 8}{128} \cdot \frac{5l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4} = \frac{75}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4},$$

$$\varphi_y = \frac{5}{6} \cdot \frac{2l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4} = \frac{5}{3} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4}.$$

Führt man die Hilfswerte

$$\left. \begin{aligned} \nu_c &= 1 - \frac{75}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4} \\ \nu_c' &= 1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + 5l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ein, so lauten die Formeln für die Grenzwerte der positiven Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{9}{128} p_x l_x^2 \nu_c \\ M_{y_{\max}} &= \frac{1}{8} p_y l_y^2 \nu_c' \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der Größtwert des Einspannungsmomentes in dem Bereich der Randmitte ist hinreichend genau durch die Gleichung

$$M_{x_r} = -\frac{1}{8} p_x l_x^2 \quad (22a)$$

bestimmt.

Ist beispielsweise  $l_x = l_y = l$ , so ergibt sich:

$$p_x = \frac{5}{7} p,$$

$$p_y = \frac{2}{7} p,$$

$$\nu_c = 1 - \frac{75}{224} = \frac{149}{224},$$

$$\nu_c' = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21},$$

$$M_{x_{\max}} = \frac{9}{128} p_x l^2 \frac{149}{224} = 0,0334 p l^2,$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{1}{8} p_y l^2 \frac{16}{21} = 0,0272 p l^2,$$

$$M_{x_r} = -\frac{1}{8} p_x l^2 = -0,0892 p l^2.$$

Die genaue Untersuchung, die ich nach dem Verfahren in § 28 meines Buches über die „Theorie elastischer Gewebe“ durchgeführt habe, lieferte die Werte

$$\begin{aligned} M_{x_{\max}} &= 0,0336 p l^2, \\ M_{y_{\max}} &= 0,02401 p l^2, \\ M_{x_{\min}} &= -0,0815 p l^2. \end{aligned}$$

Diese Gegenüberstellung beweist von neuem die Zuverlässigkeit des Näherungsverfahrens. Nach dem in den früheren amtlichen Bestimmungen empfohlenen Näherungsverfahren würde man hingegen

$$\begin{aligned} p_x &= p_y = \frac{p}{2}, \\ M_{x_{\max}} &= \frac{9}{128} p_x l^2 = 0,0352 p l^2, \\ M_{y_{\max}} &= \frac{1}{8} p_x l^2 = 0,0625 p l^2, \\ M_{x_r} &= -\frac{1}{8} p_x l^2 = -0,0625 p l^2 \end{aligned}$$

erhalten.

Der Vergleich zeigt, wie unzuverlässig und unzulänglich die bisher üblichen Näherungsformeln gewesen sind. Ihr Hauptfehler liegt darin, daß sie bei der Aufteilung der Belastung nur das Längenverhältnis, nicht aber die Auflagerbedingungen der Streifen berücksichtigen. Während in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der genauen Untersuchungen unsere neuen Formeln dem eingeklemmten  $x$ -Streifen, welcher steifer als der frei aufliegende  $y$ -Streifen ist, die größere Belastung und die stärkere Anstrengung zuweisen und die geringere Beanspruchung des biegsameren  $y$ -Streifens erkennen lassen, müßte auf Grund des alten Näherungsverfahrens gerade der letztere die höheren Spannungen aufnehmen. Diese offenbar unsinnige Schlußfolgerung und die erhebliche Unterschätzung der Biegemomente des eingeklemmten Randes lassen die Unbrauchbarkeit der bisherigen Näherungsformeln zur Genüge erkennen.

## § 6. Platten an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. (Abb. 12b).

Der Streifen in der  $x$ -Richtung stellt einen beiderseits eingespannten Balken dar. Seine kennzeichnenden Werte sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x_{\max}} &= p_x \frac{l_x^2}{24}, \\ \mathfrak{M}_{x_{\min}} &= -p_x \frac{l_x^2}{12}, \\ \delta &= \frac{1}{32} \cdot \frac{p_x l_x^4}{E h^3}. \end{aligned}$$

Für den Streifen in der längeren Spannrichtung, der als frei aufliegender Balken zu betrachten ist, gelten hingegen die Formeln:

$$\mathfrak{M}_{y_{\max}} = p_y \frac{l_y^3}{8},$$

$$\delta = \frac{5}{32} \cdot \frac{p_y l_y^4}{E h^3}.$$

Die Bedingungen  $\delta_x = \delta_y$  liefert jetzt:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \\ p_y &= p \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Entsprechend den Grundwerten

$$\mathfrak{M}_{0x} = \frac{p l_x^2}{8}, \quad \mathfrak{M}_{0y} = \frac{p l_y^2}{8}$$

ergibt sich wiederum:

$$\varphi_x = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{p_x}{p} \cdot \frac{l_x^2}{l_y^3} = \frac{25}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^3}{l_x^4 + 5 l_y^4},$$

$$\varphi_y = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{p_y}{p} \cdot \frac{l_y^2}{l_x^3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^3 l_y^2}{l_x^4 + 5 l_y^4}.$$

Mit den Hilfsbezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} \nu_d &= 1 - \frac{25}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^3}{l_x^4 + 5 l_y^4} \\ \nu'_d &= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^3 l_y^2}{l_x^4 + 5 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

lassen sich die Größtwerte der positiven und der Mittelwert der negativen Biegemomente in der Form:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{1}{24} p_x l_x^2 \nu_d \\ M_{y_{\max}} &= \frac{1}{8} p_y l_y^2 \nu'_d \\ M_{x_r} &= -\frac{1}{12} p_x l_x^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

darstellen.

## § 7. Platten an zwei benachbarten Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. (Abb. 12c.)

Eine einfache Rechnung liefert:

$$\mathfrak{M}_{x_{\max}} = \frac{9}{128} p_x l_x^2, \quad M_{y_{\max}} = \frac{9}{128} p_y l_y^2,$$

$$M_{x_{\min}} = -\frac{1}{8} p_x l_x^2, \quad M_{y_{\min}} = -\frac{1}{8} p_y l_y^2,$$

$$\delta_x = \frac{2}{32} \cdot \frac{p_x l_x^4}{E h^3}, \quad \delta_y = \frac{2}{32} \cdot \frac{p_y l_y^4}{E h^3}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß

mithin

$$\left. \begin{aligned} p_x l_x^4 &= p_y l_y^4, \\ p_x &= \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \cdot p \\ p_y &= p \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

sein muß und findet nunmehr:

$$\begin{aligned} \varphi_x = \varphi_y &= \frac{5}{6} \cdot \frac{9 \cdot 8}{128} \cdot \frac{p_x}{p} \cdot \frac{l_x^2}{l_y^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9 \cdot 8}{128} \cdot \frac{p_y}{p} \cdot \frac{l_y^2}{l_x^2} = \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}, \\ \nu_e &= 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}, \\ M_{x_{\max}} &= \frac{9}{128} p_x l_x^2 \nu_e \\ M_{y_{\max}} &= \frac{9}{128} p_y l_y^2 \nu_e \\ M_{x_r} &= -\frac{1}{8} p_x l_x^2 \\ M_{y_r} &= -\frac{1}{8} p_y l_y^2 \end{aligned} \quad (26)$$

### § 8. Platten an drei Seiten eingeklemmt und an einem Rande frei aufliegend.

Ist, wie in Abb. 12d dargestellt, ein kurzer Rand frei aufliegend, so ist der  $x$ -Streifen als zweiseitig, der  $y$ -Streifen hingegen nur als einseitig eingespannter Balken zu behandeln. Es ist daher:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{1}{32} \cdot \frac{p_x l_x^4}{E h^3}, \\ \delta_y &= \frac{2}{32} \cdot \frac{p_y l_y^4}{E h^3}, \end{aligned}$$

also

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\ p_y &= p \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{p_x}{p} \cdot \frac{l_x^2}{l_y^2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4}, \\ \varphi_y &= \frac{5}{6} \cdot \frac{9 \cdot 8}{128} \cdot \frac{p_y}{p} \cdot \frac{l_y^2}{l_x^2} = \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4}. \end{aligned}$$

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \nu_f &= 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\ \nu_f' &= 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

so erhält man für die größten positiven Biegemomente und für die mittleren Einspannungsmomente die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{1}{24} p_x l_x^2 \nu_f; & M_{y_{\max}} &= \frac{9}{128} p_y l_y^2 \nu_f' \\ M_{x_r} &= -\frac{1}{12} p_x l_x^2; & M_{y_r} &= -\frac{1}{8} p_y l_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

### § 9. Durchlaufende Platten.

Bei der Untersuchung durchlaufender Platten ist, wie bei durchlaufenden Trägern, zwischen ständiger und veränderlicher Belastung zu unterscheiden.

#### 1. Der Einfluß einer gleichmäßigen Belastung aller Felder.

Betrachten wir zunächst den Fall einer gleichmäßigen Belastung aller Felder. Als Ergebnis der in meinem Buche durchgeführten genauen Berechnungen schicke ich voraus, daß die Wirkung der Kontinuität bei den Platten nicht so stark als bei den Balken ausgeprägt ist und daß sich die Stützenmomente längs des gemeinsamen Randes zweier benachbarter Felder nur wenig von den Einspannungsmomenten eines vollständig eingeklemmten Randes unterscheiden. Wir dürfen daher in erster Annäherung jedes Feld für sich so behandeln, als ob es in der Tat an den gemeinsamen Stützkanten angrenzender Felder unwandelbar eingespannt wäre.

Hat die Platte nur eine einzige Felderreihe (Abb. 13), so können die Außenfelder *A* als Platten, welche auf drei Seiten frei aufliegen und an einer Seite fest eingeklemmt sind, und die Innenfelder *J* als

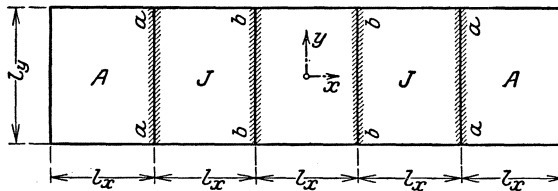


Abb. 13.

Platten, welche an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegen und an den beiden anderen eingespannt sind, berechnet werden. Für die ersteren gelten somit die Gleichungen (21) und (22), für die letzteren die Gleichungen (24) und (25). Wird in diesen Formeln, um die ständige Belastung *g* von der veränderlichen Belastung *p* zu unterscheiden, *p* durch *g* ersetzt, so erhält man

für die Außenfelder  $A$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{9}{128} g l_x^2 \nu_c \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4}$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{1}{8} g l_y^2 \nu_c' \frac{2 l_x^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4}$$

für die Innenfelder  $J$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{1}{24} g l_x^2 \nu_d \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{1}{8} g l_y^2 \nu_d' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}$$

(30)

Die Bestimmung der Stützenmomente mit Hilfe des gleichen Näherungsverfahrens bietet insofern Schwierigkeiten, als man für die gemeinsame Kante zwei verschiedene Werte der Einspannungsmomente erhält, je nachdem diese Kante als Rand des linken oder des rechten Nachbarfeldes betrachtet wird. Der Mittelwert der beiden Lösungen ist ausreichend genau

für die Kante (a):

$$M_{x_a} = - \frac{g l_x^2}{10} \cdot \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}$$

für die Kante (b):

$$M_{x_b} = - \frac{g l_x^2}{12} \cdot \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}$$

(30a)

Um die Richtigkeit dieser Formeln nachzuweisen, sind in der Tafel 2 für eine Platte mit drei gleichen quadratischen Feldern (Abb. 14) die Näherungswerte und die aus meinem Buche entnommenen genauen Werte angegeben.

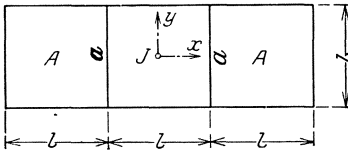


Abb. 14.

Der Vergleich zeigt, daß die beiden Wertegruppen sich recht gut miteinander decken; die Abweichungen sind besonders bei den durchlaufenden Längsfasern, die infolge ihrer größeren Anstrengung für die Querschnittsbemessung ausschlaggebend sind, äußerst geringfügig<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Der einzige größere Unterschied zwischen den genauen und den Näherungswerten ist bei den Biegemomenten  $M_y$  des Mittelpunktes des Innenfeldes festzustellen, nämlich:

$$M_y = 0,01792 g \cdot l^2,$$

gegen:

$$\bar{M}_y = 0,01378 g l^2.$$

Diese Abweichung ist darauf zurückzuführen, daß bei den Näherungsformeln als Stützenmoment dieses Feldes das Moment  $\mathfrak{M}_x = -p_x \frac{l_x^2}{12}$  eines beiderseits eingespannten Balkens in Rechnung gestellt worden ist, während das wirkliche Stützenmoment sich eher dem für einen durchgehenden Träger mit drei gleichen Öffnungen geltenden Wert  $\mathfrak{M}_x = -p_x \frac{l_x^2}{10}$  nähern dürfte. Wird der letztere bei

Tafel 2. Biegemomente einer durchlaufenden Platte mit drei quadratischen Feldern. (Abb. 14).

	Genauere Werte	Näherungswerte	Be- merkungen
Außenfeld <i>A</i>	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_{x_{\max}} = l^2 (0,03375g + 0,035p) \\ \bar{\delta}_{y_{\max}} = l^2 (0,026g + 0,03075p) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} M_{x_{\max}} = l^2 (0,03345g + 0,03495p) \\ M_{y_{\max}} = l^2 (0,0272g + 0,03183p) \end{array} \right.$	(Die Näherungswerte sind mit Hilfe der Formeln (30) und (30a) ermittelt.)
Innenfeld <i>J</i>	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_{x_{\max}} = l^2 (0,0276g + 0,032p) \\ \bar{\delta}_{y_{\max}} = l^2 (0,01378g + 0,02509p) \\ \bar{\delta}_{x_{\min}} = l^2 (0,0276g - 0,0046p) \\ \bar{\delta}_{y_{\min}} = l^2 (0,01378g - 0,0113p) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} M_{x_{\max}} = l^2 (0,0267g + 0,03158p) \\ M_{y_{\max}} = l^2 (0,01792g + 0,02719p) \\ M_{x_{\min}} = l^2 (0,0267g - 0,00488p) \\ M_{y_{\min}} = l^2 (0,01792g - 0,00927p) \end{array} \right.$	
Auflagerlinie <i>a</i>	$\bar{\delta}_{x_{\min}} = -l^2 0,07875g$	$M_{x_a} = -l^2 0,08333g$	

der Bestimmung der Steifigkeit der durchlaufenden Fasern berücksichtigt, so erhält man kleinere Werte für  $\delta_s$  und mithin größere Lastanteile  $p_x$ : dementsprechend werden  $p_y$  und  $M_y$  kleiner.

Diese Verbesserung der Rechnung erscheint mir aber nicht notwendig, weil die Werte  $M_y$  ohnehin geringfügig sind und weil es im Hinblick auf die Sicherheit der Querschnittsbemessung nur dienlich sein kann, wenn die größeren Näherungswerte beibehalten werden.



Sind mehrere Felderreihen vorhanden (Abb. 15), so können die Eckfelder  $E$  durch Platten, welche an zwei benachbarten Seiten frei aufliegen und an den beiden anderen eingeklemmt sind, die Randfelder  $R$  durch Platten mit einem frei aufliegenden und drei ein-

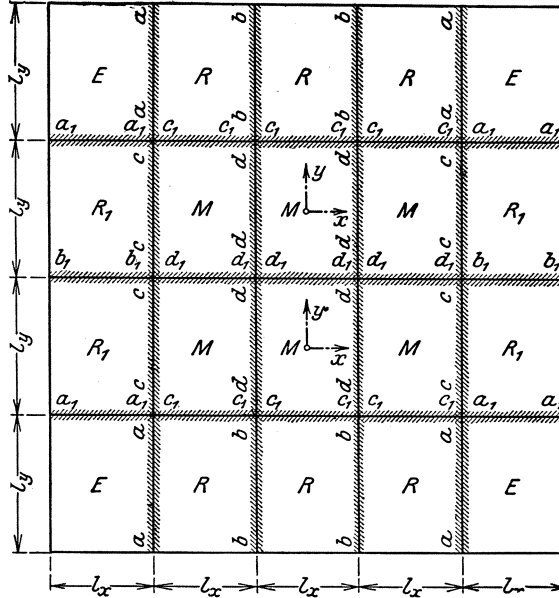


Abb. 15.

geklemmten Rändern, die Mittelfelder  $M$  schließlich durch allseitig eingespannte Platten ersetzt und ihre größten Biegemomente mit Hilfe der Formeln (26) bzw. (29) bzw. (15) bestimmt werden. Diese Formeln liefern, indem wiederum  $p$  mit  $g$  vertauscht wird, der Reihe nach

für die Eckfelder  $E$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{9}{128} g l_x^2 \nu_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{9}{128} g l_y^2 \nu_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$$

für die Randfelder  $R$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{1}{24} g l_x^2 \nu_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4}$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{9}{128} g l_y^2 \nu_f' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4}$$

für die Mittelfelder  $M$ :

$$M_{x_{\max}} = \frac{1}{24} g l_x^2 \nu_b \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{1}{24} g l_y^2 \nu_b \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$$

(31)

Die zugehörigen Mittelwerte der Stützenmomente in der Mitte der Ränder  $a, b, c, d$  werden hinreichend genau durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
 M_{x_a} &= -\frac{g l_x^2}{10} \cdot \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\
 M_{x_b} &= -\frac{g l_x^2}{12} \cdot \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\
 M_{x_c} &= -\frac{g l_x^2}{10} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\
 M_{x_d} &= -\frac{g l_x^2}{12} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}
 \end{aligned}
 \tag{31a}$$

bestimmt.

Die nach diesen Gleichungen für eine dreireihige Platte mit neun quadratischen Feldern (Abb. 15 a) errechneten Momente  $M_x, M_y$  sind neben der aus der genauen Untersuchung entnommenen Größen  $\bar{s}_x, \bar{s}_y$  in der Tafel 3 zusammengestellt. Die verhältnismäßig durchaus geringfügigen Abweichungen beweisen von neuem die Zuverlässigkeit unseres Näherungsverfahrens<sup>1</sup>.

Die Vorteile, welche die Anwendung des neuen Verfahrens bietet, treten deutlich in Erscheinung, wenn zum Vergleich die bisher üblichen, in den früheren amtlichen Bestimmungen empfohlenen Näherungsformeln herangezogen werden.

Da die letzteren die Verschiedenheit der Auflagerbedingungen der Längs- und Querstreifen unberücksichtigt lassen und bei quadratischen Platten  $g_x = g_y = \frac{1}{2} g$  liefern, so würde man beispielsweise das Randfeld  $R$  der neunfeldrigen Platte (Abb. 15 a) in der Längsrichtung als Mittel- und in der Querrichtung als Endfeld eines durchgehenden Balkens mit drei gleichen Öffnungen berechnen müssen und somit für die Feldmomente die Werte:

$$\begin{aligned}
 M_{x_{\max}} &= \frac{1}{40} \cdot \frac{g}{2} l_x^2 = 0,0125 g l^2, \\
 M_{y_{\max}} &= \frac{2}{25} \cdot \frac{g}{2} l_y^2 = 0,04 g l^2
 \end{aligned}$$

erhalten. Die richtigen Werte sind hingegen:

$$\begin{aligned}
 \bar{s}_{x_{\max}} &= 0,0225 g l^2, \\
 \bar{s}_{y_{\max}} &= 0,0156 g l^2.
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Ein größerer Unterschied tritt lediglich bei den Werten  $M_y$  und  $\bar{s}_y$  im Randfelde in Erscheinung. Die in der vorigen Fußnote enthaltenen Bemerkungen sind auch bei der Erklärung und Bewertung dieses Unterschiedes zu berücksichtigen.

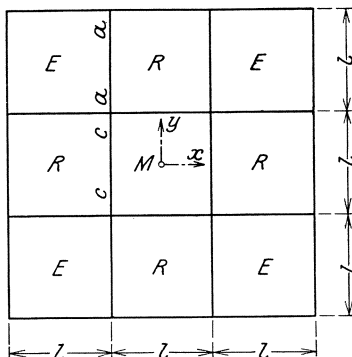


Abb. 15 a.

Tafel 3. Biegemomente einer dreireihigen Platte mit neun quadratischen Feldern.  
(Abb. 15a).

	Genauere Werte	Näherungswerte	Bemerkungen
Eckfeld $E$	$\bar{s}_{x\max} = \bar{s}_{y\max} = l^2 (0,02502g + 0,03031p)$	$M_{x\max} = M_{y\max} = l^2 (0,02692g + 0,03169p)$	Die Näherungswerte sind mit Hilfe der Formeln (31) und (31a) ermittelt
Randfeld $R$	$\bar{s}_{x\max} = l^2 (0,0225g + 0,02945p)$	$M_{x\max} = l^2 (0,02263g + 0,02955p)$	
	$\bar{s}_{y\max} = l^2 (0,0156g + 0,026p)$	$M_{y\max} = l^2 (0,0198g + 0,02813p)$	
	$\bar{s}_{x\min} = l^2 (0,0225g - 0,00694p)$	$M_{x\min} = l^2 (0,02263g - 0,00692p)$	
	$\bar{s}_{y\min} = l^2 (0,0156g - 0,0104p)$	$M_{y\min} = l^2 (0,0198g - 0,00833p)$	
Mittelfeld $M$	$\bar{s}_{x\max} = \bar{s}_{y\max} = l^2 (0,0174g + 0,02639p)$	$M_{x\max} = M_{y\max} = l^2 (0,01794g + 0,0272p)$	
	$\bar{s}_{x\min} = \bar{s}_{y\min} = l^2 (0,0174g - 0,0095p)$	$M_{x\min} = M_{y\min} = l^2 (0,01794g - 0,00926p)$	
Auflagerlinie $a$	$\bar{s}_x = -0,0632gl^2$	$M_{x_a} = -0,0667gl^2$	
Auflagerlinie $c$	$\bar{s}_x = -0,0477gl^2$	$M_{x_c} = -0,05g^2$	

Die nach den früheren amtlichen Bestimmungen errechneten Näherungswerte würden also für die Längsspannungen um etwa 45 vH zu klein, für die Querspannungen um 156 vH zu groß sein und, wie bereits in § 5 gezeigt, ein vollständig verkehrtes Bild der wirklichen Beanspruchung ergeben. Das bisher übliche Näherungsverfahren muß

daher im Gegensatz zu dem neuen, im Hinblick auf die Sicherheit und die Wirtschaftlichkeit der Querschnittsbemessung, als durchaus unzuverlässig und unbrauchbar bezeichnet werden.

2. Der Einfluß einer wechselweisen Belastung der Felder.

Eine durchlaufende Platte wird am stärksten beansprucht, wenn die veränderliche Belastung  $p$  schachbrettartig verteilt ist (Abb. 16).

Die gleichen Spannungen werden hervorgerufen, wenn zunächst alle Felder ( $A$ ) und ( $B$ ) mit  $\frac{p}{2}$  und so dann die Felder ( $A$ ) mit  $\pm \frac{p}{2}$ , die Felder  $B$  mit  $\mp \frac{p}{2}$  belastet werden:

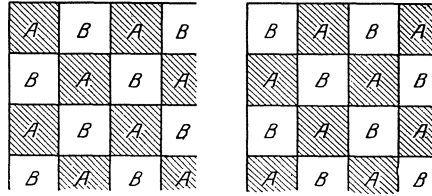


Abb. 16.

das obere Vorzeichen liefert

für die Felder  $A$  die größten positiven, für die Felder  $B$  die größten negativen Biegemomente, während bei der Wahl des unteren Vorzeichens das umgekehrte Spannungsbild entsteht. Da die erste Belastungsstufe sich von der vorhin behandelten ständigen Belastung lediglich dadurch unterscheidet, daß nunmehr  $\frac{p}{2}$  an Stelle von  $g$  tritt, so braucht man

nur in den zuletzt abgeleiteten Formeln  $g$  durch  $\frac{p}{2}$  zu ersetzen, um die Werte der Biegemomente der ersten Belastungsstufe zu gewinnen.

Bei der zweiten Stufe verhält sich jedes Feld wie eine einzelne, von jeglichem Zusammenhang mit den Nachbarfeldern gelöste, ringsum frei aufliegende und mit  $\pm \frac{p}{2}$  gleichmäßig belastete Platte, auf welche die im § 3 entwickelten Formeln mit der Maßgabe Anwendung finden, daß jetzt  $p$  mit  $\pm \frac{p}{2}$  zu vertauschen ist.

Handelt es sich beispielsweise um das Eckfeld  $E$  der vorhin behandelten dreireihigen Platte mit neun quadratischen Feldern (Abb. 15 a), so erhält man für die erste Belastungsstufe entsprechend Gleichung (31):

$$M_x = \frac{9}{128} \cdot \frac{p}{2} l_x^2 \nu_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = 0,01346 p l^2,$$

für die zweite Stufe nach Gleichung (13):

$$M_x = \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} l_x^2 \nu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = \pm 0,01823 p l^2,$$

insgesamt

$$M_{x_{\max}} = p l^2 (0,01346 + 0,01823) = 0,03169 p l^2,$$

$$M_{x_{\min}} = p l^2 (0,01346 - 0,01823) = 0,00477 p l^2.$$

Durch Zusammenfassung der Formeln (13) mit den für die ein- bzw. mehrreihige Platte aufgestellten Gleichungen (30) bzw. (31) ge-

langt man schließlich zu den nachfolgenden, allgemeinen Näherungsformeln für die Grenzwerte der Biegemomente

bei der einreihigen Platte (Abb. 13):

für das Außenfeld  $A$ :

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_c \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{1}{8} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_c' \frac{2 l_x^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

für das Innenfeld  $J$ :

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_a \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \left[ \frac{1}{8} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_d' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

(32)

bei der mehrreihigen Platte (Abb. 15):

für das Eckfeld  $E$ :

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

für das Randfeld  $R$ :

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_f' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

(33)

für das Mittelfeld  $M$ :

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_b \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) v_b \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{2} v_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

Auf Grund dieser Gleichungen sind die in den Tafeln 2 und 3 für eine Platte mit drei bzw. neun quadratischen Feldern angegebenen Werte  $M_x$  und  $M_y$  ermittelt worden. Der Vergleich mit den genauen Werten  $\bar{s}_x$ ,  $\bar{s}_y$  läßt wieder eine weitgehende Übereinstimmung erkennen.

Um die Grenzwerte der Stützenmomente zu bestimmen, ist es nicht notwendig, eine strenge Unterscheidung zwischen den gefährlichsten Laststellungen vorzunehmen; da die Wirkung der Kontinuität bei durchlaufenden Platten weniger stark ausgeprägt ist als bei den

durchgehenden Trägern, ist es zulässig, um die Berechnung zu vereinfachen, die gleichmäßige und gleichzeitige Belastung aller Felder als den ungünstigsten Fall zu betrachten und den außerordentlich geringen Einfluß der Be- oder Entlastung einzelner Felder außer acht zu lassen. Es können somit die zur Bestimmung von  $M_{x_a}$ ,  $M_{x_b}$ ,  $M_{x_c}$ ,  $M_{x_d}$  angegebenen Näherungsformeln (30a) und (31a), welche für die ständige Belastung  $g$  an sich zu hohe Werte liefern, unbedenklich auch für die veränderliche Last  $p$  benutzt werden.

Im ganzen erhält man folgende Werte:

1. für die einreihige Platte (Abb. 13):

$$\left. \begin{aligned} M_{x_a} &= -\frac{1}{10}(g+p)l_x^2 \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4} \\ M_{x_b} &= -\frac{1}{12}(g+p)l_x^2 \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

2. für die mehrreihige Platte (Abb. 15):

$$\left. \begin{aligned} M_{x_a} &= -\frac{1}{10}(g+p)l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} \\ M_{x_b} &= -\frac{1}{12}(g+p)l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} \\ M_{x_c} &= -\frac{1}{10}(g+p)l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ M_{x_d} &= -\frac{1}{12}(g+p)l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Diese Formeln und ebenso die Gleichungen (32) und (33) sind wie früher nur für den Bereich der größten Beanspruchungen mit der Umgrenzung

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{1}{2}l_x \\ b_y &= l_y - \frac{1}{2}l_x \end{aligned}$$

(Abb. 9) zu verwenden. Außerhalb dieses Bereiches reichen die halben Werte für die Querschnittsbemessung vollständig aus.

### 3. Beispiel.

Die in Abb. 15 dargestellte Platte besteht aus

- 4 Eckfeldern  $E$ ,
- 6 Randfeldern  $R$ ,
- 4 Randfeldern  $R_1$ ,
- 6 Mittelfeldern  $M$ ,

und den gleichen Seitenlängen

$$\begin{aligned} l_x &= 4,0 \text{ m,} \\ l_y &= 5,0 \text{ m,} \end{aligned}$$

und der Belastung

$$g = 0,4 \text{ t/m}^2,$$

$$p = 1,0 \text{ t/m}^2.$$

Ich werde der Reihe nach die größten positiven Momente jedes Feldes und die größten Stützenmomente jeder Auflagerlinie bestimmen.

$\alpha$ ) Eckfeld  $E$  (Abb. 16 a).

Die kennzeichnenden Beizahlen sind:

$$\nu_a = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4} = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,622,$$

$$\nu_e = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4} = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,787.$$

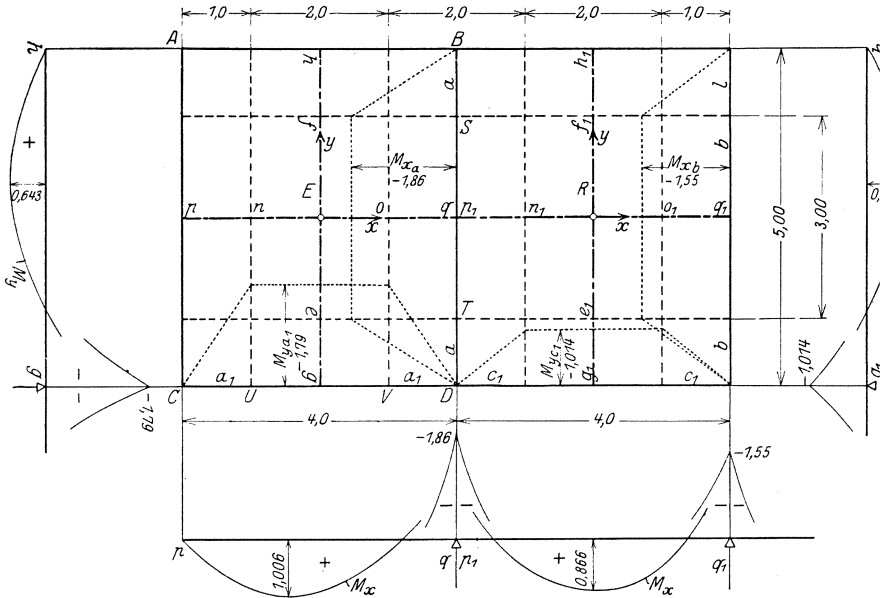


Abb. 16 a.

Entsprechend den Formeln (33) ist:

$$\begin{aligned} M_{x_{\max}} &= l_x^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 4,0^2 \left[ \frac{9}{128} (0,4 + 0,5) \cdot 0,787 \pm \frac{1,0}{16} \cdot 0,622 \right] \frac{5^4}{4^4 + 5^4} \\ &= 0,565 \pm 0,441 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

$$M_{x_{\max}} = 1,006 \text{ tm/m,}$$

$$M_{x_{\min}} = 0,124 \quad ,,$$

Ebenso ergibt sich:

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$= 0,361 \pm 0,282 \text{ tm/m}$$

$$M_{y_{\max}} = 0,643 \text{ tm/m,}$$

$$M_{y_{\min}} = 0,079 \quad ,,$$

Bei

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = 1200 \quad ,,$$

ist eine Nutzhöhe:

$$h - a_x = 0,411 \sqrt{1006} = 13,0 \text{ cm,}$$

$$h - a_y = 0,411 \sqrt{643} = 10,4 \quad ,,$$

erforderlich.

Wählt man die Plattenstärke  $h = 14,5 \text{ cm}$ , so stehen die Maße:

$$h - a_x = 14,5 - 1,5 = 13,0 \text{ cm,}$$

$$h - a_y = 14,5 - 2,5 = 12,0 \quad ,,$$

zur Verfügung.

Als Bewehrung müssen ohne Rücksicht auf die Drillungsmomente

1. in der  $x$ -Richtung

im Bereiche  $\bar{e}\bar{f} = b_y = l_y - \frac{1}{2} l_x = 3,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{100600}{1200 \cdot 13} = 7,26 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

im Bereiche  $\bar{e}\bar{g}$  und  $\bar{f}\bar{h}$ :

$$f_{e_x} = \frac{1}{2} \cdot 7,26 = 3,63 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

2. in der  $y$ -Richtung

im Bereiche  $\bar{n}\bar{o} = b_x = \frac{1}{2} l_x = 2,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{64300}{1200 \cdot 12} = 5,02 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

im Bereiche  $\bar{p}\bar{n}$  und  $\bar{o}\bar{q}$ :

$$f_{e_y} = \frac{1}{2} \cdot 5,02 = 2,51 \text{ cm}^2/\text{m}$$

vorhanden sein.

$\beta$ ) Randfeld  $R$  (Abb. 16a).

Unter Zugrundelegung der Beizahlen

$$\nu_f = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4} = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 2 \cdot 5^4} = 0,852,$$

$$\nu_f' = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + 2 l_y^4} = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 2 \cdot 5^4} = 0,875,$$



und der Formeln (33) erhält man die Werte:

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$= 0,425 \pm 0,441 \text{ tm/m}$$

$$M_{x_{\max}} = 0,866 \text{ tm/m,}$$

$$M_{x_{\min}} = -0,016 \quad ,,$$

$$M_{y_{\max}} = l_x^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_f' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$= 0,368 \pm 0,282 \text{ tm/m}$$

$$M_{y_{\max}} = 0,650 \text{ tm/m,}$$

$$M_{y_{\min}} = 0,086 \quad ,,$$

Erforderlich ist:

$$h - a_x = 0,411 \sqrt{866} = 12,1 \text{ cm,}$$

$$h - a_y = 0,411 \sqrt{650} = 10,5 \quad ,,$$

gewählt:

$$h = 13,5 \text{ cm}$$

$$h - a_x = 13,5 - 1,5 = 12,0 \text{ cm,}$$

$$h - a_y = 13,5 - 2,5 = 11,0 \quad ,,$$

Bewehrung

1. in der  $x$ -Richtung

im Bereiche  $\overline{e_1 f_1} = b_y$ :

$$f_{ex} = \frac{9}{8} \cdot \frac{86600}{1200 \cdot 12} = 6,78 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

im Bereiche  $\overline{e_1 g_1}$  und  $\overline{f_1 h_1}$ :

$$f_{ex} = \frac{1}{2} \cdot 6,78 = 3,39 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

2. in der  $y$ -Richtung

im Bereiche  $\overline{n_1 o_1} = b_x$ :

$$f_{ey} = \frac{9}{8} \cdot \frac{65000}{1200 \cdot 11} = 5,54 \text{ cm}^2/\text{m,}$$

im Bereiche  $\overline{p_1 n_1}$  und  $\overline{o_1 q_1}$ :

$$f_{ey} = \frac{1}{2} \cdot 5,54 = 2,77 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Da die negativen Momente  $M_{x_{\min}}$  außerordentlich klein sind und mit ausreichender Sicherheit vom Beton allein aufgenommen werden können, wird sich innerhalb des Feldes eine obere Bewehrung in der  $x$ -Richtung erübrigen.

$\gamma$ ) Randfeld  $R_1$  (Abb. 15).

Dieses Feld unterscheidet sich vom Feld  $R$  lediglich dadurch, daß die Ränder  $a_1, b_1$ , welche den gleichen Bedingungen wie die Ränder  $a, b$  unterworfen sind, statt der  $y$ - nunmehr der  $x$ -Achse parallel gerichtet sind; umgekehrt steht der Rand  $c_1$  senkrecht zur  $y$ - und der Rand  $c$  senkrecht zur  $x$ -Achse.

