

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

**E. KAMKE**  
TÜBINGEN

**R. NEVANLINNA**  
HELSINKI

**E. SCHMIDT**  
BERLIN

**F. K. SCHMIDT**  
JENA

**I. SCHUR**  
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

**K. KNOPP**  
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE  
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU  
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

---

*Sonderabdruck aus Band 42, Heft 5*

---

**H. Wendt**

**Die gordische Auflösung von Knoten**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1937

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

**E. KAMKE**  
TÜBINGEN

**R. NEVANLINNA**  
HELSINKI

**E. SCHMIDT**  
BERLIN

**F. K. SCHMIDT**  
JENA

**I. SCHUR**  
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

**K. KNOPP**  
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE  
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU  
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

---

*Sonderabdruck aus Band 42, Heft 5*

---

**H. Wendt**

**Die gordische Auflösung von Knoten**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1937

Die

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

## REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**E. Kamke**, Tübingen, Esslinger Straße 16,  
**K. Knopp**, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,  
**R. Nevanlinna**, Helsinki, Pietarink 5a,  
**E. Schmidt**, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107<sup>IV</sup>,  
**F. K. Schmidt**, Jena, Abbeanum, Helmholtzweg 1,  
**I. Schur**, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaer Straße 14.

---

---

42. Band.

## Inhalt:

5. Heft.

	Seite
Specht, W., Darstellungstheorie der Hyperoktaedergruppe . . . . .	629
Erdélyi, A., Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Zweite Mitteilung. Reihenentwicklungen . . . . .	641
Ahlfors, L. V., und H. Grunsky, Über die Blochsche Konstante . . . . .	671
Grunsky, H., Über die Zielwerte einer ganzen Funktion . . . . .	674
Wendt, H., Die gordische Auflösung von Knoten . . . . .	680
Süss, W., Über Affinminimalflächen, die gleichzeitig Minimalflächen sind . . . . .	697
Manià, B., Sopra un problema di Carleman . . . . .	700
Berwald, L., und O. Varga, Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum . . . . .	710
Berwald, L., Integralgeometrie 25. Über die Körper konstanter Helligkeit. (Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung) . . . . .	737
Stöhr, A., Eine Basis $h$ -ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen . . . . .	739
Hartogs, F., Bemerkung zu meiner Arbeit über Bairesche Funktionen . . . . .	744
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie . . . . .	745
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. IV. Un- endliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen . . . . .	767
Specht, W., Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe . . . . .	774
Berichtigungen . . . . .	780
Titel und Inhalt zum 42. Bande	

# Die gordische Auflösung von Knoten \*).

Von

H. Wendt in Dresden.

---

Ein Knoten ist ein topologisches Bild der Kreislinie im dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Den  $\mathbb{R}^3$  denken wir uns im folgenden immer durch einen „unendlich fernen“ Punkt zur dreidimensionalen Sphäre  $\mathbb{S}^3$  geschlossen. Um zu vermeiden, daß der Knoten unendlich-viele Verschlingungen aufweist, verlangen wir überdies, daß er durch eine topologische Selbstabbildung der  $\mathbb{S}^3$  in ein aus endlich vielen geradlinigen Strecken bestehendes Polygon übergeführt werden kann.

Zwei Knoten  $\mathfrak{k}$  und  $\mathfrak{k}'$  sind *gleich*, wenn es eine topologische Selbstabbildung der 3-Sphäre gibt, die  $\mathfrak{k}$  in  $\mathfrak{k}'$  überführt. So sind z. B. die beiden Kleeblattschlingen (die rechte und die linke) in diesem Sinne als gleich anzusehen.

In jeden Knoten kann man eine singularitätenfreie orientierbare Fläche einspannen <sup>1)</sup>. Diese ist einer einfach gelochten Kugel mit  $h$  Henkeln homöomorph. Der Lochrand wird von dem Knoten gebildet. Als *Geschlecht des Knotens* bezeichnet man die kleinste Henkelzahl aller Flächen  $\mathfrak{f}$ , die sich in diesen einspannen lassen. Dann und nur dann ist  $\mathfrak{k}$  in die Kreislinie ohne Selbstüberschneidungen deformierbar, wenn sein Geschlecht Null beträgt.

Knoteninvarianten, die ganze Zahlen sind, lassen sich in großer Zahl angeben. Für die Unterscheidung von Knoten haben sie freilich nur dann Wert, wenn man sie berechnen kann. Außer dem Geschlecht erwähnen wir die Minimalzahl der Doppelpunkte einer Projektion des Knotens in eine Ebene und die *Pannwitzsche Invariante* <sup>2)</sup>. Um die Pannwitzsche

---

\*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Halle als Dissertation angenommen. Sie entstand im Gedankenaustausch mit Herrn W. Hantzsche in Dresden. Die Problemstellung verdanke ich den Herren W. Threlfall und H. Seifert in Dresden, die mich auch bei der Abfassung der Arbeit **unterstützten**.

<sup>1)</sup> H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, *Math. Annalen* **110** (1934), S. 571 oder auch H. Seifert: La Théorie des nœuds, *L'enseignement math.* **35** (1936), S. 201—212. Zur Einspannung werden nur solche Flächen zugelassen, die nach einer geeigneten topologischen Selbstabbildung der  $\mathbb{S}^3$  aus endlich vielen ebenflächigen Dreiecken bestehen.

<sup>2)</sup> E. Pannwitz: Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten, *Math. Annalen* **108** (1933), S. 629.

Invariante zu erklären, spannen wir in den Knoten ein Elementarflächenstück ein. Dieses wird sich im allgemeinen selbst durchdringen, insbesondere kann der Knoten das Elementarflächenstück mehrmals durchsetzen. Die Zahl der Durchsetzungen hängt von der Art der Einspannung des Elementarflächenstückes ab. Die Minimalzahl von Durchsetzungen, die dabei vorkommt, ist die Pannwitzsche Knoteninvariante. Es gibt bisher kein Verfahren, diese Invariante in einem einzelnen Falle für einen Knoten zu ermitteln. Es steht nicht einmal fest, ob ein Knoten, dem die Pannwitzsche Invariante Null zukommt, die Kreislinie ist. Daß dies der Fall ist, behauptet das bisher unbewiesene *Dehnsche Lemma*.

Durch eine isotope Deformation der  $\mathfrak{S}^3$  gelingt es im allgemeinen nicht, den Knoten in die (unverschlungene) Kreislinie überzuführen. Dagegen ist es möglich, wenn man Selbstüberschneidungen des Knotens zuläßt. Eine Selbstüberschneidung besteht in der Ersetzung einer Überkreuzung durch eine Unterkreuzung in irgend einer ebenen Knotenprojektion (vgl. S. 682). Die natürlichste Invariante eines Knotens scheint uns nun die Minimalzahl der Überschneidungen zu sein, die notwendig sind, damit dieser der Kreislinie gleich wird. Wir bezeichnen sie als die *Überschneidungszahl  $s$  des Knotens*. Sie ist offenbar eine Invariante gegenüber topologischen Abbildungen der  $\mathfrak{S}^3$ . Im Falle der Kleeblattschlinge beträgt die Überschneidungszahl 1. Die Fig. 1 zeigt die Kleeblattschlinge vor und nach der Überschneidung. Die Überschneidungszahl Null hat nach der Definition nur die Kreislinie.

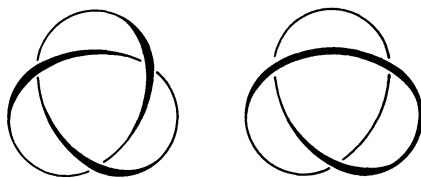


Fig. 1. Kleeblattschlinge  
vor und nach  
der Überschneidung.

Wir wollen uns im folgenden mit der Überschneidungszahl befassen.

Dazu betrachten wir die Knotenüberlagerungen und zwar zunächst die  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}_g^3$  der Sphäre  $\mathfrak{S}^3$ , die den Knoten  $\mathfrak{k}$  zur einzigen Verzweigungslinie haben (verzweigte zyklische Überlagerungsmannigfaltigkeiten<sup>3)</sup>). Diese dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}_g^3$  sind durch folgende beiden Eigenschaften eindeutig festgelegt:

1. Einem Punkte der Sphäre entsprechen  $g$  Punkte von  $\mathfrak{M}_g^3$  mit Ausnahme der Punkte des Knotens  $\mathfrak{k}$ , denen nur je ein Punkt in  $\mathfrak{M}_g^3$  zugeordnet ist, nämlich ein Punkt der Verzweigungslinie.

