

# DIE WISSENSCHAFT

EINZELDARSTELLUNGEN AUS DER NATUR-  
WISSENSCHAFT UND DER TECHNIK. BD. 84  
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. WILHELM WESTPHAL

**Dr. Johannes Picht**

## **Optische Abbildung**

**Einführung in die  
Wellen- und Beugungstheorie  
optischer Systeme**



**SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH**



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.  
Braunschweig

# Die Wissenschaft

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft  
und der Technik, herausgegeben von Professor Dr. Wilhelm Westphal

## *Neuere und neueste Bände:*

8. **Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie.** Von Prof. Dr. A. Werner. 5. durchgesehene Aufl. Geh. 14,— RM, geb. 16,— RM
12. **Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie.** Von Prof. Dr. G. Jäger. 2. verb. und verm. Auflage. Mit 11 Abbild. Geh. 5,— RM, geb. 6,50 RM
23. **Synthetisch-organische Chemie der Neuzeit.** Von Prof. Dr. Julius Schmidt. 2. Auflage. Geh. 18,— RM, geb. 20,— RM
29. **Physiologie der Stimme und Sprache.** Von Prof. Dr. Hermann Gutzmann. 2. Aufl. Mit 93 zum Teil farb. Abbild. Geh. 16,— RM, geb. 18,— RM
31. **Das Klimaproblem der geolog. Vergangenheit und histor. Gegenwart.** Von Dr. Wilh. R. Eckardt. Mit 18 Abbild. und 4 Karten. Geh. 6,50 RM
32. **Lichtbiologie.** Die experimentellen Grundlagen der modernen Lichtbehandlung. Von Prof. Dr. A. Jesionék. Geh. 4,50 RM
33. **Die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Legierungen.** Von Prof. Dr. Bernh. Dessau. Mit 82 Abbildungen. Geh. 6,50 RM
34. **Die elektrische Fernübertragung von Bildern.** Von Dr. Robert Pohl, Mit 25 Abbildungen. Geh. 2,— RM
35. **Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern.** (Leitung, Thermoelektrizität, Galvanomagnetische Effekte, Optik.) Von Prof. Dr. K. Baedeker. Mit 25 Abbildungen. Geh. 4,— RM
36. **Grundlagen der praktischen Metronomie.** Von Prof. Dr. K. Scheel. Mit 39 Abbildungen. Geh. 5,— RM, geb. 6,50 RM
37. **Vergleichende Mond- und Erdkunde.** Von Prof. Dr. S. Günther. Mit 23 Abbildungen und 4 Tafeln. Geh. 5,— RM, geb. 6,50 RM
38. **Die Relativitätstheorie.** Erster Band: Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation. Von Dr. M. v. Laue. 4. vermehrte Auflage. Mit 25 Abbildungen. *Zweiter Band s. Bd. 68.* Geh. 12,— RM
39. **Die philosophischen Probleme der Einsteinschen Relativitätstheorie.** Von Aloys Müller. 2. umgearbeitete und erweiterte Auflage des Buches: **Das Problem des absoluten Raumes.** Mit 10 Abbildungen. Geh. 7,50 RM, geb. 9,25 RM
40. **Die Leuchtgaszerzeugung und die moderne Gasbeleuchtung.** Von Ingenieur Fritz Schmidt. Mit 63 Abbild. Geh. 3,— RM, geb. 4,50 RM
41. **Der Weltäther.** Von Sir Oliver Lodge. Vergriffen.
42. **Wechselstrom-Versuche.** Von Prof. Dr. Anton Lampa. Mit 54 Abbildungen. Geh. 6,— RM, geb. 7,50 RM
43. **Die Telephonie ohne Draht.** Von Dr. K. Markau. Vergriffen.

# DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der  
Naturwissenschaft und der Technik

Herausgegeben von Prof. Dr. WILHELM WESTPHAL

BAND 84

## Optische Abbildung

Einführung in die Wellen- und  
Beugungstheorie optischer Systeme

Von

Dr. Johannes Picht



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH  
1931

# Optische Abbildung

Einführung in die Wellen- und  
Beugungstheorie optischer Systeme

Von

Dr. Johannes Picht

Mit 65 Abbildungen



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH  
1931

ISBN 978-3-322-98392-3      ISBN 978-3-322-99140-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-99140-9

**Alle Rechte vorbehalten**

---

## Vorwort

Der Aufforderung Herrn Prof. Westphals, für die von ihm herausgegebene Sammlung „Die Wissenschaft“ eine Monographie über die Beugungstheorie der optischen Abbildung und ihrer Fehler zu schreiben, bin ich gern nachgekommen. Liegt doch bisher außer einer Buchveröffentlichung von Prof. K. Strehl<sup>1)</sup>, einem Handbuchartikel von Prof. F. Jentzsch<sup>2)</sup> und einem weiteren (kurzen) Handbuchartikel von Dr. A. König<sup>3)</sup> meines Wissens weder eine deutsche noch eine fremdsprachliche zusammenfassende Darstellung dieses auch für die Praxis allmählich an Bedeutung gewinnenden Teilgebietes der Wellenoptik vor.

Bei der Anlage des vorliegenden Buches war ursprünglich eine viel weitergehende Behandlung der einschlägigen Fragen — besonders auch die Anwendung der abgeleiteten Formeln auf die Abbildung im Mikroskop<sup>4)</sup> — geplant. Da das Buch aber schon jetzt — trotz starker Kürzung des fertigen Manuskriptes — den vereinbarten Umfang wesentlich überschritten hat, so konnte jener Plan nicht durchgeführt werden. Ich hoffe aber, die Grundlagen doch so weit entwickelt zu haben, daß eine Beschäftigung mit den spezielleren Problemen keine besonderen Schwierigkeiten mehr bieten wird. Ich denke hier besonders an die Arbeiten von R. Gans und seinen Schülern, weiter an die Arbeiten von M. Berek, Siedentopf, K. Strehl, Lord Rayleigh u. a.

---

<sup>1)</sup> K. Strehl, Die Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichtes. J. A. Barth, Leipzig 1894. Das Buch sowie die Strehlschen Zeitschriftenartikel — ein vollständiges Verzeichnis befindet sich in Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **48**, 75, 1927 — enthalten eine Fülle wichtiger Ergebnisse. Leider erschwert der von Strehl benutzte Telegrammstil das Verständnis der Arbeiten.

<sup>2)</sup> F. Jentzsch, Einführung in die Beugungstheorie der optischen Instrumente. Handb. d. Physik (Geiger-Scheel) **21**, 885, 1929. (Julius Springer, Berlin.)

<sup>3)</sup> A. König, Die Abbildung als Beugungserscheinung. Handbuch d. Experimentalphysik (Wien-Harms) **20**,<sub>2</sub> (Geometr. Optik), 141, 1929. (Akad. Verlagsges., Leipzig.)

<sup>4)</sup> Erwähnt sei hier noch das Buch: E. Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Bearbeitet von O. Lummer und F. Reiche. Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1910.

Wenn ich mich bei der Behandlung der Abbildungsfehler besonders auf eigene Arbeiten stütze, so bitte ich, darin keine Unterschätzung der fremden Arbeiten [Strehl, Straubel<sup>1)</sup>, Wilsing<sup>2)</sup> u. a.] zu sehen. Dies ist vielmehr allein durch das Streben nach möglichst einheitlicher Behandlung der betreffenden Fragen bedingt. Hinzu kommt, daß so wenigstens die jeweiligen Ausgangsintegrale stets strenge Lösungen der Schwingungsgleichung sind und erst bei der Auswertung jener Integrallösungen Vernachlässigungen kleiner Größen erforderlich wurden.

Erwähnen möchte ich hier noch, daß ich die Formeln nicht durch das ganze Buch hindurch fortnumeriert habe, sondern die besonders in englischen Büchern übliche Numerierung gewählt habe, bei der jeweils nur die Formeln eines Paragraphen durchnumeriert sind und der Paragraph durch die vor dem Semikolon stehende Zahl bezeichnet wird [z. B. (37; 4)]. Bei den Verweisungen auf Formeln des gleichen Paragraphen ist dessen Nummer fortgelassen. Im übrigen soll die Angabe der Paragraphen am Kopf der Seiten die Auffindung der gesuchten Formeln und die allgemeine Orientierung erleichtern.

Einige häufiger vorkommende Formeln sind (zum Teil mit Andeutung der Ableitung) in einem „Mathem. Anhang“ zusammengestellt. Verweisungen auf diese Formeln sind durch ein A gekennzeichnet [z. B. (A; 24)].

Recht herzlich danke ich Fräulein Ilse Koblassa, die mich beim Korrekturlesen sehr unterstützte und mehrfach textliche Änderungen vorschlug, die das Verständnis der betreffenden Stellen erleichtern werden.

---

<sup>1)</sup> R. Straubel, Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter, symmetrischer, nicht-sphärischer Wellen. Habilitationsschrift, München 1893.

<sup>2)</sup> J. Wilsing, Über den Einfluß der sphärischen Abweichungen der Wellenfläche auf die Lichtstärke von Fernrohrobjektiven. Publ. d. Astrophysikalischen Observatoriums, Potsdam **15**, St. 4, 1903.

Neubabelsberg b. Potsdam, im Januar 1931.

**Dr. Johannes Picht,**

Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
der Askania-Werke, Berlin-Friedenau  
(vormals Mitarbeiter am Institut der  
Einstein-Stiftung, Potsdam)

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort . . . . .	V—VI
Einleitung . . . . .	1

## Erstes Kapitel

### Die elektromagnetische Lichttheorie

§ 1. Die Maxwellschen Gleichungen; Vektoroperationen . . . . .	2
§ 2. Differentialgleichungen für die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ . . . . .	4
§ 3. Das magnetische vektorielle Potential $\mathfrak{A}$ und das elektrische skalare Potential $\Phi$ . . . . .	4
§ 4. Der Hertzsche Vektor $\mathfrak{Z}$ . . . . .	6
§ 5. Dielektrizitätskonstante und Brechungsindex . . . . .	8
§ 6. Lösungen (Integrale) der Wellengleichung . . . . .	9
§ 7. Intensität des Lichtes und Pointingscher Vektor . . . . .	13
§ 8. Die Grenzbedingungen der elektromagnetischen Feldstärken . . . . .	16
§ 9. Reflexion und Brechung einer ebenen Welle; die Fresnelschen Koeffizienten für Reflexion und Brechung . . . . .	17
§ 10. Diskussion der Fresnelschen Formeln . . . . .	23

## Zweites Kapitel

### Allgemeine Beugungstheorie des Lichtes

§ 11. Huygensches Prinzip. Fresnelsche Zonenkonstruktion . . . . .	27
§ 12. Die Kirchhoffsche Formel . . . . .	30
§ 13. Fraunhofersche und Fresnelsche Beugungserscheinungen . . . . .	37
§ 14. Beugung an kreisförmiger Öffnung . . . . .	39
§ 15. Geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik . . . . .	43
§ 16. Das Babinetsche Theorem . . . . .	47

## Drittes Kapitel

### Allgemeine wellentheoretische Gesichtspunkte der optischen Abbildung

§ 17. Geometrische Optik und Wellenoptik . . . . .	48
§ 18. Abbildung ausgedehnter Objekte. Selbstleuchter und Nichtselbstleuchter. Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes . . . . .	49

## Viertes Kapitel

**Abbildung durch Kugelwellen**

	Seite
§ 19. Intensitätsverteilung in der Brennpunktsebene (Bildebene) . . .	54
§ 20. Intensitätsverteilung in der Bildebene als Fraunhofersche Beugungerscheinung . . . . .	58
§ 21. Intensitätsverteilung in zur Bildebene parallelen Ebenen . . . .	61
§ 22. Energetische Betrachtungen für die Kugelwelle . . . . .	71
§ 23. Intensitätsverteilung weit außerhalb der Brennpunktsebene . . .	73
§ 24. Strenge Behandlung der Kugelwellen nach Debye . . . . .	75
§ 25. Intensitätsverteilung längs der Achse einer Kugelwelle . . . . .	77
§ 26. Weitere Diskussion der Debyeschen Formel . . . . .	79
§ 27. Der „Phasensprung“ in der Umgebung des Brennpunktes . . . .	81
§ 28. Intensitätsverteilung in der Brennpunktsebene . . . . .	83
§ 29. Intensität in beliebigen Aufpunkten . . . . .	85

## Fünftes Kapitel

**Zylinderwellen**

§ 30. Integraldarstellung für die Zylinderwelle . . . . .	88
§ 31. Intensitätsverteilung längs der Achse der Zylinderwelle . . . .	89
§ 32. Intensität außerhalb der Achse der Zylinderwelle . . . . .	92
§ 33. Intensität in der Brennliniensebene . . . . .	94
§ 34. Phasensprung in der Umgebung der Brennlinie . . . . .	96
§ 35. Energetische Betrachtungen für die Zylinderwelle . . . . .	98

## Sechstes Kapitel

**Erscheinungen bei nichtmonochromatischem Licht**

§ 36. Abhängigkeit der Intensitätsverteilung von der Wellenlänge . . .	99
§ 37. Chromatische Aberration . . . . .	104

## Siebentes Kapitel

**Inhomogene Wellen**

§ 38. Das objektseitige Strahlungsdiagramm u. die bildseitige $\psi$ -Funktion	105
§ 39. Intensitätsverteilung in der Bildebene . . . . .	108
§ 40. Intensitätsverteilung längs der optischen Achse . . . . .	109
§ 41. Anwendung der Formeln des § 39 auf spezielle Fälle . . . . .	110
§ 42. Anwendung der Formel für die axiale Intensitätsverteilung auf spezielle Fälle . . . . .	115

## Achstes Kapitel

**Mathematische Darstellung beliebiger Strahlenbündel**

§ 43. Allgemeine Betrachtungen zur mathematischen Behandlung der optischen Abbildungsvorgänge . . . . .	117
§ 44. Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ . Beugungstheoretische Darstellung eines beliebigen Strahlen- bündels . . . . .	119

§ 45.	Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen zweidimensionalen Welle, einer „deformierten Zylinderwelle“ . . . . .	125
§ 46.	Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen (räumlichen) Welle unter Benutzung der Kaustikflächen . . . . .	126
§ 47.	Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen zweidimensionalen Welle unter Benutzung der kaustischen Linie . . . . .	129
§ 48.	Bestimmung der geometrisch-optischen Wellenflächen aus der beugungstheoretischen Integraldarstellung eines Strahlenbündels . . . . .	130
§ 49.	Geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik . . . . .	132
§ 50.	Übergang von $u_P$ zu den Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sowie zum Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S}$ . Intensität proportional zu $ u_P ^2$ . . . . .	135

Neuntes Kapitel

**Wellentheoretische Behandlung des Abbildungsvorganges**

§ 51.	Spiegelung und Brechung einer beliebigen Welle (endlicher Öffnung) an der ebenen Trennungsfläche zweier Medien . . . . .	138
§ 52.	Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen auf eine einfallende Kugelwelle . . . . .	147
Die optischen Abbildungsfehler . . . . .		148

Zehntes Kapitel

**Sphärische Aberration**

§ 53.	Sphärische Aberration. Allgemeine Behandlung . . . . .	149
§ 54.	Intensitätsverteilung auf der Achse des Strahlenbündels . . . . .	154
§ 55.	Weitere Diskussion von (54; 3). Phasenanomalie . . . . .	160
§ 56.	Anwendung der Formeln für die Intensitätsverteilung bei sphärischer Aberration auf ein spezielles Beispiel . . . . .	161
§ 57.	Integraldarstellung von $u_P$ für sphärische Aberration mit zwei und mehr Koeffizienten . . . . .	164
§ 58.	Beziehung zwischen Strahlenaberration und Wellenaberration . . . . .	165
§ 59.	Die Richtersche Symmetrieforderung der Lichtwegaberrationen und ihre Anwendung auf die sphärische Aberration mit einem Koeffizienten zur Bestimmung der Einstellebene $x_E$ . . . . .	170
§ 60.	Anwendung der Symmetrieforderung auf die Schnittweitenaberration mit zwei Koeffizienten. Bestimmung der „besten Korrektur“ eines optischen Systems . . . . .	178
§ 61.	Anwendung der Symmetrieforderung auf die Schnittweitenaberration mit drei Koeffizienten . . . . .	183
§ 62.	Bestimmung der Definitionshelligkeit und der Einstellebene mit Benutzung der Variationsrechnung. (Väisäläsche Methode) . . . . .	184
§ 63.	Anwendung der Väisäläschen Methode, der „mittleren Abweichung“, auf sphärische Aberration mit einem und mit zwei Koeffizienten . . . . .	187
§ 64.	Sphärische Aberration einer Zylinderwelle . . . . .	191

## Elftes Kapitel

**Astigmatismus**

	Seite
§ 65. Astigmatismus. Allgemeine Behandlung . . . . .	197
§ 66. Intensitätsverteilung längs der Achse eines astigmatischen Strahlenbündels . . . . .	201
§ 67. Intensität in beliebigen Aufpunkten eines astigmatischen Strahlenbündels . . . . .	204
§ 68. Astigmatisches Strahlenbündel mit zwei Brennflächen. Allgemeine Integraldarstellung . . . . .	207
§ 69. Auswertung und Diskussion der allgemeinen Integraldarstellung (68; 8) für quadratische oder rechteckige Öffnung . . . . .	209

## Zwölftes Kapitel

**Koma**

§ 70. Die Integraldarstellung des Komafehlers und einige allgemeine Betrachtungen über die Wellenfläche und ihren Tangentialschnitt . . . . .	221
§ 71. Auswertung des Integralausdruckes für den Komafehler . . . . .	226
Mathematischer Anhang . . . . .	233
Sach- und Namenverzeichnis . . . . .	240

# Einleitung

Bei der nachfolgenden Behandlung der optischen Abbildung und der verschiedenen Abbildungsfehler vom Standpunkte der Wellen- und Beugungstheorie setzen wir die Grundlagen der geometrischen Optik voraus, ferner die geometrisch-optische Behandlung der Abbildungsfehler (oder doch wenigstens ihre typischen Merkmale) sowie eine gewisse Vorstellung von der geometrischen Gestalt der zugehörigen „Wellenflächen“, die man in der geometrischen Optik besser als „Flächen gleicher Lichtweglängen“ („gleichen Eikonals“) bezeichnet. Aber auch über die physikalische Natur des Lichtes als einer Wellenbewegung müssen wir einige Kenntnis voraussetzen, sollte der Umfang dieses Buches nicht zu stark anwachsen. So setzen wir als bekannt voraus, daß das Licht ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang ist, ferner, daß man bei jeder Schwingung die Amplitude, die Phase, die Phasenkonstante, die Schwingungsdauer  $\tau$ , die Frequenz  $\nu = \frac{2\pi}{\tau}$  und bei jeder Wellenbewegung außerdem die Wellenlänge  $\lambda$ , die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  [bzw. im Vakuum für Licht:  $c$  ( $= 300\,000$  km/sec)] zu unterscheiden hat, daß sich die verschiedenen Farben des Lichtes durch ihre Wellenlänge unterscheiden, daß  $\frac{\lambda}{\tau} = v$  ist (bzw.  $\frac{\lambda_0}{\tau} = c$ , wenn  $\lambda_0$  die „Vakuumwellenlänge“ des Lichtes ist), und daß man  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\nu}{v} = k$  setzt. Auch auf die Interferenz von Schwingungen, zirkuläre und elliptische Schwingungen, Transversalität des Lichtes, Polarisation, Interferenz von Wellen, Kohärenz und Inkohärenz, Kohärenzlänge u. a. können wir hier nicht näher eingehen, müssen diese Begriffe und ihren Inhalt vielmehr gleichfalls als bekannt voraussetzen.

## Erstes Kapitel

# Die elektromagnetische Lichttheorie

### § 1. Die Maxwell'schen Gleichungen. Vektoroperationen

Das Licht ist, wie wir bereits oben sagten, ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang, so daß wir die Optik als Zweigdisziplin der Elektrodynamik behandeln können. Wir gehen daher aus von den Maxwell'schen Gleichungen, die wir als bekannt voraussetzen, und die wir hier in der Form aufschreiben, in der sie für durchsichtige Körper gelten, in denen sich keine elektrischen Ladungen befinden. Die Annahme, daß wir es mit behandelnden Medien zu tun haben, ist bei allen hier zu behandelnden Fragen mit sehr großer Annäherung erfüllt. Sie findet ihren physikalischen Ausdruck darin, daß die Leitfähigkeit  $\kappa = 0$  ist, daß wir uns also auf Isolatoren (Glas, Luft) bei den nachfolgenden Behandlungen beschränken. Die weitere Annahme, daß die betrachteten Medien frei von elektrischen Ladungen sind, ist ziemlich unwesentlich, da diese nur elektrostatische Felder erzeugen, die sich den elektromagnetischen Schwingungen, also hier dem Lichte, einfach überlagern, ohne sie irgendwie zu beeinflussen. Wir können sie daher von vornherein vernachlässigen. Die Maxwell'schen Gleichungen selbst lauten unter den angegebenen Voraussetzungen, wenn wir noch die magnetische Permeabilität  $= 1$  setzen, wie es mit großer Annäherung für alle optischen Verhältnisse — mit ganz wenigen Ausnahmen, die uns hier nicht interessieren — der Fall ist:

$$\epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad (1; 1)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \quad (1; 2)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad (1; 3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \quad (1; 4)$$

Hierin bedeuten die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  die elektrische und magnetische Feldstärke,  $\epsilon$  ist eine Materialkonstante, die sogenannte Dielektrizitätskonstante, die im Vakuum den Wert 1 hat. Die Gleichungen (3) und (4) bezeichnet man als Nebenbedingungen<sup>1)</sup>.

Diese Nebenbedingungen können übrigens direkt aus (1) bzw. (2) unter Beachtung der Voraussetzungen, d. h. bei Schwingungsvorgängen abgeleitet werden. Denn wenden wir auf (1) die Differentialoperation  $\text{div}$  an und beachten (8) sowie die Tatsache, daß die Differentiation nach der Zeit mit der Differentiation nach den Raumkoordinaten, also  $\frac{\partial}{\partial t}$  mit  $\text{div}$  vertauschbar ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathfrak{E} = 0,$$

<sup>1)</sup>  $\text{div}$  und  $\text{rot}$  sind Differentialoperatoren, die -- angewandt auf einen beliebigen Vektor  $\mathfrak{A}$  mit den Komponenten  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  -- definiert sind durch die Gleichungen:

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}, \quad (1; 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_x \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \\ \text{rot}_y \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \\ \text{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1; 6)$$

Man erkennt aus diesen Definitionsgleichungen, daß  $\text{rot } \mathfrak{A}$  selbst wieder ein Vektor ist mit den Komponenten  $\text{rot}_x \mathfrak{A}, \text{rot}_y \mathfrak{A}, \text{rot}_z \mathfrak{A}$ , während  $\text{div } \mathfrak{A}$  eine skalare Größe ist. Wir erwähnen hier gleich einen weiteren Differentialoperator, den wir nachher noch gebrauchen und der, angewandt auf eine skalare Größe, einen Vektor liefert. Sei  $\Phi = \Phi(x, y, z)$  die skalare Größe, so ist  $\text{grad } \Phi$  ein Vektor mit den Komponenten

$$\text{grad}_x \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \text{grad}_y \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \text{grad}_z \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1; 7)$$

Aus (5), (6), (7) leitet man leicht folgende Beziehungen ab:

$$\text{div rot } \mathfrak{A} = 0, \quad (1; 8)$$

$$\text{div grad } \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \mathcal{A} \Phi, \quad (1; 9)$$

$$\text{rot grad } \Phi = 0, \quad (1; 10)$$

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = \text{grad div } \mathfrak{A} - \mathcal{A} \mathfrak{A}, \quad (1; 11)$$

wo der Laplacesche Operator  $\mathcal{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , der, auf eine skalare Größe angewandt, mit  $\text{div grad}$  identisch ist, auf einen Vektor, d. h. auf dessen Komponenten  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  anzuwenden ist.

und dies liefert, da wir voraussetzten, daß keine elektrischen Ladungen vorhanden sind, sofort (3). Ganz analog folgt (4) aus (2).

## § 2. Differentialgleichungen für die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$

Differenzieren wir (1; 1) nach  $t$  und wenden auf (1; 2) die Differentialoperation  $\text{rot}$  an, so können wir aus den so erhaltenen Gleichungen  $\mathfrak{H}$  eliminieren und erhalten unter Berücksichtigung von (1; 11) und (1; 3) in

$$\Delta \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2; 1)$$

eine Differentialgleichung für  $\mathfrak{E}$ , die in ihrer Form völlig übereinstimmt mit der „Wellengleichung“

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2; 2)$$

wo  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  die Elongation an der Stelle  $x, y, z$  zur Zeit  $t$  bezeichnet und  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist. Entsprechend erhalten wir auch für  $\mathfrak{H}$ , indem wir in gleicher Weise aus (1; 1) und (1; 2) die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  eliminieren und (1; 4) beachten,

$$\Delta \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2; 3)$$

Die beiden Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  oder genauer die sechs Komponenten

$$\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$$

genügen also jede für sich der Wellengleichung. Bei der Lösung dieser der Form nach identischen sechs Differentialgleichungen müssen wir aber noch beachten, daß zwischen  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  die Nebenbedingung (1; 3) und zwischen  $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$  die Nebenbedingung (1; 4) besteht. Durch Einführung eines Hilfsvektors, des sogenannten Hertzischen Vektors  $\mathfrak{Z}$ , können wir uns von diesen Nebenbedingungen befreien.

## § 3. Das magnetische vektorielle Potential $\mathfrak{A}$ und das elektrische skalare Potential $\Phi$

Um diesen Hilfsvektor  $\mathfrak{Z}$  einzuführen, beachten wir zunächst, daß wir (1; 4) dadurch identisch erfüllen können, daß wir  $\mathfrak{H}$  als

rot eines Vektors  $\mathfrak{A}$  ansehen, also

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (3; 1)$$

denn dann ist ja wegen (1; 8)

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Diesen Hilfsvektor  $\mathfrak{A}$  bezeichnet man als das „vektorielle“ oder „magnetische Potential“. Dann geht (1; 2) über in

$$\text{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{E} \right) = 0. \quad (3; 2)$$

Dies aber besagt nach (1; 10), daß wir den Vektor  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{E}$  auffassen können als grad eines Skalars. Man setzt demzufolge

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{E} &= -\text{grad } \Phi, \\ \mathfrak{E} &= -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3; 3)$$

und bezeichnet  $\Phi$  als „skalares“ oder „elektrisches Potential“.

Führen wir dies in (1; 1) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (1; 11)

$$\left\{ \mathcal{A} \mathfrak{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} \right\} - \text{grad} \left\{ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{A} \right\} = 0. \quad (3; 4)$$

Entsprechend erhalten wir aus (1; 3) wegen (1; 9)

$$\mathcal{A} \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathfrak{A}) = 0. \quad (3; 5)$$

Diese beiden Gleichungen (4) und (5), die die Bestimmungsgleichungen für die beiden Potentiale  $\Phi$  und  $\mathfrak{A}$  sind, aus denen sich dann nach (1) und (3) ohne weitere Nebenbedingungen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  ergeben, können wir dadurch formal vereinfachen, daß wir zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\Phi$  eine Beziehung durch die Nebenbedingung

$$\text{div } \mathfrak{A} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3; 6)$$

einführen. Dann gehen die beiden Gleichungen (4) und (5) über in

$$\mathcal{A} \mathfrak{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (3; 7)$$

$$\mathcal{A} \Phi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (3; 8)$$

die beide wieder mit der Wellengleichung identisch sind, und von denen (7) für jede der drei Komponenten  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  einzeln gilt.

#### § 4. Der Hertzsche Vektor $\mathfrak{Z}$

Durch Einführung der beiden Potentiale  $\mathfrak{A}$  und  $\Phi$  haben wir uns von einer Nebenbedingung befreit, doch bleibt noch immer die Nebenbedingung (3; 6) zu beachten. Diese können wir nun identisch erfüllen, wenn wir  $\mathfrak{A}$  als zeitlichen Differentialquotienten eines Hilfsvektors, des Hertzschen Vektors  $\mathfrak{Z}$ , und den Skalar  $\Phi$  als negative div desselben Vektors  $\mathfrak{Z}$  betrachten, also

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}; \quad \Phi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z}. \quad (4; 1)$$

Dann ist (3; 6) identisch erfüllt, und die Gleichungen (3; 7) und (3; 8) gehen über in

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta \mathfrak{Z} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} \right\} &= 0, \\ -\operatorname{div} \left\{ \Delta \mathfrak{Z} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen aber sind erfüllt, wenn

$$\Delta \mathfrak{Z} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0 \quad (4; 2)$$

ist. Für  $\mathfrak{Z}$ , d. h. für die Komponenten  $\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y, \mathfrak{Z}_z$  gilt also die gleiche Differentialgleichung wie für  $\mathfrak{A}$  und  $\Phi$  oder auch wie für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ . Die Benutzung des Vektors  $\mathfrak{Z}$  hat aber den großen Vorteil, daß außer den durch die spezielle Problemstellung vorgeschriebenen, bisher nicht besonders erwähnten Nebenbedingungen keine weitere Nebenbedingung wie etwa (3; 6) für  $\mathfrak{A}$  und  $\Phi$  oder (1; 3) und (1; 4) für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  zu beachten ist. Wir werden daher bei den folgenden wellenoptischen Ausführungen stets den Hertzschen Vektor  $\mathfrak{Z}$  zugrunde legen. Da (2) für jede der drei Komponenten  $\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y, \mathfrak{Z}_z$  einzeln gilt, jede Komponente eines Vektors aber im wesentlichen durch ihren Betrag, also durch eine skalare Größe gegeben ist, so können wir statt (2) auch schreiben

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (4; 3)$$

und nachträglich  $\varphi$  mit dem Betrage einer Komponente des Vektors  $\mathfrak{Z}$  identifizieren. Da  $\mathfrak{Z}$  als Vektor drei Komponenten besitzt, so haben wir drei Lösungen von (3) zu suchen, die den jeweiligen durch das speziell vorgelegte Problem geforderten Nebenbedingungen für  $\mathfrak{Z}_x$  bzw.  $\mathfrak{Z}_y$  bzw.  $\mathfrak{Z}_z$  genügen. Aus dem Vektor  $\mathfrak{Z}$  erhalten wir dann unter Benutzung der Beziehungen (1) die Potentiale  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{P}$  und aus diesen nach (3; 1) und (3; 3) die beiden Feldstärken  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$ .

Wir können natürlich auch direkt aus  $\mathfrak{Z}$  die Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  bestimmen. Denn aus (3; 3) und (1) bzw. (3; 1) und (1) folgt sofort unter Berücksichtigung von (1; 11) und (2)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \text{rot rot } \mathfrak{Z} = \text{grad div } \mathfrak{Z} - \Delta \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{Z} \end{aligned} \right\} \quad (4; 4)$$

oder auch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{H} &= \text{rot rot } \mathfrak{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (4; 5)$$

Für Lösungen von  $\mathfrak{Z}$ , die in der Zeit harmonisch sind, die in komplexer Darstellung die Zeit also nur als Faktor  $e^{i\nu t}$  enthalten, erhalten wir, indem wir in (2)

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} e^{i\nu t}, \quad \text{wo } \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x, y, z) \text{ ist,} \quad (4; 6)$$

einsetzen und die Differentiation ausführen, durch Fortheben des Zeitfaktors die Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{z} + \varepsilon \frac{\nu^2}{c^2} \mathfrak{z} = 0, \quad (4; 7)$$

gültig für jede der drei Komponenten des vom Faktor  $e^{i\nu t}$  befreiten, des „zeitfreien“ Hertz'schen Vektors  $\mathfrak{z}$ . In Analogie zu (3) können wir daher auch schreiben

$$\Delta u + \varepsilon \frac{\nu^2}{c^2} u = 0, \quad (4; 8)$$

wenn

$$\varphi = u e^{i\nu t} \quad \text{und} \quad u = u(x, y, z) \quad (4; 9)$$

gesetzt wird. Setzen wir analog zu  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} e^{i\nu t}$  auch

$$\mathfrak{E} = e e^{i\nu t}, \quad \mathfrak{H} = h e^{i\nu t},$$

so gilt für  $\epsilon$  und  $\eta$  entsprechend (7)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon + \epsilon \frac{v^2}{c^2} \epsilon &= 0, \\ \Delta \eta + \epsilon \frac{v^2}{c^2} \eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4; 10)$$

Zwischen  $\epsilon$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  bestehen dann noch analog zu (4) und (5) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \text{grad div } \zeta + \epsilon \frac{v^2}{c^2} \zeta, \\ \eta &= i \epsilon \frac{v}{c} \text{rot } \zeta \end{aligned} \right\} \quad (4; 11)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= -i \frac{v}{c} \text{rot } \zeta, \\ \eta &= \text{grad div } \zeta + \epsilon \frac{v^2}{c^2} \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (4; 12)$$

wo noch — wie schon hier erwähnt sei — nach § 5

$$\epsilon \frac{v^2}{c^2} = k^2$$

ist.

### § 5. Dielektrizitätskonstante und Brechungsindex

Vergleichen wir (4; 3) mit der „Wellengleichung“

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (5; 1)$$

oder auch (4; 8) mit der „Schwingungsgleichung“

$$\Delta u + k^2 u = \Delta u + \frac{v^2}{c^2} u = 0, \quad (5; 2)$$

in denen  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen ist, so erkennen wir, daß sich die elektromagnetischen Schwingungen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad (5; 3)$$

fortpflanzen. Nun wird als „Brechungsindex“  $n$  eines Mediums das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  zur Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Medium definiert. Wir

erhalten also aus (3) eine Beziehung des Brechungsindex zur Dielektrizitätskonstanten, und zwar wird

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (5; 4)$$

Diese Beziehung ist aber weder qualitativ noch quantitativ gültig, wie das Experiment zeigt. Denn sie sagt aus, daß der Brechungsindex allein vom Medium, und zwar von dessen Dielektrizitätskonstanten abhängt, aber unabhängig ist von der Schwingungszahl, d. h. der Farbe des Lichtes, was aber in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Annähernd gilt es nur für gasförmige Medien, während es z. B. bei Wasser ( $n_D = 1,333$ ;  $\sqrt{\varepsilon} = 8,94$ ) und anderen festen Medien vollkommen falsch ist. Die Beziehung (4) ist nur als Grenzfall für sehr lange Wellen richtig. Es läßt sich aber zeigen — worauf wir hier nicht näher eingehen können —, daß die Beziehung (4) richtig ist, wenn wir unter  $\varepsilon$  nicht die elektrostatische, sondern die elektrodynamische Dielektrizitätskonstante verstehen. Für  $n$  ergibt sich dann im allgemeinen ein komplexer Wert. Da es bei den folgenden Ausführungen nicht auf die Bedeutung von  $\varepsilon$  ankommt, so können wir auch in den Gleichungen (2; 1), (2; 2) bzw. (3; 7), (3; 8) oder endlich auch in (4; 2), (4; 3), (4; 7) und (4; 8) den Wert  $\frac{\varepsilon}{c^2}$  ersetzen durch  $\frac{n^2}{c^2} = \frac{1}{v^2}$ . Ist  $n$  komplex, so ergibt sich auch  $v$  als komplex. Dies bedeutet, daß auch in nichtleitenden Medien im allgemeinen Absorption des Lichtes vorhanden ist.

## § 6. Lösungen (Integrale) der Wellengleichung

Jede beliebige stetige und zweimal differenzierbare Funktion, in der die Variablen  $x, y, z, t$  nur in der Verbindung

$$t \pm \frac{1}{v}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma),$$

wo  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  ist, auftreten, ist Lösung der Wellengleichung und stellt eine sich in Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  ausbreitende ebene Welle dar. Ferner: Jede beliebige, durch

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

dividierte stetige und zweimal differenzierbare Funktion, in der die Variablen  $x, y, z, t$  nur in der Verbindung

$$t \pm \frac{1}{v} \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} = t \pm \frac{r}{v}$$

auftreten, ist eine Lösung der Wellengleichung und stellt eine zum Punkte  $x_0, y_0, z_0$  hinzielende [konvergierende (+)] oder von ihm forteilende [divergierende (-)] Kugelwelle dar. Wir beweisen zunächst die erste dieser beiden Behauptungen.

Es sei

$$\varphi = f\left(t \pm \frac{1}{v}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)\right) = f(p) \quad (6; 1)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dp} = f'; \quad \frac{d^2\varphi}{dp^2} = f''.$$

Dann ist auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f'; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f''.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm \frac{1}{v} f' \cos \alpha; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f'' \cos^2 \alpha$$

und analog

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} f'' \cos^2 \beta; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} f'' \cos^2 \gamma.$$

Es wird demnach wegen  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{v^2} f'' = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

wie es die Wellengleichung fordert.

Daß diese Funktion  $f\left(t \pm \frac{1}{v}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)\right)$  eine ebene Welle darstellt, ergibt sich sofort daraus, daß alle Punkte, für die

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \text{const}$$

ist, sich in gleicher Phase befinden. Diese Gleichung aber stellt eine Ebene dar, deren Normale die Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  hat. Ist speziell (s. 4; 9)  $\varphi = u \cdot e^{ivt}$ , so gilt für eine ebene Welle nach (1)

$$u = a e^{\pm i k (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (6; 1^*)$$

Für  $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$  erhalten wir  $\varphi = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$ , also eine sich längs der positiven oder negativen  $x$ -Achse fortpflanzende ebene Welle. Da  $\varphi$  hier von  $y$  und  $z$  unabhängig ist, so geht die zugehörige Wellengleichung über in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6; 2)$$

Daß auch die zweite Behauptung richtig ist, daß also  $\frac{1}{r} f\left(t \pm \frac{r}{v}\right)$ ,

wo  $f$  eine beliebige Funktion des Argumentes  $t \pm \frac{r}{v}$  bedeutet, stets eine Lösung der Wellengleichung ist, läßt sich entweder in derselben Weise durch Bilden der betreffenden Differentialquotienten oder auch umgekehrt in folgender Weise beweisen:

Wir gehen von der Wellengleichung aus und suchen für sie eine Lösung, die die Koordinaten  $x, y, z$  nur in der Verbindung  $r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$  enthält, also eine Kugelwelle mit dem Punkte  $x_0, y_0, z_0$  als Quell- oder Senkpunkt darstellt. Es sei  $\varphi = F(r, t)$  diese Funktion, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{x - x_0}{r}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{(x_0 - x)^2}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial r} \left( \frac{1}{r} - \frac{(x_0 - x)^2}{r^3} \right). \quad (6; 3) \end{aligned}$$

Zwei analoge Gleichungen gelten für  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$  und  $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ , und unsere Wellengleichung geht, wenn wir die Werte für  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$  und  $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$  einsetzen, über in

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rF)}{\partial r^2},$$

so daß wir erhalten

$$\frac{\partial^2 (rF)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rF)}{\partial t^2}.$$

Diese Differentialgleichung stimmt ihrer Form nach überein mit (2), deren Lösung  $f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$  war. Hier erhalten wir demnach als Lösung

$$rF = f\left(t \pm \frac{r}{v}\right),$$

also

$$F = \varphi = \frac{1}{r} f\left(t \pm \frac{r}{v}\right). \quad (6; 4)$$

Pflanzen sich die Wellen im Vakuum fort, so haben wir natürlich  $v$  durch  $c$  zu ersetzen. Für  $\varphi = u \cdot e^{i\mathbf{v}t}$  geht (4) über in

$$u = \frac{1}{r} e^{\pm ikr}. \quad (6; 4^*)$$

Identifizieren wir die so gefundenen Funktionen mit den Komponenten des Hertzischen Vektors  $\mathfrak{H}$ , indem wir etwa im Falle der Kugelwelle setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \frac{1}{r} f_1 \left( t \pm \frac{r}{v} \right), \\ \mathfrak{H}_y &= \frac{1}{r} f_2 \left( t \pm \frac{r}{v} \right), \\ \mathfrak{H}_z &= \frac{1}{r} f_3 \left( t \pm \frac{r}{v} \right), \end{aligned}$$

worin  $f_1, f_2, f_3$  beliebige stetige, zweimal differenzierbare Funktionen sind, von denen natürlich auch eine oder zwei identisch verschwinden können, so können wir nach (4; 4) die zugehörigen Funktionen der elektromagnetischen Feldstärken bestimmen. Für den Fall der ebenen, in Richtung  $\alpha, \beta, \gamma = 0$  fortschreitenden Welle erhalten wir so z. B., wenn wir

$$\mathfrak{H}_x = 0; \quad \mathfrak{H}_y = 0; \quad \mathfrak{H}_z = f \left( t - \frac{1}{v} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \right) = f(p)$$

setzen,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0; \quad \mathfrak{E}_y = 0; \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \\ \mathfrak{H}_x &= -\frac{c}{v} \sin \alpha \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}; \quad \mathfrak{H}_y = +\frac{c}{v} \cos \alpha \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}; \quad \mathfrak{H}_z = 0, \end{aligned} \right\} (6; 5),$$

wo wir statt  $\frac{c}{v}$  auch hätten  $\sqrt{\varepsilon}$  schreiben können. Da  $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$  selbst

wieder Funktion des Argumentes  $p = t - \frac{1}{v} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$  ist, so können wir, wenn wir

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = g = g \left( t - \frac{1}{v} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \right)$$

setzen, auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0; \quad \mathfrak{E}_y = 0; \quad \mathfrak{E}_z = g(p), \\ \mathfrak{H}_x &= \sin \alpha \sqrt{\varepsilon} g(p); \quad \mathfrak{H}_y = -\cos \alpha \sqrt{\varepsilon} g(p); \quad \mathfrak{H}_z = 0, \end{aligned} \right\} (6; 6)$$

wo

$$p = t - \frac{1}{v} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

und  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$  ist. Dies ist eine linear polarisierte ebene Welle, deren „Polarisationsebene“ — das ist diejenige Ebene, die die magnetische Feldstärke enthält — die  $xy$ -Ebene ist. Für eine in der Richtung  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma = 0$  fortschreitende ebene Welle, deren Polarisationsebene die  $xz$ -Ebene ist, ergibt sich entsprechend

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\sin \alpha g(p); & \mathfrak{E}_y &= \cos \alpha g(p); & \mathfrak{E}_z &= 0; \\ \mathfrak{H}_x &= 0; & \mathfrak{H}_y &= 0; & \mathfrak{H}_z &= \sqrt{\epsilon} g(p). \end{aligned} \right\} \quad (6; 7)$$

### § 7. Intensität des Lichtes und Pointingscher Vektor

Da die Frequenz des Lichtes so ungeheuer groß ist, ist es nicht möglich, den zeitlichen Verlauf der Größe und Richtung der Feldvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  messend zu verfolgen und so die theoretisch erhaltenen Resultate experimentell zu verifizieren. Was wir allein bei allen optischen Untersuchungen messen können, ist — neben Frequenz (Farbe) und Polarisation — die „Intensität“, d. h. der zeitliche Mittelwert des Betrages der Energie, die an der betreffenden Stelle des Raumes im Volumenelement vorhanden ist oder durch ein dort befindliches Flächenelement hindurchströmt. Im ersten Falle sprechen wir vom zeitlichen Mittelwert der Energiedichte  $W$ , im zweiten Falle vom zeitlichen Mittelwert der Dichte der Energieströmung  $\mathfrak{S}$ . Die Energiedichte  $W$  zerfällt in zwei Anteile, den der elektrischen ( $W_e$ ) und den der magnetischen ( $W_m$ ) Energiedichte.

Diese beiden Anteile sind in Abhängigkeit von  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  bestimmt durch die Gleichungen

$$W_e = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \quad \text{bzw.} \quad W_m = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2, \quad (7; 1)$$

so daß

$$W = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2). \quad (7; 2)$$

Hier ist  $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2$  und analog  $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2$ . Die Energiedichte ist daher eine skalare Größe.

Die Dichte der Energieströmung ist eine gerichtete Größe, da ja die Strömung immer eine bestimmte Richtung besitzt. Sie ist

abhängig von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  und definiert durch den „Pointingschen Vektor“

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}], \quad (7; 3)$$

wo die eckigen Klammern das Vektorprodukt bedeuten<sup>1)</sup>.

Da der Vektor  $\mathfrak{S}$  die Richtung der Energieströmung angibt, so können wir ihn mit den „Lichtstrahlen“ identifizieren, doch gilt diese Zuordnung nur angenähert<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Die Komponenten von  $\mathfrak{S}$  sind demnach

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y); & \mathfrak{S}_y &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z); \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x). \end{aligned} \right\} (7; 4)$$

Die Gleichungen (4) geben gleichzeitig die Definition des Vektorproduktes.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir gleich noch die Definition des sogenannten „skalaren Produktes“ zweier Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  angeben, da wir dies noch wiederholt gebrauchen werden. Man bezeichnet es durch  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  oder auch kurz durch  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ . Es ist

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z, \quad (7; 5)$$

so daß

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2 = \mathfrak{A}^2 \quad (7; 6)$$

ist, eine Beziehung, die wir bereits bei der Definition der Energiedichte benutzten. Aus (4) erkennt man noch, daß die Lage von  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  zueinander die gleiche ist wie diejenige der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Achse eines rechtshändigen Koordinatensystems.

<sup>2)</sup> Streng gültig ist sie z. B. bei einer (allseitig unbegrenzten) ebenen Welle. Ist für diese etwa

$$\mathfrak{A}_x = 0; \quad \mathfrak{A}_y = 0; \quad \mathfrak{A}_z = f\left(t - \frac{1}{v} [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma]\right) = f(p),$$

so folgt aus (4; 4) zunächst

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= + \frac{1}{v^2} \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, & \mathfrak{H}_x &= - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v^2} \cos \beta \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \\ \mathfrak{E}_y &= + \frac{1}{v^2} \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, & \mathfrak{H}_y &= + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v^2} \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \\ \mathfrak{E}_z &= - \frac{1}{v^2} (1 - \cos^2 \gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, & \mathfrak{H}_z &= 0 \end{aligned} \right\} (7; a)$$

und hieraus nach (3)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v^4} \cos \alpha (1 - \cos^2 \gamma) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)^2, \\ \mathfrak{S}_y &= \frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v^4} \cos \beta (1 - \cos^2 \gamma) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)^2, \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{v^4} \cos \gamma (1 - \cos^2 \gamma) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)^2, \end{aligned} \right\} (7; b)$$

Welche der vier Größen  $\overline{W}_e^t$ ,  $\overline{W}_m^t$ ,  $\overline{W}^t$ ,  $\overline{\mathfrak{E}}^t$  wir nun tatsächlich messen, hängt von dem Meßinstrument ab, welches wir benutzen. ( ${}^{-t}$  über den angegebenen Größen bedeutet den zeitlichen Mittelwert, und zwar gemittelt über eine Zeit, die groß ist gegen die Schwingungsdauer des Lichtes.) Eine photographische Platte z. B. reagiert auf die elektrische Energiedichte, also auf  $\overline{W}_e^t$ . In anderen Fällen mißt man nur die von einer oder zwei Komponenten der elektrischen oder magnetischen Feldstärke herrührende Energiedichte. Wird die Intensität des Lichtes mit dem Bolometer gemessen, so erhält man eine Komponente des Pointingschen Vektors. In anderen Fällen wieder wird allein  $\overline{W}_m^t$  gemessen.

Wir erwähnen hier noch, wie man von den Werten  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , falls diese in komplexer Darstellung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i(\nu t + \nu_1)}; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i(\nu t + \nu_2)} \quad (7; 7)$$

gegeben sind, wo

$$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0(x, y, z) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0(x, y, z)$$

Amplitudenvektoren und

$$\nu_1 = \nu_1(x, y, z) \quad \text{und} \quad \nu_2 = \nu_2(x, y, z)$$

Phasenvektoren sind, zu den zeitlichen Mittelwerten gelangen kann. Bekanntlich umfaßt ja die komplexe Darstellung zwei reelle Darstellungen, nämlich

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos(\nu t + \nu_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin(\nu t + \nu_1) \quad (7; 8)$$

bzw.

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \cos(\nu t + \nu_2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin(\nu t + \nu_2). \quad (7; 9)$$

Der zeitliche Mittelwert  $\overline{\mathfrak{E}^2}^t$  ist in beiden Fällen  $\frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2$ . Den gleichen Wert erhält man auch, wenn man  $\mathfrak{E}$  mit seinem konjugiert komplexen Wert  $\overline{\mathfrak{E}}$  multipliziert und diesen Wert noch mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert, also

$$\text{Entsprechend ergibt sich} \quad \left. \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}^2}^t &= \frac{1}{2} \mathfrak{E} \overline{\mathfrak{E}} \\ \overline{\mathfrak{H}^2}^t &= \frac{1}{2} \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{H}} \end{aligned} \right\} \quad (7; 10)$$

also ein Vektor, dessen Richtung mit der Fortpflanzungsrichtung ( $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ) des Lichtes, den geometrisch-optischen Lichtstrahlen, zusammenfällt und dessen Betrag

$$\frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{\epsilon}}{v^4} (1 - \cos^2 \gamma) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right)^2$$

ist, wo noch  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$  ist.

Das gleiche Verfahren gilt natürlich auch für die Mittelwertbildung der Quadrate der einzelnen Komponenten, z. B.

$$\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_x. \quad (7; 11)$$

Bei der Berechnung des Pointingschen Vektors  $\mathfrak{S}$  haben wir Produkte aus je einer Komponente von  $\mathfrak{E}$  und einer von  $\mathfrak{H}$  zu bilden, z. B.  $\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z$  usw. Um den zeitlichen Mittelwert der Komponenten von  $\mathfrak{S}$  zu bilden, haben wir von diesen Produkten den zeitlichen Mittelwert zu bilden. Dies läßt sich, wie man leicht nachprüft, in Analogie zu (10) ausführen nach der Formel

$$\overline{\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y} = \frac{1}{4} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y). \quad (7; 12)$$

Haben wir irgendein optisches Problem unter Zugrundelegung der Größe  $u$  (oder  $\varphi$ ) behandelt, und wollen wir das Ergebnis mit der Erfahrung vergleichen, so haben wir zunächst den Übergang von  $u$  — das wir ja als eine Komponente des vom Zeitfaktor  $e^{i\nu t}$  befreiten Hertzschen Vektors  $\mathfrak{z}$  aufzufassen haben — zu den Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  zu machen und dann nach den vorstehenden Formeln hiervon den zeitlichen Mittelwert zu bilden. Wir erhalten so den Wert der „Intensität“. In vielen Fällen kann man sich aber diese etwas umständliche Rechnung ersparen und direkt den Wert  $|u|^2$  als Maß der Intensität ansehen, wenigstens immer dann, wenn man die Wellen in kleinen Bereichen als eben ansehen kann. Wir kommen darauf unten noch einmal zurück.

## § 8. Die Grenzbedingungen der elektromagnetischen Feldstärken

Haben wir zwei aneinandergrenzende Medien, in denen ein gemeinschaftliches elektromagnetisches Feld vorhanden ist, so müssen die Feldstärken an der Trennungsfläche beider Medien gewissen Grenzbedingungen genügen, die sich aus den Maxwell'schen Gleichungen leicht ableiten lassen.

Bezeichnen wir die beiden Medien durch <sup>(1)</sup> und <sup>(2)</sup> und die der Trennungsfläche parallelen Komponenten, die „Tangentialkomponenten“ von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , durch den Index  $p$ , die „Normalkomponenten“ durch den Index  $n$ , so gilt, wie wir hier nicht ausführlich beweisen wollen:

$$\mathfrak{E}_p^{(1)} = \mathfrak{E}_p^{(2)}; \quad \mathfrak{H}_p^{(1)} = \mathfrak{H}_p^{(2)}; \quad (8; 1)$$

$$\varepsilon_1 \mathfrak{E}_n^{(1)} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_n^{(2)}; \quad \mathfrak{H}_n^{(1)} = \mathfrak{H}_n^{(2)}; \quad (8; 2)$$

in Worten:

An der Grenzfläche zweier Medien sind die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  sowie die Normalkomponenten von  $\varepsilon\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  stetig.

Diese sechs Grenzbedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Es genügt vielmehr, vier unter ihnen, etwa diejenigen für die vier Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  oder je eine für eine der Tangentialkomponenten und diejenigen der Normalkomponenten von  $\varepsilon\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , zu erfüllen.

### § 9. Reflexion und Brechung einer ebenen Welle.

#### Die Fresnelschen Koeffizienten für Reflexion und Brechung

Wir wollen nun annehmen, eine ebene Welle falle auf die ebene Trennungsebene zweier Medien. Dabei müssen wir noch die Annahme machen, daß sowohl die Trennungsebene als auch die

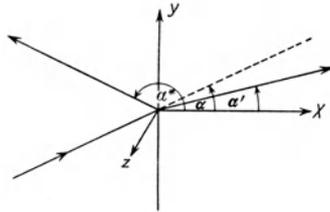


Abb. 1. Lage des Koordinatensystems

$yz$ -Ebene = Trennungsebene beider Medien,  $xy$ -Ebene = Einfallsebene,  
 $\alpha, \alpha', \alpha^*$  = Winkel des einfallenden, gebrochenen, reflektierten Strahles  
 gegen die  $+x$ -Achse

einfallende ebene Welle seitlich unbegrenzt sind. Wir wählen die Trennungsebene zur  $yz$ -Ebene ( $x = 0$ ); die  $x$ -Achse weise vom ersten zum zweiten Medium. Außerdem wollen wir die  $z$ -Achse so wählen, daß sie senkrecht zur Einfallsebene liegt. Die Einfallsebene sei also die  $xy$ -Ebene (Abb. 1). Die einfallende Welle sei linear polarisiert, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da wir ja jede beliebige ebene Welle, also z. B. „natürliches“ Licht, in zwei senkrecht zueinander polarisierte Wellen zerlegen können. Wir haben aber die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Polarisationssebene in der Einfallsebene (Fall I)

oder senkrecht zur Einfallsebene (Fall II) liegt (siehe den Schluß dieses Paragraphen). Dann gilt nach (6; 6) bzw. (6; 7):

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = 0; \quad \mathfrak{E}_y = 0; \quad \mathfrak{E}_z = g(p), \\ \mathfrak{H}_x = \sin \alpha \sqrt{\varepsilon} g(p); \quad \mathfrak{H}_y = -\cos \alpha \sqrt{\varepsilon} g(p); \quad \mathfrak{H}_z = 0 \end{array} \right\} \quad (9; 1)$$

bzw.

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = -\sin \alpha g(p); \quad \mathfrak{E}_y = \cos \alpha g(p); \quad \mathfrak{E}_z = 0, \\ \mathfrak{H}_x = 0; \quad \mathfrak{H}_y = 0; \quad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\varepsilon} g(p) \end{array} \right\} \quad (9; 2)$$

mit

$$p = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon} (x \cos \alpha + y \sin \alpha). \quad (9; 3)$$

Tritt die Welle ins zweite Medium ( $\varepsilon'$ ) ein, so kann sich neben  $\varepsilon$  sowohl die Richtung, also  $\alpha$ , als auch die Form der Funktion, also  $g$ , ändern. Die neuen Größen seien  $\varepsilon'$ ,  $\alpha'$ ,  $g'$ . Dann gelten im zweiten Medium die Formeln

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}'_x = 0; \quad \mathfrak{E}'_y = 0; \quad \mathfrak{E}'_z = g'(p'), \\ \mathfrak{H}'_x = \sin \alpha' \sqrt{\varepsilon'} g'(p'); \quad \mathfrak{H}'_y = -\cos \alpha' \sqrt{\varepsilon'} g'(p'); \quad \mathfrak{H}'_z = 0 \end{array} \right\} \quad (9; 4)$$

bzw.

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}'_x = -\sin \alpha' g'(p'); \quad \mathfrak{E}'_y = \cos \alpha' g'(p'); \quad \mathfrak{E}'_z = 0, \\ \mathfrak{H}'_x = 0; \quad \mathfrak{H}'_y = 0; \quad \mathfrak{H}'_z = \sqrt{\varepsilon'} g'(p') \end{array} \right\} \quad (9; 5)$$

mit

$$p' = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon'} (x \cos \alpha' + y \sin \alpha'). \quad (9; 6)$$

Es ist — wie man sich leicht überzeugt — nicht möglich, mit diesen beiden Wellen die Grenzbedingungen an der Trennungsfläche  $x = 0$  zu befriedigen. Wir müssen zu diesem Zwecke noch eine weitere ebene Welle im ersten Medium annehmen, deren Richtung durch  $\cos \alpha^*$ ,  $\sin \alpha^*$ ,  $0$  gegeben sei. Die Dielektrizitätskonstante ist wieder  $\varepsilon$ , die  $g$ -Funktion sei  $g^*$ . Dann gilt für diese Welle ( $\mathfrak{E}^*$ ,  $\mathfrak{H}^*$ ) ein analoger Ansatz wie (1) bzw. (2) mit

$$\varepsilon; \alpha^*, g^* \quad \text{und} \quad p^* = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon} (x \cos \alpha^* + y \sin \alpha^*).$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß

1.  $(\mathfrak{E}_y)_{x=0} + (\mathfrak{E}_y^*)_{x=0} = (\mathfrak{E}'_y)_{x=0}$ ,
2.  $(\mathfrak{H}_z)_{x=0} + (\mathfrak{H}_z^*)_{x=0} = (\mathfrak{H}'_z)_{x=0}$ ,
3.  $(\mathfrak{E}_z)_{x=0} + (\mathfrak{E}_z^*)_{x=0} = (\mathfrak{E}'_z)_{x=0}$ ,
4.  $(\mathfrak{H}_y)_{x=0} + (\mathfrak{H}_y^*)_{x=0} = (\mathfrak{H}'_y)_{x=0}$

ist. Man sieht, daß für (I) nur die Grenzbedingungen 3. und 4., für (II) nur die Grenzbedingungen 1. und 2. Bestimmungsgleichungen liefern, da jeweils die beiden anderen identisch erfüllt sind. Setzen wir in die Grenzbedingungen unsere Werte ein, so erhalten wir

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} g(p_0) + g^*(p_0^*) = g'(p'_0), \\ \sqrt{\varepsilon} [\cos \alpha g(p_0) + \cos \alpha^* g^*(p_0^*)] = \sqrt{\varepsilon'} \cos \alpha' g'(p'_0), \end{array} \right\} \quad (9; 7)$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha g(p_0) + \cos \alpha^* g^*(p_0^*) = \cos \alpha' g'(p'_0), \\ \sqrt{\varepsilon} [g(p_0) + g^*(p_0^*)] = \sqrt{\varepsilon'} g'(p'_0), \end{array} \right\} \quad (9; 8)$$

wo

$$\left. \begin{array}{l} p_0 = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon} y \sin \alpha; \quad p_0^* = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon} y \sin \alpha^*; \\ p'_0 = t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon'} y \sin \alpha'. \end{array} \right\} \quad (9; 9)$$

Da die Gleichungen (7) und (8) unabhängig von  $y$  gelten sollen, so muß

$$\sqrt{\varepsilon} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon} \sin \alpha^* = \sqrt{\varepsilon'} \sin \alpha' \quad (9; 10)$$

sein. Hieraus folgt:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Dies aber ist nach (5; 4)

gleich  $n'/n$ , d. h. es gilt das Snelliussche Brechungsgesetz. Ferner folgt aus (10)

$$\sin \alpha = \sin \alpha^*, \quad \text{d. h. } \alpha^* = \alpha \quad \text{oder} \quad = \pi - \alpha.$$

Von diesen Werten kann nur der zweite Bedeutung haben<sup>1)</sup>, da aus  $\alpha^* = \alpha$  auch  $\cos \alpha^* = \cos \alpha$  folgen würde, dies aber zwischen  $\cos \alpha$  und  $\cos \alpha'$  eine Beziehung liefern würde, die mit der bereits erhaltenen Beziehung zwischen  $\sin \alpha$  und  $\sin \alpha'$  unvereinbar ist. Die Gleichung  $\alpha^* = \pi - \alpha$  enthält das Reflexionsgesetz. Mit diesen Werten gehen die Bedingungsgleichungen über in

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} g + g^* = g', \\ \sqrt{\varepsilon} \cos \alpha (g - g^*) = \sqrt{\varepsilon'} \cos \alpha' g' \end{array} \right.$$

bzw.

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha (g - g^*) = \cos \alpha' g', \\ \sqrt{\varepsilon} (g + g^*) = \sqrt{\varepsilon'} g'. \end{array} \right.$$

Daraus folgt

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{g'}{g} = \frac{2\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha}{\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon'} \cos \alpha'} = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha' + \alpha)} = d_{\perp} = \frac{\mathfrak{G}'_z}{\mathfrak{G}_z}, \\ \frac{g^*}{g} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' + \alpha)} = r_{\perp} = \frac{\mathfrak{G}^*_z}{\mathfrak{G}_z} \end{array} \right\} \quad (9; 11)$$

<sup>1)</sup> Dies ist anschaulich sofort klar.

bzw.

$$(II) \left\{ \begin{aligned} \frac{g'}{g} &= \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha' + \alpha) \cos(\alpha' - \alpha)} = d_{||} = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}'_x{}^2 + \mathfrak{E}'_y{}^2}}{\sqrt{\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_y{}^2}}, \\ \frac{g^*}{g} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')} = r_{||} = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_x^{*2} + \mathfrak{E}_y^{*2}}}{\sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9; 12)$$

Die in das zweite Medium eintretende (gebrochene) Welle und die reflektierte Welle des ersten Mediums unterscheiden sich also von der einfallenden Welle, abgesehen von der Fortpflanzungsrichtung und der eventuellen Wellenlängenänderung (siehe unten), nur um einen Amplitudenfaktor, den wir für Fall I, elektrischer Vektor  $\perp$  zur Einfallsebene, durch  $d_{\perp}$  bzw.  $r_{\perp}$ , im Fall II, elektrische Feldstärke in ( $\parallel$ ) der Einfallsebene, durch  $d_{||}$  bzw.  $r_{||}$  bezeichnen. Die Gleichungen (11) bzw. (12) liefern die Werte von  $d_{\perp}$ ,  $r_{\perp}$  bzw.  $d_{||}$ ,  $r_{||}$ . Man bezeichnet diese Amplitudenfaktoren als Fresnelsche Brechungs- bzw. Reflexionskoeffizienten.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich die Koeffizienten auf das Amplitudenverhältnis der elektrischen Feldstärken beziehen. Für dasjenige der magnetischen Feldstärken ergeben sich natürlich etwas andere Werte, da dort ja noch das Verhältnis  $\frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$  mit einzubeziehen ist. Dadurch geht der Zähler von  $d_{\perp}$  und  $d_{||}$  über in  $\sin 2\alpha$ , so daß

$$(I) \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\mathfrak{D}'_x{}^2 + \mathfrak{D}'_y{}^2}}{\sqrt{\mathfrak{D}_x{}^2 + \mathfrak{D}_y{}^2}} &= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha' + \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (9; 13)$$

bzw.

$$(II) \left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}_z'^2}{\mathfrak{D}_z^2} &= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha' + \alpha) \cos(\alpha' - \alpha)}. \end{aligned} \right\}$$

Bei der vorstehenden Ableitung haben wir bereits vorausgesetzt, daß durch die Brechung und Spiegelung die Richtung der Polarisations-ebene nicht verändert wird (s. u.), daß die ebene Welle als solche erhalten bleibt, und daß die Fortpflanzungsrichtung der gebrochenen und der gespiegelten Welle ebenso wie die der einfallenden Welle in der  $xy$ -Ebene liegt. Diese letzte Aussage bildet den Inhalt des ersten Teiles des Brechungs- bzw. Spiegelungsgesetzes. Die Möglichkeit, mit den angegebenen Voraussetzungen die Grenzbedingungen zu erfüllen, rechtfertigt diese Annahmen.

Natürlich ließen sich die Gesetze der Reflexion und Brechung auch zunächst mit allgemeineren Ansätzen durchführen, aus denen sich dann durch die Grenzbedingungen die Annahmen (wenigstens teilweise) zwangsläufig als notwendig ergeben würden.

Durch die vorstehende Ableitung ist also nicht allein das Reflexions- und Brechungsgesetz der geometrischen Optik bestätigt, sondern wir haben darüber hinaus noch Beziehungen zwischen den Amplituden und dadurch auch zwischen den Intensitäten der einfallenden, gespiegelten und gebrochenen ebenen Wellen erhalten.

Da wir, wie wir unten noch sehen werden, jedes beliebige Strahlenbündel durch Überlagerung ebener Wellen — verschiedener Richtung, verschiedener Amplituden und verschiedener Phasenkonstanten — darstellen können, so ist durch vorstehende Ableitung auch im wesentlichen Spiegelung und Brechung einer beliebigen Welle an einer ebenen Grenzfläche gegeben. Reflexion und Brechung an einer gekrümmten Oberfläche sind dadurch indessen noch nicht erfaßt, doch ist meines Wissens diese Frage auch noch nicht explizit behandelt worden.

Gehen wir bei der Ableitung der Fresnelschen Formeln nicht von der allgemeinen Darstellung der ebenen Wellen aus, sondern setzen spezieller voraus, daß es sich um harmonische Wellen handelt,

daß also  $g = e^{i v \left[ t - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \right]}$  ist, so können wir aus der Tatsache, daß  $g$ ,  $g^*$ ,  $g'$  sich nur um multiplikative Faktoren unterscheiden, schließen, daß durch Spiegelung und Brechung an einer (ruhenden) Ebene die Frequenz nicht verändert wird. Wohl aber ändert sich bei der Brechung die Wellenlänge, denn diese ist ja gleich  $\frac{2 \pi v}{v}$ , also, da  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ , von  $\varepsilon$  abhängig. Es gilt

$$\lambda : \lambda' = v : v' = \sqrt{\varepsilon'} : \sqrt{\varepsilon} = n' : n. \quad (9; 13a)$$

Daß die Frequenz unverändert bleibt, ist physikalisch auch sofort erklärlich, da diese ja bei ruhenden Medien allein von dem Rhythmus abhängen kann, in dem die Lichtquelle „schwingt“, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und dadurch auch die Wellenlänge eine Funktion des jeweiligen Mediums ist. Bei bewegten Medien dagegen ist auch die Frequenz vom Medium abhängig.

Bei der vorstehend durchgeführten Ableitung beschränkten wir uns auf die beiden Fälle, daß die Polarisations Ebene — bzw. ||

der Einfallsebene liegt. Den allgemeineren Fall, daß die Polarisationssebene mit der Einfallsebene einen beliebigen Winkel bildet, können wir auf die beiden Fälle (I) und (II) zurückführen. Sei etwa  $\omega$  der Winkel der Polarisationssebene der einfallenden Welle gegen die  $z$ -Achse, so haben wir nur  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_I + \mathfrak{E}_{II}$  und  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_I + \mathfrak{H}_{II}$  zu setzen und

$$\begin{aligned} \text{in (I) für } g(p) \text{ zu schreiben } & \sin \omega g(p) = g_I(p), \\ \text{„ (II) „ } g(p) \text{ „ „ „ } & \cos \omega g(p) = g_{II}(p). \end{aligned}$$

Es wird dann nach (11) und (12)

$$g'_I = d_{\perp} g_I = d_{\perp} \sin \omega g = \sin \omega' g', \quad (9; 14)$$

$$g'_{II} = d_{\parallel} g_{II} = d_{\parallel} \cos \omega g = \cos \omega' g', \quad (9; 15)$$

$$g^*_I = r_{\perp} g_I = r_{\perp} \sin \omega g = \sin \omega^* g^*, \quad (9; 16)$$

$$g^*_{II} = r_{\parallel} g_{II} = r_{\parallel} \cos \omega g = \cos \omega^* g^*, \quad (9; 17)$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} g' &= g \sqrt{d_{\perp}^2 \sin^2 \omega + d_{\parallel}^2 \cos^2 \omega} = g d_{\omega}, \\ g^* &= g \sqrt{r_{\perp}^2 \sin^2 \omega + r_{\parallel}^2 \cos^2 \omega} = g r_{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (9; 18)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega' &= \frac{d_{\perp} \sin \omega}{\sqrt{d_{\perp}^2 \sin^2 \omega + d_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}}, \\ \cos \omega' &= \frac{d_{\parallel} \cos \omega}{\sqrt{d_{\perp}^2 \sin^2 \omega + d_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}}, \end{aligned} \right\} \quad (9; 19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega^* &= \frac{r_{\perp} \sin \omega}{\sqrt{r_{\perp}^2 \sin^2 \omega + r_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}}, \\ \cos \omega^* &= \frac{r_{\parallel} \cos \omega}{\sqrt{r_{\perp}^2 \sin^2 \omega + r_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}}. \end{aligned} \right\} \quad (9; 20)$$

Die Winkel  $\omega'$  und  $\omega^*$  geben die Richtung der Polarisationssebene der gebrochenen bzw. reflektierten Welle gegen die  $z$ -Achse an. Durch Brechung und Reflexion ändert sich also die Polarisationsrichtung, es findet eine Drehung der Polarisationssebene um den Winkel

$$\omega' - \omega = \arcsin \frac{(d_{\perp} - d_{\parallel}) \sin \omega \cos \omega}{\sqrt{d_{\perp}^2 \sin^2 \omega + d_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}} \quad (9; 21)$$

bzw.

$$\omega^* - \omega = \arcsin \frac{(r_{\perp} - r_{\parallel}) \sin \omega \cos \omega}{\sqrt{r_{\perp}^2 \sin^2 \omega + r_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}} \quad (9; 22)$$

statt. Nur in den Fällen, daß  $\omega = 0$  oder  $\omega = \frac{\pi}{2}$  (allgemeiner:  $\omega = m \cdot \frac{\pi}{2}$  mit  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) ist, ändert sich die Polarisationssebene nicht. Diese Fälle sind aber gerade die durch (II) bzw. (I) bezeichneten.

Aus (18) folgt noch für den Reflexions- und den Brechungskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} r_{\omega} &= \sqrt{r_{\perp}^2 \sin^2 \omega + r_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}, \\ d_{\omega} &= \sqrt{d_{\perp}^2 \sin^2 \omega + d_{\parallel}^2 \cos^2 \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (9; 23)$$

### § 10. Diskussion der Fresnelschen Formeln

Wir wollen die Fresnelschen Formeln noch kurz diskutieren. Wir fragen zunächst, ob die Energiebeziehung erfüllt ist, d. h. ob pro Flächeneinheit der Trennungsebene ebensoviel Energie von der reflektierten und gebrochenen Welle fortgeführt wird, wie durch die einfallende Welle zugestrahlt wird. Nun ist die in der Zeiteinheit der Flächeneinheit zugestrahlte Energie der einfallenden Welle gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{c}{4\pi} \overline{[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_x}^t = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} \overline{\mathfrak{E}^2}^t \cos \alpha. \quad (10; 1)$$

Entsprechend gilt für die pro Zeiteinheit von der Flächeneinheit reflektierte Energie

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} \overline{\mathfrak{E}^{*2}}^t |\cos \alpha^*| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} \overline{\mathfrak{E}^{*2}}^t \cos \alpha$$

und für die von der gebrochenen Welle fortgeführte Energie

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon'} \overline{\mathfrak{E}'^2}^t \cos \alpha'.$$

Es muß demnach sein

$$(\overline{\mathfrak{E}^2}^t - \overline{\mathfrak{E}^{*2}}^t) \sqrt{\varepsilon} \cos \alpha = \overline{\mathfrak{E}'^2}^t \sqrt{\varepsilon'} \cos \alpha',$$

und da nach (9; 11) bzw. (9; 12)

$$\overline{\mathfrak{E}^{*2}} = r^2 \overline{\mathfrak{E}^2}; \quad \overline{\mathfrak{E}'^2} = d^2 \overline{\mathfrak{E}^2}$$

und ferner nach (9; 10)

$$\sqrt{\varepsilon} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon'} \sin \alpha'$$

ist, so lautet die Energiebeziehung, deren Gültigkeit gefordert werden muß:

$$(1 - r^2) \sin \alpha' \cos \alpha = d^2 \sin \alpha \cos \alpha'. \quad (10; 2)$$

Man prüft leicht durch Einsetzen der Werte von  $r$  und  $d$  nach, daß diese Beziehungen sowohl für  $r_{\perp}$ ,  $d_{\perp}$ , als auch für  $r_{\parallel}$ ,  $d_{\parallel}$  erfüllt sind.

Kehren wir die Richtung des Strahlenganges um, lassen also aus dem zweiten Medium unter dem Einfallswinkel  $\alpha'$  eine ebene Welle auf die Trennungsebene auffallen, so vertauschen sich die Werte  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Dabei bleibt — vom Vorzeichen abgesehen — sowohl  $r_{\perp}$  als auch  $r_{\parallel}$  unverändert, so daß das Reflexionsvermögen der Trennungsebene bei Umkehr des Strahlenganges unverändert bleibt.

Ist  $\alpha' > \alpha$ , trifft also die ebene Welle aus dem „optisch dichteren“ Medium auf die Trennungsebene gegen das optisch dünnere Medium, so ist  $r_{\perp} > 0$ , dagegen  $r_{\parallel} < 0$ . Wir erhalten also, da

$$\begin{aligned} \sin \alpha^* &= \sin \alpha; & \cos \alpha^* &= -\cos \alpha, \\ \text{(I) } \mathfrak{E}_z^* &= + |r_{\perp}| \mathfrak{E}_z & \text{(II) } \mathfrak{E}_x^* &= - |r_{\parallel}| \mathfrak{E}_x, \\ \alpha' > \alpha & & \alpha' > \alpha & \mathfrak{E}_y^* = + |r_{\parallel}| \mathfrak{E}_y. \end{aligned} \quad (10; 3)$$

Ist dagegen  $\alpha' < \alpha$ , so ist zunächst  $r_{\perp} < 0$ ;  $r_{\parallel} > 0$  und demnach

$$\begin{aligned} \text{(I) } \mathfrak{E}_z^* &= - |r_{\perp}| \mathfrak{E}_z, & \text{(II) } \mathfrak{E}_x^* &= + |r_{\parallel}| \mathfrak{E}_x, \\ \alpha' < \alpha & & \alpha' < \alpha & \mathfrak{E}_y^* = - |r_{\parallel}| \mathfrak{E}_y. \end{aligned} \quad (10; 4)$$

Das aber heißt: Findet die Spiegelung im optisch dünneren Medium an der Trennungsfläche gegen das optisch dichtere Medium ( $\alpha' < \alpha$ ) statt, so ändert sich die Schwingungsrichtung der in der Trennungsebene liegenden  $z$ - bzw.  $y$ -Komponente des elektrischen Vektors plötzlich um  $180^\circ$ , da  $-1 = e^{i\pi}$  ist. Es tritt also in diesem Fall ein „Phasensprung“ vom Betrage  $\pi$  auf. Dies ist bei Spiegelung im dichteren Medium nach (3) nicht der Fall<sup>1)</sup>.

Für  $\alpha = 0^\circ$ , d. h. für senkrechten Einfall, wird  $\alpha' = 0$ . Die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten (9; 11) und (9; 12) nehmen hier unbestimmte Werte an. Nun ist aber wegen

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha'$$

<sup>1)</sup> Für die Komponente senkrecht zur Trennungsebene gilt das Umgekehrte.