Wir müssen daher jetzt in den für  $R$  abgeleiteten Formeln die zur  $x$ - und  $y$ -Richtung gehörigen Beizahlen sinngemäß miteinander vertauschen.

Es ist somit:

$$\begin{aligned} \nu_f &= 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + l_y^4} = 1 - \frac{15}{32} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^4 + 5^4} = 0,835, \\ \nu_f' &= 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{2l_x^4 + l_y^4} = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^4 + 5^4} = 0,804, \\ M_{x_{\max}} &= l_x^2 \left[ \frac{9}{128} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_f \frac{l_y^4}{2l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,464 \pm 0,441 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

$$M_{x_{\max}} = 0,905 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\min}} = 0,023 \quad ,,$$

$$\begin{aligned} M_{y_{\max}} &= l_y^2 \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_f' \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{p}{16} \nu_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,340 \pm 0,282 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

$$M_{y_{\max}} = 0,622 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\min}} = 0,058 \quad ,,$$

Die Querschnittsbemessung ist ebenso einfach wie in den vorigen Feldern und braucht daher nicht näher erläutert zu werden.

 $\delta$ ) Mittelfeld  $M$  (Abb. 15).

Mit der Beizahl

$$\nu_b = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4} = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,874$$

liefern die Gleichungen (33):

$$M_{x_{\max}} = l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_b \pm \frac{p}{16} \nu_a \right] = 0,372 \pm 0,441 \text{ tm/m}$$

$$M_{y_{\max}} = l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \left[ \frac{1}{24} \left( g + \frac{p}{2} \right) \nu_b \pm \frac{p}{16} \nu_a \right] = 0,238 \pm 0,282 \quad ,,$$

$$M_{y_{\max}} = 0,813 \text{ tm/m}, \quad M_{y_{\max}} = 0,520 \text{ tm/m}.$$

$$M_{x_{\min}} = -0,069 \quad ,, \quad M_{y_{\min}} = -0,044 \quad ,,$$

$\varepsilon$ ) Auflagerlinien (Abb. 15).

Auf Grund der Formeln (35) ergibt sich der Reihe nach

1. für das Auflager (a):

$$M_{x_a} = -\frac{1}{10}(g+p)l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} = -\frac{1,4}{10} \cdot 4^2 \frac{2 \cdot 5^4}{4^4 + 2 \cdot 5^4} = -1,86 \text{ tm/m},$$

2. für das Auflager (b):

$$M_{x_b} = -\frac{1}{12}(g+p)l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} = -\frac{1,4}{12} \cdot 4^2 \frac{2 \cdot 5^4}{4^4 + 2 \cdot 5^4} = -1,55 \text{ tm/m},$$

3. für das Auflager (c):

$$M_{x_c} = -\frac{1}{10}(g+p)l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = -\frac{1,4}{10} \cdot 4^2 \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = -1,135 \text{ tm/m},$$

4. für das Auflager (d):

$$M_{x_d} = -\frac{1}{12}(g+p)l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = -\frac{1,4}{12} \cdot 4^2 \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = -0,946 \text{ tm/m},$$

5. für das Auflager ( $a_1$ ):

$$M_{y_{a_1}} = -\frac{1}{10}(g+p)l_y^2 \frac{2l_x^4}{l_y^4 + 2l_x^4} = -\frac{1,4}{10} \cdot 5^2 \frac{2 \cdot 4^4}{5^4 + 2 \cdot 4^4} = -1,79 \text{ tm/m},$$

6. für das Auflager ( $b_1$ ):

$$M_{y_{b_1}} = -\frac{1}{12}(g+p)l_y^2 \frac{2l_x^4}{l_y^4 + 2l_x^4} = -\frac{1,4}{12} \cdot 5^2 \frac{2 \cdot 4^4}{5^4 + 2 \cdot 4^4} = -1,491 \text{ tm/m},$$

7. für das Auflager ( $c_1$ ):

$$M_{y_{c_1}} = -\frac{1}{10}(g+p)l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} = -\frac{1}{10} \cdot 1,4 \cdot 5^2 \frac{4^4}{5^4 + 4^4} = -1,014 \text{ tm/m},$$

8. für das Auflager ( $d_1$ ):

$$M_{y_{d_1}} = -\frac{1}{12}(g+p)l_y^2 \frac{l_x^4}{l_y^4 + l_x^4} = -\frac{1}{12} \cdot 1,4 \cdot 5^2 \frac{4^4}{5^4 + 4^4} = -0,0846 \text{ tm/m}.$$

Entsprechend dem größten Stützenmoment ist eine Nutzhöhe

$$h - a_w = 0,411 \sqrt{1860} = 17,7$$

erforderlich.

Wird

$$h = 20 \text{ cm}$$

$$h - a_w = h - a_y = 18 \text{ cm}$$

gewählt, so muß beispielsweise

1. am Auflager (a) entsprechend Abb. 16a

im Bereiche  $\overline{ST} = b_y = 3,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{186000}{1200 \cdot 18} = 9,68 \text{ cm}^2/\text{m},$$

im Bereiche  $\overline{BS} = \overline{TD} = 1,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_x} = \frac{1}{2} \cdot 9,68 = 4,84 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

2. am Auflager ( $\alpha_1$ )

im Bereiche  $\overline{UV} = b_x = 2,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{179\,000}{1200 \cdot 18} = 9,34 \text{ cm}^2/\text{m},$$

im Bereiche  $\overline{CU} = \overline{VD} = 1,0 \text{ m}$ :

$$f_{e_y} = \frac{1}{2} \cdot 9,34 = 4,67 \text{ cm}^2/\text{m}$$

vorhanden sein.

In der gleichen Weise ist die Querschnittsbemessung der übrigen Auflagerlinien vorzunehmen. Die im Hinblick auf die Drillungsmomente an einzelnen Stellen erforderliche Zusatzbewehrung wird in einem späteren Abschnitt behandelt werden.

Die vorstehende Rechnung zeigt, daß trotz der großen Mannigfaltigkeit der Randbedingungen ein zuverlässiges und vollständiges Bild der Beanspruchung durchlaufender Platten ohne erheblichen Arbeitsaufwand gewonnen werden kann und daß die Untersuchung mit Hilfe des neuen Näherungsverfahrens durchaus einfach ist und rasch zum Ziele führt.

### III. Die Drillungsmomente der gleichförmig belasteten Platte.

Der Spannungszustand der gebogenen Platte ist nicht allein durch die Biegemomente  $M_x, M_y$  sondern auch durch das Drillungsmoment  $t_{xy}$  gekennzeichnet. Will man die Hauptspannungsmomente erfassen und die Anstrengung der Platte beurteilen, so genügt es nicht, lediglich die Größen  $M_x$  und  $M_y$  zu kennen: es müssen vielmehr auch die entsprechenden Werte  $t_{xy}$  ermittelt werden. Um diese Aufgabe zu lösen, werde ich jetzt die Beziehungen zwischen den Biege- und den Drillungsmomenten in einer eingehenderen Untersuchung darlegen und aus diesen Beziehungen ein Verfahren für die Abschätzung und die Darstellung der Drillungsmomente ableiten.

#### § 10. Die zugeordneten Momentenflächen.

Ich knüpfe an die bekannten Formeln für die Momente der reduzierten Spannungen

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{E h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \\ M_y &= -\frac{E h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \\ t_{xy} = t_{yx} = t &= -\frac{E h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

wobei unter

- $x, y$  die Ordinaten eines Punktes der Mittelfläche der Platten,
- $\zeta$  die Durchbiegung der Platte an der Stelle  $x, y$ ,
- $h$  die Plattenstärke,
- $E$  die Elastizitätsziffer des Baustoffes

zu verstehen sind.

Die Neigung der elastischen Fläche ist durch die Größen

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \omega_y &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

gekennzeichnet.

Führt man für die Plattensteifigkeit die Abkürzung

$$\frac{E h^3}{12} = N \quad (38)$$

ein, so lassen sich die Beziehungen zwischen den Drillungsmomenten  $t$  und den Winkeln  $\omega_x, \omega_y$  durch die einfache Formel

$$t = -N \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = -N \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \quad (39)$$

ausdrücken.

In Abb. 17 ist eine rechteckige, ringsum aufliegende Platte  $ABCD$  dargestellt. Der Streifen  $EF$  ist parallel zur  $x$ -Achse, liegt im Abstand  $\overline{OJ} = y$  vom Koordinatenanfangspunkt und wird durch Momente  $M_x$  beansprucht. Die zugehörige Momentenlinie ist durch die Kurve  $E'J''F'$  veranschaulicht.

Der Inhalt der Momentenfläche  $J'G'G''J''$  zwischen den Grenzen  $x = 0$  und  $x = x$  ist durch die Größe

bestimmt. Wird das Achsenkreuz derart angeordnet, daß für  $x = 0$

$$F_x = \int_{x=0}^{x=x} M_x dx = -N \int_{x=0}^{x=x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx = -N \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=x}$$

bestimmt. Wird das Achsenkreuz derart angeordnet, daß für  $x = 0$   $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$  ist, so ergibt sich

$$F_x = -N \omega_x.$$

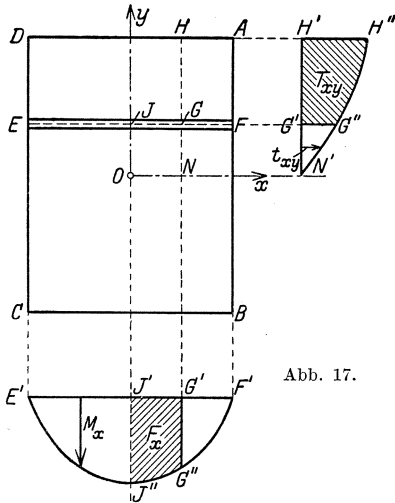


Abb. 17.

In der gleichen Weise gilt für die Momente  $M_y$  des zur  $y$ -Achse parallelen Streifens  $KL$  in Abb. 18 die Gleichung

$$F_y = \int_{y=0}^{y=y} M_y dy = -N \int_{y=0}^{y=y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \cdot dy = -N \omega_y.$$

Zwischen den Winkeln  $\omega_x, \omega_y$  und den Momentenflächen  $F_x, F_y$  besteht somit die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\frac{F_x}{N}, \\ \omega_y &= -\frac{F_y}{N} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

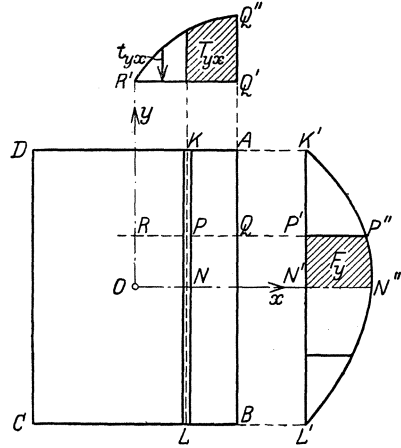


Abb. 18.

Betrachten wir jetzt die Schnittfläche  $HG$  im Abstand  $JG = x$  von der  $y$ -Achse (Abb. 17). Die Linie  $N'G''H''$  stellt die zugehörigen Drillungsmomente  $t_{xy}$  dar. Die Momentenfläche  $G'G''H'H''$  zwischen den Grenzen  $y = y$  und  $y = b$  hat den Inhalt

$$T_{xy} = \int_{y=y}^{y=b} t_{xy} dy = -N \int_{y=y}^{y=b} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} dy = N \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{y=b}^{y=y}.$$

Da für die Randpunkte  $y = b$  sowohl  $T_{xy}$  als  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  verschwinden, so erhält man

$$T_{xy} = N \omega_x.$$

Wendet man die gleichen Betrachtungen auf die Drillungsmomente  $t_{yx}$  der Schnittfläche  $PQ$  in Abb. 18 an, so ergibt sich ebenso

$$T_{yx} = \int_{x=x}^{x=a} t_{yx} dx = -N \int_{x=x}^{x=a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} dx = N \omega_y.$$

Die Gegenüberstellung mit der Gl. (40) führt zu dem Satz:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -T_{xy}, \\ F_y &= -T_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Jeder aus den Biegemomenten  $M_x$  oder  $M_y$  gebildeten Fläche  $F_x$  oder  $F_y$  entspricht eine aus den Drillungsmomenten  $t_{xy}$  oder  $t_{yx}$  gebildete, inhaltsgleiche Fläche  $T_{xy}$  oder  $T_{yx}$ .

Ich bezeichne die Größen  $F_x$  und  $T_{xy}$ ,  $F_y$  und  $T_{yx}$  als die zugeordneten Momentenflächen.

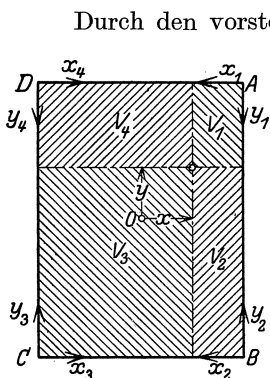


Abb. 19.

Durch den vorstehenden Satz ist die Ermittlung der Werte  $T$  auf die Berechnung der zugehörigen Werte  $F$  zurückgeführt. Bevor ich zeige, wie bei den verschiedensten Lagerungsarten diese Flächen aus den Näherungsformeln für die Momente  $M_x$ ,  $M_y$  abgeleitet werden können, möchte ich noch auf eine dritte, für die Wirkung der Drillungsmomente kennzeichnende Größe hinweisen.

Ich verlege den Anfangspunkt nach der Ecke  $A$  (Abb. 19) und bezeichne das neue Achsenkreuz mit  $x_1$ ,  $y_1$ . Die Grundgleichung

$$t_{x_1 y_1} = -N \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial y_1}$$

liefert nach einer doppelten Integration die Beziehung<sup>1</sup>

$$V = \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} t \, dx_1 \, dy_1 = -N \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial y_1} \, dx_1 \, dy_1 = -N \zeta. \quad (42)$$

Da für jede Ecke der Platte eine ähnliche Beziehung besteht, so erkennt man, daß die vier Abschnitte  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  des räumlichen Diagramms der Drillungsmomente den gleichen Rauminhalt haben und daß dieser Inhalt der Durchbiegung  $\zeta$  der Platte an der Stelle  $x$ ,  $y$  verhältnisgleich ist.

Mit Hilfe dieses zweiten Satzes läßt sich also aus der jeweiligen Durchbiegung der Inhalt der zugehörigen Momentendiagramme bestimmen.

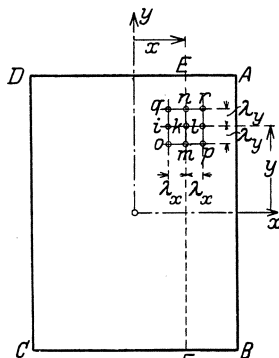


Abb. 20.

Die Größen  $T$  und  $V$  sind für die Querschnittsbemessung deswegen wichtig, weil die Versuche gezeigt haben, daß für die Anstrengung der Platte nicht der jeweilige Spitzenwert der Spannungsmomente, sondern der Durchschnittswert in einer ziemlich weit ausgedehnten Umgebung der gefährdeten Stelle ausschlaggebend ist.

Eine einfache Überlegung gestattet aber auch, den Verlauf der Drillungsmomente längs einer Schnittfläche ziemlich genau zu beschreiben. Betrachten wir den Punkt  $k$  in Abb. 20 mit den Ordinaten  $x$ ,  $y$  und acht weitere Punkte  $i$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , die um  $\lambda_x$  bzw.  $\lambda_y$  von  $k$  entfernt sind. In meinem Buche über „die Theorie elastischer Ge-

<sup>1</sup> Die Integrationskonstanten fallen fort, da für  $x_1 = y_1 = 0$  sowohl  $V$  als  $\zeta$  verschwinden.

webe“ habe ich in § 3 S. 18 die Beziehung

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{(\zeta_r - \zeta_a) - (\zeta_p - \zeta_0)}{4 \lambda_x \lambda_y}$$

nachgewiesen. Bei einer stetig und gleichförmig belasteten Platte darf man wohl annehmen, daß, wenn die Abstände  $\lambda$  sehr klein gewählt werden, die  $p, l, r$  bzw.  $o, i, q$  verbindenden elastischen Linien einander ähnlich sein müssen. Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} \zeta_r &= \alpha \zeta_n, & \zeta_a &= \beta \zeta_n, \\ \zeta_l &= \alpha \zeta_k, & \zeta_i &= \beta \zeta_k, \\ \zeta_p &= \alpha \zeta_m, & \zeta_o &= \beta \zeta_m, \end{aligned}$$

wobei unter  $\alpha, \beta$  Proportionalitätsfaktoren zu verstehen sind, so folgt aus obiger Formel

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\alpha - \beta}{2 \lambda_x} \frac{\zeta_n - \zeta_m}{2 \lambda_y},$$

und da

$$\frac{\zeta_n - \zeta_m}{2 \lambda_y} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_k,$$

so gilt auch

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha - \beta}{2 \lambda_x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\alpha - \beta}{2 \lambda_x} \omega_y. \tag{43}$$

Die Drillungsmomente  $t_{xy}$  der Fläche  $EF$  verändern sich also nahezu wie die zugehörigen Winkel  $\omega_y$ .

Sind wir instande, die elastische Linie für  $EF$  zu zeichnen und die zugehörigen Winkel  $\omega_y$  zu bestimmen, so werden uns durch die Gleichung (43) für den Verlauf, durch die Gleichung (40) für die Größe der Drillungsmomente sichere Anhaltspunkte gegeben.

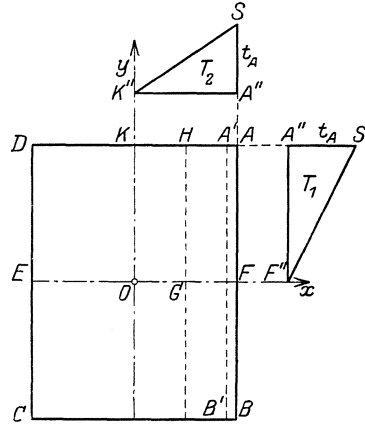


Abb. 21.

### § 11. Die ringsum frei aufliegende Platte.

Die in Abb. 21 dargestellte Platte ist mit  $p$  gleichförmig belastet. Für die Spannungsmomente des Plattenmittelpunktes gelten bekanntlich die Formeln:

$$M_{x_{\max}} = \frac{p_x l_x^2}{8} \nu_a, \quad M_{y_{\max}} = \frac{p_y l_y^2}{8} \nu_a.$$

Hierbei ist 
$$p_x = p \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}, \quad p_y = p \cdot \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Der Momentenverlauf längs der Mittellinie  $EF$  ( $y = 0$ ) läßt sich



mit hinreichender Genauigkeit durch eine Parabel nach der Gleichung

$$M_x = M_{x_{\max}} \left(1 - \frac{4x^2}{l_x^2}\right) = \frac{p_x l_x^2}{8} \nu_a \left(1 - \frac{4x^2}{l_x^2}\right)$$

darstellen. Der Inhalt der zugehörigen Momentenfläche ist daher

$$F_x = \int_0^x M_x dx = \frac{p_x l_x^2}{8} \nu_a \cdot x \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{l_x^2}\right).$$

Für die bis zum Rande  $x = \frac{l_x}{2}$  reichende Strecke  $OF$  ergibt sich somit

$$F_x = \frac{p_x l_x^3}{24} \nu_a. \quad (44)$$

Eine ähnliche Rechnung liefert für die Strecke  $OK$  der Mittellinie den Wert

$$F_y = \frac{p_y l_y^3}{24} \nu_a. \quad (44a)$$

Entsprechend dem Satze der zugeordneten Momentenflächen ist also für die Randfläche  $AF$  ( $x = +\frac{1}{2}l_x$ ), bzw. für die Randfläche  $AK$  ( $y = +\frac{1}{2}l_y$ ):

$$\left. \begin{aligned} T_{xy} = T_1 &= -\frac{p_x l_x^3}{24} \nu_a = -\frac{p \nu_a}{24} \frac{l_x^3 l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}, \\ T_{yx} = T_2 &= -\frac{p_y l_y^3}{24} \nu_a = -\frac{p \nu_a}{24} \frac{l_x^4 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Aus Gleichung (43) folgt weiterhin, daß die Momente  $t_{xy}$  der Randfläche  $AB$  dem Neigungswinkel  $\omega_y$  der Biegelinie einer diesem Rande parallelen und unendlich nahen Faser  $A'B'$  verhältnismäßig sein müssen. Da diese Biegelinie im vorliegenden Falle nicht wesentlich von einer Parabel abweichen kann, so werden die Winkel  $\omega_y$  und ebenso die Momente  $t_{xy}$  von der Randmitte nach den Ecken nahezu geradlinig wachsen. Für die in Abb. 21 dargestellte Spannungsverteilung gelten somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} t_A \cdot \frac{l_y}{2}, \\ T_2 &= \frac{1}{2} t_A \cdot \frac{l_x}{2}, \end{aligned}$$

wobei  $t_A$  das Drillungsmoment in der Ecke  $A$  bedeutet.

Im Einklang mit den Gleichungen (45) ergibt sich nunmehr

$$t_A = \frac{4T_1}{l_y} = \frac{4T_2}{l_x} = -\frac{p \nu_a}{6} \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4}. \quad (46)$$

Nach dieser Formel erhält man beispielsweise

$$\text{für } l_y = l_x \text{ mit } \nu_a = \frac{7}{12}: t_A = -0,0486 p l_x^2,$$

$$\text{für } l_y = 2l_x \text{ mit } \nu_a = \frac{41}{51}: t_A = -0,0631 p l_x^2.$$

Leitz<sup>1</sup> hat für die gleichen Längenverhältnisse die Werte

$$t_A = -0,0462 p l_x^2,$$

bzw.

$$t_A = -0,0659 p l_x^2$$

ermittelt. Die nach der Näherungsformel (46) errechneten Werte stimmen also mit den Ergebnissen der genauen Untersuchung sehr gut überein.

Ist  $l_y > 2l_x$ , so kann man für die Querschnittsbewegung den Grenzwert

$$t_A = \sim -\frac{p l_x^2}{15}$$

benutzen.

Um den Verlauf der Drillungsmomente im ganzen Bereich des Plattenviertels  $OF AK$  zu bestimmen, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß diese Momente längs den Mittellinien  $OF$  und  $OK$  verschwinden, daß sie ferner entsprechend den Bedingungen

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} = -N \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = -N \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{für } x = \pm \frac{1}{2} l_x,$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = -N \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^2 \partial x} = -N \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{für } y = \pm \frac{1}{2} l_y$$

ihren Größtwert am Rande erreichen und ebenso vom Plattenmittelpunkt nach der Ecke zunehmen. Dieser Verlauf kann in erster Annäherung durch eine Pyramide mit der Basis  $OF AK$  und der Höhe  $t_A = \overline{AS}$  veranschaulicht werden (Abb. 22). Ihr Rauminhalt ist

$$V = \frac{1}{3} t_A \frac{l_x l_y}{4} = \frac{t_A}{12} l_x l_y,$$

oder im Einklang mit Gleichung (46)

$$V = -\frac{p \nu_a}{72} \frac{l_x^4 l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Da aber nach unserem zweiten Satze

$$V = -N \zeta$$

sein muß, so erhält man für die Durchbiegung des Plattenmittelpunktes den Wert

$$\zeta_m = -\frac{V}{N} = \frac{p \nu_a}{72} \frac{l_x^4 l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}. \quad (47)$$

<sup>1</sup> Siehe: Betonkalender, Teil I, Abschnitt VII.

Diese Formel liefert beispielsweise

$$\text{für } l_y = l_x: \zeta_m = 0,00405 \frac{p l_x^4}{N},$$

$$\text{für } l_y = 2 l_x: \zeta_m = 0,01051 \frac{p l_x^4}{N}.$$

Die in meinem Buche über die Gewebetheorie nachgewiesenen genauen Werte

$$\zeta_{\max} = 0,004055 \frac{p l_x^4}{N},$$

bzw.

$$\zeta_{\max} = 0,01093 \frac{p l_x^4}{N}$$

stimmen mit den obigen Näherungswerten recht gut überein. Die an Stelle des räumlichen Diagramms der Drillungsmomente benutzte

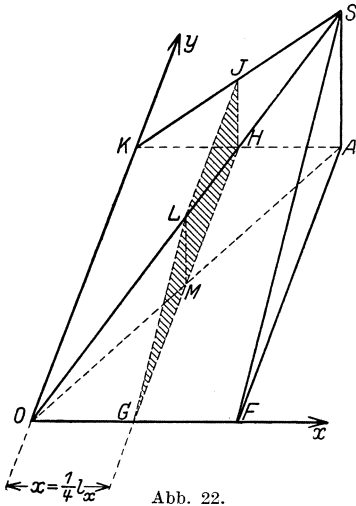


Abb. 22.

Pyramide gibt uns also einen durchaus zuverlässigen Anhalt für die Gesamtheit der Drillungsspannungen. Um uns zu überzeugen, daß nicht allein bei den Randflächen, sondern auch für irgendeinen Schnitt zwischen den Rändern und den Mittellinien Größe und Verlauf der Drillungsmomente mit hinreichender Genauigkeit aus der Pyramide abgeleitet werden können, sei als Beispiel eine Platte mit dem Längenverhältnis  $l_y : l_x = 2 : 1$  gewählt.

Für den Schnitt  $HG$  in Abb. 21 im Abstand  $x = \frac{1}{4} l_x$  liefert die genaue Untersuchung

$$F_x = \int_0^{\frac{1}{4} l_x} M_x dx = 0,00222 p l_x^3.$$

Diesem Schnitt  $HG$  entspricht in der Pyramide, die durch Abb. 22 veranschaulicht ist, eine Momentenfläche  $HJLG$  mit dem Inhalt

$$T_{xy} = t_A l_y \frac{x}{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x}\right).$$

Nimmt man für  $t_A$  den vorhin nachgewiesenen Wert  $t_A = -0,0631 p l_x^2$ , so erhält man für  $x = \frac{1}{4} l_x$ :

$$T_{xy} = -0,0631 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} p l_x^3 = -0,00236 p l_x^3.$$

Die Bedingung  $F_x = -T_{xy}$  ist also mit ausreichender Genauigkeit erfüllt. Hiermit ist erwiesen, daß die Pyramide als ein treues Abbild

aller wesentlichen Einzelheiten der wirklichen Spannungsverteilung betrachtet und daher der Querschnittsbemessung zugrunde gelegt werden darf.

### § 12. Die ringsum eingeklemmte Platte.

Für die Mittellinie  $EF$  der gleichförmig belasteten Platte (Abb. 23) sind uns aus § 4, Gleichung (15) und (17) das Moment im Mittelpunkt  $O$

$$M_{x_{\max}} = \frac{p_x l_x^2}{24} \nu_b = M_1$$

und die Einspannungsmomente

$$M_{x_{\min}} = -\frac{p_x l_x^2}{12} \cdot \frac{1}{\nu_b} = M_2$$

bekannt.

Um den Verlauf der Momentenlinie vollständig zu beschreiben, benutze ich den Ansatz

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \xi^n, \quad (48)$$

wobei

$$\xi = \frac{x}{a}.$$

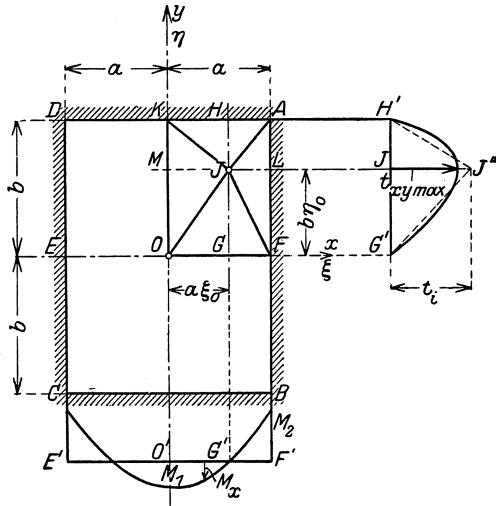


Abb. 23.

Unter  $a$  ist die halbe Seitenlänge zu verstehen.

Es ist leicht zu erkennen, daß dieser Ansatz die Bedingung

$$\begin{aligned} M_x &= M_1 \quad \text{für } x = \xi = 0, \\ M_x &= M_2 \quad \text{für } x = a, \xi = 1 \end{aligned}$$

befriedigt, gleichgültig welche Potenz  $n$  gewählt wird.

Da  $\omega_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  sowohl für  $x = 0$  wie auch für  $x = a$  verschwinden muß, so haben wir zur Bestimmung von  $n$  die Bedingung

$$\int_0^a M_x dx = a \int_0^1 M_x d\xi = 0,$$

d. h.

$$\begin{aligned} M_1 + \frac{M_2 - M_1}{n + 1} &= 0, \\ n &= -\frac{M_2}{M_1}. \end{aligned} \quad (49)$$

Aus dem Ansatz (48) folgt weiterhin

$$N \omega_x = -\int_0^x M_x dx = -\frac{1}{2} l_x \int_0^{\xi} M_x d\xi = -M_1 \cdot \frac{l_x}{2} \xi (1 - \xi^n). \quad (50)$$

Der Größtwert von  $\omega_x$  wird an der Stelle  $\xi_0$ , wo zugleich  $M_x = 0$  ist, erreicht, d. h.

$$\begin{aligned} M_1 + (M_2 - M_1) \xi_0^n &= 0, \\ \xi_0^n &= -\frac{M_1}{M_2 - M_1} = \frac{1}{n+1}, \\ \xi_0 &= \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}, \\ N \omega_{x_{\max}} &= -M_1 \cdot \frac{l_x}{2} \xi_0 \frac{n}{n+1} \end{aligned} \quad (51)$$

Im Abstand  $OG = a \xi_0$  ist der Schnitt  $HG$  parallel zur  $y$ -Achse gelegt. Auf Grund der Gleichung (43) und in sinngemäßer Anlehnung an den Ansatz (50) läßt sich der Verlauf der Momente  $t_{xy}$  längs dieses Schnittes in der Form

$$t_{xy} = \frac{C l_y}{2} \eta (1 - \eta^n) \quad (52)$$

darstellen, wobei

$$\eta = \frac{y}{b}$$

ist und  $b$  die halbe Seitenlänge,  $C$  eine vorerst unbestimmte Beizahl bedeutet. Für die Strecke  $GH$  ergibt sich sodann

$$T_{xy} = \int_0^{\frac{l_y}{2}} t_{xy} dy = \frac{C \cdot l_y^2}{8} \frac{n}{n+2},$$

und da

$$T_{xy} = N \omega_x$$

sein muß, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{C l_y^2}{8} \frac{n}{n+2} &= -M_1 \frac{l_x}{2} \xi_0 \frac{n}{n+1}, \\ C &= -\frac{n+2}{n+1} \frac{4 l_x}{l_y^2} \xi_0 M_1. \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß  $t_{xy}$  seinen Größtwert an der Stelle

$$\eta_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

erreicht, so findet man nunmehr

$$(t_{xy})_{\max} = \frac{C l_y}{2} \eta_0 \frac{n}{n+1} = -2 \eta_0 \xi_0 \frac{l_x}{l_y} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} M_1. \quad (53)$$

Die Auflösung der Bestimmungsgleichungen für  $\xi_0$  und  $\eta_0$  zeigt die eigentümliche Tatsache, daß sich diese Größen bei wechselndem Längenverhältnis  $\frac{l_y}{l_x}$  so gut wie nicht verändern und von einem Mittelwert

$\xi_0 = \eta_0 = \frac{3}{5}$  nur sehr wenig abweichen. Führt man diesen Mittelwert in Gleichung (53) ein, so wird

$$(t_{xy})_{\max} = -\frac{18}{25} \frac{l_x}{l_y} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} M_1,$$

und da

$$M_1 = \frac{p_x l_x^2}{24} \nu_b = \frac{p l_x^2 l_y^4 \nu_b}{24 (l_x^4 + l_y^4)},$$

so ergibt sich schließlich

$$(t_{xy})_{\max} = -\frac{3}{100} \frac{p l_x^2 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \nu_b. \quad (54)$$

Für das Stützenmoment  $M_2$  ist in § 4, Gleichung (17) der Näherungswert

$$M_2 = -\frac{p_x l_x^2}{12} \frac{1}{\nu_b}$$

empfohlen.

Demgemäß ist

$$n = -\frac{M_2}{M_1} = \frac{2}{\nu_b^2}.$$

Als Beispiel wähle ich die quadratische Platte mit

$$\nu_b = \frac{31}{36} = 0,861,$$

$$n = \frac{2}{0,861^2} = 2,7$$

und erhalte nach Formel (54):

$$(t_{xy})_{\max} = -\frac{3}{100} \frac{p l_x^2}{2} \cdot \frac{2,7 \cdot 4,7}{3,7 \cdot 3,7} \cdot 0,861 = -0,012 p l_x^2.$$

Dieser Wert stimmt mit dem von Leitz errechneten genauen Wert  $t_{\max} = \sim 0,012 p l_x^2$  vollständig überein.

Da sich der Bruch

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

nur unwesentlich von 1 unterscheidet, so kann man an Stelle von (54) die noch einfachere Näherungsformel

$$(t_{xy})_{\max} = -\frac{3}{100} \frac{p l_x^2 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} \nu_b. \quad (55)$$

verwenden.

Um den Einfluß der Drillungsmomente auf die Anstrengung der Platte zu prüfen, genügt es nicht den Größtwert  $t_{\max}$  zu erkennen, die Gestalt des ganzen räumlichen Momentendiagramms muß noch untersucht werden. Betrachten wir die vier Bereiche, welche innerhalb

Plattenviertels an den Ort angrenzen, wo

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$$

und  $t$  ein Maximum ist, in Abb. 23 also die Gebiete

$$JGOM, JGFL, JHKM, JHAL$$

und beachten wir, daß in jedem dieser Bereiche, wie in einem Viertel einer ringsum frei aufliegenden Platte, die Drillungsmomente längs zweier angrenzender Kanten verschwinden, längs der beiden anderen aber ihren Größtwert erreichen, so liegt der Gedanke nahe, den Spannungsverlauf in jedem Bereiche nach dem Beispiel der frei aufliegenden Platte durch eine Pyramide darzustellen. In dieser Weise entstehen die vier Pyramiden  $JGOM, JGFL, JHKM, JHAL$  mit der gemeinsamen Spitze  $J$ . Bezeichnet man mit  $t_i$  die Höhe dieser Pyramiden, so ist der gesamte Rauminhalt

$$V = \frac{1}{3} t_i \frac{l_x l_y}{4} = \frac{1}{12} t_i l_x l_y = -N \zeta_0, \quad (56)$$

wobei unter  $\zeta_0$  die Durchbiegung der Platte an der Stelle  $O$  zu verstehen ist.  $\zeta_0$  läßt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$N \zeta_0 = \int_0^{\frac{1}{2} l_x} M_x (a - x) dx = - \int_0^{\frac{1}{2} l_x} M_x x dx$$

errechnen. Entsprechend dem Ansatz (48) ergibt sich

$$\begin{aligned} N \zeta_0 &= - \frac{l_x^2}{4} \int_0^1 [M_1 + (M_2 - M_1) \xi^n] \xi d\xi = - \frac{l_x^2}{4} \left[ \frac{M_1}{2} + \frac{M_2 - M_1}{n + 2} \right] \\ &= \frac{l_x^2}{8} M_1 \cdot \frac{n}{n + 2}, \end{aligned}$$

oder auch

$$N \zeta_0 = \frac{p}{192} \frac{l_x^4 l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \nu_b \frac{n}{n + 2}, \quad (57)$$

somit

$$t_i = - \frac{12 N \zeta_0}{l_x l_y} = - \frac{p}{16} \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} \nu_b \cdot \frac{n}{n + 2}. \quad (58)$$

Die Formel (57) liefert beispielsweise für die quadratische Platte

$$N \zeta_0 = \frac{p l_x^4}{384} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{2.7}{4.7} = 0,001288 p l_x^4.$$

Nadai<sup>1</sup> gibt auf Grund seiner genauen Untersuchungen

$$N \zeta_0 = 0,00128 p l_x^4$$

an. Da beide Werte vorzüglich miteinander übereinstimmen, so ist hiermit die Zuverlässigkeit der Näherungsformel erwiesen.

