Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes
und ihre Anwendung in der Flugtechnik

Von

Dr. Oscar Martienssen

Kiel

Mit 75 Textfiguren

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1913

Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes
und ihre Anwendung in der Flugtechnik

Von

Dr. Oscar Martienssen
Kiel

Mit 75 Textfiguren

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1913

ISBN 978-3-642-50601-7 ISBN 978-3-642-50911-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-50911-7

Vorwort.

Die aufstrebende Flugtechnik hat die Frage nach dem Widerstande bewegter Körper in einem widerstehenden Medium in den Vordergrund des Interesses gerückt und eine Reihe experimenteller und theoretischer Arbeiten veranlaßt, die in den letzten Jahren Veröffentlichung fanden. Das wichtigste Resultat dieser Arbeiten dürfte in der Erkenntnis liegen, daß der Luftwiderstand dieselben Gesetze befolgt, wie der Wasserwiderstand, und daß die theoretische Hydrodynamik in keinem Widerspruch mit der Praxis steht.

Indessen ist zum Verständnis dieser Arbeiten, soweit sie theoretischer Natur sind, eine so weitgehende Kenntnis der mathematischen Physik nötig, daß sie dem praktischen Flugtechniker nur wenig Nutzen bringen und nicht sein Mißtrauen gegen die Theorie beseitigen können. Andererseits sind die Veröffentlichungen mancher Praktiker auf so wenig logischen Anschauungen aufgebaut, daß sie den Wissenschaftler nicht befriedigen, auch nicht als Unterlage für weitere Forschung dienen können.

Dieser Mangel der vorliegenden Literatur und die Kluft zwischen der streng physikalischen und der rein praktischen Forschung wurde mir bei einer Vorlesung über die physikalischen Gesetze der Wasser- und Luftschiffahrt an der Kieler Universität besonders bemerkbar und veranlaßten mich zu dem Entschlusse, zu versuchen, eine zusammenhängende Darstellung der Luft- und Wasserwiderstandsgesetze auf Grund streng physikalischer Folgerungen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der neuesten experimentellen Resultate zu geben. Natürlich konnte ich nicht in dem Büchlein bei den vielen noch ungelösten Problemen der Hydro- und Aerodynamik zu einem völlig abschließenden Endresultate gelangen. Ich hoffe indessen, daß es trotzdem sowohl dem Lehrer als auch dem Studierenden der Flugtechnik von einigem Nutzen sein wird.

Bei der theoretischen Ableitung der Widerstandsgesetze habe ich besonderen Wert darauf gelegt, zu zeigen, innerhalb welcher Geschwindigkeitsgrenzen Luft und Wasser gleichartig behandelt werden können, und dürften dadurch meine Ausführungen auch einigen Wert für den Schiffbauer haben. Bei den Anwendungen der Gesetze beschränkte ich mich dagegen lediglich auf flugtechnische Fragen.

Um dem praktisch arbeitenden Ingenieur verständlich zu bleiben, habe ich die höhere Mathematik nur soweit benutzt, als sie auf technischen Hochschulen gelehrt wird. Ich mußte allerdings dadurch auf eine vollständige Ableitung einiger Formeln verzichten und mich mit Angabe der einschlägigen Litteratur begnügen.

Kiel, Juni 1913.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Der innere Druck einer Flüssigkeit.

Alle Flüssigkeiten und Gase haben gegenüber festen Körpern die Eigenschaft, Formänderungen keinen Widerstand entgegenzusetzen. Sie können demnach jede beliebige Form annehmen und füllen einen ihnen zur Verfügung gestellten Raum ganz aus.

Allerdings werden wir später sehen, daß dieser Satz nicht streng richtig ist, sondern daß auch bei Flüssigkeiten und Gasen Formveränderungen mit einer sehr kleinen Reibung benachbarter Teilchen gegeneinander verbunden sind. Diese Reibung ist indessen im Gegensatz zu derjenigen, die wir bei festen Körpern beobachten, sehr klein und wird direkt zu Null, wenn die sich berührenden Teilchen eine verschwindend kleine relative Geschwindigkeit gegeneinander haben. Daraus folgt, daß wir bei allen statischen Problemen der Flüssigkeiten und Gase ohne weiteres von der Reibung ganz absehen können, indem wir uns den betrachteten Zustand so langsam entstanden denken, daß die Reibung einen vernachlässigbar kleinen Wert bekommt. Bei dynamischen Problemen können wir wenigstens in erster Annäherung die Reibung vernachlässigen und müssen nur von Fall zu Fall prüfen, wie groß die durch diese Vernachlässigung entstehenden Fehler sein können.

Eine Flüssigkeit ohne jede Reibung wird in der Aerodynamik als ideale Flüssigkeit bezeichnet. Die Bewegungsgesetze, die sich für eine solche Flüssigkeit besonders leicht ableiten lassen, gelten demnach für wirkliche Flüssigkeiten nur angenähert, dagegen sind Ruhezustände, die aus den Bewegungsgesetzen gefolgert werden, auch für wirkliche Flüssigkeiten streng mathematisch richtig.

Der physikalische Unterschied tropfbarer Flüssigkeiten und Gase ist der, daß erstere ein bestimmtes Volumen besitzen, letztere nicht; denn das Volumen der Gase ist in hohem Maße von Druck und Temperatur abhängig, das der tropfbaren Flüssigkeiten nur sehr wenig. Die Beziehung, die das Volumen aus Druck und Temperatur berechnen läßt, wird die Zustandsgleichung eines Gases genannt. Für ideale Gase gilt z. B. das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz:

$$v = C\frac{T}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo v das Volumen, T die absolute Temperatur und p den auf dem Gase ruhenden Druck mißt; C ist eine Konstante. Ist das Volumen einer Flüssigkeit unabhängig vom Druck und Temperatur, also nur von der Masse abhängig, so nennen wir die Flüssigkeit inkompressibel. Die Hydrodynamik nimmt nun alle tropfbar flüssigen Körper als inkompressibel an. Der Fehler in den Resultaten ist bei der geringen Kompressibilität derselben stets verschwindend klein. Das Volumen des Wassers nimmt z. B. erst bei 200 Atm. Druck um 1 $^0/_0$ ab, und es ist daraus ohne weiteres ersichtlich, daß Volumenänderungen bei Druckänderungen von der Größenordnung einer Atmosphäre keinen Einfluß ausüben können. Aber auch die gasförmigen Körper können für die hier behandelten Fälle meistens als inkompressibel angesehen werden, da die durch Bewegungen auftretenden Druck- und Temperaturunterschiede so klein bleiben, daß sie gegen den hohen Druck der Atmosphäre und die hohe mittlere Lufttemperatur von rund 285^0 absol. vernachlässigt werden können, wie wir später sehen werden. Daraus folgt, daß die Bewegungsgesetze der Hydrodynamik fast alle sowohl für tropfbar flüssige als auch gasförmige Körper gelten und daß es nicht nötig ist, einen prinzipiellen Unterschied zwischen beiden zu machen. Wir werden daher im Folgenden unter Flüssigkeiten sowohl tropfbar flüssige als auch gasförmige Körper verstehen.

Da die Dichte eines Körpers der Quotient seiner Masse durch sein Volumen ist, so kann auch die Dichte einer tropfbaren Flüssigkeit stets, eines Gases meistens als konstant angesehen werden. Die Dichte des Wassers setzen wir gleich 1, es ist dann die Dichte der Luft bei 10^0 C und 760 mm Druck 0,001225, also etwa 800 mal kleiner. Wir werden die Dichte stets mit γ bezeichnen.

Nach diesen Feststellungen können wir uns den Begriff des Druckes innerhalb einer Flüssigkeit auf folgende Weise klarmachen. Zunächst bringt es die freie Beweglichkeit aller Flüssigkeitsteilchen mit sich, daß an keiner Stelle innerhalb einer ruhenden Flüssigkeit tangentiale Kräfte angreifen können; denn greifen wir irgendeine Fläche F innerhalb einer Flüssigkeit (Fig. 1) heraus, und wäre in Richtung von F eine Kraft K wirksam, so würde die Flüssigkeit dieser Kraft nachgeben müssen, da sie sich

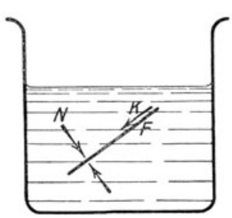


Fig. 1.

ohne Reibung frei bewegen kann, könnte also nicht in Ruhe bleiben. Senkrecht zur Fläche F können indessen Kräfte N wirken, wenn sie nur auf beiden Seiten der Fläche gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Solche normal zur Fläche gerichteten Kräfte nennen wir Normalspannungen. Beachten wir weiter, daß die Elemente einer idealen Flüssigkeit einer Trennung keinen Widerstand entgegensetzen, die Flüssigkeit also zerreißen müßte, wenn die Normalspannungen von der Fläche F abgewandt wären, so folgt, daß die Normalspannungen in einer kontinuierlichen Flüssigkeit stets zur Fläche hingerichtet sind. In dieser Richtung bezeichnen wir sie als positive; negative Normalspannungen sind dann in einer idealen kontinuierlichen Flüssigkeit nicht möglich.

Beziehen wir die Normalspannungen auf die Flächeneinheit, auf die sie wirken, so nennen wir sie Drucke, so daß also der Druck auf eine Fläche gleich der Kraft ist, die senkrecht auf die Fläche wirkt, dividiert durch die Größe der Fläche. Da nun in einer kontinuierlichen Flüssigkeit die Normalspannungen stets positiv sind, ist auch der Druck stets eine positive Größe.

Im absoluten Maßsystem wird der Druck gemessen in Dynen pro Quadratzentimeter; in der Aviatik und praktischen Aerodynamik mißt man abweichend vom sonstigen Brauch den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter; da $1\,\mathrm{kg} = 981 \cdot 10^3$ Dynen, $1\,\mathrm{qm} = 10^4\,\mathrm{qcm}$ ist, so ist die praktische Maßeinheit 98,1 mal größer als die absolute.

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Druckes in einer reibungslosen Flüssigkeit ist nun die, daß seine Größe an jedem Orte unabhängig von seiner Richtung ist.

Um dies zu beweisen, denken wir uns an dem fraglichen Orte ein verschwindend kleines Tetraeder $ABCO$ konstruiert (Fig. 2) mit drei aufeinander senkrecht stehenden Kanten dx, dy, dz, und einer beliebig schrägstehenden Grundfläche ABC. Der Inhalt dieser Grundfläche sei F und derjenige der den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Flächen, resp. F_1, F_2, F_3. Das Lot von der Spitze O auf die Grundfläche ABC gefällt, möge mit den Kanten dx, dy, dz resp. Winkel α, β, γ einschließen. Dann haben wir die Beziehung, da F_1 die Vertikalprojektion der Grundfläche F auf die yz-Ebene ist, auf welche dx senkrecht steht:

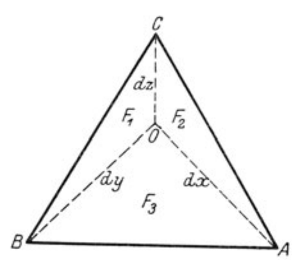


Fig. 2.

$$F = F_1 \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

ganz analog ergibt sich:

$$F = F_2 \frac{1}{\cos\beta} \qquad F = F_3 \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Wir wollen ferner die Drucke auf die Flächen F, F_1, F_2, F_3 mit p, p_1, p_2, p_3 bezeichnen. Solange die Flüssigkeit ruht, müssen sich die Kräfte in Richtung der drei Achsen X, Y, Z ausgleichen. In Richtung der X-Achse wirken die Drucke p_2 und p_3 nicht, da sie senkrecht auf X stehen, dagegen haben wir in Richtung von X senkrecht auf F_1 die Kraft $p_1 \cdot F_1$ wirken und andererseits ergibt uns der auf F wirkende Druck p, der mit X den Winkel α einschließt, die Komponente $pF \cdot \cos\alpha$; also besteht in ruhender Flüssigkeit die Gleichung

$$p_1 \cdot F_1 = p\,F \cdot \cos\alpha;$$

ganz analog erhält man für die Kräfte in Richtung der Y- und Z-Achse die Gleichungen

$$p_2 F_2 = p F \cos\beta \quad \text{und} \quad p_3 \cdot F_3 = p \cdot F \cos\gamma.$$

Setze ich hier für F die oben gefundenen Werte ein, so folgt

$$p = p_1 = p_2 = p_3.$$

Da nun die Fläche F in beliebiger Richtung gezogen war, also p ganz willkürlich gerichtet ist, so folgt, daß in einer ruhenden Flüssigkeit der Druck an jedem Punkte für alle Richtungen den gleichen Wert hat. Dieser Satz gilt sowohl für ideale als auch für wirkliche Flüssigkeiten, da ja die Reibung mit der Geschwindigkeit zu Null wird.

Der Satz gilt aber auch für ideale, bewegte Flüssigkeiten. Es sind dann, von äußeren Kräften abgesehen, weitere Kräfte wie die oben behandelten nicht vorhanden, und wir haben, wenn wir mit x'', y'', z'' die Beschleunigungen der Masse dm des kleinen Tetraeder bezeichnen die drei Gleichungen

$$x''\,dm = F(p_1 - p) \qquad y''\,dm = F(p_2 - p) \qquad z''\,dm = F(p_3 - p).$$

Hier ist aber die Masse dm klein von dritter Ordnung, da sie das Produkt der drei kleinen Größen dx, dy, dz enthält, die Fläche F klein von zweiter Ordnung. Wenn daher die Beschleunigungen x'', y'', z'' endliche Werte behalten sollen — unendlich große Werte, die auch unendlich große Geschwindigkeiten erzeugen, sind physikalisch unmöglich —, so muß $p_1 - p$, $p_2 - p$, $p_3 - p$ klein von erster Ordnung sein. Daraus folgt, daß p_1, p_2, p_3 sich nicht um einen endlichen Betrag von p unterscheiden können, also diesem gleich sein müssen.

Für eine reibende, bewegte Flüssigkeit sind unsere Betrachtungen indessen nicht streng richtig. Denn in einer solchen treten z. B. in Richtung der X-Achse noch Tangentialkräfte hinzu, die an den Flächen F_2 und F_3 wirken und einen endlichen Unterschied zwischen p und p_1 ausmachen können. Nur wenn die tangential wirkenden Reibungskräfte den Drucken p gegenüber klein sind, bleibt auch in einer bewegten, reibenden Flüssigkeit die Größe des Druckes unabhängig von seiner Richtung. In wirklichen Flüssigkeiten und Gasen ist dies bei normalen Geschwindigkeiten nahezu immer der Fall, so daß wir unser Druckgesetz in erster Annäherung auch auf bewegte, reibende Flüssigkeiten ausdehnen können. Wo es nicht zulässig ist, ist man übereingekommen, als Druck schlechthin den Mittelwert des Druckes in drei aufeinander senkrechten Richtungen zu verstehen; also $p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ zu setzen.

Wir sehen demnach, daß der innere Druck einer Flüssigkeit eine spezifische Eigenschaft jeden Ortes innerhalb einer Flüssigkeit ist, und an und für sich eine gerichtete Größe ist, während sein absoluter Wert von der Richtung unabhängig ist. Wir können folglich den Druck als eine innere Kraft auffassen, die je zwei Flüssigkeitsteilchen normal zu ihrer Trennungsfläche zusammenpreßt im Gegensatz zu den von außen her auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften.

Da der Druck an verschiedenen Punkten der Flüssigkeit verschieden sein kann, können wir von einem Druckgefälle innerhalb einer Flüssigkeit längs einer Linie sprechen. Das Druckgefälle ist die Änderung des Druckes p bei Änderung des Ortes auf der betreffenden Linie, also wenn wir ein Element der Linie mit ds bezeichnen: $\frac{dp}{ds}$. Wir können also den Druck nach dem Orte differenzieren.

Es ist nun eine besondere ausgezeichnete Eigenschaft jeder Flüssigkeit, daß das Druckgefälle in allen Richtungen stets einen endlichen Wert hat; denn betrachten wir irgend ein kleines mit Flüssigkeit angefülltes Parallelopipedon mit den Seitenkanten dx, dy, dz (Fig. 3), so drückt z. B. auf die Seite $ACFE$ in Richtung der X-Achse ein Druck p, der das Parallelopipedon in Richtung der X-Achse zu beschleunigen sucht. Auf die Seite $BDGH$ drückt ein etwas abweichender Druck

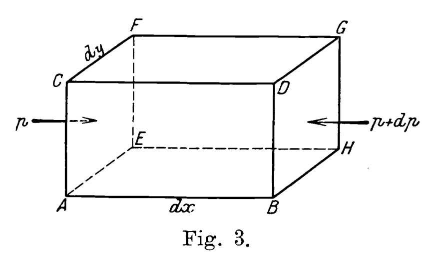


Fig. 3.

$$p + dp = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

da diese Seite um die Entfernung dx von der ersteren absteht. Dieser Druck wirkt dem ersteren entgegen und wir erhalten die auf das Parallelopipedon in Richtung der X-Achse wirkenden Kräfte, wenn wir die genannten Drucke mit der Größe der gedrückten Fläche multiplizieren und voneinander subtrahieren, also

$$dK = p\,dy\,dz - (p + dp)\,dy\,dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Diese Kraft beschleunigt die Masse des Parallelopipedons, die gegeben ist durch den Ausdruck

$$dm = \gamma \cdot dx\,dy\,dz,$$

also klein von dritter Ordnung ist. Damit demnach die Beschleunigung endlich bleibt, muß auch die Kraft dK klein von dritter Ordnung sein; dann muß aber, damit die Gleichung für dK bestehen kann, der Wert $\frac{\partial p}{\partial x}$ endlich sein, also p eine stetige Funktion des Ortes sein.

Wir können zusammenfassend sagen, daß der innere Druck in einer Flüssigkeit eine stetig veränderliche Funktion des Ortes ist, unabhängig von der Richtung, und dies ist eine spezielle Eigenschaft, die die Flüssigkeiten von den festen Körpern unterscheidet.

Zweites Kapitel.

Der Druck auf einen eingetauchten Körper.

Denken wir uns in die Flüssigkeit einen starren Körper gebracht mit der Oberfläche F (Fig. 4), so wird unmittelbar in der Nachbarschaft der Oberfläche der innere Druck der Flüssigkeit irgendeinen Wert p besitzen. An der Grenze zwischen Flüssigkeit und Körper selbst, die dem Punkte der Flüssigkeit mit dem Drucke p unendlich benachbart ist, kann ein nur unendlich wenig vom Drucke p abweichender Druck herrschen, da das Druckgefälle nach den Resultaten des vorigen Kapitels stetig verläuft. Daraus folgt, daß auf jeden Punkt der Oberfläche F des Körpers ein Druck p lastet, der in unmittelbarer Nähe der Körperoberfläche in der Flüssigkeit herrscht, also der Druck auf den Körper gegeben ist durch den inneren Druck der Flüssigkeit an der Grenze zwischen Körper und Flüssigkeit. Dies gilt naturgemäß nicht nur für einen völlig untergetauchten Körper, sondern auch für alle Wände des etwa die Flüssigkeit begrenzenden Gefäßes.

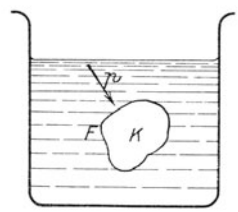


Fig. 4.

Wir fanden nun in einer reibungsfreien Flüssigkeit die Richtung von p stets normal zur gedrückten Fläche. Da an der Grenze von Körper und Flüssigkeit die Oberfläche des Körpers die gedrückte Fläche ist, so folgt, daß in einer reibungsfreien Flüssigkeit der auf einen untergetauchten Körper lastende Druck stets senkrecht zur Oberfläche desselben gerichtet ist. In einer wirklichen Flüssigkeit gilt dieses Gesetz auch ohne weiteres dann, wenn sie in Ruhe ist; ist sie in Bewegung, so kommen noch die durch die Reibung verursachten Tangentialkräfte hinzu, die aber eine merkliche Richtungsänderung der resultierenden Kraft nicht bedingen können, solange der Druck hinreichend groß ist. Es kann daher meistens das Gesetz über die Druckrichtung, das für ideale Flüssigkeiten streng richtig ist, auch auf natürliche Flüssigkeiten angewandt werden.

Dieses Gesetz von der Orthogonalität des Druckes zur Oberfläche des gedrückten Körpers ist das wichtigste Gesetz der Hydro- und Aerodynamik und maßgebend für alle Anwendungen der Luftwiderstandsgesetze in der Aviatik. Nach demselben ist die Druckrichtung ganz unabhängig von Größe und Richtung der Flüssigkeitsbewegung oder der Bewegung des Körpers innerhalb der Flüssigkeit, und von vornherein an jedem Punkte der Oberfläche durch die Normale auf dieselbe, also durch die Körperform gegeben.

Dieses Fundamentalgesetz ist nicht so ohne weiteres einleuchtend und war auch den Mathematikern des Altertums unbekannt; die Erkenntnis desselben hat sich erst allmählich durchgerungen, ohne daß es von einem Forscher zuerst ausdrücklich ausgesprochen wurde; es trägt demnach auch nicht den Namen eines Entdeckers. Dieses Gesetz führt erst zur Möglichkeit der Konstruktion eines Flugzeuges, und die Unkenntnis desselben hat viele früheren Erfinder zu den seltsamsten Konstruktionen verleitet. Auch die Konstruktion eines Propellers, das Segeln am Winde auf dem Wasser wäre ohne Gültigkeit dieses Gesetzes nicht möglich; denn würde, wie Laien meistens anzunehmen versucht sind, der Druck dieselbe Richtung haben wie die Geschwindigkeit, mit der eine Flüssigkeit auf einen festen Körper trifft, so würde es auf einem Segelboot bei Wind schräg von vorne keine Segelstellung geben, bei der das Boot durch den Wind vorwärts getrieben würde; ebenso würde sich die Wirkung auf zwei gegenüberstehende Propellerflügel aufheben.

Das Gesetz von der Orthogonalität des Druckes ist ebenfalls eine Eigentümlichkeit aller Flüssigkeiten, die diese von den festen Körpern scharf unterscheidet. Denn wird ein Körper von einem anderen festen Körper getroffen, so wird auf ihn je nach den elastischen Eigenschaften eine von der Oberflächennormale mehr oder minder abweichende Kraft wirken. Es ist demnach ganz unzulässig, die Wirkung eines Flüssigkeitsstromes gegen einen Körper mit der Wirkung zu vergleichen, die ein fein verteilter fester Körper, wie Sand oder dergleichen, ausübt.

Das Gesetz von der Orthogonalität hat indessen eine wesentliche Einschränkung, die aus unserer Ableitung ohne weiteres folgt. Es setzt nämlich voraus, daß die Flüssigkeit den Körper kontinuierlich umgibt. Wäre dies nicht der Fall, so ist die Oberfläche des Körpers nicht gleichzeitig die Oberfläche der Flüssigkeit und wir können nicht aus der Richtung des Druckes auf die Flüssigkeitsoberfläche einen Schluß ziehen auf die Richtung desselben auf die Körperoberfläche, da ja der Druck innerhalb des nicht von

Flüssigkeit erfüllten Raumes plötzlich Größe und Richtung wesentlich ändern kann.

Derartige Verhältnisse liegen z. B. vor beim Auftreffen eines begrenzten Flüssigkeitsstrahles auf einen festen Körper oder noch mehr beim Auftreffen eines in Einzeltropfen aufgelösten Strahles. Probleme dieses Art wollen wir indessen von vornherein aus unseren Betrachtungen ausschließen, da die Luft alle Körper kontinuierlich umgibt und innerhalb der uns zugänglichen Bereiche der Atmosphäre keine freie Oberfläche besitzt. Nur die großen Geschwindigkeiten von ca. 1000 Meter pro Sekunde, die von den modernsten Geschossen erreicht werden, können, wie wir später sehen werden, ein Vakuum mit freier Luftoberfläche erzeugen und somit zu wesentlich abweichenden Luftwiderstandsgesetzen führen. In der Aviatik sind Geschwindigkeiten dieser Größe unmöglich, dieselben liegen daher außerhalb des Bereiches unserer Betrachtungen; denn selbst bei Luftpropellern ist es aus Festigkeitsrücksichten ein für alle Male ausgeschlossen, Geschwindigkeiten über etwa 250 m pro Sekunde zu verwenden.

Drittes Kapitel.

Der Widerstand eines Körpers in einer Flüssigkeit.

Der Widerstand eines Körpers innerhalb einer Flüssigkeit ist die Kraft, mit der er sich einer Bewegung widersetzt, die also aufgewandt werden muß, um ihn mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, oder auch diejenige, mit der er festgehalten werden muß, damit der Druck der ihn umgebenden Flüssigkeit ihn nicht in Bewegung setzt.

Sehen wir von der Wirkung äußerer Kräfte wie der Schwerkraft ab, so kann der Widerstand naturgemäß nur abhängen von der relativen Geschwindigkeit zwischen der Körperoberfläche und der umgebenden Flüssigkeit, nicht aber von der absoluten Geschwindigkeit beider. Es ist dies ohne weiteres verständlich, wenn wir uns klarmachen, daß sonst z. B. der Widerstand eines Körpers in der Luft abhängen müßte von der unbekannten Geschwindigkeit, mit der sich die Erde im Weltenraume fortbewegt.

Diese Tatsache ist eine selbstverständliche Folgerung der Grundanschauungen der Physik, nach denen alle Geschwindigkeiten nur relativ und nicht absolut aufgefaßt werden können. Es wird demnach ein ruhender Körper in einer bewegten Flüssigkeit genau denselben Widerstand erleiden, wie ein bewegter Körper in einer ruhenden Flüssigkeit, wenn nur beide Male das Strömungsbild vom Körper aus betrachtet dasselbe ist. Dies dürfte bei einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit sicher der Fall sein, ist aber bei einer endlichen, wenn auch großen Ausdehnung derselben, nicht ohne weiteres einleuchtend. Es haben indessen alle Versuche gezeigt, daß schon bei mäßiger Ausdehnung der Flüssigkeit das Strömungsbild identisch ausfällt, und wir wollen im folgenden dies Relativgesetz uneingeschränkt gelten lassen. Wir werden demnach, je nachdem es für die Betrachtung bequemer ist, den festen Körper oder die Flüssigkeit bewegt annehmen. Dies bedeutet mathematisch ausgedrückt, daß wir unser Koordinatensystem bald mit dem Körper, bald mit der Flüssigkeit als fest verbunden ansehen werden.

Den Widerstand des Körpers in der Flüssigkeit finden wir nun, wenn wir das Integral des Druckes über die ganze Oberfläche bilden und die Komponente in der Bewegungsrichtung nehmen. Es ist demnach

$$W = \int^{\Omega} p \cos \alpha \, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche ist und p als gerichtete Größe aufgefaßt werden muß; α ist der Richtungsunterschied zwischen p und der Bewegungsrichtung. Haben wir es nicht mit einem eigentlichen Körper, sondern mit einer Fläche zu tun, so ist die Integration über beide Seiten der Flächen zu erstrecken. Der mittlere Druck P_m, den der Körper in der Bewegungsrichtung erleidet, ergibt sich dann ohne weiteres aus der Beziehung

$$P_m = \frac{1}{\Omega} W = \frac{1}{\Omega} \int^{\Omega} p \cdot \cos \alpha \cdot d\omega \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Integration hat zu erfolgen nach den in der Mechanik bekannten Regeln über die Zusammensetzung von Kräften, die an verschiedenen Punkten angreifen, und bietet keine wesentliche Schwierigkeiten, wenn die Drucke p, also die Druckverteilung auf der Oberfläche bekannt sind.

Nach diesen Regeln zerlegt man die Drucke p in ihre Komponenten p_x, p_y, p_z in Richtung der Koordinatenachsen und erhält die drei Komponenten des Widerstandes in der Form

$$W_x = \int p_x d\omega, \qquad W_y = \int p_y \cdot d\omega, \qquad W_z = \int p_z \cdot d\omega \quad \ldots \quad (4)$$

Der Widerstand W ergibt sich dann aus der Gleichung

$$W = W_x \cos(x, v) + W_y \cos(y, v) + W_z \cos(z, v), \quad \ldots \quad (5)$$

wo die cos. die Richtungscos. der Bewegung zu den Koordinatenachsen sind.

Schließlich bekommt man die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Angriffspunktes der Widerstandskraft aus den drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int (x_1 - x) \cdot p_x \cdot d\omega &= 0 \\ \int (y_1 - y) \cdot p_y \cdot d\omega &= 0 \\ \int (z_1 - z) \cdot p_z \cdot d\omega &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo x, y, z die Koordinaten der Angriffspunkte der p sind, und sämtliche Integrale über die gesamte Oberfläche Ω des Körpers zu erstrecken sind.

Unter der Wirkung dieser Widerstandskraft wird der Körper im allgemeinen eine fortschreitende und eine drehende Bewegnug ausführen; nur wenn der Schwerpunkt des Körpers in Richtung des resultierenden Widerstandes fällt, haben wir keine Drehung, sondern nur eine fortschreitende Bewegung.

Den Angriffspunkt des resultierenden Widerstandes nennen wir den Druckmittelpunkt, und es ist die Lage desselben von großer Wichtigkeit für die Frage, ob Rotation eintritt oder nicht. Es liegt nun dieser Druckmittelpunkt durchaus nicht immer auf der Oberfläche des Körpers selbst, sondern er kann sowohl innerhalb als auch weit außerhalb des eingetauchten Körpers liegen. Er kann nach den obigen Gleichungen stets gefunden werden, wenn die Verteilung des Druckes p auf der Oberfläche Ω bekannt ist.

Es erscheint allerdings auf den ersten Blick hin befremdend, daß der Druckmittelpunkt nicht auf der gedrückten Oberfläche und sogar außerhalb des gedrückten Körpers liegen soll. Indessen wird diese Tatsache einleuchten, wenn wir uns die Verhältnisse an einem einfachen Beispiele klar machen.

Wir wollen eine linear gedachte Fläche AB (Fig. 5) betrachten, auf deren obere Seite Drucke p_1 und auf deren untere Seite Drucke p_2 wirken mögen. Sind p_1 und p_2 auf den ganzen Flächen konstant, so werden die resultierenden Kräfte P_1 und P_2 beiderseits in der Mitte der Fläche liegen und demnach auch die Resultante von P_1 und P_2 ihren Angriffspunkt in der Flächenmitte haben. Sind aber p_1 und p_2 nicht gleichmäßig über die Fläche verteilt, so werden im allgemeinen P_1 und P_2 nicht in der Flächenmitte angreifen, sondern an zwei verschiedenen Punkten der Fläche. Beachten wir nun, daß der Angriffspunkt der Resultante von P_1 und P_2 derjenige Punkt ist, an den eine der Resultante entgegengesetzt gerichtete aber gleiche Kraft angesetzt werden muß, damit die Fläche in Ruhe bleibt, so folgt ohne weiteres nach dem Hebelgesetz, daß dieser Angriffspunkt M eine Entfernung a_1 und a_2 von den Angriffspunkten der P_1 und P_2 haben muß, für welche gilt

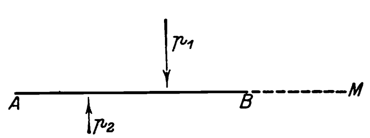


Fig. 5.

$$a_1 \cdot P_1 = a_2 \cdot P_2 .$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand der Angriffspunkte P_1 und P_2 voneinander mit l, so ist

$$a_2 = a_1 + l$$

und setzen wir dieses ein, so erhalten wir

$$a_1 = l\frac{P_2}{P_1 - P_2}.$$

Es kann demnach a_1 dadurch einen beliebig großen Wert annehmen, daß die Differenz $P_1 - P_2$ entsprechend klein wird und der Punkt M weit über die Enden der Fläche AB hinausfallen. Ist P_1 gleich P_2, so liegt er in unendlicher Ferne und wir haben ein reines Kräftepaar mit dem Drehmoment $D = lP_1$. Dieser Fall ist allerdings praktisch nicht gut denkbar; denn wenn P_1 und P_2 einander gleich sind, wird auch die Druckverteilung auf beiden Seiten gleich sein und damit P_1 und P_2 denselben Angriffspunkt haben, wodurch l zu Null wird und a_1 endlich bleibt.

Haben wir nun einen dreidimensionalen Körper, so können wir dieselben Betrachtungen für alle drei Dimensionen anstellen und sehen, daß M eine ganz beliebige Lage innerhalb oder außerhalb des gedrückten Körpers haben kann. So z. B. liegt bei Körpern ähnlich dem Parsevalballon und bei Schiffen relativ kleiner Länge der Druckmittelpunkt weit vor der Spitze des Ballons resp. Schiffes.

Wir erwähnten bereits oben, daß eine Drehung des Körpers durch den Flüssigkeitswiderstand nicht veranlaßt wird, wenn der Schwerpunkt des Körpers in Richtung des Widerstandes liegt. Dieser Satz bedarf noch einer besonderen Erläuterung.

Nach den Regeln der Mechanik besteht bekanntlich die allgemeinste Bewegung eines freien Körpers aus einer translatorischen Bewegung des Schwerpunktes und einer Drehung des Körpers um den Schwerpunkt. Nun ist aber ein untergetauchter Körper nicht frei, sondern es wirken auf ihn außer den in der Mechanik behandelten Kräften, die der Masse proportional sind, noch weitere Kräfte, die von der Oberflächenform abhängen. Dies bedingt, daß die Drehungen im allgemeinen um andere Punkte als dem Schwerpunkte erfolgen, und daß sich der Rotationsmittelpunkt mit der Rotationsgeschwindigkeit fortgesetzt ändert; um welchen Punkt unter gegebenen Verhältnissen die Rotation erfolgt, ist meistens äußerst schwierig zu sagen. Bei sehr langsamer Rotationsgeschwindigkeit wird aber auch der Widerstand gegen die Rotation verschwindend klein und der Körper nimmt daher bei abnehmender Rotation mehr und mehr die Eigenschaften eines frei beweglichen Körpers an, so daß der Rotationsmittelpunkt in den Schwerpunkt rückt. Suchen wir daher den Angriffspunkt und die Richtung der Kraft, unter deren Wirkung der Körper nicht rotiert, so können wir ihn für diesen besonderen Fall als frei beweglich ansehen und auf ihn den obigen Satz ohne weiteres übertragen.

Im übrigen dürften die angeführten Gleichungen jedem Ingenieur so geläufig sein, daß es nicht nötig ist, länger bei denselben zu verweilen; sie erlauben in jedem Falle Widerstand und Druckmittelpunkt eindeutig zu bestimmen, wenn die Druckverteilung an der Körperoberfläche, oder genauer ausgedrückt, die Verteilung des inneren Druckes der Flüssigkeit in unmittelbarer Nähe des Körpers bekannt ist. Folglich ist unsere Aufgabe auf die zurückgeführt, den inneren Druck einer Flüssigkeit zu berechnen.

Diese Methode ist wesentlich von derjenigen verschieden, die den Widerstand berechnen will aus der kinetischen Energie, die die Flüssigkeitsteilchen beim Aufprallen auf den Körper an diesen abgeben, eine Methode, die z. B. F. W. Lanchester[1]) in seinem bekannten Buche in den ersten Kapiteln benutzt; indessen ist sie nur für besonders einfache Fälle durchführbar und führt leicht zu argen Trugschlüssen, da es schwer ist, anzugeben, welche elastischen Eigenschaften man der Flüssigkeit beilegen soll.

Bevor wir nunmehr zur Berechnung des inneren Druckes selbst übergehen, müssen wir noch zwischen dem statischen Drucke und dem dynamischen Drucke innerhalb der Flüssigkeit unterscheiden. Der Erste ist derjenige, der in einer ruhenden Flüssigkeit herrscht, während letzterer durch etwaige Flüssigkeitsbewegungen veranlaßt wird.

Die Gesetze des statischen Druckes sind so einfach und jedermann bekannt, daß sie hier nur kurz erwähnt zu werden brauchen.

Sie besagen zunächst, daß der Druck p in der Tiefe h unter der Oberfläche einer Flüssigkeit gegeben ist durch die Gleichung

$$p = g \cdot \gamma \cdot h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wo g die Erdbeschleunigung und γ die Dichte der Flüssigkeit mißt. Denn über einer horizontalen Fläche dF (Fig. 6) steht eine Flüssigkeitsmasse $\gamma h dF$ mit einem Gewichte $g \gamma h dF$. Da nun im Ruhezustande die Reibung Null ist, so ist dieses Gewicht von der Fläche dF ganz zu tragen und es ist also die Kraft, die gegen diese Fläche wirkt. Dividieren wir dieses Gewicht durch die Fläche, so erhalten wir für den Druck den obigen Ausdruck. Die Gleichung gibt den Druck in absolutem Maße, wenn h in Zenti-

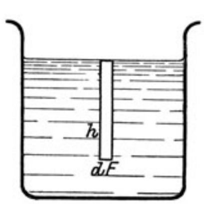


Fig. 6.

[1]) F. W. Lanchester, Aerodynamik, übersetzt von S. C. A. Runge, Verlag von B. G. Teubner 1909.

metern gemessen wird. Wollen wir ihn in praktischem Maße messen, so müssen wir durch g dividieren und h in Metern ausdrücken. Man erhält somit

$$p' = \gamma \cdot h';$$

ist die Flüssigkeit Wasser, so wird $\gamma = 1$, und der Druck in praktischem Maße ist gleich der Wasserhöhe in Metern ausgedrückt. Es wird dementsprechend in der Praxis vielfach der Druck gemessen durch die Wassersäule, die ihn erzeugen würde.

Da, wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, der Druck in allen Richtungen die gleiche Größe hat, so muß derselbe Druck, der auf der horizontalen Fläche dF lastet, auch auf jeder beliebig orientierten Fläche in der Tiefe h wirken und somit stets durch obige Gleichung gegeben sein. Es ist dadurch ohne Schwierigkeit möglich, durch Integration des statischen Druckes über die ganze Oberfläche eines untergetauchten Körpers den Gesamtdruck zu berechnen; dies führt zu dem bekannten archimedischen Prinzip, nach dem auf jeden untergetauchten Körper ein Auftrieb wirkt, der gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit ist.

Wirken außer der Erdschwere noch andere äußere Kräfte gleichzeitig auf Flüssigkeit und festen Körper, die eine Beschleunigung g' haben mögen, so ist ganz analog

$$p = (g + g') \cdot \gamma \cdot h \quad \text{und} \quad W = \int (g + g') \gamma \cdot h \, d\omega \, .$$

Dieser Satz führt zu der für manche Anwendungen wichtigen Tatsache, daß ein innerhalb einer Flüssigkeit im Gleichgewicht befindlicher Körper durch keine auf Flüssigkeit und Körper gleichzeitig wirkenden Kräfte relativ zur Flüssigkeit bewegt werden kann. Nehmen wir z. B. an, eine Kugel K (Fig. 7) sei innerhalb einer Flüssigkeit im Gleichgewichte, so daß also Auftrieb und Gewicht einander gleich sind, und das Gefäß würde plötzlich gehoben oder gesenkt, so wird die Kugel nicht, wie man vielleicht glauben könnte, im Gefäß fallen oder steigen, sondern an seinem Punkte in der Flüssigkeit verbleiben.

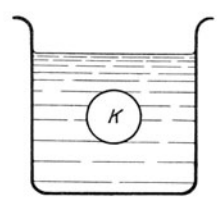


Fig. 7.

Wenn nämlich vor Bewegung des Gefäßes die Kugel K im Gleichgewicht ist, so besteht für ihr Gewicht mg die Gleichung $mg = g \int \gamma \cdot h \, d\omega$; daraus folgt, durch Multiplikation mit $\frac{g + g'}{g}$:

$$m(g + g') = (g + g') \int \gamma \cdot h \, d\omega \, .$$

Wir haben demnach nur dann wiederum Gleichgewicht, wenn das scheinbare Gewicht des Körpers $m(g + g')$ ist, es also dieselbe

Beschleunigung g' erfährt, wie die Flüssigkeit; eine gleiche Beschleunigung von Kugel und Flüssigkeit besagt aber, daß beide relativ zueinander in Ruhe sind.

Es ist somit der statische Druck einer Flüssigkeit durch den archimedischen Lehrsatz ohne weiteres gegeben. An unserer Erdoberfläche ist es in der Luft im allgemeinen der Atmosphärendruck. Es reduziert sich daher unsere Aufgabe auf die, den dynamischen Druck einer Flüssigkeit zu berechnen. Um dies zu tun, wollen wir zunächst die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit aufstellen, die uns eine Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit in einer solchen ergibt.

Viertes Kapitel.

Die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit.

