

Nach der Methode des Durchschiebens

**Über die Ermittlung
der Inneren Theilungsfehler Zweier Massstäbe**

Prof. Dr.Dziobek



ÜBER DIE ERMITTELUNG DER
INNEREN THEILUNGSFEHLER
ZWEIER MASSSTÄBE

NACH DER METHODE DES DURCHSCHIEBENS

VON

PROF. DR. DZIOBEK

ISBN 978-3-662-31820-1
DOI 10.1007/978-3-662-32646-6

ISBN 978-3-662-32646-6 (eBook)

Ueber die Ermittlung der inneren Theilungsfehler zweier Massstäbe nach der Methode des Durchschiebens.

Von Prof. Dr. Dziobek.

ERSTER ABSCHNITT.

Die Ausgleichung nach der strengen Methode der kleinsten Quadrate.

1. Einleitung.

Bei Anwendung der in der Ueberschrift genannten, von den Herren Leman und Thiesen ausgebildeten und in der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission vielfach angewendeten Methode*) werden zwei Massstäbe von gleicher Eintheilung auf alle möglichen Arten so aneinander gelegt, dass Theilstriche des einen sich beinahe in Theilstrichen des anderen fortsetzen. In jeder Lage werden die kleinen Abstände je zweier zusammenliegender Striche mikrometrisch gemessen; darauf werden nach Vollendung dieser Messungsreihe die Massstäbe um ein Intervall gegeneinander in die nächstfolgende Lage gebracht. Dann wird wieder gemessen, darauf wieder verschoben u. s. w., bis alle Lagen erschöpft und alle Messungen gemacht worden sind.

Anmerkung. Der Verfasser dieser Abhandlung hat früher längere Zeit der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission als wissenschaftlicher Hülfсарbeiter angehört. In dieser Eigenschaft hat er sich auch mit Untersuchungen und Berechnungen für Längenmessungen beschäftigt. Die vorliegende Arbeit fasst die von ihm gewonnenen Ergebnisse zusammen; sie wird daher in den von der Normal-Aichungs-Kommission herausgegebenen wissenschaftlichen Abhandlungen, für die sie in dankenswerther Weise zur Verfügung gestellt worden ist, ihren geeigneten Platz finden.

*) Vergl.: Weinstein, Handbuch der physikalischen Massbestimmungen Bd. II, pag. 274—282.

In der ersten und auch in der letzten Lage (Fig. 1a und Fig. 1b) würde nur je eine Messung stattfinden, da nur Endstriche zusammenliegen. Da aber diese beiden Messungen offenbar gar nichts besagen und durchaus zwecklos

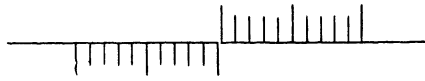


Fig. 1a.

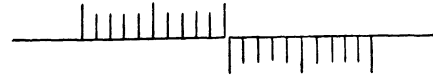


Fig. 1b.

sein würden, so werden sie selbstverständlich fortgelassen. Rechnet man sie aber dennoch der Vollständigkeit wegen hinzu, so giebt es $n + m + 1$ verschiedene Lagen und im ganzen $(n + 1)(m + 1)$ Messungen.

Um aus diesen Messungen die Theilungsfehler zu berechnen, benutzt man die von Leman und Thiesen angegebene Methode der Ausgleichung. Dabei werden aber nicht die Messungen selbst, sondern erst die aus ihnen abgeleiteten Vergleichen aneinanderliegender Intervalle, wie a und a' , b und b' als gegebene Beobachtungen zu Grunde gelegt. (Fig. 2)

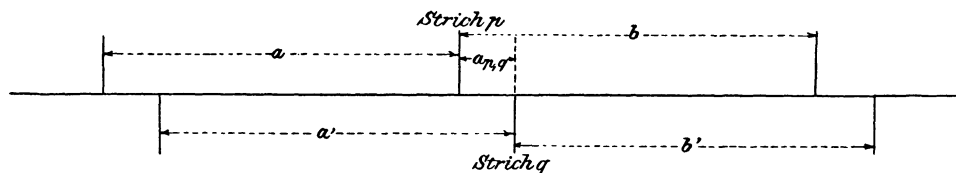


Fig. 2.

Dieses Verfahren hat den Vortheil, dass die Ausgleichung sehr einfach wird, aber auch den Nachtheil, dass die Ausgleichung nicht ganz den Anforderungen der Methode der kleinsten Quadrate gerecht wird. Denn erstens sind bei Bildung von aneinanderliegenden Intervalldifferenzen offenbar Differenzen der ursprünglichen Messungen zu bilden, und zweitens kommen hierbei solche Messungen, bei denen nur Zwischenstriche, wie p und q , vorkommen, zweimal, nämlich bei Bildung von $a - a'$ und $b - b'$ in Betracht, solche Messungen aber, bei denen Endstriche vorkommen, nur einmal. Ausserdem ist die Berechnung der mittleren oder der wahrscheinlichen Fehler der inneren Eintheilungsfehler nach der Leman-Thiesen'schen Methode*), wie sie seither auch an der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission gehandhabt worden ist, eben in Folge des Umstandes, dass man Differenzen von ursprünglichen Messungen und nicht diese selbst zu Grunde gelegt hat, mit erheblichen

*) Weinstein, l. c. pag. 279.

Fehlern belastet, da, wie ich zeigen werde, bei der strengen Ausgleichung die mittleren Fehler ganz anders und zwar durchschnittlich erheblich kleiner werden (wie es auch bei der Leman-Thiesen'schen Methode der Fall sein würde, wenn man wenigstens hinterher, d. h. bei Berechnung der mittleren Fehler, wieder zu den ursprünglichen Messungen zurückgekehrt wäre).

Die strenge Ausgleichung ist, soweit dem Verfasser bekannt, bisher allgemein noch nicht versucht worden, weil sie für zu umständlich gehalten wird. In dem praktisch wichtigsten Fall, dass $m = n$, der hier ausschliesslich untersucht worden ist, stellt sich indessen heraus, dass der Mehraufwand an Zeit und Rechnung nicht so gross ist, wie zu befürchten war, und dass die strenge Ausgleichung sehr wohl geleistet werden kann, wie das am Schlusse durchgeführte Beispiel beweist.

2. Die Messungen und die aus ihnen folgenden Bedingungsgleichungen.

Die Striche des einen Massstabes l sind von links nach rechts, die des anderen Massstabes l_1 von rechts nach links mit:

$$\text{Strich: } 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

bezeichnet worden (Fig. 3).



Fig. 3.

Dann wurde auf Stab l ein Anfangspunkt 0 und die Positivrichtung der Abscissen von links nach rechts, auf Stab l_1 ein Anfangspunkt 0_1 und die Positivrichtung von rechts nach links angenommen. Zwar wird man, wie es auch später geschehen soll, 0 und 0_1 am besten in die beiden 0 -Striche selbst legen; es ist aber zur Klarstellung des hier anzuwendenden Verfahrens besser, ihre Lage vorläufig beliebig zu lassen.

Es seien die Abscissen der

$$\text{Striche: } 0, 1, 2, 3 \dots n - 1, n.$$

$$\text{des Stabes } l: x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n.$$

$$\text{des Stabes } l_1: y_0, y_1, y_2, y_3 \dots y_{n-1}, y_n.$$

Die $2n + 1$ verschiedenen Lagen der Stäbe gegeneinander sind der Reihe nach mit:

$$\text{Lage: } \{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{2n - 1\}, \{2n\}$$

bezeichnet worden, sodass in der Lage $\{0\}$ nur die 0-Striche, in der Lage $\{1\}$ die Striche 0 von l und 1 von l_1 , sowie 1 von l und 0 von l_1 , in der Lage $\{2n-1\}$ die Striche $n-1$ von l und n von l_1 , sowie n von l und $n-1$ von l_1 und endlich in der Lage $\{2n\}$ nur die n -Striche zusammenliegen.

Man theilt die $2n+1$ Lagen der Stäbe gegeneinander am besten in drei Gruppen, nämlich:

Gruppe I, umfassend die Lagen $\{0\}$, $\{1\}$ $\{n-1\}$. Es liegen die beiden Endstriche 0 und 0 Zwischenstrichen oder auch einander (Lage $\{0\}$) gegenüber. Die anderen Endstriche, also die Striche n und n werden nicht benutzt. In einer Lage $\{i\}$, ($i=0, 1, \dots, n-1$), welche zur Gruppe I gehört, liegen einander gegenüber:

$$\begin{aligned} \text{Stab } l: \text{ Strich: } & 0, 1, 2 \dots \dots \dots i-1, i \\ \text{Stab } l_1: \text{ Strich: } & i, i-1, i-2 \dots \dots \dots 1, 0. \end{aligned}$$

Daher Anzahl der Messungen während der Lage $\{i\} = i+1$. Gesamtzahl der Messungen in Gruppe I

$$= 1 + 2 \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Gruppe II. Sie enthält nur eine Lage, die Mittellage $\{n\}$, bei welcher die Stäbe ihrer ganzen Länge nach aneinander liegen. Es liegen gegenüber:

$$\begin{aligned} \text{Stab } l: \text{ Strich: } & 0, 1, 2 \dots \dots \dots n-1, n \\ \text{Stab } l_1: \text{ Strich: } & n, n-1, n-2 \dots \dots \dots 1, 0. \end{aligned}$$

Also Anzahl der Messungen in Gruppe II

$$= n + 1.$$

Gruppe III, umfassend die Lagen $\{n+1\}$, $\{n+2\}$ $\{2n\}$. Es liegen die beiden Endstriche n und n Zwischenstrichen, oder auch einander (Lage $\{2n\}$) gegenüber. Die anderen Endstriche, also die Striche 0 und 0 werden nicht benutzt. In einer Lage $\{n+i\}$, ($i=1, 2, 3 \dots n$) liegen einander gegenüber:

$$\begin{aligned} \text{Stab } l: \text{ Strich: } & i, i+1, i+2 \dots \dots 1, n-1, n \\ \text{Stab } l_1: \text{ Strich: } & n, n-1, n-2 \dots \dots, i+1, i. \end{aligned}$$

Daher Anzahl der Messungen während der Lage $\{n+i\} = n+1-i$. Gesamtzahl der Messungen in Gruppe III

$$= n + (n-1) \dots + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Also Anzahl aller Messungen überhaupt:

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = (n + 1)^2.$$

Es sei $\{m\}$ irgend eine Lage (Fig. 4). Ferner seien p und q irgend zwei Striche von l resp. l_1 , welche bei dieser Lage einander gegenüber liegen, so ist stets:

$$p + q = m \quad \dots \dots \dots 1)$$

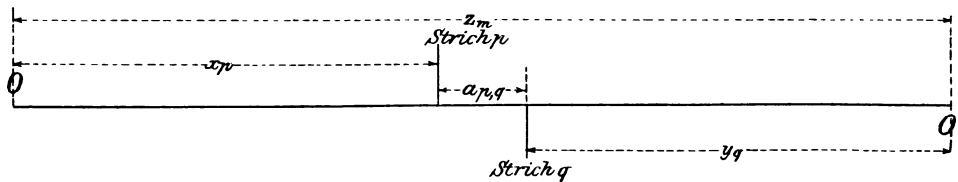


Fig. 4.

Die beiden Striche p und q liegen nicht genau gegenüber, sondern haben einen kleinen, seitlichen Abstand $a_{p,q}$, der eben zu messen ist. Es soll $a_{p,q}$ positiv genommen werden, wenn der Strich p von l links zu dem Striche q von l_1 liegt, negativ im entgegengesetzten Fall. (In Fig. 4 also $a_{p,q}$ positiv.) Ferner sei z_m der Abstand der beiden Anfangspunkte 0 und 0_1 während der Lage $\{m\}$ und zwar positiv, wenn (wie in Fig. 4) 0 links von 0_1 liegt, negativ im entgegengesetzten Fall. Dann lauten die $(n + 1)^2$ Bedingungsgleichungen des Problems:

$$x_p + y_q - z_m + a_{p,q} = 0 \quad (p, q = 0, 1, \dots \dots n; m = p + q) \quad \dots \dots 2)$$

Diese $(n + 1)^2$ Bedingungsgleichungen mit den $(n + 1)^2$ beobachteten Grössen $a_{p,q}$ sind nun auszugleichen, worauf dann aus den x_p und den y_q die inneren Eintheilungsfehler zu berechnen sind. Für letztere haben die z_m freilich gar keinen Werth; es ist aber, wenn die Ausgleichung streng bleiben soll, trotzdem nicht erlaubt, sie, wie es im Verfahren von Leman-Thiesen geschieht, schon vor der Ausgleichung durch Subtrahiren der zur selben Lage $\{m\}$ gehörenden $a_{p,q}$ zu eliminiren. Die z_m müssen vielmehr mit in die Ausgleichung hineingenommen werden.

Nach Vollendung der Ausgleichung werden die Bedingungsgleichungen 2) nicht mehr genau erfüllt sein. Es sind vielmehr die Ausdrücke

$$A_{p,q} \equiv x_p + y_q - z_m + a_{p,q} \quad \dots \dots \dots 3)$$

als übrig bleibende Beobachtungsfehler der ursprünglichen Messungen $a_{p,q}$ anzusehen.

3. Reduktion und Zusammenstellung der Messungen. Unbestimmtheiten des Problems.

Zur Vorbereitung der Ausgleichung wird man die $a_{p,q}$ zunächst nach dem folgenden Schema zu einem Quadrate zusammenstellen:

$\begin{matrix} q \\ \backslash \\ r \end{matrix}$	0	1	2		$n-2$	$n-1$	n
0	$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$		$a_{0,n-2}$	$a_{0,n-1}$	$a_{0,n}$
1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,n-2}$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,n-2}$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$n-2$	$a_{n-2,0}$	$a_{n-2,1}$	$a_{n-2,2}$		$a_{n-2,n-2}$	$a_{n-2,n-1}$	$a_{n-2,n}$
$n-1$	$a_{n-1,0}$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$		$a_{n-1,n-2}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
n	$a_{n,0}$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$		$a_{n,n-2}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$

Die $n+1$ zur Mittellage $\{n\}$ Gruppe II gehörenden $a_{p,q}$ sind dann in der Diagonale von $a_{n,0}$ bis $a_{0,n}$ enthalten (links unten nach rechts oben), während die zu einer beliebigen anderen Lage $\{m\}$ gehörenden $a_{p,q}$ in einer Parallelen zur Diagonale stehen und zwar links von ihr für die Gruppe I, rechts für die Gruppe III. Man beachte aber, dass es durchaus erlaubt ist, schon vor der Ausgleichung alle $a_{p,q}$, welche zu derselben Lage $\{m\}$ gehören, um ein und denselben (geringen) Betrag μ_m zu vermindern, resp. zu vermehren, weil dies darauf hinauskommt, dass z_m , also die zur Bestimmung der Theilungsfehler nicht nothwendige Grösse, um denselben Betrag μ_m vermehrt, resp. vermindert wird. Dies zeigen die Gleichungen 2) resp. 3) an, welche unverändert bleiben, wenn man die $a_{p,q}$ durch $a_{p,q} \mp \mu_m$, die z_m aber durch $z_m \pm \mu_m$ ersetzt. Diesen Umstand kann man benutzen, um die $a_{p,q}$ zu „reduzieren“, z. B. so, dass die Summen aller zur selben Lage $\{m\}$ gehörenden $a_{p,q}$ verschwinden, beziehungs-

weise (um Abrundungsfehler zum Beginn der Rechnung zu vermeiden) sehr klein werden, wodurch die Rechnung ganz erheblich erleichtert wird.

Das Problem enthält drei Unbestimmtheiten, die daraus entspringen, dass erstens die beiden Punkte 0 und 0_1 beliebig angenommen werden können und zweitens offenbar nur Differenzen von Intervallen und nicht diese selbst bestimmt werden können. Dies drückt sich in den Gleichungen 2) resp. 3) so aus, dass sie unverändert bleiben, wenn man in ihnen setzt:

$$\left. \begin{aligned} x'_p &= x_p + a \cdot p + b \text{ statt } x_p \\ y'_q &= y_q + a \cdot q + c \text{ statt } y_q \\ z'_m &= z_m + a \cdot m + (b + c) \text{ statt } z_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

wo a, b, c drei willkürliche Konstante sind.