<sup>1</sup> Vgl. Prof. Dr. Nadai: Die elastischen Platten, § 45, S. 183. Berlin: Julius Springer 1925.

Platte an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt. 51

Es ist schließlich zweckmäßig zu prüfen, ob für die Fläche  $HG$ , in welcher die größten Drillungsmomente auftreten, der Gesamtwert dieser Momente ebenfalls mit ausreichender Sicherheit aus der Pyramide entnommen werden kann. Der Querschnitt durch die Pyramide ist ein Dreieck  $HGJ_2$  mit dem Inhalt

$$T_{xy} = \frac{t_i l_y}{4} = - \frac{p}{64} \frac{l_x^2 l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \nu_b \cdot \frac{n}{n+2}.$$

Für die quadratische Platte erhält man nach dieser Formel

$$T_{xy} = - 0,00386 p l_x^3.$$

Nach Gleichung (51) ist aber auch

$$T_{xy} = - M_1 \cdot \frac{l_x}{2} \xi_0 \frac{n}{n+1} = - \frac{p l_x^2 l_y^4}{48 (l_x^4 + l_y^4)} \xi_0 \nu_b \frac{n}{n+1}.$$

Hieraus ergibt sich für  $\xi_0 = \frac{3}{5}$ :

$$T_{xy} = - \frac{p l_x^3 l_y^4}{80 (l_x^4 + l_y^4)} \nu_b \frac{n}{n+1},$$

insbesondere für  $l_x = l_y$ :

$$T_{xy} = - 0,00392 p l_x^3.$$

Diese Gegenüberstellung zeigt wiederum, daß der Flächeninhalt des aus der Pyramide entnommenen Momentendiagramms sehr genau mit dem Inhalt des Diagrammes der wirklichen Drillungsmomente übereinstimmt. Um den gesamten Spannungsverlauf zu beschreiben, brauchen wir somit lediglich die Höhe  $t_i$  mit der Hilfe der Formel (58) zu bestimmen und können dann, wie in Abb. 24 angedeutet, die vier Pyramiden aufzeichnen.

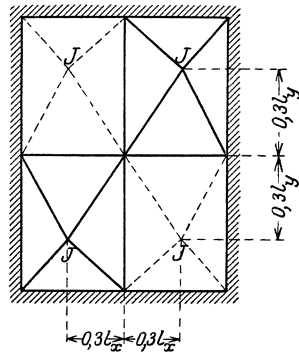


Abb. 24.

### § 13. Platte an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt.

Die in Abb. 25 dargestellte Platte ist längs der Kante  $AB$  fest eingespannt, an den drei übrigen Kanten frei aufliegend und wird mit  $p$  gleichförmig belastet.

Ich wähle die Mitte  $F$  des eingeklemmten Randes als Koordinatenanfangspunkt und benutze für den Mittelstreifen  $EF$  als Gleichung der elastischen Linie den Ansatz

$$N\zeta = \varphi^2 (1 - \varphi) (d_0 + d_1\varphi + d_2\varphi^2), \quad (59)$$

wobei

$$\varphi = \frac{x}{l_x}$$

ist.



Unter  $d_0, d_1, d_2$  sind vorerst unbestimmte Beizahlen zu verstehen. Es ist leicht zu erkennen, daß dieser Absatz von vornherein den Randbedingungen

$$\zeta = 0 \quad \text{für } \varphi = 0 \quad \text{und } \varphi = 1$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{l_x} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = 0$$

genügt.

Die entsprechenden Momente  $M_x$  sind durch die Gleichung

$$M_x = -N \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\frac{N}{l_x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = \frac{2}{l_x^2} [d_0 (3\varphi - 1) + 3d_1 \varphi (2\varphi - 1) + 2d_2 \varphi^2 (5\varphi - 3)] \quad (60)$$

bestimmt.

Für  $\varphi = 0$ , d. h. für die Mitte des eingeklemmten Randes ist uns aus § 5, Gleichung (22a) und (22) das Einspannungsmoment

$$M_{x_{\min}} = -p_x \frac{l_x^2}{8}$$

bekannt, ebenso für den Querschnitt im Abstand  $x = \frac{5}{8} l_x$  dieses Randes das Feldmoment

$$M_{x_{\max}} = \frac{9}{128} p_x l_x^2 \nu_c$$

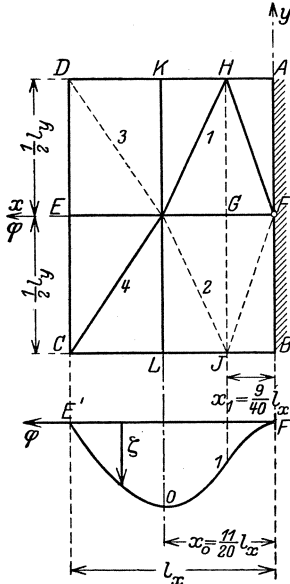


Abb. 25.

schließlich wissen wir, daß am biegungsfreien Rande, nämlich für  $x = l_x: M_x = 0$  sein muß.

Zur Ermittlung der Größen  $d_0, d_1, d_2$  stehen uns daher die folgenden Bedingungen zur Verfügung:

$$-\frac{1}{8} p_x l_x^2 = -\frac{2d_0}{l_x^2},$$

$$\frac{9}{128} p_x l_x^2 \nu_c = \frac{2}{l_x^2} \left[ d_0 \left( \frac{15}{8} - 1 \right) + \frac{15}{8} d_1 \left( \frac{10}{8} - 1 \right) + \frac{25}{32} d_2 \left( \frac{25}{8} - 3 \right) \right],$$

$$0 = \frac{2}{l_x^2} [2d_0 + 3d_1 + 4d_2].$$

Hieraus erhält man

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{p_x l_x^4}{16}, \\ d_1 &= -\frac{4}{45} p_x l_x^4 \left( \frac{47}{32} - \nu_c \right), \\ d_2 &= \frac{1}{15} p_x l_x^4 (1 - \nu_c). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Führen wir diese Größen in den Ansatz (59) ein, so ergibt sich

$$N \zeta = \frac{p_x l_x^4}{720} [(45 - 94\varphi + 48\varphi^2) + 16\varphi(4 - 3\varphi)\nu_c] \varphi^2 (1 - \varphi). \quad (62)$$

Platte an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt. 53

Zeichnet man für verschiedene Längenverhältnisse und die zugehörigen Werte  $\nu_c$  die der vorstehenden Gleichung entsprechenden elastischen Linien, so zeigt sich, daß der Wendepunkt 1 stets in der nächsten Umgebung der Stelle

$$x_1 = \frac{9}{40} l_x$$

verbleibt und daß ebenso die größte Durchbiegung in der nächsten Nähe der Stelle

$$x_0 = \frac{11}{20} l_x$$

entsteht.

Für

$$\varphi_0 = \frac{11}{20} \quad \text{und} \quad p_x = p \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4}$$

ist nach Gleichung (62)

$$N \zeta_{\max} = \frac{p}{144} \frac{l_x^4 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} (1,064 + 2,815 \nu_c). \quad (63)$$

Wendet man diese Formel auf die Grenzfälle

$$l_y : l_x = 1 \quad \text{mit} \quad \nu_c = \frac{149}{160},$$

$$l_y : l_x = \infty \quad \text{mit} \quad \nu_c = 1,$$

so erhält man

$$N \zeta_{\max} = 0,00291 p l_x^4$$

bzw.

$$N \zeta_{\max} = 0,00539 p l_x^4,$$

im Vergleich zu den in der genauen Untersuchung ermittelten Werten

$$N \zeta_{\max} = 0,00286 p l_x^4$$

bzw.

$$N \zeta_{\max} = 0,00541 p l_x^4,$$

also sehr zuverlässige Ergebnisse.

Es bietet nunmehr keine Schwierigkeiten, die Spannungspyramiden zu konstruieren. Die Gerade  $\overline{LOK}$ , im Abstand  $x_0 = \varphi_0 l_x = 0,55 l_x$  vom eingeklemmten Rande und die  $x$ -Achse bilden die Grenzscheiden und können, da längs der ersteren  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ , längs der zweiten  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$  ist, als die Elastizitätsachsen der Platte bezeichnet werden.

Die Pyramiden  $AHKOF$  und  $BJLOF$  einerseits,  $KDEO$  und  $LCEO$  andererseits haben gleiche Gestalt und gleichen Rauminhalt. Für die beiden ersten mit der Höhe  $\pm t_r$  ist

$$V_{1,2} = \pm \frac{t_r}{3} \frac{11}{20} l_x \frac{1}{2} l_y = \pm \frac{11}{120} t_r l_x l_y = \mp N \zeta_{\max},$$

für die beiden letzten mit der Höhe  $t_l$  hingegen:

$$V_{3,4} = \pm \frac{t_l}{3} \frac{9}{20} l_x \frac{1}{2} l_y = \pm \frac{9}{120} t_l l_x l_y = \pm N \zeta_{\max}.$$

Hieraus folgt im Einklang mit Gleichung (63):

$$\left. \begin{aligned} t_r &= - \frac{p l_x^3 l_y^3}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} (0,0803 + 0,2133 \nu_c), \\ t_l &= + \frac{p l_x^3 l_y^3}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} (0,0985 + 0,2606 \nu_c). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Für die quadratische Platte mit  $\nu_c = \frac{149}{224}$  ergibt sich beispielsweise für die Ecke  $D$ :

$$t_l = 0,0388 p l_x^2,$$

der genaue Wert

$$t_l = 0,0365 p l_x^2$$

stimmt wieder mit unserem Näherungswert sehr gut überein.

Es sei schließlich noch hervorgehoben, daß die an den drei freien Rändern angrenzenden Pyramiden ihre Spitzen in den Ecken  $C$  und  $D$  haben, während bei den Pyramiden, welche an der Einspannungszelle angrenzen, die Spitzen  $H$  und  $J$  sich im Abstand  $x_1 = 0,225 l_x$  vom eingeklemmten Rande befinden.

#### § 14. Platten an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt (Abb. 26).

Der Inhalt der  $M_y$ -Fläche des Mittelstreifens  $OK$  ist bei gleichförmiger Belastung wie bei der ringsum frei aufliegenden Platte

$$F_y = \frac{1}{3} M_{y\max} l_y = \frac{p \nu'_d l_y^3}{24} \nu'_d = \frac{p \nu'_d}{24} \frac{l_x^4 l_y^3}{l_x^4 + 5 l_y^4}.$$

Den gleichen Inhalt  $T_{yx}$  hat auch die  $t_{yx}$ -Fläche des Randes  $KA$ . Wird im Sinne der bisherigen Betrachtungen die letztere durch ein Dreieck  $KJA$  mit der Höhe  $t_i$  ersetzt, so muß nach dem ersten Satz die Bedingung

$$T_{yx} = \frac{t_i l_x}{4} = - \frac{p \nu'_d}{24} \frac{l_x^4 l_y^3}{l_x^4 + 5 l_y^4}$$

erfüllt sein, woraus folgt

$$t_i = - \frac{p \nu'_d}{6} \frac{l_x^4 l_y^3}{l_x^4 + 5 l_y^4}. \quad (65)$$

Die zugehörige Pyramide  $KJAF$  hat den Inhalt

$$V = t_i \frac{l_x l_y}{12} = - \frac{p \nu'_d}{72} \frac{l_x^4 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}.$$

Da

$$V = - N \zeta$$

ist, so erhält man für die Durchbiegung des Plattenmittelpunktes den Wert

$$N \zeta = \frac{p \nu_d'}{72} \frac{l_x^4 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}. \quad (66)$$

Diese Formel liefert beispielsweise für die quadratische Platte mit  $\nu_d' = \frac{31}{36}$

$$\zeta_{\max} = 0,00199 p l_x^2,$$

die genaue Untersuchung hingegen

$$\zeta_{\max} = 0,00196 p l_x^2.$$

Durch diese gute Übereinstimmung ist die Brauchbarkeit der Näherungsformel erwiesen.

Bei der Aufzeichnung der Pyramiden ist zu beachten, daß die Spitze  $J$  über dem freien Rande und im Abstände  $x_i = 0,3 l_x$  von der  $Y$ -Achse steht.

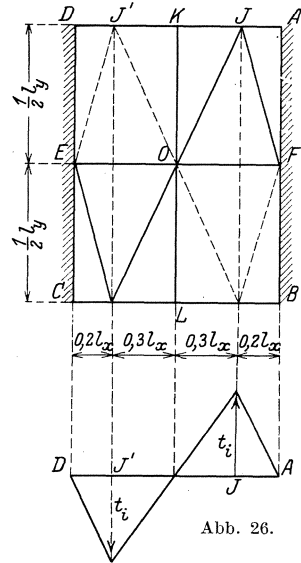


Abb. 26.

### § 15. Platten an zwei benachbarten Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt (Abb. 27).

Wir setzen wieder gleichförmige Belastung voraus und tragen in Abb. 27 im Abstand  $0,55 l_x$  bzw.  $0,55 l_y$  von den eingeklemmten Rändern die Elastizitätsachsen  $EF$  und  $KL$  auf. Sie kreuzen sich im Punkte  $O$ .

Die sinngemäße Anwendung der in § 4 abgeleiteten Gleichungen (62) und (63) liefert im vorliegenden Falle, wenn  $\nu_e$  mit  $\nu_e$  vertauscht und

$$p_x = p \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

$$p_y = p \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$$

gesetzt wird, für die Durchbiegung des Punktes  $O$  den Wert

$$N \zeta_{\max} = \frac{p}{720} \frac{l_x^4 l_y^4}{(l_x^4 + l_y^4)} (1,064 + 2,815 \nu_e). \quad (67)$$

Für die Höhen der vier zugehörigen Pyramiden

$$HAFOK, JOFBL, MDEOLC, DKOE$$

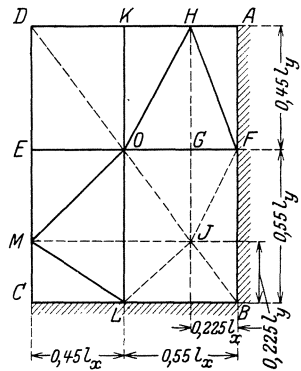


Abb. 27.

gelten somit die Formeln:

$$\begin{aligned}
 t_H &= -\frac{3 N \cdot \zeta_{\max}}{0,55 l_x \cdot 0,45 l_y} = -\frac{5}{297} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} (1,064 + 2,815 \nu_e), \\
 t_J &= +\frac{3 N \zeta_{\max}}{0,55 l_x \cdot 0,55 l_y} = +\frac{5}{263} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} (1,064 + 2,815 \nu_e), \\
 t_M &= -\frac{3 N \zeta_{\max}}{0,45 l_x \cdot 0,55 l_y} = -\frac{5}{297} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} (1,064 + 2,815 \nu_e), \\
 t_D &= +\frac{3 N \zeta_{\max}}{0,45 l_x \cdot 0,45 l_y} = +\frac{5}{243} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} (1,064 + 2,815 \nu_e).
 \end{aligned} \tag{68}$$

Die Lage der Spitzen ist aus Abb. 27 ersichtlich.

### § 16. Platten an den Seiten eingeklemmt und an einem Rande frei aufliegend (Abb. 28).

Um die Durchbiegung des Kreuzungspunktes der Elastizitätsachsen zu bestimmen, knüpfe ich an die auf Seite 50 abgeleitete Gleichung

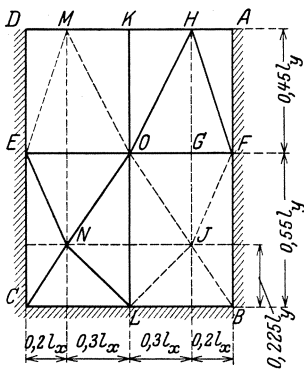


Abb. 28.

$$N \zeta_0 = \frac{l_x^2}{8} M_1 \frac{n}{n+2}$$

an. Im vorliegenden Falle ist

$$M_1 = p_x \frac{l_x^2}{24} \nu_f,$$

$$M_2 = -p_x \frac{l_x^2}{12},$$

$$n = -\frac{M_2}{M_1} = \frac{2}{\nu_f},$$

$$p_x = \frac{2 p l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4},$$

$$N \zeta_0 = \frac{p_x l_x^4}{192} \frac{\nu_f}{1 + \nu_f}. \tag{69}$$

Demnach ist die Höhe der oberen Pyramiden

$$t_o = \mp \frac{3 N \zeta_0}{0,5 l_x \cdot 0,45 l_y} = \mp \frac{5}{36} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + 2 l_y^4} \cdot \frac{\nu_f}{1 + \nu_f},$$

und diejenige der unteren Pyramiden

$$t_u = \pm \frac{3 N \zeta_0}{0,5 l_x \cdot 0,55 l_y} = \pm \frac{5}{44} p \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + 2 l_y^4} \cdot \frac{\nu_f}{1 + \nu_f}. \tag{70}$$

Die Gestalt der Pyramiden ist in Abb. 28 dargestellt.

### § 17. Durchlaufende Platten.

In § 9 habe ich gezeigt, wie die ungünstigsten Laststellungen bei durchlaufenden Platten durch zwei Belastungsarten, nämlich: gleichzeitige Belastung aller Felder mit  $g + \frac{p}{2}$  und wechselweise Belastung

mit  $\pm \frac{p}{2}$  ersetzt werden können. Im ersten Falle sind die gemeinsamen Ränder zweier angrenzender Felder als fest eingeklemmt, im zweiten als biegungsfrei zu betrachten. Für die Höhe der zugehörigen Pyramiden kommen daher entweder die Formeln (58), (64), (65), (68) und (70) oder (46) in Frage, mit dem einzigen Unterschied jedoch, daß  $p$  in den ersteren mit  $g + \frac{p}{2}$ , in der letzten mit  $\pm \frac{p}{2}$  zu vertauschen ist.

### § 18. Die Ersatzmomente der Hauptspannungen.

Sind uns für jeden Punkt der Platte die drei Spannungsmomente  $M_x, M_y, t_{xy}$  bekannt, so können wir bei Verwendung einer randparallelen Bewehrung die zugehörigen Hauptspannungsmomente, wie ich in meiner Arbeit über „die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten“ gezeigt habe (siehe „Bauingenieur“, Jahrgang 1926, Heft 30/31) und in § 24 dieses Buches darlegen werde, durch die Werte

$$\left. \begin{aligned} m_x &= M_x \pm \frac{2t^2}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}, \\ m_y &= M_y \pm \frac{2t^2}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

oder nach dem Vorschlage von Leitz (siehe „Bauingenieur“, Jahrgang 1925, S. 717) durch die Größen

$$\left. \begin{aligned} m_x &= M_x \pm t, \\ m_y &= M_y \pm t \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

ersetzen. Die beiden Verfahren liefern für die Grenzfälle  $t = 0$  oder  $M_x = M_y$  die gleichen Werte.

In den bisherigen Beispielen haben wir die Bewehrung lediglich für diejenigen Hauptquerschnitte ermittelt, die nur durch Biegemomente  $M_x, M_y$  beansprucht sind, und im übrigen ihre Verteilung ohne Rücksicht auf die Drillungsmomente  $t$  vorgenommen. Um den Einfluß der letzteren zu erfassen, müssen wir noch die Stellen untersuchen, an welchen die *Ersatzmomente*  $m_x, m_y$  ihren Größtwert erreichen.

Ich greife zunächst auf die in § 3 behandelte, ringsum frei aufliegende Platte mit den Spannweiten

$$l_x = 4,0 \text{ m,}$$

$$l_y = 5,0 \text{ m}$$

und der Belastung

$$p = 1,0 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$$

zurück. Für den Mittelpunkt haben wir die Werte

$$M_{x_{\max}} = 0,884 \frac{tm}{m},$$

$$M_{y_{\max}} = 0,564 \frac{tm}{m}$$

bereits ermittelt. Der Verlauf der Biegemomente längs der Mittellinien kann, wie in Abb. 29 angedeutet, in der kürzeren Spannrichtung durch eine einfache Parabel, in der längeren Spannrichtung in dem Bereiche  $NN$  zwischen den Schnittpunkten  $N$  der Winkelhalbierenden der Ecken durch eine Gerade und in dem Bereiche zwischen diesen Punkten und den benachbarten Rändern durch eine Parabel mit ausreichender Genauigkeit dargestellt werden. Die Schaulinie  $a$  zeigt die Momente  $M_x$  des Mittelquerschnittes  $GH$ , die Linie  $b$  die Momente  $M_y$  des Mittelquerschnittes  $EF$ . Der Verlauf der Momente  $M_x$  längs der Mittelachse  $EF$  und der Momente  $M_y$  längs der Mittelachse  $GH$  ist weiterhin durch die Linien  $c$  und  $d$  veranschaulicht.

Betrachten wir jetzt den Querschnitt  $JK$  im Abstände  $x = \frac{1}{4} l_x$  vom Plattenmittelpunkt. Sein Größtwert  $M_x = \frac{3}{4} \cdot 0,884 = 0,663 t$  ist aus der Kurve  $c$  entnommen; auf Grund dieses Wertes ist die in Abb. 29 e dargestellte  $M_x$ -Linie entstanden. Ebenso läßt sich für die Momente  $M_y$  der Schnittfläche  $LM$  ( $y = \frac{3}{10} l_y$ ) mit Hilfe der in Abb. 29 d angegebenen Ordinate  $M_y = \frac{3}{4} \cdot 0,564 = 0,423 t$  die Schaulinie  $f$  konstruieren.

Um die zugehörigen Drillungsmomente zu bestimmen, benutze ich die Gleichung (46)

$$t_A = -\frac{p v_a}{6} \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Sie liefert mit  $v_a = 0,622$  für die Höhe der Pyramide den absoluten Wert

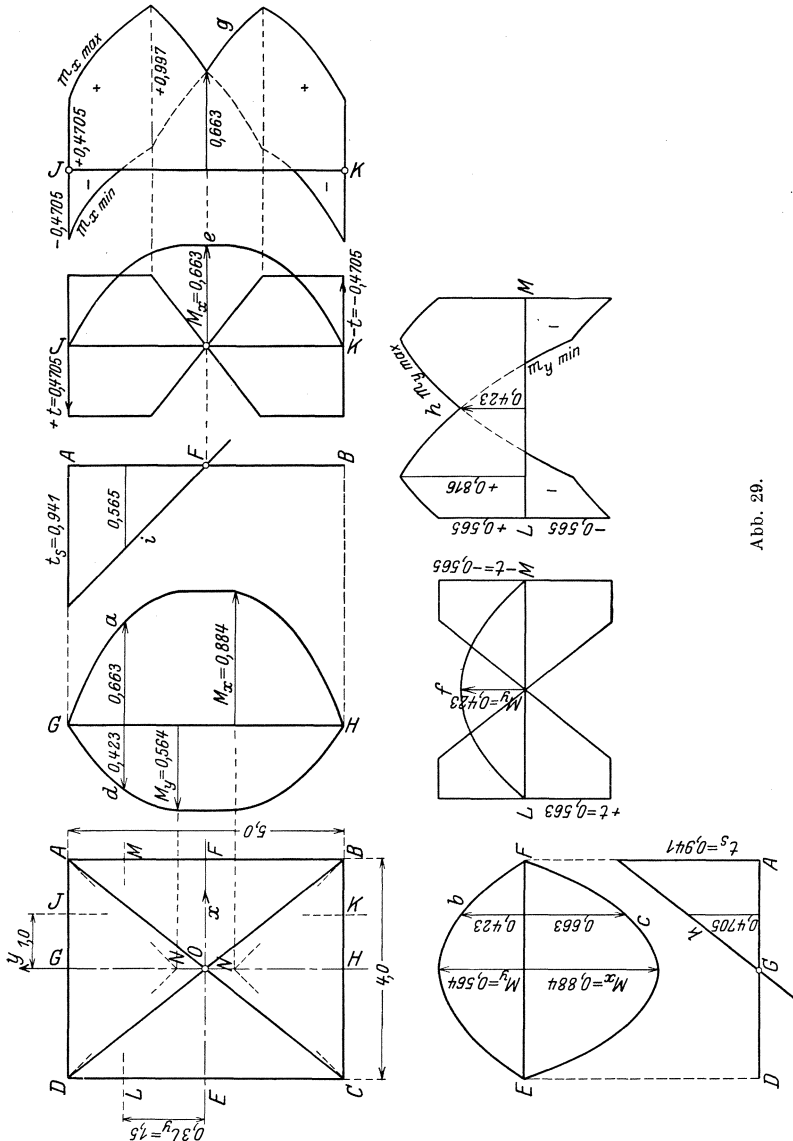
$$t_S = \frac{1,0 \cdot 0,622}{6} \cdot \frac{4^3 \cdot 5^3}{4^4 + 5^4} = 0,941 \frac{tm}{m}.$$

Die längs  $JK$  und  $LM$  geführten Schnitte durch die Pyramide sind in den Abb. 29 e und 29 f dargestellt. Aus der Überlagerung der Werte  $M_x$  und  $\pm t$  bzw.  $M_y$  und  $\pm t$  im Sinne der Gleichungen (72) entstehen die durch die Schaulinien  $g$  und  $h$  dargestellten Momente  $m_x$  und  $m_y$ . Für die biegungsfreien Ränder  $AB$  und  $AD$  gewinnt man schließlich unmittelbar aus der Pyramide die in den Abb. 29 i und 29 k eingetragenen Werte

$$m_x = \pm 2 t_s \cdot \frac{x}{l_y},$$

$$m_y = \pm 2 t_s \cdot \frac{y}{l_x}.$$

Der Knick in den  $t$ -Linien der Abb. 29 e und 29 f bedingt eine Unstetigkeit im Verlauf der zugehörigen  $m_x$ - und  $m_y$ -Linien, die besonders in Abb. 29 h in Erscheinung tritt. In der Wirklichkeit sind sowohl die



$t$ - als auch die  $m$ -Linien stetige Kurven, die an einzelnen Stellen von den in der Näherungsrechnung ermittelten, gebrochenen Linienzügen nur in geringem Maße abweichen. Diese Abweichungen sind jedoch



völlig belanglos, weil für die Anstrengung der Platte nicht der Spitzen-, sondern der Durchschnittswert der Spannungen im Bereiche der gefährdeten Stelle maßgebend ist und weil die Flächeninhalte der genauen und der angenäherten Ersatzmomente sehr gut miteinander übereinstimmen.

Die Auswertung der  $m$ -Flächen zeigt, daß der Durchschnittswert von  $m$  mit großer Genauigkeit durch den Näherungswert

$$m_0 = \frac{M_{\max} \pm t_s}{2} \quad (73)$$

festgelegt ist: das Vorzeichen von  $t$  ist hierbei derart zu wählen, daß  $|m_{\max}| > |M_{\max}|$  wird. Der Inhalt der  $m_x$ -Fläche 1, 2, 3, 4, 5 in Abb. 29 g ist beispielsweise:

$$R_x = \int_{-\frac{1}{2}l_y}^{+\frac{1}{2}l_y} m_x dy = 4,415 \text{ tm},$$

der zugehörige Mittelwert:

$$m_{0x} = \frac{R_x}{l_y} = \frac{4,415}{5,0} = 0,883 \frac{\text{tm}}{\text{m}}.$$

Die Formel (73) liefert hingegen

$$m_{0x} = \frac{0,884 + 0,941}{2} = 0,9125 \frac{\text{tm}}{\text{m}},$$

also einen nur um 3,3 vH höheren Wert.

Für die  $m_y$ -Fläche 1, 2, 3, 4, 5 in Abb. 29 h ergibt sich ebenso

$$R_y = \int_{-\frac{1}{2}l_x}^{+\frac{1}{2}l_x} m_y dx = 2,85 \text{ tm}$$

oder im Mittel

$$m_{0y} = \frac{R_y}{l_x} = \frac{2,85}{4,0} = 0,7125 \frac{\text{tm}}{\text{m}},$$

während nach Gleichung (73) der Durchschnittswert

$$m_{0y} = \frac{0,564 + 0,941}{2} = 0,7575 \frac{\text{tm}}{\text{m}}$$

ist. Die Übereinstimmung ist wiederum sehr gut.

In den Randflächen haben wir schließlich als Mittelwert der Ersatzmomente die Größe

$$m_{0x} = m_{0y} = \pm \frac{1}{2} t_s = \pm 0,4705 \frac{\text{tm}}{\text{m}}.$$

Fassen wir das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung zusammen, so stehen uns für die Bemessung der unteren  $f_x$ -Bewehrung, unter Be-

rücksichtigung der Drillungsmomente, die drei Werte

$$m_x = M_{x_{\max}} = 0,884 \ t \quad \text{für } x = 0,$$

$$m_x = \frac{1}{2} (M_{x_{\max}} \pm t_s) = 0,9125 \ t \quad \text{für } x = \pm \frac{1}{4} l_x,$$

$$m_x = \pm \frac{1}{2} t_s = 0,4705 \ t \quad \text{für } x = \pm \frac{1}{2} l_x.$$

zur Verfügung. Für die untere  $f_y$ -Bewehrung sind ebenso die Größen

$$m_y = M_{y_{\max}} = 0,564 \ t \quad \text{für } y = 0,$$

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm t_s) = 0,7125 \ t \quad \text{für } y = \pm \frac{3}{10} l_y,$$

$$m_y = \pm \frac{1}{2} t_s = 0,4705 \ t \quad \text{für } y = \pm \frac{1}{2} l_y$$

maßgebend.

Dieses Ergebnis kann dahin verallgemeinert werden, daß, je nachdem

$$\pm t_s \geq M_{x_{\max}}$$

ist, das Moment

$$m_x = \frac{M_{x_{\max}} \pm t_s}{2}$$

oder

$$m_x = M_{x_{\max}}$$

der Querschnittsbemessung von  $f_x$  zugrunde gelegt werden muß. Für  $f_y$  ist ebenso, wenn

$$\pm t_s > M_{y_{\max}}:$$

der Wert

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm t_s),$$

und wenn

$$\pm t_s < M_{y_{\max}}:$$

der Wert

$$m_x = M_{y_{\max}}$$

ausschlaggebend.

Wenn auch aus dieser Feststellung gefolgert werden könnte, daß die Aufzeichnung der Ersatzmomente  $m_x, m_y$  für die Bestimmung der Bewehrungsmenge nicht unbedingt erforderlich ist, so behält sie doch ihren Wert insofern, als sie uns für die Verteilung der Bewehrung, für ihre Anpassung an die Hauptspannungsmomente sichere Anhaltspunkte liefert. Die Schaulinien in den Abb. 29 g, h, i, k zeigen uns insbesondere, wieweit im Bereiche der Ecken und der Ränder die obere Bewehrung zur Aufnahme der negativen Ersatzmomente erstreckt werden muß.

Das für die ringsum frei aufliegende Platte abgeleitete Kriterium, welches uns gestattet, die für die Querschnittsbemessung ausschlag-

gebenden Ersatzmomente von vornherein zu erkennen, kann sinngemäß auch bei anderen Lagerungsarten angewandt werden. Die zur Darstellung der Drillungsmomente benutzten Pyramiden lassen sich nämlich, wie aus Abb. 30 ersichtlich, durch Schnitte, welche von der Spitze aus parallel den Randflächen geführt werden, derart zerlegen, daß längs zweier benachbarten Kanten der Grundfläche stets entweder die Biegemomente  $M_x$  bzw.  $M_y$  oder die Drillungsmomente  $t$  verschwinden. Betrachten wir beispielsweise die Teilpyramide  $SJOG$ : längs der Elastizitätsachsen  $OG$  und  $OJ$  ist  $t = 0$ , längs  $GS$   $M_x = 0$ , längs  $JS$   $M_y = 0$ . Bei der benachbarten Pyramide  $SGFM$  ist wiederum längs  $MF$  und  $FG$   $t = 0$ , längs  $SM$   $M_y = 0$ , längs  $GS$   $M_x = 0$ .

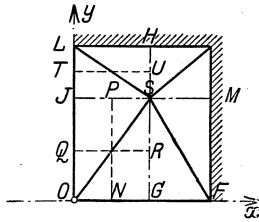


Abb. 30.

Für die Bestimmung der Bewehrungsdichte  $f_x$  ist längs  $OJ$  und  $MF$  allein  $M_x$ , längs  $GS$  allein der Mittelwert der Drillungsmomente  $\pm \frac{1}{2} t_s$  maßgebend. Ebenso ist  $f_y$  längs  $OF$  allein nach  $M_y$ , längs  $JM$  allein nach  $\pm \frac{1}{2} t_s$  zu bemessen.

Für die Zwischenquerschnitte  $NP$  und  $QR$  kommt für  $f_x$  der Wert

$$m_x = \frac{1}{2} (M_{x_{\max}} \pm t_s),$$

für  $f_y$  der Wert

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm t_s)$$

in Betracht.

Je nachdem also

$$\pm t_s \geq M_{x_{\max}}$$

bzw.

$$\pm t_s \geq M_{y_{\max}}$$

ist, richtet sich  $f_x$  bzw.  $f_y$  nach den Grenzwerten

$$m_x = \frac{1}{2} (M_{x_{\max}} \pm t_s)$$

oder

$$m_x = M_{x_{\max}},$$

bzw. nach den Grenzwerten

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm t_s)$$

oder

$$m_y = M_{y_{\max}}.$$

Im Bereiche der positiven Feldmomente wird meistens das Ersatzmoment  $m = \frac{M_{\max} \pm l_s}{2}$ , im Bereiche der Ränder indessen nur das Einspannungs- oder Stützenmoment  $m = M_{\min}$  maßgebend sein.

Die bisherigen Betrachtungen gelten in erster Linie für das Längenverhältnis  $1 < \frac{l_y}{l_x} < 2$ . Wenn  $l_y > 2 l_x$  ist, kann man, wie in Abb. 31 angedeutet, die Grundfläche in zwei quadratische Außenbereiche  $A E F D$ ,  $G B C H$  mit der Seitenlänge  $l_x$  und einem Innenbereich  $E G H F$  mit der Breite  $l_y - 2 l_x$  zerlegen. Die Außenbereiche sind wie die Hälfte einer Platte mit dem Längenverhältnis  $l_y : l_x = 2 : 1$  zu behandeln, und auf Grund der Ersatzmomente zu bemessen. In dem Mittelbereich  $E G H F$  können hingegen die Drillungsmomente vollständig außer acht gelassen und die Bewehrungsmengen lediglich mit Hilfe der Biegemomente  $M_{x_{\max}}$  oder  $M_{y_{\max}}$  bestimmt werden.

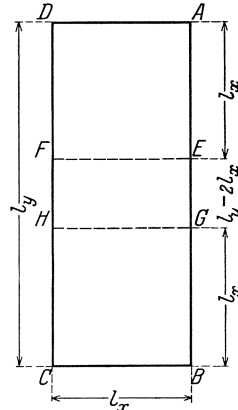


Abb. 31.

#### IV.

##### § 19. Die Auflagerkräfte der gleichförmig belasteten Platte.

Die bisherigen Untersuchungen haben uns nur über die Größe der inneren Beanspruchungen in den Hauptquerschnitten Aufschluß gegeben. Um das Spannungsbild zu vervollständigen, haben wir noch die Auflagerwiderstände zu bestimmen und den Spannungsverlauf in den Ecken zu verfolgen.