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} d_{\perp} &= \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'}, \\ r_{\perp} &= \frac{n \cos \alpha - n' \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'}, \end{aligned} \right. \\
 \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{aligned} d_{\parallel} &= \frac{2n \cos \alpha}{(n \cos \alpha + n' \cos \alpha') \cos(\alpha' - \alpha)}, \\ r_{\parallel} &= \frac{n' \cos \alpha' - n \cos \alpha}{n' \cos \alpha' + n \cos \alpha} \cdot \frac{\cos(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha')}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{10; 5}$$

Setzen wir jetzt  $\alpha = \alpha' = 0$ , so wird

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} d_{\perp} &= \frac{2n}{n+n'}, \\ r_{\perp} &= \frac{n-n'}{n+n'}, \end{aligned} \right. \quad \left| \quad \text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} d_{\parallel} &= \frac{2n}{n+n'}, \\ r_{\parallel} &= -\frac{n-n'}{n+n'}. \end{aligned} \right. \right. \tag{10; 6}$$

Da bei senkrechtem Einfall die Lage der Einfallsebene unbestimmt wird, physikalisch also kein Unterschied mehr zwischen (I) und (II) sein kann, so scheinen  $r_{\perp}$  und  $r_{\parallel}$  sich zu widersprechen. Dies aber ist nicht der Fall, da ja nach (9; 2) in (II) bei  $\mathfrak{E}_y^*$  noch der Faktor  $\cos \alpha^* = -1$  hinzukommt. ( $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_x^*$  werden hier beide wegen  $\sin \alpha = 0$  gleich Null.) Wir bestätigen vielmehr nur, daß bei  $n' > n$  die Spiegelung mit einem Phasensprung vom Betrage  $\pi$  verbunden ist, während bei  $n' < n$  die Spiegelung ohne Phasensprung erfolgt.

Das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Energie ist bei senkrechtem Einfall

$$r^2 = \left( \frac{n' - n}{n' + n} \right)^2.$$

Im allgemeinen gilt:

$$\frac{(r_{\parallel})^2}{(r_{\perp})^2} = \frac{\cos^2(\alpha + \alpha')}{\cos^2(\alpha - \alpha')} \leq 1,$$

also  $r_{\parallel}^2 < r_{\perp}^2$ , d. h. bei jeder Spiegelung wird der Anteil, dessen Polarisationssebene in der Einfallsebene liegt, dessen elektrischer Vektor also  $\perp$  zur Einfallsebene schwingt, stärker reflektiert als der andere Anteil. Es findet daher mehr oder weniger stark eine

„partielle Polarisation“ bei jeder Reflexion statt, ausgenommen bei senkrechtem Einfall ( $\alpha = 0$ ) sowie bei „streifender Inzidenz“, d. h. bei  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , da dann wegen  $\alpha' = \frac{\pi}{2}$  wieder  $r_{\parallel}^2 = r_{\perp}^2$ . Ist dagegen  $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ , so ist  $\frac{r_{\parallel}^2}{r_{\perp}^2} = 0$ , d. h.  $r_{\parallel} = 0$ , während  $r_{\perp} = \sin(\alpha' - \alpha) \neq 0$ . Von dem einfallenden Licht wird in diesem Falle also nur diejenige Komponente reflektiert, deren Polarisations Ebene in der Einfallsebene liegt. Das reflektierte Licht ist hier vollständig linear polarisiert. Die angegebene Bedingung  $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$  ist wegen  $\cos \alpha = \sin \alpha'$  gleichbedeutend mit  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n'}{n}$  (Brewstersches Gesetz). Übrigens gilt dann auch  $\alpha^* = \frac{\pi}{2} + \alpha'$ , d. h.: Fällt die ebene Welle unter dem Polarisationswinkel ein, so stehen die reflektierten Lichtstrahlen auf den gebrochenen senkrecht.

Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt übrigens noch sofort, daß auch, abgesehen von den beiden Grenzfällen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , die gebrochene Welle stets partiell polarisiert ist. Vollständige Polarisation dagegen tritt für die gebrochene Welle nicht ein.

## Zweites Kapitel

# Allgemeine Beugungstheorie des Lichtes

### § 11. Huygenssches Prinzip. Fresnelsche Zonenkonstruktion

Bisher haben wir uns ausschließlich mit (ebenen) Wellen beschäftigt, die seitlich unbegrenzt waren. Tatsächlich aber haben wir es bei optischen Instrumenten und wohl allgemein bei fast allen optischen Problemen stets mit seitlich begrenzten Strahlenbündeln, mit seitlich begrenzten Wellen zu tun. Da ist es nun von großer Bedeutung, daß wir im sogenannten Huygensschen Prinzip ein Hilfsmittel haben, das es gestattet, auch seitlich begrenzte Wellen zu behandeln. Das Huygenssche Prinzip sagt aus, daß alle Flächenelemente einer zu einer (punktförmigen) Lichtquelle gehörenden Wellenfläche aufgefaßt werden können als neue Lichtquellen, die untereinander kohärent sind und in gleicher Phase schwingen, und von denen sich kohärente Kugelwellen (Elementarwellen) in den Raum hinaus ausbreiten mit einer Amplitude, die in Richtung der ursprünglichen Fortpflanzung des Lichtes (also senkrecht zur Wellenfläche) ihren größten Betrag hat. Senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sowie in all denjenigen Richtungen, die mit der Fortpflanzungsrichtung einen Winkel  $\geq \pi/2$  bilden, verschwindet die Amplitude. Bezeichnen wir das Flächenelement der betreffenden Wellenfläche  $W$  mit  $d\sigma$ , und ist  $r$  der Abstand des durch die Wellenfläche von der Lichtquelle getrennten Aufpunktes  $P$ , in dem wir die Lichterscheinungen berechnen wollen, von dem Flächenelement  $d\sigma$  der Wellenfläche, so ist

$$\varphi_P = e^{i\nu t} \int_W u_W \frac{e^{-ikr}}{r} K d\sigma, \quad (11; 1)$$

wo  $u_W$  die Lichtschwingung auf der Wellenfläche  $W$  und  $K$  ein Faktor ist, der von dem Winkel  $\varepsilon$  gegen die Normale von  $d\sigma$  ab-

hängt und für  $\varepsilon = 0$  den Wert 1, für  $\varepsilon \geq \pi/2$  den Wert 0 hat. Ist  $u_W$  für die ganze Wellenfläche konstant, so kann es natürlich vor das Integral gesetzt werden. Handelt es sich z. B. um die Wellenfläche einer von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Kugelwelle und ist  $R$  der Abstand dieser Wellenfläche von dem leuchtenden Punkte, so gilt

$$u_W = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

und die obige Formel (1) lautet

$$\varphi_P = e^{i\nu t} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_W K \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma. \quad (11; 2)$$

Die Einhüllende (Envelope) der Wellenflächen dieser Elementarwellen ist identisch mit der Wellenfläche des von der wirklichen Lichtquelle ausgesandten Lichtes (Abb. 2).

Doch nicht nur jedes Flächenelement einer Wellenfläche, sondern ganz allgemein jedes Flächenelement einer beliebigen Fläche kann in diesem Sinne als neue Lichtquelle, als Quellpunkt einer neuen Kugelwelle angesehen werden (Abb. 3). Bei dieser Verallgemeinerung besitzen jedoch die einzelnen „Lichtquellen“ eine Phasendifferenz, die der Phasendifferenz des in den einzelnen Flächenelementen gleichzeitig eintreffenden Lichtes entspricht.

Wir haben in diesem Falle zu setzen

$$\varphi_P = e^{i\nu t} \int_F u_F \frac{e^{-ikr}}{r} K^* d\sigma, \quad (11; 3)$$

wo  $K^*$  wieder ein Faktor ist, der aber jetzt in komplizierterer Weise vom Winkel zwischen  $r$  und der Normalen der Integrationsfläche  $F$  abhängt.

Das Huygenssche Prinzip ist jedoch nur eine Hypothese, die sich nicht beweisen läßt, die aber von Fresnel in seiner berühmten „Zonenkonstruktion“, auf die wir hier nicht ausführlich eingehen wollen, in Verbindung mit dem Interferenzprinzip weitgehend als berechtigt erwiesen wurde. Bekanntlich weist Fresnel nach, daß sich die Lichterscheinung in irgendeinem Punkte  $P$ , der von der Lichtquelle durch einen mit kreisförmiger Öffnung versehenen Schirm (Blende) getrennt ist, ergibt, wenn man nach dem Huygensschen Prinzip jedes Flächenelement der Blendenöffnung als neue Licht-

quelle mit einer ihrem Abstand von der wirklichen Lichtquelle entsprechenden Phase behandelt. Hierbei wird die Blendenöffnung so in Fresnelsche Zonen eingeteilt, daß alle Punkte der Begrenzungslinien einer Zone vom Aufpunkte gleiche Entfernung haben, die

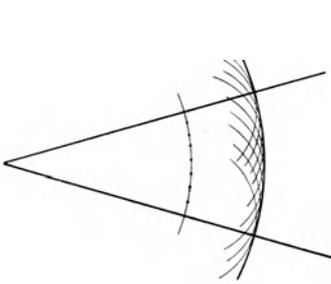


Abb. 2. Huygenssches Prinzip  
Die wirkliche Wellenfläche ist Einhüllende der Elementarwellen

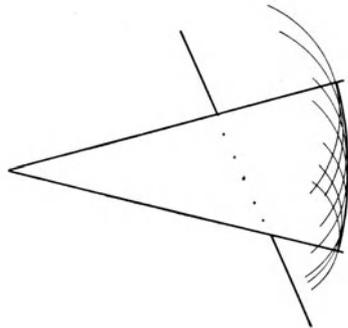


Abb. 3. Erweitertes Huygenssches Prinzip  
Die wirkliche Wellenfläche ist wieder Einhüllende der Elementarwellen. Die zugehörigen „Quellen“ aber schwingen hier in verschiedener Phase

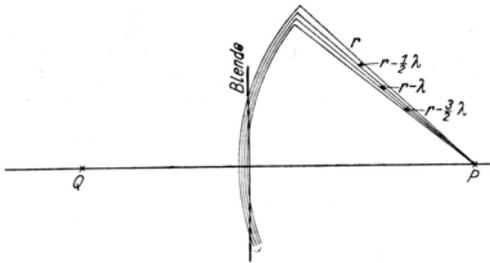


Abb. 4. Zur Fresnelschen Zonenkonstruktion  
Die Abbildung ist um  $QP$  rotiert zu denken

Entfernungen der einzelnen aufeinanderfolgenden Zonenbegrenzungen vom Aufpunkte sich aber um  $\frac{\lambda}{2}$  unterscheiden (Abb. 4). Die von den einzelnen Flächenelementen ausgehenden Elementarwellen interferieren miteinander. Durch Integration über die ganze Öffnung der Blende erhält man so die Lichtschwingung im Aufpunkte  $P$

ihrem Betrage nach in voller Übereinstimmung mit dem Werte, der sich bei direkter Ausbreitung des Lichtes von der wirklichen Lichtquelle bis  $P$  ergibt, jedoch mit einer Phasendifferenz vom Betrage  $\frac{\pi}{2}$ , um die sich diese beiden Werte unterscheiden. Außerdem aber liefert die Fresnelsche Zonenkonstruktion auch bereits eine Erklärung für die im Schattenraum auftretenden „Beugungserscheinungen“. Diese bestehen in einer Vergrößerung des Querschnittes des Strahlenbündels gegenüber demjenigen, der sich auf Grund rein geometrischer Überlegungen ergibt, und außerdem darin, daß jener „Lichtfleck“ im geometrisch-optischen Schattenraum noch von einer größeren Zahl heller Ringe umgeben ist, die in ihrer Intensität nach außen hin schnell abnehmen. Sie finden ihre Erklärung darin, daß sich die Elementarwellen, die ja ungehindert in den Schattenraum hineingelangen, durch Interferenz an den verschiedenen Stellen verschieden stark gegenseitig auslöschen.

Der Unterschied zwischen dem geometrischen und physikalischen Querschnitt macht sich besonders deutlich bemerkbar, wenn die Blendenöffnung hinreichend klein ist. Je kleiner sie ist, um so größer wird der zentrale Lichtfleck. Gleichzeitig ändert sich auch das Verhältnis der Intensität des zentralen Fleckes zu derjenigen der ihn umgebenden Lichtlinien zugunsten der letzteren.

Ist das Strahlenbündel konvergent (z. B. eine konvergierende Kugelwelle), so gibt es auch bei größerer Blendenöffnung Stellen, an denen jener Querschnittsunterschied sehr deutlich in die Erscheinung tritt, nämlich an den Stellen, an denen der geometrisch-optische Querschnitt des Bündels selbst klein ist, d. h. in der Nähe des Brenn- (Bild-) Punktes bzw. der Brenn- (Bild-) Linien.

## § 12. Die Kirchhoffsche Formel

Wesentlich wichtiger als dies Huygens-Fresnelsche Prinzip der Elementarwellen, das wir unten noch in einzelnen speziellen Fällen anwenden werden, ist die von Kirchhoff gegebene Formel, die es gestattet, die Lichtschwingung in jedem Aufpunkte  $P$  zu berechnen, der innerhalb einer die Lichtquelle selbst nicht enthaltenden geschlossenen Fläche liegt, sobald man auf jener Fläche die Werte der betreffenden Schwingungsfunktion und ihres „Gradienten“, d. h. die nach der inneren Normalen jener Fläche genommene erste Ab-

leitung der Funktion [s. (1; 7)], kennt. Allerdings setzt dies bereits die Kenntnis der Funktion selbst voraus, so daß die Formel eigentlich wertlos sein sollte. Tatsächlich aber hat sich in der Praxis gezeigt, daß man mit einer angenäherten Kenntnis jener Funktionswerte und ihrer Gradienten auf der betreffenden Fläche bereits völlig ausreicht. Dies ist absolut keine Selbstverständlichkeit, läßt sich auch nicht beweisen, sondern erweist seine Berechtigung allein durch den Erfolg.

Die Kirchhoffsche Formel, die wir jetzt ableiten wollen, folgt aus dem „Greenschen Satz“. Dieser Greensche Satz sagt aus: Sind  $u$  und  $v$  zwei eindeutige, von  $x, y, z$  abhängende Funktionen, die in einem Raume  $V$ , begrenzt von einer Fläche  $\sigma$ , mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind, ist ferner  $dV$  das Volumenelement von  $V$  und  $d\sigma$  das Flächenelement von  $\sigma$ , und ist  $\mathbf{n}$  die nach innen, zum Aufpunkte  $P$  hin, gerichtete Normale der Begrenzungsfläche  $\sigma$ , so gilt identisch

$$\int_V (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dV = - \int_{\sigma} \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Wenden wir diese Formel an auf zwei Funktionen  $u$  und  $v$ , von denen wir voraussetzen, daß sie Lösungen der Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (12; 1)$$

sind, so verschwindet der Integrand des Raumintegrals, und wir erhalten

$$\int_{\sigma} \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma = 0. \quad (12; 2)$$

Wählen wir nun für  $v$  die Funktion

$$v = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

wo  $r$  den Abstand eines im Raume  $V$  gelegenen Punktes  $P$  von  $dV$  bedeutet, so ist  $v$  zwar Lösung der Gleichung (1), ist aber im Punkte  $P$  nicht, wie außerdem vorausgesetzt war, endlich und stetig. Schließen wir aber den Punkt  $P$  durch eine kleine um  $P$  als Mittelpunkt gelegte Kugel von  $V$  aus, so ist auch die Bedingung der Endlichkeit und Stetigkeit für  $v$  überall in  $V$  erfüllt, unsere Formel (2) also anwendbar. Wir haben nur noch zu beachten, daß sich jetzt die Oberfläche von  $V$  aus  $\sigma$  und der kleinen Kugel  $\sigma_P$  um  $P$  zusammen-

setzt, daß also außer über  $\sigma$  noch über die Kugel um  $P$  zu integrieren ist. Die Integration über diese Kugel aber liefert, wenn man ihren Radius immer abnehmen läßt, da  $\sigma_P = 4\pi r^2$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -iku_P \int_{\sigma_P} \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma - u_P \int_{\sigma_P} \frac{e^{-ikr}}{r^2} d\sigma - \frac{\partial u_P}{\partial \Pi} \int_{\sigma_P} \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma \right\} = -4\pi u_P,$$

so daß wir erhalten

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ u \frac{\partial}{\partial \Pi} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial \Pi} \right] d\sigma. \quad (12; 3)$$

Für das zweidimensionale Problem, das z. B. bei Zylinderwellen vorliegt, ergibt sich in Analogie zu (3), wie hier nicht näher abgeleitet werden soll,

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[ u \frac{\partial}{\partial \Pi} Z_0(kr) - Z_0(kr) \frac{\partial u}{\partial \Pi} \right] ds, \quad (12; 4)$$

wo

$$Z_0(kr) = \int_0^{\infty} e^{-ikr \mathfrak{C}0\} \alpha d\alpha \quad (12; 5)$$

bis auf den Zahlenfaktor  $-\frac{2i}{\pi}$  die sogenannte Hankelsche Funktion nullter Ordnung ist, die mit den Besselschen Funktionen

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(z \mathfrak{C}0\} \alpha) d\alpha, \quad (12; 6)$$

$$K_0(z) = \int_0^{\infty} \cos(z \mathfrak{C}0\} \alpha) d\alpha \quad (12; 7)$$

im Zusammenhang steht. Es ist

$$Z_0(kr) = K_0(kr) - \frac{\pi}{2} i J_0(kr),$$

$Z_0(kr)$  ist Lösung der Schwingungsgleichung,  $Z_0(kr)e^{i\pi t}$  also Lösung der Wellengleichung. Sie entspricht einer (periodischen) Lichtlinie, wie hier ohne Ableitung nur erwähnt sei. In (4) bedeutet  $ds$  das Linienelement der Begrenzungslinie, die den Aufpunkt  $P$ , aber keine Lichtquellen im Innern enthält, und  $r$  die Entfernung des Aufpunktes  $P$  von  $ds$ .

Im Anschluß an M. v. Laue, Wellenoptik<sup>1)</sup>, geben wir hier noch wieder, wie man von der Formel (3), die ja nur für in der Zeit harmonische Funktionen gilt, zu einer Formel gelangen kann, die für beliebig von der Zeit abhängende Funktionen gültig ist. Bezeichnen wir diese Funktionen wie bisher durch  $\varphi$ , so können wir  $\varphi$  als ein Fouriersches Integral ansetzen.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\nu e^{i\nu t} d\nu \left( = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t') e^{i\nu(t-t')} d\nu dt' \right).$$

wo

$$u_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t') e^{-i\nu t'} dt'.$$

$\varphi(t)$  setzen wir als Lösung der Wellengleichung voraus, so daß  $\varphi(t) e^{-i\nu t}$  — und demnach auch  $u_\nu$  — eine Lösung der Schwingungsgleichung ist. Wir können demnach auf jedes  $u_\nu$  für  $(u_\nu)_P$  unsere Formel (3) anwenden.

$$(u_\nu)_P = \frac{1}{4\pi} \int_0 \left[ u_\nu \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-i\nu r}}{r} \right) - \frac{e^{-i\nu r}}{r} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit  $e^{i\nu t}$ , beachten weiter, daß  $k = \frac{\nu}{v}$  ist, und integrieren wir dann über  $d\nu$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u_\nu \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\nu(t-\frac{r}{v})}}{r} \right) d\nu \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu(t-\frac{r}{v})}}{r} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\nu \right] d\sigma \end{aligned} \right\} (12; 8)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0 \left[ \frac{\delta}{\delta n} \left( \frac{\varphi(t-\frac{r}{v})}{r} \right) - \frac{1}{r} f\left(t-\frac{r}{v}\right) \right] d\sigma,$$

<sup>1)</sup> M. v. Laue, Enc. d. math. Wiss., V, 359 (Heft 24; Artikel „Wellenoptik“, S. 419).

wo  $f = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , also  $f\left(t - \frac{r}{v}\right) = \left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial n}\right)_{t=t-\frac{r}{v}}$  und  $\frac{\delta}{\delta n}$  andeuten soll, daß die Differentiation nach  $n$  nur so weit vorgenommen werden soll, wie  $r$  explizit auftritt, daß also

$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n},$$

während  $x, y, z$  als Konstante bei der Differentiation zu behandeln sind.

In ähnlicher Art läßt sich auch die für das ebene Problem gültige Formel (4) verallgemeinern, doch brauchen wir hierauf nicht näher einzugehen.

Die in Formel (8) auftretenden Argumente  $t - \frac{r}{v}$  zeigen (wie dies physikalisch selbstverständlich ist), daß der Wert der Funktion  $\varphi$  im Aufpunkte  $P$  zur Zeit  $t$  von den Werten abhängt, die  $\varphi$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  auf der Begrenzung  $\sigma$  des Bereiches  $V$  zur Zeit  $t - \frac{r}{v}$  (und nicht zur Zeit  $t$ ) annehmen, wobei  $\frac{r}{v}$  gerade die Zeit ist, die eine von  $d\sigma$  ausgehende Kugelwelle gebraucht, um zum Punkte  $P$  zu gelangen.

Da wir uns bei unseren nachfolgenden Untersuchungen stets auf in der Zeit harmonische Wellen beschränken werden, so werden wir unseren Betrachtungen stets die einfachere Formel (3) für  $u_P$  zugrunde legen.

Wir erwähnten schon oben, daß eine Schwierigkeit in der Anwendung dieser mathematisch strengen Kirchhoffschen Formel darin besteht, daß man auf der Begrenzungsfläche  $\sigma$  sowohl die Werte von  $u$  als auch die von  $\frac{\partial u}{\partial n}$  kennen muß, was aber eigentlich schon die Kenntnis der gesuchten Funktion  $u$  voraussetzt. Auch ist es nicht möglich,  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  auf  $\sigma$  willkürlich, voneinander unabhängig vorzuschreiben, da die Vorgabe von  $u$  bereits die Werte  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , und umgekehrt, eindeutig festlegt.

Kirchhoff machte nun die Annahme, daß in der Öffnung einer Blende die Größen  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  diejenigen Werte annehmen, die sie bei ungehinderter Ausbreitung des Lichtes an jener Stelle haben,

daß aber an der der Lichtquelle abgewandten Seite der undurchsichtigen Teile der Blende sowohl  $u$  als auch  $\frac{\partial u}{\partial n}$  den Wert Null haben. Zwar ist hierdurch die Voraussetzung der Stetigkeit durchbrochen, trotzdem liefert die Formel die richtigen Werte von  $u$  für alle Punkte im Innern des durch die Blende von der Lichtquelle getrennten Raumes  $V$ , außer in der unmittelbaren Nachbarschaft der Blende selbst.

Im Gegensatz zu dem Huygens-Fresnelschen Prinzip, bei dem die Integration nur über die Öffnung der Blende (oder genauer über den Teil der Wellenfläche, der innerhalb des vom Aufpunkte an die Wellenfläche gelegten Berührungskegels liegt) zu erstrecken ist, ist bei der Kirchhoffschen Formel über die ganze den Raum  $V$  begrenzende Oberfläche  $\sigma$  zu integrieren. (Einen Teil dieser Oberfläche kann man stets ins Unendliche verlegen, was hier nur erwähnt sei.)

Wendet man die Kirchhoffsche Formel auf den Fall an, daß in den Strahlengang des von einer punktförmigen Lichtquelle  $O$  ausgehenden Lichtes eine Blende mit etwa kreisförmiger Öffnung eingeschaltet wird, so erhält man im wesentlichen das Resultat, das sich aus dem Huygens-Fresnelschen Prinzip ergibt, jetzt aber mit der richtigen Phase, wie wir dies schon oben betonten.

Es sei  $r_0$  der Abstand des Flächenelements  $d\sigma$  unserer Blendenöffnung  $B$  von der punktförmigen Lichtquelle,  $r$  der Abstand des Aufpunktes  $P$  von  $d\sigma$ . Dann gilt nach der Kirchhoffschen Annahme auf  $B$  in allen Punkten der Öffnung

$$u_B = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}; \quad \frac{\partial u_B}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right),$$

an allen das Licht abblendenden Teilen  $B'$  dagegen

$$u_{B'} = 0; \quad \frac{\partial u_{B'}}{\partial n} = 0.$$

Die Anwendung von Formel (3) liefert dann für  $u_P$

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r r_0} \left\{ ik [\cos(n, r) - \cos(n, r_0)] \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{r} \cos(n, r) - \frac{1}{r_0} \cos(n, r_0) \right] \right\} d\sigma. \quad (12; 9)$$

Nehmen wir hier  $r$  und  $r_0$  als groß gegen die Wellenlänge des Lichtes, so ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r}$$

und auch

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r_0}$$

und wir können, solange  $\cos(\mathfrak{n}, r) \neq \cos(\mathfrak{n}, r_0)$  ist, die zweite eckige Klammer gegen die erste vernachlässigen. Wir erhalten dann

$$u_P = \frac{ik}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{rr_0} [\cos(\mathfrak{n}, r) - \cos(\mathfrak{n}, r_0)] d\sigma. \quad (12; 10)$$

Diese Formel ist formal identisch mit der Huygensschen Formel (11; 2) bzw. (11; 3), bis auf den Faktor  $i$ , der wegen  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  bewirkt, daß die Phase in  $u_P$  sich richtig ergibt.

Außerdem ersieht man, daß der in der mathematischen Formulierung des Huygensschen Prinzips auftretende Faktor  $K$  (bzw.  $K^*$ ) den Wert

$$\frac{k}{4\pi} [\cos(\mathfrak{n}, r) - \cos(\mathfrak{n}, r_0)] = \frac{1}{2\lambda} [\cos(\mathfrak{n}, r) - \cos(\mathfrak{n}, r_0)] \quad (12; 11)$$

annimmt, wo  $\mathfrak{n}$  wie zuvor die nach dem Aufpunkt hin gerichtete Normale der Wellenfläche bzw. der Blendenfläche ist.  $K$  ( $K^*$ ) ist also proportional  $1/\lambda$ . Ist die Blendenöffnung klein gegen die Entfernung des leuchtenden Punktes und auch gegen die Entfernung des Aufpunktes und liegen beide in der Nähe des Mittelotes der Blende, so ist angenähert  $\cos(\mathfrak{n}, r) = -\cos(\mathfrak{n}, r_0) = 1$  und es wird

$$K(= K^*) = \frac{1}{\lambda}. \quad (12; 12)$$

In (10) treten  $r$  und  $r_0$  völlig gleichberechtigt auf, und es ergibt sich, wenn wir  $P$  als leuchtenden Punkt und  $O$  als Aufpunkt wählen und beachten, daß jetzt  $\mathfrak{n}$  die vom leuchtenden Punkt fortweisende Normale ist, bei Vertauschen von  $P$  und  $O$  also  $\mathfrak{n}$  durch  $-\mathfrak{n}$  zu ersetzen ist, genau der gleiche Ausdruck wie (10). Es gilt daher der Reziprozitätssatz, daß eine in einem Punkte  $O$  befindliche Lichtquelle in einem Punkte  $P$  die gleiche Helligkeit

hervorrufft, die in  $O$  vorhanden ist, wenn eine gleiche Lichtquelle sich in  $P$  befindet. In dem Ausdruck (10) sind noch keinerlei einschränkende Annahmen über Form und freie Öffnung der Blende eingeführt, die Öffnung von  $B$  kann also auch allseitig unbegrenzt sein. Der Reziprozitätssatz gilt daher auch bei völlig ungehinderter Ausbreitung des Lichtes.

### § 13. Fraunhofersche und Fresnelsche Beugungserscheinungen

Nehmen wir außer den für die Gültigkeit der Formel (12; 10) vorausgesetzten Annahmen noch an, daß die Blende zwar groß gegen die Wellenlänge, aber klein gegen  $r$  und  $r_0$  ist, so ist angenähert

$$\cos(u, r) = -\cos(u, r_0) = \text{const} = \cos \delta.$$

Außerdem können wir dann im Nenner  $r$  und  $r_0$  als konstant ansehen. Im Exponenten der  $e$ -Funktion dagegen ist dies nicht erlaubt, da es dort ja nicht auf die prozentuale Änderung, sondern auf die Veränderlichkeit von  $k(r + r_0)$  relativ zu  $2\pi$  ankommt.

Wir entwickeln den Exponenten von  $e$  in eine Reihe. Es seien  $x, y, z$  die Koordinaten des Aufpunktes,  $x_0, y_0, z_0$  die der Lichtquelle und  $\xi = 0, \eta, \zeta$  die Koordinaten von  $d\sigma$ . Dann ist

$$r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2}.$$

Ferner sei

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \quad \text{und} \quad \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = R_0.$$

Es war  $\eta, \zeta$  als klein gegen  $r$  und  $r_0$  und daher auch gegen  $R$  und  $R_0$  vorausgesetzt. Dann können wir die Wurzeln entwickeln und erhalten

$$r = R - \frac{\eta y + \zeta z}{R} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2R} - \frac{(\eta y + \zeta z)^2}{2R^3},$$

$$r_0 = R_0 - \frac{\eta y_0 + \zeta z_0}{R_0} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2R_0} - \frac{(\eta y_0 + \zeta z_0)^2}{2R_0^3},$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\frac{y}{R} = \beta; \quad \frac{z}{R} = \gamma; \quad \frac{y_0}{R_0} = -\beta_0; \quad \frac{z_0}{R_0} = -\gamma_0 \quad (13; 1)$$

gesetzt wird,

$$r = R - \eta \beta - \xi \gamma + \frac{\eta^2 + \xi^2}{2R} - \frac{(\eta \beta + \xi \gamma)^2}{2R}, \quad (13; 2)$$

$$r_0 = R_0 + \eta \beta_0 + \xi \gamma_0 + \frac{\eta^2 + \xi^2}{2R_0} - \frac{(\eta \beta_0 + \xi \gamma_0)^2}{2R_0}. \quad (13; 3)$$

$\beta, \gamma$  sind demnach die Richtungskosinus des Radiusvektors  $\vec{CP}$  gegen die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse und  $\beta_0, \gamma_0$  diejenigen von  $\vec{OC}$  gegen die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse.

Wir erhalten

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cos \delta \frac{e^{-ik(R+R_0)}}{RR_0} \int \int e^{ik\{\eta(\beta-\beta_0) + \xi(\gamma-\gamma_0) - f(\eta, \xi)\}} d\eta d\xi, \quad (13; 4)$$

wo  $f(\eta, \xi)$  eine in  $\eta, \xi$  quadratische Funktion ist. Es ist

$$f(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \left[ (\eta^2 + \xi^2) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) - \frac{(\eta \beta + \xi \gamma)^2}{R} - \frac{(\eta \beta_0 + \xi \gamma_0)^2}{R_0} \right]. \quad (13; 5)$$

Da  $kf(\eta, \xi)$  für  $\eta = 0; \xi = 0$  gleich Null wird, so ist die Veränderlichkeit von  $kf(\eta, \xi)$  im Integrationsgebiet durch den Maximalwert, den  $kf(\eta, \xi)$  annehmen kann, gegeben. Damit  $kf(\eta, \xi)$  vernachlässigt werden kann, ist notwendig, daß die Veränderlichkeit, also in diesem Falle der Maximalwert  $\ll 2\pi$ , d. h.  $f(\eta, \xi) \ll \lambda$  ist.

Dies ist der Fall, wenn

$$R\lambda \gg (\eta^2 + \xi^2)_{\max} \quad \text{und gleichzeitig} \quad R_0\lambda \gg (\eta^2 + \xi^2)_{\max};$$

aber auch dann, wenn

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} = 0, \quad \text{d. h.} \quad R = -R_0$$

und gleichzeitig

$$\beta^2, \gamma^2, \beta_0^2, \gamma_0^2 \ll \frac{R\lambda}{(\eta^2 + \xi^2)_{\max}},$$

d. h. leuchtender Punkt und Aufpunkt in der Nähe der  $x$ -Achse liegen.

Da in den Bedingungen  $(\eta^2 + \xi^2)_{\max} \ll R\lambda$  und auch  $\ll R_0\lambda$  rechts die sehr kleine Größe  $\lambda$  auftritt, so heißt dies, daß die Blendenöffnung sehr klein sein muß, sowohl gegen die Entfernung der Lichtquelle als auch gegen die Entfernung des Aufpunktes vom

Mittelpunkt der Blendenöffnung. Unter den angegebenen einschränkenden Voraussetzungen erhalten wir

$$u_P = \text{const} \int \int e^{i k [\eta (\beta - \beta_0) + \xi (\gamma - \gamma_0)]} d\eta d\xi. \quad (13; 6)$$

In diesem Falle, d. h. wenn im Exponenten die quadratischen Glieder in  $\eta$ ,  $\xi$  vernachlässigt werden können, sprechen wir von „Fraunhoferschen Beugungserscheinungen“. Ist die Berücksichtigung der quadratischen Glieder erforderlich, so haben wir es mit „Fresnelschen Beugungserscheinungen“ zu tun.

### § 14. Beugung an kreisförmiger Öffnung

Als Anwendungsbeispiel behandeln wir hier die Beugung an einer kreisförmigen Blende unter der Voraussetzung, daß der leuchtende Punkt und ebenso der Aufpunkt, in dem wir die Lichtintensität berechnen wollen, sehr weit von der Blendenebene entfernt ist. Dann können wir die quadratischen Glieder vernachlässigen. Wir betrachten also allein die Fraunhofersche Beugung, für die (13; 6) gilt. Um die Ausführung der Integration zu vereinfachen, wählen wir in der Blendenebene Polarkoordinaten  $\varrho$ ,  $\omega$ , so daß

$$\begin{aligned} \eta &= \varrho \cos \omega; & \xi &= \varrho \sin \omega, \\ d\sigma &= d\eta d\xi = \varrho d\varrho d\omega. \end{aligned}$$

Setzen wir außerdem zur Abkürzung

$$k(\beta - \beta_0) = \sigma \cos \omega'; \quad k(\gamma - \gamma_0) = \sigma \sin \omega',$$

so geht (13; 6) über in

$$\begin{aligned} u_P &= \text{const} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i \varrho \sigma \cos(\omega - \omega')} \varrho d\varrho d\omega \\ &= \text{const} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i \varrho \sigma \cos \omega} \varrho d\varrho d\omega, \end{aligned}$$

wo  $a$  den Radius der Blendenöffnung angibt. Nun ist (A; 16)

$$\int_0^{2\pi} e^{i \varrho \sigma \cos \omega} d\omega = 2\pi J_0(\varrho \sigma),$$

wo  $J_0(\varrho\sigma)$  die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung ist. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \int_0^a J_0(\varrho\sigma) \varrho d\varrho &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\sigma a} J_0(\varrho\sigma) \varrho \sigma d(\varrho\sigma) \\ &= \frac{a}{\sigma} J_1(\sigma a), \end{aligned}$$

wo  $J_1(\sigma a)$  die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung ist. Wir erhalten also

$$u_P = \text{const} \cdot 2\pi \frac{a}{\sigma} J_1(\sigma a) = \text{const} \cdot \pi a^2 \cdot \frac{2J_1(\sigma a)}{\sigma a}. \quad (14; 1)$$

Um dies Resultat mit Beobachtungen vergleichen zu können, hätten wir  $u_P e^{i\gamma t}$  als eine Komponente des Hertz'schen Vektors  $\mathfrak{J}$  anzusehen, nach den oben angegebenen Rechenregeln (4; 4) bzw. (4; 5) von  $\mathfrak{J}$  zu den Feldvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  überzugehen und die Intensität  $I$  zu berechnen. In erster Näherung ist  $I$  proportional zu  $|u_P|^2$ , so daß wir erhalten

$$I_P = \text{const} \cdot \pi^2 a^4 \left( \frac{2J_1(\sigma a)}{\sigma a} \right)^2 \quad (14; 2)$$

Um die physikalische Bedeutung des hier als Argument der Besselschen Funktion auftretenden Produktes  $\sigma a$  besser zu erkennen, drücken wir  $\sigma$  in den ursprünglichen Koordinaten aus. Es ist

$$\sigma a = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{(\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{\left(\frac{y}{R} - \frac{y_0}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0}\right)^2}.$$

Nehmen wir nun an, daß sich der leuchtende Punkt auf der  $x$ -Achse, der Mittelpunktssenkrechten der Blendenöffnung, befindet, so wird

$$\sigma a = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{R}. \quad (14; 3)$$

Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel, den die Verbindungslinie: „Mittelpunkt der Blendenöffnung  $\rightarrow$  Aufpunkt“ mit der  $x$ -Achse bildet, so ist

$$\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{1}{R} \sqrt{y^2 + z^2} = \sin \alpha,$$

so daß

$$\sigma a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha. \quad (14; 4)$$

$\sigma a$  hat die Dimension eines Winkels. Lassen wir  $a$  unverändert, so ist die relative Intensitätsverteilung in einer zur Blendenebene parallelen und hinreichend weit von ihr entfernten Ebene nur von der Richtung abhängig, unter der die einzelnen Punkte der betreffenden Ebene von der Blendenmitte aus erscheinen.

Die Größe  $\sigma a$  bezeichnet man durch  $\eta$  und sagt, man habe das Argument der Besselschen Funktion in „optischen Einheiten“ ausgedrückt. Eine optische Einheit ist also durch  $\eta = 1$  gegeben. Die optische Einheit ist eine dimensionslose Größe.

Wir geben nachfolgend noch eine von Lommel berechnete Tafel für die Werte von  $\frac{2J_1(\eta)}{\eta}$  und  $\left(\frac{2J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$  als Funktion von  $\eta$  auszugsweise wieder (Tabelle 1).

Abb. 5 gibt die graphische Darstellung der relativen Intensitätsverteilung nach (2), abgesehen von dem Faktor  $\text{const } \pi^2 a^4$ . Wir erkennen daran, daß für  $\sigma a = 3,8317; 7,0156; 10,1735; \dots$  die Intensität verschwindet, daß also der Durchmesser des zentralen Lichtfleckes nach (3) gegeben ist durch

$$2(\sqrt{y^2 + z^2})_{1. \text{ Min.}} = \frac{3,8317}{\pi} \cdot \frac{R}{a} \lambda. \quad (14; 5)$$

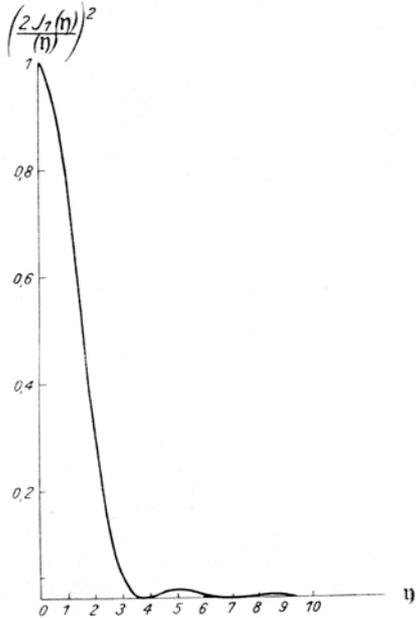


Abb. 5.  $\left(\frac{2J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$  als Funktion von  $\eta$  (s. a. Tabelle 1)

Gleichzeitig auch relative Intensitätsverteilung in der Brennpunktsebene einer Kugelwelle (s. § 20)

Tabelle 1.  $C = \frac{2}{\eta} J_1(\eta)$ 

$\eta$	$C$	$C^2$ %	$\eta$	$C$	$C^2$ %
0,0	+ 1,0000	100,00	6,2	-- 0,0751	0,56
0,2	+ 0,9950	99,00	6,4	-- 0,0567	0,32
0,4	+ 0,9801	96,07	6,6	-- 0,0379	0,14
0,6	+ 0,9557	91,54	6,8	-- 0,0192	0,04
0,8	+ 0,9221	85,03	7,0	-- 0,0013	0,00
1,0	+ 0,8801	77,46	7,2	+ 0,0151	0,03
1,2	+ 0,8305	68,97	7,4	+ 0,0296	0,09
1,4	+ 0,7742	59,94	7,6	+ 0,0419	0,18
1,6	+ 0,7124	50,75	7,8	+ 0,0516	0,27
1,8	+ 0,6461	41,75	8,0	+ 0,0587	0,34
2,0	+ 0,5767	33,26	8,2	+ 0,0629	0,40
2,2	+ 0,5043	25,55	8,4	+ 0,0645	0,42
2,4	+ 0,4335	18,79	8,6	+ 0,0634	0,40
2,6	+ 0,3622	13,12	8,8	+ 0,0600	0,36
2,8	+ 0,2926	8,56	9,0	+ 0,0545	0,30
3,0	+ 0,2260	5,11	9,2	+ 0,0473	0,22
3,2	+ 0,1633	2,67	9,4	+ 0,0386	0,15
3,4	+ 0,1054	1,11	9,6	+ 0,0291	0,08
3,6	+ 0,0530	0,28	9,8	+ 0,0189	0,04
3,8	+ 0,0067	0,004	10,0	+ 0,0087	0,01
4,0	-- 0,0330	0,11	10,2	-- 0,0013	0,00
4,2	-- 0,0660	0,44	10,4	-- 0,0107	0,01
4,4	-- 0,0922	0,85	10,6	-- 0,0191	0,04
4,6	-- 0,1115	1,24	10,8	-- 0,0263	0,07
4,8	-- 0,1244	1,55	11,0	-- 0,0321	0,10
5,0	-- 0,1310	1,72	11,2	-- 0,0345	0,12
5,2	-- 0,1320	1,74	11,4	-- 0,0379	0,14
5,4	-- 0,1279	1,64	11,6	-- 0,0440	0,16
5,6	-- 0,1194	1,53	11,8	-- 0,0394	0,15
5,8	-- 0,1073	1,15	12,0	-- 0,0372	0,14
6,0	-- 0,0922	0,85			

Der Durchmesser ist also umgekehrt proportional zu  $a$ .

Zwischen den Dunkelstellen steigt die Intensität wieder an. Sie erreicht bei

$$\sigma a = 5,1356; 8,4572; 11,6199;$$

die Maximalwerte

$$0,0175 I_0; 0,0042 I_0; 0,0016 I_0; \dots,$$

wo  $I_0$  den Wert für  $\sigma a = 0$  bezeichnet.

Für  $\sin \alpha = 0$ , d. h. auf der Mittelpunktssenkrechten der Blendenebene — allgemeiner: für  $\sigma a = 0$ , d. h.  $\beta = \beta_0$ ;  $\gamma = \gamma_0$ , also auf der Verlängerung der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkt der kreisförmigen Blendenöffnung — hat  $\frac{2 J_1(\sigma a)}{\sigma a}$  seinen Maximalwert 1, so daß dort

$$I_0 = \text{const} \cdot \pi^2 a^4. \quad (14; 6)$$

Bemerkenswert ist hier, daß die Intensität proportional der vierten Potenz des Radius  $a$  der Blendenöffnung ist, während man geometrisch-optisch Proportionalität mit der zweiten Potenz erwartet. Beachtet man aber, daß mit einer Vergrößerung der Blende z. B. auf den doppelten Betrag der Durchmesser des zentralen Lichtfleckes, der ja nach (5) umgekehrt proportional zu  $a$  ist, sich auf die Hälfte verkleinert, so ist jene Proportionalität des  $I$ -Wertes zu  $a^4$  sofort verständlich.

Auf die Behandlung des vorstehenden Beispiels gingen wir hier ein, weil wir die Resultate unten noch für die Intensitätsverteilung in der Brennebene einer Kugelwelle gebrauchen werden.

## § 15. Geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik

Wir wollen nun zeigen, daß die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik angesehen werden kann, und zwar als Grenzfall, für den die Wellenlänge des Lichtes unendlich klein ist. Wir können dies auf zwei völlig verschiedenen Wegen zeigen, einmal, indem wir von der Kirchhoffschen Formel bzw. der daraus für eine punktförmige Lichtquelle erhaltenen Formel (12; 10) ausgehen und den Übergang zu  $\lambda \rightarrow 0$ , d. h. zu  $k \rightarrow \infty$  vollziehen, und andererseits, indem wir im Anschluß an Debye aus der Schwingungsgleichung  $\mathcal{A}u + k^2 u = 0$  die Differentialgleichung des Brunsschen Eikonals ableiten, das ja als Grundlage der geometrischen Optik betrachtet werden kann.

Den ersten Beweis wollen wir hier nicht wiedergeben, da wir ihn bisher nur im Anschluß an (12; 10), also für eine Kugelwelle durchführen können, während wir ihn unten (§ 49), nachdem wir die Darstellung einer ganz beliebigen Welle kennengelernt haben (§ 44), in vollster Allgemeinheit bringen können.

Für den zweiten Weg gehen wir aus von der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , von der wir schon nach (6; 1\*) wissen, daß sie das Integral

$$u = a e^{\pm i k (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} = a e^{i \frac{k}{n} E} \quad (15; 1)$$

mit

$$E = \pm n (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \quad (15; 2)$$

besitzt, wo  $a$  ein Amplitudenfaktor ist. (1) stellt eine in Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  fortschreitende ebene Welle dar.  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$  ist der Abstand des Punktes  $x, y, z$  von der Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

gemessen längs des Lichtstrahles, also

$$\pm n (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = E$$

die optische Weglänge, das Eikonale des Punktes  $x, y, z$  in bezug auf den Punkt der Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

in welchem diese von dem durch  $x, y, z$  gehenden Lichtstrahl getroffen wird.

In Analogie zu diesem Ausdruck machen wir jetzt ganz allgemein den Ansatz

$$u = a e^{i \frac{k}{n} E}, \quad (15; 3)$$

wobei wir  $a$  und  $E$  der allgemeinen Gültigkeit wegen als willkürliche Funktionen von  $x, y, z$  anzusehen haben, und fragen, wie wir die Funktion  $E$  zu bestimmen haben, damit  $u$  eine Lösung der Schwingungsgleichung ist. Wir können noch ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß  $a$  nur langsam veränderlich ist, so daß es auf Strecken von der Größenordnung der Wellenlänge als annähernd konstant betrachtet werden kann.

Gehen wir mit unserem Ansatz (3) in die Schwingungsgleichung ein, so ergibt sich, da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + i \frac{k}{n} a \frac{\partial E}{\partial x} \right) e^{i \frac{k}{n} E},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2i \frac{k}{n} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{k}{n} a \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{k^2}{n^2} a \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \right] e^{i \frac{k}{n} E}$$

(und analog für  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  und  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ) ist,

$$\Delta u + k^2 u = e^{i \frac{k}{n} E} \left\{ \Delta a + 2i \frac{k}{n} (\text{grad } a, \text{grad } E) + i \frac{k}{n} a \Delta E - \frac{k^2}{n^2} a (\text{grad } E)^2 + k^2 a \right\} = 0.$$

Nach Division durch  $\frac{k^2}{n^2} a e^{i \frac{k}{n} E}$  geht dies über in

$$\frac{n^2}{k^2 a} \Delta a + 2i \frac{n}{k a} (\text{grad } a, \text{grad } E) + i \frac{n}{k} \Delta E - (\text{grad } E)^2 + n^2 = 0. \quad (15; 4)$$

Lassen wir jetzt  $k \rightarrow \infty$  gehen, vollziehen also den Übergang zur geometrischen Optik, so verschwinden außer in gewissen Ausnahmefällen die drei ersten Glieder der vorstehenden Gleichung und wir erhalten die aus der geometrischen Optik bekannte Differentialgleichung des Eikonals

$$(\text{grad } E)^2 = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial z} \right)^2 = n^2. \quad (15; 5)$$

Die eben erwähnten Ausnahmefälle, für die die drei ersten Glieder der Gleichung (4) für  $k \rightarrow \infty$  nicht alle verschwinden, sind folgende:

1. grad  $a$  ist von der Größenordnung  $k$ , d. h. die Amplitude ändert sich bereits wesentlich beim Fortschreiten um Strecken, die von der Größenordnung der Wellenlänge sind. Dies ist in der Nachbarschaft der Schattengrenze der Fall; dort also wird die geometrische Optik ungültig. Es treten Beugungserscheinungen abweichend von der geometrischen Optik auf.

2.  $\Delta E$  ist von der Größenordnung  $k$ . Nun ist  $\Delta E = \operatorname{div} \operatorname{grad} E$  und  $\operatorname{grad} E$  ist ein Vektor, der mit den Lichtstrahlen identisch ist, da ja  $E = \text{const}$  die Wellenflächen liefert und  $\operatorname{grad} E$  deren Normalen gibt. Die Lichtstrahlen aber sind näherungsweise identisch mit dem Pointingschen Vektor, der die Energieströmung angibt. Die  $\operatorname{div}$  dieser Energieströmung, d. h.  $\Delta E$  wird daher an den Stellen besonders groß, an denen sich die Lichtstrahlen sehr eng zusammendrängen, d. h. in der Nachbarschaft der Brennflächen, der Brennlinien oder des Brennpunktes. Dort also verliert die geometrische Optik gleichfalls ihre Gültigkeit, und es treten Beugungserscheinungen auf.

Aus (4) können wir außer (5) noch eine weitere Beziehung ablesen, die eine Aussage über die Amplitude  $a$  gestattet. Setzen wir nämlich die Summe aus dem zweiten und dritten Glied unabhängig von  $k$  identisch gleich Null, so erhalten wir

$$\frac{1}{a} (\operatorname{grad} a, \operatorname{grad} E) = -\frac{1}{2} \Delta E,$$

wofür wir auch schreiben können, da ja  $\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\log a)$  ist,

$$(\operatorname{grad} \log a, \operatorname{grad} E) = -\frac{1}{2} \Delta E. \quad (15; 6)$$

Da  $\operatorname{grad} E$  ein mit den Lichtstrahlen — die wir vorübergehend durch  $\mathfrak{S}$  bezeichnen wollen — zusammenfallender Vektor ist, so können wir mit Rücksicht auf (5) schreiben

$$\operatorname{grad} E = n \mathfrak{S}. \quad (15; 7)$$

Damit geht (6) über in

$$(\operatorname{grad} \log a, \mathfrak{S}) = -\frac{1}{2n} \operatorname{div} (n \mathfrak{S}) \quad (15; 8)$$

oder, falls  $n = \text{const}$ :

$$(\operatorname{grad} \log a, \mathfrak{S}) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{S}, \quad (15; 9)$$

d. h. der Gradient von  $\log a$ , genommen in Richtung der Lichtstrahlen (anders ausgedrückt: die Projektion des  $\operatorname{grad} \log a$  auf die Richtung der Lichtstrahlen), nimmt ab in dem Maße, wie die Strahlen divergieren, da dort  $\operatorname{div} \mathfrak{S} > 0$ , und wächst, wo sie konvergieren.

### § 16. Das Babinetsche Theorem

Wir gehen hier noch kurz auf das sogenannte Babinetsche Theorem ein, das besonders bei der mikroskopischen Abbildung von undurchsichtigen oder halbdurchlässigen Teilchen zur Berechnung der Beugungserscheinung angewandt werden kann. Es sagt aus, daß die Beugungserscheinung, hervorgerufen durch einen undurchsichtigen Schirm, völlig gleich ist derjenigen, die durch eine dem Schirm gleichgestaltete Öffnung erzeugt wird.

Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir zunächst ein Objektiv sehr großer Öffnung. Dann wird die Beugung in der Bildebene sich nur auf die engste Umgebung des geometrisch-optischen Bildes erstrecken. Bezeichnen wir die Lichtverteilung  $u$  in der Bildebene in diesem Falle durch  $u_1$ , so ist außer in der engsten Umgebung des geometrisch-optischen Bildes überall  $u_1 = 0$ . Dieses  $u_1$  entsteht nach der Kirchhoffschen Formel durch Integration über die ganze Öffnung  $\sigma_1$  der sehr großen Blende, also

$$u_1 = \int_{\sigma_1} \dots d\sigma.$$

Denken wir uns  $\sigma_1$  in zwei Teilgebiete  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  zerlegt, so ist

$$u_1 = \int_{\sigma_2} \dots d\sigma + \int_{\sigma_3} \dots d\sigma = u_2 + u_3,$$

so daß  $u_2$  die Lichtverteilung für den Fall ergibt, daß  $\sigma_3$  abgeblendet, also  $\sigma_2$  die „Öffnung“ ist,  $u_3$  dagegen die Lichtverteilung, wenn  $\sigma_2$  von einem undurchsichtigen Schirm bedeckt ist. Da nun außerhalb des sehr kleinen geometrisch-optischen Bildes überall  $u_1 = 0$  ist, so ist dort  $u_2 = -u_3$ , also

$$|u_2|^2 = |u_3|^2, \quad (16; 1)$$

d. h.: Außerhalb des geometrisch-optischen Bildes stimmen die Beugungsbilder der „Öffnung“  $\sigma_2$  und des völlig gleichgestalteten „undurchsichtigen Schirmes“  $\sigma_3$  überein.

Nach Epstein behält das Babinetsche Theorem auch in der strengen Beugungstheorie, die nicht die Kirchhoffsche Formel zugrunde legt, mit einer kleinen Modifikation seine Gültigkeit.

## Allgemeine wellentheoretische Gesichtspunkte der optischen Abbildung

### § 17. Geometrische Optik und Wellenoptik

Das Ziel der geometrischen Optik ist es, die Daten der Linsensysteme so zu bestimmen, daß jeder Gegenstand punktweise ähnlich abgebildet wird. Hierzu ist notwendig, daß das Bild eines jeden

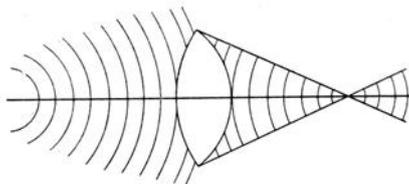


Abb. 6. Die vom Objekt ausgehende (divergente) Kugelwelle wird durch das (ideale) optische System in eine (konvergente) Kugelwelle verwandelt, deren Mittelpunkt das Bild des Objektpunktes ist

Punktes wieder ein einzelner Punkt ist, daß also alle von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen sich wieder in einem Punkte treffen. Anders ausgedrückt heißt dies: die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden divergierenden Kugelwellen sollen durch das optische System so umgeformt werden, daß sie konvergierende Kugelwellen werden<sup>1)</sup>, deren Mittelpunkt dann das Bild des leuchtenden Objektpunktes ist (Abb. 6).

Diese Forderung läßt sich bekanntlich nicht allgemein streng erfüllen. Wir wollen sie jedoch zunächst einmal als erfüllt voraussetzen. Dann zeigt die Wellenoptik — wie unten noch näher ausgeführt werden wird —, daß im Gegensatz zu den Folgerungen der geometrischen Optik auch in diesem Falle das Bild des leuchtenden Objektpunktes nicht ein einzelner Punkt, sondern statt dessen ein Lichtscheibchen ist, das um so größer ist, je kleiner die Öffnung des

<sup>1)</sup> Bei visuellen Beobachtungen ist hier das Auge in das „optische System“ einbezogen.

Linsensystems ist, und das von mehreren dunklen und hellen Linien umgeben ist (s. § 11). Je größer andererseits die Öffnung des Systems — und demnach auch des Strahlenbündels — ist, um so stärker ist der Abfall der Lichtintensität von der Mitte des Lichtscheibchens — der Stelle des geometrisch-optischen Bildes — zu seinem Rande. Das geometrisch-optische Bild und das aus der Natur des Lichtes als einer Wellenbewegung sich ergebende Bild eines leuchtenden Punktes stimmen daher bei großer Öffnung besser überein als bei kleiner Öffnung. Andererseits aber läßt sich die vorausgesetzte punktuelle Vereinigung aller vom Objektpunkte ausgehenden Strahlen um so weniger erfüllen, je größer die Öffnung des Linsensystems (Objektivs) ist. Denn es treten ja dann verschiedene „Abbildungsfehler“ auf, von denen die wichtigsten „sphärische Aberration“, „Astigmatismus“, „Koma“, „chromatische Aberration“, „Bildfeldwölbung“ und „Verzeichnung“ sind. Auf die vier ersten dieser Fehler wird vom Standpunkte der Wellentheorie unten noch näher einzugehen sein. Die beiden letzten sind einer direkten wellen- und beugungstheoretischen Behandlung nicht zugänglich.

### § 18. Abbildung ausgedehnter Objekte. Selbstleuchter und Nichtselbstleuchter. Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes

Handelt es sich um die Abbildung eines ausgedehnten Objektes — und dies ist bei fast allen optischen Abbildungen, abgesehen wohl von denen der Astronomie, deren Objekte wegen der sehr großen Entfernung als punktförmig angesehen werden können, und der Ultramikroskopie, der Fall —, so gelten ganz ähnliche Überlegungen wie bei der Abbildung eines einzelnen Punktes. Wir müssen jedoch unterscheiden zwischen selbstleuchtenden und nichtselbstleuchtenden Gegenständen. Bei den ersten sendet jedes Flächenelement kohärentes, also interferenzfähiges Licht aus, während das von den verschiedenen Punkten des Objektes herrührende Licht zueinander inkohärent ist. Jeder einzelne Punkt des selbstleuchtenden Gegenstandes wird demnach durch das Linsensystem als von einzelnen Ringen umgebenes Lichtscheibchen abgebildet. Die den verschiedenen Punkten des Objektes zugehörigen Bilder überdecken sich, so daß die Intensitäten — der Inkohärenz wegen — sich additiv zusammensetzen. Durch dieses „sich überdecken“ der einzelnen Bilder wird die Deutlichkeit

der Abbildung sehr ungünstig beeinflußt. Sollen z. B. zwei getrennte Punkte des Gegenstandes im Bilde deutlich getrennt erscheinen, so ist es notwendig, daß die Intensität an den Stellen, an denen sich die den beiden Punkten zugehörigen Lichtscheibchen überdecken, geringer ist als an den Stellen, an denen jedes Scheibchen seinen größten Intensitätswert besitzt, also geringer als in der Mitte der Lichtscheibchen. Die Abb. 7 a und 7 b veranschaulichen dies. Die gestrichelten Linien mögen die Lichtverteilung in dem Abbild der einzelnen Punkte, die ausgezogene Linie die durch das Überdecken

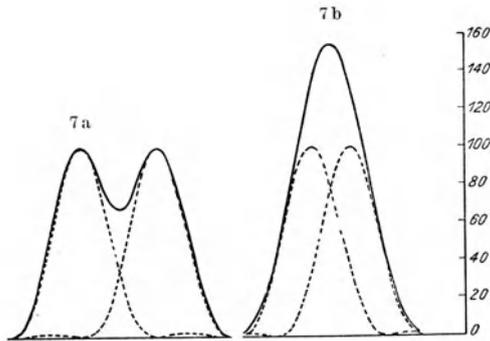


Abb. 7. Die von zwei benachbarten Objektpunkten herrührenden Beugungsbilder überdecken sich. In 7 a ist noch zu erkennen, daß das Bild von zwei getrennten Objektpunkten herrührt. In 7 b ist dies nicht mehr erkennbar

der Lichtscheibchen sich ergebende Intensitätsverteilung angeben. In Abb. 7 a würden die beiden Punkte noch zu trennen sein, während dies bei den — willkürlichen — Annahmen der Abb. 7 b nicht mehr der Fall ist. Die Trennung ist also eher möglich, wenn der Intensitätsabfall von der Mitte zum Rande des Lichtscheibchens stark ist. Wie wir oben erwähnten, ist dies bei großer Objektivöffnung eher der Fall als bei kleiner. Damit man die beiden Punkte als getrennt erkennen kann, müssen die beiden Intensitätsmaxima so weit auseinander liegen, daß das Intensitätsmaximum des einen Bildes auf das (erste) Minimum des anderen fällt und umgekehrt. Die Lage dieses ersten Minimums steht mit der Öffnung des Objektivs (Radius:  $A$ ) und der Wellenlänge  $\lambda$  des benutzten Lichtes in dem Zusammenhang:

$$\varrho_0 = 0,61 \frac{\lambda}{A}, \text{ worin } \varrho_0 \text{ den Abstand des Minimums von der Mitte}$$

des Lichtscheibchens (Maximum) angibt (s. u. § 20, Schlußabsatz). Die beiden Objektpunkte müssen demnach mindestens den Winkelabstand  $0,61 \frac{\lambda}{A}$  haben, damit sie noch unterschieden werden können.

Diesen Winkelabstand bezeichnet man als das „Auflösungsvermögen“ des betreffenden optischen Systems. Abb. 8 (f. S.) gibt drei (mikrophotographisch aufgenommene, also vergrößerte) Bilder<sup>1)</sup> zweier leuchtender Punkte (Durchmesser = 0,015 cm) im gegenseitigen Abstände von 0,062 cm, abgebildet durch ein Fernrohrobjektiv ohne Okular. (Die mikrophotographische Vergrößerung entspricht also der sonst üblichen Okularvergrößerung.) Der Abstand der Punkte vom abbildenden Objektiv betrug 310 cm, so daß ihr Winkelabstand  $2 \cdot 10^{-4}$  war. Die drei reproduzierten Aufnahmen entsprechen einem Objektivradius  $A = 3,75$  cm; 0,28 cm; 0,065 cm. Nach der angegebenen Formel sollen bei  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  cm zwei Punkte vom Winkelabstand  $2 \cdot 10^{-4}$  gerade noch getrennt werden mit  $A = 0,15$  cm. Hiermit stehen die Abb. 8 b und 8 c in guter Übereinstimmung, da in 8 b, wo  $A > 0,15$  cm ist, noch erkennbar ist, daß es sich um zwei getrennte Punkte handelt, was in Abb. 8 c, wo  $A < 0,15$  cm ist, nicht mehr der Fall ist.

Bei der Abbildung nichtselbstleuchtender Objekte empfängt jeder einzelne Punkt desselben Licht von verschiedenen Punkten der Beleuchtungsquelle, so daß das von ihm ausgehende und für die Abbildung in Betracht kommende Licht inkohärent ist. Andererseits aber sind die von verschiedenen Stellen des abzubildenden Objektes ausgehenden Lichtstrahlen teilweise untereinander kohärent, da sie ja von derselben Stelle der Beleuchtungsquelle herkommen. Überlagern sich also — wie dies wegen der unvermeidbaren Abbildungsfehler der optischen Instrumente vorkommen kann — diese kohärenten Lichtstrahlen in der Bildebene des abzubildenden Objektes, so interferieren sie miteinander, während sich die untereinander inkohärenten, die Abbildung der einzelnen Objektpunkte vermittelnden Lichtstrahlen in ihrer Intensität einfach summieren. Schon diese wenigen Bemerkungen zeigen die Schwierigkeit einer genauen theoretischen Untersuchung der Abbildung nichtselbstleuchtender Objekte.

<sup>1)</sup> Aus: K. Haberl, Physik. Zeitschr. **31**, 618, 1930, Tafel X, Verlag S. Hirzel, Leipzig.



Abb. 8a

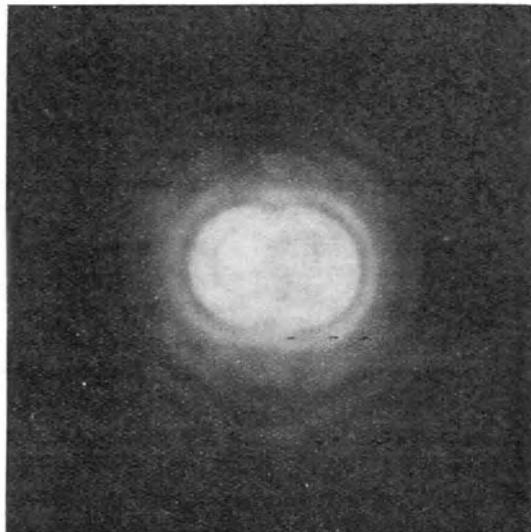


Abb. 8b

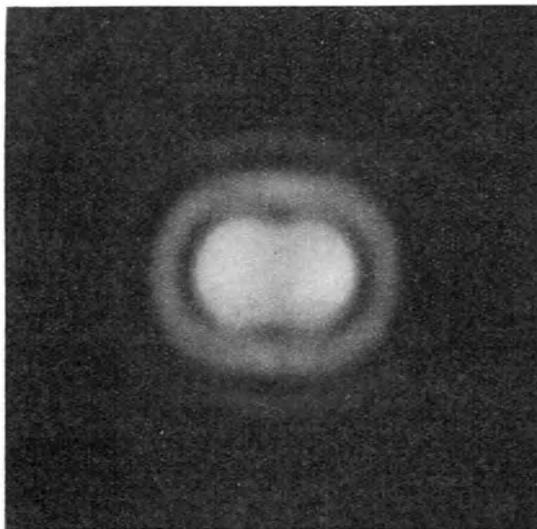


Abb. 8c

Abb. 8. Zwei getrennte Objektpunkte, aufgenommen mit verschiedener Objektivöffnung, zur Demonstration der Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Objektivöffnung

Eine besondere Art der Abbildung nichtselbstleuchtender Objekte liegt z. B. auch dann vor, wenn die Lichtquelle — wie dies in der Mikroskopie teilweise der Fall ist — durch Kondensoren auf das Objekt scharf abgebildet wird. Dann empfängt jeder Objektpunkt nur oder fast nur solche Strahlen, die von demselben leuchtenden Punkte der Lichtquelle herrühren, die also zueinander kohärent sind. In diesem Fall „strahlt“ also das Objekt wie ein Selbstleuchter, die Abbildung ist annähernd die gleiche wie die eines Selbstleuchters.

Wird das Objekt nicht bestrahlt, sondern durchstrahlt, so wirkt es selbst wie eine in den Strahlengang der Lichtquelle eingeschaltete Blende, die eine sehr eigentümliche Gestalt besitzt und das Licht der Lichtquelle zum Teil abblendet, zum Teil nur in seiner Intensität mehr oder weniger stark schwächt, wobei der Absorptionskoeffizient noch für die verschiedenen Frequenzen des durchstrahlenden Lichtes verschieden sein wird. Man hat dann die hierdurch bedingte und durch den Durchgang durch das optische System noch modifizierte Beugungsfigur in der „Bildebene“ zu untersuchen.

Außer den genannten Beleuchtungsarten der abzubildenden Objekte gibt es natürlich noch manche andere. In allen Fällen ist eine besondere Untersuchung über die wellenoptische Abbildung erforderlich, doch müssen wir uns hier mit diesem kurzen Hinweis begnügen.

Wir erwähnen nur noch den „Äquivalenzsatz“<sup>1)</sup>, der aussagt, daß bei allseitiger Beleuchtung eines nichtselbstleuchtenden Objektes das Bild komplementär ist zu dem Bilde eines völlig gleichen, aber selbstleuchtenden Körpers. Da aber bei künstlicher Beleuchtung, wie sie bei mikroskopischen Beobachtungen stets benutzt wird, nie allseitige Beleuchtung verwirklicht ist, so bietet dieser Satz hier scheinbar keine Anwendungsmöglichkeit. Tatsächlich aber läßt sich zeigen, daß man sich von dieser allseitigen Beleuchtung ziemlich weit entfernen kann, ohne daß der Satz ungültig wird. Besonders gilt dies bei grober Struktur des nichtselbstleuchtenden Objektes. Doch können wir hier auf diese interessanten Fragen nicht näher eingehen.

---

<sup>1)</sup> L. Mandelstam, Ann. d. Phys. **35**, 881, 1911; M. v. Laue, Ann. d. Phys. **43**, 165, 1914; s. a. M. Berek, Zeitschr. f. Phys. **40**, 420, 1926; Sitzungsber. d. Ges. z. B. d. g. Naturwiss. Marburg **61**, 251, 1926.

## Viertes Kapitel

# Abbildung durch Kugelwellen

### § 19. Intensitätsverteilung in der Brennpunktebene (Bildebene)

Wir gehen jetzt dazu über, die in den vorhergehenden Zeilen nur kurz skizzierten Verhältnisse etwas genauer zu untersuchen. Dabei wollen wir uns zunächst gleichfalls wieder auf den idealen Fall beschränken, daß die vom Objektpunkte ausgehenden geometrisch-optischen Lichtstrahlen sich nach dem Durchgang durch das Linsensystem alle streng in einem Punkte schneiden. Wir legen also unseren Betrachtungen vorläufig Kugelwellen zugrunde und sehen von den oben bereits erwähnten Linsenfehlern ab. Außerdem beschränken wir uns auf kreisförmige Öffnung des Strahlenbündels<sup>1)</sup>.

Der erste, der die Lichterscheinungen untersuchte, die in der durch den Brennpunkt der Kugelwelle gelegten achsensenkrechten Ebene erkennbar sind, war Airy<sup>2)</sup>. Gleichzeitig behandelte er auch die Erscheinungen, die auftreten, wenn ein kreisrunder Schirm vom halben Durchmesser des Objektivs mitten auf dieses gelegt wird.

Airy wendet das oben erwähnte Huygens-Fresnelsche Prinzip an, indem er die Ätherverschiebung bestimmt, die ein jedes Element der durch die Begrenzung des Objektivs gehenden Wellenfläche im Aufpunkte bewirkt (d. h. in dem Punkte, für den die Intensität bestimmt werden soll) und sodann über alle Elemente der erwähnten Wellenfläche integriert.

<sup>1)</sup> Wir erwähnen hier noch, daß es bei den optischen Instrumenten in gewissen Fällen vorkommen kann, daß die einzelnen Blenden des Instrumentes sich zum Teil vignettieren, so daß das austretende Strahlenbündel nicht kreisförmig begrenzt ist, sondern einen Querschnitt besitzt, dessen Berandung aus mehreren, sich unter spitzem Winkel schneidenden Kreisbögen zusammengesetzt ist.

<sup>2)</sup> G. B. Airy, Trans. Camb. Phil. Soc. 5, 283, 1834; Pogg. Ann. 45, 86, 1838.

Fast gleichzeitig mit Airy hat auch Schwerd<sup>1)</sup> die Verhältnisse in der durch den Brennpunkt der Kugelwelle gehenden achsensenkrechten Ebene untersucht, ersetzt aber die kreisförmige Öffnung des Strahlenbündels durch ein reguläres 180-Eck.

Knochenhauer<sup>2)</sup>, der sich wenige Jahre später gleichfalls mit dem in Rede stehenden Problem beschäftigte, behandelt es in ähnlicher Art wie Airy. Späterhin wurde es noch — gewissermaßen als Spezialfall allgemeinerer Fragen — von verschiedenen anderen Autoren<sup>3)</sup> in teilweise abweichender Art behandelt.

Um ein Anwendungsbeispiel für das Huygens-Fresnel'sche Prinzip zu geben, behandeln wir diesen einfachsten Fall im Anschluß an die Airy'sche Betrachtungsweise. Der Radius der Öffnung des Objektivs sei  $a$ , die Bildweite (Brennweite) sei  $f$ , der Abstand des Aufpunktes  $P$  der Bild- (Brenn-)ebene vom auf der Achse gelegenen Bild- (Brenn-)punkt sei  $q_P$ . Das Objektiv verwandele die einfallende (ebene) Welle in eine zum Bild- (Brenn-)punkt hin konvergierende Kugelwelle. Jedes Stückchen der von der Umrandung des Objektivs begrenzten Wellenfläche ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle, deren Intensität dem Flächeninhalt  $d\sigma$  ( $\approx d\eta d\xi$ ) des betreffenden Flächenelements proportional ist, und die alle in Phasenübereinstimmung schwingen.

Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß der Nullpunkt mit dem Bildpunkt und die  $x$ -Achse mit der Achse des optischen Systems zusammenfällt. Die  $y$ -Achse gehe durch den Aufpunkt hindurch, so daß  $x_P = 0$ ;  $y_P = q_P$ ;  $z_P = 0$ .

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  seien die Koordinaten der durch die Objektivberandung hindurchgehenden Wellenfläche. Der Abstand des Aufpunktes vom Flächenelement  $d\sigma$  sei  $r$ . Dann ergibt sich nach (11; 2) und (12; 11) bzw. (12; 12) in der oben angegebenen Art für den

<sup>1)</sup> F. M. Schwerd, Die Beugungserscheinungen usw. Mannheim 1835 (besonders S. 67—75).

<sup>2)</sup> K. W. Knochenhauer, Pogg. Ann. **41**, 103, 1837; **43**, 286, 1838. Ferner in: Die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin 1839 (besonders S. 22—24).

<sup>3)</sup> Z. B. E. Wilde, Pogg. Ann. **79**, 219, 1850; L. Foucault, Ann. d'Observ. de Paris **5**, 1858; Ch. André, Diss. Paris 1876; H. Struve, Mem. de l'Acad. sc. de St. Pétersbourg **30**, No. 8, 1882; **34**, No. 5, 1886; Ann. d. Phys. **17**, 1008, 1882; H. Bruns, Astron. Nachr. **104**, 1, 1883; E. v. Lommel, Abhdlg. d. Bayr. Akad. d. Wiss. II., **15**, 233, 1884 und viele andere.

Schwingungsvorgang im Aufpunkt  $P$ , wenn wir noch den nach (12; 10) erforderlichen Phasenfaktor  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  hinzufügen, dagegen von dem konstanten Phasenfaktor  $e^{+ikR}$  absehen und

$$\cos(u, r) \approx -\cos(u, R) \approx 1$$

setzen, die Objektivöffnung also als klein gegen die Brennweite voraussetzen,

$$u_P = \frac{i}{R\lambda} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} d\eta d\xi. \quad (19; 1)$$

Nun ist

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2q_P\eta + q_P^2} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Für  $r$  können wir im Exponenten, wenn wir uns auf die Umgebung des Bildpunktes beschränken, schreiben

$$r = f - \frac{1}{f} q_P \eta,$$

wo  $f = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = R$ , während wir im Nenner  $r = f$  setzen können. Die Integration nach  $\xi$  läßt sich sofort ausführen und liefert, wenn der — vom jeweiligen  $\eta$ -Wert abhängige — größte und kleinste Wert von  $\xi$  durch  $\xi_2 = \xi_2(\eta)$  und  $\xi_1 = \xi_1(\eta)$  bezeichnet wird,

$$u_P = i \frac{e^{-ikf}}{\lambda f^2} \int_{-a}^{+a} (\xi_2 - \xi_1) e^{ik\frac{1}{f} q_P \eta} d\eta.$$

Nun ist bei kreisförmiger Begrenzung des Objektivs

$$\xi_2 - \xi_1 = 2\sqrt{a^2 - \eta^2},$$

so daß der Schwingungszustand im Punkte  $P$  sich ergibt zu

$$u_P = 2i \frac{e^{-ikf}}{\lambda f^2} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - \eta^2} e^{ik\frac{1}{f} q_P \eta} d\eta.$$

Setzen wir hier  $\frac{\eta}{a} = -\cos\varphi$ , was wegen  $-1 \leq \frac{\eta}{a} \leq +1$  gestattet ist, so wird

$$u_P = 2i \frac{e^{-ikf}}{\lambda f^2} a^2 \int_0^\pi e^{-ikq_P \frac{a}{f} \cos\varphi} \sin^2\varphi d\varphi.$$

Hier läßt sich nach (A; 20) die Integration ausführen, so daß

$$u_P = i \frac{\pi a^2}{\lambda f^2} e^{-i k f} \frac{2 J_1(\eta)}{\eta}, \quad \text{wo } \eta = \frac{2 \pi}{\lambda} \varrho_P \frac{a}{f} \quad (19; 2)$$

und  $J_1(\eta)$  die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung ist. Um von  $u_P$  zur Intensität  $I_P$  überzugehen, haben wir es mit dem konjugiert-komplexen Wert zu multiplizieren und erhalten

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2 a^4}{\lambda^2 f^4} \left( \frac{2 J_1(\eta)}{\eta} \right)^2 \quad (19; 3)$$

Für  $\varrho_P = 0$ , also  $\eta = 0$ , d. h. im Bildpunkt, wird

$$\frac{2 J_1(\eta)}{\eta} = 1.$$

Die Intensität ist hier also proportional der vierten Potenz des Halbmessers des Objektivs und umgekehrt proportional der vierten Potenz der Brennweite, so daß  $I_P$  proportional der vierten Potenz der Öffnung des Objektivs ist.