Wir denken uns aus der Flüssigkeit ein sehr kleines Parallelopipedon mit den Seiten dx, dy, dz herausgegriffen (Fig. 8), so daß also die Kanten die Richtung der Koordinatenachsen haben; das zugehörige Koordinatenkreuz stellen wir uns irgendwo im Raume fest vor. Der Punkt, an dem sich unser Parallelopipedon befindet, soll die Koordinaten x, y, z haben. Es möge nun auf die linke Seitenfläche $ABFE$ mit dem Flächeninhalte $dy\,dz$ ein Druck p wirken, der normal zur Fläche steht, also das Parallelopipedon in Richtung der X-Achse fortzuführen sucht. Wir haben dann, da der Druck von Ort zu Ort verschieden ist, in Richtung der X-Achse ein Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial x}$, wo wir das Zeichen ∂ setzen, da es sich um einen partiellen Differentialquotienten handelt; denn p ist außer von x auch noch von y, z und der Zeit t abhängig. Demnach drückt auf die Fläche $CDHG$ ein Druck:

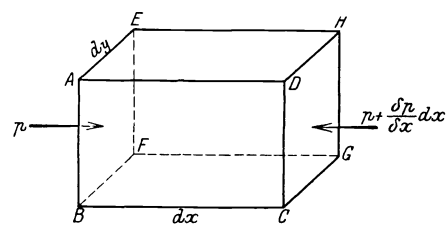


Fig. 8.

$$p + dp = p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx,$$

dieser Druck ist ebenfalls gegen die rechte Seite hin gerichtet, wirkt also dem ersteren entgegen. Auf das Parallelopipedon wirkt somit nur die Differenz beider, nämlich $-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx$. Die innere Kraft, die in Richtung der X-Achse auf das Parallelopipedon wirkt, erhalten wir durch Multiplikation mit der Flächengröße $dy\,dz$, also zu

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Zu dieser inneren Kraft kommt noch eine etwa vorhandene äußere Kraft hinzu, z. B. die Schwerkraft, deren Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen bezogen auf die Masseneinheit wir mit X, Y, Z bezeichnen wollen; es würde demnach auf unser Massenteilchen dm in Richtung der X-Achse die äußere Kraftkomponente $X dm = x \cdot \gamma \cdot dx\, dy\, dz$ wirken. Die Geschwindigkeit Q, die unser Massenteilchen annimmt, zerlegen wir ebenfalls in ihre Komponenten U, V, W; dann ist die Beschleunigung in Richtung der X-Achse $\frac{dU}{dt}$. Da nun stets Masse mal Beschleunigung gleich der wirkenden Kraft ist, so erhalten wir für die Bewegung in Richtung der X-Achse die Gleichung

$$\frac{dU}{dt} \gamma \cdot dx\, dy\, dz = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz + X \cdot \gamma \cdot dx\, dy\, dz,$$

oder

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + X,$$

und analog für die Bewegungen in Richtung der Y- und Z-Achse die Gleichungen

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + Y$$

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + Z.$$

Hier ist noch zu berücksichtigen, daß U, V, W die Geschwindigkeitskomponenten ein und desselben Wasserteilchens sind, die dieses auf seinem Wege annimmt. Wir können aber ein bestimmtes Wasserteilchen nicht auf seinem Wege verfolgen, da es sich von seiner Umgebung durch nichts unterscheidet; es interessiert uns daher nicht diese Geschwindigkeit, sondern jene, die an einem bestimmten Orte $(x y z)$ zu den verschiedenen Zeiten herrscht, die also die verschiedenen den Ort passierenden Wasserteilchen haben. Diese Geschwindigkeit sei q und ihre Komponenten u, v, w; es sind demnach noch die U, V, W mit den u, v, w in Beziehung zu bringen. Herrscht nun an einem Orte mit den Koordinaten x, y, z zur Zeit t die Geschwindigkeit u in Richtung der X-Achse, so herrscht an einem benachbarten Orte mit den Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zu einer Zeit $t + dt$ in Richtung der X-Achse eine Geschwindigkeit $u + du$, für die nach den Regeln der Differentialrechnung gilt

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Unser betrachtetes Flüssigkeitsteilchen mit der Geschwindigkeit U befand sich aber zur Zeit t gerade an dem Orte (xyz); es ist demnach zur Zeit $t: U = u$. Zur Zeit $t + dt$, wo es eine Geschwindigkeit $U + dU = U + \frac{dU}{dt} dt$ annimmt, ist es weiter gewandert bis zu dem Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, an dem zu dieser Zeit nach obigem die Geschwindigkeit $u + du$ herrscht. Wir haben also die Gleichung

$$U + \frac{dU}{dt} dt = u + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Da nun $U = u$ war, bekommen wir durch Division mit dt und unter Berücksichtigung, daß $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ ist:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Analoge Ausdrücke finden wir für $\frac{dV}{dt}$ und $\frac{dW}{dt}$.

Setzen wir diese Ausdrücke in obige Gleichungen ein, so ergeben sich die bekannten Eulerschen Fundamentalgleichungen für die Bewegung einer idealen Flüssigkeit:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Es sind dies drei Differentialgleichungen, denen die vier unbekannten u, v, w, p genügen müssen. Um diese als Funktion des Ortes und der Zeit zu erhalten, fehlt uns also noch eine vierte Gleichung. Dies ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung, die uns nachfolgende Überlegung liefert.

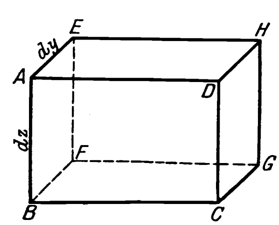


Fig. 9.

Betrachten wir den Inhalt unseres kleinen Parallelopipedon Fig. 9, so strömt in der kleinen Zeit dt durch die linke Seitenfläche $ABEF$ von der Größe $dy \cdot dz$ eine Flüssigkeitsmenge

$$u \cdot \gamma \, dy \, dz \, dt$$

hinein.

An der rechten Seite $CDHG$ ist die Geschwindigkeit in Richtung der X Achse von u auf $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ gewachsen; es hat sich aber auch die Dichte γ geändert, und das Produkt beider, das ist die Strömung, ist von $u\gamma$ auf $u\gamma+\frac{\partial}{\partial x}(u\gamma)\cdot dx$ gewachsen. Infolgedessen strömt aus der Seite $CDHG$ in der Zeit dt eine Flüssigkeitsmenge

$$\left[u\gamma+\frac{\partial}{\partial x}(u\gamma)\,dx\right]dy\,dz\,dt$$

aus dem Parallelopipedon heraus. Es bleibt folglich in dem Raum ein Flüssigkeitszuwachs

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u\gamma)\cdot dx\,dy\,dz\,dt$$

bestehen.

Ganz analog veranlaßt der Fluß durch die Seiten $ABCD$ und $EFGH$ einen Flüssigkeitszuwachs

$$-\frac{\partial}{\partial y}(v\gamma)\cdot dx\,dy\,dz\,dt,$$

und derjenige durch die Seiten $BCGF$ und $ADHE$ einen Flüssigkeitszuwachs

$$-\frac{\partial}{\partial z}(w\gamma)\cdot dx\,dy\,dz\,dt.$$

Da nun keine Masse verloren gehen kann, so muß, wenn der Raum kontinuierlich mit Flüssigkeit angefüllt ist, dieser Zuwachs an Masse ganz dazu dienen, die Dichte γ zu verändern. Ursprünglich hatten wir die Flüssigkeitsmenge $\gamma\,dx\,dy\,dz$ in dem Parallelopipedon, also nach Verlauf der Zeit dt, während der die Dichte auf den Betrag $\gamma+\frac{\partial\gamma}{\partial t}dt$ angewachsen ist, die Flüssigkeitsmenge $\left(\gamma+\frac{\partial\gamma}{\partial t}dt\right)dx\,dy\,dz$. Die Dichteänderung bedingt also einen Flüssigkeitszuwachs $\frac{\partial\gamma}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt$, der gleich dem gesamten von der Strömung veranlaßten Flüssigkeitszuwachs sein muß. Dies gibt die Gleichung

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}(u\gamma)-\frac{\partial}{\partial y}(v\gamma)-\frac{\partial}{\partial z}(w\gamma)\right]dx\,dy\,dz\,dt=\frac{\partial\gamma}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt;$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma u)+\frac{\partial}{\partial y}(\gamma v)+\frac{\partial}{\partial z}(\gamma w)=-\frac{\partial\gamma}{\partial t}\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

Dies ist die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**, die der mathematische Ausdruck für die Bedingung ist, daß die Flüssigkeit den Raum kontinuierlich erfüllt, also keine Hohlräume vorhanden sind.

Ist die Dichte γ konstant, wie bei Wasser ohne weiteres gelten kann, bei Luft meistens gesetzt werden kann, so wird die Gleichung besonders einfach, da die rechte Seite zu Null wird und sich links die Dichte γ, die vor die Differentialzeichen gesetzt werden kann, forthebt. Wir erhalten somit für inkompressible Flüssigkeiten die vereinfachte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Wir haben demnach für eine inkompressible Flüssigkeit mit dieser letzten Gleichung und den drei Eulerschen Gleichungen vier Differentialgleichungen für die vier Unbekannten u, v, w, p; bei kompressiblen Flüssigkeiten, bei denen die allgemeine Kontinuitätsgleichung benutzt werden muß, kommt noch die fünfte Unbekannte γ hinzu. Es ist also für derartige Flüssigkeiten auch noch eine fünfte Gleichung nötig, und das ist die Zustandsgleichung, die die Dichte und den Druck in Beziehung bringt. Indessen nützt diese nur in speziellen Fällen; z. B. dann, wenn die Zustandsänderung ohne Temperaturänderung stattfindet, also mit vollkommenem Temperaturausgleich; in diesem Falle lautet sie

$$\frac{p}{\gamma}=\text{Konstans} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Wenn andererseits die Zustandsänderung adiabatisch vor sich geht, d. h. ohne Temperaturausgleich, so lautet die Zustandsgleichung

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wo p_0 und γ_0 Anfangswerte sind und $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen des Gases ist. In allen andern Fällen bringt die allgemeine Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\gamma}=c\cdot T$$

die absolute Temperatur T als sechste Unbekannte hinein, so daß das Problem unbestimmt bleibt. Man könnte allerdings versuchen, für die Temperatur nach den Regeln der Wärmeleitung und Wärmestrahlung eine weitere Gleichung aufzustellen, indessen würde hierdurch das Problem so kompliziert werden, daß dem Gleichungssystem nicht mehr eine praktische Bedeutung zukommt. Aus diesem

Grunde behandelt die theoretische Aerodynamik im allgemeinen nur Probleme, bei denen die Dichte des Gases konstant angenommen werden kann. Beachten wir indessen, daß auf jeden Fall bei langsamen Bewegungen vollständiger Temperaturausgleich, bei sehr schnellen Bewegungen kein Temperaturausgleich stattfinden wird, so führt die Benutzung der zwei obengenannten speziellen Zustandsgleichungen auf jeden Fall zu Grenzfällen, zwischen denen der wahre Vorgang liegen muß.

Von dieser Unbestimmtheit abgesehen, geben uns somit die vier Eulerschen Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung die Unbekannten u, v, w, p als Funktionen des Ortes und der Zeit, die noch willkürliche Integrationskonstanten enthalten werden; sie geben uns daher noch nicht die absoluten Werte des Druckes p an der Körperoberfläche, die wir zur Berechnung des Widerstandes eines Körpers in der bewegten Flüssigkeit benötigen. Diese werden erst gegeben durch Festsetzung der Grenzbedingungen.

Zunächst müssen die Werte u, v, w, naturgemäß an einem bestimmten Orte bekannt sein. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung des Winddruckes auf einen Körper, so gilt die Geschwindigkeit q des Windes in großer Entfernung vom Körper als gegeben. Soll dagegen der Widerstand des in der Luft bewegten Körpers berechnet werden, so ist die Geschwindigkeit der Luft in unendlicher Entfernung vom Körper zu Null anzunehmen, denn der Körper müßte ja eine unendlich große Luftmenge bewegen, wenn er Luft in unendlicher Entfernung bewegen sollte. Aber auch für die Körperoberfläche selbst läßt sich eine besondere Grenzbedingung aufstellen: zunächst ist es das einfachste, zwischen Flüssigkeit und Körper bei einer reibungslosen Flüssigkeit ebenfalls keine Reibung anzunehmen. Denn wenn Reibung vorhanden wäre, so würde diese nur bedingen, daß sich der Körper mit einer unendlich dünnen Flüssigkeitshaut umgibt, an der dann die weiter entfernte Flüssigkeit reibungslos vorbeigleitet. Diese dünne Haut würde aber den Körper nicht merklich vergrößern, könnte also auch den Widerstand nicht beeinflussen.

Dies vorausgesetzt, ist einleuchtend, daß die Geschwindigkeit q der Flüssigkeit an der Grenze zwischen ihr und dem festen Körper tangential zur Körperoberfläche gerichtet sein muß; denn das Vorhandensein einer Normalkomponente würde besagen, daß Flüssigkeit in den festen Körper hinein oder aus diesem herausströmt. Bezeichnen wir nun an einem Punkte x, y, z der Körperoberfläche die Winkel, die die Oberflächennormale mit den Koordinatenachsen bildet, mit α, β, γ, so hat die Geschwindigkeit u eine

Normalkomponente $u \cdot \cos \alpha$, die Geschwindigkeit v eine Normalkomponente $v \cdot \cos \beta$ und die Geschwindigkeit w eine Normalkomponente $w \cdot \cos \gamma$. Als Ausdruck dafür, daß die gesamte Normalkomponente Null sein soll, haben wir somit die Bedingungsgleichung

$$u \cdot \cos \alpha + v \cos \beta + w \cdot \cos \gamma = 0.$$

Nun ist aber nach den Gesetzen der Differentialrechnung, wenn

$$F(x, y, z) = 0,$$

die Gleichung der Oberfläche des Körpers ist,

$$\cos \alpha = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \cos \beta = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \cos \gamma = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial z},$$

wo

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

gesetzt ist. Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$u \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

als Bedingungsgleichung, der u, v, w an der Körperoberfläche genügen müssen.

Es läßt sich schließlich, wie Lamb[1]) getan hat, zeigen, daß die drei Eulerschen Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und dieser Grenzbedingung nur eine Lösung besitzen können, also u, v, w und p bei gegebenen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind. Die Gleichungen geben daher auch die Werte von p an der Körperoberfläche und durch Integration dieser den Widerstand des Körpers in der Flüssigkeit.

---

[1]) Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Dr. J. Friedel. 1907.

Fünftes Kapitel.

Die Integration der Eulerschen Gleichungen.

Die im vorigen Kapitel abgeleiteten Eulerschen Gleichungen sind im allgemeinen nicht integrabel; sie werden es indessen ohne weiteres, wenn sich eine Funktion φ angeben läßt, für welche gilt

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad . \ . \ . \quad (14)$$

Die Funktion φ wird das Geschwindigkeitspotential der Strömung genannt, und eine Strömung, für die ein Geschwindigkeitspotential existiert eine Potentialströmung. Um die Bedeutung des Geschwindigkeitspotentials zu erkennen, gehen wir zunächst von dem Begriffe der Stromlinien aus; eine Stromlinie ist eine Linie, die so von Punkt zu Punkt gezogen ist, daß ihre Richtung überall mit derjenigen der Flüssigkeitsgeschwindigkeit zusammenfällt. Denken wir uns nun Flächen innerhalb der Flüssigkeit konstruiert, auf denen φ konstant bleibt, so heißen derartige Flächen Äquipotentialflächen. Für ein und dieselbe Äquipotentialfläche gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, da sich ja φ nicht ändern soll, wenn man von einem Punkt einer Äquipotentialfläche zu einem andern derselben Fläche übergeht. Demnach ist nach den Definitionsgleichungen von φ auf jeder Äquipotentialfläche $u = v = w = 0$. Infolgedessen sind die Äquipotentialflächen solche, auf denen ein Fließen nicht stattfindet, oder mit anderen Worten, sie sind ein System von Flächen, die senkrecht zu den Stromlinien zu denken sind.

Eine Potentialströmung unterscheidet sich nun von jeder anderen Strömung dadurch, daß bei ihr keine Wirbelbewegungen stattfinden. Um dies zu erkennen, differenzieren wir die erste Definitionsgleichung für φ nach y, die zweite nach x und erhalten

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

ganz analog findet man:

Die Bedeutung dieser Gleichungen zeigt uns folgende Überlegung. Wir wollen einmal annehmen, die Bewegung der Flüssigkeit sei eine solche, daß sich ein Punkt P derselben mit den Koordinaten x, y, z in der Y-Z-Ebene um einem Punkt 0 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 drehe, und zwar mit einer momentanen Winkelgeschwindigkeit ξ. Es ist dann ξ die Rotationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit um eine zur X-Achse parallelen Achse. Dann ist, wenn r die Entfernung des Punktes P von 0 mißt (vgl. Fig. 10):

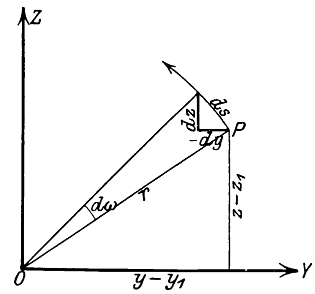


Fig. 10.

$$ds = r\,d\omega,$$

also

$$\frac{ds}{dt} = q = r\frac{d\omega}{dt} = r\xi.$$

Andererseits ist

$$v = -q\frac{z - z_1}{r}, \qquad w = q\frac{y - y_1}{r},$$

also

$$v = -\xi(z - z_1), \qquad w = \xi(y - y_1).$$

Differenzieren wir die erste Gleichung nach z, die zweite nach y und addieren, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

ganz analog bekommt man:

wo η und ζ die Rotationsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit um die Y- und Z-Achse angeben. Die Klammerausdrücke sind aber bei einer Potentialströmung, wie ein Vergleich der Gl. 15 mit den Gl. 16 zeigt, gleich Null, also finden bei einer Potentialströmung keine Rotationen statt. Man nennt übrigens Rotationsbewegungen einer Flüssigkeit allgemein Wirbelbewegungen; die drei Elementarrotationen geben zusammen eine resultierende Rotation mit einer resultierenden Rotationsachse, die sog. Wirbelachse, während die Größen ξ, η, ζ die Wirbelkomponenten heißen.

Eine Potentialströmung herrscht demnach überall dort in einer Flüssigkeit, wo keine Wirbel vorhanden sind.

Nehmen wir jetzt weiter an, unsere Flüssigkeit sei anfangs in Ruhe, so daß $u = v = w = 0$ ist, ferner sei die Dichte überall gleich. Es möge dann unsere Flüssigkeit durch das Auftreten einer Kraft in Bewegung gesetzt werden, die ein Potential Φ besitzt, so daß man also setzen kann

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad . \; . \quad (17)$$

Dann reduzieren sich anfangs, solange u, v, w noch keine merklichen Werte angenommen haben, die Eulerschen Gleichungen auf die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + \frac{1}{\gamma}p\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + \frac{1}{\gamma}p\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi + \frac{1}{\gamma}p\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ die Ableitungen ein und derselben Funktion nach den Koordinaten sind, also die Geschwindigkeit q selbst ein Potential φ besitzt, für welches gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi + \frac{1}{\gamma}p.$$

Daraus folgt, daß potentielle Kräfte in einer idealen Flüssigkeit gleichmäßiger Dichte nur solche Bewegungen hervorrufen können, bei denen die Geschwindigkeit ein Potential hat, also keine Wirbel erzeugen können. Da aber alle möglichen äußeren Kräfte potentieller Natur sind, so folgt, daß bei einer idealen Flüssigkeit gleichmäßiger Dichte die Annahme des Vorhandenseins eines Geschwindigkeitspotentials voll berechtigt ist. Als eine derartige Flüssigkeit gleichmäßiger Dichte kann übrigens auch unsere Atmosphäre angesehen werden.

Andererseits ist die Reibung der Flüssigkeitsteilchen einer natürlichen Flüssigkeit gegeneinander eine nicht potentielle Kraft; folglich können in einer natürlichen Flüssigkeit, also auch in der Luft stets dort Wirbel entstehen, wo die Reibung merkliche Beträge annimmt. Dies ist aber, wie wir später sehen werden, an den Punkten der Fall, an denen große Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Flüssigkeitsteilchen vorkommen.

Kehren wir nunmehr zu den Eulerschen Gleichungen zurück und setzen, unserer Annahme entsprechend,

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so wird

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nehmen wir ferner an, daß die äußeren Kräfte ein Potential haben, so daß wir setzen können

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

so wird aus der ersten der drei Gleichungen:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x},$$

und analog aus der zweiten

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}$$

und aus der dritten

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Hier haben wir in der ersten Gleichung nur Differentialquotienten nach x, in der zweiten nach y, in der dritten nach z; demnach gibt die Integration aller drei Gleichungen ein und dasselbe Resultat und die Integrationskonstante, die bei der Integration der ersten Gleichung von x, der zweiten Gleichung von y, der dritten Gleichung von z unabhängig sein muß, kann nur noch eine Funktion der Zeit allein sein. Nennen wir die Integrationskonstante daher $f(t)$, so wird das Resultat

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = -\Phi - \int \frac{1}{\gamma}\, dp + f(t),$$

oder da
$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi + \int \frac{1}{\gamma} dp + \frac{1}{2} q^2 + f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Für unsere Zwecke interessieren in erster Linie stationäre Strömungen, d. h. solche, bei denen die Geschwindigkeitskomponenten an jedem Orte unabhängig von der Zeit sind. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn ein Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder ein konstanter Luftstrom gegen einen ruhenden Körper bläst.

Unter dieser Annahme wird $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, und die Funktion $f(t)$ muß, da auch von der Zeit unabhängig, eine absolute Konstante sein. Die Integration der Eulerschen Gleichungen gibt uns demnach im Falle einer stationären Strömung die Beziehung:

$$\int \frac{1}{\gamma} dp = C_1 - \frac{1}{2} q^2 - \Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Hier ist nun das Potential Φ der äußeren Kräfte im allgemeinen konstant gegeben, oder es ist Null, resp. zu vernachlässigen. Ist z. B. die Erdschwere die einzige äußere Kraft, so ist Φ konstant, solange die Entfernung vom Erdmittelpunkt sich bei der Bewegung nicht merklich ändert; es kann demnach Φ mit der Konstanten C_1 zu der Konstanten C vereinigt werden. Dadurch erhalten wir die Druckgleichung:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\gamma} dp = C - \frac{1}{2} q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Diese Gleichung gibt uns die gesuchte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit q und dem Drucke p, sie wurde abgeleitet unter der Voraussetzung einer reibungslosen, wirbelfreien Flüssigkeit. Sie gilt zunächst nicht für eine in Wirbel befindliche Flüssigkeit. Fragen wir indessen in einer solchen nur nach der Stromverteilung längs einer bestimmten Stromlinie, so ist die Beschleunigung in Richtung der Stromlinie s: $q \frac{\partial q}{\partial s}$ und das Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial s}$, so daß wir, gleich unter Vernachlässigung äußerer Kräfte die Beziehung erhalten

$$q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s}$$

und demnach durch Integration nach ds:

$$\int \frac{1}{\gamma} dp = C_s - \frac{1}{2} q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

Es gilt demnach für eine wirbelnde Flüssigkeit dasselbe Gesetz für jede einzelne Stromlinie, das für eine wirbelfreie Flüssigkeit allgemein gilt. Der Unterschied liegt darin, daß in der Gl. 20a die Konstante C_s keine absolute Konstante ist wie C in der Gl. 20, sondern für verschiedene Stromlinien sehr verschiedene Werte haben kann. Es kann somit in einer wirbelnden Flüssigkeit diese Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit nur dann benutzt werden, wenn man sicher ist, zwei Punkte derselben Stromlinie miteinander zu vergleichen. Dies dürfte aber meistens nicht feststellbar sein.

Gewöhnlich wird die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit aus dem Energieprinzip abgeleitet. Es führt indessen diese Beweisführung nur zu der letzteren Gleichung, die sich auf ein und dieselbe Stromlinie bezieht ohne darzutun, daß dieselbe Beziehung in wirbelfreier Flüssigkeit allgemein gilt. Wegen der Wichtigkeit der Gleichung sei auch dieser Beweis hier kurz angeführt:

In Richtung einer Stromlinie denken wir uns eine sehr dünne „Stromröhre" herausgegriffen (Fig. 11), so daß die Flüssigkeit innerhalb dieser Röhre in Richtung der Röhrenwände fließt. Querschnitt der Röhre, Geschwindigkeit und Dichte der Flüssigkeit sei an den Punkten A und B der Röhre σ, q, γ resp. σ', q' und γ'. Dann tritt in der Zeiteinheit bei A die Masse $\gamma q \sigma$ in die Röhre ein, bei B die Masse $\gamma' q' \sigma'$ aus. Es gilt also die Beziehung $\gamma q \sigma = \gamma' q' \sigma'$.

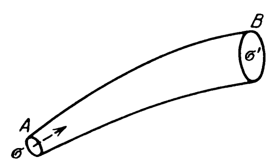


Fig. 11.

Sind weiter die Drucke bei A und B p und p', so leistet die Flüssigkeit bei A pro Sekunde die Arbeit $p\sigma \cdot q$ und verliert bei B an Arbeit $p'\sigma' \cdot q'$. Ferner führt die einströmende Masse bei A pro Sekunde die Energie $\frac{1}{2}\gamma q \sigma \cdot q^2$ mit sich in die Röhre hinein, während die bei B ausströmende Masse die Energie $\frac{1}{2}\gamma' q' \sigma' \cdot q'^2$ hinausträgt. Da keine Energie verloren gehen kann, ergibt sich die Beziehung

$$p\sigma \cdot q + \tfrac{1}{2}\gamma q \sigma q^2 = p'\sigma' q' + \tfrac{1}{2}\gamma' q' \sigma' q'^2$$

oder durch $\gamma q \sigma = \gamma' q' \sigma'$ dividiert

$$\frac{1}{\gamma} p + \frac{1}{2} q^2 = \frac{1}{\gamma'} p' + \frac{1}{2} q'^2.$$

Nun ist $\frac{1}{\gamma'} p' = \int \frac{1}{\gamma} dp$; nehmen wir weiter den Wert $C_s = \frac{1}{\gamma} p + \frac{1}{2} q^2$ als gegebenen Anfangswert bei A an, so folgt dieselbe Gleichung

$$\int \frac{1}{\gamma} dp = C_s - \frac{1}{2} q^2$$

wie oben.

Die hier abgeleitete Beziehung 20 zwischen Druck und Geschwindigkeit wird besonders einfach bei **inkompressiblen Flüssigkeiten**, da dann γ unabhängig von p ist. Man erhält dann

$$p = \gamma \cdot C - \tfrac{1}{2} \gamma q^2$$

oder $p_0 = \gamma \cdot C$ gesetzt

$$\boldsymbol{p = p_0 - \tfrac{1}{2} \gamma q^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Dies ist die Fundamentalgleichung der Hydrodynamik. Der Druck p_0 ist der statische Druck, der unter der Wirkung äußerer Kräfte vorhanden sein würde, wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre. An der Erdoberfläche ist es im allgemeinen der Atmosphärendruck von 760 mm Quecksilbersäule oder 1,03 kg pro qcm. Im Wasser ist noch der Druck der Wassersäule entsprechend der Wassertiefe hinzuzurechnen.

Der Ausdruck $-\frac{1}{2} \gamma q^2$ ist der dynamische Druck, d. i. die Druckveränderung infolge der Strömung. Man sieht, daß er negativ ist, und es nimmt der Druck in einer Flüssigkeit mit zunehmender Geschwindigkeit ab. Dies ist auf den ersten Blick befremdend, wird aber zugleich einleuchten bei folgender Überlegung.

Denken wir uns die Flüssigkeit durch ein Rohr fließen, das allmählich enger wird, so muß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der engeren Stelle größer sein als an der weiteren Stelle, und es wird die Flüssigkeit beim Einströmen in die engeren Stellen beschleunigt. Es muß demnach ein Überdruck an der weiteren Stelle die beschleunigende Kraft sein, die dieses bewirkt.

Bei Anwendung der Gleichung 21 ist indessen Vorsicht geboten, da wir stets die Bedingungen beachten müssen, unter denen sie gilt. Erstens muß die Flüssigkeit wirbelfrei sein und zweitens inkompressibel. Eine Parallelströmung vom Wasser, bei der alle Wasserteilchen sich in derselben Richtung bewegen, genügt dieser Bedingung. Es wird infolgedessen die Beziehung vielfach zur Messung der Geschwindigkeit fließenden Wassers mittels sogenannter Pitotscher Röhren gebraucht. Dieselben sind im Prinzip Manometer, bei denen die eine Öffnung in ruhendes Wasser getaucht wird oder mit der Atmosphäre in Verbindung steht, während das andere Ende in das fließende Wasser eintaucht, und so geformt ist, daß die Strömung möglichst wenig gestört wird. Der am Manometer abgelesene Druckunterschied läßt nach unserer Gleichung die Geschwindigkeit q berechnen.

Für Luft ist indessen die Bedingung der Inkompressibilität nicht erfüllt; trotzdem wird diese Formel bei Geschwindigkeiten bis etwa 100 m auch für Luft als gültig angesehen, und zwar mit Recht, wie wir gleich sehen werden.

Nehmen wir zunächst an, die Bewegungen seien so langsam, daß sich die Temperatur vollständig ausgleichen kann, so gilt für Luft die Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_0}{\gamma_0}=c\,,$$

wo c eine Konstante ist und p_0 und γ_0 Druck und Dichte bei der Geschwindigkeit Null angeben.

Daraus folgt

$$\int\frac{1}{\gamma}\,dp=\frac{p_0}{\gamma_0}\lg p\,,$$

und die Bewegungsgleichung 20 liefert die Beziehung:

$$\frac{p_0}{\gamma_0}\lg p=C-\frac{1}{2}q^2.$$

Da für $q=$ Null, $p=p_0$ sein soll, so ist

$$C=\frac{p_0}{\gamma_0}\lg p_0\,,$$

und man erhält in diesem Falle als Bewegungsgleichung

$$\lg p=\lg p_0-\frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{p_0}q^2 \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Ist hier p und p_0 nur wenig voneinander verschieden, so kann man angenähert schreiben

$$\lg p_0-\lg p=\frac{p_0}{p}-1\,,$$

setzen wir diesen Wert in Gleichung 22 ein und berücksichtigen ferner, daß $\frac{\gamma_0}{p_0}=\frac{\gamma}{p}$ ist, so erhält man

$$\frac{p_0}{p}-1=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{p}q^2,$$

oder

$$p=p_0-\tfrac{1}{2}\gamma\, q^2,$$

also dieselbe Beziehung, die für inkompressible Flüssigkeiten gilt.

Hier ist die Berechtigung unserer Annahme, daß p und p_0 voneinander nur wenig verschieden sind, leicht zu prüfen. Ist z. B. die Geschwindigkeit $q=10$ m pro Sekunde, so ist für Luft mit

$\gamma = 0{,}001225$ in absolutem Maße $\frac{1}{2}\gamma q^2 = 613$ Dynen pro qcm, während andererseit der Atmosphärendruck p_0 etwa 10^6 Dynen pro qcm ist. Es sind demnach nach unserer Formel bei 10 m Geschwindigkeit p und p_0 bis auf $0{,}06\,^0/_0$ einander gleich. Selbst bei 50 m Geschwindigkeit weicht p erst um $1\,^1/_2\,^0/_0$ von p_0 ab, es bleibt unsere Annahme also auch dann noch zulässig.

Zweifelhaft erscheint es indessen, ob die Druckänderung tatsächlich bei derartigen Geschwindigkeiten unter völligem Temperaturausgleich stattfindet.

Aus diesem Grunde müssen wir noch den zweiten Grenzfall behandeln, bei dem die Druckveränderung ohne jeden Temperaturausgleich, also adiabatisch vor sich geht. Hierfür gilt die Zustandsgleichung 12:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{\varkappa}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung wird

$$\int \frac{1}{\gamma}\,dp = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\gamma_0}\,p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

und die Bewegungsgleichung 20 liefert die Beziehung

$$p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = C - \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{\gamma_0}{p_0^{1/\varkappa}}\,q^2.$$

Hier müssen wir, da für $q =$ Null der Druck $p = p_0$ sein soll, $C = p_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ setzen, und man erhält nach einiger Umformung für adiabatische Zustandsänderung die Bewegungsgleichung

$$p = p_0^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \left\{ p_0 - \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\gamma_0 q^2 \right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad . \; . \; . \; . \; (23)$$

Beachten wir schließlich, daß für Luft $\varkappa = 1{,}405$ ist, also: $\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}288$, so erkennt man, daß das zweite Glied der Differenz auf der rechten Seite für Geschwindigkeiten unter etwa 100 m gegenüber dem Atmosphärendruck p_0 klein ist; deswegen können wir für diese Geschwindigkeiten nach dem binomischen Lehrsatz angenähert setzen

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\gamma_0 q^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = p_0^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\cdot p_0^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}-1}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\gamma_0 q^2,$$

und erhalten aus Gleichung 23 die Beziehung

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\gamma_0 q^2.$$

Dies ist wieder dieselbe Gleichung, die für kleine Geschwindigkeiten bei einer Zustandsänderung mit völligem Temperaturausgleich galt, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Dichte γ_0 an Stelle von γ steht, die aber beide bei kleinen Geschwindigkeiten nur wenig differieren. Wir sehen demnach, daß beide Grenzfälle, zwischen denen sich der Vorgang abspielen muß, bei kleinen Geschwindigkeiten zu ein und derselben Gleichung 21 führen, die auch für inkompressible Flüssigkeiten gilt. Hieraus folgt, daß wir, solange wir mit Geschwindigkeiten unter etwa 100 m pro Sekunde zu tun haben, die Beziehung 21 zwischen Druck und Geschwindigkeit auch für Luft unter Atmosphärendruck gelten lassen können, also *die Luft als inkompressible Flüssigkeit* auffassen dürfen. Da wir es nun in der Aviatik im allgemeinen nicht mit wesentlich größeren Geschwindigkeiten zu tun haben, so werden wir in den folgenden Ausführungen den Unterschied zwischen kompressiblen und inkompressiblen Flüssigkeiten ganz fallen lassen und die Dichte der Luft ebenso wie die des Wassers als konstant annehmen.

Um uns zu vergewissern, wie groß die Fehler sind, die durch Annahme der Inkompressibilität der Luft bei verschiedenen Geschwindigkeiten auftreten, diene nachstehende Tabelle. Diese enthält die dynamischen Drucke p_d, das ist die Druckverminderung gemäß der Gleichung $p = p_0 - p_d$, die bei den verschiedenen Geschwindigkeiten eintreten würde, wenn

1. die Luft inkompressibel wäre,
2. einer Zustandsänderung ohne Temperaturausgleich,
3. einer Zustandsänderung mit völligem Temperaturausgleich

unterworfen würde, berechnet nach den ungekürzten Gleichungen 21, 22, 23.

q in m/sk	q_d inkompressibel	q_d unter völligem Temperaturausgleich	q_d adiabatisch
10	612	612	612
50	15310	15230	15190
100	61250	59940	59410
200	245000	224000	217000

Man sieht aus dieser Tabelle, daß bei einer Geschwindigkeit von 100 m pro Sekunde die Annahme der Inkompressibilität der Luft in dem ungünstigsten Falle der adiabatischen Zustandsänderung erst einen Fehler von ca. $3\,^0/_0$ bedingt; bei 200 m Geschwindigkeit beträgt die Abweichung etwa $12\,^0/_0$. Bei noch größeren

Geschwindigkeiten nimmt der Fehler schnell zu; es kann folglich bei Geschwindigkeiten, wie sie von Geschossen erreicht werden, die einfache Beziehung 21 zwischen Druck und Geschwindigkeit nicht benutzt werden. Es ergibt sich somit eine wesentliche Abweichung der Luftwiderstandsgesetze der Geschosse von denen, die in der Aviatik gelten.

Zum Schlusse dieses Kapitels sei noch auf eine besondere wichtige Eigenschaft der Flüssigkeiten hingewiesen, die direkt aus den Bewegungsgleichungen 21 resp. 23 folgt. Nach denselben bewirkt die Bewegung der Flüssigkeit eine Druckverminderung; andererseits wissen wir, daß der innere Druck einer kontinuierlichen Flüssigkeit stets eine positive Größe sein muß, da jede Flüssigkeit unter der Wirkung negativer Drucke zerreißen müßte. Daraus folgt, daß es eine Grenzgeschwindigkeit gibt, die in einer kontinuierlichen Flüssigkeit nicht überschritten werden kann. Wird demnach ein Teil der Flüssigkeit durch äußere Kräfte, z. B. durch entsprechend schnelle Bewegung eines festen Körpers in der Flüssigkeit mit größerer Geschwindigkeit als der Grenzgeschwindigkeit bewegt, so entstehen Hohlräume in der Flüssigkeit. Z. B. löst sich ein Wasserstrahl in Tropfen auf, sobald diese Grenzgeschwindigkeit erreicht ist; in einem größeren Wasserquantum tritt in die Zwischenräume Luft ein, so daß wir eine Mischung von Luft und Wasser erhalten, die als Schaumbildung erscheint. Solange andererseits die Geschwindigkeit nicht durch äußere Kräfte, sondern durch innere Druckdifferenzen veranlaßt wird, ergibt diese Überlegung, daß größere Geschwindigkeiten als die Grenzgeschwindigkeit nicht zustande kommen können. Dies führt uns zu der notwendigen Annahme von Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und der Ausbildung sogenannter Diskontinuitätsflächen, d. h. solcher Flächen, auf deren beiden Seiten die Geschwindigkeit um einen endlichen Betrag verschieden ist, also einen Sprung erleidet.

Die Höhe der Grenzgeschwindigkeit ist leicht anzugeben. Für inkompressible Flüssigkeiten wie Wasser ergibt die Gleichung 21 für die Grenzgeschwindigkeit q_0 die Gleichung:

$$p_0 = \tfrac{1}{2} \gamma q_0^2.$$

An der Wasseroberfläche ist p_0 der Atmosphärendruck, also $= 10^6$ zu setzen; mit $\gamma = 1$ erhalten wir dadurch

$$q_0 = 10^3 \sqrt{2} = 1415 \text{ cm/sek}$$

oder 14,15 m pro Sekunde, resp. 51 km pro Stunde, d. i. eine verhältnismäßig kleine Geschwindigkeit, die schon von schnellfahrenden Torpedobooten und Rennbooten überschritten wird. In größerer

Wassertiefe ist die Grenzgeschwindigkeit entsprechend höher und erreicht in 30 m Wassertiefe den doppelten Betrag. Wesentlich höher liegt die Grenzgeschwindigkeit für Luft: da wir bei der großen Geschwindigkeit adiabatische Zustandsänderung annehmen können, so liefert uns die Gleichung 23 für die Grenzgeschwindigkeit die Beziehung

$$p_0 = \frac{1}{2} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \gamma_0 q_0^2;$$

hieraus folgt, für den Atmosphärendruck $p_0 = 10^6$, $\varkappa = 1{,}405$ und $\gamma_0 = 0{,}001225$: $q_0 = 753$ m/sek, also eine Geschwindigkeit, die nur von den modernsten Geschossen überschritten wird. Es wird sich demnach hinter Geschossen, die eine Geschwindigkeit über 753 m besitzen, ein vollständiges Vakuum bilden.

Das Vorhandensein der Grenzgeschwindigkeiten bedeutet eine wesentliche Einschränkung der Gültigkeit unserer Bewegungsgleichungen; denn diese gelten nur für kontinuierliche Medien. Bei Überschreitung der Grenzgeschwindigkeit treten aber Diskontinuitäten auf, so daß die allgemeinen Bewegungsgleichungen ungültig werden. Hierin liegt eine der Hauptschwierigkeiten der Berechnung des Luft- und Wasserwiderstandes.

Sechstes Kapitel.

Der Widerstand von Kugel und Platte in einer reibungslosen Flüssigkeit.

Da der Druck, den ein Körper innerhalb einer bewegten Flüssigkeit erfährt, gleich dem inneren Drucke der Flüssigkeit in unmittelbarer Nähe der Körperoberfläche ist, so ist ersterer ebenfalls durch die Gl. 21 gegeben, und der Gesamtwiderstand ergibt sich durch Integration über die Körperoberfläche.

Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt indessen darin, daß durch das Einbringen eines Körpers in eine gleichmäßige Strömung diese selbst verändert wird und dadurch in der Nähe des Körpers eine andere Geschwindigkeit herrscht, als in großer Entfernung.

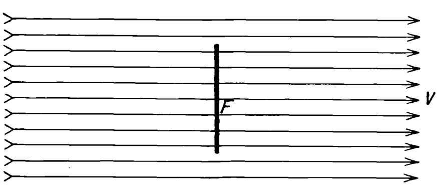


Fig. 12.

Bringen wir z. B. (Fig. 12) eine dünne Platte von der Größe F in einen gleichmäßigen Luftstrom mit der Geschwindigkeit V mit ihrer Ebene senkrecht zu dem Luftstrome, so ist es klar, daß die Platte den Luftstrom verändert, da die Luft nicht durch die Platte hindurchströmen kann. In erster Annäherung können wir annehmen, daß die Luftgeschwindigkeit vor der Platte bis auf Null abnimmt; dann herrscht auf der Vorderseite der Platte der Atmosphärendruck p_0. Könnte die Luft hinter der Platte unendlich schnell wieder zusammenströmen, so würde sie auf der Rückseite der Platte wieder sofort die Geschwindigkeit V annehmen. Wir hätten dann nach Gl. 21 hinter der Platt den Druck $p^0 - \frac{1}{2}\gamma V^2$. Es verbleibt somit in Richtung der Luftbewegung ein Überdruck $\frac{1}{2}\gamma V^2$ gegen die Platte; da dieser an der ganzen Platte konstant ist, erhalten wir den Widerstand durch Multiplikation mit der Plattengröße F zu

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2} \gamma \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Dies ist die bekannte Newtonsche Widerstandsformel für eine senkrecht vom Winde getroffene Platte. Dieselbe gibt den Druck K in Dynen, wenn V in cm pro Sekunde, und F in qcm gemessen wird. Wollen wir K im praktischen Maße erhalten, also in kg und drücken wir V in m pro Sekunden, F in qm aus, setzen wir schließlich für γ seinen Wert 0,001225 ein, so erhalten wir

$$\boldsymbol{K} = \mathbf{0{,}0624}\, \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24\text{a})$$

Zu derselben Newtonschen Formel führt uns folgende Überlegung: nehmen wir an, die Platte bewege sich mit der Geschwindigkeit V durch ruhende Luft, so muß sie der unmittelbar vor sich befindenden Luft mindestens die Geschwindigkeit V erteilen, da die Luft der Platte Platz machen muß. Die Luftmenge die in dieser Weise pro Sekunde in Bewegung zu setzen ist, ist $\gamma \cdot F \cdot V$, so daß sie pro Sekunde eine Energie $\frac{1}{2} \gamma F V \cdot V^2$ mit sich fortführt, die sie von der Platte zu bekommen hat. Es legt nun die Platte in der Sekunde den Weg V zurück, und wir müssen, da die aufgewendete Arbeit Kraft mal Weg ist, diese Energie durch V dividieren, um die Kraft zu erhalten, die zur Bewegung der Platte aufgewandt werden muß; dies ergibt denselben Wert

$$K = \frac{1}{2} \gamma F V^2.$$

Diese Ableitung der Formel läßt deutlich erkennen, daß der Widerstand veranlaßt ist durch die Energie, die dadurch aufgewandt werden muß, daß Luft aus der Umgebung der Platte dauernd in Bewegung gesetzt werden muß.