Sehen wir zunächst von den Randdrillungsmomenten ab, so können wir die Verteilung der Belastung  $Q$  auf die Ränder in einfacher Weise veranschaulichen: wird nämlich die Grundfläche der Platte durch die Winkelhalbierenden der Ecken in vier Abschnitte zerlegt (Abb. 32), so läßt sich an Hand der Ergebnisse der strengen Berechnungen nachweisen, daß, bei gleichmäßigen Auflagerbedingungen für alle Ränder, die auf die einzelnen Seiten entfallenden Auflagerkräfte  $V_x$ ,  $V_y$  sich zueinander wie die Flächeninhalte  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$  der anliegenden Abschnitte verhalten. Wir können daher die Auflagerwiderstände unmittelbar nach den Formeln:

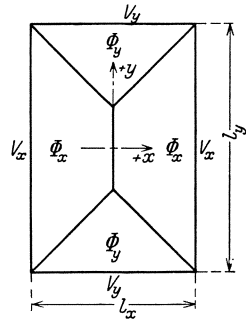


Abb. 32.

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{1}{2} p l_x l_y \left(1 - \frac{l_x}{2 l_y}\right) = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{l_x}{2 l_y}\right), \\ V_y &= \frac{1}{4} p l_x^2 = \frac{Q}{4} \frac{l_x}{l_y} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

errechnen: hierbei ist unter  $l_x$  stets die kürzere Spannrichtung zu verstehen.

Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß die Belastung  $V_y$  der kurzen Ränder nur von  $l_x$  abhängig ist und bei wachsendem  $l_y$  unverändert bleibt: eine Feststellung, welche durch die genaue Untersuchung vollauf bestätigt wird.

Sind nicht alle Ränder gleichartig gelagert, so kann man aus den jeweiligen Lastanteilen  $p_x, p_y$  die zugehörigen Auflagerkräfte

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{1}{2} p_x l_x l_y = \frac{Q}{2} \frac{p_x}{p}, \\ V_y &= \frac{1}{2} p_y l_y l_x = \frac{Q}{2} \frac{p_y}{p} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

bestimmen. Hierbei empfiehlt es sich, für die kurzen Ränder ohne Rücksicht auf das wirkliche Längenverhältnis den Wert  $\frac{p_x}{p}$  oder  $\frac{p_y}{p}$

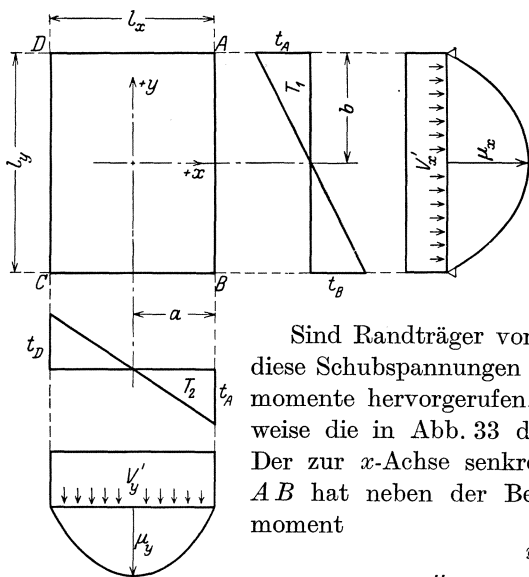


Abb. 33.

in Rechnung zu stellen, welcher der quadratischen Platte entsprechen würde.

Außer den lotrechten Scherkräften treten an den Randflächen als Auflagerwiderstände auch die von den Drillungsmomenten herrührenden wagerechten Schubspannungen auf.

Sind Randträger vorhanden, so werden durch diese Schubspannungen in den letzteren Biegemomente hervorgerufen. Betrachten wir beispielsweise die in Abb. 33 dargestellte Platte  $ABCD$ . Der zur  $x$ -Achse senkrecht stehende Randbalken  $AB$  hat neben der Belastung  $V_x$  ein Biegemoment

$$\mu_x = - \int_{y=0}^{y=b} t_{xy} dy$$

aufzunehmen. Da der Verlauf der Drillungsmomente  $t$  aus den Spannungsdiagrammen bereits bekannt ist, so ist man ohne weiteres in der Lage, auch die zugehörigen Biegemomente  $\mu_x$  zu bestimmen.

Bei der frei aufliegenden Platte läßt sich das Diagramm, wie in § 11 gezeigt worden ist, durch ein Dreieck mit der Spitze  $t_A$  darstellen. Sein Inhalt, von der Ecke bis zur Randmitte gemessen, ist

$$T_1 = \int_{y=0}^{y=b} t_{xy} dy = \frac{1}{2} t_A \cdot \frac{l_y}{2} = - \mu_x.$$

Hieraus folgt

$$\mu_x = -\frac{t_A}{4} l_y.$$

Ebenso ergibt sich für die Mitte des zur  $y$ -Achse senkrecht stehenden Randbalkens  $AD$  ein Biegemoment

$$\mu_y = -\frac{t_A}{4} l_x.$$

Bezeichnen wir mit  $V'_x$  bzw.  $V'_y$  eine gleichförmige Belastung, welche die gleichen Momente in den Randbalken erzeugen würde, so läßt sich aus den Bedingungen

$$\mu_x = V'_x \frac{l_y}{8},$$

$$\mu_y = V'_y \frac{l_x}{8}$$

die Beziehung

$$V'_x = V'_y = -2 t_A$$

ableiten. Hierbei ist nach Gleichung (46)

$$t_A = -\frac{p \nu_a}{6} \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Die gesamte Belastung der Randträger ist also

$$\left. \begin{aligned} A_x = V_x + V'_x &= \frac{Q}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l_x}{l_y}\right) + \frac{2}{3} \nu_a \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} \right], \\ A_y = V_y + V'_y &= \frac{Q}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{l_x}{l_y} + \frac{2}{3} \nu_a \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Mit Hilfe dieser Formel erhält man für  $l_x = l_y$  die Werte:

$$V_x = V_y = 0,25 \quad Q,$$

$$V'_x = V'_y = 0,0972 \quad Q,$$

$$A_x = A_y = 0,3472 \quad Q.$$

Ebenso ergibt sich bei einem Seitenverhältnis  $l_y = 2 l_x$  für die langen Ränder:

$$V_x = 0,375 \quad Q,$$

$$V'_x = 0,0631 \quad Q,$$

$$A_x = 0,4381 \quad Q,$$

für die kurzen Ränder:

$$V_y = 0,125 \quad Q,$$

$$V'_y = 0,0631 \quad Q,$$

$$A_y = 0,1881 \quad Q.$$

Durch die Drillungsmomente wird also die Randbelastung nicht unerheblich vergrößert. Die verhältnismäßige Steigerung tritt bei den kurzen Rändern länglicher Platten besonders in Erscheinung.

Bei anderen Lagerungsarten, beispielsweise bei der in Abb. 25 dargestellten Platte, tritt an Stelle von  $t_A$  der Spitzenwert  $t_i$ . Dem Moment

$$\mu_y = -t_i \frac{l_x}{4}$$

entspricht dann wiederum eine Belastung

$$V'_y = -2 t_i.$$

Wir können daher die Formel (76) in der allgemeineren Fassung

$$A_x = V_x - 2 t_i,$$

$$A_y = V_y - 2 t_i$$

schreiben: unter  $t_i$  ist dann die jeweilige Höhe des Momentendiagramms des zugehörigen Randes zu verstehen.

Ist die Platte nicht fest mit dem Randbalken verbunden, und können die Drillungsmomente nicht auf die Randunterlage übertragen werden,

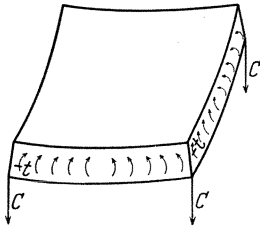


Abb. 34.

so müssen, damit diese Momente verschwinden, in den Randflächen Kräftepaare ( $-t$ ) von gleicher Größe aber umgekehrtem Drehungssinn angebracht werden, um die durch die ursprünglichen Momente ( $+t$ ) bewirkte Entlastung der Platte rückgängig zu machen. Diese zusätzlichen Kräftepaare haben, wie aus Abb. 34 zu erkennen ist, das Bestreben, die Platte von ihrer Unterlage abzuheben.

Die Versuche haben in der Tatsache gezeigt, daß, wenn die Ecken nicht festgehalten werden, die Ränder der Platte sich verbiegen und nach oben wölben. Will man die Loslösung der Ecken verhindern, so müssen in den Ecken abwärts gerichtete Zugkräfte

$$C = -\frac{V'_x + V'_y}{2} = -2 t_A = +\frac{Q}{3} \nu_a \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4} \quad (77)$$

angebracht werden. Bei freiaufliegenden Platten mit dem Längenverhältnis  $l_x : l_y = 1 : 1$  bzw.  $l_x : l_y = 1 : 2$  ist beispielsweise

$$C = 0,0972 Q,$$

bzw.

$$C = 0,0631 Q.$$

Die für die Verankerung erforderliche Kraft ist besonders bei schwer belasteten Platten durchaus nicht geringfügig.

Um die Wirkung der Verankerung besser zu veranschaulichen, will ich noch den Spannungszustand in den Ecken einer quadratischen Platte näher untersuchen. Ihre Randbelastung ist nach Gleichung (76):

$$A_x = A_y = \frac{Q}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \nu_a \right),$$

oder wenn zur Abkürzung

$$1 + \frac{2}{3} \nu_a = \alpha$$

gesetzt wird:

$$A_x = A_y = \frac{Q}{4} \alpha.$$

In Abb. 35 ist entsprechend der früher erläuterten schematischen Darstellung diese Randbelastung durch das Dreieck  $EDF$  veranschaulicht.

Im Abstand  $\overline{EJ} = u$  von der Ecke  $E$  ist der Auflagerwiderstand

$$a_x = a_y = \frac{A u}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \alpha \frac{Q u}{l^2}$$

und demgemäß die auf der Strecke  $\overline{EJ}$  verteilte Auflagerkraft:

$$W = \frac{u}{2} a_x = \alpha \frac{Q}{2} \frac{u^2}{l^2}.$$

In der Ecke selbst greift die abwärts gerichtete Kraft

$$C = \frac{Q \nu_a}{6} = \frac{Q}{4} (\alpha - 1)$$

an.

Das Plattendreieck  $JEJ$  hat die Höhe:

$$\overline{EK} = d = \frac{u}{\sqrt{2}},$$

die Breite:

$$\overline{JJ} = 2d = u\sqrt{2},$$

und trägt die Belastung:

$$P = p d^2 = p \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{u^2}{l^2}.$$

Das Moment der Kräfte  $W$ ,  $C$  und  $P$  in bezug auf die Achse  $\overline{JJ}$  ist:

$$D_1 = 2 \frac{Wd}{3} - Cd - \frac{Pd}{3}.$$

Diesem Moment wirken die Normalspannungen  $\sigma_1$  in der Ebene  $\overline{JJ}$  entgegen.

Da der Querschnitt  $\overline{JJ}$  die Breite  $2d$  hat, so erhält man für die Längeneinheit das Biegemoment:

$$M_1 = \frac{D_1}{2d} = \frac{W}{3} - \frac{C}{2} - \frac{P}{6} = -\frac{Q}{24} \left[ 3(\alpha - 1) - \frac{2u^2}{l^2} (2\alpha - 1) \right].$$

In der Ecke selbst, also an der Stelle  $u = 0$  ist:

$$M_{1\min} = -\frac{Q}{8} (\alpha - 1) = -\frac{C}{2} = -\frac{p \nu_a}{12} l^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß das spezifische Biegemoment der



Diagonalspannungen in der Ecke nicht verschwindet und der halben Ankerkraft  $C$  gleichzusetzen ist.

Im vorliegenden Falle ist

$$M_{1\min} = -0,0486 p l^2,$$

während für den Plattenmittelpunkt

$$M_{\max} = 0,0364 p l^2$$

nachgewiesen worden ist.

Das Eckmoment  $M_{1\min}$  ist also im Vergleich zu den größten Feld-

momenten bei freiaufliegenden Platten durchaus nicht zu unterschätzen.

Neben den zur Winkelhalbierenden parallel laufenden Normalspannungen  $\sigma_1$  treten auch senkrecht zu ihr die Spannungen  $\sigma_2$  auf (Abb. 35). Sie bilden ein um die Winkelhalbierende drehendes Kräftepaar  $M_2$ , und es läßt sich auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen nachweisen, daß in den Ecken  $M_2 = -M_1$  sein muß. Hieraus folgt wiederum:

$$M_2 = \frac{p \nu_a}{6} \frac{l_x^3 l_y^3}{l_x^4 + l_y^4} = +0,0486 p l^2.$$

Während die negativen Einspannungsmomente nur etwa von der

Ecke bis zu einem Viertel der Diagonale reichen, erstrecken sich die positiven Momente bis zum Mittelpunkt der Platte. Ihr Durchschnittswert ist bei dem Längenverhältnis  $l_x : l_y = 1 : 1$

$$M_m = \frac{1}{2} (M_2 + M_{\max}) = \frac{1}{2} p l^2 (0,0486 + 0,0364) = 0,0425 p l^2.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen kann man aber auch unmittelbar den genauen Wert

$$M_m = \frac{p l^2}{24} = 0,0417 p l^2$$

ableiten. Die sehr gute Übereinstimmung ist ein Beweis für die Zuverlässigkeit unserer Näherungsformel.

Die negativen Einspannungsmomente  $M_1$  bedingen eine diagonal oder seitenparallele kreuzweise Bewehrung des oberen Plattenrandes. Will man diese zweite Bewehrung und ebenso die Vorkehrungen für die Sicherung der Ecken vermeiden, und somit auf den günstigen Einfluß der Drillungsmomente überhaupt verzichten, so ist es selbstverständlich, daß die bisher für die Biegemomente abgeleiteten Formeln nur dann noch gelten, wenn der Beiwert  $\nu = 1$  genommen wird.

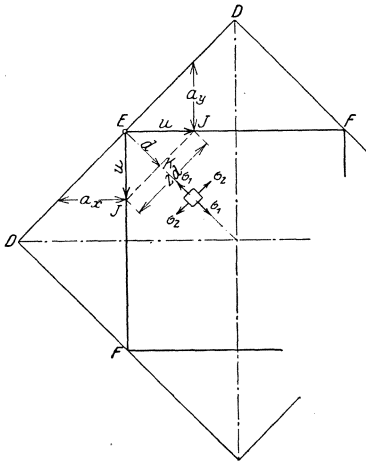


Abb. 35.

## V. Der Einfluß von Einzellasten.

In den bisher behandelten Fällen wurde eine gleichmäßige Belastung des ganzen Plattenfeldes vorausgesetzt und die Aufteilung dieser Belastung lediglich aus den Steifigkeitsverhältnissen zweier sich kreuzender Mittelstreifen  $EFGH$  und  $JKLM$  (Abb. 5) abgeleitet: wie auch die Breite  $b$  dieser Streifen gewählt wurde, die Gleichartigkeit der Belastung der benachbarten Streifen gestattete, die für die Mittelstreifen errechneten Mittelwerte  $p_x$  und  $p_y$ , da nur ein Vergleich und nicht die Ermittlung der wirklichen Größe der Steifigkeiten erforderlich war, längs der ganzen Plattenfläche als unveränderlich zu betrachten.

Ist die Belastung in einem Punkte vereinigt, so zeigen die Streifen, welche sich in diesem Punkte kreuzen, ein anderes Bild als die übrigen unbelasteten Streifen: es ist nicht zulässig, die wirksame Breite  $b$  der ersteren willkürlich zu wählen und auch nicht möglich, von vornherein dieses Maß einwandfrei zu bestimmen.

Wir können aber, wenn die Auflagerwiderstände bekannt sind, unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen die resultierenden Biegemomente  $R_x$  und  $R_y$  für die volle Querschnittsbreite  $B_x = l_y$  und  $B_y = l_x$  ohne weiteres ermitteln. Um dieses Ziel zu erreichen, werde ich zunächst ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Auflagerwiderstände und zur Errechnung von  $R_x$  und  $R_y$  erläutern und sodann die Verteilung der zugehörigen Biegungsspannungen längs der jeweiligen Querschnittsbreite untersuchen.

### § 20. Die ringsum frei aufliegende Platte.

Als einfachster und wichtigster Fall möge zunächst die rechteckige, ringsum frei aufliegende Platte, welche im Mittelpunkt durch eine Einzelkraft  $P$  belastet ist, behandelt werden.

Um die Größe und die Verteilung der Auflagerwiderstände besser zu veranschaulichen, habe ich für zwei Platten mit dem Seitenverhältnisse

$$\frac{l_y}{l_x} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{l_y}{l_x} = 2$$

die aus der genauen Berechnung mit Hilfe elastischer Gewebe gewonnenen Spannungsbilder in den Zeichnungen 36 und 37 aufgetragen: es ist leicht zu erkennen, daß die Randkräfte  $v_x$  und  $v_y$  von der Mitte nach den Ecken abnehmen, und zwar um so rascher, je größer die Länglichkeit ist, während sie bei gleichmäßiger Belastung in einem weit ausgedehnten Bereiche unveränderlich bleiben und erst in unmittelbarer Nähe der Ecken allmählich verschwinden. Auffällig ist auch, daß die

Randdrillungsmomente nur bei quadratischen Platten ihren Größtwert in den Ecken, bei länglicheren Platten hingegen bereits vor den Ecken erreichen.

Um diese Wechselbeziehungen zwischen Auflagerwiderständen und Seitenverhältnis darzustellen, wähle ich für die Randkräfte  $v_x$ ,  $v_y$  und

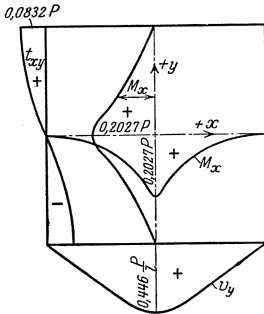


Abb. 36.

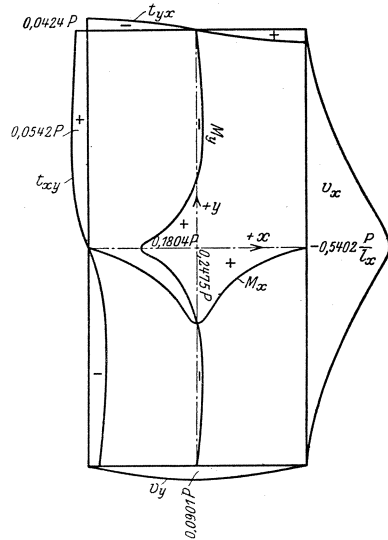


Abb. 37.

für die Randdrillungsmomente  $t_{xy}$ ,  $t_{yx}$  (Abb. 38) die aus dem wirklichen Kräfteverlauf abgeleiteten Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{V_x}{2l_y} (r+1)(r+2)\eta^r \left(1 - \frac{r}{r+1}\eta\right) \\ v_y &= \frac{V_y}{2l_x} (s+1)(s+2)\xi^s \left(1 - \frac{s}{s+1}\xi\right) \\ t_{xy} &= T \left[ (1 - \eta^{r+1}) + \frac{r-s}{r+s}\eta^r (1 - \eta) \right] \\ t_{yx} &= T \left[ (1 - \xi^{s+1}) + \frac{s-r}{s+r}\xi^s (1 - \xi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_y}{l_x}, & s &= \frac{l_x}{l_y}, \\ \xi &= \frac{2x_1}{l_x}, & \eta &= \frac{2y_1}{l_y}. \end{aligned}$$

Der Anfangspunkt des Achsenkreuzes  $x_1, y_1$  ist, wie aus Abb. 38 ersichtlich, in die Ecke  $E$  verlegt.

Die Größen  $V_x$  und  $V_y$  stellen wie vorhin die gesamte Auflagerkraft der Ränder  $EG$  und  $EF$  dar, während unter  $T$  eine vorerst unbestimmte Konstante zu verstehen ist.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Bedingungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} l_y, & x_1 &= \frac{1}{2} l_x \\ V_x &= 2 \int_{y_1=0} v_x dy, & V_y &= 2 \int_{x_1=0} v_y dx \end{aligned}$$

durch die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (78) von vornherein befriedigt werden.

Sieht man zunächst von den Randdrillungsmomenten ab und faßt man die Platte als einen Balken mit der Spannweite  $l_x$  und der Breite  $l_y$ ,

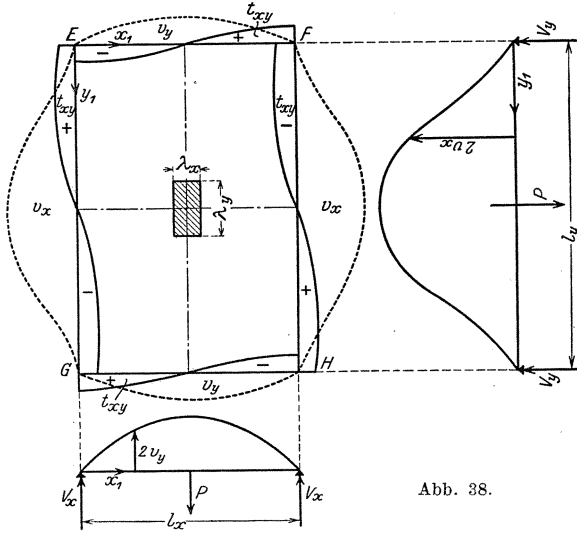


Abb. 38.

auf, so hat man diesem stellvertretenden Balken als Belastung außer der Einzelkraft  $P$  auch die längs der Ränder  $EF$  und  $GH$  auftretenden Kräfte  $v_y$  zuzuweisen.

Bezeichnet man diese ideelle Belastung mit  $p_x = -2v_y$  und die zugehörigen Biegemomente mit  $\mathfrak{R}_x$ , so müssen diese Größen im Bereiche  $0 < x_1 < \frac{l_x}{2}$  der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathfrak{R}_x}{dx_1^2} &= \left(\frac{2}{l_x}\right)^2 \frac{d^2 \mathfrak{R}_x}{d\xi^2} = -p_x = 2v_y \\ &= \frac{V_y}{l_x} (s+1)(s+2)\xi^s \left(1 - \frac{s}{s+1}\xi\right) \end{aligned}$$

genügen. Ihre Auflösung liefert, wenn man beachtet, daß für  $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}_x}{dx_1} &= \frac{2}{l_x} \frac{d\mathfrak{R}_x}{d\xi} = V_x, \\ \mathfrak{R}_x &= 0 \end{aligned}$$

sein muß,

$$\mathfrak{R}_x = \frac{1}{2} l_x \left[ \xi V_x + \frac{1}{2} V_y \left( \xi^{s+2} - \frac{s\xi^{s+3}}{s+3} \right) \right]. \quad (79a)$$

Wenn wir jetzt den Einfluß der Randdrillungsmomente auf die Momente  $R_x$  bestimmen wollen, so erkennen wir, daß die längs der

Ränder  $EG$  und  $FH$  verteilten Kräftepaare  $t_{xy}$  außer Ansatz bleiben müssen, weil ihre Drehachse der  $x$ -Achse parallel gerichtet ist. Die in den Randflächen  $EF$  und  $GH$  auftretenden Drillungsmomente  $t_{yx}$  lassen sich hingegen zu einem Kräftepaare

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}'_x &= -2 \int_0^{x_1} t_{yx} dx_1 = -2 \mu_{yx} \\ &= -T l_x \left[ \xi \left( 1 - \frac{\xi^{s+1}}{s+2} \right) + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{\xi^{s+1}}{s+1} \left( 1 - \xi \frac{s+1}{s+2} \right) \right] \quad (79b)\end{aligned}$$

vereinigen.

Im ganzen ist

$$\begin{aligned}R_x = \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}'_x &= \frac{1}{2} l_x \left[ \xi V_x + \frac{1}{2} V_y \left( \xi^{s+2} - \frac{s \xi^{s+3}}{s+3} \right) \right] \\ &\quad - T l_x \left[ \xi \left( 1 - \frac{\xi^{s+1}}{s+2} \right) + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{\xi^{s+1}}{s+1} \left( 1 - \xi \frac{s+1}{s+2} \right) \right]. \quad (80a)\end{aligned}$$

Wird die Platte ebenso als Balken mit der Spannweite  $l_y$  und der Breite  $l_x$  aufgefaßt, so lassen sich die resultierenden Biegemomente  $R_y$  im Bereiche  $0 < y_1 < \frac{l_y}{2}$  durch die Gleichung

$$\begin{aligned}R_y = \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}'_y &= \frac{1}{2} l_y \left[ \eta V_y + \frac{1}{2} V_x \left( \eta^{r+2} - \frac{r \eta^{r+3}}{r+3} \right) \right] \\ &\quad - T l_y \left[ \eta \left( 1 - \frac{\eta^{r+1}}{r+2} \right) + \frac{r-s}{r+s} \cdot \frac{\eta^{r+1}}{r+1} \left( 1 - \eta \frac{r+1}{r+2} \right) \right] \quad (80b)\end{aligned}$$

darstellen.

Um das Bild der Spannungsverteilung zu vervollständigen, müssen neben den resultierenden Momenten  $R_x$  und  $R_y$  auch die auf die Breite  $b = 1$  entfallenden Spannungsmomente  $M_x$  und  $M_y$  angegeben werden. Zunächst genügen die einfachen Ansätze

$$\left. \begin{aligned}M_x &= Y R_x, \\ M_y &= X R_y;\end{aligned} \right\} \quad (81)$$

unter  $X$  und  $Y$  sind hierbei vorerst unbestimmte Funktionen nur von  $x_1$  bzw. von  $y_1$  zu verstehen.

$$\begin{aligned}\text{Da} \quad R_x &= 2 \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2} l_y} M_x dy_1 = 2 R_x \int_{y_1=0}^{y_1=\frac{1}{2} l_y} Y dy_1, \\ R_y &= 2 \int_{x_1=0}^{x_1=\frac{1}{2} l_x} M_y dx_1 = 2 R_y \int_{x_1=0}^{x_1=\frac{1}{2} l_x} X dx_1\end{aligned}$$

sein soll, so gelten für die Funktionen die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{2} l_y \\ 2 \int_{y_1=0} Y dy_1 &= 1, \\ x_1 &= \frac{1}{2} l_x \\ 2 \int_{x_1=0} X dx_1 &= 1.\end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Nach dem Satze der zugeordneten Momentflächen ist andererseits

$$\int_0^{y_1} t_{xy} dy_1 = \int_0^{\frac{l_x}{2}} M_x dx_1,$$

$$\int_0^{x_1} t_{yx} dx_1 = \int_0^{\frac{l_y}{2}} M_y dy_1$$

oder entsprechend den Gleichungen (78) und (81):

$$\frac{1}{2} T l_y \left[ \eta \left( 1 - \frac{\eta^{r+1}}{r+2} \right) + \frac{r-s}{r+s} \cdot \frac{\eta^{r+1}}{r+1} \left( 1 - \eta \frac{r+1}{r+2} \right) \right] = Y \int_0^{\frac{1}{2} l_x} R_x dx_1,$$

$$\frac{1}{2} T l_x \left[ \xi \left( 1 - \frac{\xi^{s+1}}{s+2} \right) + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{\xi^{s+1}}{s+1} \left( 1 - \xi \frac{s+1}{s+2} \right) \right] = X \int_0^{\frac{1}{2} l_y} R_y dy_1.$$

Ich integriere die erste dieser Gleichungen in den Grenzen  $0 < y_1 < \frac{1}{2} l_y$  oder  $0 < \eta < 1$ , die zweite in den Grenzen  $0 < x_1 < \frac{1}{2} l_x$  oder  $0 < \xi < 1$  und erhalte im Einklang mit Gleichung (82):

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2} l_x} R_x dx_1 = \frac{T l_y^2}{8} \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{(r+2)(r+3)} \right] + \frac{r-s}{r+s} \cdot \frac{4}{(r+1)(r+2)(r+3)} \right\},$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2} l_y} R_y dy_1 = \frac{T l_x^2}{8} \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{(s+2)(s+3)} \right] + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right\}.$$

Die Gleichungen (80) liefern wiederum:

$$\int_0^{\frac{1}{2} l_x} R_x dx_1 = \frac{l_y^2}{8} \left\{ V_x + \frac{4V_y}{(s+3)(s+4)} - 2T \left[ 1 - \frac{2}{(s+2)(s+3)} + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] \right\},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2} l_y} R_y dy_1 = \frac{l_x^2}{8} \left\{ V_y + \frac{4V_x}{(r+3)(r+4)} - 2T \left[ 1 - \frac{2}{(r+2)(r+3)} + \frac{r-s}{r+s} \cdot \frac{4}{(r+1)(r+2)(r+3)} \right] \right\}.$$

Aus der Gegenüberstellung der beiden letzten Gleichungsgruppen erhält man mit den Hilfsbezeichnungen

$$\begin{aligned}\gamma_x &= 1 - \frac{2}{(s+2)(s+3)} + \frac{s-r}{s+r} \cdot \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \\ \gamma_y &= 1 - \frac{2}{(r+2)(r+3)} + \frac{r-s}{r+s} \cdot \frac{4}{(r+1)(r+2)(r+3)}; \\ T(\gamma_x l_x^2 + \gamma_y l_y^2) &= \frac{1}{2} l_x^2 \left[ V_x + \frac{4V_y}{(s+3)(s+4)} \right] \\ &= \frac{1}{2} l_y^2 \left[ V_y + \frac{4V_x}{(r+3)(r+4)} \right]\end{aligned}\quad (83)$$

In Verbindung mit der Gleichgewichtsbedingung:

$$2V_x + 2V_y = P$$

ergibt sich nunmehr

$$\left. \begin{aligned}V_x &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_y^2 - \omega_x l_x^2}{(l_x^2 - \omega_y l_y^2) + (l_y^2 - \omega_x l_x^2)} = \frac{P}{2} \cdot \frac{r^2 - \omega_x}{(1 - r^2 \omega_y) + (r^2 - \omega_x)} \\ V_y &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_x^2 - \omega_y l_y^2}{(l_x^2 - \omega_y l_y^2) + (l_y^2 - \omega_x l_x^2)} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1 - r^2 \omega_y}{(1 - r^2 \omega_y) + (r^2 - \omega_x)}\end{aligned}\right\} (84)$$

wobei:  $\omega_x = \frac{4}{(s+3)(s+4)}, \quad \omega_y = \frac{4}{(r+3)(r+4)}$

Hat man mit Hilfe dieser Formeln  $V_x$  und  $V_y$  errechnet, so liefert die Gleichung (83) den Wert:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_x + \omega_x V_y}{\gamma_x + r^2 \gamma_y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_y + \omega_y V_x}{\gamma_y + s^2 \gamma_x}. \quad (85)$$

Aus den Gleichungen (80) erhält man schließlich für die Mittelschnitte, d. h. für  $\xi = \eta = 1$  die Größtwerte der Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned}R_{x_{\max}} &= \frac{1}{2} l_x \left\{ V_x + \frac{3}{2} \frac{V_y}{s+3} - 2T \frac{s+1}{s+2} \left[ 1 + \frac{s-r}{s+r} \left( \frac{1}{s+1} \right)^2 \right] \right\} \\ R_{y_{\max}} &= \frac{1}{2} l_y \left\{ V_y + \frac{3}{2} \frac{V_x}{r+3} - 2T \frac{r+1}{r+2} \left[ 1 + \frac{r-s}{r+s} \left( \frac{1}{r+1} \right)^2 \right] \right\}\end{aligned}\right\} (86)$$

Um die Genauigkeit dieser Formeln nachzuprüfen, wenden wir sie zunächst auf den Fall  $r = s = 1$ , d. h. auf die quadratische Platte an. Sie liefern der Reihe nach:

$$\gamma_x = \gamma_y = 1 - \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{5}{6},$$

$$\omega_x = \omega_y = \frac{4}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5},$$

$$V_x = V_y = \frac{P}{4},$$

$$T = \frac{P}{8} \cdot \frac{1 + \frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{9}{100} P,$$

$$R_{x_{\max}} = R_{y_{\max}} = Pl \frac{179}{1600} = 0,1119 Pl.$$

Bei den bisherigen Ableitungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Last in einem Punkte konzentriert ist. Würde dies der Fall sein, so müßten unmittelbar unter diesem Angriffspunkt unendlich große Biegungs- und Scherspannungen entstehen und selbst bei kleinen Lasten die Platte zu Bruche gehen. In der Wirklichkeit verteilt sich die Belastung stets auf einer mehr oder weniger schmalen Grundfläche, in diesem Bereiche bleiben auch die Spannungen in endlichen Grenzen.

Ist diese Grundfläche, wie in Abb. 38 angedeutet, ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$ , so ist leicht zu erkennen, daß die vorhin für die in einem Punkte konzentrierte Last errechneten Momente sich um die Werte

$$\Delta R_x = \frac{P \lambda_x}{8},$$

$$\Delta R_y = \frac{P \lambda_y}{8}$$

vermindern müssen.

Wenn beispielsweise

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{8},$$

so erhält man:

$$\Delta R_x = \Delta R_y = \frac{Pl}{64},$$

$$R_x = R_y = Pl \left( \frac{179}{1600} - \frac{1}{64} \right) = \frac{154}{1600} Pl = 0,09625 Pl.$$

Die in meinem Buche mit Hilfe elastischer Gewebe durchgeführte Untersuchung hat für die gleiche Lastverteilung

$$R_x = R_y = 0,09641 Pl$$

geliefert. Die Ergebnisse der angenäherten und der genauen Berechnung stimmen vorzüglich überein.

Als zweites Beispiel sei die Platte mit dem Längenverhältnis  $l_y = 2l_x$  oder

$$r = 2,$$

$$s = \frac{1}{2}$$

gewählt. Die zugehörigen Beizahlen sind:

$$\frac{r-s}{r+s} = \frac{3}{5},$$

$$\gamma_x = \left( 1 - \frac{2 \cdot 2^2}{5 \cdot 7} \right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{4 \cdot 2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{103}{175} = 0,589,$$

$$\gamma_y = \left( 1 - \frac{2}{4 \cdot 5} \right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{47}{50} = 0,94,$$

$$\omega_x = \frac{4 \cdot 2^2}{7 \cdot 9} = \frac{16}{63} = 0,254,$$



$$\omega_y = \frac{4}{5 \cdot 6} = \frac{2}{15} = 0,133,$$

$$V_x = \frac{P}{2} \cdot \frac{4 - 0,254}{(1 - 4 \cdot 0,133) + (4 - 0,254)} = \frac{P}{2} \cdot 0,889 = \sim \frac{8}{18} P,$$

$$V_y = \frac{P}{2} \cdot \frac{1 - 4 \cdot 0,133}{(1 - 4 \cdot 0,133) + (4 - 0,254)} = \frac{P}{2} \cdot 0,111 = \sim \frac{1}{18} P,$$

$$T = \frac{P}{2 \cdot 18} \cdot \frac{8 + 1 \cdot 0,254}{0,589 + 4 \cdot 0,94} = 0,0528 P,$$

$$R_{x_{\max}} = \frac{Pl_x}{2} \left\{ \frac{8}{18} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{18 \cdot 7} - 2 \cdot 0,0528 \cdot \frac{3}{5} \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} \\ = 0,2112 Pl_x,$$

$$R_{y_{\max}} = \frac{Pl_y}{2} \left\{ \frac{1}{18} + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{18 \cdot 5} - 2 \cdot 0,0528 \cdot \frac{3}{4} \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] \right\} \\ = 0,0522 Pl_y.$$

Die Druckverteilungsfläche habe die Abmessungen:

$$\lambda_x = \frac{1}{8} l_x,$$

$$\lambda_y = \frac{1}{16} l_y.$$

Es ist somit

$$\Delta R_x = \frac{Pl_x}{8} = \frac{Pl_x}{64} = 0,0156 Pl_x,$$

$$\Delta R_y = \frac{Pl_y}{8} = \frac{Pl_y}{128} = 0,0078 Pl_y.$$

Die Größtwerte der Biegemomente sind:

$$R_{x_{\max}} = Pl_x (0,2112 - 0,0156) = 0,1956 Pl_x,$$

$$R_{y_{\max}} = Pl_y (0,0522 - 0,0078) = 0,0444 Pl_y.$$

In der genauen Berechnung habe ich hingegen

$$R_{x_{\max}} = 0,1915 Pl_x,$$

$$R_{y_{\max}} = 0,0413 Pl_y$$

gefunden. Die Übereinstimmung ist wiederum durchaus befriedigend.