Wir messen alle Längen in Wellenlängen als Maßeinheit, was sich schon wegen des Argumentes  $\eta = 2 \pi \frac{\varrho_P a}{\lambda f}$  der Besselschen Funktion empfiehlt. Es ergibt sich aus (3), daß  $(I_P)_{x_P=0}$  umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge ist.

Die Nullstellen der Besselschen Funktion  $J_1$  liegen bei  $\eta = 3,8317; 7,0156; 10,1735; 13,3237$  usw. (siehe § 14). Für die zugehörigen Werte von  $\varrho_P$  herrscht also in der achsensenkrechten Brennebene Dunkelheit. Zwischen ihnen steigt die Intensität wieder an bis auf  $\frac{1}{57}; \frac{1}{240}; \frac{1}{620}$  usw. von derjenigen, die in dem geometrisch-optischen Brennpunkt herrscht. Abb. 5 des § 14 zeigt die Intensitätsverteilung in der achsensenkrechten Brennebene einer Kugelwelle. (Siehe auch die dort gegebene Tabelle 1.) Das Bild eines leuchtenden Punktes, etwa eines Fixsternes, ist demnach ein Lichtscheibchen vom Radius  $\varrho = 3,83 \frac{\lambda}{2 \pi} \frac{f}{a}$ , umgeben von verschiedenen hellen Kreislinien, deren Intensitäten indessen schnell abnehmen, so daß sie nur bei sehr hellen Objektpunkten erkennbar sind. Es sei noch erwähnt, daß die Intensität des Lichtscheibchens auf die Hälfte ihres Wertes für  $\varrho_P = 1,616 \frac{\lambda}{2 \pi} \frac{f}{a}$  herabgesunken

ist. Hieraus erklärt sich die Tatsache, daß die Beugungsbilder der Fixsterne im Fernrohr je nach ihrer Helligkeit als verschieden große Scheiben erscheinen, da das beobachtende Auge nur für eine gewisse Mindestlichtintensität empfindlich ist, bei lichtschwächeren Sternen diese aber früher unterschritten wird als bei lichtstärkeren, bei denen gegebenenfalls auch noch die Beugungsringe erkennbar sind.

Die vorstehend durchgeführten Überlegungen beschränken sich auf eine einzige Wellenlänge, also auf monochromatisches Licht, sowie auf die Abbildung eines einzigen leuchtenden Punktes. Die Erscheinungen, die sich bei Verwendung von mehrfarbigem Licht ergeben, erhält man durch Berechnungen unter Zugrundelegung der verschiedenen im benutzten Licht vorhandenen Wellenlängen und Zusammenfassung der für denselben Aufpunkt erhaltenen Intensitätswerte, wobei diese noch mit einem Faktor zu versehen sind, der von der Stärke der betreffenden Farbe im Objekt selbst sowie von der Empfindlichkeit des Auges oder der Aufnahmeplatte abhängt. Im wesentlichen kommt dies auf eine Integration über die verschiedenen im Objekt vorhandenen Wellenlängen hinaus (siehe § 36).

Um von einem leuchtenden Punkt zu der Abbildung eines ausgedehnten leuchtenden Objektes — etwa eines Planeten oder der Sonne — überzugehen, haben wir für jeden Aufpunkt, in dem wir die Helligkeit bestimmen wollen, die Intensität zu berechnen, die die einzelnen Flächenelemente des ausgedehnten Objektes in ihm erzeugen, und diese — da sie inkohärent sind — zu summieren. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern verweisen auf die Arbeit von Birk<sup>1)</sup>, in der er in einem Anhang diese Verhältnisse genauer betrachtet.

## § 20. Intensitätsverteilung in der Bildebene als Fraunhofersche Beugungerscheinung

Die mathematische Behandlung der Intensitätsverteilung in der achsensenkrechten Bildebene einer Kugelwelle geschieht oft in folgender, stark modifizierter Form: Es wird angenommen, eine von einem weit entfernten Punkte ausgehende Kugelwelle werde

<sup>1)</sup> Birk, Das photographische Helligkeitsverhältnis der Sonne zu Fixsternen. Göttingen 1909.

durch eine kreisförmige Blende zum Teil abgeblendet. Die Lichtquelle liege von der Blendenebene so weit entfernt, daß hier die Kugelwelle bereits als ebene Welle aufgefaßt werden kann. Bei dem Durchgang des Lichtes durch die Blendenöffnung treten dann Beugungserscheinungen auf, deren Maxima und Minima in bestimmter Richtung von der Blendenmitte liegen. Vorausgesetzt, daß wir sie nur in Ebenen betrachten, die sehr weit von der Blende entfernt sind, können wir sie als Fraunhofersche Beugungserscheinungen an einer kreisförmigen Öffnung behandeln, wie dies oben in § 14 geschehen ist. Es wird dann nachträglich angenommen,

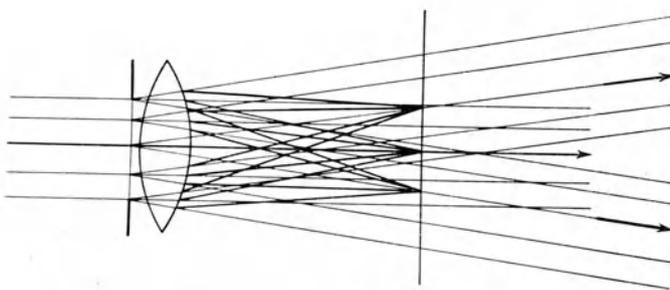


Abb. 9. Intensitätsverteilung in der Brennebene als Fraunhofersche Beugungserscheinung

Die eigentlich in der unendlich fernen Ebene entstehenden Interferenzmaxima und -minima werden durch die Linse in deren Brennebene abgebildet. Die Richtung (von der Blendenmitte aus gesehen) bleibt dabei  
ungeändert

daß die von der Blende ausgehenden Lichtstrahlen auf eine Linse fallen, deren Durchmesser hinreichend groß ist, so daß durch sie keine neuen Beugungserscheinungen hervorgerufen werden. Diejenigen Lichtstrahlen, die ohne Zwischenschaltung der Linse sich in der unendlich fernen Ebene vereinigen und dort miteinander interferieren würden, verlaufen demnach zwischen Blende und Linse parallel und werden durch die Linse in der Brennebene vereinigt. Auf diese Weise wird also die eigentlich in der unendlich fernen Ebene auftretende Beugungsfigur in der Brennebene abgebildet. Der Winkel, unter dem die Interferenzmaxima und -minima der Brennebene von der Mitte des Objektivs aus gesehen erscheinen, bleibt dabei natürlich unverändert (Abb. 9), während ihre lineare

Entfernung vom Achsenschnittpunkt der betreffenden Ebene abhängig ist von der Brennweite der Linse. Um das Problem der Intensitätsverteilung in der Brennebene demnach möglichst allgemein zu behandeln, wird man als unabhängige Variable den Winkel einführen.

Diese Art der Behandlung ist indessen nur möglich, solange es sich um die Lichtverteilung in der Bildebene handelt, und auch hier nur bei Beschränkung auf die nähere Umgebung des Bildpunktes. Betrachten wir dagegen die Intensitätsverteilung in einer nicht durch den Brennpunkt gehenden achsenkrechten Ebene, so treten, wie wir noch sehen werden, Fresnelsche Beugungserscheinungen auf.

Statt den leuchtenden Punkt so weit entfernt anzunehmen, daß in der Blendenebene die Welle praktisch als eben angesehen werden darf, können wir ihn auch in den Brennpunkt einer Kollimatorlinse anordnen. Nach dem Durchgang des Lichtes durch den Kollimator verlaufen dann die Lichtstrahlen parallel, d. h. die zugehörige Wellenfläche ist eben. Schalten wir nunmehr eine Blende ein und lassen dann das Licht durch eine dahintergestellte zweite Linse gehen, deren Durchmesser größer ist als derjenige der Blende, so haben wir in der Brennebene dieser zweiten Linse wieder die oben beschriebene Art Fraunhoferscher Beugungserscheinungen. Betrachten wir nun beide Linsen als ein optisches Linsensystem, so ist in bezug auf dieses die Brennebene der zweiten Linse die zum Objektpunkt konjugierte Bildebene. Die vorstehend skizzierte Art der Behandlung des Beugungsproblems ist demnach immer dann zulässig, wenn es sich darum handelt, die Intensitätsverteilung in der zur Objektebene konjugierten achsenkrechten Ebene zu betrachten.

Vergleichen wir das für die Beugung an einer kreisförmigen Blende erhaltene Resultat (14; 2)

$$I_P = \text{const } \pi^2 a^4 \left( \frac{2 J_1(\sigma a)}{\sigma a} \right)^2 \quad (20; 1)$$

mit dem vorstehend für die Intensitätsverteilung in der achsenkrechten Brennpunktsebene einer Kugellwelle abgeleiteten (19; 3)

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{1}{\lambda^2} \pi^2 \frac{a^4}{f^4} \left( \frac{2 J_1(\eta)}{\eta} \right)^2 \quad (20; 2)$$

und beachten, daß nach (19; 2)

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda} Q_P \frac{a}{f} = 2\pi \frac{a}{\lambda} \operatorname{tg} \alpha, \quad (20; 3)$$

wenn  $\alpha$  der Winkel gegen die  $x$ -Achse ist, unter dem der Aufpunkt vom Mittelpunkt der Konvexlinse erscheint, während nach (14; 4)

$$\sigma a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \quad (20; 4)$$

war, so erkennt man, daß tatsächlich beide Arten der Behandlung zur gleichen relativen Intensitätsverteilung führen, da  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ .

Aus (3) und (4) erkennen wir noch: da für

$$\eta = \sigma a = 3,83 \dots$$

$J_1$  den Wert Null annimmt,  $I_P$  also verschwindet, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \approx \sin \alpha_0 = \frac{0,61 \lambda}{a} \quad (20; 5)$$

(siehe § 18) als Winkelabstand, den zwei leuchtende Punkte besitzen müssen, damit sie noch getrennt werden können.

## § 21. Intensitätsverteilung in zur Bildebene parallelen Ebenen

Handelt es sich um die Intensitätsverteilung in achsenkrechten Ebenen, die nicht durch den Brennpunkt der Kugelwelle gehen, so läßt sich — wie schon gesagt — die zweite Art der Behandlung, die das Problem als Fraunhofersche Beugungserscheinung auffaßt, nicht mehr durchführen, und auch die erste (Airysche) Methode muß insofern Abänderung erfahren, als wir bei der Entwicklung von  $r$  im Exponenten der  $e$ -Funktion noch weitere Glieder, die quadratisch von  $\eta$  und  $\xi$  abhängen, zu berücksichtigen haben. Wir werden so auf Integralausdrücke geführt, die denjenigen der Fresnelschen Beugungserscheinungen entsprechen.

Wir wählen die gleichen Bezeichnungen wie oben in § 19, legen aber außerdem noch Polarkoordinaten  $\vartheta'$ ,  $\varphi$  zugrunde, deren Mittelpunkt mit dem Brennpunkt der Kugelwelle und deren Achse mit der Achse des Strahlenbündels zusammenfällt.  $\vartheta'$  bezeichnet den Winkel gegen die —  $x$ -Achse,  $\varphi$  den Winkel gegen die  $xy$ -Ebene,



Führen wir die Integration nach  $\varphi$  aus, so erhalten wir nach (A; 16)

$$u_P = i \frac{2\pi b'}{\lambda f k^2 Q_P^2} e^{-ikb'} \int_0^{\eta} J_0(\eta') e^{im\eta'^2} \eta' d\eta', \quad (21; 1)$$

wenn wir vorübergehend setzen

$$\left. \begin{aligned} k \frac{Q_P}{b'} \varphi &= \eta', & k \frac{b-f}{2k^2 Q_P^2} \frac{b'}{f} &= k \frac{x_P}{2k^2 Q_P^2} \frac{b'}{f} = m, \\ k \frac{Q_P}{b'} a &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (21; 2)$$

Entwickeln wir hier  $e^{im\eta'^2}$  in eine Reihe nach Potenzen von  $\eta'^2$ , so läßt sich nach (A; 24) die Integration ausführen. Man erhält so nach einigen Umformungen, wenn man noch

$$\zeta = k x_P \frac{a^2}{2b'f} = 2\pi \frac{x_P}{\lambda} \frac{a^2}{2b'f} \quad (21; 3)$$

setzt,

$$\begin{aligned} u_P = & -\frac{i\pi}{\lambda} \frac{a^2}{b'f} e^{-ikb'} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{2r+1} (-1)^{r+\mu} \frac{2^\mu \zeta^{2r}}{(2\nu+1-\mu)!} \frac{J_\mu(\eta)}{\eta^\mu} \right. \\ & \left. + i\zeta \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{2r+2} (-1)^{r+\mu} \frac{2^\mu \zeta^{2r}}{(2\nu+2-\mu)!} \frac{J_\mu(\eta)}{\eta^\mu} \right]. \end{aligned} \quad (21; 4)$$

v. Lommel, der nach Entwickeln von  $e^{im\eta'^2}$  in eine Potenzreihe das Integral in (1) durch wiederholte partielle Integration löst, gelangt nach verschiedenen Umformungen zu der Formel

$$u_P = -\frac{i\pi}{\lambda} \frac{a^2}{b'f} \frac{e^{-ikb'}}{\zeta} \{C + iS\} = \frac{-ie^{-ikb'}}{x_P} \{C + iS\} \quad (21; 5)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C &= \cos \zeta \cdot U_1 - \sin \zeta \cdot U_2, \\ S &= \sin \zeta \cdot U_1 + \cos \zeta \cdot U_3. \end{aligned} \right\} \quad (21; 6)$$

worin noch  $U_1$  und  $U_3$  Funktionen von  $\zeta$  und  $\eta$  sind und sich als Reihen Besselscher Funktionen erster Art darstellen lassen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{2\zeta}{\eta}\right)^{2\mu+1} J_{2\mu+1}(\eta), \\ U_3 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{2\zeta}{\eta}\right)^{2\mu+2} J_{2\mu+2}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (21; 7)$$

Aus diesen Formeln ergibt sich dann wieder die Intensitätsverteilung zu

$$\begin{aligned} I_P &= \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{a^4}{b'^2 f^2} \frac{1}{\chi^2} \{C^2 + S^2\} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{a^4}{b'^2 f^2} \frac{1}{\chi^2} \{U_1^2 + U_2^2\} \\ &= \frac{1}{x_P^2} \{U_1^2 + U_2^2\}. \end{aligned} \quad (21; 8)$$

Diese Formeln lassen sich allgemein kaum interpretieren. Wir gehen hier noch auf einige Spezialisierungen ein. Nehmen wir zunächst an, daß  $b = f$  ist, so fällt unsere achsensenkrechte Ebene mit der Brennpunktebene zusammen. Es wird dann

$$\chi = 0; \quad b = f; \quad b' = \sqrt{f^2 + \varrho_P^2}$$

und demnach

$$\frac{1}{\chi} U_1 = -\frac{2J_1(\eta)}{\eta}; \quad \frac{1}{\chi} U_2 = 0; \quad \sin \chi = 0; \quad \cos \chi = 1,$$

so daß

$$(u_P)_{x_P=0} = i \frac{\pi}{\lambda} \frac{a^2}{f b'} \frac{2J_1(\eta)}{\eta}. \quad (21; 9)$$

Wir erhalten also die bereits oben abgeleitete Intensitätsverteilung

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{a}{f}\right)^4 \frac{f^2}{b'^2} \left(\frac{2J_1(\eta)}{\eta}\right)^2 = I_0 \frac{f^2}{b'^2} \left(\frac{2J_1(\eta)}{\eta}\right)^2, \quad (21; 10)$$

wo  $I_0$  die Intensität im Brennpunkt bedeutet.

Setzen wir andererseits  $\eta = 0$ , so erhalten wir die Intensitätsverteilung längs der Achse der Kugelwelle, da  $\eta = 0$  gleichbedeutend ist mit  $\varrho_P = 0$ . Nun ist wegen (A; 15)

$$\begin{aligned} (U_1)_{\eta=0} &= -\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\chi^{2n+1}}{(2\mu+1)!} = -\sin \chi, \\ (U_2)_{\eta=0} &= \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\chi^{2n+2}}{(2\mu+2)!} = 1 - \cos \chi. \end{aligned}$$

Dann wird nach einigen Umformungen

$$(u_P)_{\varrho_P=0} = -\frac{e^{-ik(b'-x_P)}}{x_P} \left( e^{-ikx_P} - e^{-ikx_P \left(1 - \frac{a^2}{2b'f}\right)} \right), \quad (21; 11)$$

wo  $b' - x_P \approx f$  ist, und

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{a^4}{b'^2 f^2} \frac{2}{\xi^2} (1 - \cos \xi) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{a^4}{b'^2 f^2} \left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2$$

$$= I_0 \frac{f^2}{b'^2} \left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2 \quad (21; 12)$$

$$= \frac{2}{x_P^2} (1 - \cos \xi) = \frac{4}{x_P^2} \sin^2 \frac{\xi}{2}. \quad (21; 12^*)$$

Fragen wir endlich noch nach der Intensitätsverteilung längs der geometrisch-optischen Randstrahlen des Strahlenbündels. Diese sind dadurch gegeben, daß für sie

$$\frac{Q_P}{x_P} = \frac{a}{\sqrt{f^2 - a^2}}$$

also annähernd

$$\frac{Q_P}{x_P} = \frac{a}{f}$$

ist. Setzen wir demnach in  $\eta = k Q_P \frac{a}{b'}$  für  $Q_P$  den Wert  $x_P \frac{a}{f}$  ein, so wird

$$\eta = k x_P \frac{a^2}{b' f} = 2 \xi.$$

Für die Randstrahlen ist also

$$\frac{2 \xi}{\eta} = 1. \quad (21; 13^*)$$

Dadurch gehen  $U_1$  und  $U_2$  über in

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu J_{2\mu+1}(\eta) \\ &= - J_1(\eta) + J_3(\eta) - J_5(\eta) + \dots = - \frac{1}{2} \sin \eta, \\ U_2 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu J_{2\mu+2}(\eta) \\ &= J_2(\eta) - J_4(\eta) + \dots = \frac{1}{2} [J_0(\eta) - \cos \eta], \end{aligned} \right\} (21; 13^{**})$$

so daß

$$\begin{aligned} (u_P)_{\eta=2\varepsilon} &= + \frac{\pi a^2}{\lambda b' f} \frac{e^{-ikb'}}{\eta} \left( e^{-i\frac{\eta}{2}} - e^{+i\frac{\eta}{2}} J_0(\eta) \right) \\ &= \frac{1}{2x_P} e^{-ik(b'-x)} \left[ e^{-2i\varepsilon} - J_0\left(\frac{x}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (21; 13)$$

$$\begin{aligned} (I_P)_{\eta=2\varepsilon} &= \frac{\pi^2 a^4}{\lambda^2 b'^2 f^2} \frac{1}{\eta^2} [1 + J_0^2(\eta) - 2J_0(\eta) \cos \eta] \\ &= I_0 \frac{f^2}{b'^2} \frac{1}{\eta^2} [1 + J_0^2(\eta) - 2J_0(\eta) \cos \eta] = \frac{1}{4x_P^2} [\dots]. \end{aligned} \quad (21; 14)$$

Die Intensität in einem beliebigen Aufpunkte setzt sich also in allen Fällen aus drei Faktoren zusammen, erstens der Brennpunktintensität  $I_0 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{a}{f}\right)^4$ , zweitens dem Quadrat des Verhältnisses:

#### Brennweite

Abstand des Aufpunktes von der Linsenmitte

und drittens einem „Interferenzfaktor“, der in komplizierter Weise von der Lage des Aufpunktes, der Öffnung des Strahlenbündels und der Wellenlänge des Lichtes abhängt<sup>1)</sup>. Interferenzfaktor haben wir ihn deswegen genannt, weil er im wesentlichen die Intensitätsmaxima und -minima bewirkt. Abb. 5 (s. S. 41, § 14) und Abb. 11 und 12 geben den Verlauf des Interferenzfaktors für die drei betrachteten Fälle<sup>2)</sup>. Man erkennt, daß sowohl in der Brennebene als auch längs der Achse des Bündels vollkommen dunkle Stellen existieren, daß aber längs der Randstrahlen die Intensität nirgends ganz verschwindet, sondern nur zwischen Maximal- und Minimalwerten hin und her schwankt.

Die vorstehend durch Spezialisierung von (7) erhaltenen Formeln (9), (10), (11), (12), (13), (14) ergeben sich natürlich

1) Strehl bezeichnet  $\frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{a^4}{f^2} = f^2 I_0$  als „Lichtverdichtungsfaktor“

Um die Intensität in einem beliebigen Aufpunkte zu erhalten, hat man diesen Lichtverdichtungsfaktor dann zu multiplizieren mit einem von der Lage des Aufpunktes abhängenden Proportionalitätsfaktor, der gleich ist dem Produkt aus  $b'^2 = (f+x_P)^2 + \varrho_P^2$  und unserem Interferenzfaktor.

2) Der Maßstab ist bei den drei Abbildungen verschieden.

genau so aus (4), wenn man dort die jeweiligen Spezialisierungen durchführt und z. B. für (11), (12) beachtet, daß

$$\sum_1^x (-1)^\mu \binom{x}{\mu} = -1$$

ist.

Für die auf der Achse liegenden Stellen völliger Dunkelheit läßt sich noch leicht eine anschaulich deutbare Beziehung aufstellen. Nach (12) sind diese Stellen bestimmt durch die Gleichung

$$r_{\min} = 2 N \pi \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

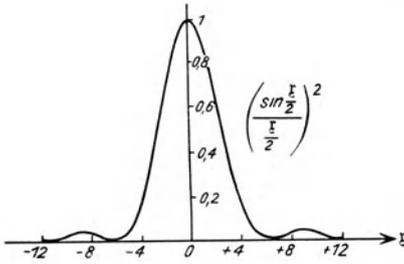


Abb. 11. Relative Intensitätsverteilung in der Brennebene einer Kugelwelle

[Gleichzeitig Darstellung der Funktion

$$f(\xi) = \left[ \frac{\left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2}{\left( \frac{\xi}{2} \right)^2} \right]$$

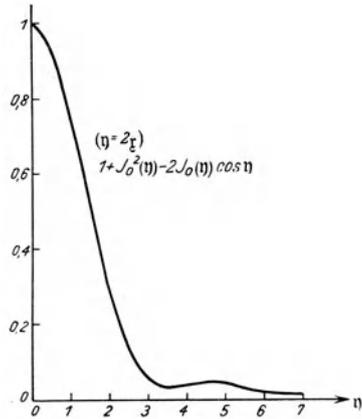


Abb. 12. Relative Intensitätsverteilung längs der Randstrahlen einer Kugelwelle

Nun ist nach (3)

$$\xi = 2 \pi \frac{x_P}{\lambda} \frac{a^2}{2 b' f} \quad (= 2 N \pi).$$

Betrachten wir andererseits den Abstand  $r_0$  des Punktes  $x_P = b - f$  der Achse ( $\varrho_P = 0$ ) vom Mittelpunkt ( $\varrho = 0$ ) der durch die Blendenberandung gehenden Ausgangswellenfläche, für den nach (1\*) gilt:

$$r_0 = b',$$

sowie den Abstand  $r_a$  desselben Achsenpunktes von den Randpunkten der betreffenden Wellenfläche ( $\varrho = a$ ), der nach (1\*) sich ergibt zu

$$r_a = b' + \frac{f-b}{2b'f} a^2 = b' - x_P \frac{a^2}{2b'f},$$

so erkennt man, daß

$$\chi = 2\pi \frac{r_0 - r_a}{\lambda} (= 2N\pi) \quad (N = 1, 2, 3, \dots) \quad (21; 15)$$

ist. Die Stellen voller Dunkelheit auf der Achse der Kugelwelle liegen also dort, wo der Gangunterschied ( $r_0 - r_a$ ) zwischen Mittelstrahl und Randstrahl eine ganze Zahl von Wellenlängen beträgt, der Phasenunterschied dieser beiden Strahlen also ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  ist. Eine Ausnahme hiervon bildet nur diejenige Stelle, für die  $r_a - r_0 = 0$  ist; denn diese Beziehung ist für den Brennpunkt erfüllt, für den die Intensität ein Maximum ist.

Ähnlich wie vorstehend durch (15) das Argument  $\chi$  mit dem Gangunterschied zwischen Mittelstrahl und Randstrahl in Zusammenhang gebracht wurde, läßt sich auch das Argument  $\eta$  durch einen solchen Gangunterschied ausdrücken. Es ist nämlich, wie man aus (1\*) und (2) sofort ersieht,

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda} \varrho_P \frac{a}{b'} = \frac{\pi}{\lambda} (r_{a, \varphi=\pi} - r_{a, \varphi=0}), \quad (21; 16)$$

also gleich dem in Wellenlängen gemessenen Gangunterschied der beiden Randstrahlen, die in der durch Achse und Aufpunkt gelegten Ebene liegen, multipliziert mit  $\pi$ . Für die in der achsenkrechten Brennpunktebene liegenden Aufpunkte ist dieser Gangunterschied der beiden Randstrahlen übrigens wegen  $b=f$  gleich dem doppelten Betrage des Gangunterschiedes eines der beiden Randstrahlen gegen den vom Mittelpunkt der Wellenfläche ausgehenden Strahl, so daß also

$$\begin{aligned} \eta_{x_P=0} &= \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 - r_{a, \varphi=0}) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_{a, \varphi=\pi} - r_0) \\ &= \frac{\pi}{\lambda} (r_{a, \varphi=\pi} - r_{a, \varphi=0}). \end{aligned} \quad (21; 17)$$

Nun sind die vollkommen dunklen Stellen der Brennpunktsebene bestimmt durch

$$\eta = 1,22 \pi; 2,23 \pi; 3,24 \pi; 4,24 \pi; 5,24 \pi; \dots$$

Völlige Dunkelheit ist also an den Stellen der achsensenkrechten Brennpunktsebene vorhanden, für die der Gangunterschied der beiden Randstrahlen  $(N + 0,2 \dots) \pi$  beträgt, wo  $N$  eine ganze Zahl  $\geq 1$  ist. Dies erinnert daran, daß bei der Beugung an einem Spalt Dunkelheit an denjenigen Stellen  $P$  herrscht, für die der Gangunterschied der beiden Randstrahlen eine ganze Zahl von Wellenlängen beträgt, da dann in  $P$  das Licht der einen Spalthälfte von demjenigen der anderen Spalthälfte gerade aufgehoben wird. Durch die Mitwirkung der nicht in der Ebene  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \pi$  verlaufenden Strahlen werden die Dunkelheitsstellen etwas nach außen verschoben.

Die Stellen maximaler Helligkeit der Brennpunktsebene waren durch

$$\eta = 1,63 \pi; 2,68 \pi; 3,70 \pi; 4,71 \pi; 5,72 \pi; \dots$$

gegeben. Der zugehörige Gangunterschied der Randstrahlen ist hier also ungefähr  $(N + 0,7 \dots) \pi$  mit  $N$  ganzzahlig  $\geq 1$ .

Aus den Definitionsgleichungen für  $U_1$  und  $U_2$  ersieht man leicht, daß die Summen für  $\frac{2r}{\eta} < 1$ , also im Schattengebiet, besonders schnell konvergieren, sich also für die Beugungserscheinungen im „Schatten“ (z. B. in der Brennpunktsebene) besonders vorteilhaft erweisen. Im geometrisch-optischen Lichtkegel aber, für den  $\frac{2r}{\eta} > 1$  ist, ist die Konvergenz der Reihen bedeutend weniger gut. v. Lommel hat daher für dieses Gebiet noch andere, die sogenannten Lommelschen  $V$ -Funktionen benutzt, die definiert sind durch die Reihen

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{2\mu} J_{2\mu}(\eta), \\ V_1 &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{2\mu+1} J_{2\mu+1}(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (21; 18)$$

Mit diesen Funktionen wird

$$C = -\sin \frac{\eta^2}{4\zeta} - \sin \zeta \cdot V_0 - \cos \zeta \cdot V_1,$$

$$S = -\cos \frac{\eta^2}{4\zeta} + \cos \zeta \cdot V_0 - \sin \zeta \cdot V_1$$

und

$$I_P = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{a}{f}\right)^4 \left(\frac{f'}{b'}\right)^2 \frac{1}{\zeta^2} \left\{ 1 + V_0^2 + V_1^2 - 2V_0 \cos \frac{4\zeta^2 + \eta^2}{4\zeta} \right. \\ \left. - 2V_1 \sin \frac{4\zeta^2 + \eta^2}{4\zeta} \right\}, \quad (21; 19)$$

ein Ausdruck, den man gleichfalls wieder für die oben betrachteten Einzelfälle spezialisieren und dadurch vereinfachen könnte. Nach den angegebenen Formeln ist von Lommel die Intensitätsverteilung in einer großen Zahl von achsensenkrechten Ebenen, d. h. also für verschiedene konstante  $\zeta$ -Werte, berechnet und in Kurven graphisch dargestellt worden. Sie zu reproduzieren aber verlohnt sich nicht, da sie nur schwer einen allgemeinen Überblick gestatten. Wir geben statt dessen lieber eine von Berek veröffentlichte Zeichnung wieder<sup>1)</sup>, die die Intensitätsverteilung in der Umgebung des Brennpunktes einer Kugelwelle sehr gut veranschaulicht (Abb. 13). Ein-gezeichnet sind hier die Kurven gleicher Helligkeit, die man wohl auch als „Isophoten“ bezeichnet. Im übrigen sei auf die Unterschrift jener Abbildung hingewiesen.

Aus dem für die Intensität angegebenen allgemeinen Ausdruck (4) bzw. (5) läßt sich noch leicht bestimmen, für welche Werte von  $\zeta$ ,  $\eta$  die Intensität Maxima und Minima besitzt. Hierzu haben wir (4) bzw. (5) nur zu differenzieren, und zwar nach  $\eta$ , wenn wir  $\zeta$  konstant halten, also die Intensität einer achsensenkrechten Ebene betrachten, dagegen nach  $\zeta$ , wenn wir  $\eta$  konstant halten, also nach den Maxima- und Minimastellen auf einer achsenparallelen Geraden fragen. Doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

<sup>1)</sup> M. Berek, Zeitschr. f. Phys. **40**, 421, 1926. — Der Druckstock wurde von dem Verlage Julius Springer, Berlin freundlichst zur Verfügung gestellt.

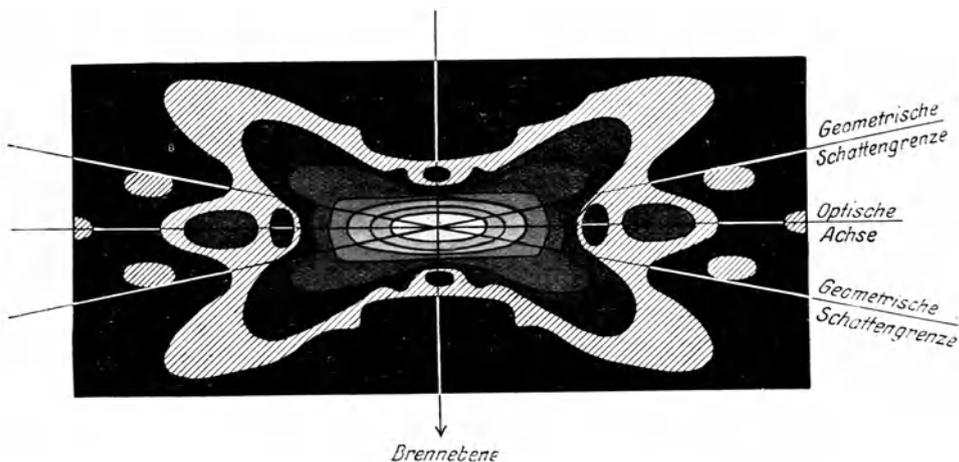


Abb. 13. Intensitätsverteilung in der Umgebung des Brennpunktes einer Kugelwelle (Kurven gleicher Helligkeit)

Die Schraffierung bzw. die Tönungen bedeuten: ganz dunkel (schwarz):  $< 1$ ; schraffiert:  $< 2,5$ ; dann zunehmend:  $< 5$ ;  $< 10$ ;  $< 25$ ;  $< 50$ ;  $< 75$ ;  $< 100$ . Die Intensität im Brennpunkt ist hierbei gleich 100 gesetzt

## § 22. Energetische Betrachtungen für die Kugelwelle

Fragen wir nach der gesamten Lichtmenge, die durch eine achsenkrechte Ebene hindurchgeht, so muß diese für alle achsenkrechten Ebenen den gleichen Betrag haben und gleich sein der das Objektiv durchsetzenden Lichtmenge. Da die Intensität definiert ist als die durch ein Flächenelement der Größe 1 hindurchströmende Lichtmenge, so erhalten wir allgemein die Lichtmenge  $\Phi$  durch Multiplikation der Intensität mit der Größe der durchströmten Fläche. Es wird demnach

$$\Phi_{x_P} \Big|_0^{q_P} = 2 \pi \int_0^{q_P} I(q'_P, x_P) q'_P dq'_P \quad (22; 1)$$

die Lichtmenge, die die Ebene  $x_P$  innerhalb des Kreises mit dem Radius  $q_P$  und dem Achsenschnittpunkt als Mittelpunkt durchsetzt. Für die Brennebene war nach (21; 10)

$$(I_P)_{x_P=0} = I_0 \left( \frac{f^2}{b'} \right) \left( \frac{2 J_1(\eta)}{\eta} \right)^2; \quad b' = \sqrt{f^2 + q_P^2}, \quad (22; 2)$$

so daß sich für die ganze, die Brennpunktebene durchsetzende Lichtmenge

$$\begin{aligned} \Phi_{x_P=0} \Big|_0^\infty &= \frac{2\lambda^2}{\pi} \left(\frac{f}{a}\right)^2 I_0 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\eta)}{\eta} d\eta \\ &= 2\pi \left(\frac{a}{f}\right)^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\eta)}{\eta} d\eta \end{aligned}$$

ergibt. Analog ist

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^{q_P} = 2\pi \left(\frac{a}{f}\right)^2 \int_0^{q_P} \frac{J_1^2(\eta')}{\eta'} d\eta',$$

$\eta = 2\pi \frac{a}{b'} \frac{q_P}{\lambda}$

Nun ist aber

$$\frac{J_1^2(\eta)}{\eta} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \{J_0^2(\eta) + J_1^2(\eta)\},$$

so daß, da  $J_0(0) = 1$ ;  $J_1(0) = 0$  ist,

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^{q_P} = \pi \left(\frac{a}{f}\right)^2 \{1 - J_0^2(\eta) - J_1^2(\eta)\} \quad (22; 3)$$

und

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^\infty = \pi \left(\frac{a}{f}\right)^2. \quad (22; 4)$$

$\Phi_{x_P=0}$  ist daher proportional  $\pi a^2$ , also proportional dem Flächeninhalt der Blendenöffnung und unabhängig von der Wellenlänge  $\lambda$ , wie dies zu erwarten war.

Wir sahen oben, daß der zentrale Lichtfleck, den man als Bild des leuchtenden Punktes anzusprechen hat, den Radius  $q_P = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{b'}{a} \cdot 1,22 \dots \pi$  besitzt. Setzen wir in (3) für  $\eta$  den Wert  $1,22\pi$  ein, so erhalten wir

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^{1. \text{ Min.}} = \Phi_{x_P=0} \Big|_0^\infty \cdot 0,83776, \quad (22; 5)$$

so daß also der Lichtfleck im günstigsten Falle (ideale Kugelwelle) 83,776 % der gesamten Lichtmenge, die durch das Objektiv gegangen ist, enthält.

In Abb. 14 geben wir noch eine Kurve wieder, die  $\Phi_{xP} = 0 \Big|_0^{\rho P}$  als Funktion von  $\eta$  angibt, aus der man also ersehen kann, wieviel Prozent der Gesamtenergie durch eine kreisförmige Fläche der Brennpunktsebene hindurchströmt, deren Mittelpunkt der Brennpunkt und deren Radius gleich  $\frac{\eta}{2\pi} \frac{b'}{a} \lambda$  ist<sup>1)</sup>.

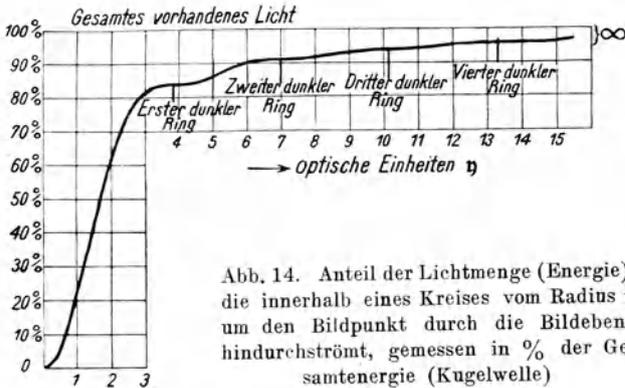


Abb. 14. Anteil der Lichtmenge (Energie), die innerhalb eines Kreises vom Radius  $\eta$  um den Bildpunkt durch die Bildebene hindurchströmt, gemessen in % der Gesamtenergie (Kugelwelle)

### § 23. Intensitätsverteilung weit außerhalb der Brennpunktsebene<sup>2)</sup>

Bei den von Lommel abgeleiteten Formeln handelt es sich vor allem um die Bestimmung der Intensitätsverhältnisse in solchen achsensenkrechten Ebenen, die in der Nähe des Brennpunktes liegen. Von Schwarzschild wurden nun entsprechende Formeln aufgestellt, bei denen der Abstand zwischen Brennpunkt- und Aufpunkts-ebene als groß vorausgesetzt war. (Diese Formeln versagen indessen in der nächsten Umgebung der Achse.) Es zeigt sich, daß sich der Verlauf der Lichtintensität längs jedes Radius des kreisförmigen Beugungsbildes darstellen läßt als Übereinanderlagerung zweier Wellen, welche angenähert die Form von Sinuskurven, aber verschiedene Wellenlänge und Amplitude haben, über diejenige konstante mittlere Intensität, welche bei geradliniger Fortpflanzung des Lichtes auftreten würde.

<sup>1)</sup> Entnommen aus: Handb. d. Phys. 21, 941, Artikel F. Jentzsch.

<sup>2)</sup> K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1898, S. 271.

Wir sehen davon ab, die Schwarzschild'schen Formeln hier ausführlich zu entwickeln, beschränken uns vielmehr darauf, hier kurz das Ergebnis zu skizzieren, zumal die erwähnte Überlagerung zweier Wellen über die konstante mittlere Intensität wohl nur formale, rechnerische und keine physikalische Bedeutung besitzt.

Am Rande des geometrischen Bildes beträgt die Intensität  $\frac{1}{4}$  der Durchschnittsintensität 1. Sie sinkt dann nach außen, in den

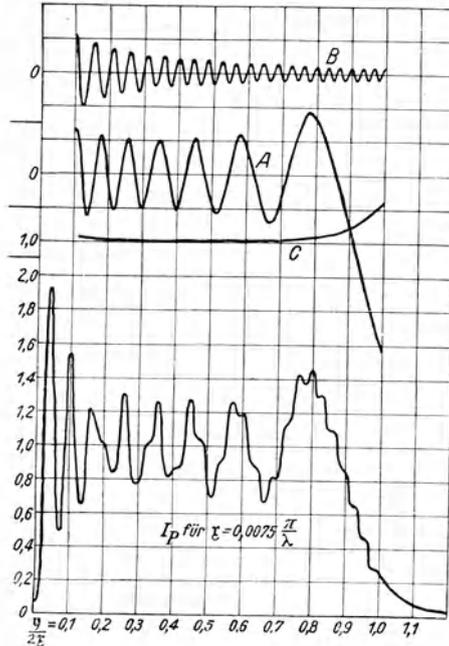


Abb. 15. Intensitätsverteilung einer Kugelwelle weit außerhalb der Brennpunktebene und ihre Zusammensetzung aus drei Anteilen (A, B, C) nach Schwarzschild

geometrischen Schatten hinein, beständig und schnell ab. Nach innen hingegen, also vom Rande des geometrisch-optischen Bildes zu dessen Mitte hin, wächst sie zunächst stark an, sinkt dann wieder auf etwa den halben Betrag herab, um hierauf eine größere Zahl weiterer Schwankungen auszuführen. Die ganze Beugungsfigur besteht demnach aus vielen konzentrischen hellen und dunklen

Ringem, umgeben von einem hellen, durch einen relativ dunklen Zwischenraum abgetrennten Ring, der übrigens noch ganz innerhalb der geometrischen Abgrenzung liegt.

Der Winkel, unter dem die einzelnen Ringe vom Objektiv aus erscheinen, ihre scheinbare Breite, ist für die Ringe des mittleren Gebietes der Beugungsfigur unabhängig von der Verschiebung aus dem Brennpunkt. Die Ringe am Rande dagegen nehmen an scheinbarer Breite und demnach an Deutlichkeit zu, je mehr man sich aus der Brennebene entfernt.

Schwarzschild hat die erhaltenen Formeln auf den Fall einer Verschiebung von 3 mm aus dem Fokus eines Fernrohres von 30 cm Öffnung und 3 m Brennweite angewandt (Abb. 15). Die Kurven *A* und *B* zeigen die beiden oben erwähnten Wellen, von denen die eine (*A*) von innen nach außen zuerst abnimmt, dann zunimmt, die andere (*B*) dagegen dauernd abnimmt. Sie überlagern sich der Kurve *C*, die etwa der mittleren Intensität 1 entspricht, und ergeben so die in der betreffenden Ebene vorhandene Intensität *I*. Da die Schwarzschild'schen Formeln für die Mitte des Beugungsbildes nicht gelten, so wurden hierfür (durch Schwarzschild) die Werte nach der von Lommel angegebenen Formel berechnet. Die durch *R* bezeichnete Ordinate gibt die Lage der geometrisch-optischen Begrenzung.

### § 24. Strenge Behandlung der Kugelwellen nach Debye<sup>1)</sup>

In einer von den angegebenen Behandlungsweisen abweichenden Art wurden die Lichtverhältnisse in der Nähe des Brennpunktes einer Kugelwelle von Debye untersucht. Er benutzt das Huygenssche Prinzip in der strengen Kirchhoffschen Formulierung. Hiernach berechnet sich bekanntlich die Lichtbewegung  $u_P$  im Auf-

punkte *P* aus den Werten, die  $u$  und die Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  auf einer

Aufpunkt und Lichtquelle trennenden Fläche annehmen, wo  $n$  wie oben die zum Aufpunkte hin gerichtete Normale dieser Trennungsfläche ist. Für räumliche Wellen gilt nach (12; 3) die Formel

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma. \quad (24; 1)$$

<sup>1)</sup> P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **30**, 755, 1909.

Hierin ist  $r$  die Entfernung des Aufpunktes vom Flächenelement der Trennungsfläche. Verlegen wir mit Debye den das Lichtbündel begrenzenden Schirm in negativ unendliche Entfernung, so lassen sich dort die Werte von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  hinreichend genau angeben. Wir denken uns diesen Schirm von außen mit einer zum Nullpunkt des Koordinatensystems (den wir mit dem Brennpunkt unserer Kugelwelle zusammenfallen lassen) hin konvergierenden Kugelwelle beleuchtet. Die Integration wird dann über den der Blendenöffnung entsprechenden Teil der unendlich fernen Wellenfläche ausgeführt. Die Werte von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sind hier (für  $R = -\infty$ )

$$\left. \begin{aligned} u &= \psi \frac{e^{-ikR}}{R} \\ \text{und bis auf Glieder der Ordnung } R^{-2} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= + \frac{\partial u}{\partial R} = -ik\psi \frac{e^{-ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (24; 2)$$

wo  $\psi$  eine von der Richtung der Lichtstrahlen abhängende „Amplitudenfunktion“ (ein „Belegungsfaktor“) ist, deren Quadrat die Lichtverteilung (Intensitätsbelegung) auf der unendlich fernen Wellenfläche angibt. Ferner ist

$$r = \sqrt{(x_P - \xi)^2 + (y_P - \eta)^2 + (z_P - \zeta)^2}, \quad (24; 3)$$

wo  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten von  $d\sigma$  und  $x_P, y_P, z_P$  diejenigen des Aufpunktes bedeuten. In gleicher Näherung wie vorstehend wird dann

$$r = -R + (x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma),$$

wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel der vom Flächenelement  $d\sigma$  der unendlich fernen Wellenfläche zum Nullpunkt — dem Brennpunkt des Bündels — hin gezogenen Verbindungslinien, d. h. der „Lichtstrahlen“ sind. Demnach wird, bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{-ikr}}{r} &= - \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma)} \\ \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) &= + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\ &= -ik \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (24; 4)$$

Es ist noch  $d\sigma = R^2 d\Omega$ , wenn  $\Omega$  der räumliche Öffnungswinkel des Bündels ist.

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir

$$u_P = -\frac{ik}{2\pi} \int \psi e^{-ik(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma)} d\Omega, \quad (24; 5)$$

$$d\Omega = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha} d\beta d\gamma = \frac{d(\cos \beta) d(\cos \gamma)}{\cos \alpha}$$

(s. § 44).

Dieses Integral genügt streng der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

und kann aufgefaßt werden als Überlagerung ebener Wellen, deren Fortpflanzungsrichtungen durch  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben sind. Es stellt eine nach positiven Werten von  $x$  fortschreitende Kugelwelle dar, deren Brennpunkt der Koordinatenursprungspunkt ist. In Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ , wobei

$$\cos \alpha = \cos \vartheta; \quad \cos \beta = \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \cos \gamma = \sin \vartheta \sin \varphi,$$

lautet diese Formel:

$$u_P = -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ikr_P[\cos \vartheta_P \cos \vartheta + \sin \vartheta_P \sin \vartheta \cos(\varphi_P - \varphi)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (24; 6)$$

oder, wenn  $\psi$  von  $\varphi$  unabhängig, nach (A; 16)

$$u_P = -ik \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ikx_P \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (24; 7)$$

wo

$$\begin{array}{l} x_P = r_P \cos \vartheta_P \\ \varrho_P = r_P \sin \vartheta_P. \end{array}$$

### § 25. Intensitätsverteilung längs der Achse einer Kugelwelle

Ist  $\psi$  auch von  $\vartheta$  unabhängig, also  $\psi = \text{const} = 1$ , so ergibt sich ganz allgemein für Punkte auf der Achse ( $\varrho_P = 0$ ;  $\vartheta_P = 0$  bzw.  $\pi$ )

vor dem Brennpunkt ( $\vartheta_P = \pi$ )

$$\begin{aligned} u_P &= -\frac{1}{x_P} (e^{-ikx_P \cos \Theta} - e^{-ikx_P}) \\ &= +\frac{1}{r_P} (e^{ikr_P \cos \Theta} - e^{ikr_P}), \\ &= -a \frac{e^{ikr_P}}{r_P} e^{i\delta_1} \end{aligned}$$

$$\left[ a = 2 \sin\left(\frac{1}{2} kr_P(1 - \cos \Theta)\right); \delta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} kr_P(1 - \cos \Theta) \right], \quad (25; 1)$$

hinter dem Brennpunkt ( $\vartheta_P = 0$ )

$$\begin{aligned} u_P &= -\frac{1}{r_P} (e^{-ikr_P \cos \Theta} - e^{-ikr_P}), \\ &= -a \frac{e^{-ikr_P}}{r_P} e^{i\delta_2} \end{aligned}$$

$$\left[ \delta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} kr_P(1 - \cos \Theta) = \pi - \delta_1 \right],$$

wo jetzt (im Gegensatz zu  $R$ )  $r_P$  nach beiden Richtungen vom Brennpunkt aus positiv gezählt ist [siehe auch (21; 11)]. Es ist  $\Theta \approx \frac{a}{f}$ ,  $\cos \Theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{f}\right)^2$ ].<sup>1)</sup> Durch Multiplikation von (1) mit dem konjugiert komplexen Wert erhalten wir für die Intensität wie in (21; 12\*)

$$\begin{aligned} (I_P)_{x_P=0} &= \frac{2}{x_P^2} \{1 - \cos [kx_P(1 - \cos \Theta)]\} \\ &= \frac{4}{x_P^2} \sin^2 \left\{ kx_P \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right\}. \quad (25; 2) \end{aligned}$$

Für  $x_P = 0$  geht dies über in

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{16 \pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \frac{\Theta}{2} = I_0. \quad (25; 3)$$

<sup>1)</sup> (21; 11) unterscheidet sich von (25; 1) im Vorzeichen und um einen angenähert konstanten Phasenfaktor, da ja  $e^{-ik(b' - x_P)} \approx e^{-ikf}$  war. Der Vorzeichenunterschied rührt natürlich davon her, daß wir als  $u$  auf der Blendenöffnung hier:  $u = \frac{e^{-ikR}}{R} = -\frac{e^{-ikr}}{r}$  (mit  $R \rightarrow -\infty$ ) und in § 21 (bzw. § 19):  $u = \frac{e^{ikR}}{R}$  (mit  $R = f > 0$ ) ansetzten, und ist daher unwesentlich.

Wir sehen also auch hier wieder, daß die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge und wegen

$$16 \sin^4 \frac{\Theta}{2} \approx \Theta^4$$

proportional der vierten Potenz der Öffnung ist.

Die Abhängigkeit der Intensität von der Wellenlänge ist so zu verstehen: Messen wir alle Längen (Entfernungen) in Wellenlängen, so ergibt sich für jede Lichtart, für Licht jeder beliebigen Wellenlänge die völlig gleiche Kurvenform der Intensitätsverteilung, doch sind die Intensitätswerte bei dem Übergang von einer Wellenlänge  $\lambda_1$  zur Wellenlänge  $\lambda_2$  zu multiplizieren mit  $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$ .

Die Kurve, die  $\lambda^2 I$  als Funktion der in Wellenlängen gemessenen Entfernung des Aufpunktes von der Brennpunktsebene einerseits, von der Achse des Bündels andererseits angibt, ist daher vollkommen unabhängig von der betrachteten Lichtart.

### § 26. Weitere Diskussion der Debyeschen Formel

Für Punkte, die außerhalb der Achse des Bündels sehr weit vor oder hinter der Brennpunktsebene liegen, für die also  $kr_P \gg 1$

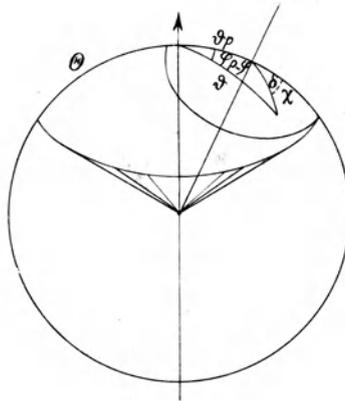


Abb. 16. Zusammenhang der Variablen  $\delta, \chi$  mit  $\vartheta, \varphi, \vartheta_P, \varphi_P$

ist, läßt sich folgende näherungsweise gültige Überlegung anstellen: Wir denken uns den Aufpunkt mit dem Brennpunkt verbunden und

führen um diese Verbindungsgerade, diesen „Lichtstrahl“  $\vartheta_P$ ,  $\varphi_P$ , neue Polarkoordinaten  $\delta$ ,  $\chi$  so ein, daß  $\delta$  die Poldistanz (analog zu  $\vartheta$ ) und  $\chi$  das Azimut, gerechnet von der durch die Achse des Bündels und den Aufpunkt gelegten Ebene, mißt. Dann ist (Abb. 16)

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= \pm [\cos \vartheta_P \cos \vartheta + \sin \vartheta_P \sin \vartheta \cos (\varphi_P - \varphi)], \\ \cos \gamma &= \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_P \cos \delta}{\sin \vartheta_P \sin \delta}, \end{aligned} \right\} (26; 1)$$

wo das obere Vorzeichen für Aufpunkte hinter dem Brennpunkt, das untere Zeichen für Aufpunkte vor dem Brennpunkt gilt. Dann geht (24; 6) über in

$$u_P = -\frac{ik}{2\pi} \iint e^{\mp ikr_P \cos \delta} \sin \delta d\delta d\chi, \quad (26; 2)$$

wie man auch anschaulich sofort erkennt. Zu beachten ist jetzt aber, daß die Integration über  $\delta$  nicht mehr in festen Grenzen auszuführen ist, sondern in Grenzen, die von der Lage des Aufpunktes abhängen, und daß die Integration über  $\chi$  in Grenzen auszuführen ist, die von den jeweiligen Grenzen von  $\delta$  abhängen.

Liegt der Punkt  $P$  zunächst im Innern des Strahlenkegels hinter dem Brennpunkte, so zerlegen wir das Integrationsgebiet in vor zwei Anteile, in die Gebiete (1) und (2), wie es Abb. 16 zeigt. Dann ist

$$u_P = u_P^{(1)} + u_P^{(2)} \quad (26; 3)$$

und

$$\left. \begin{aligned} u_P^{(1)} &= -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta - \vartheta_P} \int_0^{2\pi} e^{\mp ikr_P \cos \delta} \sin \delta d\delta d\chi \\ &= \pm \frac{1}{r_P} [e^{\mp ikr_P} - e^{\mp ikr_P \cos (\vartheta - \vartheta_P)}]. \end{aligned} \right\} (26; 4)$$

Bei der Integration über das Gebiet (2) beachten wir, daß  $\chi$  in den Grenzen  $-\chi_0$  bis  $+\chi_0$  zu integrieren ist, wo nach (1)

$$\cos \chi_0 = \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_P \cos \delta}{\sin \vartheta_P \sin \delta}$$

ist. Es wird dann

$$u_P^{(2)} = -\frac{ik}{\pi} \int_{\vartheta - \vartheta_P}^{\vartheta + \vartheta_P} e^{\mp ikr_P \cos \delta} \chi_0^{(\delta)} \sin \delta d\delta. \quad (26; 5)$$

Dies läßt sich durch wiederholte partielle Integration nach fallenden Potenzen von  $kr$  entwickeln. Das erste Glied der so erhaltenen Reihe lautet dann

$$u_P^{(2)} \approx \mp \frac{1}{\pi r_P} [\chi_0 e^{\mp ikr_P \cos \vartheta}]_{\vartheta - \vartheta_P}^{\vartheta + \vartheta_P}, \quad (26; 6)$$

und da  $\chi_0$  für  $\vartheta \pm \vartheta_P$  die Werte 0 bzw.  $\pi$  annimmt, so erhalten wir

$$u_P^{(2)} \approx \pm \frac{1}{r_P} e^{\mp ikr_P \cos (\vartheta - \vartheta_P)} \quad (26; 7)$$

und demnach

$$u_P = u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = \pm \frac{1}{r_P} e^{\mp ikr_P}, \quad (26; 8)$$

wo das obere Vorzeichen für Aufpunkte hinter dem Brennpunkte, das untere für Aufpunkte vor dem Brennpunkte gilt.

Liegt der Aufpunkt indessen im Gebiet des geometrisch-optischen Schattens, so fällt die Integration über das Gebiet (1) ganz fort, da dieses völlig verschwindet, so daß  $u_P^{(1)} = 0$  ist. Da andererseits jetzt  $\chi_0$  für  $\vartheta + \vartheta_P$  und auch für  $\vartheta - \vartheta_P$  den Wert Null annimmt, so wird auch  $u_P^{(2)} = 0$ , so daß also im geometrisch-optischen Schatten

$$u_P = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta < \vartheta_P < \pi - \vartheta. \quad (26; 9)$$

Wir sehen also, daß unsere Lösung (24; 5) auch der für  $r_P = -R$  geforderten Grenzbedingung

$$\left. \begin{aligned} u_P &= 0 \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_P < \pi - \vartheta \quad (\text{Schatten}), \\ u_P &= -\frac{1}{r_P} e^{+ikr_P} = \frac{1}{R} e^{-ikR} \quad \text{für} \quad \pi - \vartheta < \vartheta_P < \pi \end{aligned} \right\} (26; 10)$$

genügt, abgesehen von einer sehr engen Umgebung der optischen Achse, für die abweichend von (10<sub>2</sub>) nach (25; 1<sub>1</sub>)

$$u_P = -\frac{1}{r_P} [e^{ikr_P} - e^{ikr_P \cos \vartheta}] = \frac{1}{R} [e^{-ikR} - e^{-ikR \cos \vartheta}] \quad (26; 11)$$

ist.

### § 27. Der „Phasensprung“ in der Umgebung des Brennpunktes

Vergleichen wir die beiden Ausdrücke für  $u_P$  für einen weit vor dem Brennpunkt liegenden Aufpunkt

$$u_P = -\frac{1}{r_P} e^{+ikr_P}$$

und für einen weit hinter ihm liegenden

$$u_P = + \frac{1}{r_P} e^{-i k r_P} = - \frac{1}{r_P} e^{+ i k (r_P - 2 r_P)} e^{i \pi},$$

so erkennen wir, daß außer dem durch den geometrisch-optischen Abstand  $2 r_P$ , der beiden Aufpunkte bedingten Phasenunterschied

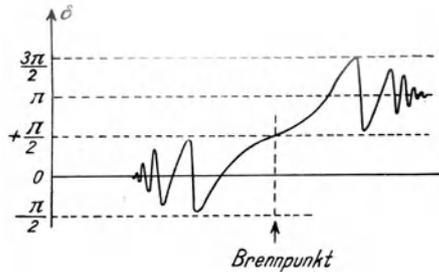


Abb. 17. Anomale Änderung der Phase beim Durchgang durch einen Brennpunkt. Die Phase ändert sich um  $\pi$

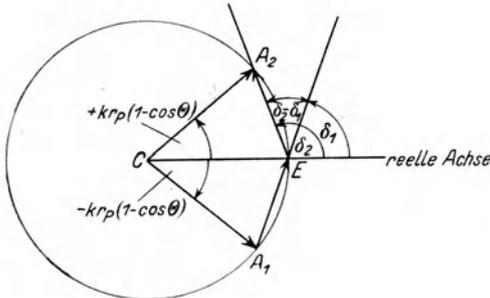


Abb. 18. Zur Phasenänderung längs der **Achse** einer kreisförmig begrenzten Kugelwelle. Nach (25; 1) ist der anomale Phasenunterschied in zwei Aufpunkten, von denen der eine ebenso weit vor dem Brennpunkt liegt wie der andere hinter ihm, gleich  $\delta_2 - \delta_1 = k r_P (1 - \cos \theta)$ , also von  $r_P$  linear abhängig.  $\delta_2 - \delta_1$  schwankt zwischen 0 und  $2\pi$  hin und her

noch ein weiterer sogenannter „Phasensprung“ vom Betrage  $\pi$  hinzukommt. Dieser Phasensprung erfolgt natürlich nicht plötzlich, sondern die Phase des Lichtes verändert sich beim Durchgang durch den Brennpunkt so, daß sie bereits vor dem Brennpunkt um den geometrisch-optischen Wert in immer größeren Schwankungen

herumpendelt, im Brennpunkt selbst vom geometrisch-optischen Wert sich um  $\frac{\pi}{2}$  unterscheidet und hinter dem Brennpunkt in allmählich abnehmenden Schwankungen um einen Wert herumpendelt, der sich um  $\pi$  von dem geometrisch-optischen Wert unterscheidet. Dies veranschaulicht sehr deutlich Abb. 17, die einer Arbeit von Reiche<sup>1)</sup> entnommen ist.

Ein solcher Phasensprung vom Betrage  $\pi$  besteht dagegen für die Achsenpunkte nicht. Für diese besteht vielmehr eine gänzlich anders geartete Phasenanomalie, die dauernd zwischen den Werten 0 und  $2\pi$  hin und her schwankt<sup>2)</sup> (Abb. 18).

### § 28. Intensitätsverteilung in der Brennpunktebene

Wir spezialisieren jetzt (24; 7) für Punkte in der Brennpunktebene, also für  $x_P = 0$ . Dann wird

$$\left. \begin{aligned}
 u_P &= -ik \int_0^{\Theta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta, \\
 &= -ik \int_0^{\Theta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \sin \vartheta \frac{1}{\cos \vartheta} d(\sin \vartheta).
 \end{aligned} \right\} (28; 1)$$

Nehmen wir jetzt an, daß  $\psi(\vartheta) = \cos \vartheta$ , daß also die Intensität des Strahlenbündels von der Mitte zum Rande zu abnimmt, wie  $\cos^2 \vartheta$ <sup>3)</sup>, so geht (1), wenn wir noch

$$k \varrho_P \sin \vartheta = \eta' \quad \text{und} \quad k \varrho_P \sin \Theta = \eta$$

setzen, über in

$$u_P = -\frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta \int_0^{\eta} J_0(\eta') \eta' \, d\eta' = -ik \sin^2 \Theta \frac{J_1(\eta)}{\eta}, \quad (28; 2)$$

$$I_P = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left( \frac{2 J_1(\eta)}{\eta} \right)^2. \quad (28; 3)$$

<sup>1)</sup> F. Reiche, Ann. d. Phys. (4) **29**, 65 u. 401, 1909.

<sup>2)</sup> Siehe J. Picht, Zeitschr. f. Phys. **65**, 14, 1930.

<sup>3)</sup> Dies kann entweder dadurch bedingt sein, daß das Strahlenbündel beim Durchgang durch das optische System im Innern der verschiedenen Medien eine von der Mitte zum Rande zunehmende Absorption oder an den

(2) ist, vom Vorzeichen und Phasenfaktor abgesehen (vgl. Anm. 1, S. 78) identisch mit (19; 2) und entsprechend ist (3) identisch mit (19; 3). Nach § 22 folgt dann für den Energiefluß  $\Phi_{x_P=0}$

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^{\varrho_P} = 2\pi \sin^2 \Theta \int_0^{\eta} \frac{J_1^2(\eta')}{\eta'} d\eta' = \pi \sin^2 \Theta \{1 - J_0^2(\eta) - J_1^2(\eta)\},$$

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_0^{\infty} = \pi \sin^2 \Theta$$

identisch mit (22; 3) bzw. (22; 4).

Setzen wir indessen  $\psi$  als von  $\vartheta$  unabhängig voraus, also  $\psi = 1$ , und beachten wir, daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \vartheta} &= (1 - \sin^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \sin^{2r} \vartheta \\ &= \sum_0^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \frac{\sin^{2r} \Theta}{\eta^{2r}} \eta'^{2r} \end{aligned}$$

oder wegen (A; 6)

$$\frac{1}{\cos \vartheta} = \sum_0^{\infty} \frac{\nu!! \sin^{2\nu} \Theta}{\nu^{*}!! \eta^{2\nu}} \eta'^{2\nu} \quad (28; 4)$$

ist, so erhalten wir

$$u_P = -\frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!! \sin^{2\nu} \Theta}{\nu^{*}!! \eta^{2\nu}} \int_0^{\eta} J_0(\eta') \eta'^{2\nu+1} d\eta'$$

und dies ist nach (A; 24)

$$u_P = -\frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\nu!! \sin^{2\nu} \Theta}{\nu^{*}!! \eta^{2\nu}} \eta^{2\nu+1} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-2)^{\mu} \mu! \binom{\nu}{\mu} \frac{J_{\mu+1}(\eta)}{\eta^{\mu}} \right\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu^{*}!!} \cdot 2^{\mu} \mu! \binom{\nu}{\mu} &= \frac{1}{2^{\nu} \nu!} 2^{\mu} \mu! \frac{\nu!}{\mu! (\nu - \mu)!} \\ &= \frac{1}{2^{\nu - \mu} (\nu - \mu)!} = \frac{1}{(\nu - \mu)^{*}!!} \end{aligned}$$

einzelnen Trennungsf lächen eine zum Rande hin zunehmende Reflexion erlitten hat, oder endlich dadurch, daß bereits das Objekt eine richtungsabhängige Strahlung (s. § 38) besitzt.

so daß

$$(u_P)_{x_P=0} = -i k \sin^2 \Theta \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^r (-1)^\mu \frac{\nu!!}{(\nu - \mu)^*!!} \sin^{2r} \Theta \frac{J_{\mu+1}(\eta)}{\eta^{\mu+1}}, \quad (28; 5)$$

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^r (-1)^\mu \frac{\nu!!}{(\nu - \mu)^*!!} \sin^{2r} \Theta \frac{J_{\mu+1}(\eta)}{\eta^{\mu+1}} \right\}^2. \quad (28; 6)$$

Man erkennt, daß (2) das erste Glied von (5) darstellt. Bei genügend kleiner Öffnung stimmen daher (5) und (2) überein.

### § 29. Intensität in beliebigen Aufpunkten

Den allgemeinen Fall, daß weder  $x_P = 0$  noch  $\varrho_P = 0$  ist, wollen wir nur unter der Voraussetzung behandeln, daß  $\psi(\vartheta) = \cos \vartheta$  ist. Dann wird mit  $k \varrho_P \sin \vartheta = \eta'$  und  $k \varrho_P \sin \Theta = \eta$

$$u_P = -\frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \int_0^{\eta} J_0(\eta') e^{ikx_P(1-\cos \vartheta)} \eta' d\eta', \quad (29; 1)$$

wo wir noch  $1 - \cos \vartheta$  als Funktion von  $\eta'$  zu betrachten haben. Es ist

$$1 - \cos \vartheta = 1 - (1 - \sin^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} = -\sum_1^{\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right) \sin^{2r} \vartheta$$

oder wegen (A; 5)

$$\left. \begin{aligned} 1 - \cos \vartheta &= \sum_1^{\infty} \frac{(\nu-1)!!}{\nu^*!!} \frac{\sin^{2\nu} \Theta}{\eta^{2\nu}} \eta'^{2\nu} = \sum_1^{\infty} m_\nu \eta'^{2\nu} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \Theta}{\eta^2} \eta'^2 + \frac{1}{8} \frac{\sin^4 \Theta}{\eta^4} \eta'^4 + \frac{1}{16} \frac{\sin^6 \Theta}{\eta^6} \eta'^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (29; 2)$$

Wir beschränken uns auf die ersten Glieder der Entwicklung, nehmen also  $\Theta$  als nicht zu groß an. Dann wird mit  $\frac{1}{2} k x_P \sin^2 \Theta = \chi$

$$\left. \begin{aligned} &e^{ikx_P(1-\cos \vartheta)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} k^2 x_P^2 (1 - \cos \vartheta)^2 + \dots + i [k x_P (1 - \cos \vartheta) - \dots] \\ &= 1 - \frac{\chi^2}{2 \eta^4} \eta'^4 \dots + i \left[ \frac{\chi}{\eta^2} \eta'^2 + \frac{1}{4} \frac{\chi \sin^2 \Theta}{\eta^4} \eta'^4 \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (29; 3)$$

wo wir noch, wenn wir im Ausdruck für die Intensität bereits die Glieder der Ordnung  $\sin^{10} \Theta$  vernachlässigen wollen, also nur bis einschließlich  $\sin^9 \Theta$  gehen, das zweite Glied der eckigen Klammer zu vernachlässigen haben. Dann wird

$$u_P = -\frac{ik}{y^2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \int_0^y J_0(y') \left[ y' - \frac{\zeta^2}{2y^4} y'^5 + i \frac{\zeta}{y^2} y'^3 \right] dy',$$

und dies ergibt nach (A; 25) und einigen Umformungen

$$u_P = -ik \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \left\{ \left[ \frac{J_1(y)}{y} - \frac{\zeta^2}{2} \left( \frac{J_1(y)}{y} - 4 \frac{J_2(y)}{y^2} + 8 \frac{J_3(y)}{y^3} \right) \right] \right. \\ \left. + i \zeta \left[ \frac{J_1(y)}{y} - 2 \frac{J_2(y)}{y^2} \right] \right\} \quad (29; 4)$$

und demnach

$$I_P = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ \frac{J_1^2(y)}{y^2} + 4\zeta^2 \frac{J_2^2(y) - 2J_1(y)J_3(y)}{y^4} \right\}. \quad (29; 5)$$

Für  $\zeta = 0$  geht dies über in (28; 3), d. h. in die Formel, die die Intensitätsverteilung in der Brennpunktebene liefert. Für  $y = 0$  ergibt sich aus (5)

$$(I_P)_{y=0} = (I_P)_{\rho_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\lambda^2} x_P^2 \sin^4 \Theta \right\},$$

entsprechend den ersten Gliedern der Entwicklung von (25; 2).

Für Aufpunkte auf den Randstrahlen ist annähernd (s. 21; 13)  $y = 2\zeta$ , so daß für diese (5) übergeht in

$$(I_P)_{y=2\zeta} = \frac{1}{x_P^2} \{ J_1^2(y) + J_2^2(y) - 2J_1(y)J_3(y) \}, \quad (29; 6)$$

ein Ausdruck, der von (21; 14) abweicht, was natürlich ist, da wir hier nur eine Annäherung benutzt haben, die voraussetzt, daß

$x^3 \ll \frac{\pi}{2}$ , also etwa  $\zeta \leq 0,25$  ist, während (21; 14) den exakten

Ausdruck liefert. Aus (21; 13\*\*) erkennt man sofort, daß der hier erhaltene Ausdruck (6) die ersten Glieder von (21; 13\*\*) enthält. Die späteren Glieder aber werden für  $y = 2\zeta \leq 0,5$  sehr klein, so daß sie vernachlässigt werden können.

Eine andere von (4) bzw. (5) abweichende Lösung erhalten wir, wenn wir in (1) nicht die Exponentialfunktion, sondern die Besselsche Funktion nach (A; 13) entwickeln, so daß, wenn wir im Exponenten von  $e$  alle höheren Glieder vernachlässigen,

$$u_P = -\frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \sum_0^\infty (-1)^v \frac{1}{2^{2v} (v!)^2} \int_0^\eta e^{i \frac{x}{\eta^2} \eta'^2} \eta'^{2v+1} d\eta'$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{ik}{\eta^2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \sum_0^\infty (-1)^v \frac{1}{2^{2v} (v!)^2} \frac{\eta^{2v+2}}{\xi^{v+1}} \int_0^\xi e^{i\chi} \chi^v d\chi.$$

Das hier auftretende Integral können wir nach (A; 39) auswerten und erhalten

$$u_P = -\frac{ik}{2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P} \sum_0^\infty (-1)^v \frac{1}{v!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2v} \{ [\hat{C}_{v+1}(\xi) \cos \xi + \hat{S}_{v+1}(\xi) \sin \xi] - i [\hat{C}_{v+1}(\xi) \sin \xi - \hat{S}_{v+1}(\xi) \cos \xi] \} \quad (29; 7)$$

$$I_P = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\langle \left\{ \sum_0^\infty (-1)^v \frac{1}{v!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2v} [\hat{C}_{v+1}(\xi) \cos \xi + \hat{S}_{v+1}(\xi) \sin \xi] \right\}^2 + \left\{ \sum_0^\infty (-1)^v \frac{1}{v!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2v} [\hat{C}_{v+1}(\xi) \sin \xi - \hat{S}_{v+1}(\xi) \cos \xi] \right\}^2 \right\rangle \left. \vphantom{\frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta} \right\} \infty \quad (29; 8)$$

$$= \frac{1}{x_P^3} \left\langle \left\{ \sin \xi - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \left( \sin \xi - \frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) \dots \right\}^2 + \left\{ 1 - \cos \xi + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \left( \cos \xi - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) \dots \right\}^2 \right\rangle \quad (29; 9)$$

Die Formeln (7) bzw. (8) sind besonders schnell konvergent in der Umgebung der Achse des Strahlenbündels; während (4) bzw. (5) besonders in der Brennpunktsebene und deren Umgebung brauchbar sind.

Setzen wir in (9)  $\eta = 0$ , so erhalten wir

$$(I_P)_{\eta=0} = \frac{2}{x_P^3} (1 - \cos \xi) = \frac{4}{x_P^3} \sin^2 \left( \frac{1}{4} k x_P \sin^2 \Theta \right)$$

entsprechend (25; 2) und (21; 12\*).

## Fünftes Kapitel

# Zylinderwellen

### § 30. Integraldarstellung für die Zylinderwelle<sup>1)</sup>

Der idealen Kugelwelle des dreidimensionalen Gebietes entspricht im zweidimensionalen der Fall, daß die „Kurve“ gleicher Phase, die Wellenlinie, ein Kreisbogen ist, daß es sich also um Wellen handelt, die in der Ebene fortschreiten und zu einem Punkt der Ebene hin konvergieren oder von ihm auslaufen (divergieren). Dreidimensional betrachtet, haben wir es hier mit Zylinderwellen zu tun. Auch dieses Problem hat verschiedene Bearbeitung gefunden. Wir schließen uns an diejenige von Debye an und denken dementsprechend wieder die begrenzende Blende ins negativ Unendliche ( $R = -\infty$ ) verlegt. Sie werde von außen mit einer zum Nullpunkt des Koordinatensystems hin konvergierenden Zylinderwelle beleuchtet, die in hinreichender Genauigkeit dargestellt werden kann durch<sup>2)</sup>

$$u = \psi Z_0(kR) \sqrt{\frac{2k}{\pi}} = \psi \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ikR \cos \alpha} d\alpha \approx \frac{\psi}{\sqrt{R}} e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})} \quad (30; 1)$$

und — bis auf Größen höherer Ordnung —

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial R} = -ik \frac{\psi}{\sqrt{R}} e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})}, \quad (30; 2)$$

wo  $Z_0$  bis auf den Faktor  $-2i/\pi$  die Hankelsche Funktion nullter Ordnung ist (siehe § 12).

Die aus dem Greenschen Satze folgende Formel, die der Formel (24; 1) des räumlichen Falles entspricht, lautet ja für den zweidimensionalen Fall nach (12; 4)

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \int \left( u \frac{\partial}{\partial n} Z_0(kr) - Z_0(kr) \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (30; 3)$$

<sup>1)</sup> P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **30**. 755, 1909.

<sup>2)</sup> Abweichend von der sonst üblichen Gepflogenheit haben wir hier einen zu  $\lambda^{-1/2}$  proportionalen Faktor hinzugefügt, da wir die Intensität der einfallenden Welle als von  $\lambda$  unabhängig voraussetzen.

Nun ist in gleicher Näherung wie oben

$$r = -R + (x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta),$$

wenn  $\vartheta$  den Winkel der Lichtstrahlen gegen die  $x$ -Achse, der Achse des Strahlenbündels, bezeichnet. Es wird dann

$$\left. \begin{aligned} Z_0(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}, \\ &\approx -i \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} e^{-ik(x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta)} \end{aligned} \right\} (30; 4)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} (Z_0(kr)) &= \frac{\partial}{\partial R} (Z_0(kr)) \\ &= +k \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} e^{-ik(x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta)}. \end{aligned} \right\}$$

In der gleichen Art wie oben ergibt sich so, da noch  $ds = R d\vartheta$  ist, für die Zylinderwelle die Darstellung

$$\begin{aligned} u_P &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \psi(\vartheta) e^{-ik(x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta)} d\vartheta \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \psi(\vartheta) e^{-ikr_P \cos(\vartheta - \vartheta_P)} d\vartheta^{-1}, \end{aligned} \quad (30; 5)$$

die streng der Schwingungsgleichung genügt und gleichfalls als Überlagerung ebener Wellen mit verschiedener Fortpflanzungsrichtung aufgefaßt werden kann.