Beide Ableitungen der Newtonschen Formel lassen indessen erkennen, daß diese nur annähernd richtig sein kann; denn dadurch, daß die Luft um die Platte herumfließen muß, um den Raum hinter der Platte wieder auszufüllen, kommt noch eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Plattenebene hinzu und die mittlere Geschwindigkeit in der Umgebung wird eine andere, als wir annahmen; dies bewirkt, daß der Zahlenfaktor der Gl. 24a auf jeden Fall in Wirklichkeit ein etwas anderer ist, als unsere Rechnung ergab.

Ist die Form des Körpers, der sich in der reibungslosen Flüssigkeit befindet, analytisch gegeben, so ist nach den Ausführungen des Kapitels 4 auch die Strömung in der Umgebung des Körpers eindeutig bestimmt und muß sich aus dem dort abgeleiteten Gleichungssystem bestimmen lassen. Indessen bietet die Lösung dieses Gleichungssystemes wesentliche mathematische Schwierigkeiten und ist nur für wenige einfache Körperformen bisher gelungen. Gefunden ist die Lösung z. B. für eine **Kugel**, die von einem Flüssigkeitsstrome getroffen wird, der in großer Entfernung von der Kugel parallel mit einer konstanten Geschwindigkeit V fließt. Wir haben in diesem Fall folgende Grenzbedingungen:

Nehmen wir als Z-Achse die Strömungsrichtung, so muß in großer Entfernung von der Kugel $u = 0$, $v = 0$, $w = V$ sein. Wählen wir ferner als Koordinatenanfang den Kugelmittelpunkt, so ist die Gleichung der Kugeloberfläche:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

wo R der Radius der Kugel ist. Daraus folgt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

und aus der Oberflächenbedingung 13:

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

wird in unserem Falle:

$$ux + vy + wz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, ein Geschwindigkeitspotenzial φ zu finden, das einerseits diesen Grenzbedingungen genügt, andererseits die Kontinuitätsgleichung erfüllt, die wenn wir u, v, w durch φ ausdrücken, lautet:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Als eine solche Funktion fand sich:

$$\varphi = -z\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)V, \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Abstand eines Punktes x, y, z vom Kugelmittelpunkt ist. Um zu zeigen, daß die Funktion φ tatsächlich allen gestellten Bedingungen entspricht, gewinnen wir zunächst u, v, w aus φ durch Differentiation nach x, y, z unter Berücksichtigung, daß $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ ist, und erhalten

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{3}{2} z \frac{R^3}{r^5} x V$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{3}{2} z \frac{R^3}{r^5} y V$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{3}{2} z \frac{R^3}{r^5} z V + \left(1 + \frac{R^3}{2 r^3}\right) V.$$

Diese Gleichungen ergeben für sehr großes r ohne weiteres $u = 0$, $v = 0$, $w = V$, so daß die Grenzbedingung für große Entfernung erfüllt ist. Zur Prüfung der Oberflächenbedingung 25 haben wir in den Ausdrücken für u, v, w $r = R$ zu setzen, dann ergibt Gl. 25:

$$-\frac{3}{2} \frac{1}{R^2} z V (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{2} z V = 0,$$

eine Gleichung, die identisch erfüllt wird, wenn man berücksichtigt, daß für die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Schließlich überzeugt man sich ebenso leicht durch Differentiation der Ausdrücke u, v, w daß sie auch der Kontinuitätsgleichung genügen.

Um nun die Drucke gegen die Kugel zu finden, müssen wir die Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche berechnen. Die Komponenten u_k, v_k, w_k finden wir, wenn wir $r = R$ setzen und erhalten:

$$u_k = -\frac{3}{2} \frac{xz}{R^2} V, \qquad v_k = -\frac{3}{2} \frac{yz}{R^2} V, \qquad w_k = -\frac{3}{2} \frac{z^2}{R^2} V + \frac{3}{2} V.$$

Aus diesen Komponenten ergibt sich die resultierende Geschwindigkeit q_k für Punkte der Kugeloberfläche

$$q_k^2 = u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 = \frac{9}{4} V^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right).$$

Die Gl. 21 gibt uns dann den Druck p_k zu:

$$p_k = p_0 - \frac{1}{2} \gamma q_k^2 = p_0 - \frac{9}{8} \gamma V^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Die resultierende Kraft, die die strömende Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, muß schon aus Symmetriegründen in Richtung der Z-Achse liegen, und wir erhalten sie, wenn wir von diesen Drucken, die überall senkrecht zur Kugeloberfläche stehen, die Komponenten in Richtung der Z-Achse bilden und über die Kugeloberfläche integrieren.

Zu diesem Zwecke teilen wir die Kugeloberfläche durch Parallelkreise in Ringflächen senkrecht zur Z-Achse von der Breite ds ein

(Fig. 13). Auf jeder derartigen Ringfläche schließt überall der Druck p mit der Z-Achse denselben Winkel ϑ ein, so daß die Komponente in Richtung der Z-Achse $p_k \cos\vartheta$ ist. Nun folgt aber aus der Figur:

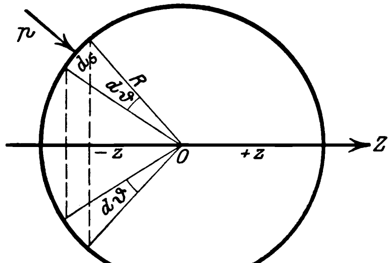


Fig. 13.

$$\cos\vartheta = -\frac{z}{R}$$

und folglich

$$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2}}\, dz.$$

Die Fläche dF eines Oberflächenringes mit dem Zentriwinkel $d\vartheta$ ergibt sich daraus zu

$$dF = 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}\cdot ds = 2\pi R dz.$$

Als Gesamtkraft in Richtung der Z-Achse gegen die Kugel erhalten wir somit

$$K = \int_{-R}^{+R} p_k \cos\vartheta\, dF = -\int_{-R}^{+R} 2\pi p_k z\, dz$$

und wenn wir den oben gefundenen Wert für p_k einsetzen

$$K = 2\pi p_0 \int_{+R}^{-R} z\,dz - \frac{q}{4}\pi\gamma V^2 \int_{+R}^{-R} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) z\,dz. \quad . \; . \; (28)$$

Hier ist aber jedes der beiden Integrale Null, da sie beim Einsetzen der oberen und unteren Grenze denselben Wert annehmen.

Wir kommen somit zu dem überraschenden Resultat, daß in einer idealen, strömenden Flüssigkeit auf eine Kugel keine Kraft ausgeübt wird, ein Resultat, das der Beobachtung in einer wahren Flüssigkeit direkt widerspricht. Müßte doch, wenn das Resultat auf eine wahre Flüssigkeit übertragbar wäre, eine Kugel in einer solchen ohne Kraftanstrengung beliebig schnell bewegt werden können, wenigstens so lange, als die im vorigen Kapitel festgelegten Geschwindigkeitsgrenzen an keinem Punkte überschritten werden. Dies seltsame Resultat wird dadurch hervorgerufen, daß sich das Strömungsbild vor und hinter der Kugel vollkommen gleicht; denn der Ausdruck für q gibt für negative und positive Werte von z dasselbe Resultat. In Fig. 14 ist das Strömungsbild dargestellt: die Stromlinien weichen der Kugel aus und drängen sich an den Punkten des größten Umfanges am meisten zusammen, um hinter der Kugel wieder dieselbe Verteilung wie vor ihr anzunehmen. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist an den Punkten C und D Null und erreicht an den Punkten A und B, resp. an dem Umfange AB den Maximalwert von $^3/_2\ V$. Im übrigen schmiegt sich die Strömung der Kugeloberfläche vollständig an, und die Drucke der Flüssigkeit vor der Mittelzone AB werden durch gleiche Drucke hinter ihr aufgehoben.

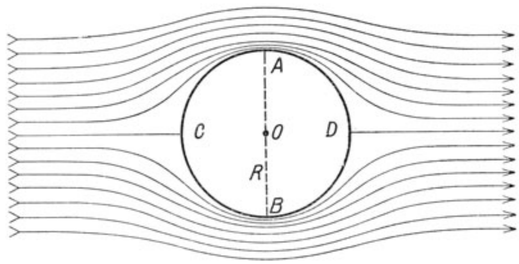


Fig. 14.

Das gleiche Resultat würden wir erhalten, wenn wir die Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt denken. Die Kugel muß zwar fortgesetzt Energie aufwenden, um die vor ihr befindliche Flüssigkeit in Bewegung zu setzen; — diese gibt indessen, indem sie um die Kugel herumfließt, ihre gesamte Bewegungsenergie an die Rückseite der Kugel wieder ab.

Wählen wir als umströmten Körper keine Kugel, sondern irgendeine andere symmetrische Körperform, z. B. ein Elipsoid, so ist ohne nähere Rechnung einleuchtend, daß wir auch dann stets ein symmetrisches Strömungsbild und demnach keinen Widerstand bekommen müssen.

Aus dem Widerspruch dieses theoretischen Resultates mit der Beobachtung geht hervor, daß unsere Annahme, die Luft oder das Wasser als reibungslose Flüssigkeit anzusehen, unhaltbar ist, und wir zur Bestimmung des Widerstandes die Reibung in der Flüssigkeit, sowie diejenige des festen Körpers gegen die Flüssigkeit berücksichtigen müssen. Wie diese Reibung das Strömungsbild verändert und dadurch den Widerstand eines symmetrischen Körpers veranlaßt, soll im nächsten Kapitel gezeigt werden.

Etwas günstiger sind die Resultate, die die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit für den Widerstand einer ebenen Platte ergeben.

Betrachten wir eine Fläche F, die senkrecht gegen einen Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit V gestellt ist (Fig. 15), so ist klar, daß die Flüssigkeit in Richtung der Plattenebene plötzlich eine unendlich große Geschwindigkeitskomponente also auch eine unendlich große Beschleunigung annehmen müßte, um die Rückseite der Platte zu umspülen. Da aber die möglichen Geschwindigkeiten begrenzt sind, so wird eine Umspülung der Platte nicht eintreten, und auf der Rückseite keine Strömung vorhanden sein. Tatsächlich beobachtet man auch einen glockenförmigen Hohlraum hinter der Fläche, wenn ein Wasserstrahl die Fläche trifft. Kirchhoff und Lord Raleigh nehmen nun an, daß an diesem Strömungsbild nichts geändert wird, wenn die Platte ganz in Flüssigkeit eintaucht: d. h. in dem Raume H bleibt die Flüssigkeit in Ruhe. Wir erhalten dadurch an der Grenze von H eine Mantelfläche $ADBC$, an der die Geschwindigkeit einen Sprung erleidet; demnach ist die Mantelfläche eine Diskontinuitätsfläche in der Flüssigkeit, die sich von der Platte aus bis in die Unendlichkeit erstreckt. Es muß nun in dem Raume H überall derselbe Druck p_h herrschen, da Druckdifferenzen Bewegung verursachen würden, und dieser Druck muß derselbe sein, der an der Diskontinuitätsfläche herrscht, da sonst Flüssigkeit in den Raum hineinströmen würde. An der Diskontinuitätsfläche haben wir aber in großer Entfernung von der Platte die Geschwindigkeit V, mithin den Druck $p_0 - \frac{1}{2}\gamma V^2$. Infolgedessen herrscht derselbe Druck an der ganzen Diskontinuitätsfläche, also auch in dem Raume H, so daß $p_h = p_0 - \frac{1}{2}\gamma V^2$.

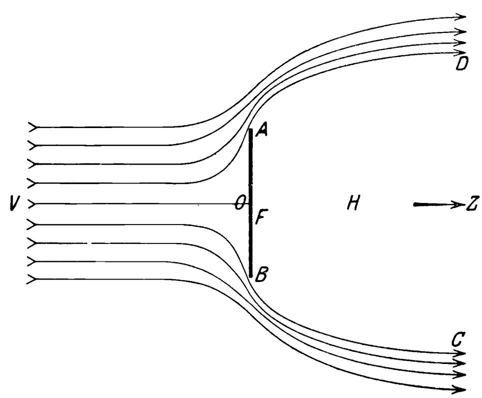


Fig. 15.

Vor der Fläche ist im Mittelpunkte O auf jeden Fall die Geschwindigkeit Null, also haben wir hier den Druck p_0. Nach den Kanten A und B hin nimmt die Geschwindigkeit allmählich zu, so daß der mittlere Druck vor der Fläche ein wenig kleiner als p_0 ausfällt. Es ist nun Kirchhoff und Lord Raleigh gelungen, das Geschwindigkeitspotential für die Strömung und somit die Druckverteilung vor der Platte zu finden, wenn diese die Form eines langgestreckten Rechtecks hat. Die Rechnung, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, ergibt dann als Gesamtkraft der strömenden Flüssigkeit gegen die Fläche

$$\boldsymbol{K} = \frac{\pi}{\pi + 4}\gamma \boldsymbol{V}^2 \cdot \boldsymbol{F} = 0{,}440\,\gamma \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{F} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

Diese Lord Raleighsche Formel unterscheidet sich von der

Newtonschen nur dadurch, daß an Stelle des Faktors 0,5 der Faktor 0,44 steht, entsprechend der Berücksichtigung der geringen Strömung vor der Platte.

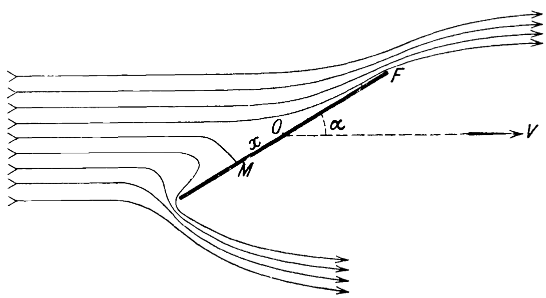


Fig. 16.

In ähnlicher Weise ist es Lord Raleigh gelungen, den Widerstand einer schräg gegen den Strom gestellten Platte zu berechnen. Bezeichnet α den Neigungswinkel der Platte gegen den Flüssigkeitsstrom (Fig. 16), so ist nach Lord Raleigh der Widerstand einer Platte in der Form eines langgestreckten Rechtecks (lange Seite senkrecht zur Strömung), gegeben durch die Gleichung

$$\boldsymbol{K} = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \gamma \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Ist hier der Winkel α nur klein, so wird der Nenner nahezu unabhängig von α, und man erhält angenähert

$$\boldsymbol{K} = \frac{\pi}{4} \gamma \boldsymbol{V}^2 \boldsymbol{F} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30\text{a})$$

also Proportionalität mit dem Sinus des Winkels α, resp. dem Winkel α selbst.

Der Druckmittelpunkt M liegt an dem Punkte, wo sich die Strömung teilt; er ist aus der Plattenmitte gegen die Vorderkante hin verschoben um eine Strecke x, für die Lord Raleigh fand

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

wenn b die ganze Breite der Platte ist; als Grenzwert für sehr kleines α ergibt sich $x = \frac{3}{16} b$, also eine Verschiebung um nicht ganz ein Viertel der Plattenbreite gegen die der Strömung zugekehrte Kante hin.

Zu einer wesentlich anderen Abhängigkeit des Widerstandes vom Neigungswinkel führt folgende Betrachtungsweise: bewegt sich die Platte (Fig. 17) in der Sekunde von AB nach CD, so ist $AC = BD = V$, und das pro Sekunde in Bewegung zu setzende Luftquantum $\gamma V F \sin\alpha$; die Luft wird aber nicht in Richtung von AC in Bewegung gesetzt, sondern senkrecht zur Platte in Richtung von AE und braucht demnach, um der Platte auszuweichen, nur eine Geschwindigkeit $V \sin\alpha$ anzunehmen. Folglich ist die pro Sekunde von der Luft fortgeführte Energie $\frac{1}{2}\gamma V F \sin\alpha \cdot V^2 \sin^2\alpha$. Der Widerstand K steht senkrecht auf AB, fällt also in Richtung von AE; folglich ist zur Überwindung des Widerstandes K in Richtung AC pro Sekunde eine Arbeit $K V \sin\alpha$ zu leisten. Durch Gleichsetzen der zu leistenden Arbeit und der fortgeführten Energie bekommt man

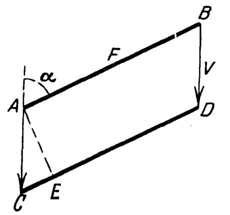


Fig. 17.

$$K = \tfrac{1}{2}\gamma V^2 F \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Diese Widerstandsformel rührt von Newton her und gibt demnach eine quadratische Abhängigkeit des Widerstandes vom Neigungswinkel; sie wurde lange Zeit als gültig angesehen, gilt heute aber als verworfen, da sie in keiner Weise mit den Tatsachen übereinstimmt. Sie würde Gültigkeit haben, wenn die Teilung des Flüssigkeitsstromes nicht, wie in Fig. 16, an einem Punkte auf der Platte, sondern an der Vorderkante der Platte stattfände. Wir hätten dann vor der Platte überall die Flüssigkeitsgeschwindigkeit $V \cos\alpha$, da die Normalkomponente Null sein muß, also einen Druck $p_v = p_0 - \frac{1}{2}\gamma V^2 \cos^2\alpha$; hinter der Platte herrscht ebenso wie bei der senkrecht getroffenen Platte der Druck $p_h = p_0 - \frac{1}{2}\gamma V^2$. Die Differenz beider Drucke ergibt $p = \frac{1}{2}\gamma V^2 \sin^2\alpha$, also die quadratische Abhängigkeit vom Neigungswinkel. Die Beobachtung zeigt indessen, daß eine Teilung des Flüssigkeitsstromes an der Vorderkante nicht stattfindet, also die Newtonsche Formel nicht zutreffend sein kann.

Aber auch die Lord Raleighsche Formel gibt merklich kleinere Werte als die Beobachtung. Dies scheint in erster Linie daran zu liegen, daß die Versuchsbedingungen in einem wesentlichen Punkte von der theoretischen Annahme abweichen.

Das Strömungsbild, Fig. 16, ist nur dann zutreffend, wenn Vorder- und Hinterkante der Fläche F vollkommen scharf sind. Ist dagegen, wie in Fig. 18, die vordere Kante B nur ein wenig abgerundet, so hat die v-Komponente der Geschwindigkeit Zeit, auch ohne unendlich große Beschleunigung, also unter der Wirkung des maximal möglichen Atmosphärendruckes, sich so schnell zu entwickeln, daß eine Umspülung der hinteren Plattenseite stattfinden kann. Während also an der hinteren, der Strömung abgekehrten Kante das Strömungsbild, Fig. 16, bestehen bleibt, haben wir an der der Strömung zugekehrten Kante ein wesentlich anderes Bild, entsprechend etwa der Fig. 18. Wir erhalten dadurch im Gegensatz zu Fig. 16 auf beiden Seiten der Platte eine Potentialströmung. Diese unterscheidet sich indessen wesentlich von der Potential-

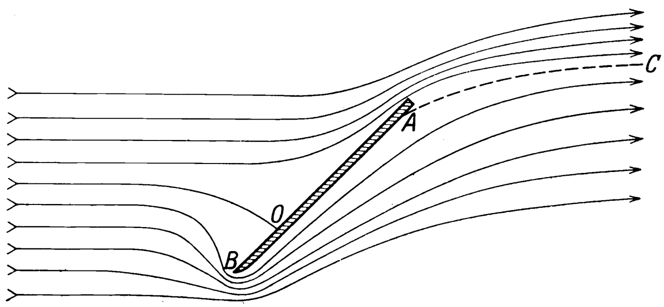


Fig. 18.

strömung, Fig. 19[1]), die sich durch Aufstellung des Geschwindigkeitspotentiales aus den Eulerschen Gleichungen für den Fall einer geneigten Platte ergibt, wenn die physikalische Unmöglichkeit einer unendlichen Beschleunigung im Punkte A nicht berücksichtigt wird. Wir haben nämlich in dem Strömungsbild, Fig. 18, in der Fläche A—C eine Diskontinuitätsfläche, die hier die ganze Strömung aufschneidet.

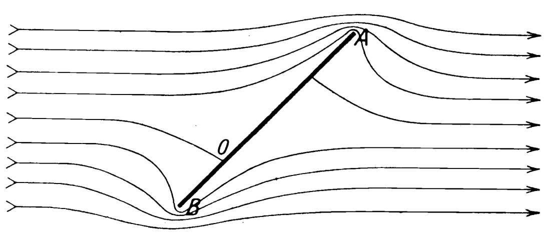


Fig. 19.

Es dürfte möglich sein, das Potential der Strömung gemäß Fig. 18 zu berechnen und dadurch einen mathematischen Ausdruck für den Widerstand K in diesem Falle zu gewinnen. Ohne Rechnung erkennt man bereits, daß der Druck K in Fig. 18 im Gegensatz zu Fig. 19 einen positiven Wert hat, indem die Flüssigkeit vor der Platte um den Punkt O herum völlig zur Ruhe kommt, ebenso wie in Fig. 19, dagegen hinter der Platte überall starke Geschwindigkeit besitzt. Da sich auf jeden Fall bei B in

[1]) Das Bild ist dem Lehrbuch der Hydrodynamik von H. Lamb entnommen.

Fig. 18 eine wesentlich erhöhte Geschwindigkeit ausbildet und diese auch in der Nähe von B hinter der Platte herrscht, ist ferner klar, daß der Widerstand bei dem Strömungsbild Fig. 18 größer ist, wie der bei dem Bilde Fig. 16. Welches Strombild entsteht, hängt in einer reibungslosen Flüssigkeit von der Abrundung der der Strömung zugekehrten Kante ab; indessen wird bei geringem Winkel eine weniger starke Verrundung notwendig sein zur Erlangung des Strombildes Fig. 18, als bei einem größeren Neigungswinkel.

Aus dem Strömungsbild für die Platte geht hervor, daß wir bei ihr in einer reibungslosen Flüssigkeit im Gegensatz zu der Kugel nur dadurch zu einem endlichen Widerstand gelangen, daß sich die Strömung nicht der Hinterfläche anschmiegt und das Strömungsbild auf beiden Seiten der Platte verschieden aussieht. Veranlassung für diese Unsymmetrie sind die Plattenkanten, die die Flüssigkeit nicht umströmen kann, da sie hierzu unendlich große Beschleunigung annehmen müßte. Wir können hieraus schließen, daß bei jeder Körperform mit scharfen Kanten ein unsymmetrisches Strömungsbild entstehen muß, und demnach ein solcher Körper stets einen größeren Widerstand haben wird, als einer mit gut abgerundeten Konturen.

Auf die Berechnung der Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit um andere Körperformen als Kugel und Platte soll hier nicht näher eingegangen werden, da die betrachteten zwei Fälle bereits die charaktistischen Eigenschaften der Strömung erkennen lassen, eine direkte Berechnung des Widerstandes in einer natürlichen Flüssigkeit aber doch nicht aus diesen Strömungsbildern möglich ist.

Von Wichtigkeit für die Aviatik ist indessen das Verhalten gewölbter Flächen; dieses erklärt sich im Prinzip aus den Bewegungsgleichungen einer reibungslosen Flüssigkeit.

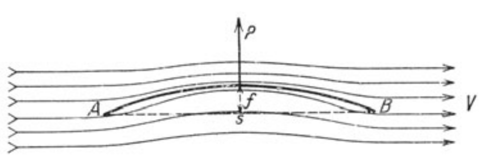


Fig. 20.

Haben wir eine ebene Platte von verschwindend kleiner Dicke parallel zur strömenden Flüssigkeit, so ist deren Widerstand Null. Ist die Fläche indessen gewölbt (Fig. 20) und liegt die Sehne s parallel zur Strömung V, so entsteht trotzdem ein Druck P senkrecht zur strömenden Flüssigkeit; denn die Flüssigkeit muß sich, um die Platte zu umströmen, oberhalb dieser zusammendrängen, also beschleunigt werden; dagegen divergieren unterhalb der Platte die Stromlinien und die Strömung wird verlangsamt. Dies bedeutet aber eine Druckverminderung oberhalb der Platte und eine Druckvermehrung unterhalb der Platte, so daß ein resultierender Druck P, nach der konvexen Seite der Platte hin, entsteht.

Ist die Platte kugelförmig gekrümmt, so können wir durch folgende Überlegung die Größe der Druckkraft K senkrecht zu V bekommen. Sehen wir von den Diskontinuitäten, die die kreisförmige Unterkante AB der Fläche erzeugt, ab, so muß die Geschwindigkeitsverteilung oberhalb der Fläche nach denselben Gesetzen erfolgen, wie bei der Vollkugel, da ja die Grenzbedingungen dieselben sind; nur müssen wir berücksichtigen, daß unmittelbar vor dem Punkte A die Geschwindigkeit V herrschen muß. Wir erhalten dadurch als Geschwindigkeit an der Oberseite der Fläche

$$q_f^2 = V^2 \frac{R^2 - z^2}{R^2 - z_0^2},$$

wenn wir wieder die Strömungsrichtung als Z-Achse und den Punkt O als Koordinatenanfang wählen; z_0 ist die Entfernung $AO = \frac{1}{2} s$, also der Radius der Vertikalprojektion, und R ist der Krümmungsradius der Fläche. Wir haben demnach in Richtung von P eine dynamische Druckkraft K_f, die aus dieser Geschwindigkeitsverteilung resultiert

$$K_f = -\frac{1}{2} \gamma \int V^2 \frac{R^2 - z^2}{R^2 - z_0^2} \, dF \cos \vartheta,$$

wenn dF ein Element der Fläche und ϑ der Neigungswinkel derselben gegen P ist. Die Auswertung des Integrals ergibt

$$K_f = -\frac{1}{2} \pi \gamma z_0^2 V^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z_0^2}{R^2 - z_0^2}\right).$$

Hier ist $\pi z_0^2 = F$ die Projektion der Fläche, die wir bei kleiner Krümmung der Fläche selbst gleichsetzen können, und folglich $-\frac{1}{2} \gamma \pi z_0^2 V^2$ der dynamische Druck, der von einer gleichmäßigen Geschwindigkeit V herrühren würde. Also gibt der zweite Summand in K_f die Druckkraftverminderung, die durch die Geschwindigkeitszunahme oberhalb der Fläche verursacht wird. Unterhalb der Fläche haben wir dieselbe Geschwindigkeitsabnahme und demnach dieselbe Druckkraftvermehrung; somit gibt der doppelte Wert des zweiten Summanden die resultierende Kraft gegen die Fläche und wir erhalten

$$K = \frac{1}{2} \gamma F V^2 \frac{z_0^2}{R^2 - z_0^2};$$

drücken wir jetzt noch den Krümmungsradius R durch die Länge des Krümmungspfeiles f aus, so ist, solange f klein gegen s, das Krümmungsverhältnis $\frac{f}{s}$ also klein gegen Eins ist,

$$\frac{z_0^2}{R^2 - z_0^2} = 16 \left(\frac{f}{s}\right)^2,$$

und man erhält

$$K = 8\,\gamma\,V^2 F \left(\frac{f}{s}\right)^2 \quad \text{. . . . . (32)}$$

Ist die Fläche nicht kugelförmig, sondern zylindrisch gekrümmt mit der Zylinderachse senkrecht zu V, so erhält man durch dieselbe Betrachtungsweise, wenn man von dem Geschwindigkeitspotential einer Strömung ausgeht, die einen Zylinder umströmt, die Gleichung

$$K = 32\,\gamma\,V^2 F \left(\frac{f}{s}\right)^2 \quad \text{. . . . . (33)}$$

Diese Formeln stimmen der Größenordnung nach mit den Versuchsergebnissen überein. Eine genaue Übereinstimmung kann von ihnen nicht erwartet werden, da einmal Versuchsflächen nicht unendlich dünn hergestellt werden können, andererseits die Störung der Kanten unberücksichtigt geblieben ist.

Ist die gekrümmte Fläche außerdem gegen die Geschwindigkeit V geneigt, so kommt noch eine aus der Neigung resultierende Kraftkomponente zu K hinzu, und man erkennt, daß bei kleinen Neigungswinkeln die Druckkräfte gegen gewölbte Flächen wesentlich größer sind, als gegen ebene Flächen. Stehen dagegen die gewölbten Flächen senkrecht gegen den Flüssigkeitsstrom, so kann das Strömungsbild nicht wesentlich anders ausfallen, wie bei ebenen Flächen; folglich ist in diesem Falle durch Krümmung der Flächen keine große Druckzunahme zu erzielen.

Siebentes Kapitel.

Die Wirkung der inneren Reibung einer Flüssigkeit.

Wie wir gesehen haben, entsprechen die Gesetze des Widerstandes eines Körpers in einer idealen Flüssigkeit teilweise nicht den Beobachtungen des Widerstandes in Luft und Wasser; daraus müssen wir schließen, daß es auf jeden Fall für Luft und Wasser unzulässig ist, die innere Reibung zu vernachlässigen, wie wir es bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen getan haben; denn dies ist die einzige Vernachlässigung, die wir ohne nähere Prüfung vornahmen. Wir werden daher in diesem Kapitel zu untersuchen haben, warum die innere Reibung trotz ihrer Kleinheit eine wesentliche Abänderung der Widerstandsgesetze herbeiführt.

Die innere Reibung einer Flüssigkeit ist der Ausdruck dafür, daß die Flüssigkeitsteilchen Formveränderungen einen Widerstand entgegensetzen; ihre Größe wird gemessen durch den Reibungskoeffizienten μ. Die Bedeutung dieses Koeffizienten erhellt am besten aus der sogenannten „Laminar“-Bewegung einer Flüssigkeit: wir nehmen an, unsere Flüssigkeit bewege sich in Schichten parallel zur X-Z-Ebene so zwar, daß in jeder Schicht mit demselben Abstande y von dieser Ebene konstante Geschwindigkeit herrscht, während in den verschiedenen Schichten die Geschwindigkeit verschieden sein möge. Die Richtung der Geschwindigkeit wählen wir als X-Achse und bezeichnen sie mit u. Es ist dann $v = w =$ Null und ferner $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, während $\frac{\partial u}{\partial y}$ einen endlichen variablen Wert besitzt. Die verschiedenen Schichten gleiten somit wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeit aneinander vorüber und üben aneinander Reibung aus. Dieser Reibungswiderstand, der auf die langsamere Schicht beschleunigend, auf die schnellere Schicht verzögernd wirkt, ist nach Newton dem Geschwindigkeitsunterschied der reibenden Schichten und deren Größe proportional, dagegen umgekehrt proportional dem Abstande derselben voneinander. Ist demnach der Geschwindigkeitsunterschied Δu und der Abstand Δy und die Größe der Fläche F, so ist die Reibung gegeben durch die Gleichung

$$K = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} F \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

wo der Proportionalitätsfaktor μ der Koeffizient der inneren Reibung ist und von den Eigenschaften der Flüssigkeit abhängt.

Die Gleichung 34 ist zunächst ein willkürlich angenommenes Gesetz. Die Annahme der Proportionalität der Reibungskraft umgekehrt mit dem Abstande der reibenden Schichten muß sogar widersinnig scheinen, wenn die Schichten völlig eben sind, da dann der Abstand zweier benachbarter Schichten Null ist. Stellen wir uns aber gemäß der kinetischen Gastheorie vor, daß die Moleküle der Flüssigkeit in fortdauernder Bewegung sind und demnach auch eine Bewegungskomponente senkrecht zur Schicht haben, so tritt schon gegenseitige Berührung der Moleküle ein, wenn die Schichten einen wenn auch nur kleinen mittleren Abstand voneinander haben; und in dieser Auffassung ist es zulässig, in einer Flüssigkeit von einem Abstande benachbarter Schichten zu sprechen. Es werden dann die Moleküle der langsameren Schicht, sobald sie mit denen der schnelleren zusammenstoßen, Bewegungsenergie empfangen, also beschleunigt werden, dagegen die Moleküle der schnelleren Schicht beim Zusammenstoß Bewegungsenergie abgeben und verzögert werden. Dies bedeutet die Wirkung einer Kraft zwischen beiden Schichten, die eben als Reibung bezeichnet wird. Berechnet man diese Kraft nach den Regeln der kinetischen Gastheorie für ein Gas, so wird man zu derselben Gleichung 34 geführt, wenn man für den Reibungskoeffizienten μ den Wert einsetzt

$$\mu = \tfrac{1}{3} \gamma c \lambda,$$

wo c die mittlere Geschwindigkeit und λ die mittlere Weglänge der Moleküle des Gases mißt.

Nehmen wir im Gegensatz zur kinetischen Gastheorie an, unsere Flüssigkeit erfülle stetig den Raum wie bisher, so wird der Abstand benachbarter Schichten unendlich klein, und wir haben an Stelle des Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial y}$ zu schreiben und erhalten somit die Gleichung für die Reibung

$$K = \mu \frac{\partial u}{\partial y} F \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34\text{a})$$

es ist demnach die Reibung dem Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Geschwindigkeit proportional.

Der experimentelle Beweis des Ansatzes 34 resp. 34a ergibt sich aus der Strömungsgeschwindigkeit, die in Kapillarröhren beobachtet wird und die genau dem Poiseuilleschen Gesetze entspricht, das sich aus diesem Ansatze einwandsfrei herleiten läßt. Der Reibungs- oder Zähigkeitskoeffizient μ ist eine kleine Zahl; für Wasser ist $\mu = 0{,}0178$, für Luft 0,000170 bei Null Grad Cels. Er ist stark von der Temperatur abhängig, aber nicht von der Dichte. Der Quotient $\frac{\mu}{\gamma} = \nu$ wird der kinematische Reibungskoeffizient genannt, und es ist für Wasser ca. $\nu = 0{,}018$, für Luft 0,13 bei Null Grad Cels. und 760 mm Barometerstand.

Bei einer endlichen inneren Reibung einer Flüssigkeit können wir ferner nicht mehr die Reibung der Flüssigkeit gegen feste Körper außer acht lassen, sondern auch diese wird auf das Strömungsbild von Einfluß werden. Die Beobachtung zeigt nun, daß diese Reibung auf alle Fälle sehr viel mal größer ist, als die zweier benachbarter Flüssigkeitsschichten gegeneinander und dadurch praktisch als unendlich groß angesehen werden kann. Dies bedingt, daß die Flüssigkeitsteilchen, die mit der Oberfläche des eingetauchten Körpers in direkter Berührung stehen, keine relative Geschwindigkeit gegen die Oberfläche annehmen können. Wir haben demnach als Grenzbedingung einer reibenden strömenden Flüssigkeit für die Oberfläche ruhender fester Körper

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Hieraus folgt weiter, daß die Geschwindigkeit in der Nähe der Körperoberfläche mit der Entfernung schnell zunehmen muß, also ein starkes Geschwindigkeitsgefälle auftritt. Folglich wird in der Nähe der Oberfläche trotz der Kleinheit des Koeffizienten μ nach Gleichung 34a eine merkliche Reibungskraft geweckt, so daß es unzulässig wäre, sie zu vernachlässigen. Wir sehen also, daß unsere Eulerschen Gleichungen gerade in der Nähe der Oberfläche kein richtiges Strömungsbild ergeben können. Vielmehr müssen wir zur Darstellung der wahren Strömung die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Reibungskräfte aufstellen.

Hierbei müssen wir uns zunächst klarmachen, daß jetzt der Gesamtdruck auf jede Fläche in der Flüssigkeit nicht mehr normal zur Fläche gerichtet ist und zweitens, daß der Druck von der Richtung der Fläche innerhalb der Flüssigkeit abhängen wird. Bezeichnet man mit p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} die Druckkomponenten in Richtung der Koordinatenachsen gegen eine senkrecht zur X-Achse liegende Fläche und analog mit $p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}; p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}$ die Druckkomponenten gegen Flächen senkrecht zur Y- und Z-Achse, so sind p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} die Normaldrucke auf die drei Flächen, während die Komponenten $p_{xy}, p_{xz}; p_{yx}, p_{yz}; p_{zx}, p_{zy}$ die Tangentialspannungen an den drei Flächen sind. An der Fläche $BCGF$ (Fig. 21) wirkt z. B. in Richtung der X-Achse eine Tangentialspannung p_{zx}; an der unendlich benachbarten Fläche $ADHE$ unseres unendlich kleinen Parallelopipedons kann die Spannung nicht um einen endlichen Wert verändert sein, wir haben also hier dieselbe Spannung, aber entsprechend der Natur der Reibungskräfte in entgegengesetzter Richtung; beide Spannungen zusammen ergeben ein Drehmoment auf das Parallelopipedon mit dem Hebelarm dz, dessen Größe $dM = p_{zx}\,dx\,dy\,dz$, also klein von dritter Ordnung ist. Dieses würde das Parallelopipedon in unendlich schnelle Rotation versetzen, da dessen Trägheitsmoment klein von fünfter Ordnung ist. Da dies nicht möglich ist, so müssen notwendigerweise an den Seiten $BAEF$ und $CDHG$ Spannungskräfte wirken, die ein gleiches, aber entgegengesetzt gerichtetes Drehmoment hervorrufen. Dies erfordert aber, daß die Spannungskräfte selbst gleich sind, also $p_{zx} = p_{xz}$ ist. Ganz analog findet man $p_{yx} = p_{xy}$ und $p_{zy} = p_{yz}$. Demnach existieren nur drei unabhängige Tangentialkräfte p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}.

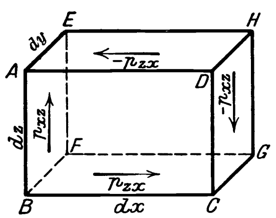


Fig. 21.

Nach den Regeln der Elastizitätstheorie, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann und die auf Flüssigkeiten, ebenso wie auf feste Körper anwendbar sind, gelten ferner folgende Sätze:

An jedem Punkte der Flüssigkeit gibt es drei aufeinander senkrechte Flächen, an denen keine Tangentialkräfte wirken, auf die demnach auch bei beliebigen Reibungskräften der Druck immer senkrecht steht, wie in einer reibungslosen Flüssigkeit. Die Drucke auf diese Flächen seien p_1, p_2, p_3, dann gilt unabhängig von der Lage der Koordinatenachsen:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3 = 3p;$$

es ist demnach der mit p bezeichnete Mittelwert der drei Normaldrucke für jede Lage der Koordinatenachsen derselbe und eine bestimmte Funktion des Ortes.

Denken wir uns ferner in der Flüssigkeit an dem Punkte x, y, z außer unserem Parallelopipedon eine Fläche in beliebiger Richtung konstruiert, deren Normale n die Winkel (nx), (ny), (nz) mit den Koordinatenachsen bilden möge, so sind die drei Druckkomponenten p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} gegen diese Fläche gegeben durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos(nx) + p_{yx}\cos(ny) + p_{zx}\cos(nz) \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(nx) + p_{yy}\cos(ny) + p_{zy}\cos(nz) \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(nx) + p_{yz}\cos(ny) + p_{zz}\cos(nz) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Ist die Fläche die Oberfläche eines festen Körpers innerhalb einer Flüssigkeit, so gelten naturgemäß diese Beziehungen auch für die Oberfläche. Zur Berechnung des Druckes der Flüssigkeit auf die Oberfläche unseres Körpers in einer bestimmten Richtung, z. B. in der X-Achse müssen somit außer dem Normaldruck der Flüssigkeit für diese Richtung auch noch die zwei entsprechenden Tangentialdrucke bekannt sein.

Schließlich ergeben sich die Werte $p_{xx}\ldots$ unter Berücksichtigung des Ansatzes 34a aus folgenden sechs Gleichungen.

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ p_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ p_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ p_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Berücksichtigen wir nun wieder, daß auf unser Parallelopipedon in Richtung der X-Achse auf Seite $ABFE$ der Normaldruck p_{xx}, auf Seite $DCGH$ der Normaldruck $p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx$ in entgegengesetzter Richtung wirkt, also zusammen der Normaldruck $-\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx$, und ganz analog auf Seite $BCGF$ der Tangentialdruck p_{zx} und auf Seite $ADHE$ in entgegengesetztem Sinne der Tangentialdruck $p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}dz$, also zusammen der Tangentialdruck $-\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}dz$, und schließlich ebenso auf das Seitenpaar $ABCD$ und $EFGH$ der Tangentialdruck $-\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}dy$, und setzen wir ebenso, wie bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen die Beschleunigungen des Wasserteilchens den pro Masseneinheit wirkenden Kräften gleich, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehung 37 die erste Gleichung des folgenden Gleichungsystemes, das zuerst von Stokes[1]) aufgestellt wurde:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\gamma}\Delta u+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\gamma}\Delta v+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\gamma}\Delta w+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial\Theta}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Hier bedeutet:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

während für Δv und Δw entsprechende Ausdrücke zu setzen sind, und

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

ist.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist $\Theta=0$, und die letzten Glieder auf der rechten Seite der Gl. 38 fallen fort. Ist sie kompressibel wie die Luft, so können wir sie bei Geschwindigkeiten unter etwa 100 m ebenfalls fortlassen, da die Änderung von Θ und p von derselben Größenordnung ist, die letzten Glieder aber noch den kleinen Faktor μ besitzen, das zweite Glied diesen Faktor aber nicht enthält. Es kann demnach auch unter Berücksichtigung der Reibung bei Geschwindigkeiten unter etwa 100 m die Luft als inkompressibel angesehen werden.

Trotz dieser Vereinfachung ist durch Aufstellung der Stokesschen Differentialgleichungen wenig gewonnen, da sie nur in ganz wenigen Fällen integrierbar sind. Die oben aufgestellte Grenzbedingung für die Oberfläche fester Körper ist sogar oftmals mit diesen Gleichungen unvereinbar, wenn verlangt wird, daß die Bewegung stationär wird. Daraus folgt, daß sich dann ein bestimmtes Strömungsbild nicht ausbilden kann; die Flüssigkeit bleibt in fortgesetzter sogenannter turbulenter Bewegung, die theoretisch näher zu erforschen nicht geglückt ist.