Diese Unbestimmtheiten haben aber auf die Ermittlung der Theilfehler selbst gar keinen Einfluss. Denn für den Stab l z. B. ist die Gesamtlänge $= x_n - x_0$ und die Länge zwischen den Strichen 0 und $i = x_i - x_0$. Letztere Länge soll nach Angabe $= \frac{i}{n}$ der Gesamtlänge $= \frac{i}{n} (x_n - x_0)$ sein, d. h. der innere Eintheilungsfehler u_i des Striches i ist:

$$u_i = (x_i - x_0) - \frac{i}{n} (x_n - x_0). \dots \dots \dots 5)$$

Nach der Transformation 4) würde u_i sich verwandeln in:

$$u'_i = (x'_i - x'_0) - \frac{i}{n} (x'_n - x'_0)$$

d. h. nach 4)

$$\begin{aligned} u'_i &= \left((x_i + a \cdot i + b) - (x_0 + a \cdot 0 + b) \right) - \frac{i}{n} \left((x_n + a \cdot n + b) - (x_0 + a \cdot 0 + b) \right) \\ &= (x_i - x_0 + a \cdot i) - \frac{i}{n} (x_n - x_0 + a \cdot n) \\ &= (x_i - x_0) - \frac{i}{n} (x_n - x_0) \end{aligned}$$

oder nach 5)

$$u'_i = u_i$$

d. h. der Theilfehler u_i hat sich durch die Transformation nicht geändert. Ein Gleiches gilt selbstverständlich für die Theilfehler v_i der Striche i des Stabes l_1 :

$$v_i = y_i - y_0 - \frac{i}{n} (y_n - y_0). \dots \dots \dots 6)$$

Die Berechnung der Theilfehler ist also trotz der Unbestimmtheiten in den x_p, y_q und z_m ein völlig bestimmtes Problem. Ein Gleiches gilt aber auch für die Differenz irgend eines Intervalles auf Stab l und irgend eines Inter-

valles auf Stab l_1 , also auch für irgend welche Summen solche Differenzen, also auch im besonderen für die Differenz \mathcal{A} der Gesamtlängen der beiden Stäbe l und l_1 :

$$\mathcal{A} = (x_n - x_0) - (y_n - y_0) \quad \dots \dots \dots 7)$$

Also: Die inneren Theilungsfehler u_i und v_i der Zwischenstriche der beiden Stäbe, sowie die Differenz \mathcal{A} ihrer Gesamtlängen sind trotz der Unbestimmtheiten in der ursprünglichen Fassung des Problems bestimmbar.

Um aber auch bei der Berechnung der x_p, y_q und z_m die Unbestimmtheiten zu entfernen, sollen zunächst die Anfangspunkte o und o_1 in die Striche 0 und 0₁ verlegt werden. Es wird also gesetzt:

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \quad \dots \dots \dots 8)$$

und die Ausdrücke für u_i, v_i und \mathcal{A} werden:

$$u_i = x_i - \frac{i}{n} x_n \quad \dots \dots \dots 5a)$$

$$v_i = y_i - \frac{i}{n} y_n \quad \dots \dots \dots 6a)$$

$$\mathcal{A} = x_n - y_n \quad \dots \dots \dots 7a)$$

In der Transformation 4) bleibt also nur noch a unbestimmt. Man erreicht, wie sich im Verlaufe der Ausgleichung herausstellt, eine kleine Vereinfachung, wenn man setzt:

$$(x_0 + x_1 + \dots + x_n) + (y_0 + y_1 + \dots + y_n) = \Sigma x + \Sigma y = 0 \quad \dots \dots 9)$$

Nach Einführung der Gleichungen 8) und 9) ist somit das Problem zu einem vollständig bestimmten geworden.

4. Einführung abkürzender Bezeichnungen.

Zur Vereinfachung der abzuleitenden Formeln sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

Es sei b_p die Summe aller $a_{p,q}$ mit demselben Index p , c_q die Summe aller $a_{p,q}$ mit demselben Index q , d_m die Summe aller $a_{p,q}$ welche zur selben Lage $\{m\}$ gehören, also:

$$b_p = \sum_q a_{p,q} = a_{p,0} + a_{p,1} + \dots + a_{p,n}, \quad (p = 0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots 10)$$

$$c_q = \sum_p a_{p,q} = a_{0,q} + a_{1,q} + \dots + a_{n,q}, \quad (q = 0, 1, \dots, n) \quad \dots \dots 11)$$

$$d_m = \sum_{p+q=m} a_{p,q} \quad \begin{matrix} (p, q = 0, 1, \dots, n) \\ (m = 0, 1, 2, \dots, 2n) \end{matrix} \quad \dots \dots 12)$$

Ebenso sei:

$$B_p = \sum_q A_{p,q} \dots \dots \dots 10a)$$

$$C_q = \sum_p A_{p,q} \dots \dots \dots 11a)$$

$$D_m = \sum_{p+q=m} A_{p,q} \dots \dots \dots 12a)$$

Zwischen den $n+1$ Grössen b_p , den $n+1$ Grössen c_q und den $2n+1$ Grössen d_m finden die folgenden drei Identitäten statt:

$$\sum_{p=0}^{p=n} b_p = \sum_{q=0}^{q=n} c_q = \sum_{m=0}^{m=2n} d_m = \sum_{p,q} a_{p,q} \dots \dots \dots 13)$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} p b_p + \sum_{q=0}^{q=n} q c_q = \sum_{m=0}^{m=2n} m \cdot d_m = \sum_{p,q} (p+q) a_{p,q} \dots \dots \dots 14)$$

Ebenso findet man:

$$\sum_{p=0}^{p=n} B_p = \sum_{q=0}^{q=n} C_q = \sum_{m=0}^{m=2n} D_m = \sum_{p,q} A_{p,q} \dots \dots \dots 13a)$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} p \cdot B_p + \sum_{q=0}^{q=n} q C_q = \sum_{m=0}^{m=2n} m D_m = \sum_{p,q} (p+q) A_{p,q} \dots \dots \dots 14a)$$

Es wird ferner gebraucht werden:

$$\left. \begin{aligned} e_i &= b_{i-1} - b_i \\ f_i &= c_{i-1} - c_i \\ g_i &= -(n+1-i) d_{i-1} + i d_{n+i} \\ h_i &= i(n+1-i)(e_i + f_i) + 2g_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, 4 \dots n) \left\{ \begin{aligned} &\dots \dots \dots 15) \\ &\dots \dots \dots 16) \\ &\dots \dots \dots 17) \\ &\dots \dots \dots 18) \end{aligned} \right.$$

In Rücksicht auf die späteren Entwicklungen soll gezeigt werden, dass die Summe S aller h_i , also:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} h_i = h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n \dots \dots \dots 19)$$

verschwindet.

Es ist zunächst, nach Einsetzen von 19), 18), 17), 16) und 15)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{i=n} i(n+1-i)(b_{i-1} + c_{i-1}) - \sum_{i=1}^{i=n} i(n+1-i)(b_i + c_i) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} (n+1-i) d_{i-1} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{i=n} i d_{n+i} \\ &= S_1 - S_2 - 2 S_3 + 2 S_4. \end{aligned}$$

Nun ist, wenn in der ersten Summe der Buchstabe i durch $i+1$ ersetzt wird:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1)(n-i)(b_i + c_i).$$

Man kann aber in S_1 jetzt auch bis $i = n$ summieren, da $n - i$ für $i = n$ verschwindet.

Ebenso kann man in S_2 statt von $i = 1$ mit $i = 0$ anfangen, des Faktors i wegen. Also:

$$S_1 - S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} [(i+1)(n-i) - i(n+1-i)] (b_i + c_i) = \sum_{i=0}^{i=n} (n-2i) (b_i + c_i)$$

d. h. nach 13) und 14)

$$S_1 - S_2 = 2n \sum_{p,q} a_{p,q} - 2 \sum_{p,q} (p+q) a_{p,q}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} -2S_3 &= -2 \sum_{i=1}^{i=n} (n+1-i) d_{i-1} = -2 \sum_{i=0}^{i=n-1} (n-i) d_i = -2 \sum_{i=0}^{i=n} (n-i) d_i \\ +2S_4 &= 2 \sum_{i=1}^{i=n} i d_{n+i} = 2 \sum_{i=n+1}^{i=2n} (i-n) d_i = -2 \sum_{i=n+1}^{i=2n} (n-i) d_i \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} -2S_3 + 2S_4 &= -2 \sum_{i=0}^{i=2n} (n-i) d_i = -2n \sum_{i=0}^{i=2n} d_i + 2 \sum_{i=0}^{i=2n} i d_i \\ &= -2n \sum_{p,q} a_{p,q} + 2 \sum_{p,q} (p+q) \cdot a_{p,q} \end{aligned}$$

also endlich:

$$S = S_1 - S_2 - 2S_3 + 2S_4 = 2n \sum_{p,q} a_{p,q} - 2 \sum_{p,q} (p+q) \cdot a_{p,q} - 2n \sum_{p,q} a_{p,q} + 2 \sum_{p,q} (p+q) a_{p,q}$$

d. h.

$$S = \sum_{i=0}^{i=n} h_i = h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = 0 \quad \dots \quad 20)$$

Diese Identität kann, wie sich später zeigen wird, als eine ausgezeichnete Kontrolgleichung benutzt werden.

Ferner werde gesetzt:

$$(x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_i) + (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_i) = t_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad 21)$$

Nach den festgesetzten Annahmen 8) und 9) ist also:

$$t_n = 0 \text{ und } t_0 = 0 \quad \dots \quad 22)$$

und also auch:

$$(x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n) + (y_{i+1} + y_{i+2} + \dots + y_n) = -t_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad 21a)$$

Ferner werde gesetzt:

$$z_i + z_{i+1} + \dots + z_{i+n} = w_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad 23)$$

und:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = - (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n) = r. \quad 24)$$

Endlich mögen noch für die Stabintervalle auf l und l_1 Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_{i-1} \\ \eta_i &= y_i - y_{i-1}, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad 25)$$

aus denen dann die x_i und y_i (da $x_0 = y_0 = 0$) durch Summation entstehen:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i \\ y_i &= \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_i \end{aligned} \quad 25a)$$

5. Aufstellung der Normalgleichungen.

Zur Ausgleichung liegen vor die $(n + 1)^2$ Bedingungsleichungen

$$A_{p,q} = x_p + y_q - z_m + a_{p,q} = 0 \quad 2)$$

mit den $4n + 3$ Unbekannten x_p , y_q und z_m . Da die linke Seite der Gleichung 2) zugleich der Beobachtungsfehler $A_{p,q}$ der Messung $a_{p,q}$ ist, so ist die Summe der Fehlerquadrate:

$$[V V] = \sum_{p,q} \sum (A_{p,q})^2 = \sum_{p,q} \sum (x_p + y_q - z_m + a_{p,q})^2. \quad 26)$$

Die Normalgleichungen sind daher:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad 27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial z_i} = 0, \quad (i = 0, 1, 2 \dots 2n). \quad 28)$$

Nun ist:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial x_i} = \sum_{p,q} A_{p,q} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial x_i}$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial A_{p,q}}{\partial x_i}$ hat aber den Werth 1, wenn $p = i$ und den Werth 0, wenn p nicht = i , also:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial x_i} = \sum_{q=0}^{q=n} A_{i, q},$$

d. h. nach 10a).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial x_i} = B_i$$

Ebenso folgt:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial y_i} = C_i$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [V V]}{\partial z_i} = D_i$$

daher die aufzulösenden Normalgleichungen:

$$B_i = 0, C_i = 0, D_i = 0. \quad 29)$$

Ihre Zahl ist $= 4n + 3$, da der Index i für B_i und C_i von 0 bis n und für D_i von 0 bis $2n$ geht. Wären sie also von einander unabhängig, so könnten sie nach den $4n + 3$ Unbekannten x_i, y_i, z_i aufgelöst werden. Es finden aber zwischen ihnen die drei identischen Beziehungen 13a) und 14a) statt, so dass die Gleichungen 29) nur $4n$ von einander unabhängige Gleichungen vertreten. Sie reichen also, wie nach den Bemerkungen unter 3 über die Unbestimmtheiten des Problems zu erwarten war, nicht zur Bestimmung der x_i und y_i aus. Zur Ergänzung werden daher die drei Gleichungen 8) und 9) herangezogen.

Die Gleichungen 29) sind nunmehr zu entwickeln. Es ist:

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{q=0}^{q=n} A_{i, q} = \sum_{q=0}^{q=n} (x_i + y_q - z_{i+q} + a_{i, q}) \\ &= (n+1) x_i + \sum_{q=0}^{q=n} y_q - \sum_{q=0}^{q=n} z_{i+q} + \sum_{q=0}^{q=n} a_{i, q} \end{aligned}$$

also nach 10), 23) und 24)

$$B_i = (n+1) x_i - r - w_i + b_i.$$

Ebenso folgt:

$$C_i = (n+1) y_i + r - w_i + c_i.$$

Die Entwicklung der D_i , also der Summe der Beobachtungsfehler $A_{p, q}$, welche zu ein und derselben Lage $\{i\}$ gehören, gestaltet sich verschieden, je nach der Gruppe, zu der die Lage gehört (Siehe 2.).

Für die erste Gruppe ist i eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$ und

$$D_i = \sum_{p+q=i} A_{p,q} = A_{0,i} + A_{1,i-1} + A_{2,i-2} \dots + A_{i-1,1} + A_{i,0}$$

$$= (x_0 + y_i - z_i + a_{0,i}) + (x_1 + y_{i-1} - z_i + a_{1,i-1}) \dots (x_i + y_0 - z_i + a_{i,0})$$

$$= (x_0 + x_1 + \dots + x_i) + (y_0 + y_1 + \dots + y_i) - (i+1) z_i + (a_{0,i} + \dots + a_{i,0})$$

also, nach 12) und 21)

$$D_i = t_i - (i+1) z_i + d_i, \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Für die zweite Gruppe ist $i=n$. Man erhält eine Gleichung von derselben Form, nur dass t_n nach 22) durch 0 zu ersetzen ist. Also

$$D_n = - (n+1) z_n + d_n.$$

Für die dritte Gruppe ist i eine der Zahlen $n+1, n+2, \dots, 2n$. Schreibt man daher $n+1+i$ für i , so geht i von 0 bis n , wie in der ersten Gruppe und es wird:

$$D_{n+1+i} = \sum_{p+q=n+1+i} A_{p,q}$$

$$= A_{i+1,n} + A_{i+2,n-1} + \dots + A_{n,i+1}$$

$$= (x_{i+1} + y_n - z_{n+1+i} + a_{i+1,n}) + (x_{i+2} + y_{n-1} - z_{n+1+i} + a_{i,n+1}) \dots$$

$$+ (x_n + y_{i+1} - z_{n+1+i} + a_{n,i+1})$$

$$= (x_{i+1} + \dots + x_n) + (y_{i+1} + \dots + y_n) - (n-i) z_{n+1+i} + \sum_{p+q=n+1+i} a_{p,q}$$

daher nach 12) und 21a).

$$D_{n+1+i} = -t_i - (n-i) z_{n+1+i} + d_{n+1+i}.$$

Die Normalgleichungen sind daher:

$$\left. \begin{aligned} (n+1) x_i - r - w_i + b_i &= 0 \\ (n+1) y_i + r - w_i + c_i &= 0 \end{aligned} \right\} (i=0, 1, \dots, n) \dots \dots \dots 30)$$

$$t_i - (i+1) z_i + d_i = 0, \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \dots \dots \dots 31)$$

$$- (n+1) z_n + d_n = 0. \quad \dots \dots \dots 32)$$

$$-t_i - (n-i) z_{n+1+i} + d_{n+1+i} = 0, \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \dots \dots \dots 33)$$

Zu ihnen treten noch die drei Gleichungen 8) und 9). Das Problem ist in diesen Gleichungen, welche nun nach den Unbekannten x_i, y_i und z_i aufzulösen sind, analytisch ausgedrückt.

6. Auflösung der Normalgleichungen.

Zur Auflösung der Gleichungen 30), 31), 32), 33) bemerke man zunächst, dass sie ohne die geringste Mühe die Differenz der Längen zwischen irgend zwei Strichen des Stabes l und den entsprechenden Strichen des Stabes l_1 , also im besonderen auch die Differenz \mathcal{A} dieser Längen selbst:

$$\mathcal{A} = (x_n - x_0) - (y_n - y_0)$$

ergeben. Denn setzt man in 30) erst $i = n$, dann $i = 0$ und subtrahirt, so folgt

$$\begin{aligned} (n+1)(x_n - x_0) - (w_n - w_0) + (b_n - b_0) &= 0 \\ (n+1)(y_n - y_0) - (w_n - w_0) + (c_n - c_0) &= 0. \end{aligned}$$

Daher nach Subtraktion

$$\begin{aligned} (n+1)\mathcal{A} + (b_n - b_0) - (c_n - c_0) &= 0 \\ \mathcal{A} &= \frac{(c_n - c_0) - (b_n - b_0)}{n+1} \dots \dots \dots 34) \end{aligned}$$

Die Methode ist nun allerdings zur Bestimmung der inneren Theilfehler erdacht; da aber hiernach die Längendifferenz so einfach berechnet werden kann, so ist es wohl angebracht, auch sie im gegebenen Fall zu ermitteln.