In dem Bereich  $1 < \frac{l_y}{l_x} < 2$ , in dem die eigentliche Plattenwirkung am stärksten ausgeprägt ist, kann die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der neuen Näherungsformel wohl als erwiesen betrachtet werden. Die Ansätze (78), welche diesen Formeln zugrunde gelegt werden, liefern nicht allein für die nächste Umgebung des Lastortes, sondern auch für die außerhalb liegenden Stellen ein richtiges Bild der Spannungsverteilung. Die genaue Untersuchung der Platte mit dem Längenverhältnis  $\frac{l_y}{l_x} = 2$  zeigt beispielsweise, wie aus der Zeichnung (Abb. 37)

zu erkennen ist, daß trotz der freien Randauflagerung auch negative Biegemomente in der Längsrichtung entstehen können und daß die Randdrillmomente nicht in der Ecke, sondern in einer kurzen Entfernung von derselben ihren Größtwert erreichen: diese beiden Eigentümlichkeiten treten auch bei den neuen Näherungsformeln in Erscheinung.

Will man sich nur auf die Untersuchung der größten Beanspruchungen in den Mittelschnitten beschränken, so kann man durch ein noch einfacheres Verfahren brauchbare Näherungswerte gewinnen. Aus der scharfen Berechnung geht nämlich hervor, daß fast die ganze Auflagerkraft  $V_x$  der Längsränder bei jedem Längenverhältnis nur auf eine Strecke  $e = l_x$  vereinigt ist und daß sowohl  $V_x$  wie  $V_y$  mit ausreichender Genauigkeit durch ein Dreieck mit der gleichen Grundlinie  $e$  dargestellt werden können (Abb. 39).

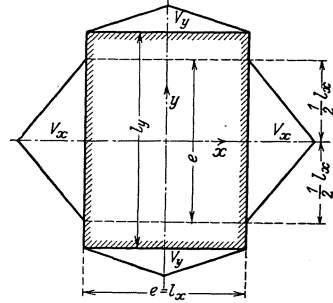


Abb. 39.

Dieser Kräfteverteilung entsprechend gelten für die Mittellinien die Formeln:

$$\mathfrak{R}_x = V_x \frac{l_x}{2} + 2 \frac{V_y}{2} \cdot \frac{e}{6} = \frac{l_x}{2} \left( V_x + \frac{1}{3} V_y \right),$$

$$\mathfrak{R}_y = V_y \frac{l_y}{2} + 2 \frac{V_x}{2} \cdot \frac{e}{6} = \frac{l_y}{2} \left( V_y + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} V_x \right).$$

Auf Grund der gleichen Überlegungen wie im Falle der gleichförmigen Belastung darf näherungsweise

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ V_y &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

in diese Formeln eingesetzt werden. Um nunmehr auch den Einfluß der Randdrillmomente zu berücksichtigen, führen wir wie früher die Beizahl

$$\nu_a = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

ein und erhalten schließlich:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \nu_a \mathfrak{R}_x = \nu_a \frac{l_x}{2} \left( V_y + \frac{1}{3} V_x \right), \\ R_y &= \nu_a \mathfrak{R}_y = \nu_a \frac{l_y}{2} \left( V_y + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} V_x \right). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Für den Fall  $l_x = l_y$  ergibt sich beispielsweise:

$$V_x = V_y = \frac{P}{4},$$

$$\nu_a = \frac{7}{12},$$

$$R_x = R_y = \frac{7}{72} P l_x = 0,0972 P l_x;$$

für  $l_y = 2l_x$ :

$$V_x = \frac{16}{34} P,$$

$$V_y = \frac{1}{34} P,$$

$$v_a = \frac{41}{51},$$

$$R_x = \frac{41}{51} \cdot \frac{49}{204} Pl_x = 0,1931 Pl_x,$$

$$R_y = \frac{41}{51} \cdot \frac{11}{204} Pl_y = 0,0433 Pl_y,$$

während die genaue Berechnung für  $\lambda_x = \lambda_y = \frac{l_x}{8}$ :

$$R_x = R_y = 0,09641 Pl_x,$$

bzw.

$$R_x = 0,1915 Pl_x,$$

$$R_y = 0,0413 Pl_y$$

geliefert hat.

Die Ergebnisse, wie man sieht, stimmen vorzüglich miteinander überein.

Das letzte Näherungsverfahren gewährt noch den Vorteil, daß es auch für den Grenzfall einer in einer Richtung unendlich ausgedehnten Platte gute Anhaltspunkte für die Schätzung der Biegemomente bietet.

Für  $l_y : l_x = \infty$  erhält man nämlich die Werte

$$V_x = \frac{P}{2}, \quad V_y = 0,$$

$$v_a = 1,$$

$$R_x = \frac{Pl_x}{4},$$

$$R_y = \frac{Pl_x}{12}.$$

Hieraus erkennt man, daß selbst bei der stärksten Länglichkeit die Momente in der Längsrichtung nicht verschwinden, sondern ein Drittel des Größtwertes der Momente in der Querrichtung erreichen. Es empfiehlt sich daher, wenn man die gleiche Sicherheit in beiden Richtungen erzielen will, für die Verteilungsweisen ein Drittel des Gesamtquerschnittes der Hauptbewehrung zu wählen.

Die bisherigen Betrachtungen haben uns über die Größe der resultierenden Biegemomente  $R_x$  und  $R_y$  Aufschluß gegeben, ihre Verteilung jedoch auf die Querschnittsbreiten  $B_x = l_y$  bzw.  $B_y = l_x$  noch nicht festgelegt. Wir müssen jetzt, um die auf die Breite  $b = 1$  be-

zogenen Spannungsmomente\*

$$M_x = Y R_x,$$

$$M_y = X R_y$$

zu ermitteln, die Funktionen  $Y$  und  $X$ , welche die Verteilung dieser Momente veranschaulichen, bestimmen. Es sei hierbei vorausgeschickt, daß für die Beurteilung der Bruchgefahr und somit auch für die Querschnittsbemessung nicht immer die Größtwerte der Spannungsmomente  $M_x, M_y$ , sondern vielmehr die Größtwerte der resultierenden Kräftepaare  $R_x, R_y$  ausschlaggebend sind.

Die genauere Untersuchung einer ringsum frei aufliegenden quadratischen Platte liefert beispielsweise für den Mittelpunkt bzw. für die Mittellinien bei gleichförmiger Belastung:

$$M_x = M_y = 0,03638 p l^2,$$

bzw.

$$R_x = R_y = 0,02318 p l^3,$$

bei einer Einzellast mit der Druckfläche  $\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{8}$ :

$$M_x = M_y = 0,2027 P,$$

bzw.

$$R_x = R_y = 0,09641 P l.$$

Bei gleicher Gesamtbelastung  $p l^2 = P$  ist das Verhältnis der Spannungsmomente

$$0,2027 : 0,03638 = \sim 5,6 : 1,$$

dasjenige der resultierenden Momente hingegen:

$$0,09641 : 0,02388 = \sim 4 : 1.$$

Da die Bachschen<sup>1</sup> Versuche gezeigt haben, daß die Bruchlasten gerade diesem Verhältnis 4 : 1 entsprechen, so erkennt man, daß eine genaue Ermittlung der Größtwerte  $M_x$  und  $M_y$  im allgemeinen nicht erforderlich und daß eine ausreichend sichere Querschnittsbemessung möglich ist, wenn der Durchschnittswert der Spannungsmomente in der Umgebung des Lastortes angegeben werden kann.

Die Verteilung der resultierenden Biegemomente  $R_x, R_y$  läßt sich am einfachsten und hinreichend genau, sofern  $\frac{l_y}{l_x} < 2$  ist, entsprechend der schematischen Darstellung in Abb. 40 durch ein Dreieck mit der Grundlinie  $c_x = l_y$  bzw.  $c_y = l_x$

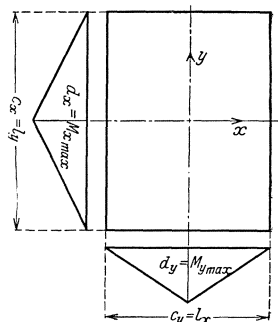


Abb. 40.

<sup>1</sup> Vgl. C. von Bach, Versuche mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten, Berlin 1915, W. Ernst & Sohn, S. 255.

und der Höhe  $d_x = M_{x_{\max}}$  bzw.  $d_y = M_{y_{\max}}$  veranschaulichen. Da der Flächeninhalt des Dreiecks dem Wert  $R_x$  bzw.  $R_y$  gleich sein muß, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= 2 \frac{R_x}{c_x} = 2 \frac{R_x}{l_x} \cdot \left( \frac{l_x}{l_y} \right) \\ M_{y_{\max}} &= 2 \frac{R_y}{c_y} = 2 \frac{R_y}{l_y} \cdot \left( \frac{l_y}{l_x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Ist  $l_y > 2l_x$ , so sind die Spannungsmomente  $M_x$  außerhalb des Bereiches  $c_x = 2l_x$  verschwindend klein, man kann daher in diesem Falle das Maß  $c_x = 2l_x$  als Grenzwert der Verteilungswerte betrachten und die erste Gleichung (89) durch die Formel:

$$M_{x_{\max}} = \frac{R_x}{l_x} \quad (89a)$$

ersetzen.

Um die Anwendung des Näherungsverfahrens besser zu erläutern, wähle ich als Beispiel wie früher eine Platte mit den Seitenlängen:

$$l_x = 4,0 \text{ m,}$$

$$l_y = 5,0 \text{ m;}$$

ihre Belastung sei  $P = 2,0 \text{ t}$ .

Mit Hilfe der Gleichungen (87) erhält man zunächst:

$$V_x = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = 0,709 \text{ t,}$$

$$V_y = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot \frac{4^4}{4^4 + 5^4} = 0,291 \text{ t.}$$

$$\text{Da} \quad \nu_a = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,622,$$

so liefern die Formeln (88):

$$R_x = 0,622 \cdot \frac{4,0}{2} \left( 0,709 + \frac{1}{3} \cdot 0,291 \right) = 1,003 \text{ tm,}$$

$$R_y = 0,622 \cdot \frac{5,0}{2} \left( 0,291 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0,709 \right) = 0,747 \text{ tm.}$$

Aus den Gleichungen (89) folgt weiterhin:

$$M_{x_{\max}} = 2 \cdot \frac{1,003}{5} = 0,4012 \text{ t,}$$

$$M_{y_{\max}} = 2 \cdot \frac{0,747}{4} = 0,3735 \text{ t.}$$

Die Verteilung der Biegemomente ist in Abb. 41 veranschaulicht. Die auf Seite 12 für eine gleichförmige Belastung  $p = 1,0 \text{ t/m}^2$  ermittelten Momentenwerte sind auch in der neuen Zeichnung eingetragen.

Für die beiden schraffierten Mittelstreifen von der Breite  $b = \frac{l_x}{2} = 2,0\text{m}$  ergeben sich nunmehr für die Querschnittsbemessung die Größen:

$$M_1 = 2,0 \left( 0,884 + \frac{0,4012 + 0,241}{2} \right) = 2,41 \text{ tm},$$

$$M_2 = 2,0 \left( 0,564 + \frac{0,3735 + 0,187}{2} \right) = 1,680 \text{ ,, ,}$$

oder auf die Längeneinheit der Querschnittsbreite bezogen:

$$M_x = \frac{2,41}{2,0} = 1,205 \text{ tm/m},$$

$$M_y = \frac{1,689}{2,0} = 0,8445 \text{ ,,}$$

Es ist somit für

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = 1200 \text{ ,, ,}$$

eine Nutzhöhe:

$$\bar{h} - a_x = 0,411 \sqrt{1205} = 14,3 \text{ cm},$$

$$\bar{h} - a_y = 0,411 \sqrt{844,5} = 11,9 \text{ ,, ,}$$

erforderlich. Wird die Plattenstärke  $\bar{h} = 16 \text{ cm}$  gewählt, so steht eine Nutzhöhe

$$h - a_x = 16 - 1,5 = 14,5 \text{ cm},$$

bzw.

$$h - a_y = 16 - 2,5 = 13,5 \text{ ,,}$$

zur Verfügung. Die schraffierten Streifen sind auf je 1 m Breite mit:

$$f_{ex} = \frac{9}{8} \cdot \frac{120500}{1200 \cdot 14,5} = 7,8 \text{ cm}^2$$

bzw.

$$f_{ey} = \frac{9}{8} \cdot \frac{84450}{1200 \cdot 13,5} = 5,87 \text{ ,,}$$

zu bewehren. Die Eiseneinlagen der verbleibenden Eckabschnitte sind entsprechend den dargestellten Momentenlinien schwächer zu bemessen. Um den Einfluß der Drillungsmomente bei der Querschnittsbemessung der Bewehrung zu berücksichtigen, kann man die Randdrillungsmomente mit Hilfe der Grundgleichungen (78) und insbesondere das in den Ecken wirkende Kräftepaar  $T$  nach Formel (85) bestimmen. Die Rechnung zeigt, daß der Durchschnittswert der Ersatzmomente

$$m_x = \frac{1}{2} (M_{x_{\max}} \pm T) < M_{x_{\max}},$$

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm T) < M_{y_{\max}}$$

ist. Wird also die zur Aufnahme von  $M_{\max}$  erforderliche Bewehrung

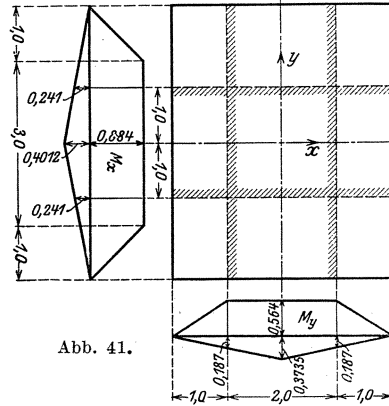


Abb. 41.

auf der vollen Querschnittsbreite in gleicher Stärke durchgeführt, so reicht sie auch für die größten Ersatzmomente vollständig aus.

§ 21. Die ringsum eingeklemmte Platte.

Da für die Ausführung in erster Linie durchlaufende Platten in Betracht kommen, so möge als zweiter Grenzfall die ringsum eingeklemmte Platte behandelt werden.

Der wesentliche Unterschied gegenüber den frei aufliegenden Platten besteht darin, daß infolge der Einspannung alle Fasern am Rande die gleiche Neigung aufweisen und daher wohl durch Normal-, nicht aber durch Drillungsspannungen beansprucht werden.

Um den Kräfteverlauf besser zu veranschaulichen, habe ich in Abb. 42 auf Grund der Ergebnisse der genauen Untersuchung die Auflagerwiderstände der quadratischen Platte dargestellt.

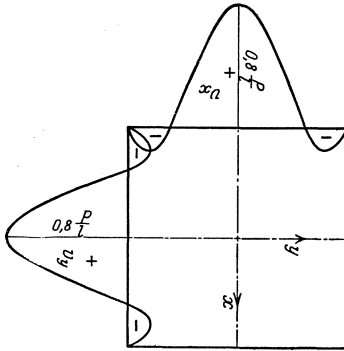


Abb. 42.

Die Zeichnung zeigt, daß in der Nähe der Ecken die Auflagerkräfte abwärts gerichtet sind: die hierdurch bewirkte Verankerung trägt auch zur Einklemmung der Ränder bei.

Bezeichnet man wieder mit  $V_x$  und  $V_y$  die gesamte Auflagerkraft der Ränder  $EG$  und  $EF$  (Abb. 43) und mit  $v_x$  und  $v_y$  die zugehörigen, auf die Längeneinheit des Randes bezogenen Auflagerwiderstände, so kann der Verlauf dieser Widerstände hinreichend genau durch die beiden Ansätze:

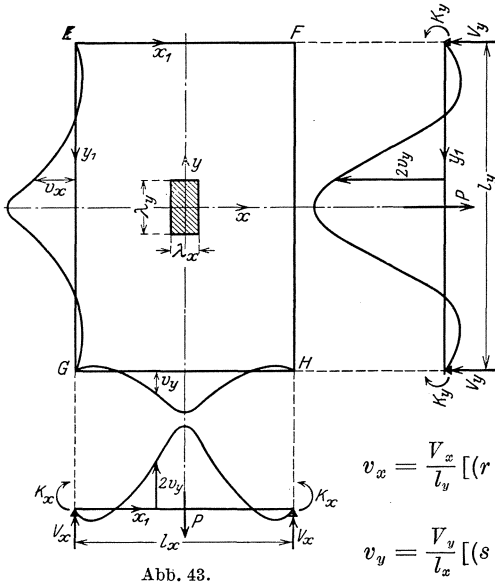


Abb. 43.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{V_x}{l_y} [(r + 2)(r + 1)\eta^{r+1} \\ &\quad - (r + 1)r\eta^r] \\ v_y &= \frac{V_y}{l_x} [(s + 2)(s + 1)\xi^{s+1} \\ &\quad - (s + 1)s\xi^s] \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

dargestellt werden. Hierbei ist wie früher:

$$r = \frac{l_y}{l_x}, \quad \xi = \frac{2x_1}{l_x}, \quad s = \frac{l_x}{l_y}, \quad \eta = \frac{2y_1}{l_y}.$$

Wird die Platte als einfacher Träger mit der Spannweite  $l_x$  und der Breite  $l_y$  aufgefaßt, so müssen diesem stellvertretenden Balken außer der Einzelkraft  $P$  auch die längs der Ränder  $EF$  und  $GH$  auftretenden Kräfte  $v_y$  zugewiesen werden. Die unter dem Einfluß dieser ideellen Belastung im Bereiche  $0 < x_1 < \frac{l_y}{2}$  entstehenden Biegemomente  $R_x$  sind aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_x}{dx^2} &= \left(\frac{2}{l_x}\right)^2 \frac{d^2 R_x}{d\xi^2} = -p_x = 2v_y \\ &= \frac{2V_y}{l_x} (s+2)(s+1)\xi^{s+1} - (s+1)s\xi^s \end{aligned}$$

zu bestimmen. Ihre Integration liefert, wenn man das Einspannungsmoment der Ränder  $EG$  und  $FH$  mit  $K_x$  bezeichnet und beachtet, daß für  $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx_1} &= \frac{2}{l_x} \frac{dR_x}{d\xi} = V_x, \\ R_x &= K_x \end{aligned}$$

sein muß:

$$R_x = K_x + \frac{l_x}{2} \left[ \xi V_x + V_y \left( \frac{s+1}{s+3} \xi^{s+3} - \frac{s}{s+2} \xi^{s+2} \right) \right].$$

Da infolge der Einklemmung die Mittelfläche der Platte am Rande keine Drehung vollziehen kann, so steht zur Bestimmung des Einspannungsmomentes  $K_x$  die Bedingung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} l_x \\ \int_{x_1=0} R_x dx &= 0 \end{aligned}$$

zur Verfügung. Sie wird durch

$$K_x = -\frac{l_x}{2} \left[ \frac{V_x}{2} + V_y \frac{2-s}{2+s} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+4)} \right]$$

befriedigt.

Auf Grund ähnlicher Entwicklung findet man für einen stellvertretenden Balken mit der Spannweite  $l_y$  und der Breite  $l_x$  die Werte:

$$R_y = K_y + \frac{l_y}{2} \left[ \eta V_y + V_x \left( \frac{r+1}{r+3} \eta^{r+3} - \frac{r}{r+2} \eta^{r+2} \right) \right],$$

wobei

$$K_y = -\frac{l_y}{2} \left[ \frac{V_y}{2} + V_x \frac{2-r}{2+r} \cdot \frac{1}{(r+3)(r+4)} \right].$$

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2-s}{2+s} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+4)} &= \beta_x \\ \frac{2-r}{2+r} \cdot \frac{1}{(r+3)(r+4)} &= \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (91)$$



so lauten die Gleichungen der resultierenden Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \frac{l_x}{2} \left\{ \frac{2\xi - 1}{2} V_x + V_y \left[ \left( \frac{s+1}{s+3} \xi^{s+3} - \frac{s}{s+2} \xi^{s+1} \right) - \beta_x \right] \right\} \\ R_y &= \frac{l_y}{2} \left\{ \frac{2\eta - 1}{2} V_y + V_x \left[ \left( \frac{r+1}{r+3} \eta^{r+3} - \frac{r}{r+2} \eta^{r+1} \right) - \beta_y \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Verlangt man, daß an der Kreuzungsstelle, d. h. für  $\xi = \eta = 1$  die lotrechten Durchbiegungen  $\delta_x, \delta_y$  der beiden stellvertretenden Balken übereinstimmen sollen, so muß die Bedingung

$$\delta_x = \int_0^{\frac{1}{2} l_x} \frac{R_x x_1 dx_1}{E J_x} = \delta_y = \int_0^{\frac{1}{2} l_y} \frac{R_y y_1 dy_1}{E J_y}$$

erfüllt sein. Da die Trägheitsmomente

$$J_x = l_y \frac{h^3}{12},$$

$$J_y = l_x \frac{h^3}{12}$$

sind, so gilt auch die Gleichung:

$$l_x^3 \int_0^1 R_x \xi d\xi = l_y^3 \int_0^1 R_y \eta d\eta.$$

Ihre Integration liefert:

$$l_x^4 (V_x - \kappa_x V_y) = l_y^4 (V_y - \kappa_y V_x),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= 6 \left[ \beta_x + \frac{s}{(s+2)(s+4)} - \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} \right], \\ \kappa_y &= 6 \left[ \beta_y + \frac{r}{(r+2)(r+4)} - \frac{r+1}{(r+3)(r+5)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (91a)$$

Im Verein mit der Gleichgewichtsbedingung

$$2 V_x + 2 V_y = P$$

erhält man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{P}{2} \cdot \frac{\kappa_x + r^4}{(\kappa_x + r^4) + (1 + r^4 \kappa_y)}, \\ V_y &= \frac{P}{2} \cdot \frac{\kappa_y + s^4}{(\kappa_y + s^4) + (1 + s^4 \kappa_x)}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Ist beispielsweise  $r = s = 1$ , so ergibt sich der Reihe nach:

$$V_x = V_y = \frac{P}{4},$$

$$\beta_x = \beta_y = \frac{1}{60},$$

$$K_x = K_y = -\frac{Pl}{16} \cdot \frac{31}{30} = -Pl \cdot 0,0646$$

und somit für die Plattenmitte:

$$R_{x_{\max}} = R_{y_{\max}} = \frac{Pl}{8} \left\{ \frac{1}{2} + \left( \frac{2}{4} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{60} \right\} = \frac{13}{160} \cdot Pl = 0,08125 Pl.$$

Nimmt man wie vorhin an, daß die Einzellast auf einer Grundfläche mit den Maßen  $\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{8}$  gleichmäßig verteilt ist, so vermindern sich, wie man durch eine kurze Zwischenrechnung feststellen kann, die Spannungsmomente um den Betrag

$$\Delta K = \frac{P\lambda}{24} = \frac{Pl}{192} = 0,0052 Pl,$$

die Momente in den Mittelquerschnitten um

$$\Delta R = \frac{P\lambda}{24} \left( 3 - \frac{\lambda}{1} \right) = \frac{23}{8} \cdot \frac{Pl}{192} = 0,015 Pl.$$

Es ist dann im Ganzen

$$K_x = K_y = -Pl(0,0646 - 0,0052) = -Pl \cdot 0,0594,$$

$$R_{x_{\max}} = R_{y_{\max}} = Pl(0,08125 - 0,015) = Pl \cdot 0,06625.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen hinsichtlich der Lastverteilung habe ich in der genauen Untersuchung

$$K = -Pl \cdot 0,0577,$$

$$R = +Pl \cdot 0,06619$$

gefunden. Die Übereinstimmung mit den Näherungswerten ist also ganz vorzüglich.

Man kann im übrigen das Verfahren noch weiter vereinfachen, indem man  $V_x$  und  $V_y$  anstatt aus den Gleichungen (93) unmittelbar aus den ausreichend genauen Näherungsformeln

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = \frac{P}{2} \cdot \frac{r^4}{1 + r^4}, \\ V_y &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} = \frac{P}{2} \cdot \frac{s^4}{1 + s^4} \end{aligned} \right\} \quad (93a)$$

ableitet und die Größtwerte der negativen bzw. positiven Biegemomente für die Stellen  $\xi = 0$  oder  $\eta = 0$  bzw.  $\xi = 1$  oder  $\eta = 1$  mit Hilfe der Gleichungen (92) errechnet. Die letzteren liefern unter Berücksichtigung der Lastverteilung die Werte:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{l_x}{4} \left[ V_x + \frac{2(2-s)}{2+s} \cdot \frac{V_y}{(s+3)(s+4)} \right] + \frac{P}{24} \cdot \frac{\lambda_x^3}{l_x}, \\ K_y &= -\frac{l_y}{4} \left[ V_y + \frac{2(2-r)}{2+r} \cdot \frac{V_x}{(r+3)(r+4)} \right] + \frac{P}{24} \cdot \frac{\lambda_y^3}{l_y}, \\ R_{x_{\max}} &= +\frac{l_x}{4} \left[ V_x + \frac{6V_y}{(s+3)(s+4)} \right] - \frac{P\lambda_x}{24} \left( 3 - \frac{\lambda_x}{l_x} \right), \\ R_{y_{\max}} &= +\frac{l_y}{4} \left[ V_y + \frac{6V_x}{(r+3)(r+4)} \right] - \frac{P\lambda_y}{24} \left( 3 - \frac{\lambda_y}{l_y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß für die quadratische Platte, d. h. für  $r = s = 1$  die schärferen Formeln (92) und (93) und die vereinfachten Näherungsformeln (93a) und (94) zu den gleichen Ergebnissen führen müssen.

Für das Längenverhältnis  $r = 2$ ,  $s = \frac{1}{2}$  und die Druckverteilungsweiten  $\lambda_x = \lambda_y = \frac{l_x}{8}$  erhält man mit Hilfe der ersteren:

$$\begin{aligned} V_x &= 0,4775 P, \\ V_y &= 0,0225 P, \\ K_x &= -0,1146 Pl_x, \\ K_y &= -0,0043 Pl_y, \\ R_{x_{\max}} &= +0,1065 Pl_x, \\ R_{y_{\max}} &= +0,02185 Pl_y, \end{aligned}$$

mit Hilfe der letzteren:

$$\begin{aligned} V_x &= 0,471 P, \\ V_y &= 0,029 P, \\ K_x &= -0,1131 Pl_x, \\ K_y &= -0,0059 Pl_y, \\ R_{x_{\max}} &= +0,1055 Pl_x, \\ R_{y_{\max}} &= +0,02315 Pl_y. \end{aligned}$$

Da die beiden Zahlengruppen sich kaum voneinander unterscheiden, so ist die Zuverlässigkeit der Formeln (93a) und (94) erwiesen.

Will man die Berechnung auf der gleichen Grundlage wie die Untersuchung der gleichförmig belasteten Platte durchführen, so kann man schließlich an Stelle der Gleichungen (94) die noch einfacheren Formeln:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{l_x}{4} V_x, \\ K_y &= -\frac{l_y}{4} V_y, \\ R_{x_{\max}} &= \nu_b \frac{l_x}{4} \left( V_x + \frac{1}{3} V_y \right), \\ R_{y_{\max}} &= \nu_b \frac{l_y}{4} \left( V_y + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} V_x \right) \end{aligned} \right\} \quad (94a)$$

benutzen. Die Größen  $V_x$  und  $V_y$  sind hierbei aus den Gleichungen (93a) zu entnehmen, für  $\nu_b$  ist wie früher der Wert:

$$\nu_b = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{l_x^2 l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

einzusetzen. Unter  $l_x$  ist stets die kürzere Spannrichtung zu verstehen.

Diese letzten Gleichungen liefern für  $r = s = 1$ :

$$\begin{aligned} K_x &= K_y = -0,0625 Pl, \\ R_{x_{\max}} &= R_{y_{\max}} = +0,0717 Pl, \end{aligned}$$

für  $r = 2$ ,  $s = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} K_x &= -0,1175 Pl_x, \\ K_y &= -0,0072 Pl_y, \\ R_{x_{\max}} &= +0,1125 Pl_x, \\ R_{y_{\max}} &= +0,0252 Pl_y \end{aligned}$$

Werte also, die mit den vorhin mitgeteilten genauen Näherungswerten gut übereinstimmen.

Für die Querschnittsbemessung reichen somit die Formeln (93a) und (94a) vollständig aus. Sie geben uns die Möglichkeit, auch den Grenzfall einer in einer Richtung unendlich ausgedehnten Platte zu untersuchen. Für  $l_y : l_x = \infty$  ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{P}{2}, \\ V_y &= 0, \\ \nu_b &= 1, \\ R_{x_{\max}} &= \frac{Pl_x}{8} = -K_x, \\ R_{y_{\max}} &= \frac{Pl_x}{24}. \end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen erkennt man wieder, daß die Biegemomente in der Längsrichtung dreimal kleiner als in der Querrichtung sind.

Nehmen wir jetzt als Beispiel die Platte mit den Spannweiten:

$$\begin{aligned} l_x &= 4,0 \text{ m}, \\ l_y &= 5,0 \text{ m} \end{aligned}$$

und der Belastung

$$P = 2,0 \text{ t},$$

so erhalten wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot \frac{5^4}{4^4 + 5^4} = 0,709 \text{ t}, \\ V_y &= \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot \frac{4^4}{4^4 + 5^4} = 0,291 \text{ t}, \\ \nu_b &= 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2}{4^4 + 5^4} = 0,874, \\ K_x &= -\frac{4,0}{4} \cdot 0,709 = -0,709 \text{ tm}, \end{aligned}$$

$$K_y = -\frac{5,0}{4} \cdot 0,291 = -0,364 \text{ tm},$$

$$R_{x_{\max}} = 0,874 \cdot \frac{4,0}{4} \left( 0,709 + \frac{1}{3} \cdot 0,291 \right) = +0,705 \text{ tm},$$

$$R_{y_{\max}} = 0,874 \cdot \frac{5,0}{4} \left( 0,291 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0,709 \right) = +0,524 \text{ tm}.$$

Entsprechend den Formeln (89) ergeben sich weiterhin für die Spannungsmomente die Spitzenwerte:

$$M_{x_{\min}} = \frac{2 K_x}{l_y} = -2 \cdot \frac{0,709}{5} = -0,2836 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\min}} = \frac{2 K_y}{l_x} = -2 \cdot \frac{0,364}{4} = -0,182 \text{ tm/m},$$

$$M_{x_{\max}} = \frac{2 R_x}{l_y} = +2 \cdot \frac{0,705}{5} = +0,282 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{2 R_y}{l_x} = +2 \cdot \frac{0,524}{4} = +0,262 \text{ tm/m}.$$

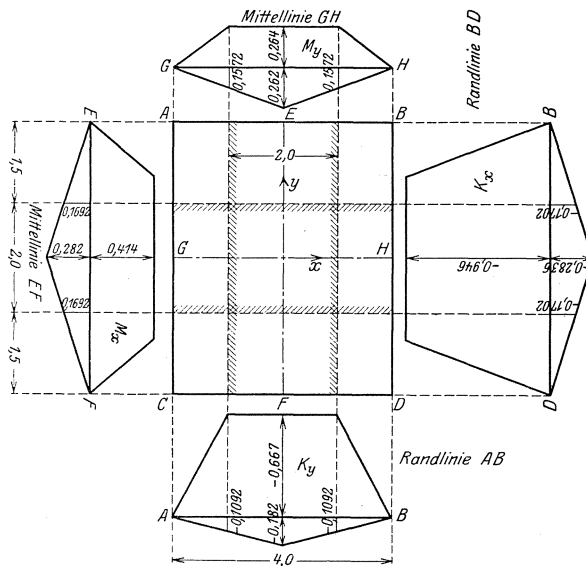


Abb. 44.

Die Verteilung der Spannungsmomente ist in der Zeichnung (44) dargestellt, zur Ergänzung des Bildes sind auch die auf S. 17 u. 18 für eine gleichförmige Belastung errechneten Momentenwerte eingetragen.

Auf die beiden schraffierten Mittelstreifen mit der Breite  $b = \frac{l_x}{2} = 2,0 \text{ m}$  entfallen die Momente:

$$M_{1\min} = -2,0 \left( 0,964 + \frac{0,2836 + 0,1762}{2} \right) = -2,346 \text{ tm},$$

$$M_{1\max} = +2,0 \left( 0,414 + \frac{0,282 + 0,1692}{2} \right) = +1,279 \text{ tm},$$

$$M_{2\min} = -2,0 \left( 0,667 + \frac{0,182 + 0,1092}{2} \right) = -1,625 \text{ tm},$$

$$M_{2\max} = +2,0 \left( 0,264 + \frac{0,262 + 0,1572}{2} \right) = +0,947 \text{ tm}.$$

Bei

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

ist in der Plattenmitte eine Nutzhöhe:

$$h - a_x = 0,411 \cdot \sqrt{\frac{1279}{2}} = 10,4 \text{ cm},$$

am Rande:

$$h - a_x = 0,411 \cdot \sqrt{\frac{2346}{2}} = 14,1 \text{ cm}$$

erforderlich. Es sei:

$$h = 12 \text{ cm},$$

$$h - a_x = 10,5 \text{ cm},$$

$$h - a_y = 9,5 \text{ cm},$$

bzw.

$$h = 16 \text{ cm},$$

$$h - a_x = 14,5 \text{ cm},$$

$$h - a_y = 13,5 \text{ cm}$$

gewählt. Als Bewehrung für je 1 m Breite ergibt sich sodann:

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{127900}{1200 \cdot 10,5} = 5,70 \text{ cm}^2/\text{m},$$

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{94700}{1200 \cdot 9,5} = 4,66 \text{ cm}^2/\text{m},$$

bzw.

$$f_{e_x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{234600}{1200 \cdot 14,5} = 7,59 \text{ cm}^2/\text{m},$$

$$f_{e_y} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{162500}{1200 \cdot 13,5} = 5,65 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

Die Rand- und Eckabschnitte sind entsprechend der Abnahme der Biegemomente schwächer zu bewehren. Hinsichtlich des Einflusses der Ersatzmomente auf die Querschnittsbemessung sei auf die im letzten Abschnitt, S. 81 gegebenen Anhaltspunkte verwiesen.

## § 22. Die durchlaufende Platte.

Um die durchlaufende Platte untersuchen zu können, ist es notwendig, die Hauptwerte der Biegemomente auch für die vier in § 5, 6, 7 und 8 behandelten Lagerungsarten zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe wird durch die folgende Überlegung wesentlich erleichtert.