<sup>3)</sup> Vgl. H. Seifert: Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume, Acta math. 60 (1933), Anhang.

2. Beschreibt man in  $\mathfrak{S}^3$  einen zu  $\mathfrak{k}$  punktfremden geschlossenen Weg  $C^1$ , so sind die überlagernden Wege in  $\mathfrak{M}_g^3$  dann und nur dann geschlossen, wenn  $C^1$  mit dem Knoten eine durch  $g$  teilbare Verschlingungszahl besitzt.

Man kann zur Konstruktion von  $\mathfrak{M}_g^3$  den folgenden Weg einschlagen. Man spannt zunächst in der Sphäre  $\mathfrak{S}^3$  eine orientierbare Fläche  $\mathfrak{f}$  in den Knoten ein und schneidet  $\mathfrak{S}^3$  längs dieser Fläche auf. Dadurch erhält man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die von zwei zu  $\mathfrak{f}$  homöomorphen Flächen  $\mathfrak{f}'_1$  und  $\mathfrak{f}''_1$  berandet wird; diese grenzen längs des Knotens  $\mathfrak{k}$  aneinander. Aus  $g$  Exemplaren solcher berandeter Mannigfaltigkeiten mit den Randflächen  $\mathfrak{f}'_i$  und  $\mathfrak{f}''_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) gewinnt man nun die  $g$ -fache Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g^3$ , indem man  $\mathfrak{f}''_i$  mit  $\mathfrak{f}'_{i+1}$  identifiziert. Dabei ist  $\mathfrak{f}'_{g+1}$  gleich  $\mathfrak{f}'_1$  zu setzen.

Bohrt man aus der so gefundenen *verzweigten* Mannigfaltigkeit den Knoten  $\mathfrak{k}$  aus<sup>4)</sup>, so gelangt man zur *ausgebohrten  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerung  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  des Knotens*<sup>5)</sup>.  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  ist eine von einer Ringfläche berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Homologiegruppen der Dimension 1 von  $\mathfrak{M}_g^3$  und  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  unterscheiden sich nur durch eine freie Erzeugende (Beweis im Anhang I). Im Überlagerungsraum ist dies eine geschlossene doppelunktpunktfreie Kurve, die den Knoten gerade einmal (im Grundraum  $g$  mal) umschlingt. Sie ist in  $\mathfrak{M}_g^3$  nullhomolog, in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  jedoch ein freies Element.

Wir fragen nun:

Durch welche Eigenschaften sind Knoten, die die Überschneidungszahl  $n$  besitzen, charakterisiert? Dazu betrachten wir die ausgebohrten  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten der Sphäre  $\mathfrak{S}^3$  vor und nach einer Überschneidung und bestimmen die Gestalt ihrer Homologiegruppen.

Es werde zunächst der Fall untersucht, daß der Knoten  $\mathfrak{k}$  die Überschneidungszahl 1 besitzt. Es gibt dann zwei Punkte  $P$  und  $P'$  auf  $\mathfrak{k}$ , bei denen man die Überschneidung vornehmen kann, so daß  $\mathfrak{k}$  in die Kreislinie übergeht. Ohne die Überschneidung auszuführen, rücken wir  $P$  und  $P'$  so nahe aneinander, daß man die Punkte in eine kleine Kugel  $\mathfrak{K}$  einschließen kann. Diese soll außer den beiden durch  $P$  und  $P'$  gehenden „verschlungenen“ Teilstrecken  $l$  und  $l'$  des Knotens keine weiteren Teilstrecken von  $\mathfrak{k}$  enthalten. Eine Darstellung der Kugel  $\mathfrak{K}$  mit den Teilstrecken zeigt die Fig. 2. Nun führen wir die Überschneidung aus, die die Verschlingung von  $l$  und  $l'$  löst. Wir denken sie uns so durchgeführt, daß dadurch die Kugeloberfläche  $\mathfrak{D}$  und der Raum  $\mathfrak{R}$  der

<sup>4)</sup> Die genaue Definition des Begriffes Ausbohren findet man bei Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie, S. 225, Teubner 1934.

<sup>5)</sup> Darüber vgl. § 77 des unter <sup>4)</sup> zitierten Topologiebuches.

3-Sphäre außerhalb der Kugel  $\mathfrak{R}$  völlig unberührt bleiben. Weiter können wir  $l$  und  $l'$  nach der Überschneidung in  $\mathfrak{R}$  parallel laufend und bei fester Orientierung von  $\mathfrak{f}$  entgegengesetzt orientiert annehmen (Fig. 3).

Wir bohren nun aus  $\mathfrak{S}^3$  den Knoten aus. Für die Kugel  $\mathfrak{R}$  bedeutet dies das Ausbohren von zwei Röhren, die sich vor der Überschneidung umschlingen, nach dieser jedoch parallel verlaufen.

Die ausgebohrte Überlagerung  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  vor und nach der Überschneidung zerfällt nach dem Vorhergehenden in die Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}_g$  der ausgebohrten Vollkugel  $\mathfrak{R}$  und die Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{A}_g$  des ausgebohrten Außenraumes  $\mathfrak{A}$ , die längs der Überlagerung  $\mathfrak{D}_g$  der vierfach gelochten Kugeloberfläche  $\mathfrak{D}$  aneinandergrenzen. Die Homologiegruppe von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  bestimmt sich dann nach dem Satze über die Homologiegruppe eines zusammengesetzten Komplexes<sup>6)</sup> aus den Homologiegruppen von  $\mathfrak{R}_g$ , von  $\mathfrak{A}_g$  und vom Durchschnitt  $\mathfrak{D}_g$ .

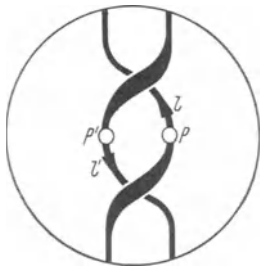


Fig. 2.

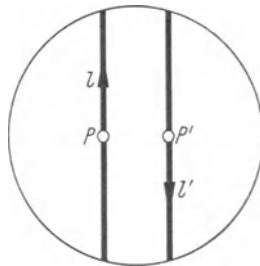


Fig. 3.

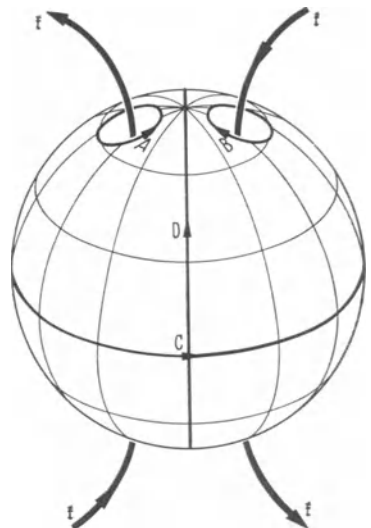


Fig. 4.

1. Wir konstruieren zunächst die Überlagerungsfläche  $\mathfrak{D}_g$ , die vor und nach der Überschneidung die gleiche ist und ermitteln ihre Homologiegruppe der Dimension 1.

Die vier Randkreise von  $\mathfrak{D}$  nennen wir  $A, A', B, B'$ . Dabei sollen  $A$  und  $A'$  bzw.  $B$  und  $B'$  immer die Ränder einer Röhre von  $\mathfrak{R}$  sein und ihre Orientierung soll so gewählt sein, daß die Kreise vor dem Ausbohren des fest orientierten Knotens mit diesem die Verschlingungszahl  $+1$  haben (Fig. 4). Die vierfach gelochte Kugeloberfläche  $\mathfrak{D}$  zerlegen wir nun durch die „wie  $A$  orientierte“ geschlossene Kurve  $C$ , den „Äquator“, in zwei zweifach gelochte Halbkugelflächen, die je die Kreise  $A, B$  bzw.  $A', B'$  enthalten. Um die  $g$ -fache zyklische Überlagerung der von den Kreisen  $A, B$  und  $C$  berandeten Halbkugelfläche zu bestimmen, gehen wir so vor:

<sup>6)</sup> S. 179 von 4).