Die Gleichungen 31) und 33) lassen sich sehr erheblich reduzieren. Sie enthalten die Unbekannten x_i und y_i nur in den Verbindungen t_i und da eine jede Grösse t_i sowohl in 31), als auch in 33) vorkommt, so folgt nach Elimination der t_i :

$$(i+1)z_i + (n-i)z_{n+1+i} = d_i + d_{n+1+i} \dots \dots \dots 35)$$

d. h. man kann die z_{n+1+i} durch die z_i ausdrücken. Etwas vortheilhafter ist es aber, zunächst die z_i vermittelst der Gleichungen:

$$z_i = \frac{d_i}{i+1} + \frac{n-i}{n+1} \cdot \gamma_{i+1} \dots \dots \dots 36)$$

durch $(n-1)$ neue Veränderliche $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ zu ersetzen. (Dass die Unbekannte, welche z_i ersetzen soll, in 36) nicht γ_i , sondern γ_{i+1} genannt worden ist, hat seinen Grund darin, dass es sich später als zweckmässig erweist, die Indices der γ nicht von 0 bis $n-1$, sondern von 1 bis n gehen zu lassen.) Nach Einführung von 36) in 35) erhält man:

$$z_{n+1+i} = \frac{d_{n+1+i}}{n-i} - \frac{i+1}{n+1} \gamma_{i+1} \dots \dots \dots 36a)$$

Ferner giebt Gleichung 32) z_n unmittelbar:

$$z_n = \frac{d_n}{n+1} \dots \dots \dots 36b)$$

und aus 36), 36a), 36b) geht hervor, dass man die z_{n+1} Unbekannte:

$$z_0, z_1, z_2 \dots z_{2n-1}, z_{2n}$$

durch die n Unbekannte:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_{n-1}, \gamma_n$$

ersetzen kann. Führt man diese zunächst in 31), 32) und 33) ein, so fällt 32) ganz fort und 31) sowohl wie 33) ergeben dasselbe, nämlich:

$$t_i - \frac{(i+1)(n-i)}{n+1} \gamma_{i+1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \dots 31a)$$

Die Ersetzung der z durch die γ in den Gleichungen 30) ist recht umständlich, weil die w_i Summen der z sind (nach 23). Sie wird aber überraschend einfach, wenn man nach 25) von den Abscissen x_i und y_i zu den Intervallen ξ_i und η_i übergeht, wodurch man auch noch den Vortheil erreicht, dass die Grösse r verschwindet. Setzt man daher in 30) für i die beiden Werthe i und $i-1$, so folgt durch Subtraktion nach 15) und 16)

$$(n+1) \xi_i - (w_i - w_{i-1}) - e_i = 0, \quad (n+1) \eta_i - (w_i - w_{i-1}) - f_i = 0.$$

Nun ist nach 23)

$$w_i - w_{i-1} = z_{n+i} - z_{i-1},$$

daher nach 36) und 36a), wenn dort i durch $i-1$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned} w_i - w_{i-1} &= \frac{d_{n+i}}{n+1-i} - \frac{i}{n+1} \gamma_i - \left(\frac{d_{i-1}}{i} + \frac{(n+1-i)}{n+1} \gamma_i \right) \\ &= -\gamma_i + \frac{-(n+1-i)d_{i-1} + id_{n+i}}{(n+1-i) \cdot i}, \end{aligned}$$

also nach 17)

$$w_i - w_{i-1} = -\gamma_i + \frac{g_i}{i(n+1-i)}.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$-\gamma_i + \frac{g_i}{i(n+1-i)} = \beta_i \dots \dots \dots 37)$$

so wird

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \xi_i &= e_i + \beta_i \\ (n+1) \cdot \eta_i &= f_i + \beta_i \end{aligned} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2 \dots n) \\ \dots \dots \dots \end{matrix} \quad 30a)$$

Vermittelst dieser sehr einfachen Gleichungen sind die ξ_i und η_i durch die γ_i ausgedrückt. Nach 25a) werden also auch die x_i und y_i und daher

nach 21) auch die t_i durch die γ_i ausdrückbar. Die Gleichungen 31a) enthalten nach Einsetzen dieser Ausdrücke nur noch die Unbekannten:

$$\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}, \gamma_n.$$

Das Problem der Ermittlung der Theilfehler ist daher auf die Auffindung dieser n Unbekannten reduziert worden.

7. Auflösung der Normalgleichungen. Schluss.

Die Berechnung der γ_i könnte in folgender Weise vorgenommen werden:

Da $x_0 = y_0 = 0$, so ist auch $t_0 = x_0 + y_0 = 0$.

Die Gleichung 31a) ergibt also für $i = 0$ sofort:

$$\gamma_1 = 0 \dots \dots \dots 38a)$$

Aus 30a) und 37) folgt dann ξ_1 und η_1 und damit

$$t_1 = x_0 + x_1 + y_0 + y_1 = x_1 - x_0 + y_1 - y_0 = \xi_1 + \eta_1,$$

mithin:

$$(n + 1) t_1 = e_1 + f_1 + \frac{2 g_1}{n}$$

und nach 31a) für $i = 1$

$$\gamma_2 = \frac{n(e_1 + f_1) + 2 g_1}{2 n \cdot (n - 1)}$$

also nach 18)

$$\gamma_2 = \frac{h_1}{1 \cdot 2 \cdot n(n - 1)} \dots \dots \dots 38)$$

Hieraus nach 30a) ξ_2 und η_2 , also auch t_2 . Aus t_2 folgt nach 31a) wieder γ_3 , aus γ_3 nach 30a) ξ_3 und η_3 , also auch t_3 . Aus t_3 wieder nach 31a) γ_4 u. s. w.

Dieses Rekursionsverfahren ist aber recht umständlich, da die x_i und y_i durch Summation der ξ_i und η_i , die t_i aber erst durch Summation der x_i und y_i , also durch doppelte Summation der ξ_i und η_i entstehen. Es lässt sich aber erheblich vereinfachen und zuletzt sogar in ein direktes Berechnen der γ_i verwandeln, wie auf folgende Weise gezeigt werden kann:

Man gehe umgekehrt von den t_i durch zweimalige Differenzenbildung zu den ξ_i und η_i über. Es ist:

$$t_i - t_{i-1} = x_i + y_i; \quad t_{i-1} - t_{i-2} = x_{i-1} + y_{i-1},$$

also:

$$t_i - 2 t_{i-1} + t_{i-2} = \xi_i + \eta_i,$$

daher nach 31a), 30a und 37)

$$(i + 1) (n - i) \gamma_{i+1} - 2 i (n + 1 - i) \gamma_i + (i - 1) (n + 2 - i) \gamma_{i-1} = e_i + f_i - 2 \gamma_i + \frac{2 g_i}{i(n+1-i)}$$

oder nach 18)

$$(i + 1) (n - i) \gamma_{i+1} - 2 (i (n + 1 - i) - 1) \gamma_i + (i - 1) (n + 2 - i) \gamma_{i-1} = \frac{h_i}{i(n+1-i)} \quad 39)$$

$(i = 2, \dots, n - 1).$

Da γ_1 und γ_2 aus 37) und 38) bekannt, so folgt γ_3 aus 39) für $i = 2$; dann ebenso γ_4 aus γ_2 und γ_3 , indem in 39) $i = 3$ gesetzt wird, u. s. w., bis zuletzt γ_n für $i = n - 1$ berechnet werden kann.

Als Kontrollformel benutze man die Formel:

$$t_n - 2 t_{n-1} + t_{n-2} = \xi_n + \eta_n,$$

welche nach 30a) und 31a) (da $t_n = 0$) ergibt:

$$- 2 n \gamma_n + 2 (n - 1) \gamma_{n-1} = e_n + f_n - 2 \gamma_n + \frac{2 g_n}{n}$$

oder

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = - \frac{h_n}{1 \cdot 2 \cdot n (n - 1)} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad 40$$

Aber auch die Reduktionsformel 39) zur Berechnung der γ kann noch sehr erheblich vereinfacht werden. Man bemerke hierzu, dass die Summe der drei Koeffizienten von γ_{i+1} , γ_i und γ_{i-1} in 39)

$$(i + 1) (n - i) - 2 (i (n + 1 - i) - 1) + (i - 1) (n + 2 - i)$$

identisch verschwindet. Der mittlere kann also durch die negative Summe des ersten und letzten ersetzt werden. Die Gleichung 39) wird daher:

$$(i + 1) (n - i) (\gamma_{i+1} - \gamma_i) - (i - 1) (n + 2 - i) (\gamma_i - \gamma_{i-1}) = \frac{h_i}{i(n+1-i)}$$

oder, wenn zur Vereinfachung gesetzt wird:

$$\gamma_{i+1} - \gamma_i = \delta_i \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad 41)$$

$$(i + 1) (n - i) \delta_i - (i - 1) (n + 2 - i) \delta_{i-1} = \frac{h_i}{i(n+1-i)}, \quad (i = 2, 3, \dots, n - 1) \quad 39a)$$

Die Kontrollformel 40) wird:

$$\delta_{n-1} = - \frac{h_n}{1 \cdot 2 \cdot n (n - 1)}$$

Andererseits ist nach 37) und 38)

$$\delta_1 = \frac{h_0}{n(n-1) \cdot 1 \cdot 2}.$$

Fügt man diese beiden Formeln zu 39a) hinzu, so erhält man das folgende System von n Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (n-1) \cdot \delta_1 &= \frac{h_1}{1 \cdot n} \\ 3 \cdot (n-2) \cdot \delta_2 - 1 \cdot n \delta_1 &= \frac{h_2}{2 \cdot (n-1)} \\ 4 \cdot (n-3) \cdot \delta_3 - 2 \cdot (n-1) \delta_2 &= \frac{h_3}{3 \cdot (n-2)} \dots \dots \dots 39b) \\ \dots \dots \dots & \\ \dots \dots \dots & \\ (n-1) \cdot 2 \delta_{n-2} - (n-3) \cdot 4 \delta_{n-3} &= \frac{h_{n-2}}{(n-2) \cdot 3} \\ n \cdot 1 \cdot \delta_{n-1} - (n-2) \cdot 3 \delta_{n-2} &= \frac{h_{n-1}}{(n-1) \cdot 2} \\ &- (n-1) \cdot 2 \cdot \delta_{n-1} = \frac{h_n}{n \cdot 1} \end{aligned}$$

Man kann die Berechnung der δ mit der ersten Gleichung anfangen, welche δ_1 ergibt. Dann folgt aus der zweiten δ_2 , darauf aus der dritten δ_3 u. s. w. und aus der vorletzten δ_{n-1} . Die letzte dient dann als Kontrollformel. Man kann aber auch rückwärts mit δ_{n-1} anfangen, aus der vorletzten Gleichung δ_{n-2} , dann δ_{n-3} u. s. w. und aus der zweiten δ_1 berechnen. Dann dient die erste Gleichung als Kontrollformel.

Sind die δ gefunden, so ergeben sich nach 41) die γ durch Summation. Da $\gamma_1 = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= \delta_1 \\ \gamma_3 &= \delta_1 + \delta_2 \dots \dots \dots 42) \\ \dots & \\ \dots & \\ \gamma_n &= \delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

Merkwürdiger Weise aber lassen sich auch noch die Formeln 39a), trotzdem sie schon um so viel einfacher sind als 39), abermals vereinfachen, wenn man mit dem rechtsstehenden Nenner $i(n+1-i)$ multipliziert und dann zur Abkürzung setzt:

$$i(i+1)(n-i)(n+1-i) \cdot \delta_i = \epsilon_i \dots \dots \dots 43)$$

also:

$$\delta_i = \frac{\epsilon_i}{i \cdot (i+1)(n-i)(n+1-i)} \dots \dots \dots 43a)$$

Die Gleichung 39a) wird dann sehr einfach, nämlich:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} = h_i \dots \dots \dots 39c)$$

und das System 39b) giebt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= h_1 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 &= h_2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 &= h_3 \dots \dots \dots 39d) \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2} &= h_{n-1} \\ - \varepsilon_{n-1} &= h_n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Summation die Kontrollformel:

$$h_1 + h_2 + h_3 \dots + h_{n-1} + h_n = 0$$

deren Richtigkeit in 20) unter 4. bewiesen worden war.

Ferner ist allgemein:

$$\varepsilon_i = h_1 + h_2 + \dots + h_i, \dots \dots \dots 44)$$

oder auch:

$$\varepsilon_i = - (h_{i+1} + \dots + h_n) \dots \dots \dots 45)$$

Sind die ε_i berechnet, so folgen aus 43a) die δ_i , darauf aus 42) durch Summation die γ_i und nach 30a) die ξ_i und η_i . Darauf nach 25a) die x_i und y_i und endlich nach 5a) und 6a) die gesuchten inneren Theilfehler u_i und v_i .

8. Zusammenstellung der Operationen.

Es ist wohl nicht überflüssig, zum Schlusse die zur Ermittlung der inneren Theilfehler nach der hier entwickelten strengen Methode nothwendigen Operationen übersichtlich und in der Ordnung, wie sie bei einer wirklichen Rechnung aufeinander folgen, zusammenzustellen.

- I. Man stelle die $a_{p,q}$, nachdem sie nöthigenfalls nach der unter 3. gegebenen Vorschrift reduzirt worden, nach dem dort angegebenen Schema zu einem Quadrate zusammen.
- II. Man berechne die b_i, c_i, d_i aus den $a_{p,q}$ durch Summation nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} b_i &= a_{i,0} + a_{i,1} + \dots + a_{i,n} \\ c_i &= a_{0,i} + a_{1,i} \quad + a_{n,i} \end{aligned} \right\} (i = 0, 1, 2, \dots n)$$

$$d_i = \sum_{p+q=m} a_{p,q} \quad (m = 0, 1, 2, \dots 2n).$$

III. Man berechne aus den b_i , c_i und d_i die Verbindungen:

$$\left. \begin{aligned} e_i &= b_{i-1} - b_i \\ f_i &= c_{i-1} - c_i \\ g_i &= -(n+1-i)d_{i-1} + id_{n+i} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2 \dots n).$$

IV. Man berechne aus den e_i , f_i , g_i die h_i nach der Formel:

$$h_i = i(n+1-i)(e_i + f_i) + 2g_i \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

V. Man berechne aus den h_i durch Summation die ε_i :

$$\varepsilon_i = h_1 + h_2 + \dots + h_i, \quad (i = 1, 2 \dots n-1)$$

und kontrollire die bisherigen Rechnungen durch die Kontrollformel

$$0 = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n.$$

VI. Man berechne aus den ε_i die δ_i durch Division nach der Formel:

$$\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{i(i+1)(n-i)(n+1-i)}, \quad (i = 1, 2 \dots n-1).$$

VII. Man berechne aus den δ_i die γ_i durch Summation nach der Formel:

$$\gamma_1 = 0, \gamma_i = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i-1} \quad (i = 2, 3 \dots n),$$

VIII. Man berechne die β_i nach der Formel:

$$\beta_i = -\gamma_i + \frac{g_i}{i(n+1-i)}.$$

IX. Man berechne die ξ_i und η_i nach den Formeln:

$$\begin{aligned} (n+1)\xi_i &= e_i + \beta_i \\ (n+1)\eta_i &= f_i + \beta_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

X. Man berechne aus den ξ_i und η_i die x_i und y_i durch Summation nach den Formeln:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, x_i = \xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_i, y_i = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

XI. Man berechne aus den x_i und y_i die Theilfehler u_i und v_i nach den Formeln:

$$u_i = x_i - \frac{i}{n} \cdot x_n, \quad v_i = y_i - \frac{i}{n} \cdot y_n, \quad (i = 1, 2 \dots n-1).$$

Selbstverständlich ist, wie ersichtlich, die Anzahl der Operationen erheblich grösser, als in dem vereinfachten Verfahren von Leman-Thiesen. Aber die Operationen selbst sind alle sehr einfach und können nach einem ein für

allemaal angelegten Schema in jedem besonderen Falle auf das bequemste ausgeführt werden.

Besonders hervorzuheben ist der Umstand, dass, wie in 3. gezeigt, man es so einrichten kann, dass die d_i und also auch die g_i verschwinden, oder, wenn Abrundungsfehler so weit wie möglich hinausgeschoben werden sollen, sehr kleine ganze Zahlen werden. Die von den d_i und g_i abhängenden Glieder werden dann auch sehr klein und erfordern gar keine Mühe. Ferner beachte man, dass in den ersten fünf Operationen keine Divisionen vorkommen, so dass die Kontrollformel vollständig stimmen muss, wenn man bei der Reduktion der $a_{p,q}$ Abrundungen vermieden hat. Die Division durch $n + 1$ wird man sich schliesslich bis zuletzt aufsparen.

Die Ermittlung der Theilfehler ist nunmehr vollständig dargelegt. Es bleibt aber noch die Aufgabe, ihre mittleren Fehler zu bestimmen.

ZWEITER ABSCHNITT.

**Die Bestimmung der mittleren Fehler nach der strengen
Ausgleichung.**

**9. Der mittlere Fehler der Längendifferenz, Einführung der inneren Eintheilungsfehler
in die Normalgleichungen.**

Die Bestimmung der mittleren (beziehungsweise der wahrscheinlichen) Fehler, welche den inneren Eintheilungsfehler u_i und v_i anhaften, muss die Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen $a_{p,q}$ vorangehen.

Man berechne hierzu die x_i, y_i und z_i (die letzteren nach 36), 36a) und 36b) und dann die übrig bleibenden Beobachtungsfehler selbst;

$$A_{p,q} = x_p + y_q - z_m + a_{p,q}.$$

Dann ist die Summe der Fehlerquadrate:

$$[v, v] = \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2.$$

Die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen ist $= (n + 1)^2$, die Anzahl der Unbekannten $x_i, y_i, z_i = 4n + 3$. Da von den letzteren aber drei willkürlich gewählt werden dürfen, so sind ihrer nur $4n$ zu rechnen. Also ist der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$w = \sqrt{\frac{[v, v]}{(n + 1)^2 - 4n}} = \frac{\sqrt{[v, v]}}{n - 1} \cdot \dots \dots \dots 46)$$

Da die u_i und v_i durch Auflösung linearer Normalgleichungen entstanden sind, so wird man zur Feststellung ihrer mittleren Fehler einen der beiden fast immer benutzten Wege einschlagen, nämlich:

Entweder werden die u_i und v_i als lineare Funktionen der $a_{p,q}$ selbst dargestellt, also z. B.

$$u_i = \sum \sum \alpha_{p,q} \cdot a_{p,q}.$$

Dann ist bekanntlich, da die $a_{p,q}$ unmittelbar gemessen worden sind, der Fehler $[u_i]$ von u_i :

$$[u_i] = w \sqrt{\sum \sum (\alpha_{p,q})^2} \dots \dots \dots 47)$$

Oder es werden die Normalgleichungen noch einmal aufgelöst, nachdem in ihnen die rechtsstehenden Verbindungen der Beobachtungen durch 0 ersetzt worden sind, eine einzige ausgenommen, welche = 1 gesetzt wird.*) Ist (u_i) der Werth, den u_i nach dieser Ersetzung erhalten würde, so wird:

$$[u_i] = w \sqrt{(u_i)}, \quad [v_i] = w \sqrt{(v_i)} \dots \dots \dots 48)$$

vorausgesetzt, dass u_i eine der Unbekannten ist und in der Normalgleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [v v]}{\partial u_i} = 0$$

eine 1, wie oben angegeben, gesetzt werde.