Wir ersetzen die für die frei aufliegende bzw. für die fest eingeklemmte Platte gültigen Näherungsformeln:

$$R_x = \nu_a \frac{l_x}{2} \left( V_x + \frac{1}{3} V_y \right) = \frac{P l_x}{4} \nu_a \frac{1}{l_x^4 + l_y^4} \left( l_y^4 + \frac{1}{3} l_x^4 \right)$$

$$R_y = \nu_a \frac{l_y}{2} \left( V_y + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} V_x \right) = \frac{P l_y}{4} \nu_a \frac{1}{l_x^4 + l_y^4} \left( l_y^4 + \frac{1}{3} l_x l_y^3 \right)$$

bzw.

$$R_x = \nu_b \frac{l_x}{4} \left( V_x + \frac{1}{3} V_y \right) = \frac{P l_x}{8} \nu_b \frac{1}{l_x^4 + l_y^4} \left( l_y^4 + \frac{1}{3} l_x^4 \right)$$

$$R_y = \nu_b \frac{l_y}{4} \left( V_y + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} V_x \right) = \frac{P l_y}{8} \nu_b \frac{1}{l_x^4 + l_y^4} \left( l_y^4 + \frac{1}{3} l_x l_y^3 \right)$$

durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \nu_a \mathfrak{M}_x^* \left( \frac{p_x}{p} + \frac{1}{3} \frac{p_y}{p} \right) \\ R_y &= \nu_a \mathfrak{M}_y^* \left( \frac{p_y}{p} + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} \frac{p_x}{p} \right) \\ R_x &= \nu_b \mathfrak{M}_x^* \left( \frac{p_x}{p} + \frac{1}{3} \frac{p_y}{p} \right) \\ R_y &= \nu_b \mathfrak{M}_y^* \left( \frac{p_y}{p} + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} \frac{p_x}{p} \right) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Hierin stellen  $\mathfrak{M}_x^*$  und  $\mathfrak{M}_y^*$  die Biegemomente eines einfachen bzw. beiderseite eingespannten, die volle Last  $P$  in der Mitte tragenden Balkens mit der Spannweite  $l_x$  oder  $l_y$  dar. Die Größen  $\frac{p_x}{p}$  und  $\frac{p_y}{p}$  entsprechen bei gleichmäßiger Belastung und gleichartiger Lagerung aller Ränder den Bedingungen:

$$\frac{p_x}{p} = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

$$\frac{p_y}{p} = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}.$$

Da bei ringsum gestützten Platten, gleichviel, ob die Ränder ganz oder nur teilweise eingespannt sind, die Größen  $R_x$  und  $R_y$  stets zwischen den durch die Formeln (95) bestimmten Grenzwerten liegen müssen, erscheint es zulässig, diesen Formeln die allgemeine Fassung

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \nu \mathfrak{M}_x^* \left( \frac{p_x}{p} + \frac{1}{3} \frac{p_y}{p} \right) \\ R_y &= \nu \mathfrak{M}_y^* \left( \frac{p_y}{p} + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} \frac{p_x}{p} \right) \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

zu geben. In diese Gleichungen sind die für die jeweilige Lagerungsart maßgebenden Werte  $\nu$ ,  $\frac{p_x}{p}$ ,  $\frac{p_y}{p}$  und  $\mathfrak{M}^*$  einzuführen.

Beachtet man, daß die bisher ermittelten Größen  $\nu$ ,  $\frac{p_x}{p}$  und  $\frac{p_y}{p}$  nur von den Randbedingungen und vom Längenverhältnis der Platte abhängig sind, so liegt der Gedanke nahe, die in § 3, 4, 5, 6, 7 und 8 für  $\nu$ ,  $\frac{p_x}{p}$ ,  $\frac{p_y}{p}$  entsprechend der jeweiligen Lagerungsart entwickelten Formeln sinngemäß auf die achsensymmetrische Einzelbelastung zu übertragen.

Der Einfluß der Belastungsart tritt nur in den Größen  $\mathfrak{M}_x^*$  und  $\mathfrak{M}_y^*$  in Erscheinung. Für diese Momente kommt, je nachdem der stellvertretende Balken an beiden Enden frei aufruht oder an einem Ende frei aufliegt und am anderen fest eingeklemmt oder schließlich an beiden Enden fest eingespannt ist, eine der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{M}^* = \frac{Pl}{4}$$

oder

$$\mathfrak{M}^* = \frac{5}{32} Pl$$

oder

$$\mathfrak{M}^* = \frac{1}{8} Pl$$

in Betracht.

Hiermit sind für alle möglichen Lagerungsarten sämtliche Bestimmungsgrößen bekannt.

Will man die Spitzenmomente unmittelbar errechnen, so kann man die aus den Formeln (89) und (96) abgeleiteten Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{2 R_x}{l_y} = 2 \nu \frac{\mathfrak{M}_x^*}{l_y} \left( \frac{p_x}{p} + \frac{1}{3} \frac{p_y}{p} \right) \\ M_{y_{\max}} &= \frac{2 R_y}{l_x} = 2 \nu \frac{\mathfrak{M}_y^*}{l_x} \left( \frac{p_y}{p} + \frac{1}{3} \frac{l_x}{l_y} \frac{p_x}{p} \right) \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

benutzen.

Die Entwicklung dieser Gleichungen liefert unter der Voraussetzung, daß die Länge der Platte nicht größer als die doppelte Breite ist, die folgenden Ergebnisse:

1. Ringsum aufliegende Platte. (Abb. 45a.)

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{P}{4} \frac{l_x}{l_y} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ M_{y_{\max}} &= \frac{P}{4} \frac{l_y}{l_x} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (98a)$$

wobei für:

$$\left. \begin{aligned} l_y > l_x: \quad \mu_a &= 2 \nu_a \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{l_y^4} \right); \quad \mu'_a = 2 \nu_a \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^3}{l_x^3} \right) \\ l_y < l_x: \quad \mu_a &= 2 \nu_a \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^3}{l_y^3} \right); \quad \mu'_a = 2 \nu_a \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^4}{l_x^4} \right) \end{aligned} \right\}$$



2. Ringsum eingeklemmte Platte. (Abb. 45b.)

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{P}{8} \frac{l_x}{l_y} \mu_b \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ M_{y_{\max}} &= \frac{P}{8} \frac{l_y}{l_x} \mu'_b \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (98b)$$

wobei für:

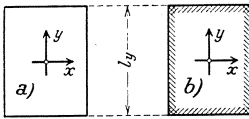
$$\left. \begin{aligned} l_y > l_x: \quad \mu_b &= 2 \nu_b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{l_y^4}\right); \quad \mu'_b = 2 \nu_b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^3}{l_x}\right) \\ l_y < l_x: \quad \mu_b &= 2 \nu_b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^3}{l_y}\right); \quad \mu'_b = 2 \nu_b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^4}{l_x^4}\right) \end{aligned} \right\}$$

3. Platte an drei Seiten frei aufliegend und an einem Rande fest eingeklemmt. (Abb. 45c.)

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{5}{32} P \frac{l_x}{l_y} \mu_c \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \\ M_{y_{\max}} &= \frac{1}{4} P \frac{l_y}{l_x} \mu'_c \frac{2 l_x^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (98c)$$

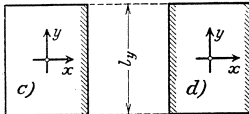
wobei für:

$$\left. \begin{aligned} l_y > l_x: \quad \mu_c &= 2 \nu_c \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 l_x^4}{5 l_y^4}\right); \quad \mu'_c = 2 \nu'_c \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 l_y^3}{2 l_x^2}\right) \\ l_y < l_x: \quad \mu_c &= 2 \nu_c \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 l_x^3}{5 l_y}\right); \quad \mu'_c = 2 \nu'_c \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4}\right) \end{aligned} \right\}$$



4. Platte an zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. (Abb. 45d.)

$$\left. \begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{1}{8} P \frac{l_x}{l_y} \mu_d \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}, \\ M_{y_{\max}} &= \frac{1}{4} P \frac{l_y}{l_x} \mu'_d \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5 l_y^4}, \end{aligned} \right\}$$



wobei für:

$$\left. \begin{aligned} l_y > l_x: \quad \mu_d &= 2 \nu_d \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_x^4}{5 l_y^4}\right); \\ \mu'_d &= 2 \nu'_d \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 l_y^3}{l_x}\right), \\ l_y < l_x: \quad \mu_d &= 2 \nu_d \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_x^3}{5 l_y}\right); \\ \mu'_d &= 2 \nu'_d \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 l_y^4}{l_x^4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (98d)$$

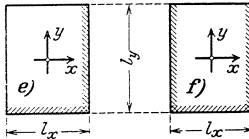


Abb. 45. Die schraffierten Ränder sind eingeklemmt, die übrigen frei aufliegend.

5. Platte an zwei benachbarten Seiten frei aufliegend, an den beiden anderen fest eingeklemmt. (Abb. 45e.)

$$M_{x_{\max}} = \frac{5}{32} P \frac{l_x}{l_y} \mu_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{5}{32} P \frac{l_y}{l_x} \mu_e' \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

wobei für:

$$l_y > l_x: \quad \mu_e = 2 \nu_e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{l_y^4}\right); \quad \mu_e' = 2 \nu_e' \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^3}{l_x^3}\right),$$

$$l_y < l_x: \quad \mu_e = 2 \nu_e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^3}{l_y^3}\right); \quad \mu_e' = 2 \nu_e' \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^4}{l_x^4}\right).$$

(98e)

6. Platte an drei Seiten eingeklemmt und an einem Rande frei aufliegend. (Abb. 45f.)

$$M_{x_{\max}} = \frac{1}{8} P \frac{l_x}{l_y} \mu_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4},$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{5}{32} P \frac{l_y}{l_x} \mu_f' \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4},$$

wobei für:

$$l_y > l_x: \quad \mu_f = 2 \nu_f \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_x^4}{2 l_y^4}\right); \quad \mu_f' = 2 \nu_f' \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 l_y^3}{l_x^3}\right),$$

$$l_y < l_x: \quad \mu_f = 2 \nu_f' \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_x^3}{2 l_y^3}\right); \quad \mu_f' = 2 \nu_f \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 l_y^4}{l_x^4}\right)$$

(98f)

Hiermit sind die für eine Einzellast in der Plattenmitte gültigen Gleichungen auf die gleiche Form, wie die in § 3—8 für eine gleichmäßige Belastung abgeleiteten Näherungsformeln gebracht. Um nunmehr die in § 9 für eine durchlaufende Platte entwickelten Gleichungen auf die Belastung durch eine Einzelkraft zu übertragen, brauchen wir nun die Momente:

$$p \frac{l_x^2}{8}; \quad \frac{9}{128} p l_x^2; \quad p \frac{l_x^2}{24}$$

bzw.

$$p \frac{l_y^2}{8}; \quad \frac{9}{128} p l_y^2; \quad p \frac{l_y^2}{24}$$

durch

$$\frac{P}{4} \frac{l_x}{l_y}; \quad \frac{5}{32} P \frac{l_x}{l_y}; \quad \frac{P}{8} \frac{l_x}{l_y}$$

bzw.

$$\frac{P}{4} \frac{l_y}{l_x}; \quad \frac{5}{32} P \frac{l_y}{l_x}; \quad \frac{P}{8} \frac{l_y}{l_x}$$

und die Beizahlen:

$$\nu_a, \nu_b, \nu_c, \nu_d, \nu_e, \nu_f$$

durch

$$\mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d, \mu_e, \mu_f$$

zu ersetzen.

Bezeichnet man mit  $G$  bzw. mit  $P$  die jeweilige Einzellast eines Feldes bei voller bzw. schachbrettartiger Belastung, so liefert die Umstellung der Formeln (32) und (33) die nachstehenden Gleichungen:

I. Für die einreihige Platte. (Abb. 46.)

Außenfeld A:

$$M_{x_{\max} \min} = \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_c \frac{5 l_y^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max} \min} = \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{1}{4} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_c \frac{2 l_x^4}{2 l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

Innenfeld J:

$$M_{x_{\max} \min} = \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_d \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max} \min} = \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{1}{4} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_d \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

(99)

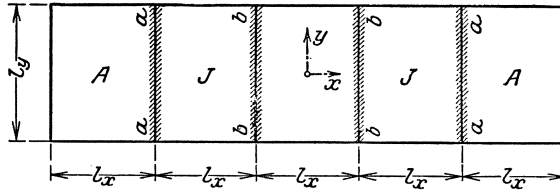


Abb. 46.

II. Für die mehrreihige Platte. (Abb. 47.)

Eckfeld E:

$$M_{x_{\max} \min} = \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max} \min} = \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

Randfeld R:

$$M_{x_{\max} \min} = \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max} \min} = \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_f \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{P}{2} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

(100)

Mittelfeld M:

$$M_{x_{\max} \min} = \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_b \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

$$M_{y_{\max} \min} = \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_b \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right]$$

Ebenso gewinnt man für die Stützmomente aus den Gleichungen (34) und (35) die Formeln:

I. Für die einreihige Platte (Abb. 46):

$$\left. \begin{aligned} M_{x_a} &= -\frac{5}{16}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \\ M_{x_b} &= -\frac{1}{4}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{5 l_y^4}{l_x^4 + 5 l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

II. Für die mehrreihige Platte (Abb. 47):

$$\left. \begin{aligned} M_{x_a} &= -\frac{5}{16}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\ M_{x_b} &= -\frac{1}{4}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \\ M_{x_c} &= -\frac{5}{16}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \\ M_{x_d} &= -\frac{1}{4}(G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

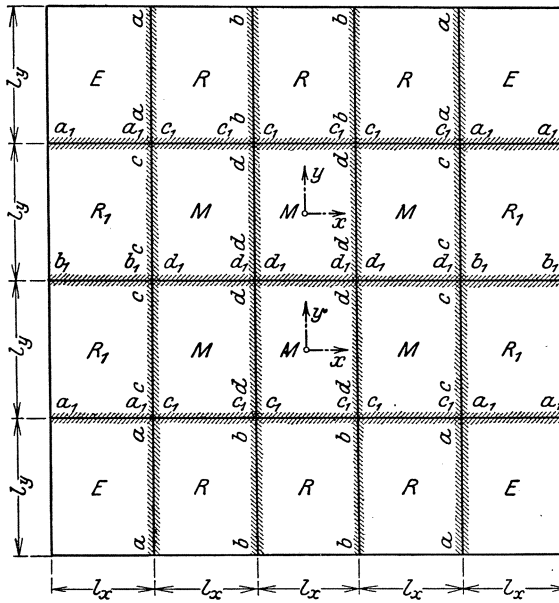


Abb. 47.

Um die Anwendung des Näherungsverfahrens an einem Zahlenbeispiel zu erläutern, denken wir uns jetzt die in § 9 behandelte Platte (Abb. 15 u. 16 a) mit

$$G = 0,8 \text{ t}$$

und

$$P = 2,4 \text{ t}$$

belastet.

Für das Eckfeld  $E$  haben wir früher die Zahlen  $\nu_a = 0,622$ ,  $\nu_b = 0,787$  ermittelt und erhalten nunmehr mit Hilfe der Gleichungen (98a) und (98e):

$$\mu_a = 2 \nu_a \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{l_y^4}\right) = 2 \cdot 0,622 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4^4}{5^4}\right) = 1,415$$

$$\mu'_a = 2 \nu_a \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^3}{l_x^3}\right) = 2 \cdot 0,622 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5^3}{4^3}\right) = 2,058$$

$$\mu_e = 2 \nu_e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{l_y^4}\right) = 2 \cdot 0,787 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4^4}{5^4}\right) = 1,79$$

$$\mu'_e = 2 \nu_e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_y^3}{l_x^3}\right) = 2 \cdot 0,787 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5^3}{4^3}\right) = 2,6.$$

Entsprechend den Formeln (100) und (102) ergibt sich weiterhin:  $\alpha$ ) für den Plattenmittelpunkt:

$$\begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{5}{32} \left(G + \frac{P}{2}\right) \mu_e \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= \frac{4}{5} \left[ \frac{5}{32} \left(0,8 + \frac{2,4}{2}\right) 1,79 \cdot \frac{625}{881} \pm \frac{2,4}{8} \cdot 1,415 \cdot \frac{625}{881} \right] \\ &= 0,318 \pm 0,241 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

$$M_{x_{\max}} = 0,559 \text{ tm/m,}$$

$$M_{x_{\min}} = 0,077 \text{ tm/m;}$$

$$\begin{aligned} M_{y_{\max}} &= \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{5}{32} \left(G + \frac{P}{2}\right) \mu'_e \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= \frac{5}{4} \left[ \frac{5}{32} \left(0,8 + \frac{2,4}{2}\right) \cdot 2,6 \cdot \frac{256}{881} \pm \frac{2,4}{8} \cdot 2,058 \cdot \frac{256}{881} \right] \\ &= 0,294 \pm 0,224 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

$$M_{y_{\max}} = 0,518 \text{ tm/m,}$$

$$M_{y_{\min}} = 0,070 \text{ tm/m;}$$

$\beta$ ) für die Mitte des Randes  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} M_{x_a} &= -\frac{5}{16} (G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} = -\frac{5}{16} (0,8 + 2,4) \frac{4}{5} \cdot \frac{1250}{1506} \\ &= -0,664 \text{ tm/m.} \end{aligned}$$

Für das Randfeld  $R$  (Abb. 15/47) gelten die früher errechneten Zahlen:

$$\nu_f = 0,852,$$

$$\nu'_f = 0,875$$

und die nach den Formeln (98f) ermittelten Größen:

$$\mu_f = 2 \nu_f \left(1 + \frac{1}{3} \frac{l_x^4}{2 l_y^4}\right) = 2 \cdot 0,852 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{4^4}{2 \cdot 5^4}\right) = 1,82$$

$$\mu'_f = 2 \nu'_f \left(1 + \frac{1}{3} \frac{2 l_y^3}{l_x^3}\right) = 2 \cdot 0,875 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 5^3}{4^3}\right) = 4,03.$$

Die Grenzwerte der Biegemomente sind

$\alpha$ ) für den Plattenmittelpunkt:

$$\begin{aligned} M_{x_{\max}} &= \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_f \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,302 \pm 0,241 \text{ tm/m}, \\ M_{x_{\max}} &= 0,543 \text{ tm/m}, \\ M_{y_{\max}} &= 0,061 \text{ tm/m}, \\ M_{y_{\max}} &= \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_f \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,266 \pm 0,224 \text{ tm/m}, \\ M_{y_{\max}} &= 0,490 \text{ tm/m}, \\ M_{y_{\min}} &= 0,042 \text{ tm/m}; \end{aligned}$$

$\beta$ ) für die Mitte des Randes  $b$ :

$$M_{x_b} = -\frac{1}{4} (G + P) \frac{l_x}{l_y} \frac{2 l_y^4}{l_x^4 + 2 l_y^4} = -0,532 \text{ tm/m}.$$

Die für das Feld  $R$  abgeleiteten Formeln können, wie auf S. 37 nachgewiesen, auch auf das Randfeld  $R_1$  (Abb. 47) übertragen werden, es sind nur die Zeiger  $x$  und  $y$  miteinander zu vertauschen.

Unter Zugrundelegung der früher ermittelten Beizahlen

$$\begin{aligned} \nu_f &= 0,835, \\ \nu'_f &= 0,804 \end{aligned}$$

erhält man für den Plattenmittelpunkt entsprechend den Gleichungen<sup>1</sup> (98f):

$$\begin{aligned} \mu_f &= 2 \nu_f \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 l_x^4}{l_y^4} \right) = 2,122 \\ \mu'_f &= 2 \nu'_f \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l_y^4}{2 l_x^4} \right) = 2,132 \\ M_{x_{\max}} &= \frac{l_x}{l_y} \left[ \frac{5}{32} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu_f \frac{l_y^4}{l_y^4 + 2 l_x^4} \pm \frac{P}{8} \mu_a \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,292 \pm 0,241 \text{ tm/m} \\ M_{x_{\max}} &= 0,533 \text{ tm/m} \\ M_{x_{\min}} &= 0,051 \text{ tm/m} \\ M_{y_{\max}} &= \frac{l_y}{l_x} \left[ \frac{1}{8} \left( G + \frac{P}{2} \right) \mu'_f \frac{2 l_x^4}{l_y^4 + 2 l_x^4} \pm \frac{P}{8} \mu'_a \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \right] \\ &= 0,3 \pm 0,224 \text{ tm/m} \\ M_{y_{\max}} &= 0,524 \text{ tm/m} \\ M_{y_{\min}} &= 0,076 \text{ tm/m} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Bei der Umstellung dieser Gleichungen tritt mit dem Vertauschen von  $x$  und  $y$   $\mu'_f$  an Stelle von  $\mu_f$ , wobei zu beachten ist, daß diese Beizahlen, weil in der Wirklichkeit  $l_y > l_x$  ist, infolge der Vertauschung nunmehr nach den für  $l_x > l_y$  gültigen Formeln zu errechnen sind.

und weiterhin für die Stützenmomente in der Mitte des Randes  $a_1$ :

$$M_{y_{a_1}} = -\frac{5}{16}(G+P)\frac{l_y}{l_x}\frac{2l_x^4}{l_y^4+2l_x^4} = -0,562 \text{ tm/m},$$

in der Mitte des Randes  $b_1$ :

$$M_{y_{b_1}} = -\frac{1}{4}(G+P)\frac{l_y}{l_x}\frac{2l_x^4}{l_y^4+2l_x^4} = -0,45 \text{ tm/m},$$

in der Mitte des Randes  $c$ :

$$M_{x_c} = -\frac{5}{16}(G+P)\frac{l_x}{l_y}\frac{l_y^4}{l_x^4+l_y^4} = -0,568 \text{ tm/m}$$

Für das Mittelfeld  $M$  ergibt sich schließlich:

$$\nu_b = 0,874,$$

$$\mu_b = 2\nu_b\left(1 + \frac{1}{3}\frac{l_x^4}{l_y^4}\right) = 1,988,$$

$$\mu'_b = 2\nu_b\left(1 + \frac{1}{3}\frac{l_x^3}{l_y^3}\right) = 2,882,$$

$$M_{x_{\max}} = \frac{l_x}{l_y}\left[\frac{1}{8}\left(G + \frac{P}{2}\right)\mu_b\frac{l_y^4}{l_x^4+l_y^4} \pm \frac{P}{8}\mu_a\frac{l_y^4}{l_x^4+l_y^4}\right]$$

$$= 0,282 \pm 0,241 \text{ tm/m},$$

$$M_{x_{\max}} = 0,523 \text{ tm/m},$$

$$M_{x_{\min}} = 0,041 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{l_y}{l_x}\left[\frac{1}{8}\left(G + \frac{P}{2}\right)\mu'_b\frac{l_x^4}{l_x^4+l_y^4} \pm \frac{P}{8}\mu'_a\frac{l_y^4}{l_x^4+l_y^4}\right]$$

$$= 0,262 \pm 0,224 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\max}} = 0,486 \text{ tm/m},$$

$$M_{y_{\min}} = 0,038 \text{ tm/m}.$$

Die zugehörigen Werte der Stützenmomente sind für die Mitte des Randes  $c_1$ :

$$M_{y_{c_1}} = -\frac{5}{16}(G+P)\frac{l_y}{l_x}\frac{l_x^4}{l_x^4+l_y^4} = -0,362 \text{ tm/m},$$

für die Mitte des Randes  $d_1$ :

$$M_{y_{d_1}} = -\frac{1}{4}(G+P)\frac{l_y}{l_x}\frac{l_x^4}{l_x^4+l_y^4} = -0,29 \text{ tm/m},$$

für die Mitte des Randes  $d$ :

$$M_{x_d} = -\frac{1}{4}(G+P)\frac{l_x}{l_y}\frac{l_y^4}{l_x^4+l_y^4} = -0,454 \text{ tm/m}.$$

Hiermit sind alle für die Querschnittsbemessung erforderlichen Zahlen bestimmt. Auf zwei besondere Eigentümlichkeiten sei noch kurz hingewiesen.

Bei der Behandlung einer gleichmäßig belasteten Platte haben wir bereits festgestellt, daß der Unterschied zwischen den Höchstwerten der Biegemomente bei frei aufliegenden bzw. fest eingeklemmten Platten wesentlich geringer als bei einfachen bzw. eingespannten Trägern ist und daß daher die Wirkung der Kontinuität bei den Platten weniger als bei den Balken in Erscheinung tritt.

Wird die Platte nur durch eine Einzelkraft belastet, so ist der Einfluß der Lagerungsart noch weniger ausgeprägt. Die Formel (96) liefert beispielsweise für eine quadratische Platte

a) wenn alle Räder frei aufliegen:

$$R_{x_{\max}} = \frac{Pl_x}{6} \nu_a = \frac{7}{72} Pl_x = 0,0972 Pl_x,$$

b) wenn zwei benachbarte Ränder frei aufliegen und die beiden anderen fest eingeklemmt sind:

$$R_{x_{\max}} = \frac{5}{48} Pl_x \nu_e = \frac{245}{3072} Pl_x = 0,0799 Pl_x,$$

c) wenn alle Räder eingespannt:

$$R_{x_{\max}} = \frac{Pl_x}{12} \nu_b = \frac{31}{432} Pl_x = 0,0717 Pl_x.$$

Die Abweichungen sind, wie man sieht, verhältnismäßig geringfügig. Da bei mehrreihigen Platten als Grenzwerte der Biegemomente in erster Linie diejenigen in Betracht kommen, welche der halben bzw. der vollen Randeinspannung (Fälle *b* und *c*) entsprechen, so sind nur unbedeutende Unterschiede zu erwarten. In dem vorhin behandelten Beispiel wird diese Schlußfolgerung auch bestätigt, die Grenzwerte der Biegemomente für die kürzere Spannrichtung im Eckfeld:

$$M_{x_{\max}} = 0,559 \text{ tm/m},$$

im Mittelfeld:

$$M_{x_{\max}} = 0,523 \text{ tm/m}$$

weichen nur um 7 vH einander ab.

Eine weitere Eigentümlichkeit ist darin zu erblicken, daß innerhalb des Bereiches  $1 < \frac{l_y}{l_x} < 2$ , also bei den häufigsten Längenverhältnissen die Werte  $M_{x_{\max}}$  und  $M_{y_{\max}}$  sich wenig voneinander unterscheiden.

Für eine ringsum frei aufliegende Platte von der Länglichkeit  $\frac{l_y}{l_x} = 2$  ist beispielsweise auf S. 76 und 80:

$$M_{x_{\max}} = \frac{2 R_x}{l_y} = 2 \cdot 0,1956 \frac{Pl_x}{l_y} = 0,1956 P,$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{2 R_x}{l_y} = 2 \cdot 0,0444 \frac{Pl_y}{l_x} = 0,1776 P$$



ermittelt worden. Auch bei der zuletzt behandelten durchlaufenden Platte sind die Biegemomente im Eckfeld:

$$M_{x_{\max}} = 0,559 \text{ tm/m};$$

$$M_{y_{\max}} = 0,518 \text{ tm/m}$$

im Mittelfeld:

$$M_{x_{\max}} = 0,523 \text{ tm/m};$$

$$M_{y_{\max}} = 0,486 \text{ tm/m}$$

nahezu einander gleich.

Die Ergebnisse genauerer Untersuchungen führen ebenso zu der Feststellung, daß die Platte in einem ziemlich weiten Bereich um den Lastangriffspunkt das gleiche Spannungsbild wie eine kreisförmige Platte aufweist. Es ist daher zweckmäßig, auch bei stark länglichen und einseitig bewehrten Platten eine kräftige Längsarmierung in der Umgebung des Lastangriffspunktes, und zwar auf einer

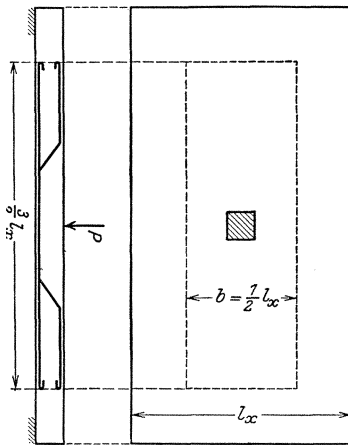


Abb. 48.

Breite  $b_y = \frac{1}{2} l_x$  zu verteilen (Abb. 48):

da wie aus der Spannungsdarstellung in der Zeichnung 37 zu erkennen ist, negative Biegemomente in der Längsrichtung selbst bei frei aufliegenden Platten entstehen können, empfiehlt es sich, um das die Einzellast tragende Kernstück besser in die angrenzenden Rand- und Eckstreifen zu

verankern, wenigstens einen Teil dieser Verteilungsseisen aufzubiegen.

## VI. Die Beanspruchung der Bewehrung.

Die Untersuchung der Festigkeit biegsamer Platten umfaßt zwei Aufgaben. Wir haben zuerst für jede Querschnittsebene das Biegemoment  $M$  und das Drillungsmoment  $t$  zu ermitteln, und sodann entweder bei vorgeschriebenen Beanspruchungen die erforderlichen Querschnittsabmessungen zu bestimmen oder aber, wenn die letzteren von vornherein gewählt werden, den Nachweis zu erbringen, daß die entsprechenden Spannungen innerhalb der zulässigen Grenzen verbleiben.

Um die Lösung der ersten Aufgabe zu vereinfachen, wollen wir als richtig unterstellen, daß die für eine isotrope Platte ermittelten Spannungsmomente sich nicht wesentlich von denjenigen unterscheiden können, welche bei gleicher Gestalt, gleicher Auflagerung und gleicher

Belastung in einer Eisenbetonplatte entstehen werden<sup>1</sup>. Sind unter dieser Voraussetzung für zwei aufeinander senkrecht stehende  $x$ ,  $y$ -Ebenen die Biegemomente  $M_x$ ,  $M_y$  und die Drillungsmomente  $t_{xy} = t_{yx} = t$  errechnet worden, so können wir für jede andere Querschnittsebene, deren Normale  $n$  den Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse bildet, die zugehörigen Spannungsmomente  $M_n$  und  $t_n$  mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2 t \sin \alpha \cos \alpha \\ t_n &= t (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (M_x - M_y) \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

bestimmen. Der Größt- und Kleinstwert des Biegemomentes sind

$$\left. \begin{aligned} M_1 \\ M_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \{ M_x + M_y \} \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 t^2}. \quad (2)$$

Die Neigung der Ebenen, in welchen diese Hauptspannungsmomente auftreten, ist durch

$$\tan 2 \alpha_1 = \tan 2 \alpha_2 = \frac{2 t}{M_x - M_y} \quad (3)$$

festgelegt, wobei

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}.$$

In diesen Ebenen ist  $t_n = 0$ .

In den winkelhalbierenden Schnitten zwischen diesen Ebenen erreicht das Drillungsmoment  $t_n$  die Grenzwerte

$$\left. \begin{aligned} t_1 \\ t_2 \end{aligned} \right\} = \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 t^2}. \quad (4)$$

Sind  $M_1$  und  $M_2$  beide positiv oder negativ, so ist nur am unteren oder nur am oberen Rande der Platte eine Zugbewehrung erforderlich: haben jedoch  $M_1$  und  $M_2$  verschiedenes Vorzeichen, so müssen beide Ränder bewehrt werden.

Der Spannungsnachweis ist leicht durchzuführen, wenn Hauptspannungen und Eisenstäbe gleichgerichtet sind. Steht aber die Ebene, in welcher die Hauptspannungen auftreten, nicht senkrecht zu den Eiseneinlagen, so können wir uns entweder die wirklich vorhandene kreuzweise Bewehrung durch eine einzige Schar von Stäben, die senkrecht zu dieser Ebene liegen sollen, ersetzt denken oder aber an Stelle der wirklichen Hauptspannungsmomente andere Kräftepaare, die in der gleichen Richtung wie die Eisenstäbe wirken, einführen: im ersten Falle werden Ersatzbewehrungen, im zweiten Ersatzmomente der Querschnittsbemessung zugrunde gelegt.

<sup>1</sup> Eine ausführliche Untersuchung über die Beziehungen zwischen der isotropen Platte und der Eisenbetonplatte mit seitenparalleler Bewehrung ist in § 3 meiner Schrift über „Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten“ im „Bauing.“ 1926, H. 30/31 enthalten.

### § 23. Die Ersatzbewehrung.

Nehmen wir zunächst an, daß die Bewehrung aus zwei Scharen von Stäben besteht, die parallel zur  $x$ - bzw. zur  $y$ -Achse liegen, und bezeichnen wir mit  $f_x$  bzw.  $f_y$  die Bewehrungsdichte, d. h. die auf

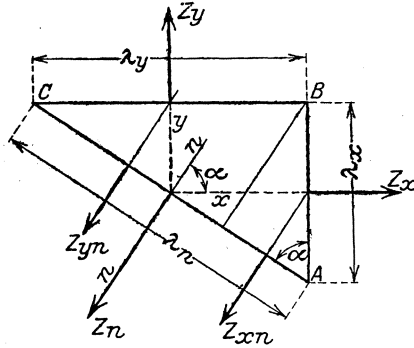


Abb. 49.

die Querschnittsbreite  $b = 1$  in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung entfallende Bewehrungsmenge, so müssen wir, um die durch  $M_1$  und  $M_2$  erzeugten Spannungen errechnen zu können, die Bewehrungsdichte  $f_n$  des Querschnittes mit der Normale  $n$  ermitteln.

In den deutschen Bestimmungen wird festgelegt, daß ein Stab mit dem Normalquerschnitt  $F_e$ , dessen Längsachse den Winkel  $\alpha$  mit der Normale zur jeweiligen Schnittfläche bildet, bei der Ermittlung des Widerstands- und des Trägheitsmomentes des schrägen Querschnittes mit dem Inhalt  $F_e \cos \alpha$  in Rechnung gestellt werden soll.

Denken wir uns aus der Platte ein dreieckiges Prisma  $ABC$  (Abb. 49) mit den Seitenlängen  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_n$  herausgeschnitten, so hat die Seite  $AB$  die Bewehrung]

$$F_x = f_x \lambda_x,$$

die Seite  $BC$ :

$$F_y = f_y \lambda_y,$$

und die Schrägseite  $AC$ :

$$F_n = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha = \lambda_x f_x \cos \alpha + \lambda_y f_y \sin \alpha.$$

Setzen wir

$$F_n = \lambda_n f_n$$

und beachten wir, daß

$$\lambda_n = \frac{\lambda_x}{\cos \alpha} = \frac{\lambda_y}{\sin \alpha},$$

so erhalten wir auch:

$$f_n = f_x \cos^2 \alpha + f_y \sin^2 \alpha. \quad (5)$$

Ist mit Hilfe dieser Gleichung die Bewehrungsdichte  $f_n$  bestimmt, so läßt sich das zugehörige Widerstandsmoment  $W_{en}$  für die Spannungsverteilung im Stadium IIb in der bekannten Form

$$W_{en} = r_n f_n \quad (6)$$

darstellen und mit Hilfe der Gleichung (1) schließlich die Eisenspannung

$$\sigma_{en} = \frac{M_n}{W_{en}} = \frac{1}{r_n} \frac{M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2 t \sin \alpha \cos \alpha}{f_x \cos^2 \alpha + f_y \sin^2 \alpha} \quad (7)$$

errechnen. Unter  $r_n$  ist hierbei der Hebelarm der inneren Kräfte, d. h. der Abstand des Druckmittelpunktes von der Mittelebene der Bewehrung, zu verstehen.

Ist  $t = 0$ , liegen also die Hauptspannungen in Richtung der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse, so liefert diese Formel für  $\alpha_1 = 0$ :

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{M_x}{r_x f_x},$$

für  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sigma_2 = \sigma_y = \frac{M_y}{r_y f_y}.$$

Diese Werte sind offenbar richtig, wir müssen aber noch prüfen, ob auch bei jedem anderen Spannungszustand die Formel (7) eindeutige und einwandfreie Ergebnisse liefert. Es ist nämlich zu beachten, daß, wenn die Spannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  der Ersatzbewehrung zugleich die Hauptspannungen der wirklichen Bewehrung sein sollen, so müssen

für den  $x$ -Stab:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1, \\ \text{für den } y\text{-Stab:} \\ \sigma_y &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

sein. Führt man in diese Gleichungen die nach den Formeln (7) für  $\alpha = \alpha_1$  bzw.  $\alpha = \alpha_2$  errechneten Werte  $\sigma_1, \sigma_2$  ein, so erhält man Werte  $\sigma_x, \sigma_y$ , die mit den aus den gleichen Formeln für  $\alpha_1 = 0$  und  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  abgeleiteten Größen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x}{r f_x}, \\ \sigma_y &= \frac{M_y}{r f_y} \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

nicht unter allen Umständen übereinstimmen.