### § 31. Intensitätsverteilung längs der Achse der Zylinderwelle

Bei Beschränkung auf solche Werte von  $kr_P = \frac{2\pi}{\lambda} r_P$ , für die  $kr_P \frac{\Theta^4}{24} \ll \pi$ , d. h.  $r_P \ll \frac{12}{\Theta^4} \lambda$ , oder etwa  $r_P \leq \frac{1,2}{\Theta^4} \lambda$  ist, d. h. in der Nähe der Brennlinie der räumlichen Zylinderwelle können wir

1)  $x_P = r_P \cos \vartheta_P$ ;  $y_P = r_P \sin \vartheta_P$ .

$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2$  setzen und erhalten so für Punkte auf der Achse des Bündels, wenn  $\psi(\vartheta) = 1$  ist, und wenn

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| \vartheta = v \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| \Theta = s \quad (31; 1)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} (u_P)_{y_P=0} &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\Theta}{s} e^{-ikx_P} \int_0^s e^{\mp i \frac{\pi}{2} v^2} dv \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\Theta}{s} e^{-ikx_P} \{C(s) \mp iS(s)\}, \quad (31; 2) \end{aligned}$$

wo das obere Vorzeichen für Punkte vor der Brennpunktlinie ( $x_P < 0$ ), das untere Vorzeichen für Punkte hinter der Brennpunktlinie ( $x_P > 0$ ) gilt<sup>1)</sup>. Das hier auftretende Integral bezeichnet man als das

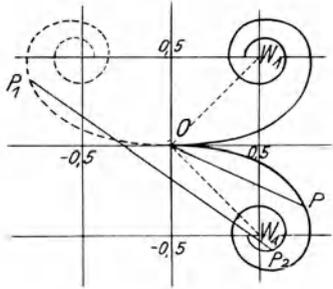


Abb. 19. Zusammenhang der Cornuschen Spirale mit dem Fresnelschen Integral

Fresnelsche. Es kann mit Hilfe der Cornuschen Spirale diskutiert werden und gibt so einen guten Einblick in die Intensitätsverhältnisse längs der Achse der Zylinderwelle. Betrachtet man nämlich (Abb. 19) den Realteil

$$C(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

<sup>1)</sup> Wir erwähnen hier noch, daß  $s$  mit der in den früheren Paragraphen benutzten Größe  $\xi$  ( $= \frac{1}{2} k x_P \Theta^2$ ) in der Beziehung  $\mp \frac{\pi}{2} s^2 = \xi$ , also  $s = \sqrt{\frac{2}{\pi} |\xi|}$ , steht.

und den Imaginärteil

$$S(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

des angegebenen Integrals als Koordinaten eines Punktes der komplexen Ebene mit horizontaler reeller und vertikaler imaginärer Achse, wobei  $s$  einen Parameter bezeichnet, so durchläuft dieser Punkt, wenn wir  $s$  variieren lassen, eine Spirale, deren Bogenlänge, gemessen vom Punkte ( $C = 0, S = 0$ ), gleich  $s$  ist. Denn es ist ja die Bogenlänge gegeben durch den Ausdruck

$$\int_0^s \sqrt{\left(\frac{dC}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dS}{ds}\right)^2} ds = \int_0^s ds = s.$$

Die Amplitude von  $u_P$  wird

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \Theta \frac{\sqrt{C^2(s) + S^2(s)}}{s},$$

ist also, von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich dem Quotienten aus dem Radiusvektor und dem zugehörigen Bogen desjenigen Punktes der Spirale, dessen Bogenlänge  $s$  mit der Koordinate  $x_P$  des Aufpunktes nach der angegebenen Formel

$$s = \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| \Theta$$

zusammenhängt. Bezeichnen wir den dem Aufpunkt  $P$  zugeordneten Spiralenpunkt gleichfalls mit  $P$ , so wird die entsprechende Amplitude

gleich  $\frac{\overline{OP}}{\widehat{OP}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \Theta$ , wenn  $\overline{OP}$  die geradlinige,  $\widehat{OP}$  die längs der

Spirale gemessene Entfernung des Punktes  $P$  vom Nullpunkt  $O$  bezeichnet. Für die Intensität erhalten wir demnach nach (2)

$$(I_P)_{y_P=0} = \frac{4}{\lambda} \Theta^2 \frac{C^2(s) + S^2(s)}{s^2} = \frac{4}{\lambda} \Theta^2 \frac{(\overline{OP})^2}{(\widehat{OP})^2}. \quad (31; 3)$$

Für Achsenpunkte vor der Brennpunktlinie liegt die Spirale wegen des  $-$ -Zeichens im Exponenten des Integrals im vierten Quadranten, während sie für Achsenpunkte hinter der Brennpunktlinie im ersten Quadranten liegt. Die beiden Spiralzweige besitzen im Punkte

$(0,5; 0,5)$  bzw.  $(0,5; -0,5)$  einen Windungspunkt  $W_1$  bzw.  $W_4$ , der für  $s = \infty$  erreicht wird.

Lassen wir den Aufpunkt vom negativ Unendlichen allmählich zur Brennnlinie heranrücken, so durchläuft der zugehörige Spiralenpunkt den im vierten Quadranten liegenden Zweig vom Windungspunkte  $W_4$  bis zur Spitze  $C = 0$ ;  $S = 0$  der Spirale. Man

erkennt, daß die Amplitude  $\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\overline{OP}}{\widehat{OP}} \Theta$  hierbei regelmäßige Schwan-

kungen ausführt und allmählich größer wird. Ihren größten Wert  $\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \Theta$  erreicht sie in der Brennnlinie, für die  $\frac{\overline{OP}}{\widehat{OP}} = 1$  wird.

Rückt der Aufpunkt auf der Achse durch die Brennnlinie hindurch, so durchläuft der Spiralenpunkt den im ersten Quadranten liegenden Zweig der Spirale von deren Spitze aus in Richtung zum Windungspunkte  $W_1$  hin, den er erreicht, wenn der Aufpunkt ins positiv

Unendliche gerückt ist. Die Amplitude  $\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\overline{OP}}{\widehat{OP}} \Theta$  nimmt dabei

wieder unter Ausführung regelmäßiger Schwankungen allmählich mehr und mehr ab. Es gibt aber keine Stelle auf der Achse, für die die Amplitude und demnach die Intensität völlig verschwindet.

Wir haben vorstehend den Ausdruck (2) ohne Rücksicht auf die Beschränkung  $r_P \ll \frac{12}{\Theta^4} \lambda$  ganz allgemein als gültig betrachtet,

was natürlich in Wahrheit nicht zutrifft. Man erkennt aber leicht, daß bei nicht allzuweit geöffnetem Bündel die Formel noch tatsächlich in ziemlich großer Entfernung von der Brennnlinie gültig

bleibt. Ist z. B.  $\Theta = 0,05$ , so ist  $\frac{1,2}{\Theta^4} \lambda$ , welchen Wert  $x_P$  ja noch erreichen darf, gleich  $1,92 \cdot 10^5 \lambda$ , also etwa 10 cm.

### § 32. Intensität außerhalb der Achse der Zylinderwelle

Eine ähnliche Diskussion wie vorstehend für die Punkte auf der Achse läßt sich auch für Punkte außerhalb der Achse durchführen, wenn man voraussetzt, daß  $kr_P \frac{\Theta^3}{6} \ll \pi$ , also  $r_P \ll \frac{3}{\Theta^3} \lambda$

ist, da dann auch  $\sin \vartheta = \vartheta$  gesetzt werden darf. Beachtet man, daß  $y_P = x_P \operatorname{tg} \vartheta_P$  ist, so wird mit

$$v = \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| (\vartheta - \operatorname{tg} \vartheta_P); \quad s_1 = - \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| (\Theta + \operatorname{tg} \vartheta_P);$$

$$s_2 = + \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x_P| (\Theta - \operatorname{tg} \vartheta_P),$$

$$u_P = - \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\Theta}{s_2 - s_1} e^{-ikx_P \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \vartheta_P\right)} \int_{s_1}^{s_2} e^{\mp i \frac{\pi}{2} v^2} dv, \quad (32; 1)$$

$$u_P = - \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\Theta}{s_2 - s_1} e^{-ikx_P \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \vartheta_P\right)} \{ \mathcal{A}C(s) \mp \mathcal{A}S(s) \}, \quad (32; 2)$$

wo das obere Vorzeichen wieder für Aufpunkte vor der Brennlinie, also für  $x_P < 0$ , das untere Vorzeichen für Aufpunkte hinter der Brennlinie gilt. Auch dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Cornuschen Spirale leicht diskutieren. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Spirale in den zweiten und dritten Quadranten hinein fortgesetzt [Abb. 19 (§ 31)]. Die Bogenlänge  $s$  rechnen wir dort negativ. Den Werten  $s_1$  und  $s_2$  entsprechen dann zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die bei  $|\operatorname{tg} \vartheta_P| < \Theta$ , also für Aufpunkte im Innern des Strahlenbündels, für Punkte vor der Brennlinie im zweiten und vierten Quadranten, für Punkte hinter der Brennlinie im dritten und ersten Quadranten liegen. Abgesehen von dem konstanten Faktor  $\Theta/\sqrt{\lambda}$  wird nunmehr entsprechend wie oben die Amplitude von  $u_P = \frac{P_1 P_2}{P_1 P_2}$ . Beim Durchschreiten der Brennlinie von negativen zu positiven Werten rückt  $P_1$  von dem im zweiten Quadranten liegenden Zweig auf den des dritten Quadranten (in Abb. 19 nicht eingezeichnet, siehe Abb. 49, § 69) und  $P_2$  von dem im vierten Quadranten liegenden auf den des ersten Quadranten. Man erkennt auch hier wieder beim Betrachten der Cornuschen Spirale, daß die Amplitude und demnach auch die Intensität Schwankungen unterworfen ist, ohne dabei im Innern des Strahlenbündels den Wert Null (außer im Unendlichen) zu erreichen.

Für Aufpunkte im geometrisch-optischen Schatten ist  $|\operatorname{tg} \vartheta_P| > \Theta$ . (Dies gilt übrigens auch schon für Aufpunkte im Innern der Zylinderwelle in der Nachbarschaft der Randstrahlen.) Es folgt

hieraus, daß für solche Aufpunkte  $s_1$  und  $s_2$  gleiches Vorzeichen haben, die zugehörigen Spiralpunkte  $P_1$  und  $P_2$  also auf dem gleichen Zweig der Spirale liegen und, sobald  $|\operatorname{tg} \vartheta_P| (> \Theta)$  hinreichend groß ist, sehr nahe zusammenfallen, d. h. es wird  $\widehat{P_1 P_2}$  sehr klein, während  $\widehat{P_1 P_2} = s_2 - s_1$ , das von  $\vartheta_P$  unabhängig ist, groß bleibt. Für diesen Fall wird daher die Amplitude und mithin auch die Intensität sehr gering (annähernd Null) sein.

### § 33. Intensität in der Brennlinienebene

Zum Schluß betrachten wir  $u_P$  noch für solche Punkte, die in der achsensenkrechten Brennlinienebene liegen, für die also  $x_P = 0$  ist. Für diese wird mit

$$k y_P \sin \vartheta = \eta'; \quad k y_P \sin \Theta = \eta,$$

$$u_P = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{\psi(\vartheta)}{\cos \vartheta} e^{-i\eta'} d\eta',$$

oder nach (28; 4), wenn  $\psi(\vartheta) = 1$  vorausgesetzt wird,

$$u_P = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \sum_0^{\infty} \frac{\nu!!}{\nu^*!!} \frac{\sin^{2\nu} \Theta}{\eta^{2\nu}} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-i\eta'} \eta'^{2\nu} d\eta'.$$

Nach (A; 39) wird dies, da

$$\hat{C}_n(-\eta) = \hat{C}_n(\eta) \quad \text{und} \quad \hat{S}_n(-\eta) = -\hat{S}_n(\eta)$$

ist,

$$u_P = -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{\nu!!}{\nu^*!!} \frac{\sin^{2\nu} \Theta}{\eta^{2\nu}} (2\nu)! \eta^{2\nu+1} \right. \\ \left. \cdot [\hat{C}_{2\nu+1}(\eta) \cos \eta + \hat{S}_{2\nu+1}(\eta) \sin \eta] \right\},$$

$$(u_P)_{x_P=0} = -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \sin \Theta \sum_0^{\infty} \left\{ (\nu!!)^2 \sin^{2\nu} \Theta \right. \\ \left. \cdot [\hat{C}_{2\nu+1}(\eta) \cos \eta + \hat{S}_{2\nu+1}(\eta) \sin \eta] \right\} \quad (33; 1)$$

$$= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \cdot \left\{ \sin \eta + \frac{\sin^2 \Theta}{\eta^2} (\sin \eta + \eta \cos \eta - \eta^2 \sin \eta) + \dots \right\} \quad (33; 2)$$

und demnach

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\lambda}{\pi^2 y_P^2} \{ \sin \eta + \dots \}^2. \quad (33; 3)$$

Setzen wir andererseits voraus, daß  $\psi(\vartheta) = \cos \vartheta$  ist, so erhalten wir

$$(u_P)_{x_P=0} = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-i\eta'} d\eta' = -\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \Theta}{\eta} \sin \eta, \quad (33; 4)$$

also das erste  $\Sigma$ -Glied von (1). Für die Intensität ergibt sich

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{4}{\lambda} \frac{\sin^2 \Theta}{\eta^2} \sin^2 \eta = \frac{4}{\lambda} \sin^2 \Theta \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 = \frac{\lambda}{\pi^2 y_P^2} \sin^2 \eta. \quad (33; 5)$$

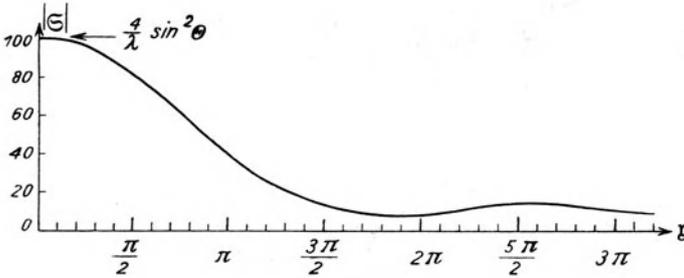


Abb. 20

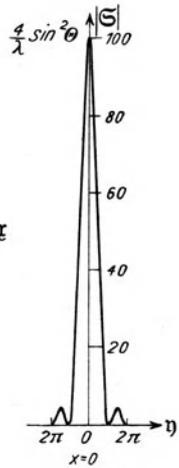


Abb. 21

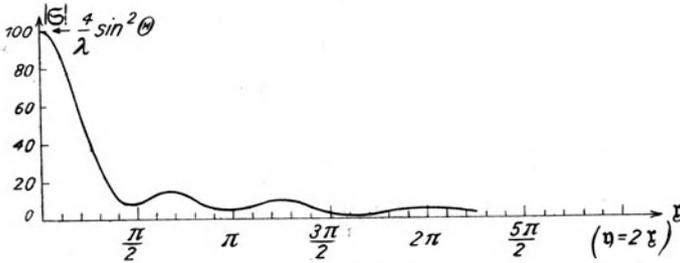


Abb. 22

Abb. 20. Intensitätsverteilung längs der Achse einer Zylinderwelle, deren halber Öffnungswinkel =  $\Theta$  ist.  $\xi = \pi \frac{x_P}{\lambda} \sin^2 \Theta$

Abb. 21. Intensitätsverteilung längs einer durch den Brennpunkt einer Zylinderwelle gehenden, zur Achse und zur Brennlinie senkrechten Geraden. ( $\Theta$  = halber Öffnungswinkel)

Abb. 22. Intensitätsverteilung längs der (Rand)Strahlen  $y_P = x_P \sin \Theta$  einer Zylinderwelle, deren halber Öffnungswinkel =  $\Theta$  ist.

$$\eta = 2\pi \frac{y_P}{\lambda} \sin \Theta, \quad \xi = \pi \frac{x_P}{\lambda} \sin^2 \Theta$$

Vergleichen wir dies mit (21; 12), das für die Intensitätsverteilung längs der Achse einer Kugelwelle gilt, so erkennen wir, daß die Intensitätsverteilung in der Brennlinienebene der Zylinderwelle senkrecht zur Brennlinie ganz ähnlich ist derjenigen längs der Achse einer Kugelwelle. Für  $\eta = N\pi$ , d. h.  $y_P \sin \Theta = \frac{N}{2} \lambda$  mit  $N = 1, 2, 3, \dots$  verschwindet  $(I_P)_{x_P=0}$ , so daß also die Brennlinie der Zylinderwelle hier von abwechselnd dunklen und hellen parallelen Linien umgeben ist. Wir geben nachfolgend noch die graphische Darstellung für die Intensitätsverteilung einer Zylinderwelle, und zwar für Punkte auf der Achse des Bündels,

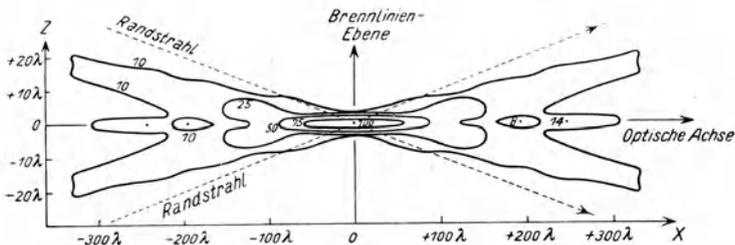


Abb. 23. Linien (Flächen) gleicher Helligkeit einer Zylinderwelle, für die  $\sin \Theta = 0,1$  ist. (Der Maßstab der  $z$ -Achse ist gleich dem Vierfachen von dem der  $x$ -Achse.) Um die Flächen gleicher Helligkeit zu erhalten, ist die Zeichnung senkrecht zur Papierebene zu verschieben

für solche auf der durch den Brennpunkt gehenden achsensenkrechten Linie (zweidimensional betrachtet), und endlich für Punkte, die auf den geometrisch-optischen Randstrahlen des Bündels liegen (Abb. 20 bis 22). In Abb. 23 geben wir außerdem eine Zeichnung der „Linien gleicher Helligkeit“ für einen zur Brennlinie der räumlichen Zylinderwelle senkrechten Achsenschnitt. Die Abbildung weist große Ähnlichkeit auf mit derjenigen für die Kugelwelle, die wir oben (Abb. 13) reproduziert haben.

### § 34. Phasensprung in der Umgebung der Brennlinie

Mit Hilfe der Cornuschen Spirale läßt sich übrigens nicht nur — wie dies oben geschehen ist — die Amplitude in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Aufpunktes diskutieren, sondern auch

die Abweichung der Phase von dem geometrisch-optischen Werte. Schreiben wir nämlich

$$\frac{C(s)}{\sqrt{C^2(s) + S^2(s)}} = \cos \delta; \quad \mp \frac{S(s)}{\sqrt{C^2(s) + S^2(s)}} = \sin \delta, \quad (34; 1)$$

so ist für Punkte auf der Achse des Bündels nach (31; 2)

$$u_P = - \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \frac{\Theta}{s} \sqrt{C^2(s) + S^2(s)} e^{-ikx_P} e^{i\delta}. \quad (34; 2)$$

Da die geometrisch-optische Phase durch den Faktor  $e^{-ikx_P}$  gegeben ist, so gibt  $e^{i\delta}$  die Phasenabweichung an. Nun ist  $\delta$  der Winkel, den der Fahrstrahl  $\overrightarrow{OP}$  mit der positiven reellen Achse bildet. Für Achsenpunkte weit vor der Brennlinie ist  $\delta = -\pi/4$  entsprechend unserem Ansatz (30; 1), so daß also der Winkel  $-\frac{\pi}{4} - \delta = \sphericalangle W_4 O P$  die Phasenabweichung gegen den geometrisch-optischen Wert angibt. Beim Heranrücken des Aufpunktes vom negativ Unendlichen an die Brennlinie schwankt dieser Winkel um den Wert Null herum, erreicht in der Brennlinie den Wert  $\pi/4$ , überschreitet sodann diesen Wert und schwankt hinter der Brennlinie um den Wert  $\pi/2$  herum, den er weit hinter der Brennlinie, im positiv Unendlichen, endgültig erreicht. Bei einer Zylinderwelle beträgt daher die Phasenabweichung, der „Phasensprung“ beim Durchgang durch die Brennlinie  $\pi/2$ .

Ganz ähnlich läßt sich auch die Phasenabweichung für Aufpunkte außerhalb der Achse der Zylinderwelle aus der Cornuschen Spirale ablesen. Sie wird, wie man leicht nachprüft, gemessen durch den Winkel, den  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  mit  $\overrightarrow{O W_4} = \overrightarrow{W_3 W_4}$ , bildet.

Da weit vor der Brennlinie  $P_1$  mit  $W_3$  und  $P_2$  mit  $W_4$  zusammenfällt, während weit hinter der Brennlinie  $P_1$  in  $W_3$  und  $P_2$  in  $W_1$  liegt, so ergibt sich auch hier der Phasensprung zu  $\pi/2$ . Denn  $\overrightarrow{W_3 W_1}$  bildet mit  $\overrightarrow{W_3 W_4}$  einen Winkel vom Betrage  $\pi/2$ .

Aus (2) [und ebenso für außerhalb der Achse gelegene Punkte aus (32; 2)] erkennt man leicht, daß  $u_P$  der für  $R = -\infty$  gestellten Grenzbedingung (30; 1) streng genügt. Denn setzen wir wegen  $s \rightarrow \infty$  die Werte  $C(s) = 0,5$ ;  $S(s) = 0,5$  [und entsprechend  $\mathcal{A}C(s) = 1$ ;  $\mathcal{A}S(s) = 1$ ], so ergibt sich

$$u_P = - \frac{i}{\sqrt{|R|}} e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})},$$

oder wegen  $R = -\infty$

$$u_P = \frac{1}{\sqrt{R}} e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})}$$

identisch mit (30; 1).

### § 35. Energetische Betrachtungen für die Zylinderwelle

Wir betrachten noch die Gesamtenergie, die durch die Brennlinienebene hindurchgeht, oder da wir es hier mit einem zwei-dimensionalen Problem zu tun haben, die Energiemenge, die durch eine zur Brennlinie und zur Achse der Zylinderwelle senkrechte Gerade, die sich von  $y = -\infty$  bis  $y = +\infty$  erstreckt, hindurchströmt. Für  $\Phi_{x_P=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$  erhalten wir unter Benutzung von (33; 5)

$$\begin{aligned} \Phi_{x_P=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (I_P)_{x_P=0} dy_P = \frac{4}{\lambda k} \sin \Theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \eta'}{\eta'^2} d\eta' \\ &= \frac{4}{\lambda k} \sin \Theta \cdot \pi = 2 \sin \Theta, \end{aligned} \quad (35; 1)$$

wie dies verlangt werden muß.

Beachten wir, daß

$$\sin^2 \eta' = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\eta') = -\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^\mu \frac{(2\eta')^{2\mu}}{(2\mu)!}$$

ist, so ergibt sich für  $\Phi_{x_P=0} \Big|_{-\eta}^{+\eta}$  sofort

$$\begin{aligned} \Phi_{x_P=0} \Big|_{-\eta}^{+\eta} &= \frac{4}{\lambda k} \sin \Theta \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{\sin^2 \eta'}{\eta'^2} d\eta' \\ &= -\frac{2 \sin \Theta}{\pi \eta} \sum_1^{\infty} (-1)^\mu \frac{(2\eta)^{2\mu}}{(2\mu)! (2\mu - 1)}. \end{aligned} \quad (35; 2)$$

Nun liegt die erste Nullstelle der Brennlinienebene bei  $\eta = \pm \pi$ . Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir

$$\Phi_{x_P=0} \Big|_{\eta=-\pi}^{\eta=+\pi} = 1,8 \sin \Theta = 0,9 \Phi_{x_P=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

so daß bei einer idealen Zylinderwelle im „Bilde“ 90% der Gesamtenergie des Bündels vereinigt werden.

## Sechstes Kapitel

# Erscheinungen bei nichtmonochromatischem Licht

### § 36. Abhängigkeit der Intensitätsverteilung von der Wellenlänge

Nach den Ausführungen der Paragraphen 19 bis 29 ist die Intensität einer Kugelwelle nicht nur Funktion der Koordinaten des Aufpunktes, sondern auch Funktion der Öffnung der Kugelwelle und der Wellenlänge des benutzten Lichtes. Uns interessiert hier besonders diese letzte Abhängigkeit. Nach ihr ist  $\lambda^2 I$  als Funktion der Lage des Aufpunktes von der Wellenlänge unabhängig, wenn die Entfernung  $r_P$  des Aufpunktes vom Brennpunkte in Wellenlängen gemessen wird. Hieraus ergeben sich zwei interessante Folgerungen:

Betrachten wir zunächst einen Aufpunkt, dessen Entfernung vom Brennpunkte — in einer von  $\lambda$  unabhängigen Einheit (z. B. Zentimeter) gemessen — gleich  $r_1$  sei. In Einheiten der Wellenlänge  $\lambda_1$  sei diese Entfernung durch  $r^*$  gemessen, so daß also  $r_1 = \lambda_1 r^*$  ist. Die Intensität der Lichtart (Farbe)  $\lambda_1$  in diesem Punkte sei  $I_1$ . Die betreffende Kugelwelle enthalte außer der Lichtart  $\lambda_1$  noch eine zweite  $\lambda_2$ . Wir betrachten nun einen zweiten Punkt, dessen Entfernung vom Brennpunkte in Wellenlängen  $\lambda_2$  als Einheit gleichfalls  $r^*$  sei. Die tatsächliche Entfernung ist dann

$$r_2 = \lambda_2 r^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} r_1 \neq r_1.$$

Die Intensität der Lichtart  $\lambda_2$  im Punkte  $r_2$  sei  $I_2$ . Dann ist, da ja  $\frac{r_1}{\lambda_1} = \frac{r_2}{\lambda_2} = r^*$  war, nach den obigen Ausführungen

$$\lambda_1^2 I_1 = \lambda_2^2 I_2 \quad \text{oder:} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

d. h. es ergibt sich ein Gesetz, das der Form nach vollkommen mit dem geometrisch-optischen Gesetz der „quadratischen Intensitäts-

abnahme mit der Entfernung“ übereinstimmt, das aber in Wirklichkeit doch eine von diesem Gesetz völlig verschiedene Aussage enthält, da hier zwei Intensitäten verschiedener Lichtarten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in zwei in gleicher Richtung liegenden Punkten ( $\vartheta_P$  und  $\varphi_P$  blieben unverändert) verglichen werden, deren Entfernungen vom Brennpunkte sich wie die zugehörigen Wellenlängen verhalten. Um dies auch in den Gleichungen scharf zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir diese besser folgendermaßen

$$\frac{I_{r_1 = \lambda_1 r^*}^{(\lambda_1)}}{I_{r_2 = \lambda_2 r^*}^{(\lambda_2)}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}. \quad (36; 1)$$

An und für sich war dies Resultat als selbstverständlich zu erwarten, wenn unsere für die Kugelwelle gegebene Formel (24; 5) richtig sein soll; denn wäre sie nicht erfüllt, so würde dies besagen, daß das aus Licht mehrerer Wellenlängen zusammengesetzte Strahlenbündel seine prozentuale Zusammensetzung mit der Entfernung verändert, also in größerer Entfernung stärker rot oder blau erscheint als in geringerer Entfernung von der Lichtquelle, abgesehen natürlich von den tatsächlich vorhandenen, aber nur in der Nähe des Brennpunktes wahrnehmbaren Farbschwankungen, die dadurch hervorgerufen werden, daß die verschiedenen im zusammengesetzten Lichte enthaltenen Farben ihre Intensitätsminima und -maxima in verschiedenen (im Verhältnis der zugehörigen Wellenlängen stehenden) Entfernungen vom Brennpunkt besitzen. Und dies ist die zweite Folgerung, die wir zu ziehen hatten, die wir indessen noch in anderer, sich unmittelbar aus (1) ergebender Hinsicht zu ergänzen haben. Formel (1) ist von der Entfernung  $r^*$  unabhängig und geht für  $r^* = 0$  über in

$$\left( \frac{I^{(\lambda_1)}}{I^{(\lambda_2)}} \right)_{r_1 = r_2 = 0} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}. \quad (36; 2)$$

Im Brennpunkte also verhalten sich die Intensitäten zweier verschiedenfarbiger Lichtarten umgekehrt wie die Quadrate der zugehörigen Wellenlängen, vorausgesetzt, daß die Intensitäten in großer Entfernung vom Brennpunkte unabhängig von der Wellenlänge waren. Wir betrachten jetzt eine Kugelwelle, die aus Licht verschiedener Wellenlängen (etwa  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ ) zusammengesetzt ist. Die verschiedenen Farben seien in ihr mit gleicher Intensität enthalten. Um die Lichtverteilung in der Umgebung des Brenn-

punktes nach Intensität und Farbwirkung zu erhalten, haben wir dann die wellenlängenunabhängige Kurve

$$[\lambda^2 I = ] I^* = I^*(r_P^*, \vartheta_P, \varphi_P) [= I^*(r_P/\lambda, \vartheta_P, \varphi_P)] \quad (36; 3)$$

[in der wir etwa nur  $r_P^*$  oder  $r_P^* \sin \vartheta_P$  oder  $r_P^* \cos \vartheta_P$  als variabel ansehen, während  $\vartheta_P, \varphi_P$  bzw.  $r_P^* \cos \vartheta_P, \varphi_P$  bzw.  $r_P^* \sin \vartheta_P, \varphi_P$  als konstant vorausgesetzt seien<sup>1)</sup>] in Richtung der Abszisse mit  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  zu multiplizieren (zu strecken) und in Richtung der Ordinate durch  $\lambda_1^2$  bzw.  $\lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$  zu dividieren (zu verkleinern).

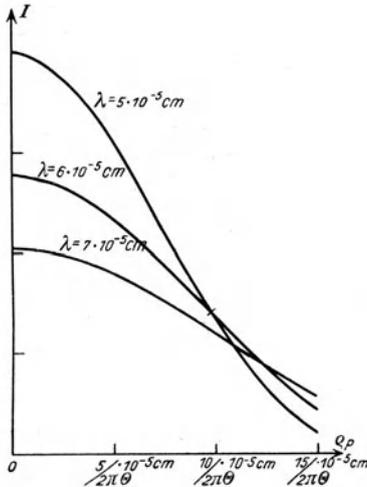


Abb. 24. Intensitätsverhältnis und Verlauf des Intensitätsabfalls für verschiedene Farben (Wellenlängen) in der Brennebene einer Kugelwelle

Die so erhaltenen Kurven sind dann einfach einander zu überlagern, d. h. so aufeinander zu legen, daß die entsprechenden Abszissen zusammenfallen. Man erhält dann für jede in absoluter Einheit (cm) gemessene Entfernung den zugehörigen Intensitätsanteil der verschiedenen Farben, angegeben in objektivem Maße. Abb. 24 zeigt dies für die Wellenlängen  $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ ,  $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ ,  $\lambda_3 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ . In der Entfernung, in der sich die einzelnen Intensitätskurven nahezu durchkreuzen, wird der

<sup>1)</sup> Man erhält dann die Intensitätsverteilung längs eines geometrisch-optischen Lichtstrahles bzw. längs einer achsenkrechten Geraden bzw. längs einer achsenparallelen Geraden.



durchgeführt. Er bestimmt im Farbdreieck die Kurve, die die Mischfarbe in Abhängigkeit von der Entfernung vom Brennpunkt in der achsensenkrechten Brennpunktebene angibt.

Wir geben nachfolgend noch die von Mecke publizierte Abbildung wieder (Abb. 25). Diese ist so zu verstehen: jeder Punkt im Farbdreieck bezeichnet eine bestimmte Mischfarbe in ihrer Zusammensetzung aus den drei Grundfarben Rot, Grün, Violett, und zwar bezeichnen die Eckpunkte des Dreiecks die 100%igen Farben Rot, Grün und Violett. Der Abstand eines Punktes im Dreieck von einer Grundseite des Dreiecks, dividiert durch die zu dieser Grundseite gehörige Dreieckshöhe, gibt an, zu wieviel Prozent die durch die gegenüberliegende Ecke angegebene Grundfarbe in der Mischfarbe enthalten ist. Der Punkt  $W$  bezeichnet „Weiß“. Die Kurve, die in dieses Dreieck eingezeichnet ist, verbindet nun die Farbpunkte, die im Beugungsbilde der Brennebene einer Kugelwelle aufeinander folgen, wenn man vom Brennpunkt längs einer durch ihn gelegten Geraden fortschreitet. Die an die Kurve angeschriebenen Zahlen geben an, in welcher Entfernung vom Brennpunkt die betreffende Mischfarbe erscheint, und zwar ist diese Entfernung ausgedrückt in  $\frac{2\pi}{\lambda_D} \Theta$  als Einheit, wo  $\lambda_D$  die Wellenlänge  $0,589 \mu$  der gelben Natriumlinie, der  $D$ -Linie, bedeutet.

Verbindet man einen im Inneren des Dreiecks liegenden Punkt, der also eine bestimmte Mischfarbe charakterisiert, mit dem Punkte  $W$  und verlängert diese Verbindungslinie über den betreffenden Punkt hinaus bis zum Schnitt  $F$  mit der Dreiecksseite, wie dies z. B. für den Punkt  $A$  geschehen ist, so gibt das Verhältnis  $\frac{WA}{WF}$  den prozentualen „Weißgehalt“, das Verhältnis  $\frac{AF}{WF}$  den prozentualen „Farbgehalt“ der betreffenden Mischfarbe an.

Da das erste Intensitätsminimum der Brennpunktebene einer Kugelwelle etwa bei

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda} \Theta \varrho_P = 3,8$$

liegt, so erkennt man aus Abb. 25 noch, daß dieser erste (dunkle) Beugungsring auf der Innenseite schwach violett, auf der Außenseite schwach grün-blau ist.

### § 37. Chromatische Aberration

Im vorigen Paragraphen nahmen wir an, daß die verschiedenen Lichtarten, die in dem die Abbildung vermittelnden Strahlenbündel enthalten sind, bildseitig Kugelwellen sind, deren Brennpunkte zusammenfallen. Tatsächlich wird diese Voraussetzung in den meisten Fällen — abgesehen von durch Spiegelung bewirkter Abbildung — nicht zutreffen, da der Brechungsindex der verschiedenen Medien noch von der Farbe des Lichtes abhängt. Es wird sich also die sogenannte chromatische Aberration bemerkbar machen. Die hierdurch bewirkte Verundeutlichung des Bildes läßt sich wellentheoretisch etwa folgendermaßen behandeln: Wir beachten zunächst, daß die als „Einstellebene“ gewählte achsensenkrechte Ebene nur für eine einzige Lichtart — oder im Falle der „chromatisch korrigierten“ Systeme: für einige bestimmte Lichtarten — die eigentliche „Bildebene“ darstellt. Für alle übrigen im abbildenden Bündel enthaltenen Lichtarten ist die Einstellebene eine zur Bildebene parallele achsensenkrechte Ebene. Wir haben daher die Intensitätsverteilung in den für die verschiedenen Lichtarten verschiedenen achsensenkrechten Ebenen zu bestimmen und sie entsprechend den Ausführungen des vorigen Paragraphen (Farbdreieck) zu überlagern. Wir brauchen hier nicht näher darauf einzugehen.

Wir erwähnen nur noch folgende interessante Erscheinung: Da der Durchmesser des zentralen Lichtscheibchens, das wir als wellentheoretisches Bild anzusprechen haben, nach den Ausführungen der früheren Paragraphen proportional der Wellenlänge des Lichtes ist, so muß auch bei vollständiger chromatischer Korrektur das Lichtscheibchen einen farbigen Rand aufweisen — und zwar auch dann, wenn die verschiedenen Lichtarten sich im geometrisch-optischen Bildpunkt, dem Mittelpunkt des Lichtscheibchens, zu weißem Licht ergänzen. Da nun der Durchmesser des extra- (oder auch intra-)fokalen Beugungsscheibchens mit der Entfernung vom eigentlichen Bildpunkt des Strahlenbündels — wenigstens in erster Näherung — wächst, so muß es (wenigstens prinzipiell) möglich sein, die chromatische Aberration so zu wählen, daß die in der Einstellebene auftretenden Lichtscheibchen für die verschiedenen Farben gleichen Durchmesser haben, nämlich den der langwelligsten im Bündel enthaltenen Lichtart. Wir begnügen uns hier mit diesem kurzen Hinweis.

## Siebentes Kapitel

### Inhomogene Wellen<sup>1)</sup>

#### § 38. Das objektseitige Strahlungsdiagramm und die bildseitige $\psi$ -Funktion

Bei den Entwicklungen der vorhergehenden Kapitel haben wir im allgemeinen  $\psi(\vartheta, \varphi)$  als von  $\vartheta$  und  $\varphi$  unabhängig angenommen und demzufolge gleich 1 gesetzt. Wir nahmen also an, daß der abzubildende Objektpunkt nach allen Richtungen gleich stark strahlt und beim Durchgang durch das System keine ungleichmäßige Lichtschwächung erfährt. Nur in einzelnen Fällen setzten wir  $\psi(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta$  voraus. Tatsächlich werden diese Annahmen in vielen Fällen nicht ausreichen. Es ist daher zu untersuchen, ob und in welchem Maße die Intensitätsverteilung des bildseitigen Strahlenbündels von der die objektseitige Strahlung (in ihrer Abhängigkeit von der Richtung) angehenden Funktion  $\psi_0$  beeinflusst wird. Der Index 0 weise auf die Zugehörigkeit zum Objektpunkt hin. Wir wollen hier der Einfachheit wegen annehmen, daß die Amplitudenfunktion  $\psi_0$  rotationssymmetrisch ist und die Achse des Strahlenbündels zur Symmetrieachse hat. Es ist dann  $\psi_0 = \psi_0(\vartheta_0)$ , wo  $\vartheta_0$  den objektseitigen Winkel gegen die Achse des Strahlenbündels bezeichnet. Tragen wir die Werte von  $\psi_0(\vartheta_0)$  als Polarkoordinaten  $\psi_0(\vartheta_0)$  auf, so erhalten wir das sogenannte „Strahlungsdiagramm“ des Objektpunktes. Ein spezielles, in vielen Fällen zutreffendes Strahlungsgesetz ist das Lambertsche cos-Gesetz. Dieses sagt aus, daß die Strahlungsintensität proportional ist dem cos des Winkels  $\vartheta_0$ , also

$$\psi_0^2 = s_0 \cos \vartheta_0. \quad (38; 1)$$

Für die hier durchzuführenden allgemeinen Überlegungen genügt es, eine Verallgemeinerung dieses Lambertschen cos-Gesetzes zugrunde zu legen. Als solche wählt Berek<sup>1)</sup> den Ansatz

$$\psi_0^2 = \cos \vartheta_0 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{2,\mu} \sin^{2\mu} \vartheta_0 \right\}^4 = \cos \vartheta_0 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2,\mu} \sin^{2\mu} \vartheta_0 \right\}^2, \quad (38; 2)$$

<sup>1)</sup> M. Berek, Ann. d. Phys. (5) 4, 285, 1930.

wo die  $\sigma$  sich aus den  $s$  nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= s_0^2 \\ \sigma_2 &= 2 s_0 s_2 \\ \sigma_4 &= s_2^2 + 2 s_0 s_4 \\ \sigma_6 &= 2 s_0 s_6 + 2 s_2 s_4 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (38; 3)$$

ergeben. Wir bezeichnen die beiden für  $\psi_0^2$  angegebenen Summen als  $s$ -Summe bzw.  $\sigma$ -Summe. Beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder der  $s$ -Summe, setzt also

$$\psi_0^2 = s_0^4 \cos^2 \vartheta_0 \left( 1 + \frac{s_2}{s_0} \sin^2 \vartheta_0 \right)^4, \quad (38; 4)$$

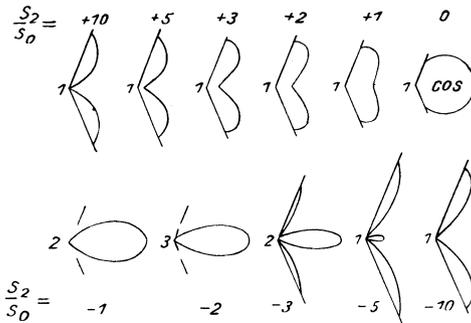


Abb. 26. Strahlungsdiagramme eines Objektpunktes [nach (4)] bei Veränderung des Verhältnisses  $\frac{s_2}{s_0}$

so entspricht dies der dreigliedrigen  $\sigma$ -Summe mit den Koeffizienten

$$\sigma_0 = s_0^2; \quad \sigma_2 = 2 s_0 s_2; \quad \sigma_4 = s_2^2.$$

Lassen wir hier  $\frac{s_2}{s_0}$  variieren, so erhalten wir die in Abb. 26<sup>1)</sup> wiedergegebenen Strahlungsdiagramme, bei denen die jeweiligen  $\frac{s_2}{s_0}$ -Werte angeschrieben sind. Man erkennt aus dieser Abbildung, daß bereits durch (4) die charakteristischen Züge eines objektseitigen Strahlungsdiagramms genügend genau dargestellt werden.

<sup>1)</sup> Die Abb. 26 bis 33 sind — teilweise geändert — der Arbeit von Berek (a. a. O.) entnommen.

Um einen vergleichenden Überblick über die Abhängigkeit der bildseitigen Intensitätsverteilung von dem objektseitigen Strahlungsfeld zu erhalten, ist noch dafür zu sorgen, daß die durch (2) bzw. (4) gegebenen Strahlungsfelder in den gleichen objektseitigen Aperturwinkel  $\Theta_0$  die gleichen Energiemengen hineinsenden. Es ist daher in (4) der Koeffizient  $s_0$  so zu wählen, daß

$$\int_0^{\Theta_0} \psi_0^2 \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 = \text{const.} \quad (38; 4^*)$$

Um aus der objektseitigen Strahlungsfunktion  $\psi_0$  die bildseitige Amplitudenfunktion abzuleiten, haben wir zu berücksichtigen, daß bei aplanatischer Abbildung — und solche wollen wir hier der Einfachheit wegen allein voraussetzen — die sin-Bedingung erfüllt ist. Es ist also

$$\sin \vartheta_0 = \text{const} \sin \vartheta = B \sin \vartheta, \quad (38; 5)$$

wenn  $\vartheta$  den bildseitigen Winkel gegen den Hauptstrahl des Bündels bezeichnet. Die Proportionalitätskonstante setzen wir vorübergehend gleich  $B$ . Es ist noch  $B = \frac{n'}{n} \beta'$ , wo  $\beta'$  die Gaußsche Lateralvergrößerung ist.  $n$  ist der objektseitige,  $n'$  der bildseitige Brechungsindex. Mit (5) geht (2) über in

$$\begin{aligned} \psi_0^2 &= \cos \vartheta_0 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{2\mu} B^{2\mu} \sin^{2\mu} \vartheta \right\}^4 \\ &= \cos \vartheta_0 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} B^{2\mu} \sin^{2\mu} \vartheta \right\}^2 \end{aligned} \quad (38; 6)$$

Zu dieser durch das objektseitige Strahlungsdiagramm bedingten bildseitigen Amplitudenfunktion  $\psi_0^2$  müssen wir noch einen Faktor hinzufügen, der die Absorption (allgemeiner: die Lichtschwächung) beim Durchgang des Lichtes durch das optische System angibt. Zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen wollen wir annehmen, daß dieser Faktor den Wert  $\frac{\cos^2 \vartheta}{\cos \vartheta_0}$  hat. Wir erhalten dann für die bildseitige  $\psi$ -Funktion

$$\psi(\vartheta) = \cos \vartheta \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} B^{2\mu} \sin^{2\mu} \vartheta. \quad (38; 7)$$

Setzen wir dies in den für die Kugelwelle erhaltenen Ausdruck [24; 7]<sup>1)</sup>

$$u_P = ik \int_0^{\Theta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ikx_P \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta$$

ein, so erhalten wir

$$u_P = ik \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sigma_{2,\mu} B^{2\mu} \int_0^{\Theta} J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ikx_P \cos \vartheta} \sin^{2\mu+1} \vartheta d(\sin \vartheta) \right\}. \quad (38; 8)$$

### § 39. Intensitätsverteilung in der Bildebene

Setzen wir hier zunächst  $x_P = 0$ , so erhalten wir den Wert von  $u_P$  für die Bildebene, und zwar wird, wenn wir wieder  $k \varrho_P \sin \vartheta = \eta'$  und  $k \varrho_P \sin \Theta = \eta$  setzen:

$$u_P = ik \frac{\sin^2 \Theta}{\eta^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sigma_{2,\mu} B^{2\mu} \frac{\sin^{2\mu} \Theta}{\eta^{2\mu}} \int_0^{\eta} J_0(\eta') \eta'^{2\mu+1} d\eta' \right\}.$$

Nach (A; 24) geht dies über in

$$u_P = ik \sin^2 \Theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sigma_{2,\mu} B^{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta \sum_{\nu=0}^{\mu} (-2)^{\nu} \nu! \binom{\mu}{\nu} \frac{J_{\nu+1}(\eta)}{\eta^{\nu+1}} \right\}. \quad (39; 1)$$

Führen wir hier noch die Besselschen Funktionen  $J_{\nu+1}(\eta)$  höherer Ordnung auf solche nullter oder erster Ordnung zurück, so erhalten wir, wenn wir gleich zur Intensität  $(I_P)_{x_P=0}$  übergehen und für  $B \sin \Theta$  wieder  $\sin \Theta_0$  schreiben

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ \sigma_0 \frac{J_1(\eta)}{\eta} + \sigma_2 \sin^2 \Theta_0 \frac{2\eta J_0(\eta) + (\eta^2 - 4)J_1(\eta)}{\eta^3} + \sigma_4 \sin^4 \Theta_0 (\eta^2 - 8) \frac{4\eta J_0(\eta) + (\eta^2 - 8)J_1(\eta)}{\eta^5} + \dots \right\}^2. \quad (39; 2)$$

Genügt die objektseitige Strahlung dem Lambertschen cos-Gesetz, so reduziert sich die geschweifte Klammer in (1) bzw. (2) auf das erste Glied, so daß dann, mit (28; 3) übereinstimmend,

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left( \frac{2J_1(\eta)}{\eta} \right)^2$$

<sup>1)</sup> Das — unwesentliche — Minuszeichen aus (24; 7) haben wir hier fortgelassen.

wird. Für den Achsenpunkt der Bildebene wird  $q_P = 0$ , also  $\eta = 0$ , und es ergibt sich wegen (A; 15) für die Intensität im Achsenpunkt der Bildebene, dem geometrisch-optischen Bildpunkt, aus (1)

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left[ \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sigma_{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta_0 \sum_{r=0}^{\mu} (-1)^r \binom{\mu}{r} \frac{1}{\nu + 1} \right\} \right]^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\mu} (-1)^r \binom{\mu}{r} \frac{1}{\nu + 1} &= \frac{1}{\mu + 1} \left\{ 1 - \sum_{r=0}^{\mu+1} (-1)^r \binom{\mu+1}{r} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu + 1}, \quad (39; 3) \end{aligned}$$

so daß

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left[ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu + 1} \sigma_{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta_0 \right]^2. \quad (39; 4)$$

Die hier auftretende Summe kann je nach Größe und Vorzeichen von  $\sigma_{2\mu}$  die verschiedensten Werte annehmen, u. a. auch gleich Null werden, so daß unter Umständen im Kern des Beugungsscheibchens, des Diffraktionsbildes, die Intensität Null auftreten kann.

### § 40. Intensitätsverteilung längs der optischen Achse

Für die Intensitätsverteilung längs der optischen Achse haben wir  $q_P = 0$ , also  $J_0(k q_P \sin \vartheta) = 1$  zu setzen und erhalten so aus (38; 8)

$$u_P = ik \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sigma_{2\mu} B^{2\mu} \int_0^{\Theta} e^{-ikx_P \cos \vartheta} \sin^{2\mu+1} \vartheta d(\sin \vartheta) \right\}.$$

Setzen wir hier

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta,$$

was in der Umgebung des Bildpunktes, d. h. solange  $x_P \sin^4 \Theta \ll \lambda$ , sicher gestattet ist (s. 29; 2), so wird mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k x_P \sin^2 \vartheta &= \chi' \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} k x_P \sin^2 \Theta = \chi, \\ u_P &= ik e^{-ikx_P \sin^2 \Theta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} B^{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta \frac{1}{\chi^{\mu+1}} \int_0^{\chi} e^{i\chi'} \chi'^{\mu} d\chi'. \end{aligned}$$

Das hier auftretende Integral können wir nach (A; 39) auswerten und erhalten mit  $B \sin \Theta = \sin \Theta_0$

$$(u_P)_{Q_P=0} = i k e^{-i k x_P} \sin^2 \Theta \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta_0 \mu! \{ [\hat{C}_{\mu+1}(x) \cos x + \hat{S}_{\mu+1}(x) \sin x] + i [\hat{C}_{\mu+1}(x) \sin x - \hat{S}_{\mu+1}(x) \cos x] \}. \quad (40; 1)$$

Die Intensität längs der Achse des Strahlenbündels wird demnach

$$(I_P)_{Q_P=0} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\langle \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta_0 \mu! [\hat{C}_{\mu+1}(x) \cos x + \hat{S}_{\mu+1}(x) \sin x] \right)^2 + \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_{2\mu} \sin^{2\mu} \Theta_0 \mu! [\hat{C}_{\mu+1}(x) \sin x - \hat{S}_{\mu+1}(x) \cos x] \right)^2 \right\rangle. \quad (40; 2)$$

Setzen wir hier für  $\hat{C}_{\mu+1}(x)$  und  $\hat{S}_{\mu+1}(x)$  die Werte aus (A; 33) ein, so erhalten wir

$$(I_P)_{Q_P=0} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\langle \left\{ \sigma_0 \frac{\sin x}{x} + \sigma_2 \sin^2 \Theta_0 \frac{\cos x + x \sin x - 1}{x^2} + \sigma_4 \sin^4 \Theta_0 \frac{-2 \sin x + 2x \cos x + x^2 \sin x}{x^3} + \dots \right\}^2 + \left\{ \sigma_0 \frac{1 - \cos x}{x} + \sigma_2 \sin^2 \Theta_0 \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} + \sigma_4 \sin^4 \Theta_0 \frac{2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x - 2}{x^3} + \dots \right\}^2 \right\rangle. \quad (40; 3)$$

#### § 41. Anwendung der Formeln des § 39 auf spezielle Fälle

Wir wenden unsere für die Intensitätsverteilung in der Brennpunktebene erhaltene Formel (39; 2) auf ein durch (38; 4) gegebenes Strahlungsdiagramm (Abb. 26) an, für das  $s_0$  gemäß (38; 4\*) bestimmt ist. Es ergibt sich dann für die Lage der Nullstellen der Intensität in der Bildebene die Abb. 27, in der als Ordinate die Werte  $\frac{s_2}{s_0} \sin^2 \Theta_0$  benutzt wurden. Als Abszisse sind die Werte von  $\eta = 2\pi \frac{Q_P}{\lambda} \sin \Theta$  zugrunde gelegt. Die Abbildung gibt also an, für welche Werte von  $\eta$  bei den verschiedenen Werten von  $\frac{s_2}{s_0} \sin^2 \Theta_0$  die Intensität in der Bildpunktebene verschwindet. Der

Wert  $\frac{s_2}{s_0} \sin^2 \Theta_0 = 0$  entspricht einem nach dem Lambertschen cos-Gesetz strahlenden Objekt. Man erkennt deutlich, daß besonders für kleine negative Werte von  $\frac{s_2}{s_0}$  die Verhältnisse sehr stark von

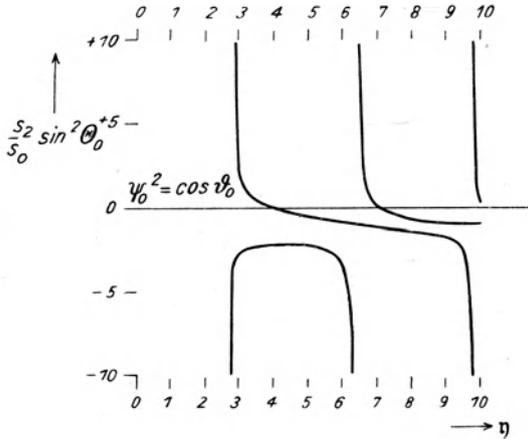


Abb. 27. Lage der Stellen voller Dunkelheit in der Brennebene einer Kugelwelle, deren objektseitiges Strahlungsfeld durch (38; 4), (38; 4\*) [Abb. 26] gegeben ist, in Abhängigkeit von  $\frac{s_2}{s_0} \sin^2 \Theta_0$ , wo  $\Theta_0$  den (halben) objektseitigen Öffnungswinkel des Strahlenbündels bedeutet.

$$\left( \eta = 2 \pi \frac{y_P}{\lambda} \sin \Theta \right) \quad (\Theta = \text{halber bildseitiger Öffnungswinkel})$$

der „normalen“ Intensitätsverteilung, wie sie sich für  $\frac{s_2}{s_0} = 0$  ergibt, abweichen.

Setzen wir andererseits

$$\psi_0^2 = \sigma_0^2 \cos^2 \vartheta_0 \left( 1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \sin^2 \vartheta_0 \right)^2 \quad (41; 1)$$

voraus, so ergibt sich für die Maximal- und Nullstellen in der Bildebene Abb. 28, aus der man übrigens noch erkennt, daß für  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} \sin^2 \Theta_0 = -2$  im Kern des Beugungsscheibchens Dunkelheit herrscht. Dies sieht man auch, wenn man in Formel (39; 4), die für den Achsenpunkt der Bildebene gilt, alle Werte  $\sigma_{2,\mu}$  mit  $2\mu > 2$

gleich Null setzt und nach  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$  differenziert. Der Differentialquotient verschwindet für  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = 0$  und für  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = -\frac{2}{\sin^2 \Theta_0}$ . Dem ersten dieser beiden Werte entspricht ein Maximum, dem zweiten ein Minimum von  $(I_P)_{x_P=0}$ .

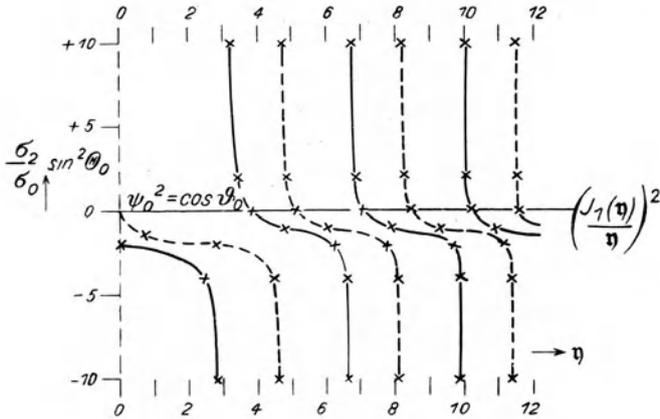


Abb. 28. Lage der Stellen maximaler Helligkeit (---) und voller Dunkelheit (—) in der Brennebene einer Kugelwelle, deren objektseitiges Strahlungsfeld durch (41; 1) gegeben ist<sup>1)</sup>:

$$\left(\eta = 2\pi \frac{y_P}{\lambda} \sin \Theta\right)$$

Betrachten wir endlich noch ein bestimmtes Strahlungsdiagramm

$$\psi_0^2 = \cos^2 \vartheta_0 (1 - 3,54 \sin^2 \vartheta_0)^4 \quad (41; 2)$$

(Abb. 29) und verändern die objektseitige Apertur  $n \sin \Theta_0$  des Beobachtungsinstrumentes, so ändert sich die Lage der Nullstellen

der Bildebene nach Abb. 30, wenn  $\eta = 2\pi \frac{Q_P}{\lambda} \sin \Theta = 2\pi \frac{Q_P \sin \Theta_0}{\lambda B}$

als Abszisse gewählt wird, bzw. nach Abb. 31, wenn  $2\pi \frac{Q_P}{\lambda}$  als

<sup>1)</sup> Die beiden die Ordinate schneidenden Kurven der Abb. 28 wurden gegen die entsprechenden Kurven der Berek'schen Originalzeichnung geändert (berichtigt).

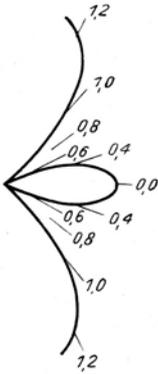


Abb. 29

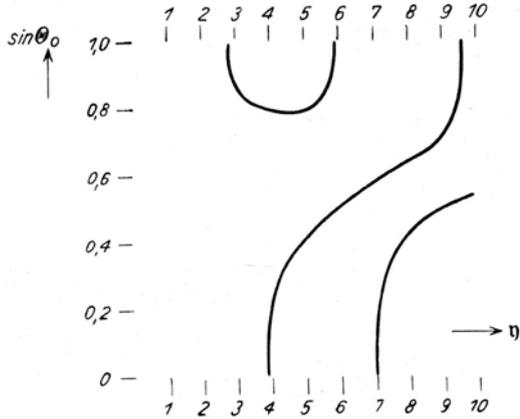


Abb. 30

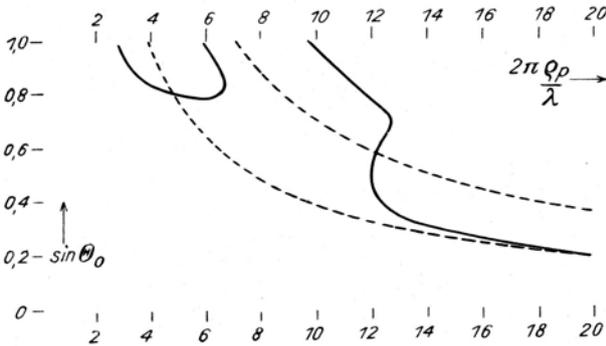


Abb. 31

Abb. 29. Strahlungsdiagramm nach (41; 2). Für die verschiedenen (objektseitigen) Aperturen  $n \sin \theta_0$  gelten nur die zwischen den zugehörigen Zahlen liegenden Teile der Kurve

Abb. 30 und 31. Lage der Stellen voller Dunkelheit in der Brennebene einer Kugelwelle, deren objektseitiges Strahlungsfeld durch Abb. 29 gegeben ist, als Funktion von  $\sin \theta_0$ . Der Abstand (der Dunkelstellen) vom Brennpunkt ist in Abb. 30 in optischen Einheiten  $\eta$  ( $= 2 \pi \frac{\rho_P}{\lambda} \sin \theta$ ), in Abb. 31

in Wellenlängen  $\cdot 2 \pi$  gemessen. [--- = Nullstellen von  $\left(\frac{J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$ ]

Abszisse zugrunde gelegt wird. Als Ordinate ist in beiden Abbildungen  $\sin \Theta_0$  aufgetragen. Da  $\eta$  noch von der Variablen  $\sin \Theta_0$

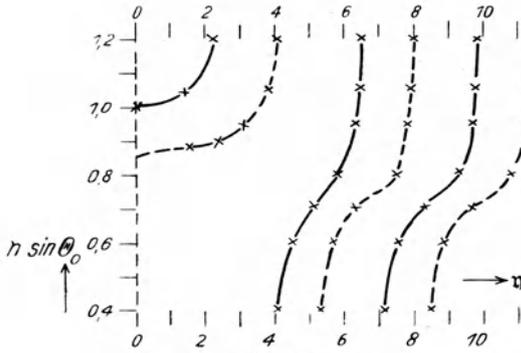


Abb. 32

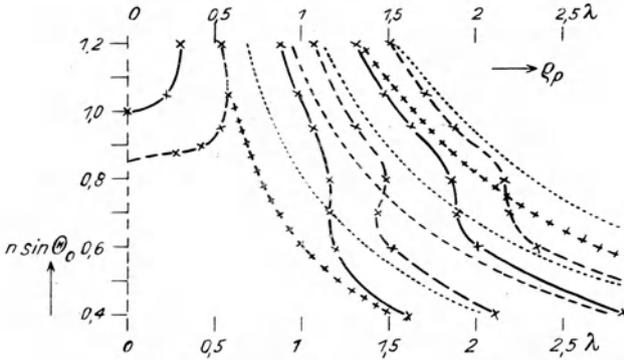


Abb. 33

Abb. 32 und 33. Lage der Stellen maximaler Helligkeit (---) und voller Dunkelheit (—) in der Brennebene einer Kugelwelle, deren objektseitiges Strahlungsfeld durch (41; 3) gegeben ist. Der Abstand vom Brennpunkt ist in Abb. 32 in optischen Einheiten  $\eta$  ( $= 2\pi \frac{\rho_p}{\lambda} \sin \Theta$ ), in Abb. 33 in Wellenlängen gemessen. [In Abb. 33 sind außerdem noch die Maximal- und Nullstellen von  $\left(\frac{J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$  eingezeichnet]

abhängt, so gibt Abb. 30 keine direkt anschauliche Vorstellung von den tatsächlichen Verhältnissen, wie sie dem Beobachter im Mikroskop (in der Bildebene) erscheinen. In der Abb. 31 dagegen, in

der  $\sin \Theta_0$  aus der Abszisse eliminiert wurde, diese also dem  $q_P$  proportional ist, ist dies der Fall. In dieser Abbildung sind außerdem noch zum Vergleich die ersten Nullstellen von  $\left(\frac{J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$ , gleichfalls auf  $2\pi \frac{q_P}{\lambda}$  bezogen, eingezeichnet. Da für ein Strahlungsdiagramm nach dem Lambertschen cos-Gesetz die Intensitätsverteilung in der Bildebene proportional zu  $\left(\frac{J_1(\eta)}{\eta}\right)^2$  ist, so können wir aus der Abbildung ablesen, daß erst bei sehr kleiner objektseitiger Apertur, etwa  $\leq n \cdot 0,3$ , die Intensitätsverteilung in der Bildebene von der besonderen Form des objektseitigen Strahlungsdiagramms unabhängig wird.

Die Abb. 32 und 33 entsprechen völlig den Abb. 30 und 31, nur daß jetzt als objektseitiges Strahlungsdiagramm nicht (2), sondern

$$\psi_0^2 = \cos \vartheta_0 (1 - 3,54 \sin^2 \vartheta_0)^2 \quad (41; 3)$$

zugrunde gelegt wurde. Außerdem wurden in den Abb. 32 und 33 nicht nur die Nullstellen, sondern außerdem auch die Maxima der Intensität eingezeichnet. Man erkennt auch hier, daß erst bei sehr kleiner objektseitiger Apertur  $n \sin \Theta_0$  die Verhältnisse in der Bildebene von der besonderen Form des objektseitigen Strahlungsdiagramms unabhängig werden.

### § 42. Anwendung der Formel für die axiale Intensitätsverteilung auf spezielle Fälle

Die Intensitätsverteilung längs der Achse des Bündels, die nach Formel (40; 3) zu berechnen ist, ist für das durch (41; 1) dargestellte objektseitige Strahlungsfeld besonders leicht zu behandeln. Die beiden in (40; 3) auftretenden geschweiften Klammern lauten hier:

$$\sigma_0^2 \left\{ \frac{\sin \chi}{\chi} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \sin^2 \Theta_0 \frac{\cos \chi + \chi \sin \chi - 1^2}{\chi^2} \right\}$$

und

$$\sigma_0^2 \left\{ \frac{1 - \cos \chi}{\chi} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \sin^2 \Theta_0 \frac{\sin \chi - \chi \cos \chi}{\chi^2} \right\}.$$

Damit auf der Achse Dunkelheit herrscht, müssen beide Klammern gleichzeitig verschwinden. Eliminiert man aus ihnen

$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} \sin^2 \Theta_0$ , so erhält man

$$\chi \sin \chi = 2(1 - \cos \chi).$$

Dies zerfällt in

$$\sin \frac{\chi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \text{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{2},$$

woraus sich  $\chi = 2N\pi$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ) ergibt. Für  $\chi = 0$

ergibt sich dann  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = -\frac{2}{\sin^2 \Theta_0}$ , dagegen: für  $\chi = 2N\pi$  mit

$N = 1, 2, 3, \dots$  wird  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = 0$ , d. h.: ein objektseitiges Strahlungsfeld,

das dem Lambertschen cos-Gesetz entspricht, liefert auf der Achse in den Abständen  $\chi = 2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$  von der Bildebene Dunkelheit, während ein Strahlungsfeld mit

$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = -\frac{2}{\sin^2 \Theta_0}$

bereits im Achsenpunkt der Bildebene Dunkelheit erzeugt.

Die vorstehend durchgeführten Überlegungen lassen erkennen, wie wesentlich die Berücksichtigung des objektseitigen Strahlungsfeldes für die Intensitätsverhältnisse des Bildraumes ist.

## Achtes Kapitel

# Mathematische Darstellung beliebiger Strahlenbündel

### § 43. Allgemeine Betrachtungen zur mathematischen Behandlung der optischen Abbildungsvorgänge

Bisher setzten wir bei unseren wellentheoretischen Betrachtungen eine ideale Abbildung voraus, sahen also — abgesehen von der chromatischen Aberration, die wir schon kurz erwähnten — von den Abbildungsfehlern völlig ab. Hierbei zeigte sich bereits, daß die physikalischen Verhältnisse doch wesentlich komplizierter sind, als es die geometrisch-optische Behandlung erkennen läßt. Nun haben wir es aber in Wirklichkeit fast nie, auch im geometrisch-optischen Sinne nicht, mit idealer, „punktscharfer“ Abbildung zu tun, sondern jedes optische System zeigt in fast allen Anwendungsfällen Abbildungsfehler. Vom Standpunkt der Wellentheorie ist dies gleichbedeutend mit der Tatsache, daß die ursprünglich, d. h. im Objektraum ebenen oder Kugelwellen nach dem Durchgang durch das optische System Wellenflächen besitzen, die von der Kugelflächengestalt abweichen, gegen diese also deformiert sind.

Eine exakte wellen- und beugungstheoretische Behandlung des Abbildungsvorganges hätte konsequenter Weise in folgender Art zu geschehen: Wir denken uns das abzubildende Objekt aus einzelnen leuchtenden Punkten zusammengesetzt, was sicher erlaubt ist, wenn es sich um ein selbstleuchtendes Objekt handelt. (Ist dies nicht der Fall, so sind natürlich die nachfolgenden Überlegungen entsprechend dem in § 18 Gesagten abzuändern.) Jeden dieser leuchtenden Punkte betrachten wir als Ausgangspunkt einer Kugelwelle, die im allgemeinen aus mehrfarbigem Licht, aus Licht verschiedener Frequenz bestehen wird. Da aber Wellen verschiedener Frequenz nicht miteinander interferieren, so haben wir jede von

ihnen einzeln als voneinander unabhängig zu betrachten und erst ihre Intensitäten gemäß § 36 zu überlagern.

In § 24 haben wir die Darstellung einer zum Punkte  $(0, 0, 0)$  hin konvergierenden Kugelwelle kennengelernt. Die gleiche Darstellung können wir natürlich auch zur Beschreibung einer von einem leuchtenden Punkt ausgehenden und eventuell durch eine Blende zum Teil abgeblendeten Kugelwelle benutzen, wenn wir von der unmittelbaren Umgebung des leuchtenden Punktes selbst absehen. Fällt der Brennpunkt bzw. der Quellpunkt nicht in den Ursprungspunkt des Koordinatensystems, sondern hat er die Koordinaten  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ , so gilt statt (24; 5)

$$u_P = \left. \begin{aligned} & \frac{ik}{2\pi} \int \int \psi(\beta, \gamma) \\ & e^{-ik[(x_P - \xi_0)\cos\alpha + (y_P - \eta_0)\cos\beta + (z_P - \zeta_0)\cos\gamma]} \frac{d(\cos\beta)d(\cos\gamma)}{\cos\alpha} \end{aligned} \right\} (43; 1)$$

Diesen Ausdruck haben wir unter Hinzufügung eines zeitabhängigen Phasenfaktors  $e^{i(\nu t + \delta)}$  mit einer Komponente des Hertzschen Vektors  $\mathfrak{H}$  zu identifizieren, haben also im allgemeinen drei derartige Gleichungen mit verschiedener Amplitudenfunktion  $\psi$  und verschiedener Phasenkonstante  $\delta$  zur Darstellung der vom Punkte  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  ausgehenden Kugelwelle anzusetzen. (Wie wir unten noch sehen werden, haben wir zu  $u_P$  außer dem zeitabhängigen Phasen-

faktor noch den Faktor  $\frac{1}{k^2}$  hinzuzufügen, um eine Komponente des

Hertzschen Vektors zu erhalten.) Die Integrationsgrenzen sind entsprechend der Eintrittspupille des optischen Systems, durch das die Abbildung des Objektpunktes bewirkt werden soll, zu wählen.

Unter Beachtung der Grenzbedingungen, denen die Feldvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  an der Grenze zweier durchsichtiger Medien zu genügen haben, hätten wir nun die Änderung der Welle und ihrer mathematischen Darstellung von Linsenfläche zu Linsenfläche zu verfolgen, bis wir zur Darstellung der Welle im Bildraum gelangt sind. (Entsprechendes geschieht ja in der geometrischen Optik für die einzelnen Lichtstrahlen.) Leider läßt sich diese wellentheoretische Behandlung noch nicht allgemein durchführen. Allein für Spiegelung und Brechung an ebenen Trennungsebenen ist dies bisher möglich, worauf unten noch näher einzugehen sein wird. In allen übrigen Fällen dagegen müssen wir eine Anleihe bei der

geometrischen Optik machen, indem wir zunächst nach den dort geltenden Formeln den Strahlengang durch das optische System hindurch verfolgen und sodann im Bildraum die zugehörigen Eikonalfächen bestimmen. Diese sind die Wellenflächen des bildseitigen Strahlenbündels, das von der Austrittspupille begrenzt wird. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, wie wir diese im allgemeinen von einer Kugelwelle abweichenden bildseitigen Wellen mathematisch exakt darstellen können. Wir bekommen so die zu den einzelnen Objektpunkten gehörigen Intensitätsverteilungen, die sich bei inkohärent strahlenden Objektpunkten einfach überlagern.

**§ 44. Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung**  
 **$\Delta u + k^2 u = 0$ . Beugungstheoretische Darstellung eines beliebigen Strahlenbündels <sup>1)</sup>**

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Strahlenbündel und suchen für dieses die Integraldarstellung. Da die geometrisch-optischen Wellenflächen als Flächen gleicher Phase Parallelfächen sind, so ist das Strahlenbündel durch eine von ihnen eindeutig bestimmt. Wir wollen nun voraussetzen, daß die Kaustik ganz im Endlichen liegt oder sich nur nach einer Seite in das Unendliche erstreckt. Diese Voraussetzung wird fast immer erfüllt sein. (Ist sie nicht erfüllt, so gelten die nachfolgenden Überlegungen in ihren wesentlichsten Teilen gleichfalls. Es ergeben sich nur an einigen Stellen bei der Diskussion gewisse Modifikationen.) Wir wählen nun eine der im Endlichen liegenden Wellenflächen so, daß die Kaustik ganz auf der einen Seite von ihr liegt <sup>2)</sup>. Sie sei in Abhängigkeit von zwei Parametern  $v$  und  $w$  gegeben durch die Gleichungen

$$\xi = \xi(v, w); \quad \eta = \eta(v, w); \quad \zeta = \zeta(v, w); \quad (44; 1)$$

oder vektoriell geschrieben, wenn  $\mathfrak{B}$  den zu den einzelnen Punkten der ausgewählten Wellenfläche gehörigen Radiusvektor („Wellenvektor“) bedeutet

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w). \quad (44; 1^*)$$

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. d. Phys. (4) **77**, 685 (785), 1925 (§ 3).

<sup>2)</sup> Diese Wahl bringt gewisse Vereinfachungen mit sich, da die Wellenflächen in der Nähe der Kaustik sehr komplizierte Gestalt besitzen [s. z. B. J. Picht, a. a. O., § 10 und Zeitschr. f. Instrkde. (erscheint demnächst)].

Da durch die Fläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  unser Strahlenbündel eindeutig gekennzeichnet ist, so sei sie im folgenden als „Kennfläche“ bezeichnet. Ihre Normale sei  $\mathfrak{N}$ . Es ist

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(v, w) = \frac{\left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial w} \right]}{\sqrt{\left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial w} \right]^2}} = \frac{[\mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_w]}{\sqrt{[\mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_w]^2}}. \quad (44; 2)$$

Die einzelnen Wellenflächen (im geometrisch-optischen Sinne) unseres Strahlenbündels lassen sich als Parallelfächen darstellen durch

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^*(v, w, R^*) = \mathfrak{B}(v, w) + R^* \cdot \mathfrak{N}(v, w), \quad (44; 1^{**})$$

wenn  $\mathfrak{B}^*$  den Radiusvektor nach den einzelnen Punkten der betrachteten Wellenfläche und  $R^*$  deren Abstand von der Kennfläche bedeutet. Für  $R^* = 0$  ergibt sich diese selbst, während wir für  $R^* (= R) \rightarrow -\infty$  die im negativ Unendlichen gelegene Wellenfläche erhalten, die unserem Strahlenbündel entspricht. Hieraus ergibt sich auch die positive Richtung von  $\mathfrak{N}$ .

Wir bezeichnen die dem Werte  $R^* = R \rightarrow -\infty$  entsprechende Wellenfläche  $\overline{\mathfrak{B}}^* = \overline{\mathfrak{B}}^*(v, W, R^* = +R)$  durch den Vektor  $\overline{\mathfrak{B}}$ , also

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}(v, w) + R \cdot \mathfrak{N}(v, w)$$

und nehmen wieder — wie in § 24 — diese negativ unendlich ferne Wellenfläche von einem undurchsichtigen Schirme bedeckt an bis auf den Teil, der der Öffnung des betrachteten Strahlenbündels entspricht. Diese denken wir uns von außen mit Licht beleuchtet, dessen Wellenfläche unserer unendlich fernen Wellenfläche  $\overline{\mathfrak{B}}(v, w, R)$  entspricht, das also nach den zu unserer Kennfläche (1) gehörenden Evolutschalen (Kaustriken) — im geometrisch-optischen Sinne — konvergiert.

Um den Wert  $u_P$  der der Schwingungsgleichung  $\mathcal{A}u + k^2u = 0$  genügenden und unser Strahlenbündel darstellenden Funktion  $u$  im Aufpunkte  $P$  zu erhalten, benutzen wir wieder die Gleichung

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int \left[ u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma. \quad (44; 3)$$

Für die hier auftretenden Oberflächenwerte der Funktion  $u$  und ihrer Ableitung nach der inneren Normalen  $n$  können wir mit hin-

reichender Genauigkeit setzen

$$\left. \begin{aligned} u &= -\psi(v, w) \frac{e^{-ikR}}{R} \\ \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= + \frac{\partial u}{\partial R} = ik\psi(v, w) \frac{e^{-ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (44; 4)$$

wo  $\psi = \psi(v, w)$  wieder wie in § 24 eine von der Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen abhängende „Amplitudenfunktion“ ist, deren Quadrat die Intensitätsverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche angibt.