Die erstere Methode ist hier wenig aussichtsvoll, da die Ermittlung der u_i als unmittelbare Funktionen der $a_{p,q}$ durchaus nicht einfach sein würde.

Wohl aber führt sie sehr rasch zur Bestimmung des mittleren Fehlers $[A]$ der Differenz A der Stablängen. Es ist nach 34)

$$A = \frac{(c_n - c_0) - (b_n - b_0)}{n + 1},$$

also nach Einsetzung der Werthe für die b und c nach 10) und 11)

$$A = \frac{(a_{0,n} + a_{1,n} \dots + a_{n,n}) - (a_{0,0} + a_{1,0} \dots + a_{n,0}) - (a_{n,0} + a_{n,1} \dots + a_{n,n}) + (a_{0,0} + a_{0,1} \dots + a_{0,n})}{n + 1}$$

oder:

$$A = \frac{2a_{0,n} - 2a_{n,0} + (a_{1,n} \dots + a_{n-1,n}) + (a_{0,1} \dots + a_{0,n-1}) - (a_{1,0} \dots + a_{n-1,0}) - (a_{n,1} \dots + a_{n,n-1})}{n + 1}$$

Daher:

$$\sum \sum (\alpha_{p,q})^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 [4 + 4 + (1^2 + \dots + 1^2) + (1^2 + \dots + 1^2) + (1^2 + \dots + 1^2) + (1^2 + \dots + 1^2)].$$

*) Vergl. z. B. Weinstein f. c. Bd. I pag. 318 und folgende.

Jede der vier in der eckigen Klammer erhaltenen Klammergrößen ist $= n - 1$, mithin:

$$\Sigma \Sigma (\alpha_{p,q})^2 = \frac{1}{(n+1)^2} (8 + 4(n-1)) = 4 \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{4}{n+1} = (\mathcal{A}) \dots \dots \dots 49)$$

also nach 47)

$$[\mathcal{A}] = \frac{2w}{\sqrt{n+1}} \dots \dots \dots 49a)$$

Was die mittleren Fehler $[u_i]$ und $[v_i]$ der inneren Theilfehler u_i und v_i betrifft, so ist diese Art ihrer Bestimmung, wie bereits erwähnt, mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Mehr Erfolg verspricht die zweite Methode, wenn man, wie hier beabsichtigt wird, die zugehörigen Koeffizienten (u_i) darstellen will als Funktionen der ganzen Zahlen n und i , von denen n ganz beliebig ist, während i irgend eine der Zahlen: $1, 2, \dots, n-2, n-1$ sein kann.

Hierzu ist aber erforderlich, das unter 5. aufgestellte System der Normalgleichungen einer Umformung zu unterziehen. Denn erstens enthält dieses System nicht die u_i und v_i selbst als Unbekannte, sondern die x_i und y_i , aus denen die ersteren nach 5) und 6) beziehungsweise 5a) und 6a) zu berechnen sind. Und zweitens enthält es, wie ausführlich gezeigt, drei Unbekannte zu viel.

Beides muss vermieden werden. Man setze zunächst $x_0 = y_0 = 0$, dann ist nach 5a) und 6a)

$$x_i = u_i + i \cdot \frac{x_n}{n}, \quad y_i = v_i + i \cdot \frac{y_n}{n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \dots \dots \dots 50)$$

Führt man diese Werthe in die Ausdrücke:

$$A_{p,q} = x_p + y_q - z_m + a_{p,q}$$

ein, so enthalten sie die $2n-2$ Unbekannten u_i und v_i , die 2 Unbekannten x_n und y_n und die $2n+1$ Unbekannten z_m . Also im Ganzen $4n+1$, mithin noch eine zu viel.

Um diese zu entfernen, beachte man, dass z_m von den $a_{p,q}$ abgesehen $= x_p + y_q$ ist. Diese sind wieder, von den Theilfehlern abgesehen $= \frac{p \cdot x_n}{n}$ und $\frac{q \cdot y_n}{n}$. Nun ist $x_n - y_n$ ebenfalls eine sehr kleine Grösse. Man kann daher x_n und y_n in erster Annäherung durch das arithmetische Mittel $\frac{x_n + y_n}{2}$ ersetzen. Also ist z_m mit derselben Annäherung

$$= \frac{p(x_n + y_n)}{2n} + \frac{q(x_n + y_n)}{2n} = \frac{(x_n + y_n)(p + q)}{2n} = \frac{m \cdot (x_n + y_n)}{2n}$$

Man setze daher:

$$z_m - m \cdot \frac{x_n + y_n}{2n} = z'_m, \quad z_m = z'_m + m \cdot \frac{x_n + y_n}{2n}, \quad (m = 0, 1 \dots 2n) \quad . \quad . \quad 51)$$

und führe die z'_m statt der z_m in $A_{p,q}$ ein. Daher:

$$A_{p,q} = u_p + p \cdot \frac{x_n}{n} + v_q + q \frac{y_n}{n} - z'_m - m \cdot \frac{x_n + y_n}{2n} + a_{p,q}$$

oder, da $m = p + q$

$$A_{p,q} = u_p + v_q - z'_m + \frac{p-q}{2n} (x_n - y_n) + a_{p,q}$$

oder auch, da $x_n - y_n = \mathcal{A}$

$$A_{p,q} = u_p + v_q - z'_m + \frac{p-q}{2n} \mathcal{A} + a_{p,q}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 52)$$

mit der Massgabe, dass jetzt weder p noch q den Werth 0 oder n erhalten dürfen. Da aber die Gleichungen 50) richtig bleiben, wenn man für $i=0$ und für $i=n$ die Grössen u_i und v_i durch 0 ersetzt, so folgt, dass die Gleichungen 52) auch gelten, wenn p oder q oder beide den Werth 0 oder n haben, nur dass dann die Grössen u_p und v_q fortzulassen sind. also z. B.:

$$A_{0,q} = v_q - z'_q - \frac{q}{2n} \mathcal{A} + a_{0,q},$$

$$A_{0,0} = -z'_0 + a_{0,0}$$

u. s. f.

Nunmehr sind in 52) nur noch $4n$ Unbekannte enthalten, nämlich die $2n-2$ Grössen u_i und v_i , die $2n+1$ Grössen z'_i und die eine Grösse \mathcal{A} , d. h. die Differenz der Stablängen.

Die Normalgleichungen werden daher nach dieser Transformation:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2}{\partial u_i} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2}{\partial v_i} &= 0 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2}{\partial z'_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2}{\partial \mathcal{A}} = 0$$

Nun ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A_{p,q}^2}{\partial u_i} = A_{p,q},$$

wenn $p = i$, und $= 0$, wenn p nicht $= i$.

Die beiden ersten Reihen der Normalgleichungen werden daher nach den Bezeichnungen 10a) und 11a)

$$B_i = 0, C_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n - 1). \dots \dots \dots 53)$$

Ferner ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (A_{p,q})^2}{\partial z'_i} = -A_{p,q},$$

wenn $m = i$, d. h. wenn $p + q = i$, aber $= 0$, wenn $p + q$ nicht $= i$. Die Normalgleichungen der dritten Reihe werden also:

$$D_i = 0, (i = 0, 1, \dots, 2n) \dots \dots \dots 54)$$

Endlich ist:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (A_{p,q})^2}{\partial A} = \frac{p-q}{2n} \cdot A_{p,q}$$

Also wird die letzte Normalgleichung:

$$\Sigma \Sigma \frac{p-q}{2n} \cdot A_{p,q} = 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{2n} \Sigma \Sigma p \cdot A_{p,q} - \frac{1}{2n} \Sigma \Sigma q \cdot A_{p,q} = 0,$$

oder auch:

$$\frac{1}{2n} \cdot (\Sigma p \cdot B_p - \Sigma q \cdot C_q) = 0 \dots \dots \dots 55)$$

Bei Anwendung der zweiten von den beiden oben bezeichneten Methoden zur Bestimmung der mittleren Fehler hat man, wenn (u_i) gefunden werden soll, hiernach die von den Beobachtungen $a_{p,q}$ abhängigen konstanten Glieder der Normalgleichungen durch 0 zu ersetzen, ausgenommen in der Normalgleichung $B_i = 0$ selbst, in welcher das konstante Glied, also b_i , da es links und nicht rechts steht, durch -1 ersetzt werden muss, d. h. man muss, wenn die konstanten Glieder jetzt eingeklammert werden, setzen:

$$\left. \begin{aligned} (b_1) = 0, (b_2) = 0 \dots (b_{i-1}) = 0, (b_i) = -1, (b_{i+1}) = 0, \dots (b_{n-1}) = 0 \\ (c_1) = (c_2) = \dots (c_{n-1}) = 0 \\ (d_0) = (d_1) \dots = (d_{2n}) = 0 \\ \Sigma p \cdot (b_p) - \Sigma q \cdot (c_q) = 0 \end{aligned} \right\} \dots 56)$$

Von den $4n + 3$ Grössen b_i, c_i, d_i fehlen hier noch:

$$b_0, b_n, c_0, c_n.$$

Sie sind mit Hilfe der Identitäten 13) und 14) zu ergänzen. Da die (d_i) ohne Ausnahme $= 0$ sind, so folgt nach 13) und 56)

$$\begin{aligned} (b_0) + (b_n) - 1 &= 0 \\ (c_0) + (c_n) &= 0 \end{aligned}$$

und aus 14) und 56)

$$\sum p (b_p) = \sum q (c_q) = 0$$

d. h.

$$\begin{aligned} -i + n (b_n) &= 0 \\ n (c_n) &= 0 \end{aligned}$$

daher:

$$(b_n) = \frac{i}{n}, (c_n) = 0$$

und durch Einsetzen in die vorigen Gleichungen:

$$(b_0) = \frac{n-i}{n}, (c_0) = 0.$$

Um also (u_i) zu ermitteln, ist zu setzen:

$$(b_0) = \frac{n-i}{n}, (b_i) = -1, (b_n) = \frac{i}{n} \dots \dots \dots 57)$$

während die übrigen (b_p) , sowie sämtliche (c_i) und sämtliche $(d_i) = 0$ zu machen sind.

Man kann nun in die Normalgleichungen 53) und 54) ebenfalls an Stelle der x_i, y_i und z_i die u_i, v_i, z'_i und \angle einführen. Dann müssten aber auch die Operationen I bis XI unter 8 eine entsprechende Abänderung erfahren. Da dieselben aber die u_i und v_i ganz unabhängig von den gemachten Annahmen 8) und 9) ergeben, so können sie auch hier ohne diese Abänderung, also so wie sie sind, zur Bestimmung der (u_i) verwendet werden.

Dies soll daher geschehen. Ausserdem sollen die ferner eingeführten Grössen, also die e_i, f_i u. s. w. jetzt auch eingeklammert, d. h. mit $(e_i) (f_i)$ u. s. w. bezeichnet werden.

10. Die mittleren Fehler der inneren Eintheilungsfehler der Striche 1 und n-1.

Die Bestimmung der (u_i) erfordert, wie die Bildung der (e_i) nach 16) zeigt, eine Trennung der Fälle $i = 1$ und $i = n - 1$ von den übrigen Fällen, in welchen i eine der Zahlen 2, 3, . . . n - 3, n - 2 ist. Es sei also:

$$i = 1,$$

mithin:

$$(b_0) = \frac{n-1}{n}, (b_1) = -1, (b_n) = \frac{1}{n} \dots \dots \dots 57a)$$

alle übrigen (b) , sämtliche (c) und (d) sind gleich 0.

Man findet:

$$(e_1) = \frac{2n-1}{n}, (e_2) = -1, (e_3) = (e_4) = \dots = (e_{n-1}) = 0, (e_n) = -\frac{1}{n}.$$

$$(f_i) = 0, (g_i) = 0,$$

$$(h_1) = 2n-1, (h_2) = -2(n-1), (h_3) = (h_4) = \dots = (h_{n-1}) = 0, (h_n) = -1.$$

$$(h_1) + (h_2) + \dots + (h_n) = 0 \text{ (Kontrollformel).}$$

$$(\epsilon_1) = 2n-1, (\epsilon_2) = (\epsilon_3) = (\epsilon_4) = \dots = (\epsilon_{n-1}) = +1$$

$$\delta_1 = \frac{2n-1}{1 \cdot 2 \cdot n \cdot (n-1)}, \delta_i = \frac{1}{i(i+1)(n-i)(n+1-i)}$$

oder auch, wenn zur Abkürzung gesetzt:

$$i(i+1)(n-i)(n+1-i) = [i], (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad \dots \quad 58)$$

$$(\delta_1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{[1]}, (\delta_i) = \frac{1}{[i]}, (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$(\gamma_1) = 0, (\gamma_i) = \frac{1}{n} + \frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[i-1]}, (i = 2, 3, \dots, n-1).$$

$$(n+1)(\xi_1) = \frac{2n-1}{n}; (n+1)(\xi_2) = -1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{[1]}$$

$$(n+1)(\xi_i) = -(\gamma_i) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{[1]} - \frac{1}{[2]} \dots - \frac{1}{[i-1]}, i = (3, 4, \dots, n-1)$$

$$(n+1)(\xi_n) = -\frac{1}{n} - (\gamma_n) = -\frac{2}{n} - \frac{1}{[1]} - \frac{1}{[2]} \dots - \frac{1}{[n-1]}$$

$$(n+1) \cdot (x_1) = \frac{2n-1}{n}$$

$$(n+1) \cdot (x_n) = -\frac{1}{n} - \left[\frac{n-1}{[1]} + \frac{n-2}{[2]} + \dots + \frac{1}{[n-1]} \right].$$

Hieraus endlich:

$$(u_1) = (x_1) - \frac{1}{n}(x_n)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \left[\frac{n-1}{[1]} + \frac{n-2}{[2]} + \dots + \frac{1}{[n-1]} \right] \right) \quad 59)$$

Diese Formel für (u_1) soll mit Rücksicht auf die später folgenden Formeln für (u_i) ; $(i = 2, \dots, n-2)$ folgendermassen umgestaltet werden:

Man bemerke zunächst, dass nach 58):

$$[i] = [n-i].$$

Die eckige Klammer kann daher so geschrieben werden:

$$\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} + \frac{3}{[3]} + \dots + \frac{n-1}{[n-1]}$$

Da $[i] = i \cdot (i+1) \cdot (n-i)(n+1-i)$, so ist $\frac{[i]}{i} = (i+1)(n-1)(n+1-i)$.