Wir schneiden die zweimal gelochte Halbkugelfläche längs eines doppelpunktfreien Weges  $L$ , der „Übergangslinie“ auf, der seine Endpunkte auf den Kreisen  $A$  und  $B$  hat und sonst keinen Punkt mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  gemein hat. Es entsteht ein einfach gelochtes Rechteck, von dem zwei parallele Seiten dem Wege  $L$  entsprechen, während die beiden anderen die Kreise  $A$  und  $B$  sind. Der Äquator entspricht dem Lochrand des Rechtecks. Es seien  $g$  solche Rechtecke mit den Kanten  $A_i, B_i, L_i$  und den Lochrändern  $C_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) gegeben. Wir heften sie zyklisch längs der Wege  $L_i$  aneinander, so daß immer eine Seite  $L_{i-1}$  mit einer  $L_i$

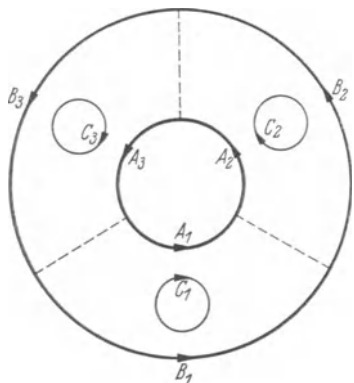


Fig. 5.

zusammenkommt. Die letzte freibleibende Kurve  $L_g$  werde an  $L_1$  geheftet. Es entsteht auf diese Weise ein  $g$ -fach gelochter Kreisring, dessen äußerer Rand von der geschlossenen Kurve  $B_1 \cdot \dots \cdot B_g$ , dessen innerer Rand von  $A_1 \cdot \dots \cdot A_g$  gebildet wird. Die Randkreise der  $g$  Löcher sind die Kurven  $C_1, \dots, C_g$ . Die Fig. 5 zeigt dies für  $g = 3$ . In dieser Fläche hat man offenbar die  $g$ -blättrige Überlagerung der zweifach gelochten Halbkugel vor sich. Jedem Punkt der Grundfläche entsprechen nämlich  $g$  Punkte in der Überlagerungs-

fläche und nur die geschlossenen Kurven der Grundfläche sind auch dort geschlossen, die mit dem Knoten eine durch  $g$  teilbare Verschlingungszahl haben.

Die vierfach gelochte Kugelfläche erhält man nun aus der zweifach gelochten Halbkugelfläche, wenn man ein zweites Exemplar an das erste längs der Kurve  $C$  anheftet. Um die  $g$ -fache Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{D}_g$  der vierfach gelochten Kugel zu finden, nehmen wir entsprechend ein zweites Exemplar der  $g$ -fachen Überlagerung der zweimal gelochten Halbkugel. Das ist wieder ein  $g$ -fach gelochter Kreisring, der wie vorhin durch Aneinanderreihen von  $g$  gelochten Rechtecken mit den Rändern  $A'_i, B'_i, C'_i, L'_i$ , ( $i = 1, \dots, g$ ) entsteht. Heftet man nun die Kurve  $C_i$  des ersten Kreisringes an  $C'_i$  des zweiten, so erhält man die gewünschte  $g$ -blättrige Überlagerungsfläche  $\mathfrak{D}_g$ . Sie besteht daher aus zwei übereinanderliegenden kongruenten  $g$ -fach gelochten Kreisringen, von denen der obere die ungestrichenen, der untere die gestrichenen Kurven  $A_i$  und  $B_i$  trägt.

Offenbar ist die Überlagerungsfläche  $\mathfrak{D}_g$  eine vierfach gelochte orientierbare Fläche vom Geschlechte (Henkelzahl)  $g - 1$ . Die vier Lochränder sind die Kurven  $A^* = A_1 \cdot \dots \cdot A_g$ ,  $B^* = B_1 \cdot \dots \cdot B_g$ ,  $A'^* = A'_1 \cdot \dots \cdot A'_g$ ,  $B'^* = B'_1 \cdot \dots \cdot B'_g$ . Für die Homologiegruppe der



Dimension 1 von  $\mathfrak{D}_g$  braucht man daher  $2(g - 1) + (4 - 1) = 2g + 1$  freie unabhängige Erzeugende. In der Grundfläche, der viermal gelochten Kugelfläche  $\mathfrak{D}$ , wählen wir als Erzeugende den Lochrand  $A$ , den Äquator  $C$  und den „Meridiankreis“  $D \sim A - A'$ .  $D$  ist eine geschlossene doppel-punktfreie Kurve, die die Kugelfläche in zwei Halbkugelflächen trennt, in denen die Löcher  $A, A'$  bzw.  $B, B'$  liegen (Fig. 4). Auf  $\mathfrak{D}_g$  wählen wir als Erzeugende  $2g + 1$  Bilder von  $A, C$  und  $D$ : nämlich die  $g$  Loch-ränder  $C_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ), die 1-Kette  $A^* = A_1 \cdot \dots \cdot A_g$  und die  $g$  Kurven  $D_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ). Die Kurve  $D_i$  ist die kürzeste geschlossene Linie von  $\mathfrak{D}_g$ , die  $C_i$  und  $C_{i+1}$  genau einmal schneidet. Sie verläuft daher „zur Hälfte“ im oberen und „zur Hälfte“ im unteren Kreisring. Ihre Orientierung ist wie die der Kurven  $A^*, B^*$  und  $C_i$  durch die in der Grund-fläche vorgeschrieben. Die Fig. 6 zeigt für den Fall  $g = 3$  den Verlauf der Erzeugenden.

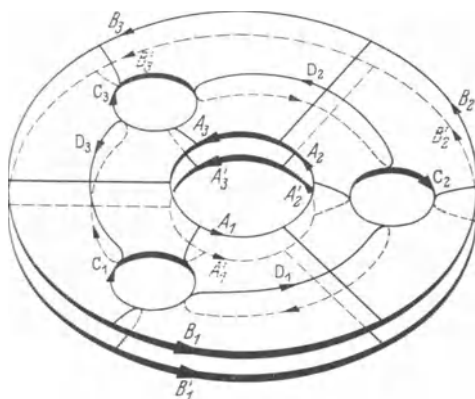


Fig. 6.

Wir behaupten nun, daß die  $2g + 1$  Kurven  $A^*, C_i, D_i$  eine Homologiebasis der Über-lagerungsfläche bilden.

Zum Beweise betrachten wir eine beliebig vorgegebene geschlossene Kurve<sup>7)</sup>  $U$ . Sie hat mit den Kurven  $C_i, D_i$  gewisse unter Umständen von Null verschiedene Schnittzahlen

$$\mathcal{S}(C_i, U) = \gamma_i, \quad \mathcal{S}(D_i, U) = \delta_i$$

Diese sind nicht voneinander unabhängig, vielmehr muß die Summe  $\sum_1^g \gamma_i$  der Schnittzahlen mit den Kurven  $C_i$  ebenso wie die Summe  $\sum_1^g \delta_i$  der Schnittzahlen mit den Kurven  $D_i$  gleich Null sein. Denn denkt man sich die Fläche längs der Kurven  $C_i$  aufgeschnitten, so zerfällt sie in zwei  $g$ -mal gelochte Kreisringe, einen unteren und einen oberen. Da die Kurve  $U$  geschlossen ist, muß sie, wenn sie etwa den oberen Kreisring durch Überschneiden einer Kurve  $C_i$  verläßt, durch Überschneiden einer Kurve  $C_j$  ( $j$  ist eine der Zahlen  $1, \dots, g$ ) mit entgegengesetzter Schnitt-

<sup>7)</sup> Die Kurve darf auch in mehrere geschlossene Teile zerfallen; genauer hätte man statt von Kurven von 1-Ketten zu reden, wie überall, wo es sich um Homologiebeziehungen handelt.

zahl wieder in ihn zurückkehren. Entsprechendes gilt für die Kurven  $D_i$ , die die Fläche in einen inneren und einen äußeren  $g$ -mal gelochten Kreisring zerlegen.

Bezeichnen wir mit  $V$  die Kurve

$$\begin{aligned} V = & \gamma_1 D_1 + \dots + (\gamma_1 + \dots + \gamma_{i-1}) D_{i-1} \\ & + (\gamma_1 + \dots + \gamma_i) D_i + \dots + (\gamma_1 + \dots + \gamma_{g-1}) D_{g-1} \\ & + \delta_1 C_2 + \dots + (\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}) C_i \\ & + (\delta_1 + \dots + \delta_i) C_{i+1} + \dots + (\delta_1 + \dots + \delta_{g-1}) C_g, \end{aligned}$$

so hat  $V$  mit den  $C_i$  und  $D_i$  die gleichen Schnittzahlen wie die Kurve  $U$ .