Wir bestimmen nun die Entfernung  $r$  des Aufpunktes  $P$  ( $= x_P, y_P, z_P$ ) vom Flächenelement  $d\sigma$  der unendlich fernen Wellenfläche  $\mathfrak{W}(v, w, R)$ . Es wird, wenn die Lage des Aufpunktes  $P$  durch den Vektor  $\mathfrak{P}$  („Punktvektor“) bestimmt ist,

$$\begin{aligned} r &= |\overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{P}|, \\ &= \sqrt{(\mathfrak{W}(v, w) + R \cdot \mathfrak{N}(v, w) - \mathfrak{P})^2}, \\ &= \sqrt{R^2 + 2R \cdot (\mathfrak{W}(v, w) - \mathfrak{P}, \mathfrak{N}(v, w)) + (\mathfrak{W}(v, w) - \mathfrak{P})^2}. \end{aligned}$$

Nun ist, da  $R \rightarrow -\infty$ ,  $|\mathfrak{W}(v, w) - \mathfrak{P}| \ll |R|$ , so daß

$$\begin{aligned} r &= -[R + (\mathfrak{W}(v, w) - \mathfrak{P}, \mathfrak{N}(v, w))] \\ &= -R + (x_P - x(v, w), \mathfrak{N}(v, w)). \end{aligned}$$

Es ergibt sich demnach in derselben Näherung wie oben

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} \quad (44; 5)$$

und entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = -ik \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))}. \quad (44; 6)$$

Setzen wir die Werte (4), (5) und (6) in Gleichung (3) ein, so erhalten wir für den Wert  $u_P$  der Funktion  $u$  im Aufpunkte  $P$ , wenn noch wegen  $|R| \rightarrow \infty$

$$\frac{d\sigma}{R^2} = d\Omega$$

gesetzt wird, nach einigen Vereinfachungen

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int \psi(v, w) e^{-ik(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega, \quad (44; 7)$$

wo  $\mathfrak{B}(v, w)$  und  $\mathfrak{N}(v, w)$  von  $d\Omega$  abhängig sind. In kartesischen Koordinaten geschrieben, lautet die Gleichung (7)

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int \psi(v, w) e^{-ik[(x_P - \xi)N_x + (y_P - \eta)N_y + (z_P - \zeta)N_z]} d\Omega, \quad (44; 8)$$

wo

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \xi(v, w) \\ \eta = \eta(v, w) \\ \zeta = \zeta(v, w) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{die Komponenten des} \\ \text{Wellenvektors } \mathfrak{B} \end{array}$$

und

$$\left. \begin{array}{l} N_x = N_x(v, w) \\ N_y = N_y(v, w) \\ N_z = N_z(v, w) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{die Komponenten des} \\ \text{Normalenvektors } \mathfrak{N} \text{ sind.} \end{array}$$

Lassen wir in (7) den Aufpunkt  $P = \mathfrak{P}$  variieren, so stellt die Funktion  $u_P = u(\mathfrak{P})$  wegen  $|\mathfrak{N}(v, w)| = 1$  eine Lösung der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  dar, und zwar für den Fall, daß das Strahlenbündel nach den beiden zur Fläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  gehörenden Evolutenschalen (Kaustiken) — im geometrisch-optischen Sinne — konvergiert. Diese „Brennflächen“ können auch ausgeartet sein.

Auf der unendlich fernen Fläche, über welche die Integration in (3) ausgeführt wurde, ergibt sich dann eine variable, durch  $\psi^2$  gemessene Intensität der Welle. Physikalisch wird dieser Fall verwirklicht, wenn das Strahlenbündel durch eine absorbierende Schicht veränderlicher Dicke bzw. von örtlich veränderlichem Absorptionskoeffizienten hindurchgestrahlt wird oder auch, wenn die vom Objekt ausgestrahlte Intensität (Energienmenge) eine Funktion der Richtung ist.

Da jede der unendlich vielen geometrisch-optischen Wellenflächen des Strahlenbündels als Kennfläche gewählt werden kann, so folgt — rein formal — eine entsprechende Anzahl von Integralausdrücken für das betrachtete Strahlenbündel. Man erkennt aber leicht, daß alle diese so erhaltenen Ausdrücke sich nur um einen konstanten Phasenfaktor unterscheiden. Wählen wir nämlich zunächst die Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$ , so ergibt sich für  $u_P$  Gleichung (7). Jede der anderen Wellenflächen desselben Strahlenbündels läßt sich aber, da sie der Fläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  parallel ist, nach (1\*\*) darstellen durch

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^*(v, w, R^*) = \mathfrak{B}(v, w) + R^* \cdot \mathfrak{N}(v, w).$$

Wählen wir diese Fläche  $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^*(v, w, R^*)$  als Kennfläche des Strahlenbündels, so folgt aus (7)

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{ik}{2\pi} \int \psi(v, w) e^{-ik(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^*(v, w, R^*), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega, \\ &= \frac{ik}{2\pi} e^{ikR^*} \int \psi(v, w) e^{-ik(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega, \end{aligned}$$

da ja  $(\mathfrak{N}(v, w), \mathfrak{N}(v, w)) = 1$  ist. Der so für  $u_P$  erhaltene Ausdruck ist bis auf den Phasenfaktor  $e^{ikR^*}$  mit (7) identisch.

Wir wollen nun noch das in (7) auftretende Differential  $d\Omega = \frac{d\sigma}{R^2}$  in Beziehung setzen zu dem Flächenelement der Kennfläche bzw. zu den Differentialen  $dv, dw$  der beiden Parameter, die wir uns so gewählt denken, daß sich die Linien  $v = \text{const}$  und  $w = \text{const}$  im ganzen Integrationsbereich nirgends berühren, d. h. also, daß zwei benachbarten Punkten des Integrationsbereichs stets zwei verschiedene (benachbarte) Wertepaare  $(v, w)$  entsprechen<sup>1)</sup>. Es ergibt sich, wenn von jetzt ab  $d\sigma$  das Flächenelement der Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  und  $K = K(v, w)$  das Gaußsche Krümmungsmaß dieser Fläche bezeichnet, für  $d\Omega$

$$\begin{aligned} d\Omega &= K(v, w) d\sigma = K(v, w) \sqrt{\left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial w} \right]^2} dv dw \\ &= \sqrt{\left[ \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial w} \right]^2} dv dw^2. \end{aligned} \quad (44; 9)$$

Gleichung (7) in Verbindung mit Gleichung (9) liefert uns also die der Schwingungsgleichung  $\mathcal{A}u + k^2 u = 0$  genügende Funktion  $u$  für irgendein beliebiges Strahlenbündel, das durch eine seiner geometrisch-optischen Wellenflächen ( $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$ ) gegeben ist.

Bei spezieller Wahl der Parameter  $v$  und  $w$  lassen sich die in (9) angegebenen Ausdrücke für  $d\Omega$  noch etwas umformen. Sind beispielsweise die Kurven  $v = \text{const}$  und  $w = \text{const}$  die Krümmungslinien der Kennfläche und überdies  $v$  und  $w$  so gewählt, daß sie

<sup>1)</sup> Dies ist z. B. stets der Fall, wenn die Linien  $v = \text{const}$ ,  $w = \text{const}$  Krümmungslinien sind, oder — allgemein — ein beliebiges isogonales Kurvensystem bilden.

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{N}$  hat für die Einheitskugel (— Krümmungsmaß gleich eins —) dieselbe Bedeutung wie  $\mathfrak{B}$  für die Kennfläche.

den Bogenlängen dieser Kurven entsprechen, so ergibt sich, wenn wir die so gewählten Parameter  $v$  und  $w$  durch  $s_1$  bzw.  $s_2$  und die beiden zugehörigen Krümmungsradien durch  $\varrho_1 = \varrho_1(s_1, s_2)$  bzw.  $\varrho_2 = \varrho_2(s_1, s_2)$  bezeichnen, für  $d\Omega$ :

$$d\Omega = \frac{ds_1}{\varrho_1} \cdot \frac{ds_2}{\varrho_2}$$

und demnach für  $u_P$ :

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(s_1, s_2) e^{-ik(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}(s_1, s_2), \mathfrak{R}(s_1, s_2))} \frac{ds_1 ds_2}{\varrho_1(s_1, s_2) \cdot \varrho_2(s_1, s_2)}, \quad (44; 10)$$

zu integrieren über den der Öffnung des Strahlenbündels entsprechenden Bereich der Variablen  $s_1$  und  $s_2$ .

Bezeichnen wir die Richtungskosinus der Wellennormalen, der „Lichtstrahlen“, durch  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $\sin \vartheta \sin \varphi$ , so wird

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^\vartheta \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - f(\vartheta, \varphi)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (44; 11)$$

wo

$$f(\vartheta, \varphi) = \xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta \cos \varphi + \zeta \sin \vartheta \sin \varphi \quad (44; 12)$$

ist, und

$$\xi = \xi(\vartheta, \varphi); \quad \eta = \eta(\vartheta, \varphi); \quad \zeta = \zeta(\vartheta, \varphi)$$

die Koordinaten der Kennfläche sind. Die Funktion  $f = f(\vartheta, \varphi)$  hängt außer von der Richtung der Lichtstrahlen nur von der Gestalt der Wellenfläche ab. Wir werden unten noch sehen, daß auch umgekehrt die Wellenflächen durch die Funktion  $f$  eindeutig bestimmt werden. Wir bezeichnen daher  $f$  als „Gestaltsfunktion“.

Sind  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  die Richtungskosinus der Lichtstrahlen, so lautet die Integraldarstellung des Strahlenbündels

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(\beta, \gamma) e^{-ik[x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - f(\beta, \gamma)]} \frac{d(\cos \beta) d(\cos \gamma)}{\cos \alpha} \quad (44; 13)$$

mit der Gestaltsfunktion

$$f(\beta, \gamma) = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma \quad (44; 14)$$

und

$$\xi = \xi(\beta, \gamma); \quad \eta = \eta(\beta, \gamma); \quad \zeta = \zeta(\beta, \gamma).$$

**§ 45. Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen zweidimensionalen Welle, einer „deformierten Zylinderwelle“<sup>1)</sup>**

Um die im vorigen Paragraphen für den Fall eines beliebigen Strahlenbündels erhaltene Formel auf eine beliebige Zylinderwelle zu übertragen, gehen wir aus von der spezialisierten Form (44; 10) und setzen zunächst voraus, daß wir ein Strahlenbündel zu behandeln haben, bei dem  $\varrho_1(s_1, s_2)$  im ganzen Integrationsbereich konstant ist. Dann können wir  $\varrho_1(s_1, s_2)$  — da ja  $u_P$  nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist — vernachlässigen. Wir erhalten für den so charakterisierten Spezialfall

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(s_1, s_2) e^{-ik(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(s_1, s_2), \mathfrak{N}(s_1, s_2))} \frac{ds_1 ds_2}{\varrho_2(s_1, s_2)}. \quad (45; 1)$$

Bei einer beliebigen Zylinderwelle läuft die eine Schar der Krümmungslinien ( $s_1 = \text{const}$ ) der Achse des Zylinders parallel, und es ist  $\varrho_1 = \text{const}$ . Wir nehmen das Koordinatensystem  $(x, y, z)$  so an, daß die  $z$ -Achse der Zylinderachse parallel ist, so daß  $s_1 = z$  wird. Dann werden  $\psi, \mathfrak{W}, \mathfrak{N}$  und  $\varrho_2$  von  $s_1$  unabhängig. Für  $s_2$  schreiben wir nunmehr  $s$ , so daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(s_1, s_2) &= \{\xi(s); \eta(s); \zeta\}; & \mathfrak{N}(s_1, s_2) &= \{N_x(s); N_y(s); 0\}; \\ \psi(s_1, s_2) &= \psi(s); & \varrho_2(s_1, s_2) &= \varrho(s). \end{aligned}$$

Die Projektion des Vektors  $\mathfrak{W}(s_1, s_2)$  auf die  $xy$ -Ebene bezeichnen wir durch  $\mathfrak{W}(s) = \{\xi(s); \eta(s)\}$ . Für  $\mathfrak{N}(s_1, s_2)$  können wir entsprechend  $\mathfrak{N}(s)$  schreiben und erhalten so aus (1) nach Ausführung der Integration über  $z$  von  $-A$  bis  $+A$  als beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen Zylinderwelle

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} 2A \int \psi(s) e^{-ik(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(s), \mathfrak{N}(s))} \frac{ds}{\varrho(s)}, \quad (45; 2)$$

wo  $\mathfrak{P}$  jetzt der in der  $xy$ -Ebene liegende Vektor ist, der der Projektion des nach dem Aufpunkt  $P$  gezogenen Radiusvektors auf die  $xy$ -Ebene entspricht.

Für eine Kreiszyylinderwelle wird  $\varrho(s) = \text{const}$  und — wenn wir noch  $s/\varrho = \vartheta$  setzen —

$$\mathfrak{W}(s) = \{\varrho \cdot \cos \vartheta; \varrho \cdot \sin \vartheta\}; \quad \mathfrak{N}(s) = \{\cos \vartheta; \sin \vartheta\}; \quad \frac{ds}{\varrho(s)} = d\vartheta,$$

1) J. Picht, Ann. d. Phys (4) **77**, 685 (785), 1925 (§ 4).

so daß sich wieder die von Debye für die ebene Kreiszyylinderwelle angegebene Formel ergibt:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} 2A e^{-ik\rho} \int \psi(\vartheta) e^{-ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta]} d\vartheta^1, \quad (45; 3)$$

abgesehen von einem konstanten Faktor  $\frac{1}{2A} \sqrt{\lambda}$ , den wir noch hinzuzufügen haben, um Übereinstimmung mit (30; 5) zu erhalten. Dementsprechend haben wir allgemein statt (2) zu schreiben<sup>2)</sup>:

$$u_P = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \int \psi(s) e^{-ik(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}(s), \mathfrak{R}(s))} \frac{ds}{\varrho(s)}. \quad (45; 4)$$

#### § 46. Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen (räumlichen) Welle unter Benutzung der Kaustikflächen<sup>3)</sup>

Um die in § 44 abgeleitete Formel, die für ein beliebiges Strahlenbündel gilt, anwenden zu können, muß die Gleichung einer der geometrisch-optischen Wellenflächen, der Kennfläche des Strahlenbündels, bekannt sein. Es soll nunmehr die dort (§ 44) angegebene Formel so umgeformt werden, daß nicht die Kennfläche, sondern die geometrisch-optische Kaustik des Strahlenbündels auftritt. Hierbei ist zu beachten, daß die Kaustik im allgemeinen aus zwei Schalen besteht, die jedoch in gewissen Fällen ausarten können. Im allgemeinen werden wir daher zwei formal verschiedene Formeln erhalten, je nachdem, welche der beiden Schalen der Kaustik wir zugrunde legen. Artet die eine Schale aus, so ergibt sich nur eine Darstellung. Den Fall, daß beide Schalen der Kaustik ausarten, wollen wir für die hier zu suchende Darstellung ausschließen.

Die eine Schale der Kaustik des zu untersuchenden Strahlenbündels sei gegeben durch den Vektor  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(s^*, q)$  („Kaustik-

1) Da  $d\vartheta = \frac{d(\sin \vartheta)}{\cos \vartheta}$ , so entspricht das Differential  $d\vartheta$  vollkommen dem in (44; 13) auftretenden Differential  $\frac{d(\cos \beta) d(\cos \gamma)}{\cos \alpha}$ .

2) Da in (4) die  $z$ -Koordinate des Aufpunktes vollständig herausfällt, so kann (4) — angewandt auf eine *räumliche* Zylinderwelle — nur für solche Aufpunkte gelten, die hinreichend weit von den Grenzen ( $z = +A$  bzw.  $z = -A$ ) entfernt sind, und für die gleichzeitig  $-A < z < +A$  ist.

3) J. Picht, Ann d. Phys. (4) **77**, 685 (785), 1925 (§ 5).

vektor“), wo die Parameter  $s^*$  und  $q$  so gewählt sind, daß sich für das Bogenelement  $ds$  der Fläche  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(s^*, q)$  die Gleichung ergibt

$$ds^2 = ds^{*2} + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\right)^2 \cdot dq^2. \quad (46; 1)$$

Geometrisch bedeutet dies: Die Kurven  $q = \text{const}$  sind geodätische Linien, die Kurven  $s^* = \text{const}$  deren orthogonale Trajektorien, und zwar ist  $s^*$  die Bogenlänge der geodätischen Linien  $q = \text{const}$ , gemessen von der orthogonalen Trajektorie  $s^* = 0$  bis zum Punkte  $(s^*, q)$ , d. h.  $s^*$  ist der normalgeodätische Abstand des Punktes  $(s^*, q)$  von der Kurve  $s^* = 0$ <sup>1)</sup>. Um eine Fläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(s^*, q)$  zu finden, zu der die gegebene Fläche  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(s^*, q)$  die eine der Evolutenschalen ist, haben wir die Gleichung anzusetzen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(s^*, q) = \mathfrak{R}(s^*, q) - (s^* + \text{const}) \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}(s^*, q)}{\partial s^*}. \quad (46; 2)$$

Soll nun die Fläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(s^*, q)$  die Kennfläche unseres Strahlenbündels sein, so müssen wir unsere Kurven  $s^* = \text{const}$  bzw.  $q = \text{const}$  noch speziellen Bedingungen unterwerfen. Wir müssen nämlich beachten, daß wir zu der Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(s^*, q)$  unseres Strahlenbündels nur dann gelangen, wenn wir die Parameter  $(s^*, q)$  so wählen, daß die in Richtung der Kurven  $q = \text{const}$  an die Fläche  $\mathfrak{R}(s^*, q)$

gelegten Tangenten  $\frac{\partial \mathfrak{R}(s^*, q)}{\partial s^*}$  mit den geometrisch-optischen Lichtstrahlen unseres Strahlenbündels zusammenfallen. Da sich durch jeden Punkt einer Fläche in vorgegebener Richtung stets eine und nur eine geodätische Linie legen läßt, so ist die entsprechende Wahl der Parameter  $s^*$  und  $q$  eindeutig möglich<sup>2)</sup>. Wir setzen nun voraus, daß die Wahl in dem genannten Sinne getroffen ist. Dann besteht also zwischen der Kennfläche unseres Strahlenbündels und der betreffenden Schale der Kaustik die Beziehung (2), wo  $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial s^*}$  den absoluten Betrag 1 hat und in Richtung den Lichtstrahlen des betrachteten Strahlenbündels, d. h. den Normalen der Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(s^*, q)$  entspricht. Wir erhalten demnach:

$$\left. \begin{aligned} & (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(s^*, q), \mathfrak{R}(s^*, q)) \\ & = (\mathfrak{B} - \mathfrak{R}(s^*, q), \mathfrak{R}(s^*, q) + s^* + \text{const.}) \end{aligned} \right\} \quad (46; 3)$$

<sup>1)</sup> Vgl. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, S. 228 ff.

<sup>2)</sup> Abgesehen von einer — unwesentlichen — additiven Konstanten.

Nun bedeutet das rechts auftretende skalare Produkt die Projektion des vom Integrationspunkt  $(s^*, q)$  der Kaustik nach dem Aufpunkt gezogenen Fahrstrahles auf den Lichtstrahl, der die Kaustik im Integrationspunkt berührt. Die Größe  $s^*$  ist die Bogenlänge der geodätischen Linie, die in Richtung des betreffenden Lichtstrahles durch den Integrationspunkt der Kaustik hindurchgeht, gerechnet von ihrem Schnitt mit derjenigen orthogonalen Trajektorie, der — willkürlich — der Wert  $s^* = 0$  zugeordnet wurde.

Wir können nun wieder beliebige Parameter  $(v, w)$  annehmen; dann erhalten wir für  $u_P$  — von einem konstanten Phasenfaktor abgesehen —

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(v, w) e^{-ik[\mathfrak{K} - \mathfrak{K}(v, w), \mathfrak{N}(v, w) + s^*(v, w)]} \sqrt{\left[\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial w}\right]^2} dv dw, \quad (46; 4)$$

wofür wir auch schreiben können

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(\vartheta; \varphi) e^{-ik[r'_P(\cos \vartheta'_P \cos \vartheta + \sin \vartheta'_P \sin \vartheta \cos(\varphi'_P - \varphi)) + s^*(\vartheta, \varphi)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (46; 5)$$

wenn  $\mathfrak{N}(v, w) = \{\cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi\}$  gesetzt wird. In (5) bedeuten  $(r'_P, \vartheta'_P, \varphi'_P)$  die Polarkoordinaten des Aufpunktes  $P$ , bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprungspunkt im Integrationspunkt der Kaustik liegt, d. h. in dem Punkte, in dem der zum Wertepaar  $(\vartheta, \varphi)$  gehörige Lichtstrahl die betreffende Schale der Kaustik berührt, und das aus dem ursprünglichen System  $(r, \vartheta, \varphi)$  durch Parallelverschiebung hervorgeht.  $s^* = s^*(\vartheta, \varphi)$  ist die Bogenlänge der im oben angegebenen Sinne definierten geodätischen Linien der betreffenden Schale der Kaustik.

Bei achsensymmetrischen Strahlenbündeln artet die eine Schale der Kaustik aus. Sie fällt mit einem Teile der Achse des Strahlenbündels zusammen. Die andere Schale der Kaustik ist dann gleichfalls achsensymmetrisch. In dem dem Werte  $\vartheta = 0$  entsprechenden Punkte besitzt sie eine Spitze. Die orthogonal-geodätischen Linien der betreffenden nicht ausgearteten Kaustikschale gehen dann über in polargeodätische. Als Kurve  $s^* = 0$  können wir hier die Spitze der Kaustik wählen, so daß die Bogenlänge  $s^*(\vartheta, \varphi)$  von der Spitze der Kaustik aus zu messen ist.

**§ 47. Beugungstheoretische Darstellung einer beliebigen zwei-dimensionalen Welle unter Benutzung der kaustischen Linie<sup>1)</sup>**

Für ein beliebiges ebenes Strahlenbündel geht (46; 5) über in

$$u_P = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \int \psi(\vartheta) e^{-ik[r'_P \cos(\vartheta - \vartheta'_P) + s^*]} d\vartheta. \quad (47; 1)$$

Da für den ebenen Fall sich der Übergang von (45; 4) zu (1) besonders anschaulich verfolgen läßt, so sei er hier noch besonders durchgeführt.

Das skalare Produkt  $(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(s), \mathfrak{N}(s))$  der Formel (45; 4) ist die Projektion des Vektors  $\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(s) = \overrightarrow{QP}$  auf den durch den Punkt  $\mathfrak{W}(s) = Q$  gehenden Lichtstrahl, der die kaustische Linie im

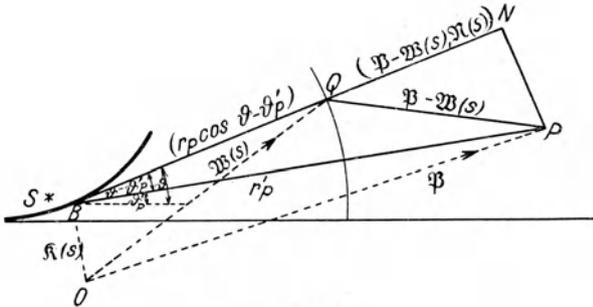


Abb. 34

Punkte  $\mathfrak{K}(s) = B$  berühre (s. Abb. 34). Der Fußpunkt des Projektionslotes von  $P$  auf  $BQ$  sei  $N$ , so daß

$$(\mathfrak{P} - \mathfrak{W}(s), \mathfrak{N}(s)) = \overrightarrow{QN}.$$

Andererseits ist

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BQ} = r'_P \cos(\vartheta - \vartheta'_P) - \overrightarrow{BQ}.$$

Da die Wellenlinie  $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(s)$  Evolvente der kaustischen Linie  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(s)$  ist, so ist, wenn  $s^*$  die Bogenlänge der kaustischen Linie von ihrer Spitze (oder einem beliebigen ihrer Punkte) bis zum Berührungspunkt  $B$  des Lichtstrahles bezeichnet,

$$\overrightarrow{BQ} = \text{const} - s^*,$$

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. d. Phys. (4) 77, 685 (785), 1925 (§ 4).  
Picht, Optische Abbildung

so daß also endlich

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(s), \mathfrak{N}(s)) = r'_P \cos(\vartheta - \vartheta'_P) + s^* - \text{const.}$$

Da außerdem  $\frac{ds}{\varrho(s)} = d\vartheta$  ist, so unterscheiden sich (45; 4) und (1)

nur um einen konstanten Phasenfaktor.

#### § 48. Bestimmung der geometrisch-optischen Wellenflächen aus der beugungstheoretischen Integraldarstellung eines Strahlenbündels<sup>1)</sup>

Wir haben gesehen, daß wir jedes beliebige Strahlenbündel, dessen Wellenflächen oder dessen Kaustikflächen uns durch ihre Gleichungen gegeben sind, beugungstheoretisch durch einen Integralausdruck wiedergeben können, der sich stets auf die Form bringen läßt:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(\beta, \gamma) e^{-ik[x_P\alpha + y_P\beta + z_P\gamma - f(\beta, \gamma)]} \frac{d\beta d\gamma}{\alpha} \quad (48; 1)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

oder anders geschrieben:

$$\iint \chi(v, w) e^{-ik[x_P\alpha(v, w) + y_P\beta(v, w) + z_P\gamma(v, w)]} dv dw \quad (48; 2)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)^2.$$

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß sich jeder derartige Ausdruck als beugungstheoretische Integraldarstellung eines optischen Strahlenbündels deuten läßt, indem wir die Gleichungen der geometrisch-optischen Wellenflächen des zugehörigen Strahlenbündels aus dem angegebenen Integralausdruck direkt bestimmen. Dazu haben wir nur drei Funktionen  $\xi(\beta, \gamma)$ ;  $\eta(\beta, \gamma)$ ;  $\zeta(\beta, \gamma)$  so zu bestimmen, daß

$$\alpha \xi(\beta, \gamma) + \beta \eta(\beta, \gamma) + \gamma \zeta(\beta, \gamma) = f(\beta, \gamma) \quad (48; 3)$$

ist, und daß ferner die aus den partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach  $\beta$  und  $\gamma$  gebildeten Vektoren auf dem Vektor  $(\alpha; \beta; \gamma)$  senkrecht stehen:

$$\left\{ \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right\} \text{ und } \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial \gamma}, \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} \right\} \perp (\alpha; \beta; \gamma). \quad (48; 3^*)$$

Geometrisch gibt uns Gleichung (3) die Gesamtheit aller an die Wellenfläche gelegten Tangentialebenen. Die Wellenfläche selbst bildet also die Enveloppe jener Ebenenschar. Um ihre Gleichung

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. d. Phys. (4) **77**, 685 (785), 1925 (§ 6).

<sup>2)</sup> E. T. Whittaker, Math. Ann. **57**, 333/355, 1903.

zu erhalten, differenzieren wir (1) nach  $\beta$  und  $\gamma$  und erhalten wegen (3\*) die beiden Gleichungen

$$-\xi(\beta, \gamma) \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \eta(\beta, \gamma) = \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta}, \quad (48; 4)$$

$$-\xi(\beta, \gamma) \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + \zeta(\beta, \gamma) = \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma}. \quad (48; 5)$$

Aus (3), (4) und (5) folgt dann sofort

$$\left. \begin{aligned} \xi(\beta, \gamma) &= \alpha \cdot \left[ f(\beta, \gamma) - \beta \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \gamma \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right], \\ \eta(\beta, \gamma) &= \beta \cdot \left[ f(\beta, \gamma) - \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \gamma \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right], \\ \zeta(\beta, \gamma) &= \gamma \cdot \left[ f(\beta, \gamma) - \beta \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (48; 6)$$

Ist z. B.

$$f(\beta, \gamma) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d,$$

so folgt

$$\xi = a + \alpha d; \quad \eta = b + \beta d; \quad \zeta = c + \gamma d.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Kugel vom Radius  $d$  und dem Mittelpunkt  $(a, b, c)$ . Wir erhalten also in diesem Falle die Darstellung einer nach dem Brennpunkte  $(a, b, c)$  hin konvergierenden Kugelwelle, wie man dies auch sofort direkt erkennt.

Wir wollen noch die Gleichungen zur Bestimmung der Kennfläche eines Strahlenbündels hier angeben, wenn dieses gegeben ist durch

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - f(\vartheta, \varphi)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (48; 7)$$

In derselben Art wie oben erhalten wir für die zugehörige Kennfläche

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\vartheta, \varphi) = + \cos \vartheta \cdot f(\vartheta, \varphi) - \sin \vartheta \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \\ \eta &= \eta(\vartheta, \varphi) = + \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot f(\vartheta, \varphi) \\ &\quad + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \zeta &= \zeta(\vartheta, \varphi) = + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot f(\vartheta, \varphi) \\ &\quad + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} (48; 8)$$

Die übrigen Wellenflächen des betrachteten Strahlenbündels ergeben sich, indem man in diesen Gleichungen  $f(\vartheta, \varphi)$  ersetzt durch  $f(\vartheta, \varphi) + \text{const}$ ; sie sind also durch  $f(\vartheta, \varphi)$  bzw.  $f(\beta, \gamma)$  eindeutig bestimmt.

§ 49. Geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik<sup>1)</sup>.

Wir hatten bereits oben § 15 gesehen, daß die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik angesehen werden kann, bei dem die Wellenlänge  $\lambda = 0$ , also  $k \rightarrow \infty$ . Wir sprachen von der Möglichkeit, den Beweis auf zwei verschiedene Weisen zu führen, von denen wir jedoch die eine noch zurückstellten, um sie, nachdem wir die allgemeine Darstellung eines beliebigen Strahlenbündels kennengelernt hätten, in allgemeinerer Art als sonst üblich und in § 15 möglich gewesen ist, durchzuführen. Wir wollen dies nunmehr nachholen. Die allgemeine Darstellung eines beliebigen Strahlenbündels war <sup>2)</sup>

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int e^{-ik(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(v, w), \mathfrak{R}(v, w))} K(v, w) d\sigma. \quad (49; 1)$$

Hierin haben wir nun  $\lambda = 0$ , also  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \infty$  zu setzen.

Bevor wir diesen Übergang vollziehen, setzen wir

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(v, w), \mathfrak{R}(v, w)) = \xi$$

und denken uns auf der Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  die Kurven  $\xi = \text{const}$  gezeichnet. Geometrisch heißt dies: wir projizieren die Verbindungslinien des Aufpunktes mit den einzelnen Flächenpunkten auf die zu diesen gehörigen Normalen (Lichtstrahlen) und verbinden alle diejenigen Flächenpunkte, für die diese Projektion gleichen Wert hat. Für diejenigen Punkte  $(v, w)$  unserer Kennfläche, die zwischen den Kurven  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  liegen, können wir  $\xi$  als konstant annehmen, so daß

$$\int_{\xi}^{\xi + d\xi} e^{-ik(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(v, w), \mathfrak{R}(v, w))} K(v, w) d\sigma = e^{-ik\xi} \cdot \int_{\xi}^{\xi + d\xi} K(v, w) d\sigma.$$

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. d. Phys. (4) **77**, 685 (785), 1925 (§ 8).

<sup>2)</sup> Der in § 44 erwähnte, die Lichtverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche bestimmende Faktor  $\psi(v, w)$  ist hier fortgelassen. Seine Hinzunahme ändert an den folgenden Überlegungen nichts. Wir können ihn mit  $K(v, w)$  vereinigt denken.

Setzen wir nun

$$\int_{\xi}^{\xi+d\xi} K(v, w) d\sigma = dF(\xi) = \frac{dF}{d\xi} \cdot d\xi, \quad (49; 2)$$

so erhalten wir

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF}{d\xi} \cdot e^{-ik\xi} d\xi,$$

wo  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die äußersten Werte von  $\xi$  bezeichnen, die auf  $d\sigma$  erreicht werden.

Nun gilt, solange  $dF/d\xi$  im ganzen Integrationsgebiet endlich und stetig ist, die Beziehung<sup>1)</sup>

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF}{d\xi} \cdot e^{-ik\xi} d\xi = -i \left[ \frac{dF}{d\xi} \cdot e^{-ik\xi} \right]_{\xi_1}^{\xi_2}. \quad (49; 3)$$

Wir untersuchen zunächst das Verhalten von  $dF/d\xi$  im Integrationsgebiet. Zu diesem Zwecke betrachten wir  $d\xi$ . Es ist stets

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial \xi}{\partial w} \cdot dw.$$

Es wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = - \left( \frac{\partial \mathfrak{B}(v, w)}{\partial v}, \mathfrak{N}(v, w) \right) + \left( \mathfrak{P} - \mathfrak{B}(v, w), \frac{\partial \mathfrak{N}(v, w)}{\partial v} \right)$$

oder, da

$$\mathfrak{N}(v, w) \perp \frac{\partial \mathfrak{B}(v, w)}{\partial v}$$

ist,

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \left( \mathfrak{P} - \mathfrak{B}(v, w), \frac{\partial \mathfrak{N}(v, w)}{\partial v} \right)$$

und analog

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = \left( \mathfrak{P} - \mathfrak{B}(v, w), \frac{\partial \mathfrak{N}(v, w)}{\partial w} \right).$$

Beide partiellen Ableitungen von  $\xi = \xi(v, w)$  verschwinden nun

---

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik, Leipzig 1891, S. 35. Die Betrachtungen dieses Paragraphen entsprechen ganz der dortigen Darstellung.

zusammen, dann und nur dann, wenn die Vektoren  $\mathfrak{P} - \mathfrak{B}(v, w)$  und  $\mathfrak{N}(v, w)$  zusammenfallen, da ja

$$\frac{\partial \mathfrak{N}(v, w)}{\partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{N}(v, w)}{\partial w}$$

auf  $\mathfrak{N}(v, w)$  senkrecht stehen. In diesem Falle wird demnach auch  $d\xi = 0$ . Hieraus und aus (2) folgt, daß — falls der Aufpunkt auf einem Lichtstrahl des betrachteten Strahlenbündels liegt — der Wert  $dF/d\xi$  für denjenigen Wert von  $\xi$  unendlich wird, in dem der durch den Aufpunkt gehende Lichtstrahl die Kennfläche trifft.

Liegt der Aufpunkt dagegen im geometrisch-optischen Schatten, so bleibt im ganzen Integrationsgebiet  $dF/d\xi$  endlich und stetig. Wir können dann also (3) anwenden. Nehmen wir nun an, daß die Begrenzung des durch das geometrisch-optische Strahlenbündel gegebenen Integrationsgebietes der Kennfläche  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(v, w)$  auf keiner endlichen Strecke mit den Kurven  $\xi = \xi_1$  und  $\xi = \xi_2$  zusammenfällt<sup>1)</sup>, so verschwindet der in (3) auf der rechten Seite stehende Ausdruck, da in diesem Falle die zwischen den Grenzen  $\xi_1$  und  $\xi_1 + d\xi$  bzw.  $\xi_2 - d\xi$  und  $\xi_2$  zu nehmenden Integrale (2) von höherer Ordnung als  $d\xi$ <sup>2)</sup> unendlich klein werden. Wir erhalten also als Resultat, daß für die im geometrisch-optischen Schatten liegenden Aufpunkte  $u_P = 0$  wird.

Für den anderen Fall, daß der Aufpunkt im Gebiete des geometrisch-optischen Strahlenbündels liegt, daß also durch ihn ein oder mehrere Lichtstrahlen hindurchgehen, denken wir uns auf der Kennfläche um die Fußpunkte der betreffenden Lichtstrahlen kleine Gebiete zweckentsprechend abgegrenzt und führen dann die Integration einmal über diese kleinen Gebiete, zweitens über die übrigen Teile der Kennfläche aus. Diese letzte Integration ergibt, da hier  $dF/d\xi$  endlich und stetig bleibt, also (3) angewandt werden darf, wie oben den Wert Null. Wir brauchen also nur die Integrale über jene kleinen Gebiete auszuführen. Wir erkennen, daß sich für Aufpunkte, die im Gebiete des geometrisch-

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, a. a. O.

<sup>2)</sup> M. v. Laue, Encykl. d. math. Wiss. V, H. 24. Artikel „Wellenoptik“, S. 438.

optischen Strahlenbündels liegen, der Wert  $u_P$  ergibt, indem man die durch ihn hindurchgehenden Lichtstrahlen zur Interferenz bringt.

**§ 50. Übergang von  $u_P$  zu den Feldvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  sowie zum Pointingschen Vektor  $\mathfrak{S}$ . Intensität proportional zu  $|u_P|^2$ .**

Wir haben noch den Übergang zu den Feldvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  zu machen<sup>1)</sup>. Zu diesem Zwecke fassen wir  $u_P$  als eine Komponente des vom Phasenfaktor  $e^{i\nu t}$  befreiten Hertzschen Vektors  $\mathfrak{Z}$  auf, also etwa

$$\mathfrak{Z}_x = 0; \quad \mathfrak{Z}_y = 0; \quad \mathfrak{Z}_z = e^{i\nu t} u_P, \quad (50; 1)$$

worin  $u_P$  im allgemeinsten Falle durch (44; 13) gegeben ist, so daß

$$\mathfrak{Z}_x = 0; \quad \mathfrak{Z}_y = 0; \quad \mathfrak{Z}_z = C \iint \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma). \quad (50; 2)$$

Hier ist noch

$$\Psi(\beta, \gamma) = \psi(\beta, \gamma) e^{i[\nu t - k(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - f(\beta, \gamma))]} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (50; 3)$$

$$f(\beta, \gamma) = \xi(\beta, \gamma) \cos \alpha + \eta(\beta, \gamma) \cos \beta + \zeta(\beta, \gamma) \cos \gamma, \quad (50; 4)$$

wo

$$\xi = \xi(\beta, \gamma); \quad \eta = \eta(\beta, \gamma); \quad \zeta = \zeta(\beta, \gamma)$$

die Parameterdarstellung der Wellenflächen ist.

Aus (2) ergibt sich nach (4; 4):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -C k^2 \iint \cos \alpha \cos \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{E}_y &= -C k^2 \iint \cos \beta \cos \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{E}_z &= +C k^2 \iint \sin^2 \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma). \end{aligned} \right\} (50; 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= +C k^2 \sqrt{\varepsilon} \iint \cos \beta \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{H}_y &= -C k^2 \sqrt{\varepsilon} \iint \cos \alpha \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{H}_z &= 0, \end{aligned} \right\} (50; 6)$$

<sup>1)</sup> J. Picht, Ann. d. Phys. (4) 77, 685 (785), 1925 (§ 9).

und mit diesen Werten nach (7; 3):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{c}{4\pi} C^2 k^4 \sqrt{\varepsilon} \int \int \cos \alpha \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \\ &\quad \cdot \int \int \sin^2 \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{S}_y &= \frac{c}{4\pi} C^2 k^4 \sqrt{\varepsilon} \int \int \cos \beta \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \\ &\quad \cdot \int \int \sin^2 \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma), \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{4\pi} C^2 k^4 \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int \int \cos \alpha \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \right. \\ &\quad \cdot \int \int \cos \alpha \cos \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \\ &\quad + \int \int \cos \beta \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \\ &\quad \left. \cdot \int \int \cos \beta \cos \gamma \Psi(\beta, \gamma) d(\cos \beta) d(\cos \gamma) \right\}. \end{aligned} \right\} (50; 7)$$

Setzen wir  $C$  entsprechend (44; 13) gleich  $ik/2\pi$ , so ergibt sich, wie wir in § 44 und für den speziellen Fall der Kugelwelle in § 26 sahen, für  $u_P$  auf der unendlich fernen Wellenfläche ein von  $\lambda$  unabhängiger Wert. Aus (5) und (6) aber entnehmen wir, daß dann dort sowohl  $\mathfrak{E}$  als auch  $\mathfrak{H}$  proportional zu  $\lambda^{-2}$  und nach (7)  $\mathfrak{S}$  proportional zu  $\lambda^{-4}$  wird. Um dies zu vermeiden, dürfen wir daher nicht  $u_P e^{i\nu t}$  selbst, sondern den Wert  $\frac{1}{k^2} u_P e^{i\nu t}$

mit einer Komponente des Hertzschen Vektors  $\mathfrak{Z}$  identifizieren.

Wir haben daher in (2), (5), (6) und (7)

$$C = \frac{i}{2\pi k} = i\lambda \quad (50; 8)$$

zu setzen.

Unter Berücksichtigung der in § 49 durchgeführten Betrachtungen können wir nun, falls durch den Aufpunkt nur ein einziger Lichtstrahl hindurchgeht, in erster Annäherung die Faktoren  $\alpha, \beta, \gamma$  für das ganze Integrationsgebiet konstant setzen, nämlich gleich den dem entsprechenden Lichtstrahl zugehörigen Werten  $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P$ . Die Berechtigung hierzu erkennt man auch geometrisch sehr leicht, wenn man beachtet, daß die Funktion  $\Psi(\beta, \gamma)$  eine schnell oszillierende Funktion ist außer in der Umgebung des Wertepaares  $(\beta_P, \gamma_P)$ . daß

also — wie wir in § 49 sahen — nur diese Umgebung merkliche Beiträge zu  $u_P$  liefert, daß ferner  $\beta, \gamma$  und demnach auch  $\alpha$  während jeder einzelnen sich nahezu vernichtenden Oszillationsperiode der Funktion  $\mathcal{P}(\beta, \gamma)$  nur sehr wenig veränderlich sind. Wir können demnach für  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$ , wenn wir noch von dem bei der Mittelwertbildung fortfallenden Phasenfaktor  $e^{i\nu t}$  absehen und  $C$  entsprechend (8) annehmen, in erster Annäherung schreiben

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -u_P \cos \alpha_P \cos \gamma_P; & \mathcal{E}_y &= -u_P \cos \beta_P \cos \gamma_P; \\ & \mathcal{E}_z &= +u_P \sin^2 \gamma_P \\ \mathcal{H}_x &= +u_P \cos \beta_P; & \mathcal{H}_y &= -u_P \cos \alpha_P; & \mathcal{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50; 9)$$

Für die Größen  $\mathcal{E}^2, \mathcal{H}^2, |[\mathcal{E}\mathcal{H}]|$ , die für die Intensität maßgebend sind (je nach der Art des verwandten Meßinstrumentes), erhalten wir dann in gleicher Näherung:

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{H}^2 = |[\mathcal{E}\mathcal{H}]| = |u_P|^2 \cdot \sin^2 \gamma_P, \quad (50; 10)$$

so daß wir die Intensität in erster Annäherung dem Quadrat des absoluten Betrages von  $u_P$  proportional setzen dürfen.

Ganz ähnliche Überlegungen gelten für den zweiten der oben (4; 5) gemachten Ansätze von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$ .

Gehen durch den Aufpunkt mehrere Lichtstrahlen im geometrisch-optischen Sinne, so modifizieren sich die angestellten Betrachtungen etwas. Doch können wir bei kleiner Öffnung des Strahlenbündels allgemein in gewisser Näherung die Intensität dem Quadrat des absoluten Betrages von  $u_P$  proportional setzen.

## Wellentheoretische Behandlung des Abbildungsvorganges

### § 51. Spiegelung und Brechung einer beliebigen Welle (endlicher Öffnung) an der ebenen Trennungsebene zweier Medien<sup>1)</sup>

In § 9 gaben wir die Formeln für Spiegelung und Brechung einer ebenen Welle an der ebenen Trennungsebene zweier Medien, wobei wir indessen noch besonders voraussetzten, daß sowohl die einfallende ebene Welle als auch die Trennungsebene seitlich unbegrenzt seien. Das Gleiche galt dann natürlich auch für die gespiegelte und gebrochene Welle, die überdies beide wieder eben waren.

In § 44 zeigten wir nun, daß sich ein beliebiges Strahlenbündel endlicher Öffnung, eine seitlich begrenzte (nicht ebene) Welle stets durch Überlagerung seitlich unbegrenzter ebener Wellen darstellen läßt, die verschiedene Richtung, verschiedene Phase und verschiedene Amplitude besitzen. Wir können noch hinzufügen, daß sie auch verschiedene Polarisationsrichtung besitzen. Man übersieht all diese Verhältnisse leicht, wenn man auf die zur Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  gehörige ebene Welle der Gleichungssysteme (50; 3) und (50; 4) eine durch

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$x$	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \alpha \cos \gamma$	(I)
		$\sin \gamma$	$\sin \gamma$	
$y$	$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$\cos \beta \cos \gamma$	
		$\sin \gamma$	$\sin \gamma$	
$z$	$\cos \gamma$	0	$\sin \gamma$	

<sup>1)</sup> J. Picht, Zeitschr. f. Phys. **39**, 933, 1926. (Auf S. 943, Zeile 3 von oben, ist zwischen: „nach“ und „ $d\Omega_1 = \dots$ “ einzuschalten: „ $d\Omega = \frac{N^2 \cos \alpha_1}{\sqrt{1 - N^2 \sin^2 \alpha_1}} d\Omega_1$ , wo“. Entsprechend dort in Zeitschr. f. Phys. **40**,

gegebene Transformation anwendet, also ein zweites Koordinatensystem  $x_1, y_1, z_1$  einführt, dessen  $x_1$ -Achse mit der Fortpflanzungsrichtung jener ebenen Welle zusammenfällt, und dessen  $y_1$ -Achse auf der ursprünglichen  $z$ -Achse senkrecht steht.

Die Formeln (50; 5) und (50; 6) lauten ja, wenn wir dort noch in Übereinstimmung mit (50; 8) für  $C$  den Wert  $\frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi}$  setzen,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\frac{ik}{2\pi} \int \psi(\beta, \gamma) \cos \alpha \cos \gamma e^{i[\dots]} d\Omega, \\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{ik}{2\pi} \int \psi(\beta, \gamma) \cos \beta \cos \gamma e^{i[\dots]} d\Omega, \\ \mathfrak{E}_z &= +\frac{ik}{2\pi} \int \psi(\beta, \gamma) \sin^2 \gamma e^{i[\dots]} d\Omega, \\ \mathfrak{H}_x &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \int \psi(\beta, \gamma) \cos \beta e^{i[\dots]} d\Omega, \\ \mathfrak{H}_y &= -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \int \psi(\beta, \gamma) \cos \alpha e^{i[\dots]} d\Omega, \\ \mathfrak{H}_z &= 0, \\ e^{i[\dots]} &= e^{i[vt - k(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - f(\beta, \gamma))]}, \\ d\Omega &= \frac{1}{\cos \alpha} d(\cos \beta) d(\cos \gamma) = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha} d\beta d\gamma. \end{aligned} \right\} (51; 1)$$

Wenden wir nun auf die zur Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  gehörige ebene Welle die Transformation (I) an, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{E}_{x_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= 0; & (\mathfrak{E}_{y_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= 0; \\ (\mathfrak{E}_{z_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= \frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma e^{i[vt - k(x_{1P} - f(\beta, \gamma))]}, \\ (\mathfrak{H}_{x_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= 0; \\ (\mathfrak{H}_{y_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma e^{i[vt - k(x_{1P} - f(\beta, \gamma))]}, \\ (\mathfrak{H}_{z_1})_{\alpha, \beta, \gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} (51; 2)$$

521, 1926, wo die Reflexion am bewegten Spiegel behandelt wird, auf S. 525, Zeile 4 von oben, zwischen „ $d\Omega$ “ und „ $= \dots$ “ einzuschalten: „ $-\dots - A_2^2 d\Omega_2$ , wo  $d\Omega_2$ “.)

Man erkennt hieraus sofort, daß die Amplitude der zur Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  gehörenden ebenen Welle durch  $\frac{k}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma$  gegeben ist, und daß ihre Polarisationssebene senkrecht zur  $z$ -Achse, also in der  $xy$ -Ebene liegt und mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\arccos\left(-\frac{\cos \beta}{\sin \gamma}\right)$ , mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\arccos\left(+\frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}\right)$  bildet.

Wenden wir nun auf diese seitlich unbegrenzten, das vorgegebene beliebige Strahlenbündel durch Überlagerung ergebenden ebenen Wellen unsere Formeln aus § 9 an und integrieren dann wieder über die neuen durch Spiegelung bzw. Brechung daraus hervorgehenden ebenen Wellen, so erhalten wir die exakte Darstellung des gespiegelten bzw. gebrochenen Strahlenbündels.

Daß wir hierbei  $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = 0$  voraussetzen, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da wir ja den allgemeinsten Fall, daß alle drei Komponenten von  $\mathfrak{B}$  von Null verschieden sind, durch Überlagerung der drei Einzelfälle

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = 0; & \quad \mathfrak{B}_z \neq 0, \\ \mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_z = 0; & \quad \mathfrak{B}_y \neq 0, \\ \mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z = 0; & \quad \mathfrak{B}_x \neq 0 \end{aligned}$$

erhalten können.

Um die Formeln des § 9 auf unsere ebenen Wellen anwenden zu können, müssen wir noch ein drittes Koordinatensystem  $x_2, y_2, z_2$  so einführen, daß die  $x_2$ -Achse mit der  $x$ -Achse, die  $z_2$ -Achse mit der Schnittlinie der  $y$ - $z$ -Ebene und der  $y_1 z_1$ -Ebene zusammenfällt. Es gilt dann

	$x_2$	$y_2$	$z_2$	
$x$	1	0	0	(II)
$y$	0	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	
		$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	
$z$	0	$\cos \gamma$	$\cos \beta$	
		$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	

Im System  $x_2, y_2, z_2$  lauten die Gleichungen der zur Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  gehörenden ebenen Welle

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathfrak{E}_{x_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \cos \omega_2 \sin \alpha e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}_{y_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \cos \omega_2 \cos \alpha e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}_{z_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \sin \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{x_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \sin \omega_2 \sin \alpha e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{y_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \sin \omega_2 \cos \alpha e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{z_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma \cos \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 e^{i[\dots]} &= e^{i\{vt - k\{x_{2P} \cos \alpha + y_{2P} \sin \alpha - f(\beta, \gamma)\}\}}, \\
 \cos \omega_2 &= \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}; \quad \sin \omega_2 = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}.
 \end{aligned} \right\} (51; 3)$$

$\omega_2$  ist der Winkel, den die Polarisationssebene mit der  $z_2$ -Achse bildet.

Auf die durch (3) dargestellten ebenen Wellen wenden wir nunmehr die Formeln (9; 14) und folgende an und erhalten für die gespiegelten Wellen

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathfrak{E}_{x_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\parallel} \cos \omega_2 \sin \alpha^* e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}_{y_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\parallel} \cos \omega_2 \cos \alpha^* e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}_{z_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\perp} \sin \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{x_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\perp} \sin \omega_2 \sin \alpha^* e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{y_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\perp} \sin \omega_2 \cos \alpha^* e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}_{z_2}^*)_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma r_{\parallel} \cos \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 e^{i[\dots]} &= e^{i\{vt - k\{x_{2P} \cos \alpha^* + y_{2P} \sin \alpha^* - f(\beta, \gamma)\}\}},
 \end{aligned} \right\} (51; 4)$$

und für die gebrochenen Wellen

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathfrak{E}'_{x_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{||} \cos \omega_2 \sin \alpha' e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}'_{y_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{||} \cos \omega_2 \cos \alpha' e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{E}'_{z_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{\perp} \sin \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}'_{x_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{\perp} \sin \omega_2 \sin \alpha' e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}'_{y_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{\perp} \sin \omega_2 \cos \alpha' e^{i[\dots]}, \\
 (\mathfrak{H}'_{z_2})_{\alpha, \beta, \gamma} &= +\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \psi(\beta, \gamma) \sin \gamma d_{||} \cos \omega_2 e^{i[\dots]}, \\
 e^{i[\dots]} &= e^{i[vt - k' \{x_2 \rho \cos \alpha' + y_2 \rho \sin \alpha' - f'(\beta, \gamma)\}]}.
 \end{aligned} \right\} (51; 5)$$

Um über diese neuen ebenen Wellen wieder integrieren zu können, müssen wir sie einer erneuten Koordinatentransformation nach (II) unterziehen, nämlich sie auf das von  $\alpha, \beta, \gamma$  unabhängige Koordinatensystem  $x, y, z$  zurücktransformieren. Wir erhalten so, wenn wir gleich die Integration berücksichtigen und beachten, daß wegen (9; 10) und folgende

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \alpha &= \sin \alpha^*; & \cos \alpha &= -\cos \alpha^*, \\
 \cos \beta &= \cos \beta^*; & \sin \beta &= +\sin \beta^*, \\
 \cos \gamma &= \cos \gamma^*; & \sin \gamma &= +\sin \gamma^*, \\
 \sin \alpha &= \frac{n'}{n} \sin \alpha'; & \cos \alpha &= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}, \\
 \cos \beta &= \frac{n'}{n} \cos \beta'; & \sin \beta &= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - n'^2 \cos^2 \beta'}, \\
 \cos \gamma &= \frac{n'}{n} \cos \gamma'; & \sin \gamma &= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - n'^2 \cos^2 \gamma'}.
 \end{aligned} \right\} (51; 6)$$

und wegen (9; 9)

$$k' f'(\beta, \gamma) = k f(\beta, \gamma).$$

also, da

$$k' = \frac{n'}{n} k,$$

noch

$$f'(\beta, \gamma) = \frac{n}{n'} f(\beta, \gamma)$$

ist, für das gespiegelte Strahlenbündel:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_x^* &= + \frac{ik}{2\pi} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) r_{||} \cos \alpha^* \cos \gamma^* e^{i \dots} d\Omega^*, \\ \mathfrak{G}_y^* &= - \frac{ik}{2\pi} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) (r_{||} \cos^2 \alpha^* + r_{\perp}) \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} \cos \beta^* \cos \gamma^* e^{i \dots} d\Omega^*, \\ \mathfrak{G}_z^* &= - \frac{ik}{2\pi} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) (r_{||} \cos^2 \alpha^* \cos^2 \gamma^* - r_{\perp} \cos^2 \beta^*) \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} e^{i \dots} d\Omega^*, \\ \mathfrak{H}_x^* &= + \frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) r_{\perp} \cos \beta^* e^{i \dots} d\Omega^*, \\ \mathfrak{H}_y^* &= + \frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) (r_{||} \cos^2 \gamma^* - r_{\perp} \cos^2 \beta^*) \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} \cos \alpha^* e^{i \dots} d\Omega^*, \\ \mathfrak{H}_z^* &= - \frac{ik}{2\pi} \sqrt{\varepsilon} \int \psi^*(\beta^*, \gamma^*) (r_{||} + r_{\perp}) \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} \cos \alpha^* \cos \beta^* \cos \gamma^* e^{i \dots} d\Omega^*, \\ d\Omega^* &= e^{i \dots} \{ r_{\perp} \cos \alpha^* + y_{\perp} \cos \beta^* + z_{\perp} \cos \gamma^* - f^*(\beta^*, \gamma^*) \}, \end{aligned} \right\} \quad (51; 7)$$

Die Funktionen  $\psi^*$  und  $f^*$  gehen aus  $\psi$  und  $f$  hervor, indem man in  $\psi$  und  $f$  die Funktionen von  $\alpha, \beta, \gamma$  nach (6) durch die Funktionen von  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  ausdrückt. Das Entsprechende gilt für die Integrationsgrenzen.

Für das gebrochene Strahlenbündel ergibt sich, da noch

$$\begin{aligned}
 d\Omega &= \frac{n'^2 \cos \alpha'}{n \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}} d\Omega' = Ad\Omega': \\
 \mathfrak{G}'_x &= -\frac{ik'}{2\pi} \int \psi'(\beta', \gamma') d_{\parallel} \frac{1}{n} \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} \cos \gamma' e^{i[\dots]} Ad\Omega', \\
 \mathfrak{G}'_y &= +\frac{ik'}{2\pi} \int \psi'(\beta', \gamma') \left( d_{\parallel} \cos \alpha' \frac{1}{n} \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} - d_{\perp} \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha'} \cos \beta' \cos \gamma' e^{i[\dots]} Ad\Omega', \\
 \mathfrak{G}'_z &= +\frac{ik'}{2\pi} \int \psi'(\beta', \gamma') \left( d_{\parallel} \cos \alpha' \frac{1}{n} \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} \cos^2 \gamma' + d_{\perp} \cos^2 \beta' \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha'} e^{i[\dots]} Ad\Omega', \\
 \mathfrak{H}'_x &= +\frac{ik'}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \int \psi'(\beta', \gamma') d_{\perp} \cos \beta' e^{i[\dots]} Ad\Omega', \\
 \mathfrak{H}'_y &= -\frac{ik'}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \int \psi'(\beta', \gamma') \left( d_{\parallel} \cos^2 \gamma' \frac{1}{n} \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} + d_{\perp} \cos^2 \beta' \cos \alpha' \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha'} e^{i[\dots]} Ad\Omega', \\
 \mathfrak{H}'_z &= +\frac{ik'}{2\pi} \sqrt{\varepsilon'} \int \psi'(\beta', \gamma') \left( d_{\parallel} \frac{1}{n} \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} - d_{\perp} \cos \alpha' \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha'} \cos \beta' \cos \gamma' e^{i[\dots]} Ad\Omega'; \\
 & \quad e^{i[\dots]} = e^{i[\nu t - k'(x_P \cos \alpha' + y_P \cos \beta' + z_P \cos \gamma' - f'(\beta', \gamma'))]}, \\
 d\Omega' &= \frac{1}{\cos \alpha'} d(\cos \beta') d(\cos \gamma') = \frac{\sin \beta' \sin \gamma'}{\cos \alpha'} d\beta' d\gamma'.
 \end{aligned}
 \tag{51; 8}$$

Die Funktionen  $\psi'(\beta', \gamma')$  und  $f'(\beta', \gamma')$  gehen aus  $\psi(\beta, \gamma) = \frac{n}{n'} \psi(\beta, \gamma)$  und  $f'(\beta, \gamma) = \frac{n}{n'} f(\beta, \gamma)$  hervor, indem man in diesen  $\left(\frac{n}{n'} \psi(\beta, \gamma)\right)$  und  $\left(\frac{n}{n'} f(\beta, \gamma)\right)$  die Funktionen von  $\alpha, \beta, \gamma$  nach (6) durch die Funktionen von  $\alpha', \beta', \gamma'$  ausdrückt. Das Entsprechende gilt für die Integrationsgrenzen.

Man erkennt leicht, daß diese durch die Gleichungssysteme (7) und (8) gegebenen Werte den Maxwell'schen Gleichungen genügen.

Der zu den Darstellungen (7) bzw. (8) gehörige Hertz'sche Vektor  $\mathfrak{Z}^*$  bzw.  $\mathfrak{Z}'$  hat für das gespiegelte Strahlenbündel die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_x^* &= 0, \\ \mathfrak{Z}_y^* &= -\frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi} \int R_y \psi^*(\beta^*, \gamma^*) e^{i[\dots]} d\Omega^*, \\ \mathfrak{Z}_z^* &= -\frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi} \int R_z \psi^*(\beta^*, \gamma^*) e^{i[\dots]} d\Omega^*; \\ e^{i[\dots]} &= e^{i[vt - k\{x_P \cos \alpha^* + y_P \cos \beta^* + z_P \cos \gamma^* - r^*(\beta^*, \gamma^*)\}]} \end{aligned} \right\} (51; 9)$$

worin noch

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} \cos \beta^* \cos \gamma^* (r_{\parallel} + r_{\perp}), \\ R_z &= \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} (r_{\parallel} \cos^2 \gamma^* - r_{\perp} \cos^2 \beta^*), \end{aligned} \right\} (51; 10)$$

und für das gebrochene Strahlenbündel

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_x' &= 0, \\ \mathfrak{Z}_y' &= \frac{1}{k'^2} \frac{ik'}{2\pi} \int D_y \psi'(\beta', \gamma') e^{i[\dots]} d\Omega', \\ \mathfrak{Z}_z' &= \frac{1}{k'^2} \frac{ik'}{2\pi} \int D_z \psi'(\beta', \gamma') e^{i[\dots]} d\Omega'; \\ e^{i[\dots]} &= e^{i[vt - k'\{x_P \cos \alpha' + y_P \cos \beta' + z_P \cos \gamma' - r'(\beta', \gamma')\}]} \end{aligned} \right\} (51; 11)$$

worin mit  $N = \frac{n'}{n}$

$$\left. \begin{aligned} D_y &= \frac{1}{\sin^2 \alpha'} \cos \beta' \cos \gamma' N \left( d_{\parallel} - d_{\perp} \frac{\cos \alpha'}{\sqrt{1 - N^2 \sin^2 \alpha'}} \right), \\ D_z &= \frac{1}{\sin^2 \alpha'} N \left( d_{\parallel} \cos^2 \gamma' + d_{\perp} \cos^2 \beta' \frac{\cos \alpha'}{\sqrt{1 - N^2 \sin^2 \alpha'}} \right). \end{aligned} \right\} (51; 12)$$

Nach (9; 11), (9; 12) ist noch

$$\left. \begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{n'^2 \cos \alpha^* + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha^*}}{n'^2 \cos \alpha^* - n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha^*}}, \\ r_{\perp} &= \frac{n \cos \alpha^* + \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha^*}}{n \cos \alpha^* - \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha^*}}, \end{aligned} \right\} \quad (51; 10^*)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{\parallel} &= \frac{2n \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}}{n^2 \cos \alpha' + n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}}, \\ d_{\perp} &= \frac{2 \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}}{n' \cos \alpha' + \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}}. \end{aligned} \right\} \quad (51; 12^*)$$

Im Gegensatz zu dem Hertzschen Vektor der einfallenden Welle besitzt der Hertzsche Vektor der gespiegelten und der der gebrochenen Welle zwei von Null verschiedene Komponenten.

Aus der neuen Gestaltsfunktion  $f^*$  ( $\beta^*$ ,  $\gamma^*$ ) bzw.  $f'$  ( $\beta'$ ,  $\gamma'$ ) lassen sich nach (48; 6) bzw. (48; 8) die Gleichungen der Wellenflächen des gespiegelten und des gebrochenen Strahlenbündels angeben.

Ähnliche Überlegungen wie hier für Spiegelung und Brechung an einer ruhenden Trennungsebene sind übrigens auch für eine bewegte Trennungsebene durchgeführt<sup>1)</sup>.

Über die seitliche Begrenzung der ebenen Trennungsfläche haben wir bisher nichts ausgesagt. Da wir die Formeln des § 9 bei den vorstehenden Überlegungen benutzten, jene Formeln aber eine seitlich unbegrenzte Trennungsebene voraussetzten, so scheint dies zunächst auch hier der Fall zu sein. Tatsächlich aber sieht man leicht ein, daß die Trennungsebene nur unwesentlich größer zu sein braucht als der Querschnitt des Strahlenbündels an der betreffenden Stelle, da ja die das einfallende Bündel bildenden ebenen Wellen sich außerhalb der geometrisch-optischen Öffnung sehr schnell gegenseitig vernichten, die seitliche Begrenzung der Trennungsebene also dann bereits im Schatten liegt und daher keine Veranlassung zu neuen Beugungserscheinungen geben kann.

Auch diese noch immer etwas einschränkende Annahme über die seitliche Begrenzung der Trennungsebene können wir noch völlig fallen lassen, wenn wir auf die Darstellung der Lichterscheinungen

<sup>1)</sup> J. Picht, Zeitschr. f. Phys. **40**, 521, 1926: **58**, 667, 1929. (Siehe Anmerk. S. 138.)

in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft verzichten. Wir haben dann das Strahlenbündel nach der Spiegelung oder Brechung entsprechend der Begrenzung der Trennungsebene abgebildet zu denken und die Integration daher nur über die neue, durch die Berandung der Trennungsebene gegebene Öffnung zu erstrecken, falls diese kleiner ist, als es dem einfallenden Bündel entspricht.

### § 52. Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen auf eine einfallende Kugelwelle

Wir wenden die allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphen auf den speziellen Fall an, daß die einfallende Welle eine Kugelwelle ist. Sie sei gegeben durch den Hertzschen Vektor

$$\mathfrak{Z}_x = 0, \quad \mathfrak{Z}_y = 0,$$

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi} \iint \psi(\beta, \gamma) e^{i[vt - k\{(x_P - \xi_0) \cos \alpha + (y_P - \eta_0) \cos \beta + z_P \cos \gamma\}]} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha} d\beta d\gamma,$$

so daß nach (48; 6) die Koordinaten des Quellpunktes  $= (\xi_0, \eta_0, 0)$  sind. Dann gilt für die an der Trennungsebene gespiegelte Welle

$$\mathfrak{Z}_x^* = 0, \quad \mathfrak{Z}_y^* = -\frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi} \iint R_y \psi^*(\beta^*, \gamma^*) e^{i[\dots]} d\Omega^*,$$

$$\mathfrak{Z}_z^* = -\frac{1}{k^2} \frac{ik}{2\pi} \iint R_z \psi^*(\beta^*, \gamma^*) e^{i[\dots]} d\Omega^*;$$

$$e^{i[\dots]} = e^{i[vt - k\{(x_P + \xi_0) \cos \alpha^* + (y_P - \eta_0) \cos \beta^* + z_P \cos \gamma^*\}]},$$

$$d\Omega^* = \frac{\sin \beta^* \sin \gamma^*}{\cos \alpha^*} d\beta^* d\gamma^*,$$

also eine vom Punkte  $(-\xi_0, \eta_0, 0)$  ausgehende, nach  $-x$  laufende Kugelwelle, und für die dort gebrochene Welle

$$\mathfrak{Z}'_x = 0, \quad \mathfrak{Z}'_y = \frac{1}{k'^2} \frac{ik'}{2\pi} \iint D_y \psi'(\beta', \gamma') e^{i[\dots]} d\Omega',$$

$$\mathfrak{Z}'_z = \frac{1}{k'^2} \frac{ik'}{2\pi} \iint D_z \psi'(\beta', \gamma') e^{i[\dots]} d\Omega';$$

$$e^{i[\dots]} = e^{i\left[vt - k' \left\{x_P \cos \alpha' + y_P \cos \beta' + z_P \cos \gamma' - \left(\xi_0 \frac{1}{n'} \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} + \eta_0 \cos \beta'\right)\right\}\right]},$$

$$d\Omega' = \frac{\sin \beta' \sin \gamma'}{\cos \alpha'} d\beta' d\gamma',$$

deren Wellenflächen nach (48; 6) sich ergeben zu

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \left( \xi_0 \frac{n^2}{n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}} + \text{const} \right) \cos \alpha', \\ \eta' &= \left( \xi_0 \frac{n^2 - n'^2}{n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}} + \text{const} \right) \cos \beta' + \eta_0, \\ \zeta' &= \left( \xi_0 \frac{n^2 - n'^2}{n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'}} + \text{const} \right) \cos \gamma'. \end{aligned} \right\} (52; 1)$$

### Die optischen Abbildungsfehler

Um die in den §§ 43 bis 47 abgeleiteten allgemeinen Formeln für die Abbildung in optischen Systemen nutzbringend anwenden zu können, ist es notwendig, wie wir bereits oben bemerkten, aus den Ergebnissen der geometrisch-optischen Behandlung die Gleichungen der Wellenflächen bzw. der Brennflächen zu bestimmen. Als Kennfläche des Bündels wählen wir dann unter den Wellenflächen vorteilhaft eine solche aus, deren geometrisch-optische Gestalt möglichst einfach ist. Dann wird auch die zugehörige Gleichung einfach sein, also keine Mehrdeutigkeiten aufweisen. Häufig wird es genügen, für die Kennfläche eine Näherungsdarstellung zu wählen. Sicher aber wird dies erlaubt sein, wenn es sich wie in den nachfolgenden Ausführungen allein darum handelt, die für die verschiedenen Abbildungsfehler typischen Intensitätsverteilungen zu studieren, was nunmehr geschehen soll.

## Sphärische Aberration

### § 53. Sphärische Aberration. Allgemeine Behandlung

Wir betrachten zunächst die sphärische Aberration. Handelt es sich um ein „sphärisch nicht korrigiertes“ System, dessen Längs-  
aberration wir durch

$$\Delta s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta \quad (53; 1)$$

darstellen können, so befindet sich unter den Wellenflächen des betreffenden Strahlenbündels ein Rotationsparaboloid, dessen Koordinaten durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= + a \operatorname{tg}^2 \vartheta - 2 a, \\ \eta &= - 2 a \operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi, \\ \zeta &= - 2 a \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (53; 2)$$

gegeben sind. Setzen wir diese Werte in unsere  $u_P$ -Formel (44; 11) für  $\xi, \eta, \zeta$  ein, so erhalten wir, da

$$a \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos \vartheta - 2 a \cos \vartheta - 2 a \operatorname{tg} \vartheta \sin \vartheta = - a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right)$$

ist,

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (53; 3)$$

oder, wenn  $\psi$  von  $\varphi$  unabhängig ist,

$$u_P = ik \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (53; 4)$$

worin wieder  $\varrho_P = \sqrt{y_P^2 + z_P^2}$  und  $J_0(k \varrho_P \sin \vartheta)$  die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung vom Argument  $k \varrho_P \sin \vartheta$  ist. Ändern wir hierin das Vorzeichen von  $a$  und gleichzeitig das von  $x_P$ , so geht (4) (abgesehen vom Vorzeichen) in den konjugiert komplexen Wert über. Daraus aber folgt sofort, daß die Inten-

sitätsverteilung eines überkorrigierten Strahlenbündels ( $a > 0$ ) in bezug auf die durch die Kaustikspitze gehende achsensenkrechte Ebene spiegelbildlich ist zu derjenigen eines gleich stark unterkorrigierten Bündels ( $a < 0$ ).

Wir entwickeln  $\cos \vartheta$  und  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  nach Potenzen von  $\sin \vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^4 \vartheta - \frac{1}{16} \sin^6 \vartheta - \frac{5}{128} \sin^8 \vartheta - \dots, \\ \frac{1}{\cos \vartheta} &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{3}{8} \sin^4 \vartheta + \frac{5}{16} \sin^6 \vartheta + \frac{35}{128} \sin^8 \vartheta + \dots \end{aligned} \right\} (53; 5)$$

und ersetzen in (3) bzw. (4) den im Exponenten des Integranden auftretenden, von der sphärischen Aberration herrührenden Ausdruck  $a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right)$  durch die ersten Glieder der Entwicklung nach  $\sin \vartheta$ , schreiben also

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik[x_P \cos \vartheta + \varrho_P \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_P) + \frac{1}{4} a \sin^4 \vartheta]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (53; 6)$$

bzw.

$$u_P = ik \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta) J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ik[x_P \cos \vartheta + \frac{1}{4} a \sin^4 \vartheta]} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (53; 7)$$

Dieses Integral können wir demnach, solange

$$\frac{1}{4} k a \sin^6 \Theta \ll \frac{\pi}{2}$$

ist, auffassen als mathematische Darstellung eines sphärisch nicht korrigierten Strahlenbündels, dessen sphärische Längsaberration durch (1) gegeben ist. Aus (6) bzw. (7) erkennen wir noch, daß die sphärische Längsaberration die Intensitätsverteilung erst zu beeinflussen beginnt, wenn

$$\frac{1}{4} k a \sin^4 \Theta \text{ nicht } \ll \frac{\pi}{2}$$

ist. Wir erwähnen noch, daß (6) bzw. (7) in Wirklichkeit der exakte mathematische Ausdruck für ein Strahlenbündel ist, dessen Wellenflächen nach § 48 den Gleichungen genügen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left( \frac{3}{4} a \sin^4 \vartheta + \text{const} \right) \cos \vartheta, \\ \eta &= \left( \frac{3}{4} a \sin^4 \vartheta - a \sin^2 \vartheta + \text{const} \right) \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \zeta &= \left( \frac{3}{4} a \sin^4 \vartheta - a \sin^2 \vartheta + \text{const} \right) \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (53; 8)$$

Da wir unten für dieses Strahlenbündel die Auswertung des zugehörigen Integralausdruckes (7) durchführen werden, so stellen wir noch die Gleichungen der Brennflächen auf. Bezeichnen wir die beiden Hauptkrümmungsradien durch  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$ , so ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{3}{4} a \sin^2 \vartheta (4 - 5 \sin^2 \vartheta) \quad (= \varrho_I), \\ \varrho_2 &= \frac{1}{4} a \sin^2 \vartheta (4 - 3 \sin^2 \vartheta) \quad (= \varrho_t) \end{aligned}$$

und demnach für die Brennflächen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 3 a \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta, \\ y_1 &= (3 a \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta - a \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ z_1 &= (3 a \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta - a \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta \sin \vartheta, \\ \text{und} \\ x_2 &= a \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^3 \vartheta, \\ y_2 &= 0, \\ z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53; 9)$$

Für  $\sin \vartheta = \sqrt{0,4}$ , also  $\vartheta = 39^\circ 14'$  besitzt die nicht ausgeartete Brennfläche eine kreisförmige Kante, die zur Achse des Strahlenbündels konzentrisch ist.

Abb. 35 (S. 152) zeigt den Schnitt dieser Brennflächen mit einer durch die Achse des Strahlenbündels gelegten Ebene. Außerdem ist — gestrichelt — noch die Kennfläche des Strahlenbündels (7) angedeutet, die durch (8) mit  $\operatorname{const} = 0$  gegeben ist. Wie man aus den Gleichungen der Brennflächen und auch aus Abb. 35 ersieht, gilt (7) also in Wirklichkeit für ein achsensymmetrisches Strahlenbündel (die zweite Schale der Kaustik ist ausgeartet und fällt mit einem Teile der Achse des Bündels zusammen), das für einen Achsenwinkel von  $90^\circ$  „sphärisch korrigiert“ ist, da  $x_2$  sowohl für  $\vartheta = 0$  als auch für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  den Wert Null annimmt. Bis zu einer Öffnung von  $\vartheta = 39^\circ 14'$  aber können wir das zugehörige Strahlenbündel als ein sphärisch nicht korrigiertes ansehen. Abb. 36 zeigt noch (für  $a = 900 \lambda$ ) die graphische Darstellung der zugehörigen Längsaberration

$$\Delta s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^3 \vartheta.$$

Das eingezeichnete Kreuz entspricht dem Werte  $\vartheta = 17,5^\circ$ .