Da die Reibung keine potentielle Kraft ist, wird sich im allgemeinen eine wirbelnde Bewegung in der Flüssigkeit ausbilden.

[1]) Stokes, Cambridge Phil. Tr. Vol. VIII. p. 297. 1845.

Die Wirbel entstehen an der Körperoberfläche und wandern von hier aus in die Flüssigkeit hinaus; nur in speziellen Fällen tritt keine Wirbelbewegung auf, so z. B. beim Durchfluß der Flüssigkeit durch enge Kapillaren und zwischen zwei planparallelen Platten geringen Abstandes, wenn man von den Erscheinungen an den Enden von Platten und Kapillare absieht; in diesen Fällen wird auch die Lösung der Gleichung möglich. Indessen bieten Probleme dieser Art für uns kein Interesse.

Ein zweiter Fall, in dem eine Lösung der Gleichungen möglich ist, ist der, daß die Geschwindigkeiten u, v, w so klein sind, daß die Glieder der linken Seite der Stokesschen Gleichungen bei einer stationären Strömung sämtlich verschwinden. Die Glieder $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ usw. können unter dieser Annahme sehr wohl eine merkliche Größe behalten, wenn die Änderungen von u, v, w, in sehr kleinen Räumen vor sich geht, wie es z. B. der Fall ist beim Einbringen sehr kleiner Körper in einen Flüssigkeitsstrom.

Sieht man von äußeren Kräften ab, so erhalten in diesem Falle die Stokesschen Gleichungen im stationären Zustande die Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta w; \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

zu diesen Gleichungen tritt noch die Kontinuitätsgleichung hinzu. Dies Gleichungssystem wird z. B. lösbar, wenn wir nach der Strömung suchen, die durch das Einbringen einer kleinen Kugel in einen gleichmäßigen Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit V verursacht wird. Indessen zeigt die Lösung, daß die Vernachlässigung der Glieder $u \frac{\partial u}{\partial x} \ldots\ldots$ in diesem Falle nur dann zulässig wird, wenn VR klein gegen ν ist, wo R den Radius der Kugel mißt. Für eine Kugel von 1 cm Radius, in Luft mit $\nu = 0{,}13$, folgt hieraus, daß die Luftgeschwindigkeit V wesentlich kleiner, als 0,13 cm pro Sekunde sein muß. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich der Widerstand der Kugel aus den Beziehungen 36 zu:

$$K = 6\,\pi\mu R V, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

eine Gleichung, die ebenfalls von Stokes zuerst abgeleitet wurde. Unter denselben Bedingungen erhält man für eine Kreisscheibe den Widerstand:

$$K = 8\,\mu D V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40a)$$

wenn D der Durchmesser der Scheibe ist und diese quer zum Luftstrom steht.

Diese Gleichungen sind anwendbar und angenähert durch den Versuch bestätigt worden, für kleine Staubteilchen und der Bewegung der Wassertropfen in der Atmosphäre. In der Aviatik haben wir dagegen nicht angenähert mit so kleinen Geschwindigkeiten und so kleinen Körpern zu tun, wie es zur Vernachlässigung der Werte $u \frac{\partial u}{\partial x} \ldots \ldots \ldots$ notwendig wäre. Daraus folgt, daß das Widerstandsgesetz 40 resp. 40a, das eine lineare Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Körperdimension ergibt, für die uns interessierenden Verhältnisse nicht in Frage kommt. Wenn ich es trotzdem hier anführe, so geschieht es, um zu zeigen, wie beschränkt seine Gültigkeitsbedingungen sind und warum es für Verhältnisse der Aviatik nicht in Frage kommt.

Wenn somit eine exakte Lösung der Stokesschen Gleichungen nicht möglich ist, so geben uns diese doch in jedem Falle qualitativ Aufschluß über das zu erwartende Strömungsbild.

Betrachten wir zunächst eine Platte F senkrecht gegen einen Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit V gestellt (Fig. 22), so verlangt die Kirchhoffsche Auffassung einer Strömung reibungsloser Flüssigkeiten, daß sich von den Kanten A, B ausgehend, hinter der Fläche Diskontinuitätsflächen ausbilden. In einer reibenden Flüssigkeit sind indessen Diskontinuitätsflächen unmöglich, da ein endlicher Geschwindigkeitssprung an zwei benachbarten Flächen eine unendlich große Reibung gemäß Gl. 34a verursachen würde, die den Geschwindigkeitssprung sofort zum Verschwinden bringen müßte. Untersuchen wir also, was an Stelle einer derartigen Diskontinuitätsfläche tritt. Die Linie AC stelle eine solche dar. Wir betrachten den Vorgang in der Nähe der Kante A und wollen die Strömungsrichtung in der Nähe von A als X-Richtung wählen, während die Y-Koordinate in der Papierebene in den toten Raum hinter der Fläche F hinein gerichtet sein möge. Sind die Kanten A und B sehr lang (senkrecht zur Papierebene), und liegt der von uns betrachtete Punkt weit ab von den Ecken der Fläche, so ist zu einem Unterschiede der Strömung in den verschiedenen X-Y-Ebenen kein Grund vorhanden und $w = 0$; es reduziert sich dadurch die Kontinuitätsgleichung auf

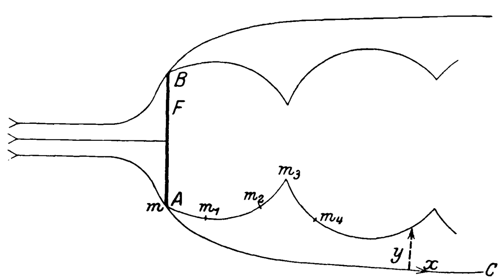


Fig. 22.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Die außerhalb des toten Raumes hinter der Fläche F längs der Diskontinuitätsfläche AC strömende Flüssigkeit wird sich gegen die innerhalb des toten Raumes zunächst in Ruhe befindliche reiben, und dadurch wird die außerhalb des Raumes befindliche beschleunigt. In A selbst ist noch ein endlicher Geschwindigkeitssprung vorhanden. An einem Punkte C hat sich der Geschwindigkeitsunterschied zum größten Teil ausgeglichen, so daß $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs AC von einem sehr hohen Betrage auf geringe Werte abfällt.

Betrachten wir nunmehr ein Flüssigkeitsteilchen, das mit der Geschwindigkeit U in Richtung AC den Punkt A passiert, so wird es durch die hier herrschende, dem hohen Werte von $\frac{\partial u}{\partial y}$ entsprechende Reibungskraft stark verzögert, und es ist die Beschleunigung $\frac{dU}{dt}$ negativ. Nun ist nach der bei Ableitung der Eulerschen Gleichungen gegebenen Entwickelung im stationären Zustande $\frac{dU}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$, und demnach ist an der Stelle A, wo $v=0$ ist, dagegen $u=U$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ negativ. Dies bedingt an der Stelle A nach der Kontinuitätsgleichung 41 einen positiven Wert von $\frac{\partial v}{\partial y}$, und folglich, da v in der Linie AC selbst Null ist, ein positives v für Punkte mit zunehmendem Abstande von AC. Ein Wasserteilchen, das sich in m_1 befinden möge, ist also an einem Orte, wo auch v bereits einen merklich positiven Wert hat, und bewegt sich nicht parallel AC, sondern entfernt sich von dieser Linie etwa nach dem Punkte m_2. Dadurch erreicht es Punkte mit höherem v und da $\frac{\partial u}{\partial y}$ immer negativ bleibt, wird der negative Wert von $v\frac{\partial u}{\partial y}$ auf der Bahn unseres Wasserteilchens sich schneller ändern als $\frac{\partial u}{\partial y}$. Andererseits kann $\frac{dU}{dt}$ höchstens proportional mit $\frac{\partial u}{\partial y}$ abnehmen, und es wird nach einiger Zeit an dem Orte des Wasserteilchens $v\frac{\partial u}{\partial y}$ einen höheren negativen Betrag erreicht haben, als $\frac{dU}{dt}$; dann muß aber, da u immer positiv ist, nach obiger Gleichung für $\frac{dU}{dt}$ auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ positiv geworden sein. An den jetzt erreichten Punkten ist demnach nach der Kontinuitäsgleichung $\frac{\partial v}{\partial y}$ negativ, und es nimmt die Geschwindigkeit v bei weiterer Entfernung unseres Wasserteilchens von der Diskontinuitätsfläche AC wieder ab, und sinkt schließlich bis auf den Wert Null herab. Dies sei an dem Punkte m_3 der Fall. Im nächsten Moment erreicht das Wasserteilchen Punkte mit negativem v, nähert sich wieder der Fläche AC und möge somit nach einiger Zeit den Punkt m_4 erreichen. An den jetzt passierten Punkten ist aber von dem Momente ab, in dem v negativ wurde, $v\frac{\partial u}{\partial y}$ positiv und folglich auch $\frac{dU}{dt}$ positiv. Es nimmt also die Geschwindigkeit U unseres Wasserteilchens wieder zu. Bald wird wieder $v\frac{\partial u}{\partial y}$ einen größeren positiven Wert an dem Orte des Wasserteilchens haben, als $\frac{dU}{dt}$, und dadurch Orte mit negativem $\frac{\partial u}{\partial x}$ erreicht werden, die wieder zu einem positiven $\frac{\partial v}{\partial y}$ Veranlassung geben. Dadurch wiederholt sich der Vorgang von neuem und die Bahn unseres Wasserteilchens wird etwa die in Fig. 22 eingezeichnete werden. Das ist aber eine Zykloide, also die Bahn eines Punktes auf einem sich gleichzeitig drehenden und fortschreitenden Körper. Man sieht demnach, daß unsere Wasserteilchen durch die Reibung in drehende Bewegungen geraten und sich mit anderen Worten an der Fläche AC Wirbel ausbilden, die selbst längs AC fortschreiten.

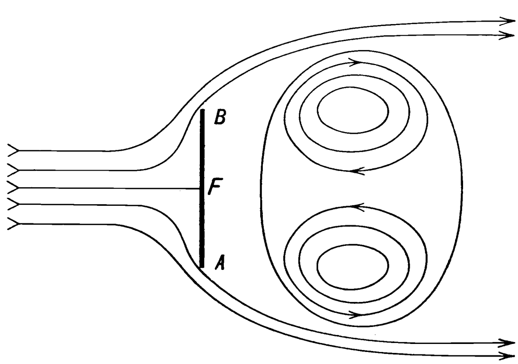


Fig. 23.

Denselben Vorgang haben wir an der Kante B. Denken wir uns nun für einen Augenblick das Problem umgekehrt, und die Fläche F gegen ruhende Flüssigkeit bewegt, und betrachten das Strömungsbild von einem ruhenden Standpunkt aus, so wird dieses der Fig. 23 entsprechen. Hinter der Platte haben wir eine zunächst mitgerissene Wassermenge; indessen wird die kinetische Energie der Flüssigkeit durch die Wirbel, die anstelle der ursprünglich angenommenen Diskontinuitätsflächen entstehen, mit der Entfernung von der Fläche F mehr und mehr in Wärme verwandelt, und die Flüssigkeit kommt in einiger Entfernung hinter der Platte wieder zur Ruhe.

Welche Wirkung hat nun diese Umgestaltung des Strömungsbildes auf den Widerstand unserer Platte? Offensichtlich keine von prinzipieller Bedeutung. Denn da die in A und B (Fig. 23) entstehenden Wirbel in Richtung der Strömung fortschreiten, können sie die Rückseite unserer Platte nicht erreichen und den Druck hier nicht ändern. Die Lord Raleighsche Formel 29, die für reibungslose Flüssigkeiten gilt, bleibt demnach auch in reibenden Flüssigkeiten zu Recht bestehen. Es tritt lediglich anstelle der Diskontinuitätsflächen ein Wirbelgebiet auf. Dieses wird im allgemeinen unstabil sein und schwer zu erforschen, ändert aber den Widerstand der Platte nicht. Er ist daher in einer reibenden Flüssigkeit unabhängig von der Größe der Reibungskonstante. Das Wirbelbild wird dagegen durch die Reibungskonstante merklich beeinflußt, und es tritt auf jeden Fall hinter der Platte um so schneller Ruhe ein, resp. die ungestörte Strömung, je größer die Reibungskonstante ist. Während also die Platte bei der Bewegung in einer reibungslosen Flüssigkeit einen unendlich langen Flüssigkeitsstrom hinter sich herziehen würde, ist die Länge desselben in einer reibenden Flüssigkeit beschränkt und schon in etlichen Metern Entfernung von der Platte ihre ganze Bewegungsenergie aufgezehrt.

Die Potentialströmung vor der Platte und vor allem die Geschwindigkeit an den von den Kanten ausgehenden Diskontinuitätsflächen dürfte allerdings durch die Reibung ein wenig geändert sein, so daß wir in der Lord Raleighschen Formel eine, besonders von dem Umfang der Fläche abhängige, kleine Abänderung der Konstante zu erwarten haben.

Kehren wir nunmehr zur Berechnung des Widerstandes eines Körpers mit gleichmäßig verlaufenden Konturen ohne vorspringende Kanten zurück, der in einer idealen Flüssigkeit Null wäre, so läßt sich die Wirkung der Reibung auch bei einem solchen Körper aus den Stokesschen Gleichungen herleiten, und zwar ist es das Verdienst von Prandtl[1]), hier zuerst den richtigen Weg gewiesen zu haben.

[1]) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des 3. intern. Mathematiker-Kongresses. Heidelberg 1904.

Betrachten wir einen ruhenden Körper in einer strömenden Flüssigkeit, so muß diese, wie wir sahen, an der Oberfläche in Ruhe bleiben. Ist nun der Reibungskoeffizient klein, so wird die Wirkung der Reibung sich auf eine Grenzschicht geringer Dicke um den Körper herum beschränken, und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit wird mit der Entfernung von dem Körper sehr schnell von dem Werte Null auf den normalen Wert anwachsen, der einer reinen Potentialströmung einer reibungslosen Flüssigkeit entspricht. Daß diese „Grenzschicht" im Verhältnis zu den Dimensionen des Körpers bei kleiner Reibung nur dünn bleiben wird, ersieht man aus folgender Betrachtung. Ein Flüssigkeitsstrom bewege sich gegen den Körper A (Fig. 24). Die Flüssigkeit, die z. B. von a nach b längs der Oberfläche strömt, wird durch die Reibung an der in größerer Nähe von A strömenden Flüssigkeit verlangsamt. Die Einbuße an Geschwindigkeit ist abhängig von der Größe der verzögernden Reibungskraft und der Zeit, während der diese wirkt, resp. der Länge des Weges, auf dem sie wirkt. Ist die Reibung klein, so kann nur eine merkliche Verzögerung bei sehr langem Wege, also großer Längsdimension des Körpers entstehen. Andererseits ist die Reibung bei kleiner Reibungskonstante der Flüssigkeit immer klein, solange nicht das Geschwindigkeitsgefälle groß ist. Ein großes Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Körperoberfläche verlangt aber, daß die Geschwindigkeit von dem Werte Null an in sehr kleinem Raum bis zu dem höchsten Werte q der reinen Potentialströmung ansteigt.

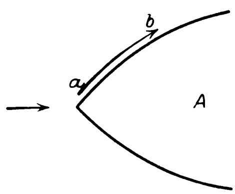


Fig. 24.

Daraus folgt, daß das ganze Gebiet, in dem die Reibung eine merkliche Verzögerung und Beeinflussung der Potentialströmung veranlassen kann, gegen die Längsdimension des Körpers nur sehr dünn ist. Ist dies aber der Fall, so können wir uns auch jetzt noch die gesamte Grenzschicht mit dem Körper vereinigt denken, und den Druck auf den Körper berechnen aus demjenigen, der außerhalb der Grenzschicht der Flüssigkeit herrscht, die hier eine reine Potentialströmung besitzt und in der demnach die Beziehung 21 hinreichend genau zutrifft. Indessen wird dies nicht rings um den Körper herum möglich sein, sondern es wird sich die Flüssigkeitsströmung, sobald der Druck in der Potentialströmung zunimmt, von der Körperoberfläche ablösen, genau so, wie es bei einer senkrecht vom Strom getroffenen ebenen Fläche der Fall war, und wie es Fig. 25 zeigt.

Denn der Druck innerhalb der Grenzschicht ist in Richtung der Oberflächennormale konstant und gegeben durch den außerhalb der Grenzschicht herrschenden Druck; also ist auch das Druckgefälle in Richtung der Oberfläche und demnach die Beschleunigung in dieser Richtung innerhalb der Grenzschicht dieselbe, wie außerhalb. Wenn also die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht in Richtung der Oberfläche abnimmt, wie es der Fall ist, sobald der Querschnitt des Körpers geringer wird, und dadurch der Druck zunimmt, so muß auch die Flüssigkeit innerhalb der Grenzschicht dieselbe Verzögerung erleiden, wie die Flüssigkeit außerhalb derselben. Nun ist aber die Geschwindigkeit in unmittelbarer Nachbarschaft der Oberfläche geringer als die außerhalb der Grenzschicht herrschende; infolgedessen wird sie hier den Wert Null erreichen und noch überschreiten können, und zwar desto eher, je näher der Punkt der Oberfläche liegt. Wir bekommen demnach ein Strömungsbild wie es in Fig. 26 angedeutet ist, in der der Deutlichkeit halber die Oberfläche gerade gezeichnet ist.

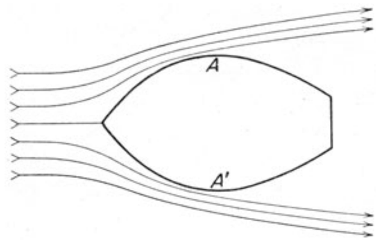


Fig. 25.

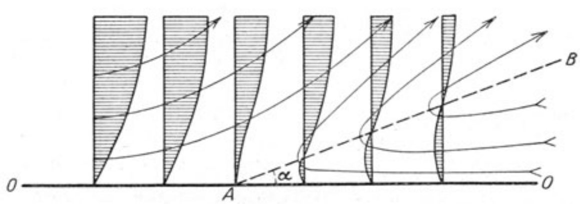


Fig. 26.

Die Abszisse stellt die Oberfläche des Körpers dar und die Geschwindigkeitsänderung mit der Entfernung von der Oberfläche wird durch die schraffierten Flächen angedeutet. Auf der Linie AB haben wir die Geschwindigkeit Null. An dem Punkte A löst sich die Strömung von der Oberfläche ab, so daß ein Strömungsbild gemäß Fig. 25 entsteht. Die Fläche AB ist gleichbedeutend mit der Kirchhoffschen Diskontinuitätsfläche. Wir werden daher ebenso wie bei der ebenen Platte hinter dem Querschnitt AA' einen Raum bekommen, in dem ein nahezu konstanter Druck herrscht, der seiner Größe nach bestimmt ist durch die Geschwindigkeit q der Potentialströmung in AA'.

Andererseits nimmt die Geschwindigkeit vor dem größten Querschnitt des Körpers vom Werte Null in der Mitte mit zunehmendem Querschnitt bis auf den Wert q zu. Folglich haben wir an der vorderen Körperhälfte einen mittleren Druck, der entsprechend der hier herrschenden kleineren mittleren Geschwindigkeit größer ist, als der mittlere Druck an der hinteren Körperhälfte und erhalten somit einen resultierenden Druck in Richtung der Strömung. Die Größe dieses resultierenden Druckes ergibt sich aus der Potentialströmung an der Vorderseite des Körpers und der Geschwindigkeit dieser Potentialströmung an dem Ablösungsquerschnitt AA'; er ist also von dem Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit unabhängig, solange der Ablösungsquerschnitt nicht verschoben wird.

Über den Punkt der Ablösung geben die Stokesschen Gleichungen Aufschluß, wenn wir sie unter der Bedingung eines kleinen Reibungskoeffizienten und demnach einer dünnen Grenzschicht für das Gebiet derselben aufstellen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, unser Körper sei ein Rotationskörper, dessen Rotationsachse in Richtung der Strömung fällt (Fig. 27). Wir können dann bei der geringen Dicke der Grenzschicht die Krümmung der Oberfläche in erster Annäherung vernachlässigen, und die x-Koordinate in Richtung der Oberfläche, die y-Koordinate in Richtung der Oberflächennormale wählen. Da das Strömungsbild auf alle Fälle rings um den Rotationskörper herum dasselbe sein wird, findet keine Strömung senkrecht zu unserer xy-Ebene statt und es ist $w=0$. Dadurch ist das Problem auf ein zweidimensionales zurückgeführt.

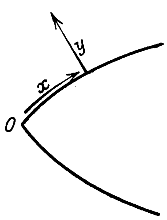


Fig. 27.

Ist nun die Dicke der Grenzschicht von der Größenordnung ε, so ist $\frac{\partial u}{\partial y}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, da u von Null auf den normalen Wert in der Dicke der Grenzschicht ansteigen muß und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Da ferner $\frac{\partial u}{\partial x}$ von normaler Größenordnung ist, so muß es gemäß der Kontinuitätsgleichung auch $\frac{\partial v}{\partial y}$ sein, und es muß v selbst innerhalb der Grenzschicht von der Größenordnung ε bleiben, da es an der Oberfläche den Wert Null hat; folglich ist auch $\frac{\partial v}{\partial x}$ von der Größenordnung ε, und $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon}$.

Stellen wir somit die Stokesschen Gleichungen für unser Problem auf, so folgt zunächst aus den Gleichungen 38 für stationäre Bewegungen bei Vernachlässigung äußerer Kräfte und Annahme der Inkompressibilität der Flüssigkeit:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

In der ersten dieser Gleichungen ist nach dem eben Ausgeführten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gegen $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zu vernachlässigen; es muß daher, da links Glieder normaler Größenordnung stehen, $\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch normaler Größenordnung sein, also $\frac{\mu}{\gamma}$ von der Größenordnung ε^2. Da $\frac{\mu}{\gamma}$ bekannt ist, ist hierdurch die Größenordnung von ε selbst gegeben und der Fehler bestimmt, der durch Analyse eines kleinen ε entsteht. In der zweiten Gleichung sind links beide Glieder zu vernachlässigen, rechts ist zunächst $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ klein gegen $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ und $\frac{\mu}{\gamma}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ selbst klein von der Größenordnung ε. Infolgedessen ist auch $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}$ klein von dieser Ordnung und zu vernachlässigen gegen $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}$. Daraus folgt, daß der Druck längs der Oberflächennormale als konstant anzusehen ist und gleich dem außerhalb der Grenzschicht herrschenden Drucke ist, wie bereits oben klargelegt wurde. Somit bleibt für die Grenzschicht nur mehr die eine reduzierte Gleichung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

übrig, zu der nur noch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42\,\mathrm{a})$$

hinzukommt.

In der Gl. 42 ist der Wert von $\frac{\partial p}{\partial x}$ als bekannt anzusehen, da sich dieser aus den Eulerschen Gleichungen ergibt, die außerhalb der Grenzschicht Gültigkeit behalten.

Der Querschnitt, an dem sich die Strömung von der Oberfläche ablöst, ist nach obigen Ausführungen gegeben durch die Bedingungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, da u vor diesem Querschnitt in der

Nachbarschaft der Oberfläche positiv, hinter dem Querschnitt aber negativ ist.

Es ist nun Blasius[1]) gelungen, eine Näherungsmethode zu finden, das Gleichungssystem 42, 42a zu lösen unter Berücksichtigung der Grenzbedingung, daß $u = v = 0$ für $y = 0$, und daß die Strömung in eine reine Potentialströmung übergeht für $y = \infty$, wenn diese Potentialströmung selbst gegeben ist. Dadurch ist es ihm möglich geworden, die Lage des Ablösungspunktes selbst und die in dessen Nähe herrschende Geschwindigkeit der Potentialströmung zu bestimmen.

Die Rechenmethode des genannten Herrn wurde geprüft und bestätigt gefunden durch Versuche von Hiemenz[2]) an einem geraden Kreiszylinder, der mit seiner Achse senkrecht gegen einen gleichmäßigen Wasserstrom gestellt wurde. Das wichtigste Resultat der Arbeit des Herrn Blasius ist, daß sich die Lage des Ablösungspunktes unabhängig von der Größe des Reibungskoeffizienten ergibt und nur von der Körperform abhängt. Hierdurch erklärt sich das schon seit langem bekannte Paradoxon, daß der Widerstand eines Körpers in warmem Wasser nahezu derselbe ist als in kaltem, obgleich der Reibungskoeffizient des Wassers mit der Temperatur stark abnimmt, während andererseits die Theorie verlangte, daß dieser Widerstand erst durch die innere Reibung entsteht.

Nach den obigen Ausführungen ist indessen nicht die innere Reibung der Flüssigkeit die eigentliche Veranlassung des Widerstandes, sondern das Haften jeder Flüssigkeit an der Oberfläche fester Körper; dieser Umstand bedingt stets ein Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Körperoberfläche von einem bestimmten Betrage, wie klein auch die innere Reibung der Flüssigkeit sein mag. Nur bei einer unendlich kleinen Reibung wäre ein Geschwindigkeitssprung an der Körperoberfläche möglich, der nach den für eine ideale Flüssigkeit aufgestellten Oberflächenbedingungen stattfinden müßte; solange aber die Reibung einen endlichen Wert besitzt, mag sie so klein sein, wie sie will, ist diese Oberflächenbedingung 13, die der Widerstandsberechnung eines Körpers in einer idealen Flüssigkeit zugrunde lag, unrichtig. Sie muß vielmehr ersetzt werden durch die Bedingung $u = v = w = 0$ an der Oberfläche selbst und der Bedingung 42 in der Oberflächennähe.

[1]) H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Heft I, 1908.

[2]) Karl Hiemenz, Die Grenzschicht an einem in gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszylinder, Inauguraldissertation, Berlin 1911.

Einen allgemein gültigen Ausdruck für den dynamischen Widerstand eines Körpers können wir demnach in folgender Weise gewinnen: Bezeichnen wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an dem Ablösungsquerschnitt mit $\alpha_1 V$, wo V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in großer Entfernung vom Körper ist, so ist α_1 ein Faktor, der angibt, wieviel mal größer die Geschwindigkeit an der Ablösungsstelle ist als V. Bei der Kugel z. B. fanden wir an dem größten Durchmesser $q = 3/2\,V$; liegt der Ablösungspunkt etwas vor dem größten Durchmesser, wie es tatsächlich der Fall ist, so ist demnach bei der Kugel α_1 etwas kleiner als $3/2$. Bezeichnen wir ferner den größten Körperquerschnitt normal zur Stromrichtung mit F, so herrscht hinter dem Körper der Druck $p_0 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_1{}^2 V^2$, und dieser gibt eine Widerstandskraft gegen die Strömung in Höhe von $F(p_0 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_1{}^2 V^2)$. Vor dem Körper haben wir eine Geschwindigkeit, die vom Werte Null an bis $\alpha_1 \cdot V$ ansteigt und deren Mittelwert wir mit $\alpha_2 \cdot \alpha_1 V$ bezeichnen wollen, wo α_2 ein Faktor kleiner als 1 ist. Wir haben dann gegen die Vorderseite des Körpers eine Kraft $F(p_0 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_2{}^2\alpha_1{}^2 V^2)$ wirken, und folglich eine resultierende Gesamtkraft in Richtung der Strömung:

$$K = \frac{1}{2}\gamma F V^2 (\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2\alpha_1{}^2).$$

Hier ist der Ausdruck in der Klammer stets positiv, da α_2 kleiner als 1 ist, und wir können ihn, da sowohl α_1 als auch α_2 nur von der Körperform abhängig sind, zu einem Formfaktor ζ zusammenfassen, so daß wir als Widerstandsformel erhalten

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2}\zeta\gamma V^2 F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

In diesem Ausdrucke ließe sich der Formfaktor ζ dadurch berechnen, daß man zunächst die Potentialströmung für verschiedene Ablösungsstellen berechnet und dann diejenige als die richtige herausgreift, bei der die Gl. 42 zu derselben Ablösungsstelle führt, wenn diese nach der Methode von Blasius aus der Gl. 42 berechnet wird. Diese Rechnung ist indessen schon bei den einfachsten Körperformen zu schwierig, um praktisch verwendbar zu sein, und man wird einfacher zum Ziele kommen, wenn man den Formfaktor ζ für die praktisch in Frage kommenden Formen durch Versuche bestimmt.

Der durch die Gl. 44 ausgedrückte dynamische Widerstand ist durch die Ablösung der Strömung und die durch diese verursachte Unsymmetrie des Strömungsbildes verursacht. Die Körperform hinter der Ablösungsstelle hat auf diesen Widerstand keinen Einfluß. Ist der Körper hinter der Ablösungsstelle nur wenig ausgedehnt, so bleibt tatsächlich die Rückseite des Körpers ganz in dem toten Raume, und die Form ist ohne Einfluß auf den Widerstand.

Ist indessen der Körper nach rückwärts stark verlängert, wie Fig. 28 zeigt, so wird hierdurch der Widerstand merklich verkleinert. Denn der Druck an dem Ablösungsquerschnitt AB ist durch die an der Peripherie herrschende Geschwindigkeit gegeben, die immer größer ist als die ursprüngliche Geschwindigkeit V. An einem weit zurückliegenden Querschnitt CD haben indessen die Wirbel schon teilweise die Geschwindigkeitsunterschiede ausgeglichen, und an der Peripherie von CD herrscht eine bereits merklich kleinere Geschwindigkeit als bei AB. Folglich haben wir hier einen größeren Druck, und der mittlere Druck auf der ganzen Kegelmantelfläche ASB wird um so größer, je stärker unser Körper verlängert wird. Dies bedeutet aber eine Verminderung des resultierenden Druckes in Richtung von V. Diese Druckverminderung gegenüber dem Ausdrucke der Formel 44 ist hiernach abhängig von der Reibungskonstante μ der Flüssigkeit, so daß die Reibung eine Verminderung des dynamischen Widerstandes hervorruft. Je größer die Reibungskonstante, desto schneller werden die Geschwindigkeitsunterschiede durch Wirbelbildung ausgeglichen und desto weniger ist es nötig, den Körper nach rückwärts zu verlängern, um die gewünschte Wirkung der Widerstandsverminderung zu erzielen.

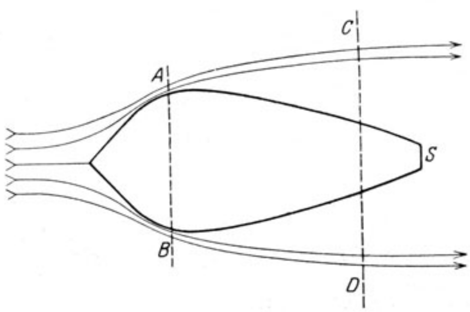


Fig. 28.

Um die Größe der Druckverminderung anzugeben, wäre es nötig, zu berechnen, wie schnell die Wirbelbildung hinter dem Ablösungsquerschnitt einen Geschwindigkeitsausgleich herbeiführt. Solange diese Rechnung noch nicht durchgeführt ist, ist eine zahlenmäßige Angabe über die Widerstandsverminderung nicht möglich; wir können nur sagen, daß der dynamische Widerstand um so mehr verkleinert wird, je stärker der Körper hinter dem Ablösungsquerschnitt verlängert wird.

Für ein und dieselbe Flüssigkeit können wir dieser Erscheinung, die dann wiederum nur von der Körperform abhängt, dadurch rechnerischen Ausdruck geben, daß wir sie bei Bestimmung des Formfaktors ζ berücksichtigen. Nur müssen wir uns vor Augen halten, daß dann der Formfaktor ζ von der Reibungskonstante der Flüssigkeit abhängig wird. Um dies klarzustellen, setzen wir am einfachsten

$$\zeta = \zeta_0 (1 - \zeta_\mu)$$

und demnach

$$K = \tfrac{1}{2} \zeta_0 (1 - \zeta_\mu) \gamma V^2 F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

wo ζ_0 ein Formfaktor ist, der nur von der Körperform, und zwar im wesentlichsten von der Körperform vor dem größten Querschnitt abhängt, während ζ_μ von der Körperform hinter dem größten Querschnitt, außerdem aber von der Reibungskonstante der Flüssigkeit abhängt.

Man könnte nun meinen, durch hinreichende Verlängerung des in der Flüssigkeit befindlichen Körpers den Widerstand auf jeden gewünschten Betrag herabdrücken zu können. Dies trifft auch bezüglich des dynamischen Widerstandes zu. Indessen bewirkt die mit der Verlängerung verbundene Oberflächenvergrößerung, daß ein anderer Widerstand, den wir bisher unberücksichtigt gelassen haben, von Bedeutung wird, das ist der sog. Reibungswiderstand.

Das Wesen desselben erkennen wir am besten, wenn wir eine Fläche von unendlich kleiner Dicke betrachten, die sich in einem Flüssigkeitsstrome befindet, der sich in Richtung der Fläche bewegt (Fig. 29).

Fig. 29.

Der dynamische Widerstand der Fläche ist in diesem Falle Null, da die Platte dem Flüssigkeitsstrome keinen Querschnitt entgegenstellt. Indessen bildet sich auch jetzt eine Grenzschicht aus, und die Ausbildung dieser Grenzschicht ist es, die den Reibungswiderstand veranlaßt. Da nämlich die Reibungskonstante zwischen Flüssigkeit und Platte F nahezu unendlich groß ist, muß die Flüssigkeit bei Berührung der Platte, also an der Oberfläche völlig zur Ruhe kommen, und es bildet sich ein Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zu F aus. Hierdurch tritt eine Reibung der Flüssigkeitsschichten gegeneinander ein, und jedes Flüssigkeitsteilchen, das in der Nähe von F vorbeiströmt, wird durch die Reibung gegen die Flüssigkeitsteilchen, die der Fläche noch näher liegen, in seiner Bewegung verzögert. Sobald die Fläche passiert ist, hört diese Verzögerung auf, und es wirkt im Gegenteil die in größerer Entfernung schneller strömende Flüssigkeit beschleunigend auf die Flüssigkeitsteilchen ein. Ziehen wir also in der Nähe der Fläche Linien gleicher

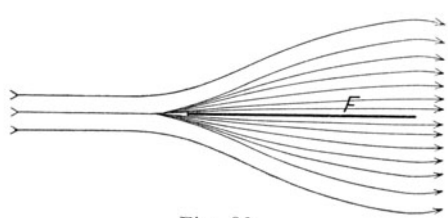


Fig. 30.

Geschwindigkeit (keine Strömungslinien), so bekommen wir ein Bild etwa gemäß Fig. 30. Das Resultat ist also eine Grenzschicht zunehmender Dicke beiderseits von der Fläche (in der Figur stark vergrößert dargestellt), in der ein Geschwindigkeitsgefälle herrscht, das vom Anfang bis zum Ende der Fläche abnimmt und das auch mit der Entfernung von der Fläche kleiner wird.

Die Reibung der Schichten verschiedener Geschwindigkeit gegeneinander erzeugt Wärme, verzehrt also Energie. Dies bewirkt einen Widerstand, der zweckmäßig als Reibungswiderstand der Fläche bezeichnet wird, wenn er auch teilweise dynamischer Natur ist. Er wird hervorgerufen durch die Geschwindigkeitsunterschiede in der Grenzschicht, während der eigentliche dynamische Widerstand, der durch Gl. 44 und 45 gegeben ist, sich aus den Geschwindigkeitsunterschieden außerhalb der Grenzschicht erklärt.

Da nun für die Grenzschicht die Gl. 42 und 42a Gültigkeit haben, läßt sich die Reibung nach diesen Gleichungen ermitteln. Für eine Fläche in Richtung der Strömung läßt sich noch Gl. 42 vereinfachen. Denn in diesem Falle bleibt außerhalb der Grenzschicht die Potentialströmung unverändert, und es ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Es gilt demnach für die Grenzschicht einer in Richtung der Strömung liegenden Platte das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Prandtl und Blasius ist es gelungen, aus diesem Gleichungssystem den Wert von $\frac{\partial u}{\partial y}$ für $y = 0$, also für die Plattenoberfläche zu berechnen. Sie fanden

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1{,}33}{4}\sqrt{\frac{\gamma V^3}{\mu x}}.$$

Die auf die Fläche ausgeübte Kraft ist gleich derjenigen, mit der sich die Flüssigkeit gegen die an der Fläche fest haftende Flüssigkeitsschicht beiderseits reibt; folglich erhalten wir diese Kraft aus der Gl. 34a. Sie liefert, wenn B die Breite der Fläche und L die Länge derselben in der Bewegungsrichtung ist,

$$K = 2 B \mu \frac{1{,}33}{4} \int_0^L \sqrt{\frac{\gamma V^3}{\mu x}} \cdot dx$$

oder

$$\boldsymbol{K = 1{,}33 B \sqrt{\gamma \mu L V^3}} \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

Diese Formel für die Reibung ist in vieler Hinsicht interessant. Man erkennt zunächst, daß der Reibungswiderstand nicht proportional der Fläche ist, sondern nur mit der $\frac{1}{2}$ten Potenz der Länge wächst, also wesentlich verschieden ausfällt, bei verschiedener Flächenform. Ferner wächst er proportional mit der $\frac{3}{2}$ten Potenz der Geschwindigkeit, während der dynamische Widerstand von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt.

Der Reibungswiderstand ist ebenso wie bei einer Platte parallel zur Strömung, bei jedem beliebig geformten Körper vorhanden, da sich um den Körper herum bis zur Ablösungsstelle der Strömung eine Grenzschicht mit Geschwindigkeitsgefälle ausbildet. Die Stärke der Reibung ist dann in derselben Weise von den Oberflächendimensionen und der Potentialströmung außerhalb der Grenzschicht abhängig, wie bei der parallelen Platte, nur muß bei der Integration über die Fläche die Veränderlichkeit der Potentialströmung resp. die Abweichung derselben von der ursprünglich gegebenen Strömung an den verschiedenen Oberflächenpunkten und die Richtung der Oberfläche berücksichtigt werden. Dadurch wird meistens die Rechnung praktisch nicht durchführbar, schon deswegen, weil die Lage der Ablösungsstelle nicht genau bekannt ist. Nimmt man bei einer Kugel die Ablösungsstelle am größten Querschnitt an und berücksichtigt den Verlauf der Potentialströmung gemäß der Rechnung auf S. 38, so bekommt man bei einem Kugelradius R angenähert einen Reibungswiderstand

$$K = 4 \sqrt{\gamma \mu R^3 V^3}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47a)$$

Im allgemeinen wird man für den Reibungswiderstand setzen können

$$\boldsymbol{K = \zeta_R B_m \sqrt{\gamma \mu L_m V^3}}, \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

wo B_m die mittlere Oberflächendimension senkrecht zur Strömung und L_m in Richtung der Strömung ist, und ζ_R einen Zahlenfaktor darstellt, der von der Körperform abhängt und etwa zwischen 1 und 5 liegen dürfte.

Für Luft ist der Reibungswiderstand meistens sehr klein, da μ und γ beides kleine Größen sind, und er bleibt gegenüber dem dynamischen Widerstande zu vernachlässigen. Nur in besonderen Fällen kann er von Bedeutung werden, wie z. B. bei nur sehr wenig gegen die Strömung geneigten, ebenen Fiächen, da dann der dynamische Widerstand selbst klein wird, während der Reibungswiderstand in seinem vollen Betrage gemäß Gleichung 47 in Frage kommt. Bei welcher Neigung er Bedeutung erlangt, läßt sich indessen nur von Fall zu Fall angeben, da beide Widerstände Geschwindigkeit und Flächenlänge in verschiedener Potenz enthalten. Je länger die Fläche in der Strömungsrichtung und je größer die Geschwindigkeit, desto weniger ist der Reibungswiderstand bei gegebener Flächenneigung von Bedeutung.

Wichtig wird die Reibung ferner bei Körpern, die in der Bewegungsrichtung langgestreckt sind, indem durch eine Verlängerung des Körpers eine Oberflächenvergrößerung und hierdurch eine Vermehrung der Reibung eintritt. Da andererseits eine starke Verlängerung ohne Querschnittsänderung eine Verminderung des dynamischen Widerstandes bedingt, so wird *der Gesamtwiderstand bei einem bestimmten Verhältnis von Länge zum Querschnitt den kleinstmöglichen Wert annehmen.* Dies Verhältnis läßt sich aber nicht allgemein angeben, da es einmal von der Höhe der Formfaktoren abhängt, also von der Körperform, dann aber auch von der Geschwindigkeit. Nur soviel läßt sich sagen, daß die Länge mit wachsender Geschwindigkeit größer werden muß, um bei einem gegebenen Querschnitt den kleinsten Widerstand des Körpers zu erhalten.

Auch bei Körpern, die gleichzeitig in Richtung und senkrecht zur Richtung der Strömung nur kleine Dimensionen haben, wie z. B. bei quer zur Strömung gespannten Drähten macht sich die Wirkung der Reibung stärker fühlbar. Ist z. B. bei einem Draht von 1 cm Durchmesser bei einer bestimmten Geschwindigkeit der Reibungswiderstand $10\,^0/_0$ des dynamischen Widerstandes, so wird er bei 1 mm Drahtdurchmesser $33\,^0/_0$ betragen, da sich nach Gleichung 48 der Reibungswiderstand nur mit der Wurzel des Durchmessers ändert, der dynamische Widerstand dagegen dem Durchmesser selbst proportional ist.