Ist beispielsweise

$$M_x = 0,08 p l^2$$

$$M_y = 0,04 p l^2$$

$$t = 0,02 p l^2$$

$$\tan 2 \alpha_1 = \frac{0,04}{0,08 - 0,04} = 1,$$

d. h.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}$$

$$\cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0,92388$$

$$\sin \alpha_1 = -\cos \alpha_2 = 0,38268$$

und wählt man

$$\begin{aligned}f_x &= 2f, \\f_y &= f,\end{aligned}$$

so erhält man nach Gl. (7)

für  $\alpha = \alpha_1$ :

$$\sigma_1 = \frac{pl^2}{rf} \cdot \frac{0,08 \cdot 0,92388^2 + 0,04 \cdot 0,38268^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 0,92388 \cdot 0,38268}{2 \cdot 0,92388^2 + 1 \cdot 0,38268^2}$$

$$\sigma_1 = 0,0427 \frac{pl^2}{rf},$$

für  $\alpha = \alpha_2$ :

$$\sigma_2 = \frac{pl^2}{rf} \cdot \frac{0,08 \cdot 0,38268^2 + 0,04 \cdot 0,92388^2 - 2 \cdot 0,02 \cdot 0,38268 \cdot 0,92388}{2 \cdot 0,38268^2 + 1 \cdot 0,92388^2}$$

$$\sigma_2 = 0,0357 \frac{pl^2}{rf},$$

nach Gleichung (7a):

$$\sigma_x = \frac{pl^2}{rf} (0,0427 \cdot 0,92388^2 + 0,0357 \cdot 0,38268^2) = 0,0417 \frac{pl^2}{rf},$$

$$\sigma_y = \frac{pl^2}{rf} (0,0427 \cdot 0,38268^2 + 0,0357 \cdot 0,92388^2) = 0,0367 \frac{pl^2}{rf},$$

nach Gleichung (7b) hingegen:

$$\sigma_x = \frac{pl^2}{rf} \cdot \frac{0,08}{2} = 0,04 \frac{pl^2}{rf},$$

$$\sigma_y = \frac{pl^2}{rf} \cdot \frac{0,04}{1} = 0,04 \frac{pl^2}{rf}.$$

Betrachtet man jetzt den Spannungszustand

$$M_x = 0,08 pl^2,$$

$$M_y = 0,0 pl^2,$$

$$t = 0,04 pl^2,$$

so ergibt sich für die gleichen Querschnittsverhältnisse aus den Gleichungen (7) und (7a):

$$\sigma_x = 0,0421 \frac{pl^2}{rf},$$

$$\sigma_y = 0,0015 \frac{pl^2}{rf},$$

aus Gleichung (7b):

$$\sigma_x = 0,04 \frac{pl^2}{rf},$$

$$\sigma_y = 0,0 \frac{pl^2}{rf}.$$

In beiden Fällen weichen die zugehörigen Werte  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  voneinander ab, die Unterschiede sind aber sehr geringfügig und dürfen daher wohl als belanglos betrachtet werden.

Der Gedanke liegt nahe, die Formel (7) zu benutzen, um diejenigen Eisenmengen  $f_x$ ,  $f_y$  zu bestimmen, welche bei einer vorgeschriebenen Spannung  $\sigma_e$  zur Aufnahme der Hauptspannungsmomente erforderlich sind. Wendet man diese Formel auf die beiden Hauptspannungsebenen an, so erhält man

für  $\alpha = \alpha_1$ :

$$f_x \cos^2 \alpha_1 + f_y \sin^2 \alpha_1 = \frac{M_1}{r \sigma_e},$$

für  $\alpha = \alpha_2$ :

$$f_x \cos^2 \alpha_2 + f_y \sin^2 \alpha_2 = \frac{M_2}{r \sigma_e}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert:

$$f_x = \frac{1}{r \sigma_e} \cdot \frac{M_1 \cos^2 \alpha_1 - M_2 \sin^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1},$$

$$f_y = \frac{1}{r \sigma_e} \cdot \frac{M_1 \cos^2 \alpha_2 - M_2 \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2}.$$

Da  $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich auch im Einklang mit Gleichung (3):

$$f_x = \frac{1}{r \sigma_e} \mu_x,$$

$$f_y = \frac{1}{r \sigma_e} \mu_y,$$

wobei

$$\mu_x = M_x + \frac{2 t^2}{M_x - M_y},$$

$$\mu_y = M_y + \frac{2 t^2}{M_y - M_x}.$$

So einfach diese Formeln auch erscheinen, so wird ihre Anwendungsmöglichkeit durch den Umstand wesentlich eingeschränkt, daß für  $M_x = M_y$  die Momente  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  unendlich groß werden, wenn nicht zugleich das Drillungsmoment verschwindet: dies Ergebnis besagt, daß eine gleichmäßige und vollständige Ausnutzung der beiden Bewehrungsrichtungen in diesem Falle eben unmöglich ist.

Man darf fernerhin nicht außer acht lassen, daß eine ausreichende Übereinstimmung zwischen den Gleichungen (7a) und (7b) nur dann gewährleistet ist, wenn  $M_1$  und  $M_2$  das gleiche Vorzeichen haben: ist dies nicht der Fall, so wird die gleiche Bewehrung  $f_x$ ,  $f_y$  durch das eine Moment auf Zug, durch das andere auf Druck beansprucht. Da die Zugspannungen aber von den Eisen allein, die Druckspannungen jedoch auch vom Beton übernommen werden, so darf die Gleichung (7), welche nur für Zugbewehrungen richtig ist, lediglich für diejenige Querschnittsebene, in welcher  $f_x$  und  $f_y$  auf Zug beansprucht sind, benutzt werden.

### § 24. Die Ersatzmomente.

Um eine andere Grundlage für die Querschnittsbemessung zu finden, führen wir an Stelle der wirklichen Momente  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $t$  zwei Kräftepaare  $m_x$ ,  $m_y$  von solcher Größe ein, daß die zugehörigen Momente  $m_n$  für die Querschnitte  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  mit den wirklichen Hauptspannungsmomenten  $M_n$  übereinstimmen sollen. Wählt man für diese Ersatzmomente die Werte

$$\begin{aligned} m_x &= M_x + 2t \sin \alpha \cos \alpha, \\ m_y &= M_y + 2t \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

so ergibt sich in der Tat:

$$m_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2t \sin \alpha \cos \alpha = M_n.$$

Für das Wertepaar  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ist entsprechend Gleichung (3):

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 &= \sin 2 \alpha_1 = + \frac{2t}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}, \\ 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 &= \sin 2 \alpha_2 = - \frac{2t}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}, \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= M_x \pm \frac{2t^2}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}, \\ m_y &= M_y \pm \frac{2t^2}{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4t^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Da das Vorzeichen derart gewählt werden kann, daß der absolute Wert von  $m_x$ ,  $m_y$  stets größer als derjenige von  $M_n$  und erst recht größer als derjenige von  $M_x$ ,  $M_y$  ist, so erkennt man, daß, wenn diese Ersatzmomente der Querschnittsbemessung zugrunde gelegt werden, stets ein Überschuß an Sicherheit vorhanden sein wird.

Dieses Verfahren liefert zwar eine brauchbare Grundlage für die Querschnittsbemessung, gestattet jedoch, da die Größen  $m_x$ ,  $m_y$  nicht dem wirklichen, sondern einem gedachten Spannungszustand entsprechen, keinen unmittelbaren Einblick in die Spannungsverteilung. Will man ein klares Bild der Anstrengung der Platte gewinnen, so empfiehlt es sich, eine Umformung der Spannungsgleichungen vorzunehmen. Setzt man nämlich:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= r S_x, & t_{xy} &= r T_{xy} = r T, \\ M_y &= r S_y, & t_{yx} &= r T_{yx} = r T, \\ M_n &= r S_n, & t_n &= r T_n, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

so erhält man an Stelle der Gleichung (1) die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} S_n &= S_x \cos^2 \alpha + S_y \sin^2 \alpha + 2T \sin \alpha \cos \alpha, \\ T_n &= T (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (S_x - S_y) \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diese Formeln stellen die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannkraften  $S$  und  $T$  einer ebenen Scheibe dar.

Um den Zusammenhang zwischen diesen Größen und den Spannungen  $\sigma_b$  und  $\sigma_e$  besser zu veranschaulichen, ist in Abb. 50 das Spannungsdiagramm für ein Moment  $\mathfrak{M}_x = b M_x$  aufgetragen. Bezeichnet man mit  $e_x$  den Abstand der Nulllinie vom oberen Rande und mit  $a_x$

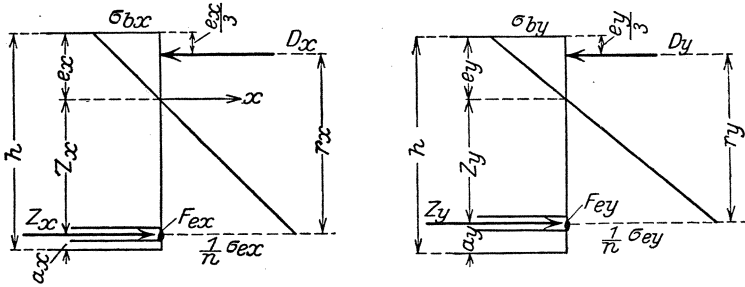


Abb. 50.

den Abstand des Schwerpunktes der Bewehrung vom unteren Rande, so bestehen zwischen der Mittelkraft  $D_x$  der Druckspannungen im Beton, der Mittelkraft  $Z_x$  der Eisenzugspannungen und dem Moment  $\mathfrak{M}_x$  die bekannten Beziehungen:

$$D_x = \sigma_b x \frac{b e_x}{2} = Z_x = \sigma_e x F_x = \frac{\mathfrak{M}_x}{h - a_x - \frac{e_x}{3}}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch, wenn

$$h - a_x - \frac{e_x}{3} = r_x,$$

$$D_x = Z_x = b S_x,$$

$$F_x = b f_x$$

gesetzt wird:

$$S_x = \frac{M_x}{r_x} = \sigma_e x f_x = \frac{1}{2} \sigma_b x e_x. \tag{11}$$

In der gleichen Weise ergibt sich für ein Moment  $\mathfrak{M}_y = b M_y$ :

$$S_y = \frac{M_y}{r_y} = \sigma_e y f_y = \frac{1}{2} \sigma_b y e_y, \tag{12}$$

wobei

$$r_y = h - a_y - \frac{e_y}{3}.$$

Die Formeln (11) und (12) stimmen mit den beiden ersten Gleichungen der Gruppe (9) überein, wenn

$$r_x = r_y = r$$

ist. Da sich die Größen  $r_x$  und  $r_y$  bei den üblichen Querschnittsabmes-



sungen und Spannungsverhältnissen nur wenig voneinander unterscheiden, so dürfen wir die vorstehende Bedingung als erfüllt annehmen und für den Mittelwert

$$r = \frac{r_x + r_y}{2} = h - \frac{a_x + a_y}{2} - \frac{e_x + e_y}{6} = \sim \frac{8}{9} h_m$$

ansetzen: unter

$$h_m = h - \frac{a_x + a_y}{2}$$

ist hierbei der Abstand der Mittelebene der kreuzweisen Bewehrung vom oberen Rande zu verstehen.

Da die Kräfte  $S_x$ ,  $S_y$  der Zugzone in dieser Mittelebene wirken, so folgt aus der Annahme  $r_x = r_y = r$ , daß es mit gleicher Annäherung zulässig ist, auch die Kräfte  $T$ , welche vom Unterschied zwischen den Normalspannungen benachbarter Querschnitte abhängig sind, in die gleiche Ebene zu verlegen.

Bedenkt man noch, daß jeder Zugkraft  $Z$  eine im Abstand  $r$  angreifende, gleichgroße Druckkraft  $D$  entspricht und daß somit alle Kräfte  $S$  und  $T$  paarweise auftreten, so erkennt man, daß es möglich ist, bei der Untersuchung der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  die Platte durch zwei parallele Scheiben zu ersetzen, welche im Abstände  $r$  voneinander

liegen und durch die gleichen, aber entgegengerichteten Spannkraft beansprucht werden. Diese Scheiben stellen gewissermaßen die Gurtungen der Platte dar.

Um zunächst die Spannungsverteilung im Zuggurt zu verfolgen, ist in Abb. 51 der Knotenpunkt, an dem sich zwei Stäbe 1, 2 mit den Querschnitten  $F_x$ ,  $F_y$  kreuzen, gezeichnet. Diese Stäbe liegen in Rich-

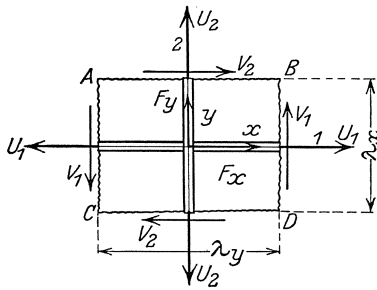


Abb. 51.

tung der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Als Abgrenzung des Knotenpunktbereichs ist ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  angenommen. Die Ränder dieses Bereiches werden durch die Spannkraft

$$U_1 = S_x \lambda_x,$$

$$V_1 = T \lambda_x,$$

$$U_2 = S_y \lambda_y,$$

$$V_2 = T \lambda_y$$

beansprucht. Die Zugkräfte  $U_1$  und  $U_2$  können unmittelbar durch die Bewehrung aufgenommen werden: hierdurch entstehen die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{U_1}{F_x} = \frac{S_x \lambda_x}{F_x},$$

$$\sigma_y = \frac{U_2}{F_y} = \frac{S_y \lambda_y}{F_y}.$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_x}{\lambda_x} &= f_x, \\ \frac{F_y}{\lambda_y} &= f_y, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

so ist auch

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{S_x}{f_x} = \frac{M_x}{r f_x}, \\ \sigma_y &= \frac{S_y}{f_y} = \frac{M_y}{r f_y}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wie werden die Kräfte  $V_1, V_2$  übertragen? Ist die Ribbildung soweit fortgeschritten, daß zwischen dem am Knotenpunkt anliegenden und dem benachbarten Beton eine Fuge längs der Linie  $ABCD$  klapft, so müssen diese Kräfte zunächst allein vom Eisen aufgenommen werden.

Die am Stabe 1 angreifenden Kräfte  $V_1$  haben, weil sie ein Kräftepaar bilden, das Bestreben, diesen Stab um den Knotenpunkt zu drehen (Abb. 52); ebenso wird durch  $V_2$  dem Stabe 2 eine Drehung erteilt. Da diese beiden Bewegungen entgegengerichtet sind, so wird der Beton in den Zwickeln  $EMG$  und  $HMF$  wie durch eine Schere gefaßt: er leistet aber gegen die Zerdrückung einen Widerstand und verhindert hierdurch die gegenseitige Drehung der Eisenstäbe. Die Scheibe  $ABCD$  verhält sich somit, als ob in Richtung  $EG$  und  $HF$  zwei Druckstreben vorhanden wären: ihr statisches Ebenbild ist das in Abb. 52a dargestellte Fachwerk mit den Stabkräften

$$\left. \begin{aligned} U'_1 &= V_2 = T \lambda_y, \\ U'_2 &= V_1 = T \lambda_x, \\ W &= \sqrt{U_1'^2 + U_2'^2} = T \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nimmt man als Seitenlängen  $\lambda_x, \lambda_y$  die Maschenweiten des Eisennetzes, so erhält der Zuggurt die in Abb. 53 veranschaulichte gleichmäßige fachwerkartige Gliederung. Man kann übrigens auch in jedem Fache an Stelle der beiden Streben, welche die Längs- und Querstäbe in der Mitte fassen, wie in Abb. 53 a angedeutet, einen einzigen Schrägstab zwischen den Ecken spannen: die Gurtkräfte  $U'_1, U'_2$  bleiben hierbei unverändert, die Stabkraft des Schrägstabes ist aber jetzt

$$R = 2W = 2T \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}. \quad (18)$$

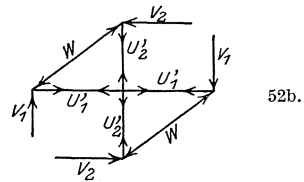
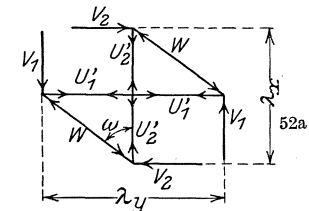
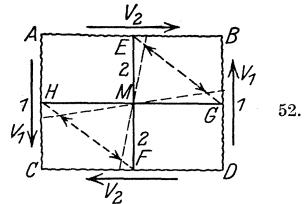


Abb. 52, 52a und 52b.

Wenn  $t$  sein Vorzeichen und hiermit zugleich, wie aus Abb. 52 b ersichtlich, die Kräfte  $V_1, V_2$  ihren Richtungssinn wechseln, so können auch die wirksamen Druckstreben  $W$  eine andere Lage und Richtung

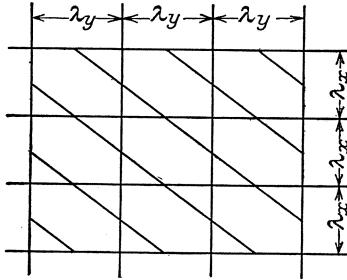


Abb. 53.

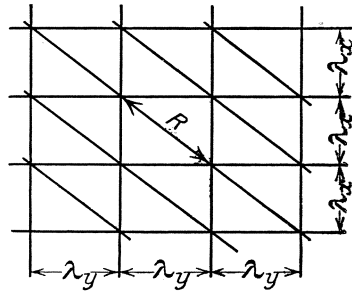


Abb. 53 a.

annehmen: Die Stabkräfte  $U'_1, U'_2$  behalten aber die gleiche Richtung und Größe, sind also vom Vorzeichen von  $t$  unabhängig. Wir dürfen daher ganz allgemein:

$$U'_1 = \pm T \lambda_y,$$

$$U'_2 = \pm T \lambda_x$$

setzen. Diese Stabkräfte rufen in den Eiseneinlagen die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{U'_1}{F_x} = \pm \frac{T \lambda_y}{f_x \lambda_x} = \pm \frac{t}{r f_x} \cdot \frac{\lambda_y}{\lambda_x} \\ \sigma_y &= \frac{U'_2}{F_y} = \pm \frac{T \lambda_x}{f_y \lambda_y} = \pm \frac{t}{r f_y} \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

hervor. Die Überlagerung der Kräfte  $U_1, U'_1$  bzw.  $U_2, U'_2$  und der zugehörigen Beanspruchungen liefert im Einklang mit den Formeln (16) und (19):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m_x}{r t_x}, \\ \sigma_y &= \frac{m_y}{r t_y}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x &= M_x \pm t \frac{\lambda_y}{\lambda_x}, \\ m_y &= M_y \pm t \frac{\lambda_x}{\lambda_y}. \end{aligned} \right\}$$

wobei

Herr Dr. Leitz, welcher zuerst die Mitwirkung und die Beanspruchung der Bewehrung bei der Aufnahme der Drillungsmomente in seiner Schrift über „Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegunszustand“ (Bautechnik 1923, S. 155) und neuerdings in zwei Aufsätzen

über den Stand der Berechnung kreuzweise bewehrter Platten (Bauing. 1925, S. 920) sowie über die Drillungsmomente bei kreuzweise bewehrten Platten (Bautechnik 1925, S. 717) untersucht hat, gibt für die Ersatzmomente die Formeln

$$m_x = M_x \pm t,$$

$$m_y = M_y \pm t$$

an. Sie stimmen mit unseren Gleichungen (20) nur dann überein, wenn  $\lambda_x = \lambda_y$  ist, d. h. wenn die Abstände der beiden Bewehrungen  $f_x$  und  $f_y$  in beiden Richtungen gleich sind. Ob tatsächlich die Beanspruchung der Bewehrung, wie aus den Leitzschen Formeln gefolgert werden müßte, von den Abständen  $\lambda_x, \lambda_y$  unabhängig oder aber im Sinne unserer Formel (20) vom Maschenverhältnis  $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$  abhängig ist, wird nur durch Versuche entschieden werden können.

Um die Anstrengung der Druckstreben des Fachwerkes zu bestimmen, betrachten wir wieder die in Abb. 54 dargestellte Scheibe. Die Stabkraft

$$R = 2 T \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

sei in die Teilkräfte

$$R' = R \cos \omega',$$

$$R'' = R \sin \omega'$$

zerlegt. Da

$$\omega' = 2\omega - \frac{\pi}{2}$$

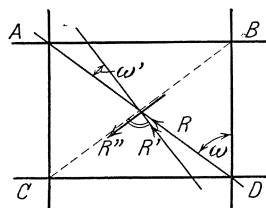


Abb. 54.

ist, so hat die zur Diagonale  $CB$  senkrecht stehende Teilkraft  $R'$  die Größe

$$R' = 2 T \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \sin(2\omega).$$

Setzen wir voraus, daß sie längs der Strecke

$$\overline{CB} = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

gleichmäßig verteilt ist, so entfällt auf die Breite  $b = 1$  der Druck

$$S_d = \frac{R'}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}} = 2 T \sin(2\omega) = \frac{2t}{r} \sin(2\omega). \quad (21)$$

Bezeichnet man mit  $\delta$  die Stärke der in den Maschen des Eisengeflechtes eingeklemmten Betonschale und nimmt man an, daß diese Schale gleichmäßig auf Druck beansprucht wird, so erhält man die Betonspannung

$$\sigma_b = \frac{S_d}{\delta} = \frac{2t}{r\delta} \sin(2\omega).$$

Wählt man

$$\delta = 2 \frac{a_x + a_y}{2} = a_x + a_y,$$

so ergibt sich für  $|\sin(2\omega)|_{\max} = 1$ ,  $r = \frac{8}{9} h_m$

$$\sigma_b = \frac{9}{4} \cdot \frac{t}{h_m(a_x + a_y)}. \tag{22}$$

Es bleibt uns jetzt noch zu prüfen, ob die unter der Voraussetzung

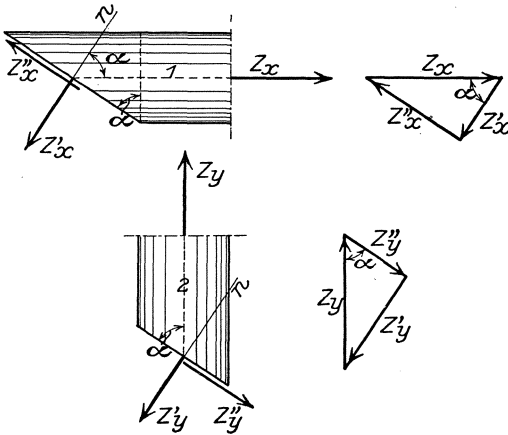


Abb. 55.

einer fachwerkartigen Gliederung des Zuggurttes ermittelten Eisenquerschnitte auch zur Aufnahme der Hauptspannungen der vollwandigen Scheibe ausreichen. Betrachten wir zunächst in Abb. 55 den Stab 1 mit dem Querschnitt

$$F_x = f_x \lambda_x$$

und der Stabkraft

$$Z_x = \sigma_x F_x = \sigma_x f_x \lambda_x.$$

Um seinen Anteil an den Normalspannungen  $\sigma_n$

eines Querschnittes, dessen Normale  $n$  dem Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse einschließt, zu bestimmen, werde  $Z_x$  in die Teilkräfte

$$Z'_x = Z_x \cos \alpha = \sigma_x f_x \lambda_x \cos \alpha,$$

$$Z''_x = -Z_x \sin \alpha = -\sigma_x f_x \lambda_x \sin \alpha$$

zerlegt. Der Abstand der Eisenstäbe  $l$ , in der Schrägrichtung gemessen, ist:

$$\lambda'_x = \lambda_x \sec \alpha.$$

Die auf die Breite  $b = 1$  bezogene Spannkraft dieser Stäbe in der  $n$ -Richtung ist also:

$$S_{1n} = \frac{Z'_x}{\lambda'_x} = \sigma_x f_x \cos^2 \alpha.$$

Für den rechtwinklig zu  $l$  liegenden Stab 2 mit dem Querschnitt  $F_y = f_y \lambda_y$  ergibt sich ebenso, wenn die Stabkraft

$$Z_y = \sigma_y F_y = \sigma_y f_y \lambda_y$$

in

$$Z'_y = Z_y \sin \alpha = \sigma_y f_y \lambda_y \sin \alpha,$$

$$Z''_y = Z_y \cos \alpha = \sigma_y f_y \lambda_y \cos \alpha$$

zerlegt und  $Z'_y$  auf der Strecke  $\lambda'_y = \lambda_y \csc \alpha$  verteilt wird, eine Spannkraft

$$S_{2n} = \frac{Z'_y}{\lambda'_y} = \sigma_y f_y \sin^2 \alpha.$$

Die Mittelkraft von  $S_{1n}$  und  $S_{2n}$  ist:

$$S_{en} = S_{1n} + S_{2n} = \sigma_x f_x \cos^2 \alpha + \sigma_y f_y \sin^2 \alpha.$$

Im Einklang mit den Gleichungen (20) folgt andererseits:

$$r S_{en} = M_{en} = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + t \left( \cos^2 \alpha \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \sin^2 \alpha \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right).$$

Da für die vollwandige Scheibe die Gleichgewichtsgleichung

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2t \cos \alpha \sin \alpha$$

gilt, so erkennt man, daß

$$M_{en} > M_n$$

sein wird, wenn

$$\cos^2 \alpha \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \sin^2 \alpha \frac{\lambda_x}{\lambda_y} > 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ist. Es muß also, wenn

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \tan \omega$$

gesetzt wird,

$$\cos^2 \alpha \tan \omega + \frac{\sin^2 \alpha}{\tan \omega} > 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

d. h.

$$\tan \omega > \tan \alpha$$

sein. Da in der Regel, wenn  $m_x > m_y$  ist, die zur Aufnahme der größeren Biegemomente  $m_x$  dienenden Stäbe 1 mindestens ebenso eng als die für die kleineren Momente  $m_y$  bestimmten Stäbe 2 angeordnet werden, so ist

$$\tan \omega \geq 1,$$

während, wie aus Gleichung (3) ersichtlich, der absolute Werte von  $\tan \alpha$  nur

$$\tan \alpha \leq 1$$

sein kann. Hiermit ist erwiesen, daß die Bedingung

$$M_{en} > M_n$$

erfüllt ist, d. h., daß die auf der Vorstellung einer fachwerkartigen Gliederung des Zuggurtes aufgebaute Berechnung ein größeres Moment der Bewehrung zuweist als dasjenige, welches in einer vollwandigen Scheibe entstehen würde. Der Unterschied zwischen  $M_{en}$  und  $M_n$  ist am kleinsten, wenn  $\lambda_x = \lambda_y$  ist: aus diesem Grunde empfiehlt es sich, tunlichst Geflechte mit quadratischen Maschen zu verwenden.

Wir haben bei den bisherigen Betrachtungen stillschweigend vorausgesetzt, daß sich die Richtungen 1 und 2 nicht mit den Hauptspannungsrichtungen decken. Ist dies jedoch der Fall, so wird  $t = 0$ ,  $m_x = M_x$

$m_y = M_y$  und somit für jede Schnittrichtung  $n$

$$M_{en} = M_n.$$

Die zweckmäßigste Lage einer rechtwinkligen kreuzweisen Bewehrung ist also stets diejenige, bei welcher die Eisenscharen den Hauptspannungen gleichgerichtet sind.

Eine Eigentümlichkeit verdient noch hervorgehoben zu werden: im Falle einer Schubbeanspruchung müßte aus den Gleichungen

$$\sigma_x = \frac{t}{r f_x} \frac{\lambda_y}{\lambda_x},$$

$$\sigma_y = \frac{t}{r f_y} \frac{\lambda_x}{\lambda_y}$$

gefolgert werden, daß  $\sigma_x$  wächst, wenn entweder der Abstand  $\lambda_x$  der Stäbe  $l$  verkleinert oder der Abstand  $\lambda_y$  der Stäbe vergrößert wird. Dieses Ergebnis würde von vornherein als richtig anerkannt werden können, wenn für die Aufnahme der Drillungsmomente keine andere Art von Fachwerken als die bisher benutzte in Betracht kommen würde: da aber bei gleicher Lage und Gestalt des Eisennetzes verschiedene Einstellungen der Druckstreben und somit auch andere Beanspruchungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  denkbar sind, so ist es wohl möglich, daß das in der Wirklichkeit wirksame Fachwerk eine günstigere Gliederung aufweist und daß die durch obige Formeln festgelegten Zusatzspannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  nicht erreicht werden. Eine eindeutige Darstellung der Spannungsverteilung mit Hilfe des Fachwerkes bietet besondere Schwierigkeiten, wenn eine der Beanspruchungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  oder beide zugleich Druckspannungen sind, weil dann kein Grund mehr vorliegt, die Stabkräfte  $U_1$ ,  $U_2$  lediglich der Bewehrung zuzuwenden: diese Kräfte können ganz oder zum Teil unmittelbar vom Beton übernommen werden und rufen Beanspruchungen hervor, die sich wiederum mit den Betonspannungen der Streben zusammensetzen. Je nach Lage und Richtung, welche für diese gedachten Streben gewählt sind, wechseln Größe und Wirkungssinn der resultierenden Spannungen, und es ist daher nicht leicht, in einwandfreier Weise die Anstrengung der Platte zu bestimmen.

Im Hinblick auf diese Schwierigkeiten erscheint es vorteilhafter, das zweite Verfahren mit den Ersatzmomenten  $m_x$ ,  $m_y$  der Querschnittsbemessung zugrunde zu legen: es ist an keine Voraussetzungen über das Vorzeichen von  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $t$  gebunden und liefert Werte, welche vom Maschenverhältnis  $\lambda_y : \lambda_x$  unabhängig sind. Wenn die Gleichungen (8) zur Ermittlung der Plattenstärke und der Bewehrungsmenge benutzt werden, so kann man dennoch, besonders bei schwachen Platten, um die Steifigkeit des Geflechtes zu erkennen, die Formel (22) heranziehen und somit auch die Nebenspannungen im Beton des Zuggurtes verfolgen.

§ 25. Die Verankerung der Randbewehrung.

Der Spannungszustand eines biegunsfreien Randes ist durch die Größen

$$M_x = M_y = 0,$$

$$t_{xy} = t_{yx} = t$$

gekennzeichnet. In den Schnittflächen, welche die Randebene unter 45° schneiden, treten die Hauptspannungsmomente

$$m_1 = +t,$$

$$m_2 = -t$$

auf. Die zugehörigen Gurtkräfte sind

$$S_1 = \pm m_1 \frac{b}{r} = \mp \frac{tb}{r},$$

$$S_2 = \pm m_2 \frac{b}{r} = \pm \frac{tb}{r}:$$

unter  $b$  ist hierbei die Breite der Schnittfläche zu verstehen. Das obere Vorzeichen gilt für den Ober-, das untere für den Untergurt, das positive für die Zug-, das negative für die Druckspannungen. Die Verteilung dieser Spannungen in der Ober- und Unterfläche der Platte ist durch Abb. 56 veranschaulicht.

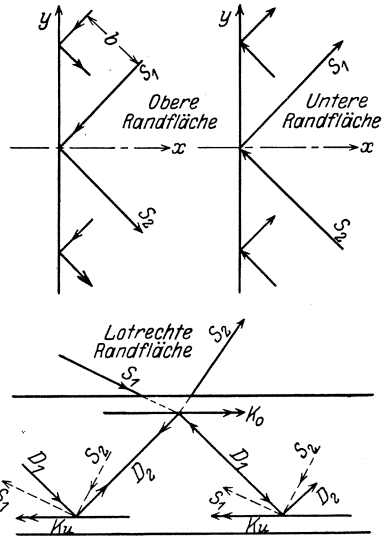


Abb. 56.

Die oberen Gurtkräfte lassen sich zu einer dem Rande parallelen Mittelkraft

$$K_0 = 2 S_2 \cos \alpha = \frac{tb}{r} \sqrt{2}$$

vereinigen, ebenso entsteht aus den Untergurtkräften die Mittelkraft

$$K_u = 2 S_1 \cos \alpha = \frac{tb}{r} \sqrt{2}.$$

In den lotrechten Randflächen treten wiederum schräge Kräfte  $D_1, D_2$  auf, welche mit  $K_0$  und  $K_u$  im Gleichgewicht stehen.

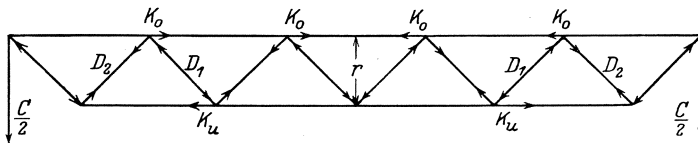


Abb. 57.

Denkt man sich die Randscheibe wie in Abb. 57 angedeutet, durch ein Parallelfachwerk von der Höhe  $r$  ersetzt, dessen Diagonalen unter



45° gegen die Gurtstäbe auf- und absteigen, so ist es mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen leicht festzustellen, daß den Größen  $K$  die Stabkräfte

$$D_1 = -D_2 = -\frac{K}{\sqrt{2}} = -\frac{tb}{r}$$

zugeordnet sind. Hieraus erkennt man, daß die schrägen Stäbe  $S$  und  $D$  der drei angrenzenden Randflächen durch die gleiche, wenn auch verschieden gerichtete Spannkraft  $\frac{tb}{r}$  beansprucht werden<sup>1</sup>.

Würden die Eiseneinlagen im Obergurt der Richtung  $S_2$ , in den lotrechten Randflächen der Richtung  $D_2$ , im Untergurt der Richtung  $S_1$  folgen, so würde die gleiche Stärke für die drei Richtungen genügen: der Stab  $S_2$  müßte dann ohne Unterbrechung über  $D_2$  nach  $S_1$ , also vom Ober- nach dem Untergurt geführt werden. Eine derartige, mehrfache Aufbiegung der Eiseneinlagen in verschiedenen Ebenen ist nicht leicht herzustellen und bereitet auch beim Verlegen Schwierigkeiten.

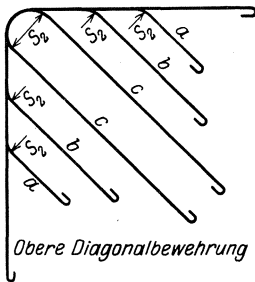


Abb. 58.

Es fragt sich daher, ob es nicht zweckmäßig wäre, die Gurtstäbe in der eigenen Ebene unmittelbar zu verankern. Die Abb. 58 zeigt eine derartige Verankerung: sie besteht aus Randstäben, die an den Plattenecken rechtwinklig umgebogen und deren Enden in Richtung der schrägen Hauptzugspannungen aufgebogen sind. Die Verteilung der Aufbiegung muß, wie bei der Schubsicherung eines Balkens, dem Diagramm der Drillungsmomente angepaßt werden.

Bei einer ringsum frei aufliegenden Platte erreicht die Stabkraft der Randstäbe in den Ecken ihren Größtwert

$$R = t_A \frac{l}{2r}.$$

Um diese Kraft aufzunehmen, ist ein Eisenquerschnitt

$$F_e = \frac{R}{\sigma_e} = t_A \frac{l}{2r\sigma_e}$$

erforderlich. Wählt man für  $F_e$  eine größere Anzahl von Stäben mit kleinem Querschnitt, so ist man wohl in der Lage, durch die Aufbiegungen alle schrägen Zugspannungen mit dem geringsten Eisenaufwand aufzunehmen. Die starke Anhäufung der winkelförmigen Bügel im Bereiche der Ecken ist jedoch für das Gefüge des Betons unter Umständen ein Nachteil.

<sup>1</sup> Auf diesen Zusammenhang hat Leitz in seinem Aufsatz: Über die Eckenwirkung bei frei aufliegenden Platten in „Beton und Eisen“ 1928, H. 22 hingewiesen.

Im Untergurt wird sich die Verwendung dieser Bügel nur dann empfehlen, wenn auch die Hauptbewehrung diagonal gerichtet ist. Wird die letztere parallel den Rändern angeordnet, so wird man am zweckmäßigsten auch für die Randdrillungsmomente eine seitenparallele Bewehrung vorziehen.