Die Amplitudenfunktion  $\psi(\vartheta)$  wollen wir wieder gleich  $\cos \vartheta$  setzen. Beschränken wir uns außerdem auf diejenigen in der Nähe

der Brennfläche liegenden Aufpunkte, für die im ganzen Integrationsgebiet

$$\left| \frac{1}{16} k x_P \sin^6 \vartheta \right| \ll 1 \quad (53; 10)$$

ist, so können wir im Exponenten der  $e$ -Funktion noch

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^4 \vartheta$$

setzen. Die Bedingung (10) ist z. B. bei  $\Theta = 17,5^\circ$ ;  $2\Theta = 35^\circ$  für  $-100\lambda \leq x_P \leq +100\lambda$  sicher erfüllt, da dann

$$\left| \frac{1}{16} k x_P \sin^6 \vartheta \right| \leq 0,0286$$

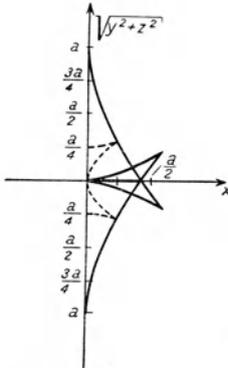


Abb. 35

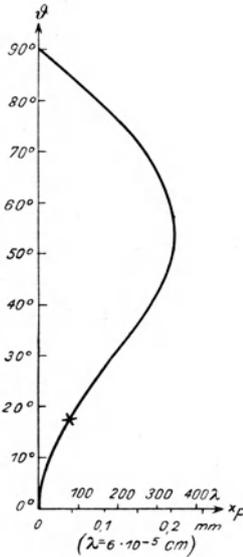


Abb. 36

Abb. 35. Brennfläche (—) und Kennfläche (---) des durch (53; 7) dargestellten Strahlenbündels mit sphärischer Aberration (s. Abb. 36, 37, 39 und 40)

Abb. 36. Sphärische Längsaberration des durch (53; 7) und Abb. 35 dargestellten Strahlenbündels (s. Abb. 37, 39 und 40)

ist. Bei  $\Theta = 11,5^\circ$  ist sie sogar noch für

$$-1000\lambda \leq x_P \leq +1000\lambda$$

erfüllt. Unsere Formel (7) geht jetzt mit  $\psi(\vartheta) = \cos \vartheta$  über in

$$u_P = i k e^{-i k x_P} \int_0^\Theta J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-i k [1/8 (2a - x_P) \sin^4 \vartheta - 1/2 x_P \sin^2 \vartheta]} \sin \vartheta d(\sin \vartheta), \quad (53; 11)$$

wofür wir auch schreiben können, wenn wir  $\sin \vartheta = \vartheta_0$  setzen,

$$u_P = ik e^{-ikx_P} \int_0^{\sin \vartheta} J_0(k \varrho_P \vartheta_0) e^{-ik[1/8(2a-x_P)\vartheta_0^4 - 1/2x_P\vartheta_0^2]} \vartheta_0 d\vartheta_0. \quad (53; 12)$$

Setzen wir hier noch

$$\vartheta_0^2 = 2(\chi + A),$$

wo

$$A = \frac{x_P}{2a - x_P}$$

ist, so wird

$$u_P = ik e^{-ikx_P(1 - 1/2A)} \int_{-A}^{1/2 \sin^2 \vartheta - A} J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\chi + A)}) e^{-ik(a - 1/2x_P)\chi^2} d\chi. \quad (53; 13)$$

Dieses Integral läßt sich auswerten, indem man zunächst die von der Integrationsvariablen abhängende Besselsche Funktion nullter Ordnung in eine Summe Besselscher Funktionen höherer Ordnung entwickelt, derart, daß die Integrationsvariable nur noch in den Entwicklungskoeffizienten als Potenz ( $\chi^u$ ), nicht aber im Argument (der Besselschen Funktionen) auftritt. Denn es ist ja

$$J_0(\alpha + \beta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\beta)^\mu \frac{1}{\mu!} \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^\mu J_\mu(\alpha).$$

Setzen wir hierin

$$\alpha = -k \varrho_P \sqrt{2A}; \quad \beta = +k \varrho_P [\sqrt{2(\chi + A)} + \sqrt{2A}],$$

so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\chi + A)}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \chi^\mu \left(\frac{-1}{2A}\right)^\mu \frac{1}{\mu!} \delta^\mu J_\mu(\delta),$$

worin

$$\delta = +k \varrho_P \sqrt{2A}.$$

Wir wollen indessen hier die Entwicklung nicht im einzelnen durchführen, beschränken uns vielmehr auf diesen Hinweis und geben gleich das Resultat an. Es wird

$$\left. \begin{aligned} u_P &= ik e^{-ikx_P(1 - 1/2A)} \{F(\chi_2) - F(\chi_1)\}, \\ \text{wo} \\ \chi_2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - A; \quad \chi_1 = -A; \quad A = \frac{x_P}{2a - x_P}, \\ F(\chi) &= D(\chi) + E(\chi) + G(\chi), \end{aligned} \right\} (53; 14_1)$$

$$\begin{aligned}
 D(\chi) &= \sqrt{\frac{\pi}{B}} \{ C_u - i S_u \} \sum_0^\infty \left( -\frac{i}{\xi} \right)^n n!! \frac{\delta^{2n} J_{2n}(\delta)}{(2n)!} {}_1, \\
 E(\chi) &= i \frac{e^{-1/2 i B \chi^2}}{B \chi} \sum_0^\infty \left( -\frac{i}{\xi} \right)^n n!! \frac{\delta^{2n} J_{2n}(\delta)}{(2n)!} f_n(i B \chi^2), \\
 G(\chi) &= -i \frac{e^{-1/2 i B \chi^2}}{2 k x_P} \sum_0^\infty \left( -\frac{i}{\xi} \right)^n n^*!! \frac{\delta^{2n+1} J_{2n+1}(\delta)}{(2n+1)!} e_n\left(\frac{1}{2} i B \chi^2\right),
 \end{aligned}$$

$$\xi = 4 k x_P A; \quad \delta = k \varrho_P \sqrt{2 A}; \quad B = k(2a - x_P),$$

$$f_n(z) = \sum_1^n \frac{z^\mu}{\mu!!}; \quad f_0(z) = 0,$$

$$e_n(z) = \sum_0^n \frac{z^\mu}{\mu!} \left( = \sum_0^n \frac{(2z)^\mu}{\mu^*!!} \right); \quad e_0(z) = 1,$$

$$C_u = C_u(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi}{2} u^2 du; \quad S_u = S_u(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi}{2} u^2 du,$$

$$s = \chi \sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)}.$$

 (53; 14<sub>p</sub>)

In den nächsten Paragraphen werden wir noch einige Spezialfälle behandeln. Statt des hier vorgeschlagenen Weges hätten wir das Integral aus (12) auch folgendermaßen auswerten können: Wir hätten die Exponentialfunktion in eine Reihe nach Potenzen von  $\vartheta_0$  entwickeln und auf den so erhaltenen Ausdruck die Formel (A; 24) anwenden können.

#### § 54. Intensitätsverteilung auf der Achse des Strahlenbündels

Für die Punkte der Achse des Strahlenbündels läßt sich (53; 13) wesentlich vereinfachen. Denn für diese wird  $\varrho_P = 0$ , also  $J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\chi + A)}) = 1$ , und wir erhalten

$$(u_P)_{\varrho_P=0} = i k e^{-i k x_P (1 - 1/2 A)} \int_{-A}^{1/2 \sin^2 \theta - A} e^{-i k (a - 1/2 x_P) \chi^2} d\chi. \quad (54; 1)$$

1) Tabellen für  $n!! \frac{\delta^{2n} J_{2n}(\delta)}{(2n)!}$  und  $n^*!! \frac{\delta^{2n+1} J_{2n+1}(\delta)}{(2n+1)!}$  sind für  $\delta = 1, 2, \dots, 15$  und  $n = 0, 1, 2, \dots, 10$  bei J. Picht, Ann. d. Phys. (4) 77, 752—755 (852—855), 1925, gegeben.

Setzen wir hierin noch

$$\chi \sqrt{k \left( a - \frac{1}{2} x_P \right)} = \delta \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

so werden die Integrationsgrenzen

$$\delta_1 = -A \sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)} = -\frac{x_P}{2a - x_P} \sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)} = s_1,$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \left( \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - A \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)} \\ &= \left( \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \frac{x_P}{2a - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)} = s_2. \end{aligned}$$

Ferner wird

$$d\chi = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{\pi} (2a - x_P)}} d\delta = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \Theta}{s_2 - s_1} d\delta,$$

und wir erhalten

$$(u_P)_{\varrho_P = 0} = ik \frac{1}{2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P (1 - \frac{1}{2} A)} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} e^{-i\frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta, \quad (54; 2)$$

so daß  $u_P$  auf das Fresnelsche Integral (siehe § 31)  $C - iS$  zurückgeführt ist.

In (2) kann  $(2a - x_P)$  auch negative Werte annehmen, es können also  $s_1$  und  $s_2$  auch imaginär werden. Beachten wir nun, daß  $C(i\alpha) = iC(\alpha)$  und  $S(i\alpha) = -iS(\alpha)$  ist, so können wir statt (2) auch schreiben:

$$\begin{aligned} (u_P)_{\varrho_P = 0} &= ik \frac{1}{2} \sin^2 \Theta e^{-ikx_P \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x_P}{2a - x_P} \right)} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} e^{\pm i\frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta, \quad (54; 3) \end{aligned}$$

wo jetzt

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{x_P}{2a - x_P} \sqrt{\frac{k}{\pi} |2a - x_P|}, \\ s_2 &= \left( \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \frac{x_P}{2a - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |2a - x_P|}, \\ s_2 - s_1 &= \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{\frac{k}{\pi} |2a - x_P|}, \end{aligned} \right\} \quad (54; 4)$$

und im Exponenten des Integranden das  $+$ -Zeichen gilt, wenn  $(2a - x_P) < 0$ , dagegen das  $-$ -Zeichen, wenn  $(2a - x_P) > 0$  ist.

Formel (3) gestattet unter Benutzung der Cornuschen Spirale schon ohne numerische Rechnung einen gewissen Einblick in die Intensitätsverhältnisse auf der Achse des Strahlenbündels. Bezeichnen wir den absoluten Betrag der Verbindungslinie der beiden durch  $s_1$  bzw.  $s_2$  bestimmten Punkte der Cornuschen Spirale durch  $d$ , so ist die Intensität proportional dem Ausdruck

$$\left(\frac{d}{s_2 - s_1}\right)^2 \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta.$$

Setzen wir  $a > 0$  voraus, so gelten für  $x_P \leq 2a$  die im zweiten ( $s < 0$ ) und vierten ( $s > 0$ ) liegenden Zweige der Spirale, für  $x_P \geq 2a$  dagegen der im ersten ( $s > 0$ ) liegende Zweig (Abb. 19 (§ 31)). Für  $x_P = 0$ , also in der Spitze der geometrisch-optischen Kaustik,

wird  $s_1 = 0$  und  $s_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{4 \left| \frac{a}{\lambda} \right|}$ . Von den zugehörigen

Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der Spirale liegt daher,  $a$  als positiv vorausgesetzt,  $P_1$  im Nullpunkt und  $P_2$  im vierten Quadranten. Nehmen wir nun  $a$  so groß an, daß wir in der Nähe der Spitze der Kaustik

$\sqrt{2 \left| \frac{2a - x_P}{\lambda} \right|}$  in erster Näherung gleich  $\sqrt{4 \left| \frac{a}{\lambda} \right|}$  setzen dürfen, so sehen wir, daß beim Fortschreiten des Aufpunktes in Richtung positiver  $x$ -Werte, also ins Innere der Kaustik hinein, der dem Werte  $s_1$  entsprechende Punkt  $P_1$  auf dem im zweiten Quadranten liegenden Zweige vom Nullpunkt fortwandert, während ihm in einer gewissen, in erster Näherung konstant bleibenden Entfernung

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{2 \left| \frac{2a - x_P}{\lambda} \right|} \approx \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{4 \left| \frac{a}{\lambda} \right|} \\ &= \sin^2 \Theta \sqrt{\left| \frac{a}{\lambda} \right|} \end{aligned}$$

der dem Werte  $s_2$  entsprechende Punkt  $P_2$  folgt. Schreitet dagegen der Aufpunkt in Richtung negativer  $x$ -Werte fort, entfernt er sich also immer mehr von der Kaustik, so wandert  $P_1$  auf dem im vierten Quadranten liegenden Zweige vom Nullpunkt fort und folgt dem

ihm in nahezu konstantem Abstände  $\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{2 \left| \frac{2a - x_P}{\lambda} \right|}$  vor-

angehenden Punkte  $P_2$ . Man erkennt nun leicht, daß in diesem Falle die Intensität mehr und mehr abnimmt. Je nach der Größe des Wertes  $a$  werden sich hierbei jedoch kleine Maxima und Minima, also geringe Schwankungen der Intensität ausprägen. Das Auftreten der Maxima und Minima erkennt man leicht durch folgende Überlegung: Da die Krümmung der Cornuschen Spirale zum Windungspunkte hin ständig zunimmt, so werden sich bei nahezu konstantem Abstände der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  in gewisser Reihenfolge die beiden Extremlagen von  $P_1$  und  $P_2$  ergeben: 1. Die Verbindungslinie der beiden Punkte geht durch den Windungspunkt hindurch; 2. Die Verlängerung dieser Verbindungslinie geht durch den Windungspunkt hindurch. Da die Intensität in erster Näherung dem Quadrat der Länge der Verbindungslinie  $\overline{P_1 P_2}$  proportional ist<sup>1)</sup>, so entspricht der ersten der beiden angegebenen Extremlagen ein Maximum, der zweiten ein Minimum der Intensität.

Wandert hingegen der Aufpunkt auf der Achse des Bündels in das Innere der Kaustik hinein, so schreitet — wie wir sahen — der Punkt  $P_1$  auf dem im zweiten Quadranten liegenden Zweige der Cornuschen Spirale fort. Da also jetzt  $P_1$  und  $P_2$  in verschiedenen Quadranten liegen, so wird  $d$  und mithin die Intensität größere Werte annehmen<sup>2)</sup> als in der Spitze der Kaustik. Eine besonders ausgezeichnete Lage der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  ist diejenige, bei der die Verbindungslinie durch den Nullpunkt der komplexen Ebene der Cornuschen Spirale hindurchgeht, bei der also

$$s_1 = -s_2, \text{ d. h. } \frac{x_P}{2a - x_P} = \frac{1}{4} \sin^2 \Theta; \quad x_P = 2a \frac{\sin^2 \Theta}{4 + \sin^2 \Theta} = x_S \quad (54; 5)$$

ist. Diesen Punkt  $x_S$  können wir etwa als Symmetriepunkt des Strahlenbündels betrachten und ihn dem Brennpunkt einer Kugelwelle als Analogon gegenüberstellen. Das soll jedoch nicht heißen, daß in ihm die Intensität in allen Fällen ein Maximum ist, sondern nur, daß auf beiden Seiten von ihm auf der Achse die Lichtverhältnisse an-

1) Die Bogenlänge  $\widehat{P_1 P_2} = s_2 - s_1$  war in erster Näherung konstant.

2) Da wir  $a$  als groß annahmen. Ist  $a \sin^4 \Theta \leq \frac{3}{4} \lambda$ , so gilt das oben Gesagte zwar auch noch, doch ist die Zunahme der Intensität nur gering, so daß sie längs der ganzen Strecke von  $x_P = 0$  bis  $x_P = 2x_S$  als annähernd konstant angesehen werden darf.

nährend symmetrisch sind. Ob im Punkte  $x_S = 2a \frac{\sin^2 \Theta}{4 + \sin^2 \Theta}$  ein Intensitätsmaximum vorhanden ist, oder ob in ihm selbst ein Minimum liegt, das beiderseits in mehr oder weniger großem Abstände von Intensitätsmaximis umgeben ist, hängt von der Größe

$$\frac{1}{2} \sin^4 \Theta \cdot |2a - x_S| \approx a \sin^4 \Theta \quad (54; 6)$$

ab. Hat diese etwa den Wert  $14,44\lambda$ , so liegt der zu  $x_S$  gehörige Punkt  $P_1$  in  $s_1 = -1,9$ , der Punkt  $P_2$  in  $s_2 = +1,9$  der Cornuschen Spirale. Wandert nun z. B.  $P_1$  zum Punkte  $s_1 = -1,3$ , so wandert  $P_2$  zum Punkte  $s_2 = +2,5$ . Geht umgekehrt  $P_1$  zum

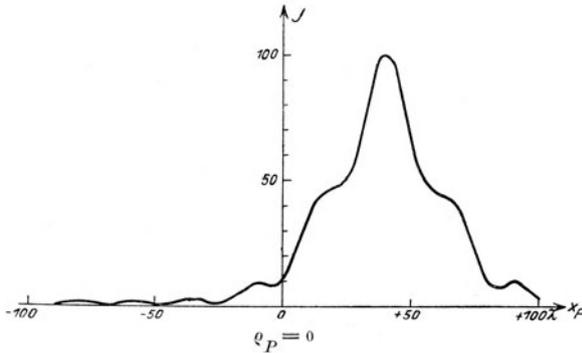


Abb. 37. Intensitätsverteilung längs der Achse eines Strahlenbündels, dessen sphärische Längsaberration durch Abb. 36 gegeben ist

Punkte  $s_1 = -2,5$ , so wandert  $P_2$  zum Punkte  $s_2 = +1,3$ . Man sieht nun sofort, daß die Verbindungslinie der Punkte  $-1,3$  und  $+2,5$  bzw. der Punkte  $+1,3$  und  $-2,5$  größer ist als diejenige der Punkte  $-1,9$  und  $+1,9$ . In diesem Falle ist also die Intensität im Symmetriepunkt kleiner als in der Umgebung.

Hat die Größe  $a \sin^4 \Theta$  dagegen z. B. den Wert  $7,29\lambda$ , so erkennt man ebenso, daß jetzt im Symmetriepunkt ein Intensitätsmaximum vorhanden ist.

Wir erwähnen noch besonders, daß der Symmetriepunkt  $x_S$ , den wir als Analogon des Brennpunktes der Kugelwelle anzusehen haben, im Innern der Kaustik liegt, und zwar ungefähr im Mittelpunkt der ausgearteten Kaustikschale. Denn diese erstreckt sich ja nach

(53; 9) vom Punkte  $x_2 = 0$  bis zum Punkte  $x_2 = a \operatorname{tg}^2 \Theta \cos^3 \Theta$ , während wir statt (5) für  $x_s$  auch schreiben können

$$x_s = \frac{1}{2} a \operatorname{tg}^2 \Theta \cos^3 \Theta \frac{1}{\cos \Theta (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta)}. \quad (54; 7)$$

In Abb. 37 haben wir für  $a = 900 \lambda$ ,  $\sin \Theta = 0,3^1$  (dies entspricht einem Achsenwinkel  $\Theta = 17,5^\circ$ , also einer ganzen Öffnung des Bündels von  $35^\circ$ ) auf Grund der Formel (3) die graphische Darstellung der Intensitätsverteilung längs der Achse des Strahlenbündels gegeben, dessen sphärische Aberration nach (53; 9) der Gleichung

$$\Delta s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^3 \vartheta = a \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \quad (54; 8)$$

genügt.

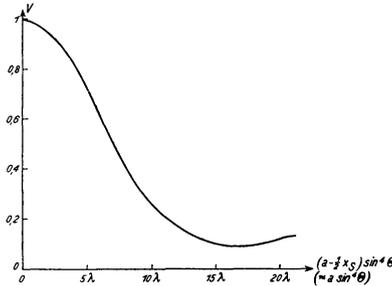


Abb. 38. Definitionshelligkeit  $V$  in Abhängigkeit von  $a \sin^4 \Theta$

In Abb. 38 geben wir außerdem noch (in Abhängigkeit von der obengenannten Größe  $a \sin^4 \Theta$ ) eine graphische Darstellung für das Verhältnis  $V$  der Intensität im Symmetriepunkt des mit einer sphärischen Aberration (8) behafteten Strahlenbündels zu derjenigen einer Kugelwelle gleicher Öffnung. Dieses Verhältnis  $V$  bezeichnet Strehl als „Definitionshelligkeit“. Wir erwähnen noch, daß sich für die achsensenkrechte Symmetriepunktebene — die übrigens keine „Symmetrieebene“ ist —, die Formeln (53; 14) für  $u_P$  wesentlich vereinfachen, da hier  $\chi_1 = -\chi_2 = -\frac{1}{4} \sin^2 \Theta$  wird. Dadurch wird  $G(\chi_1) = G(\chi_2)$ ;  $D(\chi_1) = -D(\chi_2)$ ;  $E(\chi_1) = -E(\chi_2)$  und

$$u_P = 2 i k e^{-i k x_P (1 - 1/2 A)} \{D(\chi_2) + E(\chi_2)\}.$$

<sup>1)</sup> Diese Zahlenwerte genügen zufällig dem Werte  $a \sin^4 \Theta = 7,29 \lambda$ , für den sich im Symmetriepunkt ein Intensitätsmaximum ergibt

### § 55. Weitere Diskussion von (54; 3). Phasenanomalie

Wir sahen, daß unsere Formel (54; 3) bei  $\Theta = 11^\circ 30'$  für  $-1000\lambda \leq x_P \leq +1000\lambda$  gültig ist. Wir wollen nun annehmen, daß  $a$  hinreichend klein ist (etwa gleich  $200\lambda$ ). Dann gelten in der unmittelbaren Nähe der Kaustikspitze die gleichen Überlegungen wie vorher, nur daß die Bogenlänge ( $s_2 - s_1$ ) zwischen  $P_1$  und  $P_2$  nicht mehr als annähernd konstant angesehen werden darf, sondern mit Annäherung an  $x_P = 2a$  gegen Null geht. Für  $x_P = 2a$  wird sowohl  $s_1$  als auch  $s_2$  gleich  $-\infty$ , so daß hier  $P_1$  und  $P_2$  im Windungspunkt des zweiten Quadranten zusammenfallen. Für  $x_P > 2a$  gelten die Zweige der Spirale im ersten und dritten Quadranten. Mit wachsendem  $x_P$ -Werte, also  $x_P > 2a$ , wird  $s_2 > s_1 > 0$ , die zugehörigen Spiralpunkte  $P_1$  und  $P_2$  liegen also im ersten Quadranten. Wir können daher  $P_1$  und  $P_2$  für  $x_P = 2a$  mit dem gleichen Rechte auch in den Windungspunkt des ersten Quadranten hineinlegen. Für  $2a \leq x_P \leq 4a$  nehmen mit wachsendem  $x_P$  die Werte  $s_1$  und  $s_2$  ab, während die Differenz  $s_2 - s_1 > 0$  zunimmt. Für  $x > 4a$  nehmen mit wachsendem  $x_P$  die drei Werte  $s_1, s_2, s_2 - s_1$  dauernd zu, so daß die zugehörigen Spiralpunkte  $P_1$  und  $P_2$  in immer größerem Abstände voneinander sich dem Windungspunkte im ersten Quadranten nähern. Im ganzen erhalten wir also folgenden Verlauf: Wandert der Aufpunkt auf der Achse des Strahlenbündels, dessen sphärische Aberration  $a > 0$  klein ist, von negativen  $x_P$ -Werten durch die Kaustikspitze ins Innere der Kaustik hinein, d. h. zu positiven  $x_P$ -Werten, so wandern die beiden zugehörigen Spiralpunkte  $P_1$  und  $P_2$  in zunächst großem, allmählich abnehmendem Abstände hintereinander her vom Windungspunkt des vierten Quadranten zum Nullpunkt hin, über diesen hinaus in den zweiten Quadranten hinein und zu dem dortigen Windungspunkte hin, den sie beide gemeinsam für  $x_P = 2a$  erreichen. Sie springen dann über zum Windungspunkt des ersten Quadranten, laufen hier in allmählich größer werdendem gegenseitigem Abstände zunächst zum Nullpunkt hin, ohne ihm aber hinsichtlich der geradlinigen Entfernung irgendwie wesentlich näher zu kommen, um dann von  $x_P = 4a$  ab wieder „umzukehren“, d. h. sich in immer größer werdendem gegenseitigem Abstände wieder dem Windungspunkte im ersten Quadranten zu nähern.  $P_2$  wandert stets hinter  $P_1$  her ist also im vierten und ersten Quadranten dauernd längs

der Spirale gemessen weiter vom Nullpunkt entfernt als  $P_1$ , im zweiten Quadranten dagegen dem Nullpunkt dauernd näher als  $P_1$ , außer im Windungspunkt des zweiten Quadranten, in dem sie ja zusammenfallen.

Da der vor dem Integral stehende Phasenfaktor

$$e^{-ikx_P \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x_P}{2a - x_P}\right)}$$

sich für  $x_P \gg 2a$  annähernd normal ändert, so drückt sich die anomale Phasenänderung durch den Winkel aus, den die Verbindungslinie  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  mit der reellen Achse bildet. Man erkennt nun hier, daß die Verhältnisse sehr kompliziert werden, denn für Aufpunkte weit vor der Kaustik, weit hinter der Kaustik und in der Nähe von  $x = 2a$  liegen ja die beiden Spiralpunkte in der Nähe des gleichen Windungspunktes (nämlich in der Nähe des Windungspunktes des vierten bzw. des ersten bzw. des zweiten Quadranten). Die Verbindungslinie  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  dreht sich gewissermaßen um diesen Windungspunkt, so daß der Winkel alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$  durchläuft.

Die gleiche Eigentümlichkeit der anomalen Phasenänderung, die sich hier für die Punkte der Achse des mit sphärischer Aberration behafteten Strahlenbündels ergeben hat, haben wir auch bereits für die Achsenpunkte der idealen Kugelwelle gefunden.

### § 56. Anwendung der Formeln für die Intensitätsverteilung bei sphärischer Aberration auf ein spezielles Beispiel

In Abb. 37 hatten wir für den speziellen Fall  $a = 900\lambda$ ,  $\sin \Theta = 0,3$ , d. h.  $\Theta = 17,5^\circ$  die Intensitätsverteilung längs der Achse des Strahlenbündels gegeben, wobei die sphärische Aberration durch (54; 8) gegeben war. In den Abb. 39 und 40 geben wir noch für das gleiche Zahlenbeispiel die „Kurven (Flächen) gleicher Helligkeit“, die auf Grund von Durchrechnungen nach (53; 14) für eine größere Zahl von achsensenkrechten Ebenen erhalten wurden. Die beiden Abb. 39 und 40 unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß in Abb. 39 der besseren Übersicht wegen die Einheit der Ordinate — die den Abstand von der Achse des Bündels angibt — gleich ist dem Fünffachen der Einheit der Abszisse, während in Abb. 40 beide Einheiten einander gleich gewählt wurden.

Außer den Kurven gleicher Helligkeit wurden noch die geometrisch-optische Kaustik sowie einige geometrisch-optische Lichtstrahlen eingezeichnet. Um die Flächen gleicher Helligkeit zu erhalten, haben wir die Abbildungen um die Abszissenachse rotiert zu denken.

Wir ersehen aus den Abbildungen, daß die Intensität vom Hauptmaximum, das auf der Achse des Strahlenbündels etwa in

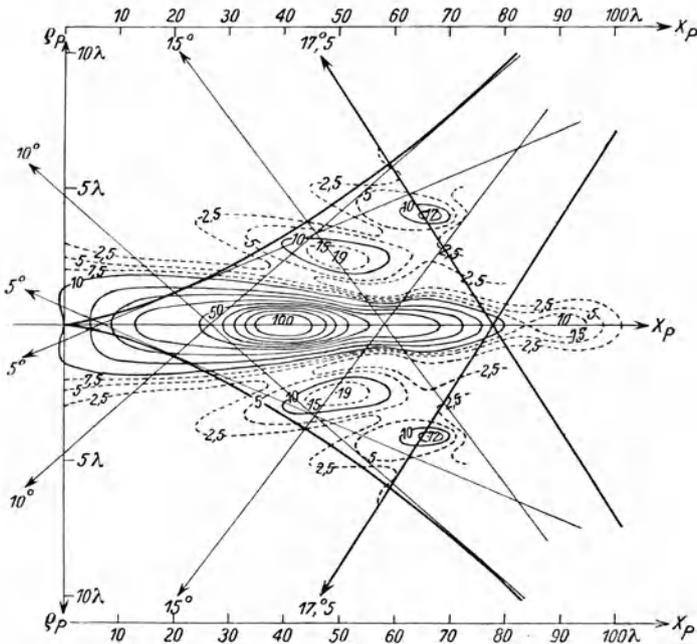


Abb. 39. Flächen gleicher Helligkeit für das Strahlenbündel, dessen sphärische Längsaberration durch Abb. 36 gegeben ist (s. auch Abb. 35, 37 und 40). (Maßstab von  $\rho_P$  gleich dem Fünffachen desjenigen von  $x_P$ )

der Mitte der ausgearteten Kaustik liegt, nach allen Richtungen hin abfällt, und zwar besonders stark in Richtung senkrecht zur Achse des Bündels. Hier fällt es auf einer Strecke von etwa 1,5 bis 2 Wellenlängen von 100 % auf ungefähr 3 %, um dann jedoch wieder auf ungefähr 19 % anzuwachsen. Dieser „Ring eines relativen Intensitätsmaximums“ liegt bei  $x_P = 50\lambda$ ;  $\rho_P = 2,5\lambda$ . Ein zweiter „Ring eines relativen Intensitätsmaximums“ liegt bei

$x_P = 66 \lambda$ ;  $q_P = 4 \lambda$ . Hier steigt die Intensität auf 17 %. Ein besonders auffallendes Ergebnis, auf das wir besonders hinweisen wollen, ist es, daß sich die geometrisch-optische Kaustik in der wellentheoretischen Betrachtung fast gar nicht bemerkbar macht. Der einzige Hinweis auf sie scheint darin zu bestehen, daß die Verbindungslinie der beiden Nebenmaxima sowie des auf der Achse liegenden Wendepunktes ungefähr der geometrisch-optischen Kaustik parallel läuft, und daß die „Ringe relativer Intensitätsmaxima“ gegen das Hauptmaximum auf der Achse im Sinne der Kaustik verschoben sind.

Unsere Darstellung der Kurven gleicher Helligkeit gestattet es leicht, die Lichtverteilung in einer achsen-senkrechten Ebene oder auch längs eines geometrisch-optischen Lichtstrahles zu entnehmen.

Zum Schluß erwähnen wir noch, daß die Intensität im Brennpunkt einer Kugelwelle gleicher Öffnung und gleicher Intensitätsbelegung  $\psi$  gleich ist dem 2,15fachen der Intensität im Symmetriepunkt unseres hier behandelten Strahlenbündels mit

$$A s' = 900 \lambda \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^3 \vartheta,$$

so daß also durch die sphärische Aberration die Helligkeit im Bildpunkt um mehr als 50 % herabgesetzt wurde. Dies entspricht dem aus Abbild. 38 für  $a \sin^4 \Theta = 7,29$  zu entnehmenden Wert.

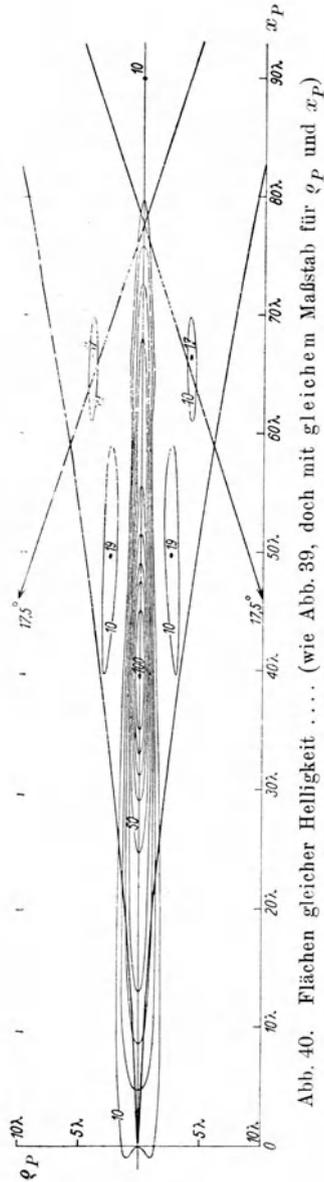


Abb. 40. Flächen gleicher Helligkeit . . . . (wie Abb. 39, doch mit gleichem Maßstab für  $q_P$  und  $x_P$ )

### § 57. Integraldarstellung von $u_P$ für sphärische Aberration mit zwei und mehr Koeffizienten

Ist die sphärische Aberration durch zwei oder mehr Koeffizienten darstellbar, also etwa allgemein

$$\mathcal{A}s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta + b \operatorname{tg}^4 \vartheta + c \operatorname{tg}^6 \vartheta + d \operatorname{tg}^8 \vartheta + \dots, \quad (57; 1)$$

so lauten die Gleichungen der zugehörigen Wellenflächen<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -2a' + a' \operatorname{tg}^2 \vartheta + b' \operatorname{tg}^4 \vartheta + c' \operatorname{tg}^6 \vartheta \\ &\quad + d' \operatorname{tg}^8 \vartheta + \dots - \operatorname{const} \cdot \cos \vartheta, \\ \eta &= -\left(\frac{2}{1} a' \operatorname{tg} \vartheta + \frac{4}{3} b' \operatorname{tg}^3 \vartheta + \frac{6}{5} c' \operatorname{tg}^5 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{7} d' \operatorname{tg}^7 \vartheta + \dots + \operatorname{const} \cdot \sin \vartheta\right) \cos \varphi, \\ \zeta &= -\left(\frac{2}{1} a' \operatorname{tg} \vartheta + \frac{4}{3} b' \operatorname{tg}^3 \vartheta + \frac{6}{5} c' \operatorname{tg}^5 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{7} d' \operatorname{tg}^7 \vartheta + \dots + \operatorname{const} \cdot \sin \vartheta\right) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (57; 2)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten  $a', b', c', \dots$  ergeben sich aus den Koeffizienten  $a, b, c, \dots$  der sphärischen Längsaberration  $\mathcal{A}s'$  nach dem folgenden Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} a' &= a - \frac{4}{3} b', \\ b' &= b - \frac{6}{5} c', \\ c' &= c - \frac{8}{7} d', \\ d' &= d - \frac{10}{9} e', \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (57; 3)$$

Aus (44; 11/12) erhalten wir dann als Integraldarstellung für  $u_P$

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik(x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - f(\vartheta, \varphi))} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \quad (57; 4)$$

worin die Gestaltfunktion  $f(\vartheta, \varphi)$  gegeben ist durch

$$\left. \begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= -\cos \vartheta \left( 2a' + a' \operatorname{tg}^2 \vartheta + \frac{b'}{3} \operatorname{tg}^4 \vartheta + \frac{c'}{5} \operatorname{tg}^6 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{d'}{7} \operatorname{tg}^8 \vartheta + \dots \right) \\ &= -a' \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) - \cos \vartheta \left( \frac{b'}{3} \operatorname{tg}^4 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{c'}{5} \operatorname{tg}^6 \vartheta + \frac{d'}{7} \operatorname{tg}^8 \vartheta + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (57; 5)$$

1) J. Picht, Zeitschr. f. Instrkde. **51**, 1931, erscheint demnächst.

Wir wollen hier davon absehen, die vorstehend angegebenen Integrale auszuwerten oder näher zu diskutieren. Einige allgemeingültige Folgerungen über sphärische Aberrationen mit zwei bzw. drei Koeffizienten folgen unten in den §§ 60, 61 und 63.

### § 58. Beziehung zwischen Strahlenaberration und Wellenaberration <sup>1)</sup>

Handelt es sich nur um die Bestimmung des Intensitätsmaximums auf der Achse eines mit sphärischer Aberration behafteten Strahlenbündels oder um das von Strehl als „Definitionshelligkeit“ bezeichnete Verhältnis  $V$  dieses Maximums zu der Brennpunktintensität einer idealen Kugelwelle gleicher Öffnung (und gleicher Intensitätsbelegung auf der unendlich fernen Wellen-

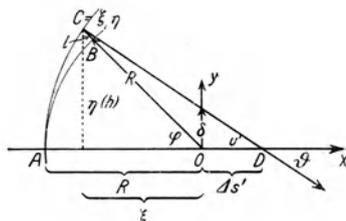


Abb. 41. Wellenaberration  $l$  und Strahlenaberration  $\Delta s'$  bzw.  $\delta$

fläche), so genügen wesentlich einfachere Überlegungen und Ableitungen als die vorstehend durchgeführten.

In allen Strahlenbündeln, die geometrisch-optisch mit Fehlern behaftet sind, weicht die Form der Wellenflächen von der Kugelflächengestalt ab, ist also gegen diese deformiert. Es muß daher möglich sein, zwischen den geometrisch-optischen Fehlerbeträgen und jenen Deformationen, die man auch im Gegensatz zu den geometrisch-optischen Strahlenaberrationen als Wellenaberrationen bezeichnet, gewisse Beziehungen anzugeben. Für die sphärische Aberration sei dies im folgenden durchgeföhrt.

In Abb. 41 sei  $AC$  der Schnitt der Wellenfläche mit der Zeichenebene,  $AB$  der Schnitt einer Kugelfläche, die die Wellenfläche im Punkte  $A$  beröhrt, wobei  $A$  durch die Achse  $AO$  des Strahlenbündels bestimmt ist.  $O$  ist der Schnittpunkt der Paraxial-

<sup>1)</sup> Zum Beispiel R. Richter, Zeitschr. f. Instrkde. **45**, 1, 1925.

strahlen, der Gaußsche Brennpunkt und daher auch der Krümmungsmittelpunkt von  $AB$ . Der den beiden Flächen  $AC$  und  $AB$  gemeinsame Krümmungsradius (für  $AC$ : „im Punkte  $A$ “) sei  $R$ . Es ist noch  $OA = OB = R$ . Der Schnitt von  $OB$  mit  $AC$  sei  $C$ , der Winkel von  $OB$  gegen  $OA$  sei  $\varphi$ <sup>1)</sup>. Der durch den Punkt  $C$  der wirklichen Wellenfläche gehende Lichtstrahl  $CD$  trifft die Achse des Bündels im Abstände  $\mathcal{A}s'$  von  $O$  unter dem „optischen“ Winkel  $u'$ , dem „analytisch“  $\vartheta$  ( $= -u'$ ) entspricht, die durch  $O$  gelegte achsensenkrechte Bildebene im Abstände  $\delta$  von  $O$ , wo  $\mathcal{A}s'$  die sphärischen Längsaberration,  $\delta$  die sphärische Seitenabweichung ist. Den Strahlenverlauf nehmen wir als rotationssymmetrisch an.  $CD$  steht auf  $AC$  senkrecht. Es sei  $BC = l$ , so daß  $l$  die Wellenaberration mißt. Die wirkliche Wellenfläche ist daher in Polarkoordinaten um  $O$  als Mittelpunkt durch  $r = R + l$ ,  $\varphi$  gegeben. Wir haben  $l$  und  $\varphi$  als Funktionen von  $\mathcal{A}s'$ , oder da  $\mathcal{A}s'$  Funktion von  $u'$  ist, als Funktionen von  $\vartheta$  zu bestimmen.

Sind  $\xi, \eta$  ( $\xi = 0$ ) die Koordinaten des Punktes  $C$ , so ist die Richtung von  $CD$  gegeben durch

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1}{d\eta/d\xi}.$$

Demnach wird

$$\mathcal{A}s' = \xi - \eta \operatorname{cotg} \vartheta = \xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 + \eta^2), \quad (58; 1)$$

$$\delta = -\mathcal{A}s' \operatorname{tg} \vartheta = \xi \frac{d\xi}{d\eta} + \eta = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} (\xi^2 + \eta^2). \quad (58; 2)$$

Nun ist

$$\xi^2 + \eta^2 = (R + l)^2,$$

also, da  $R = \text{const}$ ,

$$\mathcal{A}s' = (R + l) \frac{dl}{d\xi} = r \frac{dr}{d\xi}, \quad (58; 3)$$

$$\delta = (R + l) \frac{dl}{d\eta} = r \frac{dr}{d\eta}. \quad (58; 4)$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn man  $R$  hinreichend groß, nämlich  $R \gg \mathcal{A}s'$  wählt, die Öffnung  $\Theta$  des Strahlenbündels als

<sup>1)</sup>  $\varphi$  ist hier nur als Hilfsgröße gebraucht, also nicht, wie sonst, Azimut.

klein voraussetzt und annimmt, daß dann auch  $l \ll R$  ist, noch umformen. Denn es ist dann

$$\operatorname{tg} \vartheta (\approx -\sin \varphi) = -\frac{\eta}{R+l},$$

also

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta}{R+l}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\eta} &= \frac{\eta}{(R+l)^2} \mathcal{A} s' \approx \frac{\eta}{R^2} \mathcal{A} s', \\ l &= \int_0^\eta \frac{\eta}{R^2} \mathcal{A} s' d\eta, \end{aligned} \quad (58; 5)$$

wobei wir  $\mathcal{A} s'$  nach Potenzen von  $\eta = h$  (Einfallshöhe) entwickelt denken müssen, um die Integration ausführen zu können.  $R$  kann übrigens noch durch  $f$  ersetzt werden, um so nur Größen, die bei der geometrisch-optischen Behandlung üblich sind, unter dem Integral zu haben. Ist

$$\mathcal{A} s' = ah^2 + bh^4 + ch^6 + \dots,$$

so wird

$$l = \int_0^h \frac{\mathcal{A} s'}{f^2} h dh = \frac{1}{f^2} \left\{ \frac{a}{4} h^4 + \frac{b}{6} h^6 + \frac{c}{8} h^8 + \dots \right\}, \quad (58; 6)$$

also in erster Näherung der vierten Potenz der Einfallshöhe proportional. Da  $f$  aus  $R+l$  hervorgegangen ist, so schreiben wir besser statt  $f^2$  das Quadrat einer mittleren Brennweite  $f_0$ . Die Gleichungen unserer Wellenfläche lauten dann in Polarkoordinaten um den Gaußschen Brennpunkt

$$\left. \begin{aligned} r &= f + \frac{1}{f_0^2} \left\{ \frac{a}{4} h^4 + \frac{b}{6} h^6 + \frac{c}{8} h^8 + \dots \right\}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{h}{f_0} \approx \frac{h}{f_0}, \end{aligned} \right\} \quad (58; 7)$$

wo  $a, b, c, \dots$  Konstanten sind, die sich aus der Reihendarstellung von  $\mathcal{A} s'$  nach Potenzen von  $h$  ergeben. Ist  $\mathcal{A} s'$  nach Potenzen von  $p = 1 - \cos u'$  entwickelt, wie dies von Richter bevorzugt wird, so ergibt sich mit

$$\mathcal{A} s' = ap + bp^2 + cp^3 + \dots, \quad (58; 8)$$

da

$$\frac{h}{f_0^2} dh \approx \sin u' du' = d(1 - \cos u') = dp$$

ist,

$$l = \int_0^p \mathcal{A} s' dp = \frac{a}{2} p^2 + \frac{b}{3} p^3 + \frac{c}{4} p^4 + \dots \quad (58; 9)$$

Nun ist die „Wellenaberration“  $l$  gleichzeitig die Lichtwegaberration, die die nach dem Huygensschen Prinzip von den einzelnen Punkten der Wellenfläche ausgehenden Elementarwellen im Gaußschen Brennpunkt besitzen. Fragen wir nun nach der Lichtwegaberration  $CP - AP$  für einen anderen Punkt  $P$  der Achse, dessen Abstand vom Gaußschen Bildpunkt gleich  $\pm x$  sei, denken uns also die „Einstellebene“ um die Strecke  $x$  aus dem Brennpunkt verschoben, so ändert sich der Lichtweg des Achsenstrahles  $AP$  um den Betrag  $x$ , der Lichtweg des Strahles  $CP$ , der von  $C$  ausgehenden Elementarwelle entspricht, angenähert um  $x \cos u'$ , so daß sich also die Lichtwegaberration um

$$x(\cos u' - 1) = -xp$$

geändert hat. In diesem „Huygensschen“ Sinne können wir daher die Lichtwegaberration für den Achsenpunkt  $x$  anschreiben in der Form

$$l_x = -xp + \frac{a}{2} p^2 + \frac{b}{3} p^3 + \frac{c}{4} p^4 + \dots + \text{const}, \quad (58; 10)$$

wo noch eine Konstante hinzugefügt wurde, die so gewählt werden kann, daß  $l = 0$  wird für einen Wert  $p = p_1$ , also etwa für den Achsenstrahl, den Randstrahl oder irgendeinen mittleren Strahl. Formel (10) gibt dann die Lichtwegaberration relativ zu diesem ausgewählten Strahl.

Der „Brennpunkt“ einer Kugelwelle ist nun bekanntlich dadurch ausgezeichnet, daß die Lichtwege von den einzelnen Flächenelementen der Wellenfläche bis zu dem betreffenden Punkte alle untereinander gleich lang sind, so daß hier  $l = 0$  ist (Eikonale, Fermatsches Prinzip). Ist die Wellenfläche dagegen deformiert, so bewirken die vorhandenen Lichtwegaberrationen, daß sich die Elementarwellen zum Teil gegenseitig auslöschen. Bei Vorhandensein von sphärischer Aberration wird, solange die relativen Lichtwegaberrationen ihrem absoluten Betrage nach kleiner als die Wellenlänge des benutzten Lichtes (also etwa  $< \frac{1}{2} \lambda$ ) sind, das

Hauptmaximum der Intensität sich an derjenigen Stelle  $x = x_E$  der optischen Achse befinden, für die  $l$  längs der ganzen Wellenfläche die kleinsten Werte annimmt. Die achsensenkrechte Ebene  $x = x_E$  bezeichnen wir dann als „Einstellebene“.

Um den Wert  $x_E$  zu bestimmen, ist gerade die Darstellung (10), bei der  $p$  als Parameter gewählt wurde, besonders geeignet, da  $p$  angenähert dem Flächeninhalt der Wellenfläche proportional ist. (Man bezeichnet den Parameter  $p$  aus diesem Grunde wohl auch als „relative Fläche“.) Durch diese Parameterwahl ist nämlich bereits berücksichtigt, daß die Anzahl der „Lichtstrahlen“, die einem größeren Wert  $p_2$  von  $p$  entspricht, etwa um  $\int_{p_1}^{p_2} d\sigma$  größer ist als die Anzahl, die einem kleineren Wert  $p_1$  von  $p$  entspricht. (Da  $p = 1 - \cos u'$ , so ist  $p$  der Pfeilhöhe des Meridianbogens der Wellenfläche proportional; das gleiche aber gilt — wenigstens für Kugelflächen — auch für den Flächeninhalt, so daß  $dp$  dem Zuwachse des Flächeninhalts proportional wird.) Einen Überblick über den Zusammenhang von  $p$  mit  $u'$  ergibt die folgende Tabelle.

$p = 1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
$u' = 0^{\circ} 49'$	$1^{\circ} 9'$	$1^{\circ} 49'$	$2^{\circ} 34'$	$3^{\circ} 37'$
$p = 5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$u' = 5^{\circ} 44'$	$8^{\circ} 7'$	$11^{\circ} 29'$	$14^{\circ} 4'$	$16^{\circ} 16'$

Gleich günstig wie  $p$  ist übrigens aus dem gleichen Grunde auch der Parameter  $h^2$ , da der Flächeninhalt der Wellenfläche auch dem  $h^2$  näherungsweise proportional ist, während sich die Wahl von  $h$  als Parameter nicht empfiehlt. Schreiben wir für  $h^2$  etwa  $P$ , so wird

$$\Delta s' = aP + bP^2 + cP^3 + \dots,$$

und nach (6):

$$l_{x=0} = \frac{1}{2f_0^3} \left( \frac{a}{2} P^2 + \frac{b}{3} P^3 + \frac{c}{4} P^4 + \dots \right),$$

$$l_x = \frac{1}{2f_0^3} \left( -xP + \frac{a}{2} P^2 + \frac{b}{3} P^3 + \frac{c}{4} P^4 + \dots \right) + \text{const.} \quad (58; 11)$$

Es ist noch zu beachten, daß  $l_x$  nach (10) und (11) nur linear von  $x$ , dem Abstand der Einstellebene vom Gaußschen Bildpunkt, abhängt. Ist für  $x = 0$  die Kurve  $l = l(p)$  der Lichtwegaberrationen gefunden und in einem Koordinatensystem, dessen Abszisse die  $p$ -Werte und dessen Ordinate die Werte  $l$  angibt, ein-

gezeichnet, so läßt sich (schon durch Augenschein) leicht eine Gerade so zeichnen, daß die vertikalen Abstände der Kurve  $l = l(p)$  von jener Geraden möglichst gering sind. Aus der Neigung  $\alpha$  dieser Geraden gegen die Abszisse ergibt sich dann der betreffende Wert  $x = x_E$  angenähert, und zwar ist  $x_E = -\operatorname{tg} \alpha$ .

**§ 59. Die Richtersche Symmetrieforderung der Lichtwegaberrationen und ihre Anwendung auf die sphärische Aberration mit einem Koeffizienten zur Bestimmung der Einstellebene  $x_E$ <sup>1)</sup>.**

Wenden wir nunmehr das Huygenssche Prinzip zur Berechnung der Intensität im Punkte  $x$  der Achse an, so erhalten wir bis auf einen konstanten Phasenfaktor, wenn noch  $\hat{p}$  den größten Wert von  $p$  bezeichnet:

$$u_P = i \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\hat{p}} \psi e^{-ikl(p)} dp \quad (59; 1)$$

$$= i \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \int_0^{\hat{p}} \psi \cos \frac{2\pi}{\lambda} l(p) dp - i \int_0^{\hat{p}} \psi \sin \frac{2\pi}{\lambda} l(p) dp \right\}, \quad (59; 2)$$

und demnach

$$I_P = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left\{ \left[ \int_0^{\hat{p}} \psi \cos \frac{2\pi}{\lambda} l dp \right]^2 + \left[ \int_0^{\hat{p}} \psi \sin \frac{2\pi}{\lambda} l dp \right]^2 \right\}. \quad (59; 3)$$

(Es ist angenähert  $\hat{p} = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$ .)

Für eine ideale Kugelwelle gleicher Öffnung und gleicher Intensitätsverteilung, deren Brennpunkt mit dem Punkt  $x$  zusammenfällt, ist  $l = 0$ , so daß für diese

$$I_0 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[ \int_0^{\hat{p}} \psi dp \right]^2. \quad (59; 4)$$

Setzen wir noch  $\psi$  als konstant voraus, wie dies in vielen Fällen als Näherung ausreicht, so erhalten wir für das Verhältnis

$$V = \frac{I_P}{I_0}.$$

<sup>1)</sup> R. Richter, Zeitschr. f. Instrkde. **45**, 1, 1925 (§ 4).

der Strehlschen „Definitionshelligkeit“:

$$V = V(x) = \frac{1}{\hat{p}^2} \left\{ \left[ \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right]^2 + \left[ \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right]^2 \right\}. \quad (59; 5)$$

Das hier auftretende  $l$  ist sowohl Funktion der Integrationsvariablen  $p$  als auch Funktion von  $x$ , dem Abstände des Achsenpunktes vom Gaußschen Brennpunkt. Es ist  $x$  so zu bestimmen, daß  $V$  ein Maximum wird. Bedingung dafür ist, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi}{\lambda \hat{p}^2} \left\{ \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right. \\ \left. - \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right\} = 0, \end{aligned} \right\} (59; 6)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{8\pi^2}{\lambda^2 \hat{p}^2} \left\{ \left( \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right)^2 \right. \\ \left. - \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p^2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp + \left( \int_0^{\hat{p}} p \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right)^2 \right. \\ \left. - \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p^2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right\} < 0 \end{aligned} \right\} (59; 7)$$

wird. Es ist indessen nicht möglich, aus diesen beiden Bedingungsgleichungen den Wert  $x = x_E$  eindeutig zu bestimmen. Wohl aber läßt sich zeigen, daß wenigstens die erste der beiden Bedingungsgleichungen erfüllt ist, wenn man  $x = x_E$  so wählt, daß die Lichtwegaberrationskurve  $l = l(p)$  im Bereiche  $0 \dots \hat{p}$  symmetrisch zu  $l(\frac{1}{2}\hat{p})$  verläuft, daß also

$$l(x_E, p) = \pm l(x_E, \hat{p} - p). \quad (59; 8)$$

Hier gilt das Pluszeichen immer dann, wenn die Kurve der sphärischen Längsaberration im Bereich  $0 \leq p \leq \hat{p}$  eine gerade Anzahl (einschließlich Null) von Extremwerten (Maximum- bzw. Minimum-

werten) besitzt, dagegen das Minuszeichen, wenn eine ungerade Anzahl solcher Extremwerte vorliegt (siehe unten).

Betrachten wir zunächst nur die sphärische Längsaberration mit einem Koeffizienten, für die also  $\mathcal{A}s' = ap$  ist. Dann ist

$$l(x, p) = x = -xp + \frac{a}{2} p^2$$

und

$$l(x, \hat{p} - p) = -x(\hat{p} - p) + \frac{a}{2} (\hat{p} - p)^2,$$

so daß sich als Bestimmungsgleichung für  $x_E$  ergibt:

$$\left(x_E - \frac{a}{2} \hat{p}\right) \hat{p} - 2\left(x_E - \frac{a}{2} \hat{p}\right) p = 0,$$

d. h.

$$x_E = \frac{a}{2} \hat{p}. \quad (59; 9)$$

Für diesen Wert  $x_E = \frac{a}{2} \hat{p}$  erhalten wir zunächst

$$l(x_E, p) = l_{x_E} = -\frac{a}{2} (\hat{p} - p) p.$$

Wählen wir nun auf der Achse zwei Aufpunkte, von denen der eine um  $+\xi$ , der andere um  $-\xi$  von  $x = x_E$  entfernt liegt, so gilt für diese

$$l(x_E \pm \xi, p) = -\frac{a}{2} (\hat{p} - p) p \mp \xi p.$$

Setzen wir diese Werte in unseren Ausdruck (1) für  $u_P$  ein, so erhalten wir

$$(u_P)_{x_E \pm \xi} = 2\pi \int_0^{\hat{p}} \psi e^{+ik \left[ \frac{a}{2} (\hat{p} - p) p \pm \xi p \right]} dp.$$

Nun ist aber mit  $\hat{p} - p = p'$  als neuer Integrationsvariablen

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\hat{p}} \psi e^{+ik \left[ \frac{a}{2} (\hat{p} - p) p + \xi p \right]} dp \\ = 2\pi e^{ik\xi\hat{p}} \int_0^{\hat{p}} \psi' e^{+ik \left[ \frac{a}{2} (\hat{p} - p') p' - \xi p' \right]} dp', \end{aligned}$$

wo  $\psi'$  aus  $\psi$  durch Transformation der Integrationsvariablen hervorgeht. Ist, wie wir bisher stets annahmen,  $\psi$  eine Konstante, so sehen wir, daß

$$(u_P)_{x_E + \xi} = e^{ik\xi\hat{p}} \cdot (u_P)_{x_E - \xi}. \quad (59; 10)$$

Die beiden Werte von  $u_P$  für  $x_E + \xi$  und  $x_E - \xi$  unterscheiden sich also nur um eine Phasenkonstante. Die zugehörigen Intensitäten sind demnach einander gleich. Der Punkt  $x_E = \frac{1}{2} a \hat{p}$ , der Mittelpunkt der ausgearteten Kaustik — diese erstreckt sich ja von  $x = 0$  bis  $x = a \hat{p}$  — ist also Symmetriepunkt für die Intensitätsverteilung längs der Achse des Strahlenbündels. Man erkennt auch leicht, daß

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=x_E} = 0$$

ist, wie wir oben forderten. Denn wegen  $l = -\frac{1}{2} a (\hat{p} - p)$  ist

$$\int_0^{\hat{p}} \left(p - \frac{1}{2} \hat{p}\right) e^{-ikl} dp = \int_0^{\hat{p}} \left(p - \frac{1}{2} \hat{p}\right) e^{+\frac{1}{2} ika(\hat{p}-p)p} dp = \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} + \int_{\frac{1}{2}\hat{p}}^{\hat{p}}$$

Führt man hier im zweiten Integral  $\hat{p} - p = p'$  als neue Integrationsvariable ein, so sieht man, daß es gleich dem negativen Wert des ersten Integrals ist, so daß

$$\int_0^{\hat{p}} \left(p - \frac{1}{2} \hat{p}\right) e^{-ikl} dp = 0,$$

also

$$\int_0^{\hat{p}} p e^{-ikl} dp = \frac{1}{2} \hat{p} \int_0^{\hat{p}} e^{-ikl} dp \quad (59; 11)$$

ist, oder, wenn wir Realteil und Imaginärteil getrennt schreiben

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\hat{p}} p \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp &= \frac{1}{2} \hat{p} \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp, \\ \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp &= \frac{1}{2} \hat{p} \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp. \end{aligned} \right\} \quad (59; 12)$$

Setzen wir dies in (6) ein, so folgt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=x_E} = 0.$$

Den Ausdruck (7) für  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  können wir für  $l = -\frac{1}{2} a (\hat{p} - p) p$  noch umformen, wenn wir beachten, daß

$$\int_0^{\hat{p}} e^{\alpha p} p e^{\beta p^2} dp = \frac{1}{\alpha} \hat{p} e^{\alpha \hat{p}} e^{\beta \hat{p}^2} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\hat{p}} e^{\alpha p} e^{\beta p^2} dp \\ - \frac{2\beta}{\alpha} \int_0^{\hat{p}} p^2 e^{\alpha p} e^{\beta p^2} dp,$$

wie man durch partielle Integration leicht zeigt. Setzen wir hier

$$\alpha = ik \frac{a}{2} \hat{p} \quad \text{und} \quad \beta = -ik \frac{a}{2},$$

so wird

$$\alpha p + \beta p^2 = ik \frac{a}{2} (\hat{p} - p) p = -ikl \quad \text{und} \quad \alpha \hat{p} + \beta \hat{p}^2 = 0.$$

Wir erhalten daher

$$\int_0^{\hat{p}} p^2 e^{-ikl} dp = i \frac{\hat{p}}{ka} - i \frac{1}{ka} \int_0^{\hat{p}} e^{-ikl} dp + \frac{1}{2} \hat{p} \int_0^{\hat{p}} p e^{-ikl} dp$$

und demnach

$$\int_0^{\hat{p}} p^2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp = -\frac{1}{ka} \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp + \frac{1}{2} \hat{p} \int_0^{\hat{p}} p \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp$$

oder wegen (12)

$$= -\frac{1}{ka} \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp + \frac{1}{4} \hat{p}^2 \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \quad (59; 13)$$

und entsprechend

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\hat{p}} p^2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp = -\frac{\hat{p}}{ka} + \frac{1}{ka} \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \\ + \frac{1}{4} \hat{p}^2 \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp. \end{aligned} \right\} (59; 14)$$

Setzen wir (12), (13) und (14) in (7) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x=x_E} &= \frac{4\pi}{\lambda \hat{p} a} \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \\ &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\hat{p}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} (\hat{p} - p)p\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \hat{p}} dp. \end{aligned} \right\} (59; 15)$$

Solange

$$\frac{1}{a} \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp > 0$$

ist, handelt es sich demnach im Symmetriepunkt  $x = x_E$  um ein Intensitätsmaximum. Für kleine Werte von  $l$ , d. h. solange die Lichtwegaberration von der Mitte bis zum Rande  $\leq \frac{\lambda}{2}$  ist, ist dies sicher der Fall, da ja dann  $\sin \frac{2\pi l}{\lambda}$  im ganzen Integrationsbereich dasselbe Vorzeichen (nämlich dasjenige von  $a$ ) besitzt. Es ist sogar noch der Fall, wenn  $l$  den Wert  $\frac{\lambda}{2}$  bereits etwas überschreitet.

Um endlich noch den Wert zu bestimmen, den  $V$  im Punkte  $x = x_E$  der Achse annimmt, haben wir in (5) für  $l$  seinen Wert  $-\frac{1}{2} a (\hat{p} - p)p$  einzusetzen. Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned} (V)_{x=x_E} &= \frac{1}{\hat{p}^2} \left\{ \left[ \int_0^{\hat{p}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} (\hat{p} - p)p\right) dp \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_0^{\hat{p}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} (\hat{p} - p)p\right) dp \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier  $p = \frac{1}{2} \hat{p} - p'$ , also  $\hat{p} - p = \frac{1}{2} \hat{p} + p'$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (V)_{x=x_E} &= \frac{1}{\hat{p}^2} \left\{ \left[ \int_{-\frac{1}{2}\hat{p}}^{+\frac{1}{2}\hat{p}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \left[\left(\frac{\hat{p}}{2}\right)^2 - p'^2\right]\right) dp' \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \int_{-\frac{1}{2}\hat{p}}^{+\frac{1}{2}\hat{p}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \left[\left(\frac{\hat{p}}{2}\right)^2 - p'^2\right]\right) dp' \right]^2 \right\}, \\
 &= \frac{4}{\hat{p}^2} \left\{ \left[ \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} p^2\right) dp \right]^2 + \left[ \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} p^2\right) dp \right]^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Integrale sind auf die Fresnelschen Integrale zurückführbar. Es ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} p^2\right) dp &= \sqrt{\left|\frac{\lambda}{2a}\right|} \int_0^{s=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{2a}{\lambda}\right|}\hat{p}} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du = \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} C(s), \\
 \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} p^2\right) dp &= \pm \sqrt{\left|\frac{\lambda}{2a}\right|} S(s), \\
 s &= \frac{1}{2} \sqrt{\left|\frac{2a}{\lambda}\right|} \hat{p} = \sqrt{\frac{|a|}{2\lambda}} \hat{p},
 \end{aligned}$$

so daß

$$(V)_{x=x_E} = \frac{1}{s^2} \{C^2(s) + S^2(s)\}. \quad (59; 16)$$

Die Öffnung  $\hat{p}$  des Strahlenbündels tritt also mit dem Faktor  $\sqrt{a}$  verbunden auf, so daß bei einer Herabsetzung des Aberrationskoeffizienten  $a$  auf  $a/m^2$  und einer gleichzeitigen Vergrößerung der Öffnung  $\hat{p}$  auf  $m\hat{p}$  ( $m$  ist eine beliebige Zahl) die Definitionshelligkeit im Symmetriepunkt unverändert bleibt. Wird gefordert, daß die Definitionshelligkeit den Wert 0,8 nicht unterschreiten soll, so ergibt sich für

$$s = \hat{p} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|a|}{\lambda}}$$

der Maximalwert 1, da

$$\frac{1}{1^2} \{C^2(1) + S^2(1)\} = 0,8003. \quad (59; 17)$$

Aus

$$\hat{p} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|a|}{\lambda}} \leq 1$$

folgt sofort

$$|a| \leq \frac{2}{\hat{p}^2} \lambda$$

als höchstzulässiger Wert des Aberrationskoeffizienten. Für die sphärische Aberration ist daher zu fordern, daß

$$\mathcal{A} s' \leq \frac{2}{\hat{p}^2} p \lambda; \quad (\mathcal{A} s')_{\max} \leq \frac{2}{\hat{p}} \lambda \quad (59; 18)$$

ist, und für die Lichtwegaberration, daß

$$|l_{\max}| \leq \frac{\lambda}{4} \quad (59; 19)$$

ist, da ja

$$l_{\max} = -\frac{a}{2} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \hat{p} \right) \frac{1}{2} \hat{p} = -\frac{a}{8} \hat{p}^2.$$

Ist

$$|l_{\max}| = \frac{\lambda}{2},$$

ein Betrag, bis zu dem im Symmetriepunkt sicher noch ein Maximum vorhanden ist, so ist

$$|a| = \frac{4}{\hat{p}^2} \lambda, \quad \text{also} \quad \hat{p} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|a|}{\lambda}} = s = \sqrt{2}.$$

Hierfür wird  $(V)_{x=x_E} = 0,3925$ , also schon sehr schlecht.

Da  $\hat{p}$  auch bei ziemlich weit geöffneten Strahlenbündeln noch recht klein ist, z. B. bei  $u' = 8^\circ 7'$  erst  $\hat{p} = 0,01$ , so können  $a$  und  $\mathcal{A} s'$  im Gegensatz zu  $l_{\max}$  eine ziemlich große Zahl von Wellenlängen betragen, z. B. für  $\hat{p} = 0,01$  wird  $a \leq 20000 \lambda$  und  $(\mathcal{A} s')_{\max} \leq 200 \lambda$ . Nehmen wir an, daß  $s = \hat{p} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|a|}{\lambda}}$  sehr klein ist, so können wir bei der Entwicklung von  $C$  und  $S$  die höheren Glieder vernachlässigen und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{C(s)}{s} \right)^2 &= 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{\pi}{2} s^2 \right)^2; & \left( \frac{S(s)}{s} \right)^2 &= \frac{1}{9} \left( \frac{\pi}{2} s^2 \right)^2, \\ (V)_{x=x_E} &= 1 - \frac{4}{45} \left( \frac{\pi}{2} s^2 \right)^2 &= 1 - \frac{\pi^2}{45} \cdot \frac{1}{4} \hat{p}^4 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (59; 20)$$

**§ 60. Anwendung der Symmetrieforderung auf die Schnittweitenaberration mit zwei Koeffizienten. Bestimmung der „besten Korrektur“ eines optischen Systems <sup>1)</sup>**

Wird die Schnittweitenaberration durch zwei Koeffizienten dargestellt

$$\mathcal{A} s' = a p + b p^2, \quad (60; 1)$$

so wird

$$l_x = v - x p + \frac{a}{2} p^2 + \frac{b}{3} p^3, \quad (60; 2)$$

wo durch  $v$  die oben eingeführte Konstante bezeichnet sei. Die Forderung

$$l(x, p) = l(x, \hat{p} - p)$$

liefert

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2} a \hat{p} - \frac{1}{3} b \hat{p}^2\right) \hat{p} - 2 \left(x - \frac{1}{2} a \hat{p} - \frac{1}{2} b \hat{p}^2\right) p \\ - b \hat{p} p^2 + \frac{2}{3} b p^3 = 0, \end{aligned}$$

so daß dies auf  $b = 0$  und damit auf die Aberration mit einem Koeffizienten zurückführt.

Betrachten wir indessen den anderen Symmetriefall, nämlich daß

$$l(x, p) = -l(x, \hat{p} - p) \quad (60; 3)$$

ist, daß also die Lichtwegaberrationen für Rand und Mitte entgegengesetzt gleich sind, so ergibt sich hieraus

$$\left(2v - x \hat{p} + \frac{a}{2} \hat{p}^2 + \frac{b}{3} \hat{p}^3\right) - (a + b \hat{p}) \hat{p} p + (a + b \hat{p}) p^2 = 0.$$

Dies liefert die beiden Gleichungen

$$a = -b \hat{p} \quad (60; 4)$$

$$v = \frac{1}{2} x \hat{p} + \frac{1}{12} b \hat{p}^3. \quad (60; 5)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen sagt aus, daß das optische System so zu „korrigieren“ ist, daß für die Randstrahlen die sphärische Längsaberration verschwindet. Da die zweite Gleichung außer  $x$  noch die willkürliche Konstante  $v$  enthält, so läßt sich aus

<sup>1)</sup> R. Richter, Zeitschr. f. Instrkde. **45**, 1, 1925 (§ 5).

ihr nichts über die „Einstellung“ folgern; Gleichung (5) sagt in Wirklichkeit nichts anderes aus, als daß die Lichtwegaberration für  $\frac{1}{2}\hat{p}$  verschwinden soll. Denn damit dies der Fall ist, haben wir ja in (2) für  $v$  den Wert

$$x \frac{1}{2}\hat{p} - \frac{a}{2}\left(\frac{\hat{p}}{2}\right)^2 - \frac{b}{3}\left(\frac{\hat{p}}{2}\right)^3$$

zu setzen, und dies gibt mit  $a = -b\hat{p}$  [nach (4)]

$$v = \frac{1}{2}x\hat{p} + \frac{1}{12}b\hat{p}^3,$$

also gerade die zweite Bedingungsgleichung.

Für die Lichtwegaberration erhalten wir jetzt

$$l_x = \left(\frac{1}{2}\hat{p} - p\right) \left\{ x + \frac{b}{6} [\hat{p}^2 + 2\hat{p}p - 2p^2] \right\}. \quad (60; 6)$$

Daß  $a = -b\hat{p}$  bei festgehaltenem  $b$  und  $\hat{p}$  tatsächlich die beste „Korrektion“ darstellt, ergibt sich durch Differenzieren von  $V$  nach  $a$ ,

wobei zu beachten ist, daß  $\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{1}{2}p^2$  [nach (2)] ist. Es wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} = & -\frac{2\pi}{\lambda\hat{p}^2} \left\{ \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p^2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right. \\ & \left. - \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p^2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (60; 7)$$

Nun ist für  $a = -b\hat{p}$

$$l(x, p) = -l(x, \hat{p} - p); \quad l\left(x, \frac{\hat{p}}{2}\right) = 0$$

und demnach

$$\int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp = \int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \sin \frac{2\pi l(x, p)}{\lambda} dp + \int_{\frac{1}{2}\hat{p}}^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l(x, p)}{\lambda} dp.$$

Setzen wir  $p = \hat{p} - p'$ , also  $p' = \hat{p} - p$ , so geht das zweite Integral über in

$$-\int_{\frac{1}{2}\hat{p}}^0 \sin \frac{2\pi l(x, \hat{p} - p')}{\lambda} dp' = -\int_0^{\frac{1}{2}\hat{p}} \sin \frac{2\pi l(x, p')}{\lambda} dp',$$

ist also entgegengesetzt gleich dem ersten Integral, so daß

$$\int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp = 0. \quad (60; 8)$$

Ebenso folgt wegen  $\left(p - \frac{1}{2}\hat{p}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\hat{p} - p'\right)^2$

$$\int_0^{\hat{p}} \left(p - \frac{1}{2}\hat{p}\right)^2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp = 0,$$

also unter Berücksichtigung von (8)

$$\int_0^{\hat{p}} p^2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp = \hat{p} \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp.$$

Wir erhalten so aus (7) bzw. (59; 6)

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{2\pi}{\lambda \hat{p}} \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp, \quad (60; 9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi}{\lambda \hat{p}^2} \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp. \quad (60; 10)$$

Über die „Einstellung“  $x$  ist noch nicht verfügt. Wählen wir nun  $x = x_E$  so, daß

$$\left( \int_0^{\hat{p}} p \sin \frac{2\pi l(x, p)}{\lambda} dp \right)_{x=x_E} = 0 \quad (60; 11)$$

wird, so verschwindet sowohl (9) als auch (10).

Wir sehen davon ab, die Vorzeichen von  $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  zu bestimmen, ziehen vielmehr aus der Tatsache, daß für  $b = 0$  unsere deformierte Welle (wegen  $a = -b\hat{p}$ ) in die Kugelwelle und  $x = x_E$  in den Brennpunkt derselben übergeht (dieser Brennpunkt aber ein Maximum ist), die Folgerung, daß bei genügend kleinem Werte von  $b$  aus Stetigkeitsgründen auch  $\{a = -b\hat{p}; x = x_E \text{ nach (11)}\}$  ein Intensitätsmaximum liefert. Leider läßt sich  $x_E$  nicht explizit aus (11) bestimmen, wohl aber lassen sich zwei Grenzfälle behandeln,

zwischen denen die Wirklichkeit eingeschlossen liegt, nämlich  $\lambda = \infty$  und  $\lambda = 0$ . Im ersten Fall ( $\lambda = \infty$ ) kann  $\sin \frac{2\pi l}{\lambda}$  durch  $\frac{2\pi l}{\lambda}$  ersetzt werden und wir erhalten aus (11)

$$\int_0^{\hat{p}} p l dp = 0,$$

worin wegen (2), (4), (5)

$$l = \frac{1}{2} x \hat{p} + \frac{1}{12} b \hat{p}^3 - x p - \frac{b}{2} \hat{p} p^2 + \frac{b}{3} p^3.$$

Dies ergibt

$$(x_E)_{\lambda=\infty} = -\frac{1}{5} b \hat{p}^2 \left( = \frac{4}{5} \mathcal{A} s'_{\max} \right). \quad (60; 12)$$

Für  $\lambda = 0$ , den Fall, der der geometrischen Optik entspricht, kommen nur diejenigen Lichtstrahlen  $x_E$  zur Wirkung, die Normalen der Wellenfläche sind. Es liefern also nur diejenigen Teile der Wellenfläche Beiträge zur Intensität in  $x_E$ , die von einer um  $x_E$  geschlagenen Kugelfläche berührt werden. Mathematisch heißt dies, es müssen die Ableitungen von  $l$  nach  $p$ , also  $\frac{\partial l}{\partial p}, \frac{\partial^2 l}{\partial p^2}, \dots$  verschwinden.

Dies liefert

$$(x_E)_{\lambda=0} = -\frac{1}{4} b \hat{p}^2 \left( = \mathcal{A} s'_{\max} \right). \quad (60; 13)$$

Zwischen diesen Werten (12) und (13) wird also  $x_E$  liegen. In Abb. 42 ist als Beispiel für

$$\hat{p} = 0,02; \quad b = 2000 \text{ mm}; \quad a = -b \hat{p} = -40 \text{ mm}$$

die Kurve der sphärischen Längsaberration

$$\mathcal{A} s' = a p + b p^2 = -b p (\hat{p} - p)$$

gezeichnet. Die beiden gestrichelten Linien geben die Einstellungen  $x_E$  für  $\lambda = 0$  bzw.  $\lambda = \infty$  an, und zwar ist in diesem Fall

$$(x_E)_{\lambda=0} = -0,2 \text{ mm}; \quad (x_E)_{\lambda=\infty} = -0,16 \text{ mm}.$$

Die beste Einstellung liegt also in der Nähe des Umkehrpunktes der ausgearteten Kaustikschale, die ja mit der Achse des Bündels zusammenfällt und sich wegen

$$\frac{d}{dp} (\mathcal{A} s') = a + 2b p = 0; \quad (p)_{\mathcal{A} s'_{\max}} = -\frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \hat{p}; \quad \mathcal{A} s'_{\max} = -\frac{b}{4} \hat{p}^2$$

von  $x = 0$  bis  $x = -b\hat{p}^2$  erstreckt. Die Abb. 43 und 44 geben noch für  $(x_E)_{\lambda=0} = -0,2$  mm bzw.  $(x_E)_{\lambda=\infty} = -0,16$  mm die zugehörigen Kurven der Lichtwegaberration  $l$ , die symmetrisch zu  $\frac{1}{2}\hat{p}$  verlaufen. Durch numerische Berechnung und Interpolation fand Richter die beste Einstellebene für dieses Zahlenbeispiel und eine Wellenlänge  $\lambda = 0,5 \mu$  bei  $x_E = -0,182$  mm, also sehr nahe

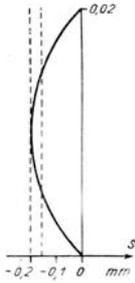


Abb. 42

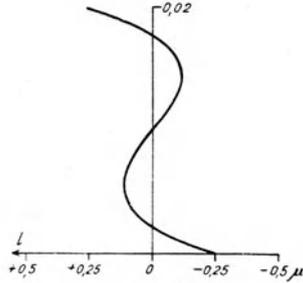


Abb. 43

Abb. 42. Sphärische Längsaberration eines Strahlenbündels. Die  $\vdash$ -Linien geben die Einstellebenen für  $\lambda = 0$  bzw.  $\lambda = \infty$

Abb. 43. Lichtwegaberration des durch Abb. 42 gegebenen Strahlenbündels für  $x_E = -0,2$  mm ( $\lambda = 0$ )

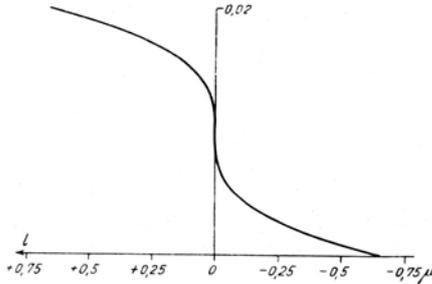


Abb. 44. Lichtwegaberration des durch Abb. 42 gegebenen Strahlenbündels für  $x_E = -0,16$  mm ( $\lambda = \infty$ )

gleich dem Mittelwert der beiden angegebenen für die Grenzfälle geltenden Werte. Die zugehörige Definitionshelligkeit errechnete er aus (59; 5) zu  $V = 0,299$ .

Für ein sphärisch nicht korrigiertes optisches System von gleicher Öffnung  $\hat{p} = 0,02$  und gleichem Maximalbetrage  $(\mathcal{A}s')_{\max} = -0,2$  mm, für das also  $\mathcal{A}s' = \alpha p = -10 p$  mm ist, ergibt sich

im Punkte  $x_E = \frac{1}{2} a \hat{p} = -0,1$  mm, der für diesen Fall die beste Einstellung liefert, nur eine Definitionshelligkeit vom Betrage  $V = 0,089$ , so daß also bei gleicher Öffnung ein sphärisch korrigiertes optisches System wesentlich besser ist, als ein nicht korrigiertes mit gleicher maximaler Längsaberration.