Bei dieser Betrachtung über den Reibungswiderstand ist die Beschaffenheit der Körperoberfläche ganz außer acht gelassen worden, weil die Reibung nur in der Flüssigkeit und nicht zwischen Körper und Flüssigkeit auftritt. *Unter „Oberfläche" ist hierbei die wahre Oberfläche unter Berücksichtigung aller Unregelmäßigkeiten zu verstehen,* die etwa durch Rauheit der Oberfläche bedingt sind. Nur wenn die Unebenheiten gegen die Dicke der Grenzschicht von kleiner Dimension sind, können sie unberücksichtigt bleiben und geben zu keiner Vermehrung des Reibungswiderstandes Veranlassung. Bei der geringen Dicke der Grenzschicht und dem starken Geschwindigkeitsgefälle in unmittelbarer Nähe der Körperoberfläche werden indessen schon Unebenheiten von nur 0,1 mm Höhe von Einfluß werden.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Druckkraft, die strömende Luft oder strömendes Wasser auf einen Körper ausüben, resp. der Widerstand, den ein bewegter Körper in Luft oder Wasser erfährt, wird durch ein und dasselbe Gesetz bestimmt, so lange die Geschwindigkeit in Luft nicht größer als etwa 75 bis 100 m pro Sekunde, in Wasser nicht größer als etwa 15 m pro Sekunde (Grenzgeschwindigkeit für 1 Atm. Druck) ist.

Unter diesen Bedingungen zerfällt der Widerstand in zwei verschiedene Summanden, nämlich

1. den dynamischen Widerstand, der sich aus den Geschwindigkeitsunterschieden der Flüssigkeit in einiger Entfernung von der Körperoberfläche ergibt,

2. den Reibungswiderstand, der sich aus dem Umstande ergibt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Körperoberfläche selbst überall Null ist, und sich in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft ein starkes Geschwindigkeitsgefälle ausbildet.

Bedeutet V die Geschwindigkeit des Körpers in ruhender Flüssigkeit in Zentimetern pro Sekunde, F sein größter Querschnitt senkrecht zu V in Quadratzentimetern, L_m die mittlere Länge der benetzten Oberfläche in Richtung der Strömung, B_m die mittlere Breite der benetzten Oberfläche senkrecht zur Strömungsrichtung in Zentimetern, γ die Dichte und μ der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit in C. G. S. Einheiten, so ist der Widerstand K in Dynen (Milligrammen) gegeben durch die Gleichung:

$$K = \tfrac{1}{2}\zeta_0 (1 - \zeta_\mu)\gamma F V^2 + \zeta_R B_m \sqrt{\gamma \mu L_m V^3}. \quad . \quad (49)$$

Hier sind ζ_0, ζ_μ, ζ_R Koeffizienten, die von der Körperform abhängen, und zwar hängt ζ_0 im wesentlichen von der Körperform vor dem größten Querschnitt F ab und nimmt von dem Werte 1 bei sehr stumpfer Form mit dem Grade der Zuspitzung allmählich ab; ζ_μ hängt in erster Linie von der Körperform hinter dem größten Querschnitt, aber auch von dem Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit ab und nimmt von dem Werte Null bei stumpfer Form des hinteren Körperteiles mit der Verlängerung hinter dem größten Querschnitt bis zum Maximalwerte von 1 zu; ζ_R ist ein ebenfalls nur von der Körperform abhängender Koeffizient, der vom Werte 1,33 bei sehr spitzer Körperform, bis etwa 5 bei sehr breiter Körperform zunimmt.

Achtes Kapitel.

Experimentelle Resultate über den Luftwiderstand einiger wichtiger Körperformen.

Abgesehen von früheren Experimentatoren, wie Robins 1761, Hutton 1787 und Vince 1795, haben in neuerer Zeit O. Lilienthal 1888 in Berlin, W. Dines 1889 bis 1890 in England und S. P. Langley in Washington eingehende Versuche über den Widerstand verschieden geformter Körper bei der Bewegung in der Luft angestellt. Alle drei Forscher bedienten sich für ihre Versuche eines Rundlaufapparates. Bei diesem wird eine vertikale Welle in geeigneter Weise in Rotation gesetzt und der zu untersuchende Körper an einem horizontalen Arme befestigt. Der von O. Lilienthal benutzte Apparat ist in dem Jahrbuch der Motor-Luftschiff-Studien-Ges. 1910 bis 1911, p. 54 bis 58 beschrieben, der von W. Dines und der S. P. Langley verwandte Apparat in dem Buche von F. W. Lanchester, Aerodynamik I, p. 283ff. genau erörtert. Diese Methode der Messung mittels Rundlauf hat den Nachteil, daß der Körper in kurzen Zeitabständen denselben Raumpunkt passiert, ohne daß die Luft hinreichend Zeit gehabt hätte, wieder zur Ruhe zu kommen. Aus diesem Grunde sind die Resultate nicht einwandsfrei. Dasselbe trifft für die Versuche von O. Mannesmann (Inauguraldissertation, Tübingen 1897) zu, der sich eines Rundlaufapparates von nur 1 m Durchmesser bediente und zur Vermeidung starken Mitwindes verhältnismäßig kleine Körper benutzte.

Den gerügten Fehler suchte G. Eiffel[1]) durch Fallversuche am Eiffelturm zu vermeiden und erhielt dadurch Resultate, die recht zuverlässig sind. Lanchester[2]) schlug einen ähnlichen Weg ein,

---

[1]) Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la Tour par G. Eiffel. Paris 1906, Édition nouvelle: Librairie Aéronautique, Paris 1910.

[2]) Lanchester, Aerodynamik, übersetzt von G. und H. Runge, S. 306 bis 326.

indem er den Widerstand von Gleitflugmodellen bei ruhender Luft untersuchte. Die einwandfreiesten Resultate dürften die von L. Prandtl in Göttingen und die neuesten Untersuchungen von G. Eiffel sein, die sich beide einer Versuchsmethode bedienen, bei der der ruhende Körper einem gleichmäßigen Luftstrom ausgesetzt wird. Die Versuchsanstalt in Göttingen ist von L. Prandtl[1]) selbst beschrieben worden; die in dieser Anstalt gewonnenen Resultate sind teils von L. Prandtl und O. Föppel in dem Jahrbuch der Motor-Luftschiff-Studiengesellschaft 1910 bis 1911, teils von denselben Autoren, sowie von G. Fuhrmann in diversen Aufsätzen der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1910 und 1911 veröffentlicht worden. G. Eiffel hat seine Resultate in einem größeren Werke[2]): La résistance de l'air et l'aviation, Paris 1910 avec Complément 1911 zusammengestellt.

Den folgenden Ausführungen liegt in erster Linie diese letztere Veröffentlichung zugrunde. Diese hat indessen wie auch alle anderen den Nachteil, daß Eiffel nicht eine Trennung zwischen dynamischem Widerstand und Reibungswiderstand durchgeführt hat, sondern vielmehr die Formel für den dynamischen Widerstand für den Gesamtwiderstand benutzte. Es sind daher die Resultate auf andere Flächengrößen und andere Geschwindigkeiten nur übertragbar, soweit der Reibungswiderstand dem dynamischen Widerstand gegenüber zu vernachlässigen ist. Da aber gerade diese Voraussetzung für Flächen kleiner Neigung, wie sie in der Aviatik benutzt werden, nicht zutrifft, wäre es erwünscht, wenn Eiffel seine Untersuchungen für die wichtigsten Flächenformen unter Berücksichtigung der Reibung wiederholen würde.

I. Widerstand einer senkrecht vom Winde getroffenen Fläche.

Nach der Newtonschen Formel sollte, da der Reibungswiderstand gegenüber dem hohen dynamischen Widerstande zu vernachlässigen ist, der Widerstand durch die Gleichung gegeben sein:

$$K = \tfrac{1}{2}\gamma F V^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Drücken wir K in Kilogrammen aus, die Fläche in Quadratmetern und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde, so wird, wenn wir schreiben

---

[1]) L. Prandtl, Die Bedeutung von Modellversuchen für die Luftschiffahrt und Flugtechnik und die Einrichtung für solche Versuche in Göttingen, Vortrag, abgedruckt in der Zeitschrift des Vereines D. Ingenieure 1909. S. 1711 ff.

[2]) Deutsch von Dr. F. Huth, Berlin 1912.

$$K = k F V^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

der Koeffizient k für $\gamma = 0{,}001225$: $k = 0{,}0624$. Nach der Lord Raleighschen Formel wird $k = 0{,}055$.

Da nun alle Versuche zeigen, daß die Beziehung 50 zwischen Geschwindigkeit, Dichte und Widerstand innerhalb der Versuchsgenauigkeit stimmt, handelt es sich um die Messung des Koeffizienten k für die verschiedenen Plattenformen.

Nachdem Lilienthal für k den Wert von 0,125 angegeben hatte, erhielt Dines für runde Flächen von 15 cm Durchmesser $k = 0{,}083$, von 34 cm Durchmesser $k = 0{,}086$, für ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge 0,084, von 40 cm Seitenlänge 0,085; ungefähr dieselben Werte bekam Langley für eine kreisförmige Platte.

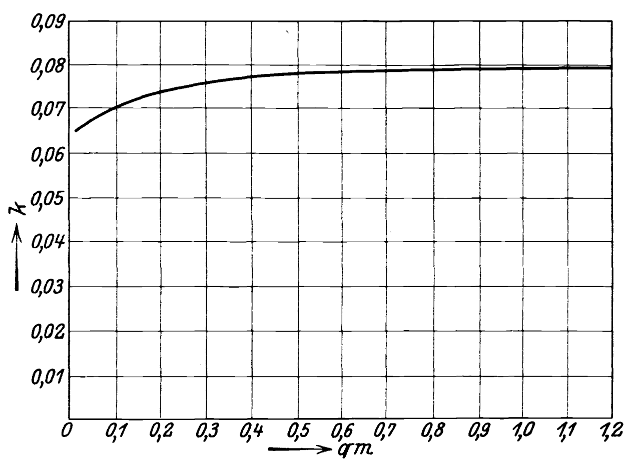


Fig. 31. Änderung des Widerstandskoeffizienten einer quadratischen Platte mit ihrer Größe.

Während also diese älteren Experimentatoren wesentlich höhere Werte fanden, als die Theorie liefert, ergeben die neueren Untersuchungen geringere Abweichungen. So findet Eiffel bei seinen Fallversuchen mit einer 0,6 qm großen Platte $k = 0{,}068$ für den Kreis, $k = 0{,}070$ für das Rechteck; bei größeren Platten wird der Koeffizient ein wenig größer. Prandtl und Föppl finden für quadratische Platten von 12 cm Seitenlänge $k = 0{,}069$, dagegen Eiffel bei ruhender Platte in strömender Luft und 10 cm Seitenlänge 0,065, bei 25 cm Seitenlänge 0,067; die Geschwindigkeit war bei diesen letzteren Versuchen 9 bis 15 m pro Sekunde. Eiffel verbindet dieses Resultat mit dem aus den Fallversuchen und folgert, daß der Widerstandskoeffizient von dem Werte $k = 0{,}065$ an mit der Plattengröße wächst und sich dem Wert $k = 0{,}080$ bei sehr großen Platten asymptotisch nähert, gemäß der Kurve Fig. 31.

Man erkennt aus diesen Versuchen, daß der experimentell gefundene Wert für den Widerstandskoeffizienten k höher liegt, als der theoretische, wie es auch anzunehmen ist, da die Wirkung der Kanten bei dem letzteren unberücksichtigt geblieben ist. Ungeklärt bleibt allerdings die Zunahme des Koeffizienten mit der Flächengröße, die von mehreren Experimentatoren bestätigt wurde.

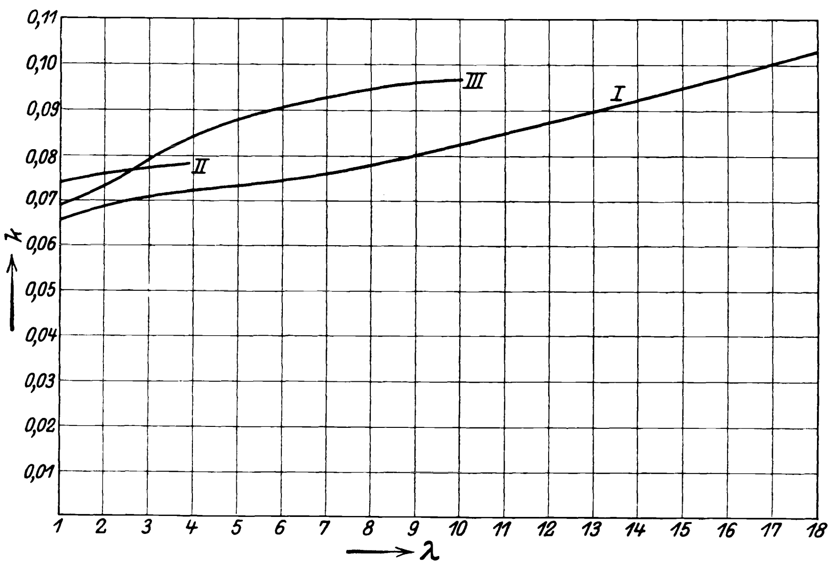


Fig. 32. Widerstandskoeffizient einer länglichen ebenen Platte bei senkrechter Inzidenz, abhängig vom Seitenverhältnis λ nach Eiffel (Kurve I und II) und Prandtl (Kurve III).

Ist die Platte nicht quadratisch, sondern hat sie rechteckige, gestreckte Form, so nimmt der Wert von k ebenfalls zu, wie es auch die Theorie verlangt; denn die vernachlässigte Kantenwirkung wird von größerem Einfluß, indem das Verhältnis Kantenlänge zur Flächengröße beim Rechteck größer ist als beim Quadrat oder Kreis. Auch die Kirchhoff-Lord Raleighsche Betrachtungsweise, die zu dem Werte $k = 0{,}055$ bei einer unendlich breiten Fläche führt, läßt eine Widerstandsabnahme mit abnehmendem Seitenverhältnis erwarten. Denn sie geht von der Voraussetzung aus, daß die Luft an der Vorderfläche der Platte nur in einer Richtung abströmt, also nur eine Strömung in Richtung der Schmalseite stattfindet; ist aber die Platte nicht unendlich breit, so muß auch ein Abströmen der Flüssigkeit in Richtung der Breitseite stattfinden und dadurch die mittlere Strömungsgeschwindigkeit vor der Vorderfläche größer sein, als sich aus der Lord Raleighschen Formel ergibt. Dies bewirkt aber eine Verringerung des mittleren Druckes in Richtung der Strömung, also auch eine Verringerung des Gesamtdruckes.

Die Resultate der verschiedenen Messungen sind in Fig. 32 dargestellt, in der mit λ das Verhältnis der größeren zur kleineren Seite bezeichnet ist: Kurve I gibt die von Eiffel in bewegter Luft erhaltenen Werte bei einer konstanten Flächengröße von 225 qcm, Kurve II ist das Resultat seiner Fallversuche bei einer Flächengröße von $^1/_8$ qm = 1250 qcm. Eiffel schließt aus dem Vergleich dieser zwei Kurven, daß der Widerstandskoeffizient k bei größeren Platten weniger stark veränderlich ist. Kurve III ist das Ergebnis der Göttinger Versuchsanstalt, bei dem indessen nicht die Plattengröße, sondern die Breite bei veränderlicher Länge konstant gehalten wurde, und zwar war die Breite 7 cm, die Länge 7 bis 70 cm; diese Kurve enthält demnach nicht nur den Einfluß des Seitenverhältnisses, sondern auch den der Größe; dies erklärt hinreichend die stärkere Widerstandszunahme mit λ.

II. Widerstand einer gegen den Wind geneigten ebenen Fläche.

Bei einer gegen den Wind geneigten Fläche müssen wir dynamischen Widerstand und Reibungswiderstand scharf voneinander trennen. Die Richtung des ersteren fällt in die Flächennormale, die des letzteren in die Richtung der Fläche. Ist der Neigungswinkel der Fläche klein, so ist der Reibungswiderstand nicht mehr zu vernachlässigen und der resultierende Druck ist gegen die Flächennormale geneigt. Da nun beide Widerstände, wie wir gesehen haben, von verschiedener Potenz der Geschwindigkeit und Flächengröße abhängen, ist es nicht möglich, die Resultate mittels einer Widerstandskonstanten anzugeben, sondern es sind zwei Konstanten erforderlich.

Dieser Umstand ist leider von fast allen Experimentatoren unberücksichtigt geblieben; daraus folgt, daß die gefundenen Werte für den Widerstand nicht ohne weiteres auf andere Geschwindigkeiten und Flächengrößen übertragbar sind, und es erklärt sich dadurch ihre starke Abweichung untereinander. Für die Flugtechnik, die mit so kleinen Neigungswinkeln arbeitet, daß der Reibungswiderstand von großer Bedeutung wird, wäre demnach eine nochmalige Durchsicht der Resultate von unschätzbarem Werte.

Für den dynamischen Widerstand allein liefert unsere Theorie bei einer reibungslosen Flüssigkeit je nach Ausbildung der Kanten zwei verschiedene Strömungsmöglichkeiten und demnach auch zwei verschiedene Widerstandskonstanten. Bei scharfen Kanten ergab sich das Strömungsbild Fig. 16, bei weniger scharfen Kanten und hinreichend kleinem Neigungswinkel das Strömungsbild Fig. 18. Bei diesem haben wir an der Rückseite eine mit der Entfernung von der Anblaskante abnehmende Geschwindigkeit. Nach der Theorie von Prandtl muß dies in einer reibenden Flüssigkeit zu einer Ablösung der Strömung von der Platte führen, d. h. zu einem Strömungsbild gemäß Fig. 16, nur mit dem Unterschiede, daß die „Diskontinuitätsfläche" nicht schon an der Anblaskante ansetzt, sondern an einer auf der Flächenrückseite liegenden Kurve.

Bei einer Fläche, die in Richtung der Strömung kleine Dimension hat, wird dadurch für den größeren Teil der Fläche das Bild Fig. 18 mit entsprechend hoher Widerstandskonstante maßgebend sein. Für in Richtung der Strömung sehr breite Flächen dagegen bei dem größeren Teil der Fläche das Bild Fig. 16. Bei nahezu quadratischen Platten dürfte je nach der Kantenausbildung bei einem bestimmten Neigungswinkel ein Übergang von dem einem zum andern Strömungsbild und damit eine plötzliche Änderung der Widerstandskonstanten eintreten.

Somit hängt schon der dynamische Widerstand stark von der Kantenausbildung und der Flächengröße ab. Für die Aviatik direkt verwendbare Versuchsergebnisse dürften nur dann erzielt werden, wenn die Form der Flächen — Kantenausbildung und Stärke — berücksichtigt wird und wenn ferner die Flächengröße von derselben Größenordnung ist, wie sie in der Aviatik Verwendung findet, oder wenigstens so groß ist, daß die Wirkung der Kanten nachgewiesenermaßen ohne Bedeutung bleibt. Allerdings wird man dann zu einer Versuchsanordnung zurückkehren müssen, bei der die Fläche in ruhender Luft bewegt wird, da es kaum möglich erscheint, einen für große Flächen genügend breiten, gleichmäßigen und wirbelfreien Luftstrom herzustellen. Die Bewegung der Fläche würde am besten geradlinig in einer langen, hinreichend breiten Halle geschehen, um die Zentrifugalkräfte und die Luftzirkulation zu vermeiden, die beim Rundlauf auftreten.

Dies vorausgeschickt, seien im folgenden die wichtigsten bisher erhaltenen Resultate mitgeteilt.

Drücken wir den Gesamtwiderstand durch die Formel aus:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{V}^2, \qquad (52)$$

wo F die Größe der Fläche in Quadratmetern (also nicht die Projektion der Fläche!), V die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde und K den Widerstand in Kilogrammen angibt, so ist k_α eine von dem Neigungswinkel abhängige Zahl, die von Flächenform und Geschwindigkeit unabhängig sein müßte, wenn die Formel streng richtig wäre.

Die Werte, die Dines, Langley, Eiffel, Föppl für k_α bei einer quadratischen Platte fanden, sind in der Fig. 33 eingetragen.

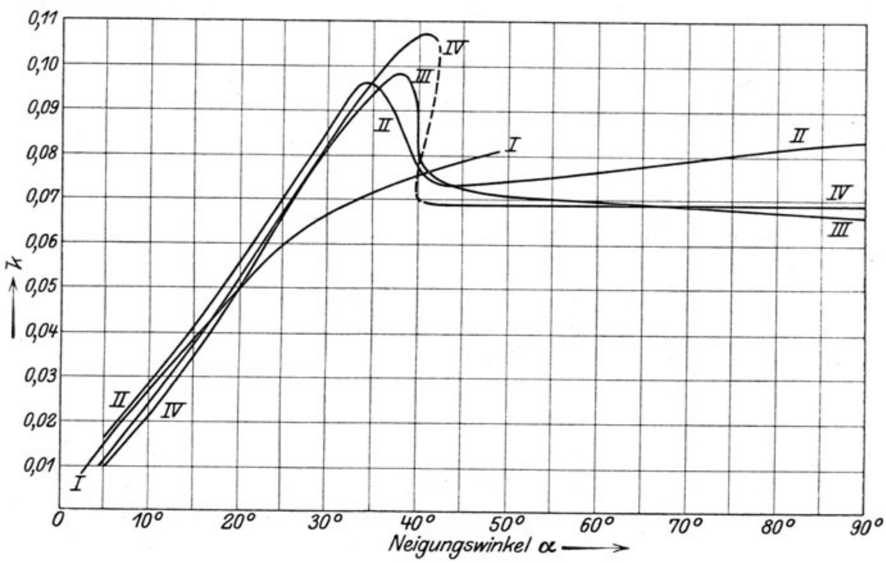


Fig. 33. Widerstandskoeffizient einer quadratischen ebenen Platte, abhängig vom Neigungswinkel, nach Langley I, Dines II, Eiffel III, Föppl IV.

Die Kurve von Langley (Kurve I) wurde mit einer Messingplatte von 30,5 cm Seitenkante erhalten bei etwa 3 mm Dicke und scharfen Kanten. Dines (Kurve II) benutzte Platten mit einem Querschnitt gemäß Fig. 34 von 10 bis 30 cm Seitenlänge, Eiffel (Kurve III) Platten von 25 cm Seitenlänge und 3 mm Dicke bei scharfen Kanten, Föppl (Kurve IV) Platten von 12 cm Seitenlänge, 1,7 mm Dicke mit abgerundeten Kanten.

Fig. 34.

Man erkennt aus der Figur, daß das Strömungsbild gemäß den Kurven von Dines, Eiffel und Föppl bei resp. 34^0, 38^0 und 42^0 umschlägt, ein Umstand, der offenbar durch die verschiedene Kantenausbildung hervorgerufen wird. Je größer der Winkel, bei dem das Strömungsbild sich andert, desto höher ist auch der Maximaldruck, der erreicht wird. Interessant ist, daß es Föppl gelang, zwischen 38^0 und 42^0 beide Strömungsbilder zu erhalten und dementsprechend für ein und denselben Neigungswinkel zwei ganz verschiedene Widerstandskoeffizienten, wenn er das eine Mal von kleinem Neigungswinkel, das andere Mal von einem großen Neigungswinkel ausging. Da Dines mit bewegter Platte in ruhender Luft arbeitete, kann der „Höcker" der Widerstandskurve nicht durch zu kleinen Querschnitt des Luftstromes bei den Versuchen von Eiffel und Föppl verursacht sein. Unklar bleibt nur, warum Langley und andere Experimentatoren diese Erscheinung nicht gefunden haben; möglich ist indessen, daß sie den „Höcker" als unwahrscheinlich unberücksichtigt ließen. Auffallend ist ferner, daß nur Dines eine Abnahme des Druckes bei Neigungen der Platte von 90^0 bis 50^0 gemäß unserer Theorie fand, Föppl keine Druckänderung und Eiffel von Anfang an eine, wenn auch nur geringe Drucksteigerung; es ist zu vermuten, daß der zu geringe Querschnitt des Luftstromes gegenüber der Plattengröße die Veranlassung dieser Erscheinung ist.

Alle vier Forscher finden bei kleinem Neigungswinkel nahezu Proportionalität mit α resp. $\sin\alpha$. Stellen wir dementsprechend für kleine Winkel α die Formel auf:

$$K = c F V^2 \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

so wird bei Langley $c = 0{,}146$ bis $0{,}150$, bei Dines $c = 0{,}164$ bis $0{,}165$, bei Eiffel $c = 0{,}144$ bis $0{,}155$, bei Föppl $c = 0{,}127$ bis $0{,}151$ bei einem Neigungswinkel von 10^0 bis 20^0. Als Mittel aus diesen Versuchen kann man für die quadratische Platte $c = 0{,}15$ setzen.

Sind die Platten nicht quadratisch, sondern rechteckig mit verschiedener Seitenlänge, so flacht sich nach den Versuchen aller Forscher der Höcker der Widerstandskurve ab und verschwindet bei langgestreckten Rechtecken ganz. Bezeichnet man mit λ das Verhältnis der Breite B senkrecht zur Strömung, zur Länge L in Richtung der Strömung, so erhielt Eiffel die in Fig. 35 eingetragenen Werte für $\lambda = \frac{1}{3}$; 1; 2; 3; 6; 9; hierbei war allerdings die Plattengröße verschieden, nämlich 15×45; 25×25; 30×15; 45×15; 90×15; 90×10 cm. Ganz analoge Kurven bekamen Prandtl und Föppl, die Platten mit einer Länge von 12 cm und verschiedener Breite untersuchten. Aus diesen Kurven ergibt sich das interessante Resultat, daß die starke Widerstandserhöhung, die bei quadratischer Platte bei etwa 40^0 Neigung auftritt, bei einem großen Wert von λ verschwindet und schon bei $\lambda = 3$ das absolute Maximum bei 90^0 liegen bleibt. Andererseits wird bei kleinen Winkeln der Widerstand mit steigendem λ fortgesetzt größer. Dies beruht indessen teilweise auf Täuschung, denn nach unseren theoretischen Gleichungen gewinnt mit zunehmendem λ die Reibung immer mehr an Bedeutung und kann sicherlich bei $\lambda = 9$ und $\alpha = 5^0$ nicht mehr vernachlässigt werden, wie es bei Aufstellung der Gleichung 52 geschah. Auch der Stirnwiderstand der Platte von 3 mm Dicke nimmt mit abnehmender Plattentiefe zu.

Die Gleichung 53 gilt auch bei der rechteckigen Platte angenähert; man erhält für die Konstante c aus Fig. 35 bei einem Neigungswinkel von 10^0 die Werte: 0,087; 0,144; 0,179; 0,204; 0,250; 0,265 für die resp. Seitenverhältnisse $= \frac{1}{3}$; 1; 2; 3; 6; 9. Man erkennt demnach eine merkliche Zunahme der Konstanten c mit λ; allerdings wird der Winkel, für den die Proportionalität noch gilt, mit zunehmendem λ immer kleiner.

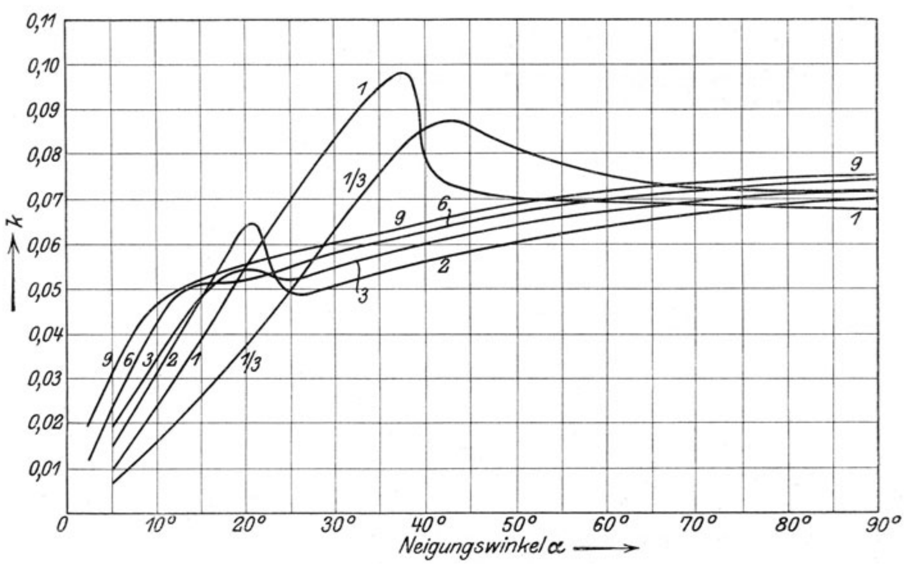
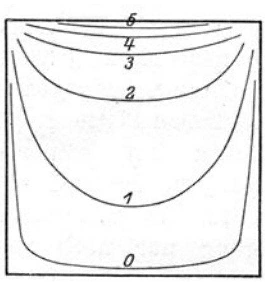
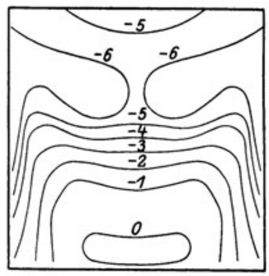


Fig. 35. Widerstandskoeffizient einer rechteckigen ebenen Platte bei verschiedenem Seitenverhältnis, abhängig vom Neigungswinkel.

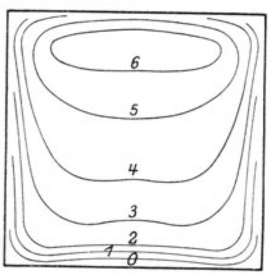
Die Druckverteilung auf Vorder- und Rückseite der Platten ist von Eiffel eingehend untersucht worden, dieselbe gibt im wesentlichen eine Bestätigung unserer Theorie. Fig. 36 bis 39, die dem genannten Werke von Eiffel direkt entnommen sind, lassen erkennen, daß sich bei 20^0 Neigung der quadratischen Platte starke negative Drucke auf der Rückseite in der Nähe des Anblasrandes ausbilden, ein Beweis dafür, daß die Luft hinter der Platte große Geschwindigkeit besitzt. Bei 60^0 Neigung haben wir dagegen einen fast konstanten Druck hinter der Platte, der beweist, daß sich die Strömung vollständig von der Platte abgelöst hat. Bezüglich der Aufnahme dieser und ähnlicher Druckverteilungskurven gibt Eiffel an, daß er als Nullpunkt den Druck der ruhigen Luft in dem Untersuchungsraum wählte; dann müßten aber sämtliche Drucke negatives Vorzeichen haben und bei einem sehr kleinen Neigungswinkel nicht beiderseits ein verschwindend kleiner Druck, sondern ein der Geschwindigkeit entsprechender negativer Druck herrschen. Es liegt hier demnach eine Unstimmigkeit in seinem Werke vor, die aber für das Resultat ohne Bedeutung bleibt.

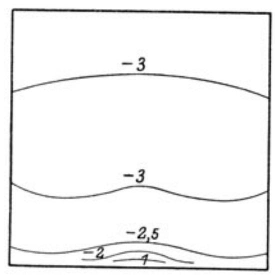




Druckverteilung an einer ebenen quadratischen Platte, 50 $\times$ 50 cm, bei 20 Grad Neigung.

Fig. 36. Vorderseite. Fig. 37. Rückseite.





Druckverteilung an einer ebenen quadratischen Platte, 50 $\times$ 50 cm, bei 60 Grad Neigung.

Fig. 38. Vorderseite. Fig. 39. Rückseite.

Um zu prüfen, ob tatsächlich der bei 40^0 Neigung an der quadratischen Platte gefundene Doppelwert zwei verschiedenen Strömungen entspricht, hat Föppl die Luftbewegung durch Zuleiten von Salmiakrauch sichtbar gemacht. Die erhaltenen Bilder entsprachen tatsächlich, wenigstens im Prinzip den Fig. 16 und 18, wenn man die in einer wahren Flüssigkeit sich ausbildenden Wirbel an den Diskontinuitätsflächen berücksichtigt.

Der eigenartigen Druckverteilung auf Vorder- und Rückseite der geneigten Platte entspricht die Lage des Druckmittelpunktes. Derselbe rückt vom Mittelpunkt der Platte bei 90^0 Neigung mit abnehmendem Neigungswinkel α gegen den Anblasrand hin, entsprechend der großen Luftgeschwindigkeit hinter dem vorderen

Teil der Platte bei starker Neigung. Die Lagen des Druckmittelpunktes, die Eiffel bei Platten von 25 × 25 cm ($\lambda = 1$), 90 × 15 cm ($\lambda = 6$), 15 × 90 cm ($\lambda = \frac{1}{6}$) fand, sind in Fig. 40 eingetragen. Man sieht, daß die Verschiebung des Druckmittelpunktes an breiten Platten geringer Tiefe erst mit kleinen Neigungswinkeln größere Werte annimmt, dagegen an der schmalen Platte großer Tiefe schon bei mittleren Neigungen, um sich allerdings dann bei zunehmender Neigung nur noch wenig zu ändern.

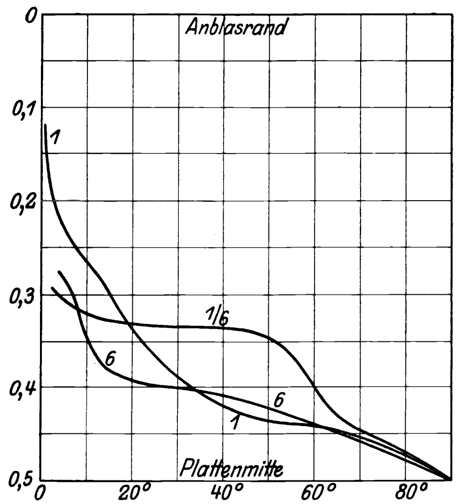


Fig. 40. Lage des Druckmittelpunktes einer rechteckigen ebenen Platte, abhängig vom Neigungswinkel bei verschiedenem Seitenverhältnis.

Um den Reibungswiderstand für sich besonders zu erhalten, können die Widerstandsbeobachtungen bei dem Neigungswinkel Null dienen. Der Widerstand setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen, dem gesuchten Reibungswiderstande und dem Stirnwiderstande, welch letzterer durch die nicht zu vernachlässigende Dicke der Platte bedingt ist. Föppl sucht diesen dadurch zu eliminieren, daß er Platten verschiedener Dicke prüft und auf die Platte der Dicke Null extrapoliert. Er findet den Reibungswiderstand jeder Plattenseite für sich zu

$$R = 0{,}0018 \frac{\gamma}{g} F V^2$$

bei $V = 6{,}3$ m pro Sekunde, $F = 20 \times 80$ cm und $\gamma = 0{,}00120$. Rechnen wir diesen Wert nach unseren Formeln 47 resp. 48

$$R = \tfrac{1}{2} \zeta_R B \sqrt{\gamma \mu L V^3}$$

um, so finden wir für den Reibungskoeffizienten ζ_R den Wert 1,08 gegenüber dem rechnerisch gefundenen Werte 1,33, eine immerhin gute Übereinstimmung bei der Schwierigkeit der Versuche und der Ungenauigkeit der Extrapolation auf unendlich kleine Dicke.

Auch die Versuche von Lanchester[1]) über die Größe der

[1]) F. W. Lanchester, Aerodynamik, übersetzt von C. u. A. Runge, § 239 bis 247.

Reibung ergeben Werte für ζ_R, die in der Nähe der Einheit liegen, wenn man den Koeffizienten ξ seiner Messung nach den angegebenen Versuchsdaten, soweit es möglich ist, umrechnet. Demnach kann die Formel für den Reibungswiderstand als experimentel bewiesen gelten, wenn es auch notwendig erscheint, den Wert des Koeffizienten ζ_R noch eingehender zu prüfen.

III. Widerstand einer gegen den Wind geneigten gekrümmten Fläche.

Gekrümmte Flächen sind von Lilienthal in die Aviatik eingeführt worden. Ihre Bedeutung liegt in der auf S. 46 erklärten Tatsache, daß sie auch noch bei dem Neigungswinkel Null einen erheblichen Auftrieb erfahren und dadurch größere Auftriebe erzielen lassen, als ebene Flächen gleicher Größe. Die Widerstandsverhältnisse gekrümmter Flächen sind daher von Prandtl, Föppl und Eiffel sehr eingehend behandelt worden. Soweit es zu erwarten war, stimmen die Resultate miteinander überein; allerdings gelten auch hier die Vorbemerkungen zum Teil II, und es ist bei der Übertragung der Resultate auf Flugflächen praktischer Größe große Vorsicht am Platze.

Handelt es sich im einfachsten Falle um kreiszylindrisch gekrümmte Flächen mit der Erzeugenden senkrecht zur Bewegungsrichtung Fig. 41, so mißt man die Krümmung zweckentsprechend durch das Verhältnis des Pfeiles f (Höhe der Wölbung) zur ganzen Sehne s, und nennt diesen Quotient das Krümmungsverhältnis. Als Neigungswinkel wird allgemein der Winkel α zwischen Sehne und Bewegungsrichtung angesehen.

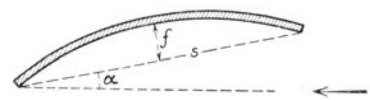


Fig. 41.

Fig. 42 gibt die Werte des Widerstandskoeffizienten k_a der Formel 52 für verschiedene Seitenverhältnisse in seiner Abhängigkeit vom Neigungswinkel für Flächen mit dem Krümmungsverhältnis 1 : 13,5 wie sie von Eiffel festgestellt wurden; derselbe hält Flächen mit diesem Krümmungsverhältnis für die vorteilhaftesten Tragflächen bei Flugzeugen. Die Größen der Flächen waren hierbei: 15×90; 25×25; 30×15; 45×15; 90×15; 90×10 cm. Man sieht, daß sich der Widerstand bei gekrümmten Flächen etwa in demselben Maße mit dem Seitenverhältnis ändert, wie bei ebenen Flächen, und daß der Widerstand bei kleinen Winkeln stark mit λ zunimmt. Allerdings scheint bei $\lambda = 6$ der günstigste Wert nach den Versuchen Eiffels erreicht zu sein, während der Widerstand nach Föppl auch noch für λ größer als 6 zunimmt.

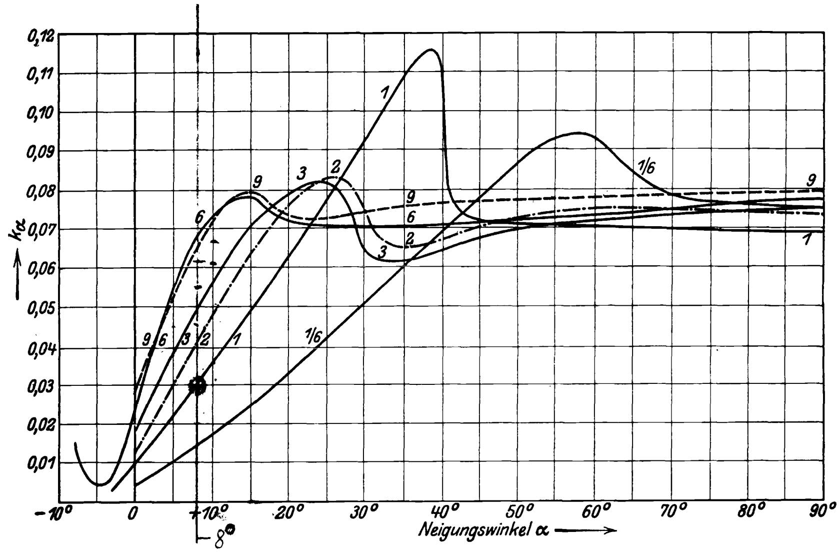


Fig. 42. Widerstandskoeffizient einer 1 : 13,5 gekrümmten zylindrischen Platte mit verschiedenem Seitenverhältnis, abhängig vom Neigungswinkel.

Die Kurve für $\lambda = 6$ läßt erkennen, daß der kleinste Widerstandswert bei einem geringen negativen Werte von α erreicht wird; dieser kleinste Wert in Höhe von 0,005 ist durch Stirn- und Reibungswiderstand zusammen veranlaßt und muß gemäß den Vorbemerkungen bei größeren Platten und größeren Geschwindigkeiten — Eiffel experimentierte meistens mit 12 m pro Sekunde — kleiner ausfallen. Bestimmt man die Konstante c bei $\lambda = 6$ aus der Fig. 42, so bekommt man $c = 0{,}415$ bei 10^0 und $c = 0{,}60$ bei 5^0, wenn man den Winkel α vom Werte Null an rechnet. Richtiger ist es indessen, den Winkel α der Formel 53 von $-4{,}5^0$ an zu zählen, wo der Widerstand seinen kleinsten Wert erreicht; man erhält dann $c = 0{,}29$ resp. 0,31 für 10^0 resp. 5^0 zwischen Flächensehne und Bewegungsrichtung, also einen immer noch wesentlich höheren Wert als an einer ebenen Fläche.

Da der Stirnwiderstand bei zunehmendem Krümmungsverhältnis wächst, kann der Gesamtwiderstand, auch abgesehen vom Reibungswiderstand, nicht mehr normal zur Sehne stehen. Folglich genügt nicht die Kenntnis des Gesamtwiderstandes zur Bestimmung der zwei Komponenten in der Bewegungsrichtung (Bewegungswiderstand) und senkrecht zur Bewegungsrichtung (Auftrieb). Das Verhältnis dieser zwei Komponenten ist aber für das Flugproblem von ausschlaggebender Bedeutung. Infolgedessen sind von Eiffel und teilweise auch von Föppl zahlreiche Versuche unternommen worden, diese zwei Komponenten für die verschiedensten Flügelformen getrennt zu bestimmen. Aus dem großen Versuchsmaterial ist in Fig. 43 das Ergebnis für einige wichtige Formen herausgegriffen.