Um die Beanspruchung der letzteren festzustellen, habe ich in Abb. 59 im Anschluß an Abb. 52 die Spannungsverteilung in einem Knotenpunkt eines Randstabes dargestellt. Die Spannkraft des zum Rande senkrecht liegenden Eisenstabes ( $I$ ) ist nach Gleichung (17):

$$U'_1 = T \lambda_y,$$

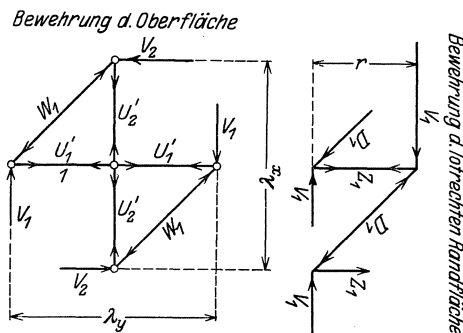


Abb. 59.

der Beton der Strebe wird hingegen durch die Stabkraft

$$W_1 = T \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

beansprucht. Die Mittelkraft aus  $U'_1$  und  $W_1$ , nämlich

$$V_1 = T \lambda_x$$

ist dem Rande parallel gerichtet und steht wiederum mit den in den lotrechten Randflächen wirkenden Stabkräften  $D_1$  und  $Z_1$  im Gleichgewicht. Die zugehörigen Werte sind

$$D_1 = V_1 \sqrt{2},$$

$$Z_1 = V_1.$$

Für  $\lambda_x = \lambda_y = b$  ergibt sich insbesondere:

$$U'_1 = Z_1 = T b = \frac{t b}{r},$$

$$W_1 = D_1 = T \lambda \sqrt{2} = \frac{t b}{r} \sqrt{2}.$$

Hieraus erkennt man, daß die zum Rande senkrecht gerichteten Gurtstäbe ( $I$ ) und der lotrechte Randstab, welcher die übereinanderliegenden Gurtstäbe miteinander verbindet, durch die gleiche Spannkraft beansprucht werden. Ebenso zeigen die Betonstreben der lotrechten und der wagerechten Randflächen die gleiche Stabkraft.

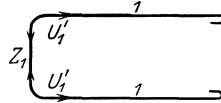


Abb. 60.

Wir können daher, wie in Abb. 60 angedeutet, die Gurtstäbe durch eine bügelartige Schleife miteinander verbinden.

Als Beispiel für die Ausbildung einer Platte mit drillungsfester, seitenparalleler Bewehrung zeige ich in Abb. 61 eine vom Verfasser

für die Versuche des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton entworfene, ringsum frei aufliegende quadratische Platte von 3,0 m Spannweite und

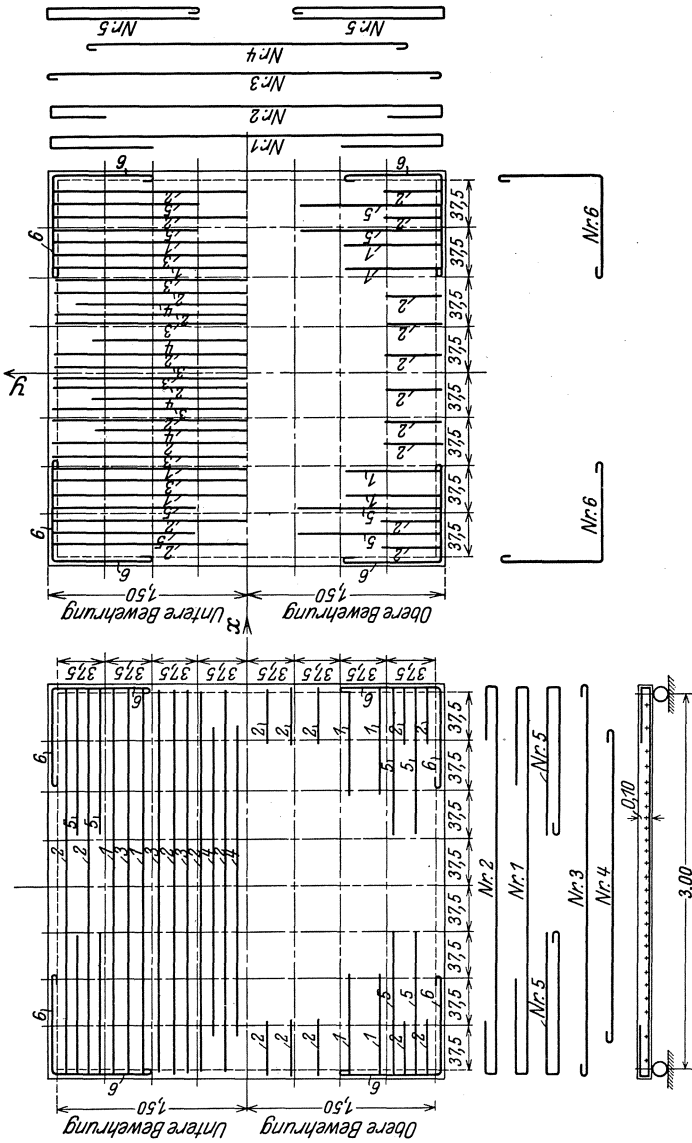


Abb. 61.

10 cm Stärke. Sie ist für eine Nutzlast von 750 kg/m<sup>2</sup> und die üblichen Beanspruchungen

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

bemessen und hat eine Bruchbelastung von 4100 kg/m getragen, somit einen außerordentlich hohen Sicherheitsgrad erwiesen.

Die bügelartige Verknüpfung zwischen den Ober- und Untergurtstäben wird sich erübrigen, wenn die Decke mit dem Randbalken fest verbunden ist. In diesem Falle empfiehlt es sich, wie aus Abb. 62 ersichtlich, entweder die Gurtstäbe im Balkensteg oder die Balkenbügel in der Platte zu verankern. Diese einfache Anordnung wird meistens um so mehr ausreichen, als durch den biegungsfesten Anschluß zwischen Randträger und Decke die Drillungsmomente wesentlich herabgemindert oder gar vollständig ausgeschaltet werden.

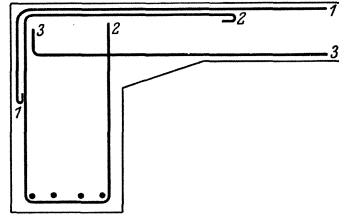


Abb. 62.

Es sei schließlich bemerkt, daß die schiefen Hauptzugspannungen erst dann von den Eiseneinlagen aufgenommen werden müssen, wenn die Zugfestigkeit des Betons überschritten ist. Eine zusätzliche Bewehrung für die Drillungsmomente ist also nur für dasjenige Gebiet erforderlich, in welchem

$$\sigma_n = \frac{6 M_n}{h^2} \geq \sigma_{bz}$$

oder

$$M_n \geq \frac{h^2}{6} \sigma_{bz}$$

ist: unter  $\sigma_{bz}$  ist hierbei die für den Beton zulässige Biegungszugspannung zu verstehen.

Wählt man als zulässige Beanspruchung  $\sigma_{bz} = 6 \text{ kg/cm}^2$ , so erhält man beispielsweise für eine 14 cm starke Platte den Grenzwert

$$M_0 = \frac{14^2}{6} \cdot 6 = 196 \frac{\text{kg/cm}}{\text{cm}}$$

Entsprechend dem in Abb. 63 dargestellten Diagramm der Randdrillungsmomente ist eine

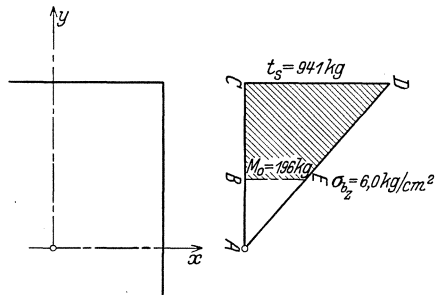


Abb. 63.

Schubsicherung lediglich für die schraffierte Fläche BCDE notwendig. Da jedoch in der Umgebung der Randmitte ein Überschuß an Bewehrung im unteren Rand meistens vorhanden ist, so kann man durch Aufbiegungen auch den oberen Rand im Bereiche ABE in erhöhtem Maße sichern.

### § 26. Beispiel für die Querschnittsbemessung der kreuzweisen Bewehrung einer drillungsfesten Platte.

Um die praktische Durchführung der Querschnittsbemessung mit Hilfe der Ersatzmomente zu erläutern, wähle ich als Beispiel die in § 18 behandelte, frei aufliegende Platte mit den Spannweiten

$$l_x = 4,0 \text{ m,}$$

$$l_y = 5,0 \text{ m}$$

und der Belastung

$$p = 1,0 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}.$$

Für den Querschnitt  $JK$  (Abb. 29) im Abstand  $x = \frac{1}{4} l_x$  entnehme ich aus den Schaulinien  $c$  und  $e$  die folgenden Werte:

$$y = 0, \quad M_x = 0,663 \text{ t}, \quad M_y = 0,423 \text{ t}, \quad t_{xy} = 0,0,$$

$$y = \frac{1}{10} l_y, \quad M_x = 0,663 \text{ t}, \quad M_y = 0,423 \text{ t}, \quad t_{xy} = -0,188 \text{ t},$$

$$y = \frac{2}{10} l_y, \quad M_x = 0,621 \text{ t}, \quad M_y = 0,397 \text{ t}, \quad t_{xy} = -0,376 \text{ t},$$

$$y = \frac{3}{10} l_y, \quad M_x = 0,497 \text{ t}, \quad M_y = 0,317 \text{ t}, \quad t_{xy} = -0,471 \text{ t},$$

$$y = \frac{4}{10} l_y, \quad M_x = 0,290 \text{ t}, \quad M_y = 0,185 \text{ t}, \quad t_{xy} = -0,471 \text{ t},$$

$$y = \frac{5}{10} l_y, \quad M_x = 0,0, \quad M_y = 0,0, \quad t_{xy} = -0,471 \text{ t}.$$

Mit Hilfe der Formeln (8) erhalte ich zunächst die Größen

$m_{x_{\max}} = 0,663 \text{ t},$	$m_{x_{\min}} = 0,663 \text{ t}$	für $y = 0,$
0,816	0,510	$y = \frac{1}{10} l_y,$
0,982	0,260	$y = \frac{2}{10} l_y,$
0,963	0,031	$y = \frac{3}{10} l_y,$
0,758	-0,178	$y = \frac{4}{10} l_y,$
0,471	-0,471	$y = \frac{5}{10} l_y.$

Wende ich hingegen die Leitzsche Formel

$$m_x = M_x \pm t$$

an, so ergibt sich

$m_{x_{\max}} = 0,663 t,$	$m_{x_{\min}} = 0,663 t$	für $y = 0,$
0,851	0,475	$y = \frac{1}{10} l_y,$
0,997	0,245	$y = \frac{2}{10} l_y,$
0,968	0,026	$y = \frac{3}{10} l_y,$
0,761	-0,181	$y = \frac{4}{10} l_y,$
0,471	-0,471	$y = \frac{5}{10} l_y.$

Diese Gegenüberstellung zeigt, daß sowohl die Spitzen- wie auch die Durchschnittswerte  $m_x$  in der ersten Berechnung kleiner als in der zweiten sind. Da die Unterschiede jedoch verhältnismäßig geringfügig sind, erscheint es zweckmäßiger, die ungünstigeren, aber in der Handhabung einfacheren Formeln von Leitz zu benutzen.

In § 3, S. 13 haben wir bereits unter Zugrundelegung der zulässigen Beanspruchungen

$$\begin{aligned} \sigma_b &= 40 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_e &= 1200 \text{ ,,} \end{aligned}$$

und der Hauptspannungsmomente für die Mittelquerschnitte die Plattenstärke  $h = 14,0 \text{ cm}$  mit den Nutzhöhen

$$\begin{aligned} h - a_x &= 12,5 \text{ cm}, \\ h - a_y &= 11,5 \text{ ,,} \end{aligned}$$

bestimmt.

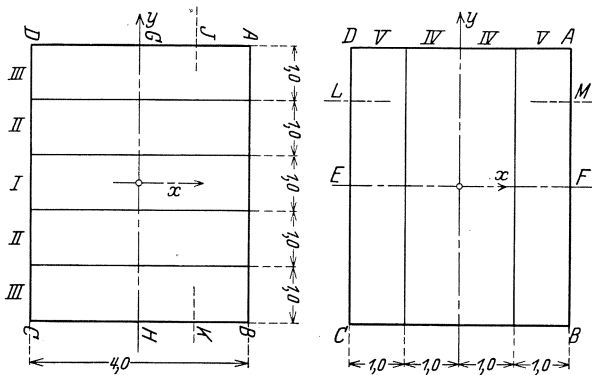


Abb. 64.

Wird die Platte, wie aus Abb. 64 ersichtlich, in Streifen von je 100 cm Breite zerlegt, so erhalten wir für die Bewehrung des Querschnittes  $J-K$  die folgenden Werte:

Streifen *I*:

$$m_x = 100 \cdot 663 = 66\,300 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{66\,300}{1200 \cdot 12,5} = 4,97 \text{ cm}^2,$$

Streifen *II*:

$$m_x = 100 \cdot 997 = 99\,700 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{99\,700}{1200 \cdot 12,5} = 7,48 \text{ cm}^2,$$

Streifen *III*:

$$m_x = 100 \cdot 761 = 76\,100 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{76\,100}{1200 \cdot 12,5} = 5,71 \text{ cm}^2.$$

Im ganzen ist für die volle Querschnittsbreite  $J-K$ 

$$F_x = 4,97 + 2 \cdot 7,48 + 2 \cdot 5,71 = 31,35 \text{ cm}^2$$

erforderlich. Eine obere Bewehrung kommt nur für den Randstreifen *III* mit den Werten

$$m_x = -100 \cdot 181 = -18\,100 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f'_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{18\,100}{1200 \cdot 12,5} = 1,36 \text{ cm}^2$$

in Betracht. Eine ähnliche Rechnung liefert für den Mittelschnitt  $GH$  auf Grund der in Abb. 29a angegebenen Hauptspannungsmomente die Werte

$$m_x = 100 \cdot 884 = 88\,400 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{88\,400}{1200 \cdot 12,5} = 6,63 \text{ cm}^2$$

für Streifen *I*,

$$m_x = 100 \cdot 828 = 82\,800 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{82\,800}{1200 \cdot 12,5} = 6,21 \text{ cm}^2$$

für Streifen *II*,

$$m_x = 100 \cdot 387 = 38\,700 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{38\,700}{1200 \cdot 12,5} = 2,9 \text{ cm}^2$$

für Streifen *III*,

oder im ganzen

$$F_x = 6,63 + 2 \cdot 6,21 + 2 \cdot 2,9 = 24,85 \text{ cm}^2.$$

Betrachten wir schließlich den Rand  $AB$ , dessen Hauptspannungsmomente aus Abb. 29i zu entnehmen sind, so finden wir

$$m_x = 0, \quad f_x = f'_x = 0$$

für Streifen *I*,

$$m_x = \pm 100 \cdot 752 = \pm 75\,200 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = f'_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{75\,200}{1200 \cdot 12,5} = 5,64 \text{ cm}^2$$

für Streifen *II*,

$$m_x = \pm 100 \cdot 941 = \pm 94\,100 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_x = f'_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{94\,100}{1200 \cdot 12,5} = 7,06 \text{ cm}^2$$

für Streifen *III*,

mithin insgesamt

$$F_x = F'_x = 2 \cdot 5,64 + 2 \cdot 7,06 = 25,4 \text{ cm}^2.$$

Eine ähnliche Rechnung liefert für die zur  $y$ -Achse parallel liegenden Streifen  $IV$  und  $V$  unter Zugrundelegung der Nutzhöhe  $h - a_y = 11,5$  cm mit Hilfe der in Abb. 29 b, f und k angegebenen Ersatzmomente der Reihe nach die folgenden Werte:

$\alpha$ ) Querschnitt  $EF$ .

Streifen  $IV$ :

$$m_y = 100 \cdot 529 = 52\,900 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{52\,900}{1200 \cdot 11,5} = 4,31 \text{ cm}^2,$$

Streifen  $V$ :

$$m_y = 100 \cdot 247 = 24\,700 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{24\,700}{1200 \cdot 11,5} = 2,01 \text{ cm}^2,$$

$$F_y = 2(4,31 + 2,01) = 12,64 \text{ cm}^2.$$

$\beta$ ) Querschnitt  $LM$ .

Streifen  $IV$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{y_{\max}} = 100 \cdot 632 = 63\,200 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{63\,200}{1200 \cdot 11,5} = 5,15 \text{ cm}^2, \\ m_{y_{\min}} = 100 \cdot 162 = 16\,200 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f'_y = 0, \end{array} \right.$$

Streifen  $V$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{y_{\max}} = 100 \cdot 750 = 75\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{75\,000}{1200 \cdot 11,5} = 6,11 \text{ cm}^2, \\ m_{y_{\min}} = -100 \cdot 380 = -38\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f'_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{38\,000}{1200 \cdot 11,5} = 3,1 \text{ cm}^2, \end{array} \right.$$

$$F_y = 2 \cdot (5,15 + 6,11) = 22,52 \text{ cm}^2.$$

$\gamma$ ) Querschnitt  $AD$ .

Streifen  $IV$ :

$$m_y = \pm 100 \cdot 235 = \pm 23\,500 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = f'_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{23\,500}{1200 \cdot 11,5} = 1,91 \text{ cm}^2,$$

Streifen  $V$ :

$$m_y = \pm 100 \cdot 705 = \pm 70\,500 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad f_y = f'_y = \frac{9}{8} \cdot \frac{70\,500}{1200 \cdot 11,5} = 5,74 \text{ cm}^2,$$

$$F_y = F'_y = 2(1,91 + 5,75) = 15,3 \text{ cm}^2.$$

Um schließlich noch festzustellen, wieweit die obere Bewehrung reichen soll, benutzen wir den auf S. 119 ermittelten Grenzwert

$$M_0 = \frac{h^2 \sigma_{bz}}{6} = \frac{14^2}{6} \cdot 6 = 196 \text{ kg}.$$

Die nachstehende Tafel 5 enthält für alle Streifen und Querschnitte die erforderlichen und die vorhandenen Bewehrungsmengen. Die Verteilung der Eiseneinlagen ist in Abb. 65 dargestellt. Um die Ausbildung



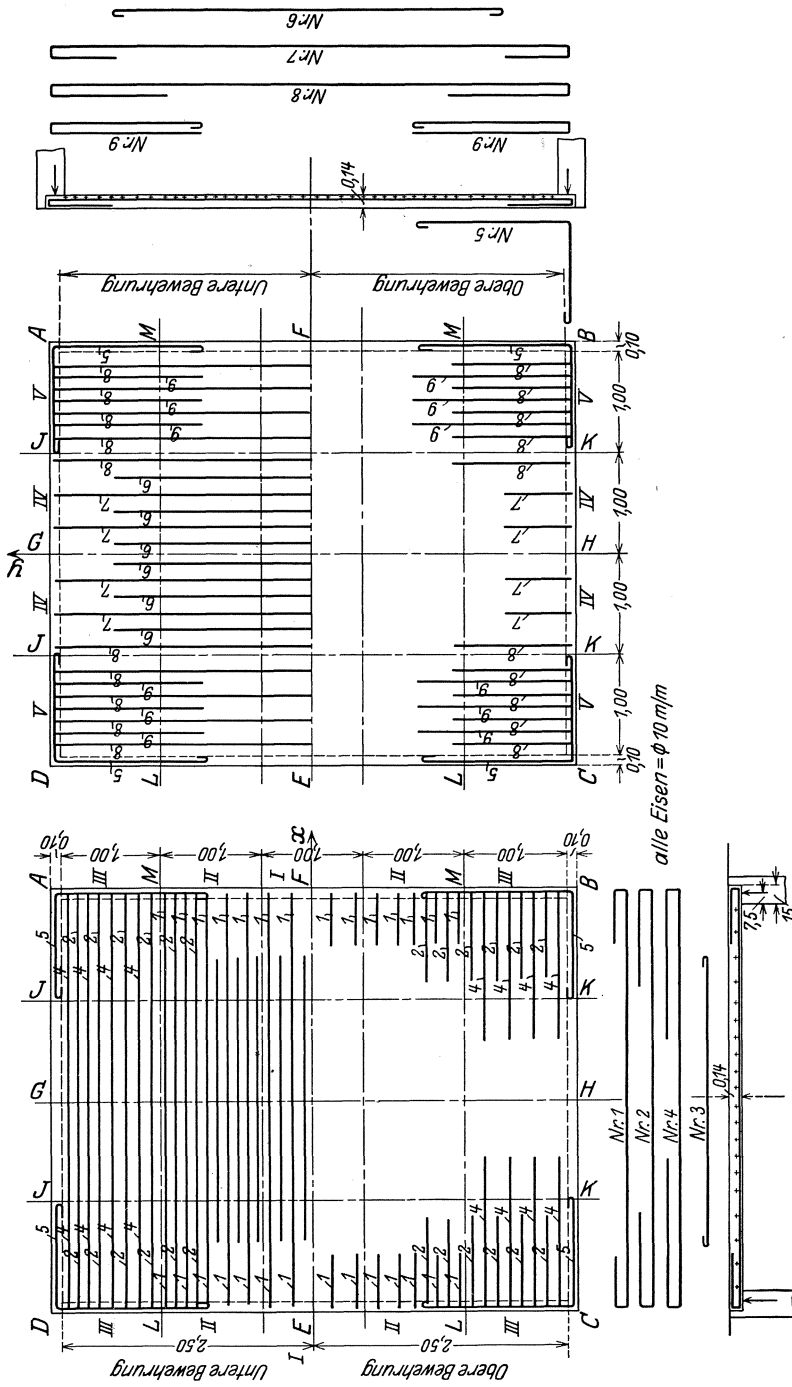


Abb. 65.

Tafel 5. Bewehrungsplan für die Platte nach Abb. 65.  
A. Richtung  $x \rightarrow$

Streifen	Querschnitt $GH$		Querschnitt $JK$		Querschnitt $AB$	
	erf. $f_x$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_x$ cm <sup>2</sup>	erf. $f_x$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_x$ cm <sup>2</sup>	erf. $f_x$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_x$ cm <sup>2</sup>
I	6,63	8 $\phi$ 10 = 6,28	4,97	8 $\phi$ 10 = 6,28	—	4 $\phi$ 10 = 3,14
II	6,21	10 $\phi$ 10 = 7,85	7,48	10 $\phi$ 10 = 7,85	5,64	7 $\phi$ 10 = 5,50
III	2,90	8 $\phi$ 10 = 6,28	5,51	8 $\phi$ 10 = 6,28	7,06	9 $\phi$ 10 = 7,06
$F_x$	24,85	44 $\phi$ 10 = 34,56	31,35	44 $\phi$ 10 = 34,56	25,40	36 $\phi$ 10 = 28,26
I	—	—	—	—	—	4 $\phi$ 10 = 3,14
II	—	—	—	—	5,64	7 $\phi$ 10 = 5,50
III	—	—	1,36	4 $\phi$ 10 = 3,14	7,06	9 $\phi$ 10 = 7,06

B. Richtung  $y \uparrow$

Streifen	Querschnitt $EF$		Querschnitt $LM$		Querschnitt $AD$	
	erf. $f_y$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_y$ cm <sup>2</sup>	erf. $f_y$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_y$ cm <sup>2</sup>	erf. $f_y$ cm <sup>2</sup>	vorh. $f_y$ cm <sup>2</sup>
IV	4,31	6 $\phi$ 10 = 4,71	5,15	6 $\phi$ 10 = 4,71	1,91	3 $\phi$ 10 = 2,36
V	2,01	4 $\phi$ 10 = 3,14	6,11	8 $\phi$ 10 = 6,28	5,74	8 $\phi$ 10 = 6,28
$F_y$	12,64	20 $\phi$ 10 = 15,7	22,52	28 $\phi$ 10 = 21,98	15,30	22 $\phi$ 10 = 17,28
IV	—	—	—	—	1,91	3 $\phi$ 10 = 2,36
V	—	—	3,1	4 $\phi$ 10 = 3,14	5,74	8 $\phi$ 10 = 6,28

der Bewehrung zu vereinfachen, sind über das erforderliche Maß hinaus die Eisenquerschnitte reichlich bemessen worden.

Eine genauere Anpassung der Bewehrung an den Verlauf der Hauptspannungsmomente wird sich in wirtschaftlicher Hinsicht nur bei großen Spannweiten und Belastungen rechtfertigen. In den meisten Fällen, insbesondere für die Zwecke der Veranschlagung wird es vollständig genügen, die Querschnittsbemessung lediglich mit Hilfe der auf S. 61 angegebenen Grundformeln für die Ersatzmomente oder noch einfacher nach dem einzigen Wert

$$m_x = \frac{1}{2} (M_{x_{\max}} \pm t_s),$$

bzw.

$$m_y = \frac{1}{2} (M_{y_{\max}} \pm t_s)$$

durchzuführen.

In dem vorliegenden Fall ist beispielsweise

$$m_x = \frac{1}{2} (0,884 + 0,941) = 0,9125 \frac{\text{tm}}{\text{m}}.$$

Für die Breite  $b = l_y = 500$  cm ergibt sich insgesamt

$$\text{erf. } F_x = \frac{9}{8} \cdot \frac{500 \cdot 912,5}{1200 \cdot 12,5} = 34,2 \text{ cm}^2.$$

Diesem Wert entspricht eine Bewehrung aus  $44 \phi 10 = 34,54 \text{ cm}^2$ , also der gleiche Querschnitt wie bereits in Tafel 5 vorgesehen.

Wird somit die Bewehrung der Hauptquerschnitte nach der einzigen Formel (73) bestimmt, so wird es keine Schwierigkeiten bereiten, durch eine Verminderung der Hauptbewehrung in der Nähe der Randmitte und durch eine entsprechende Verstärkung in der Nähe der Ecken ohne Vergrößerung des Eisenbedarfes eine ausreichende Sicherung der Randstreifen zu erzielen.

In dem vorstehenden Beispiel sind die gleichen zulässigen Beanspruchungen wie bei einer Decke, die nur in einer Richtung gespannt ist, der Querschnittsbemessung zugrunde gelegt worden. Die bisher vorliegenden Ergebnisse der neuen Plattenversuche des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton lassen jedoch erkennen, daß bei gleichen rechnerischen Spannungen die kreuzweise bewehrten Platten eine beträchtliche höhere Sicherheit als die einfach bewehrten gewährleisten. Wenn dieser Umstand durch eine entsprechende Steigerung der zulässigen Beanspruchungen berücksichtigt wird, so wird die kreuzweise bewehrte Decke infolge ihrer technischen und wirtschaftlichen Vorteile zu den wertvollsten Konstruktionselementen des Eisenbetonbaues zählen und in größerem Ausmaße wie bisher Beachtung und Verwendung finden.

**Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten** unter besonderer

Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecken. Von Dr.-Ing. H. Marcus, Direktor der HUTA, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft, Breslau. Mit 123 Textabbildungen. VIII, 368 Seiten. 1924. RM 21.—; gebunden RM 23.10

---

**Die elastischen Platten.** Die Grundlagen und Verfahren zur Berechnung ihrer Formänderungen und Spannungen, sowie die Anwendungen der Theorie der ebenen zweidimensionalen elastischen Systeme auf praktische Aufgaben. Von Professor Dr.-Ing. A. Nádai, Göttingen. Mit 187 Abbildungen im Text und 8 Zahlentafeln. VIII, 326 Seiten. 1925. Gebunden RM 24.—

---

**Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke.** Von Dr.-Ing. Otto Pichler. Mit 6 Textabbildungen. IV, 60 Seiten. 1928. RM 4.50

---

**Kreisplatten auf elastischer Unterlage.** Theorie zentralsymmetrisch belasteter Kreisplatten und Kreisringplatten auf elastisch nachgiebiger Unterlage, mit Anwendungen der Theorie auf die Berechnung von Kreisplattenfundamenten und die Einspannung in elastische Medien. Von Privatdozent Dr.-Ing. Ferdinand Schleicher, Karlsruhe. Mit 52 Textabbildungen. X, 148 Seiten. 1926. RM 13.50; gebunden RM 15.—

---

**Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten** mit Hilfe von krummlinigen Koordinaten und deren Anwendung auf die Pilzdecke. Von Dr.-Ing. Wilhelm Flügge. Mit 25 Textabbildungen. V, 55 Seiten. 1928. RM 5.—

---

**Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung.** Von Oberingenieur Koloman Hajnal-Kónyi. Mit 26 Abbildungen im Text und zahlreichen Tabellen. V, 137 Seiten. Erscheint im August 1929.

---

**Durchlaufende Eisenbetonkonstruktionen in elastischer Verbindung mit den Zwischenstützen** (Plattenbalkendecken und Pilzdecken). Einflußlinientafeln und Zahlentafeln für die maximalen Biegemomente und Auflagerdrücke infolge ständiger und veränderlicher Belastung unter Berücksichtigung der Stützeinspannung (Winklersche Zahlen) nebst Anwendungsbeispielen von Baurat Dr.-Ing. F. Kann, Wismar. Mit 47 Textabbildungen. V, 72 Seiten. 1926. RM 7.20

---

**Bemessungstafeln für Eisenbetonkonstruktionen.** Tafeln zum Ablesen der Momente, der Bewehrungen für einfach und doppelt bewehrte Platten, Balken und Plattenbalken bei Verwendung von gewöhnlichem und hochwertigem Zement und Eisen bzw. Stahl, mit Berücksichtigung der Spannungen im Steg, und Tafeln für das sofortige Ablesen von Stützenquerschnitten und Bewehrungen auch bei Knickgefahr. Von Baurat Paul Gödel, Beratender Ingenieur in Leipzig. IV, 231 Seiten. 1927. Gebunden RM 22.—

---

**Die Grundzüge des Eisenbetonbaues.** Von Geh. Hofrat Professor Dr.-Ing. e. h. Max Foerster, Dresden. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 183 Textabbildungen. XII, 570 Seiten. 1926. Gebunden RM 25.50

**Strenge Untersuchungen am Rhombenfachwerk.** Von Privatdozent Dr.-Ing. Paul Christiani, Aachen. Mit 17 Textabbildungen und 18 Zahlentafeln. IV, 52 Seiten. 1929. RM 4.—

---

**Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage.** Mit Anwendungsbeispielen von Professor Dr.-Ing. L. Mann, Breslau. Mit 76 Textabbildungen. VI, 123 Seiten. 1927. RM 9.—; gebunden RM 10.50

---

**Räumliche Vieleckrahmen mit eingespannten Füßen** unter besonderer Berücksichtigung der Windbelastung. Von Dr.-Ing. Alfred Millies. Mit 53 Textabbildungen. VI, 96 Seiten. 1927. RM 12.—

---

**Mehrteilige Rahmen.** Verfahren zur einfachen Berechnung von mehrstieligen, mehrstöckigen und mehrteiligen geschlossenen Rahmen (Rahmenbalkenträgern). Von Ingenieur Gustav Spiegel. Mit 107 Textabbildungen. VII, 191 Seiten. 1920. RM 7.—

---

**Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues.** Von Ingenieur P. Ernst Glaser. Mit 112 Textabbildungen. VIII, 132 Seiten. 1919. RM 4.50

---

**Der elastisch drehbar gestützte Durchlaufbalken (durchlaufende Rahmen).** Gebrauchsfertige Zahlen für Einflußlinien und Größtwerte der Momente. Von Dr.-Ing. H. Craemer, Düsseldorf. Mit 7 Textabbildungen und 18 Zahlentafeln. IV, 28 Seiten. 1927. RM 5.10

---

**Der durchlaufende Träger über ungleichen Öffnungen.** Theorie, gebrauchsfertige Formeln, Zahlenbeispiele. Von Professor Dr.-Ing. Emil Kammer, Darmstadt. Mit 303 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. VIII, 269 Seiten. 1926. RM 25.50; gebunden RM 27.—

---

**Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft.** Von Professor Dr.-Ing. Fukuhei Takabeya. Mit 28 Textabbildungen und 2 Formeltafeln. IV, 52 Seiten. 1924. RM 3.—

---

**Statik der Vierendeelträger.** Von Dr.-Ing. Karl Krisko, Graz. Mit 185 Textfiguren und 11 Tabellen. X, 288 Seiten. 1922. RM 13.—; gebunden RM 15.—

**Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik.** Von Dr.-Ing. Fr. Bleich und Professor Dr.-Ing. E. Melan, Wien. Mit 74 Abbildungen im Text. VII, 350 Seiten. 1927. Gebunden RM 28.50

---

**Die Statik des ebenen Tragwerkes.** Von Professor Martin Grüning, Hannover. Mit 434 Textabbildungen. VII, 706 Seiten. 1925. Gebunden RM 45.--

---

**Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung.** Von Professor Martin Grüning, Hannover. Mit 6 Textabbildungen. IV, 30 Seiten. 1926. RM 3.30

---

**Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes.** Von Dr.-Ing. Friedrich Bleich. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 117 Abbildungen im Text. VI, 220 Seiten. 1925. Gebunden RM 15.--

---

**Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.** Von Dr. H. Heimann. Mit 20 Abbildungen im Text. IV, 24 Seiten. 1928. RM 2.50

---

**Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke.** Elementares Lehrbuch. Von H. Buchholz. Mit 303 Textabbildungen. VI, 212 Seiten. 1921. RM 8.--

---

**Die Deformationsmethode.** Von Professor Dr. techn. h. c. A. Ostfeld, Kopenhagen. Mit 42 Abbildungen. VI, 118 Seiten. 1926. RM 10.--

---

**Die Sicherheit der Bauwerke** und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen. Von Dr.-Ing. Max Mayer, Duisburg. Mit 3 Textabbildungen. VI, 66 Seiten. 1926. RM 2.70

---

**Gewölbetabellen.** Vereinfachungen für Entwurf und Berechnung statisch bestimmter und unbestimmter Gewölbe. Von Regierungsbaumeister a. D. Professor Dr.-Ing. F. Kögler. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 29 Textabbildungen. VIII, 104 Seiten. 1923. RM 7.50

**Festigkeitslehre.** Von George Fillmore Swain, Professor an der Harvard Universität, New York. Autorisierte Übersetzung von Dr.-Ing. Alfred Mehmel, Hannover. Mit 463 Textabbildungen. XVIII, 630 Seiten. 1928. Gebunden RM 34.—

---

**Festigkeitslehre.** Von Professor S. Timoshenko und Masch.-Ingenieur J. M. Lessells. Ins Deutsche übertragen von Dr. J. Malkin, Ingenieur. Mit 391 Abbildungen im Text. XVIII, 484 Seiten. 1928. Gebunden RM 28.—

---

**Festigkeitslehre für Ingenieure.** Von Studienrat Dipl.-Ing. Hans Winkel †. Nach dem Tode des Verfassers bearbeitet und ergänzt von Dr.-Ing. Kurt Lachmann. Mit 363 Textabbildungen. VII, 494 Seiten. 1927. Gebunden RM 26.—

---

**Elastizität und Festigkeit.** Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von C. Bach und R. Baumann, Professoren an der Techn. Hochschule Stuttgart. Neunte, vermehrte Auflage. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 2 Buchdrucktafeln und 25 Tafeln in Lichtdruck. XXVIII, 687 Seiten. 1924. Gebunden RM 24.—

---

**Die Knickfestigkeit.** Von Privatdozent Dr.-Ing. Rudolf Mayer, Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. VIII, 502 Seiten. 1921. RM 20.—

---

**Statik.** Von Professor Dr.-Ing. Walther Kaufmann, Hannover. (Handbibliothek für Bauingenieure, IV. Teil, 1. Band.) Mit 385 Textabbildungen. VIII, 352 Seiten. 1923. Gebunden RM 8.40

---

**Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern.** Theorie und Versuch über Spannungsverteilung als Scheibenproblem mit besonderer Berücksichtigung der lokalen Störung. Von Akira Miura, Professor an der Kaiserlichen Universität Kioto. Mit 142 Abbildungen im Text und auf 6 Tafeln. V, 111 Seiten. 1928. RM 11.—; gebunden RM 12.50

---

**Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern** und ihre praktischen Anwendungen. Von Privatdozent Dr.-Ing. Th. Wyss, Danzig. Mit 432 Abbildungen im Text und auf 35 Tafeln. IX, 368 Seiten. 1926. Gebunden RM 25.50