### § 61. Anwendung der Symmetrieforderung auf die Schnittweitenaberration mit drei Koeffizienten<sup>1)</sup>

Richter führte die entsprechenden Untersuchungen auch für die durch drei Koeffizienten dargestellte sphärische Längsaberration

$$\Delta s' = ap + bp^2 + cp^3$$

durch. Wir wollen diesen Fall indessen nicht mehr ausführlich behandeln, sondern beschränken uns darauf, die Resultate mitzuteilen, zu denen Richter gelangt.

Richter setzt voraus, daß

$$b = -\frac{3}{2} c \hat{p} \quad (61; 1)$$

ist.

[Wird außerdem

$$a = \frac{1}{2} c \hat{p}^2 \quad (61; 1^*)$$

vorausgesetzt, so besagt (1), daß die sphärische Längsaberration außer für  $p = 0$  auch noch für  $p = \frac{1}{2} \hat{p}$  verschwindet. Die Annahme (1\*) über  $a$  und  $c$  wird von Richter indessen nicht gemacht].

Die Symmetrieforderung für  $l$ , die in diesem Fall wieder wie im Fall  $\Delta s' = ap$  mit dem  $+$ -Zeichen zu nehmen ist, liefert wie dort eine Bedingungsgleichung für  $x = x_E$ , für die beste „Einstellung“, und zwar wird

$$x_E = \frac{1}{2} a \hat{p} - \frac{1}{4} c \hat{p}^3. \quad (61; 2)$$

Dagegen läßt sich jetzt über die beste „Korrektur“, d. h. über die vorteilhafteste Beziehung zwischen den beiden noch frei verfügbaren Koeffizienten  $a$  und  $c$  nichts aussagen. In ähnlicher Art aber wie für  $x = x_E$  im Fall der Aberration mit zwei Koeffizienten läßt sich jetzt aus den beiden Grenzfällen  $\lambda = \infty$  und  $\lambda = 0$  eine angenäherte „Forderung“ zwischen  $a$  und  $c$  aufstellen. Es ergibt sich

$$a_{\lambda=\infty} = \frac{3}{14} c \hat{p}^2 = 0,6429 c \hat{p}^2, \quad (61; 3)$$

$$a_{\lambda=0} = \frac{3}{4} c \hat{p}^2 = 0,75 c \hat{p}^2. \quad (61; 4)$$

<sup>1)</sup> R. Richter, Zeitschr. f. Instrkde. **45**, 1, 1925 (§ 6).

Eine numerische Bestimmung von  $a$  für  $\lambda = 0,5 \mu$  ergab bei  $\hat{p} = 0,02$  und  $c = -250\,000$  mm [also wegen (1):  $b = +7500$  mm] für  $a$  den Wert:  $a = 64,5$  mm  $= 0,645 c \hat{p}^2$ . Dies stimmt sehr nahe mit dem für  $\lambda = \infty$  erhaltenen Wert von  $a$  überein.

### § 62. Bestimmung der Definitionshelligkeit und der Einstellebene mit Benutzung der Variationsrechnung. (Väisälä'sche Methode)<sup>1)</sup>

Wenn in den vorstehenden Ableitungen der Ort der maximalen Definitionshelligkeit aus der Symmetrieforderung für  $l$  bestimmt wurde, so war diese Symmetrieforderung doch ursprünglich nur ein Ersatz jener anderen oben angegebenen Forderung, denjenigen Punkt  $x$  auf der Achse zu finden, für den die Abweichung  $l_x$  der wirklichen Wellenfläche von einer um  $x$  geschlagenen Kugelfläche (deren Radius zweckentsprechend gewählt werden muß) möglichst gering ist. Diese Forderung läßt sich nun auch mit Hilfe einer Art „Fehlertheorie“ (Methode der kleinsten Quadratsumme) lösen. Dies wurde von Väisälä durchgeführt.

Wir sahen, daß die Definitionshelligkeit  $V$  in einem Punkte der Achse gegeben war durch (59; 5)

$$V = V(x) = \frac{1}{\hat{p}^2} \left\{ \left[ \int_0^{\hat{p}} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right]^2 + \left[ \int_0^{\hat{p}} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dp \right]^2 \right\}. \quad (62; 1)$$

Wir führen als neue Integrationsvariable  $q = \frac{1}{\hat{p}} p$  ein, so daß  $l = l(q)$  wird. Dann ist

$$V = V(x) = \left[ \int_0^1 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dq \right]^2 + \left[ \int_0^1 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dq \right]^2. \quad (62; 2)$$

Wir setzen  $\frac{2\pi l}{\lambda} = \delta$  und entwickeln  $\cos \delta$  und  $\sin \delta$  nach Potenzen von  $\delta$ . Schreiben wir dann noch zur Abkürzung

$$\int_0^1 \delta^n dq = \gamma_n, \quad (62; 3)$$

<sup>1)</sup> Y. Väisälä, Neue Methoden . . . . Ann. Univ. Fennicae Aboensis (B) 1, Nr. 2. 1922; § 33 bis 34.

so wird

$$\int_0^1 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dq = 1 - \frac{1}{2!} \gamma_2 + \frac{1}{4!} \gamma_4 - \frac{1}{6!} \gamma_6 + \dots,$$

$$\int_0^1 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dq = \gamma_1 - \frac{1}{3!} \gamma_3 + \frac{1}{5!} \gamma_5 - \frac{1}{7!} \gamma_7 + \dots$$

und demnach

$$V(x) = 1 + (\gamma_1^2 - \gamma_2) + \left( \frac{1}{4} \gamma_2^2 - \frac{1}{3} \gamma_1 \gamma_3 + \frac{1}{12} \gamma_4 \right) \\ + \left( \frac{1}{36} \gamma_3^2 - \frac{1}{24} \gamma_2 \gamma_4 + \frac{1}{60} \gamma_1 \gamma_5 - \frac{1}{360} \gamma_6 \right) + \dots, \quad (62; 4)$$

wo die Glieder gleicher Dimension in Klammern zusammengefaßt sind. Setzen wir nun voraus, daß  $l$  sehr klein (etwa  $\leq \lambda/4$ ) ist, so können wir die Glieder höheren Grades vernachlässigen und erhalten einfach

$$V(x) = 1 + (\gamma_1^2 - \gamma_2) = 1 - (\gamma_2 - \gamma_1^2). \quad (62; 5)$$

Damit  $V(x)$  möglichst groß wird, muß  $x$  so gewählt werden, daß  $\gamma_2 - \gamma_1^2$  möglichst klein wird. Setzen wir

$$\left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 (\gamma_2 - \gamma_1^2) = \int_0^1 l^2 dq - \left( \int_0^1 l dq \right)^2 = \tau, \quad (62; 6)$$

so haben wir  $x$  so zu wählen, daß  $\tau$  möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn  $l$  im ganzen Integrationsbereich möglichst klein ist, wenn also eine Kugelfläche — deren Krümmungsmittelpunkt eben  $x$  ist — so bestimmt wird, daß sie sich der wirklichen Wellenfläche möglichst eng anschmiegt. Jene Kugelfläche sei als Referenzkugel bezeichnet. Um ihren Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen, benutzen wir die Variationsrechnung. Wir denken uns die Referenzkugel ein wenig verändert. Dadurch geht  $l$  über in

$$l' = l + \alpha q + \beta, \quad (62; 7)$$

wo  $\alpha$  von der Änderung der Lage des Krümmungsmittelpunktes, also der Änderung von  $x$ , und  $\beta$  von der Änderung der Länge des Radius herrührt.  $\tau$  geht dann über in

$$\begin{aligned}\tau' &= \int_0^1 l'^2 dq - \left( \int_0^1 l' dq \right)^2, & (62; 6^*) \\ &= \int_0^1 l^2 dq - \left( \int_0^1 l dq \right)^2 + \alpha \left( 2 \int_0^1 l q dq - \int_0^1 l dq \right) + \frac{1}{12} \alpha^2.\end{aligned}$$

$\tau$  ist also allein von  $\alpha$ , nicht aber von  $\beta$  abhängig, wie dies zu erwarten war, da ja  $\beta$  nur eine konstante Phasenänderung bedeutet, also auf die Intensität keinen Einfluß besitzen kann. Betrachten wir jetzt  $\tau'$  als Funktion von  $\alpha$ , so ergibt sich durch Nullsetzen des ersten Differentialkoeffizienten, daß  $\tau'$  ein Minimum wird für

$$\alpha = 6 \left( \int_0^1 l dq - 2 \int_0^1 l q dq \right). \quad (62; 8)$$

Bezeichnen wir das zugehörige Minimum von  $\tau'$  durch  $\tau_0$ , so wird

$$\tau_0 = \int_0^1 l^2 dq - \left( \int_0^1 l dq \right)^2 - 3 \left( \int_0^1 l dq - 2 \int_0^1 l q dq \right)^2 \quad (62; 9)$$

oder, wenn wir

$$\bar{l} = l - \int_0^1 l dq = (l + \alpha q) - \left( \int_0^1 l dq + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (62; 10)$$

setzen <sup>1)</sup>,

$$\tau_0 = \int_0^1 \bar{l}^2 dq = \frac{\int_0^1 \bar{l}^2 dq}{\int_0^1 dq} = \varepsilon^2. \quad (62; 11)$$

Man kann  $\tau_0$  also ansehen bzw. bezeichnen als mittleren Wert der Quadrate der Abweichungen  $\bar{l}$  der wirklichen Wellenfläche von der sich ihr am engsten anschmiegenden Referenzkugel.  $\varepsilon = \sqrt{\tau_0}$  bezeichnet man dann zweckmäßig als „mittlere Abweichung“ der Lichtwellenfläche. Die rechnerische Benutzung der vorstehenden Überlegungen hat also in folgender Weise zu geschehen: Es sei für irgendeinen Punkt  $x = x_0$  der optischen Achse, möglichst in der Nachbarschaft des wirklichen Intensitätsmaximums, die Abweichung  $l$  der wirklichen Wellenfläche von einer Kugelfläche als Funktion von  $p$  bzw.  $q$  bestimmt. Darauf wird aus (8) der zu-

<sup>1)</sup> Beachte, daß z. B.  $\int_0^1 l \left( \int_0^1 l dq \right) dq = \left( \int_0^1 l dq \right)^2$  ist, da ja  $\int_0^1 l dq$  eine Konstante ist.

gehörige Wert von  $\alpha$  berechnet. Aus  $l$  und  $\alpha$  ergibt sich dann nach (10) der Wert  $\bar{l}$  und aus (11) der Wert  $\tau_0$ . Dann wird

$$V = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tau_0 = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon^2. \quad (62; 12)$$

Hierdurch ist also die maximale Definitionshelligkeit eines vorgegebenen, mit geringer sphärischer Aberration behafteten Strahlenbündels bestimmt. Man erkennt, daß unter der gemachten Voraussetzung (bezüglich der Größe der Abweichungen  $l$ ) die Definitionshelligkeit im wesentlichen nur von der mittleren Abweichung, nicht aber von der wirklichen „Form“ der Wellenfläche abhängt.

$\tau_0$  kann natürlich auch direkt aus (9) berechnet werden. Der Weg über  $\alpha$  hat den Vorteil, daß dadurch auch die notwendige Verschiebung der Einstellebene von  $x_0$  aus gleich mitbestimmt wird, da ja — wie wir oben sahen — die Lichtwegaberration linear von jener Verschiebung abhängt. Wir bezeichnen sie durch  $\Delta x$ . Es war

$$l_x = -xp + \frac{a}{2}p^2 + \frac{b}{3}p^3 + \dots + \text{const},$$

also

$$\begin{aligned} l' &= -(x + \Delta x)p + \frac{a}{2}p^2 + \frac{b}{3}p^3 + \dots + \text{const} = l - \Delta x \cdot p \\ &= l - \Delta x \hat{p} q. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort als notwendige Verschiebung der Einstellebene wegen (7)

$$\Delta x = -\frac{1}{\hat{p}} \alpha,$$

so daß

$$x_E = x_0 + \Delta x = x_0 - \frac{1}{\hat{p}} \alpha \quad (62; 13)$$

ist.

### § 63. Anwendung der Väisäläschen Methode der „mittleren Abweichung“ auf sphärische Aberration mit einem und mit zwei Koeffizienten<sup>1)</sup>

Wenden wir die vorstehenden Formeln auf die sphärische Aberration mit einem Koeffizienten an, also auf  $\Delta s' = ap$ , so ist zunächst für den Gaußschen Bildpunkt, also für  $x = 0$

$$l = \frac{a}{2}p^2 = \frac{a}{2}\hat{p}^2 q^2 = \kappa_1 q^2. \quad (63; 1)$$

<sup>1)</sup> Y. Väisälä, Neue Methoden ...., § 35.

Nach den angegebenen Formeln des § 62 folgt hieraus

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\kappa_1 = -\frac{a}{2} \hat{p}^3, \\ \bar{l} &= \kappa_1 \left( q^2 - q + \frac{1}{6} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\kappa_1}{6\sqrt{5}} = \frac{a}{12\sqrt{5}} \hat{p}^3, \\ V &= 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \varepsilon^2 = 1 - \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{4} \hat{p}^4 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2, \\ x_E &= \frac{a}{2} \hat{p}. \end{aligned} \right\} \quad (63; 2)$$

Beide Werte,  $x_E$  und  $V$ , stimmen mit den oben auf Grund der „Symmetrieforderung für  $l^a$  für kleine Werte von  $l$  erhaltenen Ausdrücken (59; 9) und (59; 20) überein.

Als weiteres Beispiel sei der Fall behandelt, daß das optische System für  $p = \hat{p}$  sphärisch korrigiert ist. Dann ist

$$\mathcal{A}s' = ap + bp^2, \text{ wo } a = -b\hat{p}, \text{ also } \mathcal{A}s' = -b(\hat{p}p - p^2) \quad (63; 3)$$

und demnach für  $x = 0$

$$\begin{aligned} l &= \frac{a}{2} p^2 + \frac{b}{3} p^3 = -\frac{b}{2} \hat{p} p^2 + \frac{b}{3} p^3 = -\frac{b}{3} \hat{p}^3 \left( \frac{3}{2} q^2 - q^3 \right) \\ &= \kappa_2 \left( \frac{3}{2} q^2 - q^3 \right). \end{aligned} \quad (63; 4)$$

Aus den Formeln des § 62 ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{3}{5} \kappa_2 = +\frac{1}{5} b \hat{p}^3, \\ \bar{l} &= \kappa_2 \left( \frac{1}{20} - \frac{3}{5} q + \frac{3}{2} q^2 - q^3 \right), \\ \varepsilon &= \frac{\kappa_2}{20\sqrt{7}} = -\frac{b}{60\sqrt{7}} \hat{p}^3, \\ V &= 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \varepsilon^2 = 1 - \frac{\pi^2}{6300} \hat{p}^6 \left( \frac{b}{\lambda} \right)^2, \\ x_E &= -\frac{1}{5} b \hat{p}^2. \end{aligned} \right\} \quad (63; 5)$$

Nun ist  $\mathcal{A}s'_{\max} = -\frac{1}{4} b \hat{p}^2$ , so daß  $x_E = \frac{4}{5} \mathcal{A}s'_{\max}$ .

$x_E$  stimmt nach (60; 12) überein mit dem von Richter für  $\lambda = \infty$  (d. h. für Aberrationen, die klein gegen die Wellenlänge sind) gefundenen Werte. Dies entspricht der hier gemachten Voraussetzung, daß  $l$  sehr klein sein sollte. Die Definitionshelligkeit läßt sich nur vergleichen, indem man in (62; 1)

$$l = \frac{1}{5} b \hat{p}^2 p - \frac{b}{2} \hat{p} p^2 + \frac{b}{3} p^3 \quad (63; 6)$$

einsetzt und

$$\sin \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda}; \quad \cos \frac{2\pi l}{\lambda} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2$$

setzt. Dann wird

$$V = \frac{1}{\hat{p}^2} \left\{ \hat{p}^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \hat{p} \int_0^{\hat{p}} l^2 dp + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left( \int_0^{\hat{p}} l dp \right)^2 \right\}.$$

Setzen wir hier für  $l$  den angegebenen Wert (6) ein und führen die Integration aus, so erhalten wir

$$V = 1 - \frac{\pi^2}{6300} \hat{p}^6 \left( \frac{b}{\lambda} \right)^2,$$

also genau den durch (5) angegebenen Wert.

Sind die Lichtwegaberrationen nicht klein gegen die Wellenlänge, so müssen in  $V(x)$  auch die höheren Glieder mitgenommen werden. Für die beiden vorstehend betrachteten Fälle ergibt sich dann für  $\mathcal{A}s' = ap$

$$V_1 = 1 - \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right)^4 - \frac{675}{7007} \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right)^6 + \dots \quad (63; 7)$$

und für  $\mathcal{A}s' = -b(\hat{p}p - p^2)$ ,

$$V_2 = 1 - \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \frac{958}{2145} \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right)^4 - \dots \quad (63; 8)$$

Väisälä behandelt dann noch den Fall, daß die Anzahl der „Zonen“ beliebig groß ist und  $l = \varkappa_3 \cos 2\pi nq$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) ist. Hierfür ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{l} &= l, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varkappa_3, \\ V_3 &= \left\{ J_0 \left( \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \sqrt{2} \right) \right\}^2, \end{aligned}$$

wo  $J_0$  die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist. In Reihendarstellung wird dann

$$V_3 = 1 - \left(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda}\right)^4 - \frac{5}{72}\left(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda}\right)^6 + \dots \quad (63; 9)$$

Besonders auffallend ist hier, daß die Intensität unabhängig ist von der Zahl der Zonen, sofern diese eben durch den für  $l$  angegebenen Ausdruck darstellbar sind.

In Abb. 45 sind in Abhängigkeit von  $\epsilon$  die Definitionshelligkeiten  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V = 1 - \left(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda}\right)^2$  eingezeichnet<sup>1)</sup>. Man erkennt, daß die Näherungskurve  $V$  bis  $\epsilon = 0,06\lambda$  sehr gut

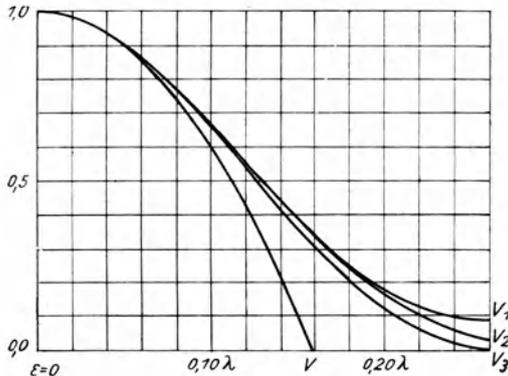


Abb. 45. Definitionshelligkeiten als Funktion der „mittleren Abweichung“  $\epsilon$  der Lichtwellenfläche.  $V_1$  für  $\Delta s' = ap$ ,  $V_2$  für  $\Delta s' = -b(\hat{p}p - p^2)$ ,  $V_3$  für  $l = x_3 \cos 2\pi nq$ ,  $V$  als Näherungswert

mit den genauen Kurven übereinstimmt, und daß diese selbst unter sich bis  $\epsilon = 0,12\lambda$  bzw. sogar bis  $\epsilon = 0,18\lambda$  fast vollkommen übereinstimmen.

Da  $V_1$  sich auf  $\Delta s' = ap$  und  $V_2$  sich auf  $\Delta s' = -b(\hat{p} - p)p$  bezieht, so sind die zugehörigen  $\epsilon$ -Werte

$$\epsilon_1 = \frac{1}{12\sqrt{5}} \Delta s'_{\max} \hat{p} \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \frac{1}{15\sqrt{7}} \Delta s'_{\max} \hat{p}.$$

<sup>1)</sup> Zahlentabelle siehe Y. Väisälä, a. a. O., und für  $\Delta s' = ap$  auch K. Strehl, Central-Z. f. Opt. u. Mech. 48, 7, 1927.

Die Kurven  $V_1$  und  $V_2$  gestatten also leicht, die Definitionshelligkeit eines sphärisch nicht korrigierten bzw. eines für  $p = \hat{p}$  sphärisch korrigierten Strahlenbündels in Abhängigkeit von dem Produkt  $\mathcal{A} s'_{\max} \hat{p}$  abzulesen. Fordern wir wie oben, daß die Intensität im axialen Intensitätsmaximum eines Bündels 80 % von derjenigen der idealen Kugelwelle gleicher Öffnung nicht unterschreiten soll, so erhalten wir in beiden Fällen

$$\varepsilon \leq 0,075 \lambda,$$

$$\text{also für } V_1: \mathcal{A} s'_{\max} \hat{p} \leq 2,01 \lambda, \quad \text{für } V_2: \mathcal{A} s'_{\max} \hat{p} \leq 2,98 \lambda$$

oder, da

$$\hat{p} = \frac{1}{2} \Theta^2$$

ist,

$$\text{für } V_1: \mathcal{A} s'_{\max} \cdot \Theta^2 \leq 4 \lambda, \quad (63; 10)$$

$$\text{für } V_2: \mathcal{A} s'_{\max} \cdot \Theta^2 \leq 6 \lambda. \quad (63; 11)$$

Ein für den Rand korrigiertes optisches System kann also eine nahezu 50 % größere maximale sphärische Längsaberration besitzen als ein sonst gleiches, aber sphärisch nicht korrigiertes optisches System.

#### § 64. Sphärische Aberration einer Zylinderwelle<sup>1)</sup>

Für eine mit sphärischer Aberration behaftete Zylinderwelle, d. h. für das zweidimensionale Problem, erhalten wir, falls

$$\mathcal{A} s' = a \operatorname{tg}^2 u' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta, \quad (64; 1)$$

die Integraldarstellung, indem wir beachten, daß sich unter den zugehörigen Wellenflächen ein parabolischer Zylinder befindet, dessen Gleichungen in Parameterdarstellung lauten:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -2a + a \operatorname{tg}^2 \vartheta, \\ \eta &= -2a \operatorname{tg} \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (64; 2)$$

Wählen wir diese zur Kennfläche, so erhalten wir nach (45; 4)

$$u_P = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \psi(\vartheta) e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} d\vartheta. \quad (64; 3)$$

Dieses Integral wurde von Fischer nach der „Methode der Sattelpunkte“ für den speziellen Fall, daß  $ka = \frac{1}{2} \cdot 10^4$ , also

<sup>1)</sup> J. Fischer, Ann. d. Phys. **72**, 353, 1923.

$a = 795,78 \lambda$  und  $2\Theta = 180^\circ$  ist, ausgewertet. Wir müssen uns hier damit begnügen, die Methode der Sattelpunkte, die auch in manchen anderen Fällen mit Vorteil anzuwenden sein wird, kurz zu charakterisieren und die Resultate, zu denen Fischer gelangt, mitzuteilen. Die Methode der Sattelpunkte besteht im wesentlichen darin, daß der ursprünglich nur im reellen Gebiet verlaufende Integrationsweg ins komplexe Gebiet hineindeformiert wird. Wir nehmen also an, daß die Integrationsvariable auch komplexer Werte fähig ist. Wir bestimmen dann diejenigen Werte der komplexen Integrationsvariablen, für die der Integrand Sattelpunkte (Maximum-Minimumpunkte) besitzt, und weiter in diesen Punkten die Richtungen stärkster Veränderlichkeit („stärksten Gefälles“) des Integranden. Wählen wir nun in der komplexen Ebene einen Kurvenzug so, daß er durch die — auf der reellen Achse gelegenen — Integralgrenzwerte hindurchgeht, hierbei die reelle Achse in Richtung

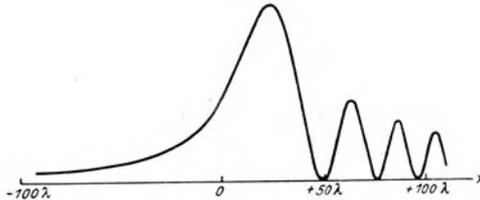


Abb. 46. Intensitätsverteilung längs der optischen Achse einer Zylinderwelle mit sphärischer Aberration

des stärksten Gefälles schneidet, und außerdem durch die den Sattelpunkten entsprechenden Werte von  $\vartheta$  in Richtung des stärksten Gefälles hindurchgeht, so läßt sich die Integration im allgemeinen zwar nicht exakt, wohl aber mit großer Annäherung leicht ausführen. Es sei noch bemerkt, daß die Sattelpunkte in engstem Zusammenhang stehen mit den durch den jeweiligen Aufpunkt hindurchgehenden geometrisch-optischen Lichtstrahlen. Bei der Ausführung der Integration kann man sich nun im wesentlichen auf die Nachbarschaft der Sattelpunkte beschränken, da man von diesen aus auf den Wegen stärksten Gefälles sehr schnell in Gebiete kommt, für die der Integrand selbst nur sehr geringe Werte besitzt. Physikalisch heißt dies wieder, daß nur die geometrisch-optischen Lichtstrahlen wesentliche Beiträge zu der Intensität liefern.

Für die Intensitätsverteilung längs der optischen Achse erhält Fischer für  $a = 795,78 \lambda$ ,  $2\Theta = 180^\circ$  nach der angegebenen

Methode folgende durch Abb. 46 wiedergegebene graphische Darstellung. Hier gibt die Abszisse die Entfernung vom Gaußschen Brennpunkt, gemessen in Wellenlängen, und zwar positiv für Aufpunkte, die im Innern der Kaustik liegen. Die Kaustik ist eine semikubische

Parabel. Ihre Gleichung lautet  $y^2 = \frac{4}{27a} x^3$ .

Man erkennt, daß auch hier wie bei der sphärischen Aberration des räumlichen Bündels das Intensitätsmaximum vom Gaußschen Brennpunkt weg in das Innere der Kaustik hinein verschoben ist, und zwar liegt es hier bei  $x = 24,5\lambda$ . Die Größe der Verschiebung steht indessen nicht in Übereinstimmung mit dem entsprechenden Ergebnis des räumlichen Falles, für den wir ja eine Verschiebung von etwa dem halben Betrage der maximalen sphärischen Längsaberration erhalten hatten. Wir erwähnen noch, daß Fischer im letzten Paragraphen der genannten Arbeit ausführt, daß die Intensität in nicht zu großer Nähe der Kaustik von der Öffnung  $2\theta$  unabhängig ist.

Es besteht noch ein zweiter Unterschied in der Intensitätsverteilung längs der Achse zwischen dem räumlichen und dem hier behandelten ebenen Problem. Nach den Ausführungen des § 54 sowie nach Abb. 37 ist ja auf der Achse des räumlichen Strahlenbündels die Intensitätsverteilung symmetrisch zu dem Intensitätsmaximum (genauer: zu dem Symmetriepunkt), so daß also im Innern und im Äußeren der Kaustik Intensitätsschwankungen vorhanden sind, während nach Abb. 46 die Intensität auf der Achse des entsprechenden ebenen Bündels im Äußeren der Kaustik monoton vom Maximum abfällt und nur im Innern der Kaustik Intensitätsschwankungen vorhanden sind.

Wir betrachten noch einmal den Integralausdruck (3) für das mit sphärischer Aberration behaftete ebene Strahlenbündel und spezialisieren ihn für Achsenpunkte, setzen also  $y_P = 0$ . Wir erhalten, wenn  $\psi(-\vartheta) = \psi(+\vartheta)$ ,

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \psi(\vartheta) e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} d\vartheta, \\ &= \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta) e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} d\vartheta. \quad (64; 4) \end{aligned}$$

Dieser Integralausdruck unterscheidet sich von dem des räumlichen Falles allein dadurch, daß dort noch der Faktor  $\sin \vartheta$  im Integranden hinzutritt. Entwickeln wir  $\cos \vartheta$  und  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  nach Potenzen von  $\vartheta$ , so erhalten wir, wenn wir von den Größen  $x_P$ ,  $a$ ,  $\vartheta$  voraussetzen, daß  $\frac{1}{3} \left( a - \frac{x_P}{6a} \right) \vartheta^6 \ll \lambda$  ist, und daher die 6ten und höheren Glieder von  $\vartheta$  im Exponenten von  $e$  vernachlässigen,

$$u_P = \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} e^{-ik(x_P + 2a)} \int_0^{\vartheta} e^{-ik \left[ x_P \left( \frac{\vartheta^4}{24} - \frac{\vartheta^2}{2} \right) + \frac{a}{4} \vartheta^4 \right]} d\vartheta. \quad (64; 5)$$

Setzen wir hier

$$\frac{1}{2} \vartheta \sqrt{\frac{2}{3} k(x_P + 6a)} = \vartheta_0 = \vartheta \sqrt{\frac{1}{4} a k \left( 1 + \frac{x_P}{6a} \right)},$$

so geht dies über in

$$u_P = \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2} (ak)^{-\frac{1}{4}} \left( 1 + \frac{x_P}{6a} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-ik(x_P + 2a)} \int_0^{\vartheta_0} e^{-i \left[ \vartheta_0^4 - m_0 \vartheta_0^2 \right]} d\vartheta_0, \quad (64; 6)$$

worin  $m_0 = x_P \sqrt{\frac{k}{a}} \left( 1 + \frac{x_P}{6a} \right)^{-\frac{1}{2}}$  ist<sup>1)</sup>.

Der von Fischer nach der oben skizzierten Methode der Sattelpunkte gefundene Ausdruck lautet, entsprechend geschrieben:

$$u_P = \frac{2i}{\pi} \sqrt{2} (ak)^{-\frac{1}{4}} e^{-ik(x_P + 2a)} \int_0^{\infty} e^{-i(\vartheta_0^4 - m \vartheta_0^2)} d\vartheta_0$$

mit  $m = x_P \sqrt{\frac{k}{a}}$ . (64; 7)

<sup>1)</sup> Eine andere Umformung von (5) führt zu dem Ausdruck

$$u_P = \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} e^{-ik(x_P + 2a)} \int_{-\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{1}{4} \beta \vartheta^2 - \frac{\alpha}{\beta}} e^{-ik \vartheta_1^2} \frac{d\vartheta_1}{\sqrt{\alpha + \beta \vartheta_1}},$$

wo  $\alpha = x_P$ ,  $\beta = 2 \sqrt{1 + x_P/6a}$ . Doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

Beide Werte von  $u_P$  unterscheiden sich nicht allein in der oberen Grenze des Integrals, sondern außerdem in dem bei  $\vartheta_0^2$  auftretenden Koeffizienten ( $m_0$  bzw.  $m$ ) um den Faktor  $\left(1 + \frac{x_P}{6a}\right)^{-\frac{1}{2}}$  sowie um einen Amplitudenfaktor  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{x_P}{6a}\right)^{-\frac{1}{4}}$ . Solange  $x_P \ll 6a$  ist — und dies ist in dem von Fischer gewählten Zahlenbeispiel der Fall — sind diese beiden Faktoren ohne wesentlichen Einfluß, da sie <sup>1)</sup> angenähert gleich 1 werden. Vernachlässigen wir auch in der oberen Integralgrenze von (6) den Wert  $\frac{x_P}{6a}$  gegen 1, so wird diese für das von Fischer gewählte Zahlenbeispiel angenähert 5,95  $\Theta$ . Nun gilt aber unsere Darstellung (6) wegen der oben angegebenen Bedingung nur bis zu

$$\Theta^6 \ll \frac{3\lambda}{a} \approx 0,0038, \text{ also etwa } \Theta \leq 12^\circ = 0,2,$$

falls die durch (2) dargestellte Kennfläche vorausgesetzt wird, und bis zu  $\Theta^6 \ll \frac{180\lambda}{x_P} \approx 1,80$  für  $x_P = 100\lambda$ , also etwa  $\Theta \leq 35^\circ = 0,6$ , falls wir als Kennfläche

$$\xi = \frac{3}{4} a \sin^4 \vartheta \cos \vartheta$$

$$\eta = \frac{3}{4} a \sin^5 \vartheta - a \sin^3 \vartheta$$

mit der Kaustik

$$x_1 = 3a \sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta,$$

$$y_1 = 3a \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta - a \sin^3 \vartheta$$

und der sphärischen Längsaberration  $\mathcal{A}s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^3 \vartheta$  wählen.

Setzen wir nun etwa  $\Theta = 0,6$ , so wird die obere Integralgrenze erst 3,57. Ob dieser Wert bereits für das Integral in (6) als so groß angesehen werden darf, daß man ihn durch  $\infty$  ersetzen kann, ist wenig wahrscheinlich, kann aber nicht ohne eingehende

<sup>1)</sup> (Vom Faktor  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$  abgesehen.)

numerische Prüfung entschieden werden. Wir wollen indessen diese Prüfung hier nicht durchführen, da der allgemeine Charakter der Intensitätsverteilung längs der Achse durch Einführung des richtigen Wertes für die obere Grenze des Integrals kaum geändert werden wird.

Das Integral (3) wurde von Fischer außerdem noch für  $x_P = 0$ , d. h. für die durch den Gaußschen Brennpunkt gehende achsenkrechte Ebene, sowie für einen (nicht mit der Achse zusammenfallenden) geometrisch-optischen Lichtstrahl ausgewertet und die entsprechenden Intensitätskurven in der Arbeit mitgeteilt. Sie zeigen, daß die Intensität in der Ebene  $x_P = 0$  vom Gaußschen Brennpunkt aus nach beiden Seiten zunächst ziemlich schnell abnimmt, dann aber noch auf größere Entfernung hin von Null verschieden bleibt, und daß beim Übergang über die kaustische Linie längs eines geometrisch-optischen Lichtstrahls die Verhältnisse ganz ähnlich denen sind, die sich für die Intensität längs der Achse des Strahlenbündels ergeben. Im Innern der kaustischen Linie treten also auch hier Intensitätsschwankungen auf, deren Hauptmaximum mehrere Wellenlängen von der kaustischen Linie (im Innern) entfernt ist, während im Außenraum die Intensität exponentiell monoton abnimmt.

## Elftes Kapitel

# Astigmatismus

### § 65. Astigmatismus. Allgemeine Behandlung

Wir gehen nun dazu über, ein astigmatisches Strahlenbündel beugungstheoretisch zu behandeln, und zwar wollen wir zunächst ein Strahlenbündel voraussetzen, das geometrisch-optisch streng in zwei Brennpunkten konvergiert, von denen die eine geradlinig, die andere ein Stück eines Kreisbogens sei. Ein solches Strahlenbündel besitzt geometrisch-optisch die Wellenflächenschar

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (d - a) \cdot \cos \vartheta + \frac{2a \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} - a, \\ \eta &= (d - a) \cdot \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{2a \cdot \sin \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}, \\ \zeta &= (d - a) \cdot \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (65; 1)$$

Hierin ist  $d$  der die verschiedenen Wellenflächen der Schar liefernde Parameter, während  $\vartheta$  und  $\varphi$  Parameter sind, die bei festgehaltenem  $d$  die einzelnen Punkte der Wellenfläche bestimmen.

Eliminieren wir aus (1) die Parameter  $\vartheta$  und  $\varphi$ , so erhalten wir

$$a + \sqrt{[\sqrt{(\xi + a)^2 + \eta^2} - 2a]^2 + \zeta^2} - d \equiv E = 0 \quad (65; 2)$$

als Gleichung der Flächenschar. Man erkennt leicht, daß

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \zeta}\right)^2 \equiv (\text{grad } E)^2 = \text{const} (= 1)$$

ist, (2) also der Eikonalgleichung genügt und daher im Sinne der geometrischen Optik eine mögliche Wellenflächenschar bestimmt. Die durch (2) dargestellte Fläche erhält man, indem man einen Kreisbogen

$$(\xi - a)^2 + \zeta^2 = (d - a)^2 \quad (65; 3)$$

der  $xz$ -Ebene, dessen Radius  $(d - a)$  und dessen Mittelpunkt  $(+a, 0, 0)$  ist, um die Gerade

$$y = 0; \quad x = -a \quad (65; 4)$$

rotieren läßt (Abb. 47). Hierbei beschreibt der Mittelpunkt des Kreises (3) einen Kreisbogen in der  $xy$ -Ebene mit dem Radius  $2a$  und dem Mittelpunkt  $(-a, 0, 0)$ :

$$(x + a)^2 + y^2 = 4a^2. \quad (65; 5)$$

Die durch  $\vartheta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  bestimmten Normalen der Flächenschar (1), d. h. die Lichtstrahlen, gehen alle durch die Gerade (4) der  $xz$ -Ebene und durch den Kreisbogen (5) der  $xy$ -Ebene. Diese beiden Linien bilden also die Brennlinien des Strahlenbündels.  $2a$  ist der längs  $\vartheta = 0$  gemessene (senkrechte)

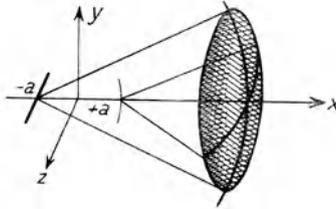


Abb. 47. Wellenfläche eines astigmatischen Strahlenbündels (torische Fläche!). Die Brennlinien schneiden die Achse in den Punkten  $x = \pm a$ .

Abstand der beiden Brennlinien, die den Strahl  $\vartheta = 0$  in  $x = +a$  bzw.  $x = -a$  schneiden.

Wählen wir die Fläche (1) mit  $d = 0$  als Kennfläche unseres Strahlenbündels, so erhalten wir nach (44; 11/12) als Integraldarstellung für  $u_P$ :

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} e^{-ika} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) e^{-ik[(x_P+a)\cos\vartheta + y_P\sin\vartheta\cos\varphi + z_P\sin\vartheta\sin\varphi - 2a\sqrt{1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}]} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (65; 6)$$

Hierbei ist angenommen, daß der Strahl  $\vartheta = 0$  der Hauptstrahl des Strahlenbündels ist, daß also beide Brennlinien senkrecht zum Hauptstrahl liegen, das betreffende optische System also bereits in der Achse einen astigmatischen Fehler aufweist, der beugungstheoretisch durch (6) dargestellt wird. Ist dies nicht der Fall, so hätten wir die Integrationsgrenzen entsprechend zu ändern, also

etwa ähnlich wie in § 26, um  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\varphi = \varphi_1$  als Hauptstrahl neue Polarkoordinaten  $\delta, \chi$  einzuführen gemäß (26; 1) und die Integration über diese Variablen zu erstrecken von 0 bis  $\delta$  bzw. 0 bis  $2\pi$ . Hierdurch erreicht man, daß die geradlinige Brennlinie mit dem neuen Hauptstrahl — der natürlich nicht mehr durch  $y_P = z_P = 0$  definiert ist — den Winkel  $\frac{\pi}{2} - \vartheta_1$  bildet, während die krummlinige Brennlinie auch jetzt noch senkrecht zum Hauptstrahl liegt.

Bei genügend geringer Öffnung kann übrigens auch (5) als annähernd geradlinig angesehen werden, da für  $y \ll 2a$  aus (5) folgt:  $x = +a$ ;  $z = 0$ .

Solange  $a \sin^4 \Theta \ll \lambda$  ist, können wir im Exponenten von  $e$  setzen

$$2a \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi} = (2 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) a$$

und

$$\sin^2 \vartheta = 2(1 - \cos \vartheta).$$

Nun ist

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi),$$

so daß

$$a(\cos \vartheta - 2\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}) = -a - a \cos 2\varphi(1 - \cos \vartheta),$$

$$\left. \begin{aligned} u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\Theta} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi) \\ e^{-ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - a \cos 2\varphi(1 - \cos \vartheta)]} \\ \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} (65; 7)$$

In dem durch (7) dargestellten Strahlenbündel treten beide Brennflächen gleichberechtigt auf, wie man aus der Form des Integranden schließen kann. Außerdem erkennt man, daß für sehr kleine Werte von  $\Theta$  die Lichtverhältnisse sich denen einer Kugelwelle nähern, wobei die „Stelle engster Einschnürung“, die mit dem Koordinatenursprungspunkt in (7) zusammenfällt und ungefähr in der Mitte zwischen beiden Brennflächen liegt, die Rolle des Brennpunktes der „Kugelwelle“ übernimmt.

Für kleine Werte von  $\Theta$  stimmen die durch (7) und (6) dargestellten Strahlenbündel überein. Für größere Werte von  $\Theta$  ist dies jedoch nicht mehr der Fall, denn (7) ist der Ausdruck für ein

Strahlenbündel, dessen Wellenflächen abweichend von (1) gegeben sind durch die Gleichungen (vgl. § 48):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \{ \cos \vartheta (\cos 2 \varphi + \text{const}) - \cos 2 \varphi \} \\ &= a \cos \vartheta \left[ \text{const} + \cos 2 \varphi \left( 1 - \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right], \\ \eta &= a \sin \vartheta \cos \varphi \left( \text{const} + 1 + 2 \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \\ \zeta &= a \sin \vartheta \sin \varphi \left( \text{const} - 1 - 2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right). \end{aligned} \right\} (65; 8)$$

Für  $\text{const} = 0$  ergibt sich hieraus die als Kennfläche gewählte Wellenfläche.

Man erkennt leicht, daß in den Punkten

$$(x_P, y_P, z_P); \quad (x_P, -y_P, z_P); \quad (x_P, -y_P, -z_P); \quad (x_P, y_P, -z_P)$$

die gleiche Intensität vorhanden ist, daß also jede der beiden durch die Achse und eine der beiden Brennpunkte gelegte Ebene hinsichtlich der Intensität eine Symmetrieebene darstellt. Um dies zu beweisen, hat man nur noch statt  $\varphi$  eine neue Integrationsvariable  $\varphi'$  einzuführen, indem man der Reihe nach setzt

$$\varphi = \varphi'; \quad \varphi = \pi - \varphi'; \quad \varphi = \pi + \varphi'; \quad \varphi = -\varphi'.$$

Man erhält dann in allen vier Fällen einen Integralausdruck, der mit (7) identisch ist, wobei allerdings noch vorausgesetzt ist, daß die Amplitudenfunktion  $\psi$  zu den genannten Ebenen symmetrisch ist, daß also

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \psi(\vartheta, \pi - \varphi) = \psi(\vartheta, \pi + \varphi) = \psi(\vartheta, -\varphi)$$

ist. Ist außerdem noch

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta, \varphi) &= \psi\left(\vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \psi\left(\vartheta, \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ &= \psi\left(\vartheta, \frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = \psi\left(\vartheta, \frac{3}{2}\pi + \varphi\right), \end{aligned}$$

so erkennt man ganz ebenso, daß im Punkte  $(x = -x_P, y = z_P, z = y_P)$  — und mithin auch in den Punkten  $(x = -x_P, y = -z_P, z = y_P)$ ;  $(x = -x_P, y = -z_P, z = -y_P)$ ;  $(x = -x_P, y = z_P, z = -y_P)$  — die gleiche Intensität vor-

handen ist wie im Punkte  $(x_P, y_P, z_P)$ . Wir wollen dies für den Punkt  $(-x_P, z_P, y_P)$  noch direkt beweisen. Schreiben wir in (7)

$$\begin{array}{ll} \text{statt } x_P & -x_P, \\ \text{„ } y_P & +z_P, \\ \text{„ } z_P & +y_P \end{array}$$

und setzen außerdem  $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \varphi'$ , so erhalten wir, da ja  $\psi(\vartheta, \varphi) = \psi(\vartheta, \frac{3}{2}\pi - \varphi)$  ist,

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^\vartheta \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta, \varphi') e^{+ik[x_P \cos \vartheta + z_P \sin \vartheta \sin \varphi' + y_P \sin \vartheta \cos \varphi' - a \cos 2\varphi' (1 - \cos \vartheta)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi'.$$

Dieser Wert unterscheidet sich von (7) nur dadurch, daß der Integrand den konjugiert komplexen Wert angenommen hat.

Die Ebene  $x_P = 0$ , die „Ebene engster Einschnürung“, ist also mit einer gewissen Modifikation Symmetrieebene. Die Modifikation besteht darin, daß zu der Spiegelung an der Symmetrieebene noch eine Drehung um die Achse um  $90^\circ$  hinzukommt.

### § 66. Intensitätsverteilung längs der Achse eines astigmatischen Strahlenbündels

Für Aufpunkte, die auf der Achse des durch (65; 8) gegebenen astigmatischen Strahlenbündels liegen ( $y_P = z_P = 0$ ), läßt sich der zugehörige Integralausdruck (65; 7), falls  $\psi(\vartheta, \varphi) = \text{const} (= 1)$  ist, sehr leicht auswerten. Zunächst ergibt sich mit

$$\left. \begin{array}{l} ka(1 - \cos \vartheta) = a'; \quad ka(1 - \cos \vartheta) = a; \\ kx_P(1 - \cos \vartheta) = x'; \quad kx_P(1 - \cos \vartheta) = x \end{array} \right\} \quad (66; 1)$$

$$\begin{aligned} u_P &= i \frac{1}{a} e^{-ikx_P} \int_0^a J_0(a') e^{+i\frac{x}{a}a'} da' \\ &= i \frac{1}{x_P} e^{-ikx_P} \int_0^x J_0\left(\frac{a}{x}x'\right) e^{ix'} dx', \end{aligned} \quad (66; 2)$$

wo  $J_0$  wieder die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist. Entwickeln wir diese in eine Potenzreihe von  $\frac{a}{x}x'$ , so läßt sich die

Integration durchführen. Es wird

$$u_P = i \frac{1}{x_P} e^{-ikx_P} \sum_0^{\infty} (-1)^u \frac{1}{(\mu!)^2} \left(\frac{a}{2\chi}\right)^{2\mu} \int_0^{\chi} e^{i\chi'} \chi'^{2\mu} d\chi' \quad (66; 3)$$

oder nach (A; 36) bzw. (A; 39)

$$(u_P)_{Q_P=0} = -\frac{1}{x_P} e^{-ikx_P \cos \Theta} \sum_0^{\infty} \binom{2\mu}{\mu} \left(\frac{a}{2\chi}\right)^{2\mu} \hat{e}_{2\mu+1}(-i\chi), \quad (66; 4)$$

$$\begin{aligned} (u_P)_{Q_P=0} = ik(1 - \cos \Theta) e^{-ikx_P} \sum_0^{\infty} (-1)^u a^{2\mu} \frac{\mu!!}{\mu^*!!} \\ \{ [\hat{C}_{2\mu+1}(\chi) \cos \chi + \hat{S}_{2\mu+1}(\chi) \sin \chi] \\ + i [\hat{C}_{2\mu+1}(\chi) \sin \chi - \hat{S}_{2\mu+1}(\chi) \cos \chi] \}. \end{aligned} \quad (66; 5)$$

Für den Punkt  $x_P = 0$ , in dem die Symmetrieebene, die Ebene engster Einschnürung, von der Achse geschnitten wird, ist

$$\chi = 0; \quad \hat{C}_{2\mu+1}(\chi) = \frac{1}{(2\mu+1)!}; \quad \hat{S}_{2\mu+1}(\chi) = 0,$$

und wir erhalten, da

$$\frac{\mu!!}{\mu^*!!} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)!} = \frac{1}{(\mu!)^2 2^{2\mu} (2\mu+1)}$$

ist,

$$\begin{aligned} (u_P)_{\substack{x_P=0 \\ Q_P=0}} = ik(1 - \cos \Theta) \sum_0^{\infty} (-1)^u \left(\frac{a}{2}\right)^{2\mu} \frac{1}{(\mu!)^2 2^{\mu+1}} \\ = \frac{2i}{a} \sum_0^{\infty} J_{2\mu+1}(a), \end{aligned} \quad (66; 6)$$

wo  $J_{2\mu+1}(a)$  die Besselschen Funktionen  $(2\mu+1)$ -ter Ordnung sind. Dieser Ausdruck ergibt sich übrigens am einfachsten direkt aus (1), wenn man dort noch  $x_P = 0$  setzt.

Da nach (A; 31)

$$\hat{C}_n(-\chi) = +\hat{C}_n(+\chi); \quad \hat{S}_n(-\chi) = -\hat{S}_n(+\chi),$$

und außerdem

$$\cos(-\chi) = +\cos(+\chi); \quad \sin(-\chi) = -\sin(+\chi),$$

so ergibt sich aus (5), daß

$$(u_P)_{\substack{Q_P=0 \\ x_P}} = -\widetilde{(u_P)}_{\substack{Q_P=0 \\ -x_P}}, \quad (66; 7)$$

wenn  $\sim$  den konjugiert komplexen Wert andeutet, also

$$I(x_P, \varrho_P = 0) = I(-x_P, \varrho_P = 0),$$

entsprechend den Ausführungen am Schluß des vorigen Paragraphen.

Für  $x_P = \pm a$ , den Schnittpunkt der Achse mit den Brennlinien, erhalten wir aus (4)

$$(u_P)_{x_P = \pm a, \varrho_P = 0} = \mp \frac{1}{a} e^{\mp i k a \cos \Theta} \sum_0^{\infty} \frac{\mu!!}{\mu^*!!} \dot{e}_{2\mu+1}(\mp i a). \quad (66; 8)$$

(6) läßt sich leicht mit Benutzung der Tafeln von Jahnke-Emde berechnen. Für  $a = 0$  wird

$$(u_P)_{x_P = \varrho_P = 0, a = 0} = i k (1 - \cos \Theta), \text{ also } (I_P)_{x_P = \varrho_P = 0, a = 0} \approx \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta.$$

Für  $a = 0$  aber geht das astigmatische Strahlenbündel in eine ideale Kugelwelle über, deren Brennpunkt mit dem Symmetriepunkt  $x_P = 0$  zusammenfällt. Dem entspricht, daß der hier gefundene Wert mit (25; 1) für  $x_P = 0$  bzw. mit (25; 3) übereinstimmt. Weiter erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \text{für } k a (1 - \cos \Theta) = a = 0 \quad & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \frac{u_P}{(u_P)_0} &= 1 \quad 0,920 \quad 0,713 \quad 0,463 \quad 0,256 \quad 0,143 \quad 0,118 \\ V = \frac{I_P}{(I_P)_0} &= 1 \quad 0,846 \quad 0,508 \quad 0,214 \quad 0,066 \quad 0,020 \quad 0,014 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

In Abb. 48 ist die zugehörige graphische Darstellung der Intensität im Symmetriepunkt  $x_P = 0$  in Abhängigkeit von  $a = k a (1 - \cos \Theta) = 2 \pi \frac{a}{\lambda} (1 - \cos \Theta)$  gegeben. Fordern wir wieder, daß die Intensität im Symmetriepunkt 80 % von derjenigen der idealen Kugelwelle gleicher Öffnung nicht unterschreiten soll, so erhalten wir als Bedingung

$$\text{also } \left. \begin{aligned} 2 \pi \frac{a}{\lambda} (1 - \cos \Theta) \approx \pi \frac{a}{\lambda} \Theta^2 \leq 1,12, \\ 2 a \Theta^2 \leq 0,71 \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (66; 9)$$

Das Produkt aus dem Abstand  $2a$  der beiden Brennlinien und dem Quadrat des halben Öffnungswinkels  $\Theta$ , im Bogenmaß gemessen,

muß also kleiner als  $\frac{3}{4} \lambda$  sein, damit das System noch als gut bezeichnet werden kann.

Für die Intensität in den Punkten, in denen die Achse die Brennlinsen schneidet, also für  $x_P = \pm a$ , ergibt sich (nach Strehl)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \frac{I}{I_0} = 1 \quad 0,78 \quad 0,38 \quad 0,18 \quad 0,16 \end{array} \right\} \quad (II)$$

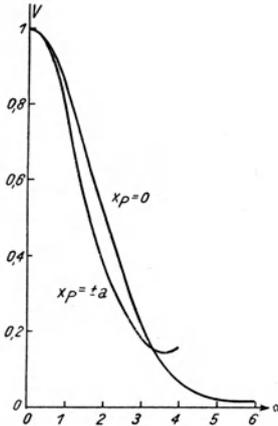


Abb. 48. Relative Intensität (Definitionshelligkeit)  $V = \frac{I}{I_0}$  eines astigmatischen Strahlenbündels in den Punkten  $x_P = 0$  bzw.  $x_P = \pm a$  in Abhängigkeit von  $\alpha = ka(1 - \cos \theta)$

In Abb. 48 ist die zugehörige graphische Darstellung gegeben.

Vergleichen wir die in den beiden Tabellen (I) und (II) angegebenen Definitionshelligkeiten bzw. die zugehörigen Intensitätskurven der Abb. 48, so sehen wir, daß bei kleinen Werten von  $\alpha$  die Intensität im Symmetriepunkt größer ist als in den Achsen Schnittpunkten der Brennlinsen, daß sie aber bei größeren Werten von  $\alpha$ , nämlich bereits bei  $\alpha = ka(1 - \cos \theta) = 4$ , in den Achsen Schnittpunkten der Brennlinsen wesentlich größer ist als im Symmetriepunkt. Bei  $\alpha = 3,3$  ist die Intensität zwischen  $x_P = -a$  und  $x_P = +a$  längs der Achse nahezu konstant, und zwar ungefähr gleich 0,15 der idealen Kugelwelle gleicher Öffnung.

### § 67. Intensität in beliebigen Aufpunkten eines astigmatischen Strahlenbündels

Um das Integral (65; 7) — für  $\psi(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta$  — ganz allgemein auszuwerten, setzen wir  $y_P = \varrho_P \cos \varphi_P$ ;  $z_P = \varrho_P \sin \varphi_P$  und führen als neue Integrationsvariable  $\varphi - \varphi_P = \omega$  ein. Ferner beachten wir, daß

$$\begin{aligned} \cos 2 \varphi &= \cos (2 \omega + 2 \varphi_P) \\ &= \cos 2 \varphi_P - 2 \cos 2 \varphi_P \sin^2 \omega - 2 \sin 2 \varphi_P \sin \omega \cos \omega \end{aligned}$$

ist. Wir erhalten so

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} e^{-ikx_P} \int_0^\vartheta \left\{ e^{+ik(x_P + a \cos 2\varphi_P)(1 - \cos \vartheta)} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} e^{-i\eta' \cos \omega} e^{-i[A \sin^2 \omega + B \sin \omega \cos \omega]} d\omega \right\} \sin \vartheta d(\sin \vartheta),$$

worin

$$\left. \begin{aligned} A &= 2ka(1 - \cos \vartheta) \cos 2\varphi_P = C \cos 2\varphi_P \\ B &= 2ka(1 - \cos \vartheta) \sin 2\varphi_P = C \sin 2\varphi_P \end{aligned} \right\} \text{ und } \eta' = k \rho_P \sin \vartheta.$$

Wir entwickeln

$$e^{-i[A \sin^2 \omega + B \sin \omega \cos \omega]} = 1 - i[\dots] - \frac{1}{2}[\dots]^2 + \dots$$

Setzen wir nun voraus, daß

$$\frac{1}{3!} C^3 = \frac{1}{3!} [2ka(1 - \cos \vartheta)]^3 \ll 1$$

ist, also etwa  $a(1 - \cos \vartheta) \leq 0,03 \lambda$ , so können wir uns bei der Entwicklung von  $e^{-i[A \sin^2 \omega + B \sin \omega \cos \omega]}$  auf die hingeschriebenen Glieder beschränken. Die genannte Entwicklung führt auf Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta' \cos \omega} \sin^{2n} \omega d\omega = 2\pi n!! \frac{J_n(\eta')}{\eta'^n},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta' \cos \omega} \sin^{2n+1} \omega \cos^m \omega d\omega = 0,$$

so daß sich die Integration nach  $\omega$  vollständig ausführen läßt.

Es wird

$$u_P = ik e^{-ikx_P} \int_0^\vartheta e^{+ik(x_P + a \cos 2\varphi_P)(1 - \cos \vartheta)} \left[ J_0(\eta') \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{2} B^2 + iA \right) \frac{J_1(\eta')}{\eta'} - \frac{3}{2} C^2 \cos 4\varphi_P \frac{J_2(\eta')}{\eta'^2} + \dots \right] \sin \vartheta d(\sin \vartheta).$$

Entwickeln wir hierin noch die in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auftretende Größe  $(1 - \cos \vartheta)$  und ebenso  $e^{+ik(x_P + a \cos 2\varphi_P)(1 - \cos \vartheta)}$  nach Potenzen von  $\eta' = k \rho_P \sin \vartheta$  und setzen noch voraus, daß

$$|k^3 x_P^3 (1 - \cos \vartheta)^3| \ll 1,$$

also etwa  $|x_P| (1 - \cos \vartheta) \leq 0,035 \lambda$ , so erhalten wir nach Ausführung der Integrationen entsprechend (A; 24 u. ff.)

$$\begin{aligned}
 u_P = & i k \sin^2 \Theta e^{-i k x_P} \left\langle \left\{ \frac{J_1(\eta)}{\eta} - \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} - 4 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} + 8 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) \right. \right. \\
 & - 2 a^2 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 5 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) - x a \cos 2 \varphi_P \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} - 6 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} + 12 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) \\
 & - \frac{1}{2} a^2 \cos^2 2 \varphi_P \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} - 12 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} + 48 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) \left. \right\} \\
 & + i \left\{ x \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} - 2 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right) + a \cos 2 \varphi_P \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} - 4 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right) \right\} \rangle.
 \end{aligned} \tag{67; 1}$$

Nach Multiplikation mit dem konjugiert-komplexen Wert ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_P = & \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right)^2 + 4 x^2 \frac{J_2^2(\eta)}{\eta^4} - \frac{2 J_1(\eta) J_3(\eta)}{\eta^4} \right. \\
 & - 4 a^2 \left( \frac{J_1(\eta) J_2(\eta)}{\eta^3} - 5 \frac{J_1(\eta) J_3(\eta)}{\eta^4} \right) \\
 & + 4 a^2 \cos^2 2 \varphi_P \left( \frac{J_1(\eta) J_2(\eta)}{\eta^3} - 12 \frac{J_1(\eta) J_3(\eta)}{\eta^4} + 4 \frac{J_2^2(\eta)}{\eta^4} \right) \\
 & \left. - 8 a x \cos 2 \varphi_P \left( 3 \frac{J_1(\eta) J_3(\eta)}{\eta^4} - 2 \frac{J_2^2(\eta)}{\eta^4} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{67; 2}$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} k a \sin^2 \Theta, \\
 x &= \frac{1}{2} k x_P \sin^2 \Theta, \\
 \eta &= k \varrho_P \sin \Theta.
 \end{aligned} \right\} \tag{67; 3}$$

Setzen wir in (2)  $\eta = 0$ , betrachten also Aufpunkte, die auf der Achse des Bündels liegen, so erkennen wir unter Berücksichtigung der Formel (A; 15)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{J_n(\eta)}{\eta^n} = \frac{1}{2^n n!}, \tag{67; 4}$$

daß alle Klammern, deren Koeffizienten von  $\varphi_P$  abhängen, verschwinden, wie dies verlangt werden muß. Es ergibt sich

$$(I_P)_{\varrho_P=0} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ 1 - \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{6} a^2 \right\}. \tag{67; 5}$$

Selbstverständlich ist diese Formel nur für kleine Werte von  $\gamma$  und  $\alpha$  gültig. Da nun aber nach § 66 noch ein Astigmatismus  $\alpha = 1,12$  als „gut“ bezeichnet werden muß, so ist es erforderlich, die Näherungen wesentlich weiter zu treiben als hier geschehen. Die Formeln werden dann aber recht umfangreich, so daß wir darauf verzichten, sie hier mitzuteilen. Sie finden sich in der Literatur<sup>1)</sup>.

**§ 68. Astigmatisches Strahlenbündel mit zwei Brennflächen.  
Allgemeine Integraldarstellung**

In erster Näherung können wir als Kennfläche eines beliebigen Strahlenbündels ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid voraussetzen<sup>2)</sup>. Das Strahlenbündel besitzt dann zwei Kaustikschalen, von denen jede eine (krummlinige) Kante hat. Diese beiden Kanten liegen in zwei zueinander senkrechten Ebenen und entsprechen den Brennlinien des astigmatischen Strahlenbündels. Wir geben daher noch die Integraldarstellung für ein Strahlenbündel, dessen Kennfläche das Paraboloid

$$\xi = + \frac{1}{2\bar{\alpha}^2} (\varrho_1 \bar{\beta}^2 + \varrho_2 \bar{\gamma}^2); \quad \eta = \varrho_1 \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}; \quad \zeta = \varrho_2 \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}} \quad (68; 1)$$

$$(\bar{\alpha} = \sqrt{1 - \bar{\beta}^2 - \bar{\gamma}^2}, \text{ d. h. } \bar{\alpha} = \cos \alpha; \quad \bar{\beta} = \cos \beta; \quad \bar{\gamma} = \cos \gamma) \quad (68; 2)$$

ist.  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind die Krümmungsradien im Scheitel des Paraboloids,  $|\varrho_1 - \varrho_2| = 2a$  ist der Abstand der beiden Brennlinien. Haben  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  verschiedenes Vorzeichen, so haben wir es mit einem hyperbolischen Paraboloid zu tun. Bei einem elliptischen Paraboloid haben beide Krümmungsradien gleiches Vorzeichen, und zwar positiv, wenn es nach rechts geöffnet ist, also einem Strahlenbündel entspricht, dessen Randstrahlen schwächer konvergieren als die Paraxialstrahlen (die Kaustikschalen also beide nach rechts geöffnet sind). Für  $u_P$  erhalten wir

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1}^{+\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1} \psi(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) e^{-ik \left[ x_P \bar{\alpha} + y_P \bar{\beta} + z_P \bar{\gamma} + \frac{\varrho_1 \bar{\beta}^2 + \varrho_2 \bar{\gamma}^2}{2\bar{\alpha}} \right]} \frac{1}{\bar{\alpha}} d\bar{\beta} d\bar{\gamma}. \quad (68; 3)$$

<sup>1)</sup> J. Picht, Zeitschr. f. Instrkde. 51, 1931 (noch nicht erschienen).

<sup>2)</sup> Siehe z. B. J. Picht, Ann. d. Phys. (4) 77, 685 (785), 1925; § 10.

Für  $q_1 = q_2 = q$  geht das elliptische Paraboloid in ein Rotationsparaboloid über und (3) dementsprechend in

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1}^{+\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1} \psi(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) e^{-ik \left[ x_P \bar{\alpha} + y_P \bar{\beta} + z_P \bar{\gamma} + q \frac{\bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2}{2\bar{\alpha}} \right]} \frac{1}{\bar{\alpha}} d\bar{\beta} d\bar{\gamma}. \quad (68; 4)$$

Diese Darstellung ist, abgesehen von einer Koordinatentransformation, identisch mit (53; 3), wie man leicht erkennt.  $q$  entspricht dem Werte  $+2a$  der sphärischen Aberration.

Je nach der Form der das Bündel begrenzenden Blende besteht zwischen  $\bar{\beta}_1$  und  $\bar{\gamma}_1$  noch eine bestimmte Beziehung. Handelt es sich speziell um eine quadratische oder rechteckige Öffnung, deren Kanten den Brennlinsen parallel sind, so sind  $\bar{\beta}_1$  und  $\bar{\gamma}_1$  voneinander unabhängige Konstante.

Statt (3) können wir näherungsweise schreiben

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1}^{+\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1} e^{-ik \left[ x_P \bar{\alpha} + y_P \bar{\beta} + z_P \bar{\gamma} + \frac{1}{2} q_1 \bar{\beta}^2 + \frac{1}{2} q_2 \bar{\gamma}^2 \right]} d\bar{\beta} d\bar{\gamma}. \quad (68; 5)$$

Dieser Ausdruck ist die strenge Lösung für ein astigmatisches Strahlenbündel, dessen Kennfläche durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\bar{\alpha}}{2} (q_1 \bar{\beta}^2 + q_2 \bar{\gamma}^2), \\ \eta &= \frac{\bar{\beta}}{2} (q_1 \bar{\beta}^2 + q_2 \bar{\gamma}^2) - q_1 \bar{\beta}, \\ \zeta &= \frac{\bar{\gamma}}{2} (q_1 \bar{\beta}^2 + q_2 \bar{\gamma}^2) - q_2 \bar{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (68; 6)$$

gegeben ist, und für welches die Intensitätsverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche dem Amplitudenfaktor  $\psi(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) = \bar{\alpha}$  entspricht.

Für Werte von  $x_P, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1$ , für die

$$x_P \bar{\beta}_1^4 \ll 2\lambda; \quad x_P \bar{\gamma}_1^4 \ll 2\lambda \quad (68; 7)$$

ist, können wir

$$x_P \alpha = x_P - \frac{1}{2} x_P \bar{\beta}^2 - \frac{1}{2} x_P \bar{\gamma}^2$$

setzen, so daß

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\bar{\beta}_1 - \bar{\gamma}_1}^{+\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1} e^{-ik \left[ x_P - \frac{1}{2} x_P \bar{\beta}^2 - \frac{1}{2} x_P \bar{\gamma}^2 + y_P \bar{\beta} + z_P \bar{\gamma} + \frac{1}{2} q_1 \bar{\beta}^2 + \frac{1}{2} q_2 \bar{\gamma}^2 \right]} d\bar{\beta} d\bar{\gamma}. \quad (68; 8)$$

**§ 69. Auswertung und Diskussion  
der allgemeinen Integraldarstellung (68; 8) für quadratische  
oder rechteckige Öffnung.**

Nehmen wir  $\bar{\beta}_1$  und  $\bar{\gamma}_1$  als voneinander unabhängige Konstante an (s. oben), so läßt sich (8) leicht auswerten und näher diskutieren. Es wird dann

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} e^{-ikx_P} \int_{-\bar{\beta}_1}^{+\bar{\beta}_1} e^{-\frac{ik}{2}[(q_1 - x_P)\bar{\beta}^2 + 2y_P\bar{\beta}]} d\bar{\beta} \cdot \int_{-\bar{\gamma}_1}^{+\bar{\gamma}_1} e^{-\frac{ik}{2}[(q_2 - x_P)\bar{\gamma}^2 + 2z_P\bar{\gamma}]} d\bar{\gamma}. \quad (69; 1)$$

Setzen wir hier

$$\left(\bar{\beta} + \frac{y_P}{q_1 - x_P}\right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_1 - x_P|} = \delta_1,$$

$$\left(\bar{\gamma} + \frac{z_P}{q_2 - x_P}\right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_2 - x_P|} = \delta_2,$$

so geht dies über in

$$u_P = \frac{2ik}{\pi} \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1 e^{-ik \left[ x_P - \frac{1}{2} \frac{y_P^2}{q_1 - x_P} - \frac{1}{2} \frac{z_P^2}{q_2 - x_P} \right]} \cdot \frac{1}{s_{12} - s_{11}} \int_{s_{11}}^{s_{12}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta_1^2} d\delta_1 \cdot \frac{1}{s_{22} - s_{21}} \int_{s_{21}}^{s_{22}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta_2^2} d\delta_2, \quad (69; 2)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \left( -\bar{\beta}_1 + \frac{y_P}{q_1 - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_1 - x_P|}, \\ s_{12} &= \left( +\bar{\beta}_1 + \frac{y_P}{q_1 - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_1 - x_P|}, \\ s_{21} &= \left( -\bar{\gamma}_1 + \frac{z_P}{q_2 - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_2 - x_P|}, \\ s_{22} &= \left( +\bar{\gamma}_1 + \frac{z_P}{q_2 - x_P} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi} |q_2 - x_P|}. \end{aligned} \right\} \quad (69; 3)$$

Im Integranden von (2) ist das  $-$ -Zeichen zu nehmen, wenn  $\varrho_1 - x_P > 0$ , dagegen das  $+$ -Zeichen, wenn  $\varrho_1 - x_P < 0$  ist. Zur Diskussion von (2) benutzen wir wieder die Cornusche Spirale (Abb. 49). Wir wählen auf ihr vier Punkte  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{22}$  so, daß die vom Nullpunkt aus gemessenen Bogenlängen bis zu den betreffenden Punkten den Werten  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{21}$ ,  $s_{22}$  entsprechen, daß also  $\widehat{OP_{11}} = s_{11}$ ,  $\widehat{OP_{12}} = s_{12}$ ,  $\widehat{OP_{21}} = s_{21}$ ,  $\widehat{OP_{22}} = s_{22}$  ist.

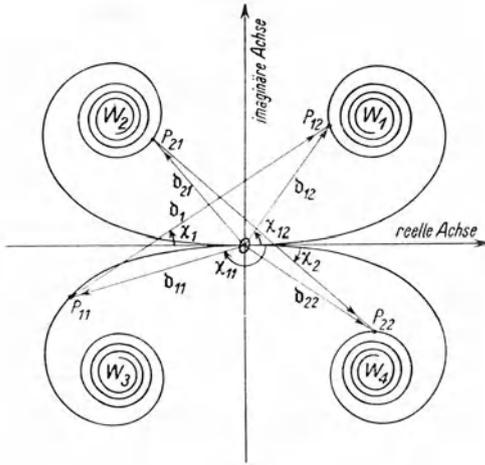


Abb. 49. Cornusche Spirale zur Diskussion der Fresnelschen Integrale

Wir bezeichnen das Integral  $\int_0^{s_{11}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta_1^3} d\delta_1$  durch den Vektor  $\delta_{11}$  mit dem absoluten Betrag  $d_{11}$ ; seine Richtung sei durch den Winkel  $\chi_{11}$  bestimmt, den  $\overrightarrow{OP_{11}}$  mit der positiven reellen Achse bildet. Dann ist

$$\int_0^{s_{11}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta_1^3} d\delta_1 = \delta_{11} = d_{11} e^{i\chi_{11}}; \quad -\pi < \chi_{11} < +\pi$$

und analog

$$\int_0^{s_{12}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta_1^3} d\delta_1 = \delta_{12} = d_{12} e^{i\chi_{12}},$$

so daß

$$\int_{s_{11}}^{s_{12}} e^{-i\frac{\pi}{2}\delta_1^2} d\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{11} = \delta_1 = d_1 e^{i\chi_1}. \quad (69; 4)$$

Hier ist  $\delta_1 = \overrightarrow{P_{11}P_{12}}$ ,  $d_1 = \left| \overrightarrow{P_{11}P_{12}} \right| = \overline{P_{11}P_{12}}$  und  $\chi_1$  der Winkel, den der Vektor  $\delta_1$  mit der positiven reellen Achse einschließt. Analog ist

$$\int_{s_{21}}^{s_{22}} e^{-i\frac{\pi}{2}\delta_2^2} d\delta_2 = \delta_2 = d_2 e^{i\chi_2}. \quad (69; 5)$$

Steht im Exponenten des Integranden das —-Zeichen, ist also  $q_x - x_P > 0$ , so ist der Winkel  $\chi_x < 0$  und umgekehrt ( $x = 1; 2$ ). Wir setzen noch die Bogenlänge der Cornuschen Spirale von  $P_{11}$  nach  $P_{12}$  gleich  $s_1$ , von  $P_{21}$  nach  $P_{22}$  gleich  $s_2$ , so daß also  $s_{12} - s_{11} = s_1$  und  $s_{22} - s_{21} = s_2$ . Schreiben wir noch für  $i$  die

Exponentialgröße  $e^{i\frac{\pi}{2}}$ , so geht (2) über in

$$u_P = \frac{2k}{\pi} \frac{\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1}{s_1 s_2} \frac{d_1}{s_1} \frac{d_2}{s_2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \chi_1 + \chi_2\right)} e^{-ik \left[ x_P - \frac{1}{2} \frac{y_P^2}{q_1 - x_P} - \frac{1}{2} \frac{z_P^2}{q_2 - x_P} \right]} \quad (69; 6)$$

und demnach nach § 50

$$I_P = \frac{4k^2}{\pi^2} \bar{\beta}_1^2 \bar{\gamma}_1^2 \left( \frac{d_1}{s_1} \right)^2 \left( \frac{d_2}{s_2} \right)^2,$$

so daß die Intensität proportional ist dem Quadrat des aus den beiden Faktoren  $\frac{d_1}{s_1}$  und  $\frac{d_2}{s_2}$  gebildeten Produktes.

Da sich der zweite Phasenfaktor in (6) (sehr) annähernd normal ändert, wie man leicht einsieht<sup>1)</sup>, so gibt die Winkelsumme  $\frac{\pi}{2} + \chi_1 + \chi_2$  die anomale Phasenänderung an. Für Aufpunkte weit vor den beiden Brennlinsen (genauer: vor den beiden Brennf lächen) liegen  $P_{11}$  und  $P_{21}$  im Windungspunkt  $W_2$  der Cornuschen Spirale,  $P_{12}$  und  $P_{22}$  aber in  $W_4$ , so daß hier  $\chi_1 = \chi_2 = -\frac{\pi}{4}$ ,

<sup>1)</sup> Siehe J. Picht, Ann. d. Phys. (4) 77, 685 (785), 1925; § 11.

also  $\frac{\pi}{2} + \chi_1 + \chi_2 = 0$  ist. Für Aufpunkte weit hinter den beiden Brennnlinien liegen  $P_{11}$  und  $P_{21}$  in  $W_3$ ,  $P_{12}$  und  $P_{22}$  in  $W_1$ , so daß jetzt  $\chi_1 = \chi_2 = +\frac{\pi}{4}$ , also  $\frac{\pi}{2} + \chi_1 + \chi_2 = \pi$  ist. Dies zeigt, daß der Durchgang durch beide Brennflächen die Phasenänderung  $\pi$  bewirkt. Entsprechend erkennt man, falls beide Brennflächen hinreichend weit voneinander entfernt sind, daß der Durchgang durch jede von ihnen den Phasensprung  $\pi/2$  verursacht.

Einer besonderen Erörterung bedarf der Fall, daß  $q_1 - x_P = 0$  bzw.  $q_2 - x_P = 0$  wird, daß es sich also um Aufpunkte handelt, die in der durch eine der beiden Brennnlinien gelegten achsensenk-rechten Ebene liegen, da hier die Werte  $s_{11}$  und  $s_{12}$  bzw.  $s_{21}$  und  $s_{22}$  unbrauchbar werden. Man erkennt aber leicht, daß sich in diesem Falle aus (1) ergibt:

$$u_P = \frac{2k}{\pi} \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1 \frac{\sin(k y_P \bar{\beta}_1)}{k y_P \bar{\beta}_1} \frac{d_2}{s_2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \chi_2\right)} e^{-ik\left[x_P - \frac{1}{2} \frac{z_P^2}{q_2 - x_P}\right]} \quad (69; 7)$$

bzw.

$$u_P = \frac{2k}{\pi} \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1 \frac{d_1}{s_1} \frac{\sin(k z_P \bar{\gamma}_1)}{k z_P \bar{\gamma}_1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \chi_1\right)} e^{-ik\left[x_P - \frac{1}{2} \frac{y_P^2}{q_1 - x_P}\right]} \quad (69; 8)$$

Für  $y_P = 0$  (bzw.  $z_P = 0$ ) sind diese Gleichungen mit Gleichung (6) identisch, wenn dort  $y_P = 0$ ;  $q_1 - x_P = 0$  (bzw.  $z_P = 0$ ;  $q_2 - x_P = 0$ )

gesetzt wird, da in diesem Falle  $\frac{\sin(k y_P \bar{\beta}_1)}{k y_P \bar{\beta}_1}$  (bzw.  $\frac{\sin(k z_P \bar{\gamma}_1)}{k z_P \bar{\gamma}_1}$ )

und auch  $\frac{d_1}{s_1}$  (bzw.  $\frac{d_2}{s_2}$ ) gleich 1 wird.