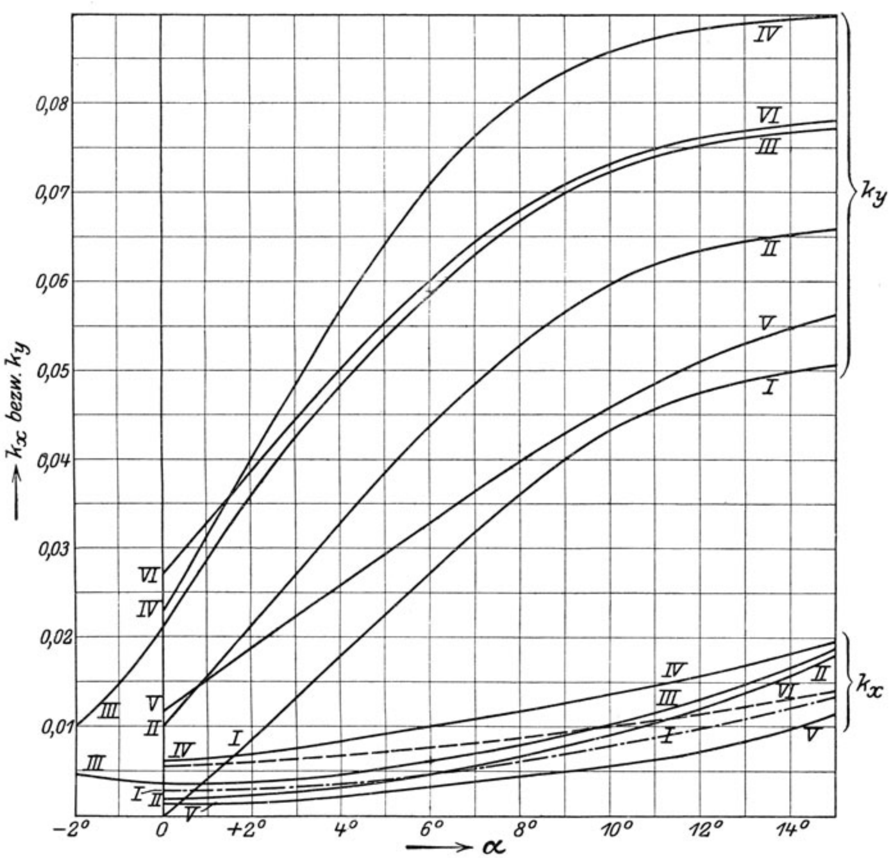


Fig. 43. Koeffizient des Bewegungswiderstandes k_x und des Auftriebes k_y, abhängig vom Neigungswinkel für Flächen verschiedener Krümmung und Form.

Hier bedeutet k_x den Koeffizienten des Bewegungswiderstandes, k_y den des Auftriebes, wenn die Formel 52 beiden Widerstandskomponenten zugrunde gelegt wird. Wäre der Gesamtwiderstand normal zur Flächensehne, so müßte $k_x : k_y = \operatorname{tg} \alpha$ sein. Es bezieht sich

Kurve I auf eine ebene Fläche von 90×15 cm ($\lambda = 6$) bei 3 mm Dicke,
„ II auf eine gekrümmte Fläche von 90×15 cm, 2 mm Dicke, Krümmungsverhältnis 1 : 27,
„ III auf eine gekrümmte Fläche von 90×15 cm, 2 mm Dicke, Krümmungsverhältnis 1 : 13,5,
„ IV auf eine gekrümmte Fläche von 90×15 cm, 2 mm Dicke, Krümmungsverhältnis 1 : 7,
„ V auf eine Fläche von 90×15 cm, die auf der unteren Seite eben, auf der oberen mit einem Krümmungsverhältnis 1 : 15 gewölbt ist (Fig. 44),
„ VI auf eine vogelflügelförmige Fläche derselben Dimension mit einem Querschnitt gemäß Fig. 45.

Fig. 44.

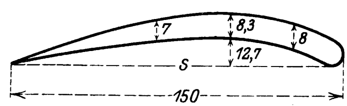


Fig. 45.

Aus den Kurven erkennt man, daß die Vertikalkomponente mit der Krümmung erheblich zunimmt, allerdings auch die Hori-

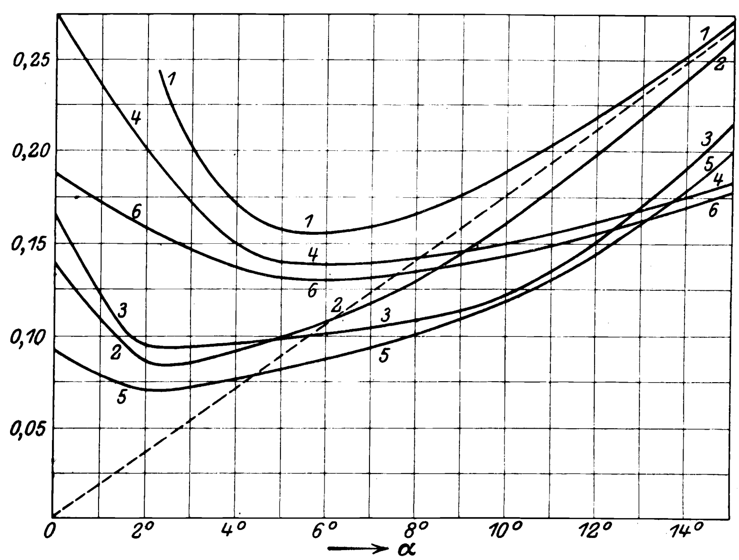


Fig. 46. Bewegungswiderstand im Verhältnis zum Auftriebe, abhängig vom Neigungswinkel für Flächen verschiedener Krümmung und Form.

zontalkomponente. Interessant sind die Kurven V und VI, die zeigen, daß nicht nur die Krümmung der unteren Seite, sondern auch die der oberen Seite von Bedeutung ist, wie es die Theorie verlangt, und daß trotz erheblicher Flügeldicke der Stirnwiderstand verhältnismäßig klein bleibt, da für genügende Verlängerung des hinteren Flügelteiles gesorgt ist.

Das Verhältnis k_x zu k_y abhängig vom Neigungswinkel der Sehne zur Bewegungsrichtung ist in Fig. 46 für die sechs erwähnten Flächenformen eingetragen. Die gestrichelte Linie gibt den Wert des $\operatorname{tg} \alpha$ an. Nach diesem Diagramm stimmt der Wert von $k_x : k_y$ bei der ebenen und wenig gekrümmten Fläche bis etwa 10^0 herab mit dem Werte des $\operatorname{tg} \alpha$ nahezu überein, fällt bei der

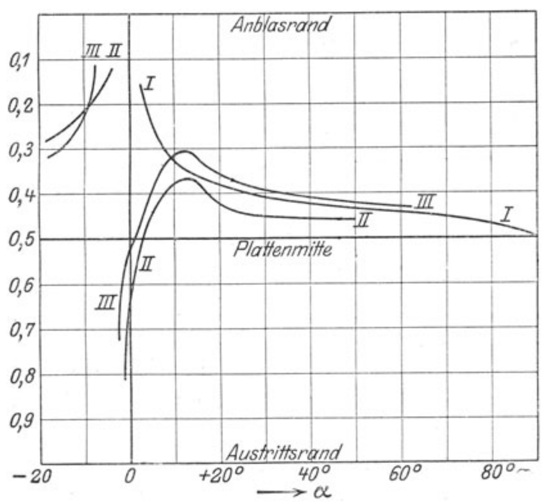


Fig. 47. Lage des Druckmittelpunktes, abhängig vom Neigungswinkel bei Flächen verschiedener Form.

stark gekrümmten Fläche aber merklich kleiner aus. Bei sehr kleinen Neigungen wird schließlich Reibungs- und Stirnwiderstand überwiegen, und es erreicht infolgendessen $k_x : k_y$ bei einem bestimmten Neigungswinkel ein Minimum, das zwischen 2^0 und 6^0 liegt.

Eine weitere Eigentümlichkeit gekrümmter Flächen ist die, daß der Druckmittelpunkt selbst bei kleinen Neigungen von 5^0 bis 10^0 angenähert in der Flächenmitte bleibt. Denn der Auftrieb, der aus der Krümmung beim Neigungswinkel Null resultiert, greift naturgemäß in der Flächenmitte an und verrückt durch seine Überlegenheit den Angriffspunkt des Gesamtwiderstandes stark gegen die Mitte der Fläche. Fig. 47 gibt die Lage des Angriffspunktes bei der ebenen (Kurve I), $^1/_{13,5}$ gekrümmten (Kurve II) und der segmentförmigen Fläche (Kurve III) an. Während sich hiernach der

Druckmittelpunkt bei der ebenen Fläche von etwa 15° Neigung an schnell dem Anblasrande nähert, rückt er bei der gekrümmten Fläche wieder zur Plattenmitte hin, um bei negativen Neigungswinkeln zunächst die hintere Plattenhälfte zu erreichen, und dann wegen des Reibungswiderstandes unbestimmt zu werden. Bei noch größerer negativer Neigung rückt der Druck auf die konvexe Flächenseite und liegt dann wieder auf der vorderen Plattenhälfte.

IV. Widerstand von Doppelflächen.

Verbindet man zwei benachbarte Flächen fest miteinander, so wird der Widerstand beider Flächen zusammen kleiner ausfallen, als die Summe der Widerstände beider Flächen einzeln für sich genommen, solange die zweite Fläche in einem Strömungsbereich liegt, in dem die durch die erste Fläche bedingte Strömungsstörung noch nicht durch Wirbelbildung ausgeglichen ist.

Befinden sich z. B. zwei Flächen normal zur Strömung dicht hintereinander (Fig. 48), so bildet sich, wie wir im letzten Kapitel sahen, hinter der Fläche F_1 zunächst ein Gebiet sehr kleiner Geschwindigkeit aus, in welchem der statische Druck mit der Entfernung von F_1 zunimmt. Folglich haben wir auf der Vorderseite der Fläche F_2 einen kleineren Druck als auf der Rückseite und einen resultierenden Druck, der der Strömung entgegen gerichtet ist; somit wird die Fläche F_2 gegen die Fläche F_1 hingezogen. Dies bewirkt, daß der Widerstand beider Flächen zusammen, kleiner ist als der der Fläche F_1 alleine.

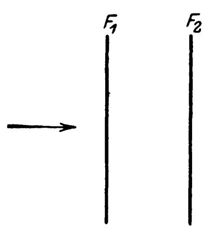


Fig. 48.

Eiffel untersuchte zwei Kreisscheiben von 30 cm Durchmesser bei 12 m Luftgeschwindigkeit in verschiedener Entfernung voneinander und fand, daß der Widerstand beider zusammen bei einem Abstande von etwa 45 cm, also dem $1^1/_2$fachen Durchmesser am kleinsten wird, und zwar etwa 30% kleiner als der einer einzelnen Scheibe. Bei einer Entfernung vom 3fachen Durchmesser ergab sich erst der $1^1/_2$fache Widerstand einer einzelnen Scheibe.

Von Wichtigkeit wäre es, zu untersuchen, wie sich diese Verhältnisse mit der Scheibengröße, Luftgeschwindigkeit und dem Reibungskoeffizienten (Temperatur) ändern, um auf diese Weise einen Anhalt über den Koeffizienten ζ_μ unserer Formel 49 zu bekommen.

Da die Eigenschaften zweier fest miteinander verbundener geneigter Flächen für die „Doppeldecker" von großer Bedeutung sind, hat Eiffel diese für verschiedene Flächenformen und Flächenabstände näher untersucht, und es muß bezüglich der Einzelheiten auf seine Veröffentlichung verwiesen werden. Er findet den Wert von k_y, bezogen auf die Summe beider Flächen, bei einem Abstande derselben von $^2/_3$, $^3/_3$, $^4/_3$ ihrer Tiefe voneinander, um resp. $35\,^0/_0$, $30\,^0/_0$, $25\,^0/_0$ vermindert, wenn er ebene Flächen mit $\lambda = 6$ verwandte. Mit Flächen eines Krümmungsverhältnisses $^1/_{13,5}$ ergaben sich bei denselben Abständen eine Verminderung von $26\,^0/_0$, $23\,^0/_0$, $18\,^0/_0$. Die Werte von $\frac{k_x}{k_y}$ findet Eiffel bei Doppelflächen um gut $30\,^0/_0$ höher liegen, weist aber bereits selbst darauf hin, daß diese Erhöhung vornehmlich durch den Stirnwiderstand der verbindenden Streben veranlaßt wird.

V. Widerstand von Rotationskörpern.

Bei Rotationskörpern größerer Länge ist der Reibungswiderstand von wesentlicher Bedeutung, er kann sogar der ausschlaggebende Widerstand werden, wenn durch passende Form von Stirnfläche und Schwanzstück der dynamische Widerstand stark heruntergedrückt ist. Um daher Versuchsresultate auf andere Körpergrößen und Luftgeschwindigkeiten übertragen zu können, wäre es für diese Untersuchungen unbedingt nötig, den Koeffizienten des Reibungswiderstandes und des dynamischen Widerstandes gesondert zu bestimmen, etwa durch Ausführung der Versuche mit zwei stark voneinander abweichenden Geschwindigkeiten oder mit zwei verschieden großen, aber ähnlichen Körpern. Handelt es sich z. B. um den Widerstand eines langgestreckten zylindrischen Körpers und um ein Versuchsmodell mit $^1/_{100}$ der natürlichen Dimensionen, so ist der Modellquerschnitt 10000mal kleiner als der natürliche Querschnitt und demnach auch der dynamische Widerstand, wenn man von der Widerstandsverminderung durch die Verlängerung absieht. Der Reibungswiderstand des Modelles ist aber nur $100\sqrt{100} = 1000$mal kleiner als bei dem natürlichen Körper, und es ist durchaus nicht gesagt, daß die dynamische Widerstandsverminderung durch die Verlängerung, also der Koeffizient ζ_μ unsere Formel 49 eine derartige Größe erreicht, daß trotzdem dynamischer Widerstand und Reibungswiderstand beim Modell und einem Körper natürlicher Größe in gleichem Verhältnis zueinander bleiben.

Trotzdem legen fast alle bisherigen Forscher für den Widerstand die Formel

$$K = k_f F V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

zugrunde, in der F den größten Querschnitt senkrecht zur Bewegungsrichtung in Quadratmetern, V die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde und K den Widerstand in Kilogrammen mißt. Nach dem oben Gesagten wird der Koeffizient k_f nicht nur von der Körperform abhängig werden, sondern auch verschieden ausfallen, je nach Größe des Körpers und der Luftgeschwindigkeit. Trotzdem seien in folgendem einige Werte von k_f angegeben, wie sie in den verschiedenen Versuchsanstalten gefunden wurden.

Fig. 49.

Fig. 50.

Dines fand bei einer Geschwindigkeit von 9 m pro Sekunde an einer Kreisplatte von 15 cm Durchmesser geringer Dicke (Fig. 49) $k_f = 0{,}083$, bei der gleichen Scheibe, aber 12 cm Dicke (Kreiszylinder von 12 cm Länge Fig. 50) $k_f = 0{,}053$, also bei einer Verlängerung um angenähert den Durchmesser eine Widerstandsverminderung um rund 25%.

Eiffel erhielt bei einer Geschwindigkeit von 12 m pro Sekunde an einer Scheibe von 15 cm Durchmesser 0,066, und bei einem Zylinder von 15 cm Länge der gleichen Grundfläche 0,055, also nur eine Widerstandsverminderung um ca. 17%. Bei einer Zylinderlänge von dreifachem Durchmesser, also 45 cm, erhielt er bei der angegebenen Geschwindigkeit den kleinsten Wert, nämlich 0,051 oder 23% Verminderung gegenüber der Scheibe. Von dieser Länge an nahm der Widerstand durch die Wirkung der Reibung an dem Zylindermantel wieder etwas zu und erreichte bei 14facher Länge den Wert von 0,059. Nach unseren Formeln für den Luftwiderstand ist zu erwarten, daß in einem Luftstrome größerer Geschwindigkeit der kleinste Widerstand erst bei einer größeren Länge auftritt, da bei höherer Geschwindigkeit der Reibungseinfluß immer mehr zurücktritt.

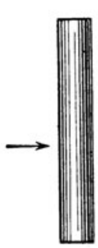


Fig. 51.

Bei einem Zylinder Fig. 51, mit seiner Achse senkrecht gegen die Bewegungsrichtung gestellt, erhält Eiffel bei der angeführten Geschwindigkeit den Widerstandskoeffizienten 0,040 bei 15 cm Durchmesser des Zylinders, 0,060 bei 3 cm Durchmesser. Föppl bekommt bei ebenfalls etwa 12 m pro Sekunde und einem Zylinder (Draht) von 1 cm Durchmesser 0,061, bei 1 mm 0,065, bei 0,2 mm Durchmesser 0,080 und bei 0,05 mm Durchmesser 0,11. Diese Zunahme des Widerstandskoeffizienten mit abnehmender Drahtdicke ist offenbar dem immer stärker werdenden Einfluß der Reibung zuzuschreiben, eine Überlegung, die auch mit der Tatsache übereinstimmt, daß der Koeffizient bei kleinerer Luftgeschwindigkeit größer ausfällt.

Für eine Vollkugel von 25 cm Durchmesser findet Eiffel den auffallend kleinen Wert von 0,011, für eine Halbkugel mit der gewölbten Fläche gegen die Bewegungsrichtung gestellt 0,021.

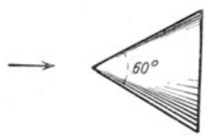


Fig. 52.

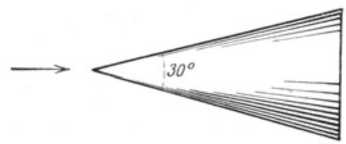


Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

Für einen Kegel gemäß Fig. 52 fand er 0,032, für einen Kegel Fig. 53: 0,021, und schließlich für einen Körper gemäß Fig. 54: 0,010 und gemäß Fig. 55: 0,0055. Der Vergleich der beiden letzteren Werte läßt den großen Einfluß der rückwärtigen Verlängerung erkennen.

Neuntes Kapitel.

Die zum Fliegen benötigte Leistung.

Die Kunst des Fliegens ist eine der ältesten physikalischen Aufgaben, die trotz unzähliger Versuche erst in den letzten 10 Jahren gelöst wurde. Der Grund hierfür liegt darin, daß es erst Anfang dieses Jahrhunderts gelang, hinreichend leichte Motore zu bauen, d. h. Motore, die pro Kilogramm Gewicht genügende Leistung entwickeln. Dampfmaschinen, Gasmotore, Elektromotore einschließlich der Stromquelle in Form von Akkumulatoren oder Elementen wogen mindestens 100 kg pro Pferdekraft, während ein guter Benzinmotor nur 2 bis 3 kg pro PS wiegt. Hinzu kommt die gute Leistungsausnützung des Benzinmotors mit einem Verbrauche von etwa nur 0,3 kg Benzin pro PS-Stunde. Es ist demnach eine leichte Arbeitsquelle die Grundbedingung für die Herstellung eines Flugzeuges und es spitzt sich das ganze Flugproblem in der Hauptsache auf die Frage zu: Eine wie große Leistung für jedes Kilogramm Gewicht ist notwendig, um einen Körper schwebend zu erhalten und von welchen Faktoren hängt diese Zahl ab?

Bei der Beantwortung dieser Frage auf Grund der von uns abgeleiteten Widerstandsgesetze sind drei Arten von Flugzeugen zu unterscheiden:

1. die Segel- oder Gleitflieger, wie sie bisher alleine im Gebrauche sind,

2. die Schwingenflieger, für die uns die Natur in allen Insekten und den Flattervögeln hinreichende Beispiele zeigt,

3. die Schraubenflieger, denen ein Propeller mit vertikaler Achse die nötige Hubkraft liefert.

I. Der Segelflieger.

Die Möglichkeit des Segelfluges ist durch das Gesetz von der Orthogonalität des dynamischen Widerstandes einer bewegten Fläche zu dieser gegeben. Es besteht ein Segelflieger in der Hauptsache aus einer Fläche F, der durch die Wirkung eines Propellers eine Horizontalgeschwindigkeit V unter kleinem Winkel zur Fläche erteilt wird (Fig. 56). Sehen wir zunächst von der Flächenreibung und dem Stirnwiderstande der Fläche ab, so steht die Druckkraft R, die die Fläche bei der Bewegung mit der Geschwindigkeit V erleidet, normal zu F und ist bei kleinem Winkel α gemäß der Gleichung 53 gegeben durch $R = c\,F\,V^2 \sin\alpha$. Diese Kraft zerlegen wir in zwei Komponenten: eine Vertikalkomponente A, die der Schwerkraft entgegenwirkt und deswegen als Auftrieb zu bezeichnen ist und eine Horizontalkomponente W, die sich der Bewegung widersetzt und demnach von dem Propeller überwunden werden muß.

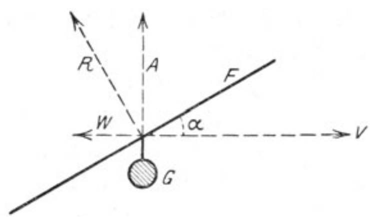


Fig. 56.

Soll das Flugzeug schwebend gehalten werden, so muß der Auftrieb A gleich dem im Schwerpunkt vereinigt zu denkenden Gewichte G sein, also die Gleichung bestehen:

$$A = G = c\,F\,V^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Soll andererseits der Propeller die Geschwindigkeit V aufrecht erhalten, so muß er eine Leistung L liefern, für die gilt

$$L = W \cdot V = c\,F\,V^3 \sin^2\alpha;$$

daraus folgt

$$\frac{L}{G} = V \operatorname{tg}\alpha,$$

oder, für V aus der ersten Gleichung seinen Wert

$$V = \sqrt{\frac{G}{c \cdot F \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

eingesetzt,

$$\frac{L}{G} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{1}{c} \cdot \frac{G}{F}\operatorname{tg}\alpha}.$$

In dieser Gleichung können wir noch, da α nur klein ist, angenähert $\cos\alpha = 1$ setzen und erhalten:

$$\boldsymbol{\frac{L}{G} = \sqrt{\frac{1}{c}\frac{G}{F}\operatorname{tg}\alpha}}. \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Hier ist $\frac{L}{G}$ die notwendige Propellerleistung in Meterkilogrammen pro Kilogramm Gewicht des Apparates und $\frac{G}{F}$ die spezifische

Flächenbelastung, d. h. das von jedem Quadratmeter der Fläche zu tragende Gewicht.

Die Gleichung 56 läßt zunächst erkennen, daß die benötigte Leistung um so geringer wird, je größer der Faktor c ist. Wir sahen nun im vorigen Kapitel, daß c von etwa 0,15 bei ebenen quadratischen Platten bis etwa 0,5 bei gekrümmten rechteckigen Platten steigt; es ergibt sich demnach eine merkliche Überlegenheit dieser letzteren.

Ferner ergibt die Gleichung 56, daß die Leistung mit der spezifischen Flächenbelastung abnimmt. Nun kann man aber mit der Flächenbelastung nicht beliebig weit hinabgehen, sondern je größer der Apparat, desto schwieriger wird es, eine kleine Flächenbelastung zu bekommen. Denn das Eigengewicht der Fläche, das das Gesamtgewicht G vermehrt, nimmt sehr viel schneller zu als die Flächengröße, wenn diese die nötige Festigkeit haben soll. Eine Fläche von beispielsweise doppelter Länge muß auch ein doppelt so starkes Gerippe haben, um dieselbe Festigkeit zu besitzen und wird daher, gleichartige Konstruktion vorausgesetzt, das vierfache Gewicht erreichen. Nennen wir demnach G_2 das Gewicht der Tragflächen, G_1 das übrige Gewicht des Flugapparates, so daß also $G = G_1 + G_2$ ist, so können wir mit einiger Annäherung setzen $G_2 = a\sqrt{F^3}$, wo a eine von der Konstruktion der Flügel abhängige, aber von ihrer Größe unabhängige Konstante ist, indem das Gewicht mit dem Kubus, die Fläche F mit dem Quadrat der linearen Dimensionen wächst. Setzen wir dann in unserer Gleichung 56 für G den Wert $G_1 + a\sqrt{F^3}$ ein, so erhalten wir durch Differentiation nach F und Nullsetzung die Bedingung dafür, daß L den kleinst möglichen Wert annimmt. Auf diese Weise findet man als Bedingungsgleichung $G_1 = \frac{7}{2} a\sqrt{F^3}$ oder

$$G_2 = \frac{2}{9} G \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen würde also die geringste Leistung benötigt werden, wenn die Tragflächen $^2/_9$ des ganzen Gewichtes des Flugapparates wiegen. Da indessen einerseits die Lenkbarkeit und die Stabilität günstiger wird, wenn die Tragflächen kleiner sind, andererseits das sich aus Gleichung 57 ergebende Leistungsminimum ein nur sehr flaches ist und demnach die benötigte Leistung bei etwas kleineren Flächen nur wenig größer ausfällt, wählt man vorteilhaft die Tragflächen etwas kleiner als der Gleichung 57 entspricht.

Hierbei kann heute bei den zur Verfügung stehenden Materialien als kleinster möglicher Wert der spezifischen Flächenbelastung bei

Eindeckern kleinster Größe etwa 10 kg pro Quadratmeter, bei Eindeckern mit ca. 500 kg Gewicht 15 bis 20 kg pro Quadratmeter angenommen werden.

Ordnet man zwei Flächen übereinander an, wie bei Zweideckern, so ist die Versteifung leichter, und man kann dadurch bei gleichem Flächengewicht eine größere Gesamtfläche erzielen. Dieser Vorteil wird aber ungefähr durch die gegenseitige Beeinflussung beider Flächen aufgehoben; denn wir sahen, daß durch eine derartige Anordnung der Widerstandskoeffizient c um etwa 25 % vermindert wird.

Nach der Gleichung 56 wird ferner die Leistung mit dem Neigungswinkel α zu Null, und es könnte scheinen, daß es von Vorteil ist, den Neigungswinkel so klein wie möglich zu machen. Dies ist indessen zunächst aus praktischen Gründen nicht der Fall, weil der notwendige Neigungswinkel nicht dauernd genau auf demselben Wert gehalten werden kann. Wäre z. B. α nur 1^0, so würde eine Verringerung des Winkels um nur 1^0 durch einen geringfügigen Fehler in der Steuerung oder durch Änderung des Windes den ganzen Auftrieb vernichten und der Apparat abstürzen; ist dagegen $\alpha = 10^0$, so würde derselbe Fehler das Gleichgewicht um nur 10 % stören und folglich leichter durch Verstellen des Steuers korrigiert werden können. Aus diesem Grunde dürften etwa 4^0 der kleinste zulässige Wert des Winkels α sein.

Indessen bringt auch aus anderen Gründen ein Gleitwinkel unter 4^0 keinen Vorteil. Denn außer dem bisher behandelten Widerstande W sind noch weitere Bewegungswiderstände zu berücksichtigen, nämlich der Reibungs- und Stirnwiderstand der Flugflächen und der Stirnwiderstand aller übrigen Teile des Flugzeuges.

Was zunächst Reibungs- und Stirnwiderstand der Flugflächen angeht, so finden diese am besten durch Einführung der im vorigen Kapitel erläuterten Koeffizienten k_x und k_y Berücksichtigung unter Beachtung der experimentell gefundenen Abhängigkeit dieser Koeffizienten vom Winkel α.

Durch sie ausgedrückt haben wir die Beziehungen

$$G = A = k_y F V^2 \qquad \text{also} \qquad V = \sqrt{\frac{1}{k_y} \cdot \frac{G}{F}},$$

und

$$L = W \cdot V = k_x F V^3;$$

folglich

$$\frac{L}{G} = \frac{k_x}{k_y} \sqrt{\frac{1}{k_y} \frac{G}{F}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

Nach dem Diagramm Fig. 46 hat der Quotient $\frac{k_x}{k_y}$ ein Minimum, infolgedessen muß auch $\frac{L}{G}$ ein Minimum für einen bestimmten Neigungswinkel haben. Um dieses zu finden, haben wir aus Fig. 46 die Werte von $\frac{k_x}{k_y}$ und aus Fig. 43 die Werte von k_y zu entnehmen und den Ausdruck $\frac{k_x}{k_y}\sqrt{\frac{1}{k_y}}$ zu bilden. Die Werte dieses Ausdruckes sind in dem Diagramm Fig. 57 eingetragen, und zwar I. für die

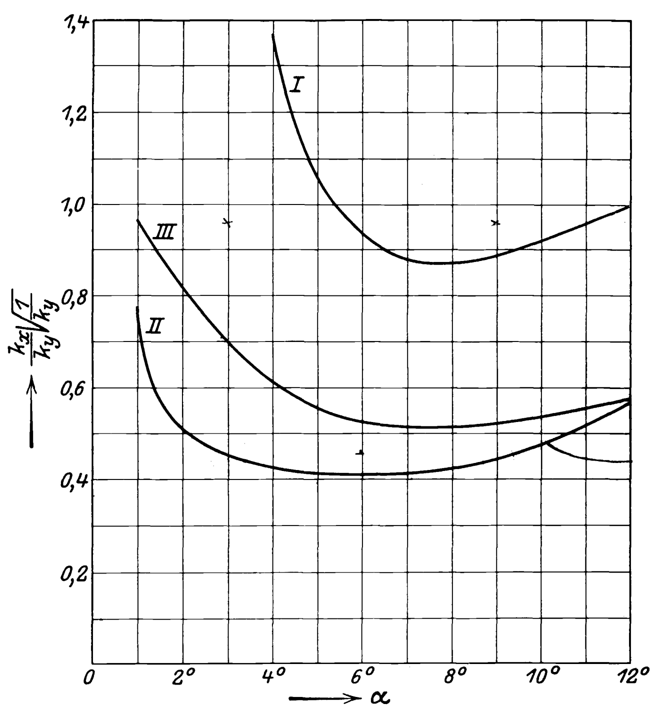


Fig. 57. Abhängigkeit des Koeffizienten $\frac{k_x}{k_y}\sqrt{\frac{1}{k_y}}$ vom Neigungswinkel bei verschiedener Flächenform.

ebene Fläche, II. für die 1/13,5 gekrümmte und III. für die vogelflügelförmige Fläche. Man erkennt, daß bei ebenen Flugflächen 8° Neignng der günstigste Flugwinkel ist, bei Flächen mit einer Krümmung von 1/13,5 : 6° Neigung und bei vogelflügelförmigen Flächen 7°. Indessen ist zu berücksichtigen, daß diese Kurven auf jeden Fall auf Flugflächen natürlicher Größe übertragen, etwas zu hohe Werte ergeben, da bei solchen Reibungs- und Stirnwiderstand weniger ins

Gewicht fallen als bei den Modellen. Nimmt man indessen in erster Annäherung die Werte als richtig an, so ergibt sich bei der 1/13,5 gekrümmten Fläche der kleinstmögliche Wert von $\frac{k_x}{k_y}\sqrt{\frac{1}{k_y}}$ zu 0,42.

Mit dieser Zahl erhalten wir bei einer spezifischen Flächenbelastung von 15 kg pro Quadratmeter aus Gleichung 58 als notwendige Leistung pro Kilogramm Gewicht eines Gleitfliegers 1,63 mkg. In dieser Größe ist der Stirnwiderstand des Flugapparates selbst noch nicht berücksichtigt, der sich aus dem Widerstand der Gondel, des Motors, der Insassen, der Verspannungsdrähte usw. ergibt. Bezeichnen wir ihn mit W_s, so können wir unter Vernachlässigung des Reibungswiderstandes an der Gondel setzen $W_s = \sigma \cdot V^2$, wo σ von der Größe und der Konstruktion des Apparates abhängt. Unter Einrechnung dieses Widerstandes wird der günstigste Flugwinkel noch etwas größer, als die eben ausgeführte Rechnung ergibt. Legt man für den Leistungsbedarf bei Berücksichtigung dieses Widerstandes die Formel 56 zugrunde, indem man W um W_s vermehrt, so findet man durch Differentiation, daß derjenige Flugwinkel α der günstigste wird, bei dem der Stirnwiderstand ein Viertel des Gesamtwiderstandes ausmacht. Welcher Winkel dies ist, hängt naturgemäß von der Art der Flugzeugkonstruktion ab.

Auf jeden Fall ist bei dem hohen Prozentsatz dieses Widerstandes von dem Gesamtwiderstand möglichste Verminderung des Stirnwiderstandes anzustreben. Je größer das Flugzeug, desto günstiger werden die Verhältnisse, da der Stirnwiderstand quadratisch, die Motorleistung aber angenähert kubisch mit den linearen Dimensionen wächst. Hierdurch wird der Nachteil einer größeren spezifischen Flächenbelastung ungefähr ausgeglichen. Durch Vermeidung aller unnötigen Drahtverspannungen und Anbringung einer torpedoförmigen Gondel als Schutz für Fahrer, Motor usw. ist es neuerdings gelungen, den Stirnwiderstand auf etwa $30\,^0/_0$ des Gesamtwiderstandes bei ca. 6^0 Flugwinkel zu bringen.

Berücksichtigen wir also den Stirnwiderstand durch einen Zuschlag von $30\,^0/_0$ zu der oben gefundenen Zahl, so erhalten wir als notwendige Motorleistung für einen Gleitflieger 2,12 mkg pro Kilogramm Gewicht des Flugzeuges oder

2,8 PS für 100 kg.

Dies ist die erforderliche Leistung des Propellers; berücksichtigen wir den Nutzeffekt desselben, der im Mittel mit etwa $60\,^0/_0$ zu veranschlagen ist, so bekommen wir für die vom Motor abzugebende Leistung:

4,7 PS pro 100 kg.

Diese Leistung bezieht sich auf einen Flug in vollständig ruhiger Luft; um im Winde absteigenden Luftströmungen begegnen zu können, ist eine entsprechend größere Leistung erforderlich. Tatsächlich besitzen auch alle Flugzeuge Motore höherer Leistung. So hat der Albatros-Doppeldecker bei 670 kg Gewicht inkl. Bemannung einen Motor von 70 PS also ca. 10,5 PS pro 100 kg, und die Rumplertaube C 1912 bei 570 kg Gewicht und 100 PS Motor, 17,5 PS pro 100 kg; allerdings hat dieses Flugzeug auch eine wesentlich größere Flächenbelastung (26 kg pro Quadratmeter), als unserer Rechnung zugrunde lag.

II. Der Schwingenflieger.

Die Möglichkeit des Schwingenfluges ist durch die quadratische Abhängigkeit des dynamischen Widerstandes von der Geschwindigkeit gegeben. Nach diesem Gesetze entsteht ein resultierender Auftrieb, wenn eine Fläche derartig periodisch auf und ab bewegt wird, daß die Abwärtsbewegung mit größerer Geschwindigkeit als die Aufwärtsbewegung vor sich geht. Ein Schwingenflieger ist in Fig. 58 schematisch dargestellt; ein Gewicht G wird durch zwei auf und abwärts bewegte Flügelflächen F schwebend gehalten.

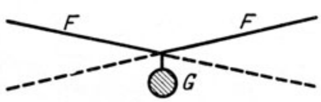


Fig. 58

Setzen wir kleine Schwingungsbögen voraus, so bleiben die Flügel beim Schwingen nahezu horizontal, und der Widerstand, der zur Fläche normal gerichtet ist, fällt angenähert in die Vertikale, d. i. die Richtung der Schwerkraft. Bezeichnen wir mit F die gesamte Flügelfläche und mit dF ein Element derselben und bewegen sich die Flügel während der Zeit T_1 abwärts, wobei das Flächenelement eine Geschwindigkeit v_1 annehmen möge, so wird dieses einen Widerstand $dA_1 = kv_1^2 dF$ finden, der fast ganz als Auftrieb nutzbar wird. Hier bedeutet k den Widerstandskoeffizienten bei senkrechter Inzidenz, der im letzten Kapitel angenähert zu 0,07 ermittelt wurde. Nehmen wir ferner an, die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Flügel sei während der ganzen Abwärtsbewegung konstant, so ist $v_1 = r_1 \omega_1$, wenn r_1 der Abstand eines Flügelelementes von der Drehachse des Flügels ist, und wir erhalten durch Integration über beide Flügelflächen den Gesamtauftrieb $A_1 = \frac{1}{3} k F V_1^2$, wenn V_1 die Geschwindigkeit der Flügelenden ist. Bewegen sich sodann die Flügel mit einer Geschwindigkeit V_2 (an ihren Enden) während einer Zeit T_2 aufwärts, so erfährt der Körper einen Abtrieb, also einen negativen Auftrieb der Größe $A_2 = -\frac{1}{3} k F V_2^2$.

Ist nun die Schwingungsperiode $T = T_1 + T_2$ kurz, so kann das Flugzeug wegen seiner Trägheit den einzelnen Impulsen nicht folgen, sondern es kommt für seine Bewegung der mittlere Auftrieb während der ganzen Periode in Frage, und dieser ist

$$A = \frac{1}{3\,T} k\,F\,(V_1^{\,2}\,T_1 - V_2^{\,2}\,T_2).$$

Damit das Flugzeug gerade schwebt, muß dieser Auftrieb gleich dem Gewichte G sein. Bezeichnen wir noch den Weg, um den sich die Flügelenden hin und herbewegen mit s, so ist $T_1 = \frac{s}{V_1}$ und $T_2 = \frac{s}{V_2}$, und wir erhalten als Bedingungsgleichung für das Schweben:

$$A = G = \frac{s}{3\,T}\,k\,F(V_1 - V_2).$$

Diese Formel beweist zunächst, daß der Schwingenflug möglich ist, solange $V_1 > V_2$, die Abwärtsbewegung der Flügel also schneller erfolgt als die Aufwärtsbewegung.

In analoger Weise können wir die zum Schwingen der Flügel benötigte Leistung berechnen. Bei seiner Abwärtsbewegung mit der Geschwindigkeit v_1 muß ein Flächenelement den ganzen Widerstand $d\,A_1$ überwinden, und es ist demnach hierfür eine Leistung $d\,L_1 = v_1\,d\,A_1 = k\,v_1^{\,3}\,d\,F$ erforderlich. Durch Integration über die gesamte Flügelfläche F erhalten wir die zur Abwärtsbewegung benötigte Leistung $L_1 = \frac{1}{4}\,k\,F\,V_1^{\,3}$; dagegen ist die zur Aufwärtsbewegung nötige Leistung $L_2 = \frac{1}{4}\,k\,F\,V_2^{\,3}$. Folglich ist die mittlere, während der ganzen Periode benötigte Leistung:

$$L = \frac{1}{4\,T} k\,F(V_1^{\,3}\,T_1 + V_2^{\,3}\,T_2),$$

oder für T_1 und T_2 ihre Werte eingesetzt:

$$L = \frac{s}{4\,T} k\,F\,(V_1^{\,2} + V_2^{\,2});$$

hieraus ergibt sich:

$$\frac{L}{G} = \frac{3}{4}\,\frac{V_1^{\,2} + V_2^{\,2}}{V_1 - V_2}.$$

Dieser Wert für die aufzuwendende Leistung pro Kilogramm Gewicht wird bei einem bestimmten Verhältnis von V_1 und V_2 am kleinsten. Um dies günstigste Verhältnis zu finden, setzen wir $V_1 = \varepsilon\,V_2$, und differenzieren nach ε. Man erhält hierdurch $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ als Bedingung für die kleinstmögliche Leistung. Wird also der Schwingungsmechanismus so eingerichtet, daß dieses

Verhältnis entsteht und sich die Flügel etwa zweieinhalbmal so schnell abwärts als aufwärts bewegen, so liefert unsere Formel für die spezifische Leistung zunächst

$$\frac{L}{G} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left[1 + (1 + \sqrt{2})^2\right] V_2 = 3{,}62\, V_2\,.$$

Ferner wird bei diesem Verhältnis zwischen V_1 und V_2

$$T = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} T_2\,,$$

und es liefert dieser Wert in obigem Ausdruck für G eingesetzt:

$$G = \tfrac{1}{3} k F V_2^2;$$

daraus folgt

$$V_2 = \sqrt{\frac{3}{k}\frac{G}{T}}$$

und

$$\frac{L}{G} = 6{,}25 \sqrt{\frac{1}{k}\frac{G}{F}}. \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

Diese Gleichung für die Schwingenflieger unterscheidet sich von der Gleichung 56 resp. 58 für den Gleitflieger nur durch den Zahlenfaktor. Mit $k = 0{,}07$ wird $\frac{L}{G} = 23{,}6 \sqrt{\frac{G}{F}}$, während wir im günstigsten Falle für den Gleitflieger $0{,}42 \sqrt{\frac{G}{F}}$ hatten. Der Vergleich der zwei Zahlen läßt die große Überlegenheit des Gleitfliegers gegenüber dem Schwingenflieger erkennen.

Nehmen wir schließlich wieder für ein Flugzeug normaler Größe die spezifsche Flächenbelastung zu 15 kg pro Quadratmeter Flugfläche an, so erhalten wir für die spezifische Leistung 91,5 Sekundenmeterkilogramm pro Kilogramm Gewicht oder

122 PS pro 100 kg.

Dieser Leistungsbedarf ist so groß, daß ein reiner Schwingenflieger mit den heutigen Flugzeugmotoren nicht hergestellt werden kann; denn das Gewicht eines sicher arbeitenden Motors ist schon für sich allein etwa 2 kg pro PS. Auch wenn es gelingen sollte, wesentlich leichtere Motore zu bauen, so bliebe die Verwendung eines Schwingenfliegers der beschriebenen Art doch unmöglich, da die geringe Menge Brennstoff, die er zu tragen fähig ist, dem Apparat nur einen sehr kleinen Aktionsradius gestatten würde.

Bei dem sehr großen Leistungsbedarf des Schwingenfliegers mag es auffallend erscheinen, daß sich trotzdem Insekten und kleine

Vögel ohne sonderliche Anstrengung durch reinen Schwingenflug schwebend halten können. Der Grund hierfür liegt zunächst darin, daß bei den kleinen Gewichten dieser Tiere und der vorzüglichen Konstruktion der Flügel die spezifische Flächenbelastung der Flügelflächen viel kleiner ist, als unserer Rechnung für große Schwingenflieger zugrunde lag. Ein Sperling hat etwa ein Gewicht von 20 g und eine spezifische Flächenbelastung von 1 kg pro Quadratmeter, eine Mücke ein Gewicht von 2,5 mg und eine spezifische Flächenbelastung von 0,2 kg pro Quadratmeter. Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung 59 ein, so erhalten wir schon wesentlich geringere Leistungen, nämlich 31,5 PS resp. 14,1 PS pro 100 kg Gewicht.