Setzt man daher:

$$(i+1)(n-i)(n+1-i) = \frac{[i]}{i} = \{i\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad \dots \quad 60)$$

und ferner zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\{1\}} + \frac{1}{\{2\}} + \dots + \frac{1}{\{i\}} = [[i]]. \quad \dots \quad 61)$$

so wird:

$$(u_1) = \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot [[n-1]] \right)$$

Selbstverständlich hat (v_1) denselben Werth wie (u_1) , ebenso auch (u_{n-1}) und (v_{n-1}) , also:

$$(u_1) = (v_1) = (u_{n-1}) = (v_{n-1}) = \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} [[n-1]] \right). \quad \dots \quad 59a)$$

11. Der mittlere Fehler des inneren Eintheilungsfehlers eines beliebigen Striches.

Es sei jetzt i eine der Zahlen

$$2, 3, \dots, n-3, n-2.$$

Dann ist:

$$(b_0) = \frac{n-i}{n}, \quad (b_i) = -1, \quad (b_n) = \frac{i}{n},$$

alle anderen (b_p) , sämmtliche (c) und sämmtliche (d) verschwinden:

$$\begin{aligned} (e_1) &= \frac{n-i}{n}; \quad (e_2) = \dots = (e_{i-1}) = 0; \quad (e_i) = +1; \quad (e_{i+1}) = -1; \quad (e_{i+2}) = \dots \\ &= (e_{n-1}) = 0; \quad (e_n) = -\frac{i}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h_1) &= n-i; \quad (h_2) = \dots = (h_{i-1}) = 0; \quad (h_i) = i(n+1-i); \quad (h_{i+1}) = -(i+1)(n-i); \\ (h_{i+2}) &= \dots = (h_{n-1}) = 0; \quad (h_n) = -i. \end{aligned}$$

Die Kontrolgleichung:

$$(h_1) + (h_2) + (h_3) \dots + (h_n) = 0$$

ist erfüllt.

$$(\epsilon_1) = (\epsilon_2) = \dots = (\epsilon_{i-1}) = n-i; (\epsilon_i) = n+i(n-i); (\epsilon_{i+1}) = (\epsilon_{i+2}) \dots = (\epsilon_{n-1}) = i$$

$$(\delta_1) = \frac{n-i}{[1]}; (\delta_2) = \frac{n-i}{[2]} \dots; (\delta_{i-1}) = \frac{n-i}{[i-1]}$$

$$\begin{aligned} (\delta_i) &= \frac{n+i(n-i)}{[i]} = \frac{n-i}{[i]} + \frac{i}{[i]} + \frac{1}{(i+1)(n+1-i)} \\ &= \frac{n-i}{[i]} + \frac{i}{[n-i]} + \frac{1}{(i+1)(n+1-i)} \end{aligned}$$

$$(\delta_{i+1}) = \frac{i}{[i+1]} = \frac{i}{[n-i-1]}; (\delta_{i+2}) = \frac{i}{[i+2]} = \frac{i}{[n-i-2]} \dots (\delta_{n-1}) = \frac{i}{[n-1]} = \frac{i}{[1]}.$$

$$(\gamma_1) = 0, (\gamma_k) = (n-i) \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[k-1]} \right], (k=2, 3 \dots i)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_{i+k}) &= (n-i) \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[i]} \right] \\ &\quad + i \cdot \left[\frac{1}{[n-i]} + \frac{1}{[n-i-1]} + \dots + \frac{1}{[n-i+1-k]} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(i+1)(n+1-i)}, (k=1, 2 \dots n-i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot (x_i) &= (e_1) + (e_2) + \dots + (e_i) - ((\gamma_1) + (\gamma_2) \dots + (\gamma_i)) \\ &= \frac{2n-i}{n} - (n-i) \cdot \left[\frac{i-1}{[1]} + \frac{i-2}{[2]} + \dots + \frac{i-(i-1)}{[i-1]} + \frac{i-i}{[i]} \right] \\ &= \frac{2n-i}{n} - (n-i) \cdot i \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} \dots + \frac{1}{[i]} \right] \\ &\quad + (n-i) \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} \dots + \frac{i}{[i]} \right] \end{aligned}$$

also nach 61)

$$(n+1) \cdot (x_i) = \frac{2n-i}{n} - (n-i) \cdot i \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} \dots + \frac{1}{[i]} \right] + (n-i) \left[\frac{i}{[i]} \right]$$

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot (x_n) &= (e_1) + (e_2) \dots + (e_n) - ((\gamma_1) + (\gamma_2) \dots + (\gamma_n)) \\ &= \frac{n-2i}{n} - (n-i) \cdot \left[\frac{n-1}{[1]} + \frac{n-2}{[2]} \dots + \frac{n-i}{[i]} \right] \\ &\quad - i \left[\frac{n-i}{[n-i]} + \frac{n-i-1}{[n-i-1]} + \dots + \frac{1}{[1]} \right] - \frac{n-i}{(i+1)(n+1-i)} \\ &= \frac{n-2i}{n} - (n-i) \cdot n \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[i]} \right] \\ &\quad + (n-i) \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} \dots + \frac{i}{[i]} \right] - i \left[\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} \dots + \frac{n-i}{[n-i]} \right] \\ &\quad - \frac{n-i}{(i+1)(n+1-i)} \end{aligned}$$

$$= \frac{n-2i}{n} - (n-i) \cdot n \cdot \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[i]} \right] + (n-i) \cdot [i] - i [n-i] \\ - \frac{n-i}{(i+1)(n+1-i)}.$$

Also endlich:

$$(u_i) = (x_i) - \frac{i}{n} (x_n) \\ = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{2n-i}{n} - (n-i) \cdot i \left[\frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \dots + \frac{1}{[i]} \right] + (n-i) [i] \right. \\ \left. - \frac{(n-2i)i}{n^2} + (n-i) i \left[\frac{1}{[1]} + \dots + \frac{1}{[i]} \right] \right. \\ \left. - \frac{(n-i)i}{n} [i] + \frac{i^2}{n} [n-i] + \frac{(n-i)i}{n(i+1)(n+1-i)} \right\}$$

oder nachdem entsprechende Glieder zusammengezogen.

$$(u_i) = \frac{1}{n(n+1)} \left\{ 2n - \frac{2i(n-i)}{n} + (n-i)^2 \cdot [i] + i^2 [n-i] \right. \\ \left. + \frac{(n-i)i}{(n-i+1)(i+1)} \right\}. \quad \dots \quad 62)$$

Denselben Werth erhält man selbstverständlich auch für u_{n-i} , wie auch 62) zeigt, wenn i mit $n-i$ vertauscht wird (da dann in dem Klammerausdruck das erste, zweite und fünfte Glied unverändert bleiben, während das dritte und vierte Glied sich untereinander vertauschen).

Man ist nach der Herleitung der Formel 62) nicht berechtigt, für i den Werth 1 oder $n-1$ zu setzen. Würde man es aber dennoch thun, so würde man erhalten:

$$(u_1) = \frac{1}{n(n+1)} \left\{ 2n - \frac{2(n-1)}{n} + (n-1)^2 [1] + [n-1] + \frac{n-1}{2n} \right\},$$

$$\text{oder da } [1] = \frac{1}{\{1\}} = \frac{1}{2 \cdot (n-1) \cdot n}$$

$$(u_1) = \frac{1}{n \cdot n+1} \left\{ 2n - 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-1}{2n} + \frac{n-1}{2n} + [n-1] \right\} \\ = \frac{1}{n+1} \left\{ 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} [n-1] \right\},$$

d. h. denselben Werth, wie in 59a). Mithin gilt 62) auch für den in 10 gesondert behandelten Fall $i=1$ oder $i=n-1$.

Das Endergebniss der Untersuchungen in 10. und 11. ist also folgendes:

Bezeichnet man den mittleren Fehler von u_i durch $[u_i]$, von v_i durch $[v_i]$ und setzt nach 48)

$$[u_i] = w \cdot \sqrt{(u_i)}, \quad [v_i] = w \cdot \sqrt{(v_i)}$$

so wird:

$$(u_i) = (v_i) = (u_{n-i}) = (v_{n-i}) = \frac{1}{n+1} \left\{ 2 - \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{1}{n} \left((n-i)^2 [[i]] + i^2 [[n-i]] \right) + \frac{(n-i)i}{n \cdot (n-i+1)(i+1)} \right\} \dots \dots \dots 63$$

($i = 1, 2, \dots, n-2, n-1$).

12. Ersetzung der strengen Formeln für die mittleren Fehler durch einfache Annäherungsformeln.

Die beiden in der Formel 63) für (u_i) enthaltenen Reihen $[[i]]$ und $[[n-i]]$ sind nicht in rationaler Form summierbar. Ein geschlossener algebraischer Ausdruck für (u_i) , der für alle Werthe von n und i gültig sein würde, existirt also nicht.

Zur Beurtheilung der Grösse der mittleren Fehler und besonders ihrer Schwankungen bei gegebenem n , aber veränderlichem i ist man daher auf Ungleichungen angewiesen, die man aus 63) abzuleiten suchen muss.

Man ordnet, wenn es irgend angeht, die Messungen und Beobachtungen so an, dass die zu bestimmenden Unbekannten, sofern sie einerlei Bedeutung haben, wie hier die u_i resp. v_i , gleiche, oder doch beinahe gleiche mittlere Fehler besitzen. Sehen wir zu, ob die (u_i) dieser Anforderung genügen.

Die rechte Seite der Formel 63) enthält vier Glieder, von denen die beiden letzten immer positiv sind. Daher:

$$(u_i) > \frac{1}{n+1} \left\{ 2 - \frac{2i(n-i)}{n^2} \right\}.$$

Das Produkt $i(n-i)$ kann nie grösser werden als $\frac{n^2}{4}$, daher

$$(u_i) > \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

oder

$$(u_i) > \frac{3}{2(n+1)} \dots \dots \dots 64$$

Um eine brauchbare obere Grenze abzuleiten, bemerke man, dass:

$$(i+1)(n-i)(n-i+1) \geq 2 \cdot (n-i)(n-i+1)$$

also:

$$[[i]] < \frac{1}{2(n-1)n} + \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \dots + \frac{1}{2(n-i)(n-i+1)}$$

Die mittleren Fehler der Strichlagen werden daher nach der Mitte zu um ein geringes kleiner, wie nach dem negativen Gliede in 63), das nach der Mitte zu wächst, mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit anzunehmen war.

Man wird daher zweckmässiger Weise allen inneren Eintheilungsfehlern ein und denselben Werth beilegen, und zwar nach 65)

$$[u_i] = [v_i] = w \cdot \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dots \dots \dots 66)$$

Also z. B. für $n = 10$:

$$[u_i] = [v_i] = w \cdot 0,42640.$$

Man erspart sich dann die unbequeme Berechnung nach der strengen Formel 63) und giebt nach 65) den mittleren Fehler der Bestimmungen sicherlich nicht zu klein, aber auch nur unerheblich zu gross an.

DRITTER ABSCHNITT.

Vergleichung der strengen Ausgleichung mit der von Leman-Thiesen.

13. Die Leman-Thiesen'sche Ausgleichung.

Zur Beurtheilung des Grades der Annäherung, welche die bisher benutzte Leman-Thiesen'sche Ausgleichung gegenüber der strengen Ausgleichung besitzt, ist es nothwendig die mittleren Fehler in beiden Verfahren mit einander zu vergleichen.

Nach Leman-Thiesen setzt man nicht die $a_{p,q}$ selbst als beobachtete Grössen und also:

$$x_p + y_q - z_m + a_{p,q} = 0$$

als die Bedingungen, sondern Differenzen, nämlich $a_{p,q} - a_{p-1,q+1}$ und

$$x_p - x_{p-1} - (x_{q+1} - x_q) + (a_{p,q} - a_{p-1,q+1}) = 0$$

oder, wenn $q-1$ für q geschrieben wird, nach 25)

$$\xi_p - \eta_q + (a_{p,q-1} - a_{p-1,q}) = 0, \quad \left(\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = 1, 2 \dots n \right),$$

d. h., wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$a_{p, q-1} - a_{p-1, q} = a'_{p, q}, \quad (p = 1, 2 \dots n) \quad \dots \dots \dots 67)$$

$$A'_{p, q} \equiv \xi_p - \eta_q + a'_{p, q} = 0 \quad \dots \dots \dots 68)$$

Setzt man, wie früher:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

so werden die Normalgleichungen:

$$n \cdot \xi_p - y_n + b'_p = 0 \quad \dots \dots \dots 69)$$

$$-n \cdot \eta_q + x_n + c'_q = 0 \quad \dots \dots \dots 70)$$

wo:

$$b'_p = a'_{p, 1} + a'_{p, 2} \dots + a'_{p, n}$$

$$c'_q = a'_{1, q} + a'_{2, q} \dots + a'_{n, q}$$

Aus 69) oder aus 70) findet man zunächst durch Addition die Differenz \mathcal{A} der Stablängen:

$$\mathcal{A} = x_n - y_n = -\frac{1}{n} \sum_p b'_p = -\frac{1}{n} \sum_q c'_q \quad \dots \dots \dots 71)$$

ferner:

$$n \cdot x_i - i y_n = -(b'_1 + b'_2 \dots + b'_i),$$

also:

$$\begin{aligned} u_i = x_i - \frac{i x_n}{n} &= -\frac{n(b'_1 + b'_2 + \dots + b'_i) - i(b'_1 + b'_2 + \dots + b'_n)}{n^2} \\ &= -\frac{(n-i)(b'_1 + b'_2 + \dots + b'_i) - i(b'_{i+1} + \dots + b'_n)}{n^2} \quad \dots \dots \dots 72) \end{aligned}$$

oder auch:

$$u_i = -(b''_1 + b''_2 + b''_3 \dots + b''_i) \quad \dots \dots \dots 72a)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$b''_i = \frac{b'_i}{n} - \frac{\sum_p b'_p}{n^2},$$

ebenso:

$$\begin{aligned} v_i = + \frac{(n-i)(c'_1 + c'_2 + \dots + c'_i) - i(c'_{i+1} + \dots + c'_n)}{n} \quad \dots \dots \dots 73) \\ = +(c''_1 + c''_2 + c''_3 \dots + c''_i). \end{aligned}$$

Nachdem \mathcal{A} , u_i und v_i berechnet worden, bilde man aus 72) und 73)

$$\xi_p = x_p - x_{p-1} = u_p - u_{p-1} + \frac{x_n}{n},$$

$$\eta_q = y_q - y_{q-1} = v_q - v_{q-1} + \frac{y_n}{n}.$$

Daher:

$$A'_{p,q} = \xi_p - \eta_q + a'_{p,q} = (u_p - u_{p-1}) - (v_q - v_{q-1}) + \frac{\mathcal{A}}{n} + a'_{p,q} = -b''_p - c''_q + \frac{\mathcal{A}}{n} + a'_{p,q}$$

mit der Massgabe, dass man

$$u_0 = u_n = v_0 = v_n$$

zu setzen habe. Die Summe der Fehlerquadrate wird dann:

$$[V V]' = \Sigma \Sigma (A'_{p,q})^2.$$

Da n^2 Bedingungsgleichungen (68) und $2n - 1$ Unbekannte, \mathcal{A} , u_i und v_i vorhanden waren, so wird der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

$$w' = \sqrt{\frac{[V V]'}{n^2 - (2n - 1)}} = \frac{\sqrt{[V V]'}}{n - 1} \dots \dots \dots 74)$$

Setzt man, wie früher, den mittleren Fehler von u_i

$$= [u_i]' = w' \cdot \sqrt{(u_i)'},$$

so wird, da in 72) jede der Reihen n Grössen $a'_{p,q}$ enthält und jede Grösse $a'_{p,q}$ nur in einer Reihe vorkommt:

$$(u_i)' = \frac{1}{n^2} (n i (n - i)^2 + n (n - i) i^2),$$

oder

$$(u_i)' = (v_i)' = (u_{n-i})' = (v_{n-i})' = \frac{i(n-i)}{n^2} \dots \dots \dots 75)$$

also der mittlere Fehler selbst:

$$[u_i]' = \frac{w'}{n} \cdot \sqrt{i(n-i)} \dots \dots \dots 76)$$

Ferner folgt aus 71)

$$(\mathcal{A})' = \frac{1}{n^2} \cdot n^2 = 1,$$

also

$$[\mathcal{A}]' = w'. \dots \dots \dots 77)$$

Dies ist in kurzer Darstellung das Leman-Thiesen'sche Verfahren. Aus 74) und 75) geht hervor, dass die mittleren Fehler der inneren Eintheilungsfehler hier nach der Mitte zu wachsen und zwar für einigermaßen grosse Werthe von n sehr bedeutend (für $n = 10$ z. B. im Verhältniss 3:5). In der strengen Ausgleichung dagegen nehmen die mittleren Fehler nach der Mitte zu ab, freilich in einem so geringen Maasse, dass es, wie gezeigt, durchaus erlaubt ist, sie alle einander gleich zu setzen.

Wenn man daher auch die Leman-Thiesen'sche Ausgleichung selbst ihrer Einfachheit wegen fernerhin beibehalten will, so muss doch die Berechnung der mittleren Fehler nach den bisher angewandten Formeln 76) und 77) durchaus verworfen und durch eine andere Berechnung ersetzt werden.

Wie dies zu geschehen hat, soll in den nächsten Ausführungen gezeigt werden.

14. Die mittleren Fehler nach der Leman-Thiesen'schen Ausgleichung.

Da die $a'_{p,q}$ Differenzen zweier $a_{p,q}$ sind, so müsste zwischen w' , dem mittleren Fehler der $a'_{p,q}$ und w , dem mittleren Fehler der $a_{p,q}$ die Gleichung stattfinden:

$$w' = w \cdot \sqrt{2} \dots \dots \dots 78)$$

Dass diese Gleichung aber bei Einsetzen der Werthe 46) und 74) für w und w' nicht mehr genau richtig zu sein braucht, ist selbstverständlich, denn dass die Gleichung:

$$[V V]' = 2[V V] \dots \dots \dots 79)$$

in aller Strenge bestehen sollte, ist nicht zu erwarten. Es lässt sich aber beweisen, dass sie mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit beinahe richtig sein wird.

Es ist

$$[V V]' = \sum \sum (A'_{p,q})^2 = \sum \sum (A_{p,q-1} - A_{p-1,q})^2.$$

oder:

$$[V V]' = \sum \sum (A_{p,q-1})^2 + \sum \sum A_{p-1,q}^2 - 2 \sum \sum (A_{p,q-1} \cdot A_{p-1,q}).$$

Diese Gleichung wird beinahe richtig sein, wenn man für die $A_{p,q}$ die nach Formel 3) berechneten Werthe der strengen Ausgleichung gemäss setzt.