Es lassen sich noch einige theoretische Betrachtungen über die Intensität bzw. deren örtliche Änderung in der Nähe der Brennnlinien anstellen. Man erkennt z. B. durch Überlegungen, betreffend die Lage der Punkte  $P_{zi}$  in Abhängigkeit von  $\frac{y_P}{q_1 - x_P}$  bzw.  $\frac{z_P}{q_2 - x_P}$  leicht, daß in der Nähe der Brennnlinien Maxima und

Minima der Intensität auftreten. Ferner lassen sich auch gewisse Aussagen über die Größe bzw. die Abnahme der Intensität in Punkten außerhalb des geometrisch-optischen Strahlenbündels machen, so unter anderem, daß dort die Intensitätsabnahme bei der speziellen Wahl der Begrenzung des Strahlenbündels, die wir oben angenommen haben und die durch  $-\bar{\beta}_1 \leqq \bar{\beta} \leqq +\bar{\beta}_1$ ;  $-\bar{\gamma}_1 \leqq \bar{\gamma} \leqq +\bar{\gamma}_1$  gekennzeichnet war, nicht in allen durch die Achse gehenden Ebenen gleich schnell erfolgt, daß vielmehr die Abnahme in der Ebene  $y_P = z_P$  schneller vor sich geht, als z. B. in der Ebene  $y_P = 0$  (bzw.  $z_P = 0$ ), in der die eine (bzw. die andere) Brennlinie liegt. Wir wollen jedoch davon absehen, die Verhältnisse, die man zwar leicht übersieht, die sich aber mit allen Einzelheiten nur umständlich in Worten ausdrücken lassen, hier ausführlich zu erörtern.

Sind die geometrisch-optischen Verhältnisse zur Ebene der „engsten Einschnürung“, der „kleinsten Verwirrung“ (von einer Drehung um  $90^\circ$  abgesehen) völlig symmetrisch, so wählen wir vorteilhaft als Kennfläche das hyperbolische Paraboloid mit  $q_2 = -q_1 = a$ , das von der genannten Ebene in seinem Schnittpunkt mit der optischen Achse berührt wird. Für  $a = 0$  geht dann das astigmatische Strahlenbündel in eine Kugelwelle über. Aus (2) lesen wir noch einige allgemein gültige Beziehungen ab. Setzen wir nämlich in den Ausdrücken (3) für  $s_{x\lambda}$  einmal

$$x_P = 0; \quad q_2 = -q_1 = a$$

(Symmetriepunktebene eines astigmatischen Strahlenbündels vom Brennpunktabstand  $2a$ ) und ein zweites Mal

$$x_P = \pm a; \quad q_2 = q_1 = 0$$

(Kugelwelle; Einstellebene um  $\pm a$  aus der Brennpunktebene verschoben), so ändert sich das eine der beiden Wertepaare  $s_{x_1}, s_{x_2}$  ( $x = 1; 2$ ) nicht, während das andere die Reihenfolge und das Vorzeichen ändert.

	$x_P = 0$ $q_2 = -q_1 = a$	$x_P = +a$ $q_2 = q_1 = 0$	$x_P = -a$ $q_2 = q_1 = 0$
$s_{11}$	$c_1$	$-c_2$	$+c_1$
$s_{12}$	$c_2$	$-c_1$	$+c_2$
$s_{21}$	$c_3$	$+c_3$	$-c_4$
$s_{22}$	$c_4$	$+c_4$	$-c_3$

Daraus folgt sofort, daß die Intensitätsverteilung in der Symmetriepunktebene eines astigmatischen Strahlenbündels, dessen Brennlinienabstand gleich  $2a$  und dessen Öffnung rechteckig oder quadratisch ist, völlig identisch ist mit der Intensitätsverteilung einer Kugelleuchte gleicher Öffnung in einer um die Strecke  $a$  gegen die Brennpunktebene verschobenen Einstellebene.

Ebenso sieht man, daß in jeder achsensenkrechten Ebene die Intensitätsverteilung spiegelsymmetrisch zu den beiden den Brennlinien parallel laufenden Geraden  $y = 0$  und  $z = 0$  ist, wie wir dies auch bereits in § 65 sahen. Die Intensität in den vier Punkten

$$(c_1, c_2, c_3); (c_1 - c_2, c_3); (c_1, c_2, -c_3); (c_1, -c_2, -c_3) \quad (\text{A})$$

der Ebene  $x = c_1$  ist also identisch.

Ferner erkennt man durch Einsetzen der entsprechenden Größen sofort, daß die Intensität in den vier angegebenen Punkten der Ebene  $x = +c_1$  gleich ist der Intensität in den vier Punkten  $(-c_1, c_3, c_2); (-c_1, -c_3, c_2); (-c_1, c_3, -c_2); (-c_1, -c_3, -c_2)$  (B) der Ebene  $x = -c_1$ . (Für den Beweis ist wesentlich, daß  $q_2 = -q_1$  vorausgesetzt war.) Es ergibt sich also auch hier wieder, daß die Ebene engster Einschnürung eine Symmetrieebene mit der Modifikation darstellt, daß die Intensitätsverteilung im Raume vor der Symmetrieebene zu derjenigen im Raume hinter der Symmetrieebene eine Drehung um die Achse des Bündels um  $90^\circ$  erfahren hat. Wir können dies übrigens wegen (A) auch so ausdrücken, daß zu der Spiegelung an der Symmetrieebene noch eine zweite Spiegelung an der Ebene  $y = z$  nachträglich hinzukommt.

Endlich erkennt man noch aus (2), (3), (7), (8), daß die Intensitätsverteilung in der Symmetrieebene  $x_P = 0$  längs der den Brennlinien parallelen Geraden  $y_P = 0$  bzw.  $z_P = 0$  bis auf einen konstanten Faktor gleich ist der Intensitätsverteilung längs der entsprechenden Brennlinie  $x_P = \frac{a}{2}; y_P = 0$  bzw.  $x_P = -\frac{a}{2}; z_P = 0$  eines astigmatischen Strahlenbündels gleicher Öffnung, aber halben Brennlinienabstandes  $(q_2 = -q_1 = \frac{a}{2})$ .

Wir geben noch eine Tabelle der Intensitätswerte längs der Achse ( $y_P = z_P = 0$ ) eines astigmatischen Strahlenbündels quadratischer Öffnung, dessen Brennlinien den Abstand  $2a$  besitzen. Die Werte wurden auf Grund der Formel (2) mit Hilfe der Cornuschen

Spirale berechnet. Für  $\bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1$  schreiben wir, da ja  $\bar{\beta}_1 = \cos \beta_1 = \sin \alpha_1$  ( $= \sin \Theta$ ) und entsprechend:  $\bar{\gamma}_1 = \cos \gamma_1 = \sin \alpha_1$  ( $= \sin \Theta$ ) ist, die gemeinschaftliche Bezeichnung  $\sin \alpha_1$ . Wir setzen entsprechend den bei der kreisförmigen Begrenzung in § 66 gewählten Abkürzungen:

$$\frac{1}{2} k a \sin^2 \alpha_1 [\approx k a (1 - \cos \Theta)] = a$$

$$\frac{1}{2} k x_P \sin^2 \alpha_1 [\approx k x_P (1 - \cos \Theta)] = \xi$$

$\sin \alpha_1 = 0,2$		2 a =		0	25 λ	50 λ	75 λ	100 λ
		2 a =		0	100 λ	200 λ	300 λ	400 λ
$\sin \alpha_1 = 0,1$		a =		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \pi$	2 π
		ξ =		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \pi$	2 π
$x_P =$	$x_P =$							
0	0	0	100	65,1	15,8	1,5.	0,8	
12,5 λ	50 λ	$\frac{\pi}{2}$	65,1	39,8	9,8	3,6.	1,6.	
25 λ	100 λ	π	15,8	9,8	9,0.	10,4	4,4	
37,5 λ	150 λ	$\frac{3}{2} \pi$	1,5.	3,6.	10,4	11,0	4,7	
50 λ	200 λ	2 π	0,8	1,6.	4,4	4,7	5,0	

Die Punkte hinter den Zahlen beziehen sich auf die Abrundung. Sie bedeuten, daß der wirkliche Wert um etwa 2 bis 5 Einheiten der nächsten Stelle kleiner ist als der angegebene.

Abb. 50 gibt die Definitionshelligkeit im Symmetriepunkt  $x_P = 0$  sowie im Schnittpunkt  $x_P = \pm a$  der Achse mit der Brennpunktlinie, und zwar beide in Abhängigkeit von  $a = \frac{1}{2} k a \sin^2 \alpha_1$ . Die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf quadratische Öffnung, die gestrichelte (aus Abb. 48 entnommen) bezieht sich auf kreisförmige Öffnung. Man erkennt, daß auch hier die Intensität im Symmetriepunkt bei kleinen a-Werten größer ist als im Achsenschnittpunkt der Brennpunktlinie, daß aber bei größerem Wert von a sich die Verhältnisse umkehren.

In den Abb. 51 bis 56 geben wir die Intensitätsverteilung längs der Achse der astigmatischen Strahlenbündel, für die  $a = 0$  (Kugellinse);  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{3}{2} \pi$ ;  $2 \pi$ ;  $\frac{5}{2} \pi$  ist. Man erkennt, wie verwickelt die Verhältnisse in Wirklichkeit sind. Allerdings gelten die hier wiedergegebenen Kurven für □-Öffnung, doch ist als

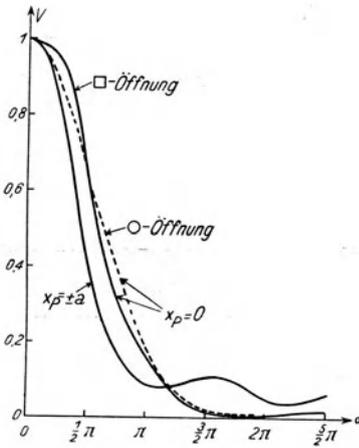


Abb. 50. Relative Intensitätsverteilung (Definitionshelligkeit)  $V = \frac{I}{I_0}$  eines astigmatischen Strahlenbündels in den Punkten  $x_p = 0$  und  $x_p = \pm a$  für  $\square$ -Öffnung (—) bzw. für  $\circ$ -Öffnung (---) in Abhängigkeit von

$$a = \frac{1}{2} k a \sin^2 \alpha_1$$

$$[\approx k a (1 - \cos \theta)]$$

wahrscheinlich anzunehmen, daß sie wenigstens in ihrem allgemeinen Charakter bei  $\circ$ -Öffnung nicht wesentlich anders sind. Zeigen doch die Kurven der Abb. 50, die für die Intensität im

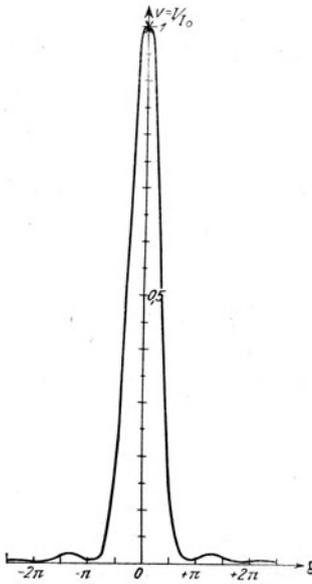


Abb. 51

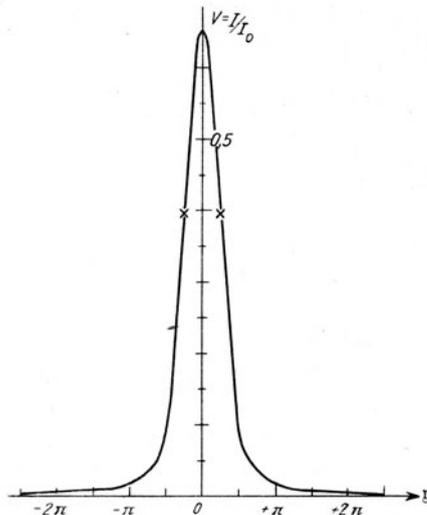


Abb. 52

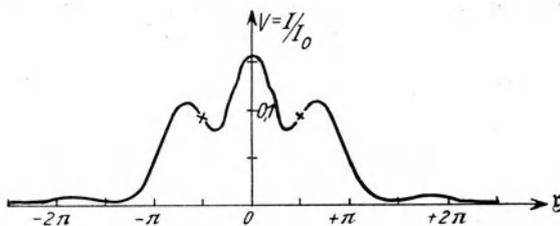


Abb. 53

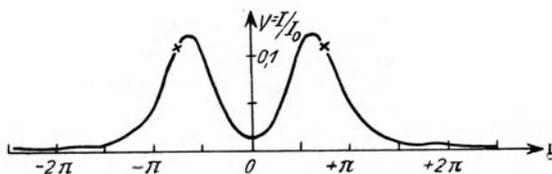


Abb. 54

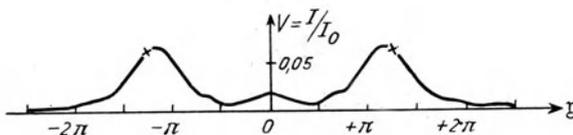


Abb. 55

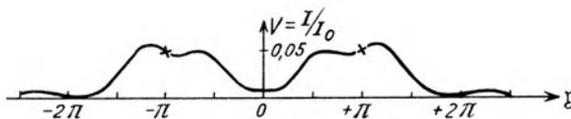


Abb. 56

Abb. 51 bis 56. Relative Intensitätsverteilung (Definitionshelligkeit)

$V = \frac{I}{I_0}$  längs der Achse astigmatischer Strahlenbündel, für die

$$\alpha = k a (1 - \cos \Theta) = \frac{1}{2} k a \sin^2 \alpha_1$$

die Werte

$\alpha = 0$  (Kugelwelle);  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{3}{2}\pi$ ;  $2\pi$ ;  $\frac{5}{2}\pi$

(Abb. 51) (Abb. 52) (Abb. 53) (Abb. 54) (Abb. 55) (Abb. 56)

hat, in Abhängigkeit von

$$\xi = \frac{1}{2} k x_P \sin^2 \alpha_1 = k x_P (1 - \cos \Theta).$$

( $2a =$  Brennlinienabstand.) Die eingezeichneten  $\times$  geben die jeweilige Lage der Brennlinien an. Es ist noch zu beachten, daß der Maßstab der

Abb. 51 und 52 von dem der übrigen Abbildungen abweicht

Symmetriepunkt und in den Achsenschnittpunkten der Brennlinien gelten, keinen wesentlichen Unterschied zwischen  $\square$ - und  $\circ$ -Öffnung (s. a. Abb. 48).

In den Abb. 57 bis 59 geben wir noch die Intensitätsverteilung in der Symmetriepunktebene, und zwar für  $a = \frac{1}{2} ka \sin^2 \alpha_1 = 0; \pi; 2\pi$ .

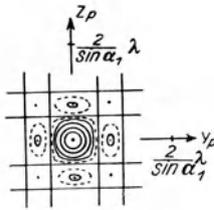


Abb. 57

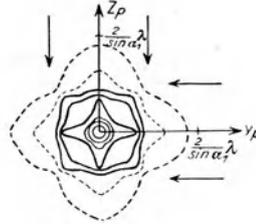


Abb. 58

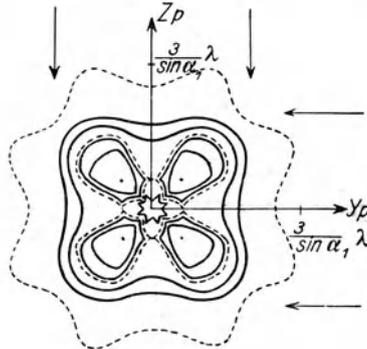


Abb. 59

Abb. 57 bis 59. Kurven gleicher Helligkeit in der Symmetriepunktebene astigmatischer Strahlenbündel, für die  $a = ka(1 - \cos \Theta) = \frac{1}{2} ka \sin^2 \alpha_1$  die Werte

$$a = 0 \text{ (Kugewelle);} \quad \pi; \quad 2\pi$$

(Abb. 57)                      (Abb. 58)      (Abb. 59)

hat. ( $2a =$  Brennlinienabstand.) Die Pfeile bezeichnen die geometrisch-optische Begrenzung des Bündels

Hier sind  $y_p$  und  $z_p$  in Einheiten  $\frac{1}{\sin \alpha_1} \lambda$  aufgetragen. Bei festem  $\alpha_1$ , z.B.  $\sin \alpha_1 = 0,1$ , können wir die drei Abbildungen auffassen als Intensitätsverteilung in der Symmetrieebene der astigmatischen Strahlenbündel vom Brennlinienabstand  $2a = 0$  (Kugewelle);  $2a = 200\lambda$ ;

$2a = 400 \lambda$ . Hierbei sind auch die Einheiten der  $y$ - und  $z$ -Richtung für alle drei Abbildungen die gleichen, also z. B.  $\frac{2}{\sin \alpha_1} \lambda = 20 \lambda$ .

Andererseits können wir die Abbildungen als zu festem  $a$ -Wert (etwa  $2a = 200 \lambda$ ), aber verschiedener Öffnung gehörig betrachten. Dann entsprechen sie den  $\square$ -Öffnungen  $\sin \alpha_1 = 0; 0,1; 0,14$ , aller-

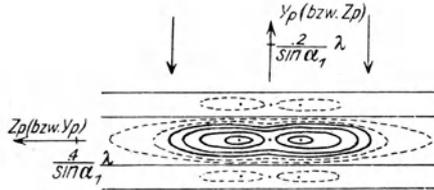


Abb. 60

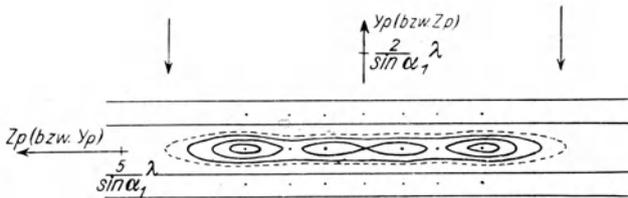


Abb. 61

Abb. 60 und 61. Kurven gleicher Helligkeit in der achsensenkreten Brennlinienebene astigmatischer Strahlenbündel, für die

$$a = ka(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} ka \sin^2 \alpha_1$$

die Werte  $\pi$  (Abb. 60) bzw.  $2\pi$  (Abb. 61) hat. ( $2a =$  Brennlinienabstand.) Die Pfeile bezeichnen die geometrisch-optische Begrenzung der Brennlinien

dings in verschiedenem linearen Maßstabe, da ja jetzt  $\frac{2}{\sin \alpha_1} \lambda$  den Werten  $\infty; 20 \lambda; 14,14 \lambda$  entspricht. (Mit Abnahme der Öffnung geht die Intensitätsverteilung jeder beliebigen Welle mehr und mehr in die einer Kugelwelle gleicher Öffnung über.)

Die Abb. 60 und 61 zeigen die Intensitätsverteilung in den Brennlinienebenen für  $a = \frac{1}{2} ka \sin^2 \alpha_1 = \pi$  bzw.  $2\pi$ . Auch sie können aufgefaßt werden als zu gleichem  $\alpha_1$  oder aber zu gleichem

Brennlinienabstand  $2a$  gehörig. Hierbei gilt das gleiche wie oben bei den Abb. 57 bis 59.

Die in den Abb. 57 bis 61 eingezeichneten Pfeile geben die geometrisch-optische Begrenzung an. In der Symmetriepunktsebene erscheint sie auch wellentheoretisch angedeutet insofern, als die Linien gleicher Helligkeit hier etwa quadratische Form annehmen. Außerdem erkennt man auch, daß die den Brennlinien parallelen Richtungen ausgezeichnet sind.

Die Brennpunktsebene der Kugelwelle entspricht sowohl der Symmetriepunkts- als auch den beiden Brennliniensebenen der astigmatischen Strahlenbündel. Diese Analogie erkennt man beim Betrachten der Abb. 57 sehr deutlich. So treten z. B. die Linien voller Dunkelheit, die in den Brennliniensebenen der astigmatischen Strahlenbündel einmal der  $z$ -Achse, einmal der  $y$ -Achse parallel sind, in der Brennpunktsebene der Kugelwelle gemeinsam auf.

## Zwölftes Kapitel

### Koma

#### § 70. Die Integraldarstellung des Komafehlers und einige allgemeine Betrachtungen über die Wellenfläche und ihren Tangentialechnitt

Um den Komafehler beugungstheoretisch zu behandeln, beachten wir, daß dieser nicht durch eine besondere Form der Wellenfläche bedingt ist, sondern allein durch die Begrenzung des Strahlenbündels. Wir können daher, wenn es sich nur darum handelt, einen allgemeinen Überblick über die typischen Intensitätsverhältnisse eines mit Koma behafteten Strahlenbündels zu erhalten, von den in den früheren Paragraphen gegebenen Integraldarstellungen ausgehen. Wir haben in diesen nur die Integrationsgrenzen entsprechend zu ändern.

Handelt es sich z. B. um reine Koma, wie sie etwa dadurch hervorgerufen wird, daß von einem mit der sphärischen Aberration  $\mathcal{A}s' = a \operatorname{tg}^2 \vartheta$  behafteten Strahlenbündel nur diejenigen Lichtstrahlen zur Bilderzeugung zugelassen sind, die in der — etwa kreisförmigen — Umgebung des Lichtstrahles  $\vartheta = \vartheta_0$ ;  $\varphi = 0$  liegen, so erhalten wir nach (53; 3) die Integraldarstellung

$$u_P = \left. \begin{aligned} & \frac{ik}{2\pi} \int \int \psi(\vartheta, \varphi) \\ & e^{-ik \left[ x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi + a \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} \\ & \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \end{aligned} \right\} (70; 1)$$

wo aber jetzt die Integrationsgrenzen nicht mehr wie dort  $\int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi}$  sind,

sondern etwa  $\int_{\vartheta_0 - \vartheta}^{\vartheta_0 + \vartheta} \int_{-\varphi_1(\vartheta)}^{+\varphi_1(\vartheta)}$  Die Grenzen von  $\varphi$  sind hier also

noch Funktionen von  $\vartheta$  (Abb. 62).  $\vartheta_0$  setzen wir als  $\leq 45^\circ$  voraus<sup>1)</sup>.

Wir führen hier entsprechend (26; 1) neue Integrationsvariable ( $\delta, \chi$ ) ein (Abb. 63) durch die Transformationsgleichungen

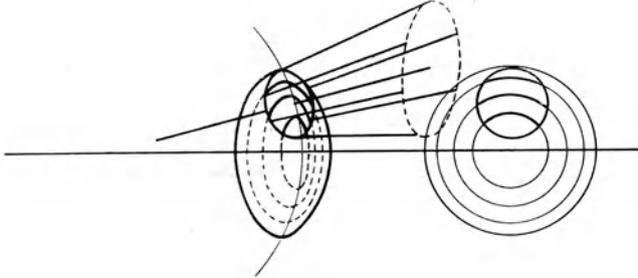


Abb. 62. Komafehler und geometrisch-optische Begrenzung des Strahlenbündels

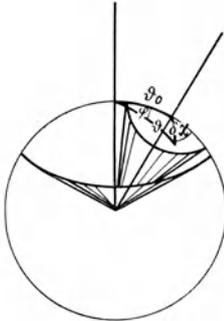


Abb. 63. Beziehung zwischen den Variablen  $\vartheta, \varphi$  und  $\delta, \chi$

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \cos \delta - \sin \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi,$$

$$\sin \vartheta \sin \varphi = \sin \delta \sin \chi,$$

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \frac{1}{\sin \vartheta_0} (\cos \delta - \cos \vartheta_0 \cos \vartheta),$$

$$= \sin \vartheta_0 \cos \delta + \cos \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi. \quad (70; 2)$$

Mit diesen geht (1) über in

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \psi_1(\delta, \chi) e^{-ik[\dots]} \sin \delta \, d\delta \, d\chi,$$

wo noch

$$[\dots] = \left[ x_P \cos \vartheta_0 \cos \delta - x_P \sin \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi + y_P \sin \vartheta_0 \cos \delta \right. \\ \left. + y_P \cos \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi + z_P \sin \delta \sin \chi + a \cos \vartheta_0 \cos \delta \right. \\ \left. - a \sin \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi + \frac{a}{\cos \vartheta_0} (\cos \delta - \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi)^{-1} \right].$$

Wir führen nun folgende Koordinatentransformation ein (Abb. 64):

$$\left. \begin{aligned} (x_P + a) \cos \vartheta_0 + y_P \sin \vartheta_0 &= x'_P, \\ -(x_P + a) \sin \vartheta_0 + y_P \cos \vartheta_0 &= y'_P, \\ z_P &= z'_P. \end{aligned} \right\} \quad (70; 3)$$

<sup>1)</sup> Dies geschieht, damit der bei den nachfolgenden Reihenentwicklungen auftretende Faktor  $\operatorname{tg} \vartheta_0 \leq 1$  ist.



Die hierzu gehörigen Wellenflächen sind nach (48; 8)

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \{ [\operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi + 2 \sin^2 \delta \\ &\quad + 2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \delta \cos^2 \chi] \sin \delta \cos \chi + \operatorname{const} \} \cos \delta \\ \eta'' &= -a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \left\{ \operatorname{tg} \vartheta_0 (1 + \cos^2 \delta + \sin^2 \chi) \right. \\ &\quad + \frac{\sin \delta}{\cos \chi} (1 + 2 \cos^2 \delta \cos^2 \chi) \\ &\quad \left. + \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi (3 - 2 \sin^2 \delta \cos^2 \chi) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{const} \right\} \sin \delta \cos \chi \\ \xi'' &= a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \{ [\operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \delta \cos \chi - 2 \cos^2 \delta \\ &\quad + 2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \delta \cos^2 \chi] \sin \delta \cos \chi + \operatorname{const} \} \sin \delta \sin \chi. \end{aligned} \right\} (70; 8)$$

Im Schnitt  $\chi = 0; \pi$  (Tangentialschnitt) wird  $\xi'' = 0$

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \left\{ 2 \frac{\sin^3 \delta}{\cos^2 \vartheta_0} + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin^2 \delta + \operatorname{const} \right\} \cos \delta, \\ \eta'' &= a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \left\{ 2 \frac{\sin^3 \delta}{\cos^2 \vartheta_0} + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin^2 \delta - 3 \frac{\sin \delta}{\cos^2 \vartheta_0} \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{tg} \vartheta_0 + \operatorname{const} \right\} \sin \delta, \end{aligned} \right\} (70; 9)$$

worin wir wieder  $\delta$  als positiver und negativer Werte fähig ansehen müssen, da wir die durch  $\cos \chi = \pm 1$  für  $\chi = 0; \pi$  bedingten  $\pm$ -Zeichen in (9) fortgelassen haben.

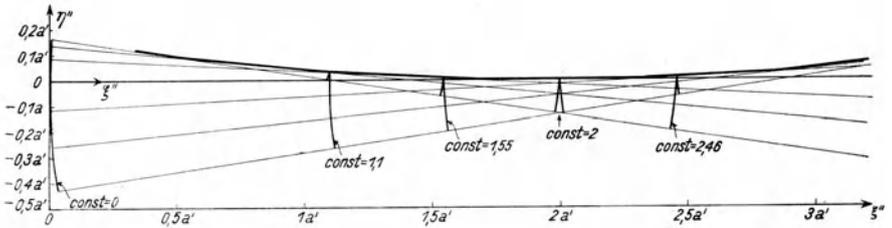


Abb. 65. Wellenflächen und Tangentialschnitt der Kaustik eines Strahlenbündels mit Komafehler

Wir verzichten hier darauf, diese Gleichungen eingehend allgemein zu diskutieren, und begnügen uns damit, in Abb. 65 nach (9) für den speziellen Fall  $\vartheta_0 = 45^\circ$  den Tangentialschnitt durch das Strahlenbündel darzustellen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Eingezeichnet sind außerdem die Schnittkurven (mit der Tangentialebene) der Wellenflächen, für die  $\operatorname{const} = 0; 1,1; 1,55; 2; 2,46$  ist, sowie der Kaustik.

Man erkennt die für den Komafehler typische Gestalt der betreffenden Schnittkurven, besonders, wenn wir Abb. 65 noch mit Abb. 64 vergleichen und beachten, daß es sich in Abb. 65 (bei  $\text{const} = 0$ ) um diejenige Wellenfläche handelt, die die  $y''$ -Achse im Schnitt mit der  $x''$ -Achse (Abb. 64) berührt. Auf der Seite  $y'' > 0$  ist sie gegenüber der Seite  $y'' < 0$  sehr stark zusammengeschrumpft. Steht doch dort (für  $\delta < 0$ ) nur der Raum zwischen dem Hauptstrahl ( $\vartheta = \vartheta_0$ ) und der (in Abb. 64 eingezeichneten) kaustischen Kurve zur Verfügung.

Fragen wir noch nach den Schnittpunkten  $x''_0$  der in der Tangentialebene verlaufenden Strahlen mit dem Hauptstrahl ( $\vartheta = \vartheta_0$ , also  $\delta = 0$ ), so erhalten wir diese wegen

$$x''_0 = \xi'' - \frac{\eta''}{\sin \delta} \cos \delta,$$

wenn wir hier für  $\xi''$ ,  $\eta''$  die Werte aus (9) einsetzen, zu

$$x''_0 = 2 a' \text{tg}^2 \vartheta_0 \cos \delta + 3 a' \frac{\text{tg} \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0} \sin \delta \cos \delta. \quad (70; 10)$$

Für  $\delta = 0$  geht dies über in

$$(x''_0)_{\delta=0} = 2 a' \text{tg}^2 \vartheta_0. \quad (70; 11)$$

Dies ist der zum Elementarbündel gehörige tangentielle Bildpunkt, so daß

$$\begin{aligned} x''_0 - (x''_0)_{\delta=0} &= \Delta t' = 3 a' \frac{\text{tg} \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0} \sin \delta \cos \delta \\ &\quad - 2 a' \text{tg}^2 \vartheta_0 (1 - \cos \delta) \quad (70; 12) \end{aligned}$$

$$\approx 3 a' \frac{\text{tg} \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0} \cdot \delta - a' \text{tg}^2 \vartheta_0 \cdot \delta^2 - \frac{3}{2} a' \frac{\text{tg} \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0} \delta^3. \quad (70; 13)$$

Wir finden auch hier — für die Schnittpunkte der Lichtstrahlen mit dem bildseitigen Hauptstrahl — das für die Koma typische Verhalten. Für das oben gegebene Zahlenbeispiel ( $\vartheta_0 = 45^\circ$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin \delta &= -0,15 \quad -0,10 \quad -0,05 \quad 0 \quad +0,05 \quad +0,10 \quad +0,15 \\ \Delta t' &\approx -0,9 a' \quad -0,6 a' \quad -0,3 a' \quad 0 \quad +0,3 a' \quad +0,6 a' \quad +0,9 a'. \end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Überlegungen ergibt sich also, daß (6) die für den geometrisch-optischen Komafehler gültige Integraldarstellung ist.

Wir wollen noch besonders darauf hinweisen, daß für  $\chi = \pm \frac{\pi}{2}$  sich aus (8) nicht (— wie man wohl im ersten Augenblick erwartet —)  $\eta'' = 0$  ergibt, sondern

$$\eta'' = -a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin^2 \delta. \quad (70; 14)$$

Die Forderung  $\chi = \pm \frac{\pi}{2}$  sagt ja nur, daß diejenigen Lichtstrahlen betrachtet werden, deren Projektion auf die  $x''y''$ -Ebene parallel zum (bildseitigen) Hauptstrahl des Bündels verläuft. Es verlangt aber nicht, daß die Strahlen in der durch den Hauptstrahl senkrecht zur  $x''y''$ -Ebene gelegten Ebene liegen. Daß  $\eta'' \neq 0$  ist, zeigt vielmehr, daß jene Strahlen nicht in dieser Ebene verlaufen, daß also die Wellenflächen der zugehörigen ebenen Wellen [in (6)] die Wellenflächen unseres Bündels in Raumkurven berühren, die gegeben sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi'' &= \operatorname{const} \cdot \cos \delta, \\ \eta'' &= -a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin^2 \delta, \\ \zeta'' &= \operatorname{const} \cdot \sin \delta. \end{aligned}$$

### § 71. Auswertung des Integralausdruckes für den Komafehler

Wir gehen jetzt dazu über, (70; 6) näherungsweise auszuwerten, und zwar werden wir dies zunächst für beliebige Aufpunkte durchführen, um den allgemeinen Weg der Auswertung zu zeigen, werden uns dann aber im Schlußresultat doch auf solche Aufpunkte beschränken, die auf einer durch den tangentialen Bildpunkt gelegten, zum bildseitigen Hauptstrahl des Bündels senkrechten Geraden der Tangentialebene liegen.

Aus dem Integralausdruck selbst erkennen wir ohne Rechnung, daß die Intensitätsverteilung zur  $x''y''$ -Ebene symmetrisch ist. Denn ersetzen wir  $z''_P$  durch  $-z''_P$  und führen als neue Integrationsvariable statt  $\chi$  den Winkel  $-\chi$  ein, so reproduziert sich der Integralausdruck vollständig, falls noch  $\psi_1(\delta, \chi) = \psi_1(\delta, -\chi)$  ist. Dies ist indessen nicht der Fall, wenn wir  $y''_P$  durch  $-y''_P$  ersetzen.

Bevor wir an die Auswertung von (70; 6) gehen, nehmen wir noch folgende Umformung vor: Wir setzen

$$\begin{aligned} a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \delta \cos^2 \chi &= 2 a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 (1 - \cos \delta) \\ &\quad - a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \delta \sin^2 \chi, \end{aligned} \quad (71; 1)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} x''_P - 2 a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 &= \bar{x}_P; & y''_P &= \bar{q}_P \cos \chi_P; \\ z''_P &= \bar{q}_P \sin \chi_P; & \chi - \chi_P &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (71; 2)$$

und wollen annehmen, daß  $\psi_1(\delta, \chi) = 1$  ist. Dann geht (70; 6) über in <sup>1)</sup>)

$$\left. \begin{aligned} u_P &= \\ \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{-ik[-\bar{x}_P(1-\cos\delta) + \bar{q}_P \sin\delta \cos\omega - f(\delta, \omega)]} \sin\delta \, d\delta \, d\omega & \\ f(\delta, \omega) &= a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \delta \sin^2(\omega + \chi_P) \\ &- a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin^3 \delta \cos(\omega + \chi_P) - a' \operatorname{tg}^3 \vartheta_0 \sin^3 \delta \cos^3(\omega + \chi_P). \end{aligned} \right\} \quad (71; 3)$$

Der Aufpunkt ist jetzt auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen Nullpunkt im (Gaußschen) tangentialen Bildpunkt liegt, dessen  $x$ -Achse wie vorher mit dem bildseitigen Hauptstrahl zusammenfällt, und dessen  $y$ -Achse in der Tangentialebene liegt. Der Punkt ( $\bar{x} = 0$ ;  $\bar{y} = 0$ ;  $\bar{z} = 0$ ) ist also der tangentielle Bildpunkt des unter dem Winkel  $\vartheta_0$  zur Achse des optischen Systems geneigten Elementarbündels. Wir schreiben von jetzt ab wieder statt  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{q}$  die Buchstaben  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $q$ .

Wir beschränken uns auf solche Aufpunkte, für die

$$\left. \begin{aligned} x_P \Theta^4 &\ll 6 \lambda; & q_P \Theta^3 &\ll \frac{3}{2} \lambda, \\ \text{und nehmen weiter an, daß} & & & \\ a' \Theta^4 &\ll \frac{3}{4} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (71; 4)$$

Wir können dann  $\sin \delta$  und  $\cos \delta$  nach Potenzen von  $\delta$  entwickeln und mit den jeweils ersten Gliedern abbrechen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{ik \frac{1}{2} x_P \delta^2} e^{-ik q_P \delta \cos \omega} \\ &e^{-ik[-a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \delta^2 \sin^2(\omega + \chi_P) + a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \delta^3 \cos(\omega + \chi_P) + a' \operatorname{tg}^3 \vartheta_0 \delta^3 \cos^3(\omega + \chi_P)]} \\ &\sin \delta \, d\delta \, d\omega. \end{aligned} \quad (71; 5)$$

Wir entwickeln weiter die Exponentialfunktion mit Ausnahme des Faktors  $e^{-ik q_P \delta \cos \omega}$  in eine Potenzreihe, und zwar  $e^{ik \frac{1}{2} x_P \delta^2}$  getrennt von den übrigen den Winkel  $\omega$  enthaltenden Faktoren.

<sup>1)</sup> In (3) ist ein Phasenfaktor ( $e^{-ik(x'_P + 2a')}$ ) vernachlässigt.

Es wird

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\vartheta} \left\{ \left( 1 + ik \frac{1}{2} x_P \delta^2 - \frac{1}{8} k^2 x_P^2 \delta^4 + \dots \right) \int_0^{2\pi} e^{-ik\varrho_P \delta \cos \omega} \right. \\ \left. \begin{aligned} &< 1 + ik a' [\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \delta^2 (\sin^2 \omega \cos^2 \chi_P \\ &+ 2 \sin \omega \cos \omega \sin \chi_P \cos \chi_P + \cos^2 \omega \sin^2 \chi_P) \\ &- \operatorname{tg} \vartheta_0 \delta^3 (\cos \omega \cos \chi_P - \sin \omega \sin \chi_P) \\ &- \operatorname{tg}^3 \vartheta_0 \delta^3 (\cos^3 \omega \cos^3 \chi_P - 3 \cos^2 \omega \sin \omega \cos^2 \chi_P \sin \chi_P \\ &+ 3 \cos \omega \sin^2 \omega \cos \chi_P \sin^2 \chi_P - \sin^3 \omega \sin^3 \chi_P)] \\ &- \frac{1}{2} k^2 a'^2 [\operatorname{tg}^4 \vartheta_0 \delta^4 (\sin^4 \omega \cos^4 \chi_P \\ &+ 6 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sin^2 \chi_P \cos^2 \chi_P + \cos^4 \omega \sin^4 \chi_P \\ &+ 4 \sin^3 \omega \cos \omega \sin \chi_P \cos^3 \chi_P \\ &+ 4 \sin \omega \cos^3 \omega \sin^3 \chi_P \cos \chi_P) + \dots] \\ &+ \dots \rangle d\omega \} \delta d\delta. \end{aligned} \right. \quad (71; 6)$$

Lassen wir die durch ... angedeuteten Glieder fort, so heißt dies, daß wir die Größen  $x_P$  und  $a'$  außer durch (4) noch weiter einschränken durch die Bedingungen

$$\frac{1}{2} k x_P \Theta^2 < 1; \quad k a' \Theta^2 < 1, \quad \text{d. h.} \quad x_P \Theta^2 < \frac{\lambda}{\pi}; \quad a' \Theta^2 < \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (71; 7)$$

Gelten diese stark einschränkenden Bedingungen nicht, so müssen noch weitere Glieder der Entwicklung berücksichtigt werden. Wir wollen uns hier indessen auf die hingeschriebenen Glieder beschränken, um die schon so recht unhandlichen Formeln nicht noch weiter zu komplizieren.

In (6) läßt sich die Integration nach  $\omega$  durchführen. Wir wollen dies hier nur für den speziellen Fall tun, daß der Aufpunkt in der Tangentialebene liegt, daß also  $\chi_P = 0$  bzw.  $\pi$  ist, obwohl die Durchführung der Integration auch für  $\chi_P \neq 0$  (bzw.  $\pi$ ) keine wesentliche Erschwerung bedeutet. Es wird dann  $\sin \chi_P = 0$ ;  $\cos \chi_P = \pm 1$ , wo das +-Zeichen für  $y_P > 0$ , das -Zeichen für  $y_P < 0$  gilt. Das Integral mit  $\omega$  geht jetzt über in

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\varrho_P \delta \cos \omega} \left\langle 1 + ik a' [\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \delta^2 \sin^2 \omega \mp \operatorname{tg} \vartheta_0 \delta^3 \cos \omega \right. \\ \left. \mp \operatorname{tg}^3 \vartheta_0 \delta^3 \cos^3 \omega] - \frac{1}{2} k^2 a'^2 \operatorname{tg}^4 \vartheta_0 \delta^4 \sin^4 \omega \right\rangle d\omega. \quad (71; 8)$$

Nun ist nach (A; 20)

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta \cos \omega} \sin^2 \omega d\omega = 2\pi \frac{J_1(\eta)}{\eta},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta \cos \omega} \cos \omega d\omega = -2\pi i J_1(\eta),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta \cos \omega} \cos^3 \omega d\omega = -2\pi i \left( J_1(\eta) - \frac{1}{\eta} J_2(\eta) \right),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\eta \cos \omega} \sin^4 \omega d\omega = 6\pi \frac{J_2(\eta)}{\eta^2},$$

so daß mit  $k_{QP} \delta = \eta'$  das Integral (8) den Wert annimmt

$$2\pi \left\{ J_0(\eta') + i k a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \delta^2 \frac{J_1(\eta')}{\eta'} \mp k a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \delta^3 J_1(\eta') \right. \\ \left. \mp k a' \operatorname{tg}^3 \vartheta_0 \delta^3 \left( J_1(\eta') - \frac{1}{\eta'} J_2(\eta') \right) - \frac{3}{2} k^2 a'^2 \operatorname{tg}^4 \vartheta_0 \delta^4 \frac{1}{\eta'^2} (\eta') \right\}.$$

Setzen wir dies in (6) ein und schreiben noch

$$k_{QP} \Theta = \eta; \quad \frac{1}{2} k x_P \Theta^2 = \zeta; \quad k a' \operatorname{tg} \vartheta_0 \Theta^2 = a, \quad (71; 9)$$

so erhalten wir

$$u_P = i k \frac{1}{\eta^2} \Theta^2 \int_0^{\eta} \left( 1 - i \frac{\zeta}{\eta^2} \eta'^2 - \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\eta^4} \eta'^4 + \dots \right) \left\{ J_0(\eta') + i \frac{a \operatorname{tg} \vartheta_0}{\eta^2} \eta' J_1(\eta') \right. \\ \left. \mp \frac{a \Theta}{\eta^3} \eta'^3 J_1(\eta') \mp \frac{a \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \Theta}{\eta^3} (\eta'^3 J_1(\eta') - \eta'^2 J_2(\eta')) \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}{\eta^4} \eta'^2 J_2(\eta') \right\} \eta' d\eta'. \quad (71; 10)$$

Hier läßt sich nach (A; 25 u. f.) die Integration ausführen. Wir tun dies indessen hier nur für den Fall, daß  $\zeta = 0$  ist, beschränken uns also — wie schon oben gesagt — auf solche Aufpunkte, die in der Tangentialebene auf der Geraden liegen, die im tangentialen Bildpunkt auf dem Hauptstrahl senkrecht steht.

Wir erhalten

$$(u_P)_{x_P=0} = ik\Theta^2 \left\{ \left[ \frac{J_1(\eta)}{\eta} \mp a\eta\Theta \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 2\frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) \right. \right. \\ \left. \mp a\eta \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \Theta \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 2\frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right) \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} a^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] + ia \operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right\}; \quad (71; 11)$$

$$(I_P)_{x_P=0} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Theta^4 \left\{ \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right)^2 - 2a\eta\Theta \frac{J_1(\eta)}{\eta} \left[ \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 2\frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \right. \\ \left. - 2a\eta \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \Theta \frac{J_1(\eta)}{\eta} \left[ \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 3\frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \right. \\ \left. + a^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \left[ \frac{J_2^2(\eta)}{\eta^4} - 3\frac{J_1(\eta)J_3(\eta)}{\eta^4} \right] \right\}. \quad (71; 12)$$

In (12) haben wir die im zweiten und dritten Gliede der  $\{\dots\}$  auftretenden Doppelvorzeichen dadurch fortgebracht, daß wir jetzt wegen  $\varepsilon_P = 0$

$$\eta = ky_P\Theta \quad (71; 13)$$

annehmen, so daß

$$\begin{aligned} \text{für } \chi_P = 0 \text{ zu nehmen ist } y_P > 0, \text{ also } \eta > 0, \\ \text{" } \chi_P = \pi \text{ " " " } y_P < 0, \text{ " } \eta < 0. \end{aligned}$$

Eine zahlenmäßige Berechnung auf Grund der Formel (12) für einen speziellen Fall ist bisher leider nicht erfolgt, so daß wir sie graphisch nicht veranschaulichen können. Sie allgemein zu diskutieren, dürfte kaum möglich sein. Wohl aber erkennt man, daß für  $y_P < 0$ , also auf derjenigen Seite des Hauptstrahles, die von der „Schnittkurve der Tangentialebene mit der kaustischen Fläche“ abgewandt ist, eine Intensitätsverstärkung gegenüber den Werten  $y_P > 0$  stattfindet, da die mit  $\eta$  verbundenen Klammern im allgemeinen [d. h. außer in der Nähe der Nullstellen von  $J_2(\eta)$ ] positiv sind.

Wir geben nachfolgend noch den Ausdruck für die Intensität für beliebig gelegene Aufpunkte<sup>1)</sup>, und zwar in Näherung bis einschließlich zu Gliedern der Ordnung  $\sin^8 \Theta$ .

<sup>1)</sup> J. Picht, Zeitschr. f. Instrkde. 51, 1931 (noch nicht erschienen).

Es ist

$$\begin{aligned}
 I_P = & \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ \left( \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right)^2 \right. \\
 & - 2 \alpha \eta \sin \Theta \cos \chi_P \frac{J_1(\eta)}{\eta} \left[ \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 2 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & - 6 \alpha \eta \sin \Theta \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \cos \chi_P \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \\
 & - 2 \alpha \eta \sin \Theta \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \cos^3 \chi_P \frac{J_1(\eta)}{\eta} \left[ \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} - 6 \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & + 4 \alpha \eta \operatorname{tg} \vartheta_0 \left[ 3 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 - 5 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & - 8 \alpha \eta \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos^2 \chi_P \left[ 2 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 - 3 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & + 4 \eta^2 \left[ \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 - 2 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \cdot \\
 & + 3 \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \left[ 3 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 - 5 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & - 4 \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \cos^2 \chi_P \left[ \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} + 6 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. - 15 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \\
 & + 4 \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \cos^4 \chi_P \left[ \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} + 4 \left( \frac{J_2(\eta)}{\eta^2} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. - 12 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \frac{J_3(\eta)}{\eta^3} \right] \left. \right\}. \tag{71; 14}
 \end{aligned}$$

Setzen wir hierin  $\eta = 0$  und beachten, daß nach (A; 15)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{J_n(\eta)}{\eta^n} \right) = \frac{1}{2^n n!} \tag{71; 15}$$

ist, so verschwinden alle Glieder, die  $\cos \chi_P$  oder eine Potenz von  $\cos \chi_P$  enthalten, wie dies verlangt werden muß. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (I_P)_{\bar{\eta}_P} &= 0 \\
 &= \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left\{ 1 - \frac{1}{12} \alpha \eta \operatorname{tg} \vartheta_0 - \frac{1}{8} \eta^2 - \frac{1}{16} \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \right\}. \tag{71; 16}
 \end{aligned}$$

(16) gibt also die Intensitätsverteilung längs des bildseitigen Hauptstrahles. Durch Nullsetzen der ersten Differentialquotienten erhalten wir für die Lage des Maximums auf diesem Hauptstrahl

$$\chi = -\frac{1}{3} a \operatorname{tg} \vartheta_0, \quad \text{d. h.} \quad \bar{x}_P = -\frac{2}{3} a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0. \quad (71; 17)$$

Der zugehörige Intensitätswert ist hier

$$\operatorname{Max} \left( (I_P)_{\bar{x}_P=0} \right) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin^4 \Theta \left( 1 - \frac{7}{144} a^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \right). \quad (71; 18)$$

Soll dies 80 % der Intensität der idealen Kugelwelle nicht unterschreiten, so muß

$$\left. \begin{aligned} a \operatorname{tg} \vartheta_0 &= \frac{2\pi}{\lambda} a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \Theta \leq 2,02, \\ \text{d. h.} \quad 3 a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \Theta &\leq \lambda \end{aligned} \right\} \quad (71; 19)$$

sein. Da indessen das Maximum des Hauptstrahles bei einem mit Koma behafteten Bündel nicht das absolute Maximum sein wird, so hat die Bedingung (19) nicht die gleiche Wichtigkeit wie die entsprechenden Bedingungen bei der sphärischen Aberration und dem Astigmatismus.

Der in (19) auftretende Faktor  $3 a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0$  hat eine aus Abb. 64 leicht ersichtliche geometrische Bedeutung. Ist  $K$  der Punkt, in dem der bildseitige Hauptstrahl die Kaustik berührt, und  $G$  sein Schnittpunkt mit der Gaußschen Bildebene, so ist  $\overline{GK} = 3 a' \operatorname{tg}^2 \vartheta_0$ .

Daß (14) in (12) übergeht, wenn  $\cos \chi_P = \pm 1$  und gleichzeitig  $\chi = 0$  ist, prüft man leicht nach.

## Mathematischer Anhang

Wir definieren analog zu

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (\text{A; 1})$$

$$n^*!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n n!. \quad (\text{A; 2})$$

Es ist

$$\frac{(2n)!}{n!!} = n^*!! = 2^n n!; \quad \frac{(2n+1)!}{n^*!!} = (n+1)!!, \quad (\text{A; 3, 4})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!!}{n^*!!}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{n!!}{n^*!!}. \quad (\text{A; 5, 6})$$

Da mit  $\varphi = 2\pi - \varphi'$

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi', \quad \text{also} \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} f(\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} f(2\pi - \varphi') d\varphi'$$

ist, so folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Alle Integrale, für die } f(2\pi - \varphi') = -f(\varphi') \\ \text{ist, verschwinden in den Grenzen} \end{array} \right\} \int_0^{2\pi} \quad (\text{A; 7})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{während für } f(2\pi - \varphi') = +f(\varphi') \text{ sich ergibt:} \\ \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\pi} f(\varphi) d\varphi. \end{array} \right\} \quad (\text{A; 8})$$

Da ferner mit  $\varphi = \pi - \varphi'$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi', \quad \text{also} \quad \int_0^{\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi/2} f(\pi - \varphi') d\varphi'$$

ist, so folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Alle Integrale, für die } f(\pi - \varphi') = -f(\varphi') \\ \text{ist, verschwinden in den Grenzen} \end{array} \right\} \int_0^{\pi} \quad (\text{A; 9})$$

während für  $f(\pi - \varphi) = +f(\varphi)$  stets

$$\left. \int_0^{\pi} f(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi. \right\} \quad (\text{A; } 10)$$

Aus (8) und (9) zusammen folgt dann noch, daß

für  $f(\pi - \varphi) = -f(\varphi)$  auch stets  $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$  (A; 11)  
ist.

Das Integral

$$\left. \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \right\} \quad (\text{A; } 12)$$

verschwindet also sowohl, wenn

$$f(\pi - \varphi) = -f(\varphi),$$

als auch, wenn

$$f(2\pi - \varphi) = -f(\varphi),$$

und: alle Integrale, die für  $\int_0^{\pi}$  verschwinden, verschwinden auch für  $\int_0^{2\pi}$ .

Die Besselsche Funktion erster Art,  $n$ -ter Ordnung ist, wenn  $n$  ganzzahlig ist, definiert durch

$$J_n(\eta) = \left(\frac{\eta}{2}\right)^n \sum_0^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!(n+\nu)!} \quad (\text{A; } 13)$$

(Jahnke-Emde, S. 90).

Es ist

$$J_n(-\eta) = (-1)^n J_n(+\eta), \quad (\text{A; } 14)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{J_n(\eta)}{\eta^n} = \frac{1}{n*!!} = \frac{1}{2^n n!}, \quad (\text{A; } 15)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i\eta \cos \varphi} e^{i n \varphi} d\varphi = 2\pi i^n J_n(\eta), \quad (\text{A; } 16)$$

$$\int_0^{\pi} e^{i\eta \cos \varphi} \cos n \varphi d\varphi = \pi i^n J_n(\eta), \quad (\text{A; } 17)$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\eta w} (1-w^2)^{n-1/2} dw = n!! \pi \frac{J_n(\eta)}{\eta^n} \quad (\text{A; } 18)$$

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

Es ist (Jahnke-Emde, S. 171)

$$J_n(z) = \Xi \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi \, d\varphi, \quad (\text{A; } 19)$$

wo

$$\Xi = \frac{1}{2\pi} \frac{z^n}{n!!} \quad n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(z \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = 0,$$

so daß

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz \cos \varphi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = 2\pi n!! \frac{J_n(z)}{z^n}. \quad (\text{A; } 20)$$

Ferner ist wegen (7)

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz \cos \varphi} \sin^{2n+1} \varphi \cos^m \varphi \, d\varphi = 0, \quad (\text{A; } 21)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz \cos \varphi} \cos n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = 0. \quad (\text{A; } 22)$$

Durch fortgesetzte partielle Integration zeigt man leicht, daß

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta} \eta'^{n+2m+1} J_n(\eta') \, d\eta' \\ &= \eta^{n+2m+1} \sum_0^m (-2)^r \nu! \binom{m}{\nu} \frac{J_{n+r+1}(\eta)}{\eta^r}. \end{aligned} \quad (\text{A; } 23)$$

Also speziell:

$$\int_0^{\eta} \eta'^{2m+1} J_0(\eta') \, d\eta' = \eta^{2m+1} \sum_0^m (-2)^r \nu! \binom{m}{\nu} \frac{J_{\nu+1}(\eta)}{\eta^r}. \quad (\text{A; } 24)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\eta} \eta' J_0(\eta') \, d\eta' &= \eta J_1(\eta) \\ \int_0^{\eta} \eta'^3 J_0(\eta') \, d\eta' &= \eta^3 \left( J_1(\eta) - 2 \frac{J_2(\eta)}{\eta} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^5 J_0(\eta') \, d\eta' &= \eta^5 \left( J_1(\eta) - 4 \frac{J_2(\eta)}{\eta} + 8 \frac{J_3(\eta)}{\eta^2} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^7 J_0(\eta') \, d\eta' &= \eta^7 \left( J_1(\eta) - 6 \frac{J_2(\eta)}{\eta} + 24 \frac{J_3(\eta)}{\eta^2} - 48 \frac{J_4(\eta)}{\eta^3} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} (\text{A; } 25)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\eta} \eta'^2 J_1(\eta') d\eta' &= \eta^3 J_2(\eta) \\ \int_0^{\eta} \eta'^4 J_1(\eta') d\eta' &= \eta^4 \left( J_2(\eta) - 2 \frac{J_3(\eta)}{\eta} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^6 J_1(\eta') d\eta' &= \eta^6 \left( J_2(\eta) - 4 \frac{J_3(\eta)}{\eta} + 8 \frac{J_4(\eta)}{\eta^2} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^8 J_1(\eta') d\eta' &= \eta^8 \left( J_2(\eta) - 6 \frac{J_3(\eta)}{\eta} + 24 \frac{J_4(\eta)}{\eta^2} - 48 \frac{J_5(\eta)}{\eta^3} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \text{(A; 26)}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\eta} \eta'^3 J_2(\eta') d\eta' &= \eta^3 J_3(\eta) \\ \int_0^{\eta} \eta'^5 J_2(\eta') d\eta' &= \eta^5 \left( J_3(\eta) - 2 \frac{J_4(\eta)}{\eta} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^7 J_2(\eta') d\eta' &= \eta^7 \left( J_3(\eta) - 4 \frac{J_4(\eta)}{\eta} + 8 \frac{J_5(\eta)}{\eta^2} \right) \\ \int_0^{\eta} \eta'^9 J_2(\eta') d\eta' &= \eta^9 \left( J_3(\eta) - 6 \frac{J_4(\eta)}{\eta} + 24 \frac{J_5(\eta)}{\eta^2} - 48 \frac{J_6(\eta)}{\eta^3} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \text{(A; 27)}$$

Wir erwähnen noch besonders, daß die Zahlenkoeffizienten nur von  $m$  abhängen, von  $n$  also unabhängig sind.

Wir definieren

$$\left. \begin{aligned} c_n(z) &= \sum_0^n \frac{z^n}{n!}; & e_x(z) &= e^z, \\ \hat{c}_n(z) &= \sum_n^{\infty} \frac{z^n}{n!}; & \hat{e}_0(z) &= e^{-z}. \end{aligned} \right\} \text{(A; 28)}$$

Dann ist

$$e_x(z) = e^z = e_n(z) + \hat{e}_{n+1}(z).$$

Es sei

$$\hat{c}_n(\pm iz) = c_n(z) \pm i s_n(z) = \sum_0^n \frac{(iz)^n}{n!},$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} c_n(z) &= \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(2v)!}; & c_\infty(z) &= \cos z, \\ s_n(z) &= \sum_0^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^v \frac{z^{2v+1}}{(2v+1)!}; & s_\infty(z) &= \sin z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}; 29)$$

worin  $[x] =$  größte ganze Zahl  $\leq x$  bedeutet. Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} \cos z - c_n(z) &= c_\infty(z) - c_n(z) = \hat{c}_{n+1}(z), \\ \sin z - s_n(z) &= s_\infty(z) - s_n(z) = \hat{s}_{n+1}(z), \end{aligned}$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_n(z) &= \sum_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(2v)!}; & \hat{c}_0(z) &= \cos z, \\ \hat{s}_n(z) &= \sum_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v+1}}{(2v+1)!}; & \hat{s}_0(z) &= \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}; 30)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{c}_n(\pm iz) &= \hat{c}_n(z) \pm i \hat{s}_n(z) = \sum_n^{\infty} \frac{(iz)^v}{v!}, \\ e^{\pm iz} &= e_n(\pm iz) + \hat{e}_{n+1}(\pm iz). \end{aligned}$$

Es sei

$$\frac{1}{z^n} \hat{c}_n(z) = \frac{1}{z^n} \sum_n^{\infty} \frac{z^v}{v!} = \sum_0^{\infty} \frac{z^v}{(n+v)!} = \hat{E}_n(z)$$

und

$$\hat{E}_n(\pm iz) = \hat{C}_n(z) \pm i \hat{S}_n(z),$$

so daß

$$\begin{aligned} \hat{C}_n(z) &= \sum_0^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(n+2v)!} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\hat{c}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\hat{s}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \\ \hat{S}_n(z) &= \sum_0^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v+1}}{(n+2v+1)!} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\hat{s}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\hat{c}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A}; 31)$$

Es ist

$$\hat{S}_n(z) = z \hat{C}_n(z); \quad \hat{C}_n(0) = \frac{1}{n!}; \quad \hat{S}_n(0) = 0. \quad (\text{A}; 32)$$



Es ist

$$\int_0^z e^{i \zeta^2} \zeta^{2n} d\zeta = \frac{n!!}{2^n} i^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ C_u \left( z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + i S_u \left( z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \frac{n!!}{2^{n+1}} i^{n-1} \frac{e^{i z^2}}{z} f_n(-2 i z^2), \tag{A; 41}$$

$$f_n(z) = \sum_1^n \frac{z^\nu}{\nu!!}; \quad f_0(z) = 0 \quad \nu!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1),$$

$$\nu!! = \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}$$

$$f_n(iz) = g_n(z) + i h_n(z), \tag{A; 42}$$

$$\left. \begin{aligned} g_n(z) &= \sum_1^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!!}; & g_0(z) &= 0, \\ h_n(z) &= \sum_0^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!!}; & h_0(z) &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{A; 43}$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^z e^{i \zeta^2} \zeta^{2n} d\zeta \\ & \frac{n!!}{2^n} i^n \left\{ \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_u \left( z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \sin z^2 \cdot g_n(2z^2) - \cos z^2 \cdot h_n(2z^2) \right] \right. \\ & \left. + i \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_u \left( z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) - \cos z^2 \cdot g_n(2z^2) - \sin z^2 \cdot h_n(2z^2) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{A; 44}$$

Hier und in (41) sind  $S_u$  und  $C_u$  die Fresnelschen Integrale

$$C_u(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi}{2} u^2 du; \quad S_u(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi}{2} u^2 du. \tag{A; 45}$$

Da

$$\int_0^z e^{i \zeta^2} \zeta^{2n+1} d\zeta = \frac{1}{2} \int_0^{z^2} e^{i \zeta} \zeta^n d\zeta, \tag{A; 46}$$

läßt sich

$$\int_0^z e^{i \zeta^2} \zeta^{2n+1} d\zeta$$

nach (35) u. f. auswerten!

## Sach- und Namenverzeichnis

- Abbildungsfehler **49, 117, 148.**  
 Aberration, chromatische **49, 104.**  
 —, sphärische **49, 149 u. f., 177, 183, 190, 191 u. f.**  
 Aberrationskoeffizienten **164, 176, 177.**  
 Absorption **83.**  
 Äquivalenzsatz **53.**  
 Airy **54.**  
 Amplitude **1.**  
 Amplitudenfunktion  $\psi$  **76, 105 u. f., 121.**  
 Apertur **112.**  
 Aperturwinkel **107.**  
 Astigmatismus **49, 197 u. f.**  
 Auflösungsvermögen **50 u. f.**  
 Aufpunkt **30.**
- Babinetsches Theorem 47.**  
 Belegungsfaktor  $\psi$  **76, 105 u. f., 121.**  
 Berek V, **53, 70, 105, 106, 112.**  
 Beugungserscheinung **30, 37 u. f., 39, 45 u. f., 58, 61.**  
 Beziehung zwischen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  **2.**  
 — —  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{J}$  **7.**  
 — —  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{S}$  **14.**  
 — —  $I_P$ ,  $u_P$  **99 u. f.**  
 — —  $u_P$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  **135.**  
 — —  $u_P$ ,  $\mathfrak{S}$  **135.**  
 — —  $u_P$ ,  $\mathfrak{J}$  **136.**  
 Bild **48.**  
 Bildebene **55 u. f., 58, 60, 72, 83, 94, 104, 108.**  
 Bildfeldwölbung **49.**  
 Birk **58.**  
 Brechung **17 u. f., 138 u. f.**  
 Brechungsgesetz von Snellius **19.**  
 Brechungsindex **8.**
- Brechungskoeffizienten **20, 145.**  
 Brennflächen s. Kaustik.  
 Brennlinie **94, 96, 200, 219.**  
 Brennpunkt **168.**  
 Bruns **55.**
- Chromatische Aberration 49, 104.**  
 Chromatisch korrigiert **104.**  
 Cornusche Spirale **90, 93, 96 u. f., 156, 210.**
- $d_{||}$ ,  $d_{\perp}$  **19 u. f., 25, 146.**  
 $d_{\omega}$  **22.**  
 $D_y$ ,  $D_z$  **145.**  
 $\Delta$  **3.**  
 Debye **75, 88, 126.**  
 Debyesche Formel **77, 79.**  
 Definitionshelligkeit (Strehl) **159, 171, 176, 184 u. f., 204.**  
 Dielektrizitätskonstante **3, 8.**  
 div **3.**
- Ebene engster Einschnürung **199, 201, 213.**  
 Ebene Welle **9.**  
 Eikonal  $E$  **1, 44, 45, 168, 197.**  
 Einfallsebene **17.**  
 Einfallshöhe **167.**  
 Einhüllende **28.**  
 Einstellebene, Einstellung **104, 168 u. f., 179, 181, 183, 184.**  
 Elektrisches Potential  $\phi$  **5.**  
 Elementarwellen **27 u. f.**  
 Elongation **4.**  
 Energiebeziehung **23 u. f., 71 u. f., 98.**  
 Energieströmung **13 u. f.**

Enveloppe 28.  
 Epstein 47.  
 Evolutschalen 120, 122, 207.  
 Evolvente 129.  
**Farbdreieck 103.**  
 Farbgehalt 103.  
 Fermatsches Prinzip 168.  
 Fischer 191, 192, 193, 195.  
 Flächen gleicher Helligkeit 161 u. f.  
 Fraunhofersche Beugung 37 u. f., 58.  
 Frequenz 1.  
 Frequenzänderung 21.  
 Fresnelsche Beugung 37 u. f., 60, 61.  
 — Koeffizienten  $r$ ,  $d$  19 u. f., 25, 146.  
 — Zonenkonstruktion 29.  
 —sches Integral 90, 155, 176, 210.  
 — Prinzip 35.  
 Foucault 55.  
 Fouriersches Integral 33.  
**Gans V.**  
 Gaußscher Brennpunkt 158, 166, 169, 193.  
 —sches Krümmungsmaß 123.  
 —sche Lateralvergrößerung 107.  
 Geometrische Optik — Wellenoptik 43 u. f., 132 u. f.  
 Gestaltfunktion  $f$  124, 130.  
 — und Wellenflächen 150, 164, 200, 208, 224 u. f.  
 grad 3.  
 Greenscher Satz 31.  
 Grenzbedingungen 16.  
**Haberl 51.**  
 Hankelsche Funktion 32, 88.  
 Hertzscher Vektor 3 4, 6 u. f., 40, 118, 136, 140, 146.  
 Huygenssches Prinzip 27 u. f., 35 u. f., 75, 168.  
**Inhomogene Wellen 105 u. f.**  
 Inkohärenz 1, 49.  
 Intensität 13 u. f., 137.  
 Intensitätsmessung 15.  
 Intensitätsabhängigkeit von der Wellenlänge 99 u. f.  
 Interferenzfaktor 66.

Picht, Optische Abbildung

**Jahnke-Emde 203, 234, 235.**  
 Jentzsch V, 73.  
**Kaustik, Kaustikschalen, -flächen 120,**  
 122, 126, 151, 193, 199, 200, 207,  
 212, 224.  
 Kaustikvektor  $\mathfrak{K}$  126, 129.  
 Kennfläche 120, 131, 150, 164, 200,  
 208, 225.  
 Kern des Beugungsscheibchens 111.  
 Kirchhoff 30, 34 u. f., 133, 134.  
 Kirchhoffsche Formel 30 u. f., 47, 75.  
 Knoblauch 127.  
 Knochenhauer 55.  
 König V.  
 Kohärenz, Kohärenzlänge 1.  
 Koma 49, 221 u. f.  
 Konjugierte Bildebene 60.  
 Koordinatensystem 17.  
 Korrektureforderungen 177, 178, 183,  
 191, 203, 232.  
 Kreiszyylinderwelle 125.  
 Kugelwelle 10, 12, 27, 43, 48, 54 u. f.  
**Lambertsches cos-Gesetz 105, 111,**  
 115, 116.  
 v. Laue 33, 53, 134.  
 Leitfähigkeit 2.  
 Lichtfleck 30.  
 Lichtstrahlen 14, 80, 121, 124, 135,  
 196.  
 Lichtverdichtungsfaktor (Strehl) 66.  
 Lichtwegaberration 168, 170, 177, 179,  
 182, 189.  
 v. Lommel 55, 70, 73, 75.  
 Lommelsche  $U$ -Funktionen 63.  
 —  $V$ -Funktionen 69.  
 Lummer V.  
**Magnetisches Potential  $\mathfrak{M}$  5.**  
 Mandelstam 53.  
 Maximalbeträge der Fehlerkoeffizienten  
 177, 191, 203, 232.  
 Maxwellsche Gleichungen 2.  
 Methode der Sattelpunkte 192.  
 Mikroskop V, 114.  
 Mittlere Abweichung (Väisälä) 186,  
 187 u. f.  
 Monochromatisch 58.

Nebenbedingungen **3, 4, 5, 6.**  
 Nichtselbstleuchter **49** u. f.  
 Normalenvektor **122.**  
 Normalkomponenten **17.**

**Optische Einheit 41.**

**Permeabilität (magnetische) 2.**  
 Phase 1.  
 Phasenanomalie **81, 96, 160.**  
 Phasenkonstante 1.  
 Phasensprung **25, 81, 96, 160.**  
 Picht **83, 119, 125, 126, 129, 130,**  
 132, 135, 138, 146, 154, 164, 207,  
 211, 230.  
 Pointingscher Vektor  $\subseteq$  **14, 135.**  
 Polarisation, —ebene 1, **13, 17, 26.**  
 Polarisationswinkel **26.**  
 Punktvektor  $\mathfrak{P}$  **121.**

**Quellpunkt 28.**

$r_{||}, r_{\perp}$  **19, 25, 146.**  
 $r_{\omega}$  **22.**  
 $R_y, R_z$  **146.**  
 Randstrahlen **178.**  
 Rayleigh V.  
 Referenzkugel **185** u. f.  
 Reflexion **17** u. f., **138** u. f.  
 Reflexionsgesetz **19.**  
 Reflexionskoeffizienten **20, 25, 145,**  
**146.**  
 Reflexionsvermögen **24.**  
 Reiche V, **83.**  
 Richter **165, 167, 170, 178, 182,**  
**183, 189.**  
 rot **3.**  
 Rotationsparaboloid **149.**

Schatten, —raum **30, 134.**  
 Schwarzschild **73, 74, 75.**  
 Schwert **55.**  
 Schwingungsdauer 1.  
 Schwingungsgleichung **8.**  
 —, Lösung der — **32, 33, 77, 89,**  
**119** u. f., **125, 126, 129.**  
 Selbstleuchter **49** u. f.

Siedentopf V.  
 sin-Bedingung **107.**  
 Skalares Produkt **14.**  
 Snelliussches Brechungsgesetz **19.**  
 Sphärische Aberration **49, 149** u. f.  
 — — mit 1 Koeffizienten **149** u. f.,  
**170** u. f., **187.**  
 — — — 2 und mehr Koeffizienten  
**164, 178** u. f., **183, 188.**  
 — — der Zylinderwelle **191** u. f.  
 Spiegelung **17** u. f., **138** u. f.  
 Stelle engster Einschnürung **199.**  
 Strahlenaberration **165.**  
 Strahlungsdiagramm **105** u. f.  
 Straubel VI.  
 Strehl V, VI, **66, 159, 190, 204.**  
 Struve **55.**  
 Symmetrieebene **201, 213, 214, 218,**  
**220.**  
 Symmetrieforderung (Richter)  
**170** u. f., **178** u. f., **183.**  
 Symmetriepunkt bei Astigmatismus **203,**  
**213, 218.**  
 — — sphärischer Aberration **157** u. f.,  
**173** u. f.

**Tangentialer Bildpunkt 225, 227.**  
 Tangentialkomponenten **17.**  
 Torische Fläche **198.**  
 Trajektorie **127.**  
 Transversalität 1.  
 Trennungsebene **17.**

Väisälä **184, 187, 189, 190.**  
 Vakuumwellenlänge **1.**  
 Vektorprodukt **14.**  
 Verzeichnung **49.**  
 Vignettieren **54.**

**Weißgehalt 103.**  
 Wellenaberration **165, 168.**  
 Wellenfläche **28, 130, 149, 150, 164,**  
**165, 191, 197, 200, 208, 224.**  
 Wellengleichung **4, 33.**  
 Wellenlänge 1.  
 Wellenoptik — geometrische Optik  
**43** u. f., **132** u. f.

Wellenvektor  $\mathfrak{B}$  119, 122.  
 Whittaker 130.  
 Wilde 55.  
 Wilsing VI.

Zeitlicher Mittelwert 15.  
 Zonenkonstruktion (Fresnel) 28.  
 Zylinderwellen 32, 88 u. f., 125, 129,  
 191 u. f.

Auf den Seiten 164, 207 und 230 wurden Arbeiten des Verfassers zitiert, die bei Drucklegung dieses Buches noch nicht erschienen sind, sondern erst in Korrektur vorliegen. Es handelt sich um die Arbeiten:

Seite 164: Zur sphärischen Aberration optischer Systeme.

Seite 207: Zur wellentheoretischen Behandlung des Astigmatismus optischer Systeme <sup>1)</sup>.

Seite 230: Zur wellen- und beugungstheoretischen Behandlung des Komafehlers optischer Systeme.

Die Arbeiten erscheinen Anfang 1931 in der Zeitschrift für Instrumentenkunde.

<sup>1)</sup> Inzwischen erschienen: Zeitschr. f. Instrkde. 51, 19, 1931.

44. **Elektrobiologie.** Die Lehre von den elektrischen Vorgängen im Organismus auf moderner Grundlage dargestellt. Von Prof. Dr. Julius Bernstein. Mit 62 Abbildungen. Geh. 6,50 RM, geb. 8,— RM
45. **Die Physik der Röntgenstrahlen.** Von Dr. Robert Pohl. Vergriffen.
46. **Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik.** I. Band. Von Prof. Dr. F. F. Martens. Vergriffen.
47. **Mimikry und verwandte Erscheinungen.** Von Prof. Dr. Arnold Jacobi. Mit 31 zum Teil farbigen Abbildungen. Geh. 8,50 RM, geb. 10,— RM
48. **Die Entwicklung des Temperaturbegriffs im Laufe der Zeiten sowie dessen Zusammenhang mit den wechselnden Vorstellungen von der Natur der Wärme.** Von Kirstine Meyer. Aus dem Dänischen übersetzt von Irmgard Kolde und mit einem Vorwort von E. Wiedemann. Mit 21 Abbildungen. Geh. 4,50 RM, geb. 6,— RM
49. **Das Leuchten der Gase und Dämpfe mit besonderer Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten in Spektren.** Von Prof. Dr. H. Koenen. Mit 33 Abbildungen im Text und einer Tafel. Geh. 13,— RM
50. **Die Ökologie der Pflanzen.** Von Prof. Dr. O. Drude. Mit 80 eingedruckten Abbildungen. Geh. 10,— RM, geb. 12,— RM
51. **Der heutige Stand der Synthese von Pflanzenalkaloiden.** Von Dr. Hugo Bauer. Geh. 4,50 RM, geb. 6,— RM
52. **Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen.** Von Dr. G. L. de Haas-Lorentz. Von der Verfasserin ins Deutsche übersetzt. Geh. 3,50 RM
53. **Die tierische Immunität.** Von Prof. Dr. Werner Rosenthal. Mit einer Abbildung im Text. Geh. 8,— RM, geb. 10,— RM
54. **Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume.** Geometrie, Anschauung und Erfahrung. 1. Teil: Das Problem der Außenwelt. Von Prof. Dr. E. Study. 2. umgearbeitete Auflage. Geh. 3,50 RM, geb. 5,— RM
55. **Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik.** II. Band: Dynamomaschinen, Transformatoren und Apparate für drahtlose Telegraphie. Von Dr. F. F. Martens. Mit 289 Abbild. Geh. 15,— RM, geb. 17,25 RM
56. **Die Analyse des Zufalls.** Von Prof. Dr. H. E. Timerding. Mit 10 Abbildungen. Geh. 5,50 RM
57. **Allgemeine Physiologie des Todes.** Von Dr. Alexander Lipschütz. Mit 38 Abbildungen. Geh. 6,— RM, geb. 7,50 RM
58. **Parasitismus im Tierreich.** Von Prof. Dr. Gräfin von Linden. Mit 102 Abbildungen und 7 Tafeln. Geh. 8,— RM, geb. 9,75 RM
59. **Die Entstehung der deutschen Kalisalzlager.** Von Prof. Dr. Ernst Jäneckle. 2. veränderte Aufl. Mit 30 Abbild. Geh. 4,— RM, geb. 5,50 RM
60. **Wind- und Wasserhosen in Europa.** Von Prof. Dr. Alfred Wegener. Mit 1 Titelbild und 85 Abbildungen. Geh. 10,— RM, geb. 12,— RM
61. **Geologischer Bau und Landschaftsbild.** Von Prof. Dr. Karl Sapper. 2. Auflage. Mit 15 Abbildungen. Geh. 8,— RM, geb. 9,75 RM
62. **Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne.** Von Dr. Aloys Müller. Mit 20 Abbildungen. Geh. 5,50 RM, geb. 7,— RM
63. **Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung.** Von Prof. Dr. C. Dorno. Vergriffen.
64. **Optische Umkehrerscheinungen (Waldensche Umkehrung).** Von Prof. Dr. P. Walden. Mit 6 Abbildungen. Geh. 7,— RM, geb. 8,50 RM