Es ist nämlich nach den Rechengesetzen für Schnittzahlen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(C_i, V) = & \gamma_1 \mathcal{S}(C_i, D_1) + \dots + (\gamma_1 + \dots + \gamma_{i-1}) \mathcal{S}(C_i, D_{i-1}) \\ & + (\gamma_1 + \dots + \gamma_i) \mathcal{S}(C_i, D_i) + \dots + (\gamma_1 + \dots + \gamma_{g-1}) \mathcal{S}(C_i, D_{g-1}) \\ & + \delta_1 \mathcal{S}(C_i, C_2) + \dots + (\delta_1 + \dots + \delta_{g-1}) \mathcal{S}(C_i, C_g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(D_i, V) = & \gamma_1 \mathcal{S}(D_i, D_1) + \dots + (\gamma_1 + \dots + \gamma_{g-1}) \mathcal{S}(D_i, D_{g-1}) \\ & + \delta_1 \mathcal{S}(D_i, C_2) + \dots + (\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}) \mathcal{S}(D_i, C_i) \\ & + (\delta_1 + \dots + \delta_i) \mathcal{S}(D_i, C_{i+1}) + \dots + (\delta_1 + \dots + \delta_{g-1}) \mathcal{S}(D_i, C_g). \end{aligned}$$

Nun haben von den Schnittzahlen zwischen einer Kurve  $C_i$  und einer Kurve  $C_j$  oder  $D_k$  alle den Wert Null bis auf die Schnittzahlen  $\mathcal{S}(C_i, D_{i-1})$  und  $\mathcal{S}(C_i, D_i)$ , die bei geeigneter Orientierung von  $\mathfrak{D}_g$  die Werte haben (vgl. Fig. 6):

$$\mathcal{S}(C_i, D_{i-1}) = -1, \quad \mathcal{S}(C_i, D_i) = +1,$$

oder

$$\mathcal{S}(D_i, C_{i+1}) = +1, \quad \mathcal{S}(D_i, C_i) = -1.$$

Folglich ist

$$\mathcal{S}(C_i, V) = \gamma_i, \quad \mathcal{S}(D_i, V) = \delta_i.$$

Die Differenz  $U - V$  hat dann mit allen  $C_i$  und  $D_i$  die Schnittzahl 0. Wir zeigen, daß  $U - V$  homolog einer Linearkombination der Kurven  $A^*$ ,  $C_i$  und  $D_i$  ist. Damit ist unser Ziel erreicht. Denn es ist dann  $U$  selbst homolog einer Linearkombination der Kurven  $A^*$ ,  $C_i$  und  $D_i$ .

Da die Schnittzahlen von  $U - V$  mit den  $C_i$  und  $D_i$  verschwinden, dürfen wir annehmen, daß  $U - V$  keine Schnittpunkte mit den Kurven  $C_i$  und  $D_i$  hat. Nötigenfalls müßte man dies dadurch erreichen, daß man durch eine Deformation von  $U - V$  alle Schnittpunkte von  $U - V$  mit einer Kurve  $C_i$  oder  $D_i$  in einen zusammenfallen läßt und danach  $U - V$  in zusammenhängende Teile zerreißt, die auf verschiedenen Ufern liegen. Zerschneiden wir nun die Fläche durch die Kurven  $C_i$  (bzw.  $D_i$ ) in zwei Kreisringe, so kann ein Ast von  $U - V$ , der in einem der Kreisringe beginnt, diesen nie verlassen, da die Kreisringe von den Randkreisen  $A^*$ ,

$A^{*'}, B^*, B^{*}'$  und den Kurven  $C_i$  (bzw.  $D_i$ ) begrenzt werden, also muß er einem Vielfachen der Randkreise homolog sein. Für diese gelten aber die aus den Kreisringen abzulesenden Homologien:

$$B^* \sim A^* - \sum_1^g C_i,$$

$$A^{*'} \sim A^* - \sum_1^g D_i,$$

$$B^{*'} \sim A^* - \sum_1^g C_i - \sum_1^g D_i.$$

Damit ist der Beweis beendet.

2. Wir wollen nun die Homologiegruppe der Dimension 1 der ausgebohrten Vollkugel  $\mathfrak{K}$  und die ihrer Überlagerung  $\mathfrak{K}_g$  vor und nach der Überschneidung bestimmen. Jede 1-Kette der ausgebohrten Vollkugel ist homolog einer auf der gelochten Kugeloberfläche  $\mathfrak{D}$ , denn man kann jede 1-Kette längs der Röhren auf diese drängen. Die Erzeugenden der Homologiegruppen von  $\mathfrak{D}$  können daher auch als Erzeugende der Homologiegruppe von  $\mathfrak{K}$  gewählt werden. Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{K}$  geht also aus der der Oberfläche durch Hinzunahme von Zusatzrelationen hervor. Derselbe Schluß gilt für die Überlagerung  $\mathfrak{K}_g$  der Kugel. Die Homologiegruppe der Dimension 1 von  $\mathfrak{K}_g$  erhält man durch Hinzunahme von neuen Relationen aus der der Überlagerung  $\mathfrak{D}_g$  der Kugeloberfläche.

Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{D}_g$  haben wir unter 1. als die freie abelsche Gruppe von  $2g+1$  Erzeugenden ermittelt. Um die Zusatzrelationen festzustellen, betrachten wir zunächst den Grundraum. Hier waren die Erzeugenden der Kugeloberfläche der Äquator  $C$ , der Meridiankreis  $D$  und der Lochrand  $A$ . Nach Ausführung der Überschneidung wird durch Hinzunahme des Kugellinnern offenbar nur die Relation  $D \sim 0$  hinzutreten, in der Überlagerungsmannigfaltigkeit also entsprechend

$$D_i \sim 0 \quad (i = 1, \dots, g).$$

Um die Relationen vor der Überschneidung zu ermitteln, gehen wir wie folgt vor. Wir deformieren die Kugel stetig in sich so, daß sich die Umschlingung der beiden Röhren löst, wir also dasselbe Bild erhalten wie nach der Überschneidung. Dabei kann die stetige Selbstabbildung, die die Oberfläche erleidet, noch so vorgenommen werden, daß die Lochränder  $A$  und  $B$  punktweise fest bleiben und die Kurve  $C$  und die untere Halbkugelfläche starr in sich um  $2\pi$  gedreht werden. Der Sinn der Drehung hängt ab von der Art der Umschlingung. Wir nehmen im folgenden an, daß die Umschlingung gelöst wird, wenn die Drehung im Sinne der Orientierung von  $C$  erfolgt. Nach der Deformation haben also

die Erzeugenden  $C$  und  $A$  die alte Lage wieder inne,  $D$  dagegen verläuft anders als früher. Wählen wir auf der Kugeloberfläche nach der Deformation als Erzeugende wieder den Äquator  $C$ , den Lochrand  $A$  und den Meridiankreis  $\bar{D}$ , der natürlich nicht  $\sim D$  ist, so geht die Homologiegruppe des Kugellinneren aus der der Kugeloberfläche durch Hinzunahme der Relation  $\bar{D} \sim 0$  hervor. Drücken wir nun  $\bar{D}$  durch  $D, A$  und  $C$  aus, so erhalten wir offenbar die gewünschte Zusatzrelation. Um entsprechend in der Überlagerung der Kugel vorgehen zu können, wollen wir die Selbstabbildung der Kugeloberfläche noch näher betrachten.

Die Deformation der Kugelfläche, bei der  $A$  und  $B$  punktweise festbleiben,  $C$  und die untere Halbkugelfläche im Sinne der Orientierung von  $C$  um  $2\pi$  gedreht werden, kommt im Endergebnis offenbar auf dasselbe hinaus wie die folgende Abbildung: Wir zerschneiden die Kugelfläche längs  $C$ , deformieren die obere Halbkugelfläche so, daß  $C$  im Sinne seiner Orientierung um  $2\pi$  starr in sich gedreht wird und  $A$  und  $B$  punktweise festbleiben und heften sie wieder an die untere Halbkugelfläche an. Diese Abbildung nehmen wir nun in der Überlagerungsfläche vor.