Was das dritte Glied

$$- 2 \sum \sum A_{p,q-1} \cdot A_{p-1,q}$$

betrifft, so ist zu erwarten, dass sich die Produkte ungefähr gegen einander aufheben, d. h. man wird mit einem nicht unerheblichen Grad von Genauigkeit dieses Glied = 0 setzen können. Dann wird:

$$[V V]' = \sum \sum (A_{p,q-1})^2 + \sum \sum (A_{p-1,q})^2, \left(\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = 1, 2, \dots, n \right)$$

Es ist:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} (A_{p,q-1})^2 = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n-1} (A_{p,q})^2 = \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n} (A_{p,q})^2 - \sum_{q=1}^{q=n} A_{0,q}^2 - \sum_{p=1}^{p=n-1} (A_{p,n})^2 - A_{0,0}^2 - A_{n,n}^2$$

Ebenso:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} (A_{p-1,q})^2 - \sum_{p=0}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n} A_{p,q}^2 = \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n} (A_{p,q})^2 - \sum_{q=1}^{q=n-1} (A_{n,q})^2 - \sum_{p=1}^{p=n} (A_{p,0})^2 - A_{0,0}^2 - A_{n,n}^2$$

Die von $p = 0$ bis $p = n$ und $q = 0$ bis $q = n$ gehenden und rechts stehenden Doppelsummen würden in der strengen Ausgleichung $[V V]$ sein. In den anderen Gliedern ist $A_{0,0} = A_{n,n} = 0$ zu setzen. Die übrigen $(A_{p,q})^2$ wird man schätzungsweise jedes gleich dem arithmetischen Mittel aller $(A_{p,q})^2$, also $= \frac{[V V]}{(n+1)^2}$ oder vielmehr, da $A_{0,0}$ und $A_{n,n}$ ausfallen $= \frac{[V V]}{(n+1)^2 - 2}$ annehmen.

Dann wird

$$\sum \sum (A_{p,q-1})^2 = \sum \sum (A_{q,p-1})^2 = [V V] - \frac{n}{(n+1)^2 - 2} [V V] - \frac{n-1}{(n+1)^2 - 2} [V V].$$

Daher:

$$[V V]' = [V V] \left(2 - \frac{4n-2}{(n+1)^2 - 2} \right).$$

Das Glied $\frac{4n-2}{(n+1)^2}$ wird, wenn n einigermassen gross, ein geringer Bruchtheil von 2. Für $n = 10$ ist z. B. $\frac{4n-2}{(n+1)^2 - 2} = \frac{38}{119}$, das ist noch nicht der sechste Theil von 2. Es kann auch um so eher vernachlässigt werden, als man bei den durch die Leman-Thiesen'sche Ausgleichung bestimmten $A'_{p,q}$ nicht im Stande sein wird, die hier nicht ermittelten $A_{p,q}$ so zu ergänzen, wie sie der strengen Ausgleichung entsprechen würden. Da nun $[V V]$ das Minimum aller möglichen $\sum \sum A_{p,q}^2$ ist, so würde dieses Minimum hier durch einen etwas grösseren Werth ersetzt werden müssen.

Man kann daher mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass in der That ziemlich genau:

$$[V V]' = 2 [V V] \quad 80)$$

also auch:

$$w' = w \sqrt{2}$$

sein würde. (Vergleiche das Beispiel am Schlusse dieser Abhandlung.)

Nachdem dieser Punkt erledigt worden, ist es auch nicht schwer, statt der Formeln 76) und 77), welche offenbar ein ganz falsches Bild von der Grösse der mittleren Fehler geben, andere und bessere zu setzen. Man hat hierzu nur noch in den Formeln 71), 72) und 73) hinterher statt der $a'_{p,q}$ die $a_{p,q}$ einzuführen.

Es ist:

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{n} \sum_p b'_p = -\frac{1}{n} \sum_p \sum_q a'_{p,q} = -\frac{1}{n} \sum_p \sum_q a_{p,q-1} + \frac{1}{n} \sum_p \sum_q a_{p-1,q} \quad (p = 1, 2 \dots n).$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q-1} &= \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n-1} a_{p,q} \\ &= \sum_{p=1}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{n,q} + \sum_{p=1}^{p=n-1} a_{p,0} + a_{n,0} \\ &= \sum_{p=1}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + (a_{n,1} + a_{n,2} \dots + a_{n,n-1}) \\ &\quad + (a_{1,0} + a_{2,0} \dots + a_{n-1,0}) + a_{n,0}. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p-1,q} &= \sum_{p=0}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + (a_{0,1} + a_{0,2} \dots + a_{0,n-1}) \\ &\quad + (a_{1,n} + a_{2,n} \dots + a_{n-1,n}) + a_{0,n}. \end{aligned}$$

Daher:

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{n} [(a_{n,1} + \dots + a_{n,n-1}) + (a_{1,0} + \dots + a_{n-1,0}) + a_{n,0} - (a_{0,1} + \dots + a_{0,n-1}) - (a_{1,n} + \dots + a_{n-1,n}) - a_{0,n}].$$

Jedes der $4(n-1) + 2 = 4n - 2$ vorkommenden $a_{p,q}$ hat den Koeffizienten $\pm \frac{1}{n}$, also ist:

$$(\mathcal{A})' = \frac{4n-2}{n^2} \dots \dots \dots 81)$$

und

$$[\mathcal{A}]' = w \cdot \frac{\sqrt{4n-2}}{n} \dots \dots \dots 82)$$

oder auch, nach 78)

$$[\mathcal{A}]' = w' \cdot \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \dots \dots \dots 82a)$$

Welch ein Unterschied zwischen dieser Formel 82 a) und der falschen Formel 77)!

Uebrigens ist der jetzige Werth von $(\mathcal{A})'$ nur noch ganz unerheblich grösser als der aus der strengen Ausgleichung nach 49) für (\mathcal{A}) entstehende Werth. Man findet

$$(\mathcal{A})' - (\mathcal{A}) = \frac{4n-2}{n^2} - \frac{4}{n+1} = \frac{2n-2}{n^2(n+1)} = (\mathcal{A}) \cdot \frac{n-1}{2n^2}.$$

Für $n = 10$ z. B. ist hiernach $(\mathcal{A})'$ um $\frac{9}{200}$ grösser als (\mathcal{A}) . Man kann also unbedenklich setzen:

$$(\mathcal{A})' = (\mathcal{A}) = \frac{4}{n+1} \dots \dots \dots 81a)$$

und

$$[\mathcal{A}]' = [\mathcal{A}] = \frac{w \cdot 2}{\sqrt{n+1}} = \frac{w' \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \dots \dots \dots 82b)$$

Ferner wird nach 72)

$$u_i = \frac{(n-i) \sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=1}^{q=n} a'_{p,q} - i \sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a'_{p,q}}{n^2}$$

$$= \frac{(n-i) \sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q-1} - (n-i) \sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p-1,q} - i \sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q-1}}{n^2}$$

$$+ \frac{i \sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p-1,q}}{n^2}$$

Es ist:

$$\sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q-1} = \sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=0}^{q=n-1} a_{p,q} = \sum_{p=1}^{p=i-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{i,q} + \sum_{p=1}^{p=i} a_{p,0}$$

$$\sum_{p=1}^{p=i} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p-1,q} = \sum_{p=0}^{p=i-1} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q} = \sum_{p=1}^{p=i-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{0,q} + \sum_{p=0}^{p=i-1} a_{p,n}$$

$$\sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q-1} = \sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n-1} a_{p,q} = \sum_{p=i+1}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{n,q}$$

$$+ \sum_{p=i+1}^{p=n} a_{p,0}$$

$$\sum_{p=i+1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p-1,q} = \sum_{p=i}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n} a_{p,q} = \sum_{p=i+1}^{p=n-1} \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{p,q} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{i,q}$$

$$+ \sum_{p=i}^{p=n-1} a_{p,n}$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in die vorige Formel für u_i fallen die Doppelsummen fort. Es wird:

$$u_i = \frac{(n-i) \left(\sum_{p=1}^{p=i} a_{p,0} - \sum_{p=0}^{p=i-1} a_{p,n} - \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{0,q} \right)}{n^2} - i \frac{\left(\sum_{p=i+1}^{p=n} a_{p,0} - \sum_{p=i}^{p=n-1} a_{p,n} + \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{n,q} \right) + n \cdot \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{i,q}}{n^2} \quad . . \quad 83)$$

Man bemerke, dass kein $a_{p,q}$ in zwei verschiedenen Summen enthalten ist. Der Faktor von $n-i$ enthält $(n+2i-1)$ dieser $a_{p,q}$, der Faktor von i enthält $(3n-2i-1)$ solche und der Faktor von n enthält $(n-1)$. Daher

$$\begin{aligned} (u_i)' &= \frac{(n-i)^2(n-1+2i) + i^2(n-1+2(n-i)) + n^2(n-1)}{n^4} \\ &= \frac{(n-1)(n^2 + (n-i)^2 + i^2) + 2(n-i)^2 i + 2i(n-i)^2}{n^4} \\ &= \frac{(n-1)(n^2 + (n-i)^2 + i^2) + 2i(n-i) \cdot n}{n^4} \end{aligned}$$

oder:

$$(u_i)' = \frac{2[n^2(n-1) + i(n-i)]}{n^4} \quad \quad 83a)$$

Auch diese Formel hat ein ganz anderes Aussehen als die bisher benutzte Formel 75).

Für die strenge Ausgleichung ist (u_i) um ein geringes kleiner als $\frac{2}{n+1}$, so dass der Einfachheit wegen $(u_i) = \frac{2}{n+1}$ gesetzt werden konnte.

Um zu untersuchen, ob dieselbe Vereinfachung für $(u_i)'$ zulässig ist, bilde man

$$(u_i)' = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{i(n-i)(n+1) - n^2}{n^4}$$

Der Bruch mit dem Nenner n^4 hat den Zähler -1 für $i=1$ oder $i=n-1$, aber für alle andern Werthe von i ist der Zähler positiv. Für $i=1$ und $i=n-1$ ist also $(u_i)' < \frac{2}{n+1}$, für $i=2, 3, \dots, n-2$ dagegen $(u_i)' > \frac{2}{n+1}$. Aber der Zähler ist für nicht zu kleine Werthe von n stets ein kleiner Bruchtheil des Nenners. Für $n=10$ ist der Nenner = 10 000, der Maximalwerth des Zählers aber ($i=5$) = 11.25 - 100 = 175. Also bleibt in diesem Falle die Abweichung zwischen $(u_i)'$ und $\frac{2}{n+1}$ unter 2 0/0 von $\frac{2}{n+1}$, d. h. man kann

ohne jedes Bedenken auch hier allen Eintheilungsfehlern denselben mittleren Fehler beilegen, nämlich:

$$[u_i]' = [u_i] = [v_i]' = [v_i] = n \cdot \sqrt{\frac{2}{n+1}} = \frac{n'}{\sqrt{n+1}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad . 83b)$$

15. Der innere Eintheilungsfehler zwischen irgend zwei Strichen.

Der innere Eintheilungsfehler ist der Ueberschuss der Strecke zwischen den Strichen 0 und i über den entsprechenden Theil der Gesamtlänge. Er ist der zu dieser Strecke gehörende innere Eintheilungsfehler. Zuweilen braucht man auch den inneren Eintheilungsfehler der zwischen zwei beliebigen Strichen i und j liegenden Strecke $x_j - x_i$.

Derselbe möge mit $u_{i,j}$ bezeichnet werden. Dann ist:

$$u_{i,j} = x_j - x_i - \frac{j-i}{n} \cdot x_n = \left(x_j - \frac{j}{n} \cdot x_n\right) - \left(x_i - \frac{i}{n} \cdot x_n\right), \text{ d. h.}$$

$$u_{i,j} = u_j - u_i \quad 84)$$

für $i = 0$ ist also $u_{0,j} = u_j - u_0 = u_j$, für $j = n$ ist $u_{i,n} = u_n - u_i = -u_i$.

Es sei aber: $i > 0, j < n, j > i$.

Dann folgt nach 83), wenn dort gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 \sum_1^j &= \sum_1^i + \sum_{i+1}^j & \sum_0^{j-1} &= \sum_0^{i-1} + \sum_i^{j-1} \\
 \sum_{i+1}^n &= \sum_{j+1}^n + \sum_{i+1}^j & \sum_i^{n-1} &= \sum_j^{n-1} + \sum_i^{j-1} \\
 u_{i,j} &= \frac{-(j-i) \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{0,q} + (j-i) \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{n,q} + n \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{j,q} - n \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{i,q}}{n^2} \\
 &+ \frac{(j-i) \sum_{p=1}^{p=i} a_{p,0} - (j-i) \sum_{p=0}^{p=i-1} a_{p,n} - (j-i) \sum_{p=j+1}^{p=n} a_{p,0} + (j-i) \sum_{p=j}^{p=n-1} a_{p,n}}{n^2} \\
 &+ \frac{(n-(j-i)) \sum_{p=i+1}^{p=j} a_{p,0} - (n-(j-i)) \sum_{p=i}^{p=j-1} a_{p,n}}{n^2}
 \end{aligned}$$

Die vier ersten Summen dieser Formel enthalten je $n - 1$ der Grössen $a_{p,q}$, die fünfte und sechste enthalten i dieser Grössen, die siebente und achte

enthalten $n-j$ und endlich die neunte und zehnte $j-i$ derselben. Ausserdem kommt kein $a_{p,q}$ in zwei dieser Summen vor. Also ist:

$$(u_{i,j}) = 2 \left[\frac{(j-i)^2 \cdot (n-1) + n^2(n-1) + (j-i)^2 \cdot i + (j-i)^2(n-j)}{n^4} + \frac{(n - (j-i)^2)(j-i)}{n^4} \right]$$

oder, wenn in der eckigen Klammer das dritte und vierte Glied zusammengezogen werden:

$$\begin{aligned} (u_{i,j}) &= 2 \left[\frac{n^2(n-1) + (n-1)(j-i)^2 + (j-i)^2(n-(j-i))}{n^4} + \frac{(n - (j-i)^2)^2(j-i)}{n^4} \right] \\ &= 2 \frac{n^2 \cdot (n-1) + n^2(j-i) - (j-i)^2}{n^4} \end{aligned}$$

oder auch

$$(u_{i,j}) = \frac{2}{n+1} \cdot \left[1 + \frac{(n+1) \cdot (j-i)}{n^2} - \frac{(n+1) \cdot (j-i)^2}{n^4} - \frac{1}{n^2} \right] \quad \dots \quad 85)$$

Für $j-i=1$ folgt der Minimalwerth:

$$(u_{i,i+1}) = \frac{2}{n+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} \right]$$

für $j-i=n-2$, also $j=n-1$, $i=1$ folgt der Maximalwerth:

$$(u_{1,n-1}) = \frac{2}{n+1} \left[2 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^4} \right]$$

Für grosse n schwankt daher der Werth der eckigen Klammer in 85) beinahe zwischen 1 und 2. Diese Schwankungen sind aber nicht so bedeutend, dass man nicht, zumal noch die Quadratwurzel zu ziehen ist, mit einem mittleren Werth, etwa $\frac{3}{2}$ auskommen könnte. D. h. man kann die mittleren Fehler aller $u_{i,j}$ einander gleich und zwar:

$$[u_{i,j}] = w \cdot \sqrt{\frac{3}{n+1}} = w' \cdot \sqrt{\frac{3}{2(n+1)}} \quad \dots \quad 86)$$

setzen.

Für $n = 10$ sind die genauen Werthe:

$$[u_{i, i+1}] = 0,44699 w$$

$$[u_{1, n-1}] = 0,57201 w$$

während die Formel 86) ergibt:

$$[u_{i, j}] = 0,52223 w.$$

Erscheinen die Schwankungen der $[u_{i, j}]$ zu gross, als dass man sie durch einen und denselben Mittelwerth ausdrücken könnte, so kann die strenge Formel 85) unbedenklich vereinfacht werden in:

$$(u_{i, j}) = \frac{2}{n+1} \left[1 + \frac{j-i}{n} \right]. \quad \dots \dots \dots 87)$$

Die entsprechenden Untersuchungen über die mittleren Fehler der $u_{i, j}$ in der strengen Ausgleichung erfordern sehr viel Mühe und analytische Rechnung. Sie sind daher dieser Abhandlung nicht angefügt worden, obgleich der Verfasser sie angestellt hat. Ihr Ergebniss ist, dass hier die Formel 86) noch eher verwendet werden kann, weil die $[u_{i, j}]$ um diesen Mittelwerth weniger bedeutende Abweichungen zeigen.

Als Endergebniss der in diesem Abschnitt angestellten Untersuchungen ist die Thatsache hervorzuheben, dass, selbst wenn man die Leman-Thiesen'sche Methode der Ausgleichung ihrer Einfachheit wegen beibehalten will, so doch die bisher gebrauchten Formeln 76) und 77) für die mittleren Fehler der inneren Theilfehler und des Längenunterschiedes der beiden Stäbe nicht beibehalten werden dürfen, sondern durch die Formeln 82a) und 83b) zu ersetzen sind, welche überdies an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen.

Verfasser ist aber der Meinung, dass es durchaus angebracht ist, die Leman-Thiesen'sche Ausgleichung ganz fallen zu lassen und durch die hier entwickelte strenge Ausgleichung zu ersetzen. Denn die Ausführung der Beobachtungen erfordert soviel Zeit und Arbeit, dass es auf einige Stunden mehr Zeit für ihre Ausgleichung nicht ankommen kann.

16. Beispiel für eine strenge Ausgleichung.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf zwei in Millimeter getheilte Centimeter — $S_k 51$ und B_p , — welche im Jahre 1896 in der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission auf einer Theilmaschine von Repsold nach der Methode des Durchschiebens geprüft worden sind. Die Messungen $a_{p, q}$ sind in partes der Mikroskoptrommeln angegeben, von denen 19,1 auf 1 μ gehen.