Dies ist immer noch eine erhebliche Leistung; indessen müssen wir beachten, daß die Muskelkraft eines Tieres durchaus nicht seinem Gewichte proportional ist. Vielmehr können wir in roher Annäherung die Muskelkraft dem Querschnitt der Muskeln proportional setzen, also dem Quadrat der linearen Dimensionen des Tieres, während das Gewicht mit dem Cubus der linearen Dimensionen wächst.

Ein Pferd von 500 kg Gewicht kann einige Zeit über etwa 1 PS leisten; während nur einiger Minuten dürfte die Leistungsfähigkeit des Pferdes auf 3 PS veranschlagt werden können. Wir hätten demnach bei einem Pferde 0,2 bis 0,6 PS pro 100 kg. Ein Pferd könnte sich demnach weder als Schwingenflieger noch als Gleitflieger für längere Zeit vom Boden erheben. Ein Sperling von 20 g Gewicht hat $\sqrt[3]{\frac{500}{0,02}} = 29,3$ mal kleinere lineare Dimensionen, eine Mücke von 2,5 mg Gewicht hat $\sqrt[3]{\frac{500}{0,0000025}} = 585$ mal kleinere lineare Dimensionen als ein Pferd obiger Größe. Infolgedessen kann eine Mücke mit derselben relativen Anstrengung, die ein Pferd bei einer Leistung von 0,2 bis 0,6 PS pro 100 kg aufwenden muß, 117 bis 351 PS pro 100 kg aufbringen. Da sie nach obigen Ausführungen nur 14,1 PS zum Schwingenflug benötigt, erkennt man, daß sich die Mücke *ohne nennenswerte Anstrengung* mittelst dieser Flugart schwebend erhalten kann. Es dürfte ihr z. B. das Fliegen weniger mühsam fallen, als dem Menschen das Gehen, und erklärt sich hierdurch die große Behendigkeit dieser und ähnlich leichter Tierchen in der Luft.

Dagegen bringt der Sperling bei derselben relativen Anstrengung, die das Pferd für die genannte Leistung machen muß, nur 5,85 bis 17,6 PS pro 100 kg Gewicht zustande. Da er zum Schwingenflug 31,5 PS pro 100 kg benötigt, müßte er sich trotz seines wesentlich muskulöseren Körperbaues gewaltig anstrengen, um sich durch Flatterflug schwebend zu erhalten, wenn ihm nicht die Natur durch besondere Bauart der Flügel zu Hilfe käme. Diese sind nämlich bei allen Vögeln so konstruiert, daß die Flügelfläche F bei der Aufwärtsbewegung kleiner ist als bei der Abwärtsbewegung, und zwar wird diese Größenänderung durch die kulissenförmige Anordnung der Flügelfedern erreicht.

In Fig. 59 seien a, a... die Kiele der einzelnen Federn, die sich leicht tordieren können. An den Federkielen sind die Federflächen unsymmetrisch verteilt, und zwar so, daß stets auf der linken Seite des Kieles eine größere Fläche vorhanden ist, als auf der rechten Seite. Schlägt nun ein solcher Flügel nieder, so bekommt jede Feder links vom Kiel stärkeren Druck als rechts und sucht sich im Uhrzeigersinn um den Kiel zu drehen. Dadurch werden alle Federn zu einer festen Fläche zusammengepreßt. Schlägt dagegen der Flügel nach oben, so findet eine Verdrehung dem Uhrzeigersinn entgegen statt (Fig. 60) und die Federn klaffen auseinander, verkleinern also die wirksame Fläche.

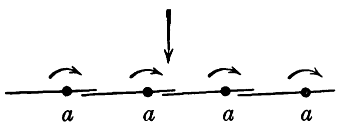


Fig. 59.

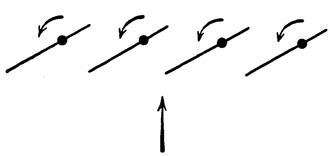


Fig. 60.

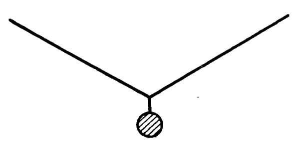


Fig. 61.

Diese Torsionswirkung der Federkiele wird besonders nützlich, wenn die Mittellage der Flügel keine horizontale, sondern eine aufwärts gerichtete ist (Fig. 61). Es ist dann eine nur kleine Verdrehung der Federn nötig, um sie mit ihrer Ebene vertikal zu stellen und jeden Druck beim Aufwärtsschlag der Flügel zu vermeiden.

Nimmt man als Grenzfall an, daß die Flügelfläche beim Aufschlag bis auf Null sinkt, so ist der günstigste Fall der, daß die Aufwärtsbewegung in verschwindend kleiner Zeit stattfindet, und man bekommt statt Gleichung 59 die analoge Beziehung:

$$\frac{L}{G} = 1{,}3 \sqrt{\frac{1}{k} \frac{G}{F}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Es ist also dann die Leistung 4,8 mal kleiner als diejenige, die sich aus Gleichung 59 ergibt. Ist die Torsionselastizität der Federkiele eine derartige, daß die wirksame Flügelfläche bei der Aufwärtsbewegung auf ein Drittel der ursprünglichen Fläche reduziert wird, so erhält man die kleinste Leistung, wenn Auf- und Abwärtsschlag der Flügel mit derselben Geschwindigkeit bewerkstelligt werden und es wird $\frac{L}{G} = 4{,}5 \sqrt{\frac{1}{k} \frac{G}{F}}$. Nehmen wir etwa den mittleren Wert als den richtigen an, so benötigt der Sperling immer noch ca. 15 PS Leistung pro 100 kg zum Schwingenflug, und man sieht, daß diese Kraftanstrengung schon an der Grenze seiner Leistungsfähigkeit liegt.

Aus dieser Betrachtungsweise folgt ohne weiteres, daß der reine Schwingenflug nur für kleine Tiere und Apparate möglich ist. Große Vögel können sich durch ihn trotz ihres muskulösen Körperbaues nicht schwebend erhalten, sondern müssen den Segelflug zur Hilfe nehmen. Dies geschieht in der Weise, daß sie sich durch geeignete Flügelstellung eine horizontale Geschwindigkeit erteilen oder Richtung gegen den natürlichen Wind nehmen, um die notwendige Relativgeschwindigkeit gegenüber der umgebenden Luft zu bekommen.

III. Der Schraubenflieger.

Beim Schraubenflug wird ein Gewicht G durch einen Propeller mit vertikaler Achse schwebend erhalten. Bei ihm haben die Propellerflügel dieselbe Wirkung, wie die Segelflächen der Gleitflieger, nur daß sie nicht eine fortschreitende, sondern eine rotierende Bewegung ausführen. Wir können daher die Theorie des Segelfliegers auf den Schraubenflieger anwenden, wenn wir die fortschreitende Bewegung durch die Rotation ersetzen.

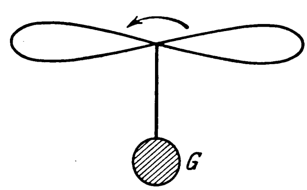


Fig. 62.

Ist die Breite eines Propellerflügels B und bezeichnen wir mit dr die Länge in Richtung des Radius eines Elementes der Propellerfläche und mit α den peripherischen Neigungswinkel derselben, den wir für die ganze Propellerfläche konstant annehmen wollen, und schließlich mit v die Lineargeschwindigkeit des Flächenelementes, so erleidet dieses bei der Rotation des Propellers einen Auftrieb

$$dA = c\,B\,v^2\,dr \sin\alpha \cos\alpha$$

und einen Bewegungswiderstand

$$dW = c\,B\,v^2\,dr \sin^2\alpha.$$

Um diesen Widerstand zu überwinden ist ferner eine Leistung

$$dL = c B v^3 dr \sin^2 \alpha$$

erforderlich. Macht die Propellerachse n Touren pro Sekunde, so ist $v = 2\pi n r$, und wir erhalten durch Integration für die gesamte Propellerfläche F (einseitige Oberfläche aller Schraubenflügel) den Gesamtauftrieb A zu

$$A = 4\pi^2 n^2 c B \sin\alpha \cos\alpha \int r^2 dr$$

und die Gesamtleistung

$$L = 8\pi^3 n^3 c B \sin^2 \cdot \int r^3 dr.$$

Bezeichnen wir noch mit R die radiale Länge der Propellerflügel, so ergibt die Integration

$$A = \tfrac{4}{3} c \pi^2 n^2 R^2 F \sin\alpha \cos\alpha$$

und

$$L = 2 c \pi^3 n^3 R^3 F \sin^2 \alpha.$$

Damit Schweben eintritt, muß $2\pi n R$ so groß genommen werden, daß $A = G$ wird. Es ergibt sich somit aus der ersteren dieser Gleichungen

$$2\pi n R = \sqrt{\frac{3G}{cF \sin\alpha \cos\alpha}}$$

und folglich wird

$$\frac{L}{G} = \frac{3\sqrt{3}}{4\cos\alpha}\sqrt{\frac{1}{c}\frac{G}{F}\operatorname{tg}\alpha}$$

oder, wenn wir wieder $\cos\alpha = 1$ setzen

$$\frac{L}{G} = 1{,}3\sqrt{\frac{1}{c}\frac{G}{F}\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Dies ist genau dieselbe Formel, die für den Segelflieger gilt, nur daß der Faktor 1,3 hinzugekommen ist. Um die Leistung möglichst herabzudrücken, wird man vorteilhaft für die Schraubenflügel gekrümmte Flächen derselben Form wählen wie für die Tragflächen des Segelfliegers. Wir können dann die Gleichung 61 analog der Gleichung 56 umformen und erhalten

$$\frac{L}{G} = 1{,}3\frac{k_x}{k_y}\sqrt{\frac{1}{k_y}\frac{G}{F}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Wäre nun der Ausdruck $\frac{k_x}{k_y}\sqrt{\frac{1}{k_y}}$ unabhängig von der Geschwindigkeit, so könnten wir ihn ebenfalls dem für den Segelflieger aufgestellten Diagramm Fig. 57 entnehmen und für ihn als günstigsten Wert 0,42 einsetzen. Dieser Wert dürfte angenähert für die Propellerflügel zutreffen; denn einerseits wird eine größere mittlere Geschwindigkeit den Faktor etwas herabdrücken, andererseits die größere Dicke der Flügel, die zur Erreichung genügender Festigkeit notwendig ist, ihn ein wenig erhöhen.

Von entschiedenem Vorteil für den Schraubenflieger ist der Umstand, daß irgend ein Stirnwiderstand nicht zu überwinden ist, so daß die Formel 62 bereits die gesamte notwendige Leistung angibt. Es sind demnach Schraubenflieger und Segelflieger bezüglich des Leistungsbedarfes etwa gleichwertig.

Die Konstruktion des Schraubenfliegers dürfte allerdings schwieriger sein, als die des Segelfliegers, und liegt wohl hierin der Grund, daß dieser Typ bisher nicht praktisch durchkonstruiert ist, obgleich zahlreiche Versuche bereits in früheren Dezennien ein gutes Resultat versprachen.

Zunächst ist es notwendig, daß zwei gegenläufige Schrauben benutzt werden, um eine Rotation des ganzen Flugapparates zu vermeiden. Diese werden sich gegenseitig beeinflussen, wenn sie nicht weit voneinander abstehen, und es wird die Tragkraft leicht um $20\,^0/_0$ herabgedrückt werden.

Sodann dürfte es an und für sich schwierig sein, so große Flächen, wie die Tragflächen der Segelflugzeuge, rotierend anzuordnen, und diese Schwierigkeit wird dazu zwingen, die spezifische Flächenbelastung wesentlich größer zu wählen, als bei dem Segelflugzeug. Dies ist allerdings auch ohne weiteres zulässig, da einmal die modernen Explosionsmotore mehr leisten als notwendig ist, und sodann der vortreibende Propeller mit seinem schlechten Nutzeffekt in Wegfall kommt. Nehmen wir z. B. eine spezifische mittlere Flächenbelastung von 100 kg pro Quadratmeter, so ergibt unsere Formel immer erst einen Leistungsbedarf von 7,3 PS pro 100 kg Gewicht, also weniger als ausgeführte Flugzeuge besitzen. Propellerflächen dieser Größe ließen sich verhältnismäßig leicht anbringen, speziell wenn man die Zentrifugalkraft zur Versteifung ausnutzt, wie vom Verfasser bereits 1902[1]) vorgeschlagen wurde und wie es Herr von Parseval bei seinen Luftschiffschrauben getan hat. Bedenklich ist indessen die geringe Fallschirmwirkung bei einer derartig hohen Flächenbelastung für den Fall, daß der Motor versagt; da mit dieser Möglichkeit immer zu rechnen ist, dürfte ein sich bei größerer Fallgeschwindigkeit selbstöffnender Fallschirm unerläßlich sein.

[1]) O. Martienssen, Theoretische Grundlage für die Konstruktion eines Schraubenfliegers, Illustr. Aeronatische Mitteilungen 1902, Heft 3.

Zehntes Kapitel.

Die Stabilitätsbedingungen der Flugzeuge.

Bei einem Schwingen- und Schraubenflieger sind die Stabilitätsverhältnisse einfach. Man dürfte meistens dadurch hinreichende Stabilität erzielen, daß man den Schwerpunkt genügend tief unter den Druckmittelpunkt legt, also die Last des Flugzeuges wesentlich unterhalb der Tragflächen anordnet, wie es auch bei jedem Motorballon und Freiballon geschieht.

Zur Vermeidung von Pendelungen um die Gleichgewichtslage, die bei Gleichheit der Eigenschwingsdauer des Flugzeuges und der Störungsursache (periodisch auftretende Windstöße) durch Resonanz gefährliche Größe annehmen könnten, wird man für hinreichende Dämpfung zu sorgen haben. Diese wird am einfachsten durch Stabilisierungsflächen erreicht, wie sie sich bei Motorballons vorzüglich bewährt haben. In Frage kämen zunächst Kielflächen zur Dämpfung der Drehungen um eine Vertikalachse, wobei ein Teil der Fläche als Seitensteuer verstellbar anzuordnen ist. Beim Schraubenflieger sind außerdem horizontale Seitenflächen zur Dämpfung der Drehungen um eine in der Flugrichtung liegende Horizontalachse nötig, und bei beiden Flugzeugarten eine Schwanzfläche zur Dämpfung der Drehungen um eine Querachse; ein verstellbarer Teil derselben dient in üblicher Weise als Höhensteuer.

Allerdings dürfte die Stabilität dieser Flugzeuge durch große Horizontalgeschwindigkeit merklich beeinflußt werden; eine Erörterung dieser Frage ist indessen nur unter Annahme einer bestimmten Vortriebseinrichtung möglich und so lange zwecklos, als Schwingen- und Schraubenflieger noch nicht so weit praktisch durchgebildet sind, daß eine bestimmte Annahme gerechtfertigt erscheint.

Wesentlich anders liegen die Stabilitätsverhältnisse der Segelflieger, da diese die genaue Einhaltung eines nur kleinen Flugwinkels bei großer Horizontalgeschwindigkeit verlangen, und es soll daher in diesem Kapitel ausschließlich die Stabilität dieser Flugzeuge behandelt werden. Hierbei wird eine normale Flugzeugkonstruktion zugrunde gelegt, die außer Seiten- und Höhensteuer und Flächenverwindung keine verstellbaren Organe besitzt.

Ein Flugzeug ist dann als „stabil" zu erachten, wenn es nur solche Drehungen ausführt, die vom Führer gewünscht werden oder die zur Erhaltung der Gleichheit zwischen Auftrieb und Gewicht erforderlich sind. Wenn durch irgendeine Störung eine kleine unerwünschte Drehung stattgefunden hat, so muß verlangt werden, daß automatisch oder von Hand einstellbare Kräfte sofort wirksam werden, die dieser Drehung entgegenwirken und den früheren Zustand wieder herstellen.

Es fragt sich nun zunächst, um welchen Punkt eines freischwebenden Flugzeuges etwaige Drehungen stattfinden. Die Grundgleichungen der Mechanik besagen, daß die Drehungen stets um den Schwerpunkt eines Körpers stattfinden, solange nur solche Kräfte auf ihn einwirken, die der Masse proportional sind. Indessen wirken auf ein Flugzeug außer der Schwerkraft und den Zentrifugalkräften, die der Masse proportional sind, noch Kräfte ein, die von der Oberfläche des Körpers abhängen. Infolgedessen werden im allgemeinen die Drehungen eines Flugzeuges nicht um den Schwerpunkt stattfinden. Sind die Oberflächenkräfte sehr groß, so würde der Druckmittelpunkt zugleich Drehungsmittelpunkt sein. Da aber beide Kräftearten von derselben Größenordnung sind, so erfolgen die Drehungen um einen variablen zwischen dem Schwerpunkt und dem Druckmittelpunkt liegenden Punkt. Indessen wissen wir aus den früheren Kapiteln, daß sowohl der Reibungswiderstand, als auch der dynamische Widerstand zu Null wird bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit. Infolgedessen muß jede Drehbewegung eines Flugapparates mit einer Drehung um den Schwerpunkt beginnen und enden, da bei hinreichend kleiner Drehgeschwindigkeit die Oberflächenkräfte gegenüber den Massenkräften zu vernachlässigen sind. Wenn wir daher nur die sich aus den Drehungen ergebende Ruhelage suchen, wie es zur Aufstellung der Stabilitätsbedingungen nötig ist, können wir annehmen, die Drehungen fänden um den Schwerpunkt statt.

I. Die Längsstabilität.

Für einen Segelflieger ist die Erhaltung der Längsstabilität, d. h. die richtige Drehbewegung um eine horizontale Querachse das wichtigste. In Fig. 63 sei ein Flugzeug schematisch dargestellt. Die Tragfläche F unter einem Flugwinkel α_0 sei mittels eines Verbindungssteges BA mit der Schwanzfläche f verbunden, die um einen Winkel β_0 gegen die Flugrichtung geneigt ist. Ein Teil dieser Schwanzfläche f ist als Höhensteuer verstellbar zu denken und β_0 soll der mittlere Winkel sein, den die feststehende Schwanzfläche und das Höhensteuer zusammen gegen AB einschließen. Die Propellerwelle liege in Richtung AB und dies sei gleichzeitig die Flugrichtung, die im Gleichgewichtszustande horizontal liegt. Der Schwerpunkt S sei zunächst auf der Verbindungslinie AB angenommen.

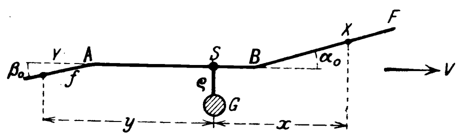


Fig. 63.

Hat das Flugzeug eine Horizontalgeschwindigkeit V, so erleidet die Fläche F einen Auftrieb $A_F = k_{y\alpha} F V^2$ und die Fläche f einen Auftrieb $A_f = k_{y\beta} f V^2$, wo die Widerstandskoeffizienten k_y mit einem Index α und β versehen sind, um anzudeuten, daß sie sich auf diese Winkel beziehen. Bezeichnen wir nun den Druckmittelpunkt der Fläche F mit X, der Fläche f mit Y und die respektiven Entfernungen des Schwerpunktes S von den Druckmittelpunkten mit x und y, so übt A_F ein Drehmoment $D_F = x A_F$, und A_f ein Drehmoment $D_f = y A_f$ auf den Apparat aus und letzteres wirkt in umgekehrter Richtung wie ersteres. Die Bedingungsgleichung dafür, daß der Apparat schwebt, ist dann

$$G = A_F + A_f, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

und daß er keine Drehung ausführt

$$D_F = D_f. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (64)$$

Nehmen wir jetzt an, es trete ein absteigender Luftstrom mit der Geschwindigkeit V_1 plötzlich auf; derselbe würde das Gleichgewicht stören, denn die Geschwindigkeit V des Flugzeuges setzt sich mit der Geschwindigkeit V_1 der Luft zu einer resultierenden Relativgeschwindigkeit $V' = \sqrt{V^2 + V_1^2}$ zusammen, die gegenüber der ursprünglichen Geschwindigkeit V um einen Winkel γ geneigt ist, für den gilt: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{V_1}{V}$, wie aus Fig. 64 zu erkennen ist; hier ist V_1 nach aufwärts gerichtet gezeichnet als Relativgeschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber der abwärts fließenden Luft, da auch V die Relativgeschwindigkeit von der Luft aus betrachtet ist. Infolgedessen ist der Flugwinkel jetzt nur noch $\alpha - \gamma$, und dieser würde keinen genügenden Auftrieb geben, um das Flugzeug schwebend zu erhalten. Es gerät demnach ins Fallen. Um den Fall aufzu-

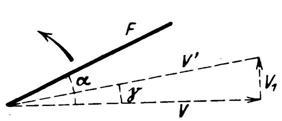


Fig. 64.

halten, muß der Apparat vorne aufgerichtet werden, bis der Flugwinkel wieder auf dieselbe Größe wie vorher gebracht ist. Dies wird automatisch dann geschehen, wenn bei dem veränderten Flugwinkel $D_F > D_f$ geworden ist, oder wenn, für die Drehmomente ihre Werte eingesetzt, die Umgleichung besteht

$$k_{y\,(\alpha-\gamma)}\,F\cdot x_1\,V^2 > k_{y\,(\beta-\gamma)}\,f\,y_1\,V^2;$$

hier sind x_1 und y_1 die bei dem veränderten Flugwinkel veränderten Druckmittelpunktsabstände. Da nun Gleichung 64 verlangt, daß $k_{y\alpha}\,F\,x\,V^2 = k_{y\beta}\,f\,y\,V^2$, so folgt daß

$$\frac{x_1}{x}\,\frac{k_{y(\alpha-\gamma)}}{k_{y\alpha}} > \frac{y_1}{y}\,\frac{k_{y(\beta-\gamma)}}{k_{y\beta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

sein muß.

Nehmen wir sodann ganz analog an, daß ein aufsteigender Luftstrom auftritt mit der Geschwindigkeit V_2, so wird der Flugwinkel vergrößert um einen Wert γ, für welchen gilt $\operatorname{tg}\gamma = \frac{V_2}{V}$, und der Apparat muß zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes vorne geneigt werden. Damit auch dies automatisch geschieht, haben wir die Bedingungsungleichung:

$$\frac{x_1}{x}\,\frac{k_{y(\alpha+\gamma)}}{k_{y\alpha}} < \frac{y_1}{y}\,\frac{k_{y(\beta+\gamma)}}{k_{y\beta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65\text{a})$$

Um die Bedeutung dieser Ungleichungen 65 und 65a zu erkennen, wollen wir zunächst einmal annehmen, daß sich die Druckmittelpunkte bei der Änderung der Flugwinkel nicht verschöben, wie es bei gekrümmten Flächen angenähert der Fall ist, daß also $x_1 = x$ und $y_1 = y$ wären. Sodann wollen wir voraussetzen, daß, wie es durch Gleichung 53 angedeutet ist, der Widerstand und demnach auch der Auftrieb dem Neigungswinkel der Fläche proportional sind. Ungleichung 65 verlangt dann

$$\frac{\alpha_0-\gamma}{\alpha_0} > \frac{\beta_0-\gamma}{\beta_0}$$

und Ungleichung 65a

$$\frac{\alpha_0+\gamma}{\alpha_0} < \frac{\beta_0+\gamma}{\beta_0};$$

aus beiden Bedingungen folgt:

$$\alpha_0 > \beta_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

Unter den genannten Voraussetzungen hätten wir folglich automatische Längsstabilität, wenn die Schwanzfläche inklusive Höhensteuer gegen die Propellerachse weniger geneigt ist, als die vorderen

Tragflächen. Diese Bedingung muß auch dann noch erfüllt bleiben, wenn das Höhensteuer in seiner Endstellung steht.

Die Ableitung der Bedingung 66 aus 65 und 65a ist übrigens nicht an die gemachte Voraussetzung der Proportionalität zwischen Flugwinkel und Widerstand gebunden. Sie besteht auch dann immer zu Recht, wenn $\frac{\partial k_{y\alpha}}{\partial \alpha}$ mit α abnimmt, wie man leicht einsieht. Dies ist bis zu 15^0 Neigung nach dem Diagramm Fig. 43 bei allen Flächenformen der Fall, da alle k_y darstellenden Kurven gegen die Abszissenachse konkav gekrümmt sind; bei größeren Flugwinkeln trifft es indessen nicht mehr immer zu, und zwar dann nicht, wenn das Widerstandsmaximum überschritten wird. Wie aus dem Diagramm Fig. 42 hervorgeht, liegt z. B. das Widerstandsmaximum einer Fläche mit dem Seitenverhältnis $\lambda = 6$ bei 15^0, und es darf der Winkel α resp. $(\alpha_0 + \gamma)$ bei den stärksten vorkommenden Windstößen niemals größer als 15^0 werden, damit der Apparat nicht Gefahr läuft, abzustürzen. Bei einem Seitenverhältnis $\lambda = 3$ kann α bis 25^0 anwachsen; es ist indessen beim Überschreiten dieses Winkels die Gefahr des Absturzes wegen des stärkeren Abfalls der Widerstandskurve desto größer.

Andererseits werden die Kurven, die k_y abhängig von α darstellen, für α kleiner als Null ebenfalls konvex. Außerdem findet dann eine starke Verschiebung des Druckmittelpunktes statt, und der Druckmittelpunkt wird für ein kleines negatives α unbestimmt, indem er von der Austrittskante zum Anblasrand überspringt. Daraus folgt, daß Stabilität nur solange besteht, als α resp. $(\alpha_0 - \gamma)$ nicht durch einen absteigenden Luftstrom unter Null sinkt. Es muß demnach, kleine Winkel γ vorausgesetzt,

$$V_1 < \alpha_0 V \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66\text{a})$$

sein. Um daher starken vertikalen Luftströmungen begegnen zu können, ist große Eigengeschwindigkeit und großer Flugwinkel α_0 erforderlich; da andererseits α auch einen bestimmten höchsten Wert nicht überschreiten darf, wird es am besten etwa halb so groß gewählt als dem Maximum von k_y entspricht.

Nicht ganz so übersichtlich sind die Verhältnisse, wenn Schwanzflächen und Tragflächen verschiedene Formen haben. Die Bedingung 66 führt bei einer derartigen Konstruktion nur dann immer zur Stabilität, wenn k_y der Schwanzfläche sich mit zunehmendem Flugwinkel stärker ändert als k_y der Tragflächen. Dies ist, wie aus dem Diagramm Fig. 43 erkenntlich wird, immer der Fall, wenn die Schwanzflächen weniger gekrümmt sind als die Tragflächen. Indessen ist auch z. B. die der Kurve 5 dieses Diagrammes zugrunde liegende Flügelform recht günstig und würde sie noch eine Schwanzflächenkrümmung von $^1/_{13,5}$ zulassen. Das Sicherste bleibt aber, da die Widerstandskurve der benutzten Flächen nicht genau bekannt sein dürfte, die Schwanzfläche und das Höhensteuer sehr wenig oder gar nicht zu krümmen, wenn dadurch auch die notwendige Motorleistung etwas erhöht wird.

Nehmen wir jetzt an, der Flugapparat sei so konstruiert, daß bei absteigendem Luftstrom $D_F > D_f$ wird, und eine Aufrichtung des Flugapparates eingeleitet wird, so ist es klar, daß die Drehbewegung solange anhalten muß, bis D_F und D_f wieder gleich groß geworden sind. Dies ist dann der Fall, wenn der ursprüngliche Flugwinkel α_0 zwischen Flugfläche und Relativgeschwindigkeit wieder hergestellt ist. Stabilität ist indessen trotzdem noch nicht vollständig vorhanden. Denn bei horizontalem Fluge ist jetzt die Geschwindigkeit des Flugzeuges relativ zur Luft um den Winkel γ gegen die Horizontale geneigt, und es ist auch die Widerstandskomponente A gegen die Richtung der Erdschwere um einen Winkel γ geneigt; folglich wird jetzt nur noch ein Gewicht $G \cos \gamma$ getragen. Der Flugapparat würde demnach mit einer Kraft $G\,(1 - \cos \gamma)$ nach abwärts gezogen werden. Um dies zu verhindern, ist es am einfachsten, den Auftrieb durch größere Geschwindigkeit zu vermehren, und zwar müßte, kleine Winkel γ vorausgesetzt, die Flugzeuggeschwindigkeit um $\frac{1}{4} \cdot \frac{V_1^2}{V}$ vermehrt werden. Da aber bei größerer Geschwindigkeit auch der Widerstand zunimmt, wäre eine größere Propellerleistung nötig und eine vermehrte Benzinzufuhr zum Motor. Eine Erhaltung der Stabilität verlangt also noch, daß der Motor beim Fluge ohne vertikale Luftströmungen nicht voll beansprucht ist, und daß die Motorventile verstellt werden.

Unter Umständen läßt sich indessen die Stabilität statt durch Ventilverstellung nur durch Höhensteuerverstellung voll erreichen. Ist nämlich die Bedingung 66 erfüllt, so wird die Überwindung abwärts steigender Luftströmnngen identisch mit der Möglichkeit eines Aufwärtsfluges. Um einen vertikalen Luftstrom der Geschwindigkeit V_1 begegnen zu können, ist es notwendig, daß der Apparat bei ruhiger Luft um V_1 Meter pro Sekunde steigen kann, und der Propeller und Motor die hierfür erforderliche zusätzliche Leistung $G V_1$ hergeben können.

Nehmen wir an, das Flugzeug sei durch passende Wahl von α_0 und β_0 in der Luft stabil und die Propellerachse läge bei horizontalem Fluge ebenfalls horizontal (Fig. 65). Wird jetzt das Höhensteuer verstellt, so daß β kleiner wird, so nimmt D_f ab, und das Flugzeug richtet sich vorne auf (Fig. 66). Hierdurch wird zunächst der Flugwinkel α vergrößert, der Auftrieb vermehrt und das Flugzeug steigt. Es frägt sich indessen, ob diese Steigung anhält. Denn der größere Auftrieb ist auch mit einem größeren Widerstande verbunden. Die neue Fahrtrichtung wird auf jeden Fall jetzt einen kleineren Winkel mit der Horizontalen einschließen müssen als die Propellerachse, da nur dann der Flugwinkel in der neuen Flugzeuglage vergrößert ist; dies veranlaßt aber auch einen größeren Flugwiderstand und dieser setzt bei derselben Propellerleistung die Fluggeschwindigkeit herab. Nehmen wir zunächst an, die Leistung von Propeller und Motor bliebe unverändert, so würde nur dann ein Steigen des Flugzeuges möglich sein, wenn bei dem größeren Flugwinkel mit derselben Leistung ein größeres Gewicht getragen werden könnte. Betrachten wir nun das Diagramm Fig. 57, so sehen wir, daß die Leistung pro Gewicht bei einem bestimmten Flugwinkel ein Minimum besitzt, und es tritt infolgedessen stets dann eine Aufwärtsbewegung ein, wenn im horizontalen Fluge mit einem kleineren Flugwinkel gepflogen wurde als diesem Minimum der Leistung entspricht, also z. B. bei der vogelflügelförmigen Fläche mit einem kleineren Winkel als $7^1/_2{}^0$. Ist der Flugwinkel größer, so tritt kein Steigen des Flugzeuges, sondern ein Fallen bei der besagten Höhensteuerverstellung ein.

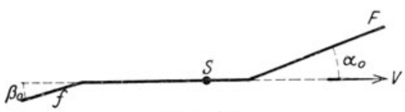


Fig. 65.

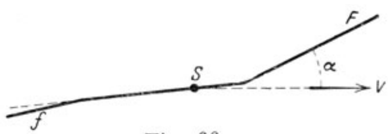


Fig. 66.

Es ist nun aber gefährlich und auch unökonomisch, mit wesentlich kleinerem Flugwinkel zu fahren als dem Leistungsminimum entspricht, da dieser Winkel schon recht klein ist, und man wird sich damit begnügen müssen, diesen Winkel als normalen Flugwinkel zu wählen. Dann kann ein Steigen des Flugzeuges durch Aufrichten des Vorderteiles allein nur eintreten, wenn die Propellerleistung bei Geschwindigkeitsabnahme größer wird. Ob dies der Fall ist, hängt von der Konstruktion des Propellers und des Motors ab. Jeder Propeller mit Motor hat bei einer bestimmten Fluggeschwindigkeit seine maximale Nutzleistung, und es ist demnach erforderlich, daß diese Maximalleistung bei einer geringeren als der normalen Flugzeuggeschwindigkeit erreicht wird, wenn vertikalen Luftströmungen lediglich durch Höhensteuerverstellung begegnet werden soll.

Diese Stabilitätsbetrachtungen werden dadurch noch etwas modifiziert, daß die Druckmittelpunkte sich mit den Flugwinkeln ein wenig auf den Tragflächen verschieben und der Schwerpunkt des Apparates aus Rücksicht auf die Querstabilität unterhalb der Verbindungslinie der beiden Druckmittelpunkte liegen muß. Ist die Entfernung des Schwerpunktes von dieser Linie, also die metazentrische Höhe, a, so wirkt das Gewicht einer Aufrichtung des Flugapparates um den Winkel γ mit einem Drehmomente $D = G a \sin\gamma$ entgegen. Diesem Drehmoment kann nur durch eine stärkere Höhensteuerverstellung begegnet werden, und wir sehen, daß die Längsstabilität während des Fluges durch große metazentrische Höhe erschwert wird.

Eine weitere Forderung, die an die Längsstabilität des Flugzeuges gestellt werden muß, ist die, daß es *möglichst automatisch in einen wenig geneigten Gleitflug übergeht*, sobald der Motor versagt und dadurch der Propellervorschub verschwindet.

Es möge nun dieser Gleitflug mit einer Geschwindigkeit V unter einem Winkel δ (Fig. 67) gegen die Horizontale stattfinden. Dann haben wir als treibende Kraft in dieser Richtung $G \sin\delta$, da die Erdschwere den Apparat mit der Kraft G senkrecht abwärts zieht. Diese Kraft muß den Flugwiderstand überwinden, der sich aus dem Bewegungswiderstand der Tragflächen und dem Stirnwiderstande des übrigen Apparates zusammensetzt. Legen wir die angenäherte Formel 53 für den Widerstand der Tragflächen zugrunde, so gilt demnach die Beziehung

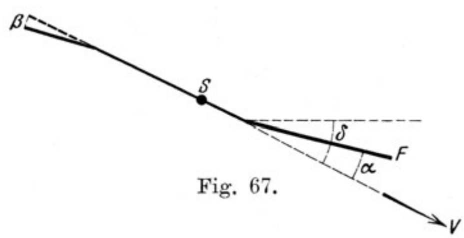


Fig. 67.

$$G \sin\delta = c F V^2 \alpha^2 + \sigma V^2.$$

Der Winkel δ ergibt sich daraus, daß sich die Kräfte senkrecht zur Fallrichtung aufheben müssen. Wir haben nun nach links unten die Kraft $G \cos\delta$ wirken, dagegen nach rechts oben den Auftrieb $c F V^2 \alpha$, wobei der Einfachheit halber $\cos\alpha = 1$ gesetzt ist und demnach die Gleichung

$$G \cos\delta = c F V^2 \alpha.$$

Durch Division beider Gleichungen erhalten wir, wenn wir δ statt $\operatorname{tg}\delta$ setzen:

$$\delta = \alpha + \frac{\sigma}{c F \alpha} \quad \text{. . . . .} \quad (67)$$

Wenn nun beim Übergange zum Gleitfluge das Höhensteuer nicht verstellt wurde, so wird der Flugwinkel α unverändert bleiben, da ja bei jedem anderen Flugwinkel $D_F \lesseqgtr D_f$ wird, und der Horizontalflug geht automatisch in einen Gleitflug über, dessen Neigung durch die Gl. 67 gegeben ist.

Es bleibt indessen fraglich, ob sich der Gleitflugwinkel nicht noch durch Verstellen des Höhensteuers verkleinern läßt, indem durch dieses der Winkel α verkleinert wird. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir Gl. 67 nach α differenzieren und bekommen als Bedingungsgleichung für einen kleinstmöglichen Gleitwinkel δ:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{c F}}$$

oder, diesen Wert für α eingesetzt,

$$\delta = 2\alpha = 2\sqrt{\frac{\sigma}{c F}} \quad \ldots \ldots \quad (67a)$$

Daraus folgt, daß der kleinstmögliche Gleitwinkel der doppelte Betrag desjenigen Flugwinkels ist, bei dem der Stirnwiderstand des Flugzeuges ohne Tragflächen gleich dem Bewegungswiderstand der Tragflächen alleine wird. Da dieser Winkel bei einem guten Flugzeuge 3^0 bis 4^0 ist, so ist der kleinstmögliche Gleitwinkel 6^0 bis 8^0. Es läßt sich natürlich durch Ausnutzung der Schwungkraft eines anfangs steileren Gleitfuges der Gleitwinkel für den Moment der Landung auf jeden gewünschten kleinen Betrag herabdrücken. Der mittlere Gleitwinkel wird aber nicht kleiner, als angegeben, ausfallen können.

Diese für den Gleitflug geschilderten Verhältnisse werden wieder ungünstig beeinflußt, wenn der Schwerpunkt des Flugzeuges tief liegt. Dann kann der Gleitflug nur durch Abwärtsdrehen des Höhensteuers eingeleitet werden, um das Drehmoment der Schwere aufzuheben. Es muß indessen die Bewegung des Höhensteuers so zeitig geschehen, daß noch hinreichende Geschwindigkeit vorhanden ist; denn nur dann wird auf das Flugzeug ein merkliches Drehmoment durch Steuerverstellung ausgeübt.

Ist ferner das Höhensteuer plan und quadratisch, wie es stets angenähert der Fall sein sollte, so würde auch dann ein Ziehen des Höhensteuers keine Wirkung ausüben, wenn die Flugbahn bereits vorher eine Neigung von über 35^0 gegen die Horizontale angenommen hat, da eine Vergrößerung des Winkels zwischen Steuerfläche und Bewegungsrichtung keine Druckvermehrung veranlassen würde; bei einer gekrümmten, breiten Steuerfläche genügt schon ein wesentlich geringerer Neigungswinkel, um das Flugzeug steuerlos zu machen. Das Flugzeug wird in solchen Fällen unter Pendelschwingungen, deren Größe und Periode von dem Trägheitsmoment des Apparates abhängen, abstürzen mit einer mindestens 5 mal größeren Geschwindigkeit als in normalem Gleitfluge, es sei denn, daß es dem Flieger gelingt, durch Ausnutzung der lebendigen Kraft der Pendelschwingungen und deren Wirkung auf die Steuerfläche die notwendige Neigung der Flugzeugachse in die Flugbahn zu veranlassen.

II. Die Querstabilität.

Die Erhaltung der Querstabilität eines Flugzeuges wird von wesentlich anderen Bedingungen bestimmt, als die der Längsstabilität; denn bei der letzteren kam es darauf an, das Flugzeug stets in eine bestimmte, zum Schweben erforderliche Lage zur Flugrichtung zu bringen. Dagegen ist eine Geschwindigkeit in der Querrichtung normaler Weise nicht vorhanden, und als Bezugsrichtung kann und muß alleine die Richtung der Erdschwere dienen, oder genauer die Richtung der resultierenden Beschleunigung, die sich aus der Erdbeschleunigung und der Flugzeugbeschleunigung (Zentrifugalbeschleunigung) ergibt. Dieser Richtung kann nur durch Verlegung des Schwerpunktes unter den Druckmittelpunkt Ausdruck verliehen werden. Wenn keine stärkeren Störungsmöglichkeiten vorlägen, wäre eine sehr geringe metazentrische Höhe am vorteilhaftesten, da dann einerseits die Drehbewegungen um die Längsachse, also die Schlingerbewegungen weich und stark gedämpft ausfallen, andererseits die Erhaltung der Längsstabilität nicht nennenswert erschwert wird. Wir haben demnach zu untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um mit geringer Schwerpunktstiefe gefahrlos auskommen zu können.

Es sei Fig. 68 ein schematischer Querschnitt eines Flugapparates, bei dem nach dem eben Gesagten, das Gewicht G im Abstande a vom Druckmittelpunkt vereint gedacht ist. Die beiden Flugflächen F mögen zunächst eine verschwindend kleine Neigung gegeneinander haben, so daß der Druckmittelpunkt M dicht über dem Vereinigungspunkte beider Flächen liegt.

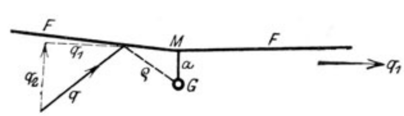


Fig. 68.

Es möge nun durch irgendeine Ursache die Flugflächenebene eine Neigung χ gegen die Horizontale erhalten haben. Eine solche Neigung kann aus verschiedenen Gründen eintreten, z. B. durch einen plötzlich einspringenden Wind q von links unten. Nach den früheren Ausführungen liegt der Druckmittelpunkt eines derartigen Windes bei ebenen Flugflächen auf dem linken Flügel und übt im ersten Momente ein Drehmoment mit dem Hebelarm ϱ im Uhrzeigersinn auf den Apparat aus. Allerdings wird dies Drehmoment nur eine kurze Zeit über wirken; denn sehr bald wird der ganze Apparat durch die Wirkung dieses Windes eine Geschwindigkeitskomponente q_1 in horizontaler Richtung quer zu seiner Längsachse aufnehmen, die gleich der Horizontalkomponente von q ist, und es bleibt relativ zum Flugzeuge nur die Vertikalkomponente q_2 übrig, die kein Drehmoment besitzt. Bis dieser Gleichgewichtszustand erreicht ist, kann indessen schon eine merkliche Neigung χ entstanden sein.

Der Drehung entgegen wirkt zunächst nur die Schwerkraft mit einem Drehmoment $G a \sin \chi$. Dieses genügt nun nicht, die Drehung zu verhindern; denn wählen wir a groß, so wächst mit a auch ϱ nahezu gleichmäßig an, und bei hinreichend starkem Winde q überwiegt immer die Kraft des Windes, wie tief auch der Schwerpunkt liegen möge.