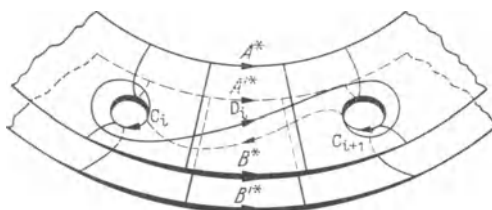


Fig. 7.

Wir schneiden also diese längs der Kurven  $C_i (i = 1, \dots, g)$  auseinander, nehmen eine Selbstabbildung des oberen Kreisringes in sich so vor, daß  $A^*$  und  $B^*$  punktweise festbleiben, während die Lochränder  $C_i$  um  $2\pi$  in sich gedreht werden,

und heften dann die beiden Kreisringe wieder aneinander. Die Kurve  $D_i$  hat nach der Deformation die in Fig. 7 angegebene Gestalt und drückt sich durch  $\bar{D}_i, C_i$  und  $C_{i+1}$  in der Weise aus:

$$\bar{D}_i \sim D_i - C_{i+1} + C_i \quad (i = 1, \dots, g).$$

Die Zusatzrelationen sind also:

$$\bar{D}_i \sim 0 \quad \text{oder} \quad D_i \sim C_{i+1} - C_i.$$

Dabei ist für  $C_{g+1}$  wieder  $C_1$  zu setzen.

3. Die Homologiegruppe der  $g$ -blättrigen Überlagerung  $\mathfrak{M}_g^3$  vor und nach der Überschneidung.

$\bar{\mathfrak{M}}_g^3$  ist aus zwei Komplexen zusammengesetzt, der Überlagerung  $\mathfrak{R}_g$  der Kugel  $\mathfrak{R}$  und der Überlagerung  $\mathfrak{A}_g$  des Außenraumes  $\mathfrak{A}$ . Ihr Durchschnitt ist die Überlagerung  $\mathfrak{O}_g$  der Kugelfläche. Die Homologiegruppen des Außenraumes und des Durchschnitts sind vor und nach der Überschneidung beidemale die gleichen. Was durch die Überschneidung geändert

wird, sind nur die Relationen, die durch die Überlagerung des Kugellinneren hinzukommen. Nach der Überschneidung haben diese Relationen die Gestalt:

$$D_i \sim 0.$$

Vorher treten zur Gruppe des Außenraumes und des Durchschnittes die  $g$ -Relationen:  $D_i \sim C_{i+1} - C_i$  hinzu. Schreibt man die Relationen nach bzw. vor der Überschneidung in der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) D_1 \sim 0, D_2 \sim 0, \dots, D_{g-1} \sim 0, \\ (1a) \sum_1^g D_i \sim 0, \\ (2) D_1 \sim C_2 - C_1, D_2 \sim C_3 - C_2, \dots, D_{g-1} \sim C_g - C_{g-1}, \\ (2a) \sum_1^g D_i \sim 0, \end{array} \right.$$

so erkennt man, daß sich die Homologiegruppen der Überlagerung nach und vor der Überschneidung dadurch unterscheiden, daß an die Stelle der  $g-1$  Relationen (1) die  $g-1$  Relationen (2) treten. Die Minimalzahl der Erzeugenden der Homologiegruppe der Dimension 1 (Zahl der Torsionskoeffizienten plus Bettische Zahl) vor der Überschneidung ist also höchstens um  $g-1$  größer als ihre Minimalzahl nach der Überschneidung. Lassen wir nämlich in der Homologiegruppe der Überlagerung nach der Überschneidung die  $g-1$  Relationen (1) fort, so kann sich die Minimalzahl der Erzeugenden höchstens um  $g-1$  erhöhen. Fügen wir nun die  $g-1$  Relationen (2) hinzu, so könnten diese so beschaffen sein, daß sich die Minimalzahl nicht senkt.

Nun ist die Homologiegruppe nach der Überschneidung die freie Gruppe von einer Erzeugenden. Der Knoten wird nämlich durch die eine Überschneidung nach Voraussetzung die Kreislinie. Nach Ausbohrung der Kreislinie aus der 3-Sphäre bleibt ein Vollring übrig, dessen ausgebohrte  $g$ -blättrige Überlagerung bekanntlich und offenbar wieder ein Vollring ist. Die Homologiegruppe der *ausgebohrten* Überlagerung  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  hat also höchstens  $g$  wesentliche Erzeugende. Gehen wir zur *verzweigten* Überlagerung  $\mathfrak{M}_g^3$  über, so hat die Homologiegruppe eine freie Erzeugende weniger als die von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  und wir haben das Ergebnis:

*Hat ein Knoten die Überschneidungszahl 1, so läßt sich die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g^1$  der  $g$ -blättrigen verzweigten Knotenüberlagerung  $\mathfrak{M}_g^3$  von  $g-1$  Elementen erzeugen.*

Nun fragen wir nach einer Bedingung, die erfüllt sein muß, damit ein Knoten sich mit höchstens  $n$  Überschneidungen auflösen läßt. Ist  $\mathfrak{k}_2$  ein Knoten mit der Überschneidungszahl 2, so geht er durch eine passende Überschneidung in einen Knoten  $\mathfrak{k}_1$  mit der Überschneidungszahl 1 über.

Genau wie vorher schließen wir die Überschneidungsstelle in eine Kugel ein und stellen die Homologiegruppe der  $g$ -blättrigen ausgebohrten Überlagerung vor und nach der Überschneidung auf. Die Homologiegruppe nach der Überschneidung, die oben die freie Gruppe von einer Erzeugenden war, ist hier eine Gruppe von höchstens  $g$  wesentlichen Erzeugenden. Wie früher schließt man daher, daß die Homologiegruppe von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  des Knotens  $\mathfrak{k}_2$  höchstens  $2g - 1$  wesentliche Erzeugende hat. Die Homologiegruppe der verzweigten  $g$ -blättrigen Überlagerung besitzt daher höchstens  $2(g - 1)$  wesentliche Erzeugende.

*Allgemein ergibt sich, daß bei einem Knoten  $\mathfrak{k}_n$  mit der Überschneidungszahl  $s = n$  die Homologiegruppe der  $g$ -blättrigen verzweigten Überlagerung höchstens  $n(g - 1)$  wesentliche Erzeugende hat.*

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken:

*Ein Knoten  $\mathfrak{k}$  läßt sich sicher nicht durch  $n$  Überschneidungen in die Kreislinie deformieren, wenn die Minimalzahl der Erzeugenden der Homologiegruppe der  $g$ -blättrigen zyklischen verzweigten Knotenüberlagerung größer als  $n(g - 1)$  ist.*

Ein Beispiel für einen Knoten, der sich durch  $n$  Überschneidungen nicht auflösen läßt, erhält man durch Aneinanderreihung von  $n + 1$

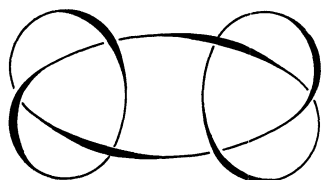


Fig. 8.

Topologische Summe von zwei Kleeblattschlingen.

Kleeblattschlingen (topologische Summenbildung). Für unsere Zwecke ist es gleichgültig, ob man dabei Rechts- oder Linkskleeblattschlingen verwendet (Fig. 8 zeigt den Fall  $n = 1$ ). Die Torsionsgruppe der zweifachen Überlagerung dieses Knotens ist die direkte Summe von  $n + 1$  zyklischen Gruppen der Ordnung 3 (vgl. Anhang II), und daher ist nach obigem seine Überschneidungszahl  $> n$ . Er läßt sich aber,

wie man sofort sieht, durch  $n + 1$  Überschneidungen auflösen. Seine Überschneidungszahl beträgt daher  $s = n + 1$ . Sie ist ebenso groß wie das Geschlecht dieses Knotens (vgl. Anhang II).

Beispiele für Knoten, die sich mit weniger Überschneidungen auflösen lassen, als ihr Geschlecht angibt, sind die Knoten  $8_{20}$  und  $9_{42}$  (Fig. 9 und 10<sup>8)</sup>) der *Alexander-Briggsschen-Knoten-Tabelle*<sup>9)</sup>, deren Geschlecht  $2^{10}$ ) ist, deren Überschneidungszahl jedoch 1 beträgt. In den

<sup>8)</sup> In den Figuren sind die Knoten durch die etwas übersichtlicheren Projektionen von Herrn Constantin Weber, Math. Annalen 110 (1934), S. 579 angegeben.