I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	VI								
Lage	Strich p auf l	Strich q auf l_1	$a_{p,q}$ abgelesen	Reduktion	$a_{p,q}$ reduziert	Lage	Strich p auf l	Strich q auf l_1	$a_{p,q}$ abgelesen	Reduktion	$a_{p,q}$ reduziert								
{11}	1	10	+ 723	- 725	- 2	{15}	5	10	+ 759	- 758	+ 1								
	2	9	722		- 3		6	9	754		- 4								
	3	8	757		+ 32		7	8	783		+ 25								
	4	7	755		+ 30		8	7	776		+ 18								
	5	6	730		+ 5		9	6	730		- 28								
	6	5	710		- 15		10	5	747		- 11								
	7	4	696		- 29														
	8	3	696		- 29														
	9	2	731		+ 6														
	10	1	727		+ 2														
					7247	$d_{11} = - 3$													
{12}	2	10	671	- 688	- 17	{16}	6	10	628	- 655	- 27								
	3	9	679		- 9		7	9	634		- 21								
	4	8	719		+ 31		8	8	693		+ 38								
	5	7	725		+ 37		9	7	662		+ 7								
	6	6	691		+ 3		10	6	659		+ 4								
	7	5	654		- 34														
	8	4	669		- 19														
	9	3	653		- 35														
	10	2	730		+ 42														
							6191	$d_{12} = - 1$											
{13}	3	10	759	- 776	- 17	{17}	7	10	590	- 632	- 42								
	4	9	770		- 6		8	9	614		- 18								
	5	8	831		+ 55		9	8	651		+ 19								
	6	7	814		+ 38		10	7	674		+ 42								
	7	6	762		- 14														
	8	5	764		- 12														
	9	4	743		- 33														
	10	3	765		- 11														
							6208	$d_{13} = 0$											
	{14}	4	10		773		- 792	- 19	{18}		8	10	630	- 646	- 16				
5		9	796	+ 4	9	9		615		- 31									
6		8	841	+ 49	10	8		693		+ 47									
7		7	804	+ 12															
8		6	790	- 2															
9		5	749	- 43															
10		4	792	0															
					6208	$d_{14} = + 1$													
{15}		5	10	+ 759	- 758	+ 1		{19}		9	10	654	- 669		- 15				
		6	9	754		- 4				10	9	685			+ 16				
	7	8	783	+ 25															
	8	7	776	+ 18															
	9	6	730	- 28															
	10	5	747	- 11															
						4549	$d_{15} = + 1$												
	{16}	6	10	628		- 655	- 27		{20}	10	10	$a_{n,n}$		$- a_{n,n}$	0				
		7	9	634			- 21												
		8	8	693			+ 38												
9		7	662	+ 7															
10		6	659	+ 4															
					3276		$d_{16} = + 1$												
					6191		$d_{17} = + 1$												
					6208		$d_{18} = 0$												
					6208		$d_{19} = + 1$												
					5545		$d_{20} = 0$												

b) Vereinigung der $a_{p,q}$ in einem Quadrate: Berechnung der b_p , der c_q .

Berechnung von \mathcal{A} . Formeln.

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$b_p =$
0	0	-11	+23	-14	-3	-18	+5	+44	+39	+1	+8	+74
1	+11	-21	+29	-22	+6	-8	+2	+35	+50	+11	-2	+91
2	-2	-20	+26	-35	-15	-20	-3	+22	+45	-3	-17	-22
3	+7	-13	+27	-29	-18	-34	-13	+9	+32	-9	-17	-58
4	+10	-10	+28	-38	-15	-28	-5	+30	+31	-6	-19	-22
5	+33	+1	+34	-21	+3	-19	+5	+37	+55	+4	+1	+133
6	+17	-10	+26	-27	-20	-15	+3	+38	+49	-4	-27	+30
7	+4	-24	+9	-42	-29	-34	-14	+12	+25	-21	-42	-156
8	-1	-10	+20	-29	-19	-12	-2	+18	+38	-18	-16	-31
9	-5	-31	+6	-35	-33	-43	-28	+7	+19	-31	-15	-189
10	+20	+2	+42	-11	0	-11	+4	+42	+47	+16	0	+151
$c_q =$	+94	-147	+270	-303	-143	-242	-46	+294	+430	-60	-146	$\sum \sum = +1$

$$\mathcal{A} = \frac{(c_n - c_0) - (b_n - b_0)}{n+1},$$

$$\mathcal{A} = \frac{-240 - 77}{11} = -\frac{317}{11},$$

$$\mathcal{A} = -28,82.$$

Formeln:

$$\left. \begin{aligned} g_i &= -(n+1-i) d_{i-1} + i d_{n+i} \\ e_i &= b_{i-1} - b_i \\ f_i &= c_{i-1} - c_i \\ h_i &= i(n+1-i)(e_i + b_i) + 2g_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3 \dots n),$$

$$\varepsilon_i = h_1 + h_2 + h_3 \dots + h_i, \quad (i = 1, 2 \dots, n-1)$$

$$(0 = h_1 + h_2 + h_3 \dots + h_n) \quad (\text{Kontrollformel}),$$

$$\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{i(i+1)(n-i)(n-i+1)}, \quad (i = 1, 2 \dots, n-1)$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_i = \delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{i-1}, \quad (i = 2, 3 \dots n)$$

$$-\gamma_i + \frac{g_i}{i(n+1-i)} = \beta_i, \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

$$(n+1) \xi_i = e_i + \beta_i,$$

$$(n+1) \eta_i = f_i + \beta_i$$

$$(n+1) x_i = (n+1) (\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_i), \quad (n+1) y_i = (n+1) (\eta_1 + \eta_2 \dots + \eta_i)$$

$$(n+1) u_i = (n+1) \left(x_i - \frac{i}{n} x_n \right), \quad (n+1) v_i = (n+1) \left(y_i - \frac{i}{n} y_n \right).$$

$$z_i = \frac{d_i}{i+1} + \frac{n-i}{n+1} \gamma_{i+1}, \quad (i = 0, 1, 2, 3 \dots n-1)$$

$$z_n = \frac{d_n}{n+1},$$

$$z_{n+1+i} = \frac{d_{n+1+i}}{n-i} - \frac{i+1}{n+1} \gamma_{i+1}, \quad (i = 0, 1, 2, 3 \dots n-1).$$

c) Berechnung der inneren Teilfehler u_i und v_i .

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i =$	0	0	0	+ 2	- 2	+ 3	- 1	- 2	+ 2	+ 2	- 4
$d_{n+1+i} =$	- 3	- 1	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0	+ 1	0	
$g_i =$		- 3	- 2	0	- 10	+ 17	- 9	+ 11	+ 6	+ 5	- 2
$e_i =$		- 17	+ 113	+ 36	- 36	- 155	+ 103	+ 186	- 125	+ 158	- 340
$f_i =$		+ 241	- 417	+ 573	- 160	+ 99	- 196	- 340	- 136	+ 490	+ 86
$e_i + f_i =$		+ 224	- 304	+ 609	- 196	- 56	- 93	- 154	- 261	+ 648	- 254
$i(n+1-i) =$		10	18	24	28	30	30	28	24	18	10
$h_i =$		+ 2234	- 5476	+ 14616	- 5508	- 1646	- 2808	- 4290	- 6252	+ 11674	- 2544
$\varepsilon_i =$		+ 2234	- 3242	+ 11374	+ 5866	+ 4220	+ 1412	- 2878	- 9130	+ 2544	0
$i(i+1)(n-i)(n-i+1) =$		180	432	672	840	900	840	672	432	180	
$\delta_i =$		+ 12,41	- 7,50	+ 16,93	+ 6,98	+ 4,69	+ 1,68	- 4,28	- 21,13	+ 14,13	
$\gamma_i =$		0	+ 12,41	+ 4,91	+ 21,84	+ 28,82	+ 33,51	+ 35,19	+ 30,91	+ 9,78	+ 23,91
$\beta_i =$		- 0,30	- 12,52	- 4,91	- 22,20	- 28,25	- 33,81	- 34,80	- 30,66	- 9,50	- 24,11
$(n+1)\xi_i =$		- 17,30	+ 100,48	+ 31,09	- 58,20	- 183,25	+ 69,19	+ 151,20	- 155,66	+ 148,50	- 364,11
$(n+1)x_i =$	0,00	- 17,30	+ 83,18	+ 114,27	+ 56,07	- 127,18	- 57,99	+ 93,21	- 62,45	+ 86,05	- 278,06
$+ i \cdot 27,806 =$	0,00	+ 27,81	+ 55,61	+ 83,42	+ 111,22	+ 139,03	+ 166,84	+ 194,64	+ 222,45	+ 250,25	+ 278,06
$(n+1) \cdot u_i =$		+ 10,51	+ 138,79	+ 197,69	+ 167,29	+ 11,85	+ 108,85	+ 287,85	+ 160,00	+ 336,30	
$u_i =$		+ 0,96	+ 12,62	+ 17,97	+ 15,21	+ 1,08	+ 9,90	+ 26,17	+ 14,55	+ 30,57	
$(n+1)\eta_i =$		+ 240,70	- 429,52	+ 568,09	- 182,20	+ 70,75	- 229,81	- 374,80	- 166,66	+ 480,50	+ 61,89
$(n+1)y_i =$	0,00	+ 240,70	- 188,82	+ 379,27	+ 197,07	+ 267,82	+ 38,01	- 336,79	- 503,45	- 22,95	+ 38,94
$- i \cdot 3,894 =$	0,00	- 3,89	- 7,79	- 11,68	- 15,58	- 19,47	- 23,36	- 27,26	- 31,15	- 35,05	- 38,94
$(n+1)v_i =$		+ 236,81	- 196,61	+ 367,59	+ 181,49	+ 248,35	+ 14,65	- 364,05	- 534,60	- 58,00	
$v_i =$		+ 21,53	- 17,87	+ 33,42	+ 16,50	+ 22,58	+ 1,33	+ 33,10	- 48,60	- 5,27	
$x_i =$	0,00	- 1,57	+ 7,56	+ 10,39	+ 5,10	- 11,56	- 5,27	+ 8,47	- 5,68	+ 7,82	- 25,28
$y_i =$	0,00	+ 21,88	- 17,17	+ 34,48	+ 17,92	+ 24,35	+ 3,46	- 30,62	- 45,77	- 2,09	+ 3,54
$z_i =$	0,00	+ 10,15	+ 3,57	+ 14,40	+ 15,32	+ 15,73	+ 12,66	+ 8,18	+ 2,00	+ 2,37	- 0,86
$z_{n+1+i} =$	- 0,30	- 2,37	- 1,34	- 7,80	- 12,93	- 18,08	- 22,14	- 22,48	- 7,50	- 21,74	

d) Berechnung der nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen und Berechnung der mittleren Fehler. In jedem Quadrate der folgenden Tabelle ist unter einander eingetragen $x_p, y_q, -z_m, a_{p,q}$ und ihre Summe $= A_{p,q}$, rechts steht $(A_{p,q})^2$.

p/q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0,00 0,00 0,00 0,00	0,00 +21,88 -10,15 -11,00	0,00 -17,17 -3,57 +23,00	0,00 +34,48 -14,40 -14,00	0,00 +17,92 -15,32 -3,00	0,00 +24,35 -15,73 -18,00	0,00 +3,46 -12,66 +5,00	0,00 -30,62 -8,18 +44,00	0,00 -45,77 -2,00 +39,00	0,00 -2,09 -2,37 +1,00	0,00 +3,54 +0,36 +8,00	
	0,0	0,0	0,5	5,3	37,2	0,2	88,4	17,6	27,0	77,4	12,3	141,6
1	-1,57 0,00 -10,15 +11,00	-1,57 +21,88 -3,57 -21,00	-1,57 -17,17 -14,40 +29,00	-1,57 +34,48 -15,32 -22,00	-1,57 +17,92 -15,73 +6,00	-1,57 +24,35 -12,66 -8,00	-1,57 +3,46 -8,18 +2,00	-1,57 -30,62 -2,00 +35,00	-1,57 -45,77 -2,37 +50,00	-1,57 -2,09 +0,36 +11,00	-1,57 +3,54 +0,30 -2,00	
	0,5	18,5	16,8	19,4	43,6	4,4	18,5	0,6	0,1	59,3	0,1	
2	+7,56 0,00 -3,57 -2,00	+7,56 +21,88 -14,40 -20,00	+7,56 -17,17 -15,32 +26,00	+7,56 +34,48 -15,73 -35,00	+7,56 +17,92 -12,66 -15,00	+7,56 +24,35 -8,18 -20,00	+7,56 +3,46 -2,00 -3,00	+7,56 -30,62 -2,37 +22,00	+7,56 -45,77 +0,36 +45,00	+7,56 -2,09 +0,30 +3,00	+7,56 +3,54 +2,37 -17,00	
	4,0	25,0	1,2	75,7	4,8	13,7	36,0	11,6	51,8	7,8	12,3	
3	+10,39 0,00 -14,40 +7,00	+10,39 +21,88 -15,32 -13,00	+10,39 -17,17 -15,73 +27,00	+10,39 +34,48 -12,66 -29,00	+10,39 +17,92 -8,18 -18,00	+10,39 +24,35 -2,00 -34,00	+10,39 +3,46 -2,37 -13,00	+10,39 -30,62 +0,36 +9,00	+10,39 -45,77 +3,00 +32,00	+10,39 -2,09 +2,37 -9,00	+10,39 +3,54 +1,34 -17,00	
	9,0	16,0	20,3	10,2	4,4	1,7	2,3	118,8	9,6	2,9	2,9	
4	+5,10 0,00 -15,32 +10,00	+5,10 +21,88 -15,73 -10,00	+5,10 -17,17 -12,66 +18,00	+5,10 +34,48 -8,18 -38,00	+5,10 +17,92 -2,00 -15,00	+5,10 +24,35 -2,37 -28,00	+5,10 +3,46 +0,36 -5,00	+5,10 -30,62 +0,30 +30,00	+5,10 -45,77 +2,37 +31,00	+5,10 -2,09 +1,34 +6,00	+5,10 +3,54 +7,80 -19,00	
	0,0	1,7	10,9	43,6	36,0	0,8	15,2	23,0	53,3	2,9	6,8	
5	-11,56 0,00 -15,73 +33,00	-11,56 +21,88 -12,66 +1,00	-11,56 -17,17 -8,18 +34,00	-11,56 +34,48 -12,66 -21,00	-11,56 +17,92 -2,37 +3,00	-11,56 +24,35 +0,36 -19,00	-11,56 +3,46 +0,30 +5,00	-11,56 -30,62 +2,37 +37,00	-11,56 -45,77 +1,34 +55,00	-11,56 -2,09 +7,80 +4,00	-11,56 +3,54 +12,93 +1,00	
	32,5	1,7	8,4	0,0	49,0	34,8	7,8	7,8	1,0	3,6	34,8	
6	-5,27 0,00 -12,66 +17,00	-5,27 +21,88 -8,18 -10,00	-5,27 -17,17 -2,00 +26,00	-5,17 +34,48 -2,37 -27,00	-5,17 +17,92 +0,76 -20,00	-5,17 +24,35 +0,30 -15,00	-5,27 +3,46 +2,37 +3,00	-5,27 -30,62 +1,34 +38,00	-5,27 -45,77 +7,80 +49,00	-5,27 -2,09 +12,93 -4,00	-5,27 +3,54 +18,08 -27,00	
	0,8	2,6	2,6	0,0	49,0	19,4	13,0	12,3	33,6	2,6	114,5	
7	+8,47 0,00 -8,18 +4,00	+8,47 +21,88 -2,00 -24,00	+8,47 -17,17 -2,37 +9,00	+8,47 +34,48 +0,36 -42,00	+8,47 +17,92 +0,30 -29,00	+8,47 +24,35 +2,37 -34,00	+8,47 +3,46 +1,34 -14,00	+8,47 -30,62 +7,80 +12,00	+8,47 -45,77 +12,93 +25,00	+8,47 -2,09 +18,08 -21,00	+8,47 +3,54 +22,14 -42,00	
	18,5	19,4	4,4	1,7	5,3	1,4	0,5	5,8	0,4	12,3	62,4	
8	-5,68 0,00 -2,00 -1,00	-5,68 +21,88 -2,37 -10,00	-5,68 -17,17 +0,36 +20,00	-5,68 +34,48 +0,30 -29,00	-5,68 +17,92 +2,37 -19,00	-5,68 +24,35 +1,34 -12,00	-5,68 +3,46 +7,80 -2,00	-5,68 -30,62 +12,93 +18,00	-5,68 -45,77 +18,08 +38,00	-5,68 -2,09 +22,14 -18,00	-5,68 +3,54 +22,48 -16,00	
	75,7	14,4	6,3	0,0	19,4	64,0	13,0	29,2	21,2	13,0	18,5	
9	+7,82 0,00 -2,37 -5,00	+7,82 +21,88 +0,36 -31,00	+7,82 -17,17 +0,30 +6,00	+7,82 +34,48 +2,37 -35,00	+7,82 +17,92 +1,34 -33,00	+7,82 +24,35 +7,80 -43,00	+7,82 +3,46 +12,93 -28,00	+7,82 -30,62 +18,08 +7,00	+7,82 -45,77 +22,14 +79,00	+7,82 -2,09 +22,48 -31,00	+7,82 +3,54 +7,50 -15,00	
	0,3	0,8	9,6	94,1	34,8	9,0	14,4	5,3	10,2	7,8	15,2	
10	-25,28 0,00 +0,36 +20,00	-25,28 +21,88 +0,30 +2,00	-25,28 -17,17 +2,37 +42,00	-25,28 +34,48 +1,34 -11,00	-25,28 +17,92 +7,80 0,00	-25,28 +24,35 +12,93 -11,00	-25,28 +3,46 +18,08 +4,00	-25,28 -30,62 +22,14 +42,00	-25,28 -45,77 +22,48 +47,00	-25,28 -2,09 +7,50 +16,00	-25,28 +3,54 +21,74 0,00	
	24,0	1,2	3,6	0,3	0,2	1,0	0,1	67,2	2,6	15,2	0,0	0,0
	165,3	101,8	89,4	282,2	246,7	238,6	138,4	308,6	261,2	139,7	409,1	

$[V, V] = 2381,0$.