Eine wesentliche Neigung des Flugzeuges tritt ferner auch beim Durchfahren von Kurven auf. Die Neigung gegenüber der Horizontalen durch die Wirkung der Zentrifugalbeschleunigung bei gleichmäßig gekrümmter Flugbahn kommt hier allerdings nicht in Frage, da in der Kurve nicht mehr die Horizontalebene die gewünschte Stellung der Flugflächen ist, sondern die Ebene, die normal zur resultierenden Beschleunigung steht. Beim Einfahren oder Verlassen der Kurve wird aber das Flugzeug, wegen seines großen Trägheitsmomentes um die Längsachse, nicht sofort die richtige Neigung annehmen und dadurch zeitweise eine Neigung χ zwischen Schwerachse a und resultierender Beschleunigung bekommen. Hinzu kommt, daß die äußere Flügelspitze in der Kurve eine größere Geschwindigkeit und dadurch einen größeren Auftrieb besitzt, als die innere, und demzufolge das Flugzeug stets eine stärkere Neigung annimmt, als der Zentrifugalbeschleunigung entspricht.

Nehmen wir somit an, eine Neigung χ sei aus einer der genannten Ursachen aufgetreten. Dann liegt der Auftrieb A, der durch die Eigengeschwindigkeit V des Flugzeuges verursacht ist, nicht mehr in Richtung der Erdbeschleunigung, und wenn vorher Gleichgewicht herrschte, wird jetzt nur noch ein Gewicht $G \cos \chi$ getragen, und das Flugzeug fällt mit einer Kraft $G(1 - \cos \chi)$. Es fragt sich nun, in welcher Richtung dieser Fall stattfindet. Es sei in Fig. 69 q' diese Richtung, wobei wir die Bewegungskomponenten in Richtung der Flugzeugachse außer Betracht lassen; q' schließe mit der

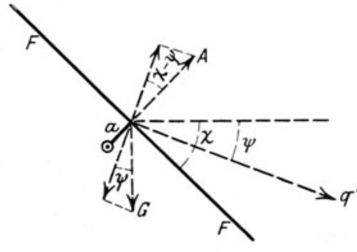


Fig. 69.

Horizontalen den Winkel ψ ein. Als Bedingung für diese Fallrichtung haben wir die Forderung, daß senkrecht zu q' keine Kräfte wirken. Nun zieht nach links abwärts die Kraft $G \cos \psi$ und nach rechts aufwärts in entgegengesetzter Richtung $A \cos (\chi - \psi)$. Folglich muß, da $A = G$ ist, die Gleichung bestehen,

$$\cos \psi = \cos (\chi - \psi);$$

daraus folgt,

$$\psi = \tfrac{1}{2} \chi . \qquad (68)$$

Es findet demnach der Fall in einer Richtung statt, die den Neigungswinkel χ des Flugzeuges halbiert. Durch diesen Fall tritt nun eine relative Bewegung des Flugzeuges zur umgebenden Luft auf und der Fall wirkt wie das Auftreten eines Windes in umgekehrter Richtung als q'.

Liegen die Flügel F in einer Ebene, so liegt der Druckmittelpunkt B (Fig. 70) dieses Windes auf dem unteren Flügel, und die Verlängerung von q' trifft die Schwerlinie eventuell unterhalb des Schwerpunktes S des Flugzeuges. In diesem Falle würde der Druck ein Drehmoment im Uhrzeigersinn ausüben und die Neigung des Flugzeuges vergrößern, wenn die Geschwindigkeit q' so groß geworden ist, daß das Drehmoment der Schwere im Betrage von $G a \sin \chi$ nicht mehr überwiegt. Allerdings könnte durch Verlegung des Schwerpunktes z. B. nach S_1 verhindert werden, daß ein die Neigung vergrößerndes Drehmoment auftritt. Eine derartig tiefe Schwerpunktslage erschwert aber die Längsstabilität zum Vorteil der Querstabilität wesentlich.

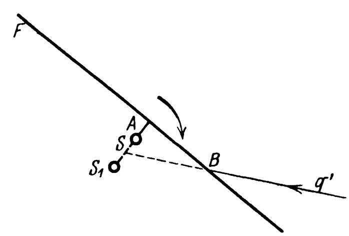


Fig. 70.

Um diese tiefe Schwerpunktslage zu vermeiden, ist es vorteilhafter, nach einer Flügelform zu suchen, bei der der Druckmittelpunkt von q' auf dem höher gelegenen Flügel liegt. Dies ist sicher teilweise der Fall bei einer in Fig. 71 gezeichneten Flügelform, bei der der Druckmittelpunkt B für geneigte Inzidenz nicht gegen den Anblasrand, sondern gegen den Austrittsrand hin aus der Mitte verschoben wird, während er bei vertikaler Inzidenz in einem Punkte M liegen dürfte. Eingehende experimentelle Prüfungen über die Lage des Druckmittelpunktes an Flächen, die gemäß Fig. 71 gekrümmt sind,

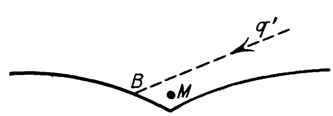


Fig. 71.

sind allerdings bisher nicht durchgeführt, obgleich eine derartige Untersuchung für die Konstruktion von Flugapparaten von großer Bedeutung wäre.

Die idealste Flügelform ist diejenige (Fig. 72), bei der die in Richtung des Windes nach den Druckmittelpunkten gezogenen Leitstrahlen sämtlich durch denselben Punkt *M* gehen. Liegt dann auch der Schwerpunkt in *M*, so übt ein seitlicher Luftstrom niemals ein Drehmoment aus, und liegt der Schwerpunkt nur ein wenig unter *M*, so bleibt trotz geringster metazentrischer Höhe die Querstabilität ohne Erschwerung der Längsstabilität dauernd bewahrt.

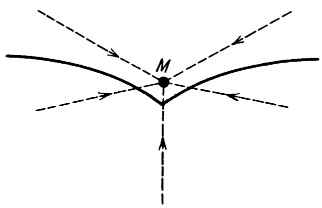


Fig. 72.

Natürlich muß dann auf eine etwaige Veränderung der Belastung Rücksicht genommen werden, wie sie durch Benzinverbrauch und das variable Gewicht des Führers und der Fluggäste bedingt ist.

Solange diese ideelle Flügelform noch nicht gefunden ist, muß die Flächenverwindung zur Erhaltung der Querstabilität herangezogen werden. Bei dieser werden am vorteilhaftesten die hinteren Flügelenden hochgebogen. Neigt sich z. B. das Flugzeug nach rechts, so wirkt ein Hochbiegen des linken, hinteren Flügelendes in zweifacher Weise aufrichtend; denn erstens wird der Druckmittelpunkt des Windes, den der beginnende Fall von rechts her veranlaßt, nach links verschoben, und zweitens wird der mittlere Flugwinkel α des linken Flügels kleiner als der des rechten Flügels. Hierdurch wird der Auftrieb des rechten Flügels größer als der des linken und eine aufrichtende Drehung veranlaßt.

Elftes Kapitel.

Der Luftpropeller.

Der Luftpropeller dient dazu, dem Luftfahrzeug durch einen umlaufenden Motor einen Vortrieb zu erteilen, und handelt es sich bei der Konstruktion darum, ihm eine möglichst günstige Form zu geben. Es fragt sich nun zunächst, was unter günstig verstanden werden soll. Professor F. Bendemann[1]) ist bei seinen Untersuchungen von der Frage ausgegangen: Bei welcher Form wird mit der kleinsten Leistung ein verlangter Vortrieb erzielt, und zweitens: Bei welcher Form gibt die Schraubenflächeneinheit den größten Vortrieb. Diese beiden Fragen sind von grundlegender Bedeutung für die Konstruktion einer Hubschraube, wie sie z. B. für einen Schraubenflieger benötigt würde. Die Resultate dieser Untersuchungen sind aber nicht in allen Punkten für die Konstruktion der besten Vortriebschraube maßgebend.

Dem gegenüber soll in diesem Kapitel derjenige Luftpropeller als der günstigste gelten, der den größten Wirkungsgrad hat, d. i. derjenige, der von der zugeführten Leistung einen möglichst großen Prozentsatz nutzbringend verwertet. Es ist infolgedessen eine Theorie des Propellers aufzustellen, die einen analytischen Ausdruck für den Wirkungsgrad gewährt und dadurch erkennen läßt, von welchen meßbaren Faktoren der Wirkungsgrad abhängt. Die Forderung eines möglichst großen Wirkungsgrades ist ausschlaggebend bei der Konstruktion des Luftschiffpropellers; beim Flugzeugpropeller tritt noch die Forderung hinzu, daß seine Eigenschaften möglichst die Erhaltung der Längsstabilität erleichtern sollen. Dies ist nach den Ausführungen des vorigen Kapitels dann der Fall, wenn der Nutzeffekt zunimmt, sobald der Flugwinkel zur Überwindung absteigender Luftströmungen vergrößert wird.

Zur besseren Übersichtlichkeit unserer Formeln wollen wir annehmen, der Propeller besäße verhältnismäßig schmale im ganzen

[1]) Luftschraubenuntersuchungen von Dr. F. Bendemann 1911.

Radius gleichmäßig breite Flügel; eine Umrechnung für Flügel, die sich sektorförmig gegen die Peripherie verbreitern, ist dann ohne weiteres möglich. Unter der Breite B wollen wir die Summe der Breiten aller Flügel verstehen; dabei braucht aber nicht vorausgesetzt zu sein, daß m-Flügel zusammen dieselbe Wirkung haben, wie ein einziger m mal breiterer Flügel, sondern nur, daß die m-Flügel m mal so stark wirken als ein Flügel derselben Breite.

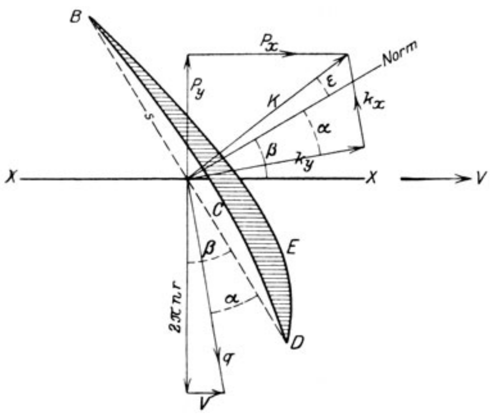


Fig. 73.

Es sei nun XX in Fig. 73 die Achse des Luftpropellers, welche im Luftfahrzeug fest gelagert ist und mit diesem zusammen eine Geschwindigkeit V besitzen möge, die mit ihr gleich gerichtet ist. Diese Geschwindigkeit V ist dann mit hinreichender Annäherung die Relativgeschwindigkeit der Achse gegenüber der umgebenden Luft.

Bei einem Flugzeug mit vorne liegendem Propeller trifft dies ohne weiteres zu. Indessen kann diese Annahme auch bei hinten liegendem Propeller gelten, da bei Flugzeugen der „Vorstrom" nur gering ist, wegen der kleinen Neigung der Flugflächen; ebenfalls gültig ist diese Annahme für Luftschiffe mit einer Propelleranordnung neben oder unter dem Ballon, wo der „Mitwind" gegen die Eigengeschwindigkeit des Luftschiffes vernachlässigt werden kann.

Es habe nun das Luftfahrzeug bei der Geschwindigkeit V den Widerstand W zu überwinden, und wir können unter Vernachlässigung der Reibung, die das Resultat nur wenig verändert, $W = \sigma V^2$ setzen. Hier bezieht sich die Konstante σ nicht nur auf den Stirnwiderstand der Gondel usw., sondern sie schließt auch den Bewegungswiderstand der Tragflächen in sich ein. Der Widerstand W muß vom Vortrieb des Propellers P_x überwunden werden.

Ferner sei $BCDE$ ein Querschnitt des Propellerflügels im Abstande r von der Achse; hierbei ist in der Fig. 73 der Propellerflügel momentan senkrecht gegen die Papierebene stehend gedacht, so daß die Achse XX im Abstande r hinter der Papierebene liegt. Dreht sich nun der Propeller mit einer Tourenzahl n pro Sekunde so bewegt sich der Querschnitt $BCDE$ mit einer Geschwindigkeit $2\pi n r$ senkrecht zu XX. Diese setzt sich mit der Axialgeschwindigkeit V zu einer Geschwindigkeit q zusammen, für die gilt

$$q^2 = V^2 + (2\pi n r)^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

und diese Geschwindigkeit q ist nach obiger Annahme auch die Relativgeschwindigkeit des Propellerquerschnittes gegen die umgebende Luft.

Wir wollen schließlich unter β den Steigungswinkel der Schraubenfläche verstehen, oder genauer ausgedrückt, den Neigungswinkel der Sehne s des betrachteten Querschnittes gegen die Achsennormale, und unter α den „Anstellwinkel" der Schraubenfläche, d. h. den Winkel der Geschwindigkeit q gegenüber der Sehne s; dann gilt die Beziehung

$$\beta = \alpha + \operatorname{arctg} \frac{V}{2\pi n r}; \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

hier ist β mit r veränderlich und infolgedessen auch α.

Ein Flächenelement des Propellers der Breite B und der Länge dr erfährt nun bei der Bewegung eine Druckkraft $dK = k_\alpha B q^2 dr$, wo k_α der dem Winkel α und der verwendeten Flächenform entsprechende Widerstandskoeffizient ist. Wegen der Reibung und des Stirnwiderstandes der Propellerflügel weicht die Richtung dieser Druckkraft von der Sehnennormalen N um einen kleinen Winkel ε in dem gezeichneten Sinne ab. Diesen Winkel ε können wir durch die im achten Kapitel angeführten Wiederstandskoeffizienten k_x und k_y ausdrücken, die die spezifischen Wiederstände in der Bewegungsrichtung und senkrecht zu ihr angeben, und die bei gegebener Flächenform nur vom Anstellwinkel α abhängen. Aus der Fig. 73 folgt ohne weiteres $\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \frac{k_x}{k_y}$, oder da α und ε beide nur sehr kleine Winkel sind

$$\varepsilon = \frac{k_x}{k_y} - \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

Zerlegen wir nun diese Druckkraft in ihre Komponenten P_x in Richtung von XX und P_y senkrecht zu XX, so gibt uns die erstere den Vortrieb des Propellers, die zweite den bei der Drehung zu überwindenden Widerstand, und es wird

$$dP_x = dK \cdot \cos(\beta + \varepsilon) \qquad \text{und} \qquad dP_y = dK \sin(\beta + \varepsilon);$$

setzen wir hier für dK den obigen Wert ein und für q den Wert aus Gleichung 69 und integrieren über die ganze Länge R des Propellerflügels, so wird:

$$P_x = B\int_0^R k_a\,[V^2 + (2\,\pi\,n\,r)^2]\cos(\beta + \varepsilon)\,dr = \sigma\,V^2 \quad . \quad (72)$$

und

$$P_y = B\int_0^R k_a\,[V^2 + (2\,\pi\,n\,r)^2]\sin(\beta + \varepsilon)\,dr.$$

Die Nutzleistung des Propellers ergibt sich, wenn wir den Vortrieb P_x resp. den ihm gleichen Widerstand W mit der Fahrzeuggeschwindigkeit V multiplizieren zu

$$L_n = \sigma\,V^3 = B\,V\int_0^R k_a\,[V^2 + (2\,\pi\,n\,r)^2]\cos(\beta + \varepsilon)\,dr \quad . \quad (73)$$

Andererseits ist die vom Motor an den Propeller abgegebene Leistung L_a gegeben durch das Produkt der peripherischen Geschwindigkeit und des Widerstandes und es wird:

$$L_a = B\int_0^R k_a\,[V^2 + (2\,\pi\,n\,r)^2]\;2\,\pi\,n\,r\sin(\beta + \varepsilon)\,dr \quad . \quad . \quad (74)$$

Der Wirkungsgrad η der Schraube ist dann schließlich gegeben durch

$$\eta = \frac{L_n}{L_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Um η auszurechnen ist es zunächst nötig, bestimmte Annahmen über die Änderung des Steigungswinkels β mit dem Radius zu machen. Sind die Propellerflügel reine Schraubenflächen mit der konstanten Steighöhe h, so ist $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2\,\pi\,r}$, und der Steigungswinkel β_R am Ende der Flügel ist gegeben durch $\operatorname{tg}\beta_R = \frac{h}{2\,\pi\,R}$. Nach Gleichung 70 ist dann $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{2\,\pi\,r} - \operatorname{arctg}\frac{V}{2\,\pi\,n\,r}$, also mit r veränderlich und nimmt vom Flügelende nach der Achse hin zu.

Es ist nun von vornherein zu vermuten, und wird weiter unten bewiesen werden, daß der Wirkungsgrad bei einem bestimmten α am größten wird. Dann muß aber jeder Teil der Schraubenfläche dieses günstigste α haben, wenn die ganze Schraube den größten Wirkungsgrad haben soll. Daraus folgt, daß nur eine Schraubenform zu dem größten Werte von η führen kann, bei der der Anstellwinkel α auf dem ganzen Radius konstant ist. Eine solche Schraubenform wird gewöhnlich „Normalschraube" genannt. Bezeichnen wir den konstanten Anstellwinkel, für den die Schraube konstruiert ist, und der demnach auch am Flügelende vorhanden ist, mit α_R, so wird an einer Schraube mit möglichst großem Wirkungsgrad der Steigungswinkel der Bedingung genügen müssen

$$\beta = \alpha_R + \operatorname{arctg} \frac{V}{2\pi n r}; \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

diese Bedingung kann natürlich für verschiedene Geschwindigkeiten V nur dann bestehen bleiben, wenn das Verhältnis $V:n$ unveränderlich ist.

Setzen wir nunmehr dieses Steigungsgesetz für die Schraubenfläche voraus, so können wir die Integrale in Gleichung 72 bis 74 lösen, da für ein konstantes α auch k_α und ε unabhängig von r werden. Hierbei ist allerdings von der Veränderlichkeit von k_α und ε mit der Geschwindigkeit wegen der Reibung abgesehen, und von der Veränderung, die die Koeffizienten durch den verschiedenen Querschnitt der Schraubenflügel erfahren.

Zur Lösung der Integrale wollen wir weiter annehmen, daß der Winkel β nur klein sei; dann können wir mit einiger Annäherung $\cos(\beta + \varepsilon) = 1$ setzen, und bekommen für den Vortrieb aus Gleichung 72 den Wert

$$P_x = B k_\alpha \left[V^2 R + \tfrac{4}{3} \pi^2 n^2 R^3\right] \quad \ldots \ldots \quad (77)$$

In dieser Formel können wir noch in erster Annäherung den ersten Summanden gegen den zweiten vernachlässigen, da bei kleinem β_R auch $\frac{V}{2\pi n R}$ nach Gleichung 76 klein sein muß, und erhalten angenähert

$$\boldsymbol{P_x = \tfrac{4}{3} \pi^2 k_\alpha B n^2 R^3} \quad \ldots \ldots \quad (77\,\text{a})$$

D i e s e G l e i c h u n g z e i g t, d a ß d e r V o r t r i e b e t w a m i t d e r d r i t t e n P o t e n z d e s R a d i u s w ä c h s t. Daraus folgt, daß die inneren Teile der Propellerflügel nur wenig zur Vergrößerung des Vortriebes beitragen und bei der Rechnung unberücksichtigt bleiben können. Nur dadurch bekommt unsere Annahme eines kleinen β Berechtigung, indem bei einem kleinen Steigungswinkel β_R der Flügelenden nur die inneren Flügelteile ein großes β besitzen. Es ergibt sich dadurch ferner, daß etwa das letzte Fünftel oder 20% der Flügellänge schon den halben Vortrieb bewirken, so daß der Vortriebsmittelpunkt ungefähr bei $^4/_5\,R$ liegt.

Ferner ist nach Gleichung 77a angenäherte Proportionalität zwischen P_x und n^2 vorhanden; da andererseits $P_x = W = \sigma V^2$ ist, so folgt, daß die Tourenzahl des Propellers und die Geschwindigkeit V einander proportional sind und das Verhältnis konstant bleibt. Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn das Luftfahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit unbehindert fährt, also keine Beschleunigung hat und nicht den Boden berührt.

Durch diese angenäherte Proportionalität zwischen V und n wird nun erreicht, daß die Beziehung 76 für den Steigungswinkel der Schraube auch dann angenähert bestehen bleibt, wenn die Tourenzahl des Motors durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Benzinzufuhr verändert wird, nicht aber, wenn sich Tourenzahl und Geschwindigkeit durch Änderung des Flugwinkels bei Betätigung des Höhensteuers ändern; dann wird nämlich der Widerstandskoeffizient σ ein anderer und P_x und V^2 haben nicht mehr denselben Proportionalitätsfaktor. Es kann demnach ein konstanter Anstellwinkel α, und damit der höchst erreichbare Wirkungsgrad des Propellers nur bei einer bestimmten Höhensteuerstellung vorhanden sein.

Besitzt die Schraube einen Steigungswinkel über 15^0, so wird die zur Ableitung der Gleichung 77a gemachte Vernachlässigung unzulässig. Es läßt sich indessen auch dann das Integral 72 immer auswerten, solange nur ε klein bleibt. Bezeichnet man noch das Verhältnis der Eigengeschwindigkeit V zu der Propellerumfangsgeschwindigkeit $2\pi n R$ mit z, so findet man aus Gleichung 72, wenn für ε aus 71 und für β aus 76 ihre Werte eingesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} P_x = 4\pi^2 k_a B n^2 R^3 z^3 &\left\{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{z}\sqrt{1+z^2}\right)^3 - 1\right]\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\frac{k_x}{k_y}\left(\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z^2} + \log\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (77\text{b})$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß bei unverändertem z die Proportionalität zwischen P_x einerseits und n^2 resp. R^3 andererseits für jeden Steigungswinkel der Schraube besteht; die Unveränderlichkeit von z ist aber nicht ohne weiteres gewährleistet.

Kehren wir nunmehr zur Berechnung des Wirkungsgrades η bei einem konstanten Anstellwinkel α zurück. Zunächst nehmen wir wiederum β und auch $z = \dfrac{V}{2\pi n R}$ klein an und erhalten aus Gleichung 74

$$L_a = 8\pi^3 k_a B n^3 \int_0^R r^3 (\beta + \varepsilon)\, dr,$$

oder für β und ε ihre Werte aus 70 und 71 eingesetzt und das Integral aufgelöst

$$L_a = 4\,\pi^2\,k_a\,B n^2 R^3 \left(\frac{1}{3} V + \frac{1}{4}\frac{k_x}{k_y} 2\,\pi\,n\,R\right).$$

Führen wir in diesem Ausdruck den Steigungswinkel β_R der Flügelenden ein, so erhalten wir, da angenähert

$$\beta_R = \alpha + \frac{V}{2\,\pi\,n\,R} \qquad \text{also} \qquad 2\,\pi\,n\,R = \frac{V}{\beta_R - \alpha}:$$

$$L_a = k_a\,B R \left(\frac{V}{\beta_R - \alpha}\right)^3 \left[\frac{1}{3}(\beta_R - \alpha) + \frac{1}{4}\frac{k_x}{k_y}\right].$$

Andererseits ergibt sich aus 77a:

$$L_n = \tfrac{4}{3}\,\pi^2\,k_a\,B n^2\,V R^3,$$

oder durch β_R ausgedrückt:

$$L_n = \frac{1}{3} k_a\,B R \frac{V^3}{(\beta_R - \alpha)^2}.$$

Durch Division dieser beiden Werte bekommt man schließlich

$$\eta = \frac{\beta_R - \alpha}{\beta_R - \alpha + \frac{1}{4}\frac{k_x}{k_y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Aus dieser Formel erkennt man, daß der Wirkungsgrad der Einheit um so näher liegt, je kleiner der Koeffizient $\frac{k_x}{k_y}$ der Flügelfläche ist. Nun hat aber $\frac{k_x}{k_y}$ nach den früheren Ausführungen ein Minimum bei einem bestimmten Anstellwinkel α, der nach den Kurven des Diagrammes Fig. 46 zwischen 2^0 und 6^0, je nach der Flächenform, liegt. Dadurch ist zunächst die oben ausgesprochene Vermutung bestätigt, daß nur ein ganz bestimmter Anstellwinkel zur besten Schraube führt und bewiesen, daß eine Schraubenform mit konstantem $\alpha = \alpha_R$ die günstigste ist.

Sodann ergibt sich aus der Formel, daß für die Propellerflügel eine Querschnittsform zu wählen ist, die ein möglichst tief liegendes Minimum des Koeffizienten $\frac{k_x}{k_y}$ besitzt; der Winkel, bei dem dieses Minimum liegt, ist dann als Anstellwinkel α_R der Steigung der Schraube zugrunde zu legen. Hieraus erhellt die Wichtigkeit der Bestimmung des Koeffizienten $\frac{k_x}{k}$ und es wäre wünschenswert, wenn die von Eiffel und Prandtl begonnenen Untersuchungen über diesen Koeffizienten auch bei höheren Geschwindigkeiten und volleren Flächenformen durchgeführt würden; denn die bisher erhaltenen Werte, wie sie teilweise im Diagramm 46 verzeichnet sind, dürften der Reibung wegen nur angenähert für Propellergeschwindigkeiten Gültigkeit haben.

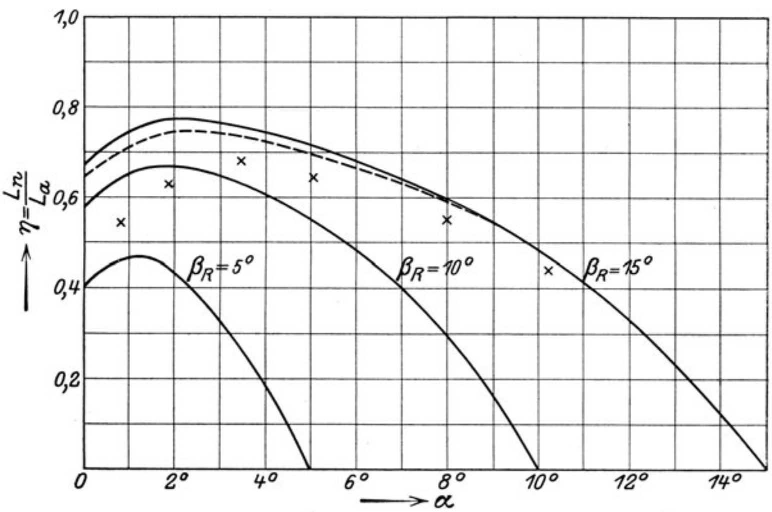


Fig. 74. Wirkungsgrad η eines Luftpropellers, abhängig vom Anstellwinkel, für Propellerflügel mit verschiedenem Steigungswinkel.

Die Formel 78 ergibt ferner eine Zunahme des Wirkungsgrades mit dem Steigungswinkel β_R der Schraubenfläche, und es sind demnach allzu kleine Steigungswinkel zu vermeiden. In dem Diagramm Fig. 74 ist der Wirkungsgrad für $\beta_R = 5^0$; 10^0; 15^0 abhängig vom Anstellwinkel angegeben, bezogen auf eine 1/13,5 gekrümmte Flügelfläche, für die in Fig. 46 Kurve 3 die Werte von $\frac{k_x}{k_y}$ enthalten sind. Man sieht, daß ein Propeller mit $\beta_R = 5^0$ keinen größeren Wirkungsgrad als $46\,^0/_0$, ein solcher mit $\beta_R = 15^0$ keinen größeren als $77\,^0/_0$ erreichen kann.

Bei Bestimmung des Wirkungsgrades nach Gl. 78 könnte evtl. der variable Querschnitt der Schraubenflügel Schwierigkeiten bereiten. Es läßt sich indessen dieser Umstand dadurch berücksichtigen, daß man der Rechnung den Querschnitt bei $^4/_5\,R$ zugrunde legt, da an dieser Stelle der Vortriebsmittelpunkt liegt. Außerdem wird der Querschnitt einer richtig konstruierten Schraube parabolisch mit dem

Radius abnehmen und demnach nur in der Nähe der Achse wesentlich stärker sein, wo er für den Wirkungsgrad bedeutungslos bleibt.

Falsch wäre es, aus der Gleichung 48 zu schließen, es wäre gut, den Steigungswinkel β_R so groß wie möglich zu machen. Dies verbietet sich zunächst schon aus einem triftigen Grunde: beim Anfahren des Luftfahrzeuges ist seine Geschwindigkeit noch nahezu Null und im ersten Momente $\alpha = \beta$. Wenn dann das Luftfahrzeug allmählich Geschwindigkeit annimmt, wird α kleiner, P_y sinkt und die Tourenzahl des Propellers steigt. Wenn nun das Widerstandsmaximum der Fläche stark ausgeprägt ist und bei einem kleineren Winkel als β_{Mittel} liegt, so würde der vom Propeller zu überwindende Widerstand P_y bei zunehmender Fahrzeuggeschwindigkeit zunehmen und nicht abnehmen. Dann steigt aber die Tourenzahl des Motors nicht weiter an und erreicht niemals den normalen Wert; die Geschwindigkeit des Fahrzeuges erhöht sich demnach ebenfalls nicht weiter.

Es muß also der mittlere Wert von β immer kleiner bleiben, als der Winkel, bei dem das Widerstandsmaximum der gewählten Flächenform liegt. Liegt dieses z. B. bei 15^0, wie bei $^1/_{13,5}$ gekrümmten Flächen mit $\lambda = 6$, so darf β_R nicht größer als 12^0 gewählt werden, da β_{Mittel} etwa $20^0/_0$ kleiner als β_R ist. Allerdings wird sich ein Propellerflügel mit $B:R = 1:6$ nicht verhalten, wie eine gleichmäßig bewegte Fläche mit dem Seitenverhältnis $1:6$, sondern etwa wie eine Fläche mit dem Seitenverhältnis $1:3$, da die inneren Teile des Propellerflügels eine geringere Geschwindigkeit haben, als die äußeren. Demnach dürfte ein solcher Propellerflügel noch einen Steigungswinkel von 20^0 zulassen. Hieraus müssen wir schließen, daß allzu schmale Propellerflügel zu verwerfen sind, und etwa ein Seitenverhältnis $1:6$ die Grenze bilden sollte.

Die Folgerung, daß der Wirkungsgrad mit β_R beliebig wächst, ist übrigens auch nicht streng richtig, da die Formel 78 nur für kleine Werte von β Gültigkeit hat. Für große Steigungswinkel ist die abgekürzte Rechnungsweise, die zu ihr führte, unrichtig, und es muß die Integration von 73 und 74 in derselben Weise erfolgen, wie es zur Ableitung der Gleichung 77b geschah. Setzt man wiederum $z = \frac{V}{2\pi n R}$, so ergibt sich

$$\eta = \frac{2\left(\frac{1}{z}\sqrt{1+z^2}\right)^3 - 2 - 3\frac{k_x}{k_y}\left(\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z^2} + \log\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)}{2\left(\frac{1}{z}\sqrt{1+z^2}\right)^3 - 2 + \frac{3\,k_x}{4\,k_y}\left(\frac{z^2+2}{z^4}\sqrt{1+z^2} - \log\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)} \tag{78a}$$

Das Diagramm Fig. 75 zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von z nach dieser Formel und zwar für fünf verschiedene Werte von $\frac{k_x}{k_y}$. Man erkennt aus dem Diagramm, daß der Wirkungsgrad stets bei $z = 0{,}5$ unabhängig von $\frac{k_x}{k_y}$ seinen Maximalwert hat, daß er aber für $z = 0{,}3$ bis etwa $z = 0{,}8$ nahezu unveränderlich ist, und erst für z unter 0,3 stark abfällt. Daraus folgt, daß die Umfangsgeschwindigkeit des Propellers höchstens 3 bis 4mal größer als die Fahrzeuggeschwindigkeit genommen werden sollte, wenn ein guter Wirkungsgrad des Propellers gewünscht

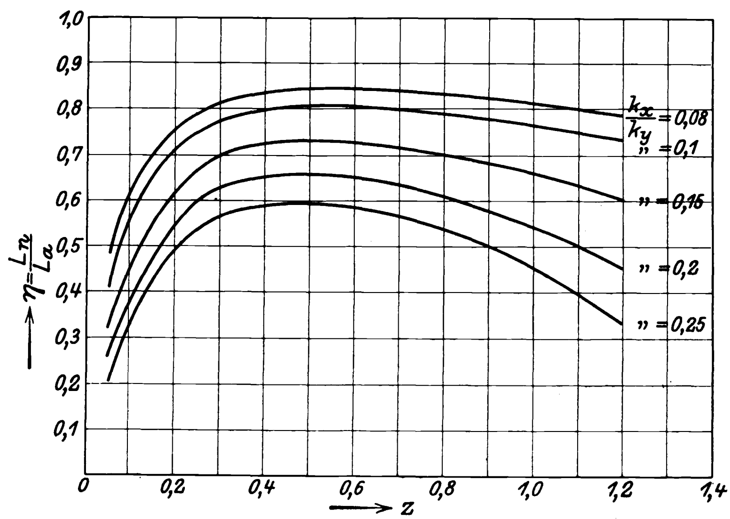


Fig. 75. Wirkungsgrad η eines Luftpropellers, abhängig vom Verhältnis der Fahrzeuggeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit, für verschiedene Flügelformen.

wird. Dies ist ein wichtiges Resultat, das bei vielen Propellerkonstruktionen nicht berücksichtigt ist; sind doch für z Werte von $^1/_5$ bis $^1/_6$ nicht selten. Für $z = 0{,}3$ ist $\beta_R - \alpha_R = 17^0$, für $z = 0{,}25$ dagegen 14^0 und infolgedessen bei $\alpha_R = 3^0$, $\beta_R = 17^0$ bis 20^0. Es ist demnach dieser letztere Winkel eine untere Grenze für den Steigungswinkel eines Luftpropellers, die nicht wesentlich unterschritten werden sollte.

Andererseits ist es aber auch nicht vorteilhaft, diese Grenze wesentlich zu überschreiten; denn beim Anfahren ist ein großes β_R hinderlich, da im ersten Moment $\alpha_R = \beta_R$ ist, also auch der Anstellwinkel groß wird; eine Vergrößerung dieses bewirkt aber eine Abnahme der Tourenzahl des Motors und damit des Vortriebes, da der letztere dem Anstellwinkel nicht ganz proportional, der Tourenzahl aber nahezu quadratisch proportional ist.

Kommen wir nunmehr auf die im Anfange des Kapitels gestellte Frage nach dem günstigsten Propeller zurück, so gibt uns die Theorie nach den vorstehend abgeleiteten Gleichungen folgende Antwort:

1. Unabhängig von allen sonstigen Bedingungen ist stets die Flügelform die beste, bei der der Koeffient $\frac{k_x}{k_y}$ den kleinsten Wert erreicht, gleichgültig bei welchem Inzidenzwinkel das Minimum von $\frac{k_x}{k_y}$ liegt.

2. Handelt es sich darum, ein Flugzeug zu konstruieren, das sich möglichst schnell vom Boden erheben kann, so wählt man vorteilhaft eine Flächenform aus, bei der das Minimum von $\frac{k_x}{k_y}$ einem nicht zu kleinen Inzidenzwinkel entspricht, und nimmt den Steigungswinkel β_R nur zu 10^0 bis 15^0.

3. Handelt es sich darum, ein möglichst schnelles Fahrzeug zu konstruieren, so ist für die Propellerflügel diejenige Flächenform die günstigste, bei der das Minimum des Koeffizienten $\frac{k_x}{k_y}$ einem möglichst kleinen Inzidenzwinkel entspricht. Sodann ist der Propellerradius so groß zu nehmen, daß $z = \frac{V}{2\pi n R}$ mindestens 0,3 wird, wenn als n die höchst zulässige dauernde Tourenzahl des Motors und als V die höchste Geschwindigkeit eingesetzt wird, die mit der zur Verfügung stehenden Leistung des Motors erzielt werden kann. Der Steigungswinkel β_R ist durch z und durch den Winkel α_R, bei dem $\frac{k_x}{k_y}$ sein Minimum hat, gegeben. Um schließlich den Propeller der Motorleistung anzupassen, bleibt eine Variation der Breite B und der Flügelzahl übrig.

4. Handelt es sich darum, ein möglichst sicheres Flugzeug zu konstruieren, so hat man dafür zu sorgen, daß der Propeller nicht bei der höchsten Geschwindigkeit, sondern dann seinen größten Wirkungsgrad hat, wenn starke vertikale Luftströmungen zu überwinden sind. Zu diesem Zwecke ist bei der Berechnung von R und β_R nach derselben Methode zu verfahren, wie unter 3, aber als Geschwindigkeit diejenige einzusetzen, die sich aus Motorleistung und Stirnwiderstand des Flugzeuges bei einem Flugwinkel ergibt, der den größtmöglichen Auftrieb bewirkt. Bei normaler Fahrt ist dann der Flugwinkel wesentlich kleiner, als derjenige, der der Rechnung zugrunde gelegt wurde. Die Geschwindigkeit kann aber

nur wenig gesteigert werden, da mit Vergrößerung derselben der Wirkungsgrad des Propellers sofort stark sinkt. Ein solches Flugzeug ist dann das sicherste, aber nicht das schnellste.

Hieraus geht hervor, daß die vielvertretene Ansicht irrig ist, nach welcher das schnellste Flugzeug die größte Sicherheit gewährt. Vielmehr muß dieser Grundsatz dahin abgeändert werden, daß das Flugzeug, welches mit einem geeigneten Propeller am schnellsten fahren könnte, einen anderen Propeller erhalten muß, um auf Kosten der Geschwindigkeit die größte Sicherheit zu erhalten. Übrigens ist ohne weiteres ersichtlich, daß die im vorigen Kapitel aufgestellte Forderung nach einer Zunahme der Propellerleistung bei Vergrößerung des Flugwinkels durch einen Propeller befriedigt wird, der den Grundsätzen 4 gemäß konstruiert ist.

Bei der praktischen Auswahl des Propellers wird es oftmals Schwierigkeiten haben, die größtmögliche Geschwindigkeit und diejenige, die einen größtmöglichen Auftrieb verschafft, zu berechnen, da der Bewegungswiderstand der Flugflächen und der Stirnwiderstand der übrigen Flugzeugteile nicht genau bekannt sind. Indessen können die fehlenden Daten immer durch Erprobung ähnlich geformter Flugzeuge experimentell bestimmt werden.

Eine experimentelle Prüfung der hier entwickelten Propeller-Theorie ist schwer möglich, da exakte Messungen über den Wirkungsgrad des Luftpropellers nur im geringen Maße vorliegen. Eine angenäherte Prüfung gestatten die Messungen Eiffels[1]) an einer von Drzewiecki konstruierten „Normalschraube" von 0,905 m Durchmesser mit $\beta_R = 15^0$ und $\alpha_R = 5^0$. Eiffel untersuchte den scheinbaren Wirkungsgrad dieser Schraube, wenn er sie mit variabler Umlaufgeschwindigkeit in verschieden starkem Luftstrom laufen ließ. Aus Umlaufgeschwindigkeit und Luftstrom läßt sich z und α berechnen. Allerdings ist α nur bei dem Geschwindigkeitsverhältnis über den ganzen Radius konstant, bei dem $\alpha = 5^0$ ist. Der Wirkungsgrad wird aber hierdurch nur bei sehr kleinem Winkel wesentlich beeinflußt. Die Werte, die Eiffel experimentell gefunden hat, sind im Diagramm Fig. 74 durch Kreuze eingezeichnet, während die gestrichelte Kurve die sich aus der Theorie ergebenden nach dem Diagramm Fig. 75 korrigierten Werte des Wirkungsgrades angibt. Man erkennt, daß die experimentell gefundenen Werte ein wenig niedriger sind, als die berechneten. Dies ist einmal durch die Inkonstanz von α bei den Eiffelschen Versuchen veranlaßt, sodann dadurch, daß die Propellerflügel dicker waren und folglich

[1]) G. Eiffel, La résistance de l'air et l'aviation, complement 1911, S. 229 und 260.

größere Werte von $\frac{k_x}{k_y}$ besaßen, als eine 1/13,5 gekrümmte Fläche geringer Dicke.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die hier für Luftschrauben entwickelte Theorie auch im Prinzip für Wasserschrauben anwendbar ist; nur ist bei der Schiffsschraube zu berücksichtigen, daß wegen des Vorstromes die Relativgeschwindigkeit des Wassers gegen die Propellerachse kleiner ist, als die Fahrzeuggeschwindigkeit. Allerdings bleibt die Theorie nur solange anwendbar, als die Propellerumfangsgeschwindigkeit kleiner bleibt, als die früher definierte Grenzgeschwindigkeit des Wassers, weil über diese Geschwindigkeit hinaus (15 bis 20 m pro Sekunde bei Berücksichtigung der Tiefe des Propellers unter dem Wasserspiegel) die abgeleiteten Widerstandsgesetze nicht mehr gelten. Bei der Luftschraube ist dagegen die Anwendung der Theorie durch den Gültigkeitsbereich der Widerstandsgesetze weniger beschränkt, da Umfangsgeschwindigkeiten über 100 m pro Sek. an und für sich zu verwerfen sind, die Gesetze aber noch genügend genau bis zu dieser Geschwindigkeit gelten.

Druckfehlerberichtigungen.

Seite 15 Zeile 22 von oben
Seite 15 Zeile 4 von unten
Seite 15 Zeile 3 von unten
lies: $h \cos\alpha\, d\omega$ statt: $h\, d\omega$.

Seite 56 Zeile 2 von oben lies: die statt: der

Seite 57 Zeile 5 von oben lies: verzögert statt: beschleunigt.

Seite 61 Zeile 19 von oben lies: unterschreiten statt: überschreiten.

Seite 63 Zeile 12 von oben lies: Annahme statt: Analyse.

Seite 64 Zeile 1 und 2 von unten lies: die Bedingung statt: der Bedingung.

Seite 73 Zeile 8 von oben lies: Föppl statt: Föppel.

Seite 117 Figur 70 lies: a statt: A.

Seite 125 letzte Zeile lies: $\frac{k_x}{k_y}$ statt: $\frac{k_x}{k}$.