<sup>9)</sup> Diese Tabelle findet man z. B. bei K. Reidemeister: Knotentheorie, Berlin 1932.

<sup>10)</sup> H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Annalen 110 (1934), S. 579.

Figuren ist die Stelle, wo man etwa die Überschneidung anbringen kann, durch Anstreichen angegeben. Es gibt aber auch Knoten, für die die Überschneidungszahl größer als ihr Geschlecht ist. Wir wollen uns jetzt solchen zuwenden. Dazu müssen wir noch etwas näher auf die Homologiegruppen der Knotenüberlagerungen eingehen.



Fig. 9.

Knoten  $8_{20}$ : Geschlecht  $h = 2$ ,  
Überschneidungszahl  $s = 1$ .

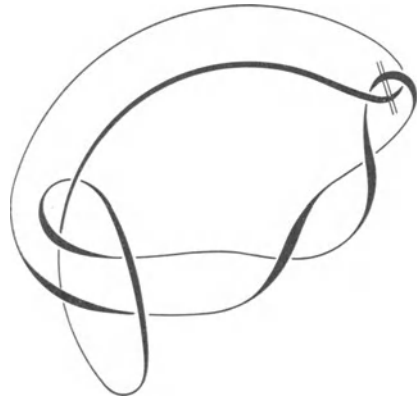


Fig. 10.

Knoten  $9_{42}$ : Geschlecht  $h = 2$ ,  
Überschneidungszahl  $s = 1$ .

Man kann zeigen<sup>11)</sup>, daß die Homologiegruppen der Dimension 1 aller Knotenüberlagerungen durch die Kenntnis einer Matrix  $\Gamma$  bestimmt sind. Diese hat, wenn man in den Knoten eine Fläche vom Geschlecht  $h$  einspannen kann,  $2h$  Zeilen und Spalten. Die  $g$ -blättrige verzweigte Überlagerung des Knotens hat dann als Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g^1$  eine Gruppe von  $2h$  Erzeugenden, deren Relationen durch die  $2h$ -reihige Matrix

$$(3) \quad \Gamma^g - (\Gamma - E)^g \quad (E = 2h\text{-reihige Einheitsmatrix})$$

gegeben sind.

Was die Matrix  $\Gamma$  anlangt, so erhält man sie am einfachsten dadurch, daß man die in den Knoten eingespannte Fläche vom Geschlecht  $h$  sich als Kreisfläche mit  $2h$  angesetzten Bändern denkt, die in der Projektion die Kreisfläche nicht überschneiden und unverdrillt erscheinen. Der Knoten ist dabei der Rand der Fläche. Auf der Fläche wählen wir  $h$  Paare konjugierter Rückkehrschnitte  $a_1, a_2; a_3,$

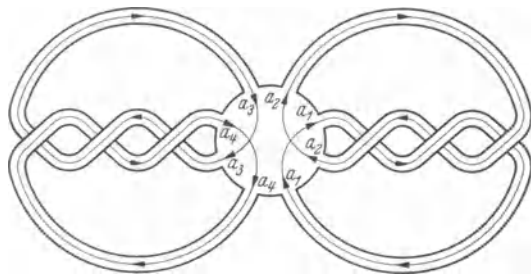


Fig. 11.

Knoten vom Geschlecht  $h = 2$ ,  
Überschneidungszahl  $s = 4$ .

<sup>11)</sup> Dies wird in der unter <sup>10)</sup> erwähnten Arbeit getan.

$a_4; \dots; a_{2h-1}, a_{2h}$ , so daß jeder ein Band durchläuft. (Fig. 11 zeigt einen Knoten, in den eine Fläche vom Geschlecht 2 eingespannt ist.) Wir orientieren sie so, daß im Schnittpunkt  $a_{2r+1}$  von  $a_{2r+2}$  von rechts nach links überquert wird. Bezeichnen wir mit  $v_{ik}$  die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen  $a_k$  von links nach rechts über  $a_i$  geht, vermindert um die Anzahl derjenigen, bei denen  $a_k$  von rechts nach links über  $a_i$  hinwegführt, so ist die Matrix:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12}, & -v_{11}, & \dots, & v_{1,2h}, & -v_{1,2h-1}, \\ v_{22}, & -v_{21}, & \dots, & v_{2,2h}, & -v_{2,2h-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{2h-1,2}, & -v_{2h-1,1}, & \dots, & v_{2h-1,2h}, & -v_{2h-1,2h-1}, \\ v_{2h,2}, & -v_{2h,1}, & \dots, & v_{2h,2h}, & -v_{2h,2h-1}. \end{pmatrix}$$

Zwischen den  $v_{ik}$  gelten die Beziehungen:

$$(4) \quad \begin{cases} v_{ik} = v_{ki} & \left( \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \neq \begin{matrix} 2r+1 \\ 2r+2 \end{matrix} \text{ und } \neq \begin{matrix} 2r+2 \\ 2r+1 \end{matrix} \right), \\ v_{2r+1,2r+2} = v_{2r+2,2r+1} + 1. \end{cases}$$

Sonst sind die  $v_{ik}$  beliebig und man kann, falls nur die Gleichungen (4) erfüllt sind, zu jedem vorgegebenen Wertsystem der  $v_{ik}$  einen Knoten finden.

Die Matrix  $\Gamma$  gibt uns weiter die *Alexandersche Polynomvariable*. Dies ist bis auf einen Faktor  $\pm x^n$  der Wert der Determinante  $|\mathbf{E} - \Gamma + x\Gamma|$ . Der Grad der Alexanderschen Polynomvariable ist höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens<sup>12)</sup>.

Wir wollen nun einen Knoten vom Geschlecht  $h$  konstruieren, dessen Überschneidungszahl  $2h$  beträgt. Nach S. 690 wissen wir, daß sich ein Knoten dann nicht mit  $2h - 1$  Überschneidungen auflösen läßt, wenn die Homologiegruppe der 2-blättrigen Überlagerung  $2h$  Torsionskoeffizienten aufweist. Die Matrix des Relationssystems für die Homologiegruppe hat dann, wie oben angegeben, die Gestalt:

$$\Gamma^2 - (\Gamma - \mathbf{E})^2 = 2\Gamma - \mathbf{E}$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$2\Gamma - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2v_{12} - 1, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -2v_{13} + 1, & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2v_{2h-1,2h} - 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -2v_{2h-1,2h} + 1 \end{pmatrix}.$$

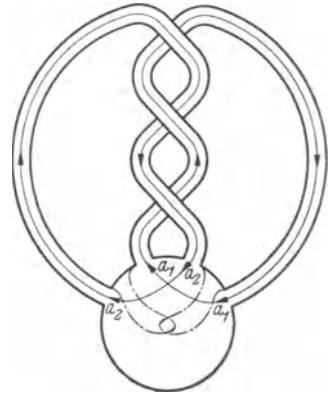
Setzen wir alle Glieder außerhalb der Diagonale der Matrix Null und  $v_{12} = v_{34} = \dots = v_{2h-1,2h} = v$  ( $v \neq 0, 1$ ), so erhält man  $2h$  Torsionskoeffizienten vom Werte  $2v - 1$ . Nehmen wir den speziellen Fall  $v = +2$ ,

<sup>12)</sup> Satz 3 von <sup>10)</sup>.



so haben wir einen Knoten, der in der zweiten Überlagerung  $2h$  Torsionskoeffizienten vom Werte 3 besitzt. (Die Figur 11 zeigt einen solchen Knoten für den Fall  $h = 2$ ). Dieser läßt sich also bestimmt nicht mit  $2h - 1$  Überschneidungen auflösen.

Man sieht aber leicht, daß er sich mit  $2h$  Überschneidungen auflösen läßt. Im Falle  $h = 1$  erkennt man dies, wenn man zunächst eine Überschneidung in der Weise durchführt, wie es die strichpunktierten Linien der Fig. 12 andeuten. Der Knoten geht dadurch in die Kleeblattschlinge über, die die Überschneidungszahl 1 besitzt. Der Knoten ist übrigens der Knoten  $9_{46}$  der Alexander-Briggsschen Knotentabelle. Der Knoten mit der Überschneidungszahl  $s = 2h$  entsteht aber offenbar durch Aneinanderreihung von  $2h$  solchen Knoten. Sein Geschlecht beträgt  $h$  (vgl. Anhang II).