Zur letzten Kontrolle der Ausgleichung bilde man aus den $A_{p,q}$ die B, C und D , welche nach den Normalgleichungen = 0 werden sollen. Man findet

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B_i =$	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,1	+0,1	-0,1	-0,1	+0,1	-0,2
$C_i =$	+0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	+0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1
$D_i =$	0,0	0,0	0,0	0,0	+0,1	0,0	0,0	-0,1	-0,1	0,0	-0,1
$D_{n+1+i} =$	0,0	+0,1	0,0	-0,1	-0,1	0,0	-0,1	-0,1	0,0	0,0	

$$[V V] = \Sigma \Sigma (A_{p,q})^2 = 2381,0.$$

Mittlerer Fehler einer Beobachtung:

$$w = \frac{\sqrt{[V V]}}{9} = 5,42.$$

Mittlerer Fehler von \mathcal{A} :

$$[\mathcal{A}] = w \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} = 3,27.$$

Mittlerer Fehler der u_i und v_i :

$$[u_i] = [v_i] = w \cdot \sqrt{\frac{2}{11}} = 2,31,$$

oder auch, da dieser Werth ein wenig zu gross ist:

$$[u_i] = [v_i] = +2,2.$$

(Nimmt man aber die ganz strenge Formel 63), so nehmen die $[u_i]$ und $[v_i]$ von 2,27 für Strich 1 und Strich 9 zu 2,13 für Strich 5 ab.)

17. Dasselbe Beispiel, behandelt nach der Methode Leman-Thiesen.

p	q	$a_{p,q}$	$a'_{p+1,q}$	p	q	$a_{p,q}$	$a'_{p+1,q}$	p	q	$a_{p,q}$	$a'_{p+1,q}$
0	0	a_{00}		0	9	+ 685	+ 49	4	10	+ 773	+ 23
0	1	+ 776	+ 22	1	8	734	- 28	5	9	796	+ 45
1	0	798		2	7	706	- 35	6	8	841	- 37
0	2	832	- 44	3	6	671	- 15	7	7	804	- 14
1	1	788	+ 19	4	5	656	+ 31	8	6	790	- 41
2	0	807		5	4	687	- 30	9	5	749	+ 43
0	3	821	+ 43	6	3	657	+ 36	10	4	792	
1	2	864	- 49	7	2	693	- 19	5	10	759	- 5
2	1	815	+ 27	8	1	674	+ 5	6	9	754	+ 29
3	0	842		9	0	679		7	8	783	- 7
0	4	894	- 19	0	10	711	+ 3	8	7	776	- 46
1	3	875	+ 48	1	9	714	+ 34	9	6	730	+ 17
2	2	923	- 39	2	8	748	- 36	10	5	747	
3	1	884	+ 23	3	7	712	- 14	6	10	628	+ 6
4	0	907		4	6	698	- 14	7	9	634	+ 59
0	5	900	+ 24	5	5	684	- 1	8	8	693	- 31
1	4	924	- 41	6	4	683	- 22	9	7	662	- 3
2	3	883	+ 62	7	3	661	+ 62	10	6	659	
3	2	945	- 37	8	2	723	- 51	7	10	590	+ 24
4	1	908	+ 43	9	1	672	+ 51	8	9	614	+ 37
5	0	951		10	0	723		9	8	651	+ 23
0	6	853	- 13	1	10	723	- 1	10	7	674	
1	5	840	- 7	2	9	722	+ 35	8	10	630	- 15
2	4	833	- 14	3	8	757	- 2	9	9	615	+ 78
3	3	819	+ 57	4	7	755	- 25	10	8	693	
4	2	876	- 27	5	6	730	- 20	9	10	654	+ 31
5	1	849	+ 16	6	5	710	- 14	10	9	+ 685	
6	0	865		7	4	696	0	10	10	$a_{n,n}$	
0	7	802	- 42	8	3	696	+ 35				
1	6	760	- 22	9	2	731	- 4				
2	5	738	+ 2	10	1	727					
3	4	740	- 20	2	10	671	+ 8				
4	3	720	+ 72	3	9	679	+ 40				
5	2	792	- 44	4	8	719	+ 6				
6	1	748	+ 14	5	7	725	- 34				
7	0	762		6	6	691	- 37				
0	8	832	- 4	7	5	654	+ 15				
1	7	828	- 38	8	4	669	- 16				
2	6	790	- 31	9	3	653	+ 77				
3	5	759	+ 19	10	2	730					
4	4	778	- 6	3	10	759	+ 11				
5	3	772	+ 47	4	9	770	+ 61				
6	2	819	- 50	5	8	831	- 17				
7	1	769	+ 23	6	7	814	- 52				
8	0	+ 792		7	6	762	+ 2				
				8	5	764	- 21				
				9	4	743	+ 22				
				10	3	+ 765					

$p \backslash q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$b'_p =$	$b''_p =$	$u_p =$
1	+ 22	- 44	+ 43	- 19	+ 24	- 13	- 42	- 4	+ 49	+ 3	+ 19	- 1,15	+ 1,15
2	+ 19	- 49	+ 48	- 41	- 7	- 22	- 38	- 28	+ 34	- 1	- 85	- 11,55	+ 12,70
3	+ 27	- 39	+ 62	- 14	+ 2	- 31	- 35	- 36	+ 35	+ 8	- 21	- 5,15	+ 17,85
4	+ 23	- 37	+ 57	- 20	+ 19	- 15	- 14	- 2	+ 40	+ 11	+ 62	+ 3,15	+ 14,70
5	+ 43	- 27	+ 72	- 6	+ 31	- 14	- 25	+ 6	+ 61	+ 23	+ 164	+ 13,35	+ 1,35
6	+ 16	- 44	+ 47	- 30	- 1	- 20	- 34	- 17	+ 45	- 5	- 43	- 7,35	+ 8,70
7	+ 14	- 50	+ 36	- 22	- 14	- 37	- 52	- 37	+ 29	+ 6	- 127	- 15,75	+ 24,45
8	+ 23	- 19	+ 62	0	+ 15	+ 2	- 14	- 7	+ 59	+ 24	+ 145	+ 11,45	+ 13,00
9	+ 5	- 51	+ 35	- 16	- 21	- 41	- 46	- 31	+ 37	- 15	- 144	- 17,45	+ 30,45
10	+ 51	- 4	+ 77	+ 22	+ 43	+ 17	- 3	+ 23	+ 78	+ 31	+ 335	+ 30,45	
$c'_q =$	+ 243	- 364	+ 539	- 146	+ 91	- 174	- 303	- 133	+ 467	+ 85	+ 305		
$c''_q =$	+ 21,25	- 39,45	+ 50,85	- 17,65	+ 6,05	- 20,45	- 33,35	- 16,35	+ 43,65	+ 5,45			
$r'_q =$	+ 21,25	- 18,20	+ 32,65	+ 15,00	+ 21,05	+ 0,60	- 32,75	- 49,10	- 5,45				$A = -30,50$

Die Fehler der Beobachtungen werden nun nach der Formel berechnet:

$$A'_{p,q} = -b''_{p,q} - c''_q + \frac{A}{n} + a'_{p,q} = -\frac{b'_p}{10} - c''_q + a'_{p,q}$$

Sie sind in das folgende quadratische Schema eingetragen, welches zugleich die Summanden $-\frac{b'_p}{10}$, $-c''_q$, $a'_{p,q}$ und die Quadrate der $A'_{p,q}$ enthält.

$p = \backslash q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9	- 1,9
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 22,0	- 44,0	+ 43,0	- 19,0	+ 24,0	- 13,0	- 42,0	- 4,0	+ 49,0	+ 3,0
	- 1,2 1,4	- 6,4 41,0	- 9,8 96,0	- 3,2 10,2	+ 16,0 256,0	+ 5,6 31,4	- 10,5 110,3	+ 10,5 110,3	+ 3,4 11,6	- 4,4 19,4
2	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 8,5
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 19,0	- 49,0	+ 48,0	- 41,0	- 7,0	- 22,0	- 38,0	- 28,0	+ 34,0	- 1,0
	+ 6,2 38,4	- 1,0 1,0	+ 5,6 31,4	- 14,8 219,0	- 4,6 21,2	+ 7,0 49,0	+ 3,9 15,2	- 3,1 9,6	- 1,2 1,4	+ 2,0 4,0
3	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 27,0	- 39,0	+ 62,0	- 14,0	+ 2,0	- 31,0	- 35,0	- 36,0	+ 35,0	+ 8,0
	+ 7,8 60,8	+ 2,6 6,8	+ 13,2 174,2	+ 5,8 33,6	- 2,0 4,0	- 8,4 70,6	+ 0,5 0,3	- 17,5 306,3	- 6,6 43,6	+ 4,6 21,2
4	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2	- 6,2
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 23,0	- 37,0	+ 57,0	- 20,0	+ 19,0	- 15,0	- 14,0	- 2,0	+ 40,0	+ 11,0
	- 4,5 20,3	- 3,7 13,7	- 0,1 0,0	- 8,5 72,3	+ 6,7 44,9	- 0,7 0,5	+ 13,2 174,2	+ 8,2 67,2	- 9,9 98,0	- 0,7 0,5
5	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4	- 16,4
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 43,0	- 27,0	+ 72,0	- 6,0	+ 31,0	- 14,0	- 25,0	+ 6,0	+ 61,0	+ 23,0
	+ 5,3 28,1	- 3,9 15,2	+ 4,7 22,1	- 4,7 22,1	+ 8,5 72,3	- 9,9 98,0	- 8,0 64,0	+ 6,0 36,0	+ 0,9 0,8	+ 1,1 1,2
6	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3	+ 4,3
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 16,0	- 44,0	+ 47,0	- 30,0	- 1,0	- 20,0	- 34,0	- 17,0	+ 45,0	- 5,0
	- 1,0 1,0	- 0,2 0,0	+ 0,4 0,2	- 8,0 64,0	- 2,8 7,8	+ 4,8 23,0	+ 3,7 13,7	+ 3,7 13,7	+ 5,6 31,4	- 6,2 38,4
7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7	+ 12,7
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 14,0	- 50,0	+ 36,0	- 22,0	- 14,0	- 37,0	- 52,0	- 37,0	+ 29,0	+ 6,0
	+ 5,4 29,2	+ 2,2 4,8	- 2,2 4,8	+ 8,4 70,6	- 7,4 54,8	- 3,8 14,4	- 5,9 34,8	- 7,9 62,4	- 2,0 4,0	+ 13,2 174,2
8	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5	- 14,5
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 23,0	- 19,0	+ 62,0	0,0	+ 15,0	+ 2,0	- 14,0	- 7,0	+ 59,0	+ 24,0
	- 12,8 163,8	+ 6,0 36,0	- 3,4 11,6	+ 3,2 10,2	- 5,6 31,4	+ 8,0 64,0	+ 4,9 24,0	- 5,1 26,0	+ 0,8 0,6	+ 4,0 16,0
9	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4	+ 14,4
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 5,0	- 51,0	+ 35,0	- 16,0	- 21,0	- 41,0	- 46,0	- 31,0	+ 37,0	- 15,0
	- 1,9 3,6	+ 2,9 8,4	- 1,5 2,3	+ 16,1 259,2	- 12,7 161,3	- 6,1 37,2	+ 1,8 3,2	- 0,2 0,0	+ 7,7 59,3	- 6,1 37,2
10	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5	- 33,5
	- 21,3	+ 39,5	- 50,9	+ 17,7	- 6,1	+ 20,5	+ 33,4	+ 16,4	- 43,7	- 5,5
	+ 51,0	- 4,0	+ 77,0	+ 22,0	+ 43,0	+ 17,0	- 3,0	+ 23,0	+ 78,0	+ 31,0
	- 3,8 14,4	+ 2,0 4,0	- 7,4 54,8	+ 6,2 38,4	+ 3,4 11,6	+ 4,0 16,0	- 3,1 9,6	+ 5,9 34,8	+ 0,8 0,6	- 8,0 64,0
$\sum_p (A'_{p,q})^2$	361,0	130,9	397,4	799,6	665,3	404,1	449,3	666,3	251,3	376,1

$$\sum_p \sum_q (A'_{p,q})^2 = [V V]' = 4501,3$$

$$w' = \frac{\sqrt{[V_1 V]'}}{q} = 7,455$$

Mittlerer Fehler von \mathcal{A} :

$$[\mathcal{A}] = 7,455 \cdot \sqrt{\frac{2}{11}} = 3,18.$$

Mittlerer Fehler der u_i und v_i :

$$[u_i] = [v_i] = \frac{7,455}{\sqrt{11}} = 2,25.$$

18. Vergleichung der Leman-Thiesen'schen mit der strengen Methode auf Grund des in 16 und 17 durchgerechneten Beispiels.

Zunächst zeigt schon ein flüchtiger Blick, dass die strenge Methode einen etwas grösseren Aufwand von Rechnung erfordert, der aber bei Anwendung geeigneter Rechenformulare keine grossen Beschwerden verursacht.

Die Abweichungen der Ergebnisse halten sich innerhalb der zugehörigen mittleren Fehler. Denn es ist:

Strenge Methode			Methode Leman-Thiesen			Unterschied
Grösse	A	Mittlerer Fehler	Grösse	B	Mittlerer Fehler	$A-B$
\mathcal{A}	$-28,8 pt$	$\pm 3,3$	\mathcal{A}	$-30,5 pt$	$\pm 3,2$	$+1,7 pt$
u_1	$+1,0 pt$	$\pm 2,2$	u_1	$+1,2 pt$	$\pm 2,2$	$-0,2 pt$
u_2	$+12,6 "$	"	u_2	$+12,7 "$	"	$-0,1 "$
u_3	$+18,0 "$	"	u_3	$+17,9 "$	"	$+0,1 "$
u_4	$+15,2 "$	"	u_4	$+14,7 "$	"	$+0,5 "$
u_5	$+1,1 "$	"	u_5	$+1,4 "$	"	$-0,3 "$
u_6	$+9,9 "$	"	u_6	$+8,7 "$	"	$+1,2 "$
u_7	$+26,2 "$	"	u_7	$+24,5 "$	"	$+1,7 "$
u_8	$+14,6 "$	"	u_8	$+13,0 "$	"	$+1,6 "$
u_9	$+30,6 "$	"	u_9	$+30,5 "$	"	$+0,1 "$
v_1	$+21,5 pt$	$\pm 2,2$	v_1	$+21,3 pt$	$\pm 2,2$	$+0,2 pt$
v_2	$-17,9 "$	"	v_2	$-18,2 "$	"	$+0,3 "$
v_3	$+33,4 "$	"	v_3	$+32,7 "$	"	$+0,7 "$
v_4	$+16,5 "$	"	v_4	$+15,0 "$	"	$+1,5 "$
v_5	$+22,6 "$	"	v_5	$+21,1 "$	"	$+1,5 "$
v_6	$+1,3 "$	"	v_6	$+0,6 "$	"	$+0,7 "$
v_7	$-33,1 "$	"	v_7	$-32,8 "$	"	$-0,3 "$
v_8	$-48,6 "$	"	v_8	$-49,1 "$	"	$+0,5 "$
v_9	$-5,3 "$	"	v_9	$-5,5 "$	"	$+0,2 "$

Die mittleren Fehler der inneren Eintheilungsfehler, sowie der Differenz Δ der Stablängen sind hiernach bis auf 0,1 *pt* genau nach beiden Methoden gleich gross. Dies liegt nach den Ermittlungen unter 14. daran, dass die Gleichung:

$$[V, V]' = 2 [V V]$$

nahezu erfüllt ist. Denn es ist

$$[V, V] = 2384,0; [V V]' = 4501,3.$$

[Nach den bisher stets benutzten Formeln würden aber die Abweichungen der mittleren Fehler in beiden Methoden sehr erhebliche sein, denn nach 77) wäre $[\Delta] = \pm 7,46$, während die $[u_i]$ und $[v_i]$ von $\pm 2,2$ bis $\pm 3,7$ variiren würden.]

Was die Abweichungen $A - B$ der errechneten Werthe selbst betrifft, so erreichen sie, wie man sieht, niemals die Grösse des mittleren Fehlers. Sie kommen ihm aber für einige Striche ziemlich nahe, und die Wahrscheinlichkeit ist daher sehr gross, dass sie in anderen Fällen auch die mittleren Fehler überschreiten können. Die Leman-Thiesen'sche Methode leistet also nicht Bürgschaft dafür, dass die errechneten Werthe innerhalb der mittleren Fehler mit den strengen Werthen übereinstimmen.

[Auffallend ist die Thatsache, dass die Abweichungen $A - B$ sowohl bei den u_i als auch bei den v_i vornehmlich nur in einem Sinne stattfinden. Dies trifft namentlich bei den grösseren von ihnen stets zu. Ein Grund hierfür ist nicht ersichtlich; es waltet vielmehr hier wahrscheinlich nur der Zufall. Sollte dies aber nicht sein und in anderen Beispielen dieselbe Thatsache zu Tage treten, so müsste ihr weiter nachgeforscht werden.]