Wir wollen nun noch auf eine Eigenschaft des eben betrachteten Knotens hinweisen. Durch  $2s$  Überschneidungen kann man daraus Knoten mit der Überschneidungszahl  $2(h - s)$  herleiten. Je nachdem wie man die Überschneidungen ausführt, wird das Geschlecht  $h$  oder  $h - s$  werden. Der erste Fall tritt ein, wenn man in jedem Knoten  $9_{46}$  eine Überschneidung so anbringt, daß er in die Kleeblattschlinge übergeht. Der zweite Fall erfolgt, wenn wir durch die  $2s$  Überschneidungen  $s$  Knoten  $9_{46}$  vollständig auflösen.

Fig. 12.

Knoten  $9_{46}$ : Geschlecht  $h = 1$ ,  
Überschneidungszahl  $s = 2$ .

Zum Schluß erwähnen wir noch zum Teil seit langem bekannte ungelöste Probleme der Knotentheorie. Wir denken zunächst an die Frage, wie sich Geschlecht und Überschneidungszahl zweier Knoten zu denen ihrer topologischen Summe (wofür man bisweilen auch sagt: Produkt) verhalten. Gibt es Knoten, die nicht Summe anderer Knoten sind? Ist gegebenenfalls die „Faktorzerlegung“ in solche „Primknoten“ eindeutig? In welcher Beziehung stehen die Invarianten eines Knotens, insbesondere Geschlecht  $h$ , (minimale) Überschneidungszahl  $s$ , Minimalzahl der Überkreuzungen der Knotenprojektion, Pannwitzsche Invariante zueinander? — In vielen Fragen der dreidimensionalen Topologie spielt das *Dehnsche Lemma* eine bedeutende Rolle. Es besagt, daß eine Kurve unverknotet ist, wenn man in sie ein Elementarflächenstück ohne Randsingularitäten einspannen kann, also ein Flächenstück, das von dem Knoten nicht durchsetzt wird, das aber im übrigen beliebig zerknüllt im Raume liegen kann. Wäre das Dehnsche Lemma bewiesen, so würde folgen, daß eine Kurve dann

und nur dann unverknotet ist, wenn ihre Knotengruppe die freie zyklische Gruppe ist, oder was dasselbe besagt, wenn die Knotengruppe abelsch ist. In neuester Zeit hat Herr J. H. C. Whitehead, Oxford, die interessante Tatsache bewiesen, daß, wenn das Dehnsche Lemma falsch wäre, auch die *Poincarésche Vermutung* falsch wäre, wonach die einzige einfach zusammenhängende geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit die dreidimensionale Sphäre ist.

### Anhang I.

*Satz: Die Homologiegruppe (der Dimension 1) der ausgebohrten  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  eines Knotens  $\mathfrak{k}$  unterscheidet sich von derjenigen der verzweigten  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerung  $\mathfrak{M}_g^3$  nur durch eine hinzugekommene freie Erzeugende.*

*Beweis:* Die geschlossenen Kurven  $C_1, \dots, C_r$  mögen eine Homologiebasis von  $\mathfrak{M}_g^3$  repräsentieren. Man kann diese Kurven so wählen, daß sie fremd zu  $\mathfrak{k}$  sind und mit der in  $\mathfrak{k}$  eingespannten Fläche  $\mathfrak{f}$ , mit deren Hilfe  $\mathfrak{M}_g^3$  erklärt war (S. 681), die Schnittzahl 0 haben. Hätte  $C_i$  mit  $\mathfrak{f}$  eine von 0 verschiedene Schnittzahl, so könnte man, ohne die Homologiekategorie zu ändern, ein geeignetes Vielfaches eines kleinen  $\mathfrak{k}$  einmal umschlingenden Kreises  $M$  (Meridiankreis) hinzuaddieren;  $M$  ist in  $\mathfrak{M}_g^3$  nullhomolog und hat in  $\mathfrak{f}$  bei geeigneter Orientierung mit  $\mathfrak{k}$  die Schnittzahl 1. Nun gehe man durch Ausbohren von  $\mathfrak{M}_g^3$  zu  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  über. Die in  $\mathfrak{M}_g^3$  zu  $\mathfrak{k}$  punktfremden  $r + 1$  Kurven  $C_1, \dots, C_r, M$  sind auch fremd zu einem hinreichend dünnen Bohrkern und können daher in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  angenommen werden. Wir behaupten, daß sie eine Homologiebasis von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  bilden.

Daß diese Kurven Erzeugende der Homologiegruppe von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  sind, ist klar. Besteht nun in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  eine Homologie

$$\sum \gamma_i C_i + \mu M \sim 0,$$

so folgt  $\mu = 0$ , denn die in  $\sum \gamma_i C_i + \mu M$  eingespannte Fläche (genauer 2-Kette)  $G$  hat in  $\mathfrak{M}_g^3$  mit  $\mathfrak{k}$  die Schnittzahl 0, weil sie nach Voraussetzung ganz in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  liegt:

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = 0.$$

Nach einer Hauptformel<sup>13)</sup> ist aber

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = \mathcal{S}(\sum \gamma_i C_i + \mu M, \mathfrak{f})$$

und weiter nach den Rechenregeln für Schnittzahlen

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = \mathcal{S}(\sum \gamma_i C_i, \mathfrak{f}) + \mu \mathcal{S}(M, \mathfrak{f}).$$

Das erste Glied dieser Summe ist  $= 0$  infolge unserer Wahl der  $C_i$ ,  $\mathcal{S}(M, \mathfrak{f})$  ist aber  $= 1$ , also folgt  $\mu = 0$  und  $M$  repräsentiert daher eine

<sup>13)</sup> Formel (5) S. 247 des unter <sup>4)</sup> angeführten Topologiebuches.

freie Erzeugende der Homologiegruppe von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ . Die übrigbleibende Relation  $\sum \gamma_i C_i \sim 0$  gilt in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ , also auch in  $\mathfrak{M}_g^3$ . Mithin sind die  $\gamma_i$  Vielfache der Torsionskoeffizienten  $c_i$  von  $\mathfrak{M}_g^3$ , wenn  $C_i$  ein Basiselement der Torsionsgruppe ist und Null, wenn es ein solches der Bettischen Gruppe ist. Nun ist aber auch in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  schon  $c_i C_i$  nullhomolog. Denn bezeichnet  $F_i$  die Fläche, die in  $\mathfrak{M}_g^3$  von der geschlossenen Kurve  $c_i C_i$  berandet wird, so ist

$$\mathcal{S}(c_i C_i, \mathfrak{f}) = 0,$$

andererseits gilt wieder nach der Hauptformel

$$\mathcal{S}(c_i C_i, \mathfrak{f}) = \mathcal{S}(F_i, \mathfrak{f}).$$

Wenn aber  $\mathcal{S}(F_i, \mathfrak{f}) = 0$  ist, so darf man annehmen, daß die Fläche  $F_i$  mit dem Knoten überhaupt keine Schnittpunkte hat, da gleichviele Durchsetzungen der Fläche in der einen wie anderen Richtung erfolgen müßten; diese könnte man aber durch Hinzufügen gleichvieler Meridiankurven  $M$  und  $-M$  zu  $c_i C_i$  aus  $F_i$  ausschneiden. Hiernach ist die Kurve  $c_i C_i$  schon in  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$  nullhomolog, also der Torsionskoeffizient  $c_i$  von  $\mathfrak{M}_g^3$  auch einer von  $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ , womit der Beweis geführt ist.

Einen einfacheren Beweis erhält man, wenn man den auf geschlossene Mannigfaltigkeiten verallgemeinerten *Alexanderschen Dualitätssatz* auf die verzweigte  $g$ -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit anwendet. Aus ihm folgt nämlich, daß zur Homologiegruppe der Dimension 1 nur eine neue freie Erzeugende hinzutritt, wenn man eine nullhomologe Kurve ausbohrt.

### Anhang II.

1. Wir wollen zunächst die numerischen Invarianten der zwei- und dreiblättrigen zyklischen verzweigten Überlagerung der Kleeblattschlinge ermitteln.

Nach S. 691 benötigen wir dazu die Matrix  $\Gamma$ , die wir aus dem Bändermodell, das in Fig. 13 dargestellt wird, gewinnen.

Man entnimmt ihm die Werte:

$$v_{11} = 1, \quad v_{22} = 1, \quad v_{12} = 0, \quad v_{21} = -1.$$

Daher wird

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12} & -v_{11} \\ v_{22} & -v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Invarianten der Matrix

$$2 \Gamma - E$$

liefern nach (3) die numerischen Invarianten der 2-blättrigen Überlagerung, die der Matrix

$$3 \Gamma^2 - 3 \Gamma + E$$

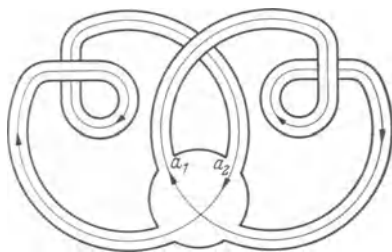


Fig. 13.

Bändermodell der Kleeblattschlinge.

die der 3-blättrigen Überlagerung. Es ergibt sich für die 2-blättrige Überlagerung ein Torsionskoeffizient vom Werte 3, für die 3-blättrige zwei vom Werte 2. In beiden Fällen ist die Bettische Zahl der Dimension 1 Null.

2. Reiht man  $n + 1$  Bändermodelle von Kleeblattschlingen aneinander, so hat die  $2(n + 1)$ -reihige Matrix  $I^*$  des entstehenden Knotens die Gestalt

$$I^* = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}$$

$n + 1$

Als Invarianten findet man damit für die 2-blättrige Überlagerung des Knotens  $n + 1$  Torsionskoeffizienten vom Werte 3. Die 3-blättrige Überlagerung hat  $2(n + 1)$  Torsionskoeffizienten vom Werte 2. Die Bettische Zahl ist in beiden Fällen Null.

Wie das Bändermodell zeigt, ist das Geschlecht dieses Knotens  $H \leq n + 1$ .

Andererseits gilt der Satz <sup>14)</sup>, daß die Zahl der wesentlichen Erzeugenden einer beliebigen zyklischen verzweigten Überlagerungsmannigfaltigkeit eines Knotens höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens ist. Angewandt auf die 3-blättrige Überlagerung liefert dies die Ungleichung

$$2H \geq 2(n + 1).$$

Daher ist  $H = n + 1$ .

3. Da der Knoten  $9_{46}$  in der 2-blättrigen Überlagerung zwei Torsionskoeffizienten hat (S. 692), läßt sich für die Aneinanderreihung von  $h$  solchen Knoten genau wie unter 2. zeigen, daß das Geschlecht  $h$  ist.

<sup>14)</sup> Satz 2 von <sup>10)</sup>.

# Physik

Ein Lehrbuch

Von

**Dr. Wilhelm H. Westphal**

a. o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Berlin

Vierte Auflage

Mit 619 Abbildungen. VII, 625 Seiten. 1937

Gebunden RM 19.80

**Inhaltsübersicht:** Einleitung. — **I. Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper:** Bewegungslehre. Die Lehre von den Kräften. Die allgemeine Gravitation. — **II. Mechanik der nichtstarrten Körper:** Die Materie. Die Elastizität der festen Stoffe. Mechanik ruhender Flüssigkeiten, ruhender Gase, bewegter Flüssigkeiten und Gase. Schwingungen und Wellen, Akustik. — **III. Wärmelehre:** Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit. — **IV. Elektrostatik. — V. Elektrische Ströme:** Elektrische Ströme in festen Leitern, in flüssigen Leitern, in Gasen. — **VI. Magnetismus und Elektrodynamik:** Magnetische Felder im Vakuum. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Elektromagnetische Geräte und Maschinen. Wechselstrom. Elektrische Schwingungen und Wellen. — **VII. Optik und allgemeine Strahlungslehre:** Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung. Geometrische Optik. Wellenoptik. Das elektromagnetische Spektrum. Temperaturstrahlung und Lumineszenz. — **VIII. Relativitätstheorie. — IX. Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle:** Quantentheorie des Lichtes. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik. Atomkerne. Positronen. Neutronen. Ultrastrahlung. Kristalle. — Schlußwort. — Namen- und Sachverzeichnis.

Das Westphalsche Lehrbuch hat es in verhältnismäßig kurzer Zeit bereits auf vier Auflagen gebracht, sicher ein Zeichen für seinen Erfolg. Eine einbändige knappe und prägnante Darstellung der Physik wie die vorliegende, die unter Berücksichtigung der modernen Vorstellungen das große Gebiet in zuverlässiger Weise behandelt, wird jeder, der sich bei der heutigen weitgehenden Spezialisierung einen Überblick über das Gesamtgebiet verschaffen will, freudig begrüßen.

Die neue Auflage ist einer tiefgehenden Umarbeitung und Verbesserung unterzogen worden. In großen Teilen ist ein ganz neues Buch entstanden. Dem Verfasser lag daran, ohne nennenswerte Vergrößerung des Umfangs durch eine knappere und dennoch leicht faßliche Darstellung Raum für eine wesentliche Vermehrung des mitgeteilten Stoffes zu gewinnen.

Die gründlichste Wandlung hat der erste Teil des Buches erfahren. Das erste und zweite Kapitel ist fast völlig neu geschrieben. Dabei hat die Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper eine ganz neue Darstellung gefunden. Für die Einführung in die Mechanik ist von dem Hilfsmittel des Vektorbegriffs Gebrauch gemacht worden. Dabei ist eine Kenntnis der eigentlichen Vektorrechnung unnötig. Es wird vom Leser nicht mehr erwartet, als daß er die wirklich höchst einfachen Begriffe des vektoriellen und des skalaren Produkts zur Kenntnis nimmt. Auf dieser Grundlage konnte dann auch die Darstellung der Elektrodynamik (6. Kapitel) an vielen Stellen verbessert und vereinfacht werden. Die grundlegenden Fortschritte der Quanten- und Kernphysik in den letzten Jahren machten es notwendig, auch das 9. Kapitel vollständig neu zu schreiben. Neu ist ferner u. a. eine kurze Darstellung der Systematik der Kristalle. Aber auch in den übrigen Kapiteln wurden große Teile neu abgefaßt, und zahlreiche Abbildungen kamen neu hinzu.

---

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

*Soeben erschienen:*     **Grundlagen und  
Methoden der Periodenforschung**

Von

**Dr. phil. Karl Stumpff**

a. o. Professor an der Universität Berlin,  
Observator am Meteorologischen Institut der Universität Berlin

Mit 41 Abbildungen im Text. VII, 332 Seiten. 1937.

RM 39.—; gebunden RM 42.—

*Inhaltsübersicht:* Reihenentwicklung und näherungsweise Darstellung empirischer Funktionen. — Praxis der Harmonischen Analyse und Synthese. — Das Periodogramm. — Die statistische Behandlung von Periodenproblemen. — Andere analytische Methoden der Periodenbestimmung. — Die physikalischen Hilfsmittel der Periodenforschung. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

---

*Vor kurzem erschienen:*

**Wahrscheinlichkeiten und Schwankungen**

Vorträge von

Professor Dr. M. Czerny, Berlin, Oberingenieur K. Franz, Siemensstadt,  
Professor Dr.-Ing. F. Lubberger, Berlin, Professor Dr. J. Bartels, Eberswalde,  
Professor Dr. R. Becker, Göttingen

Veranstaltet durch den Verband Deutscher Elektrotechniker  
Gau Berlin-Brandenburg, in Gemeinschaft mit dem Außen-  
institut der Technischen Hochschule zu Berlin

Herausgegeben von

**Dr.-Ing. F. Lubberger**

Oberingenieur der Siemens & Halske A.-G.  
und a. o. Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin

Mit 25 Textabbildungen. IV, 100 Seiten. 1937. RM 8.40

*Inhaltsverzeichnis:* **Grundbegriffe und Gesetze der Wahrscheinlichkeiten und Schwankungen.** Von Dr. M. Czerny, Professor an der Universität Berlin. — **Die Wahrscheinlichkeit in der Fertigungsüberwachung.** Von Oberingenieur K. Franz, Siemensstadt. — **Beobachtungen, Vorschriften und Theorien der Schwankungen im Fernsprechverkehr.** Von Dr.-Ing. F. Lubberger, Berlin. — **Verborgene periodische Erscheinungen.** Von Dr. J. Bartels, Professor an der Forstlichen Hochschule Eberswalde. — **Das Auftreten von Wahrscheinlichkeitsgesetzen und Schwankungsercheinungen in der Physik.** Von Dr. R. Becker, Professor an der Universität Göttingen.

---

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN