Die Integralgleichungen

und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik

Ἄλλον ὁρῶμεν λόγον τούτου ἀδελφὸν γνήσιον .. ὃς μετ᾽ ἐπιστήμης γράφεται ἐν τῇ τοῦ μανθάνοντος ψυχῇ ... οὗ ὁ γεγραμμένος εἴδωλον ἄν τι λέγοιτο δικαίως.

Plato.

Die Integralgleichungen

und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik

Vorlesungen

von

Adolf Kneser
Dr. phil. Dr.-Ing. Professor an der Universität zu Breslau

Zweite umgearbeitete Auflage

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
1922

ISBN 978-3-322-98096-0 ISBN 978-3-322-98737-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-98737-2

Reprint of the original edition 1922

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die neue Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine zusammenhängende Darstellung der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern, die in der ersten Auflage stückweise und gelegentlich, wie sie gerade gebraucht wurde, bei den einzelnen Aufgaben entwickelt war. Sodann ist ein Abschnitt über die funktionentheoretischen Methoden hinzugekommen, die in einer neuen Darstellung der Verallgemeinerungen des Fourierschen Integrals gipfeln.

Die wissenschaftliche Arbeit des vergangenen Jahrzehnts habe ich geprüft und, soweit sie in den Rahmen des Werks paßte, berücksichtigt. Auch habe ich mein sachliches und geschichtliches Urteil über manche beim Erscheinen der ersten Auflage schon vorliegende Arbeiten geändert und aus ihnen reichlicher geschöpft als damals.

Wesentliche Förderung verdanke ich wie bei der ersten Auflage der Mitarbeit meiner Schüler, über die ich in den Anmerkungen berichte. Möge denn auch die neue Auflage wie die erste Leser und Freunde finden, die nicht nur fertige Sätze suchen, sondern sich anregen lassen zur Weiterarbeit an dem unerschöpflichen Vorrat mannigfaltiger und doch der allgemeinen Theorie zugänglicher Aufgaben, die unser Gegenstand darbietet.

Breslau, im September 1922.

Adolf Kneser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Integralgleichungen und lineare Wärmeleitung.

Zweiter Abschnitt.

Integralgleichungen und Schwingungen linearer Massensysteme.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern.

Vierter Abschnitt.

Integralgleichungen und die Sturm-Liouvillesche Theorie.

Fünfter Abschnitt.

Wärmeleitung und Schwingungen in Gebieten von zwei oder drei Dimensionen.

Sechster Abschnitt.

Funktionentheoretische Methoden.

Siebenter Abschnitt.

Unsymmetrische Kerne und das Dirichletsche Problem.

Erster Abschnitt.

Integralgleichungen und lineare Wärmeleitung.

§ 1.

Wärmeleitung und Wärmequellen.

Ist u die Temperatur eines geraden Stabes von der Länge Eins, der einer Umgebung von der Temperatur Null eingebettet ist; bedeutet ferner x den Abstand von einem seiner Endpunkte, t die in einer gewissen Einheit gemessene Zeit und b eine Konstante, so gilt die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$

und der Fall $b = 0$ bedeutet, daß keine Wärme seitlich ausgestrahlt wird. Diese Gleichung beruht auf den Annahmen, daß die seitliche Strahlung der Temperaturdifferenz proportional ist, und daß der Wärmefluß längs des Stabes, d. h. die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt in der Richtung wachsender x durchtretende Wärmemenge der Größe $-\partial u/\partial x$ proportional ist, von der sie sich nur um einen positiven, durch das Material des Stabes bestimmten Faktor unterscheidet.

Ist die Größe $\partial u/\partial x$ an der Stelle $x = \xi$ stetig, so kann man dies durch die Gleichungen

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\xi-0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\xi+0}$$

ausdrücken, indem man die an das Substitutionszeichen gehefteten Symbole $\xi - 0$, $\xi + 0$ wie gewöhnlich dahin deutet, daß die unabhängige Variable von unten oder oben her gegen den Wert ξ konvergiert. Physikalisch bedeutet diese Gleichung, daß von der Seite $x < \xi$ her, sagen wir von links her, ebensoviel Wärme in den Querschnitt $x = \xi$ hereinströmt, wie nach rechts abströmt. Soll daher an der Stelle $x = \xi$ eine Wärmequelle liegen, d. h. soll im ganzen aus dem Querschnitt $x = \xi$ eine Wärmemenge ausströmen, die die einströmende um einen konstanten Betrag übertrifft, so muß eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{\xi+0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{\xi-0} + \text{const.}$$

gelten, speziell etwa die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1,$$

die eine Wärmequelle von der Ergiebigkeit Eins definieren möge, indem wir die links stehende Größe allgemein als **Ergiebigkeit** bezeichnen wollen.

Die Wärmebewegung nun, die durch Quellen und einen beliebig angenommenen Anfangszustand hervorgerufen wird, ist erst bestimmt, wenn über die Art des Ausflusses der Wärme aus den Enden des Stabes Bestimmtes vorausgesetzt wird. Indem das Substitutionszeichen auf die Variable x bezogen wird und durch h und H positive Konstante bezeichnet werden, können die wichtigsten Fälle in folgender Weise gekennzeichnet werden:

(A) $$u\,|^0 = u\,|^1 = 0.$$

(B) $$u\Big|^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^1 = 0.$$

(C) $$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^1 = 0.$$

(D) $$\frac{\partial u}{\partial x} - h u\Big|^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + H u\Big|^1 = 0.$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen liegt auf der Hand: die Enden des Stabes werden auf der festen Temperatur Null gehalten oder adiatherman bedeckt oder lassen Wärme ausstrahlen.

Speziell werde angenommen, die Wärmeverteilung sei stationär, u also von t unabhängig, und an der Stelle $x = \xi$ liege eine Quelle von der Ergiebigkeit Eins. Dann hat man zur Bestimmung der Temperatur w die Gleichungen

$$\frac{d^2 w}{d x^2} - b^2 w = 0, \quad \frac{d w}{d x}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

und eine der Randbedingungen (A), ... (D) zu erfüllen, in denen u durch w zu ersetzen ist.

Diese Aufgabe ist in allen Fällen leicht zu lösen. Die Größe w wird auf den Strecken von $x = 0$ bis $x = \xi$ und von $x = \xi$ bis

$x = 1$ verschiedene analytische Ausdrücke darbieten, im Punkte $x = \xi$ aber einen eindeutig bestimmten Wert haben und stetig sein. Nimmt man z. B. den Fall (A), so geht man davon aus, daß die an einer der Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindenden Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 w}{d x^2} - b^2 w = 0 \tag{1}$$

in der Form

$$\text{const.} \operatorname{Sin} b x, \quad \text{const.} \operatorname{Sin} b(1 - x)$$

dargestellt werden können, wobei die gewöhnlichen Zeichen

$$\operatorname{Sin} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \operatorname{Cos} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

eingeführt sein mögen. Sollen nun jene beiden Ausdrücke an der Stelle ξ dieselben Werte haben, so müssen sie die Form

$$\text{const.} \operatorname{Sin} b(1 - \xi) \operatorname{Sin} b x, \quad \text{const.} \operatorname{Sin} b(1 - x) \operatorname{Sin} b \xi$$

mit derselben Konstanten haben. Setzt man jetzt die Gleichung

$$\left. \frac{d w}{d x} \right|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = 1$$

an, so findet man für $x < \xi$

$$w = \frac{\operatorname{Sin} b(1 - \xi) \operatorname{Sin} b x}{b \operatorname{Sin} b},$$

für $x > \xi$ dagegen

$$w = \frac{\operatorname{Sin} b(1 - x) \operatorname{Sin} b \xi}{b \operatorname{Sin} b}.$$

Im Falle $b = 0$ erhält man speziell die Gleichungen

$$w = x(1 - \xi), \quad x < \xi$$
$$w = \xi(1 - x), \quad x > \xi.$$

Beide Ausdrücke w, der allgemeine wie der spezielle, sind in x und ξ offenbar symmetrisch.

Legen wir ferner die Randbedingung (C) zugrunde, so ist davon auszugehen, daß

$$\operatorname{Cos} b x, \quad \operatorname{Cos} b(1 - x)$$

die Integrale der Gleichung (1) sind, deren Ableitungen an einer der Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden; daraus folgt leicht

$$w = \frac{\operatorname{Cos} b(1 - \xi) . \operatorname{Cos} b x}{b \operatorname{Sin} b}, \quad x < \xi,$$

$$w = \frac{\operatorname{Cos} b(1 - x) . \operatorname{Cos} b \xi}{b \operatorname{Sin} b}, \quad x > \xi.$$

Hier kann nicht ohne weiteres $b = 0$ gesetzt werden. Das entspricht der Tatsache, daß im Falle (C) beide Enden des Stabes adiatherman bedeckt sind, eine Quelle also keinen stationären Wärmezustand ergeben kann, wenn keine Wärme seitlich ausgestrahlt wird. Wohl aber gilt die Gleichung

$$\lim_{b=0}\left(w - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2+\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{3}, \quad x < \xi,$$

$$\lim_{b=0}\left(w - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2+\xi^2}{2} - x + \frac{1}{3}, \quad x > \xi;$$

bezeichnet man den hierdurch längs des ganzen Stabes definierten Ausdruck durch $\overline{w}$, so findet man leicht

$$\frac{d^2\overline{w}}{d\,x^2} = 1, \quad \frac{d\,\overline{w}}{d\,x}\bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad \frac{d\,\overline{w}}{d\,x}\bigg|^{0} = \frac{d\,\overline{w}}{d\,x}\bigg|^{1} = 0, \quad \int_0^1 \overline{w}\,d\,x = 0.$$

Auch diese Größe ist physikalisch leicht zu deuten. Sieht man $-\overline{w}$ als Temperatur an, so ist die in das Element $d\,x$ durch Leitung eintretende Wärmemenge der Größe

$$-\frac{d\,\overline{w}}{d\,x}\bigg|_{x}^{x+d\,x} = -\frac{d^2\overline{w}}{d\,x^2}\cdot d\,x$$

proportional; wenn daher in diesem Element noch eine mit $d\,x$ proportionale Wärmemenge etwa als Joulesche Wärme eines galvanischen Stromes erzeugt wird, und die Proportionalitätsfaktoren angemessen gewählt werden, so folgt

$$-\frac{d^2\overline{w}}{d\,x^2}\,d\,x + d\,x = 0;$$

d. h. die eintretenden Wärmemengen, die von Leitung und Strom herrühren, haben die algebraische Summe Null; die Temperatur jeder Stelle ist von der Zeit unabhängig. Man kann also $-\overline{w}$ als stationäre Temperatur bei der Grenzbedingung (C) betrachten, wenn eine negative Quelle wirkt und außerdem überall eine konstante Wärmemenge etwa durch einen Strom erzeugt wird.

Wir bezeichnen den Fall (C) bei der Annahme $b = 0$ als den ausgearteten, da er analytisch wie physikalisch den anderen Fällen gegenüber als Ausnahme erscheint, die stets besonders zu untersuchen ist.

Bei den Randbedingungen (B) und (D) beschränken wir uns auf den Fall $b = 0$ und erhalten bei ersterer

$$w = x, \quad x < \xi; \quad w = \xi, \quad x > \xi;$$

bei letzterer

$$w = \frac{(1+hx)(1+H[1-\xi])}{h+H+hH}, \quad x < \xi,$$

$$w = \frac{(1+h\xi)(1+H[1-x])}{h+H+hH}, \quad x > \xi.$$

§ 2.

Hilfssatz aus der Integralrechnung. Quellenmäßig dargestellte Funktionen.

Die Symmetrie der erhaltenen Ausdrücke bezüglich der beiden Argumente x und ξ ist kein Zufall. Um sie als notwendig einzusehen, beginnen wir mit einem einfachen Lemma allgemeinen Charakters aus der Integralrechnung.

Ist die Funktion fx an der Stelle ξ so unstetig, daß die Grenzwerte $f(\xi+0)$ und $f(\xi-0)$ endlich und bestimmt sind, während die Ableitung $f'x$ an der Stelle ξ stetig bleibt, so gilt die gewöhnliche Grundgleichung der Integralrechnung

$$fb - fa = \int_a^b f'x \, . \, dx$$

nur, solange die Strecke von a bis b die Stelle ξ nicht enthält. Ist dies der Fall und ist ξ die einzige Unstetigkeitsstelle zwischen a und b, so zerlege man das Integrationsintervall durch den Wert ξ in zwei Teile. Dann gilt zunächst die Gleichung

$$f\xi - fa = \int_a^\xi f'x \, . \, dx$$

in dem Sinne, daß für $f\xi$ der Wert genommen wird, gegen den fx konvergiert, wenn man x vom Innern des Integrationsintervalls des letzten Integrals gegen ξ heranrücken läßt, also genauer

$$f(\xi-0) - fa = \int_a^\xi f'x \, . \, dx.$$

Ebenso findet man

$$fb - f(\xi+0) = \int_\xi^b f'x \, . \, dx,$$

also auch

$$fb - fa = f(\xi+0) - f(\xi-0) + \int_a^b f'x \, . \, dx$$

oder $$\int_a^b f'x.dx = fx\Big|_a^{\xi-0} + fx\Big|_{\xi+0}^b = fx\Big|_a^b + fx\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}.$$

Wir wenden diese Formel auf eine der in § 1 hergestellten Größen w an, die wir, um die Abhängigkeit von der Unstetigkeitsstelle vor Augen zu haben, durch $K(x, \xi)$ und als Greensche Funktion bezeichnen wollen; $K'(x, \xi)$, $K''(x, \xi)$ seien die Ableitungen nach dem ersten Argument. Dann hat man die Gleichung

(1) $$K''(x, \xi) - b^2 K(x, \xi) = 0,$$

und wenn $K(x, \eta)$ eine Greensche Funktion mit anderer Unstetigkeitsstelle bedeutet, die dieselben Grenzbedingungen erfüllt,

(2) $$K''(x, \eta) - b^2 K(x, \eta) = 0.$$

Bei der soeben eingeführten Voraussetzung verschwindet der Ausdruck
$$M = K'(x, \xi) K(x, \eta) - K(x, \xi) K'(x, \eta)$$
an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, und gelten die Gleichungen
$$K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = K'(x, \eta)\Big|_{\eta+0}^{\eta-0} = 1.$$

Nun ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2), indem man die erste mit $K(x, \eta)$, die zweite mit $K(x, \xi)$ multipliziert,
$$K''(x, \xi) K(x, \eta) - K''(x, \eta) K(x, \xi) = 0,$$
und die linke Seite ist die offenbar stetige Ableitung des an den Stellen ξ und η unstetigen Ausdrucks M. Das soeben bewiesene Lemma ergibt also
$$0 = \int_0^1 [K''(x, \xi) K(x, \eta) - K''(x, \eta) K(x, \xi)]\, dx$$
$$= M\Big|_0^1 + M\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + M\Big|_{\eta+0}^{\eta-0},$$
oder, da, wie bemerkt, die Gleichungen
$$M|^0 = M|^1 = 0$$
gelten,
$$M\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + M\Big|_{\eta+0}^{\eta-0} = 0,$$
$$K(\xi, \eta) - K(\eta, \xi) = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch im ausgearteten Falle, für den
$$\overline{w} = K(x, \xi)$$

gesetzt wird, aus den dann geltenden Gleichungen

$$K''(x, \xi) - 1 = 0, \quad \int_0^1 K(x, \xi)\, dx = 0.$$

Eine weitere Eigenschaft der Greenschen Funktionen K zeigt sich an der Größe

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha,$$

in der unter $f\alpha$ eine Funktion verstanden werde, die auf der Strecke von 0 bis 1 gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt. Um diese bequem formulieren zu können, wollen wir fx auf einem gewissen Gebiet, etwa der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ stückweise stetig nennen, wenn diese Strecke durch eine endliche Anzahl von Teilpunkten in Teilstrecken zerlegt wird, innerhalb deren die Größe fx stetig ist, während sie einem endlichen Grenzwert zustrebt, wenn man sich von einer beliebig gewählten Seite her einem der Teilpunkte annähert.

Die stückweise stetigen Funktionen dürften die allgemeinsten unstetigen Funktionen einer Variablen sein, die in den Anwendungen vorkommen.

Wenn nun $f\alpha$ auf der Strecke von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ stückweise stetig ist, so gilt die Gleichung

$$F'x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha,$$

wie man erkennt, wenn man Fx aus Integralen zusammensetzt in deren Intervallen der Integrand und seine ersten Ableitungen stetig sind. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$F'x = \int_0^x K'(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha + \int_x^1 K'(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha,$$

so ergibt sich aus ihr für eine Stelle, an der die Funktion fx stetig ist,

$$F''x = \int_0^x K''(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha + K'(x, x - 0) fx$$
$$+ \int_x^1 K''(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha - K'(x, x + 0) fx,$$

oder mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der die Größe K unterworfen ist,

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad F''x &= b^2\int\limits_0^1 K(x,\alpha)f\alpha.d\alpha + [K'(x,x-0)-K'(x,x+0)]fx \\
&= b^2 Fx + [K'(x,x-0)-K'(x,x+0)]fx.
\end{aligned}
$$

An den Unstetigkeitsstellen von fx bleibe die Größe F'' undefiniert.

Nun hat der Kern $K(x,\alpha)$ in allen Fällen des § 1 die Form $\varphi x.\psi\alpha$ oder $\varphi\alpha.\psi x$, je nachdem $x<\alpha$ oder $x>\alpha$ angenommen wird, und φx, ψx sind auf der Strecke von $x=0$ bis $x=1$ mit ihren Ableitungen stetige Funktionen von x; also gelten entsprechend dem Größenverhältnis der Werte x und α die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
K'(x,\alpha) &= \varphi' x.\psi\alpha, \quad x<\alpha,\\
K'(x,\alpha) &= \varphi\alpha.\psi' x, \quad x>\alpha,
\end{aligned}
$$

und hieraus ergibt sich

$$K'(x,x-0) = \lim_{\varepsilon=+0} K'(x,x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=+0} \varphi x.\psi'(x-\varepsilon) = \varphi x.\psi' x,$$

$$K'(x+0,x) = \lim_{\varepsilon=+0} K'(x+\varepsilon,x) = \lim_{\varepsilon=+0} \varphi x.\psi'(x+\varepsilon) = \varphi x.\psi' x;$$

somit folgt

$$K'(x,x-0) = K'(x+0,x),$$

und ebenso

$$K'(x,x+0) = K'(x-0,x),$$

was natürlich auch aus den expliziten in § 1 gegebenen Ausdrücken von K verifiziert werden kann. Die Gleichung (3) ergibt also an jeder Stetigkeitsstelle der Funktion fx

$$F''x - b^2 Fx = -fx.[K'(x-0,x)-K'(x+0,x)] = -fx,$$

und dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man $K(x,\xi)=\overline{w}$ setzt, so daß $K''=1$, $b=0$, unter der Voraussetzung

$$\int\limits_0^1 f\alpha.d\alpha = 0.$$

Der Ausdruck Fx kann offenbar als die Temperatur gedeutet werden, die erzielt wird, wenn die ganze Strecke von 0 bis 1 mit Quellen von der Ergiebigkeit fx belegt wird, deren jede einen stationären Zustand hervorruft. Kann eine Funktion von x in die Form Fx gebracht werden, so sagen wir, sie sei q u e l l e n m ä ß i g d a r g e s t e l l t oder auch kurz q u e l l e n m ä ß i g. Sie erfüllt dann offenbar dieselben Grenzbedingungen wie die Funktion $K(x, \xi)$, mit der sie gebildet ist, und hat stetige Ableitungen erster und stückweise stetige zweiter Ordnung, da fx stückweise stetig sein soll.

Umgekehrt läßt sich eine stetige Funktion Φx, die eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt und die Grenzbedingungen der Größe $K(x, \xi)$ erfüllt, quellenmäßig darstellen; im ausgearteten Falle $K = \overline{w}$ ist die Bedingung

$$\int_0^1 \Phi \alpha . d\alpha = 0 \tag{4}$$

hinzuzufügen.

Sehen wir von diesem Fall zunächst ab, so ist die Größe

$$fx = -\Phi'' x + b^2 \Phi x$$

stückweise stetig. Multipliziert man sie mit $K(x, \xi)$ und addiert sie zu beiden Seiten der mit Φx multiplizierten Gleichung (1), so ergibt sich

$$\Phi x . K''(x, \xi) - \Phi'' x . K(x, \xi) = K(x, \xi) fx,$$
$$\frac{d}{dx}[\Phi x . K'(x, \xi) - \Phi' x . K(x, \xi)] = K(x, \xi) fx.$$

Integriert man und benutzt das obige Lemma der Integralrechnung, so folgt

$$\begin{aligned}[\Phi x . K'(x, \xi) - \Phi' x . K(x, \xi)]\Big|_0^1 + \Phi x . K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} \\ = \int_0^1 K(x, \xi) fx . dx.\end{aligned} \tag{5}$$

Das erste Glied der linken Seite verschwindet aber, da die Funktion Φx dieselben Grenzbedingungen wie die Greensche Funktion erfüllen soll; somit ergibt sich

$$\Phi \xi . [K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi)] = \Phi \xi = \int_0^1 K(x, \xi) fx . dx,$$

d. h. die Funktion Φ erscheint quellenmäßig dargestellt.

Im ausgearteten Falle ist die Gleichung (1) durch die Gleichung

$$K''(x, \xi) - 1 = 0$$

zu ersetzen; das in der Gleichung (5) hierdurch erscheinende Glied verschwindet bei der Voraussetzung (4), und man erhält dasselbe Resultat wie vorher.

§ 3.
Übergang zu den Integralgleichungen und einfachste Eigenschaften derselben.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir das Problem der linearen Wärmeleitung wieder auf und suchen demgemäß Lösungen der Gleichungen
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$
die einer der Grenzbedingungen (A), ... (D) des § 1 unterworfen sind. Dazu führt der klassische Ansatz von Daniel Bernoulli
$$u = T . \varphi x,$$
in welchem T von t allein abhängt. Man findet sofort
$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - b^2\varphi\right),$$
und beide Seiten dieser Gleichung müssen, da sie von verschiedenen unabhängigen Variablen abhängen, derselben Konstanten gleich sein, die wir etwa durch $-\mu - b^2$ bezeichnen wollen. Dann ergibt sich weiter
$$T = e^{-(\mu + b^2)t},$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0, \tag{1}$$
und die Größe φ muß dieselben Grenzbedingungen wie u erfüllen. Sehen wir von dem Falle $\mu = 0$ ab, der offenbar, da φ stetig ist, zu dem trivialen Ergebnisse $\varphi = \text{const.}$ führt, so folgt aus der Bedingung (C)
$$\int_0^1 \varphi\, dx = -\frac{1}{\mu}\frac{d\varphi}{dx}\Big|_0^1 = 0;$$
wenn daher die Funktion φ mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist, so kann sie nach § 2 in allen Fällen, auch dem ausgearteten, quellenmäßig dargestellt werden mittels der zu der betreffenden Grenzbedingung gehörigen Greenschen Funktion, etwa in der Form
$$\varphi x = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha. \tag{2}$$

Hieraus folgt nach § 2
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - b^2\varphi x = -fx;$$

kombiniert man dies Resultat mit der Gleichung (1), so ergibt sich

$$fx = (b^2 + \mu)\,\varphi x,$$

und aus der quellenmäßigen Darstellüng (2) folgt die Beziehung

$$\varphi x = \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha, \tag{3}$$

in der

$$\lambda = b^2 + \mu$$

zu setzen ist, und die wir als **homogene Integralgleichung** mit der Unbekannten φ bezeichnen. Die **Greensche Funktion** $K(x, \alpha)$ heißt der **Kern** der Integralgleichung, jede stetige Lösung φx eine **Eigenfunktion** des Kerns und die Konstante λ, deren Wert zunächst unbekannt ist, der zugehörige **Eigenwert**.

Die durchgeführte Argumentation zeigt, daß, abgesehen von dem Falle $\varphi =$ const., jede der gesuchten Funktionen φ eine Lösung der Integralgleichung (3) ist. Aber auch das Umgekehrte gilt. Denn zunächst erfüllt jede Eigenfunktion dieselben Grenzbedingungen wie der Kern, was, wenn dieser an einem Ende des Stabes verschwindet, unmittelbar ersichtlich ist. Daß dasselbe auch für die anderen Grenzbedingungen gilt, zeigt die Gleichung

$$\begin{aligned}\varphi' x &= \lambda \frac{d}{dx}\int_0^x K(x, \alpha)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha + \lambda \frac{d}{dx}\int_x^1 K(x, \alpha)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha \\ &= \lambda \int_0^1 K'(x, \alpha)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha + \lambda\,[K(x, x-0) - K(x, x+0)]\,\varphi x \\ &= \lambda \int_0^1 K'(x, \alpha)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha.\end{aligned}$$

Im Falle (C), $b = 0$ hat man außerdem die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\,d\alpha = 0,$$

also auch für jede Eigenfunktion

$$\int_0^1 \varphi\alpha\,.\,d\alpha = 0.$$

Sodann ergibt die Integralgleichung (3), indem man ihre rechte Seite mit der Größe Fx des § 2 identifiziert,

$$\frac{d^2\varphi}{d x^2} - b^2 \varphi x = -\lambda \varphi x = -(\mu + b^2)\varphi x$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Um die Verbindung zwischen dem Randwertproblem und der Integralgleichung als fruchtbar zu erkennen, genügt es, einige der einfachsten Eigenschaften der Integralgleichungen mit stetigem, symmetrischem Kern zu entwickeln.

Es seien etwa φ_m, φ_n zwei zu den verschiedenen Eigenwerten λ_m und λ_n gehörige Eigenfunktionen, die wir normiert annehmen können, d. h. so bestimmt, daß die Gleichung

$$\int_0^1 (\varphi\,\alpha)^2 d\alpha = 1$$

gilt. Das ist möglich, da jede Eigenfunktion, mit einer Konstanten multipliziert, Eigenfunktion bleibt. Dann gelten die Gleichungen

$$\varphi_m x = \lambda_m \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha, \qquad \varphi_n x = \lambda_n \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha.$$

Um den allgemeinen Charakter der an die letzten drei Gleichungen zu knüpfenden Folgerungen hervortreten zu lassen, wollen wir sie in der unbestimmten Form

$$(4) \qquad \begin{gathered} \int (\varphi\,\alpha)^2 d\alpha = 1, \quad \varphi_m x = \lambda_m \int K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha, \\ \varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha \end{gathered}$$

schreiben und festsetzen, daß das unbestimmte Integralzeichen stets die Integration über dasjenige Gebiet bedeute, das in der Integralgleichung zugrunde gelegt wird und als Grundgebiet bezeichnet werde. In den bisher behandelten Fällen ist das Grundgebiet die Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$. Nichts hindert aber, das Grundgebiet auch mehrdimensional zu nehmen, wobei dann x und α nicht Variable, sondern Stellen dieses Gebiets bedeuten.

Multipliziert man nun die zweite der Gleichungen (4) mit $\lambda_n \varphi_n x$, die dritte mit $\lambda_m \varphi_m x$ und integriert über das Grundgebiet, so ergibt sich

$$\lambda_n \int \varphi_n x \,.\, \varphi_m x \,.\, d x = \lambda_n \lambda_m \int d x \,.\, \varphi_n x \,.\int K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha \,.\, d \alpha,$$

$$\lambda_m \int \varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, d x = \lambda_m \lambda_n \int d x \,.\, \varphi_m x \,.\int K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha \,.\, d \alpha.$$

Da ferner die Funktionen K und φ im Grundgebiet stetig sind, kann man auf der rechten Seite dieser Gleichungen die Integrationen vertauschen, und erkennt so, daß die rechts stehenden Größen gleich sind. Daraus folgt sofort

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int \varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, d x = 0,$$

und, da λ_m von λ_n verschieden ist,

$$\int \varphi_m \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d \alpha = 0.$$

Eine solche Beziehung zweier Funktionen bezeichnen wir als Orthogonalität und sagen demgemäß: Zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal.

Wäre nun einer der Eigenwerte komplex, der Kern aber reell, so wäre offenbar auch die dem Eigenwert konjugiert imaginäre Größe ein Eigenwert, und die zugehörige Eigenfunktion zu der dem ersteren Wert zugehörigen konjugiert. Beide Eigenfunktionen wären ferner, weil zu verschiedenen Eigenwerten gehörend, zueinander orthogonal; es verschwände also das Integral des Produktes zweier konjugiert imaginärer Größen, was unmöglich ist. Die Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kerns sind also reell.

Aus den erhaltenen Sätzen gewinnt man die Hoffnung, eine willkürliche Funktion auf dem Grundgebiet nach den Eigenfunktionen entwickeln zu können, wenn diese in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Denn macht man den Ansatz

$$f x = \sum_{n}^{1, \infty} A_n \varphi_n x,$$

und integriert, nachdem man mit $\varphi_m x$ multipliziert hat, gliedweise, so findet man für den Fall, daß die Eigenfunktionen alle zu verschiedenen Eigenwerten gehören,

$$\int f \alpha \,.\, \varphi_m \alpha \,.\, d \alpha = A_m \int (\varphi_m \alpha)^2 \, d \alpha = A_m.$$

Eine mit diesen Koeffizienten gebildete Entwicklung heiße eine Fouriersche im weiteren Sinne des Wortes. Die erhaltene Reihe wird besonders einfach, wenn man

$$f x = K(x, y)$$

setzt. Dann findet man nämlich

$$A_n = \int K(\alpha, y)\, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n}$$

und die Fouriersche Entwicklung des Kerns nimmt folgende Gestalt an:

$$K(x, y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \, . \, \varphi_n y}{\lambda_n}.$$

Diese Gleichung wollen wir als bilineare Formel, ihre rechte Seite als bilineare Reihe bezeichnen. Sie ist natürlich ebensowenig bewiesen, wie die Fouriersche Entwicklung von $f x$. Aber eins ist schon hier zu übersehen. Gilt die bilineare Formel und konvergiert die bilineare Reihe gleichmäßig oder sogar gleichmäßig und absolut, so kann mit einer beliebigen stetigen Funktion $f\alpha$ die Gleichung

$$F x = \int K(x, \alpha) f \alpha \, . \, d\alpha = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha \, . \, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha$$

angesetzt werden, und die Integralgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \int F\alpha \, . \, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha &= \int \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha \int K(\alpha, \beta) f\beta \, . \, d\beta \\ &= \int f\beta \, . \, d\beta \int K(\alpha, \beta)\, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int \varphi_n \beta \, . \, f\beta \, . \, d\beta. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten in der Entwicklung von $F x$ sind also nach der Fourierschen Regel gebildet, und es ist unter einer der ausgesprochenen Voraussetzungen betreffs der bilinearen Formel bewiesen, daß jede quellenmäßig darstellbare Funktion in eine gleichmäßig oder gleichmäßig und absolut konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Dasselbe gilt also nach § 2 von jeder den Grenzbedingungen unterworfenen Funktion, die eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt.

Die hiermit angebahnte Entwicklung einer willkürlichen Funktion wird auch beim Problem der Wärmeleitung erfordert. Man bildet eine Lösung von der Form

$$\sum_n A_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n x$$

und sucht sie in einem gegebenen Anfangszustand anzupassen, d. h. die Größen A_n so zu bestimmen, daß man zur Zeit $t = 0$ eine gegebene Funktion fx erhält. Das leistet die Gleichung

$$fx = \sum_n A_n \varphi_n x.$$

§ 4.

Anwendung auf gewöhnliche Fouriersche Reihen.

Die durchgeführten allgemeinen Betrachtungen wenden wir auf die drei Grenzbedingungen (A), (B), (C) an, indem wir $b = 0$ setzen.

Im Falle (A) ist der Kern nach § 1 durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} K(x, \xi) &= x(1-\xi), \quad x < \xi, \\ K(x, \xi) &= \xi(1-x), \quad x > \xi \end{aligned}$$

definiert, und die Eigenfunktionen sind die an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindenden Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0,$$

also die Größen

$$\text{const.} \sin n\pi x,$$

in denen n eine positive ganze Zahl ist, oder, wenn man normiert,

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin n\pi x;$$

der zugehörige Eigenwert ist dann nach § 3

$$\lambda_n = \mu = n^2\pi^2,$$

und die bilineare Formel demnach

$$(2) \qquad K(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi x . \sin n\pi\xi}{n^2},$$

indem links einer der Werte (1) einzusetzen ist.

Diese Gleichung läßt sich direkt beweisen, indem man von der elementaren Formel

$$\frac{1}{2} + \sum_\nu^{1,n} \cos\nu x = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

ausgeht, die man auch auf folgende Weise schreiben kann:

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu}^{1,n}\cos\nu x=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}+\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,.\,\Phi x;$$

dabei ist die Funktion Φx mit ihrer Ableitung stetig auf jeder Strecke, die mit $x=0$ beginnt und nicht bis an die Stelle $x=2\pi$ heranreicht. Integriert man nun, so ergibt sich

$$\frac{x}{2}+\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\int_0^x\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,dx+\int_0^x\Phi x\,.\,\sin(n+\tfrac{1}{2})\,dx$$

$$(3)\qquad =\int_0^{(n+1/2)x}\frac{\sin u}{u}\,du+\int_0^x\Phi x\,.\,\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx,$$

und das letzte Integral der rechten Seite wird, wie die Gleichung

$$\int_0^x\Phi x\,.\,\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx=-\Phi x\cdot\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_0^x+\int_0^x\Phi' x\cdot\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}}\,dx$$

zeigt, mit wachsenden Werten von n beliebig klein. Bei positiven Werten von x, die kleiner als 2π bleiben, erhält man daher die Gleichung

$$\frac{x}{2}+\sum_{n}^{1,\infty}\frac{\sin nx}{n}=\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du,$$

und wenn x ein beliebiges zwischen den Grenzen 0 und 2π gelegenes Intervall durchläuft, das keinen dieser Werte selbst enthält, konvergiert die erhaltene Reihe, wie man aus der Formel (3) leicht ersieht, gleichmäßig. Als Wert des Integrals auf der rechten Seite wird sofort $\frac{1}{2}\pi$ gefunden, indem man $x=\pi$ setzt.

Aus der erhaltenen Gleichung ergibt sich weiter, wenn x_0 und x_1 beliebige Werte zwischen 0 und 2π sind, indem man integriert,

$$\frac{x_1^2-x_0^2}{4}+\sum_{n}^{1,\infty}\frac{\cos nx_0-\cos nx_1}{n^2}=\frac{\pi}{2}(x_1-x_0).$$

Hier konvergiert die links auftretende Reihe in beliebigen Gebieten der Variablen x_0 und x_1 gleichmäßig, ist also stetige

Funktion dieser Größen; da dasselbe von den übrigen Gliedern gilt, so ist die Gleichung auch richtig, wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$(4)\qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi x_1}{2} - \frac{x_1^2}{4}.$$

Ersetzt man nun x_1 durch $\pi - x_1$, indem man x_1 nicht größer als π nimmt, so folgt

$$(5)\qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_n^{1,\infty} \frac{(-1)^n \cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi(\pi - x_1)}{2} - \frac{(\pi - x_1)^2}{4}.$$

Addiert man beide Gleichungen und setzt dann $x_1 = 0$, so findet man

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_n^{1,\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

oder

$$\frac{3}{2}\sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}, \quad \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

womit die Gleichung (4) in die folgende übergeht:

$$(6)\qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^2}{4} - \frac{\pi x_1}{2};$$

dabei wird vorausgesetzt

$$0 \leqq x_1 \leqq 2\pi.$$

Setzt man nun eine der Gleichungen

$$x_1 = \pi\,(\xi - x), \quad x_1 = \pi\,(\xi + x)$$

an, indem man unter x und ξ echte Brüche versteht, deren zweiter der größere ist, so sind die für x_1 geltenden Voraussetzungen erfüllt, und man erhält aus der Gleichung (6)

$$\pi^2 x \xi + 2\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi\xi}{n^2} = \pi^2 x,$$

d. h. die zu erweisende Gleichung (2) unter der Annahme $x < \xi$. Aus der Symmetrie der unendlichen Reihe folgt weiter, daß für den Fall $x > \xi$ die rechte Seite durch $\pi^2 \xi$ zu ersetzen ist, und damit ist die bilineare Formel (2) bewiesen. Die bilineare Reihe konvergiert offenbar gleichmäßig und absolut in jedem Intervall der Größen x und ξ.

Hieraus folgt nach § 3, daß jede quellenmäßig dargestellte Funktion, also jede Funktion, die auf der Strecke von $x = 0$

bis $x = 1$ mit ihrer ersten Ableitung stetig ist, eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt und an den Enden der Strecke verschwindet, auf der bezeichneten Strecke in eine gleichmäßig und absolut konvergente Fouriersche Reihe nach den Eigenfunktionen $\sin n\pi x$ entwickelt werden kann; d. h. setzt man an

$$f x = \sum_n^{1,\infty} A_n \sqrt{2} \sin n\pi x,$$

so haben die Koeffizienten die Werte

$$A_n = \int_0^1 f\alpha . \sqrt{2} \sin n\pi\alpha\, d\alpha.$$

Ebenso leicht läßt sich der Fall der Grenzbedingung (B) behandeln. Die Eigenfunktionen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0,$$

für die die Bedingungen

$$\varphi 0 = 0, \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|^1 = 0$$

bestehen; man erhält offenbar als normierte Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin (n - \tfrac{1}{2})\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und als Eigenwerte

$$\lambda_n = (n - \tfrac{1}{2})^2 \pi^2.$$

Die bilineare Formel ist daher

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin (n - \frac{1}{2})\pi x \sin (n - \frac{1}{2})\pi\xi}{(n - \frac{1}{2})^2}, \quad x < \xi, \\ \xi &= \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin (n - \frac{1}{2})\pi x \sin (n - \frac{1}{2})\pi\xi}{(n - \frac{1}{2})^2}, \quad x > \xi. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man leicht aus den Formeln (4) und (5) ableiten, indem man eine von der anderen subtrahiert, dadurch die Summe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos (2n - 1) x_1}{(2n - 1)^2}$$

bestimmt und in den Reihen (7) das Produkt der Sinus durch eine Differenz zweier Cosinus ersetzt. Die erhaltenen Reihen konvergieren wiederum in beliebigen Strecken gleichmäßig und absolut. Man schließt hieraus nach § 3, daß eine stetige Funktion fx, die den Bedingungen

$$f0 = 0, \quad f'1 = 0$$

unterliegt und eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ in die gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$fx = \sum_{n}^{1,\infty} C_n \sin (n - \tfrac{1}{2}) \pi x$$

entwickelt werden kann, wobei

$$C_n = 2 \int_0^1 f\alpha . \sin (n - \tfrac{1}{2}) \pi \alpha d \alpha.$$

Endlich erschließt man aus der Gleichung (6) leicht die Formeln

$$\frac{x^2 + \xi^2}{2} - \xi + \tfrac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos n \pi x \cos n \pi \xi}{n^2}, \quad x < \xi,$$

$$\frac{x^2 + \xi^2}{2} - x + \tfrac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos n \pi x \cos n \pi \xi}{n^2}, \quad x > \xi.$$

Das ist aber die bilineare Formel für den ausgearteten Fall. Denn die linke Seite ist nach § 1 die zugehörige Greensche Funktion $K(x, \xi)$; die Eigenfunktionen sind nach § 3 die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

für die

$$\left.\frac{d \varphi}{d x}\right|^0 = \left.\frac{d \varphi}{d x}\right|^1 = 0,$$

mit Ausschluß der Konstanten; sie haben also normiert die Gestalt

$$\sqrt{2} \cos n \pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und die Eigenwerte sind $n^2 \pi^2$. Da ferner die bilineare Reihe offenbar gleichmäßig und absolut konvergiert, so ergeben die Sätze des § 3, daß eine Funktion fx, die dieselben Stetigkeitseigenschaften besitzt, wie die ebenso bezeichnete in den Fällen (A) und (B), deren Ableitung an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, die ferner die Gleichung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0 \tag{8}$$

erfüllt, auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ in die gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$fx = \sum_{n}^{1,\infty} C_n \cos n\pi x \tag{9}$$

mit den Koeffizienten

$$C_n = 2\int_0^1 f\alpha \,.\cos n\pi\alpha\, d\alpha$$

entwickelt werden kann.

Läßt man die Relation (8) fallen, so braucht in der Formel (9) nur ein konstantes Glied hinzugefügt zu werden.

§ 5.

Fouriersche Reihen für unstetige Funktionen.

Die erhaltenen Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen leisten noch nicht alles, was in den Anwendungen von der Fourierschen Reihe verlangt wird. Um allgemeinere Resultate zu gewinnen, gehen wir davon aus, daß in jedem der drei behandelten Fälle die bilineare Formel als Fouriersche Entwicklung der Größe $K(x, \xi)$ betrachtet werden kann, die an der Stelle $x = \xi$ einen unstetigen Differentialquotienten aufweist, also nicht mehr zu den Funktionen gehört, die in den Sätzen des § 4 als entwickelbar nachgewiesen sind. Bildet man daher aus beliebig vielen Summanden das Aggregat

$$a_1 K(x, \xi_1) + a_1 K(x, \xi_2) + \cdots,$$

so erhält man eine Funktion, deren erste Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die gegebenen Sprünge $a_1, a_2, \ldots$ aufweist, deren zweite Ableitung stetig ist, und die in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Jetzt sei fx irgend eine die Grenzbedingungen erfüllende Funktion, deren Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ so unstetig ist, daß die Gleichungen

$$f'(\xi_1 - 0) - f'(\xi_1 + 0) = a_1, \quad f'(\xi_2 - 0) - f'(\xi_2 + 0) = a_2, \ldots$$

bestehen, die im übrigen aber von $x = 0$ bis $x = 1$ stetig ist, während $f''x$ nur stückweise stetig zu sein braucht. Dann hat die Differenz

$$\psi x = fx - a_1 K(x, \xi_1) - a_2 K(x, \xi_2) - \cdots$$

an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stetige erste Ableitung und überhaupt eine stückweise stetige zweite Ableitung; sie ist also quellenmäßig darstellbar und gehört zu den Funktionen, die nach § 4 in eine gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden können. Dasselbe gilt daher auch wegen der bilinearen Formel von

$$fx = \psi x + a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \cdots$$

Entwickelt werden kann also eine Funktion, deren Ableitung eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, während im übrigen die in den Sätzen des § 4 geltenden Voraussetzungen bei Bestand bleiben.

Um auch Funktionen darzustellen, die selbst unstetig sind oder die Grenzbedingungen nicht erfüllen, gehen wir von folgendem allgemeinen Satze aus.

Die reelle Variable x werde auf ein Gebiet $\mathfrak{G}$ beschränkt, und in diesem sei die Reihe

$$Fx = \sum_\nu f_\nu x$$

gleichmäßig konvergent. Wenn dann im Gebiet $\mathfrak{G}$ auch die Reihe

$$fx = \sum_\nu f'_\nu x$$

gleichmäßig konvergiert, so gilt in diesem Gebiet die Gleichung

$$\frac{d\,Fx}{d\,x} = fx.$$

Wenn nämlich die Strecke von x_0 bis x_1 dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört, kann man die Reihe f gliedweise von x_0 bis x_1 integrieren und findet

$$\int_{x_0}^{x_1} fx \,.\, dx = \sum_\nu (f_\nu x_1 - f_\nu x_0) = F x_1 - F x_0;$$

dividiert man durch $x_1 - x_0$ und läßt x_1 an x_0 heranrücken, so findet man, da fx stetig ist, sofort die behauptete Gleichung aus dem ersten Mittelwertsatze der Integralrechnung.

Differenziert man, um diesen Satz anzuwenden, die bilineare Formel im Falle (A), auf den wir uns beschränken, gliedweise, so erhält man die Reihe

$$(1)\quad \frac{2}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi\xi \cos n\pi x}{n} = \frac{1}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi(x+\xi)}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - x)}{n},$$

und diese konvergiert nach § 4 gleichmäßig, wenn $|x-\xi|$ über einer positiven, aber beliebig kleinen Grenze liegt, $x+\xi$ dagegen von 2 um mehr als einen festen Betrag verschieden bleibt. Daraus folgt

$$K'(x,\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n\pi x \sin n\pi\xi}{n}, \tag{2}$$

sobald x und ξ auf der Strecke von 0 bis 1 liegen, ohne zusammenzufallen.

Da nun nach § 3 für jede Eigenfunktion die Gleichung

$$\frac{\varphi'_n x}{\lambda_n} = \int_0^1 K'(x,\alpha)\,\varphi_n \alpha \,.\, d\alpha$$

besteht, so kann die erhaltene Reihe, wie auch die allgemeinere

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi'_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

als Fouriersche Reihe betrachtet werden, die man mit der Größe $K'(x,\xi)$ als Funktion von ξ bildet. Die Gleichung (2) gibt daher die Fouriersche Entwicklung einer Funktion von ξ, die an der Stelle x unstetig ist, und zwar in der Weise, daß, wenn man für den Augenblick

$$K'(x,\xi) = \mathfrak{f}\xi$$

setzt, die folgende Gleichung gilt:

$$\mathfrak{f}(x-0) - \mathfrak{f}(x+0) = -1.$$

Der Wert der erhaltenen Reihe an der Stelle $\xi = x$ ist, wie die Gleichung (1) leicht erkennen läßt,

$$\tfrac{1}{2}[\mathfrak{f}(x-0) + \mathfrak{f}(x+0)].$$

Setzt man speziell $x = 0$, so erhält man die Entwicklung

$$K'(0,\xi) = 1 - \xi = \frac{2}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{n},$$

und die dargestellte Funktion erfüllt an der Stelle $\xi = 0$ die Grenzbedingung der Eigenfunktionen nicht; die erhaltene Gleichung gilt hier offenbar nicht mehr. Entsprechendes leistet an der Grenze $\xi = 1$ die Reihe

$$K'(1,\xi) = -\xi = \frac{2}{\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi\xi}{n}.$$

Der mit beliebigen Konstanten $a, b, b_1, \ldots$ gebildete Ausdruck

$$\Psi x = a K'(0, x) - b K'(1, x) - b_1 K'(\eta_1, x) - b_2 K'(\eta_2, x) - \cdots$$

kann daher nach den Eigenfunktionen $\sin n\pi x$ auf die Fouriersche Weise entwickelt werden und sein Verhalten an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, sowie an gewissen Unstetigkeitsstellen ist durch folgende Beziehungen gekennzeichnet:

$$\Psi 0 = a, \ \Psi 1 = b, \ \Psi(\eta_n - 0) - \Psi(\eta_n + 0) = b_n.$$

Der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle ist wie bei $\mathfrak{f}\xi$ das arithmetische Mittel der von oben und unten her angestrebten Grenzwerte, d. h.

$$\tfrac{1}{2}[\Psi(\eta_n - 0) + \Psi(\eta_n - 0)].$$

Jetzt sei fx eine Funktion, die an den Stellen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ unstetig ist, deren erste Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unstetig, im übrigen aber stetig, und deren zweite Ableitung stückweise stetig ist; dabei sei

$$f0 = a, \ f1 = b, \ f'(\xi_m - 0) - f'(\xi_m + 0) = a_m, \ f(\eta_n - 0) - f(\eta_n + 0) = b_n.$$

Dann ist die Differenz

$$Fx = fx - \psi x - \Psi x$$

auf der ganzen Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ mit ihrer ersten Ableitung stetig, ihre zweite Ableitung ist stückweise stetig und die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen werden durch Fx erfüllt. Diese Funktion ist also nach § 4 auf die Fouriersche Weise entwickelbar. Dasselbe gilt aber von ψx und Ψx, mithin auch von fx; nur an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ versagt die Darstellung vielleicht, weil dies beim Ausdruck Ψx möglich ist, und an den Unstetigkeitsstellen liefert die Reihe wie die für Ψx aufgestellte das arithmetische Mittel der Grenzwerte $f(x - 0)$ und $f(x + 0)$.

Hiermit ist gezeigt, daß Funktionen, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stückweise stetig sind, durch die Fouriersche Sinusreihe dargestellt werden können. Ebenso wie die benutzten Reihen $K'(x, \xi)$ als Funktionen von ξ, konvergiert die erhaltene Fouriersche Reihe gleichmäßig auf jeder Strecke, die weder einen Unstetigkeitspunkt der dargestellten Funktion enthält, noch eine solche der Stellen $x = 0$ und $x = 1$, in der die dargestellte Funktion von Null verschieden ist.

Die Methode, die zu diesem Ergebnis geführt hat, ist offenbar allgemeinen Charakters und ergibt für die soeben definierte Klasse von Funktionen fx sofort auch, daß sie nach den Größen $\sin(n-\frac{1}{2})\pi x$ und $\cos n\pi x$ entwickelt werden können, wobei in letzterem Falle die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0$$

aufzustellen oder in der Entwicklung ein konstantes Glied einzufügen ist.

§ 6.

Das Theorem von Hurwitz.

In allen betrachteten Fällen ist es leicht, eine quellenmäßig darstellbare Funktion ψx zu finden, die zu einer beliebigen auf der Strecke von $x=0$ bis $x=1$ stetigen Funktion fx in solcher Beziehung steht, daß das Integral

$$D = \int_0^1 (f\alpha - \psi\alpha)^2 d\alpha$$

so klein ist, wie man will. In der Tat kann man zunächst, abgesehen vom ausgearteten Falle, eine Funktion $\psi_0 x$ konstruieren, die geometrisch durch die Ordinate eines Polygonzuges dargestellt wird, die ferner die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen erfüllt und der Größe

$$D_0 = \int_0^1 (f\alpha - \psi_0\alpha)^2 d\alpha$$

einen beliebig kleinen Wert gibt; denn man kann bewirken, daß die Differenz $|f\alpha - \psi_0\alpha|$ zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=1$ unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt, abgesehen von gewissen Teilstrecken jenes Intervalls, in denen die bezeichnete Größe zwar nicht beliebig klein ist, wohl aber unter einer festen, nur durch die Funktion $f\alpha$ bestimmten Grenze bleibt; dann ist das Integral D_0 offenbar beliebig klein. Ist z. B. eine der Grenzbedingungen

$$\varphi 0 = 0,$$

so wird auch $\psi_0 0 = 0$ zu setzen sein, die Differenz $|\psi_0\alpha - f\alpha|$ also auf einer beliebig kleinen, mit der Stelle $x=0$ beginnenden Strecke nicht beliebig klein sein, aber unter einer festen, durch $f0$ bestimmten Grenze liegen.

Rundet man nun die Ecken des Polygons, dessen Umfang die Punkte mit der Ordinate $\psi_0 x$ enthält, in der Weise ab, daß man in den von zwei zusammenstoßenden Seiten gebildeten hohlen Winkel einen diese Seiten berührenden Kreisbogen legt, so hat der erhaltene Kurvenzug eine Ordinate ψx, die sich bei angemessener Wahl der abrundenden Bögen von $\psi_0 x$ überall um weniger als eine vorgeschriebene Größe unterscheidet; ferner ist die erste Ableitung $\psi' x$ stetig, die zweite Ableitung stückweise stetig und die Grenzbedingungen sind erfüllt. Die Funktion ψx ist also nach § 2 quellenmäßig darstellbar und bewirkt, daß der absolute Wert des Integrals D unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt.

In dem ausgearteten Falle wollen wir der Funktion fx die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha \, . \, d\alpha = 0$$

auferlegen und die Funktion ψx wie bisher konstruieren; dann ist auch der absolute Wert der Größe

$$\eta = \int_0^1 \psi \alpha \, d\alpha$$

beliebig klein und die Funktion $\psi\alpha - \eta$ ist quellenmäßig darstellbar und so beschaffen, daß sie, für $\psi\alpha$ gesetzt, dem Integral D einen beliebig kleinen absoluten Wert gibt.

Die hiernach in allen Fällen definierte Funktion $\psi\alpha$ kann nach § 4 in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden; es gibt daher eine endliche Reihe von der Form

$$\Psi x = b_1 \varphi_1 x + b_2 \varphi_2 x + \cdots + b_m \varphi_m x,$$

die, für ψx gesetzt, das Integral D ebenfalls so klein macht, wie man will. Diese ist offenbar wie ψx quellenmäßig darstellbar; setzt man nämlich

$$\Theta x = b_1 \lambda_1 \varphi_1 x + b_2 \lambda_2 \varphi_2 x + \cdots + b_m \lambda_m \varphi_m x,$$

so findet man sofort

$$\Psi x = \int_0^1 K(x, \alpha) \Theta \alpha \, . \, d\alpha.$$

Jetzt multipliziere man die bilineare Formel

$$K(\alpha, \beta) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n \alpha \, . \, \varphi_n \beta}{\lambda_n}$$

mit $f\alpha . \Theta\beta$ und integriere nach beiden Variablen von 0 bis 1; da die Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind, so ist offenbar, wenn $m > n$,

$$\int_0^1 \Theta x . \varphi_m x . dx = 0,$$

und man erhält die Gleichung

$$\int_0^1\int_0^1 K(\alpha\beta) f\alpha . \Theta\beta . d\alpha\, d\beta = \int_0^1 f\alpha . \Psi\alpha . d\alpha = \sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu,$$

wobei gesetzt ist

$$a_\mu = \int_0^1 f\alpha . \varphi_\mu \alpha . d\alpha,$$

oder

$$2\int_0^1 f\alpha . \Psi\alpha . dx - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu = 0.$$

Da ferner offenbar die Gleichung

$$\int_0^1 (\Psi\alpha)^2 d\alpha = \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2$$

daraus folgt, daß die Funktionen $\varphi_n x$ normiert und zueinander orthogonal sind, so gilt die Gleichung

$$M = \int_0^1 (f\alpha - \Psi\alpha)^2 d\alpha = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha + \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2 - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu,$$

deren linke Seite unter einer vorgeschriebenen Größe liegt und in der Form

$$M = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha + \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2 - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu$$
$$= \sum_\mu^{1,m} (b_\mu - a_\mu)^2 + \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha - \sum_\mu^{1,m} a_\mu^2$$

geschrieben werden kann. Nun gilt aber die Identität

$$N = \int_0^1 (f\alpha - a_1 \varphi_1 \alpha - \cdots - a_m \varphi_m \alpha)^2 d\alpha = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha - \sum_\mu^{1,m} a_\mu^2,$$

die aus den soeben erwähnten Eigenschaften der Funktionen $\varphi_n x$ folgt; die Größe M zerfällt also in zwei nicht negative Summanden, deren einer N ist. Mithin liegt auch diese Größe bei geeigneter Wahl der Zahl m unter einer vorgeschriebenen Grenze.

Sie nimmt aber offenbar ab, wenn man m vergrößert, nähert sich also, wenn man m über alle Grenzen wachsen läßt, der Null an, d. h. es besteht die Gleichung

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty} a_n^2,$$

die ein wichtiges Theorem von Hurwitz ausspricht.

In den Fällen (A) und (B) hat man zu setzen

$$a_n = \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha . \sin n\pi\alpha\, d\alpha, \qquad a_n = \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha . \sin\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\pi\alpha\, d\alpha.$$

Will man im Falle (C) die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0$$

wegschaffen, so braucht man nur

$$c = \int_0^1 f\alpha . d\alpha$$

und $f\alpha - c$ für $f\alpha$ zu setzen; man erhält so die Gleichung

$$\int_0^1 (f\alpha - c)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty} a_n^2, \qquad a_n = \sqrt{2}\int_0^1 (f\alpha - c)\cos n\pi\alpha\, d\alpha$$
$$= \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha . \cos n\pi\alpha\, d\alpha$$

oder

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = c^2 + \sum_n^{1,\infty} a_n^2$$
$$= \left[\int_0^1 f\alpha . d\alpha\right]^2 + 2\sum_n^{1,\infty}\left[\int_0^1 f\alpha . \cos n\pi\alpha\, d\alpha\right]^2.$$

§ 7.

Wärmeleitung im Ringe; Eigenwerte mit mehreren zugehörigen Eigenfunktionen.

Bei der Wärmeleitung in einem Ringe, d. h. einem linearen, in sich zurücklaufenden Leiter, sei x der längs desselben gemessene Abstand von einem festen Anfangspunkte, 1 die Länge des Ringes; dann ist die Temperatur wie in § 3 Integral der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$

und der Umstand, daß zu den Werten $x = 0$ und $x = 1$ derselbe Punkt gehört, fordert die Gleichungen

$$u\Big|_1^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_1^0 = 0.$$

Setzt man daher wie in § 3

$$u = e^{-(\mu + b^2)t}\varphi,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

(1) $$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0$$

mit den Grenzbedingungen

(2) $$\varphi\Big|_0^1 = \frac{d\varphi}{dx}\Big|_0^1 = 0.$$

Die sämtlichen Lösungen dieser Aufgabe sind die Konstante mit dem Werte $\mu = 0$ und die mit beliebigen Koeffizienten A_n, B_n gebildeten Aggregate

$$A_n \cos 2n\pi x + A_n \sin 2n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

zu denen die Werte $\mu = 4n^2\pi^2$ gehören.

Diese Größen erscheinen als Lösungen einer Integralgleichung, deren Kern die stationäre Temperatur ist, die von einer an der Stelle $x = \xi$ wirkenden Wärmequelle herrührt, wenn gleichzeitig die Wärme durch die Oberfläche des Ringes nach einem beliebigen Gesetze ausstrahlt. Eine solche Temperatur werde durch w bezeichnet und durch folgende Gleichungen charakterisiert:

(3) $$\frac{d^2w}{dx^2} - c^2 w = 0, \quad w\Big|_0^1 = \frac{dw}{dx}\Big|_0^1 = 0, \quad \frac{dw}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1;$$

man findet leicht auf der Strecke $0 < x < \xi$

$$w = \frac{\operatorname{Cos} c(-x + \xi - \frac{1}{2})}{2c \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{-\operatorname{Sin} c(-x + \xi - \frac{1}{2})}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}$$

und auf der Strecke $1 > x > \xi$

$$w = \frac{\operatorname{Cos} c(x - \xi - \frac{1}{2})}{2c \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{\operatorname{Sin} c(x - \xi - \frac{1}{2})}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}.$$

Ferner ergeben die Gleichungen (1), (2), (3):

$$\left(w\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + (\mu + c^2)\int_0^1 w\varphi\,dx = 0,$$

oder, wenn

$$w = K(x, \xi), \quad \lambda = \mu + c^2 = 4n^2\pi^2 + c^2$$

gesetzt wird:

(4) $$\varphi x = \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha.$$

Umgekehrt findet man, wenn

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

gesetzt wird und $f\alpha$ eine stückweise stetige Funktion ist,

(5) $$F'x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f\alpha . d\alpha, \quad F''x = c^2 Fx - fx,$$

so daß aus der Integralgleichung (4) immer folgt

$$\varphi'' x = c^2 \varphi x - \lambda \varphi x = -\mu \varphi x.$$

Die Randwertaufgabe (1), (2) und die Integralgleichung (4) haben also auch hier genau dieselben Lösungen, und die zweite Gleichung (5) führt wie früher zu dem Satze, daß jede Funktion, die die Randbedingungen erfüllt, eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, in der Form Fx, also quellenmäßig dargestellt werden kann.

Das Besondere gegenüber den früher behandelten Aufgaben ist hier, daß jedem Eigenwerte

$$\lambda_{n+1} = c^2 + 4n^2\pi^2,$$

abgesehen vom Werte $\lambda_1 = c^2$, zwei zueinander orthogonale normierte Eigenfunktionen

$$\sqrt{2} \cos 2n\pi x, \quad \sqrt{2} \sin 2n\pi x$$

zugehören, denen beliebige, mit konstanten Koeffizienten gebildete Aggregate aus ihnen beigesellt werden können; zum Eigenwert $\lambda_1 = c^2$ gehört als einzige normierte Eigenfunktion die Konstante 1. Als bilineare Formel würde man also geneigt sein, folgende Gleichung anzusetzen:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{c^2} + 2 \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos 2n\pi x \cos 2n\pi \xi + \sin 2n\pi x \sin 2n\pi \xi}{c^2 + 4n^2\pi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} + 2 \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos 2n\pi (x - \xi)}{c^2 + 4n^2\pi^2},$$

und diese Gleichung bestätigt sich leicht, wenn man die Funktion $\mathfrak{Cos}\, ax$ in eine Cosinusreihe entwickelt; man erhält nämlich

$$\mathfrak{Cos}\, ax = 2a \mathfrak{Sin}\, a \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_n^{1,\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{a^2 + n^2\pi^2} \right\}.$$

Hieraus erschließt man nach der Methode des § 5 die bekannten Sätze über die Darstellung einer periodischen Funktion durch die Fouriersche Sinus-Cosinusreihe, wobei für fx dieselben Singularitäten wie in § 5 zugelassen werden.

Schreibt man die bilineare Formel in der Gestalt

$$K(x, \xi) - \frac{1}{c^2} = 2 \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos 2n\pi(x-\xi)}{c^2 + 4\pi^2 n^2},$$

so kann man auch $c = 0$ setzen; die linke Seite geht dann z. B., wenn $x < \xi$ ist, in den Ausdruck

$$\lim_{c=0} \left\{ \frac{\mathfrak{Cof}\, c(\xi - x - \frac{1}{2})}{2c\,\mathfrak{Sin}\,\frac{c}{2}} - \frac{1}{c^2} \right\} = \tfrac{1}{2}(\xi - x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{24},$$

wenn $x > \xi$, in den Wert

$$\tfrac{1}{2}(x - \xi - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{24}$$

über. Bezeichnet man die hiermit definierte symmetrische Funktion von x und ξ durch $K(x, \xi)$, so gilt die Gleichung

$$K(x,\xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\sqrt{2}\cos 2n\pi x \,.\, \sqrt{2}\cos 2n\pi\xi + \sqrt{2}\sin 2n\pi x \,.\, \sqrt{2}\sin 2n\pi\xi}{4\pi^2 n^2},$$

die auch aus den Formeln des § 4 leicht verifiziert werden kann.

Man sieht aus dieser Formel, daß die Größen

$$(6) \qquad \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \quad \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

die beiden zum Eigenwerte $4n^2\pi^2$ gehörigen normierten Eigenfunktionen des neuen Kerns sind, der seinerseits die Gleichungen

$$K''(x, \xi) - 1 = 0, \quad \int_0^1 K(\alpha, x)\,d\alpha = 0$$

erfüllt. Mit diesem Kern sind also, ähnlich wie nach § 3 mit $\overline{w}$, nur die Funktionen fx quellenmäßig darstellbar, die die oben geforderten Eigenschaften besitzen und außerdem die Gleichung

$$(7) \qquad \int_0^1 f\alpha \,.\, d\alpha = 0$$

erfüllen. Nach den Eigenfunktionen (6) sind also nicht beliebige willkürliche Funktionen von der beim vorigen Kern geforderten Beschaffenheit zu entwickeln, sondern nur solche, die die Gleichung (7) erfüllen, was natürlich sofort bewirkt wird, indem man einen konstanten Summanden hinzufügt. Damit ist wiederum die Fouriersche Sinus-Cosinusreihe abgeleitet.

Zweiter Abschnitt.

Integralgleichungen und Schwingungen linearer Massensysteme.

§ 8.

Integralgleichungen und freie Schwingungen.

Zu Anwendungen der Integralgleichungen auf das Gebiet der Mechanik führen die folgenden Betrachtungen.

In einem stetig zusammenhängenden Massensystem von einer Dimension sei dx das Massenelement, x die Gesamtmasse des Stückes vom Anfangspunkt bis zu einem beliebigen Punkte hin. Das System sei imstande, um eine Gleichgewichtslage kleine Schwingungen, d. h. rein periodische Bewegungen von kleiner Amplitude auszuführen. Die Parameter, die die möglichen Lagen des Systems bezeichnen, seien q_n, wobei n hier wie fortan stets eine bestimmte endliche oder unendliche Reihe von Zahlen 1, 2,... repräsentiere; von den Schwierigkeiten des Unendlichen sehen wir ab, solange die entwickelten Formeln nur als Wegweiser dienen. Die Größen q_n seien ferner so gewählt, daß dem Wertsystem $q_n = 0$ die Gleichgewichtslage entspricht, und daß die Differentialgleichungen der kleinen Eigenschwingungen die Gestalt

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = 0$$

annehmen, wobei λ_n positive Konstante seien. Diese Gleichungen ergeben sich als Bewegungsgleichungen nach der Regel von Lagrange, wenn die lebendige Kraft des Systems in der Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dq_n}{dt}\right)^2,$$

die potentielle Energie in der Form

$$V = \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n q_n^2$$

angesetzt wird.

Bei kleinen Schwingungen um die Lage $q_n = 0$ kann die Verrückung jedes Massenpunktes aus seiner Gleichgewichtslage, die wir durch u bezeichnen, als lineare Funktion der Größen q_n angesehen werden; sie sei etwa

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

und sei in jedem Massenelement nur in einer bestimmten Richtung und der ihr entgegengesetzten möglich.

Dann gilt für die lebendige Kraft auch der Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2}\int \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int \left(\sum_n \frac{d q_n}{dt} \varphi_n x\right)^2 dx,$$

in dem das Integralzeichen wie fortan stets die Integration über das ganze Massensystem bezeichne. Vergleicht man die beiden Ausdrücke von T, so ergeben sich sofort die Beziehungen

$$\int (\varphi_n x)^2 dx = 1, \qquad \int \varphi_n x \,.\, \varphi_m x \,.\, dx = 0 \ (m \gtrless n).$$

Auf das betrachtete System, das wir in beliebiger von der Gleichgewichtslage wenig abweichender Lage voraussetzen, wirke von außen her ein Kraftsystem $\mathfrak{K}$, das an jeder Stelle x die Arbeit $X \delta u \, dx$ leistet, wenn die Verrückung u durch $u + \delta u$ ersetzt wird. Da nun offenbar die Gleichung

$$\delta u = \sum_n \varphi_n x \,.\, \delta q_n$$

gilt, wenn der Verschiebung δu an den Parametern q_n die Variationen δq_n entsprechen, so ist die gesamte Arbeitsleistung der Kräfte $\mathfrak{K}$

$$\int X \delta u \, dx = \sum_n \delta q_n \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

oder

$$\sum_n Q_n \delta q_n,$$

wenn die den Parametern q_n entsprechenden Kraftkomponenten im allgemeineren Sinne des Wortes durch die Gleichungen

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

definiert werden.

Die gesamte virtuelle Arbeit, die das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ zusammen mit den inneren Kräften des Systems leistet, ist hiernach

$$-\delta V + \sum_n Q_n \delta q_n = \sum_n \left(Q_n - \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) \delta q_n,$$

und die Bewegungsgleichungen erhalten nach der Regel von Lagrange die Form

$$\frac{d^2 q_n}{d t^2} + \lambda_n q_n = Q_n.$$

Speziell werde das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ so gewählt, daß es das Massensystem im Gleichgewicht hält. Dann bestehen die Gleichungen

$$\frac{d^2 q_n}{d t^2} = 0, \quad q_n = \frac{Q_n}{\lambda_n};$$

da nun allgemein

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

gesetzt wird, so bewirkt das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ die Verrückung

$$u = \sum_n \frac{Q_n \varphi_n x}{\lambda_n} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int X \varphi_n x \,.\, d x.$$

Weiter werde das System $\mathfrak{K}$ dahin spezialisiert, daß nur an einer Stelle $x = \xi$ eine Kraft wirke. Man nähert sich diesem Zustande, wenn man die Funktion X nur in der Nähe der Stelle ξ große, von Null verschiedene Werte annehmen, sie im übrigen verschwinden läßt, dabei aber die Gleichung

$$\int X d x = 1$$

festhält. Dann reduziert sich das die Arbeit darstellende Integral auf den Ausdruck

$$\int X \delta u d x = \delta u \Big|^{x=\xi} \cdot \int X d x = \delta u \Big|^{x=\xi};$$

die Arbeit der punktuell gewordenen Kraft wird also durch die Verrückung δu selbst gemessen, und die Komponente der Kraft in der Richtung der Verrückung u hat die Intensität Eins. Ähnlich reduziert sich die Kraftkomponente Q_n auf die Form

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, d x = \varphi_n \xi \,.\int X d x = \varphi_n \xi,$$

und für die Verrückung erhält man den Ausdruck

$$u = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

der in x und ξ symmetrisch ist und durch $K(x, \xi)$ bezeichnet werde.

Multipliziert man die erhaltene Gleichung mit einer bestimmten, aber beliebig gewählten Funktion $\varphi_m \xi$ und integriert nach ξ über das Massensystem, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\int (\varphi_n x)^2 dx = 1, \qquad \int \varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx = 0 \ (m \gtrless n)$$

sofort die Integralgleichung

$$\varphi_m x = \lambda_m \int K(x, \xi)\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi.$$

Die Funktionen $\varphi_n x$ sind also Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$, der gewissermaßen von der bilinearen Formel ausgehend konstruiert wird. Die zugehörigen Eigenwerte sind λ_n, und die mechanische Bedeutung des Kerns als Verrückung ist vollkommen ersichtlich; wir bezeichnen ihn zweckmäßig auch als Greensche Funktion. Das Grundgebiet ist das ganze bewegte Massensystem.

Diese Betrachtungen brauchen nur wenig abgeändert zu werden, wenn dämpfende Kräfte von gewissen einfachen Typen wirksam sind, nämlich solche, die von einer Zerstreuungsfunktion abhängig sind. Unter einer solchen verstehen wir eine quadratische Form

$$F = \frac{1}{2} \sum b_{mn} \frac{d q_m}{d t} \frac{d q_n}{d t},$$

deren Koeffizienten Konstante sind; setzt man

$$\frac{d q_n}{d t} = \dot{q}_n,$$

so lauten die verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen folgendermaßen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = Q_n, \tag{1}$$

also wenn T und V die vorausgesetzte spezielle Form haben:

$$\frac{d^2 q_n}{d t^2} + \sum_n b_{mn} \frac{d q_m}{d t} + \lambda_n q_n = Q_n.$$

Hieraus aber lassen sich betreffs einer vorausgesetzten Ruhelage des Systems unter der Wirkung der Kräfte $\mathfrak{K}$ genau dieselben Schlüsse ziehen wie oben, da die mit den Koeffizienten b behafteten Glieder wegfallen. Speziell folgt, daß die Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

gültig bleibt; die Funktionen φ_n sind überhaupt ihrer Definition nach von der Zerstreuungsfunktion F unabhängig.

Die Gleichungen (1) haben auch noch eine Bedeutung, wenn man T als identisch verschwindend ansieht; sie geben dann die Gesetze der Wärmebewegung an. Sind nämlich etwa $u_1, u_2, \ldots$ die Temperaturen einzelner fester materieller Punkte, die allein von einander thermisch beeinflußt werden, so hat man Gleichungen von der Form

$$\frac{d u_n}{d t} = \sum_m A_{mn} (u_m - u_n),$$

wobei die Größen A von der Zeit unabhängig sind und ungeändert bleiben, wenn man die Zeiger vertauscht. Man kann daher die letzte Gleichung auch in der Form

$$\frac{d u_n}{d t} = -\frac{\partial V}{\partial u_n}$$

schreiben, wobei V eine Funktion der Größen u_n ist. Sieht man diese als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktsystems an, so erkennt man, daß die Wärmegleichungen aus den Bewegungsgleichungen

$$\mu_n \frac{d^2 u_n}{d t^2} + \frac{d u_n}{d t} = -\frac{\partial V}{\partial u_n}$$

entstehen, indem man die Massen $\mu_n = 0$ setzt. Diese Gleichungen gehören einem System an, in welchem Widerstände wirken, außerdem aber konservative Kräfte, die eine potentielle Energie V ergeben.

Denkt man sich in einem solchen System allgemeine Koordinaten q eingeführt, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0 \tag{2}$$

zur Darstellung einer freien Bewegung des Systems, und diese Form bleibt, wenn man die Zahl der Punkte ins Unendliche wachsen läßt. Dann ist die Temperatur u in der Form

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

darzustellen, und wenn wir jetzt annehmen, $2F$ sei einfach die Summe der Quadrate der Größen $\dot{q}$, so erhalten wir ebenso wie oben aus der entsprechenden für T geltenden Voraussetzung auch jetzt die Gleichungen

$$\int \varphi_n \alpha \,.\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha = 0, \qquad \int (\varphi_n \alpha)^2 d\alpha = 1.$$

Die oben mit dem Kraftsystem $\mathfrak{K}$ ausgeführte Untersuchung veranlaßt uns hier, in einem Punkte eine Wärmequelle wirken zu lassen, als Analogon der punktuellen Kraft. Damit ist der Ansatz, der im ersten Abschnitte zu den Greenschen Funktionen führte, als spezieller Fall des in diesem Paragraphen entwickelten erkannt.

Die Bewegungsgleichungen (2) geben, wenn V dieselbe Gestalt hat wie oben,

$$\frac{d q_n}{d t} + \lambda_n q_n = 0, \qquad q_n = \alpha_n e^{-\lambda_n t},$$

und die gesuchte Temperatur erscheint in der Form

$$u = \sum a_n \varphi_n x \,.\, e^{-\lambda_n t},$$

also ganz wie man es in der klassischen Wärmeleitungstheorie gewohnt ist.

§ 9.

Anwendungen: die schwingende Saite.

Als einfachstes Beispiel für die Theorie des § 8 werde eine Saite von der Länge und linearen Dichtigkeit Eins betrachtet, die längs der x-Achse gespannt ist; für die seitliche Verrückung u gilt bekanntlich, wenn die Zeiteinheit passend gewählt wird, die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Grenzbedingungen

$$(2) \qquad u\,|^0 = u\,|^1 = 0.$$

Die Differentialgleichung beruht darauf, daß $\partial u/\partial x$ die zur Saite senkrechte Komponente der in der Richtung wachsender x wirkenden Spannung ist; auf das Massenelement dx wirken daher in seitlicher Richtung die Kräfte

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x+dx},$$

deren algebraische Summe dem Produkt $dx \,.\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleichzusetzen ist.

Herrscht Gleichgewicht und wirkt eine äußere Kraft P, so hat man als Bedingung des Gleichgewichtes die Gleichung

$$(3) \qquad P + \frac{d u}{d x}\Big|_x^{x+dx} = 0,$$

oder, wenn die betrachtete Stelle durch ξ bezeichnet und die Kraftintensität $= 1$ gesetzt wird,

$$\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1,$$

und für die Verrückung u gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

mit den Grenzbedingungen (2). Hieraus folgt, wie schon in § 1 benutzt wurde, wenn man u durch $K(x, \xi)$ ersetzt,

$$K(x,\xi) = x(1-\xi), \quad x < \xi,$$
$$K(x,\xi) = \xi(1-x), \quad x > \xi,$$

und als Ordinate aufgetragen ergibt diese Größe eine Kurve, die man als Gestalt der in einem Punkte durch eine seitliche Kraft beeinflußten Saite erwartet, die gebrochene Linie.

Nach § 8 machen wir nun den allgemeinen Ansatz

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x,$$

wobei q_n eine Funktion der Zeit ist und eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = 0$$

gilt. Betrachten wir speziell eine Bewegung, bei der q_n allein von Null verschiedene Werte annimmt, und setzen in der Gleichung (1)

$$u = q_n \varphi_n x,$$

so ergibt sich sofort

$$\frac{1}{\varphi_n}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = \frac{1}{q_n}\frac{d^2q_n}{dt^2} = -\lambda_n, \quad \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \lambda_n\varphi_n = 0,$$

und aus den Bedingungen (2) folgt

$$\varphi_n 0 = \varphi_n 1 = 0.$$

Die Größe φ_n muß also bis auf einen konstanten Faktor der Sinus eines ganzzahligen Vielfachen von πx sein, etwa, indem wir normieren,

$$\varphi_n x = \sqrt{2}\sin n\pi x,$$

und hieraus ergibt sich

$$\lambda_n = n^2\pi^2.$$

Die bilineare Formel nimmt folgende Gestalt an:

$$K(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_n \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{n^2};$$

sie ist wirklich richtig, was aus § 8 nicht mit Sicherheit geschlossen werden, nur vermutet werden kann; denn sie ist mit der in § 4 streng bewiesenen Formel (2) identisch.

Die Größen q_n bestimmen sich in bekannter Weise aus den Werten von u und $\partial u/\partial t$ zur Zeit $t = 0$, die etwa fx und ψx seien, wobei offenbar

$$f0 = \psi 0 = f1 = \psi 1 = 0$$

sein muß.

Man setzt an

$$u = \sum_n (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \tag{4}$$

und fordert die Gleichungen

$$fx = \sum_n A_n \sin n\pi x, \qquad \psi x = \pi \sum_n n B_n \sin n\pi x.$$

Diese Gleichungen sind nach § 4 zu erfüllen, und die erhaltenen Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig, wenn fx und ψx stetige Funktionen sind und stückweise stetige erste und zweite Ableitungen besitzen; in derselben Weise konvergiert also die Reihe (4). Sind speziell auch die Ableitungen dritter und vierter Ordnung stückweise stetig, so sieht man aus den Formeln

$$\frac{1}{2} A_n = \int_0^1 f\alpha . \sin n\pi\alpha . d\alpha,$$

$$\int_a^b f\alpha . \sin n\pi\alpha\, d\alpha = -f\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi}\Bigg|_a^b + \int_a^b f'\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi}\, d\alpha$$

$$= -f\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi}\Bigg|_a^b + f'\alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n^2\pi^2}\Bigg|_a^b - \int_a^b f''\alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n^2\pi^2}\, d\alpha,$$

$$\int_0^1 f\alpha . \sin n\pi\alpha . d\alpha = -\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f''\alpha . \sin n\pi\alpha . d\alpha,$$

den analogen mit der Funktion ψ gebildeten Gleichungen und den Darstellungssätzen des § 5, daß der Ausdruck (4) nach x und t zweimal gliedweise differenziert werden darf und, für u gesetzt, in der Tat die Gleichung (1) erfüllt.

Für die potentielle Energie hat man nach § 8 die Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2 = \frac{\pi^2}{2}\sum_n q_n^2 n^2$$

anzusetzen. Die Größen $\pi n q_n$ sind die Koeffizienten in der Entwickelung der Größe $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach den Funktionen $\cos n\pi x$, und es gilt die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = 0.$$

Ist daher die Größe $\partial u/\partial x$ nur stetig, so kann man das in § 6 abgeleitete Hurwitzsche Theorem anwenden und findet für die potentielle Energie den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sum_n n^2\pi^2 q_n^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

der sich auch aus mechanischen Erwägungen rechtfertigen läßt.

§ 10.

Schwingungen des frei herabhängenden Seiles.

Ein zweites Beispiel zum § 8 bietet die Schwingung des homogenen hängenden Seiles dar. Seine Länge und sein Gewicht seien Eins, die x-Achse der Richtung der Schwere entgegengesetzt, deren Beschleunigung etwa durch passende Zeiteinheit $= 1$ gemacht sei. Ferner sei $x = +1$ der Aufhängepunkt und $x = 0$ das freie Ende; endlich sei u die Verrückung senkrecht zur x-Achse. Dann wirkt auf irgend ein Element dx abwärts die Spannung x, aufwärts die Spannung $x + dx$, und die zur x-Achse senkrechten Komponenten dieser Kräfte sind

$$(1) \qquad -x\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{x+dx},$$

so daß man als Bewegungsgleichung erhält

$$dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x^{x+dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Setzt man speziell

$$u = q_n \varphi_n x,$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{q_n}\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\lambda_n = \frac{1}{\varphi_n}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\varphi_n}{dx}\right);$$

dabei gilt die Gleichung

$$\varphi_n 1 = 0,$$

und $\varphi_n 0$ ist eine endliche Größe.

Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich durch Jx die Besselsche Funktion von der Ordnung Null, d. h. die Größe

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \cdots,$$

so ist $J(k\sqrt{x})$ das einzige an der Stelle $x = 0$ endliche Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{k^2}{4} y = 0.$$

Hieraus folgt sofort

$$\varphi_n x \,.\, \mathrm{const} = J(2\sqrt{\lambda_n x}) = J(k_n \sqrt{x}), \quad \lambda_n = \frac{k_n^2}{4},$$

wobei die Größen k durch die Gleichung

$$J k_n = 0, \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

definiert sind; offenbar genügt es, die positiven Wurzeln dieser Gleichung zu nehmen. Da ferner die Theorie der Besselschen Funktionen die Gleichung

$$\int_0^1 J(k\sqrt{\alpha})^2 d\alpha = (J'k)^2$$

ergibt, so sind die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \frac{J(k_n \sqrt{x})}{J' k_n}.$$

Lassen wir jetzt im Punkte $x = \xi$ eine seitliche Kraft von der Intensität Eins wirken und nehmen wir an, das Seil bleibe unter ihrer Einwirkung in einer von der freien Gleichgewichtslage verschiedenen Lage in Ruhe, so zeigt der unter (1) angegebene Ausdruck der Spannung, daß zwischen den drei im Punkte ξ angreifenden Kräften folgende Beziehung gelten muß:

$$1 + \left(-x \frac{du}{dx}\right)\Bigg|^{\xi - 0} + \left(x \frac{du}{dx}\right)\Bigg|^{\xi + 0} = 0,$$

oder

(2) $$\frac{du}{dx}\Bigg|^{\xi - 0}_{\xi + 0} = \frac{1}{\xi}.$$

Es ist ferner klar, daß auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = \xi$ die Größe u konstant ist, während sie auf der Strecke $x > \xi$ die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{du}{dx}\right) = 0$$

erfüllt und für $x = 1$ verschwindet. Man hat also, unter a und b Konstante verstanden, folgende Gleichungen:

$$u = a, \quad (x < \xi),$$
$$u = b \log x, \quad (x > \xi).$$

An der Stelle $x = \xi$ sollen diese Werte gleich sein und außerdem die Beziehung (2) gelten; das gibt

$$a = b \log \xi, \quad 0 - \frac{b}{\xi} = \frac{1}{\xi}, \quad b = -1,$$

also

$$(3) \qquad \begin{aligned} u &= -\log \xi, \quad (x < \xi), \\ u &= -\log x, \quad (x > \xi). \end{aligned}$$

Bezeichnet man diese Greensche Funktion durch $K(x, \xi)$, so hat man als bilineare Formel die Gleichung

$$K(x, \xi = 4 \sum \frac{J(k_n \sqrt{x})\, J(k_n \sqrt{\xi})}{(J' k_n)^2 . k_n^2}$$

zu erwarten.

Daß übrigens die Ausdrücke (3) die Ordinaten des seitlich abgelenkten Seiles darstellen, kann man auch aus der Gleichung der von $x = \xi$ bis $x = 1$ reichenden Kettenlinie ableiten, indem man bedenkt, daß nur ein wenig von der Vertikalen abweichendes steiles Stück der Kurve benutzt wird.

Wenngleich nun die bilineare Formel zunächst nicht bewiesen ist, so beweist man doch leicht die Integralgleichung

$$(4) \qquad \varphi_n x = \lambda_n \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Man braucht nur von den Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left[x K'(x, \xi)\right] = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(x \frac{d\varphi_n}{dx}\right) + \lambda_n \varphi_n = 0$$

die erste mit φ_n, die zweite mit $K(x, \xi)$ zu multiplizieren und erstere von letzterer zu subtrahieren; dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(K(x, \xi)\frac{d\varphi_n}{dx} - K'(x, \xi)\, \varphi_n x\right)\right] + \lambda_n \varphi_n x . K(x, \xi) = 0,$$

und wenn man von 0 bis 1 integriert, das in § 2 gegebene Lemma aus der Integralrechnung benutzt und bedenkt, daß $\varphi_n 0$ und $K(0, \xi)$ endliche Größen sind, so findet man

$$-\xi\, \varphi_n \xi\, K'(x, \xi) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} + \lambda_n \int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_n x . dx = 0,$$

oder die Gleichung (4).

Ein verwandter Fall ist der eines Seiles, das an einer zu ihm senkrechten Achse befestigt ist und um diese rotiert, wobei von der Schwerkraft abgesehen werde. Das Seil bleibe in einer gleichförmig um die Achse rotierenden Ebene und erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = +1$, so daß $x = 0$ ein Punkt der Rotationsachse ist; dann verschwindet die Spannung am freien Ende und wird, wie ihre Beziehung der Zentrifugalkraft zeigt, durch $1 - x^2$ bei passender Größe der Rotationsgeschwindigkeit dargestellt. An Stelle der Ausdrücke (2) erhält man für die auf das Element dx transversal wirkenden Spannungen

$$-(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}^{x+dx},$$

wenn u eine kleine seitliche Verrückung aus der Lage des relativen Gleichgewichtes bedeutet.

Die Gleichung der kleinen Schwingungen ist daher

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Setzt man wieder

$$u = \varphi_n x \,.\, q_n,$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\varphi_n}{dx}\right] + \lambda_n \varphi_n = 0, \quad \ddot{q}_n + \lambda_n q_n = 0;$$

als Grenzbedingung erhält man

$$\varphi_n 0 = 0,$$

und die Größen $\varphi_n(+1)$ müssen endlich sein. Die Greensche Funktion ist das an der Stelle $x = 1$ endliche Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{du}{dx}\right] = 0,$$

das die Gleichung

$$u\Big|^0 = 0$$

und die Unstetigkeitsbedingung

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

erfüllt. Letztere drückt aus, daß die beiden auf das Element dx wirkenden Spannungskomponenten von transversaler Richtung eine Resultante von der Intensität 1 geben.

Man findet leicht, je nachdem ξ oder x der größere Wert ist, den ersten oder zweiten der Ausdrücke

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad u = \frac{1}{2}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Daß der zweite dieser Ausdrücke von x unabhängig wird, ist mechanisch plausibel zu machen; das Stück des Fadens, für das $x > \xi$, wird offenbar geradlinig, wenn im Punkte $x = \xi$ eine seitliche Kraft einwirkt.

Die Lösungen des gestellten Randwertproblems sind die Legendreschen Polynome ungeraden Grades, die hiermit dynamisch gedeutet werden.

§ 11.
Der transversal schwingende Stab.

Als letztes Beispiel betrachten wir den elastischen Stab, der längs der x-Achse liegt und in den Endpunkten $x = 0$ und $x = 1$ unterstützt oder eingespannt ist. Ist u die Verrückung eines seiner Elemente in der Richtung der y-Achse und entfernt sich der Stab nur wenig von der geraden Gleichgewichtslage, so gibt es eine solche positive Konstante a, daß $a\,d^2u/dx^2$ das Moment der elastischen Kräfte ist, die auf das vom Endpunkte $x = 0$ bis zu einem beliebigen Punkte x reichende Stück des Stabes einwirken; auf das Reststück wirkt das Moment $-a d^2u/dx^2$. Wirken ferner in den Endpunkten die zum Stabe senkrechten Auflagerreaktionen A_0 und A_1 und, wenn die Enden eingespannt sind, die Momente M_0 und M_1, so ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für die Strecke von $x = 0$ bis zum betrachteten Punkte, indem man bezüglich des letzteren die Momente bildet,

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + M_0 - A_0 x = 0, \tag{1}$$

und für die Strecke vom betrachteten Punkte bis zum Ende $x = 1$

$$-a\frac{d^2u}{dx^2} + M_1 + A_1(1-x) = 0. \tag{2}$$

Wenn nun der Stab an der betrachteten Stelle mit dem in der Richtung der y-Achse ziehenden Gewicht Eins belastet ist, so gibt dies in den erhaltenen Momentgleichungen keinen Beitrag; doch muß die Summe aller y-Komponenten verschwinden, so daß

$$A_1 + A_0 + 1 = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben aber

$$a \frac{d^3 u}{d x^3}\Big|^{x-0} = A_0, \quad -a \frac{d^3 u}{d x^3}\Big|^{x+0} = A_1;$$

also folgt, wenn wir jetzt die belastete Stelle $x = \xi$ nennen,

$$a \frac{d^3 u}{d x^3}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = -1.$$

Ferner gilt offenbar allgemein die Gleichung

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = 0,$$

und die Größe u erfüllt an den Enden die betreffende Bedingung, der die Verrückung immer unterworfen ist; sie werde als Greensche Funktion und durch $K(x, \xi)$ bezeichnet.

Jetzt wirke in jedem Elemente dx eine seitliche Kraft Ydx; ihr Moment bezüglich des Punktes ξ ist dann $Y(x-\xi)\,dx$; betrachtet man das Stück des Stabes von $x = 0$ bis $x = \xi$, so ergibt sich

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^{\xi} + \int_0^{\xi} Y(x-\xi)\,dx = 0,$$

und hieraus

$$a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|^{\xi} = \int_0^{\xi} Y dx; \quad a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - Y = 0.$$

Speziell sei Ydx der Trägheitswiderstand bei der Bewegung, d. h. wenn dx als Massenelement angesehen wird,

$$-dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

dann ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung der allgemeinen Theorie gemäß

$$u = q_n \varphi_n x,$$

so folgt

$$\frac{d^2 q_n}{d t^2} + \lambda_n q_n = 0, \quad a \frac{d^4 \varphi_n x}{d x^4} - \lambda_n \varphi_n x = 0,$$

und die Konstanten λ_n bestimmen sich aus den Grenzbedingungen, die, z. B. wenn der Stab beiderseits eingespannt ist, folgendermaßen lauten:

$$\varphi_n 0 = \frac{d\,\varphi_n}{d\,x}\Bigg|^0 = 0, \quad \varphi_n 1 = \frac{d\varphi_n}{d\,x}\Bigg|^1 = 0. \tag{3}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit den oben aufgestellten

$$K(0, \xi) = K'(0, \xi) = K(1, \xi) = K'(1, \xi) = 0,$$

$$\frac{d^4 K(x, \xi)}{d\,x^4} = 0, \quad \frac{d^3 K(x, \xi)}{d\,x^3}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = -\frac{1}{a},$$

so findet man aus der allgemeinen Identität:

$$v\frac{d^4 w}{d\,x^4} - w\frac{d^4 v}{d\,x^4} = \frac{d}{d\,x}\left\{v\frac{d^3 w}{d\,x^3} - w\frac{d^3 v}{d x^3} + \frac{d\,w}{d\,x}\frac{d^2 v}{d\,x^2} - \frac{d\,v}{d\,x}\frac{d^2 w}{d\,x^2}\right\}$$

und dem allgemeinen in § 2 angeführten Lemma, indem man

$$v = \varphi_n x, \quad w = K(x, \xi)$$

setzt:

$$-\frac{\lambda_n}{a}\int_0^1 K(x, \xi)\,\varphi_n x\,.\,d\,x = \varphi_n x\,.\,K'''(x, \xi)\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0}$$
$$= -\frac{\varphi_n \xi}{a},$$

$$\varphi_n \xi = \lambda_n \int_0^1 K(x, \xi)\,\varphi_n x\,.\,d\,x,$$

wie es die allgemeine Theorie des § 8 erwarten läßt.

Ist umgekehrt eine Funktion gegeben, für die die Gleichung

$$\varphi\xi = c\int_0^1 K(x. \xi)\varphi x . d x = c\int_0^\xi K(\xi, x)\,\varphi x . d x + c\int_\xi^1 K(\xi, x)\,\varphi x . d x \tag{4}$$

besteht, so findet man unmittelbar

$$\frac{d^4\varphi\,\xi}{d\,\xi^4} = c\,[K'''(\xi, \xi - 0) - K'''(\xi, \xi + 0)]\,\varphi\,\xi.$$

Nun kann man setzen

$$K'''(\xi, \xi - 0) = \lim_{h = +0} K'''(\xi, \xi - h)$$
$$= \lim_{\xi_1 = \xi,\; h = +0} K'''(\xi_1 + h, \xi_1)$$
$$= K'''(\xi + 0, \xi),$$

und ebenso

$$K'''(\xi, \xi + 0) = K'''(\xi - 0, \xi);$$

somit folgt

$$\frac{d^4\,\varphi\,\xi}{d\,\xi^4} = c\,\varphi\,\xi\cdot\{K'''(\xi - 0, \xi) - K'''(\xi + 0, \xi)\} = \frac{c}{a}\,\varphi\,\xi,$$

und die Randbedingungen sind infolge der Gleichung (4) erfüllt; jede Lösung der Integralgleichung löst also auch das oben aufgestellte Randwertproblem. Die Funktionen φ_n, die, wie man leicht sieht, die einzigen Lösungen des Randwertproblems sind, repräsentieren also auch die Gesamtheit der Lösungen der Integralgleichung.

In der bilinearen Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

die man hiernach erwartet, läßt sich die rechte Seite als konvergent erweisen. Aus den Randbedingungen (3) ergibt sich nämlich, daß φ_n Lösungen der Gleichungen

$$\frac{d^4 \varphi_n}{d x^4} - m^4 \varphi_n = 0$$

sind, bei denen m positive und durch die Gleichung

$$\cos m \operatorname{Coj} m = 1 \tag{5}$$

bestimmte Konstante sind; man hat dann

$$\lambda_n = m_n^4 a$$

zu setzen und findet für die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \frac{(\sin m_n - \operatorname{Sin} m_n)(\cos m_n x - \operatorname{Coj} m_n x) - (\cos m_n - \operatorname{Coj} m_n)(\sin m_n x - \operatorname{Sin} m_n x)}{\operatorname{Tg} m_n - \sin m_n \operatorname{Coj} m_n}$$

Diese liegen bei großen Werten von m_n zwischen endlichen, von n unabhängigen Grenzen. Die Gleichung (5) zeigt aber, daß die Größen m, wenn sie groß sind, wesentlich wie die Glieder einer arithmetischen Reihe wachsen; die bilineare Reihe

$$\sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{1}{a} \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{m_n^4}$$

konvergiert daher nach x und ξ gleichmäßig auf der Strecke von 0 bis 1, und dasselbe gilt noch von den Reihen, die man erhält, wenn man gliedweise einmal oder zweimal differenziert. Ist also die bilineare Formel bewiesen, so gilt dasselbe von den Gleichungen

$$K'(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

$$K''(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n'' x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Hieraus lassen sich nach der in den §§ 4 und 5 angewandten Methode die wichtigsten Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen ableiten, indem man nur noch die quellenmäßig dargestellten Funktionen

$$\int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha$$

einzuführen und zu zeigen hat, daß unter ihnen alle Funktionen enthalten sind, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig sind, stückweise stetige dritte Ableitungen besitzen und die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen erfüllen.

§ 12.

Erzwungene Schwingungen und nicht homogene Integralgleichungen.

Auf ein neues mit den Integralgleichungen zusammenhängendes Problem führt die Theorie der erzwungenen Schwingungen des in § 8 betrachteten Massensystems.

Seine Bewegungsgleichungen haben, wenn beliebige Kräfte Q_n wirken, die folgende Form:

$$\frac{d^2 q_n}{d t^2} + \lambda_n q_n = Q_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Diese versuchen wir auf eine besondere Weise zu erfüllen. Die wirkende Kraft X sei das Produkt aus einem räumlich veränderlichen Faktor und einem von der Zeit abhängigen Faktor harmonischen Charakters, etwa, indem wir fortan stets durch deutsche Buchstaben von der Zeit unabhängige Größen, durch β und γ Konstante bezeichnen,

$$X = \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma).$$

Gelingt es dann, die Bewegung so zu gestalten, daß die Verrückung u die analoge Gestalt

$$u = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

annimmt, so liegt das vor, was man erzwungene Schwingung nennt; $\mathfrak{u}$ ist ihre Amplitude.

Um eine solche Bewegung in den Variablen q_n zu studieren, gehen wir von der in § 8 aufgestellten Gleichung

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

aus, derzufolge man setzen kann

$$Q_n = \mathfrak{Q}_n \cos(\beta t + \gamma), \qquad \mathfrak{Q}_n = \int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx.$$

Versucht man nun

$$q_n = \mathfrak{q}_n \cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen, was einen Ausdruck u von der gewünschten Form ergäbe, so findet man aus den Gleichungen (1)

$$(\lambda_n - \beta^2)\, \mathfrak{q}_n = \mathfrak{Q}_n,$$

und hieraus

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x = \sum_n \mathfrak{q}_n \varphi_n x . \cos(\beta t + \gamma) = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma),$$

$$(2) \qquad \mathfrak{u} = \sum_n \frac{\mathfrak{Q}_n \varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch ψx, multiplizieren $\psi \alpha$ mit $K(x, \alpha)$ und integrieren gliedweise, so finden wir

$$\int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \beta^2} \int K(x, \alpha) \varphi_n \alpha . d\alpha . \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx$$

oder, da die Gleichungen

$$\varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha) \varphi_n \alpha . d\alpha$$

gelten,

$$(3) \qquad \begin{aligned} \int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha &= \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n(\lambda_n - \beta^2)} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx \\ &= \sum_n \frac{\varphi_n x}{\beta^2} \left(\frac{1}{\lambda_n - \beta^2} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx \\ &= \frac{\psi x}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx. \end{aligned}$$

Die durchgeführten Operationen sind erlaubt, wenn die bilineare Reihe im Grundgebiet bezüglich jeder der beiden in ihr vorkommenden Variabeln gleichmäßig konvergiert.

Setzen wir nun

$$f\xi = \int K(x, \xi) \mathfrak{X} \, dx,$$

so finden wir aus der bilinearen Formel

$$\sum_n \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx = f\xi;$$

dabei ist

$$(4) \qquad \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{1}{\lambda_n} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx, \quad fx = \sum_n \varphi_n x . \int f\alpha \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

und die Gleichung (3) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$(5) \qquad \mathfrak{u} = \psi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha, \qquad \lambda = \beta^2;$$

die Definitionsgleichung von ψx ergibt, indem man die zweite Gleichung (4) heranzieht,

$$(6)\quad \psi x = \sum \frac{\lambda_n \varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = fx + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha .$$

Die Gleichung (5), in der λ willkürlich, aber von allen λ_n verschieden gedacht wird, ist eine nichthomogene Integralgleichung mit der Unbekannten ψx und ihre Lösung wird, so erwarten wir wenigstens, durch die Formel (6) gegeben, die wir als Schmidtsche Formel bezeichnen wollen.

Interesse verdient dabei der besondere Fall, daß in der Integralgleichung (5) gesetzt wird

$$(7)\quad fx = K(x, y), \quad f\xi = K(\xi, y).$$

Man findet dann

$$\int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n},$$

und für die Unbekannte ψx ergibt sich der Wert

$$\Gamma(x,y) = K(x,y) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n y}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)},$$

oder da

$$\frac{\lambda}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)} = -\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda - \lambda_n}$$

ist,

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \sum_n \left(-\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right) \varphi_n x . \varphi_n y.$$

Wenn nun die bilineare Formel gilt, erhält man weiter

$$\Gamma(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n y}{\lambda_n - \lambda}.$$

Diese Größe erscheint als „lösender Kern" im Sinne der Fredholm-Hilbertschen Theorie im dritten Abschnitt wieder. Sie erfüllt nach (5) die Gleichung

$$(8)\quad \Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha) \Gamma(\alpha, y) d\alpha,$$

aus der eine gewisse Reziprozität mit $K(x, y)$ hervorgeht. Ihre mechanische Bedeutung ergibt sich aus der Definition von fx; die Gleichungen (7) erscheinen, wenn die Kraft X nur in dem an die Stelle y grenzenden Element dx wirkt, in welchem allein die Größe $\mathfrak{X}$ von Null verschieden ist. Fügt man nötigenfalls einen konstanten Faktor hinzu, so gelten die Gleichungen

$$\int \mathfrak{X} dx = 1, \quad f\xi = \int K(x, \xi) \mathfrak{X} dx = K(\xi, y) \int \mathfrak{X} dx = K(\xi, y).$$

Der lösende Kern ist also die Amplitude der erzwungenen Schwingung, die auftritt, wenn die erzwingende periodische Kraft nur auf ein einziges Element des Massensystems einwirkt. Der in $\Gamma(x, y)$ auftretende Parameter λ wird durch die Periode der erzwingenden Kraft in einfachster Weise bestimmt: $\lambda = \beta^2$.

§ 13.

Erzwungene Schwingungen einer Saite.

Die entwickelte Theorie kann auf die erzwungenen Schwingungen einer ungedämpften Saite angewandt werden, da nach § 9 für ihre Eigenfunktionen, die als Raumfaktoren der Eigenschwingungen auftreten, die bilineare Formel richtig ist und die bilineare Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Bewegungsgleichung der Saite lautet, wenn eine periodische Kraft von der oben definierten Beschaffenheit einwirkt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathfrak{X}\cos(\beta t + \gamma), \tag{1}$$

und wenn man

$$u = \mathfrak{u}\cos(\beta t + \gamma)$$

setzt, so daß $\mathfrak{u}$ die räumlich veränderliche Amplitude ist, so findet man

$$-\beta^2\mathfrak{u} = \frac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2} + \mathfrak{X}$$

mit den Grenzbedingungen

$$\mathfrak{u}\Big|^0 = \mathfrak{u}\Big|^1 = 0. \tag{2}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit den kennzeichnenden Eigenschaften des Kerns:

$$\frac{d^2K(x,\xi)}{dx^2} = 0, \quad \frac{dK(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad K(0,\xi) = K(1,\xi) = 0,$$

und setzt wiederum

$$\int_0^1 \mathfrak{X}K(x,\xi)\,dx = f\xi, \quad \mathfrak{u} = \psi x, \quad \lambda = +\beta^2,$$

so findet man

$$\psi\xi = \lambda\int_0^1 K(x,\xi)\,\psi x\,.\,dx + f\xi,$$

und jede Lösung dieser Gleichung erfüllt die Bedingungen (2).

Bedenkt man, daß

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \lambda_n = n^2\pi^2$$

zu setzen ist, so zeigt die Schmidtsche Formel, daß eine erzwungene Schwingung mit folgender Verrückung möglich ist:

$$u = \left[fx + \beta^2 \sum_n \frac{\sqrt{2}\, c_n . \sin n\pi x}{n^2\pi^2 - \beta^2} \right] \cos(\beta t + \gamma),$$

wobei

$$c_n = \sqrt{2} \int_0^1 f\alpha . \sin n\pi\alpha\, d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n^2\pi^2} \int_0^1 \mathfrak{X} \sin n\pi x\, dx.$$

Der erhaltene Ausdruck verliert seinen Sinn, wenn β einer der Größen $n\pi$ gleich wird, was ausgeschlossen wird durch die in § 12 getroffene Festsetzung, daß λ mit keiner der Größen λ_n zusammenfallen soll. Da die einfachen Töne der Saite Verrückungen geben, die durch die Ausdrücke

$$\text{const.} \sin n\pi x . \sin n\pi t$$

dargestellt werden, so sieht man, daß in dem ausgeschlossenen Falle die Periode der wirkenden Kraft der Periode eines Eigentons der Saite gleich ist.

Für die Mechanik ist es nun wichtig, nicht nur einen möglichen Typus von Bewegungen kennen zu lernen, sondern den bestimmten, der bei gegebenen Anfangszuständen von gegebenen Kräften, etwa den Kräften $\mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma)$, hervorgerufen wird. Dazu führt die Bemerkung, daß die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen erfüllt bleibt, wenn man zu einer ihrer Lösungen eine Lösung der Differentialgleichung der freien Schwingungen addiert. Setzt man demgemäß

$$w = u + v, \quad v = \sum_n \varphi_n x . (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$
$$= \sqrt{2} \sum_n \sin n\pi x (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t),$$

so ist w eine Lösung der Gleichung (1), und es ist leicht, die Forderungen

$$w \Big|^{t=0} = f_1 x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|^{t=0} = f_2 x,$$

in denen

$$f_1 0 = f_1 1 = f_2 0 = f_2 1 = 0$$

vorausgesetzt wird, dadurch zu erfüllen, daß man eine gegebene Funktion nach den Eigenfunktionen auf Grund der Sätze des § 5 entwickelt. Die geforderten Entwicklungen sind

$$f_1 x - u \Big|^{t=0} = \sum_n a_n \varphi_n x,$$

$$f_2 x - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|^{t=0} = \sum_n n \pi b_n \varphi_n x.$$

Aus den so erhaltenen Formeln läßt sich die Erscheinung der Schwebungen so weit ableiten, wie es überhaupt ohne Rücksicht auf die Dämpfungen möglich ist.

§ 14.

Erzwungene Schwingungen mit Rücksicht auf die Dämpfung.

Die Untersuchung des letzten Paragraphen läßt sich, ohne daß wesentlich neue analytische Entwicklungen auftreten, auf einen Fall übertragen, der mechanisch von bedeutendem Interesse ist, die Bewegung gedämpfter Systeme, für die in § 8 die Bewegungsgleichungen angeführt sind. Handelt es sich um kleine Schwingungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage, so kann man wiederum setzen:

$$T = \frac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2;$$

betreffs der Zerstreuungsfunktion F, die die Dämpfung kennzeichnet, werde die spezielle Annahme

$$F = \frac{b}{2}\sum_n \dot{q}_n^2$$

festgehalten. Dann lauten die Bewegungsgleichungen nach § 8 folgendermaßen:

$$\ddot{q}_n + b\dot{q}_n + \lambda_n q_n = Q_n; \tag{1}$$

dabei ist wie oben

$$Q_n = \int X \varphi_n x \, . \, dx$$

gesetzt und bedeutet das Integralzeichen stets die Integration über das ganze Massensystem.

Um nun eine Art von Bewegung des Systems zu erhalten, die als erzwungene Schwingung anzusehen wäre, setzen wir die

Kraft X wieder als einfache periodische Funktion der Zeit voraus, und zwar sei

$$\theta = \beta t + \gamma, \qquad X = \mathfrak{U} \cos\theta + \mathfrak{B} \sin\theta,$$

und die Größen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ von t unabhängig. Hieraus ergibt sich mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{Q}_n = \int \mathfrak{U}\, \varphi_n x \,.\, dx, \qquad \mathfrak{R}_n = \int \mathfrak{B}\, \varphi_n x \,.\, dx$$

die Gleichung

$$Q_n = \mathfrak{Q}_n \cos\theta + \mathfrak{R}_n \sin\theta.$$

Versucht man nun die Bewegungsgleichungen (1) durch die Annahme

$$q_n = \mathfrak{q}_n \cos\theta + \mathfrak{r}_n \sin\theta$$

zu erfüllen, wobei die deutschen Buchstaben wieder von der Zeit unabhängige Größen bedeuten, und setzt auf beiden Seiten jeder Gleichung die mit $\cos\theta$ und mit $\sin\theta$ multiplizierten Ausdrücke gleich, so ergibt sich

$$(2) \qquad \begin{aligned} -\beta^2 \mathfrak{q}_n + b\beta \mathfrak{r}_n + \lambda_n \mathfrak{q}_n &= \mathfrak{Q}_n, \\ -\beta^2 \mathfrak{r}_n - b\beta \mathfrak{q}_n + \lambda_n \mathfrak{r}_n &= \mathfrak{R}_n. \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\mathfrak{q}_n + i\mathfrak{r}_n = \mathfrak{w}_n, \qquad \beta^2 + ib\beta = \lambda, \qquad \mathfrak{U} + \mathfrak{B} i = \mathfrak{W},$$

so folgt aus den Gleichungen (2)

$$\mathfrak{w}_n = \frac{\mathfrak{Q}_n + \mathfrak{R}_n i}{\lambda_n - \lambda} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{W}\, \varphi_n x \,.\, dx;$$

bedeutet daher das Zeichen $\mathfrak{Re}$ vor einer komplexen Größe den reellen Teil, so ergibt sich weiter, da offenbar

$$\begin{aligned} u &= \sum_n q_n \varphi_n x = \cos\theta \sum_n \mathfrak{q}_n \varphi_n x + \sin\theta \sum_n \mathfrak{r}_n \varphi_n x \\ &= \mathfrak{Re}\, e^{-\theta i} \sum_n \mathfrak{w}_n \varphi_n x, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{Re}(\mathfrak{W} e^{-\theta i}) \end{aligned}$$

gesetzt werden kann,

$$(3) \qquad u = \mathfrak{Re}\, e^{-\theta i} \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{W}\, \varphi_n x \,.\, dx.$$

Die hier auftretende Reihe führt aber sofort wieder auf die nichthomogene Integralgleichung; setzt man nämlich

$$\psi x = \mathfrak{W} + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{W}\, \varphi_n x \,.\, dx,$$

multipliziert mit der Größe

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

und integriert gliedweise, so findet man genau durch die Rechnung, die in § 12 an die Gleichung (2) geknüpft wurde,

(4) $$\psi \xi = f \xi + \lambda \int K(x, \xi) \psi x \, . \, d x,$$

wobei

$$f x = \int \mathfrak{W} K(x, \xi) \, d x = \int \mathfrak{U} K(x, \xi) \, d x + i \int \mathfrak{V} K(x, \xi) \, d x$$

gesetzt ist und nur zu bedenken ist, daß der reelle und der imaginäre Teil dieser Größe als quellenmäßig dargestellte Funktionen des Ortes auf die Fouriersche Weise entwickelt werden können; dasselbe gilt daher von der ganzen Größe $f x$ selbst, womit die zitierte Schlußreihe für den vorliegenden Fall gültig bleibt. Die Integralgleichung (4) ist also durch die Reihe ψx auch für komplexe Werte von λ aufgelöst. Setzt man wie in § 12 besonders $f x = K(x, y)$, so erhält man die Gleichung (8) des § 12, die Resolvente der Fredholm-Hilbertschen Theorie, für komplexe Werte von λ. Ihre Lösung, die Größe $\Gamma(x, y)$, erscheint jetzt in engstem Zusammenhang mit einer erzwungenen, gedämpften Schwingung; die zugehörige Verrückung ist

$$u = \mathfrak{Re}\left(e^{-\beta i t} \Gamma(x, y)\right), \quad \lambda = \beta^2 + i b \beta, \quad \theta = \beta t + \gamma.$$

Wir wenden diese Theorie auf die Schwingung der gedämpften Saite an, deren Bewegungsgleichung in den Bezeichnungen des § 13 jetzt folgende ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Setzt man

$$u = q \, . \, \varphi x,$$

wobei q von t allein abhänge, so findet man

$$\frac{\ddot{q} + b \dot{q}}{q} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d x^2} = - \mu;$$

μ ist von x und t unabhängig, und es gelten die Gleichungen

$$\ddot{q} + b \dot{q} + \mu q = 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

deren zweiter die Grenzbedingungen

$$\varphi 0 = \varphi 1 = 0$$

beizufügen sind. Daraus ergibt sich sofort

$$\mu = n^2 \pi^2 = \lambda_n, \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

und wenn man die verschiedenen Werte n ausdrücklich unterscheidet,

$$\varphi = \varphi_n x = \sqrt{2} \sin n \pi x,$$

(5) $$\ddot{q}_n + b \dot{q}_n + \lambda_n q_n = 0.$$

Macht man daher den Ansatz

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x, \tag{6}$$

so ist das Problem der gedämpften Saite vollständig der oben entwickelten dynamischen Theorie eingeordnet.

Nun ergibt die Gleichung (5), wenn A_n und B_n Integrationskonstante sind, als allgemeine Lösung

$$q_n = e^{-1/2\,bt}\left(A_n \cos t\sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2} + B_n \sin t\sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2}\right)$$

oder kurz

$$q_n = e^{-1/2\,bt}\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right),$$

indem wir allgemein

$$p_n = \sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2}$$

setzen; daraus folgt nach (6) für die Verrückung bei irgend einer freien Schwingung

$$u = e^{-1/2\,bt}\sum_n \varphi_n x \,.\, (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t).$$

Die Verrückung bei einer erzwungenen Schwingung unter der Wirkung einer Kraft, wie sie in der allgemeinen Theorie vorausgesetzt wurde, wird durch die Formel (3) gegeben, in der nur

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad \lambda = \beta^2 + i b \beta$$

zu setzen ist. Die aus einem bestimmten Anfangszustand durch diese Kräfte hervorgerufene Verrückung wird also durch die Formel

$$u = \sqrt{2}\, e^{-1/2\,bt}\sum_n (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t)\sin n\pi x$$

$$+ \Re e\, 2\, e^{-(\beta t + \gamma) i}\sum_n \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2 - \beta^2 - i b\beta}\int_0^1 \mathfrak{W} \sin n\pi x\, dx$$

dargestellt, und die Bewegung setzt sich aus der erzwungenen und Eigenschwingungen zusammen. Letztere allein enthalten in der Amplitude den Faktor $e^{-1/2\,bt}$, der, da b naturgemäß positiv sein muß, die Eigenschwingungen zum Abklingen bringt, so daß schließlich nur die erzwungene Schwingung merklich bleibt.

Ist speziell zur Zeit $t = 0$ die Saite in Ruhe und in der Gleichgewichtslage, so findet man leicht:

$$\sqrt{2}\, A_n = -\Re e \frac{2\, e^{-\gamma i}}{n^2\pi^2 - \beta^2 - i b\beta}\int_0^1 \mathfrak{W} \sin n\pi x\, dx,$$

$$\sqrt{2}\,(p_n B_n - \tfrac{1}{2} b A_n) = -\Re e \frac{-2\beta i e^{-\gamma i}}{n^2\pi^2 - \beta^2 - i b\beta}\int_0^1 \mathfrak{W} \sin n\pi x\, dx.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, daß, wenn die Dämpfungskonstante klein und β einem bestimmten Werte $n\pi$ nahe gelegen ist, so daß die Periode der erzwingenden Kraft nahezu oder ganz mit einer Eigenperiode der Saite übereinstimmt, die entsprechenden Koeffizienten A_n und B_n im allgemeinen groß sind. Daraus folgt, solange der Wert des Exponentialfaktors der Eigenschwingungen noch nicht zu tief gesunken ist, die bekannte Erscheinung der Schwebungen, die aber mit der Zeit durch den erwähnten Faktor wieder verschwindet.

§ 15.

Kleine Schwingungen in ausgearteten Fällen.

Die Methode des § 8 setzt wesentlich voraus, daß die Konstanten λ_n von Null verschieden sind. Der Fall, daß eine von ihnen verschwindet, die entsprechende Größe q also in der potentiellen Energie nicht vorkommt, kann so formuliert werden, daß man dem Ausdruck der potentiellen Energie dieselbe Form gibt wie in § 8, in der kinetischen Energie und im Ausdruck der allgemeinen Verrückung u aber ein Glied hinzufügt:

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{q}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2,$$

$$u = q_0 \varphi_0 x + \sum_n q_n \varphi_n x.$$

Dann wäre eine der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 q_0}{dt^2} = Q_0,$$

und im Falle des Gleichgewichts hätte man die Gleichung

$$Q_0 = \int X \varphi_0 x \,.\, dx = 0,$$

die im allgemeinen nicht mehr erfüllt werden kann, wenn das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ in die an der Stelle ξ wirkende Einzelkraft übergeht.

Um das Gleichgewicht aufrecht erhalten zu können, lassen wir neben dem System $\mathfrak{K}$ noch in jedem Massenelement eine Kraft wirken, die bei einer Verschiebung δu die Arbeit $Y \delta u\, dx$ leistet. Alsdann sind die verallgemeinerten Kraftkomponenten

$$Q_\nu = \int Y \varphi_\nu x \,.\, dx + \int X \varphi_\nu x \,.\, dx, \quad \nu = 0, n$$

und die erste von ihnen, die verschwinden muß, wird, wenn man das System $\mathfrak{K}$ wie früher spezialisiert,

$$Q_0 = \int Y \varphi_0 x . dx + \varphi_0 \xi = 0.$$

Diese Gleichung erfüllt man am einfachsten, indem man

$$Y = -\varphi_0 x . \varphi_0 \xi$$

setzt; dann haben die Größen Q_n wieder die frühere Gestalt

$$Q_n = \int X \varphi_n x . dx = \varphi_n \xi . \int X dx = \varphi_n \xi,$$

da die Ausdrücke

$$\int Y \varphi_n x . dx = -\varphi_0 \xi . \int \varphi_n x . \varphi_0 x dx$$

verschwinden.

Hieraus ergibt sich im Falle des Gleichgewichts wie in § 8

$$q_n = \frac{Q_n}{\lambda_n} = \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

und für die Verrückung erhält man die Formel

$$u = q_0 \varphi_0 x + \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

in der q_0 eine Funktion von ξ bedeutet. Gelingt es speziell, die Kräfte X und Y so zu bestimmen, daß bei der von ihnen festgehaltenen Gleichgewichtslage die Koordinate q_0 ihren Anfangswert Null erhält, so ist die Größe

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

als Verrückung mechanisch vollkommen gedeutet, und sie gibt als Kern einer Integralgleichung genommen die Beziehungen

$$\varphi_n \xi = \lambda_n \int K(x, \xi) \varphi_n x . dx, \quad \int K(x, \xi) \varphi_0 x . dx = 0.$$

Die hier entwickelte Methode bleibt mit einer leichten Modifikation brauchbar, wenn die lebendige Kraft T und die Verrückung u zwei Koordinaten, etwa q_0 und q_{01} enthalten, die in der potentiellen Energie nicht vorkommen. Hat man demgemäß die Gleichungen

$$T = \tfrac{1}{2} \dot{q}_0^2 + \tfrac{1}{2} \dot{q}_{01}^2 + \frac{1}{2} \sum_n \dot{q}_n^2,$$

$$u = q_0 \varphi_0 x + q_{01} \varphi_{01} x + \sum_n q_n \varphi_n x,$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n q_n^2,$$

so braucht man nur

$$\Xi = -\varphi_0 x \cdot \varphi_0 \xi - \varphi_{01} x \cdot \varphi_{01} \xi$$

zu setzen: dann erhält man nämlich zunächst die Gleichungen

$$\int \Xi \varphi_0 x \,.\, dx = -\varphi_0 \xi, \qquad \int \Xi \varphi_{01} x \,.\, dx = -\varphi_{01} \xi,$$

und wenn X auf die oben geschilderte Weise in eine punktuelle Kraft ausartet, die im Punkte ξ wirkt, so ergibt sich

$$\int X \varphi_0 x \,.\, dx = \varphi_0 \xi, \qquad \int X \varphi_{01} x \,.\, dx = \varphi_{01} \xi,$$

also

$$\int (X + \Xi)\, \varphi_0 x \,.\, dx = \int (X + \Xi)\, \varphi_{01} x \,.\, dx = 0.$$

Damit ist der Boden für die weiteren oben gezogenen Schlüsse gesichert, und man findet als Wirkung der punktuell gewordenen Kraft X und der Kraft Ξ eine Verrückung von der Form

$$u = q_0 \varphi_0 x + q_{01} \varphi_{01} x + \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Gelingt es hier, q_0 und q_{01} zum Verschwinden zu bringen, so ist u der Kern einer Integralgleichung, deren Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ sind; offenbar genügt hierzu, die Größe u den Gleichungen

$$\int u \varphi_0 x \,.\, dx = \int u \varphi_{01} x \,.\, dx = 0$$

zu unterwerfen.

Diese Methode ist ohne Änderung auf den zu Ende des § 8 besprochenen Fall anzuwenden, daß die lebendige Kraft identisch verschwindet und die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial V}{\partial q_m} = 0$$

auf Wärmeleitungsvorgänge anwendbar werden. Wenn dann die potentielle Energie V von q_0 frei ist, so nimmt die entsprechende Bewegungsgleichung einfach die Form

$$\dot{q}_0 = 0, \qquad q_0 = \text{const}$$

an, so daß $q_0 \varphi_0 x$ eine stationäre Temperatur repräsentiert. Der punktuell wirkenden Kraft entspricht nach § 8 eine Wärmequelle; die entwickelte Methode, den Kern zu suchen, dessen Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x \ldots$ sind, kann daher so formuliert werden, daß man außer der Quelle im Punkte ξ durch das ganze System hin Wärmemengen auftreten läßt, und zwar im Element dx die Menge $-\varphi_0 x . \varphi_0 \xi . dx$.

Die hierdurch hervorgerufene Temperatur $K(x, \xi)$ sucht man dann so zu spezialisieren, daß

$$\int K(x, \xi)\, \varphi_0 x . dx = 0,$$

was möglich ist, da man jeder stationären Temperatur einen Summanden const.$\varphi_0 x$ beifügen kann. Ist die letzte Gleichung erreicht, so erwartet man die bilineare Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

§ 16.

Spezielle Fälle von Ausartung.

Wir wenden die letzten Formeln auf den Fall eines longitudinal schwingenden homogenen Stabes von der Länge und Masse Eins an, dessen Enden frei sind, und der demgemäß in seiner Längsrichtung verschiebbar ist. Bewegungsgleichung und Grenzbedingungen sind folgende:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x=0,1} = 0.$$

Diese Forderungen werden erfüllt, wenn man u konstant setzt, was offenbar eine longitudinale Verschiebung des unverzerrten Stabes bedeutet. Allgemein kann man daher setzen:

$$\varphi_0 x = 1, \qquad u = q_0 + \sum_{n>0} q_n \varphi_n x;$$

sodann findet man aus der Bewegungsgleichung, indem man sie auf jedes einzelne Glied der letzten Summe anwendet,

$$\frac{1}{q_n} \frac{d^2 q_n}{d t^2} = \frac{1}{\varphi_n x} \frac{d^2 \varphi_n x}{d x^2} = -\lambda_n$$

und die Grenzbedingungen ergeben, daß

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \qquad \varphi_n x = \sqrt{2} \cos n \pi x$$

zu setzen ist.

Nun ist bei der zugrunde gelegten Form der Bewegungsgleichung $\partial u / \partial x$ die in der Richtung wachsender x wirkende Spannung; wenn daher in einem Punkte $x = \xi$ eine Einzelkraft P

wirkt, so muß dieselbe mit den auf beiden Seiten dieser Stelle angestrebten Grenzwerten der Spannung im Gleichgewicht sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\xi-0}^{\xi+0} + P = 0,$$

oder für $P = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1.$$

Wirkt ferner in irgend einem Element dx eine longitudinale Kraft $Y dx$, so muß sie im Gleichgewicht stehen mit der Resultante der in den Enden des Elements auf dieses wirkenden Spannungen, also

$$Y dx + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}^{x+dx} = 0, \qquad Y + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Sucht man also nach dem Ansatz des § 15 die Gleichgewichtsfigur des Stabes unter der Wirkung einer an der Stelle ξ angebrachten Kraft von der Intensität Eins und einer im Element dx angebrachten Kraft

$$Y dx = -\varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi \,.\, dx = -dx,$$

so ist die zugehörige Verrückung diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - 1 = 0,$$

die die Grenzbedingungen

$$\frac{du}{dx}\Big|^{x=0,1} = 0$$

erfüllt und an der Stelle ξ eine Unstetigkeit darbietet, die durch die Gleichung

$$\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

definiert wird.

Als Lösung dieser Aufgabe ergibt sich, wie schon in § 1 bemerkt ist, für $x < \xi$

$$u = -\xi + \frac{x^2 + \xi^2}{2} + c, \qquad c = \text{const},$$

für $x > \xi$

$$u = -x + \frac{x^2 + \xi^2}{2} + c,$$

und wenn man u durch $K(x, \xi)$ ersetzt, gilt für die Funktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ die Integralgleichung

$$\varphi_n x = \pi^2 n^2 \int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_n \xi \,.\, d\xi,$$

was man aus den Differentialgleichungen, deren Integrale $K(x, \xi)$ und $\varphi_n x$ sind, leicht verifiziert. Die Konstante c bestimmt das Glied $q_0 \varphi_0 x$ in der allgemeinen Formel des § 15; setzt man

$$c = \tfrac{1}{3},$$

so findet man

$$q_0 = 0, \quad \int_0^1 K(x, \xi)\, d\xi = 0,$$

und diese Gleichung bedeutet offenbar, daß der Schwerpunkt des Stabes seine ursprüngliche Lage behält.

Ein verwandtes Beispiel bietet das in § 10 betrachtete rotierende Seil, wenn es nicht in der Achse endet, sondern sich von $x = -1$ bis $x = +1$ erstreckt und auch da, wo es die Achse schneidet, längs dieser beweglich ist wie ein Faden in einem länglichen Nadelöhr. Man hat dann für die Funktion φ_n die Bedingung, daß die Größen $\varphi_n(+1)$ und $\varphi_n(-1)$ endlich sein müssen. Die Randwertaufgabe, in der die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d\varphi}{dx}\right] + \lambda \varphi = 0$$

auftritt, hat auch eine Lösung, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird, und zwar die Konstante; normiert man, so ergibt sich

$$\varphi_0 x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da nun wie in § 10 auch hier die Spannung durch

$$(1 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}$$

ausgedrückt wird, so findet man für die Greensche Funktion die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right] - \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right] - \tfrac{1}{2} = 0,$$

und die Unstetigkeitsbedingung

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}=1.$$

Setzt man $u = K(x, \xi)$ und bestimmt die in u verfügbare additive Konstante so, daß die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} K(x, \xi)\, dx = 0$$

besteht, so findet man

$$x < \xi, \quad K(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2,$$
$$x > \xi, \quad K(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2.$$

Die Lösungen des Randwertproblems sind, wie im vierten Abschnitt näher ausgeführt werden soll, die Legendreschen Polynome beliebigen Grades.

Ein weiteres Beispiel dieses Falles findet sich bei den transversalen Schwingungen eines Stabes, dessen Enden beide frei sind. Hält man die Bezeichnungen des § 11 fest, so hat man für die Verrückung die Differentialgleichung

$$a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

und die Grenzbedingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^{0,1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|^{0,1} = 0. \tag{2}$$

Diese Forderungen werden zunächst erfüllt, wenn man

$$u = q\varphi x$$

setzt und die Differentialgleichungen

$$\varphi'' x = 0, \qquad \frac{d^2 q}{dt^2} = 0$$

gelten. Die Größe φx kann dann aus zwei linear unabhängigen linearen Funktionen von x, etwa 1 und $x - c$ zusammengesetzt werden; diese sind aber nur dann zueinander orthogonal, wenn die Gleichungen

$$\int_0^1 (x-c)\, dx = 0, \qquad c = \tfrac{1}{2}$$

gelten. Die Funktion $x - \frac{1}{2}$ wird ferner erst dann normiert, wenn wir sie mit $\sqrt{12}$ multiplizieren; denn man findet leicht

$$\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2 dx = \tfrac{1}{12}.$$

Hiernach wird man setzen können:

$$\varphi_0 x = 1, \qquad \varphi_{01} x = \sqrt{12}\,(x - \tfrac{1}{2}),$$

und es gibt spezielle Verrückungen von der Form

$$u = q_0 \varphi_0 x = q_0 \qquad u = q_{01} \varphi_{01} x = \sqrt{12}\, q_{01} (x - \tfrac{1}{2}),$$

in denen q_0 und q_{01} lineare Funktionen der Zeit sind, so daß

$$\frac{d^2 q_0}{d t^2} = \frac{d^2 q_{01}}{d t^2} = 0.$$

Die mechanische Bedeutung dieser Verrückungen ist leicht ersichtlich: die erste ergibt eine longitudinale Verschiebung des unverzerrten Stabes, die zweite eine Drehung um den Mittelpunkt $x = \frac{1}{2}$. Daß die potentielle Energie des Stabes von den Amplituden dieser Bewegungen unabhängig ist, wenn von der Schwerkraft abgesehen wird, machen schon allgemeine dynamische Erwägungen plausibel.

Ferner werden die Forderungen (1) und (2) erfüllt, wenn man ansetzt:

$$u = q_n \varphi_n x,$$

$$(3) \qquad a \frac{d^4 \varphi_n}{d x^4} - \lambda_n \varphi_n = 0, \qquad \left.\frac{d^2 \varphi_n}{d x^2}\right|^{0,1} = \left.\frac{d^3 \varphi_n}{d x^3}\right|^{0,1} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 q_n}{d t^2} + \lambda_n q_n = 0;$$

sind m_n die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\cos m \operatorname{Cof} m = 1,$$

so findet man

$$\lambda_n = a m_n^4,$$

und wenn man die Funktionen $\varphi_n x$ normiert,

$$\varphi_n x = \frac{(\sin m_n - \operatorname{Sin} m_n)(\cos m_n x + \operatorname{Cof} m_n x) - (\cos m_n - \operatorname{Cof} m_n)(\sin m_n x + \operatorname{Sin} m_n x)}{\operatorname{Tg} m_n - \sin m_n \operatorname{Cof} m_n}.$$

Aus den Gleichungen (3) folgt leicht

$$\int_0^1 \varphi_n \alpha \,.\, \varphi_p \alpha \, d\alpha = 0, \qquad n \gtrless p,$$

außerdem aber auch

$$\int_0^1 \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{a}{\lambda_n}\int_0^1 \varphi_n^{\text{IV}} \alpha . d\alpha = \frac{a}{\lambda_n}[\varphi_n''' 1 - \varphi_n''' 0] = 0,$$

$$\int_0^1 \alpha \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{a}{\lambda_n}\int_0^1 \alpha \varphi_n^{\text{IV}} \alpha . d\alpha = \frac{a}{\lambda_n}\left\{\alpha \varphi_n''' \alpha \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi''' \alpha . d\alpha\right\}$$

$$= \frac{a}{\lambda_n}(\alpha \varphi_n''' \alpha - \varphi_n'' \alpha)\Big|_0^1 = 0.$$

Die Funktionen $\varphi_n x$ sind also nicht nur untereinander, sondern auch zu den Funktionen $\varphi_0 x$ und $\varphi_{01} x$ orthogonal. Man findet daher, indem man

$$u = q_0 \varphi_0 x + q_{01} \varphi_{01} x + \sum_n q_n \varphi_n x$$

setzt, für die lebendige Kraft des Stabes den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\left[\dot{q}_0^2 + \dot{q}_{01}^2 + \sum_n \dot{q}_n^2\right],$$

und die Bewegungsgleichungen (4) und (3) werden richtig erhalten, wenn man für die potentielle Energie den Ausdruck

$$V = \tfrac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2$$

ansetzt.

Um jetzt der allgemeinen Methode gemäß den Kern einer Integralgleichung zu erhalten, deren Lösungen die Funktionen $\varphi_n x$ sind, lassen wir im Punkte ξ eine transversale Kraft von der Intensität Eins wirken; die von ihr bewirkte Verrückung u hat dann nach § 11 die Unstetigkeit, die durch die Gleichung

$$(5) \qquad -a\frac{d^3 u}{dx^3}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

ausgedrückt wird. Ferner rührt an jeder Stelle von der Verrückung u eine transversale Kraft

$$-a\frac{d^4 u}{dx^4}dx$$

her; lassen wir nun außerdem die Kräfte

$$-(\varphi_0 x \cdot \varphi_0 \xi + \varphi_{01} x \cdot \varphi_{01} \xi) dx$$

wirken, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung die Gleichung:

$$(6)\qquad a\frac{d^4 u}{d x^4} + \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi + \varphi_{01} x \,.\, \varphi_{01} \xi = 0$$

oder

$$a\frac{d^4 u}{d x^4} + 1 + 12\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung verbunden mit der Unstetigkeitsbeziehung (5) und den Grenzbedingungen

$$\left.\frac{d^2 u}{d x^2}\right|^{0,1} = \left.\frac{d^3 u}{d x^3}\right|^{0,1} = 0$$

ergibt durch elementare Rechnung folgenden Ausdruck:

$$au = aK(x, \xi) = \frac{|x-\xi|^3}{12} - \frac{x^5\xi + x\xi^5}{10} + \frac{x^4\xi + x\xi^4}{4}$$
$$+ \frac{x^5+\xi^5}{20} - \frac{x^4+\xi^4}{6} - \frac{x^2\xi + x\xi^2}{4} + \frac{x^3+\xi^3}{12} + \frac{13}{35}x\xi$$
$$- \frac{11}{210}(x+\xi) + \frac{1}{105}.$$

Aus den Gleichungen (4), (5), (6) folgt mittels der Identität

$$v\frac{d^4 w}{d x^4} - w\frac{d^4 v}{d x^4} = \frac{d}{d x}\left[v\frac{d^3 w}{d x^3} - w\frac{d^3 v}{d x^3} + \frac{d w}{d x}\frac{d^2 v}{d x^2} - \frac{d v}{d x}\frac{d^2 w}{d x^2}\right]$$

die Integralgleichung

$$\varphi_n \xi = \lambda_n \int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_n x \,.\, d x$$

sowie die Beziehungen

$$\int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_0 x \,.\, d x = \int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_{01} x \,.\, d x = 0.$$

§ 17.

Die ausgearteten Fälle nach einer zweiten Methode. Systeme, deren Schwingungszahlen sich im Endlichen häufen.

Eine andere Methode, die ausgearteten Fälle zu behandeln, ergibt sich, wenn man davon ausgeht, daß die ersten Entwicklungen des § 12 gültig bleiben, wenn beliebig viele der Konstanten λ verschwinden. In den Entwicklungen nämlich, die von der Gleichung (1) aus zu dem Resultat (2) führen, treten überall nur die Nenner $\lambda_n - \beta^2$ auf; ist also β von Null und allen nicht verschwindenden Werten λ_n verschieden, so repräsentiert der Ausdruck

$$\mathfrak{u} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} \int \mathfrak{X} \varphi_n x . dx$$

die Amplitude einer erzwungenen Schwingung, und $\mathfrak{X}$ ist der Raumfaktor der wirkenden Kraft. Läßt man diese wieder in eine allein an der Stelle ξ wirkende Kraft von der Intensität Eins in der Weise ausarten, daß die Gleichung

$$\int \mathfrak{X} dx = 1$$

gilt, so geht die Größe $\mathfrak{u}$ in die Form

$$\mathfrak{u} = \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n - \beta^2} \tag{1}$$

über, und diese kann als symmetrischer Kern einer Integralgleichung benutzt werden, deren Lösungen alle Funktionen $\varphi_n x$ sind, gleichviel, ob die zugehörigen Werte λ_n verschwinden oder nicht. Denn offenbar gilt die Gleichung

$$\varphi_n \xi = (\lambda_n - \beta^2) \int \mathfrak{u} \varphi_n x dx,$$

und die Differenzen $\lambda_n - \beta^2$ sind alle von Null verschieden.

Der Nutzen dieser Bemerkung beruht darauf, daß die mechanische Bedeutung der Größe $\mathfrak{u}$ unter Umständen gestattet, sie explizite auszurechnen und dadurch die bilineare Reihe (1) strenge zu summieren.

Wirkt z. B. auf die transversal schwingende Saite oder den longitudinal schwingenden Stab im Punkte $x = \xi$ die Kraft von der Intensität $\cos(\beta t + \gamma)$, und soll die Verrückung u in einen Raum- und Zeitfaktor nach der Gleichung

$$u = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

zerfallen, so muß nach § 9 (3) die Gleichung

$$\cos(\beta t + \gamma) - \frac{d\mathfrak{u}}{dx} \cos(\beta t + \gamma) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = 0$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dx} \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = 1$$

bestehen. Ferner gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2} + \beta^2 \mathfrak{u} = 0,$$

und die Grenzbedingungen sind im Falle der Saite

$$\mathfrak{u}\Big|^{0,1} = 0,$$

im Falle des Stabes

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\Big|^{0,1} = 0.$$

Die diese Forderungen erfüllenden Größen $\mathfrak{u}$ sind aber schon in § 1 bestimmt; man findet bei der Annahme $x > \xi$ für die Größe $\mathfrak{u}$ im Falle der Saite

$$\frac{\operatorname{Sin}\beta(1-x)\operatorname{Sin}\beta\xi}{\beta\operatorname{Sin}\beta},$$

im Falle des Stabes

$$\frac{\operatorname{Cof}\beta(1-x)\operatorname{Cof}\beta\xi}{\beta\operatorname{Sin}\beta}, \tag{2}$$

und bei der Annahme $x < \xi$ sind die Buchstaben x und ξ zu vertauschen.

Die sämtlichen beim Stabe auftretenden Eigenfunktionen, auch die Konstante, der kein Glied in der potentiellen Energie entspricht, sind also Eigenfunktionen des Kernes (2), und der Eigenfunktion 1 entspricht der Eigenwert $-\beta^2$, der Eigenfunktion $\sqrt{2}\cos n\pi x$ der Eigenwert $\pi^2 n^2 - \beta^2$. Nimmt man übrigens β komplex, so ist der Ausdruck (2) im Sinne der Funktionentheorie eine meromorphe Funktion, deren Partialbruchentwicklung einen strengen Beweis für die bilineare Formel des Kerns $\mathfrak{u}$ liefert und ferner noch für die Entwicklung seiner Ableitung nach x oder ξ. Diese Beweismethode läßt sich, wie wir später sehen werden, auch in allgemeineren und schwierigeren Fällen anwenden.

Hier möge eine Betrachtung über ausgeartete Greensche Funktionen Platz finden, die von Fredholm herrührt und von Schaefer auf die Theorie der Dispersion und der Serienspektren angewandt ist.

Sei $K(x, \alpha)$ einer dieser Kerne, für den die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\, d\alpha = 0$$

oder allgemeiner die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\, d\alpha = a \tag{3}$$

gilt, in der a eine negative Konstante bedeutet. Sei ferner Θx die Verrückung an der durch x bezeichneten Stelle eines linearen, von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckten Massensystems $\mathfrak{M}$ und werde angenommen, daß das Massenelement $d\alpha$ auf das Element dx die Kraft

$$K(x, \alpha)[\Theta x - \Theta \alpha]\, dx\, d\alpha$$

ausübt. Dann wirkt auf das Element dx die Gesamtkraft

$$dx \int_0^1 K(x, \alpha)[\Theta x - \Theta \alpha]\, d\alpha,$$

und man erhält die Bewegungsgleichung

$$dx \frac{\partial^2 \Theta x}{\partial t^2} = dx \int_0^1 K(x, \alpha)\, [\Theta x - \Theta \alpha]\, d\alpha.$$

Soll das System harmonisch schwingen, so hat man etwa

$$\Theta x = \varphi x \,.\, \cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen und erhält sofort

$$-\beta^2 \varphi x = \int_0^1 K(x, \alpha)\, [\varphi x - \varphi \alpha]\, d\alpha,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$-\beta^2 \varphi x = a \varphi x - \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

(4) $$\varphi x = \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

wobei zu setzen ist

$$\lambda = \frac{1}{a + \beta^2}, \quad \beta^2 = -a + \frac{1}{\lambda}\cdot$$

Die Eigenwerte der Gleichung (4) werden sich nun, soweit man nach allen bisherigen Beispielen vermuten darf, nur im Unendlichen häufen; sind ihrer unendlich viele, wie in den betrachteten Beispielen, so erhält das Massensystem $\mathfrak{M}$ unendlich viele Schwingungszahlen β, die sich in der Nähe des Wertes $\sqrt{-a}$ häufen.

Auch die erzwungenen Schwingungen dieses Systems sind leicht zu übersehen. Wirkt nämlich auf das Element dx die Kraft

$$dx \,.\, \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma)$$

und versuchen wir,

$$\Theta x = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen, so hat die Bewegungsgleichung die folgende Form:

$$d x \frac{\partial^2 \Theta x}{\partial t^2} = d x \int_0^1 K(x, \alpha) [\Theta x - \Theta \alpha] \, d \alpha + d x . \mathfrak{X} \cos (\beta t + \gamma);$$

sie ergibt für $\mathfrak{u}$ die Gleichung

$$(\beta^2 + a) \mathfrak{u} = \int_0^1 K(x, \alpha) \mathfrak{u}(\alpha) \, d \alpha - \mathfrak{X},$$

also eine nichthomogene Integralgleichung, die durch die Schmidtsche Formel nach § 12 sofort gelöst werden kann:

$$\mathfrak{u} = -\lambda \mathfrak{X} - \lambda^2 \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int_0^1 \mathfrak{X} . \varphi_n x \, d x.$$

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern.

---

§ 18.

Die Schwarzschen Konstanten.

In den ersten beiden Abschnitten ist nur von Integralgleichungen die Rede gewesen, bei denen die bilineare Formel gilt; sie wurde entweder durch besondere Untersuchung des Kerns bewiesen oder, wie an einigen Stellen des zweiten Abschnittes, nur plausibel gemacht und vorausgesetzt. Diese Lücken füllen sich durch den Hauptsatz der Theorie der symmetrischen Kerne, der von Hilbert und dann nach anderer Methode von Schmidt bewiesen ist und dahin lautet, daß jeder stetige symmetrische Kern mindestens eine Eigenfunktion besitzt.

Die Buchstaben x, y, α, ... mögen Stellen eines reellen Grundgebietes von beliebig vielen Dimensionen, dx, dy, $d\alpha$, ... die Elemente dieses Gebietes bedeuten; jedes unbestimmte Integralzeichen bedeute die Integration über das Grundgebiet, also ein so vielfaches Integral, wie die Anzahl der Dimensionen des Grundgebietes beträgt. Durch $K(x, y)$ werde eine reelle, im Grundgebiet stetige, in den Stellen x und y symmetrische Funktion derselben bezeichnet. Die Behauptung ist, daß die Gleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zu erfüllen ist durch passende Wahl der Konstanten λ und der Größe φx als im Grundgebiet stetiger Funktion der Stelle x, also einer Funktion von so viel Variablen, wie die Anzahl der Dimensionen des Grundgebietes beträgt.

Der Grundgedanke des Schmidtschen Beweises kann nun deutlich gemacht werden, indem man ganz bedingt von der bilinearen Formel

$$K(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}$$

ausgeht und wie gewöhnlich die Gleichung

$$\varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha$$

ansetzt. Ersetzt man dann in der bilinearen Formel y durch α, multipliziert mit $K(\alpha, y)$ und benutzt die Integralgleichung, so ergibt sich

$$\int K(x, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n^2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung heißt der zu $K(x, y)$ gehörige einmal iterierte Kern und werde durch $K^2(x, y)$ bezeichnet. Setzt man ferner allgemein

$$K^{n+1}(x, y) = \int K^n(x, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha,$$

wodurch die mehrfach iterierten Kerne definiert sind, so ergibt sich die allgemeine Formel

$$K^m(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n^m}.$$

Denkt man sich nun die Eigenwerte λ_n nach wachsender Größe des absoluten Betrages geordnet, so wird das erste Glied wahrscheinlich sehr bald die späteren überwiegen, und ergeben sich bei großen Werten von m die annähernden Gleichungen

$$K^m(x, y)\, \lambda_1^m = \varphi_1 x \cdot \varphi_1 y$$

und hieraus, wenn die Funktion $\varphi_1 x$ der Gleichung

$$\int (\varphi_1 x)^2\, dx = 1$$

gemäß normiert wird,

$$\int K^m(x, x)\, dx = \frac{1}{\lambda_1^m}.$$

Hiernach erwartet man, den kleinsten Eigenwert λ_1 durch die Formel

$$\frac{1}{\lambda_1} = \lim_{m=\infty} \left[\int K^{m+1}(x, x)\, dx : \int K^m(x, x)\, dx \right]$$

und eine zugehörige Eigenfunktion $\varphi_1 x$ durch die Gleichung

$$C \varphi_1 x = \lim_{m=\infty} K^m(x, y)\, \lambda_1^m$$

zu erhalten, in der C eine von x unabhängige Größe bedeutet. Der Schmidtsche Beweis, den wir geben, zeigt nun in der Tat, daß die in den letzten beiden Gleichungen auftretenden Grenzwerte existieren und in gewisser Weise die gesuchten Größen ergeben. Die in der vorletzten Gleichung auftretenden Integrale sind die Schwarzschen Konstanten U_m.

Das allgemeine Haupthilfsmittel ist die Schwarzsche Ungleichung

$$\left[\int fx \, . \, Fx \, dx\right]^2 \leqq \int (fx)^2 \, dx \int (Fx)^2 \, dx,$$

in der fx und Fx auf dem Grundgebiet stetige Funktionen des Ortes bedeuten; sie können auch unstetig sein, wenn nur die Integrale ihrer Quadrate und ihres Produktes über das Grundgebiet endlich und bestimmt sind. Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn p und q beliebige reelle Größen sind, die offenbare Ungleichung

$$\int (p fx + q Fx)^2 dx \geqq 0$$

oder

$$p^2 \int (fx)^2 \, dx + 2pq \int fx \, . \, Fx \, dx + q^2 \int (Fx)^2 \, dx \geqq 0.$$

Nun kann die quadratische Form $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ nur dann bei beliebigen Werten von p und q niemals negativ werden, wenn die Ungleichung

$$AC - B^2 \geqq 0$$

gilt, und damit ist die ausgesprochene Behauptung erwiesen.

Um nun zur Untersuchung der Schwarzschen Konstanten überzugehen, beginnen wir mit der Bemerkung, daß auch die iterierten Kerne symmetrisch sind.

Denn ist dies bis zu $K^n(x, y)$ hinauf bewiesen, so gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} K^{n+1}(y, z) &= \int K^n(x, y) \, K(x, z) \, dx \\ &= \int\int K^{n-1}(x, x) \, K(u, y) \, K(x, z) \, dx \, du, \end{aligned}$$

oder, da man

$$\int K^{n-1}(u, x) \, K(x, z) \, dx = K^n(u, z)$$

einführen kann,

$$K^{n+1}(y, z) = \int K^n(u, z) \, K(u, y) \, du = K^{n+1}(z, y),$$

womit das Behauptete erwiesen ist.

Ferner gilt die Gleichung

$$(1) \qquad K^{n+r}(x, y) = \int K^n(\alpha, x) \, K^r(\alpha, y) \, d\alpha,$$

jedenfalls für $r = 1$; gilt sie aber für irgend einen Wert von r, so gilt sie auch für den um Eins größeren. Denn aus ihr folgt, da man die Integrationen vertauschen kann,

$$\int K^{n+r}(x, y)\, K(y, z)\, d y = \int\int K^n(\alpha, x)\, K^r(\alpha, y)\, K(z, y)\, d\alpha\, d y,$$

oder

$$K^{n+r+1}(x, z) = \int K^n(\alpha, x)\, K^{r+1}(\alpha, z)\, d\alpha,$$

wie behauptet wurde. Die Gleichung (1) gilt also allgemein. Aus ihr folgt sofort

$$U_{n+r} = \int\int K^n(\alpha, x)\, K^r(\alpha, x)\, d\alpha\, d x,$$

$$U_{2n} = \int\int K^n(\alpha, x)^2\, d\alpha\, d x,$$

und hieraus nach der Schwarzschen Ungleichung

$$U_{n+r}^2 \leqq U_{2n} \cdot U_{2r},$$

und speziell

(2) $$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2}\, U_{2n+2}.$$

Ferner läßt sich zeigen, daß alle Größen U_{2n} positiv sind. Denn zunächst gilt dies von

$$U_2 = \int K^2(\alpha, \alpha)\, d\alpha = \int\int K(x, \alpha)\, K(x, \alpha)\, d x\, d\alpha,$$

da $K(x, y)$ nicht identisch verschwindet. Wäre nun U_{2m} die erste verschwindende der Größen $U_4, U_6, \ldots$, so hätte man der Gleichung (1) zufolge

$$U_{2m} = \int\int K^m(x, \alpha)^2\, d x\, d\alpha,$$

also verschwände $K^m(x, \alpha)$ identisch, mithin auch der Formel (1) zufolge $K^{m+1}(x, \alpha)$. Ist dann $2r$ die gerade der Zahlen m und $m+1$, so verschwindet die Größe

$$K^{2r}(x, x) = \int K^r(x, \alpha)^2\, d\alpha,$$

mithin auch $K^r(x, \alpha)$ identisch, mithin ist

$$U_r = \int K^r(\alpha, \alpha)\, d\alpha = 0, \qquad U_{r+1} = \int K^{r+1}(\alpha, \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Damit geriete man aber in einen Widerspruch zu der Voraussetzung, U_{2m} sei die erste verschwindende in der Reihe der Größen $U_4, U_6, \ldots$

Man kann daher in der Beziehung (2) stets durch $U_{2n} \cdot U_{2n-2}$ dividieren und erhält

(3) $$0 < \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}.$$

Anderseits ergibt sich mittels der Gleichung (1) aus der offenbaren Beziehung

$$\int [p^2 K^m(x,\alpha)^2 + 2pq\,K^m(x,\alpha)\,K^r(y,\alpha) + q^2 K^r(y,\alpha)^2]\,d\alpha \geqq 0$$

oder aus der allgemeinen Schwarzschen Ungleichung das Resultat

$$K^{m+r}(x,y)^2 \leqq \int K^m(x,\alpha)^2\,d\alpha \int K^r(y,\alpha)^2\,d\alpha,$$

und hieraus, indem man über das Grundgebiet zweimal integriert,

$$\int\int K^{m+r}(x,y)^2\,dx\,dy \leqq \int\int K^m(x,\alpha)^2\,dx\,d\alpha \,.\int\int K^r(y,\alpha)^2\,dy\,d\alpha,$$

oder

$$U_{2m+2r} \leqq U_{2m}\,U_{2r} \tag{4}$$

und speziell

$$\frac{U_{2m+2}}{U_{2m}} \leqq U_2 .$$

Die positiven Größen $U_{2m+2} : U_{2m}$, die nach der Relation (3) mit m wachsen, bleiben also unter einer endlichen Schranke, und es gibt daher einen positiven Grenzwert c derart, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c, \qquad \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqq c;$$

die letzte Ungleichung kann auch geschrieben werden

$$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^n},$$

so daß die positiven Größen $U_{2m} : c^m$ unter einer endlichen Schranke liegen und sich mit wachsenden Werten von m einer nicht negativen Grenze U annähern. Diese ist positiv; denn schreibt man die Ungleichung (4) in der Form

$$U_{2r} \geqq \frac{U_{2m+2r}}{U_{2m}}, \qquad U_{2r} \geqq \frac{U_{2m+2r}}{U_{2m+2r-2}} \cdot \frac{U_{2m+2r-2}}{U_{2m+2r-4}} \cdots \frac{U_{2m+2}}{U_{2m}},$$

so sind alle einzelnen Brüche auf der rechten Seite der Beziehung (3) zufolge nicht kleiner als der letzte von ihnen, also

$$U_{2r} \geqq \left(\frac{U_{2m+2}}{U_{2m}}\right)^r;$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung sich bei wachsenden Werten von m der Grenze c^r nähert, folgt allgemein

$$\frac{U_{2r}}{c^r} \geqq 1,$$

und hieraus

$$U \geqq 1.$$

§ 19.

Beweis für die Existenz einer Eigenfunktion.

Die zu Anfang des vorigen Paragraphen durchgeführten heuristischen Betrachtungen führen nun zu der Vermutung, daß

$$\frac{1}{c} = \lambda_1^2,$$

d. h. gleich dem Quadrat des kleinsten Eigenwertes, und daß ein zugehöriges Aggregat von Eigenfunktionen in der Form

$$\lim_{m=\infty} \lambda_1^{2m} K^{2m}(x, y) = \lim_{m=\infty} \frac{K^{2m}(x, y)}{c^m}$$

darstellbar ist. Jetzt sind wir hinreichend vorbereitet, um zeigen zu können, daß dieser Grenzwert wirklich existiert und eine Eigenfunktion des Kerns $K^2(x, y)$ darstellt. Aus der Gleichung (1) des § 18 folgt nämlich

$$\frac{K^{2m+2n}(x,y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x,y)}{c^n}$$

$$= \frac{1}{c}\int\!\!\int K(x, \alpha)\, K(y, \beta) \left[\frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+n-1}} - \frac{K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{n-1}}\right] d\alpha\, d\beta,$$

und hieraus nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left[\frac{K^{2m+2n}(x, y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x, y)}{c^n}\right]^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int\!\!\int K(x, \alpha)^2\, K(y, \beta)^2\, d\alpha\, d\beta$$

$$\times \int\!\!\int d\alpha\, d\beta \left\{\left(\frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+n-1}}\right)^2 - 2\,\frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)\, K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+2n-2}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{n-1}}\right)^2\right\},$$

oder, nach der Definition der Größen U_n,

$$\left[\frac{K^{2m+2n}(x, y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x,y)}{c^n}\right]^2 \leqq \left\{\frac{U_{4m+4n-4}}{c^{2m+2n-2}} - \frac{2\, U_{2m+4n-4}}{c^{m+2n-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}$$

$$\times \frac{1}{c^2}\int\!\!\int K(x, \alpha)^2\, K(y, \beta)^2\, d\alpha\, d\beta.$$

Hier wird die Klammer auf der rechten Seite, sobald n hinreichend groß gewählt ist, so klein, wie man will, da dann ihre Glieder den Werten U, $-2\,U$, U beliebig nahe liegen; der zweite

Faktor der rechten Seite liegt unter einer festen Schranke. Die Ungleichung zeigt also, daß der Grenzprozeß

$$\lim_{m=\infty} \frac{K^{2m}(x, y)}{c^m}$$

bezüglich der Variablen x, y im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen eine stetige Funktion $f(x, y)$, die offenbar in x und y symmetrisch ist. Sie ist ferner Eigenfunktion des Kerns K^2 und gehört als solche zum Eigenwert $\frac{1}{c}$, wie die Gleichung

$$\frac{K^{2m+2}(x,y)}{c^{m+1}} = \frac{1}{c}\int K^2(x, \alpha)\, \frac{K^{2m}(y,\alpha)}{c^m}\, d\alpha$$

zeigt. In dieser kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Grenzprozesses m beiderseits unendlich wachsen lassen und erhält so

$$f(x, y) = \frac{1}{c}\int K^2(x, \alpha) f(\alpha, y)\, d\alpha,$$

und ebenso

$$f(x, y) = \frac{1}{c}\int K^2(y, \alpha) f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Endlich verschwindet die Funktion $f(x, y)$ nicht identisch, da die Größe

$$\int f(x, x)\, dx$$

sich, wenn n hinreichend groß genommen wird, von

$$\frac{1}{c^n}\int K^{2n}(x, x)\, dx = \frac{U_n}{c^n},$$

also auch von U beliebig wenig unterscheidet. Letztere Größe ist aber als positiv erkannt; beiläufig ergibt sich noch

$$\int f(x, x)\, dx = U.$$

Hiermit ist eine Eigenfunktion des Kerns K^2 konstruiert.

Wenn aber eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \varphi x = \lambda \int K^2(x, \alpha)\, \varphi\alpha\, d\alpha$$

besteht, in der λ positiv ist, so setze man, durch a eine Konstante bezeichnend,

$$(2) \qquad \psi x = \varphi x - a\int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha;$$

dann folgt

$$\int K(x,\beta)\, \psi\beta . d\beta = \int K(x,\beta)\, \varphi\beta . d\beta - a\int K(\beta,\alpha) K(x,\beta)\, \varphi\alpha . d\alpha\, d\beta$$
$$= \int K(x,\beta)\, \varphi\beta . d\beta - a\int K^2(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha,$$

wobei im letzten Gliede rechts die Integrationen vertauscht sind, und die Gleichungen (1) und (2) ergeben

$$\int K(x, \beta)\, \psi\beta . d\beta = \frac{-\psi x + \varphi x}{a} - \frac{a}{\lambda}\, \varphi x,$$

also, wenn $a = \sqrt{\lambda}$ gesetzt wird,

$$\psi x = \sqrt{\lambda} \int K(x, \beta)\, \psi\beta . d\beta.$$

Damit ist gezeigt, daß auch der ursprüngliche Kern $K(x, y)$ eine Eigenfunktion besitzt, die zu dem Eigenwert $\sqrt{\lambda}$ gehört. Das würde auch gelten, wenn ψx identisch verschwände; denn dann wäre

$$\varphi x = \sqrt{\lambda} \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha,$$

also φx selbst schon die gesuchte Eigenfunktion.

Hiermit ist vollständig bewiesen, daß jeder reelle stetige symmetrische Kern mindestens eine nicht identisch verschwindende stetige Eigenfunktion besitzt, die zu einem reellen Eigenwerte gehört.

Eine bedeutsame Verallgemeinerung ergibt sich sofort aus dem soeben vollzogenen Übergang von φx zu ψx, von $K^2(x, y)$ zu $K(x, y)$. Sei jetzt die symmetrische Funktion $K(x, y)$ auf dem Grundgebiet unstetig, vielleicht auch unendlich, aber so beschaffen, daß, wenn $f\alpha$ und $f(\alpha, x)$ auf dem Grundgebiet stückweise stetige Funktionen von einer und zwei Stellen sind, die Größe

$$\int K(x, \alpha)\, f\alpha\, d\alpha$$

eine stetige Funktion von x ist, daß ferner bei dem Integral

$$\iint f(x, \alpha)\, K(x, \alpha)\, dx\, d\alpha$$

die Folge der Integrationen gleichgültig ist, daß dasselbe bei dem ersten der Integrale

$$\iint K(x, \alpha)\, K(y, \alpha)\, f\alpha . d\alpha\, dx, \quad \int K(x, \alpha)\, K(y, \alpha)\, f\alpha . d\alpha$$

gilt, und daß das zweite dieser Integrale eine stetige Funktion von x und y ist. Endlich möge auch das Integral

$$\iint K(x, \alpha)\, K(y, \alpha)\, f(\alpha, x)\, dx\, dy$$

Vertauschung der Integrationen gestatten. Dabei definieren wir wie in § 2 die Eigenschaft des stückweise stetigen in folgender Weise. Das Grundgebiet werde in eine endliche Anzahl von Teilgebieten zerlegt; bewegt sich die unabhängige Stelle in einem

Teilgebiet mit Einschluß der Randlinie, so ändert sich die abhängige Größe stetig; ihr Wert auf einer Randlinie braucht nicht eindeutig festgelegt zu sein. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so wollen wir K einen brauchbar unstetigen Kern nennen. Dann ist jedenfalls auch die Größe

$$K^2(x, y) = \int K(x, \alpha) K(y, \alpha) d\alpha$$

in x und y stetig und symmetrisch, kann also als Kern einer Integralgleichung (1) genommen werden, die nach dem bewiesenen Hauptsatze eine stetige Lösung besitzt. Der Übergang von dieser zur Gleichung (2) kann dann ebenso gemacht werden wie soeben, da die dort hervorgehobene Änderung der Integrationsfolge gerade eine von denen ist, die bei brauchbaren Kernen erlaubt sind, und da, wenn φx stetig ist, dasselbe von ψx gilt, da diese Größe zufolge der ersten der die Brauchbarkeit kennzeichnenden Eigenschaften in x stetig ist. Damit ist gezeigt, daß auch jeder brauchbar unstetige symmetrische Kern mindestens eine stetige Eigenfunktion besitzt.

Ein brauchbar unstetiger Kern ist mit seinen Eigenfunktionen schon im zweiten Abschnitt vorgekommen; auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ als Grundgebiet setzten wir, wenn $x \leqq \xi$ war,

$$K(x, \xi) = \log \xi,$$

und dieser Kern wird unendlich für $x = \xi = 0$.

§ 20.

Das vollständige System der Eigenfunktionen.

Um die Gesamtheit der Lösungen einer Integralgleichung überblicken zu können, nehmen wir an, zu dem Eigenwerte λ gehöre eine einzige oder allgemeiner k zueinander orthogonale und normierte Eigenfunktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \dots \varphi_k x$ als Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha,$$

so daß die Gleichungen

$$\int \varphi_\nu x . \varphi_\varrho x . dx = 0, \quad \nu, \varrho = 1, \dots k, \quad \nu \gtrless \varrho,$$

$$\int (\varphi_\nu x)^2 dx = 1$$

gelten; dabei braucht der Kern zunächst nicht symmetrisch vorausgesetzt zu werden, sei aber stetig. Wir bilden nun die nicht negative Größe

$$P = \int \left[K(x, \alpha) - \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu \varphi_\nu \alpha \right]^2 d\alpha$$

$$= \int K(x, \alpha)^2 d\alpha + \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu^2 - 2 \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu \int K(x, \alpha) \varphi_\nu \alpha \, d\alpha;$$

setzen wir besonders

$$c_\nu = \int K(x, \alpha) \varphi_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{\varphi_\nu x}{\lambda},$$

so folgt

$$P = \int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_{\nu}^{1,k} \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda^2}$$

und hieraus

$$\int P \, dx = \iint K(x, \alpha)^2 d\alpha \, dx - \frac{k}{\lambda^2},$$

und diese Größe ist wie P nicht negativ. Daraus folgt

$$k \leqq \lambda^2 \iint K(x, \alpha)^2 d\alpha \, dx,$$

d. h. die Anzahl k hat eine gewisse obere Schranke, und zu jedem Eigenwert kann nur eine endliche Anzahl zueinander orthogonaler Eigenfunktionen gehören.

Dies gilt auch im Falle eines brauchbar unstetigen symmetrischen Kerns nach der Definition des § 19; denn auch bei ihm hat die Größe P und die rechte Seite der Ungleichung (1) einen endlichen Wert.

Sei nun das System der Funktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots \varphi_k x$ ein solches, in dem k seinen größten Wert erreicht; dann läßt sich zeigen, daß jede zu λ gehörige Eigenfunktion in der Form

$$c_1 \varphi_1 x + c_2 \varphi_2 x + \cdots + c_k \varphi_k x$$

dargestellt werden kann mit konstanten Faktoren c_ν. Wäre nämlich ψx eine Eigenfunktion, bei der dies nicht möglich ist, so könnte man die Konstanten b_ν so bestimmen, daß der Ausdruck

$$\psi_0 x = \psi x - \sum_{\nu}^{1,k} b_\nu \varphi_\nu x$$

zu allen Funktionen $\varphi_\nu x$ orthogonal wäre; es genügt,

$$b_\nu = \int \psi \alpha . \varphi \alpha . d\alpha$$

zu setzen. Die so erhaltene Funktion $\psi_0 x$ kann nicht identisch verschwinden, da dann ψx durch $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots$ linear ausgedrückt erschiene, entgegen der Voraussetzung. Man hat also in den Funktionen

$$\psi_0 x, \varphi_1 x, \ldots \varphi_k x$$

ein System von $k+1$ zueinander orthogonalen Eigenfunktionen, da natürlich jede lineare Verbindung von zu demselben Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen wie $\psi_0 x$ wiederum eine Eigenfunktion derselben Art ist. Damit ist gezeigt, daß ψx von den Funktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots \varphi_k x$ linear abhängig sein muß.

Zu jedem Eigenwert einer Integralgleichung mit stetigem oder brauchbar unstetigem symmetrischem oder mit stetigem unsymmetrischem Kern gehört also eine endliche Anzahl zueinander orthogonaler Eigenfunktionen, durch die jede andere zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktion linear mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden kann.

Gehören zwei Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2, so sind sie, wie schon in § 3 bemerkt wurde, zueinander immer orthogonal; wir wiederholen die Formeln

$$\lambda_2 \int \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x \, dx = \lambda_1 \lambda_2 \int \varphi_2 x \, dx \int K(x, \alpha) \, \varphi_1 \alpha \, d\alpha,$$
$$\lambda_1 \int \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, dx = \lambda_1 \lambda_2 \int \varphi_1 x \, dx \int K(x, \alpha) \, \varphi_2 \alpha \, d\alpha,$$

deren rechte Seiten als identisch erkannt werden, indem man die Integrationen vertauscht, was auch bei brauchbar unstetigen Kernen nach § 19 erlaubt ist; somit erhält man für stetige wie für brauchbar unstetige Kerne die Gleichungen

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, dx = 0, \quad \int \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, dx = 0.$$

Der reelle Kern, den wir betrachten, kann hiernach nur reelle Eigenwerte besitzen. Denn wäre einer von diesen komplex, so wäre die zugehörige konjugiert imaginäre Größe ebenfalls ein Eigenwert, die entsprechenden Eigenfunktionen wie die Eigenwerte konjugiert imaginär, könnten aber nicht orthogonal sein. Imaginäre Eigenwerte führen also zum Widerspruch und sind unmöglich.

Die Gesamtheit aller Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns der betrachteten Art kann hiernach in folgender Weise gekennzeichnet werden. Es gibt ein System von endlich oder unendlich vielen zueinander orthogonalen Eigenfunktionen von der

Art, daß jede Eigenfunktion eine lineare Funktion einer endlichen Anzahl von Gliedern jenes Systems mit konstanten Koeffizienten ist.

Die Funktionen dieses Systems wollen wir uns nach den Gleichungen

$$\int (\varphi_n x)^2 dx = 1$$

durch Anfügung eines konstanten Faktors normiert denken; dann haben wir ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kerns, von dessen Gliedern je eine endliche Anzahl zu einem und demselben Eigenwerte gehören. Sind $\varphi_n x$ die Glieder des Systems, so nennen wir den zugehörigen Eigenwert λ_n und dann können immer eine endliche Anzahl von Eigenwerten einander gleich sein.

An dies Resultat schließen wir zwei Korollare. Zunächst sei durch $\varphi_\varrho x$ irgend eine Anzahl von Gliedern des vollständigen Systems bezeichnet; λ_ϱ seien die zugehörigen gleichen oder ungleichen Eigenwerte, der Kern symmetrisch. Dann gibt die Ungleichung

$$\int [K(x, \alpha) - \sum_\varrho c_\varrho \varphi_\varrho \alpha]^2 d\alpha \geqq 0,$$

indem man

$$c_\varrho = \int K(x, \alpha) \varphi_\varrho \alpha . d\alpha = \frac{\varphi_\varrho x}{\lambda_\varrho}$$

setzt, ähnlich wie bei einer oben durchgeführten Rechnung

$$\int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_\varrho c_\varrho^2 \geqq 0,$$

$$\int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_\varrho \frac{(\varphi_\varrho x)^2}{\lambda_\varrho^2} \geqq 0.$$

Integriert man nach x, so folgt

$$\iint K(x, \alpha)^2 d\alpha\, dx \geqq \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2};$$

von den reziproken absoluten Werten der Eigenwerte kann also nur eine endliche Anzahl eine vorgeschriebene Grenze überschreiten; die Eigenwerte häufen sich im Endlichen nicht, und die Summe ihrer reziproken Quadrate konvergiert. Dies gilt auch für einen brauchbar unstetigen Kern, da soeben nur das Integral des Quadrats des Kerns und seiner Produkte mit stetigen Funktionen gebildet sind.

Ein zweites Korollar betrifft die mit dem vollständigen System eines stetigen Kerns gebildete bilineare Reihe

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

die, wie wir annehmen wollen, gleichmäßig konvergiere, wenn x und ξ das Grundgebiet durchlaufen. Dann ist die Differenz

$$Q(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

ebenso wie K eine stetige symmetrische Funktion von x und ξ auf der bezeichneten Strecke; also gibt es eine nicht identisch verschwindende Funktion ψx, die die Gleichung

$$\psi x = \mu \int Q(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha \tag{1}$$

erfüllt, in der μ eine Konstante bedeutet. Multipliziert man mit $\varphi_n x$ und integriert, was erlaubt ist, in der Reihe Q gliedweise, so ergibt sich

$$\int \psi x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx = \mu \int \psi \alpha \,.\, d\alpha \left(\int K(x, \alpha)\, \varphi_n x \, dx - \frac{\varphi_n \alpha}{\lambda_n} \right) = 0; \tag{2}$$

aus der Integralgleichung (1) folgt somit

$$\psi x = \mu \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha.$$

Hiernach wäre ψx eine Eigenfunktion des Kerns $K(x, \xi)$, also ein Aggregat von Funktionen $\varphi_n x$ mit konstanten Koeffizienten. Das widerspricht aber den Gleichungen (2), und der Widerspruch löst sich nur, wenn $Q(x, \xi)$ identisch verschwindet:

$$K(x, \xi) = \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Damit ist gezeigt, daß die bilineare Formel, gebildet mit dem vollständigen Orthogonalsystem eines stetigen symmetrischen Kerns, immer gilt, wenn die bilineare Reihe bezüglich beider Variablen in dem ganzen Grundgebiet gleichmäßig konvergiert.

Als unmittelbare Folge ergibt sich z. B., daß die in § 11 nur vermutete bilineare Formel für die Integralgleichung des quer schwingenden Stabes wirklich gilt.

§ 21.

Die bilineare Reihe des iterierten Kerns.

Seien $\varphi_n x$ wie immer die Glieder eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kerns $K(x, y)$, der stetig oder brauchbar unstetig sein kann; ν durchlaufe eine beliebige endliche Menge ganzzahliger Werte; fx sei im Grundgebiet stückweise stetig und

$$a_n = \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha.$$

Dann gibt die Schwarzsche Ungleichung

$$\Big[\int K(x, \alpha) \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu x\, dx\Big]^2 \leqq \int K(x, \alpha)^2 dx \cdot \sum_\nu a^2,$$

da offenbar

$$\int \big(\sum_\nu a_\nu \varphi_\nu x\big)^2 dx = \sum_\nu a_\nu^2$$

und das Quadrat des Kerns auch im Falle der Unstetigkeit integriert werden kann. Wendet man die Integralgleichung in der Form

$$\varphi_\nu \alpha = \lambda_\nu \int K(x, \alpha)\, \varphi_\nu x \,.\, dx$$

an, so ergibt sich

$$(1) \qquad \Big(\sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu \alpha}{\lambda_\nu}\Big)^2 \leqq \int K(x, \alpha)^2 dx \sum_\nu a_\nu^2.$$

Anderseits ist

$$\int \big(f\alpha - \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu \alpha\big)^2 d\alpha \geqq 0,$$

also folgt nach der Definition von a_n die Besselsche Ungleichung

$$\int (f\alpha)^2 d\alpha - \sum_\nu a_\nu^2 \geqq 0;$$

die Reihe $\sum\limits_n^{1,\infty} a_n^2$ konvergiert, und die Beziehung (1) ergibt

$$\Big(\sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu \alpha}{\lambda_\nu}\Big)^2 \leqq \int K(x, \alpha)^2 dx \int (f\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\Big|\sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu \alpha}{\lambda_\nu}\Big| \leqq \Big[\int K(x, \alpha)^2 dx \int (f\alpha)^2 d\alpha\Big]^{1/2} < \Big[G \int (f\alpha)^2 d\alpha\Big]^{1/2},$$

wenn unter G eine obere Schranke der Funktion

$$\int K(x, \alpha)^2 dx$$

ist, die auch bei brauchbar unstetigem Kern in α stetig ist.

Greift man also aus der Reihe

$$R\alpha = \sum_n^{1,\infty} \frac{a_n \varphi_n \alpha}{\lambda_n}$$

beliebig viele Glieder, z. B. nur positive oder nur negative heraus, so liegt die Summe ihrer absoluten Beträge unter einer von α unabhängigen Schranke; die Reihe $R\alpha$ ist absolut konvergent. Sie konvergiert aber auch gleichmäßig im Grundgebiet. Denn in der Ungleichung (1) kann man, da ja die Reihe $\sum a_n^2$ konvergiert, die Zahlen ν über einer so hohen Schranke ν_0 wählen, daß die rechte Seite, die kleiner als

$$G \sum_\nu a_\nu^2$$

ist, für alle Stellen α unter einer beliebig klein vorgeschriebenen Schranke ε liegt. Daraus folgt, daß die Summe beliebig vieler positiver Glieder der Reihe $R\alpha$, deren Zeiger ν_0 übersteigt, unter ε liegt, und dasselbe gilt für die negativen Glieder, immer für beliebige Stellen α. Die Reihe

$$R\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n \alpha}{\lambda_n} \int f x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx$$

konvergiert also im Grundgebiet absolut und gleichmäßig.

Weiter setzen wir besonders $f\alpha = K(\alpha, y)$; das ist auch bei brauchbar unstetigen Kernen erlaubt, da bei diesen die Größe

$$a_n = \int K(\alpha, y)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n} \tag{2}$$

ebenfalls endlich ist und die Ungleichung

$$\int (f\alpha)^2 d\alpha = \int K(\alpha, y)^2 d\alpha > \sum_\nu \left(\frac{\varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right)^2$$

gilt. Die Konvergenzbetrachtung bleibt unverändert; die oberen Schranken der betrachteten Summen sind von y abhängig, und die Reihe $R\alpha$ wird nach (2)

$$R_0(\alpha, y) = \sum_n \frac{\varphi_n \alpha \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n^2}.$$

Diese Reihe ist also nach α im Grundgebiet gleichmäßig konvergent, wenn y in ihm festgehalten wird.

Die Reihe $R_0(x, y)$ ist nun die bilineare Reihe des bei unseren Voraussetzungen stetigen Kerns

$$K^2(x, y) = \int K(x, \alpha) K(y, \alpha) d\alpha;$$

das will sagen, daß die Funktionen $\varphi_n x$ auch ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kerns $K^2(x, y)$ bilden. In der Tat folgt aus der Integralgleichung

$$\varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha) \varphi_n \alpha \, d\alpha,$$

indem man mit $K(x, y)$ multipliziert und rechts die Integrationen, was erlaubt ist, vertauscht,

$$(3) \qquad \int K(x, y) \varphi_n x \, dx = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n} = \lambda_n \int K^2(\alpha, y) \varphi_n \alpha . d\alpha;$$

$\varphi_n x$ ist also Eigenfunktion des Kerns K^2 mit dem Eigenwert λ_n. Ist anderseits φx irgend eine Eigenfunktion dieses Kerns, also

$$\varphi x = \mu \int K^2(x, \alpha) \varphi \alpha \, d\alpha,$$

so lehrt die am Schlusse des § 19 durchgeführte Betrachtung, daß von den Ausdrücken

$$\psi_1 x = \varphi x - \sqrt{\mu} \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha,$$

$$\psi_2 x = \varphi x + \sqrt{\mu} \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha$$

entweder eine identisch verschwindet, und dann ist φx auch Eigenfunktion des Kerns K, oder $\psi_1 x$ und $\psi_2 x$ sind Eigenfunktionen dieses Kerns, und ergeben

$$\varphi x = \frac{\psi_1 x + \psi_2 x}{2}.$$

Diese Größe ist also durch Eigenfunktionen des Kerns K, die zu entgegengesetzten Eigenwerten gehören, linear ausdrückbar, d. h. durch zwei Funktionen $\varphi_n x$, die zu demselben Werte von λ_n^2 gehören oder zu demselben Eigenwert des Kerns K^2. Jede Eigenfunktion dieses Kerns ist also linear durch Funktionen $\varphi_n x$ ausdrückbar; das System dieser Funktionen ist wirklich ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kerns K^2 und $R_0(x, y)$ seine bilineare Reihe.

Aus denselben Gründen ist

$$R_1(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n y}{\lambda_n^4}$$

die bilineare Reihe des Kerns

$$K^4(x, y) = \int K^2(x, \alpha) K^2(y, \alpha) d\alpha,$$

und da für jede endliche Menge von Zahlen ν die leicht ersichtliche Ungleichung

$$\left|\sum_\nu \frac{\varphi_\nu x \,.\, \varphi_\nu y}{\lambda_\nu^4}\right| \leqq \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2} \sum \frac{|\varphi_\nu x \,.\, \varphi_\nu y|}{\lambda_\nu^2}$$

$$\leqq \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}\left[\sum\left(\frac{\varphi_\nu x}{\lambda_\nu}\right)^2 \cdot \sum\left(\frac{\varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right)^2\right]^{1/2} < G \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$$

gilt, die Reihe $\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \cdots$ aber nach § 20 konvergiert, ist die Reihe $R_1(x, y)$ in x und y auf dem Grundgebiet gleichmäßig konvergent, so daß nach § 20 folgt

$$K^4(x, y) = R_1(x, y).$$

Da nun die Reihe $R_0(x, y)$ absolut und bei festem x in y gleichmäßig konvergiert, ergibt sich nach (3), indem man ausmultipliziert und gliedweise nach y integriert,

$$\int [K^2(x, y) - R_0(x, y)]^2 dy = K^4(x, x) - R_1(x, x) = 0;$$

daraus folgt die Gleichung

$$(4) \qquad K^2(x, y) - R_0(x, y) = 0, \quad K^2(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n^2},$$

die also mit gleichmäßiger Konvergenz ihrer rechten Seite in x bei festem y für stetige und brauchbar unstetige Kerne gilt.

§ 22.

Darstellung willkürlicher Funktionen.

Aus dem erhaltenen Resultat ergibt sich etwas Bemerkenswertes für solche im Grundgebiet stückweise stetige Funktionen fx, die zu allen Eigenfunktionen orthogonal sind, so daß allgemein

$$\int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = 0.$$

Multipliziert man nämlich die Gleichung (4) des § 21 mit $fx \,.\, fy$, so darf man rechts gliedweise nach x integrieren und findet

$$\int K^2(x, y) fx \,.\, dx = 0, \quad \iint K^2(x, y) fx \,.\, fy \,.\, dx\, dy = 0$$

oder

$$\iint fx \,.\, fy \,.\, dx\, dy \int K(x, \alpha) K(y, \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Hier sind die Integrationen bei stetigen Kernen vertauschbar, ebenso bei brauchbar unstetigen nach den die Brauchbarkeit kennzeichnenden Festsetzungen des § 19; also folgt

$$\int d\alpha \int fx\, K(x,\alpha)\, dx \,.\int fy\, K(y,\alpha)\, dy = 0$$

oder, da die nach x und y genommenen Integrale dieselbe stetige Funktion von α darstellen, die wir $\Phi\alpha$ nennen,

$$(1) \qquad \int (\Phi\alpha)^2\, d\alpha = 0, \quad \Phi\alpha = \int fx \,.\, K(x,\alpha)\, dx = 0.$$

Die Funktion $f\alpha$, die zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist, ist auch zum Kern orthogonal.

Das Umgekehrte ist ohne weiteres klar, da aus der Gleichung (1) durch Multiplikation mit $\varphi_n\alpha$ und Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int \Phi\alpha \,.\, \varphi_n\alpha \,.\, d\alpha = \int \varphi_n\alpha \,.\, d\alpha \int fx \,.\, K(x,\alpha)\, dx \\ &= \int fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx, \end{aligned}$$

wobei wiederum die Integrationen in erlaubter Weise vertauscht sind.

Jetzt erinnern wir uns der in § 21 bewiesenen Tatsache, daß die Reihe

$$Fx = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha \,.\, \varphi_n\alpha\, d\alpha = \sum_n \frac{a_n \varphi_n x}{\lambda_n},$$

in der $f\alpha$ wieder eine beliebige, stückweise stetige Funktion ist, gleichmäßig und absolut konvergiert. Setzt man daher

$$\mathfrak{f}x = Fx - \int K(x,\alpha) f\alpha \,.\, d\alpha,$$

so ist $\mathfrak{f}x$ stetig und man findet

$$\int \varphi_n x \,.\, \mathfrak{f}x \,.\, dx = \int Fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx - \iint K(x,\alpha)\, \varphi_n x \,.\, f\alpha \,.\, dx\, d\alpha$$

oder, mit erlaubter Vertauschung der Integrationen,

$$\int \varphi_n x \,.\, \mathfrak{f}x \,.\, dx = \int Fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx - \frac{1}{\lambda_n} \int f\alpha \,.\, \varphi_n\alpha \,.\, d\alpha,$$

und da offenbar

$$\int Fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx = \frac{1}{\lambda_n} \int f\alpha \,.\, \varphi_n\alpha \,.\, d\alpha,$$

so ergibt sich

$$(2) \qquad \int \varphi_n x \,.\, \mathfrak{f}x \,.\, dx = 0;$$

also ist nach dem soeben erhaltenen Satze auch

$$\int \mathfrak{f}x \,.\, K(x,\alpha)\, dx = 0.$$

Die Definition von $\mathfrak{f}x$ führt nun zu folgender Umformung

$$\int (\mathfrak{f}\alpha)^2 d\alpha = \int \mathfrak{f}\alpha \cdot \left\{ \sum_n \frac{a_n \varphi_n \alpha}{\lambda_n} - \int K(x, \alpha) f x \, . \, dx \right\},$$

also nach der Gleichung (2)

$$\int (\mathfrak{f}\alpha)^2 d\alpha = -\int d\alpha \, \mathfrak{f}\alpha \, . \int K(x, \alpha) f x \, . \, dx,$$

und nach erlaubter Vertauschung der Integrationen

$$\int (\mathfrak{f}\alpha)^2 d\alpha = -\int f x \, . \, dx \int K(x, \alpha) \mathfrak{f}\alpha \, . \, d\alpha = 0,$$

also endlich, da $\mathfrak{f}\alpha$ stetig ist,

$$\mathfrak{f}\alpha = 0, \quad Fx = \int K(x, \alpha) f\alpha \, . \, d\alpha = \sum_n \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n x.$$

Dies Ergebnis kann in folgender Weise gedeutet werden. Nennen wir

$$Fx = \int K(x, \alpha) f\alpha \, . \, d\alpha$$

nach der früher gebrauchten Bezeichnung eine quellenmäßig dargestellte Funktion, $f\alpha$ ihre Quellenverteilung, und bedenken wir noch, daß wir setzen können

$$\begin{aligned} \int Fx \, . \, \varphi_n x \, . \, dx &= \int dx \, . \, \varphi_n x \int K(x, \alpha) \, f\alpha \, . \, d\alpha \\ &= \int f\alpha \, . \, d\alpha \int K(x, \alpha) \, \varphi_n x \, . \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int f\alpha \, . \, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha = \frac{a_n}{\lambda_n}, \end{aligned}$$

so ist bewiesen, daß jede mit stückweise stetiger Quellenverteilung quellenmäßig dargestellte Funktion nach den Eigenfunktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann:

$$Fx = \int K(x, \alpha) f\alpha \, . \, d\alpha = \sum_n A_n \varphi_n x, \quad A_n = \int Fx \, . \, \varphi_n x \, . \, dx;$$

der Kern kann dabei stetig und brauchbar unstetig sein; die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut.

Für diesen Satz bieten die ersten beiden Abschnitte viele Beispiele dar, die jetzt eine gemeinsame feste Grundlage erhalten.

Multipliziert man die erhaltene Gleichung mit einer weiteren wie fx im Grundgebiet stetigen Funktion $\mathfrak{f}x$, integriert gliedweise, und setzt für A_n wieder die Werte a_n/λ_n ein, so folgt die Hilbertsche Grundformel

$$\iint K(x\, y)\, fx \,.\, \mathfrak{f}y \,.\, dx\, dy = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \int fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx \int \mathfrak{f}y \,.\, \varphi_n y \,.\, dy$$

und besonders, wenn $\mathfrak{f}x = fx$ gesetzt wird,

$$\iint K(x, y)\, fx \,.\, fy \,.\, dx\, dy = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \left\{ \int fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx \right\}^2. \tag{3}$$

§ 23.

Die nichthomogene Integralgleichung.

Die nichthomogene Integralgleichung, deren mechanische Bedeutung wir in § 12 kennen gelernt haben, verlangt, die stetige Funktion φx so zu bestimmen, daß bei willkürlichen Werten von λ, und wenn fx eine gegebene stetige Funktion ist, die Beziehung

$$\varphi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{1}$$

gilt. Setzen wir

$$\varphi x = fx + \psi x, \tag{2}$$

so ergibt sich

$$\psi x = \lambda \int K(x, \alpha)\, (f\alpha + \psi \alpha)\, d\alpha; \tag{3}$$

ist die Gleichung (1) lösbar, so erscheint ψx quellenmäßig dargestellt, so daß der Entwicklungssatz des § 22 angewandt werden kann:

$$\psi x = \sum_n \varphi_n x \int \psi \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha, \tag{4}$$

und die Reihe rechts ist absolut und gleichmäßig konvergent. Multipliziert man die Gleichung (3) mit $\varphi_n x$, integriert und vertauscht rechts in erlaubter Weise die Integrationen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \psi x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx &= \lambda \int (f\alpha + \psi\alpha)\, d\alpha \int K(x, \alpha)\, \varphi x\, dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_n} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int \psi \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha, \end{aligned}$$

oder nach der Definitionsgleichung (2) und der Entwicklungsformel (4)

$$\int \psi \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

$$\varphi x = fx + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha. \tag{5}$$

Es braucht auch nicht ausgeschlossen zu werden, daß λ komplex, fx eine komplexe Funktion der reellen Stelle x ist, etwa $= f_1 x + i f_2 x$, wobei f_1 und f_2 reelle Funktionen sind; dann ist

$$\int K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha = \int K(x, \alpha) f_1 \alpha . d\alpha + i \int K(x, \alpha) f_2 \alpha . d\alpha,$$

$$\int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = \int f_1 \alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha + i \int f_2 \alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

und man braucht den Entwicklungssatz des § 22 nur auf die einzelnen rechts auftretenden Summanden anzuwenden.

Nun folgt weiter die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (5), die bisher nur unter der Voraussetzung, daß φx existiere, betrachtet wurde, auch bei willkürlicher Wahl von fx und komplexen Werten der Größe λ, sobald diese auf ein endliches Gebiet beschränkt wird und die Differenzen $|\lambda - \lambda_n|$ alle über einer festen Schranke bleiben. Denn zunächst konvergiert die Reihe

$$\sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha$$

in der angegebenen Weise; die Glieder der Reihe (5) entstehen aber aus denen der letzten Reihe durch die Faktoren $\lambda_n \lambda/(\lambda - \lambda_n)$, die bei den soeben für λ getroffenen Festsetzungen absolut unter einer von n unabhängigen Schranke liegen. Dabei ist weiter zuzulassen, daß fx ein Polynom in λ sei, dessen Koeffizienten im Grundgebiet stetig sind. Daß aber, nach Erledigung der Konvergenzfragen, die Reihe φx nach der Gleichung (5) eine Lösung der nichthomogenen Integralgleichung liefert, ist unmittelbar durch Rechnungen einzusehen, die schon in § 12 durchgeführt sind; man braucht nur noch zu entwickeln

$$\int K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha, \tag{6}$$

und gliedweise zu integrieren, um die Formel (1) durch die Reihe φx erfüllt zu finden:

$$\lambda \int K(x, \alpha) \varphi\alpha . d\alpha = \sum_n \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{\lambda_n - \lambda}\right) \varphi_n x \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha$$
$$= \varphi x - fx.$$

Die hiermit gefundene Lösung der nichthomogenen Integralgleichung ist die Schmidtsche Formel des § 12; sie zeigt funktionentheoretisch, daß φx eine in dem betrachteten Gebiet meromorphe Funktion der komplexen Variablen λ ist; sie hat offenbar einfache Pole an den Stellen λ_n.

Die wesentliche Voraussetzung war, daß λ keinem der Werte λ_n nahe kam oder gleich wurde. Setzt man dagegen z. B. $\lambda = \lambda_1$ und ist λ_1 ein k-facher Eigenwert, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k, \lambda_{k+1} \gtrless \lambda_1$, so bleiben die Konvergenzbetrachtungen gültig, sobald man aus der Reihe φx die Glieder wegläßt, in denen $n = 1, 2, \ldots k$ ist. Aber auch die entscheidende Rechnung bleibt gültig, wenn in der Entwicklung (6) ebenfalls die ersten k Glieder wegfallen, d. h. wenn

$$\int f\alpha \,.\, \varphi_\nu \alpha \,.\, d\alpha = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots k.$$

Ja man kann sogar mit willkürlichen konstanten Faktoren c_ν setzen

$$\varphi x = fx + \sum_\nu^{1,k} c_\nu \varphi_\nu x + \lambda_1 \sum_\varrho^{k+1,\infty} \frac{\varphi_\varrho x}{\lambda_\varrho - \lambda_1} \int f\alpha \,.\, \varphi_\varrho \alpha \,.\, d\alpha$$

und findet dann wiederum die Integralgleichung (1) erfüllt. Und zugleich auf die allgemeinste Weise; denn hat man die beiden Lösungen φx und $\overline{\varphi} x$, so daß

$$\varphi x = fx + \lambda_1 \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha, \quad \overline{\varphi} x = fx + \lambda_1 \int K(x, \alpha)\, \overline{\varphi} \alpha \,.\, d\alpha,$$

so ergibt sich sofort, daß $\varphi x - \overline{\varphi} x$ eine zum Eigenwert λ_1 gehörige Eigenfunktion des Kerns $K(x, y)$ ist, also darstellbar in der Form $c_1 \varphi_1 x + \cdots + c_k \varphi_k x$.

Beachten wir noch den Sonderfall $fx = K(x, y)$ und nennen wir φx in diesem Falle $\Gamma(x, y)$ oder ausführlicher $\Gamma(x, y; \lambda)$. In ihm bleibt, auch wenn der Kern brauchbar unstetig sein sollte, alles gültig; man erhält

$$\int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n}.$$

Die Konvergenz der auftretenden Reihe

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) = \varphi x &= K(x, y) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)} \\ &= K(x, y) + \sum_n \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \varphi_n x \,.\, \varphi_n y, \end{aligned}$$

sowie der Entwicklung (6) wird ersichtlich durch Vergleich mit der in § 21 untersuchten Reihe

$$K^2(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n^2} \tag{7}$$

und die Integralgleichung wird

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha)\, \Gamma(\alpha, y)\, d\alpha. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist die Fredholm-Hilbertsche Resolvente, $\Gamma(x, y)$ der zu $K(x, y)$ gehörige lösende Kern.

Die mechanische Bedeutung dieser Größe ist schon in den §§ 12 und 14 besprochen; die analytische kann zunächst dahin formuliert werden, daß bei allgemeiner Wahl von fx die Lösung φx in der Form

$$\varphi x = fx + \lambda \int \Gamma(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

geschrieben werden kann, wie sich durch Integration der Reihe $\Gamma(x, y)$ mit Hilfe der Formel (7) ohne weiteres ergibt. Die Größe Γ ist als Funktion der komplexen Veränderlichen λ meromorph; aus ihrer Reihenentwicklung ergibt sich noch bei stetigen Kernen

$$\int \Gamma(x, x)\, dx = \int K(x, x)\, dx + \sum_n \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

oder, indem wir

$$\int K(x. x)\, dx = C, \qquad D = \prod_n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{-\frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

setzen,

$$\int \Gamma(x, x)\, dx = C + \frac{d \log D}{d\lambda}.$$

Offenbar ist D eine ganze transzendente Funktion von λ, deren Nullstellen genau die mit ihrer Vielfachheit genommenen Eigenwerte des Kerns $K(x, y)$ sind. Das Geschlecht dieser Funktion ist höchstens 1; die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$$

konvergiert ja nach § 20. Dies gilt auch, wenn der Kern unstetig und C vielleicht kein endlicher Wert ist.

Der lösende Kern kann an Stelle des ursprünglichen gesetzt werden und gibt dann wieder die Eigenfunktionen $\varphi_n x$ mit anderen Eigenwerten. Multipliziert man nämlich die Gleichung (8) mit $\varphi_n x$ und integriert, so ergibt sich, was auch die Reihenentwicklung der Größe $\Gamma(x, y)$ bestätigt,

$$\int \Gamma(x, y)\, \varphi_n x . dx = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n} + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int \varphi_n \alpha . \Gamma(\alpha, y)\, d\alpha$$

oder

$$\varphi_n y = (\lambda_n - \lambda) \int \Gamma(\alpha, y)\, \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Die Funktionen $\varphi_n x$ sind also Eigenfunktionen des Kerns $\Gamma(x, y; \lambda)$ mit $\lambda_n - \lambda$ als Eigenwerten.

Schreibt man endlich, um zwei verschiedene lösende Kerne in Beziehung zu bringen,

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

$$\Gamma(x, z; \mu) = K(x, z) + \mu \sum_{m}^{1,\infty} \frac{\varphi_m x \cdot \varphi_m z}{\lambda_m(\lambda_m - \mu)},$$

multipliziert die beiden Gleichungen und integriert rechts gliedweise nach x, indem man die gewöhnliche Integralgleichung der Funktionen $\varphi_n x$ benutzt, so ergibt sich

$$\int \Gamma(x, y; \lambda)\, \Gamma(x, z; \mu)\, dx = \frac{1}{\lambda - \mu} \left\{\Gamma(x, y; \lambda) - \Gamma(x, y; \mu)\right\},$$

eine Gleichung, die wir ebenfalls als Resolvente bezeichnen können.

§ 24.

Der Mercersche Satz.

Die in § 22 (3) erhaltene Hilbertsche Grundgleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\int\int \left\{K(x, y) - \sum_{\nu}^{1,m} \frac{\varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right\} fx \cdot fy \cdot dx\, dy = \sum_{\varrho}^{m+1,\infty} \frac{1}{\lambda_\varrho} \left\{\int fx \cdot \varphi_\varrho x\, dx\right\}^2.$$

Setzen wir nun

$$K^0(x, y) = K(x, y) - \sum_{\nu}^{1,m} \frac{\varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y}{\lambda_\nu},$$

so ist zunächst klar, daß die Funktionen $\varphi_\varrho x$, in denen $\varrho > m$, auch Eigenfunktionen des Kerns K^0 sind mit denselben Eigenwerten; denn man findet sofort

$$\int K^0(x, y)\, \varphi_\varrho x\, dx = \int K(x, y)\, \varphi_\varrho x\, dx.$$

Hätte der Kern K^0 nun noch eine weitere Eigenfunktion, so müßte auf der rechten Seite der für ihn geltenden Hilbertschen Grundformel, also in der Gleichung

$$\int\int K^0(x, y) fx \cdot fy \cdot dx\, dy = \cdots + \sum_{\varrho}^{m+1,\infty} \frac{1}{\lambda_\varrho} \left\{\int fx \cdot \varphi_\varrho x \cdot dx\right\}^2$$

ein auf diese weitere Eigenfunktion bezügliches Glied auftreten, das bei passender Wahl von fx positiv wäre. Die Formel ist aber schon richtig, wenn der rechts erscheinenden Summe nichts hinzugefügt wird. Der Kern K^0 hat also nur die Eigenfunktionen $\varphi_\varrho x$, in denen $\varrho > m$, mit den Eigenwerten λ_ϱ. Ob dabei $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ die ersten Eigenwerte sind oder irgend eine Gruppe, ist offenbar gleichgültig.

Jetzt betrachten wir im besonderen einen stetigen Kern, dessen Eigenwerte sämtlich positiv sind; wir nennen ihn einen positiv definiten Kern. Bei einem solchen gibt die Hilbertsche Formel

$$\int\int K(x, y) fx . fy . dx dy \geqq 0,$$

bei beliebiger Wahl der stetigen Funktion fx. Sei diese in einem beliebig kleinen Teil des Grundgebiets, etwa in der Umgebung $\mathfrak{U}$ der Stelle x_0 von Null verschieden und positiv, sonst aber überall gleich Null; dann gibt die letzte Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{U}} dx \int_{\mathfrak{U}} K(x, y) fx . fy . dy \geqq 0. \tag{1}$$

Wäre nun $K(x_0, x_0) < 0$, so wäre wegen der Stetigkeit des Kerns auch

$$K(x, y) < 0,$$

wenn die Stelle x sowohl wie y auf das Gebiet $\mathfrak{U}$ beschränkt wird; die linke Seite der Ungleichung (1) wäre also sicher negativ. Dieser Widerspruch ergibt die allgemeine Beziehung

$$K(x, x) \geqq 0 \tag{2}$$

und $K(x, x)$ liegt als stetige Funktion der Stelle x unter einer positiven Schranke C.

Dies Ergebnis wenden wir an auf den Kern

$$\overline{K}(x, y) = K(x, y) - \sum_\nu \frac{\varphi_\nu x . \varphi_\nu y}{\lambda_\nu},$$

in welchem ν eine beliebige endliche Menge ganzer positiver Zahlen bedeute. Da dieser Kern als Eigenwerte die Größen λ_n nach Abzug des Systems der λ_ν besitzt, so ist er ebenfalls positiv definit, und wir finden entsprechend der Ungleichung (2)

$$K(x, x) - \sum_\nu \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_\nu} \geqq 0, \quad C > \sum_\nu \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_\nu}. \tag{3}$$

Nun gilt die elementare Beziehung

$$\{\sum_\nu | A_\nu B_\nu |\}^2 \leqq \sum_\nu A_\nu^2 \sum B_\nu^2, \tag{4}$$

in der A_ν, B_ν beliebige reelle Größen sind; dies ist die ins Elementare entartete Form der Schwarzschen Ungleichung. Die behauptete Beziehung sagt nur aus, daß mit beliebigen reellen Größen p, q die quadratische Form

$$\sum_{\nu} \{p\,|A_\nu| + q\,|B_\nu|\}^2 \geqq 0$$

niemals negative Werte annimmt, also wenn man sie in der Form

$$Lp^2 + 2Mpq + Nq^2$$

schreibt, die Formel

$$LN - M^2 \geqq 0$$

ergibt, und das ist die Ungleichung (4). Setzen wir besonders

$$A_\nu = \frac{\varphi_\nu x}{\sqrt{\lambda_\nu}}, \qquad B_\nu = \frac{\varphi_\nu y}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

so ergibt sich, ähnlich wie schon in § 21 geschlossen wurde.

$$\left\{\sum_{\nu} \left|\frac{\varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right|\right\}^2 \leqq \sum_{\nu} \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_\nu} \sum \frac{(\varphi_\nu y)^2}{\lambda_\nu},$$

also nach (3)

$$(5) \qquad \left\{\sum_{\nu} \left|\frac{\varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right|\right\}^2 \leqq C \sum_{\nu} \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_\nu}.$$

Anderseits ist die Reihe

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{(\varphi_n x)^2}{\lambda_n}$$

nach (3) konvergent. Wählt man also, indem man die Stelle x festhält, die Zahlen ν über einer hinreichend hohen Schranke ν_0, so folgt

$$\sum_{\nu} \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_\nu} < \varepsilon,$$

wobei ε beliebig klein und positiv vorgeschrieben sein kann. Die Ungleichung (5) ergibt also bei fester Stelle x, wenn alle $\nu > \nu_0$,

$$\sum_{\nu} \left|\frac{\varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y}{\lambda_\nu}\right| < C\varepsilon,$$

und die Schranke $C\varepsilon$ ist offenbar von der Wahl der Stelle y unabhängig, d. h. die Reihe

$$\sum_{n} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}$$

ist, wenn x festgehalten wird, nach y im Grundgebiet gleichmäßig und absolut konvergent.

Man darf daher die Größe

$$M(x, y) = K(x, y) - \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n} \tag{6}$$

z. B. mit $\varphi_m y$ multiplizieren und dann nach y gliedweise integrieren. So ergibt sich

$$\int M(x, y)\,\varphi_m y \,.\, dy = \int K(x, y)\,\varphi_m y \,.\, dy - \frac{\varphi_m x}{\lambda_m} = 0.$$

Die Größe M ist also als Funktion von y zu allen Eigenfunktionen orthogonal, mithin nach § 22 auch zum Kern bei beliebiger Wahl der zweiten neben y in diesem vorkommenden Stelle orthogonal:

$$\int K(z, y)\, M(x, y)\, dy = 0.$$

Läßt man hier z und x zusammenfallen und multipliziert die Gleichung (6) mit $M(x, y)$, wobei rechts nach y wieder gliedweise integriert werden darf, so folgt

$$\int M(x, y)^2 dy = 0, \qquad M(x, y) = 0,$$

also endlich

$$K(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}. \tag{7}$$

Damit ist das Mercersche Theorem bewiesen, daß **bei definiten stetigen Kernen immer die bilineare Formel gilt, und die bilineare Reihe absolut und gleichmäßig bezüglich der einen der in ihr vorkommenden Stellen im Grundgebiet konvergiert, wenn die andere Stelle im Grundgebiet festgehalten wird.** Ob der Kern positiv oder negativ definit ist, macht offenbar keinen Unterschied.

Eine Verallgemeinerung liegt nahe; sind eine endliche Anzahl von Eigenwerten negativ, etwa die Werte λ_σ, so wendet man das Mercersche Theorem auf den Kern

$$K(x, y) - \sum_\sigma \frac{\varphi_\sigma x \cdot \varphi_\sigma y}{\lambda_\sigma}$$

an, der nur positive Eigenwerte λ_ϱ besitzt, d. h. die Gesamtheit der Werte λ_n nach Abzug der Werte λ_σ. Man erhält so die Gleichung

$$K(x, y) - \sum_\sigma \frac{\varphi_\sigma x \cdot \varphi_\sigma y}{\lambda_\sigma} = \sum_\varrho \frac{\varphi_\varrho x \cdot \varphi_\varrho y}{\lambda_\varrho},$$

die offenbar mit der Gleichung (7) zusammenfällt. Die bilineare Formel gilt also für alle stetigen Kerne, die nicht gleichzeitig unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte besitzen.

Beispielsweise kann man jetzt erschließen, daß bei der in § 16 betrachteten Stabschwingung mit freien Enden die bilineare Formel gilt; die Eigenwerte $\lambda_n = a m_n^4$ sind alle positiv, da die Werte m_n als Wurzeln der Gleichung $\cos m \operatorname{\mathfrak{Cof}} m = 1$ reell oder rein imaginär sind. Der Kern ist stetig.

§ 25.

Der Weylsche Satz über Addition zweier Kerne.

Schon mehrfach ist von der Bemerkung Gebrauch gemacht, daß, wenn $\varphi_\nu x$ eine endliche Anzahl zueinander orthogonaler normierter Funktionen bedeutet, die Besselsche Ungleichung

$$\int (f\alpha)^2 d\alpha \geqq \sum a_\nu^2$$

gilt, wobei gesetzt ist

$$a_\nu = \int f\alpha \,.\, \varphi_\nu \alpha \,.\, d\alpha;$$

man braucht ja nur die Ungleichung

$$\int (f\alpha - \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu \alpha)^2 d\alpha \geqq 0$$

zu entwickeln.

Mittels dieser Bemerkung können aus der Hilbertschen Grundformel [§ 22 (3)] belangreiche Ungleichungen abgeleitet werden. Wir unterscheiden die positiven und negativen Eigenwerte des Kerns $K(x, y)$; die reziproken Werte der ersteren seien $\mathfrak{l}_n$, die der letzteren $\mathfrak{m}_n$, die zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_n x$ und $\theta_n x$; wenn der Zeiger n die Anzahl der vorhandenen Eigenwerte des einen oder anderen Vorzeichens überschreiten sollte, setzen wir 0 für $\mathfrak{l}_n$ oder $\mathfrak{m}_n$. Sei ferner

$$a_n = \int f\alpha \,.\, \psi_n \alpha \,.\, d\alpha, \qquad b_n = \int f\alpha \,.\, \theta_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

dann kann die Hilbertsche Grundformel in folgender Form geschrieben werden:

$$\iint K(x, y) fx \,.\, fy \,.\, dx\, dy = \sum_n \mathfrak{l}_n a_n^2 + \sum_n \mathfrak{m}_n b_n^2.$$

Jetzt denken wir uns die Größen $\mathfrak{l}$ für sich und die negativen Größen $\mathfrak{m}$ für sich nach abnehmenden absoluten Werten geordnet, so daß

$$\mathfrak{l}_{n+1} \leqq \mathfrak{l}_n, \qquad \mathfrak{m}_{n+1} \geqq \mathfrak{m}_n,$$

dann gibt die Hilbertsche Gleichung

$$\int\int K(x, y) fx . fy . dx dy \leqq \sum_n \mathfrak{l}_n a_n^2 \leqq \mathfrak{l}_1 \sum a_n^2 \leqq \mathfrak{l}_1 \int (f\alpha)^2 d\alpha.$$

Für alle Funktionen f, die die Beziehung

$$(1) \qquad \int (f\alpha)^2 d\alpha \leqq 1$$

darbieten, ergibt sich also

$$\int\int K(x, y) fx . fy . dx dy \leqq \mathfrak{l}_1.$$

Bedenken wir ferner, daß der Kern

$$K(x, y) - \sum_\nu^{1, m} \mathfrak{l}_\nu \psi_\nu x . \psi_\nu y$$

nach § 24 genau die Eigenwerte von K besitzt mit Ausschluß von $1/\mathfrak{l}_1$, $1/\mathfrak{l}_2, \ldots 1/\mathfrak{l}_m$, so daß hier $\mathfrak{l}_{m+1}$ genau dieselbe Bedeutung hat wie vorher $\mathfrak{l}_1$, so ergibt sich

$$(2) \qquad \int\int \{K(x, y) - \sum_\nu^{1, m} \mathfrak{l}_\nu \psi_\nu x . \psi_\nu y\} fx . fy . dx dy \leqq \mathfrak{l}_{m+1}.$$

Führen wir nun noch einen zweiten Kern $K^0(x, y)$ ein, setzen

$$K(x, y) + K^0(x, y) = K^{\mathrm{I}}(x, y)$$

und bezeichnen die zu den Kernen K^0 und K^{I} gehörigen Größen ebenso wie bei K, indem wir oben den Zeiger 0 oder 1 anfügen, so ergibt sich zunächst, entsprechend der Beziehung (2)

$$(3) \qquad \int\int \{K^0(x, y) - \sum_\nu^{1, h} \mathfrak{l}_\nu^0 \psi_\nu^0 x . \psi_\nu^0 y\} fx . fy . dx dy \leqq \mathfrak{l}_{h+1}^0;$$

$h = 0$ würde bedeuten, daß die Summe links wegfällt. Nehmen wir weiter an, der Kern K^{I} habe mindestens $m + h + 1$ positive Eigenwerte, so daß $\mathfrak{l}_{m+h+1}^1 > 0$, so können wir

$$(4) \qquad fx = \sum_\sigma^{1, m+h+1} c_\nu \psi_\sigma^1 x$$

setzen, und die Ungleichung (1) ist erfüllt, wenn wir ansetzen

$$(5) \qquad c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{m+h+1}^2 = 1.$$

Vollständig bestimmen wir dann die Größen c durch die $m + h$ Forderungen

$$\int f\alpha . \psi_\nu \alpha . d\alpha = 0, \ \int f\alpha . \psi_\varrho^0 \alpha . d\alpha = 0, \ \nu = 1, \ldots m, \ \varrho = 1, \ldots h,$$

die $m + h$ homogene Gleichungen ersten Grades bedeuten und die Werte c immer so zu bestimmen erlauben, daß die Gleichung (5) gilt.

Nach dieser Festsetzung der Funktion $f\alpha$ verschwinden in den Ungleichungen (2), (3) unter dem Integralzeichen alle Glieder außer dem ersten, und man erhält, indem man beide Ungleichungen addiert

$$\int\!\!\int K^{\mathrm{I}}(x, y) f x . f y . d x d y \leqq \mathfrak{l}_{m+1} + \mathfrak{l}^0_{h+1}. \tag{6}$$

Hier ist aber die linke Seite nach (4) und nach den Integralgleichungen mit dem Kern K^{I} einfach

$$\mathfrak{l}^1_1 c_1^2 + \mathfrak{l}^1_2 c_2^2 + \cdots + \mathfrak{l}^1_{m+h+1} c^2_{m+h+1},$$

und diese Größe ist wegen der festgesetzten Größenfolge der Werte $\mathfrak{l}^1$ nicht kleiner als

$$\mathfrak{l}^1_{m+h+1}(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c^2_{m+h+1}) = \mathfrak{l}^1_{m+h+1};$$

die Beziehung (6) gibt also

$$\mathfrak{l}^1_{m+h+1} \leqq \mathfrak{l}_{m+1} + \mathfrak{l}^0_{h+1}. \tag{7}$$

Überträgt man die durchgeführte Entwicklung auf die Kerne $-K$, $-K^0$, $-K^{\mathrm{I}}$, so sind die Größen $\mathfrak{l}$ durch die positiven Werte $-\mathfrak{m}$ zu ersetzen und man findet

$$\mathfrak{m}^1_{m+h+1} \geqq \mathfrak{m}_{m+1} + \mathfrak{m}^0_{h+1}.$$

Sei nun im besonderen der Kern

$$-K^0(x, y) = K^{\mathrm{II}}(x, y)$$

definit positiv; K^0 also definit negativ; dann ist allgemein $\mathfrak{l}^0 = 0$ zu setzen, und die Gleichung

$$K^{\mathrm{I}}(x, y) + K^{\mathrm{II}}(x, y) = K(x, y)$$

gibt in Verbindung mit der Ungleichung (7), da auch $h = 0$ gesetzt werden kann,

$$\mathfrak{l}^1_{m+1} \leqq \mathfrak{l}_{m+1}.$$

Damit ist das Weylsche Theorem bewiesen: Addiert man zu einem beliebigen Kern K^{I} einen positiv definiten K^{II} und nimmt die Summe $K = K^{\mathrm{I}} + K^{\mathrm{II}}$ wieder als Kern, so ist durch diese Abänderung des ersten Kerns jeder seiner positiven Eigenwerte verkleinert; unter irgend einer positiven Schranke hat der Kern K mindestens so viel positive Eigenwerte wie K^{I}.

Wir haben aus der allgemeinen Theorie hier nur die Hilbertsche Grundformel benutzt; wie diese gilt also auch das Weylsche Theorem für stetige und brauchbar unstetige Kerne.

Vierter Abschnitt.

Integralgleichungen und die Sturm-Liouvillesche Theorie.

§ 26.

Die Sturm-Liouvilleschen Funktionen.

Die analytischen Hilfsmittel, die wir in den letzten Paragraphen kennen gelernt haben, ermöglichen uns, ein Problem allgemeinen Charakters in Angriff zu nehmen, das durch die ihm gewidmeten bewundernswerten Arbeiten von Sturm und Liouville besonders wichtig geworden ist.

Erstreckt sich ein die Wärme leitender heterogener Stab längs der Abszissenachse von $x = 0$ bis $x = 1$ und ist g die spezifische Wärme, k die innere Leitfähigkeit, l das seitliche Strahlungsvermögen, endlich t die Zeit, so erfüllt die Temperatur u die Differentialgleichung

$$g \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) - l u$$

und die Grenzbedingungen

$$k \frac{\partial u}{\partial x} - h u \Big|^{0} = 0, \qquad k \frac{\partial u}{\partial x} + H u \Big|^{1} = 0,$$

in denen h und H die Werte der äußeren Leitfähigkeit der Endquerschnitte, also positive Konstante, bedeuten. Wird einer dieser Querschnitte oder beide auf der konstanten Temperatur Null gehalten, so erhält man eine der Grenzbedingungen

$$u \Big|^{0} = 0, \qquad u \Big|^{1} = 0$$

oder beide, auf die man auch dadurch kommen kann, daß man eine der Konstanten h, H oder beide unendlich werden läßt.

Setzt man

$$u = V e^{-\lambda t},$$

wobei V von t unabhängig und λ eine Konstante sei, so erhält man die Aufgabe, die Größe V aus der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(g\lambda-l)V=0 \tag{1}$$

und den Grenzbedingungen

$$k\frac{dV}{dx}-hV\Big|^{0}=0,\qquad k\frac{dV}{dx}+HV\Big|^{1}=0 \tag{2}$$

zu bestimmen, von denen auch eine oder beide in die Formen

$$V\Big|^{0}=0,\qquad V\Big|^{1}=0$$

ausarten können.

Einen besonderen Fall dieser Randwertaufgabe erhält man bei der Theorie der heterogenen Saite, deren Bewegungsgleichung, wenn u die Verrückung bedeutet, in der Form

$$g\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

erscheint, und wenn man eine der Gleichungen

$$u=V\cos\sqrt{\lambda}t,\qquad u=V\sin\sqrt{\lambda}t$$

ansetzt, genau auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+g\lambda V=0$$

mit den Grenzbedingungen

$$V\Big|^{0}=V\Big|^{1}=0$$

zurückgeführt wird.

Man sieht, daß hier wie oben bei der Wärmeleitungsaufgabe die Größen g, k ihrer physikalischen Bedeutung nach auf der Strecke von $x=0$ bis $x=1$ positiv sind, und daß l jedenfalls nicht negativ ist. Außerdem darf noch, ohne daß die Aufgabe spezialisiert wird, $g=1$ gesetzt werden. Denn man kann die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{d}{g\,dx}\left(gk\frac{dV}{g\,dx}\right)+\left(\lambda-\frac{l}{g}\right)V=0$$

schreiben; führt man dann die Größe

$$x_1=\int_0^x g\,dx:\int_0^1 g\,dx$$

als neue Variable ein, und setzt

$$g\,k : \left[\int_0^1 g\,d\,x\right]^2 = k_1, \quad \frac{l}{g} = l_1,$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{d}{d\,x_1}\left(k_1 \frac{d\,V}{d\,x_1}\right) + (\lambda - l_1)\,V = 0,$$

in der die Größen k_1 und l_1 dieselben Eigenschaften haben, wie sie oben für k und l gefordert wurden, und die Grenzbedingungen (2) behalten ihre Form, so daß jetzt der Zeiger 1 wieder weggelassen werden kann.

Setzen wir allgemein

$$\mathfrak{L}\,y = \frac{d}{d\,x}\left(k\,\frac{d\,y}{d\,x}\right) - l\,y,$$

so haben wir für die gesuchte Funktion V die Differentialgleichung

$$\mathfrak{L}\,V + \lambda\,V = 0, \tag{3}$$

und können zunächst übersehen, daß, wenn l auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$, dem Grundgebiet, wie wir wieder sagen wollen, nicht negativ ist, auch die gesuchten Werte λ nicht negativ sein können. Denn wäre $\lambda = -c^2$ ein solcher Wert, so könnte aus der Gleichung (3) geschlossen werden

$$k\,\frac{d\,V}{d\,x} = k\,\frac{d\,V}{d\,x}\Big|^0 + \int_0^x (l + c^2)\,V\,d\,x = h\,V_0 + \int_0^x (l + c^2)\,V\,d\,x.$$

Beginne nun V am unteren Ende des Grundgebiets z. B. mit einem positiven Werte V_0; dann wird das Integral in der letzten Gleichung positiv, $d\,V/d\,x$ hat auch dasselbe Vorzeichen, und V wächst weiter. Sei also V etwa auf der Strecke $0 \ldots \alpha$ positiv oder habe nur für $x = 0$ den Wert Null; ist dann α_0 die obere Grenze der Werte α und $\alpha_0 < 1$, so sind für $x = \alpha_0$ auch noch die Größen V und $d\,V/d\,x$ positiv; die Strecke, auf der V positiv ist, kann also noch über α_0 hinweg ausgedehnt werden, was der Definition von α_0 widerspricht. So wird es aber unmöglich, die zweite Gleichung (2)

$$k\,\frac{d\,V}{d\,x} + H\,V\Big|^1 = 0$$

zu erfüllen. Die gesuchten Werte λ können also nicht negativ sein. Im Falle $h = \infty$ erhält man dasselbe Ergebnis, indem man $d\,V/d\,x$ an der Stelle $x = 0$ positiv nimmt. Nur im Falle $h = H = 0$

wäre der Widerspruch dadurch zu vermeiden, daß $k\,dV/dx$ wächst, dV/dx sich aber von der positiven Seite her dem Werte Null annähert. Dann wären beide Randbedingungen erfüllt; die zugehörige Funktion V würde im Innern des Grundgebiets nicht verschwinden.

§ 27.

Übergang zu den Integralgleichungen.

Es seien nun φx und ψx zwei im Grundgebiet stetige Lösungen der Gleichung

$$\mathfrak{L}y = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0, \tag{1}$$

von denen die eine, etwa φx, die erste Grenzbedingung erfüllt, die andere die zweite. Dann kann man annehmen, es gelte die Identität

$$k\left(\psi\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dx}\right) = 1,$$

da ihre linke Seite jedenfalls konstant ist, und ein konstanter Faktor in jeder der Größen φ und ψ zur Verfügung bleibt. Verschwände der konstante Wert dieser Größe, so wären φ und ψ nur durch einen konstanten Faktor unterschieden; die Gleichung (1) hätte also eine Lösung, die beide Grenzbedingungen erfüllte, was nach § 26 nur in dem ausgearteten Falle $h = H = 0$ eintreten kann.

Sehen wir von diesem ab, so kann der Kern der gesuchten Integralgleichung gebildet werden, indem man, wenn $x \leqq \xi$ ist, setzt

$$K(x, \xi) = \varphi x \,.\, \psi \xi,$$

und, wenn $x \geqq \xi$ ist,

$$K(x, \xi) = \varphi \xi \,.\, \psi x.$$

Die so definierte Größe erfüllt nämlich, wenn wir wie gewöhnlich

$$K'(x, \xi) = \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$$

setzen, die Gleichung

$$\mathfrak{L}K(x, \xi) = \frac{d[k\,K'(x, \xi)]}{dx} - l\,K(x, \xi) = 0 \tag{2}$$

und die beiden Grenzbedingungen (2) des § 26, und ist an der Stelle $x = \xi$ singulär, so daß die Gleichung

$$k\,K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

besteht.

Versteht man nun unter fx eine beliebige, im Grundgebiet stückweise stetige Funktion, unter

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

eine quellenmäßig dargestellte Funktion, so findet man durch eine Rechnung, wie sie in § 2 zu ähnlichem Zweck angewandt wurde,

$$F'x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f\alpha . d\alpha,$$

$$\frac{d(kF'x)}{dx} = \int_0^1 \frac{d[kK'(x,\alpha)]}{dx} f\alpha . d\alpha + k . fx . [K'(x, x-0) - K'(x, x+0)];$$

da nun die expliziten Ausdrücke der Funktion K die Gleichungen

$$K'(x, x-0) = K'(x+0, x),$$
$$K'(x, x+0) = K'(x-0, x)$$

ergeben, so folgt aus der erhaltenen Gleichung für alle Stellen, an denen fx stetig ist, die Identität

$$(3) \qquad \mathfrak{L} F = \frac{d(kF'x)}{dx} - l Fx = -fx.$$

An den Unstetigkeitsstellen der Funktion fx ist das Symbol F'' nicht definiert. Man erkennt ferner aus der angegebenen Form der Größe F', daß die Funktion F die Randbedingungen der Größen $K(x, \alpha)$ und V erfüllt.

Ist umgekehrt die Funktion Φx auf dem Grundgebiet mit ihrer ersten Ableitung stetig, während die zweite Ableitung stückweise stetig ist, und erfüllt sie die Grenzbedingungen, so ist die Funktion

$$fx = -\frac{d(k\Phi' x)}{dx} + l\Phi x = -\mathfrak{L}\Phi$$

stückweise stetig, und man kann mit ihr die vorher eingeführte Größe Fx bilden. Dann ergibt sich, indem man diese Gleichung mit $K(x, \xi)$ multipliziert und zu der mit Φx multiplizierten Gleichung (2) addiert,

$$\frac{d}{dx}[k(\Phi x . K'(x, \xi) - K(x, \xi)\Phi' x)] = K(x, \xi) fx;$$

wenn man sodann über das Grundgebiet integriert, die allgemeine Integrationsregel des § 2 benutzt und bedenkt, daß die Größe in eckigen Klammern an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, weil die Funktion Φx die Grenzbedingungen erfüllt, so erhält man folgendes Resultat:

$$k \Phi x . K'(x, \xi) \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \Phi \xi = \int_0^1 K(x, \xi) f x . d x; \tag{4}$$

die Funktion Φ kann also quellenmäßig dargestellt werden.

Ein Sonderfall dieser Größe ist V, die Lösung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems, wenn eine solche existiert. Für sie gilt die Gleichung

$$-\frac{d(k V')}{d x} + l V = \lambda V;$$

ersetzt man demgemäß $f x$ durch λV, so ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$V \xi = \lambda \int_0^1 V K(x, \xi) d x,$$

womit das Randwertproblem auf eine homogene Integralgleichung zurückgeführt ist.

Daß umgekehrt jede Lösung der Integralgleichung auch eine Lösung des Randwertproblems ist, folgt sofort daraus, daß die rechte Seite der Integralgleichung quellenmäßig dargestellt erscheint, woraus sich nach der zwischen f und F geltenden Beziehung (3) ergibt

$$\frac{d}{d x}\left(k \frac{d V}{d x}\right) - l V = -\lambda V;$$

außerdem erfüllt jede Lösung der Integralgleichung ebenso wie jede quellenmäßige Funktion die Grenzbedingungen. Da nun beim Randwertproblem zu jedem Eigenwert wegen der Randgleichungen § 26 (2) nur eine bis auf konstante Faktoren bestimmte Eigenfunktion gehört, so gilt dasselbe für die Integralgleichung, so daß mehrfache Eigenwerte ausgeschlossen sind.

Diese Entwicklungen sind im Falle $h = H = 0$ zu modifizieren, wenn das durch die Grenzbedingung

$$y' \Big|^{0} = 0$$

bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Integral der Gleichung

$$\mathfrak{L} y = \frac{d}{d x}\left(k \frac{d y}{d x}\right) - l y = 0 \tag{5}$$

von selbst auch die zweite Grenzbedingung

$$y'\Big|^1 = 0$$

erfüllt. Sei $\varphi_0 x$ dieses Integral, das als eine stationäre Temperatur des Stabes angesehen werden kann, und werde die Gleichung

$$\int_0^1 (\varphi_0 \alpha)^2 d\alpha = 1$$

vorausgesetzt. Dann ist nach § 15 als Kern der Integralgleichung die stationäre Temperatur u zu nehmen, die durch eine an der Stelle $x = \xi$ wirkende Wärmequelle hervorgerufen wird, wenn in jedem Element dx die Wärmemenge $-dx \,.\, \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi$ erzeugt wird. Aus diesen Festsetzungen ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) - lu - \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$\frac{du}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

und der Unstetigkeitsbedingung

$$k\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0,$$

wodurch die Größe u offenbar nur bis auf einen Summanden von der Form $c\,\varphi_0 x$ bestimmt ist, in dem c eine Konstante bedeutet. Diese können wir benutzen, um die Gleichung

$$\int_0^1 u\,\varphi_0 x \,.\, dx = 0 \tag{6}$$

zu erwirken.

Jetzt setzen wir $u = K(x, \xi)$, und finden dann leicht, daß diese Größe in x und ξ symmetrisch ist, und daß jede Lösung der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe

$$\mathfrak{L} V + \lambda V = 0, \quad \frac{dV}{dx}\Big|^{0,1} = 0,$$

bei der λ von Null verschieden ist, auch die Integralgleichung

$$V\xi = \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, V dx$$

erfüllt.

Bei den quellenmäßigen Funktionen tritt insofern etwas Neues auf, als die oben eingeführte Funktion Φx noch die Bedingung

$$(7) \qquad \int_0^1 \Phi x \, . \, \varphi_0 x \, . \, dx = 0$$

erfüllen muß, um quellenmäßig dargestellt werden zu können; dann ist nämlich $\Phi - F$ eine die Grenzbedingungen

$$\frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

erfüllende Lösung der Gleichung (5), also in der Form $C \, . \, \varphi_0 x$ darstellbar. Da nun die Gleichung (6), wenn man nach ξ über das Grundgebiet integriert und die Integrationen vertauscht, die Beziehung

$$\int_0^1 F x \, . \, \varphi_0 x \, . \, dx = 0$$

ergibt, so folgt aus der Gleichung (7):

$$\int_0^1 (\Phi - F) \, \varphi_0 x \, . \, dx = \int_0^1 C (\varphi_0 x)^2 dx = 0, \quad C = 0,$$

womit die Größe

$$\Phi x = F x$$

quellenmäßig dargestellt ist. Übrigens gilt auch hier die Gleichung $\mathfrak{L} F = - f x$.

Auf eine andere, theoretisch einfachere Weise kann der ausgeartete Fall erledigt werden, indem man die Methode des § 17 zum Muster nimmt. Man versteht unter c eine solche Konstante, daß die Randwertaufgabe

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dy}{dx}\right) - (l - c) \, y = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

keine Lösung besitzt; dann kann die vorgelegte Aufgabe in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dy}{dx}\right) + [\lambda' - (l - c)] \, y = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0.$$

Die Eigenwerte λ' stehen zu denen des ursprünglichen Problems in der Beziehung

$$\lambda' + c = \lambda;$$

die neue Aufgabe kann aber nach derselben Methode behandelt werden, die oben auf die nicht ausgearteten Fälle angewandt wurde, da keiner der Werte λ' verschwindet.

§ 28.

Anwendungen der allgemeinen Theorien des dritten Abschnitts.

Nachdem die Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern zurückgeführt ist, liefern die Sätze des dritten Abschnitts sofort eine Menge alter und neuer Ergebnisse.

Zunächst zeigen die zusammengehörigen Beziehungen

$$\Phi\xi = \int_0^1 K(x,\xi) fx\,.\,dx, \quad \mathfrak{L}\Phi x = -fx, \tag{1}$$

daß fx identisch verschwindet, wenn dies von Φx gilt, d. h. wenn fx zu dem Kern der Integralgleichung orthogonal ist. Dann ist fx aber auch nach § 22 zu allen Eigenfunktionen orthogonal und umgekehrt; es ist also klar, daß eine im Grundgebiet stetige Funktion, die zu allen Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe orthogonal ist, identisch verschwindet.

Das ist ein wichtiger Satz, um dessen Beweis Sturm und Liouville sich vergeblich bemüht haben.

Erinnern wir ferner daran, daß nach § 26 kein negativer Eigenwert vorhanden sein kann: Nach § 24 ist also das Mercersche Theorem anwendbar, und wenn φ_n wieder die normierten Eigenfunktionen sind, d. h.

$$\varphi_n x = V_n \left\{\int_0^1 V_n^2\, dx\right\}^{-1/2},$$

so gilt die bilineare Formel

$$K(x,\xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x\,.\,\varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

und ihre rechte Seite konvergiert gleichmäßig bezüglich jeder der Größen x, ξ im Grundgebiet, wenn die andere in ihm festgehalten wird.

Nach § 22 ist ferner jede quellenmäßige Funktion auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen zu entwickeln; nach dem, was in § 27 über quellenmäßige Darstellung gesagt wurde, ist also jede die Randbedingungen erfüllende Funktion in der angegebenen Weise entwickelbar, die mit ihrer ersten Ableitung im Grundgebiet stetig ist und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt.

Die Anzahl der Eigenwerte und Eigenfunktionen ist unendlich, denn die Eigenfunktionen haben ihrer Definition nach stetige Ableitungen; die bilineare Reihe hätte also auch stetige Ableitungen, wenn die Anzahl ihrer Glieder endlich wäre; sie ist aber dem Kern gleich, dessen Ableitung eine Unstetigkeit aufweist.

Leicht ist endlich die Bedeutung des lösenden Kerns zu ersehen. Er erfüllt nach § 23, wenn μ der Parameter ist, die Gleichung

$$\Gamma(x, y; \mu) = K(x, y) + \mu \int_0^1 K(x, \alpha)\, \Gamma(\alpha, y; \mu)\, d\alpha. \tag{2}$$

Wenden wir nun die Gleichungen (1) auf das zweite Glied der rechten Seite an, so ergibt sich

$$\mathfrak{L}\, \Gamma(x, y; \mu) = \mathfrak{L} K - \mu\, \Gamma(x, y; \mu) = -\mu\, \Gamma(x, y; \mu)$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{d\Gamma}{dx}\right) + (\mu - l)\, \Gamma = 0;$$

ferner zeigt die Gleichung (2), daß die Ableitungen $\partial \Gamma / \partial x$ und $\partial K / \partial x$ dieselbe Unstetigkeit aufweisen, also

$$k \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1.$$

Endlich erfüllt Γ ebenso wie K als Funktion von x die ein für allemal vorgeschriebenen Randbedingungen. Die Größe Γ ist also genau so gebildet wie der Kern K, nur daß man nicht von der Gleichung $\mathfrak{L} y = 0$, sondern von der allgemeineren $\mathfrak{L} y + \mu y = 0$ ausgeht. In der Tat wissen wir ja nach § 23, daß der lösende Kern als Kern einer Integralgleichung genommen werden kann, deren Eigenfunktionen dieselben sind wie bei dem ursprünglichen Kern. Da die bilineare Formel gilt, kann man schreiben

$$\Gamma(x, y; \mu) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n - \mu}.$$

§ 29.

Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen.

So schöne Ergebnisse die Integralgleichungen geliefert haben, muß doch auf die Differentialgleichung der Funktionen V und das zugehörige Randwertproblem zurückgegangen werden, wenn man die Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen in so allgemeiner Form erhalten will, wie es für die Anwendungen nötig ist.

Zu diesem Zweck transformieren wir die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(\lambda-l)\,V=0$$

durch die Substitutionen

$$z=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{k}},\quad U=V\sqrt[4]{k},\quad Z=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{k}}$$

und erhalten eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2U}{dz^2}+(\lambda-L)\,U=0 \tag{1}$$

und Grenzbedingungen

$$\frac{dU}{dz}-h'U\Big|^0=\frac{dU}{dz}+H'U\Big|^Z=0, \tag{2}$$

in denen h', H' Konstante, aber nicht notwendig positiv und mit h, H zugleich endlich sind; der Fall, daß eine der Größen h, H unendlich sei, werde zunächst ausgeschlossen. Wir bemerken noch die offenbar richtige Gleichung

$$\int_0^1 V^2\,dx=\int_0^Z U^2\,dz.$$

Jetzt beachten wir, daß die Gleichung (1), wenn $\lambda=\varrho^2$ gesetzt wird, mit jeder der folgenden identisch ist:

$$d\left(\sin\varrho z\frac{dU}{dz}-\varrho U\cos\varrho z\right)=LU\sin\varrho z\,dz,$$

$$d\left(\cos\varrho z\frac{dU}{dz}+\varrho U\sin\varrho z\right)=LU\cos\varrho z\,dz.$$

Integriert man diese Gleichungen und führt, indem man ϱ willkürlich läßt, nur die erste der Grenzbedingungen (2) sowie die Gleichung

$$U\Big|^0=1$$

ein, so ergibt sich

$$\sin\varrho z\frac{dU}{dz}-\varrho\cos\varrho x\,.\,U=-\varrho+\int_0^z L'U'\sin\varrho z'\,dz',$$

$$\cos\varrho z\frac{dU}{dz}+\varrho\sin\varrho z\,.\,U=\quad h'+\int_0^z L'U'\cos\varrho z'\,dz',$$

wobei durch L', U' die Funktionen L, U, in denen z durch z' ersetzt ist, bezeichnet sind. Hieraus folgt

$$(3) \qquad U = \cos \varrho z + \frac{h' \sin \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z L' U' \sin \varrho (z - z') \, dz',$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{dz} = -\sin \varrho z + \frac{h' \cos \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z L' U' \cos \varrho (z - z') \, dz'.$$

Im Falle $h' = \infty$ gibt der Ansatz

$$U \Big|^0 = 0, \quad \frac{dU}{dz} \Big|^0 = \varrho$$

durch eine der durchgeführten ähnliche Rechnung

$$(5) \qquad U = \sin \varrho z + \frac{1}{\varrho} \int_0^z L' U' \sin \varrho (z - z') \, dz'.$$

Die Gleichungen (3) und (4), die wir näher verfolgen, ergeben wichtige Resultate betreffs der Werte von U. Zunächst kann diese Funktion von z auf Grund bekannter Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen durch das ganze Intervall von $z = 0$ bis $z = Z$ fortgesetzt werden, wobei sie selbst wie auch ihre Ableitung unter einer von z unabhängigen Schranke liegt, die aber zunächst möglicherweise von ϱ abhängt. Es sei z. B. Q die erste positive ganze Zahl, die von den Werten $|U|$ weder erreicht noch überschritten wird. Dann ist die rechte Seite der Gleichung (3) absolut kleiner als

$$1 + \left| \frac{h'}{\varrho} \right| + \frac{Q}{|\varrho|} \int_0^z |L'| \, dz',$$

die linke Seite wird aber für gewisse Werte von z nicht kleiner als $Q - 1$, woraus sich ergibt

$$Q - 1 < 1 + \left| \frac{h'}{\varrho} \right| + \frac{Q}{|\varrho|} \int_0^z |L'| \, dz',$$

$$Q \left[1 - \frac{1}{|\varrho|} \int_0^z |L'| \, dz' \right] < 1 + \left| \frac{h'}{\varrho} \right| .$$

Da nun die Klammer auf der linken sowie die rechte Seite sich bei wachsenden Werten λ und $|\varrho|$ der Grenze $+1$ annähern, so ist klar, daß Q bei diesen Werten nicht unendlich zunimmt, sondern unter einer festen von ϱ unabhängigen Schranke verbleibt. Dasselbe gilt daher von $|U|$ und der Gleichung (4) zufolge auch von der Größe $\varrho^{-1} dU/dz$. Eben diese Ergebnisse folgen auch in derselben Weise aus der Gleichung (5).

Weiter ergeben die Gleichungen (3) und (4) die Identität

$$\frac{dU}{dz} + H'U = (\varrho - P') \sin \varrho z - P \cos \varrho z,$$

wobei die Größen P und P', die leicht zu bilden sind, zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Schranken liegen. Die Eigenwerte $\lambda = \varrho^2$ werden daher durch die Gleichung

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang} \varrho Z = \frac{P}{\varrho - P'}$$

definiert, die zeigt, daß

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

zu setzen ist, wobei n eine positive ganze Zahl bedeutet, die von einer gewissen Grenze ab immer um Eins wächst, wenn man zu dem nächstgrößeren Wert von λ übergeht, und die Gleichung

$$\lim_{\varrho = +\infty} \varepsilon_n = 0$$

gilt. Schreibt man die Gleichung (6) in den Formen

$$\operatorname{tang}(n\pi + \varepsilon_n Z) = \operatorname{tang} \varepsilon_n Z = \frac{P}{\frac{n\pi}{Z} - P' + \varepsilon_n},$$

$$n \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n Z}{\pi \operatorname{tang} \varepsilon_n Z} [P - (P' - \varepsilon_n) \operatorname{tang} \varepsilon_n Z]$$

und beachtet, daß die rechte Seite der letzten Gleichung zwischen endlichen, von n und ϱ unabhängigen Schranken verbleibt, das Verhältnis $n : \varrho$ aber einem endlichen Grenzwerte zustrebt, so wird klar, daß man setzen kann:

$$\text{(7)} \qquad \begin{gathered} \varepsilon_n = \frac{B_0}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_0}{\varrho}, \\ \cos \varrho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B_1}{\varrho}, \quad \sin \varrho z = \sin \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B_2}{\varrho}, \end{gathered}$$

wobei die Größen B zwischen festen, von ϱ unabhängigen Schranken verbleiben.

Hieraus ergibt sich mittels der Gleichung (3) leicht

$$\int_0^Z U^2 dz = \frac{Z}{2} + \frac{B_3}{\varrho},$$

wenn B_3 eine Größe ist, die die Eigenschaften von B_0, B_1 und B_2 besitzt; die normierten Eigenfunktionen haben also, der Gleichung (7) zufolge, die Form

$$\sqrt[4]{k}\,.\,\varphi_n x = \sqrt{\frac{2}{Z}} \cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{n}, \tag{8}$$

wobei der Buchstabe Ψ hier und fortan eine Größe bedeute, die zwischen endlichen von n und x unabhängigen Schranken liegt. Dabei ist zwar, streng genommen, nicht bewiesen, daß $\varphi_n x$ die $n$te Eigenfunktion ist, da erst von einer gewissen Grenze ab dem um Eins wachsenden Werte von n die aufeinanderfolgenden Werte von ϱ oder λ entsprechen. Das ist aber für die Konvergenzfragen, die wir jetzt in Angriff nehmen, unwesentlich; man könnte außer der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ noch eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen hinzufügen, um das vollständige System zu erhalten.

Analog der Gleichung (8) findet man aus den Gleichungen (4) und (7)

$$\frac{k^{3/4}\varphi_n' x}{\lambda_n} = -\frac{Z}{\pi n}\sqrt{\frac{2}{Z}} \sin\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{n^2}, \tag{9}$$

und der zugehörige Eigenwert hat die Form

$$\lambda_n = \varrho^2 = \frac{n^2\pi^2}{Z^2} + \frac{\Psi}{n},$$

so daß

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{Z^2}{\pi^2 n^2}\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right) \tag{10}$$

gesetzt werden kann.

§ 30.

Die bilineare Reihe und ihre Ableitung.

Führen wir neben x ein zweites Argument x_1 ein, das für x gesetzt z und k in z_1 und k_1 überführe, so ergeben die Formeln (8) und (10) des vorigen Paragraphen unmittelbar:

$$\sqrt[4]{k k_1} \sum_n \frac{\varphi_n x\,.\,\varphi_n x_1}{\lambda_n} = \frac{2Z}{\pi^2}\sum_n \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi z}{Z}\cos\frac{n\pi z_1}{Z} + \sum_n \frac{\Psi}{n^2},$$

wobei die Schranken der Größen Ψ wie von x so auch von x_1 unabhängig sind. Die Reihe auf der linken Seite ist zwar nicht vollständig als die bilineare Reihe nachgewiesen, da die Funktionen $\varphi_n x$ und $\cos(n\pi z/Z)$ einander vielleicht nicht völlig eindeutig entsprechen, aber jene Reihe kann sich von der bilinearen nur um eine endliche Anzahl von Gliedern unterscheiden. Die bilineare Reihe des Kerns $K(x, y)$ konvergiert also im Grundgebiet absolut und gleichmäßig bezüglich beider Variablen, was in beschränkterem Sinne nach § 28 schon aus dem Mercerschen Satz folgt, und es gilt die bilineare Formel

$$K(x, x_1) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}.$$

Die Formeln (8), (9) und (10) des § 29 zeigen ferner, daß die Reihe

$$-\sqrt[4]{k^3 k_1} \sum_n \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

sich von der Reihe

$$\frac{2}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{Z} \cos \frac{n\pi z_1}{Z}$$

(1) $$= \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi(z + z_1)}{Z} + \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi(z - z_1)}{Z}$$

nur um eine bezüglich beider Argumente im Grundgebiet gleichmäßig konvergierende Reihe, also eine stetige Funktion beider Argumente unterscheidet. Da nun die Größen k und k_1 im Grundgebiet stetig und positiv bleiben, folgt weiter, daß die Reihe

$$\mathfrak{f} x_1 = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

in jedem Gebiet der Variablen gleichmäßig konvergiert, in welchem dies von der Reihe (1) gilt. Dazu genügt es, x_1 an irgend einer Stelle des Grundgebietes festzuhalten und x eine Strecke, die einen Teil dieses Gebietes bildet und x_1 nicht enthält, durchlaufen zu lassen. Dann bleiben die Größen $z - z_1$ und $z + z_1$ über einer positiven Grenze und unter einer Schranke von der Form $2Z - c$, wobei c eine positive Konstante bedeutet. Daraus aber schließt man, daß die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (1) gleichmäßig konvergieren, indem man sich der in § 4 entwickelten Eigenschaften der Reihe

$$\sum_n^{1, \infty} \frac{\sin nu}{n}$$

erinnert.

An der Stelle $x_1 = x$, $z_1 = z$ wird der zweite Teil der Reihe (1), als Funktion von x_1 betrachtet, unstetig; dasselbe gilt daher von $\mathfrak{f}x$, und es gilt dabei offenbar die Gleichung

$$\mathfrak{f}(x-0) + \mathfrak{f}(x+0) = 2\,\mathfrak{f}x. \tag{2}$$

Aus den auf Konvergenz bezüglichen Eigenschaften der Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x \,.\, \varphi_n \alpha}{\lambda_n}$$

ergibt sich sodann auf Grund des in § 5 benutzten allgemeinen Satzes über die Möglichkeit, eine Reihe gliedweise zu differenzieren, da ja die bilineare Formel gilt, die weitere Formel

$$K'(x, \alpha) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x \,.\, \varphi_n \alpha}{\lambda_n}, \tag{3}$$

sobald x und α verschieden sind.

Da ferner der Kern $K(x, \xi)$, der an der Stelle $x = \xi$ eine unstetige Ableitung nach x besitzt, als Funktion von x mittels der bilinearen Formel nach den Eigenfunktionen $\varphi_n x$ entwickelt werden kann, so gilt dasselbe von dem Ausdruck

$$\Phi x + a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \cdots + a_m K(x, \xi_m),$$

in welchem $a_1, a_2, \ldots$ konstant sind und Φx quellenmäßig dargestellt werden kann. Wie in § 5 schließen wir hieraus, daß jede Funktion nach den Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann, deren Ableitung im Innern des Grundgebietes eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, während die Funktion selbst im übrigen die in § 20 angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Funktion Φx besitzt.

Sodann erhält man unstetige, nach den Eigenfunktionen entwickelte Funktionen, wenn man in der Formel

$$K'(x, \xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

ξ als die unabhängige Variable auffaßt; der Formel (2) zufolge ist der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte, denen die dargestellte Funktion zustrebt, wenn man sich von oben oder unten der Unstetigkeitsstelle annähert.

Speziell gelten die Formeln

$$(4)\qquad K'(1,\xi)=\sum_n \frac{\varphi'_n 1 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}, \qquad K'(0,\xi)=\sum_n \frac{\varphi'_n 0 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

und liefern die Entwicklung einer die Grenzbedingung nicht erfüllenden Funktion von ξ. Denn da z. B. in der Größe $K'(1,\xi)$ das zweite Argument das kleinere ist, hat man nach § 27 zu setzen:

$$K(1,\xi)=\varphi\xi \,.\, \psi 1, \qquad K'(1,\xi)=\varphi\xi \,.\, \psi' 1,$$

und diese Größe erfüllt als Funktion von ξ an der Stelle $\xi = 1$ die Grenzbedingung nicht, da sonst die Funktion φx beide Grenzbedingungen erfüllte, was nicht geschieht. Die Größe, die vermöge der Grenzbedingung verschwinden sollte, ist also von Null verschieden.

Die Formeln (4) sind zwar zunächst nur für den Fall abgeleitet, daß die unter den Funktionszeichen K' stehenden Argumente verschieden sind. Aber z. B. die erste von ihnen gilt auch für $\xi = 1$, wenn nur H nicht unendlich ist. Dann hat man nämlich die Gleichung

$$(5)\qquad k K'(x,\xi)\Big|^1 = -HK(1,\xi) = -H\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 1 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

und zwar auch für $\xi = 1$. Da nun die Eigenfunktionen die Grenzbedingung

$$k\varphi'_n + H\varphi_n\Big|^1 = 0$$

erfüllen, kann man die rechte Seite der Gleichung (5) leicht in die der ersten Gleichung (4) überführen, und letztere ist auch für die Stelle $\xi = 1$ erwiesen. Analog gilt die zweite Formel (4) auch für $\xi = 0$, wenn h nicht unendlich ist; die Formeln (4) versagen also nur in solchen Endpunkten des Grundgebietes, in denen alle Eigenfunktionen verschwinden.

Die erhaltenen Resultate zeigen, daß die mit konstanten Koeffizienten a, b, a_ν, b_ν gebildete Größe

$$\Phi x + \sum_\nu^{1,m} a_\nu K(x,\xi_\nu) + \sum_\nu^{1,r} b_\nu K'(\eta_\nu, x) + aK'(1,x) + bK'(0,x),$$

in eine Fouriersche Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann, also eine Funktion von x, die beliebig viele gegebene Unstetigkeiten an sich selbst und ihrer ersten Ableitung darbietet und der Größe, die in den Grenzbedingungen gleich Null gesetzt wird, einen beliebigen Wert gibt. Dabei ist der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle in derselben Weise wie bei der Reihe $K'(x, \xi)$ oder $\mathfrak{f} x_1$ zu bestimmen.

Hieraus erhält man wie in § 5 den Satz, daß jede Funktion fx, die auf der Strecke von 0 bis 1 mit ihren ersten beiden Ableitungen stückweise stetig ist, in der Form

$$fx = \sum_n \varphi_n x \int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha$$

dargestellt werden kann; sie braucht dabei keineswegs die Randbedingungen der Eigenfunktionen zu erfüllen. In den Unstetigkeitsstellen der Funktion fx gibt die Reihe den Wert

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)];$$

in einem Endpunkte des Grundgebietes, in dem die Eigenfunktionen verschwinden, gibt die Reihe natürlich den im allgemeinen unrichtigen Wert Null. Gleichmäßig konvergiert die erhaltene Reihe wie die benutzten Reihen $K'(x, \xi)$ als Funktionen von ξ auf jeder Strecke, die weder einen Unstetigkeitspunkt der dargestellten Funktion enthält, noch einen Endpunkt des Grundgebietes, in dem diese Funktion die Grenzbedingung der Eigenfunktionen verletzt.

Ist ferner fx eine beliebige von $x = 0$ bis $x = 1$ stetige Funktion, so erhält man nach der Methode des § 6 die von Stekloff bewiesene Gleichung:

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty} \Big[\int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha\Big]^2;$$

besteht diese Gleichung für irgend ein orthogonales Funktionensystem φ_n, so nennen wir dieses abgeschlossen, die Gleichung Abgeschlossenheitsrelation. Die Möglichkeit des Beweises beruht wie in § 6 darauf, daß man eine beliebige stetige Funktion durch quellenmäßige angenähert darstellen kann.

§ 31.

Belastete Integralgleichungen.

Die Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe wird bei wichtigen Anwendungen dahin abgeändert, daß der Eigenwert λ in den Randbedingungen auftritt. Bei elektromagnetischen Ausgleichsvermögen in Kabeln sowie bei Schwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Endpunkten wird etwa gefordert, V auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$(1) \quad V'' + \lambda V = 0, \qquad V0 = 0, \qquad [(p - q\lambda) V + V']|^1 = 0$$

gelten, in denen p und q Konstante und, was wesentlich, q positiv ist. Man findet sofort für Eigenfunktionen und Eigenwerte

$$V = \sin x\sqrt{\lambda}, \quad (p - q\lambda)\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0.$$

Sind λ_1 und λ_2 verschiedene Eigenwerte, V_1 und V_2 die zugehörigen Eigenfunktionen und unterwirft man die mit den Werten $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ angesetzten Gleichungen (1) der Greenschen Operation, indem man die erste mit V_2, die zweite mit V_1 multipliziert und subtrahiert, so ergibt sich

$$q V_1 V_2 |^1 + \int_0^1 V_1 V_2 dx = 0;$$

die Funktionen V_1 und V_2 sind also nicht im bisherigen Sinne orthogonal. Führen wir aber ein Zeichen belasteter Integration im Grundgebiet durch die Gleichung

$$(2) \qquad \bar{\int} f\alpha . d\alpha = \int_0^1 f\alpha . d\alpha + q . f1$$

ein, so erhalten wir die Beziehung

$$\bar{\int} V_1 V_2 dx = 0,$$

die wir als belastete Orthogonalität bezeichnen. Eine Verallgemeinerung der Definition (2) kann bei anderen Aufgaben darin bestehen, daß rechts die Werte des Integranden an beliebig vielen festgelegten Stellen des Grundgebietes auftreten, jeder mit einem festen positiven Faktor multipliziert.

Führen wir jetzt eine Greensche Funktion $K(x, \xi)$ ein, die die Gleichungen

$$K''(x, \xi) = 0, \quad K(0\, \xi,) = 0, \quad K'(1, \xi) + pK(1, \xi) = 0,$$
$$K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi) = 1$$

erfüllt und nach der Schlußformel des § 1, wenn $x \leqq \xi$, durch den Ausdruck

$$K(x, \xi) = K(\xi, x) = \frac{x\,[1 + p\,(1 - \xi)]}{1 + p}$$

gegeben wird, so liefert die Greensche Operation auf die Größen K und V und ihre Differentialgleichungen angewandt die Gleichung

$$V\xi = \lambda V1 . K(1, \xi) + \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, V dx$$

oder die belastete Integralgleichung

$$V\xi = \lambda \overline{\int} K(x, \xi)\, V dx.$$

Sie führt dazu, eine quellenmäßige Funktion in der Form

$$Fx = \overline{\int} K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha + qK(x, 1) f1$$

darzustellen, für die man sofort mittels einer oft durchgeführten Rechnung die Differentialgleichung

$$F''x = -fx$$

und die Randgleichungen

$$(3) \quad F0 = 0, \quad F'1 + pF1 - qf1 = F'1 + pF1 + qF''1 = 0$$

findet. Ist fx im Grundgebiete stückweise stetig, so ist Fx mit der ersten Ableitung stetig und besitzt eine stückweise stetige zweite Ableitung. Hat eine andere Funktion Φx diese Eigenschaften und erfüllt die Randgleichungen (3), so setze man $fx = -\Phi''x$; dann findet man für die Differenz $\mathfrak{F}x = \Phi x - Fx$ die Beziehungen

$$\mathfrak{F}''x = 0, \quad \mathfrak{F}'1 + p\mathfrak{F}1 = 0, \quad \mathfrak{F}0 = 0,$$

die, da $\mathfrak{F}'x$ stetig ist, im ganzen Grundgebiete $\mathfrak{F}x = 0$ ergeben, also $\Phi x = Fx$; die Funktion Φx kann quellenmäßig dargestellt werden.

Der Nutzen des belasteten Integralzeichens besteht nun darin, daß es alle für die Theorie der Integralgleichungen im dritten Abschnitt wesentlichen Eigenschaften des Zeichens der gewöhnlichen Integration über das Grundgebiet teilt, so daß jene Theorie mit allen Ergebnissen auf die belastete Integralgleichung übertragen werden kann. Diese wesentlichen Eigenschaften lassen sich aufzählen. Zunächst ist die Vertauschbarkeit der Integration mit der Addition der Integranden sowie mit der Multiplikation des Integranden mit einem konstanten Faktor zu erwähnen; sodann die Eigenschaft, daß das Integral einer nicht negativen stetigen Größe positiv ist und nur dann verschwindet, wenn der Integrand im Grundgebiete überall verschwindet. Diese Eigenschaften gelten auch für eine doppelte Integration über das Grundgebiet, bei der, wenn der Integrand stetig ist, die Folge der Integrationen ohne Einfluß ist. Aus diesen Eigenschaften der Integration ergibt sich im besonderen die Schwarzsche Ungleichung; sie alle sind sofort auf das Zeichen der belasteten Integration zu übertragen. Endlich ist noch als wesentlich zu erwähnen, daß auch bei der belasteten Integration eine derartige positive Konstante c vorliegt, daß immer die Ungleichung

$$\left|\bar{\int} f\alpha \, . \, d\alpha\right| < g c$$

gilt, sobald $|f\alpha| < g$; im oben betrachteten Sonderfalle ist $c = 1 + q$ zu setzen, und es ist wesentlich, daß q positiv ist. Auf dieser Eigenschaft beruht es, daß eine im Grundgebiete gleichmäßig konvergierende Reihe gliedweise auch belastet integriert werden darf.

Ein Blick auf die §§ 18 bis 24 genügt, um einzusehen, daß nur die hier erwähnten Eigenschaften bei der Untersuchung stetiger Kerne vorkommen; man darf daher die Ergebnisse der allgemeinen Theorie des dritten Abschnittes, soweit stetige Kerne in Betracht kommen, auf die belasteten Integralgleichungen übertragen, z. B. das Mercersche Theorem nach § 24 und die Sätze des § 20 über die bilineare Reihe. In dieser sind natürlich die normierten Eigenfunktionen so zu verstehen, daß die Gleichungen

$$\bar{\int} (\varphi_n x)^2 dx = 1$$

bestehen, der Größe V ist also der Normierungsfaktor

$$\left[\bar{\int} V^2 dx\right]^{-1/2} = \left[q\,(V^2 1) + \int_0^1 V^2\, dx\right]^{-1/2}$$

beizufügen.

Einen wesentlichen Teil der nötigen Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen liefert das Mercersche Theorem, da die zur Bestimmung der Eigenwerte dienende Gleichung nach Cauchy höchstens endlich viele negative Wurzeln haben kann. Die bilineare Formel gilt also und die bilineare Reihe konvergiert im Grundgebiete in bestimmtem Sinne gleichmäßig. Multipliziert man die Formel mit fx und integriert mit dem belasteten Integralzeichen gliedweise, so ist sofort ersichtlich, daß jede quellenmäßige Funktion nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann. Da ferner

$$(4) \qquad K(x, 1) = \frac{x}{1+p} = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n 1}{\lambda},$$

so kann man auch jede Funktion Φx entwickeln, die die Eigenschaften der quellenmäßigen besitzt mit Ausnahme der zweiten Randeigenschaft; setzt man

$$Fx = \Phi x + a x,$$

so kann die Konstante a so gewählt werden, daß Fx die zweite Randgleichung (3) erfüllt, also quellenmäßig dargestellt werden kann; nun ist ax nach (4) entwickelbar, also auch Φx. Endlich bietet die bilineare Formel die Möglichkeit in Ausdrücken wie

$$a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \cdots$$

Funktionen mit nur stückweise stetiger erster Ableitung herzustellen; nach der Methode des § 30 schließt man also, daß jede stetige Funktion mit stückweise stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, die an der Stelle $x = 0$ verschwindet, nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann.

Man erweitert diesen Satz noch, wenn man die asymptotische Form der Eigenwerte berücksichtigt; man ersieht aus der Gleichung, die sie definiert, daß annähernd

$$\lambda_n = (n + \tfrac{1}{2})^2 \pi^2$$

gesetzt werden kann. Daraus schließt man wie in § 30, daß die bilineare Reihe gliedweise differenziert werden kann; in den Reihen

$$K'(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n' x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

$$K'(0, \xi) = 1 - \frac{p\xi}{1+p} = \sum_n \frac{\varphi_n' 0 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

$$K'(1, \xi) = \frac{-p\xi}{1+p} = \sum_n \frac{\varphi_n' 1 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

hat man unstetige und die Randbedingungen nicht erfüllende Funktionen von ξ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n \xi$ entwickelt, und folgert daraus wiederum wie in § 30, daß jede mit ihren ersten beiden Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetige Funktion nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann.

§ 32.

Integralgleichungen und Besselsche Funktionen.

Beim Problem des schwingenden Seiles (§ 10) und bei anderen Problemen der mathematischen Physik tritt das System der Funktionen $J_m(\varrho x)$ auf, wobei m eine nicht negative ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, $J_m x$ das an der Stelle $x = 0$ von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integral der Gleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$$

ist, und die Zahlen ϱ durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho J'_m \varrho + H J_m \varrho = 0$$

definiert sind, in der durch H eine Konstante bezeichnet wird, die nicht negativ ist; letztere kann auch den Wert ∞ annehmen, so daß die Werte ϱ die Wurzeln der Gleichung

$$J_m \varrho = 0$$

sind. Es handelt sich bei den erwähnten Problemen darum, eine auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ willkürlich gegebene Funktion nach den Größen $J_m(\varrho x)$ zu entwickeln, bei denen man sich, da $J_m x$ das Produkt aus x^m und einer geraden Funktion von x ist, auf die positiven Werte von ϱ beschränken kann.

Das System dieser Funktionen ist dem Sturm-Liouvilleschen verwandt, was besonders klar wird, wenn wir die Größen

$$y = J_m(\varrho \sqrt{x})$$

betrachten, die von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4 x \frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{x}\right) y = 0, \qquad \varrho^2 = \lambda$$

sind und die Grenzbedingung

$$2 \frac{dy}{dx} + Hy \Big|^{1} = 0 \tag{1}$$

erfüllen. Diese Differentialgleichung fällt unter den von Sturm und Liouville betrachteten Typus mit der Modifikation, daß für die in der allgemeinen Theorie durch k und l bezeichneten Größen die Gleichungen

$$k\Big|^{0} = 0, \qquad l\Big|^{0} = \infty$$

gelten. Trotz dieser Singularitäten erkennt man die Größen $J_m(\varrho x)$ als zueinander orthogonal, indem man zwei von ihnen durch V_r und V_n bezeichnet und aus den zugehörigen Differentialgleichungen nach der oft gebrauchten Methode die Formel

$$4x(V_r V_n' - V_r V_n')\Big|_0^1 + (\lambda_r - \lambda_n)\int_0^1 V_r V_n\, dx = 0$$

ableitet, in der das vom Integralzeichen freie Glied an der Stelle $x = 0$ wegen des Faktors x verschwindet.

Daß ferner die Größen $J_m(\varrho x)$ Eigenwerte eines symmetrischen Kernes sind, ersieht man durch Entwicklungen, die den in § 27 durchgeführten sehr ähnlich sind. Abgesehen von dem als ausgeartet anzusehenden Falle $m = H = 0$ ist der Kern das von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integral der Gleichung

$$\mathfrak{L}y = \frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}y = 0, \tag{2}$$

das an der Stelle $x = 1$ die Randbedingung (1) erfüllt und an der Stelle $x = \xi$ gemäß der Gleichung

$$kK'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 4xK'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

singulär wird.

Diese Kerne lassen sich darstellen. Bezeichnet man durch u den echten der beiden Brüche

$$\frac{x}{\xi}, \quad \frac{\xi}{x},$$

so erhält man für $m = 0$ die Gleichung

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2H} - \frac{1}{8}\log\frac{x\xi}{u}, \tag{3}$$

für $m > 0$ allgemein

$$K(x, \xi) = \frac{1}{4m}\left[u^{\frac{m}{2}} - (x\xi)^{\frac{m}{2}}\right] + \frac{(x\xi)^{\frac{m}{2}}}{2(m+H)}, \tag{4}$$

also Ausdrücke, die offenbar auch für den Fall $H = \infty$ einen bestimmten Sinn behalten; bei der Annahme $m > 0$ kann auch $H = 0$ gesetzt werden.

Nimmt man in diesen Ausdrücken für die ganze Strecke von 0 bis 1 den Wert

$$u = \frac{\xi}{x},$$

so stellen sie das bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Integral der Gleichung (2) dar, das eine stetige Ableitung besitzt und an der Stelle $x = 1$ die Randbedingung erfüllt. Dieses Integral enthält an der Stelle $x = 0$ negative Potenzen oder Logarithmen. Sollen also diese Singularitäten bei einem die Randbedingung erfüllenden Integral der Gleichung (2) ausgeschlossen sein, so muß dieses identisch verschwinden.

In dem ausgearteten Falle $m = H = 0$ sucht man nach dem in § 27 gegebenen Ansatz das an der Stelle $x = 0$ von Logarithmen freie Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0,$$

das im übrigen dieselben Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen erfüllt wie die bisher betrachteten Kerne, und findet

$$K(x, \xi) = \frac{x + \xi}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{x\xi}{u} - \frac{3}{8},$$

wobei die additive Konstante so bestimmt ist, daß die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \xi)\,dx = 0$$

gilt.

Diese Kerne sind an der Stelle $x = \xi = 0$ unendlich oder in gewissem Sinne unbestimmt; wir stellen aber fest, daß sie zu den brauchbar unstetigen Kernen gehören.

In den Brauchbarkeitsbedingungen des § 19 wird verlangt, daß ein einfaches oder ein Doppelintegral, unter welchem der Kern einmal oder zweimal als Faktor vorkommt, stetige Funktion eines im Integranden stetig vorkommenden Parameters sei und daß die Integrationen vertauscht werden dürfen. Da nun der Kern $K(x, \alpha)$ nur an der Stelle $x = \alpha = 0$ singulär ist, so kann man von den Gebieten der einfachen oder doppelten Integration ein beliebig wenig ausgedehntes Teilgebiet so abscheiden, daß außerhalb desselben alle betrachteten Integranden stetig bleiben. Dann sind die über die Restgebiete erstreckten Integrale in der gewünschten Weise stetig und lassen die Vertauschung der Integrationen zu. Dasselbe läßt sich von den über die vollen Grundgebiete erstreckten Integralen dann sagen, wenn der Wert der über das kleine Teilgebiet erstreckten Integrale beliebig herabgedrückt werden kann. Das ist bei dem Kern (3) daraus ersichtlich, daß die Unendlichkeit des Kerns $K(\alpha, x)$ nur dadurch zustande kommt, daß er einen der Werte

$$\frac{1}{2H} - \frac{1}{8}\log\alpha, \quad \frac{1}{2H} - \frac{1}{8}\log x$$

annimmt, die an der Stelle $\alpha = x = 0$ unendlich werden. Nun kann aber jedes Integral von der Form

$$(5) \qquad \int f(\alpha, x)(\log\alpha)^k d\alpha, \quad \iint f(\alpha, x)(\log\alpha)^k(\log x)^h d\alpha\, dx,$$

in welchem $f(\alpha, x)$ stetig ist, abgeschätzt werden, indem man als Integrationsgebiete die Strecke $0 \leqq \alpha \leqq a$ oder das Quadrat

$$(6) \qquad 0 \leqq \alpha \leqq a, \quad 0 \leqq x \leqq a$$

nimmt, was in unserem Falle die oben erwähnten kleinen Teilgebiete sein könnten. Die Integrale (5) sind bei jeder Integrationsfolge kleiner als die Integrale

$$g\int_0^a (\log\alpha)^k d\alpha, \quad g\int_0^a\int_0^a (\log\alpha)^k(\log x)^h d\alpha\, dx,$$

in denen g eine obere Schranke der Werte $|f(\alpha, x)|$ ist, und die offenbar mit a unendlich abnehmen.

Bei dem Kern (4) liegt die Sache noch etwas einfacher, indem er an der singulären Stelle $x = \xi = 0$ nur unbestimmt innerhalb einer bestimmten endlichen Wertstrecke wird; setzen wir $x = c\xi$, $0 \leqq c < 1$, so haben wir

$$\lim_{\xi = 0} K(c\xi, \xi) = \frac{1}{4m} c^{\frac{m}{2}}.$$

Die Grenzwerte $K(+0, +0)$ liegen also auf der Strecke von 0 bis $\frac{1}{4m}$. Daraus folgt aber sofort, daß die über die Teilgebiete (6) erstreckten Integrale von der Form derer, die bei den Brauchbarkeitsbedingungen des § 19 auftreten, mit a verschwinden; auch die Kerne (4) sind brauchbar.

Hiernach sind die Sätze des dritten Abschnitts, soweit sie nicht ausdrücklich auf stetige Kerne eingeschränkt sind, auf die Integralgleichungen der Besselschen Funktionen anwendbar; insbesondere gilt dies von § 22, nach welchem eine zu allen Eigenfunktionen orthogonale, auf dem Grundgebiet stetige Funktion auch zu dem Kern orthogonal ist. Nun gibt aber, wenn

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha$$

gesetzt wird, eine leichte Rechnung

$$\mathfrak{L} Fx = -fx;$$

verschwindet also Fx identisch, so daß fx zu dem Kern $K(x, \xi)$ orthogonal ist, so muß auch fx identisch verschwinden. Der Satz des § 22 gibt also die Folgerung, daß eine im Grundgebiet stetige Funktion fx identisch verschwindet, wenn sie zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist, d. h. wenn alle Gleichungen

$$\int_0^1 fx \, . \, J_m\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) dx = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$$

gelten.

Wesentlich anders als bei den Sturm-Liouvilleschen Funktionen muß bei den Besselschen die bilineare Formel abgeleitet werden, da der Mercersche Satz an stetige Kerne gebunden ist.

Es ist bekannt, daß die Funktion $J_m x$ für große reelle Argumente asymptotisch durch den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

dargestellt wird. Daraus ersieht man leicht, daß die oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho J_m' \varrho + H J_m \varrho = 0$$

im wesentlichen in arithmetischer Progression und die Eigenwerte λ_n wesentlich wie die Quadrate der natürlichen Zahlen fortschreiten, so daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n}$$

konvergiert. Aber anderseits zeigt die angeführte asymptotische Darstellung, daß

$$(7) \qquad 2\int_0^1 x J_m(\varrho x)^2 \, dx = \int_0^1 J_m(\varrho \sqrt{x})^2 \, dx = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, wobei Ψ zwischen von ϱ unabhängigen, endlichen und positiven Grenzen liegt; die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = J_m\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) \left[\int_0^1 J_m\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)^2 dx\right]^{-1/2}$$

bleiben also nicht in dem ganzen Grundgebiet zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen, so daß die bilineare Reihe

$$\sum \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}$$

nicht in derselben Weise konvergiert, wie bei den Sturm-Liouvilleschen Funktionen.

Nun zeigt die asymptotische Darstellung von J_m, daß $\sqrt{x} J_m x$ zwischen endlichen Schranken liegt; man kann daher setzen, indem man $\varrho\sqrt{\xi}$ für x schreibt,

$$\sqrt{\varrho}\sqrt[4]{\xi} J_m(\varrho\sqrt{\xi}) = \Psi, \qquad \sqrt[4]{\xi} J_m(\varrho\sqrt{\xi}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}}.$$

Sobald daher die Größe ξ über einer beliebig klein festgelegten positiven Größe ε verbleibt, kann man auch

$$J_m(\varrho\sqrt{\xi}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}}$$

setzen, mithin nach (7)

$$\frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{J_m(\varrho\sqrt{\xi})}{\varrho^2}\left[\int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{x})^2 dx\right]^{-1/2} = \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und da die Größe $J_m(\varrho\sqrt{x})$ jedenfalls zwischen endlichen von x und ϱ unabhängigen Schranken bleibt, folgt

$$\varphi_n x = \Psi . \sqrt{\varrho}, \qquad \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{\Psi}{\varrho^{3/2}}.$$

Unter der jetzt geltenden Voraussetzung

(8) $$\xi > \varepsilon$$

konvergiert also die bilineare Reihe bezüglich der Variablen x gleichmäßig; da ferner bei dieser Annahme $K(x, \xi)$ endlich ist, kann die Reihe

$$Q(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

mit einer stetigen Funktion von x multipliziert von 0 bis 1 nach x gliedweise integriert werden. Offenbar findet man so z. B.:

$$\int_0^1 Q(x, \xi) . \varphi_m x . dx = 0;$$

nach dem oben erhaltenen Satze folgt also für das Grundgebiet

$$Q(x, \xi) \equiv 0, \qquad K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

unter der Annahme (8).

Jetzt zeigt der allgemein auch für brauchbar unstetige Kerne gültige Satz des § 22, daß eine quellenmäßige Funktion

$$\int_0^1 K(x,\xi) fx \, . \, dx = F\xi$$

auf die Fouriersche Weise nach der Formel

$$F\xi = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} \int_0^1 fx \, . \, \varphi_n x \, . \, dx$$

entwickelt werden kann.

Unter welchen Bedingungen aber eine Funktion Φx quellenmäßig dargestellt werden kann, sieht man leicht nach der in § 27 gebrauchten Methode.

Zunächst findet man nämlich, wie schon oben erwähnt wurde, durch leichte Rechnung

$$\mathfrak{L} Fx = -fx;$$

ist sodann Φx eine Funktion mit stetiger erster und stückweise stetiger zweiter Ableitung, die die Randbedingung der Eigenfunktionen erfüllt, und setzt man

$$\frac{d}{dx}(4x\Phi') - \frac{m^2 \Phi}{x} = \mathfrak{L}\Phi x = -fx,$$

so ist fx im Falle $m > 0$ an der Stelle $x = 0$ nur dann sicher endlich, wenn

$$\lim_{x=0} \frac{\Phi x}{x}$$

endlich ist. Setzen wir dies voraus, so ist $F - \Phi$ eine die Randbedingung erfüllende Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{L} y = 0,$$

deren erste Ableitung stetig ist. Eine solche muß identisch verschwinden; die letzte Gleichung ist ja mit der durch (2) bezeichneten identisch. Die Differenz $F - \Phi$ verschwindet also identisch, und damit ist die Funktion Φ quellenmäßig dargestellt; die Argumentation braucht in dem ausgearteten Falle nur unwesentlich modifiziert zu werden.

Hiermit ist gezeigt, daß eine Funktion von den für Φx vorausgesetzten Eigenschaften auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann, einschließlich der Stelle $x = 0$. Ist nun zunächst $m > 0$, so enthalten die Eigenfunktionen den verschwindenden Faktor $x^{1/2 m}$; die Darstellung von Φx bleibt also an der Stelle

$x = 0$ gültig, wie es die allgemeine Theorie aussagt, da $\Phi 0$ verschwindet. Wenn aber $m = 0$ ist, braucht dies nicht angenommen zu werden.

Aus der oben benutzten Gleichung

$$\sqrt{x}\, J_m x = \Psi$$

folgt übrigens offenbar

$$\sqrt[4]{\alpha}\, J_m(\varrho \sqrt{\alpha}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}},$$

und wenn die Größen a und b dem Grundgebiet angehören,

$$\int_a^b f\alpha \,.\, J_m(\varrho\sqrt{\alpha})\, d\alpha = \int_a^b f\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}} \cdot \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}} \int_a^b \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}} = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}},$$

wobei die Größe a und b auch in die Grenzen 0 und 1 hineinrücken dürfen, die Schranken des Symbols Ψ aber von a und b unabhängig sind. Da ferner die Größe $J_m(\varrho\sqrt{x})$ zwischen zwei von ϱ und x unabhängigen endlichen Grenzen liegt, so erhält man aus der Formel (7) die Gleichung

$$\frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \cdot \int_0^1 \varphi_n \alpha \,.\, f\alpha \,.\, d\alpha$$

$$= \frac{J_m(\varrho\sqrt{x})}{\varrho^2} \int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{\alpha}) f\alpha \,.\, d\alpha : \int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{\alpha})^2\, d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho^{3/2}}.$$

Die nach n gebildete Summe dieser Größen konvergiert also gleichmäßig bezüglich der Variablen x und ist auf dem Grundgebiet mit Einschluß des Wertes $x = 0$ stetig. Hiermit bestätigt sich wiederum, was die allgemeine Theorie voraussagt.

Um ferner Sätze über die Darstellung unstetiger oder mit unstetiger Ableitung versehener Funktionen zu erhalten, betrachten wir wie in § 30 die bilineare Formel als Fouriersche Entwicklung einer mit unstetiger Ableitung behafteten Funktion; ebenso die durch Differentiation erhaltenen als Darstellung unstetiger Funktionen. Die nötigen Konvergenzeigenschaften findet man wie in § 30 aus der asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen.

Man findet nun bei der Annahme $x > \xi$ im Falle $m = 0$:

$$K'(x, \xi) = -\frac{1}{4x},$$

und im Falle $m > 0$

$$K'(x, \xi) = \frac{\xi^{\frac{m}{2}}}{8}\left(-\frac{m}{2}x^{-\frac{m}{2}-1} - \frac{m}{2}x^{\frac{m}{2}-1}\right) + \frac{m\,\xi^{\frac{m}{2}}\,x^{\frac{m}{2}-1}}{4(m+H)},$$

also entsprechend beiden Fällen:

$$K'(1, \xi) = -\frac{1}{4}, \quad K'(1, \xi) = \xi^{\frac{m}{2}}\left[-\frac{m}{8} + \frac{m}{4(m+H)}\right],$$

und diese Größen erfüllen als Funktionen von ξ die auf die Stelle $\xi = 1$ bezügliche Randbedingung offenbar nicht.

Hieraus schließt man nach der Methode des § 5, indem man den Ausdruck

$$\mathfrak{F}x = \Phi x + \sum_{\nu}^{1,q} a_\nu K(x, \xi_\nu) + \sum_{\nu}^{1,r} b_\nu K'(\eta_\nu, x) + c K'(1, x)$$

betrachtet, daß eine Funktion Fx nach den Eigenfunktionen eines der betrachteten Systeme entwickelt werden kann, wenn sie mit ihren ersten beiden Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetig ist, und im Falle $m > 0$ einen endlichen Grenzwert des Verhältnisses Fx/x an der Stelle $x = 0$ ergibt. Eine solche Funktion kann nämlich immer in die Form $\mathfrak{F}x$ gebracht werden, wobei Φx die oben geforderten Eigenschaften besitzt.

Nach der Methode des § 30 folgt endlich, wenn fx im Grundgebiet stetig ist, die Abgeschlossenheitsbeziehung

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty}\left[\int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha\right]^2.$$

§ 33.

Die Legendreschen Polynome.

Die mechanische Bedeutung der Legendreschen Polynome ist schon in den §§ 10 und 16 erörtert. Dieselben ergeben sich als Lösungen der Aufgabe, in der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \lambda\Theta = 0$$

die Konstante λ so zu bestimmen, daß ein auf der ganzen Strecke von $x = -1$ bis $x = +1$ endliches Integral mit endlicher Ableitung vorhanden ist. Sind λ_1 und λ_2 irgend zwei solcher Werte und Θ_1, Θ_2 die zugehörigen endlichen Integrale, so findet man unmittelbar:

$$\Theta_2 \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\,\Theta_1}{dx}\right] - \Theta_1 \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\,\Theta_2}{dx}\right] + (\lambda_2 - \lambda_1)\Theta_1\Theta_2 = 0,$$

$$(1-x^2)\left(\Theta_2 \frac{d\,\Theta_1}{dx} - \Theta_1 \frac{d\,\Theta_2}{dx}\right)\Bigg|_{-1}^{+1} + (\lambda_2 - \lambda_1)\int_{-1}^{+1} \Theta_1\Theta_2\,dx = 0,$$

woraus, wenn λ_1 und λ_2 verschieden sind, die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \Theta_1\Theta_2\,dx = 0$$

folgt. Nimmt man also die Strecke von $x = -1$ bis $x = +1$ als Grundgebiet, so sind die zu verschiedenen der gesuchten Werte λ gehörigen endlichen Integrale der Gleichung (1) zu einander orthogonal.

Nun lassen sich gewisse der gesuchten Werte von λ leicht angeben, die Werte 0 und $n(n+1)$ nämlich, wenn n wieder eine positive ganze Zahl bedeutet, und die zugehörigen Lösungen Θ sind die Legendreschen Polynome

$$P_0 x = 1, \quad P_n x = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2-1)^n].$$

Zu jedem dieser Werte λ gehört keine andere Funktion Θ, weil, wie man leicht sieht, jedes von $P_n x$ verschiedene Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

an den Stellen $x = \pm 1$ unendlich wird. Hätte also die Gleichung (1) außer den Legendreschen Polynomen noch eine Lösung Θ von der gewünschten Beschaffenheit, so müßte sie zu allen Funktionen $P_0 x$, $P_n x$ orthogonal sein:

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} \Theta\,dx = \int_{-1}^{+1} P_n x \,.\, \Theta\,dx = 0.$$

Hieraus läßt sich aber ableiten, daß Θ identisch verschwinden müßte. Durch die Polynome $P_0 x$, $P_n x$ läßt sich nämlich, da sie alle von verschiedenem Grade sind, jede ganze positive Potenz von x, mithin jedes Polynom des Arguments x linear ausdrücken, und da nach einem berühmten Theorem von Weierstrass jede stetige Funktion von x in einem endlichen Intervall durch ein

Polynom mit beliebig hohem Grade der Annäherung dargestellt werden kann, gibt es ein lineares Aggregat von Legendreschen Polynomen, etwa

$$\psi x = a_0 + a_1 P_1 x + a_2 P_2 x + \cdots + a_m P_m x,$$

von der Beschaffenheit, daß auf dem ganzen Grundgebiet d. h. der Strecke

$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

die Ungleichung

(3) $$|\Theta - \psi x| < \varepsilon$$

gilt, wobei ε beliebig klein gegeben sei. Dann findet man

$$\int_{-1}^{+1} \Theta^2 dx = \int_{-1}^{+1} \Theta\, \psi x \,.\, dx + \int_{-1}^{+1} \Theta (\Theta - \psi x)\, dx,$$

und hier verschwindet rechts das erste Integral, da Θ zu allen Legendreschen Polynomen orthogonal ist. Die resultierende Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \Theta^2 dx = \int_{-1}^{+1} \Theta (\Theta - \psi x)\, dx,$$

kann aber der Ungleichung (3) zufolge nur bestehen, wenn Θ auf dem Grundgebiet identisch verschwindet.

Damit ist gezeigt, daß die Werte $\lambda = 0,\ n(n+1)$ in der Tat die einzigen sind, die bei dem an die Gleichung (1) geknüpften Randwertproblem zu Lösungen der gesuchten Art, eben den Legendreschen Polynomen führen. Sodann ergibt sich aus der durchgeführten Argumentation, die nur von der Gleichung (2) Gebrauch macht, daß jede auf dem Grundgebiet stetige Funktion, die zu allen Legendreschen Polynomen orthogonal ist, identisch verschwindet.

Die Funktionen $P_n x$ sind nun schon in § 16 als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns dargestellt; ihre dynamische Bedeutung führte dazu, den Kern folgendermaßen zu definieren:

$$\begin{aligned} x < \xi, \quad K(x,\xi) &= -\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2, \\ x > \xi, \quad K(x,\xi) &= -\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2. \end{aligned}$$

Dann bestehen die Gleichungen

(4) $$\begin{gathered} \frac{d\,[(1-x^2)\,K'(x,\xi)]}{dx} - \frac{1}{2} = 0, \\ K'(x,\xi)\,(1-x^2)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad \int_0^1 K(x,\xi)\, dx = 0, \end{gathered}$$

und die Größen $K(1, \xi)$, $K(-1, \xi)$ sind endlich. Hieraus folgt, indem wir die Differentialgleichung (4) mit P_n multiplizieren und von der mit $K(x, \xi)$ multiplizierten Gleichung (1) subtrahieren, in gewohnter Weise

$$P_n \xi = n(n+1) \int_{-1}^{+1} P_n x \,.\, K(x, \xi)\, dx.$$

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_n x = \sqrt{n + \tfrac{1}{2}}\, P_n x,$$

da durch leichte partielle Integration die Formel

$$\int_{-1}^{+1} (P_n x)^2 dx = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{d x^n} \right\}^2 dx$$

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = \frac{2}{2n+1}$$

abgeleitet werden kann.

Der erhaltene Kern ist nun zwar an den Stellen $x = \xi = \pm 1$ unendlich, aber leicht als brauchbar im Sinne des § 19 nachzuweisen. Wir wollen aber hier einmal nicht die allgemeine Theorie, sondern die besonderen Eigenschaften der betrachteten Gebilde zugrunde legen. Wir gehen davon aus, daß, wenn fx auf dem Grundgebiet stückweise stetig ist, die Größe

$$Fx = \int_{-1}^{+1} K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

offenbar eine stetige Funktion von x ist. Versucht man diese, also eine quellenmäßig dargestellte Funktion von x, nach den Eigenfunktionen rein formal zu entwickeln, so erhält man die Reihe

$$R = \sum_n \varphi_n x \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int_{-1}^{+1} f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

sobald gezeigt ist, daß in dem Integral

$$\int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \int_{-1}^{+1} \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha \int_{-1}^{+1} K(\alpha, \beta) f\beta \,.\, d\beta$$

die Reihenfolge der Integrationen geändert werden darf. Das ist sicher, wenn man die unteren Integrationsgrenzen durch

$-1+\varepsilon$, die oberen durch $1-\varepsilon$ ersetzt und unter ε eine beliebig kleine positive Größe versteht. Die hiermit weggelassenen Teile des Integrationsgebiets geben aber zu dem Integral einen mit ε verschwindenden Beitrag, gleichviel in welcher Reihenfolge man integriert. Dies ersieht man unmittelbar aus dem expliziten Ausdruck $K(x, \xi)$ und daraus, daß das Integral

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi\,\alpha \,.\log \alpha \,.\, d\,\alpha$$

mit ε verschwindet, wenn $\varphi\,\alpha$ eine im Integrationsgebiet stetige Funktion bedeutet. Damit ist die Gleichung

$$(5)\quad \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\,\alpha = \int_{-1}^{+1} f\beta \,.\, d\beta \int_{-1}^{+1} K(\alpha, \beta)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\,\alpha = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^{+1} f\beta \,.\, \varphi_n \beta \,.\, d\beta$$

erwiesen; ersetzt man $\varphi_n \alpha$ durch 1, so findet man

$$(6)\qquad \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, d\,\alpha = 0.$$

Die Reihe R ist nun leicht als im Grundgebiet gleichmäßig konvergent nachzuweisen. Zu diesem Zweck gehen wir von der Laplaceschen Formel

$$P_n x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\alpha\right)^n d\,\alpha$$

und der Identität

$$(7)\qquad P'_n x = \frac{n\,x\,P_n x - n\,P_{n-1} x}{1-x^2}$$

aus; diese Formeln zeigen, daß die Größen

$$(8)\qquad P_n x, \quad \frac{(1-x^2)\,P'_n x}{n}$$

im Grundgebiet zwischen festen von n unabhängigen endlichen Grenzen liegen.

Ist nun die Funktion fx auf der Strecke von $x=a$ bis $x=b$ stetig und hat sie im ganzen Grundgebiet eine stückweise stetige Ableitung, so kann man setzen:

$$\int_a^b P_n\alpha \,.\, f\alpha \,.\, d\,\alpha = -\frac{1}{n(n+1)} \int_a^b f\alpha \cdot \frac{d}{d\,\alpha}\left[(1-\alpha^2)\,P'_n\alpha\right] d\,\alpha$$

$$= \frac{-(1-\alpha^2)\,f\alpha \,.\, P'_n\alpha}{n(n+1)}\Bigg|_{a+0}^{b-0} + \frac{1}{n(n+1)} \int_a^b f'\alpha \,.\, (1-\alpha^2)\,P'_n\alpha \,.\, d\,\alpha.$$

Diese Gleichung zeigt wegen der abgeleiteten Eigenschaft der Größen (8), daß die Größe

$$n\int_{-1}^{+1} P_n\alpha.f\alpha.d\alpha$$

zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. Daraus folgt weiter, daß man

$$\frac{\varphi_n x}{\lambda_n}\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha.f\alpha.d\alpha = \frac{(n+\frac{1}{2})P_n x}{n(n+1)}\int_{-1}^{+1}P_n\alpha.f\alpha.d\alpha = \frac{\Psi}{n^2}$$

setzen kann, wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. Damit ist die Reihe R als gleichmäßig konvergent erwiesen.

Hieraus folgen auf Grund der Gleichung (5) die Beziehungen

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha.[R\alpha - F\alpha]\,d\alpha = 0;$$

da ferner die Legendresche Differentialgleichung die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha.d\alpha = 0$$

ergibt, so folgt auf Grund der Gleichung (6)

$$\int_{-1}^{+1}[R\alpha - F\alpha]\,d\alpha = 0.$$

Die Differenz $R - F$ ist also zu allen Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ und zur Konstanten orthogonal, also Null:

$$Fx = \sum_n^{1,\infty}\frac{\varphi_n x}{\lambda_n}\int_{-1}^{+1}f\alpha.\varphi_n\alpha.d\alpha = \sum_n \varphi_n x\int_{-1}^{+1}F\alpha.\varphi_n\alpha.d\alpha.$$

Damit ist gezeigt, daß die in der Form Fx darstellbaren Funktionen sich in eine auf dem Grundgebiet gleichmäßig konvergente Reihe nach den Legendreschen Polynomen $P_1 x$, $P_2 x, \ldots$ entwickeln lassen.

Um dies Resultat in eine brauchbare Form zu bringen, nehmen wir an, die Funktion Φx sei im Grundgebiet mit ihren ersten Ableitungen stetig, habe eine stückweise stetige zweite und dritte Ableitung und erfülle die Gleichung

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1}\Phi\alpha.d\alpha = 0;$$

setzt man dann $$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\Phi' x] = -fx,$$

so hat diese Größe die soeben von fx verlangte Beschaffenheit. Bildet man mit ihr die Größe Fx, so findet man leicht

$$(10)\qquad \frac{d}{dx}\{(1-x^2)[\Phi' x - F' x]\} = 0, \qquad \int\limits_{-1}^{+1} (\Phi\alpha - F\alpha)\, d\alpha = 0,$$

und die Differenz $\Phi - F$ ist eine mit ihrer ersten Ableitung im Grundgebiet stetige Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

Sie muß also eine Konstante sein, die wegen der zweiten Gleichung (10) den Wert 0 hat. Das heißt: eine Funktion Φx ist quellenmäßig darstellbar mit einer Funktion fx, deren Ableitung von $x = -1$ bis $x = +1$ stückweise stetig ist.

Da endlich die Bedingung (9), wenn sie nicht gilt, erfüllt werden kann, indem man die Funktion Φx um eine Konstante vermehrt, so sieht man, daß jede Funktion Φx, die im Grundgebiet mit ihrer ersten Ableitung stetig ist und stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt, in eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 P_1 x + a_2 P_2 x + \dots$$

entwickelt werden kann, die im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert.

§ 34.

Die bilineare Formel in Legendreschen Polynomen.

Aus dem erhaltenen Entwicklungssatze kann die bilineare Formel

$$K(x,y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n} = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)}$$

abgeleitet werden, indem man von der folgenden asymptotischen Darstellung Gebrauch macht:

$$(1)\qquad P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left\{\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\}.$$

In dieser bedeutet θ einen Winkel, für den $|\sin\theta|$ über einer festen Grenze g bleibt, und Ψ eine Größe, die zwischen festen, von n unabhängigen Schranken liegt, sobald die Größe g festgelegt ist. Setzen wir $y = \cos\theta$, so bleibt dieser Wert um ein festes Stück von $+1$ und -1 entfernt, das aber mit g beliebig klein gemacht werden kann. Diese asymptotische Darstellung ergibt sich als Sonderfall der in § 29 betrachteten, indem man für die Größen

$$S = \sqrt{\sin\theta}\, P_n(\cos\theta), \quad u = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S}{d u^2} + \left[(n+\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{4\cos^2 u}\right] S = 0$$

erhält, $n + \frac{1}{2}$ durch ϱ ersetzt und das Grundgebiet von $u = 0$ bis $u = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ erstreckt, wobei ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet; man hat nur noch die Werte von S und dS/du an der Stelle $u = 0$, $\cos\theta = 0$ zu bestimmen und zu beachten.

Die Formel (1) ergibt nun, da die Größen P_n im Grundgebiete zwischen gewissen von n unabhängigen Grenzen liegen, unmittelbar:

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\, P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)} = \frac{\Psi}{n^{3/2}};$$

die bilineare Reihe konvergiert also unter der bezüglich der Größe y aufgestellten Voraussetzung gleichmäßig, wobei die Größe x das ganze Grundgebiet durchlaufen darf. Man kann daher die Reihen

$$Q(x, y) = K(x, y) - \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n},$$

$$P_m x \,.\left[K(x, y) - \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n}\right]$$

nach x über das Grundgebiet gliedweise integrieren und erhält auf Grund der geltenden Integralgleichung

$$\int_{-1}^{+1} Q(x, y) P_m x \,.\, dx = 0.$$

Da ferner auch die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} K(x, y)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n x \,.\, dx = 0$$

gelten, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} Q(x, y)\, dx = 0.$$

Die Größe Q ist also zu allen Legendreschen Polynomen und zur Konstanten $P_0 x$ orthogonal, und muß nach § 33 identisch verschwinden. Damit sind die Formeln

$$x \leqq y, \quad -\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+y)] - \tfrac{1}{2} + \log 2 = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)}$$

$$x \geqq y, \quad -\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-y)] - \tfrac{1}{2} + \log 2 = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)}$$

zunächst unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Größe y von $+1$ und -1 um ein endliches Stück verschieden bleibt, also für jeden von $+1$ und -1 verschiedenen Wert von y, während x das ganze Grundgebiet durchlaufen, also auch die Werte ± 1 annehmen darf. Aus der Symmetrie der erhaltenen Formeln bezüglich der Größen x und y folgt dann, daß auch y im ganzen Grundgebiet beliebig gewählt werden darf.

Setzt man demgemäß $y = \pm 1$ und berücksichtigt die Gleichungen $\quad P_n(+1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n;$

so erhält man die Formeln:

$$(2) \qquad \begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} + \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x}{n(n+1)}, \\ -\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} + \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})(-1)^n P_n x}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Die bilineare Formel kann als Entwicklung einer Funktion, deren Ableitung unstetig ist, nach den Eigenfunktionen aufgefaßt werden. Daraus schließt man nach der schon vielfach gebrauchten Methode, daß in derselben Weise auch eine Funktion zu entwickeln ist, deren erste Ableitung eine beliebige endliche Anzahl von Unstetigkeiten aufweist, z. B. eine Funktion, die geometrisch durch eine polygonale Linie dargestellt wird. Nach der in § 6 benutzten Methode erschließt man hieraus die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} (f\alpha)^2 d\alpha = a_0^2 + \sum_n^{1,\infty} a_n^2,$$

in der $f\alpha$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet und gesetzt ist

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} f\alpha \,.\, d\alpha, \qquad a_n = \sqrt{n+\tfrac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} f\alpha \,.\, P_n \alpha \,.\, d\alpha.$$

Man kann, ohne neue Hilfsmittel zu benutzen, noch einen Schritt weiter gehen und die Gleichung

$$\frac{\partial K(x, x_1)}{\partial x} = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi'_n x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

beweisen. Aus der Formel (1) und der Identität (7) des § 33 findet man nämlich, wenn

$$x = \cos\theta, \quad x_1 = \cos\theta_1$$

gesetzt wird, und Ψ dieselbe Bedeutung wie oben hat,

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi'_n x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n} \\ &= \frac{-2\cos\theta}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\theta_1}}\left\{\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right]\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\} \\ (3)\quad &+ \frac{2}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\theta_1}}\left\{\cos\left[(n-\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right]\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\} \\ &= \frac{A}{n}\sin n(\theta+\theta_1) + \frac{B}{n}\sin n(\theta-\theta_1) + \frac{C}{n}\cos n(\theta+\theta_1) \\ &\qquad + \frac{D}{n}\cos n(\theta-\theta_1) + \frac{\Psi}{n^2}, \end{aligned}$$

wobei A, B, C, D von n unabhängig sind und zwischen festen von θ und θ_1 unabhängigen Grenzen liegen, sobald die Größen θ, θ_1, $\pi - \theta$, und $\pi - \theta_1$ über beliebig klein fixierten positiven Grenzen verbleiben.

Nun konvergieren die Reihen

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin nu}{n}, \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos nu}{n}$$

bekanntlich gleichmäßig unter der Voraussetzung

$$c < u < 2\pi - c_1,$$

wenn c und c_1 beliebig kleine positive Werte sind; anderseits sind die Winkel θ und θ_1 in Grenzen von der Form c und $\pi - c_1$ eingeschlossen, so daß eine Beziehung von der Form

$$c < \theta + \theta_1 < 2\pi - c_1$$

gilt. Setzen wir daher noch fest, daß $|x_1 - x|$ und damit $|\theta - \theta_1|$ über einer festen, beliebig kleinen positiven Grenze bleibt, so hat man auch eine Beziehung von der Form

$$c < |\theta - \theta_1| < 2\pi - c_1,$$

und jetzt konvergieren die Reihen

$$\sum_n \frac{\sin(\theta+\theta_1)n}{n}, \quad \sum_n \frac{\cos n(\theta+\theta_1)}{n},$$

$$\sum_n \frac{\sin n(\theta-\theta_1)}{n}, \quad \sum_n \frac{\cos n(\theta-\theta_1)}{n}$$

gleichmäßig. Mithin gilt, wie die Gleichung (3) zeigt, dasselbe von der Reihe

$$\sum_n \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

unter der Annahme

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon, \quad -1+\varepsilon_1 < x_1 < 1-\varepsilon_1, \quad |x_1 - x| > \varepsilon_2,$$

wobei ε, ε_1 und ε_2 beliebig kleine positive Größen sind.

Damit ist die Gleichung

$$\frac{\partial K(x, x_1)}{\partial x} = \sum_n \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

erwiesen; explizite hat sie folgende Formen. Für $x < x_1$ erhält man

$$\frac{1}{2(1-x)} = \sum_n^{1,\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n' x \,.\, P_n x_1;$$

für $x > x_1$

$$\frac{-1}{2(1+x)} = \sum_n^{1,\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n' x \,.\, P_n x_1.$$

Die rechts erhaltene Reihe stellt also eine unstetige Funktion von x_1 dar, die an der Stelle $x_1 = x$ einen Sprung macht gemäß der Gleichung

$$f(x-0) - f(x+0) = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{-1}{2(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Hieraus ersieht man nach der in § 5 angewandten Methode leicht, daß jede Funktion, die mit ihren ersten drei Ableitungen auf dem Grundgebiete stückweise stetig ist, nach den Legendreschen Polynomen entwickelt werden kann.

Fünfter Abschnitt.

Wärmeleitung und Schwingungen in Gebieten von zwei oder drei Dimensionen.

§ 35.

Die Poissonsche Gleichung.

Wir bezeichnen wie früher eine Funktion als stückweise stetig in einem zwei- oder dreidimensionalen Gebiete, wenn dieses in eine endliche Anzahl von Teilgebieten zerfällt, innerhalb deren die Funktion stetig ist, während sie bestimmten Grenzwerten zustrebt, wenn man sich den die Teilgebiete trennenden Linien nähert. Sagen wir, eine Funktion sei mit ihren Ableitungen stückweise stetig, so ist dies so zu verstehen, daß die Ableitungen im Innern der Teilgebiete existieren und in demselben Sinne wie die Funktion stetig sind; in den Trennungslinien selbst wird die Funktion, weil unstetig, keine eindeutig definierten Ableitungen besitzen.

Wir bezeichnen ferner in diesem Abschnitt die Stellen eines Gebietes durch 0, 1, 2, ...; die Elemente des Raumes, der Fläche und der Linie seien $d\tau$, ds, dl. Diese, wie überhaupt die weiter eingeführten von einer oder mehreren Stellen abhängigen Größen werden mit dem Zeiger der Stelle oder der Stellen versehen, auf die sie sich beziehen, so daß z. B. r_{01} die Entfernung der Stellen 0 und 1, $d\tau_1$ das Element, in welchem die Stelle 1 liegt, $f1$ den Wert der Funktion f in der Stelle 1 bedeutet usf. Der Zeiger 0 soll, wo keine Zweideutigkeit entsteht, weggelassen werden, so daß $d\tau$, ds immer Elemente sind, die die jeweils betrachtete Stelle 0 enthalten.

Irgend ein Gebiet von zwei oder drei Dimensionen wird als Grundgebiet bezeichnet und festgehalten und auf dieses beziehe sich immer das unbestimmte Integralzeichen. Das Integrationselement zeigt dann durch die Bezeichnung immer an, wieviel Dimensionen das Grundgebiet besitzt; ist es eben, so bezeichnen wir es durch $\mathfrak{E}$ und die umgrenzende Linie durch $\overline{\mathfrak{E}}$; handelt es sich um ein Raumgebiet, so heißt dasselbe $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{F}$ ist die einschließende Oberfläche. Die auf $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\mathfrak{F}$ bezüglichen Größen wollen wir allgemein überstreichen. Die Grenzlinien des Grundgebietes und der Teilgebiete, die bei stückweise stetigen Funktionen eingeführt werden, seien insoweit frei von Singularitäten, daß diese Gebiete als Integrationsgebiete vielfacher Integrale benutzt werden können.

Vielfach werden wir Potentiale von der Form

$$\int \frac{\varrho\, d\tau}{r_{01}} = F1, \qquad \int \log \frac{1}{r_{01}}\, ds = \Phi 1$$

zu betrachten haben; sie besitzen die gewöhnlich in der Potentialtheorie benutzten Eigenschaften, wenn ϱ im Integrationsgebiete stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Dann sind die Potentiale und ihre ersten Ableitungen im ganzen Raume oder in der ganzen Ebene stetig und ihre Ableitungen können gebildet werden, indem man das Differentiationszeichen dem Integranden einfügt, z. B. wenn x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten sind,

$$\frac{\partial \Phi 1}{\partial x_1} = \int \varrho \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{1}{r_{01}}\, ds.$$

Diese Eigenschaften sind schon gesichert, wenn die Dichtigkeit ϱ nur als stetig vorausgesetzt wird. Hat sie auch stetige erste Ableitungen, so existieren die zweiten Ableitungen des Potentials und sind im Innern des mit Masse belegten Gebietes sowie in jedem von Masse freien Gebiet stetig, so daß die Größe

$$\varDelta_1 F1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}$$

oder auch, wenn $F0 = F$ gesetzt wird, die Größe

$$\varDelta_0 F = \varDelta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

gebildet werden kann und stetig ist. Die Gaussische Integraltransformation erhält dann im Raume die Form

$$\int d\tau . \varDelta F = \int_{\mathfrak{F}} \frac{dF}{dN}\, d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ das Element der Oberfläche $\mathfrak{F}$, N die äußere Normale bedeutet. In der Ebene hat man ähnlich

$$\int ds \,.\, \Delta\Phi = \int_{\mathfrak{C}} dl \frac{d\Phi}{dN}.$$

Alle diese Eigenschaften bleiben offenbar erhalten, wenn die Größe ϱ mit ihren ersten Ableitungen im betrachteten Gebiete stückweise stetig ist. Dann setzen sich nur die Potentiale aus einer endlichen Anzahl solcher, in denen die Dichtigkeit mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, additiv zusammen.

Das wichtigste Hilfsmittel unserer ferneren Untersuchungen ist nun die Poissonsche Formel:

$$\Delta_1 \int \varrho \frac{d\tau}{r_{01}} = -4\pi\varrho_1,$$

$$\Delta_1 \int \varrho \log\left(\frac{1}{r_{01}}\right) ds = -2\pi\varrho_1.$$

Ist ϱ stückweise stetig, so verlieren die Gleichungen nur in den Unstetigkeitslinien ihren Sinn, nähert man sich aber diesen Linien, so streben beide Seiten dieser Gleichungen bestimmten endlichen Grenzwerten zu.

Weshalb gerade diese Formeln für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung sind, erkennt man leicht, indem man das Element des das Potential darstellenden Integrals im Sinne der Theorie der Wärmeleitung deutet.

Im Raume kann die Größe

$$\frac{1}{4\pi r_{01}},$$

in der Ebene die Größe

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}},$$

multipliziert mit einer beliebigen konstanten C, als die stationäre Temperatur angesehen werden, die eine an der Stelle 1 befindliche Wärmequelle hervorruft; die Konstante C nennen wir die Ergiebigkeit der Quelle. Setzen wir $C = 1$, so ist die Wärmemenge, die im ersten Falle durch eine Kugel, im zweiten durch einen Kreis vom Radius r_{01} hindurchtritt, die eine oder andere der Größen

$$-\frac{d}{dr_{01}}\left(\frac{1}{4\pi r_{01}}\right) \cdot 4\pi r_{01}^2 = 1,$$

$$-\frac{d}{dr_{01}}\left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}}\right) \cdot 2\pi r_{01} = 1,$$

multipliziert mit einer Konstanten des leitenden Mittels. Dieselbe Wärmemenge tritt durch eine beliebige geschlossene, die Quelle umschließende Fläche $\mathfrak{F}'$ oder Kurve $\mathfrak{C}'$, die überall stetig gekrümmt seien, und man erhält so die Gleichungen

$$-\int_{\mathfrak{F}'} ds \frac{d}{dN}\left(\frac{1}{4\pi r_{01}}\right) = 1, \quad -\int_{\mathfrak{C}} dl \frac{d}{dN}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right) = 1,$$

Wir lassen nun den Punkt 1 das Grundgebiet durchlaufen und nehmen an, die dieses umschließende Fläche $\mathfrak{F}$ oder Kurve $\mathfrak{C}$ liege innerhalb der Fläche $\mathfrak{F}'$ oder Kurve $\mathfrak{C}'$. In beiden Fällen ergibt sich, da ϱ_1 von der Stelle 0 nicht abhängt,

$$-\int_{\mathfrak{R}} d\tau_1 \int_{\mathfrak{F}'} \frac{d}{dN} \frac{\varrho_1}{4\pi r_{01}} ds = \int_{\mathfrak{R}} \varrho_1 d\tau_1,$$

$$-\int_{\mathfrak{C}} ds_1 \int_{\mathfrak{C}'} \frac{d}{dN}\left(\frac{\varrho_1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right) dl = \int_{\mathfrak{C}} \varrho_1 ds_1.$$

Da nun r_{01} in diesen Integralen stets von Null verschieden bleibt, so kann man die Integrationen vertauschen. Setzt man daher entsprechend beiden Fällen eine der Gleichungen

$$U = \int \frac{\varrho_1 d\tau_1}{4\pi r_{01}}, \quad U = \int \frac{\varrho_1 ds_1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r_{01}}\right)$$

an, so daß U Funktion der Stelle 0 ist, so folgt

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{F}'} ds \frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{R}} \varrho_1 d\tau_1, \quad \int_{\mathfrak{C}'} dl \frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{C}} \varrho_1 ds_1.$$

Dabei kann die Größe U offenbar auch als Temperatur angesehen werden, die erhalten wird, wenn das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{C}$ mit Wärmequellen erfüllt ist, deren Ergiebigkeit ϱ_1 ist; die erhaltenen Gleichungen geben die Wärmemenge, die durch eine das Quellgebiet umfassende Fläche oder Kurve hindurchtritt.

Jetzt gehe die Fläche $\mathfrak{F}'$ stetig in die Fläche $\mathfrak{F}$ über, so daß jeder Punkt der ersteren mit seiner Richtung N stetig in einen Punkt der letzteren mit der zugehörigen äußeren Normale übergeht. Wenn dann die Größe ϱ mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetig ist, so geht nach den oben erwähnten Sätzen der Potentialtheorie die Größe dU/dN stetig in die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ gebildete $\overline{dU/dN}$ über, die ihrerseits eine stetige Funktion des Ortes ist; daraus folgt, daß der Grenzübergang

$$\lim \frac{dU}{dN} = \frac{\overline{dU}}{\overline{dN}}$$

auf der ganzen Fläche $\mathfrak{F}$ gleichmäßig konvergiert, und daß daher die Gleichung

$$\lim \int\limits_{\mathfrak{F}'} ds \frac{dU}{dN} = \int\limits_{\mathfrak{F}} ds \frac{\overline{dU}}{\overline{dN}}$$

gilt. Analog hat man in der Ebene die Gleichung

$$\lim \int\limits_{\mathfrak{C}'} dl \frac{dU}{dN} = \int\limits_{\mathfrak{C}} dl \frac{\overline{dU}}{\overline{dN}},$$

und die Gleichungen (1) ergeben

$$(2) \qquad \int\limits_{\mathfrak{F}} ds \frac{dU}{dN} = -\int\limits_{\mathfrak{K}} \varrho\, d\tau, \qquad \int\limits_{\mathfrak{C}} dl \frac{dU}{dN} = -\int\limits_{\mathfrak{G}} \varrho\, ds.$$

Die Gaussische Integraltransformation lehrt nun

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} \frac{dU}{dN} ds = \int\limits_{\mathfrak{K}} \varDelta U d\tau, \qquad \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{dU}{dN} dl = \int\limits_{\mathfrak{G}} \varDelta U ds;$$

hieraus folgt nach den Gleichungen (2)

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \varDelta U d\tau = -\int\limits_{\mathfrak{K}} \varrho\, d\tau, \qquad \int\limits_{\mathfrak{G}} \varDelta U ds = -\int\limits_{\mathfrak{G}} \varrho\, ds.$$

In diesen Gleichungen können $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$ als beliebige mit Masse erfüllte Gebiete betrachtet werden, die umfassenden Massengebieten eingebettet sind; im Innern der Gebiete $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$ verschwindet $\varDelta V$, wenn die außerhalb ihrer liegenden Massen das Potential V geben, und in den Formeln (2) kann daher U ebensogut das Potential der Gesamtmasse, wie das der in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$ liegenden Teilmasse bedeuten. Man kann daher diese Gebiete, ohne die Bedeutung des Potentials U zu ändern, in einen Punkt zusammenschrumpfen lassen, und da $\varDelta U$ eine stetige Funktion des Ortes im Innern des mit Masse erfüllten Gebietes ist, folgt jetzt die Poissonsche Gleichung

$$\varDelta U = \varDelta \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\varrho_1 d\tau_1}{4\pi r_{01}} = -\varrho, \qquad \varDelta U = \varDelta \int\limits_{\mathfrak{G}} \frac{\varrho_1 ds_1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} = -\varrho,$$

wobei die Zeichen ohne Zeiger sich stets auf die Stelle 0 beziehen.

Die Poissonsche Formel bleibt auch, wovon wir später Gebrauch machen, gültig, wenn ϱ an der Stelle 2 im Gebiet $\mathfrak{E}$ unendlich wird wie $-\log r_{02}$, im Gebiet $\mathfrak{R}$ wie $1/r_{02}$. Dann enthält das Potential U z. B. im Falle des ebenen Gebietes einen Summanden von der Form

$$J = \text{const} \int\limits_{r_{20} < a} d s \log \frac{1}{r_{20}} \log \frac{1}{r_{10}},$$

in dem a eine positive beliebig klein gewählte Konstante und kleiner als r_{12} sei. Dieser Ausdruck kann offenbar als Potential einer Kreisfläche angesehen werden, auf der die Dichtigkeit allein durch den Abstand vom Mittelpunkt bestimmt ist. Da nun das Potential eines unendlich schmalen Kreisrings mit dem Mittelpunkt 2 und konstanter Dichtigkeit im Punkte 1 in der Form const. $\log(1/r_{21})$ geschrieben werden kann, so gilt dasselbe vom Potential der Kreisfläche, wenn die Potentiale der Ringe summiert werden können, oder die Größe J endlich ist. Dies folgt leicht, wenn wir das Element ds in die Form

$$ds = r_{20}\, d r_{20}\, d l \tag{3}$$

bringen, wobei dl ein Element des Kreises mit dem Radius Eins ist, der in der Stelle 2 seinen Mittelpunkt hat; das Integral

$$\int x \log x\, d x$$

ist ja endlich, auch wenn die untere Grenze $x = 0$ genommen wird und $\log r_{10}$ bleibt im Integrationsgebiet endlich.

Aus der angegebenen Form der Größe J folgt unmittelbar

$$\varDelta_1 J = \varDelta_1 \left(\text{const.} \log \frac{1}{r_{21}}\right) = 0.$$

Bildet man also die Größe $\varDelta_1 U 1$, so ergibt die Umgebung der Stelle 2 ebensowenig einen Beitrag, wie irgend ein den Punkt 1 nicht enthaltendes Gebiet, und die Poissonsche Formel bleibt an jeder von 2 verschiedenen Stelle richtig.

Dieselben Schlüsse gelten für den Fall des Gebietes $\mathfrak{R}$, indem man die Formel (3) durch die folgende ersetzt:

$$d\tau = r_{20}^2\, d r_{20}\, d\sigma;$$

dabei bedeutet $d\sigma$ das Element der Kugeloberfläche vom Radius Eins, deren Mittelpunkt 2 ist.

§ 36.

Die Greensche Funktion als Kern einer Integralgleichung.

Die Poissonsche Gleichung bildet die Grundlage für die Theorie der Greenschen Funktion und ihre Anwendung als Kern einer Integralgleichung.

Für die Fläche $\mathfrak{E}$ werde die Greensche Funktion $K(0, 1)$ wie folgt definiert. Allgemein gelte die Differentialgleichung

$$\Delta K(0, 1) = \Delta_0 K(0, 1) = 0;$$

ferner sei

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + M(0, 1),$$

wobei M eine im ganzen Grundgebiet mit ihren Ableitungen aller Ordnungen stetige Funktion von 0 und 1 bedeutet. Endlich sei an der Randlinie $\mathfrak{C}$ eine Randbedingung von einer der Formen

$$(1) \qquad \overline{K(0, 1)} = 0, \quad \overline{\frac{dK(0,1)}{dN} + h\, K(0, 1)} = 0$$

erfüllt, in der h eine positive Konstante und N wie oben die äußere Normale bedeute.

Daß die so definierte Funktion zweier Stellen existiert, folgt in den speziellen Fällen, die wir untersuchen, aus dem expliziten Ausdruck, der jeweils angegeben wird. Für allgemeinere Grundgebiete wird diese Tatsache im siebenten Abschnitt abgeleitet.

Die Funktion $K(0, 1)$ ist die an der Stelle 0 herrschende stationäre Temperatur, die von einer im Punkte 1 befindlichen Quelle herrührt, wenn die Randlinie entweder auf der konstanten Temperatur Null gehalten wird, oder in einer durch h bestimmten Weise die Wärme ausstrahlt. Man kann die Größe $K(0, 1)$ aber auch mechanisch deuten, indem man davon ausgeht, daß die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

in der a eine Konstante bedeutet, für die Verrückung u gilt, wenn wir die Fläche $\mathfrak{E}$ als elastische Membran betrachten, und die Randbedingung ist einfach

$$\bar{u} = 0,$$

wenn die Membran am Rande befestigt ist. Soll nun die Membran eine Ruhelage einnehmen, die von der ursprünglichen verschieden ist, also für u nicht überall den Wert Null ergibt, so hat man die Gleichungen

$$\Delta u = 0, \quad \bar{u} = 0, \tag{2}$$

die nur dann eine nicht identisch verschwindende Lösung haben, wenn u an einer Stelle 1 unstetig ist. Als einfachste Funktion, die die erste Gleichung (2) erfüllt und unstetig ist, bietet sich der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}}$$

dar; versuchen wir, bei der Größe u diese Unstetigkeit anzubringen, so führen die Gleichungen (2) genau auf die vorhin definierte Größe $K(0, 1)$. Als Verrückung könnte sie auftreten, wenn man die Membran im Punkte 1 mit einer Nadel aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt; sie erhält dann in der Umgebung dieses Punktes eine dornartige Gestalt. Jedenfalls aber hätte man eine Verrückung und eine neue Gleichgewichtslage hergestellt, die zu den in § 8 betrachteten gehört. Es ist also nach den dort durchgeführten Erwägungen zu erwarten, daß die bei der Schwingung der Membran auftretenden Eigenfunktionen eine homogene Integralgleichung erfüllen, deren Kern die Größe $K(0, 1)$ ist, und das bestätigt sich in der Tat.

Um dies einzusehen, erinnern wir daran, daß zunächst die Größe $K(0, 1)$ leicht als symmetrisch bezüglich der beiden Stellen 0 und 1 erkannt wird. Beschreibt man nämlich um die Stellen 1 und 2 beliebig kleine dem Innern der Fläche $\mathfrak{C}$ angehörige Kreislinien und wendet auf das Gebiet $\mathfrak{C}$, aus dem diese Kreise ausgeschieden sind, die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) = \Delta_0 K(0, 2) = 0,$$

$$\int ds \{K(0, 1) \Delta K(0, 2) - K(0, 2) \Delta K(0, 1)\} = 0$$

an, so findet man nach dem Greenschen Satze

$$\int dl \left[K(0, 1) \frac{dK(0, 2)}{dN} - K(0, 2) \frac{dK(0, 1)}{dN}\right] = 0, \tag{3}$$

wobei über $\mathfrak{C}$ und die beiden Kreislinien zu integrieren ist, und an letzteren die Gleichungen

$$\frac{d}{dN} = -\frac{d}{dr_{01}}, \quad \frac{d}{dN} = -\frac{d}{dr_{02}}$$

gelten. Läßt man die Radien der Kreise unendlich abnehmen, so kann man auf ihnen mit immer wachsender Annäherung setzen

$$\frac{dK(0,2)}{dN} = -\frac{d}{d r_{02}}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{02}}\right) = \frac{1}{2\pi r_{02}},$$
$$\frac{dK(0,1)}{dN} = -\frac{d}{d r_{01}}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right) = \frac{1}{2\pi r_{01}},$$

und der Beitrag der Kreislinien zu dem Integral (3) nähert sich der Grenze

$$K(2,1) - K(1,2). \tag{4}$$

An der Kurve $\mathfrak{C}$ aber gilt die Gleichung

$$K(0,1)\frac{dK(0,2)}{dN} - K(0,2)\frac{dK(0,1)}{dN} = 0,$$

da $K(0, 1)$ und $K(0, 2)$ als Funktionen der Stelle 0 dieselbe der Grenzbedingungen (1) erfüllen. Somit reduziert sich das Integral (3) schließlich auf die Differenz (4) und man findet

$$K(1,2) = K(2,1).$$

Nun sei die Aufgabe vorgelegt, die Wärmeleitung in der Fläche $\mathfrak{S}$ oder die Schwingungen der als Membran gedachten Fläche $\mathfrak{S}$ zu untersuchen. Dann hat man für die Temperatur im ersten Falle die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \varDelta u,$$

für die Verrückung im zweiten Falle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varDelta u,$$

wobei a^2 eine Konstante bedeutet, und es ist eine der Randbedingungen

$$\bar{u} = 0, \quad \frac{du}{dN} + hu = 0 \quad (h > 0)$$

vorgeschrieben; der Fall $h = 0$, in dem das Randgebiet adiatherman bedeckt ist, erfordert besondere Methoden nach Analogie des § 15 und werde zunächst ausgeschlossen.

Versucht man, die an die Größe u gestellten Forderungen zu erfüllen, indem man u in ein Produkt aus einem nur von der Zeit und einem nur vom Punkte 0 abhängigen Faktor zerlegt, so ergibt sich für letzteren die Gleichung

$$\varDelta \varphi + \lambda \varphi = 0,$$

in der λ eine unbekannte Konstante ist, und eine der Randbedingungen

$$\overline{\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dN} + h\varphi = 0.}$$

Versteht man ferner unter $K(0,1)$ diejenige Greensche Funktion, die derselben Randbedingung wie die Größe φ unterliegt, so gilt die Beziehung

$$\overline{\varphi \frac{dK(0,1)}{dN} - K(0,1)\frac{d\varphi}{dN} = 0.}$$

Berücksichtigt man daher die Gleichung

$$\varDelta K(0,1) = 0$$

und bildet das Integral

$$\begin{aligned} -\lambda \int K(0,1)\,\varphi\, ds &= \int [K(0,1)\varDelta\varphi - \varphi\varDelta K(0,1)]\,ds \\ (5) \qquad &= \int \left[K(0,1)\frac{d\varphi}{dN} - \varphi\frac{dK(0,1)}{dN}\right] dl \end{aligned}$$

über das Gebiet $\mathfrak{G}$ mit Ausschluß eines Kreises $\mathfrak{K}$ um den Mittelpunkt 1, indem man durch N stets die äußere Normale dieses Gebietes bezeichnet, so kann man rechts die Integration auf die Kreislinie $\mathfrak{K}$ beschränken. Läßt man den Radius derselben abnehmen, so erhält man die angenäherten Gleichungen

$$K(0,1) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}, \quad \frac{dK(0,1)}{dN} = -\frac{dK(0,1)}{dr_{01}} = \frac{1}{2\pi r_{01}},$$

und in der Grenze erhält man aus der Gleichung (5)

$$(6) \qquad \lambda \int K(0,1)\,\varphi 0 . ds = \varphi 1,$$

womit die erwartete Integralgleichung abgeleitet ist.

Ist umgekehrt $\varphi 0$ irgend eine im Grundgebiet stetige Lösung dieser Gleichung, so schreiben wir sie in der Form

$$(7) \qquad \frac{\varphi 1}{\lambda} = \int \frac{\varphi 0}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\,ds + \int \varphi 0 . M(0,1)\,ds.$$

Dann hat zunächst der zweite Summand der rechten Seite stetige erste Ableitungen, da dies von $M(0,1)$ ebenso wie von der Greenschen Funktion $K(0,1)$ außerhalb der singulären Stelle gilt. Der erste Summand der rechten Seite hat aber ebenfalls stetige erste Ableitungen, da er als logarithmisches Potential mit der Dichtigkeit $\varphi 0/2\pi$ angesehen werden kann, die ersten Ableitungen des Potentials aber, wie in § 35 erwähnt wurde, schon stetig sind, wenn die Dichtigkeit nur als stetig vorausgesetzt wird. Da somit die Größe $\varphi\,0$ stetige erste Ableitungen besitzt kann auf die rechte Seite der Gleichung (7) die Poissonsche Formel angewandt werden, und da offenbar die Gleichung

$$\Delta_1 M(0, 1) = \Delta_1 K(0, 1) = 0$$

gilt, erhält man aus der Gleichung (7)

$$\Delta_1 \varphi\, 1 = -\lambda\, \varphi\, 1, \qquad \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

Daß ferner die Funktion φ dieselbe Randbedingung erfüllt, wie die Greensche Funktion, zeigen die Gleichungen (6), (7) und die in § 35 angegebene Form der ersten Ableitungen des Potentials unmittelbar.

Auf die Gleichung (6) sind nun freilich die allgemeinen im ersten Abschnitt aufgestellten Sätze über Integralgleichungen erst anzuwenden, wenn der Kern, der im Grundgebiet unendlich wird, als brauchbar unstetig im Sinne des § 19 nachgewiesen ist. Aber eine Haupteigenschaft der Eigenfunktionen ist leicht nachzuweisen, daß nämlich zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige zueinander orthogonal sind. In der Tat erfüllen irgend zwei Eigenfunktionen die Differentialgleichungen

$$\lambda_n \varphi_n + \Delta\varphi_n = 0, \qquad \lambda_m \varphi_m + \Delta\varphi_m = 0;$$

aus diesen folgt sofort

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int \varphi_n \varphi_m\, ds + \int (\varphi_n \Delta\varphi_m - \varphi_m \Delta\varphi_n)\, ds = 0.$$

Formt man das letzte Integral nach dem Greenschen Satze um und bedenkt, daß wegen der allen Eigenfunktionen gemeinsamen Randbedingung die Gleichung

$$\overline{\varphi_n \frac{d\varphi_m}{dN} - \varphi_m \frac{d\varphi_n}{dN}} = 0$$

gilt, so folgt

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int \varphi_m \varphi_n\, ds = 0, \tag{8}$$

und, da $\lambda_m - \lambda_n$ nicht verschwindet,

$$\int \varphi_n \varphi_m\, ds = 0,$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Hieraus kann man weiter ableiten, daß die Eigenwerte reell und positiv sein müssen. Denn die Greensche Formel ist auch auf komplexe Werte der Funktionen des Ortes anzuwenden, wie die Identität

$$\begin{aligned}&\int ds\,[(\varphi+\Phi i)\Delta(\psi+\Psi i)-(\psi+\Psi i)\Delta(\varphi+\Phi i)]\\ =&\int ds\,(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)-\int ds\,(\Phi\Delta\Psi-\Psi\Delta\Phi)\\ &+i\int ds\,(\varphi\Delta\Psi-\Psi\Delta\varphi)+i\int ds\,(\Phi\Delta\psi-\psi\Delta\Phi)\end{aligned}$$

zeigt in Verbindung mit derjenigen, die entsteht, wenn man ds und Δ durch dl und d/dN ersetzt. Wäre nun ein komplexer Eigenwert vorhanden, so wären auch die ihm und der zugehörigen Eigenfunktion konjugierten Größen Eigenwert und Eigenfunktion; wendet man auf die beiden Eigenfunktionen die obige Argumentation an, so erhält man wiederum die Gleichung (8), in der φ_n und φ_m konjugiert imaginäre Größen sind, und λ_m von λ_n verschieden ist. Das ist aber unmöglich, wenn die Eigenfunktionen nicht identisch verschwinden. Die Eigenwerte sind also reell.

Benutzt man endlich die aus der Gaussischen Integraltransformation folgende Gleichung

$$\int ds\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]+\int\varphi\Delta\varphi\,ds=\int_{\mathfrak{G}}\varphi\frac{d\varphi}{dN}dl,$$

indem man für φ eine Eigenfunktion nimmt, so folgt aus den Gleichungen

$$\Delta\varphi+\lambda\varphi=0,\quad \overline{\frac{d\varphi}{dN}+h\varphi}=0$$

unmittelbar

$$\int ds\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=-h\int_{\mathfrak{G}}\varphi^2\,dl+\lambda\int\varphi^2\,ds,$$

woraus, da die Konstante h positiv ist, hervorgeht, daß λ nicht negativ sein kann. Die Eigenwerte sind also positiv.

Die ganze Schlußreihe dieses Paragraphen überträgt sich ohne weiteres auf das Gebiet $\mathfrak{R}$, indem man $\log 1/r_{01}$ überall durch $1/r_{01}$ ersetzt.

§ 37.

Quellenmäßige Funktionen; der ausgeartete Fall.

Wenn $f0$ eine mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetige Funktion des Ortes ist, so hat die Größe

$$F1=\int K(0,1)f0.ds$$

den Charakter eines Potentials, ist also mit ihren ersten und zweiten Ableitungen im Grundgebiet stetig; daß sie die Randbedingung der Greenschen Funktion $K(0, 1)$ erfüllt, zeigt die in § 35 angegebene Form der ersten Ableitungen eines Potentials. Wir sagen, $F1$ sei quellenmäßig dargestellt oder kurz quellenmäßig.

Zerlegt man diese Größe auf Grund der Gleichung

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + M(0, 1),$$

so ergeben die in § 36 an die Gleichung (7) geknüpften Schlüsse

$$\begin{aligned} \varDelta_1 F1 &= \varDelta_1 \int \frac{f0}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} \, ds - \varDelta_1 \int M(0, 1) f0 . ds \\ &= \varDelta_1 \int \frac{f0}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} \, ds, \end{aligned}$$

also, da bei den vorausgesetzten Eigenschaften der Größe $f0$ die Poissonsche Gleichung angewandt werden kann,

$$\varDelta_1 F1 = -f1$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\varDelta F0 = -f0.$$

Jetzt sei $\varPhi$ eine im Grundgebiet stetige Funktion des Ortes, die stetige erste und stückweise stetige zweite und dritte Ableitungen besitzt und die Randbedingung der Greenschen Funktion $K(0, 1)$ erfüllt. Dann ist die Größe

$$f0 = -\varDelta \varPhi 0$$

mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetig; bildet man also mit ihr die oben eingeführte Größe F, so findet man

$$\varDelta F0 = -f0, \quad \varDelta (F - \varPhi) = 0$$

und die Größe $F - \varPhi$ erfüllt ebenso wie F und $\varPhi$ eine der Gleichungen

$$\overline{F - \varPhi} = 0, \quad \overline{F - \varPhi + h \frac{d(F - \varPhi)}{dN}} = 0.$$

Nun gilt die Transformation

$$\int u \varDelta u \, ds + \int ds \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = \int_{\mathfrak{C}} u \frac{du}{dN} \, dl,$$

in der x, y rechtwinkelige Koordinaten bedeuten, sobald die Größe u mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, also z. B., wenn man $u = F - \Phi$ setzt; hieraus folgt je nach der Form der geltenden Randbedingung

$$(1)\quad \int \left[\left(\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial y}\right)^2\right] ds = -h \int_{\mathfrak{C}} (\Phi - F)^2 \, dl,$$

oder

$$\int \left[\left(\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial y}\right)^2\right] ds = 0,$$

also in jedem Falle für das ganze Grundgebiet $\mathfrak{G}$

$$(2)\quad \Phi 1 = F 1 = \int K(0, 1) f 0 \, . \, ds.$$

Eine Funktion von den für Φ vorausgesetzten Eigenschaften ist also quellenmäßig darstellbar.

Wie die durchgeführten Betrachtungen zu modifizieren sind, wenn die Randbedingung die Form

$$\overline{\frac{du}{dN}} = 0$$

hat, ist leicht zu übersehen. Man findet dann offenbar auch

$$\overline{\frac{d\varphi}{dN}} = 0, \qquad \varDelta \varphi + \lambda \varphi = 0,$$

und hieraus mittels des Greenschen Satzes

$$\int \varDelta \varphi \, ds = \int_{\mathfrak{C}} \frac{d\varphi}{dN} \, dl = 0,$$

also

$$(3)\quad \int \varphi \, ds = 0.$$

Um den Kern zu bestimmen, setzen wir nach § 15 die Gleichung

$$\varDelta K(0, 1) = a$$

an, wobei a eine Konstante bedeutet; denn ein möglicher stationärer Zustand wird erhalten, indem man die Temperatur einer beliebigen Konstanten gleich setzt; an Singularitäten werde von der Größe $K(0, 1)$ dasselbe gefordert, wie von der oben ebenso bezeichneten; außerdem kann die Gleichung

$$\int K(0, 1) \, ds = 0$$

angesetzt werden, da in $K(0, 1)$ offenbar eine additive Konstante verfügbar bleibt. Dann läßt sich die Größe $K(0, 1)$ ganz ähnlich wie oben als symmetrisch erweisen; die Gleichung (5) des § 36 bleibt richtig und aus ihr folgt wie dort die Integralgleichung (6), da das mit dem Faktor a behaftete Glied der Gleichung (3) zufolge wegfällt. Quellenmäßig darstellbar ist ferner jede Funktion $F\,0$, die stetige erste und stückweise stetige zweite und dritte Ableitungen besitzt, die Randbedingung

$$\overline{\frac{dF}{dN}} = 0$$

erfüllt und außerdem der Gleichung

$$\int F ds = 0$$

unterworfen ist.

Deutet man die Singularität der Funktion $K(0, 1)$ als Quelle im Punkte 1, so ist deren Ergiebigkeit, wenn man über einen um den Punkt 1 beschriebenen Kreis $\mathfrak{K}$ integriert

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{dK(0, 1)}{dN}\, dl,$$

wobei die Normale N nach dem Innern der Kurve $\mathfrak{K}$ hingerichtet ist; offenbar kann man das Integral über die Randlinie, an der die Größe

$$\overline{\frac{dK(0, 1)}{dN}}$$

verschwindet, hinzufügen und erhält so als Ergiebigkeit

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{dK(0, 1)}{dN}\, dl + \int\limits_{\mathfrak{G}} \overline{\frac{dK(0, 1)}{dN}}\, dl = \int\limits_{\mathfrak{G}'} \varDelta K(0, 1)\, ds,$$

wobei rechts über das Gebiet $\mathfrak{G}'$ integriert wird, das vom Grundgebiet übrig bleibt, wenn die vom Kreise $\mathfrak{K}$ umfaßte Fläche ausgeschlossen wird; links ist dann durch N überall die äußere Normale dieses Gebiets bezeichnet.

Läßt man den Kreis $\mathfrak{K}$ zusammenschrumpfen, so erhält man rechts den Wert

$$a \int ds.$$

Ist daher die Ergiebigkeit Eins, so hat man für a den reziproken Wert des Areals der Fläche $\mathfrak{G}$ zu setzen. Dann ist $-K(0, 1)$ die stationäre Temperatur, die von einer im Punkte 1 befindlichen Quelle von der Ergiebigkeit -1 verursacht wird, wenn in jedem Element der Fläche $\mathfrak{G}$ eine gewisse konstante Wärmemenge etwa durch einen galvanischen Strom als Joulesche Wärme erzeugt wird.

Die Existenz der Greenschen Funktion ist hier wie im Falle des vorigen Paragraphen zunächst noch zweifelhaft; sie wird in den Einzelfällen, die wir betrachten, durch besondere Entwicklungen erwiesen, kann aber natürlich auch aus den allgemeinen Existenztheoremen der Potentialtheorie erschlossen werden, die wir im siebenten Abschnitt beweisen wollen.

Endlich braucht kaum erwähnt zu werden, daß auch die Entwicklungen dieses Paragraphen auf das räumliche Problem übertragen werden können, indem man die räumlichen Greenschen Funktionen benutzt und beim Integrieren an Stelle des Kreises $\mathfrak{K}$ eine Kugel aus dem Grundgebiete ausschließt.

§ 38.

Eigenfunktionen und Greensche Funktion des Rechtecks als schwingender Membran oder wärmeleitender Platte.

Das Randwertproblem des § 36 ist für das Rechteck als Grundgebiet leicht zu lösen. Wir betrachten den Fall, daß die gesuchte Funktion auf dem Umfange verschwindet, wie es bei einer schwingenden Membran selbstverständlich ist; bei der wärmeleitenden Platte gilt diese Annahme, wenn der Umfang auf der konstanten Temperatur Null gehalten wird. Das Grundgebiet sei begrenzt von den Geraden:

$$x = 0, \qquad x = b,$$
$$y = 0, \qquad y = c.$$

Man fordert dann die folgenden Gleichungen:

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0, y) = \varphi(b, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, c) = 0;$$

diese werden durch die Annahme

$$\varphi = \sin\frac{m\pi x}{b} \cdot \sin\frac{n\pi y}{c}$$

erfüllt, wenn m und n positive ganze Zahlen sind; als zugehöriger Eigenwert ergibt sich

$$\lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right).$$

Integriert man das Quadrat des Ausdrucks φ über das Grundgebiet, so erhält man

$$\int_0^b \sin^2\frac{m\pi x}{b}\,dx \cdot \int_0^c \sin^2\frac{n\pi y}{c}\,dy = \frac{bc}{4};$$

als normierte Eigenfunktionen können also die Ausdrücke

$$\varphi_{mn}0 = \frac{2}{\sqrt{bc}} \sin\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi y}{c}$$

gelten, indem wir, wie bisher, durch 0 den Punkt mit den Koordinaten x, y ohne Zeiger bezeichnen. Daß dies System von Eigenfunktionen vollständig ist, stellt sich im Laufe der Untersuchung heraus, und zwar dadurch, daß sich die bilineare Summe

$$\sum_{m,n}^{1,\infty} \frac{\varphi_{mn}0 \cdot \varphi_{mn}1}{\lambda_{mn}} = \frac{4}{bc} \sum_{m,n}^{1,\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)},$$

die wir auch durch S bezeichnen wollen, der in § 36 definierten Greenschen Funktion $K(0, 1)$ gleich erweist.

Um diese Summation in einer gewissen Folge der Glieder durchzuführen, gehen wir von der Fourierschen Entwicklung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\pi \operatorname{Cof} \mu\alpha}{2\mu \operatorname{Sin} \mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu \cos\nu\alpha}{\nu^2+\mu^2}$$

aus, die, wenn μ eine beliebige reelle Konstante bedeutet, in dem Intervall

$$-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$$

gilt, und summieren mit ihrer Hilfe einen Bestandteil der bilinearen Summe:

$$\text{(2)} \qquad 2\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2} = \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}$$

$$-\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\cos\frac{n\pi(y+y_1)}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2} = \sum_{n}^{1,\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{c}(c-y_1+y)}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}$$

$$-\sum_{n}^{1,\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{c}(y+y_1-c)}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}.$$

Hier kann die zweite Summe stets durch die Formel (1) summiert werden, da die Größen y und y_1 der Strecke von 0 bis c angehören, mithin die Ungleichung

$$-\pi \leqq \frac{\pi(y+y_1-c)}{c} \leqq +\pi$$

gilt. Die erste Summe kann aber nur dann der Formel (1) subsumiert werden, wenn $y_1 \geqq y$; denn nur dann ist

$$\pi \geqq \frac{\pi(c - y_1 + y)}{c} \geqq -\pi.$$

Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Formel (1), in der

$$\mu = \frac{mc}{b}$$

gesetzt wird, sofort

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2 + \left(\frac{mc}{b}\right)^2} = \frac{\pi \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m\pi}{b}(c - y_1 + y)}{\frac{2mc}{b}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{mc\pi}{b}} - \frac{\pi \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m\pi}{b}(c - y - y_1)}{\frac{2mc}{b}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{mc\pi}{b}},$$

und hieraus mittels der Additionsformeln der hyperbolischen Funktionen

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2 + \left(\frac{mc}{b}\right)^2} = \frac{\pi \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi}{b}(c - y_1)\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi y}{b}}{\frac{mc}{b}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{mc\pi}{b}}; \qquad y_1 \geqq y.$$

Da diese Größe aber in y und y_1 symmetrisch ist, so ergibt sich für den Fall $y_1 \leqq y$ sofort die weitere Formel

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2 + \left(\frac{mc}{b}\right)^2} = \frac{\pi \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi}{b}(c - y)\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi y_1}{b}}{\frac{mc}{b}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{mc\pi}{b}}; \qquad y \geqq y_1.$$

Hiernach kann die bilineare Summe S bei der Annahme $y \geqq y_1$ in folgender Form geschrieben werden:

$$S = \frac{2}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi}{b}(c - y)\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m\pi y_1}{b}\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi x_1}{b}}{m\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{mc\pi}{b}}$$

Diese Summe ist der reelle Teil der Größe

$$W = \frac{2}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}}\left\{\sin\frac{m\pi x}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi(c-y)}{b}\right.$$

$$\left.-i\cos\frac{m\pi x}{b}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{m\pi(c-y)}{b}\right\},$$

die auf Grund der Beziehungen und Bezeichnungen

$$\mathfrak{Cof}\,x = \cos xi, \qquad \mathfrak{Sin}\,x = -i\sin ix, \qquad z = x + yi,$$

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad \bar z_1 = x_1 - y_1 i, \qquad q = e^{-\frac{\pi c}{b}}$$

auch in den folgenden Formen geschrieben werden kann:

$$W = -\frac{2i}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}\cos\frac{m\pi}{b}(x+iy-ic)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi}{b}(x_1+y_1 i)\cos\frac{m\pi}{b}(x+yi-ci)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi}{b}(x_1-y_1 i)\cos\frac{m\pi}{b}(x+yi-ci)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi}{b}(z+z_1-ic)+\cos\frac{m\pi}{b}(z-z_1-ic)}{m(q^{-m}-q^m)}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi}{b}(z+\bar z_1-ic)+\cos\frac{m\pi}{b}(z-\bar z_1-ic)}{m(q^{-m}-q^m)},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z+z_1-ic)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z-z_1-ic)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z+\bar z_1-ic)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z-\bar z_1-ic).$$

§ 39.

Summierung der erhaltenen Reihe und Verifikation.

Die Reihe W läßt sich summieren mittels einer schon bei Jacobi vorkommenden Formel

$$(1)\qquad \log \vartheta_0(v, q) = Q - 2 \sum_m^{1,\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \frac{\cos 2 m v \pi}{m},$$

in der Q eine von v unabhängige Größe bedeutet und gesetzt ist

$$\vartheta_0(v, q) = 1 - 2q\cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi - 2q^9 \cos 6v\pi + \cdots$$

Die Reihe für $\log \vartheta_0(v, q)$ konvergiert, wenn

$$v = \xi + \eta i$$

gesetzt wird und ξ und η reelle Größen sind, unter der Voraussetzung

$$(2)\qquad |\eta| < \frac{\log q}{2\pi},$$

die erfüllt ist, wenn für v eine der Größen

$$(3)\qquad \frac{z \pm z_1 - ic}{2b}, \qquad \frac{z \pm \bar{z}_1 - ic}{2b},$$

also für η eine der Größen

$$\frac{y \pm y_1 - c}{2b}$$

gesetzt und die Annahme $y > y_1$ festgehalten wird. Denn es ist zu setzen

$$\frac{\log q}{2\pi} = -\frac{c}{2b},$$

die Größen y und y_1 aber liegen in der Strecke von 0 bis c.

Bleibt ferner die Differenz $y - y_1$ über einer festen positiven Grenze, so gilt dasselbe von der Differenz beider Seiten der Ungleichung (2), und die Reihe $\log \vartheta_0 v$, mit den Argumenten (3) genommen, konvergiert gleichmäßig. Offenbar konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig in jedem Gebiete, in dem mindestens eine der Stellen 0 und 1 vom Rande um mehr als ein festes endliches Wegstück entfernt bleibt.

Hiernach kann man setzen

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_0\left(\frac{z+\bar{z}_1 - ic}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z-\bar{z}_1 - ic}{2b}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z+z_1 - ic}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z-z_1 - ic}{2b}\right)},$$

oder, indem man die Formeln

$$\vartheta_0\left(v + \frac{\log q}{2\pi i}\right) = i q^{-1/4} e^{-i\pi v}\, \vartheta_1(v), \quad \frac{\log q}{2\pi} = -\frac{c}{2b}$$

benutzt,

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)}.$$

und es ist leicht zu übersehen, daß die Größe

$$K(0,1) = \Re\mathfrak{e}\, W,$$

gleichviel ob die bisher geltende Annahme $y > y_1$ festgehalten wird oder nicht, die gesuchte Greensche Funktion des Grundgebietes ist.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß die Funktion $K(0,1)$ verschwindet, wenn der Punkt 0 auf dem Rande des Grundgebietes liegt. Setzt man z. B. $y = 0$, so ist

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{x+x_1-y_1 i}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{x-x_1+y_1 i}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x+x_1+y_1 i}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{x-x_1-y_1 i}{2b}\right)},$$

und unter dem Zeichen log steht der Quotient zweier konjugiert komplexer Größen, also eine Größe vom absoluten Betrage 1, deren Logarithmus Null oder rein imaginär ist; $\Re\mathfrak{e}\, W$ verschwindet also. Setzt man ferner $x = 0$, so erhält man

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{y i+x_1-y_1 i}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{y i-x_1+y_1 i}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{y i+x_1+y_1 i}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{y i-x_1-y_1 i}{2b}\right)}$$

und unter dem Zeichen log steht wiederum eine Größe vom absoluten Betrage 1.

Vermehrt man ferner in dem Ausdruck W die Größe z um b oder ci, d. h. x um b oder y um c, so erhält man aus den Formeln, die die vier Funktionen ϑ ineinander überführen

$$W(z+b) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_2\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)},$$

$$W(z+ic) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_0\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt wie oben, daß der reelle Teil der Größen $W(z+b)$, $W(z+ic)$ verschwindet, wenn man $x=0$ oder $y=0$ setzt; das bedeutet aber, daß die Größen $\Re W$ verschwinden, wenn man $x=b$ oder $y=c$ setzt, womit die ausgesprochene Behauptung, $K(0, 1)$ verschwinde, wenn der Punkt 0 dem Rande des Grundgebietes angehört, vollständig erwiesen ist.

Was ferner die Singularität der Größe $K(0,1)$ betrifft, die auftritt, wenn die Punkte 0 und 1 zusammenrücken, so sieht man zunächst, daß die Größe W unendlich wird wie

$$-\frac{1}{2\pi}\log(z-z_1),$$

d. h. sich von dieser Größe um eine an der Stelle $z=z_1$ reguläre analytische Funktion von z unterscheidet. Nun gilt die Gleichung

$$\Re\left[-\frac{1}{2\pi}\log(z-z_1)\right]=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}};$$

die Größe $K(0, 1)=\Re W$ hat also genau die von der Greenschen Funktion geforderte Singularität.

Endlich ist ohne weiteres klar, daß die Größe $K(0,1)$ als reeller Teil einer analytischen Funktion die Laplacesche Gleichung

$$\Delta K(0,1)=0$$

erfüllt; hieraus und aus den abgeleiteten Singularitäten und Randeigenschaften folgt nach § 36 die Symmetriegleichung

$$K(0,1)=K(1,0)$$

und damit auch die Gleichung

$$\Delta_1 K(0,1)=0.$$

Hiermit ist die Größe $K(0, 1)$ endgültig als die gesuchte Greensche Funktion nachgewiesen und die allgemeinen Sätze des § 36 zeigen, daß die Funktionen φ_{mn} Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi_{mn}1=\lambda_{mn}\int_{\mathfrak{G}}K(0,1)\,\varphi_{mn}0\,.\,ds$$

sind.

Die für diese Größe geltende Darstellung durch die bilineare Doppelreihe

$$\sum\sum\frac{\varphi_{mn}0\cdot\varphi_{mn}1}{\lambda_{mn}}$$

ist zunächst in jedem Gebiete gleichmäßig konvergent, in dem die Differenz $y-y_1$ über einer festen positiven Grenze verbleibt. Denn unter dieser Voraussetzung konvergieren die aus der Formel (1) abgeleiteten Summen gleichmäßig, wie bei dieser schon bemerkt ist; dasselbe gilt stets von den Summen (2) des § 38, die auch bezüglich der Zahl m gleichmäßig konvergieren. Stellt man daher die bilineare Reihe mit leicht verständlicher Symbolik durch die Doppelsumme

$$\sum_m^{1,\infty} B_m = \sum_m^{1,\infty} \sum_n^{1,\infty} A_{mn}$$

dar, so kann zunächst die links stehende Reihe mit vorgeschriebenem Grade der Genauigkeit durch

$$\sum_m^{1,m_1} B_m$$

ersetzt werden, wobei m_1 durch den Genauigkeitsgrad bestimmt ist, und ohne die erreichte Genauigkeit wieder zu vermindern, vergrößert werden darf. Sodann kann in jedem dieser m_1 Glieder für B_m die Summe

$$\sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

gesetzt und n_1 so gewählt werden, daß die Differenz

$$\sum_m^{1,m_1} B_m - \sum_m^{1,m_1} \sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt und, wenn n_1 vergrößert wird, liegen bleibt. Damit ist erreicht, daß für das ganze betrachtete Gebiet die Differenz der Größen

$$\sum_m^{1,\infty} B_m, \quad \sum_m^{1,m_1} \sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

absolut genommen unter der Summe zweier vorgeschriebenen positiven Größen liegt, also gleichmäßig klein bleibt. Die bilineare Reihe konvergiert also gleichmäßig in jedem Gebiet, indem die Differenz $y - y_1$ über einer positiven Grenze verbleibt.

Da nun die Formeln (2) des § 38 in den Stellen 0 und 1 symmetrisch sind, kann man eine der durchgeführten völlig analoge Schlußreihe für den Fall $y < y_1$ entwickeln und aus dieser insbesondere das Korollar ableiten, daß auch, wenn die Differenz $y_1 - y$ über einer positiven Schranke verbleibt, die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert.

Weiter ist aus der Gestalt der Eigenfunktionen ersichtlich, daß die Variablen x und y keine wesentlich verschiedene Rolle spielen; die bilineare Reihe konvergiert also auch gleichmäßig, wenn eine der Differenzen $x - x_1$ und $x_1 - x$ über einer positiven Grenze verbleibt. Da in allen endlichen Reihen, die die Größe

$K(0, 1)$ mit gleichmäßiger Genauigkeit darstellen, die Zahlen m_1, n_1 und die ihnen analogen vergrößert werden dürfen, schließt man aus den erhaltenen Resultaten leicht, daß die bilineare Reihe in jedem Gebiet gleichmäßig konvergiert, in dem der Abstand der Stelle 0 von der festen Stelle 1 über einer positiven Grenze bleibt.

Dieselben Betrachtungen gelten auch, wie man leicht sieht, für die Reihen, die aus den unter (1) und in § 38 unter (1) angeführten entstehen, indem man gliedweise differenziert; handelt es sich doch um analytische Funktionen, die im Konvergenzgebiete der Reihen regulär sind. Daraus folgt, daß die bilineare Reihe in Gebieten der bezeichneten Art gliedweise differenziert werden darf.

§ 40.

Überblick über einige verwandte Fälle.

Nach der im vorigen Paragraphen benutzten Methode lassen sich noch einige ähnliche Aufgaben behandeln, bei denen nur die Randbedingungen andere sind.

Es seien zunächst die Seiten $y = 0$ und $y = c$ auf der Temperatur Null gehalten, die anderen beiden Seiten adiatherman bedeckt. Dann gelten für die Eigenfunktionen die Bedingungen

$$\varphi\Big|^{y=0} = \varphi\Big|^{y=c} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|^{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|^{x=b} = 0$$

und man findet die normierten Ausdrücke

$$\varphi_{mn}0 = \frac{2}{\sqrt{bc}} \cos\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi y}{c}, \quad \varphi_{0n} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \sin\frac{n\pi y}{c},$$

zu denen die Eigenwerte

$$\lambda_{mn} = \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}, \quad \lambda_{0n} = \frac{n^2\pi^2}{c^2}$$

gehören. Man erhält also folgende bilineare Formel:

$$K(0, 1) = \frac{2}{bc} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{4}{bc} \sum_m^{1,\infty} \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b} \cos\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}},$$

und vermittelst der oben gebrauchten Formeln, indem man nach n summiert, für $y > y_1$

$$K(0,1) = \frac{y_1(c-y)}{bc}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\frac{m\pi}{b}(c-y)\,\mathfrak{Sin}\frac{m\pi y_1}{b}}{m\,\mathfrak{Sin}\frac{m\pi c}{b}}$$

und für $y < y_1$ den Ausdruck, der aus dem hingeschriebenen entsteht, indem man (x, y) und (x_1, y_1) vertauscht.

Hieraus folgt weiter wie oben

$$K(0,1) = \Re e\left[\frac{i y_1 z}{bc} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)}\right],$$

und in der ϑ-Funktion ist wiederum $q = e^{-\frac{\pi c}{b}}$ zu setzen.

Läßt man ferner drei Seiten des Rechtecks adiatherman bedeckt sein und hält die Seite $x = 0$ auf der Temperatur Null, so haben die Eigenfunktionen die Gestalt

$$\text{const.}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{c},$$

und für die Greensche Funktion findet man

$$\frac{1}{2\pi}\Re e\log\frac{\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}.$$

Hält man umgekehrt drei Seiten des Rechtecks auf der Temperatur Null, während die Seite $x = 0$ adiatherman bedeckt wird, so haben die Eigenfunktionen die Form

$$\text{const.}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c},$$

und man findet die Greensche Funktion

$$K(0,1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Re e\log\frac{\vartheta_2\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)};$$

in diesem und dem vorigen Falle ist zu setzen

$$q = e^{-\frac{\pi c}{2b}}.$$

Sind endlich die zusammenstoßenden Seiten $x = 0$ und $y = 0$ adiatherman bedeckt, die anderen Seiten auf der Temperatur Null, so sind die Eigenfunktionen

$$\text{const.} \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{c}$$

und der Kern ist, wenn q denselben Wert hat wie in den beiden vorigen Fällen, der reelle Teil des Ausdrucks

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_0\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)} + \cdots,$$

in welchem drei Glieder hinzuzufügen sind, die aus dem hingeschriebenen entstehen, wenn man $z + z_1$ durch einen der Ausdrücke $z - z_1$, $z + \bar{z}_1$, $z - \bar{z}_1$ ersetzt.

Auch hier ist es leicht, die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) = \Delta_1 K(0, 1) = 0$$

zu verifizieren und die Singularität der Größe $K(0, 1)$ als Funktion der Stelle 0 an der Stelle 1 zu erkennen.

Ebenso läßt sich aber auch der ausgeartete Fall behandeln, daß alle Seiten des Rechtecks adiatherman bedeckt sind. Die Eigenfunktionen sind

$$\varphi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{bc}} \cos\frac{m\pi x}{b} \cos\frac{n\pi y}{c}, \quad \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right),$$

wobei einer der Werte m und n verschwinden darf, nicht aber beide zugleich; die Konstante kann zwar als Lösung der Randwertaufgabe angesehen werden, erfüllt aber nachher nicht dieselbe Integralgleichung wie die anderen Größen φ_{mn}.

Mit diesen Ausdrücken erhält man folgende bilineare Reihe:

$$K(0, 1) = \frac{1}{bc}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}}{\frac{m^2\pi^2}{b^2}} + \frac{1}{bc}\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos\frac{n\pi y}{c}\cos\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{2}{bc}\sum_m^{1,\infty}\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi y}{c}\cos\frac{n\pi y_1}{c}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)}$$

und mittels der früher benutzten Hilfsmittel erhält man bis auf einen konstanten Summanden, der weggelassen ist,

$$K(0, 1) = \frac{1}{2bc}(y^2 + y_1^2)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\,\Re e \log \left[\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)\right].$$

Offenbar gelten die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) - \frac{1}{bc} = 0$$

$$\Delta_1 K(0, 1) - \frac{1}{bc} = 0;$$

aus ihnen geht, da bc die Fläche des Grundgebietes ist, nach einer in § 37 gemachten Bemerkung hervor, daß $-K(0, 1)$ als Temperatur von einer Wärmequelle von der Ergiebigkeit -1 herrührt, wenn gleichzeitig im Grundgebiet überall eine für die Flächeneinheit konstante Wärmemenge erzeugt wird.

Die Formeln, mit denen in allen diesen Fällen die Summation der doppelt unendlichen Reihen gelingt, sind außer den in § 38 benutzten die folgenden:

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n(\pi - \alpha)}{n^2 + \mu^2} = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\pi \operatorname{Cof} \mu \alpha}{2\mu \operatorname{Sin} \mu \pi}, \quad (-\pi < \alpha < +\pi),$$

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos(2n-1)\alpha}{(2n-1)^2 + \mu^2} = \frac{\pi \operatorname{Sin} \mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{4\mu \operatorname{Cof}\frac{\mu\pi}{2}}, \quad (0 < \alpha < \pi)$$

$$4\sum_n^{1,\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2(2n-1)}}\,\frac{\cos(2n-1)\pi z}{2n-1} = \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z}{2}\right)}, \quad q = e^{\tau\pi i},$$

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{q^n}{1+q^n}\,\frac{\sin n\pi z}{n} = \frac{\pi}{2}(1 - z) + i \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\tau}{4}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z+\tau}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+\tau}{4}\right)},$$

$$4\sum_n^{1,\infty} \frac{q^{2n-1}}{1+q^{4n-2}}\,\frac{\sin(2n-1)\pi z}{2n-1}$$

$$= \frac{\pi}{2} + i \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\tau}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right)\vartheta_0\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+\tau}{4}\right)\vartheta_0\left(\frac{z+\tau}{4}\right)}.$$

§ 41.
Greensche Funktionen auf der Kreisfläche.

Durch Aufbau aus den Elementen mittels der bilinearen Reihe lassen sich auch die Greenschen Funktionen für die Kreisfläche vom Radius Eins einschließlich des ausgearteten Falles bestimmen; die Stelle der beim Rechteck benutzten Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen vertreten hier die bilinearen Formeln des § 32.

Transformiert man die Fouriersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

in Polarkoordinaten, und führt, wie in § 36, die Grenzbedingung

$$\overline{\frac{d u}{d N} + H u = 0}$$

ein, so sieht man leicht, daß die Eigenfunktionen

$$J_m(\varrho r) \cos m\theta, \qquad J_m(\varrho r) \sin m\theta$$

sind, wobei J_m die Besselsche Funktion $m$ter Ordnung, m eine nicht negative ganze Zahl bedeutet und die Konstante ϱ durch die Gleichung

$$\varrho J_m' \varrho + H J_m \varrho = 0$$

definiert ist. Der Fall $H = \infty$ bedeutet natürlich

$$J_m \varrho = 0.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind die ∞^2-Werte ϱ^2, so daß man sich auf die positiven Wurzeln beschränken kann. Um die Eigenfunktionen zu normieren, braucht man die über die Kreisfläche erstreckten Integrale

$$P_{mn} = \int d s J_m(\varrho r)^2 \cos^2 m\theta$$
$$\overline{P}_{mn} = \int d s J_m(\varrho r)^2 \sin^2 m\theta;$$

da $ds = r dr d\theta$, so findet man leicht

$$P_{0n} = 2\pi \int_0^1 \alpha J_0(\varrho_{0n}\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\overline{P}_{mn} = P_{mn} = \pi \int_0^1 \alpha J_m(\varrho_{mn}\alpha)^2 d\alpha, \quad (m > 0).$$

Die bilineare Reihe unseres Problems hat daher folgende Form:

$$K(0, 1) = \sum_m^{0,\infty} \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos m(\theta_1 - \theta) J_m(\varrho_{mn} r) J_m(\varrho_{mn} r_1)}{P_{mn} \cdot \varrho_{mn}^2}.$$

In diesem Ausdruck kann jede der Summationen nach n ausgeführt werden, indem man r und r_1 durch $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x_1}$ ersetzt und nach § 32 die dort eingeführten Greenschen Funktionen in die bilineare Reihe entwickelt; man erhält, indem man unter s die kleinere der Größen $\frac{r}{r_1}$ und $\frac{r_1}{r}$ versteht, bei der Annahme $H > 0$

$$\pi K(0, 1)$$

(1) $$= \frac{1}{2H} - \frac{1}{4}\log\frac{r r_1}{s} + \sum_m^{1,\infty} \frac{\cos m(\theta - \theta_1)}{2m}\left[s^m + \frac{m-H}{m+H}(r r_1)^m\right],$$

für den Fall $H = 0$ aber

$$\pi K(0, 1)$$

(2) $$= -\frac{3}{8} + \frac{r_1^2 + r^2}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{r r_1}{s} + \sum_m^{1,\infty} \frac{\cos m(\theta - \theta_1)}{2m}[s^m + (r r_1)^m].$$

Die hier erscheinenden Reihen summiert man mittels der Formeln

$$\log\sqrt{1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2} = -\sum_m^{1,\infty}\frac{\alpha^m \cos m\beta}{m},$$

$$\sum_m^{1,\infty}\frac{\alpha^m\cos m\beta}{m+H} = \Re\mathrm{e}\left(\alpha^{-H}e^{-\beta H i}\int_0^{\alpha e^{\beta i}}\frac{w^{H-1}\,dw}{1-w}\right),$$

und findet bei positiven Werten von H

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi H} + \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\frac{1 - 2 r r_1\cos(\theta - \theta_1) + r^2 r_1^2}{r_1^2 - 2 r r_1\cos(\theta-\theta_1) + r^2}}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\Re\mathrm{e}\left[(r r_1 e^{i(\theta-\theta_1)})^{-H}\int_0^{r r_1 e^{(\theta-\theta_1)i}}\frac{w^{H-1}\,dw}{1-w}\right],$$

wobei das letzte Glied wegzulassen ist, wenn $H = \infty$ gesetzt wird. In diesem Falle erhält man die in der Theorie des logarithmischen Potentials erscheinende Greensche Funktion der Kreisfläche in bekannter Form. In jedem Falle verifiziert man leicht die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) = 0$$
$$\Delta_1 K(0, 1) = 0.$$

Wenn $H = 0$ angenommen wird, ergibt sich ebenso

$$K(0, 1) = -\frac{3}{8\pi} + \frac{r^2 + r_1^2}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{1 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r^2 r_1^2}$$
$$- \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r^2},$$

und man erhält die Differentialgleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) - \frac{1}{\pi} = 0, \qquad \Delta_1 K(0, 1) - \frac{1}{\pi} = 0,$$

die, da π die Fläche des Grundgebietes bedeutet, unter die in § 37 besonders hervorgehobene Form fallen. Daher ist $-K(0, 1)$ die stationäre Temperatur, die von einer Quelle von der Ergiebigkeit -1 im Punkte 1 herrührt, wenn gleichzeitig auf dem Grundgebiet für jede Flächen- und Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge, etwa als Joulesche Wärme eines galvanischen Stroms, erzeugt wird.

Die in den Formeln (1) und (2) auftretenden Reihen konvergieren übrigens gleichmäßig in jedem Gebiet der Variablen, für das der Abstand der Punkte 0 und 1 über einer festen Grenze bleibt; denn die Reihen

$$\sum \frac{\alpha^m \cos m\beta}{m}, \qquad \sum \frac{\alpha^m \cos m\beta}{m + H}$$

können als reelle Teile analytischer Funktionen aufgefaßt werden, die regulär sind, solange α von 1 oder β von Null verschieden ist und α den Wert 1 nicht überschreitet. Hieraus folgt auch, daß in solchen Gebieten die Reihen gliedweise differenziert werden können. Da ferner auch die in § 32 aufgestellten bilinearen Entwicklungen jedenfalls in einem Gebiet, in dem r und r_1 nicht beide unendlich klein werden können, gleichmäßig konvergieren und gliedweise differenziert werden können, so konvergiert die bilineare Reihe

$$\sum_{m,n} \frac{\varphi_{mn} 0 \,.\, \varphi_{mn} 1}{\lambda_{mn}}$$

in der Tat gleichmäßig in einem Gebiet, in dem der Abstand der Punkte 0 und 1 über einer festen Grenze bleibt, und kann in diesem Gebiet gliedweise differenziert werden.

§ 42.

Die Greensche Funktion auf der Kugelfläche.

Schreibt man die Fouriersche Differentialgleichung der Wärmebewegung im Raume

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

in räumlichen Polarkoordinaten, die mit den rechtwinkligen x, y, z durch die Gleichungen

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta\cos\omega,$$
$$z = r\sin\theta\sin\omega$$

verbunden sind, so ergibt sich bekanntlich die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\}.$$

Nehmen wir an, u sei von r unabhängig, so erhalten wir eine Temperaturverteilung, bei der keine Wärme in radialer Richtung nach dem Koordinatenanfangspunkte hin oder von ihm wegfließt; innerhalb einer unendlich dünnen Kugelschicht mit dem Zentrum $r = 0$ bewegt sich die Wärme also gerade so, wie wenn die Schicht von innen und außen adiatherman bedeckt wäre. Die Temperatur in einer solchen Schicht oder auf einer isoliert gedachten Kugeloberfläche vom Radius 1 und dem Mittelpunkte $r = 0$ erfüllt also die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\},$$

deren rechte Seite wir auch durch $a^2\Delta u$ bezeichnen wollen.

Nach der klassischen Methode setzt man

$$u = T.\Phi,\quad \frac{\partial T}{\partial\omega} = \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

und findet, indem λ eine unbekannte Konstante bedeutet,

$$T = e^{-a^2\lambda t},$$

$$(1)\quad \Delta\Phi + \lambda\Phi = 0,\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} + \lambda\Phi = 0.$$

Dabei ist λ so zu bestimmen, daß Φ eine auf der Kugelfläche überall endliche, stetig und eindeutig bestimmte Funktion des Ortes wird.

Aus dieser Forderung ergibt sich zunächst

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2}\, d\omega = 0;$$

integriert man also die Gleichung (1) nach ω und setzt

$$\Psi = \int_0^{2\pi} \Phi\, d\omega,$$

so findet man die Gleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta}\right) + \lambda\Psi = 0,$$

und diese muß eine für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ endliche Lösung besitzen. Das ist aber genau wieder das Randwertproblem des § 33, und man findet sofort

$$\lambda = n(n+1),$$

wobei n wie immer eine positive ganze Zahl bedeutet. Außerdem kann offenbar noch $\lambda = 0$ und die zugehörige Funktion Φ einer beliebigen Konstanten gleichgesetzt werden.

Um nun zu einer Integralgleichung überzugehen, bemerken wir zunächst, daß für den jetzt durch Δf bezeichneten Ausdruck die Greensche Gleichung

$$(2) \qquad \int (f\Delta g - g\Delta f)\, ds = \int \left(f\frac{dg}{dN} - g\frac{df}{dN}\right) dl$$

gilt, wenn links über das Innere einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden sphärischen Kurve $\mathfrak{C}$, rechts über diese Kurve selbst integriert und durch N die äußere Normale bezeichnet wird. In der Tat ist ja der Ausdruck Δf nichts anderes, als der gewöhnlich so bezeichnete Differentialparameter

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

in dem nur $r = 1$ gesetzt und ausgedrückt wird, daß f von der Polarkoordinate r unabhängig ist. Man kann daher die Greensche Gleichung für einen beliebigen Raum in der Form

$$(3) \qquad \int (f\Delta g - g\Delta f)\, d\tau = \int \left(f\frac{dg}{dN} - g\frac{df}{dN}\right) d\sigma$$

ansetzen, indem man durch $d\tau$ und ds Raum- und Oberflächenelement bezeichnet. Nimmt man das Integrationsgebiet begrenzt von zwei Kugeln $r = \text{const}$, von deren Radien der eine kleiner, der andere größer als Eins ist, und einer Kegelfläche mit der Spitze $r = 0$, die durch die Kurve $\mathfrak{C}$ geht, so folgt die Gleichung (2) unmittelbar aus der Greenschen Formel (3), indem man die Integrationen längs der Radien ausführt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den gesuchten Kern bestimmen, und zwar erklären wir ihn nach § 37 als die stationäre Temperatur, die durch eine Wärmequelle und eine in jedem Element des Grundgebietes auftretende, für die Flächen und Zeiteinheit konstante Wärmemenge hervorgerufen wird. Wir suchen dann noch zu erreichen, daß der Durchschnittswert dieser Temperatur im Grundgebiet verschwindet. Liegt die Quelle speziell im Punkte $\theta = 0$, so finden wir die gesuchte Temperatur bis auf einen konstanten Faktor in der Größe $K(x, \xi)$ des § 33 für den Fall $\xi = 1$, also, wenn b und c Konstante bedeuten, in dem Ausdruck

$$b \log (1 - \cos \theta) + c.$$

Hierdurch wird man veranlaßt, wenn die Wärmequelle im Punkte 1 liegt und γ oder genauer γ_{01} der Winkelabstand 01 ist, den Ansatz

$$K(0, 1) = b \log (1 - \cos \gamma) + c = 2 b \log \sin \frac{\gamma}{2} + c + b \log 2$$

zu machen; dabei ist

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos (\varphi - \varphi_1).$$

Setzt man speziell

$$b = -\frac{1}{4\pi}, \qquad c = -\frac{1}{4\pi}(1 - \log 2),$$

so folgt aus einer der Gleichungen (4) des § 33

$$\int K(0, 1)\, d s_0 = 0.$$

Ferner kann auf einem kleinen, um den Punkt 1 beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}$ im wesentlichen gesetzt werden

$$K(0, 1) = -\frac{1}{2\pi} \log \gamma,$$

und wenn man diesen Kreis als Grenze des außer ihm liegenden Restes der Kugelfläche ansieht und die äußere Normale dieses Gebietes N nennt,

$$\frac{d K(0, 1)}{d N} = \frac{1}{2 \pi \gamma}.$$

Versteht man daher unter Φ eine beliebige, in der Umgebung der Stelle 1 mit ihren Ableitungen stetige Funktion des Ortes, und integriert über den Kreis $\mathfrak{K}$, so ergibt sich

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \left\{\Phi \frac{dK(0,1)}{dN} - K(0,1)\frac{d\Phi}{dN}\right\} dl \sim \frac{1}{2\pi\gamma} \cdot 2\pi\gamma \,.\, \Phi 1.$$

Die Greensche Formel, angewandt auf das bezeichnete Restgebiet ergibt also, wenn man $\mathfrak{K}$ unendlich abnehmen läßt, in der Grenze

$$\int (\Phi \varDelta K - K \varDelta \Phi)\, ds = \Phi 1. \tag{4}$$

Jetzt werde für Φ eine Lösung der Gleichung (1), d. h. der Gleichung

$$\varDelta\Phi + \lambda\Phi = 0$$

genommen. Aus dieser ergibt sich mittels der Greenschen Formel, angewandt auf Φ und 1 und das mehrfach benutzte Restgebiet als Integrationsgebiet, da das Linienintegral verschwindet,

$$\int \varDelta\Phi\, ds = 0, \qquad \lambda \int \Phi\, ds = 0,$$

also, da λ von Null verschieden genommen und die für $\lambda = 0$ erhaltene Lösung beiseite gelassen wird,

$$\int \Phi\, ds = 0.$$

Anderseits findet man leicht

$$\varDelta K(0,1) - \frac{1}{4\pi} = 0;$$

also folgt aus der Gleichung (4) die Integralgleichung

$$\Phi 1 = \lambda \int K(0,1)\,\Phi 0 \,.\, ds, \qquad \lambda = n(n+1). \tag{5}$$

Die Diskussion derselben wird wesentlich dadurch erleichtert, daß nach der oben für $K(0, 1)$ gegebenen Formel und nach der Gleichung (2) des § 34 gesetzt werden kann

$$K(0,1) = \frac{1}{2\pi} \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})}{n(n+1)} P_n(\cos\gamma_{01}), \tag{6}$$

wobei die Gleichung

$$\cos\gamma_{01} = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$

gilt. Denkt man nun für einen Augenblick den Punkt $\theta = 0$ in die Stelle 1 gelegt, so geht die Größe $P_n(\cos\gamma_{01})$ in $P_n(\cos\theta)$ über, ist also Lösung der Legendreschen Gleichung, die als spezieller Fall der Gleichung

$$\varDelta\Phi + n(n+1)\Phi = 0$$

aufgefaßt werden kann. Diese ist aber vom Koordinatensystem unabhängig; mithin ist $P_n(\cos\gamma_{01})$ eine ihrer Lösungen auch bei beliebiger Lage des Koordinatensystems. Daraus folgt nach dem, was soeben gezeigt ist, daß $P_n(\cos\gamma_{01})$ auch eine Lösung der Integralgleichung (5) ist, die zu dem Eigenwert $n(n+1)$ gehört; diese Größe ist also orthogonal zu jeder von der Stelle 0 abhängenden Eigenfunktion Y_m, die zu einem von $n(n+1)$ verschiedenen Eigenwert $m(m+1)$ gehört.

Multipliziert man nun die Gleichung (6) mit Y_m, so ist ihre rechte Seite gliedweise über das Grundgebiet integrierbar. Denn legt man wieder für den Augenblick den Punkt $\theta = 0$ in die Stelle 1, so kann man zunächst nach ω gliedweise integrieren, da diese Größe in der Reihe (6) gar nicht vorkommt. Dann aber kann man aus den Entwicklungssätzen des § 33 die Formel

$$F1 = \int_{-1}^{+1} K(1,\alpha) f\alpha . d\alpha = \sum_{n}^{1,\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} \int_{-1}^{+1} P_n\alpha . f\alpha . d\alpha$$

entnehmen. Daraus folgt, daß die Reihe (6), mit $\sin\theta\, d\theta$ und einer beliebigen stetigen Funktion von θ multipliziert, nach θ gliedweise integriert werden kann, womit das Behauptete bewiesen ist.

Die einzelnen Glieder der rechten Seite der Gleichung (6) sind aber zu Y_m orthogonal, mit Ausnahme des zu $n = m$ gehörigen; somit fallen rechts alle Glieder weg mit einer Ausnahme und man erhält

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{Y_m 1}{m(m+1)} &= \int Y_m K(0,1)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{(m+\frac{1}{2})}{m(m+1)} \int Y_m P_m(\cos\gamma_{01})\, ds. \end{aligned}$$

Wäre übrigens der Eigenwert, zu dem Y_m gehört, überhaupt nicht in der Form $n(n+1)$ enthalten, so erhielte man rechts überall 0, also die Gleichung

$$\int K(0,1)\, Y_m ds = 0,$$

so daß Y_m keine Eigenfunktion des Kerns im Sinne der stets geltenden Definition wäre. Damit ist gezeigt, daß die Zahlen $n(n+1)$ die einzigen Eigenwerte der Integralgleichung (5) sind.

Die Gleichung (7) aber zeigt, daß die zu einem bestimmten Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen der Gleichung (5) Lösungen einer besonderen Integralgleichung sind und als solche alle zu demselben Eigenwert gehören. Der Kern dieser Gleichung läßt sich nach einer elementaren Formel aus der Theorie der Legendreschen Polynome, dem sogenannten Additionstheorem der Kugelfunktionen, in folgender Form darstellen:

$$P_m(\cos\gamma_{01}) = P_m x \,.\, P_m x_1$$
$$+ 2\sum_{\nu}^{1,m} \frac{(m-\nu)!}{(m+\nu)!} P_m^\nu x \,.\, P_m^\nu x_1 \,.\, \cos\nu(\varphi - \varphi_1);$$

dabei ist gesetzt

$$P_m^\nu x = (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu P_m x}{d x^\nu} = \sin^\nu\theta \frac{d^\nu P_m x}{d x^\nu}.$$

Setzt man diesen Wert von $P_m(\cos\gamma_{01})$ in die spezielle Integralgleichung (7), so sieht man, daß Y_m, d. h. die allgemeinste zum Eigenwert $m(m+1)$ gehörende Eigenfunktion der Gleichung (5), als lineares Aggregat der $2m+1$ Größen

(8) $\quad P_m x, \quad P_m^\nu x \,.\, \sin\nu\varphi, \quad P_m^\nu x \,.\, \cos\nu\varphi, \quad \nu = 1, 2, \ldots m$

dargestellt werden kann. Diese sind sämtlich spezielle Größen Y_m; in der Gleichung

$$\Phi 1 = m(m+1)\int \Phi 0 \,.\, K(0,1)\, d s$$

gehören also zum Eigenwert $m(m+1)$ genau $2m+1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, eben die Größen (8), die nur noch nicht normiert sind.

Man erhält die normierten Funktionen mittels der auf elementarem Wege aus der Legendreschen Differentialgleichung folgenden Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x)^2\, d x = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!}$$

und der bekannten Formeln

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\nu\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\nu\varphi\, d\varphi = \pi.$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß man setzen kann

$$\frac{(2n+1)P_n(\cos\gamma_{01})}{4\pi} = \sum_{\nu}^{0,2n} \varphi_{n\nu} 0 \,.\, \varphi_{n\nu} 1,$$

wenn $\varphi_{n0}, \varphi_{n1}, \ldots \varphi_{n,2n}$ die zum Eigenwerte $n(n+1)$ gehörigen normierten Eigenfunktionen sind. Dividieren wir beiderseits durch

$\lambda_n = n(n+1)$ und summieren über die Werte $n = 1, 2, \ldots$, so erhalten wir die bilineare Formel der Gleichung (6) zufolge in folgender Gestalt:

$$-\frac{1}{4\pi}[\log(1-\cos\gamma_{01}) + 1 - \log 2] = \sum_{n}^{1,\infty}\sum_{\nu}^{0,2n}\frac{\varphi_{n\nu}0 \cdot \varphi_{n\nu}1}{n(n+1)}.$$

§ 43.

Wärmeleitung in der Vollkugel.

Bei der dreidimensionalen Wärmebewegung in einer Vollkugel gilt die Randbedingung

$$\overline{\frac{du}{dN} + hu} = 0,$$

wobei N die äußere Normale, h eine positive Konstante bedeutet. Die Fouriersche Differentialgleichung transformiert sich dann in die schon in § 42 gebrauchte Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

$$= \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\},$$

wobei r, θ, ω wie am angeführten Orte die sphärischen Polarkoordinaten bedeuten. Setzen wir

$$u = e^{-a^2\lambda t}V, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

so ergibt sich für V die Gleichung

$$\Delta V + \lambda V = 0$$

und die Randbedingung

$$\frac{dV}{dr} + hV = 0.$$

Substituieren wir ferner

$$x = \cos\theta, \qquad V = R\Omega\Theta,$$

wobei jeder Faktor eine Funktion der durch den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichneten Variablen allein ist, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{m(m+1)}{r^2}\right)R = 0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0,$$

$$\frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + n^2\Omega = 0,$$

wobei durch m und n Konstante bezeichnet sind. Für diese aber ergibt sich leicht, daß sie ganze Zahlen sein müssen, die dann offenbar positiv genommen werden können. Für n folgt dies daraus, daß Ω notwendig nach dem Argument ω die Periode 2π haben muß, für m daraus, daß die zweite Gleichung, da sie durch die Substitution

$$\Theta = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n y}{d x^n}$$

aus der Legendreschen abgeleitet werden kann, nur dann ein an den Stellen $x = \pm 1$ endliches Integral besitzt, wenn n eine ganze Zahl ist. Dieses Integral ist dann

$$\Theta = P_m^n x = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_m x}{d x^n}.$$

Da nun auch R an der Stelle $r = 0$ endlich sein muß, lehrt die für diese Größe erhaltene Differentialgleichung, daß man bis auf einen konstanten Faktor

$$R = r^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r)$$

setzen kann; die Eigenwerte ϱ^2 oder λ werden durch die Gleichung

$$\frac{dR}{dr} + hR \Big|^{r=1} = 0, \quad \varrho J'_{m+1/2}(\varrho) + (h - \tfrac{1}{2}) J_{m+1/2}(\varrho) = 0$$

bestimmt, und die positiven Wurzeln dieser Gleichung mögen durch $\lambda_{m+1/2,\,1}, \lambda_{m+1/2,\,2}, \ldots$ bezeichnet werden. Die Wurzel $\lambda = 0$ führt zu einer identisch verschwindenden Funktion R.

Die Eigenfunktionen sind also, wenn $\varrho^2 = \lambda_{m+1/2,\,n}$ gesetzt wird,

$$P_m^\mu x \,.\, r^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) \cos \mu\omega, \qquad P_m^\mu x \,.\, r^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) \sin \mu\omega;$$

dabei sind für μ die Werte $0, 1, \ldots 2m$ zu nehmen, so daß im ganzen $2m + 1$ Eigenfunktionen zu einem Eigenwert gehören.

Um sie zu normieren, hat man ihr Quadrat mit $-r^2 dr\, dx\, d\omega$ zu multiplizieren, über den Raum der Kugel zu integrieren und durch die Quadratwurzel des erhaltenen Integrals zu dividieren. Das auszurechnende Integral ist also

$$A_\mu = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^1 r\, dr \int_{-1}^{+1} dx \left[P_m^\mu x \,.\, J_{m+1/2}(\varrho r) \cos \mu\omega\right]^2,$$

oder derselbe Ausdruck, in dem cos durch sin ersetzt ist. Berücksichtigen wir die in § 42 gebrauchte Formel

$$\int_{-1}^{+1} dx [P_m^\mu x]^2 = \frac{(m+\mu)!}{(m-\mu)!} \frac{2}{2m+1},$$

und setzen wir

$$\int_0^1 r J_{m+1/2}(\varrho r)^2 dr = N_{m+1/2, n},$$

so erhalten wir

$$A_\mu = \frac{(m+\mu)!}{(m-\mu)!} \frac{\pi}{m+\frac{1}{2}} N_{m+1/2, n} (\mu > 0),$$

$$A_0 = \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} N_{m+1/2, n}.$$

Dasselbe ergibt sich, wenn $\sin \mu \omega$ durch $\cos \mu \omega$ ersetzt wird.

Auf Grund dieses Resultats können wir die bilineare Reihe bilden, deren Glieder vom Typus

$$\frac{\Sigma \varphi 0 . \varphi 1}{\lambda}$$

sind, wobei im Zähler über alle zum Eigenwert λ gehörigen normierten Eigenfunktionen summiert wird. Man erhält so den Ausdruck

$$\frac{(r r_1)^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) J_{m+1/2}(\varrho r_1) . \varphi}{2\pi \varrho^2 N_{m+1/2, n}},$$

wobei φ durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi &= P_m x . P_m x_1 . (m + \tfrac{1}{2}) \\ &+ 2 \sum_\mu^{1, m} \frac{(m-\mu)!}{(m+\mu)!} (m + \tfrac{1}{2}) P_m^\mu x . P_m^\mu x_1 . \cos \mu (\varphi - \varphi_1) \\ &= (m + \tfrac{1}{2}) P_m (\cos \gamma_{01}) \end{aligned}$$

und γ_{01} durch die Gleichung

$$\cos \gamma_{01} = x x_1 + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x_1^2} \cos (\varphi - \varphi_1)$$

definiert ist. Die bilineare Reihe geht hiermit in folgende Gestalt über:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_m^{0, \infty} \sum_n^{1, \infty} \frac{(r r_1)^{-1/2} (m + \frac{1}{2}) P_m (\cos \gamma_{01}) J_{m+1/2}(\varrho r) J_{m+1/2}(\varrho r_1)}{\lambda_{m+1/2, n} N_{m+1/2, n}}.$$

Nach den Formeln in § 32 ist nun die Summation über n sofort durchzuführen. Man erhält unter der Voraussetzung

$$h - \tfrac{1}{2} > 0, \quad r < r_1$$

die Gleichung

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{J_{m+1/2}(\varrho r)\, J_{m+1/2}(\varrho r_1)}{\lambda_{m+1/2,\,n}\, N_{m+1/2,\,n}} = \frac{1}{2m+1}\left\{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{m+1/2} - (r r_1)^{m+1/2}\right\} + \frac{(r r_1)^{m+1/2}}{m+h}.$$

Ist $r > r_1$, so ist $\frac{r}{r_1}$ durch $\frac{r_1}{r}$ zu ersetzen. Hiernach wird für den Fall $r < r_1$ die bilineare Reihe folgenden Wert erhalten:

$$K(0,1) = \frac{1}{4\pi} \sum_m^{0,\infty} \left\{\frac{r^m}{r_1^{m+1}} - (r r_1)^m + \frac{2m+1}{m+h}(r r_1)^m\right\} P_m(\cos\gamma_{01}).$$

Diese Reihe summiert sich mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_m^{0,\infty} P_m x \,.\, \alpha^m,$$

$$\frac{1-\alpha^2}{(\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2})^3} = \sum_m^{0,\infty} (2m+1) P_m x \,.\, \alpha^{m+2},$$

$$\int_0^\alpha \frac{(1-\alpha^2)\,\alpha^{h-1}\, d\alpha}{(\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2})^3} = \alpha^h \sum_m^{0,\infty} \frac{(2m+1)\,\alpha^m}{m+h} P_m x.$$

Speziell erhält man für den Fall $h = \infty$, also für die Randbedingung

$$\overline{V} = 0$$

die Gleichung

$$K(0,1) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r^2 r_1^2}}\right].$$

Dieser Ausdruck ist die in der Elektrostatik auftretende gewöhnliche Greensche Funktion des Vollkugelraumes. Im Falle eines endlichen positiven Wertes von h erscheint noch das Glied

$$\frac{r^{-h}}{4\pi}\int_0^r \frac{(1 - r^2 r_1^2)\, r^{h-1}\, dr}{\sqrt{1 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r^2 r_1^2}}.$$

§ 44.

Darstellung willkürlicher Funktionen auf Grund der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen.

Die bisherigen Sätze über bilineare Reihen bei Greenschen Funktionen als Kernen können nicht aus der allgemeinen Theorie des dritten Abschnitts abgeleitet werden, wohl aber gilt dies von gewissen allgemeinen Sätzen über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen der bezeichneten Kerne, sobald diese als brauchbar unstetig im Sinne des § 19 nachgewiesen sind. Es handelt sich dabei um folgende Ziele. Verstehen wir unter θ stets eine im Grundgebiet stetige Funktion der beigefügten Stellen und setzen wir

$$\begin{aligned} \Phi(0,1) &= K(0,1)\ \theta(0,1), \\ F(0,1) &= K(0,1)\ K(1,2)\ \theta(0,1,2), \end{aligned}$$

so ist zu zeigen, daß die Integrale

$$\int \Phi(0,1)\,ds_1, \qquad \int F(0,1)\,ds_1$$

im Grundgebiet stetige Funktionen, das erste der Stelle 0, das zweite der Stellen 0 und 2 sind, und daß in den Integralen

$$(1) \quad \int\!\!\int \Phi(0,1)\,ds\,ds_1, \quad \int\!\!\int F(0,1)\,ds\,ds_1, \quad \int\!\!\int F(0,1)\,ds\,ds_2,$$

die Integrationen vertauscht werden dürfen. Sind die Behauptungen bewiesen, so kann man die Größen θ auch als stückweise stetig annehmen; dadurch gehen die betrachteten Integrale in Summen von solchen über, die mit stetigen θ und anderen Grundgebieten gebildet sind, und die behaupteten Eigenschaften übertragen sich sofort von den Summanden auf die Summe.

Um nun das gewünschte Ziel zu erreichen, gehen wir davon aus, daß im Falle des ebenen Grundgebiets, das wir $\mathfrak{G}$ nennen,

$$K(0,1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + \theta(0,1)$$

gesetzt werden kann; bei den auf die Größe Φ bezüglichen Behauptungen darf also einfach abkürzend

$$K(0,1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}}$$

gesetzt werden, da die mit $\theta(0,1)$ behafteten Glieder wegen der Stetigkeit dieser Größe keine Schwierigkeit machen. Dasselbe gilt aber auch von den auf $F(0,1)$ bezüglichen Behauptungen;

denn nach dem vereinfachten Ansatz für $K(0,1)$ unterscheidet sich $F(0,1)$ von dem ursprünglichen Wert um Glieder wie

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\cdot\theta(0,1,2),\qquad \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{21}}\cdot\theta(0,1,2),$$

die wieder, wenn die auf $\Phi(0,1)$ bezüglichen Behauptungen bewiesen sind, keine Schwierigkeit machen, da sie als Ausdrücke $\Phi(0,1)$ oder $\Phi(1,2)$ betrachtet werden können. Wir bleiben also ganz bei dem abgekürzten Ausdruck für $K(0,1)$, der alles Gewünschte leistet, wenn der Beweis gelingt.

Bezeichnet man nun durch $\mathfrak{E}_0$ den Rest, der übrig bleibt, wenn vom Gebiet $\mathfrak{E}$ alle die Ungleichung $r_{01} < a$ erfüllenden Stellen 1 bei irgend einer festen Lage der Stelle 0 weggelassen werden, so ist

$$(2)\qquad \int\limits_{\mathfrak{E}}\Phi(0,1)\,ds_1 = \int\limits_{\mathfrak{E}_0}\Phi(0,1)\,ds_1 + \int\limits_{r_{01}<a}\Phi(0,1)\,ds_1;$$

ein Integrationsgebiet wie $r_{01} < a$ ist hier wie weiterhin immer so zu verstehen, daß nur Stellen des Gebiets $\mathfrak{E}$ in Betracht gezogen werden. Verstehen wir aber unter Ψ eine Größe, die zwischen festen von 0 und a unabhängigen Schranken liegt, so können wir setzen

$$(3)\qquad \int\limits_{r_{01}<a}\Phi(0,1)\,ds_1 = \Psi\int\limits_{r_{01}<a}ds_1\log\frac{1}{r_{01}} = \Psi.\psi a,$$

und ψa ist, wenn man über den ganzen Kreis $r_{01} < a$ integriert, eine leicht, wie in § 35, durch a ausdrückbare Größe, für die die Gleichung

$$\lim_{a=0}\psi a = 0$$

gilt und gültig bleibt, wenn nur ein Teil des Kreises in das Gebiet $\mathfrak{E}$ fällt und als Integrationsgebiet benutzt wird. In der Gleichung (2) kann also der zweite Summand durch passende Wahl von a unter eine vorgeschriebene Schranke herabgedrückt werden und bleibt unter derselben, wenn die Stelle 0 geändert wird.

Jetzt werde die Stelle 0 um eine hinreichend kleine Strecke verschoben; dann ändert sich das Gebiet $\mathfrak{E}_0$ und die in ihm stetige Größe $\Phi(0,1)$ beliebig wenig, ebenso auch der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung (2); die gesamte Änderung der Größe

$$\int\limits_{\mathfrak{E}}\Phi(0,1)\,ds_1$$

setzt sich also aus zwei dem absoluten Betrage nach beliebig kleinen Summanden zusammen; diese Größe ist als stetige Funktion der Stelle 0 erwiesen; dasselbe gilt wegen der Symmetrie des Kerns $K(0, 1)$ von dem Integral

$$\int_{\mathfrak{G}} \Phi(0, 1)\, ds$$

als Funktion der Stelle 1.

Um nun weiter die Integrale

$$J = \int_{\mathfrak{G}} ds \int_{\mathfrak{G}} \Phi(0, 1)\, ds_1 \qquad \bar{J} = \int_{\mathfrak{G}} ds_1 \int_{\mathfrak{G}} \Phi(0, 1)\, ds$$

als gleich nachzuweisen, sei $\mathfrak{G}_1$ der Rest des als Ort der Stelle 0 betrachteten Gebiets $\mathfrak{G}$ nach Ausscheidung der Stellen 0, für die $r_{10} < a$; dann sind zunächst die Integrale

$$J_0 = \int_{\mathfrak{G}} ds \int_{\mathfrak{G}_0} \Phi(0, 1)\, ds_1, \qquad \bar{J}_1 = \int_{\mathfrak{G}} ds_1 \int_{\mathfrak{G}_1} \Phi(0, 1)\, ds$$

gleich, $J_0 = \bar{J}_1$; denn das Integrationsgebiet beider ist die Gesamtheit der Stellenpaare 0, 1, in denen $r_{01} > a$ und im übrigen 0 wie 1 im Gebiet $\mathfrak{G}$ beliebig gewählt werden. In diesem Gebiet ist $\Phi(0, 1)$ stetig, die Integrationen also vertauschbar. Weiter ist offenbar

$$J - J_0 = \int_{\mathfrak{G}} ds \int_{r_{01} < a} \Phi(0, 1)\, ds_1, \qquad \bar{J} - \bar{J}_1 = \int_{\mathfrak{G}} ds_1 \int_{r_{01} < a} \Phi(0, 1)\, ds;$$

wendet man also die Gleichung (3) an und die aus ihr entstehende, indem man 0 und 1 vertauscht, so ergibt sich

$$J - J_0 = \Psi . \psi a, \qquad \bar{J} - \bar{J}_1 = \Psi . \psi a,$$

wobei die Zeichen Ψ, ψ vieldeutig gebraucht sind. Da nun $J_0 = \bar{J}_1$, so folgt auch, daß die Größe

$$J - \bar{J} = \Psi . \psi a$$

gesetzt und mit a beliebig herabgedrückt werden kann, also, weil von a unabhängig, verschwinden muß:

$$(4) \qquad J = \bar{J}, \quad \int_{\mathfrak{G}} ds \int_{\mathfrak{G}} \Phi(0, 1)\, ds_1 = \int_{\mathfrak{G}} ds_1 \int_{\mathfrak{G}} \Phi(0, 1)\, ds;$$

die auf die Größen $\Phi(0, 1)$ bezüglichen Behauptungen sind bewiesen.

Um nun entsprechende Betrachtungen für die mit $F(0, 1)$ gebildeten Integrale durchzuführen, sei $\mathfrak{G}_2$ das Gebiet, das von $\mathfrak{G}$ übrig bleibt, wenn alle Stellen 0, für die $r_{02} < a$ ist, ausgeschieden werden; ist 1 die veränderliche Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$, so wird, um $\mathfrak{G}_2$ zu erhalten, das Gebiet $r_{12} < a$ ausgeschieden. Dann hat die Größe $F(0, 1)$ im Gebiet $\mathfrak{G}_2$ dieselben Eigenschaften wie $\Phi(0,1)$ im Gebiet $\mathfrak{G}$; die Integrale

$$\int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\,d s_1 = \int_{\mathfrak{G}_2} K(0, 1)\,K(1, 2)\,\theta(0, 1, 2)\,d s_1, \quad \int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\,d s$$

sind also im Gebiet $\mathfrak{G}_2$ stetige Funktionen, der Stelle 0 das erste und der Stelle 1 das zweite.

Weiter zeigen wir, daß man setzen kann

$$\int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1 = \Psi . \psi a,$$

wobei die Schranken der Größe Ψ von a, 0 und 2 unabhängig bestimmt werden können. Fallen nämlich die Stellen 0 und 2 zusammen, so ist

$$\begin{aligned}
\int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1 &= \frac{1}{4\pi^2}\int \log\frac{1}{r_{21}} \cdot \log\frac{1}{r_{20}}\,\theta(0, 1, 2)\,d s_1 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int \left(\log\frac{1}{r_{21}}\right)^2 \theta(0, 1, 2)\,d s_1 \\
&= \Psi \int_{r_{21} < a} \left(\log\frac{1}{r_{21}}\right)^2 d s_1;
\end{aligned}$$

fallen die Stellen 0 und 2 auseinander, so ist offenbar

$$\int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1 = \Psi \int_{r_{21} < a} \log\frac{1}{r_{21}}\,d s_1,$$

und in beiden Fällen kann man setzen

$$(5) \qquad \int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1 = \Psi . \psi a, \qquad \lim_{a=0} \psi a = 0.$$

Nun ist nach der Definition des Gebiets $\mathfrak{G}_2$

$$\int_{\mathfrak{G}} F(0, 1)\,d s_1 = \int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\,d s_1 + \int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1;$$

scheidet man aus dem Gebiet $\mathfrak{G}_2$ noch alle Stellen 1 aus, für die $r_{01} < a$ und nennt den Rest $\mathfrak{G}_{20}$, so ist $F(0, 1)$ in diesem stetig und man hat die Gleichung

$$(6) \quad \int_{\mathfrak{G}} F(0,1)\,d s_1 = \int_{\mathfrak{G}_{20}} F(0, 1)\,d s_1 + \int_{r_{21} < a} F(0, 1)\,d s_1 + \int_{r_{01} < a} F(0, 1)\,d s_1;$$

in den letzten beiden Integralen sind nur die in $\mathfrak{G}$ fallenden Teile des Integrationsgebiets zu berücksichtigen und etwaige gemeinsame Teile der Gebiete $r_{01} < a$ und $r_{21} < a$ nur einmal. Da nun $F(0, 1)$ bezüglich der Stellen 0 und 2 symmetrisch gebaut ist, so ist in der letzten Gleichung auch das letzte Glied der rechten Seite von der Form $\Psi.\psi a$, ebenso wie nach (5) das vorletzte; beide sind also bei passender Wahl von a absolut so klein, wie man will, und bleiben so bei Veränderung der Stellen 0 und 2. Ändert man diese aber hinreichend wenig, so ändert sich das Gebiet $\mathfrak{G}_{20}$ und die in ihm stetige Größe $F(0, 1)$ beliebig wenig; dasselbe gilt also von der ganzen rechten Seite der Gleichung (6); das Integral

$$\int_{\mathfrak{G}} F(0, 1)\, d s_1 \tag{7}$$

ist eine im Gebiet $\mathfrak{G}$ stetige Funktion der beiden Stellen 0 und 2.

Da ferner im Gebiet $\mathfrak{G}_2$ die Größe $F(0, 1)$ dieselben Eigenschaften hat wie $\Phi(0, 1)$ im Gebiet $\mathfrak{G}$, so hat man nach der Gleichung (4)

$$\int_{\mathfrak{G}_2} d s \int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\, d s_1 = \int_{\mathfrak{G}_2} d s_1 \int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\, d s. \tag{8}$$

Die Gleichung (5) aber ergibt

$$\int_{\mathfrak{G}_2} d s \int_{r_{01} < a} F(0, 1)\, d s_1 = \Psi.\psi a, \tag{9}$$

und unmittelbar folgt aus der Stetigkeit des Integrals (7)

$$\int_{r_{20} < a} d s \int_{\mathfrak{G}} F(0, 1)\, d s_1 = \Psi.\psi a. \tag{10}$$

Addiert man die Größen (9) und (10) zur linken Seite der Gleichung (8), so werden in dieser die Integrationsgebiete $\mathfrak{G}_2$ durch $\mathfrak{G}$ ersetzt und man sieht zugleich, was nicht unmittelbar ersichtlich ist,

$$\int_{\mathfrak{G}} d s \int_{\mathfrak{G}} F(0, 1)\, d s_1 = \lim_{a=0} \int_{\mathfrak{G}_2} d s \int_{\mathfrak{G}_2} F(0, 1)\, d s_1. \tag{11}$$

Ebenso findet man leicht, da

$$\int_{r_{20} < a} F(0, 1)\, d s = K(1, 2) \int_{r_{20} < a} K(0, 1)\, \theta(0, 1, 2)\, d s = K(1, 2)\, \Psi.\psi a$$

gesetzt werden kann,

$$(12)\qquad \int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds_1 \int\limits_{r_{20}<a} F(0,1)\,ds = \int\limits_{\mathfrak{E}_2} K(1,2)\,\Psi.\psi a.ds_1 = \Psi.\psi a;$$

endlich

$$\int\limits_{r_{21}<a} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds = \int\limits_{r_{21}<a} K(1,2)\,ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds_1$$

und da hier das innere Integral rechts nach den Sätzen über $\Phi(0,1)$ eine stetige Funktion der Stellen 0 und 2 ist,

$$(13)\qquad \int\limits_{r_{21}<a} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds = \Psi.\psi a.$$

Addiert man die Größen (12) und (13) zur rechten Seite der Gleichung (8), so erhält man die Gleichung

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds = \lim_{a=0} \int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}_2} F(0,1)\,ds,$$

die verbunden mit den Gleichungen (8) und (11) zu der gewünschten Beziehung führt:

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} ds \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds_1 = \int\limits_{\mathfrak{E}} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds.$$

Leichter ist das entsprechende Ergebnis für das dritte der Integrale (1) zu erzielen; ist $\mathfrak{E}_1$ der Rest des Gebietes $\mathfrak{E}$ nach Ausschluß eines Kreises vom Radius a um den Mittelpunkt 1, so ist

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} ds_2 \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0,1)\,ds = \int\limits_{\mathfrak{E}} K(1,2)\,ds_2 \int\limits_{\mathfrak{E}} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} &= \int\limits_{\mathfrak{E}_1} K(1,2)\,ds_2 \int\limits_{\mathfrak{E}} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds + \int\limits_{r_{12}<a} K(1,2)\,\bar\theta(1,2)\,ds_2 \\ &= \int\limits_{\mathfrak{E}_1} K(1,2)\,ds_2 \int\limits_{\mathfrak{E}_1} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds \\ &+ \int\limits_{\mathfrak{E}_1} K(1,2)\,ds_2 \int\limits_{r_{10}<a} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds + \int\limits_{r_{12}<a} K(1,2)\,\bar\theta(1,2)\,ds_2, \end{aligned}$$

wobei

$$\bar\theta(1,2) = \int\limits_{\mathfrak{E}} K(0,1)\,\theta(0,1,2)\,ds = \int\limits_{\mathfrak{E}} \Phi(0,1)\,ds$$

nach den für die Größen Φ erhaltenen Sätzen eine stetige Funktion der Stellen 1 und 2 ist. Der erste der in der Gleichung (14) erhaltenen drei Summanden gestattet die Vertauschung der Integrationen, der zweite und dritte können mit a beliebig herabgedrückt werden. Vertauscht man im Ausdruck (14) die Elemente ds und ds_1, so bleibt der erste Summand derselbe, der zweite und dritte behalten die angegebene Eigenschaft; von dem ersten unterscheiden sich also beide Integrale

$$\int_{\mathfrak{E}} ds_2 \int_{\mathfrak{E}} F(0, 1)\, ds, \qquad \int_{\mathfrak{E}} ds \int_{\mathfrak{E}} F(0, 1)\, ds_2$$

beliebig wenig, sind also gleich.

Damit ist die Greensche Funktion $K(0, 1)$ des ebenen Gebiets als brauchbar unstetiger Kern im Sinne des § 19 erwiesen.

Dasselbe gilt von der Greenschen Funktion des räumlichen Gebiets: man braucht nur in der ganzen durchgeführten Schlußreihe die Zeichen

$$ds, \quad \log\frac{1}{r_{01}}, \quad \log\frac{1}{r_{02}}, \quad \log\frac{1}{r_{12}}, \quad \mathfrak{E}$$

durch

$$d\tau, \quad \frac{1}{r_{01}}, \quad \frac{1}{r_{02}}, \quad \frac{1}{r_{12}}, \quad \mathfrak{R}$$

zu ersetzen.

Jetzt sind die Sätze des dritten Abschnitts auf die im gegenwärtigen Abschnitt betrachteten Kerne anwendbar; bestimmte Ergebnisse erhält man, wenn man Begriff und Eigenschaften der quellenmäßigen Funktionen beachtet, wie sie in § 37 entwickelt sind.

Wichtig ist zunächst die Beziehung

$$\Delta F0 = \Delta \int K(0, 1) f1 \, . \, ds_1 = -f0;$$

aus ihr folgt, daß eine im Grundgebiet stetige Funktion nur dann zum Kern orthogonal sein kann, so daß

$$\int K(0, 1) f1 \, . \, ds_1 = 0,$$

wenn sie identisch verschwindet. Zum Kern orthogonal ist aber nach § 22 jede im Grundgebiet stetige Funktion, wenn sie zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist; eine zu allen Eigenfunktionen orthogonale stetige Funktion muß also identisch verschwinden. Das heißt, aus der Gesamtheit der Gleichungen

$$\int f0 \, . \, \varphi_n 0 \, . \, ds = 0$$

folgt die Identität $f0 = 0$.

Sodann lehren die allgemeinen Sätze, daß jede quellenmäßige Funktion auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann; nach § 37 folgt hieraus, daß jede die Randbedingung erfüllende, auf dem Grundgebiet mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion, die stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt, auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann:

$$F0 = \sum_{n}^{1,\infty} a_n \varphi_n 0, \qquad a_n = \int F0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds, \qquad \int (\varphi_n 0)^2 ds = 1;$$

das ebene Grundgebiet kann durch das räumliche, ds durch $d\tau$ ersetzt werden.

Hieraus ergibt sich nach der mehrfach gebrauchten Methode die Abgeschlossenheitsrelation

$$\int (f0)^2 ds = \sum_{n}^{1,\infty} \left[\int f0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds\right]^2,$$

in der $f0$ eine stetige Funktion bedeutet; sie beruht wesentlich auf der Möglichkeit, eine stetige Funktion durch quellenmäßige annähernd darzustellen.

Weiter kann jetzt leicht eingesehen werden, daß die Anzahl der Eigenfunktionen unendlich ist. Denn aus der Integralgleichung

$$\varphi 1 = \lambda \int K(0,1)\, \varphi 0 \,.\, ds = \lambda \int \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + M(0,1)\right) \varphi 0 \,.\, ds,$$

in der M stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzt, folgt, daß die Größe $\varphi 1$ hinsichtlich ihrer Stetigkeitseigenschaften als Potential einer Masse von stetiger Dichtigkeit angesehen werden kann, also nach den allgemeinen Sätzen der Potentialtheorie stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Danach besitzt aber wieder die Dichtigkeit stetige Ableitungen erster Ordnung, also das Potential solche zweiter Ordnung usf.; da die Greensche Funktion an regulären Stellen nur stetige Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, gilt dasselbe von den Eigenfunktionen. Eben dies würde dann auch von einer linearen Verbindung endlich vieler Eigenfunktionen gelten; es könnte also nicht durch eine solche Verbindung eine Funktion mit unstetigen Ableitungen zweiter Ordnung dargestellt werden, was doch der allgemeine Darstellungssatz als möglich feststellt.

Beachten wir zum Schluß noch den lösenden Kern

$$\Gamma(0,1) = K(0,1) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n 0 \cdot \varphi_n 1}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}.$$

Die unendliche Reihe ist ebenso in jeder der beiden Stellen 0 und 1 bei fester Lage der anderen gleichmäßig konvergent, wie die Reihe

$$K^2(0,1) = \sum_n \frac{\varphi_n 0 \cdot \varphi_n 1}{\lambda_n^2};$$

die Größen $\Gamma(0,1)$ und $K(0,1)$ unterscheiden sich also um eine stetige Differenz $\theta(0,1)$; die Größe $\Gamma(0,1)$ hat dieselben Unstetigkeiten wie $K(0,1)$. Nun gilt die Resolvente

$$\Gamma(0,1) = K(0,1) + \lambda \int \Gamma(0,2) K(2,1)\, ds_2,$$

also, da $\Delta K(0,1) = \Delta_1 K(0,1) = 0$ ist,

$$\begin{aligned}\Delta_1 \Gamma(0,1) &= \lambda \Delta_1 \int \Gamma(0,2)\, K(2,1)\, ds_2 \\ &= \lambda \Delta_1 \int \bigl(K(0,2) + \theta(0,2)\bigr) K(2,1)\, ds_2 \\ &= \lambda \Delta_1 \int K(0,2) K(2,1) ds_2 + \lambda \Delta_1 \int \theta(0,2) K(2,1)\, ds_2 \\ &= \lambda \Delta_1 K^2(0,1) + \lambda \Delta_1 \int \theta(0,2)\, K(2,1)\, ds_2.\end{aligned} \tag{15}$$

Das erste Glied der rechten Seite ist aber leicht auszurechnen; K^2 ist von der Art eines Potentials, wie es am Schlusse des § 35 betrachtet ist, und damit bleibt, obwohl die Dichtigkeit stellenweise unendlich ist, die Poissonsche Gleichung erfüllt. Ist $K(0,2)$ die Dichtigkeit an der Stelle 2, so findet man hiernach

$$\Delta_1 K^2(0,1) = \Delta K^2(0,1) = -K(0,1)$$

und nach (15)

$$\Delta_1 \Gamma(0,1) = -\lambda\bigl(K(0,1) + \theta(0,1)\bigr) = -\lambda \Gamma(0,1).$$

Die Differentialgleichung

$$\Delta \Gamma + \lambda \Gamma = 0$$

hat also eine die Randbedingung erfüllende stetige Lösung, die als meromorphe Funktion von λ darstellbar ist; ihre Pole sind einfach und liegen an den Stellen λ_n.

§ 45.

Entwicklung unstetiger Funktionen.

Auf Grund des erhaltenen Resultates lassen sich auch Einsichten darüber gewinnen, inwiefern unstetige Funktionen oder solche, die unstetige Ableitungen besitzen, nach den Eigenfunktionen eines Kerns entwickelt werden können. Diese Sätze sind allerdings von speziellerem Charakter als die bisher erhaltenen und beziehen sich nur auf den Fall, daß die bilineare Formel in gewissem Sinne gilt.

Wir beschränken uns auf Gebiete von zwei Dimensionen, in denen der Kern $K(0, 1)$ unstetig wird wie $-(1/2\pi)\log r_{01}$.

Sei dl das Element einer im Grundgebiet verlaufenden Kurve $\mathfrak{K}$, in welchem der Punkt 0 liegt, N die Normale, die, wenn die Kurve geschlossen ist, nach außen gerichtet sein soll. Die Richtungen N und N' seien einander entgegengesetzt. Dann hat von den Integralen

$$\Phi 1 = \int_{\mathfrak{K}} dl . f0 . K(0, 1), \qquad \Theta 1 = \int_{\mathfrak{K}} dl . f0 \cdot \frac{dK(0,1)}{dN}$$

das erste die Eigenschaften des logarithmischen Potentials einer einfach belegten Linie, das zweite ist im wesentlichen das Potential einer doppelt belegten Linie. Dabei muß die Funktion $f0$ längs der Kurve $\mathfrak{K}$ mit ihrer ersten Ableitung stetig sein und, falls die Kurve $\mathfrak{K}$ im Rande des Grundgebietes endigt, in diesem verschwinden, um Singularitäten zu verhindern. Das Integral Φ bietet dann, wenn der Punkt 1 die Kurve $\mathfrak{K}$ passiert, für die in normaler Richtung gebildete Ableitung die aus der Potentialtheorie bekannte Unstetigkeit dar:

$$\frac{d\Phi 1}{dN_1} + \frac{d\Phi 1}{dN_1'} = -f1.$$

Das zweite Integral ist selbst in der Weise unstetig, daß die Gleichungen

$$\Theta_i = \Theta 1 - \tfrac{1}{2} f1, \qquad \Theta_a = \Theta 1 + \tfrac{1}{2} f1$$

bestehen; dabei sollen Θ_a und Θ_i die Grenzwerte bedeuten, denen sich die Größe Θ annähert, wenn man von der Seite, nach der die Richtung N hinweist, oder von der entgegengesetzten Seite gegen den der Kurve angehörigen Punkt 1 heranrückt. Ferner ist ohne weiteres ersichtlich, daß beide Größen Φ und Θ außerhalb der Linie $\mathfrak{K}$ im ganzen Grundgebiet dieselben Eigenschaften besitzen wie die quellenmäßigen Funktionen, insbesondere, daß sie die Randbedingungen der Greenschen Funktion erfüllen.

Wenn nun die bilineare Formel gilt und die Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 0 . \varphi_n 1}{\lambda_n}$$

gleichmäßig konvergiert, sobald der Abstand der Stelle 0 von der festen Stelle 1 über einer festen positiven Grenze bleibt, so kann man in dem Integral Φ gliedweise integrieren und erhält die Größe $\Phi 1$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n 1$ entwickelt; doch gilt diese Entwicklung zunächst nur außerhalb der Unstetigkeitslinie. Man hat also eine spezielle Funktion entwickelt, deren Ableitungen in der Kurve $\mathfrak{K}$ die oben angedeuteten Unstetigkeiten besitzt.

In den von uns näher untersuchten Fällen der §§ 38 bis 43 ist ferner auch die bilineare Reihe gliedweise differenzierbar in dem Sinne, daß die erhaltenen Reihen in demselben Gebiet gleichmäßig konvergieren wie die bilineare Reihe selbst. Man kann also auch für Θ eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen erhalten, also für eine Funktion, die an der Kurve $\mathfrak{K}$ selbst unstetig ist. Auch hier bleibt zweifelhaft, ob und in welchem Sinne die Entwicklung in der Unstetigkeitslinie selbst gilt.

Es muß noch festgestellt werden, ob die erhaltenen Entwicklungen Fouriersche sind in dem früher definierten Sinne, daß also z. B., wenn

$$\Phi 1 = \sum_n a_n \varphi_n 1$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$a_n = \int \Phi 0 . \varphi_n 0 . ds$$

besteht. Davon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise.

Man hat zunächst unmittelbar die Gleichung

$$a_n = \int_{\mathfrak{K}} f 0 \cdot \frac{\varphi_n 0}{\lambda_n} dl.$$

Setzt man hier ein

$$\frac{\varphi_n 0}{\lambda_n} = \int K(0, 2)\, \varphi_n 2 . d s_2,$$

so folgt

$$a_n = \int_{\mathfrak{K}} d l_0 f 0 . \int K(0, 2)\, \varphi_n 2 . d s_2.$$

Schließt man nun aus dem Grundgebiet einen beliebig schmalen, die Kurve $\mathfrak{K}$ umschließenden Streifen aus und bezeichnet den Rest durch $\mathfrak{G}'$, so kann man setzen

$$\int K(0, 2)\,\varphi_n 2 \,.\, d s_2 = \int\limits_{\mathfrak{G}'} K(0, 2)\,\varphi_n 2 \,.\, d s_2 + \varepsilon,$$

und ε liegt dem absoluten Betrage nach unter einer Grenze, die mit der Breite des ausgeschlossenen Streifens unendlich abnimmt und von der Stelle 0 unabhängig ist. Hieraus folgt

$$a_n = \varepsilon' + \int\limits_{\mathfrak{K}} d l_0 f 0 \,.\, \int\limits_{\mathfrak{G}'} K(0, 2)\,\varphi_n 2 \,.\, d s_2,$$

wobei ε' eine Größe von derselben Beschaffenheit wie ε bedeutet. Hier können die Integrationen vertauscht werden, so daß man erhält

$$a_n = \varepsilon' + \int\limits_{\mathfrak{G}'} d s_2 \,.\, \varphi_n 2 \,.\, \int\limits_{\mathfrak{K}} f 0 \,.\, K(0, 2)\, d l_0,$$

und da das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} f 0 \,.\, K(0, 2)\, d l_0$$

den Charakter eines Linienpotentials hat, also als Funktion der Stelle 2 im ganzen Grundgebiet stetig ist, so kann man in dem letzten für a_n gegebenen Ausdruck $\mathfrak{G}'$ durch $\mathfrak{G}$ ersetzen, ohne daß das Integral sich um mehr als einen Betrag ε'' ändert, der wiederum die Beschaffenheit der Größe ε besitzt. So erhält man die Gleichung

$$a_n = \varepsilon' + \varepsilon'' + \int\limits_{\mathfrak{G}} d s_2 \,.\, \varphi_n 2 \,.\, \int\limits_{\mathfrak{K}} f 0 \,.\, K(0, 2) d l_0$$

oder, da ε' und ε'' beliebig klein gemacht werden können,

$$a_n = \int d s_2 \,.\, \varphi_n 2 \,.\, \int\limits_{\mathfrak{K}} f 0 \,.\, K(0, 2) d l_0 = \int \varphi_n 2 \,.\, \Phi 2 \,.\, d s_2,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Genau in derselben Weise läßt sich der entsprechende Nachweis für die Reihe Θ führen, indem auch bei Funktionen von der Art der Größe $d K / d N$ die Integrationen vertauscht werden können.

Der Nutzen, den man aus den Funktionen Φ und Θ ziehen kann, wenn man allgemeinere Arten von Funktionen nach den Eigenfunktionen entwickeln will, beruht auf folgender Erwägung.

F sei eine beliebige Funktion des Ortes im Grundgebiet, die an der Kurve $\mathfrak{K}$ eine unstetige normale Ableitung besitzt, so daß die Gleichung

$$\frac{dF}{dN} + \frac{dF}{dN'} = -f0 \tag{1}$$

besteht. Die Funktion $f0$ sei wie oben mit ihrer ersten Ableitung längs der Kurve $\mathfrak{K}$ stetig und verschwinde am Rande des Integrationsgebietes, wenn dieser von der Kurve $\mathfrak{K}$ erreicht wird. Im übrigen erfülle die Funktion F die Bedingungen, unter denen man sie nach § 44 nach den Eigenfunktionen entwickeln kann. Dann hat die Differenz $F - \Phi$, die selbst stetig ist, im ganzen Grundgebiet, auch auf der Kurve $\mathfrak{K}$, stetige erste Ableitungen und stückweise stetige zweiter und dritter Ordnung und erfüllt ebenso wie die Größen Φ und Θ die Randbedingungen der Greenschen Funktion. Mithin sind für die Differenz $F - \Phi$ sämtliche Bedingungen erfüllt, unter denen sie nach § 44 auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann. Da nun dasselbe, wie gezeigt, von Φ gilt, so ist auch die Funktion F in der gewünschten Weise entwickelbar; nur bleibt das Verhalten der darstellenden Reihe in der Unstetigkeitslinie $\mathfrak{K}$ zweifelhaft.

Man hat so gewissermaßen der quellenmäßigen Funktion $F - \Phi$ eine besondere, auf die Fouriersche Weise entwickelbare Funktion Φ angefügt, welche die gewünschte Singularität der ersten Ableitung hervorruft.

In ähnlicher Weise kann nun mittels der Funktion Θ auch eine entwickelbare Funktion hergestellt werden, die selbst eine gegebene Unstetigkeit besitzt. Wäre F in der Kurve $\mathfrak{K}$ unstetig, so daß die Gleichung

$$F_i - F_a = -f0 \tag{2}$$

besteht und $f0$ dieselben Eigenschaften besitzt wie zuvor, so wäre die Differenz $F - \Theta$ im Grundgebiet quellenmäßig darstellbar, also auf die Fouriersche Weise entwickelbar und dasselbe würde wie von Θ so auch von der gegebenen Funktion F gelten, wenn diese außerhalb der Kurve $\mathfrak{K}$ überall die Eigenschaften der quellenmäßigen Funktionen besitzt.

Da nun ferner in ähnlicher Weise Unstetigkeiten, die in mehreren Kurven $\mathfrak{K}$ vorhanden sind, durch Subtraktion mehrerer entsprechend gebildeter Ausdrücke Φ oder Θ wegzuschaffen sind, so ist folgender Satz bewiesen: Die Funktion F sei in beliebig vielen Kurven $\mathfrak{K}$, die entweder geschlossen sind oder das Grundgebiet von einem Randpunkte zum anderen durchsetzen, sich gegenseitig aber nicht schneiden, unstetig, so daß Gleichungen von der Form (2) bestehen. In einem anderen System von Kurven $\mathfrak{K}'$, das dieselben Eigenschaften wie das System $\mathfrak{K}$ aufweise, seien die normalen Ableitungen der Funktion F unstetig, so daß Gleichungen von der Form (1) bestehen. Außerhalb der Linien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ habe die Funktion F stetige erste Ableitungen und stückweise stetige zweiter und dritter Ordnung, und sie erfülle die Randbedingung. Alsdann ist die Funktion F auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickelbar, wobei aber der Wert der erhaltenen Reihen in den Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zweifelhaft bleibt.

Mit diesem Satze ist das Problem der Entwicklung nach den Eigenfunktionen für die Fälle erledigt, in denen keine Randkurven vorhanden sind, wie z. B. für die in § 42 behandelte Wärmebewegung auf der Kugelfläche; die nach den erhaltenen Sätzen darstellbaren Funktionen dürften für alle Anwendungen, die in der mathematischen Physik vorkommen, allgemein genug sein.

§ 46.

Anwendung des Weylschen Satzes über Addition von Kernen.

Nachdem die Greenschen Funktionen als brauchbar unstetige Kerne nachgewiesen sind, können auch die Sätze des § 25 über Addition von Kernen auf sie angewandt werden.

Betrachten wir, um Bestimmtes vor Augen zu haben, nur Greensche Funktionen, die auf der Randlinie des Grundgebiets verschwinden. Das ursprüngliche ebene Grundgebiet $\mathfrak{G}$ enthalte in seinem Innern die voneinander getrennten Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_m$. Für jedes von diesen, etwa für $\mathfrak{G}_\nu$, werde die Greensche Funktion $G_\nu(0, 1)$ konstruiert und $= 0$ gesetzt, sowie mindestens eine der Stellen 0 und 1 aus dem Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ herausfällt; $G(0, 1)$ sei die Greensche Funktion des ganzen Gebiets $\mathfrak{G}$. Dann ist zunächst die Summe

$$K^{\mathrm{I}}(0, 1) = \sum_{\nu}^{1, m} G_\nu(0, 1)$$

ein brauchbar unstetiger Kern, und seine Eigenwerte sind die Eigenwerte aller Kerne $G_\nu(0, 1)$, deren jeder auf das Grundgebiet $\mathfrak{G}_\nu$ bezogen wird, zusammengenommen. In der Tat sei

$$(1) \qquad \varphi 1 = \lambda \int_{\mathfrak{G}} \varphi 0 . \left(G_1(0, 1) + \cdots + G_m(0, 1)\right) ds$$

eine Eigenfunktion des Kerns K^{I} und liege die Stelle 1 z. B. im Gebiet $\mathfrak{G}_1$; dann verschwinden $G_2(0, 1), \ldots G_m(0, 1)$ und man erhält, da G_1 in den Gebieten $\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_m$ verschwindet,

$$\varphi 1 = \lambda \int_{\mathfrak{G}} \varphi 0 . G_1(0, 1) ds = \lambda \int_{\mathfrak{G}_1} \varphi 0 . G_1(0, 1) ds;$$

$\varphi 1$ und λ sind also auch Eigenfunktion und zugehöriger Eigenwert des Kerns G_1 im Grundgebiet $\mathfrak{G}_1$, und umgekehrt leitet man aus der letzten Gleichung leicht die Beziehung (1) ab, womit die Behauptung betreffs der Eigenwerte des Kerns K^{I} bewiesen ist.

Wir wollen nun weiter zeigen, daß der Kern

$$K^{\mathrm{II}} = G - G_1 - G_2 - \cdots - G_m$$

positiv definit ist; dann ist

$$K = K^{\mathrm{I}} + K^{\mathrm{II}} = G$$

und der Satz des § 25 ergibt eine Beziehung zwischen den Eigenwerten der Kerne G und K^{I}. Zu diesem Zweck führen wir noch das Restgebiet $\mathfrak{G}_{m+1}$ ein, das übrig bleibt, wenn aus dem Grundgebiet $\mathfrak{G}$ die Teilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_m$ ausgeschieden werden, nennen G_{m+1} die zugehörige Greensche Funktion und setzen

$$L = K^{\mathrm{II}} - G_{m+1}.$$

Dann ist die Größe L auf dem Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig, hat aber an den Randlinien der Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ unstetige Ableitungen; gehören die Stellen 0 und 1 z. B. dem Gebiet $\mathfrak{G}_1$ an, so kann man

$$L(0, 1) = G(0, 1) - G_1(0, 1)$$

setzen und die Unstetigkeiten heben sich weg. Aus der Integralgleichung

$$(2) \qquad \varphi 1 = \lambda \int_{\mathfrak{G}} L(0, 1) \varphi 0 . ds$$

folgt aber, indem man nach den Koordinaten der Stelle 1 differenziert, daß die Größe $\varphi 1$ im Innern jedes Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$ stetige Ableitungen besitzt, die sich bestimmten Grenzen annähern, wenn die Stelle 1 auf die Randlinie rückt; sind $0'$ und $1'$ die die Randlinien durchlaufenden Stellen und N_i, N_a die beiden Normalrichtungen, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = \psi\, 0' \tag{3}$$

eine auf jeder Randlinie stetige Funktion der Stelle $0'$; die tangential längs der Randlinie genommene Ableitung verschwindet wegen der Randbedingung, setzt sich also stetig beim Durchschreiten der Randlinie fort.

Da ferner auf den Randlinien alle $m+1$ Funktionen $G_\nu(0', 1)$ verschwinden, teils wegen der Randbedingung der Greenschen Funktionen, teils weil die Stelle $0'$ sich außerhalb des Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$ befindet, so gibt die Gleichung (2)

$$\varphi\, 1' = \lambda \int_{\mathfrak{G}} G(1', 0)\, \varphi\, 0 \,.\, ds. \tag{4}$$

Sei nun $\mathfrak{C}$ die Gesamtheit der Randlinien der Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$, in denen $\nu = 1, 2, \ldots m$ ist; sei ferner dl' das zur Stelle $0'$ gehörige Bogenelement einer dieser Kurven; dann hat die Größe

$$\Phi\, 1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} G(0', 1)\, \psi\, 0' \,.\, dl',$$

wie in § 45 erwähnt, den Charakter eines Linienpotentials, dessen Unstetigkeit durch die Gleichung

$$\frac{\partial \Phi\, 0'}{\partial N_i} + \frac{\partial \Phi\, 0'}{\partial N_a} = \psi\, 0'$$

gekennzeichnet wird. Die Differenz $\Phi - \varphi$ hat also an den Randlinien stetige Ableitungen; sie erfüllt ferner die Gleichung

$$\Delta(\Phi - \varphi) = 0$$

und verschwindet ebenso wie Φ und φ auf dem Rande des Gebiets $\mathfrak{G}$; man erhält also aus der Potentialtheorie die Gleichung $\Phi = \varphi$, d. h.

$$\varphi\, 1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} G(0', 1)\, \psi\, 0' \,.\, dl'. \tag{5}$$

Nennen wir nun $\mathfrak{C}_\nu$ die im positiven Umlaufssinne durchlaufene Randlinie des Gebiets $\mathfrak{G}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots m$, so daß $\mathfrak{C}$

sich aus allen Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ zusammensetzt, so gibt die Gaußsche Integraltransformation

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_\nu}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]ds = -\int\limits_{\mathfrak{C}\nu}\varphi\, 0'\frac{\partial\varphi\, 0'}{\partial N_i}dl',$$

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{m+1}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]ds = -\int\limits_{\mathfrak{C}}\varphi\, 0'\frac{\partial\varphi\, 0'}{\partial N_a}dl';$$

in letzterer Gleichung ist benutzt, daß φ auf der Randlinie des Gesamtgebiets $\mathfrak{C}$ verschwindet. Addiert man diese Gleichungen, so folgt nach (3)

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]ds = -\int\limits_{\mathfrak{C}}\varphi\, 0'.\psi\, 0'.dl'. \tag{6}$$

Diese Gleichung kombinieren wir mit derjenigen, die sich ergibt, wenn der Wert (5) auf der rechten Seite der Gleichung (4) eingesetzt wird; setzt man

$$G^2(0', 1') = \int\limits_{\mathfrak{C}} G(0', 0)\, G(1', 0)\, ds,$$

so ergibt sich

$$\varphi 1' = \lambda\int\limits_{\mathfrak{C}} G^2(0', 1')\,\psi\, 0'.dl';$$

führt man diesen Wert in die Gleichung (6) ein, indem man die Integrationsstelle durch $1'$ bezeichnet, so folgt

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]ds = \lambda\int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}} G^2(0', 1')\,\psi\, 0'.\psi\, 1'.dl'dl_1'. \tag{7}$$

Anderseits ergibt sich, indem man die Gleichung (5) quadriert,

$$(\varphi\, 1)^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}} G(0', 1)\, G(1', 1)\,\psi\, 0'.\psi\, 1'.dl'dl_1',$$

und indem man über $\mathfrak{C}$ integriert,

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}(\varphi\, 1)^2 ds_1 = \int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}} G^2(0', 1')\,\psi\, 0'.\psi\, 1'.dl'dl_1';$$

die Gleichung (7) kann also geschrieben werden

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]ds = \lambda\int\limits_{\mathfrak{C}}(\varphi\, 0)^2 ds;$$

jeder Eigenwert λ, der zum Kern L gehört, ist also positiv, der Kern L ist definit-positiv.

Dasselbe gilt, wie nach § 36 von jeder Greenschen Funktion, von G_{m+1} als Kern des Grundgebiets $\mathfrak{G}_{m+1}$; man kann aber auch $\mathfrak{G}$ als Grundgebiet betrachten, indem man den Kern außerhalb des Teilgebiets $\mathfrak{G}_{m+1}$ verschwinden läßt; dann bleiben die Eigenwerte dieselben, und G_{m+1} kann auch als definit-positiver Kern im Grundgebiet $\mathfrak{G}$ gelten. Zwei solche Kerne ergeben nun der Hilbertschen Grundformel zufolge auch als Summe einen positiv-definiten Kern. Ist nämlich die rechte Seite dieser Formel für irgend einen Kern stets positiv, so kann kein Eigenwert negativ sein; wäre λ ein solcher und φx in der Bezeichnung des § 22 die zugehörige Eigenfunktion, so brauchte man in der Hilbertschen Formel nur $fx = \varphi x$ zu setzen, um rechts den negativen Wert $1/\lambda$ zu erhalten. Somit ist auch der Kern $K^{\mathrm{II}} = L + G_{m+1}$ definit-positiv.

Erinnern wir uns jetzt der Gleichung $K = K^{\mathrm{I}} + K^{\mathrm{II}}$ sowie dessen, was oben über die Eigenwerte der Kerne K und K^{I} festgestellt ist, so führt der Satz des § 25 zu folgendem Ergebnis. Scheidet man aus einem Grundgebiet $\mathfrak{G}$ die voneinander getrennten im Innern von $\mathfrak{G}$ liegenden Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_m$ aus, und nennt Eigenwerte jedes dieser Gebiete diejenigen, die die zugehörige am Rande verschwindende Greensche Funktion als Kern ergibt, so liegen unter einer beliebigen Schranke mindestens so viele Eigenwerte des Gebiets $\mathfrak{G}$, wie Eigenwerte der Gebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_m$ zusammengenommen.

Oder, physikalisch ausgedrückt: Schneidet man aus einer Membran beliebig viele Teilmembranen heraus, so bleiben mit ihrer Schwingungszahl unter einer beliebig gewählten positiven Schranke mindestens so viele Eigentöne der Membran, wie Eigentöne aller Teilmembranen zusammengenommen. Ein Sonderfall ist der Satz, daß bei Verkleinerung einer Membran der tiefste Eigenton seine Schwingungszahl nicht verkleinert.

Sechster Abschnitt.

Funktionentheoretische Methoden.

§ 47.

Thermoelastische Erscheinungen an geraden Stäben.

Nimmt man bei der Wärmeleitung in einem geraden Stabe, der sich von $x = 0$ bis $x = 1$ erstrecke, auf die Verzerrung Rücksicht, bezeichnet durch v die Längsverschiebung irgend eines Punktes des Stabes, durch u die Temperatur desselben, durch t die Zeit, so gelten nach Duhamel und Franz Neumann die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial t}, \qquad c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - p \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

a, b, c, p sind bei kleinen Verschiebungen Konstante. Die erste Gleichung sagt aus, daß die zeitliche Änderung der Dilatation $\partial v / \partial x$ die Temperatur beeinflußt; die zweite, daß die elastische Kraft $\partial^2 v / \partial x^2$ dem Wärmefluß proportional ist. Sind die Enden des Stabes frei oder werden sie festgehalten, so hat man die eine oder andere der Randbedingungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad v = 0;$$

für u hat man dieselben Randbedingungen wie im ersten und vierten Abschnitt.

Wir nehmen im besonderen an, die Enden des Stabes seien fest und werden auf der Temperatur 0 gehalten:

$$(2) \qquad v \Big|^{0,1} = 0, \qquad u \Big|^{0,1} = 0;$$

setzen wir noch $k^2 = a^2 c^2 / (c^2 + p b^2)$, so erfüllen wir die Gleichungen (1) sowie die Randbedingungen (2) durch den Ansatz

$$u = e^{-a^2 k^2 t} \varphi x, \qquad v = e^{-a^2 k^2 t} \Phi x$$

mit den Gleichungen

$$-\alpha^2 k^2 \varphi x = a^2 \varphi'' x + b^2 \alpha^2 k^2 \Phi' x, \qquad c^2 \Phi'' x - p\,\varphi' x = 0,$$

$$\varphi 0 = \varphi 1 = \Phi 0 = \Phi 1 = 0.$$

Aus diesen folgt, indem man die erste bestimmt, die zweite unbestimmt integriert,

$$-\alpha^2 k^2 \int_0^1 \varphi(x)\,dx = a^2(\varphi' 1 - \varphi' 0), \qquad c^2 \Phi' x = c^2 \Phi' 0 + p\,\varphi x,$$

und indem man die erste Gleichung nochmals benutzt und $q^2 = (-1 + a^2/k^2)^{-1} = c^2/b^2 p$ setzt,

$$\varphi'' x + \alpha^2 \varphi x = -\frac{1}{q^2}(\varphi' 1 - \varphi' 0), \qquad \varphi 0 = \varphi 1 = 0.$$

Eine Besonderung bestehe darin, daß der ganze Zustand zur Mitte des Stabes symmetrisch sei, also $\varphi x = \varphi(1-x)$; dann folgt $\varphi' 1 = -\varphi' 0$, $\varphi' {}^1/_2 = 0$; nur die Strecke von $x = 0$ bis $x = {}^1/_2$ braucht betrachtet zu werden und für sie als Grundgebiet erhält man die Randwertaufgabe

$$(3) \qquad \varphi'' x + \alpha^2 \varphi x = \frac{2}{q^2}\varphi' 0, \qquad \varphi 0 = \varphi' \frac{1}{2} = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen φx bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor in der Form

$$\varphi x = 1 - \cos \alpha x + \frac{\alpha q^2}{2} \sin \alpha x,$$

und die Randbedingung $\varphi' {}^1/_2 = 0$ ergibt die Gleichung

$$(4) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\alpha q^2 \cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

deren positive Wurzeln α_n seien, und für α gesetzt φx in $\varphi_n x$ überführen mögen.

Die Temperatur kann auf dem Grundgebiet in der Form

$$u = \sum_n a_n e^{-\alpha_n^2 k^2 t} \varphi_n x$$

angesetzt werden, wobei a_n konstante Werte sind, und um für $t = 0$ einen gegebenen Anfangszustand zu erhalten, ist auf dem Grundgebiet die Gleichung

$$(5) \qquad Fx = \sum_n a_n \varphi_n x$$

zu erfüllen. Nun sind aber die Funktionen $\varphi_n x$ keineswegs untereinander orthogonal, so daß die gewöhnliche Fouriersche Koeffizientenbestimmung versagt. Man erhält einen Ersatz, wenn es gelingt, Funktionen $\psi_n x$ zu finden, die mit den $\varphi_n x$ zusammen ein biorthogonales System bilden; d. h. daß die Gleichungen

$$\int \varphi_n x \,.\, \psi_m x \,.\, dx = 0, \qquad m \neq n$$

gelten, wenn über das Grundgebiet integriert wird. Das System heißt normiert, wenn die Gleichungen

$$\int \varphi_n x \,.\, \psi_n x \,.\, dx = 1$$

gelten; der Ansatz (5) ergibt dann zunächst als wahrscheinlich die Gleichung

$$\int F x \,.\, \psi_n x \,.\, dx = a_n.$$

Solche Funktionen $\psi_n x$ findet man in unserem Falle, indem man eine Differentialgleichung ansetzt, die sich möglichst erfolgreich mit der Gleichung (3) durch die Greensche Operation verbinden läßt, etwa

$$\psi'' + \beta^2 \psi = 0; \tag{6}$$

aus der sich ergibt

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^{1/2} \varphi\,\psi\, dx + (\varphi\,\psi' - \varphi'\,\psi)\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{q^2}\,\varphi' 0 \int_0^{1/2} \psi x \,.\, dx \tag{7}$$

oder, nach den Randbedingungen (3),

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^{1/2} \varphi\,\psi\, dx + \varphi\tfrac{1}{2}\cdot\psi'\tfrac{1}{2} - \varphi' 0 \left\{ \psi 0 + \frac{2}{q^2}\int_0^{1/2} \psi x \,.\, dx \right\} = 0.$$

Jetzt unterwerfe man ψ solchen Randbedingungen, daß alle Glieder außer dem ersten wegfallen, also

$$\psi'\tfrac{1}{2} = 0, \qquad \psi 0 + \frac{2}{q^2}\int_0^{1/2} \psi x \,.\, dx = 0; \tag{8}$$

die Gleichung (6) ergibt dann bis auf einen von x unabhängigen Faktor

$$\psi x = \cos\beta\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \qquad \sin\frac{\beta}{2} + \tfrac{1}{2}\beta q^2 \cos\frac{\beta}{2} = 0.$$

Die letzte Gleichung stimmt mit der Gleichung (4) überein, deren positive Wurzeln α_n sind; man kann also $\alpha = \pm\alpha_n$, $\beta = \pm\alpha_m$ setzen, und findet, wenn $\alpha_n \neq \alpha_m$, die gewünschte Gleichung

$$\int_0^{1/2} \varphi_n x \,.\, \psi_m x \,.\, dx = 0,$$

und da der Größe ψ, ohne die besprochenen Eigenschaften zu schädigen, ein konstanter Faktor beigefügt werden kann, darf auch normiert werden, so daß

$$\int_0^{1/2} \varphi_n x \,.\, \psi_n x \,.\, dx = 1.$$

Die Gleichung (7) zeigt ferner, wie eine Greensche Funktion unseres Grundgebiets gebildet werden kann, die als unsymmetrischer Kern einer Integralgleichung dient, deren Eigenfunktionen $\varphi_n x$ sind. Wir setzen $G = G(x, \xi)$, $G' = \partial G / \partial x$ und nehmen an, indem wir G den für ψ festgesetzten Randbedingungen unterwerfen,

$$(9) \quad \begin{gathered} G'' + \varrho^2 G = 0, \quad G'(\tfrac{1}{2}, \xi) = 0, \quad G(0, \xi) + \frac{2}{q^2}\int_0^{1/2} G(x, \xi)\, dx = 0, \\ G'(\xi - 0, \xi) - G'(\xi + 0, \xi) = 1. \end{gathered}$$

Die Greensche Operation ergibt, indem man die Gleichungen (3) heranzieht, die Gleichung (7), in der ψ und β durch G und ϱ ersetzt sind und ein von der Unstetigkeit der Größe G' herrührendes Glied erscheint:

$$(\varrho^2 - \alpha^2) \int_0^{1/2} \varphi x \,.\, G(x, \xi)\, dx + \varphi x \,.\, G'(x, \xi) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = 0,$$

$$\varphi_n \xi = (\alpha_n^2 - \varrho^2) \int_0^{1/2} \varphi_n x \,.\, G(x, \xi)\, dx.$$

Ebenso leicht erhält man eine Greensche Funktion $K(x, \xi)$, die für die Funktionen ψ_n entsprechendes leistet; man setzt für sie die für die Größen φ geltende Differentialgleichung mit den Randbedingungen, also die Gleichungen (3) an:

$$(10) \quad K''(x, \xi) + \varrho^2 K(x, \xi) = \frac{2}{q^2} K'(0, \xi), \quad K(0, \xi) = K'(\tfrac{1}{2}, \xi) = 0;$$

außerdem verlangt man die Unstetigkeit

$$K'(x, \xi) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = 1.$$

Durch Greensche Kombination der Gleichungen (10) und (6) ergibt sich wiederum die Gleichung (7), in der φ durch K ersetzt ist und ein von der Unstetigkeit herrührendes Glied hinzutritt:

$$(\varrho^2 - \beta^2) \int_0^{1/2} \psi x \,.\, K(x, \xi)\, dx + \psi \xi = 0,$$

womit, wenn $\beta = \alpha_n$ und $\psi = \psi_n$ gesetzt wird, die Integralgleichung für ψ_n hergestellt ist.

Ferner kann man noch die Gleichungen (9) und (10), in deren letzter ξ durch η ersetzt werde, in der Greenschen Weise kombinieren; man erhält die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&[G(x,\xi)K'(x,\eta) - G'(x,\xi)K(x,\eta)]\Big|_{\eta+0}^{\eta-0} \\
&+ [G(x,\xi)K'(x,\eta) - G'(x,\xi)K(x,\eta)]\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} \\
&+ [G(x,\xi)K'(x,\eta) - G'(x,\xi)K(x,\eta)]\Big|_{0}^{1/2} = \frac{2}{q^2}K'(0,\eta)\int_0^{1/2} G(x,\xi)\,dx,
\end{aligned}
$$

und da wegen der Randbedingungen (9), (10) alle Glieder wegfallen außer den von der Unstetigkeit herrührenden, folgt schließlich

$$K(\xi,\eta) - G(\eta,\xi) = 0, \qquad K(x,\xi) = G(\xi,x).$$

Die Funktionen des biorthogonalen Systems sind also Lösungen der Integralgleichungen

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_n\xi &= (\alpha_n^2 - \varrho^2)\int_0^{1/2} G(x,\xi)\,\varphi_n x\,.\,dx, \\
\psi_n\xi &= (\alpha_n^2 - \varrho^2)\int_0^{1/2} G(\xi,x)\,\psi_n x\,.\,dx,
\end{aligned}
$$

die mit gemeinsamem, unsymmetrischem Kern gebildet sind.

Daß auch umgekehrt jedes Lösungssystem dieser Integralgleichungen ein Paar der definierten Größen φ_n, ψ_n liefert, erkennt man, indem man allgemein die Größen

$$Fx = \int_0^{1/2} G(x,\alpha) f\alpha\,.\,d\alpha, \qquad \Phi x = \int_0^{1/2} G(\alpha,x) f\alpha\,.\,d\alpha,$$

quellenmäßige Funktionen erster und zweiter Art, wie wir sie nennen, wie bei symmetrischen Kernen untersucht. Man findet sofort aus den Unstetigkeiten der Greenschen Funktion, d. h. aus den Gleichungen (9) und (10)

$$F''x = -fx + \int_0^{1/2} G''(x,\alpha) f\alpha . d\alpha, \quad F'0 = \int_0^{1/2} G'(0,\alpha) f\alpha . d\alpha,$$

$$(12) \quad F''x + \varrho^2 Fx - \frac{2}{q^2} F'0 = -fx, \quad F0 = F'\tfrac{1}{2} = 0,$$

$$\Phi''x = -fx + \int_0^1 \frac{\partial^2 G(\alpha, x)}{\partial x^2} f\alpha . d\alpha,$$

$$(13) \quad \Phi''x + \varrho^2 \Phi x = -fx, \quad \Phi'\tfrac{1}{2} = 0, \quad \Phi 0 + \frac{2}{q^2}\int_0^{1/2} \Phi x . dx = 0.$$

Ist ϱ^2 von allen Werten α_n^2 verschieden, und ist fx gegeben, so sind durch diese Gleichungen die Größen F und Φ eindeutig festgelegt; denn die Differenz zweier Größen F z. B. würde eine Lösung der Gleichungen

$$\varphi''x + \varrho^2 \varphi x = \frac{2}{q^2} \varphi' 0, \qquad \varphi 0 = \varphi' \tfrac{1}{2} = 0$$

ergeben, die nur existiert, wenn $\varrho^2 = \alpha_n^2$. Jede Funktion Fx also, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist, kann, wenn sie die Grenzbedingungen

$$F0 = F'\tfrac{1}{2} = 0$$

erfüllt, als quellenmäßige Funktion erster Art dargestellt werden; ebenso als solche zweiter Art jede Funktion Φx, für die

$$\Phi'\tfrac{1}{2} = 0, \qquad \Phi 0 + \frac{2}{q^2}\int_0^{1/2} \Phi x . dx = 0,$$

und dieselben Stetigkeitseigenschaften wie für Fx gefordert werden. Man übersieht leicht, daß die Größen $F''x$ und $\Phi''x$ auf der Strecke von 0 bis $1/2$ nur stückweise stetig zu sein brauchen, wobei dann auch fx stückweise stetig ausfallen würde.

Jetzt seien F, Φ ein Lösungspaar der Integralgleichungen

$$(14) \quad Fx = \lambda_n \int_0^{1/2} G(x,\alpha) F\alpha . d\alpha, \quad \Phi x = \lambda_n \int_0^{1/2} G(\alpha, x) \Phi \alpha . d\alpha;$$

dann ist Fx in erster, Φx in zweiter Art quellenmäßig dargestellt und fx ist im ersten Falle durch $\lambda_n F$, im zweiten durch $\lambda_n \Phi$ zu ersetzen. Die Beziehungen (12) und (13) ergeben demnach

$$F'' + (\lambda_n + \varrho^2) F = \frac{2}{q^2} F' 0, \qquad \Phi'' + (\lambda_n + \varrho^2)\Phi = 0$$

nebst den dort angeführten Randgleichungen; man muß also nach den an die Gleichungen (3) und (6) geknüpften Bemerkungen

$$\lambda_n + \varrho^2 = \alpha_n^2, \qquad Fx = \varphi_n x, \qquad \Phi x = \psi_n x$$

setzen, wobei in φ_n und ψ_n ein konstanter Faktor willkürlich bleibt. Die Integralgleichungen (14) haben also jedem Eigenwert λ_n entsprechend nur ein einziges, bis auf einen konstanten Faktor bestimmtes Lösungssystem F, Φ.

Endlich kombinieren wir durch die Greensche Operation, indem wir G_ϱ für G und, wenn ϱ durch σ ersetzt wird, K_σ für K schreiben, die Gleichungen

$$G_\varrho''(x, \xi) + \varrho^2 G_\varrho(x, \xi) = 0,$$
$$K_\sigma''(x, \xi) + \sigma^2 K_\sigma(x, \xi) = \frac{2}{q^2} K_\sigma'(0, \xi),$$

und berücksichtigen die Randgleichungen der Größen G_ϱ und K_σ; dann ergibt sich

$$\int_0^{1/2} (K_\sigma G_\varrho'' - K_\sigma'' G_\varrho)\, dx + (\varrho^2 - \sigma^2) \int_0^{1/2} G_\varrho K_\sigma\, dx = 0$$

und hieraus

$$\begin{aligned}&[K_\sigma(x, \eta) G_\varrho'(x, \xi) - K_\sigma'(x, \eta) G_\varrho(x, \xi)] \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} \\ &+ [K_\sigma(x, \eta) G_\varrho'(x, \xi) - K_\sigma'(x, \eta) G_\varrho(x, \xi)] \Big|_{\eta+0}^{\eta-0} \\ &+ (\varrho^2 - \sigma^2) \int_0^{1/2} G_\varrho(x, \xi) K_\sigma(x, \eta)\, dx = 0,\end{aligned}$$

oder wegen der Unstetigkeiten der Größen G' und K'

$$K_\sigma(\xi, \eta) - G_\varrho(\eta, \xi) + (\varrho^2 - \sigma^2) \int_0^{1/2} G_\varrho(x, \xi) K_\sigma(x, \eta)\, dx = 0,$$

oder endlich, da $K(x, y) = G(y, x)$, in leicht geänderter Bezeichnung

$$(15) \qquad G_\sigma(x, y) - G_\varrho(x, y) + (\varrho^2 - \sigma^2) \int_0^{1/2} G_\varrho(\alpha, y) G_\sigma(x, \alpha)\, d\alpha = 0;$$

das ist die Resolvente der allgemeinen Theorie.

§ 48.

Die funktionentheoretische Methode.

Der greifbare Ausdruck der Greenschen Funktion $K_\varrho(x, \xi)$ ist aus den Gleichungen

$$K_\varrho'' + \varrho^2 K_\varrho = \frac{2}{q^2} K_\varrho'(0, \xi), \qquad K(0, \xi) = K'(\tfrac{1}{2}, \xi) = 0$$

leicht abzuleiten; man muß mit konstanten A, B, ... für den Fall $x < \xi$ etwa setzen

$$K_\varrho(x, \xi) = A \cos \varrho x + B \sin \varrho x + E,$$

für $x > \xi$ ebenso

$$K_\varrho(x, \xi) = C \cos \varrho x + D \sin \varrho x + E_1,$$

und erhält, da $0 < \xi < \frac{1}{2}$ ist,

$$E = E_1 = \frac{2B}{q^2 \varrho}, \qquad A + E = 0,$$

$$(1) \qquad A + \frac{2B}{q^2 \varrho} = 0, \qquad -C \sin \frac{\varrho}{2} + D \cos \frac{\varrho}{2} = 0.$$

Ferner ergibt die Stetigkeit der Größe K_ϱ und die Unstetigkeit der Größe K_ϱ' an der Stelle $x = \xi$

$$(A - C) \cos \varrho \xi + (B - D) \sin \varrho \xi = 0,$$

$$-A \sin \varrho \xi + B \cos \varrho \xi + C \sin \varrho \xi - D \cos \varrho \xi = \frac{1}{\varrho};$$

sieht man in diesen beiden und den Gleichungen (1) die Größen A, B, C, D als Unbekannte an, so ist die Determinante der Koeffizienten

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{2}{q^2 \varrho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \dfrac{\varrho}{2} & \cos \dfrac{\varrho}{2} \\ \cos \varrho \xi & \sin \varrho \xi & -\cos \varrho \xi & -\sin \varrho \xi \\ -\sin \varrho \xi & \cos \varrho \xi & \sin \varrho \xi & -\cos \varrho \xi \end{vmatrix},$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{2}{q^2 \varrho} & 0 & 0 \\ -\sin \dfrac{\varrho}{2} & \cos \dfrac{\varrho}{2} & -\sin \dfrac{\varrho}{2} & \cos \dfrac{\varrho}{2} \\ 0 & 0 & -\cos \varrho \xi & -\sin \varrho \xi \\ 0 & 0 & \sin \varrho \xi & -\cos \varrho \xi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \frac{\varrho}{2} + \frac{2}{q^2 \varrho} \sin \frac{\varrho}{2},$$

und die Unbekannten haben die Werte

$$A = -\frac{2}{q^2 \varrho^2 \varDelta} \cos \varrho \left(\tfrac{1}{2} - \xi\right),$$

$$B = \frac{1}{\varrho \varDelta} \cos \varrho \left(\tfrac{1}{2} - \xi\right),$$

$$C = \frac{1}{\varrho \varDelta} \cos \frac{\varrho}{2} \left(\sin \varrho \xi - \frac{2}{q^2 \varrho} \cos \varrho \xi\right),$$

$$D = \frac{1}{\varrho \varDelta} \sin \frac{\varrho}{2} \left(\sin \varrho \xi - \frac{2}{q^2 \varrho} \cos \varrho \xi\right).$$

Man erhält so für den Fall $x \leqq \xi$ den Ausdruck

$$K_\varrho(x, \xi) = \frac{1}{q^2 \varrho^2 \varDelta} \left[-2 \cos \varrho \left(\tfrac{1}{2} - \xi\right)(-1 + \cos \varrho x) + q^2 \varrho \cos \varrho \left(\tfrac{1}{2} - \xi\right) \sin \varrho x\right],$$

also eine gerade meromorphe Funktion von ϱ. Führen wir statt der trigonometrischen Exponentialgrößen ein, so erscheinen im Zähler Glieder von der Form $e^{\gamma \varrho i}$, $\varrho e^{\gamma \varrho i}$, in denen

$$\pm \gamma = \tfrac{1}{2} - \xi, \qquad \pm \gamma = \left(\tfrac{1}{2} - \xi\right) \pm x$$

sein kann; da $\xi - x$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und $\xi + x$ zwischen 0 und 1 liegt, hat man stets die Ungleichung

$$(2) \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq \gamma \leqq \tfrac{1}{2};$$

die Größe $\varrho K_\varrho(x, \xi)$, auf die es ankommen wird, setzt sich also zusammen aus Summanden wie

$$P = \frac{e^{\gamma \varrho i}}{\varDelta}, \quad \frac{P}{\varrho} = \frac{e^{\gamma \varrho i}}{\varrho \varDelta};$$

mit Faktoren, die von ϱ, x und ξ unabhängig sind; dabei ist

$$2 \varDelta = e^{1/2 \varrho i}\left(1 + \frac{2}{q^2 \varrho i}\right) + e^{-1/2 \varrho i}\left(1 - \frac{2}{q^2 \varrho i}\right)$$
$$= e^{-1/2 \varrho i}\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right)\left(e^{\varrho i} + 1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right);$$

wobei das vieldeutige Zeichen Ψ wie immer eine Größe bedeutet, deren absoluter Wert unter einer von ϱ unabhängigen Schranke liegt, wie groß auch $|\varrho|$ genommen werde. Man kann also setzen

$$(3) \qquad P = \frac{e^{\gamma \varrho i}}{\varDelta} = 2\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right) \frac{e^{(1/2 + \gamma) \varrho i}}{e^{\varrho i} + 1 + \dfrac{\Psi}{\varrho}},$$

und dabei ist nach (2)

$$(4) \qquad 0 \leqq \tfrac{1}{2} + \gamma \leqq 1.$$

Dies alles gilt aber auch für den Fall $x \geqq \xi$; dann zeigt der Ausdruck

$$K_\varrho(x, \xi) = \frac{(q^2 \varrho \sin \varrho \xi - 2 \cos \varrho \xi) \cos \varrho (\frac{1}{2} - x) + 2 \cos \varrho (\frac{1}{2} - \xi)}{q^2 \varrho^2 \Delta},$$

daß die Größe $\varrho K_\varrho(x, \xi)$ sich wiederum aus Ausdrücken P und P/ϱ zusammensetzt, wobei für $\pm \gamma$ die Werte

$$\tfrac{1}{2} - \xi, \quad \tfrac{1}{2} - x + \xi$$

auftreten, die wieder die Ungleichung (2) erfüllen, da jetzt $x - \xi$ nicht negativ ist.

In beiden Fällen $x \gtrless \xi$ erreicht übrigens die Größe γ die Grenzen der sie umfassenden Strecke nur, wenn $\xi = 0$ oder $x = \xi$; bleiben also $|\xi|$ und $|x - \xi|$ über festen Schranken, so gilt eine Ungleichung

$$\varepsilon_1 \leqq \tfrac{1}{2} + \gamma \leqq 1 - \varepsilon_2, \tag{5}$$

in der ε_1 und ε_2 feste positive Werte sind.

Hier wird nun die elementare Tatsache aus der Funktionentheorie wichtig, daß die Funktion

$$Z = \frac{e^{cz}}{e^z + 1} = \frac{e^{-(1-c)z}}{1 + e^{-z}},$$

wenn $0 \leqq c \leqq 1$ ist, in der ganzen Ebene der komplexen Größe z dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen von c unabhängigen Schranke verbleibt, sobald man die Pole $z = (1 \pm 2n)\pi i$ mit beliebigen einander nicht schneidenden Kreisen, die wir $\mathfrak{k}$ nennen, umschlossen und diese Kreisflächen ausgeschlossen hat. Das ist leicht einzusehen, wenn man $z = x + yi$, x und y reell setzt und beachtet, daß in jedem Streifen $-b < x < +b$ die Ungleichung

$$|e^{cz}| \leqq e^{bc} \leqq e^b$$

gilt, die Größe $|1/(1 + e^z)|$ aber wegen der Periodizität unter einer von c unabhängigen Schranke liegt, und daß in den Gebieten $x \geqq b$, $x \leqq -b$ beziehentlich die Ungleichungen

$$\left|\frac{e^{cz}}{e^z + 1}\right| \leqq \frac{e^{cx}}{e^x - 1} = \frac{e^{-(1-c)x}}{1 - e^{-x}} \leqq \frac{e^{-b(1-c)}}{1 - e^{-b}}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{e^{cz}}{e^z + 1}\right| \leqq \frac{e^{-bc}}{1 - e^x} \leqq \frac{e^{-bc}}{1 - e^{-b}} \tag{7}$$

gelten. Man kann daher unendlich viele Kurven $\mathfrak{K}_n$ zeichnen, die außerhalb der Kreise $\mathfrak{k}$ verlaufen und bei wachsenden Werten von n beliebig viele der Pole $z = 1 \pm 2n\pi i$ umfassen und auf denen die Größe $|Z|$ unter einer von n und c unabhängigen Schranke verbleibt. Wir wählen die Kurven $\mathfrak{K}_n$ so, daß der kleinste auf ihnen erreichte Wert von $|z|$ mit wachsenden Werten von n unendlich zunimmt, daß ferner jede Kurve $\mathfrak{K}_n$ in sich übergeht, wenn man x mit $-x$ oder y mit $-y$ vertauscht.

Setzt man für die Zahl c eine Ungleichung

$$\varepsilon_1 \leqq c \leqq 1 - \varepsilon_2 \tag{8}$$

an, in der ε_1 und ε_2 positive Werte sind, so können die Schranken (6) und (7) durch passende Wahl von b unabhängig von c unter beliebig klein gegebene Werte herabgedrückt werden; ist dies geschehen, so kann man in der Reihe der Kurven $\mathfrak{K}_n$ so weit gehen, daß über den in den Parallelstreifen $-b < x < +b$ hineinreichenden Bögen, die man auch bei den festgesetzten Symmetrien durch Kreisbögen um den Mittelpunkt $z = 0$ ersetzen kann, ein beliebig kleiner Zentriwinkel steht. Diese Bögen liefern also zu dem Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{K}_n} \frac{Z\,dz}{z - \zeta} = \int\limits_{\mathfrak{K}_n} \frac{Z}{1 - \dfrac{\zeta}{z}} \frac{dz}{z},$$

da dz/zi das Differential des Zentriwinkels ist, bei beliebigem festem Wert von ζ einen beliebig kleinen Beitrag, und zwar, da $|Z|$ in dem angegebenen Sinne beschränkt ist, unabhängig von c. Außerhalb des Parallelstreifens liegt aber $|Z|$ unter den Schranken (6), (7); also folgt

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{\mathfrak{K}_n} \frac{Z\,dz}{z - \zeta} = \lim_{n=\infty} \int\limits_{\mathfrak{K}_n} \frac{e^{cz}}{e^z + 1} \frac{dz}{z - \zeta} = 0, \tag{9}$$

und zwar gleichmäßig für alle Werte c im Gebiet (8). Das gilt nicht mehr, wenn $c = 0$ oder $c = 1$ gesetzt wird, und hier zeigen die Formeln eine bemerkenswerte Unstetigkeit.

Jetzt werde $z = \varrho i$ gesetzt, wodurch jede der Kurven $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}_n$ in eine Kurve $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{K}'_n$ in der Ebene der komplexen Größe ϱ übergehe. Sobald dann der absolute Betrag eines Pols der Greenschen Funktion G_ϱ hinreichend groß ist, liegt derselbe im Innern eines Kreises $\mathfrak{k}'$; sind doch diese Pole durch die Gleichung

$$\Delta = 0, \quad \cos\frac{\varrho}{2} + \frac{2}{q^2\varrho}\sin\frac{\varrho}{2} = 0$$

bestimmt, so daß bei großen Werten von ϱ annähernd

$$\cos\frac{\varrho}{2} = 0, \quad \varrho = \pm 2n\pi + \pi$$

gesetzt werden kann. Die Kurven $\mathfrak{K}'_n$ umfassen daher bei wachsenden Werten von n jede gegebene Menge von Polen der Greenschen Funktion G_ϱ oder Nullstellen der ganzen Funktion Δ. Und nun sieht man leicht, daß auch die Größe $e^{\gamma\varrho i}/\Delta$ auf den Kurven $\mathfrak{K}'_n$ beschränkt bleibt, d. h. absolut unter einer von n unabhängigen Schranke liegt. Schreibt man nämlich noch für die oben eingeführte Größe P den Ausdruck

$$P = \frac{e^{\gamma\varrho i}}{\Delta} = 2\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right)\cdot\frac{e^{(1/2+\gamma)\varrho i}}{e^{\varrho i}+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{\Theta}{\varrho}},$$

$$\Theta = \frac{\Psi}{1+e^{\varrho i}},$$

so ist die Größe $(1+e^{\varrho i})^{-1}$, mithin auch Θ auf den Kurven $\mathfrak{K}'_n$ beschränkt; auf diesen kann also Θ auch durch Ψ bezeichnet und im ganzen geschrieben werden

$$P = \frac{e^{\gamma\varrho i}}{\Delta} = 2\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right)\cdot\frac{e^{(1/2+\gamma)\varrho i}}{1+e^{\varrho i}}.$$

Der letzte Bruchfaktor dieses Ausdrucks ist aber, da die Zahl $1/2+\gamma$ nach (4) der Strecke von 0 bis 1 angehört, genau von der soeben betrachteten Form $e^{cz}/(1+e^z)$, also wiederum auf den Kurven $\mathfrak{K}'_n$ beschränkt, und die Schranken sind von c, also von γ, x und ξ unabhängig. In diesem Sinne ist also die Größe P und um so mehr die Größe P/ϱ beschränkt, mithin auch die Größe $\varrho\, G_\varrho(x, \xi)$, die sich aus endlich vielen Summanden wie P und P/ϱ zusammensetzt.

Wenn nun überhaupt eine meromorphe Funktion $\mathfrak{f}\varrho$ die Eigenschaft hat, daß das Produkt $\varrho . \mathfrak{f}\varrho$ auf unendlich anschwellenden Kurven wie $\mathfrak{K}'_n$ beschränkt bleibt und σ von allen a_n verschieden ist, so gilt offenbar die Gleichung

$$\text{(10)} \qquad \lim_{n=\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}'_n}\frac{\mathfrak{f}\varrho . d\varrho}{\varrho-\sigma} = \lim_{n=\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}'_n}\frac{\varrho . \mathfrak{f}\varrho}{\varrho-\sigma}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho} = 0,$$

und wenn a_n die Pole der Funktion $\mathfrak{f}\varrho$ sind, in deren Umgebung die Entwicklung

$$\mathfrak{f}\varrho = \mathfrak{G}_n\left(\frac{1}{\varrho-a_n}\right) + \mathfrak{P}_n(\varrho-a_n)$$

gilt, wobei $\mathfrak{G}_n$ ein Polynom ohne konstantes Glied und $\mathfrak{P}_n$ eine Potenzreihe bedeutet, so hat die ebenfalls meromorphe Funktion $\mathfrak{f}\varrho/(\varrho-\sigma)$ an der Stelle $\varrho = a_n$ das Residuum

$$-\mathfrak{G}_n\left(\frac{1}{\sigma-a_n}\right);$$

liegen also die Pole a_ν innerhalb einer Kurve $\mathfrak{K}'_n$, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}'_n}\frac{\mathfrak{f}\varrho\cdot d\varrho}{\varrho-\sigma}=\mathfrak{f}\sigma-\sum_\nu\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{\sigma-a_\nu}\right),$$

und die Gleichung (10) gibt die Cauchysche Teilbruchentwicklung

$$\mathfrak{f}\varrho=\sum_n\mathfrak{G}_n\left(\frac{1}{\varrho-a_n}\right)=\lim_{n=\infty}\sum_\nu\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{\varrho-a_\nu}\right),$$

in der die Summationsfolge in gewissem Sinne bestimmt ist. Ist z. B. $\mathfrak{f}\varrho$ eine gerade Funktion und sind die Pole reell und einfach, so liegen zwei entgegengesetzte von ihnen immer innerhalb derselben Kurven $\mathfrak{K}'_n$, die ja bezüglich der Achsen symmetrisch gewählt sind, und die zugehörigen Polynome $\mathfrak{G}$ geben eine Summe

$$\frac{M}{\varrho-a}-\frac{M}{\varrho+a}=\frac{2Ma}{\varrho^2-a^2};$$

sind α_n die positiven Pole und R_n von ϱ unabhängige Größen, so erhält man also eine Teilbruchentwicklung

$$\mathfrak{f}\varrho=\sum_n\frac{R_n(x,\xi)}{\varrho^2-\alpha_n^2},$$

im besonderen

$$K_\varrho(\xi,x)=G_\varrho(x,\xi)=\sum_n\frac{R_n(x,\xi)}{\varrho^2-\alpha_n^2},$$

und da die Schranken der Größe $\varrho\, G_\varrho(x,\xi)$ von x und ξ unabhängig sind, konvergiert diese Reihe ebenso wie der Grenzübergang (10) in x und ξ gleichmäßig, solange eine der beiden Voraussetzungen $x\leqq\xi$ und $x\geqq\xi$ festgehalten wird.

Die Residuen R_n bestimmen sich leicht aus der Resolvente § 47 (15). Setzt man in dieser, wie offenbar möglich,

$$G_\varrho(x,y)=\frac{R_1(x,y)}{\varrho^2-\alpha_1^2}+\Re_\varrho(x,y), \tag{11}$$

wobei $\Re_\varrho$ an der Stelle $\varrho=\alpha_1$ in ϱ regulär ist, so ergibt sich

$$(\varrho^2-\alpha_1^2)\,G_\sigma(x,y)-R_1(x,y)-(\varrho^2-\alpha_1^2)\,\Re_\varrho(x,y)$$
$$+(\varrho^2-\sigma^2)\int\limits_0^{1/2}[R_1(\alpha,y)+(\varrho^2-\alpha_1^2)\,\Re_\varrho(\alpha,y)]\,G_\sigma(x,\alpha)\,d\alpha=0,$$

also wenn man $\varrho=\alpha_1$ setzt und dann ϱ für σ schreibt,

$$R_1(x,y)=(\alpha_1^2-\varrho^2)\int\limits_0^{1/2}G_\varrho(x,\alpha)\,R_1(\alpha,y)\,d\alpha;$$

ebenso ergibt der Ansatz

$$G_\sigma(x, y) = \frac{R_1(x, y)}{\sigma^2 - \alpha_1^2} + \Re_\sigma(x, y),$$

indem man $\sigma = \alpha_1$ setzt, die Gleichung

$$R_1(x, y) = (\alpha_1^2 - \varrho^2) \int_0^{1/2} G_\varrho(\alpha, y)\, R_1(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Das Residuum $R_1(x, y)$ erfüllt also als Funktion von x die Integralgleichung der Funktion $\psi_1 x$, als Funktion von y diejenige der Funktion $\varphi_1 y$. Da nun nach § 47 diese Integralgleichungen nur je eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung haben, da ferner für α_1 offenbar jedes α_n genommen werden kann, so folgt, wenn c_n Konstante sind,

$$R_n(x, y) = c_n\, \varphi_n y \,.\, \psi_n x.$$

Sind nun die Funktionen φ_n und ψ_n normiert, so daß

$$\int_0^{1/2} \varphi_n \alpha \,.\, \psi_n \alpha \,.\, d\alpha = 1,$$

so ergibt die Gleichung (11) oder

$$G_\varrho(x, y) = \frac{c_1\, \varphi_1 y \,.\, \psi_1 x}{\varrho^2 - \alpha_1^2} + \Re_\varrho(x, y),$$

indem man mit $\psi_1 y$ multipliziert und integriert und die Integralgleichung der Funktion $\psi_1 x$ nach § 47 (11) benutzt,

$$-\psi_1 x = c_1 \psi_1 x + (\varrho^2 - \alpha_1^2) \int_0^{1/2} \Re_\varrho(x, y)\, \psi_1 y \,.\, dy,$$

also, indem man $\varrho = \alpha_1$ setzt, $c_1 = -1$ und ebenso allgemein

$$c_n = -1, \quad R_n(x, y) = -\varphi_n y \,.\, \psi_n x.$$

Damit ist für den unsymmetrischen Kern $G_\varrho(x, y)$ die bilineare Formel

$$G_\varrho(x, y) = \sum_n \frac{\psi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n} = \sum_n \frac{\psi_n x \,.\, \varphi_n y}{\alpha_n^2 - \varrho^2}$$

bewiesen; die Reihe konvergiert im Grundgebiet nach beiden Größen x und y gleichmäßig. Multipliziert man mit einer im Grundgebiet stetigen oder auch nur stückweise stetigen Funktion

fx und integriert, so erhält man die allgemeinste quellenmäßige Funktion zweiter Art nach den Eigenfunktionen φ_n entwickelt:

$$\Phi y = \int_0^{1/2} G(x, y) fx . dx = \sum_n \frac{\varphi_n y}{\lambda_n} \int_0^{1/2} fx . \psi_n x . dx$$

oder auch

$$\Phi y = \sum_n a_n \varphi_n y,$$

wobei aus den Integralgleichungen § 47 (11) leicht folgt

$$a_n = \int_0^{1/2} \Phi x . \psi_n x . dx,$$

wie es nach § 47 gewünscht wird.

Um die bilineare Reihe auch als gliedweise differenzierbar nachzuweisen, beachten wir, daß die Größen $\partial G_\varrho(x, y)/\partial x$ und $\partial G_\varrho(x, y)/\partial y$ aus Gliedern derselben Form bestehen wie $\varrho G_\varrho(x, y)$, also aus Gliedern wie P und P/ϱ. In der Gleichung

$$\int_{\mathfrak{K}'_n} \frac{P d\varrho}{\varrho - \sigma} = 2 \int_{\mathfrak{K}'_n} \frac{e^{(1/2+\gamma)\varrho i} d\varrho}{(1 + e^{\varrho i})(\varrho - \sigma)} + 2 \int_{\mathfrak{K}'_n} \frac{\Psi}{\varrho(\varrho - \sigma)} \frac{e^{(1/2+\gamma)\varrho i} d\varrho}{1 + e^{\varrho i}}$$

verschwindet das zweite Glied rechts, wie früher, wenn n unendlich anwächst, das erste aber nach (10) nur, wenn die Größe $1/2 + \gamma$ von 0 und 1 feste Mindestabstände wahrt; das erfordert nach den an die Ungleichung (5) geknüpften Bemerkungen, daß die Größen $|\xi|$ und $|x - \xi|$ über festen, wenn auch beliebig klein festgelegten Schranken verbleiben. Unter dieser Voraussetzung ergibt die Gleichung (9) den gleichmäßig konvergenten Grenzübergang

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{K}'_n} \frac{P d\varrho}{\varrho - \sigma} = 0,$$

und diese Gleichung bleibt gültig, wenn man P durch P/ϱ ersetzt, schon wegen der Beschränktheit der Größe P auf den Kurven $\mathfrak{K}'_n$. Damit wird klar, daß man für $\mathfrak{f}\varrho$ in der Cauchyschen Teilbruchentwicklung auch $\partial G_\varrho/\partial x$ und $\partial G_\varrho/\partial \xi$ schreiben darf, daß man also diese Größen in Teilbruchreihen von der Form

$$G'_\varrho(x, \xi) = \sum_n \frac{\overline{R}_n(x, \xi)}{\alpha_n^2 - \varrho^2}, \quad \frac{\partial G_\varrho(x, \xi)}{\partial \xi} = \sum_n \frac{R_n^0(x, \xi)}{\alpha_n^2 - \varrho^2}$$

entwickeln kann, die aber in x und ξ gleichmäßig nur unter der angegebenen Bedingung konvergieren. Daß dabei

$$\overline{R}_n(x, \xi) = \varphi_n \xi . \psi'_n x, \quad R_n^0(x, \xi) = \varphi'_n \xi . \psi_n x$$

wird, ist aus der Integrierbarkeit dieser Reihen nach x und ξ leicht zu übersehen.

Mit Rücksicht auf die Unstetigkeit der Größen G'_ϱ und $\partial G_\varrho / \partial \xi$ sowie auf den oben in § 47 festgelegten Umfang des Begriffs der quellenmäßigen Funktion leitet man jetzt nach der Methode des § 30 ab, daß jede mit ihren ersten beiden Ableitungen auf dem Grundgebiet stückweise stetige Funktion Fx, die die Gleichungen $F0 = F'\frac{1}{2} = 0$ erfüllt, nach den Eigenfunktionen $\varphi_n x$ auf die abgeänderte Fouriersche Weise entwickelt werden kann.

Ähnliches gilt für die Entwicklung nach den Funktionen $\psi_n x$, wobei aber an den Enden des Grundgebiets etwas andere Bedingungen zu erfüllen sind.

§ 49.

Die Sturm-Liouvillesche Aufgabe im komplexen Gebiet.

Sei, wie im vierten Abschnitt, das Sturm-Liouvillesche Problem, indem wir uns auf eine besondere Art von Randbedingungen beschränken, durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\lambda - L) V = 0, \qquad V \Big|^{0,1} = 0$$

ausgedrückt, wobei nun aber L auch komplex sein möge, was auch bei Anwendungen bisweilen gefordert wird. Dann versagt die Theorie des dritten Abschnitts, da sie wesentlich auf reelle Verhältnisse zugeschnitten ist; dagegen bleibt die funktionentheoretische Methode der letzten Paragraphen erfolgreich.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Bemerkung. Wenn die Größen P, Q in der Differentialgleichung

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

einen komplexen Parameter ϱ enthalten und in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ desselben reguläre Funktionen von ϱ sind, während x etwa die Strecke von 0 bis 1 durchläuft, so ist auch jedes Integral, das an der Stelle $x = 0$ auf eine von ϱ unabhängige Weise festgelegt ist, im Gebiet $\mathfrak{G}$ eine reguläre Funktion von ϱ. Seien etwa y und y' an der Stelle $x = 0$ gegebenen, von ϱ unabhängigen Werten gleich, dann folgt das Behauptete daraus, daß das Integral nach der Methode der stufenweise fortschreitenden Annäherungen in einer Reihe dargestellt werden kann, die gleichmäßig konvergiert, solange P und Q gewisse Werte nicht überschreiten. Im besonderen sei

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\varrho^2 - L) V = 0, \quad V \Big|^0 = 0, \quad \frac{d V}{d x}\Big|^0 = 1,$$

und L von ϱ frei; dann kann das Gebiet $\mathfrak{G}$ in der Ebene der komplexen Zahlen ϱ beliebig genommen werden und V ist eine ganze transzendente Funktion von ϱ. Dasselbe gilt von dem Integral $U = \varrho \,.\, V$, für das die Gleichungen

$$U\Big|^0 = 0, \quad \frac{d U}{d x}\Big|^0 = \varrho$$

bestehen, und das wie in § 29 (5) geschrieben werden kann

$$U = \sin \varrho x + \frac{1}{\varrho}\int_0^x L' U' \sin \varrho (x - x')\, d x',$$

wobei L' und U' aus L und U entstehen, indem man x durch x' ersetzt.

Jetzt sei $\varrho = \alpha + \beta i$, α und β reell, $\beta \geqq 0$; dann gibt die letzte Gleichung

$$(1) \qquad U e^{\varrho i x} = \frac{e^{2 \varrho i x} - 1}{2 i} + \frac{1}{\varrho}\int_0^x L' U' e^{\varrho i x'} \,.\, \frac{e^{2 \varrho i (x - x')} - 1}{2 i}\, d x'.$$

Dabei ist offenbar, wenn immer $x \geqq 0$ genommen wird,

$$(2) \qquad x \geqq x', \qquad |e^{\varrho i x}| \leqq 1, \qquad |e^{2 \varrho i (x - x')}| \leqq 1,$$

also auch

$$(3) \qquad \left|\frac{e^{2 \varrho i (x - x')} - 1}{2 i}\right| \leqq 1.$$

Ist nun L stetig auf einer Strecke von $x = 0$ bis $x = a$ und ist $a > 0$, so sei g der größte Wert von $|U e^{\varrho i x}|$ auf dieser Strecke; dann gibt die Gleichung (1)

$$g \leqq 1 + \frac{g}{|\varrho|}\int_0^a |L|\, d x;$$

der in § 29 benutzte Liouvillesche Schluß ist anwendbar und man findet, sobald $|\varrho|$ hinreichend groß geworden ist,

$$(4) \qquad g < 1 + \varepsilon,$$

wobei ε beliebig klein und positiv gewählt sei. Dies gilt sogar, wenn $|L|$ bis zur Grenze $+\infty$ integriert werden kann, für die ganze positive Achse der Zahlen x; man hat dann

$$g\left(1 - \frac{1}{|\varrho|}\int_0^\infty |L|\, d x\right) < 1,$$

woraus wiederum die Beziehung (4) folgt, oder auch die Ungleichung

$$|U e^{\varrho i x}| < 2.$$

Führen wir diese in die Gleichung (1) ein, so ergeben die Beziehungen (2) und (3)

$$U e^{\varrho i x} = \frac{e^{2\varrho i x} - 1}{2i} + \frac{\Psi}{\varrho}, \tag{5}$$

wobei $|\Psi|$ unter einer endlichen von ϱ und x unabhängigen Schranke liegt; ist z. B.

$$|\varrho| > 2\int_0^\infty |L|\, dx,$$

so ist $g < 2$, und

$$|\Psi| < 2\int_0^\infty |L|\, dx.$$

Dabei läuft x von 0 bis a oder auch bis $+\infty$, je nach den Voraussetzungen, die man über L machen kann.

Die Größe U ist im wesentlichen, was in § 27 durch φx bezeichnet wurde, wenn ϱ als gegeben, λ als gesucht angesehen wird und die Randwertaufgabe lautet

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\lambda + \varrho^2 - L) V = 0, \qquad V\Big|^{0,1} = 0.$$

Um die Greensche Funktion für das von $x = 0$ bis $x = a$ erstreckte Grundgebiet zu bilden, muß neben φx noch eine Funktion ψx eingeführt werden, die ebenfalls ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\varrho^2 - L) V = 0$$

ist und an der Stelle $x = a$ verschwindet. Führt man $x - a$ als neue unabhängige Variable ein, so kann ψx genau so wie vorher φx definiert werden, nur daß jetzt L durch die Größe $\overline{L} = L(a - x)$ ersetzt wird. Man kann also setzen:

$$\psi x = A\, \overline{\varphi}(a - x); \tag{6}$$

A ist eine verfügbare Konstante und $\overline{\varphi} x$ erfüllt die Gleichungen

$$\frac{d^2\overline{\varphi}}{d x^2} + (\varrho^2 - \overline{L})\overline{\varphi} = 0, \qquad \overline{\varphi} 0 = 0, \qquad \frac{d\overline{\varphi}}{dx}\Big|^0 = \varrho.$$

Die Gleichung (5) ist also anwendbar, indem man U durch $\overline{\varphi} x$ ersetzt und ergibt:

$$\psi x \,.\, e^{\varrho i (a - x)} = A\left[\frac{e^{2\varrho i (a - x)} - 1}{2i} + \frac{\Psi}{\varrho}\right]; \tag{7}$$

wenn x von 0 bis a läuft, ist für die Schranken der Größe Ψ maßgebend das Integral auf der linken Seite der Ungleichung

$$\int_0^a |\overline{L}|\, d x < \int_0^\infty |L|\, d x;$$

jene Schranken können also von a unabhängig festgelegt werden.

Die Greensche Funktion definieren wir nun nach Anleitung des § 27 durch die Gleichungen:

$$G(x, \xi) = \frac{\varphi x \,.\, \psi \xi}{\varphi' x \,.\, \psi x - \varphi x \,.\, \psi' x}, \qquad x < \xi,$$

$$G(x, \xi) = \frac{\varphi \xi \,.\, \psi x}{\varphi' x \,.\, \psi x - \varphi x \,.\, \psi' x}, \qquad x > \xi;$$

der Nenner dieser Brüche ist konstant, also, da $x = 0$ gesetzt werden kann,

$$\varphi' 0 \,.\, \psi 0 = A \varrho \,.\, \overline{\varphi}\, a.$$

Hiernach erhält man aus den Formeln (5) und (7) für die Greensche Funktion im Falle $x < \xi$ den Ausdruck:

$$(8) \quad G(x, \xi) = \frac{e^{\varrho i (\xi - x)} (e^{2 \varrho i x} - 1 + \Psi/\varrho)(e^{2 \varrho i (a - \xi)} - 1 + \Psi/\varrho)}{2 i \varrho (1 + \Psi/\varrho)(e^{2 \varrho i a} - 1 + \Psi/\varrho)},$$

und eine Schranke der verschiedenen durch $|\Psi|$ bezeichneten Größen ist von x, ξ, ϱ und a unabhängig, sobald $|\varrho|$ eine gewisse Grenze überschritten hat.

An diesen Ausdruck knüpfen wir zunächst eine Bemerkung, die sich später als wichtig erweisen wird, indem wir den Grenzübergang $a = +\infty$ vollziehen unter der Voraussetzung, daß es möglich ist, die in $G(x, \xi)$ nicht vorkommende Konstante A als Funktion von a so zu bestimmen, daß der Grenzübergang

$$\lim_{a = +\infty} \psi x = \lim_{a = +\infty} A\, \overline{\varphi}(a - x) = \psi_\infty x$$

oder doch wenigstens der Grenzübergang

$$\lim_{a = +\infty} G(x, \xi) = G_\infty(x, \xi)$$

konvergiert. Da nämlich, wenn β über einer positiven Schranke liegt, offenbar die Beziehung

$$\lim_{a = +\infty} e^{2 \varrho i a} = \lim_{a = +\infty} e^{2 a i}\, e^{-2 \beta a} = 0$$

gilt, da ferner $\xi - x \geqq 0$, also

$$|e^{\varrho i x}| \leqq 1, \qquad |e^{\varrho i (\xi - x)}| \leqq 1,$$

so folgt, daß die nach der Gleichung (8) gebildete Größe

$$\varrho\, G_\infty(x, \xi) = \frac{e^{\varrho i(\xi - x)}(e^{2\varrho i} - 1 + \Psi/\varrho)(-1 + \Psi/\varrho)}{2i(1 + \Psi/\varrho)(-1 + \Psi/\varrho)}$$

bei beliebig großen Werten von $|\varrho|$ beschränkt bleibt; maßgebend ist dabei, was wir über die Schranken der Größen $|\Psi|$ gesagt haben, die von ϱ, a, x und ξ unabhängig sind. Es gibt also eine positive Schranke g derart, daß $|\varrho\, G_\infty(x,\xi)| < g$, sobald $|\varrho|$ eine gewisse Schranke g_0 überschritten hat und β über einer positiven Schranke liegt.

Doch kehren wir zu endlichen Werten von a zurück. Da φx und ψx in diesem Falle ganze Funktionen von ϱ sind, ist G eine meromorphe Funktion, die sich nach der in § 48 gebrauchten Methode in Teilbrüche zerlegen läßt. Denn im Zähler sind die von einem Faktor Ψ/ϱ freien Glieder $e^{\varrho i u}$, wobei u einer der Werte $\xi - x$, $x + \xi$, $2a - \xi + x$, $2a - x - \xi$ ist, die alle, da $x \leqq \xi$, der Strecke von 0 bis $2a$ angehören; man erhält daher für $\varrho\, G(x, \xi)$ eine Anzahl von Gliedern der Form

$$\frac{e^{\varrho i u}\left(1 + \dfrac{\Psi}{\varrho}\right)}{e^{2\varrho i a} - 1 + \dfrac{\Psi_0}{\varrho}}$$

mit konstanten Faktoren, oder indem man diese ändert und $u = 2a\gamma$, $z = (2\varrho a + \pi)i$ setzt, von der Form

$$P = \frac{e^{\gamma(2\varrho a + \pi)i}\left(1 + \dfrac{\Psi}{\varrho}\right)}{e^{(2\varrho a + \pi)i} + 1 + \dfrac{\Psi_0}{\varrho}} = \frac{e^{\gamma z}\left(1 + \dfrac{\Psi}{\varrho}\right)}{e^z + 1 + \dfrac{\Psi_0}{\varrho}};$$

dabei ist $0 \leqq \gamma \leqq 1$; es kann also $\gamma = c$ im Sinne der allgemeinen Theorie des § 48 gesetzt werden. Auf den dort betrachteten Kurven $\mathfrak{K}_n$ ist nun die Größe $1/(1 + e^z)$ beschränkt, mithin auch

$$\Theta = \frac{\Psi_0}{1 + e^z};$$

man kann daher für P schreiben

$$P = \frac{e^{cz}}{c^z + 1} \cdot \frac{1 + \dfrac{\Psi}{\varrho}}{1 + \dfrac{\Theta}{\varrho}} = \frac{e^{cz}}{e_z + 1}\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right),$$

und die letzte Größe Ψ behält die diesem Zeichen zugewiesene Beschränktheit jedenfalls auf den Kurven $\mathfrak{K}_n$ der z-Ebene; die bisher geltende Bedingung $\beta \geqq 0$ kann wegfallen, da $G(x, \xi)$ eine in ϱ gerade Funktion ist. Die Größe P kann also für die gleichbezeichnete in § 48 genommen werden, und es folgt wie dort, daß die Greensche Funktion in die bilineare Reihe entwickelt werden kann und daß diese gliedweise differenziert werden darf. Damit sind die Grundlagen für die Darstellungssätze gegeben, die hier dieselbe Form erhalten wie bei der reellen Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe. Die bei dieser Untersuchung benutzte Resolvente für die Greensche Funktion und die Integralgleichung für die Eigenfunktionen folgen genau nach der Methode des § 28.

Daß aber überhaupt Pole der Greenschen Funktion, also Eigenwerte, und zwar in unendlicher Anzahl vorhanden sind, was in § 28 aus der Theorie der reellen Integralgleichungen geschlossen werden konnte, ergibt sich hier funktionentheoretisch aus der asymptotischen Darstellung (8); diese ergibt für den Nenner der Greenschen Funktion bei der Annahme $\beta \geqq 0$ den Ausdruck

$$\bar{\varphi} a = \sin \varrho a + \frac{\Psi . e^{-\varrho i a}}{\varrho},$$

und da $\bar{\varphi} a$ eine in ϱ ungerade Funktion ist, kann man für den Fall $\beta \leqq 0$ die Formel

$$\bar{\varphi} a = \sin \varrho a + \frac{\Psi . e^{\varrho i a}}{\varrho}$$

hinzufügen. Jetzt schlage man in der Ebene der komplexen Größe ϱ um die Stellen $\pm n\pi/a$ einander nicht schneidende Kreise $\mathfrak{k}_{\pm n}$ von gleichem Radius; auf ihnen bleiben dann $|\sin \varrho a|$ und $|e^{\pm \varrho i}|$ zwischen endlichen positiven Schranken und man kann setzen

$$\bar{\varphi} a = \sin \varrho a \left(1 + \frac{\Psi . e^{\varrho i a}}{\varrho \sin \varrho a}\right)$$

oder kürzer

$$\bar{\varphi} a = \sin \varrho a \left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right),$$

wobei die Schranken der neuen Größe Ψ auch von n unabhängig sind. Ist also n und damit ϱ auf dem Kreise $\mathfrak{k}_n$ hinreichend angewachsen, so bleibt die Größe $1 + \Psi/\varrho$ auf den Kreisen $\mathfrak{k}$ von 1 beliebig wenig verschieden, kann also, wenn man sie in der Ebene der komplexen Zahlen darstellt, ihr Winkelargument nicht ändern, wenn man $\mathfrak{k}_n$ durchläuft; das Winkelargument der Größe

$\overline{\varphi}\, a$ muß sich dann also ebenso ändern wie das der Größe $\sin \varrho\, a$, d. h. um 2π; der Kreis $\mathfrak{k}_n$ und ebenso natürlich $\mathfrak{k}_{-n}$ enthält genau eine Nullstelle der Größe $\overline{\varphi}\, a$, sowie n hinreichend groß geworden ist. Damit sind unendlich viele Nullstellen des Nenners der Greenschen Funktion nachgewiesen.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen bleiben in allem Wesentlichen erhalten, wenn man U nicht wie oben, sondern durch die Beziehungen

$$\frac{d\,U}{d\,x} - h\,U \Big|^{0} = 0, \qquad U \Big|^{0} = 1$$

festlegt. Dann geben die Gleichungen (3), (4) des § 27, die von der dort vorausgesetzten Realität der Größen L und ϱ unabhängig sind, genau nach der hier gebrauchten Methode

$$U e^{\varrho i x} = \frac{e^{2\varrho i x} + 1}{2} + \frac{\Psi}{\varrho}.$$

Als Grenzbedingung an der Stelle a werde das Verschwinden festgehalten. Dann kann $\psi\, x$ wie oben definiert werden; die Greensche Funktion wird, indem wir $U = \Phi\, x$ setzen, je nach den Fällen $x \lessgtr \xi$ durch die Formeln

$$(9) \qquad G(x, \xi) = \frac{-\Phi\, x \,.\, \psi\, \xi}{\Phi\, 0 \,.\, (\psi'\, 0 - h\, \psi\, 0)}, \quad G(x, \xi) = \frac{-\Phi\, \xi \,.\, \psi\, x}{\Phi\, 0 \,.\, (\psi'\, 0 - h\, \psi\, 0)}$$

definiert und im Falle $x < \xi$ in folgender Weise asymptotisch dargestellt:

$$G(x, \xi) = \frac{e^{\varrho i (\xi - x)} \left(e^{2\varrho i} + 1 + \Psi/\varrho\right) \left(e^{2\varrho i (a - \xi)} - 1 + \Psi/\varrho\right)}{2\varrho \left(1 + \Psi/\varrho\right) \left(e^{2\varrho i a} - 1 + \Psi/\varrho\right)}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die auf den Grenzübergang $a = +\infty$ bezüglichen Erwägungen insofern bei Bestand bleiben, daß auch hier die Größe $\varrho\, G_\infty(x, \xi)$ in demselben Sinne wie oben, wenn β über einer positiven Schranke liegt, beschränkt bleibt.

§ 50.

Die Greensche Funktion im unendlichen Grundgebiet.

Um die Sturm-Liouvillesche Aufgabe in einem bestimmten Falle für eine unendliche Strecke zu behandeln, und von den Entwicklungen nach Eigenfunktionen zu den dem Fourierschen Integral nachgebildeten Integraldarstellungen zu kommen, führen wir in die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2 V}{d x^2} + (\varrho^2 - L)\, V = 0$$

die Variable $s = e^{-x}$ ein, so daß die Strecke der positiven Werte von x der Strecke von $s = 1$ bis $s = 0$ entspricht. Als Funktion von s sei nun L analytisch und an der Stelle $s = 0$ regulär und $= 0$, etwa in der Form $-L = b_1 s + b_2 s^2 + \cdots$ entwickelbar, so daß das Integral

$$\int_0^s \frac{|L|\, d s}{s} = \int_x^{+\infty} |L|\, d x$$

einen endlichen Wert hat, entsprechend der in § 49 geltenden Voraussetzung, und daß die dort erhaltenen Ergebnisse anzuwenden sind. Die Differentialgleichung schreibt sich jetzt, wenn man noch $W = \sqrt{s}\, V$ setzt,

$$s^2 \frac{d^2 W}{d s^2} + (\varrho^2 + \tfrac{1}{4} - L)\, W = 0,$$

$$(2) \qquad s^2 \frac{d^2 W}{d s^2} + (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots)\, W = 0, \qquad b_0 = \varrho^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Die determinierende Gleichung im Sinne der **Fuchs**schen Theorie ist

$$f\gamma = \gamma(\gamma - 1) + b_0 = 0$$

und hat die Wurzeln $\pm \varrho i + \frac{1}{2}$; bei der Annahme

$$(3) \qquad \varrho = \alpha + \beta i, \qquad \beta > -\tfrac{1}{4}, \qquad r = -\varrho i + \tfrac{1}{2}$$

hat die Gleichung (2) ein an der Stelle $s = 0$ verschwindendes Integral

$$(4) \qquad W = s^r (c_0 + c_1 s + \cdots),$$

und die Koeffizienten c bestimmen sich aus den Rücklaufformeln

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_{n-1} b_1 + c_n f(r + n) = 0;$$

die Beziehungen

$$f(r + n) = n(n - 2\varrho i), \qquad |f(r + n)| = n\sqrt{4\alpha^2 + (n + 2\beta)^2}$$

zeigen, daß $f(r + n)$ nie verschwindet, da dies $\alpha = 0$, $n = -2\beta$ erfordern würde, was nach (3) unmöglich ist. Wenn nun

$$(5) \qquad \beta \geqq 0, \qquad |\varrho| > 1,$$

so ist offenbar

$$|f(r + n)| > |\varrho|,$$

also

$$(6) \qquad |c_n \varrho| < |c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_{n-1} b_1|.$$

Jetzt seien die positiven Größen d folgendermaßen definiert:

$$d_0 > |c_0|,$$

$$|b_n| = B_n, \qquad d_n = d_0 B_n + d_1 B_{n-1} + \cdots + d_{n-1} B_1;$$

dann folgt nach (6)

$$|c_1 \varrho| < |c_0 b_1| < d_1, \qquad |c_1| < d_1;$$
$$|c_2 \varrho| < |c_0 b_2 + c_1 b_1| < d_0 B_2 + d_1 B_1, \quad |c_2 \varrho| < d_2, \quad |c_2| < d_2;$$
$$|c_3 \varrho| < |c_0 b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_0| < d_3, \qquad |c_3| < d_3,$$

usf.; also allgemein

$$(7) \qquad |c_n \varrho| < d_n.$$

Die Größen d_n sind aber die Koeffizienten einer in einem gewissen Gebiete konvergenten Potenzreihe

$$\frac{d_0}{1 - B_1 s - B_2 s^2 - \cdots} = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \cdots$$

Hieraus folgt nicht nur, daß die unter (4) aufgestellte Reihe W ein ausgedehntes Konvergenzgebiet besitzt, sondern mehr. Konvergiere die Reihe $b_1 s + b_2 s^2 + \cdots$ in einem Kreise um den Punkt $s = 0$, den wir $\mathfrak{K}$ nennen, und sei in ihm

$$|B_1 s + B_2 s^2 + \cdots| < 1;$$

dann konvergiert auch die Reihe $d_0 + d_1 s + \cdots$ im Kreise $\mathfrak{K}$ und ihr Wert liegt, sowie der Wert ihrer Ableitung, unter einer von ϱ unabhängigen Schranke g, und die Beziehung (7) ergibt

$$|\varrho(c_1 s + c_2 s^2 + \cdots)| < g, \qquad |\varrho(c_1 + 2 c_2 s + 3 c_3 s^2 + \cdots)| < g.$$

Man kann daher, wenn noch $c_0 = 1$ genommen wird, setzen

$$W = s^r\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right), \qquad |\Psi| < g.$$

Kehren wir also zu den Veränderlichen x und V zurück, so hat die Gleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\varrho^2 - L) V = 0$$

unter den geltenden Voraussetzungen ein bestimmtes Integral von der Form

$$(8) \qquad \psi x = e^{\varrho i x}\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right) = e^{\varrho i x}\,\mathfrak{P} s,$$

wobei $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet, $\mathfrak{P}0 = 1$ ist, und in dem angegebenen Gebiet, d. h. wenn s im Kreise $\mathfrak{K}$ liegt,

$$(9) \qquad \mathfrak{P} s = 1 + \frac{\Psi}{\varrho}, \qquad \mathfrak{P}' s = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden darf, wobei $|\Psi|$ unter einer von ϱ unabhängigen Schranke verbleibt, auch wenn man $|\varrho|$ unendlich wachsen läßt.

Da die Größen d und damit g von ϱ unabhängig ist, konvergiert die Reihe W unter der Voraussetzung (5) in ϱ gleichmäßig, ist also als Funktion von ϱ regulär. Dies gilt aber auch bei der allgemeineren Annahme (3), und wenn $|\varrho| \leqq 1$. Denn jedenfalls ist dann $|f(r+n)| > 1$, sobald n eine gewisse Schranke k überschritten hat; man wählt dann einfach $d_0, d_1, \ldots d_k$, was angeht, so, daß immer

$$d_0 > |c_0|, \qquad d_1 > |c_1|, \ldots \qquad d_k > |c_k|,$$

und daß im übrigen die Formel

$$d_n = d_0 B_n + d_1 B_{n-1} + \cdots + d_{n-1} B_1$$

für $n > k$ gilt; man hat dann die Beziehung

$$|c_n| < |c_0 b_n| + |c_1 b_{n-1}| + \cdots + |c_{n-1} b_1| < d_n$$

und die Größen d ergeben sich als Entwicklungskoeffizienten des Bruches

$$\frac{d_0 + e_1 s + e_2 s^2 + \cdots + e_k s^k}{1 - B_1 s - B_2 s^2 - \cdots} = d_0 + d_1 s + \cdots,$$

wenn gesetzt wird

$$e_\nu = d_\nu - d_0 B_\nu - d_1 B_{\nu-1} - \cdots - d_{\nu-1} B_1.$$

Die in W auftretende Potenzreihe konvergiert also bei der Annahme $\beta > -\frac{1}{4}$, $|\varrho| \leqq 1$ und wenn s dem Kreise $\mathfrak{K}$ angehört, gleichmäßig in ϱ und ist als Funktion dieser Größe regulär. Singularitäten kann sie offenbar nur haben, wenn $f(r+n) = 0$, also $\alpha = 0$, $2\beta = -n$, $\varrho = -\frac{1}{2} n i$; diese Stellen kommen nicht in Betracht. Für uns ist nur wichtig, daß die Größe ψx als Funktion von ϱ in der ganzen Halbebene $\beta \geqq 0$ regulär ist. Sie verschwindet, wenn $\beta > 0$, für $x = +\infty$ wie $e^{-\beta x}$, ist also nach x absolut integrierbar ebenso wie $\psi' x$. Bei reellen Werten von ϱ, d. h. wenn $\beta = 0$, verhält sich die Größe ψx für $x = +\infty$ wie $e^{\varrho i x}$, ist also beschränkt ebenso wie ihre Ableitung.

Mit ψx kombinieren wir die in § 49 eingeführte, durch die Gleichungen

$$\varphi 0 = 0, \quad \varphi' 0 = \varrho$$

festgelegte Lösung der Gleichung

$$(10) \qquad \varphi'' + (\varrho^2 - L)\varphi = 0,$$

die eine ganze transzendente Funktion von ϱ ist, in der übrigens die Stelle 0 auch durch jede positive ersetzt werden könnte; φx kann, wie jede Lösung, in der Form

$$\varphi x = e^{\varrho i x} \mathfrak{P}_1 s + e^{-\varrho i x} \mathfrak{P}_2 s$$

geschrieben werden, und die Faktoren der Exponentialgrößen sind Potenzreihen von s, also als Funktionen von x bis ins positiv Unendliche beschränkt.

Wir führen weiter eine Greensche Funktion ähnlich der des § 49 ein und setzen, im Falle $\xi > x$

$$G_\varrho(x, \xi) = \frac{\varphi x \,.\, \psi \xi}{\varrho \,.\, \psi 0},$$

im Falle $x > \xi$ dagegen

$$G_\varrho(x, \xi) = \frac{\varphi \xi \,.\, \psi x}{\varrho \,.\, \psi 0};$$

die Funktion $G_\varrho(x, \xi)$ ist offenbar in x und ξ symmetrisch.

Die Größe $\varphi' \psi - \varphi \psi'$ ist der Differentialgleichung (10) zufolge, deren Lösungen φ und ψ sind, konstant, also gleich

$$\varphi' 0 \,.\, \psi 0 - \varphi 0 \,.\, \psi' 0 = \varphi' 0 \,.\, \psi 0 = \varrho \,.\, \psi 0;$$

man findet daher sofort, indem der Ableitungsstrich sich auf das erste Argument bezieht,

$$G'_\varrho(\xi - 0, \xi) - G'_\varrho(\xi + 0, \xi) = \frac{\varphi' \xi \,.\, \psi \xi - \varphi \xi \,.\, \psi' \xi}{\varrho \,.\, \psi 0} = 1.$$

Was nun den Charakter der Größe G_ϱ als Funktion von ϱ betrifft, so ist sie nach dem, was wir über φx und ψx als Funktionen von ϱ wissen, in der Halbebene $\beta \geqq 0$ regulär, wo nicht etwa $\psi 0$ verschwindet. Dies ist zunächst bei reellen Werten ϱ ausgeschlossen, weil sonst ψx sich nur um einen konstanten Faktor von der reellen Funktion φx unterschiede, was nach (8) unmöglich ist.

Wäre ferner $\psi 0 = 0$ für einen komplexen Wert von $\varrho = \alpha + \beta i$, in welchem $\beta > 0$, so hätte die Gleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\varrho^2 - L) V = 0$$

eine Lösung ψx, die an den Stellen $x = 0$ und $x = +\infty$ verschwände, an letzterer Stelle mit ihrer Ableitung und so, daß sie bis zur Grenze $+\infty$ absolut integrierbar ist.

Setzt man jetzt voraus, wie es früher meist geschah, L sei reell, so wäre die zu ψx konjugiert imaginäre Größe $\psi_0 x$ eine die eben angeführten Eigenschaften mit ψx teilende Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 V_0^2}{d x^2} + (\varrho_0^2 - L) V_0 = 0,$$

in der $\varrho_0 = \alpha - \beta i$ gesetzt ist. Man könnte also die Greensche Operation anwenden und schließen

$$\int_0^{+\infty} (\psi \psi_0'' - \psi'' \psi_0)\, d x + (\varrho_0^2 - \varrho^2) \int_0^{+\infty} \psi \psi_0\, d x = 0.$$

Die Integrale können, wie geschrieben, ins Unendliche erstreckt werden wegen der auf die Stelle $x = +\infty$ bezüglichen Eigenschaften der Größen ψ und ψ_0.

Ferner hat man nach der Annahme, die wir widerlegen wollen, $\psi\, 0 = \psi_0\, 0 = 0$; das erste Integral in der letzten Gleichung ist also einfach

$$\psi \psi_0' - \psi' \psi_0 \Big|_0^\infty = 0$$

und bleibt die Gleichung

$$(\varrho_0^2 - \varrho^2) \int_0^{+\infty} \psi \psi_0\, d x = 0.$$

Hier ist das Integral positiv und endlich; also folgt $\varrho_0^2 - \varrho^2 = 0$; ϱ müßte, weil nicht reell, rein imaginär, ϱ^2 negativ sein, etwa $= -\tau^2$, und τ reell.

Dann hätte die auf die unendliche Strecke von $x = 0$ bis $x = +\infty$ bezügliche Randwertaufgabe

(11) $$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\lambda - L) V = 0, \quad V \Big|^{0,\, +\infty} = 0$$

in $V = \psi x$ eine Lösung mit negativem Eigenwert $\lambda = -\tau^2$. Das wäre denkbar, wenn L auf jener Strecke das Vorzeichen wechselte, und zwar könnten, wie besondere auf Sturm zurückgehende Betrachtungen zeigen, eine endliche Anzahl solcher Lösungen vorhanden sein. Wenn wir aber, wie früher meist, L positiv oder doch nicht negativ annehmen, so ist auch $\tau^2 + L$ positiv und eine Lösung ist unmöglich nach den Betrachtungen des § 26. Wird also L auf dem unendlichen Grundgebiet von $x = 0$ bis $x = +\infty$ nicht negativ, so ist keine Eigenfunktion der differentiellen Randwertaufgabe (11) vorhanden, und die Greensche Funktion $G_\varrho(x, \xi)$ ist als Funktion von ϱ auf der Halbebene $\beta \geqq 0$ regulär.

Wir können ferner ihren Wert bei großen Werten von $|\varrho|$ abschätzen, indem wir benutzen, daß nach § 49 die Beziehung

(12) $$\varphi x = \sin \varrho x + \frac{\Psi . e^{-\varrho i x}}{\varrho}$$

gilt, also nach (8) und (9) im Falle $x \leqq \xi$, indem man für den Quotienten zweier Ausdrücke $1 + \Psi/\varrho$ einen ebensolchen schreibt,

$$\varrho\, G_\varrho(x, \xi) = \frac{\varphi x \,.\, \psi \xi}{\psi 0} = \left[\frac{1}{\varrho i}\left(e^{\varrho i(\xi + x)} - e^{\varrho i(\xi - x)}\right) + \frac{\Psi}{\varrho} e^{\varrho i(\xi - x)}\right]\left(1 + \frac{\Psi}{\varrho}\right).$$

Die hier auftretenden Exponentialgrößen sind, da $\xi \geqq x$ und $\beta \geqq 0$, absolut nicht größer als 1, die Schranken der Größen $|\Psi|$ wie in den Gleichungen (9) und (12) von x, ξ und ϱ unabhängig; es gibt also solche positive Größen g und g_0, daß allgemein

$$|\varrho\, G_\varrho(x, \xi)| < g,$$

sobald $|\varrho| > g_0$, $\beta \geqq 0$. Diese Ungleichung ist wie die Gleichungen (9) nur gesichert, wenn $s = e^{-x}$ dem Kreise $\mathfrak{K}$ angehört, d. h. wenn x und ξ eine gewisse Schranke x_0 überschreiten. Diese darf aber gleich 0 gesetzt werden, indem man $x_0 + x$ an Stelle von x einführt, wodurch sich die ganze Aufgabe nur unwesentlich ändert; wie ja schon bei der Betrachtung der Größen $\varphi 0$, $\psi 0$ hervorgehoben wurde, daß man 0 durch einen anderen Wert ersetzen kann.

Jetzt ergibt sich eine besondere Form des Cauchyschen Integrals der Größe G_ϱ als Funktion der komplexen Größe ϱ. Seien C_ν positive Konstante, $\sigma = \gamma + \delta i$, γ und δ reell, $\delta > 0$, und sei $\mathfrak{R}$ der Umfang des Rechtecks mit den Ecken $-C_1$, $+C_2$, $C_2 + iC_3$, $-C_1 + iC_3$ im positiven Umlaufssinn; in seinem Innern liegt die Stelle σ, sobald die Größen C_ν hinreichend groß sind. Dann hat man die Formel

$$G_\sigma(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x, \xi)}{\varrho - \sigma}\, d\varrho,$$

und wenn die Größen C_ν groß werden, so werden die Teile des Integrals über $\mathfrak{R}$, die nicht längs der reellen Achse gebildet sind, unendlich abnehmen, da dies von jedem Integral

$$\int \frac{M\, d\varrho}{\varrho(\varrho - \sigma)}$$

gilt, in welchem M beschränkt bleibt, und $M = \varrho\, G_\varrho(x, \xi)$ gesetzt werden kann.

In der Grenze folgt somit

$$G_\sigma(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\varrho(x, \xi)}{\varrho - \sigma}\, d\varrho.$$

Ferner ist offenbar

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho+\sigma} = 0,$$

da der Integrand im Innern der Umfangslinie $\mathfrak{R}$ und auf ihr in ϱ regulär ist, und man kann sich auch hier auf die Integration längs der reellen Achse beschränken:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho+\sigma} = 0;$$

somit folgt, wenn $\sigma = \gamma + \delta i$, $\delta > 0$,

$$G_\sigma(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho^2-\sigma^2}. \tag{13}$$

§ 51.

Die Fourier-Hilbsche Integraldarstellung willkürlicher Funktionen.

Die Formel $\qquad G_\varrho(x,\xi) = \dfrac{\varphi\xi\,.\,\psi x}{\varrho\,.\,\psi 0}$,

in der $x \geqq \xi$ vorausgesetzt wird, zeigt nach dem, was in § 50 über das Verhalten der Größe ψx festgestellt ist, daß G_ϱ, wenn ϱ imaginär, also $\beta > 0$ ist, ins positiv Unendliche absolut integriert werden kann. Dasselbe gilt von dem Produkt $G_\varrho(x,\xi)\; G_\sigma(x,\eta)$, wenn ϱ reell und σ imaginär ist; sei fortan $\sigma = \gamma + \delta i$, $\delta > 0$. Der Ableitungsstrich beziehe sich auf das erste Argument; dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} &G''_\varrho(x,\xi) + (\varrho^2 - L)\,G_\varrho(x,\xi) = 0, \quad G_\varrho(0,\xi) = 0,\\ &G''_\sigma(x,\eta) + (\sigma^2 - L)\,G_\sigma(x,\xi) = 0, \quad G_\sigma(0,\eta) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

aus denen durch Greensche Kombination folgt

$$\int_0^x \frac{d}{dx}\{G_\sigma(x,\eta)\,G'_\varrho(x,\xi) - G_\varrho(x,\xi)\,G'_\sigma(x,\eta)\}\,dx$$
$$+ (\varrho^2-\sigma^2)\int_0^x G_\varrho(x,\xi)\,G_\sigma(x,\eta)\,dx = 0,$$

oder, wenn x jede der Größen ξ und η übersteigt, mit Rücksicht auf die Unstetigkeiten der Ableitungen $G'_\varrho(x, \xi)$ und $G'_\sigma(x, \eta)$ an den Stellen ξ und η

$$G_\sigma(\xi, \eta) - G_\varrho(\eta, \xi) + G_\sigma(x, \eta)\, G'_\varrho(x, \xi) - G_\varrho(x, \xi)\, G'_\sigma(x, \eta) + (\varrho^2 - \sigma^2)\int_0^x G_\varrho(x, \xi)\, G_\sigma(x, \eta)\, dx = 0.$$

Hier konvergiert das Integral, auch bei reellen Werten ϱ, wenn man x über alle Grenzen wachsen läßt, während die Größen G_ϱ und G'_ϱ beschränkt bleiben, G_σ und G'_σ aber verschwinden, und man erhält die Fredholm-Hilbertsche Resolvente

$$(2) \qquad G_\sigma(\xi, \eta) - G_\varrho(\xi, \eta) + (\varrho^2 - \sigma^2)\int_0^{+\infty} G_\varrho(x, \xi)\, G_\sigma(x, \eta)\, dx = 0.$$

Sei nun weiter Fx eine bei positiven Werten von x noch näher zu kennzeichnende reelle Funktion; sei $F0 = 0$ und werde

$$F''x + (\sigma^2 - L)\, Fx = -fx$$

gesetzt; die Greensche Verknüpfung dieser mit der zweiten Gleichung (1) ergibt dann, wenn $x > \eta$,

$$-F\eta + [F'x \,.\, G_\sigma(x, \eta) - Fx \,.\, G'_\sigma(x, \eta)]\Big|_0^x + \int_0^x fx \,.\, G_\sigma(x, \eta)\, dx = 0,$$

also, wenn fx stetig und für alle positiven Werte von x beschränkt ist, mit geänderter Bezeichnung

$$(3) \qquad F\xi = \int_0^{+\infty} G_\sigma(x, \xi)\, fx \,.\, dx;$$

das Integral konvergiert wegen des Verhaltens von G_σ im Unendlichen. Die Funktion Fx erscheint hiermit quellenmäßig dargestellt; um die für fx geltende Voraussetzung zu erfüllen, werde zunächst festgesetzt, daß Fx mit den ersten beiden Ableitungen stetig und beschränkt sei; wir fügen sogleich noch eine weitere Voraussetzung hinzu.

Multipliziert man die Gleichung (2) mit $f\eta$ und integriert, so ergibt sich

$$F\xi = \int_0^{+\infty} G_\varrho(\xi, \eta)\, f\eta . d\eta - (\varrho^2 - \sigma^2)\int_0^{+\infty} f\eta \,.\, d\eta \int_0^{+\infty} G_\varrho(x, \xi)\, G_\sigma(x, \eta)\, dx;$$

das erste Integral hat einen Sinn, wenn wir die Größen F, F', F'' ins positiv Unendliche absolut integrierbar voraussetzen, womit dasselbe für fx gilt. Wenn nun, was einen besonderen Beweis erfordert, die Integrationen im zweiten Integral vertauscht werden dürfen, so folgt, mit leicht geänderten Zeichen,

$$(4) \qquad Fx = \int_0^{+\infty} G_\varrho(x, \alpha) f\alpha . d\alpha - (\varrho^2 - \sigma^2) \int_0^{+\infty} G_\varrho(x, \alpha) F\alpha . d\alpha.$$

Anderseits folgt aus der Gleichung (13) des § 50, indem man den dort gegebenen Wert von G_σ in die Gleichung (3) einsetzt,

$$(5) \qquad F\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} fx . dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, G_\varrho(x, \xi)\, d\varrho}{\varrho^2 - \sigma^2},$$

und wenn, was noch nachzuweisen ist, die Integrationen vertauscht werden dürfen, indem man ξ und x durch x und α ersetzt,

$$(6) \qquad Fx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, d\varrho}{\varrho^2 - \sigma^2} \int_0^{\infty} G_\varrho(x, \alpha) f\alpha . d\alpha.$$

Setzen wir hier für das innere Integral den Wert, den die Gleichung (4) ergibt, so folgt

$$Fx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, d\varrho}{\varrho^2 - \sigma^2} \cdot Fx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} G_\varrho(x, \alpha) F\alpha .\, d\alpha,$$

und da das erste Integral rechts verschwindet, ergibt sich die Hauptformel

$$(7) \qquad Fx = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{\infty} G_\varrho(x, \alpha) F\alpha . d\alpha,$$

wobei beachtet werde, daß $G_\varrho(x, \alpha)$ auch bei reellen Werten von ϱ nicht reell ist; die Funktion Fx ist, wir wiederholen es, wie ihre ersten beiden Ableitungen stetig und ins positiv Unendliche absolut integrierbar und verschwindet an der Stelle $x = 0$.

Was nun nachträglich die Vertauschung der Integrationen in der Formel (5) betrifft, so kann zunächst das innere Integral in die Form

$$\int_{\Re} \frac{G_\varrho(x, \xi)}{\varrho - \sigma}\, d\varrho$$

zurückversetzt werden, aus der es oben entstanden ist; das zu untersuchende Integral ist dann, indem c eine positive Konstante bedeutet,

$$\int_0^{+\infty} fx\,.\,dx \int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho-\sigma} = \int_0^{c} fx\,.\,dx \int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho-\sigma} + \int_c^{+\infty} fx\,.\,dx \int_{\mathfrak{R}}$$

$$(8) \qquad = \int_{\mathfrak{R}} \frac{d\varrho}{\varrho-\sigma} \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, fx\,.\,dx + \int_c^{+\infty} fx\,.\,dx \int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho-\sigma}$$

$$- \int_{\mathfrak{R}} \frac{d\varrho}{\varrho-\sigma} \int_c^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, fx\,.\,dx.$$

Hier übersieht man leicht, daß das zweite und dritte Doppelintegral beliebig klein gemacht werden können, indem man c wachsen läßt, denn $|fx|$ ist bis zur Grenze $+\infty$ integrierbar und

$$G_\sigma(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho-\sigma}$$

liegt unter einer von x unabhängigen Schranke; $\varrho\, G_\varrho(x,\xi)$ ist auf dem Umfang $\mathfrak{R}$ beschränkt, wie weit man auch $\mathfrak{R}$ ausdehnen möge; in dem Doppelintegral

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{d\varrho}{\varrho-\sigma} \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, fx\,.\,dx$$

kann das innere Integral als Größe Ψ/ϱ geschrieben werden, wobei die Schranke der Größe Ψ von der Ausdehnung des Rechtecks $\mathfrak{R}$ unabhängig ist; auch erhält dieses Doppelintegral, wenn man $-\sigma$ für σ schreibt, den Wert Null. Man erhält also, indem man $\mathfrak{R}$ unendlich ausdehnt, die Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, d\varrho}{\varrho^2-\sigma^2} \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, fx\,.\,dx,$$

womit die Formel (6) bewiesen ist.

Ein zweiter Nachtrag muß, um die Formel (4) zu sichern, die Vertauschbarkeit der Integrationen in dem Integral

$$\int_0^{+\infty} f\eta\,.\,d\eta \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, G_\sigma(x,\eta)\, dx$$

erweisen. Wir zerlegen dasselbe nach dem leicht verständlichen Schema

$$\int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} M\,d x = \int_0^{+\infty} d\eta \int_\eta^{+\infty} M\,d x + \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} M\,d x$$

und erweisen die Behauptung in jedem der so erhaltenen Ausdrücke nach derselben Methode; im Integrationsgebiet des zweiten Integrals rechts ist dann immer $x \leqq \eta$, und man integriert in der $x\eta$-Ebene über den bei gewöhnlicher Zählung zweiten Oktanten. Bei der Vertauschung der Integrationen ändern sich die Grenzen, und wir behaupten

$$\int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} M\,d x = \int_0^{+\infty} d x \int_x^{+\infty} M\,d\eta; \tag{9}$$

dabei ist jetzt immer zu setzen

$$M = f\eta \,.\, G_\varrho(x, \xi) \cdot \frac{\varphi_\sigma x \,.\, \psi_\sigma \eta}{\sigma \,.\, \psi_\sigma 0},$$

wenn wir bei den zur Bildung der Größe G_σ benutzten Funktionen φ und ψ den komplexen Parameter σ sichtbar machen. Nach § 50 kann man nun ansetzen

$$\psi_\sigma x = e^{\sigma i x}\,\mathfrak{P} s, \quad \varphi_\sigma x = e^{\sigma i x}\,\mathfrak{P}_1 s + e^{-\varrho i x}\,\mathfrak{P}_2 s,$$

wobei auch ϱ für σ eintreten kann, und die Faktoren $\mathfrak{P}$ sind als Funktionen von x für alle positiven Werte beschränkt; ferner sind in den Größen

$$e^{\sigma i x} = e^{-x\delta} \,.\, e^{\gamma i x}, \quad e^{-\sigma i x} = e^{x\delta}\, e^{-\gamma i x}, \quad e^{\pm \varrho i x}$$

alle Exponentiellen mit imaginärem Exponenten, da ϱ reell ist, beschränkt; dasselbe gilt also von $G_\varrho(x, \xi)$ und man kann setzen

$$M = f\eta \,.\, (N_1 e^{(x+\eta)\delta} + N_2 e^{-(\eta - x)\delta}), \tag{10}$$

wobei die Größen N im ganzen Integrationsgebiet beschränkt, d. h. absolut unter einer von x und η unabhängigen Schranke gelegen sind.

Um nun zum Beweis der Formel (9) zu kommen, schreiben wir, unter g eine positive Größe verstehend,

$$J = \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} M\,d x = \int_0^{g} d\eta \int_0^{\eta} M\,d x + \int_g^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} M\,d x = J_1 + J_2,$$

$$\bar{J} = \int_0^{+\infty} d x \int_x^{+\infty} M\,d\eta = \int_0^{g} d x \int_x^{g} M\,d\eta + \int_g^{+\infty} d x \int_x^{+\infty} M\,d\eta + \int_0^{g} d x \int_g^{+\infty} M\,d\eta$$

$$= \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3,$$

dabei sind J_ν und $\overline{J}_\nu$ die Summanden der Summen von Doppelintegralen in der Folge, wie sie hingeschrieben sind. Offenbar ist $J_1 = \overline{J}_1$, da beide Integrale sich über die Fläche des Dreiecks erstrecken, das in einer $x\eta$-Ebene von den Geraden $x = 0$, $\eta = g$, $x = \eta$ begrenzt wird und M im Endlichen stetig ist, so daß die Integrationen vertauscht werden dürfen. Weiter zeigen wir, daß durch passende Wahl von g die Integrale J_2, $\overline{J}_2$ und $\overline{J}_3$ absolut beliebig herabgedrückt werden können; damit wird dann die Gleichung (9) oder $J = \overline{J}$ erwiesen sein. Zu diesem Zweck beachten wir zunächst nur die mit dem Faktor N_1 behafteten Teile des Integranden und finden als Teile von J_2, $\overline{J}_2$ und $\overline{J}_3$

$$\int_g^{+\infty} f\eta \,.\, e^{-\eta\delta} \int_0^\eta N_1 e^{-x\delta}\, dx, \quad \int_g^{+\infty} dx \,.\, e^{-x\delta} \int_x^{+\infty} N_1 e^{-\eta\delta} f\eta \,.\, d\eta,$$

$$\int_0^g dx \,.\, e^{-x\delta} \int_x^{+\infty} N_1 e^{-\eta\delta} f\eta \,.\, d\eta,$$

die alle drei offenbar beliebig klein werden, wenn g hinreichend gewachsen ist, da N_1 ja beschränkt ist und $f\eta$ ins Unendliche absolut integrierbar.

Etwas schwieriger liegt die Sache bei den mit N_2 behafteten Teilen. Im Integral J_2 ist das betreffende Integral unter der Grenze

$$\int_g^{+\infty} |f\eta|\, e^{-\eta\delta}\, d\eta \int_0^\eta |N_2|\, e^{+x\delta}\, dx;$$

das innere Integral liegt, wenn z. B. $|N_2| < A$ und A von x und η unabhängig ist, unter dem Werte

$$A\,\frac{e^{\eta\delta} - 1}{\delta},$$

also das ganze unter einer Schranke

$$B \int_g^{+\infty} |f\eta|\, d\eta,$$

wobei B von g unabhängig ist; diese Größe kann also durch hinreichend große Werte von g beliebig klein gemacht werden. In $\overline{J}_2$ findet man für den zweiten Teil

$$(11) \qquad \left| \int_g^{+\infty} dx \,.\, e^{x\delta} \int_x^{+\infty} N_2 e^{-\eta\delta} f\eta \,.\, d\eta \right| < A \int_g^{+\infty} dx \,.\, e^{x\delta} \int_x^{+\infty} |f\eta|\, e^{-\eta\delta}\, d\eta,$$

und hier ist nach dem zweiten Mittelwertsatze, da $e^{-\eta\delta}$ eine monotone Funktion ist,

$$(12)\qquad \int_x^{+\infty} |f\eta|\, e^{-\eta\delta}\, d\eta = e^{-x\delta}\int_x^{x_0} |f\eta|\, d\eta, \qquad x_0 > x > g;$$

die rechte Seite der Ungleichung (11) ist also kleiner als

$$A\int_g^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} |f\eta|\, d\eta.$$

Diese Größe wird erst dann bei wachsenden Werten von g mit Sicherheit beliebig klein, wenn wir annehmen, die Größe

$$\int_x^{+\infty} |f\eta|\, d\eta$$

sei als Funktion von x ins positiv Unendliche integrierbar. Dazu genügt es, wenn die Funktionen Fx, $F'x$, $F''x$ sich im positiv Unendlichen verhalten wie eine Potenz x^{-k}, in welcher $k > 2$; d. h. wir setzen fest, daß die Größen $x^k|Fx|$, $x^k|F'x|$, $x^k|F''x|$ im positiv Unendlichen beschränkt bleiben. Alsdann wird auch das ganze Integral $\overline{J}_2$ bei wachsenden Werten von g beliebig klein.

Dasselbe Verhalten ist jetzt auch an dem mit N_2 behafteten Teil des Integrals $\overline{J}_3$ zu erkennen; er erfüllt zunächst die Ungleichung

$$\left|\int_0^g dx\,.\,e^{+x\delta}\int_g^{+\infty} N_2 e^{-\eta\delta} f\eta\,.\,d\eta\right| < A\int_0^g e^{x\delta}\, dx \int_g^{+\infty} e^{-\eta\delta}|f\eta|\, d\eta,$$

deren rechte Seite nach (12) kleiner ist als

$$(13)\qquad A\int_0^g dx \int_g^{+\infty} |f\eta|\, d\eta < A g\int_g^{+\infty} |f\eta|\, d\eta.$$

Bei großen Werten von x kann man aber nach den jetzt geltenden Voraussetzungen, wenn B eine Konstante bedeutet,

$$|f\eta| < \frac{B}{\eta^k}$$

setzen; daraus folgt

$$g\int_g^{+\infty} |f\eta|\, d\eta < \frac{B}{(k-1)\,g^{k-2}},$$

und da $k-2$ positiv ist, verschwindet die rechte Seite der Ungleichung (13), wenn g über alle Grenzen wächst; dasselbe gilt somit von $\bar{J}_3$, und die Gleichung $J = \bar{J}$ oder (9) ist vollständig bewiesen.

Führen wir noch dieselbe Betrachtung für das über den ersten Oktanten der $x\eta$-Ebene erstreckte Doppelintegral durch, so ist auch die Vertauschbarkeit der Integrationen in dem Integral

$$\int_0^{+\infty} f\eta \,.\, d\eta \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, G_\sigma(x,\eta)\, dx = \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, Fx \,.\, dx$$

bewiesen und damit auch der Beweis der Hauptformel (7) unter den jetzt geltenden Voraussetzungen endgültig vollendet.

Will man diese in reelle Form bringen, so ist zu bedenken, daß, wenn man ϱ durch $-\varrho$ ersetzt, die reelle Größe $\varphi x/\varrho$ ungeändert bleibt, die imaginäre $\psi x/\psi 0$ aber in die ihr konjugierte übergeht. Da nun Fx reell, das Integral auf der rechten Seite der Hauptformel (7) oder

$$F\xi = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\xi)\, Fx \,.\, dx$$

also rein imaginär ist, so geht es in den konjugierten, d. h. den entgegengesetzten Wert über, wenn man ϱ durch $-\varrho$ ersetzt; man kann also die Hauptformel auch schreiben

$$(14) \qquad F\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} [G_\varrho(x,\xi) - G_{-\varrho}(x,\xi)]\, Fx \,.\, dx.$$

Ist nun $\psi_0 x$ die zu ψx konjugiert imaginäre Größe, so gilt auch für sie, da ϱ reell ist, die Gleichung

$$\psi_0'' + (\varrho^2 - L)\psi_0 = 0;$$

man kann daher, unter Q einen von x unabhängigen Faktor verstehend, setzen

$$(15) \qquad Q \,.\, \varphi x = \psi_0 0 \,.\, \psi x - \psi 0 \,.\, \psi_0 x$$

und erhält für den Fall $x < \xi$

$$G_\varrho(x,\xi) - G_{-\varrho}(x,\xi) = \frac{\varphi x}{\varrho}\left[\frac{\psi\xi}{\psi 0} - \frac{\psi_0 \xi}{\psi_0 0}\right] = \frac{Q\,\varphi x \,.\, \varphi\xi}{\varrho\,\psi 0 \,.\, \psi_0 0},$$

also einen Ausdruck, der auch bei der Annahme $x > \xi$ gültig bleibt, und die Formel (14) ergibt

$$F\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\, d\varrho \int_0^{+\infty} \frac{\varphi x \,.\, \varphi \xi}{\psi 0 \,.\, \psi_0 0}\, dx.$$

Dieser Ausdruck wird völlig greifbar, wenn wir daran erinnern, daß gesetzt war oder zu setzen ist

$$\psi x = e^{\varrho i x}\mathfrak{P}s, \quad s = e^{-x}, \quad \mathfrak{P}0 = 1, \quad \psi_0 x = e^{-\varrho i x}\mathfrak{P}_0 s,$$

wobei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_0$ Potenzreihen mit konjugiert imaginären Koeffizienten bedeuten, die aber stetig bis zur Stelle $s = 1$ fortgesetzt werden können; man findet jetzt aus der Gleichung (15) und der immer geltenden Beziehung $\varphi' 0 = \varrho$ sofort

$$Q = 2i\mathfrak{P}1 . \mathfrak{P}_0 1 + \frac{1}{\varrho}(\mathfrak{P}_0 1 . \mathfrak{P}' 1 - \mathfrak{P} 1 . \mathfrak{P}_0' 1).$$

Dies Ergebnis auf die am Ende des § 49 betrachteten Grenzbedingungen zu übertragen, bietet keine Schwierigkeit. Man setzt im Falle $x < \xi$, entsprechend der nach § 49 abgeänderten Größe G_∞

$$(16) \qquad G_\varrho(x, \xi) = \frac{-\Phi x . \psi \xi}{\Phi 0 . (\psi' 0 - h\psi 0)}, \quad \Phi' 0 - h\Phi 0 = 0.$$

Der in der Halbebene $\beta \geqq 0$ reguläre Nennerfaktor $\psi' 0 - h\psi 0$ kann für keinen Wert von ϱ verschwinden, weil dann die Randwertaufgabe

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (\lambda - L)V = 0, \quad V\Big|^{\infty} = 0, \quad \frac{dV}{dx} - hV\Big|^{0} = 0$$

eine stetige Lösung hätte, was sich auf dieselbe Weise wie im Falle $h = \infty$ als unmöglich erweist, wenn L auf dem Grundgebiet positiv ist. Die Untersuchungen des § 50 wie des gegenwärtigen bleiben erhalten, besonders die Greenschen Operationen verlaufen rechnerisch wie früher, und erhalten bleibt die Hauptformel (7) mit der Bedingung $F' 0 - hF0 = 0$.

§ 52.

Integraldarstellungen in trigonometrischen und Besselschen Funktionen.

Die Annahme $L = 0$ führt auf die Gleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \varrho^2 V = 0$$

und ergibt sofort, wenn die Randbedingung $V|^0 = 0$ und $x \leqq \xi$ ist,

$$\varphi x = \sin \varrho x, \quad \psi x = e^{\varrho i x}, \quad \psi_0 x = e^{-\varrho i x}, \quad G_\varrho(x, \xi) = \frac{e^{\varrho i \xi}\sin \varrho x}{\varrho},$$

$$Q\varphi\xi = \psi\xi - \psi_0\xi = 2i\sin\varrho\xi, \quad Q = 2i;$$

die Formel § 51 (14) gibt, wenn $F0 = 0$, das bekannte Ergebnis

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varrho \int_0^{+\infty} F\alpha \,.\, \sin\varrho x \,\sin\varrho\alpha \,d\alpha,$$

die Grundformel § 51 (7) würde geben

$$\pi i Fx = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varrho \int_0^{x} e^{\varrho i x} \sin\varrho\alpha \,.\, F\alpha \,.\, d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} d\varrho \int_x^{+\infty} e^{\varrho i\alpha} \sin\varrho x \,F\alpha \,.\, d\alpha.$$

Nimmt man dagegen als Grenzbedingung

$$\frac{dV}{dx} - hV\Big|^0 = 0, \quad \Phi x = \cos\varrho x + \frac{h\sin\varrho x}{\varrho}, \quad \psi x = e^{\varrho i x},$$

so gibt die Formel § 51 (16) für den Fall $x \leqq \xi$

$$G_\varrho(x,\xi) \;= \left(-\cos\varrho x - \frac{h\sin\varrho x}{\varrho}\right)\frac{e^{\varrho i\xi}}{\varrho i - h},$$

$$G_{-\varrho}(x,\xi) = \left(-\cos\varrho x - \frac{h\sin\varrho x}{\varrho}\right)\frac{e^{-\varrho i\xi}}{-\varrho i - h},$$

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho^2 d\varrho}{h^2+\varrho^2}\int_0^{+\infty} F\alpha \,.\left(\cos\varrho x + \frac{h\sin\varrho x}{\varrho}\right)\left(\cos\varrho\alpha + \frac{h\sin\varrho\alpha}{\varrho}\right)d\alpha,$$

und wenn man $h = 0$ setzt, ergibt sich die bekannte Formel

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varrho \int_0^{+\infty} F\alpha \,.\, \cos\varrho\alpha \,\cos\varrho x \,.\, d\alpha$$

mit der Bedingung $F'0 = 0$.

Besselsche Funktionen treten auf bei der Randwertaufgabe

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda + \varrho^2)V = 0, \quad V|^0 \text{ endlich}, \quad V|^a = 0;$$

die Differentialgleichung fällt nicht ganz unter die in § 51 untersuchte Art; die nötigen Abänderungen der Theorie sind aber leicht zu übersehen und alles kann aus den bekannten Eigenschaften der Besselschen Funktionen bestätigt werden. Diese führen wir damit ein, daß die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \varrho^2 y = 0$$

die Lösungen $J(\varrho\sqrt{x})$ und $K(\varrho\sqrt{x})$ hat, wobei wie immer

(1) $$Ju = 1 - \frac{u^2}{2^2} + \frac{u^4}{2^2 . 4^2} - \cdots, \quad Ku = AJu\log u + \mathfrak{P}(u^2)$$

gesetzt ist und $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, A eine Konstante bedeutet. Die Konstante A sei, wie üblich, so gewählt, daß bei großen Werten von $|u|$ die asymptotischen Darstellungen

$$(2)\qquad Ju \sim \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}{\sqrt{2\pi u}}, \quad Ku \sim \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}{\sqrt{2\pi u}}$$

gelten, aus denen folgt, daß die der Differentialgleichung gemäß konstante Größe $u(Ju.K'u - J'u.Ku)$ durch die Gleichung

$$(3)\qquad Ju.K'u - J'u.Ku = -\frac{2}{\pi u}$$

bestimmt wird. Setzt man hier die Reihen (1) ein und integriert über den Kreis $|u| = r$, so verschwinden alle Integrale

$$\int u^n \log u\, du$$

mit r und auf der linken Seite der integrierten Gleichung (3) bleibt nur das Glied

$$A\int\frac{du}{u}$$

übrig, das durch Vergleich mit der rechten Seite den Wert

$$A = -\frac{2}{\pi}$$

ergibt. Hieraus folgt eine bemerkenswerte Eigenschaft der Größe Ku im Reellen. Sie werde bei positiven Werten von u reell genommen; man lasse dann u durch die obere Halbebene der komplexen Größe u von positiven Werten mit festem $|u|$ zu negativen Werten übergehen; dann gewinnt der anfangs reelle Wert $\log u$, stetig sich ändernd, den Zuwachs πi, und es folgt, wenn $u > 0$ ist,

$$(4)\qquad K(-u) = Ku + A\pi i.Ju = Ku - 2i.Ju,$$

wobei aber $K(-u)$ in der angegebenen besonderen Weise festgelegt ist.

Erwähnen wir noch, daß den Gleichungen (2) zufolge asymptotisch

$$\frac{Ku}{Ju} \sim -\operatorname{tg}\left(u-\frac{\pi}{4}\right) = i\,\frac{e^{2i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}-1}{e^{2i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}+1}$$

gesetzt werden kann; sind also v und w reelle Größen, ist $u = v + wi$, und läßt man $w = +\infty$ werden, so ergibt sich

$$(5)\qquad \lim\frac{Ku}{Ju} = -i.$$

Jetzt bilden wir im Sinne des ausgesprochenen Randwertproblems eine Greensche Funktion für die Strecke von 0 bis a mit den kennzeichnenden Eigenschaften

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(4x\,G'(x,\xi)\right) + \varrho^2\, G(x,\xi) = 0, \quad G(a,\xi) = 0, \\ &G(0,\xi) \text{ endlich}, \quad 4x\,G'(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1. \end{aligned}$$

Dann sind die Größen $J(\alpha\sqrt{x})$, in denen $J(\alpha\sqrt{a}) = 0$ gesetzt ist, Eigenfunktionen des Kerns $G(x,\xi)$ und man findet für diesen im Falle $x \leqq \xi$ den Ausdruck

$$G(x,\xi) = -\frac{\pi J(\varrho\sqrt{x})}{4J(\varrho\sqrt{a})}\left\{J(\varrho\sqrt{\xi})K(\varrho\sqrt{a}) - J(\varrho\sqrt{a})\,K(\varrho\sqrt{\xi})\right\},$$

der, wenn wir wie in § 49 jetzt $a = +\infty$ setzen, in eine Grenzgestalt G_∞, die Greensche Funktion für die Strecke von 0 bis $+\infty$ übergeht. Dazu muß angenommen werden, wenn $\varrho = \alpha + \beta i$ und α, β reelle Größen sind, $\beta > 0$; setzen wir $u = \varrho\sqrt{a}$, so ist $w = \beta\sqrt{a}$ und die Formel (5) ergibt für $K(\varrho\sqrt{a})/J(\varrho\sqrt{a})$ den Grenzwert $-i$. So erhält man die Formel

$$(7)\quad G_\infty(x,\xi) = +\frac{\pi i}{4}\,J(\varrho\sqrt{x})\left[J(\varrho\sqrt{\xi}) - iK(\varrho\sqrt{\xi})\right] = G_\varrho(x,\xi),$$

so daß nebenbei bemerkt die in ϱ meromorphe, den Parameter a enthaltende Funktion durch den Grenzübergang $a = +\infty$ in eine vieldeutige Funktion von ϱ übergangen ist. Der letzte Faktor der Größe G_∞ wäre nach § 49 durch $\psi_\infty\xi$ zu bezeichnen. Ersetzt man in den Gleichungen (6) die Größe ϱ durch σ, so findet man für G_ϱ und G_σ die Resolvente in der Form der Gleichung (2) des § 51.

Die Differenz $J(\varrho\sqrt{x}) - iK(\varrho\sqrt{x})$ ist, wie die asymptotischen Formeln zeigen, das bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \varrho^2 y = 0,$$

das für $x = +\infty$ verschwindet wie die erste der Größen

$$e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \varrho\sqrt{x}\right)}, \qquad e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \varrho\sqrt{x}\right)},$$

während in jedem anderen Integral ein die zweite Größe enthaltender Summand auftritt; jene Differenz ist die Funktion ψx unserer allgemeinen Theorie. Die Größe G_ϱ hat einen Sinn auch für reelle Werte von ϱ; sie ist in der Halbebene $\beta \geqq 0$ überall regulär mit Ausnahme der Stelle $\varrho = 0$. Trotzdem kann in der Bezeichnung des § 50 die Gleichung

$$G_\sigma(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho - \sigma} \tag{8}$$

angesetzt werden; denn schließt man die singuläre Stelle aus der Integrationsbahn $\mathfrak{R}$ aus, indem man sie auf einem der Halbebene $\beta \geqq 0$ angehörigen Halbkreise umgeht, dessen Mittelpunkt die Stelle $\varrho = 0$ und dessen Radius r ist, so werden wieder die Integrale

$$\int u^n \log u\, du$$

über den Halbkreis $|u| = r$ erstreckt mit r unendlich klein.

Bei großen Werten von ϱ zeigen die Formeln (2), daß die Größe $\varrho\, G_\varrho(x,\xi)$, in der wir jetzt x und ξ positiv annehmen, sich asymptotisch zusammensetzt aus den Exponentiellen

$$e^{\pm i\left(\frac{\pi}{4} - \varrho\sqrt{x}\right) - i\left(\frac{\pi}{4} - \varrho\sqrt{\xi}\right)} = e^{-\beta(\sqrt{\xi} \mp \sqrt{x}) + \cdots},$$

wobei im Exponenten nur Imaginäres weggelassen ist; die Beschränktheit ist auch im Falle $\beta = 0$ ersichtlich, da $\sqrt{\xi} - \sqrt{x}$ nicht negativ ist. Man kann daher, wie in § 50, aus der Gleichung (8) schließen

$$G_\sigma(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\, G_\varrho(x,\xi)\,d\varrho}{\varrho^2 - \sigma^2}.$$

Um nun zu den Darstellungsformeln zu gelangen, setzen wir, wenn Fx auf der Strecke von 0 bis $+\infty$ mit $F'x$ und $F''x$ die in § 51 geforderten Eigenschaften haben und $F0$ endlich ist,

$$(4xF'x)' + \sigma^2 Fx = -fx,$$

wobei $\sigma = \gamma + \delta i$, γ und δ reell und $\delta > 0$ sei. Dann folgt durch die Greensche Operation aus dieser Gleichung und der Differentialgleichung (6), in der ϱ durch σ ersetzt wird,

$$Fx = \int_0^\infty G_\sigma(x,\xi)\, fx.dx,$$

hieraus weiter nach der Methode des § 51 die Hauptformel (14), die wir jetzt schreiben

$$Fx = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} G_\varrho(x,\alpha)\, F\alpha.d\alpha - \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} G_{-\varrho}(x,\alpha)\, F\alpha.d\alpha.$$

Nun ist der Formel (7) zufolge, $u = \varrho\sqrt{\xi}$ gesetzt,

$$G_\varrho(x,\alpha) - G_{-\varrho}(x,\alpha) = \frac{\pi}{4}\left[K(\varrho\sqrt{\alpha}) - K(-\varrho\sqrt{\alpha})\right] J(\varrho\sqrt{x})$$
$$= \frac{\pi i}{2} J(\varrho\sqrt{\alpha})\, J(\varrho\sqrt{x});$$

die vorletzte Gleichung ergibt somit

$$Fx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} J(\varrho\sqrt{\alpha})\, J(\varrho\sqrt{x})\, F\alpha\,.\,d\alpha,$$

oder wenn wir $F(x^2) = \Phi x$ setzen

$$\Phi x = \int_0^{+\infty} \varrho\, d\varrho \int_0^{+\infty} J(\varrho\beta)\, J(\beta x)\,.\,\Phi\beta\,.\,\beta\, d\beta.$$

Dieselbe Formel ergibt sich übrigens auch, wenn man J_n an Stelle von J setzt.

Siebenter Abschnitt.

Unsymmetrische Kerne und das Dirichletsche Problem.

§ 53.

Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern.

In § 44 ist gezeigt, daß, wenn als Kern eine der in § 36 eingeführten Greenschen Funktionen genommen wird, oder überhaupt der Kern gewisse Stetigkeitsbedingungen allgemeinen Charakters erfüllt, die Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha, \tag{1}$$

in der überall durch das Grundgebiet integriert wird und $f\alpha$ in diesem eine stetige Funktion der Stelle α bedeutet, gleichmäßig und absolut konvergiert und den Wert

$$\int K(x,\alpha)\, f\alpha \,.\, dx$$

hat. Daraus folgt nach § 23 die Schmidtsche Formel, d. h. die Reihe

$$\varphi x = fx + \lambda \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

konvergiert in derselben Weise wie die Reihe (1), sobald λ eine von den Eigenwerten λ_n verschiedene Konstante bedeutet, und erfüllt die Gleichung

$$\varphi x = fx + \lambda \int K(x,\alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha.$$

Wir wollen den Inhalt dieser Aussage etwas anders aussprechen, indem wir den Faktor λ in den Kern hineinziehen. Dann können wir sagen: es gibt eine im Grundgebiet stetige Lösung der nichthomogenen Integralgleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x,\alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha \tag{2}$$

mit symmetrischem Kern, sobald dieser keine Nullösung besitzt. Darunter verstehen wir eine Lösung der letzten Gleichung, die sich ergeben würde, wenn fx identisch verschwindet, also eine Lösung der Gleichung

$$\varphi x = \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha.$$

Die Lösung der Gleichung (2) kann offenbar nur mit fx zugleich identisch verschwinden.

In dieser Form bleibt das erhaltene Resultat gültig, wenn der Kern $K(x, y)$ nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzt wird. Versuchen wir nämlich jetzt die Gleichung (2) durch den Ansatz

$$\varphi x = \psi x - \int K(\alpha, x)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha \tag{3}$$

zu erfüllen, so ergibt sich

$$\varphi \alpha = \psi \alpha - \int K(\beta, \alpha)\, \psi \beta \,.\, d\beta,$$

$$\int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha = \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha - \int d\alpha\, K(x, \alpha) \,.\, \int K(\beta, \alpha)\, \psi \beta \,.\, d\beta.$$

oder, indem die Integrationen im letzten Gliede vertauscht werden,

$$\int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha = \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha - \int \psi \beta \,.\, d\beta \int K(x, \alpha) K(\beta, \alpha)\, d\alpha$$

$$= \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha - \int \psi \alpha \,.\, d\alpha \int K(x, \beta)\, K(\alpha, \beta)\, d\beta,$$

und diese Transformation gilt nach § 44, in welchem die Symmetrie des Kernes nicht wesentlich ist, sobald der Kern $K(x, \alpha)$, wie wir annehmen wollen, entweder stetig ist oder nur in derselben Weise unendlich wird, wie die Greenschen Funktionen des fünften Abschnittes. Zieht man jetzt die Gleichung (3) nochmals heran, so folgt

$$\varphi x - \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha\, d\alpha$$

$$= \psi x - \int \psi \alpha \left[K(\alpha, x) + K(x, \alpha) - \int K(x, \beta)\, K(\alpha, \beta)\, d\beta \right] d\alpha,$$

oder, wenn

$$Q(x, \alpha) = K(\alpha, x) + K(x, \alpha) - \int K(x, \beta)\, K(\alpha, \beta)\, d\beta$$

gesetzt wird,

$$\varphi x - \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha = \psi x - \int Q(x, \alpha)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha. \tag{4}$$

Diese Identität führt die nichthomogene Integralgleichung (2) auf eine solche mit dem offenbar symmetrischen Kern $Q(x, \alpha)$

zurück, dessen Singularitäten wieder keine anderen sind als die der Greenschen Funktionen; man erhält nämlich aus der Gleichung (2) unmittelbar

$$f x = \psi x - \int Q(x, \alpha) \psi \alpha . d \alpha \tag{5}$$

und diese ist zu lösen, wenn keine Nullösung existiert.

Wäre dies der Fall, d. h. gäbe es eine nicht identisch verschwindende Lösung der Gleichung

$$\psi x - \int Q(x, \alpha) \psi \alpha . d \alpha = 0,$$

so ergäbe die Identität (4), daß

$$\varphi x = \psi x - \int K(\alpha, x) \psi \alpha . d \alpha$$

eine Nullösung des Kerns $K(x, \alpha)$ ist, vorausgesetzt, daß φx nicht identisch verschwindet.

In letzterem Falle hätte die Gleichung

$$\psi x - \int K(\alpha, x) \psi \alpha \, d \alpha = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung, oder der Kern $K(\alpha, x)$, der sich von dem soeben betrachteten durch die Stellung der Integrationsvariablen unterscheidet, hätte eine Nullösung. Hat also keiner der Kerne $K(x, \alpha)$ und $K(\alpha, x)$ eine Nullösung, so hat auch der Kern der Gleichung (5) keine solche, und diese ist bei beliebiger Wahl der Funktion $f x$ lösbar. Damit erhält man das Fredholmsche Theorem, daß die Gleichung

$$\varphi x = f x + \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d \alpha,$$

in der $f x$ nicht identisch verschwindet, stets eine stetige Lösung φx besitzt, wenn dies von keiner der Gleichungen

$$\varphi x = \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d \alpha, \qquad \varphi x = \int K(\alpha, x) \varphi \alpha . d \alpha$$

gilt; dabei sei der Kern K entweder stetig oder brauchbar unstetig, wie die Greenschen Funktionen des fünften Abschnitts.

Lösungen der letzten beiden Gleichungen nennen wir Nulllösungen erster und zweiter Art des Kerns $K(x, \alpha)$; erster Art sind diejenigen, bei denen die Integrationsvariable unter dem Zeichen K so steht, wie in der nichthomogenen Gleichung, also an zweiter Stelle.

§ 54.

Das Dirichletsche Problem in der Ebene.

Als erste wichtige Anwendung des erhaltenen Satzes betrachten wir das Dirichletsche Problem in der Ebene, das wir folgendermaßen aussprechen. Bedeutet α den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, so wird eine Funktion $\Phi\alpha$ gesucht, die die Gleichung

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

erfüllt und im Innern einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, überall stetig gekrümmten Kurve $\mathfrak{C}$ mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist; die ferner, wenn man sich der Kurve $\mathfrak{C}$ nähert, gegen Grenzwerte konvergiert, die auf dieser Kurve als Werte einer stetigen Funktion des Ortes gegeben sind. Bezeichnen wir allgemein durch die angehefteten Buchstaben i und a die Grenzwerte einer Größe, denen sie zustrebt, wenn man sich von innen oder außen der Kurve $\mathfrak{C}$ nähert, durch Überstreichen der Werte, die auf dieser Kurve selbst angenommen werden, so kann die Grenzbedingung durch die Gleichung

$$\Phi_i = \overline{F}$$

ausgesprochen werden, in der F eine gegebene Funktion des Ortes auf der Kurve $\mathfrak{C}$ bedeutet.

Es sei ferner $d\alpha$ das Bogenelement, N die innere, N' die äußere Normale der Kurve $\mathfrak{C}$, die vom Punkte α aus gezogen sind; die analoge Bedeutung mögen dx, N_x, N'_x für einen Punkt x haben usf. Dann setzen wir versuchsweise an

$$\Phi x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}} \cdot d\alpha,$$

d. h. wir denken uns, die Kurve $\mathfrak{C}$ sei als doppeltbelegte Linie im Sinne des logarithmischen Potentials wirksam und ergebe das Potential Φ. Das Potential einer Doppellinie hat nun, wenn wir die Kurve $\mathfrak{C}$ stetig gekrümmt voraussetzen, an dieser Kurve eine Unstetigkeit, die durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \overline{\Phi} x = \Phi_i x - \pi\psi x = \Phi_a x + \pi\psi x$$

dargestellt wird.

Für die weiteren Untersuchungen ist es wesentlich, daß diese Eigenschaft schon abgeleitet werden kann, wenn die Dichtigkeit nur als stetig vorausgesetzt wird, ohne daß Ableitungen zu existieren brauchen, während bei den im fünften Abschnitt betrachteten Potentialen an manchen Stellen stetige Ableitungen der Dichtigkeit vorausgesetzt wurden.

Wir verifizieren die Gleichung (1) für den Fall, daß $\psi\alpha = 1$ gesetzt wird. Dann ist das Element des Integrals Φ, d. h.

$$d\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{xa}} = -\frac{d\alpha}{r_{xa}} \frac{d\,r_{xa}}{dN}$$

nichts anderes, als die scheinbare Größe des Elements $d\alpha$, gesehen von der Stelle x aus und mit solchem Vorzeichen versehen, daß die Integration über die Kurve $\mathfrak{C}$ das Resultat 2π, 0 oder π ergibt, je nachdem der Punkt x im Innern, Äußern oder auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegt. Damit sind dann die Gleichungen (1) verifiziert:

$$\overline{\Phi} = \pi = \Phi_i - \pi = 2\pi - \pi = \Phi_a + \pi = 0 + \pi.$$

Setzt man bei beliebiger Gestalt der Kurve $\mathfrak{C}$ für Φ_i in der ersten Gleichung (1) den Wert F und für $\overline{\Phi}$ das Integral

$$\overline{\Phi} x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{xa}}\, d\alpha,$$

so ergibt sich

$$\Phi_i x - \pi\psi x = Fx - \pi\psi x = \overline{\Phi} x,$$

$$\psi x = \frac{Fx}{\pi} - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\psi\alpha}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{xa}}\, d\alpha. \tag{2}$$

Die Funktion ψx ist also die Unbekannte in einer Integralgleichung

$$\psi x = fx + \int K(x,\alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha,$$

für die

$$fx = \frac{Fx}{\pi}, \qquad K(x,\alpha) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{xa}}$$

zu setzen ist. Das Grundgebiet ist die Kurve $\mathfrak{C}$, und in ihm ist der Kern endlich und stetig, da wir die Kurve überall stetig gekrümmt voraussetzen.

Die Integralgleichung (2) hat nun nach dem vorigen Paragraphen eine auf dem Grundgebiet stetige Lösung, wenn ihr Kern weder Nullösungen erster noch zweiter Art besitzt. Ist dies gezeigt, so gibt die Größe

$$\Phi x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}}\, d\alpha$$

die Lösung des Dirichletschen Problems, da sie die Laplacesche Differentialgleichung und die Randbedingung

$$\Phi_i x = \overline{F} x$$

vermöge der Integralgleichung (2) erfüllt.

Es läßt sich aber in der Tat zeigen, daß keine Nullösungen vorhanden sind. Wäre zunächst eine solche erster Art vorhanden, so erfüllte sie die Gleichung

$$\psi x - \int_{\mathfrak{C}} K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha = 0. \tag{3}$$

Nimmt man nun $(\psi \alpha)/\pi$ als Dichtigkeit der doppelt belegten Linie $\mathfrak{C}$, so ergibt sich als Potential allgemein

$$\mathfrak{F} x = \int_{\mathfrak{C}} \frac{\psi \alpha}{\pi} \cdot \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}} d\alpha$$

und speziell auf der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\overline{\mathfrak{F}} x = -\int_{\mathfrak{C}} K(x, \alpha) \psi \alpha \, d\alpha.$$

Da nun aus der allgemeinen Theorie des Potentials die Gleichungen

$$\overline{\mathfrak{F}} x = \mathfrak{F}_i - \frac{\psi x}{\pi} \cdot \pi,$$

$$-\int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha = -\psi x + \mathfrak{F}_i$$

folgen, so ergibt die Gleichung (3) längs der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{F}_i = 0, \tag{4}$$

und da auch die Gleichung

$$\Delta \mathfrak{F} = 0$$

gilt, so folgt, daß $\mathfrak{F}$ im ganzen Innern der Kurve $\mathfrak{C}$ verschwinden müßte.

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dN} = 0,$$

und da die normale Ableitung des Potentials einer Doppellinie an dieser selbst stetig ist, wenn sie auf der einen Seite gegen endliche Grenzwerte konvergiert,

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dN'} = 0$$

Umgibt man nun die Kurve $\mathfrak{C}$ mit einer anderen $\mathfrak{C}''$, deren Linienelement dl'' und deren innere Normale N'' ist, so gilt nach der Gaußschen Integraltransformation die Gleichung

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} \mathfrak{F} \frac{d\mathfrak{F}}{dN'} d\alpha + \int\limits_{\mathfrak{C}''} \mathfrak{F} \frac{d\mathfrak{F}}{dN''} dl'' = \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\xi\, d\eta,$$

wobei rechts über die von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ eingeschlossene Fläche zu integrieren ist. Das erste Glied auf der linken Seite dieser Gleichung hat aber den Wert Null; das zweite kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kurve $\mathfrak{C}''$ weiter und weiter hinausrückt, da dann die Größen $\mathfrak{F}$ und $d\mathfrak{F}/dN''$ in bekannter Weise unendlich klein werden; somit folgt für den Außenraum der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} = 0,$$

und da die Größe $\mathfrak{F}$ im Unendlichen verschwindet,

$$\mathfrak{F} = 0,$$

speziell auch

(5) $$\mathfrak{F}_a = 0.$$

Nun gibt die Unstetigkeit des Potentials $\mathfrak{F}$ die Gleichung

$$\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_a = 2\pi \frac{\psi x}{\pi} = 2\psi x,$$

also den Gleichungen (4) und (5) zufolge

$$\psi x = 0,$$

d. h. eine Nullösung erster Art existiert nicht.

Nehmen wir nun aus § 55 den Satz vorweg, daß bei stetigen Kernen Nullösungen erster und zweiter Art nur zugleich auftreten, so ist schon bewiesen, daß im vorliegenden Falle überhaupt keine Nullösungen vorhanden sind.

Das Dirichletsche Problem besitzt also eine Lösung, und diese ist einzig, da die Differenz zweier Lösungen wieder eine Nullösung ergäbe. Die erhaltene Lösung erscheint als Potential einer doppelt belegten Kurve, bei der die Dichtigkeit stetig ist Aus dieser Eigenschaft folgen, wie bemerkt, gewisse Eigenschaften des Potentials, z. B. die Stetigkeit seiner Ableitungen außerhalb und innerhalb der Kurve $\mathfrak{C}$, sowie die Gleichungen (1). Setzt man ferner voraus, Fx habe längs der Kurve $\mathfrak{C}$ eine stetige

Ableitung, so gilt dasselbe der Integralgleichung (2) zufolge auch von ψx, und hieraus folgt, daß die normal zur Kurve $\mathfrak{C}$ gebildete Ableitung des Potentials gegen endliche, auf der Kurve $\mathfrak{C}$ stetig veränderliche Grenzwerte konvergiert, wenn man an die Kurve heranrückt.

§ 55.

Vereinfachung des in § 53 erhaltenen Kriteriums.

Wir wenden uns jetzt zum Beweis des schon benutzten Satzes, daß bei stetigen Kernen Nullösungen zweiter Art nur existieren, wenn auch solche erster Art vorhanden sind.

Um dies einzusehen, gehen wir von der in § 20 aufgestellten Ungleichung

$$k \leqq \lambda_1^2 \int\int K(x,\alpha)^2 \, d\alpha \, dx \tag{1}$$

aus, in der k die Anzahl der zum Eigenwert λ_1 gehörigen, zueinander orthogonalen Lösungen der Gleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x,\alpha) \varphi\alpha \, d\alpha$$

bedeutet.

Man schließt aus der Beziehung (1) sofort, daß bei der Annahme

$$\int\int K(x,y)^2 \, dx \, dy < 1$$

alle Eigenwerte der Kerne $K(x,y)$ und $K(y,x)$ größer als Eins sein müssen; dann existieren also weder Nullösungen erster noch zweiter Art, da bei diesen offenbar in der Bezeichnung des § 20 der Eigenwert 1 auftritt. Die Gleichungen

$$\varphi x = fx + \int K(x,\alpha) \varphi\alpha \, . \, d\alpha,$$

$$\varphi_1 y = f_1 y + \int K(\alpha,y) \varphi_1 \alpha \, . \, d\alpha$$

sind also bei beliebiger Wahl der stetigen Funktionen fx und $f_1 y$ stets auflösbar. Speziell kann man solche Funktionen $\Gamma(x,y)$ und $\Gamma_1(x,y)$ bestimmen, daß die Gleichungen

$$\Gamma(x,y) = K(x,y) + \int K(x,\alpha) \Gamma(\alpha,y) \, d\alpha, \tag{2}$$

$$\Gamma_1(x,y) = K(x,y) + \int K(\alpha,y) \Gamma_1(x,\alpha) \, d\alpha \tag{3}$$

gelten. Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\Gamma(y,z)\,dy$, indem man links den nach der ersten Gleichung diesem Faktor gleichen Ausdruck

$$\left[K(y,z)+\int K(y,\alpha)\,\Gamma(\alpha,z)\,d\alpha\right]dy$$

einsetzt und integriert nach y, so ergibt sich

$$\int \Gamma_1(x,y)\,K(y,z)\,dy+\int\!\!\int \Gamma_1(x,y)\,K(y,\alpha)\,\Gamma(\alpha,z)\,d\alpha\,dy$$
$$=\int \Gamma(y,z)\,K(x,y)\,dy+\int\!\!\int \Gamma_1(x,\alpha)\,K(\alpha,y)\,\Gamma(y,z)\,dy\,d\alpha,$$

und da die Doppelintegrale sich nur durch die Zeichen der Integrationsvariablen unterscheiden, folgt

$$\int \Gamma_1(x,y)\,K(y,z)\,dy=\int \Gamma(y,z)\,K(x,y)\,dy.$$

Diese Gleichung kann auf Grund der Gleichungen (2) und (3) geschrieben werden

$$\Gamma_1(x,z)-K(x,z)=\Gamma(x,z)-K(x,z),$$

womit die Identität

$$\Gamma_1(x,y)=\Gamma(x,y)$$

erwiesen ist. Jede Lösung der Gleichung (7) ist also mit jeder der Gleichung (2) identisch; beide Gleichungen können also nur eine gemeinsame Lösung besitzen und haben, wenn diese existiert, keine weiteren Lösungen.

Die Gleichungen (2) und (3) heißen die **Resolventen** des Kerns $K(x,y)$; ihre gemeinsame Lösung $\Gamma(x,y)$ **der lösende Kern**. Existiert er, so folgen die Gleichungen

$$fx=\varphi x-\int K(x,\alpha)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha, \tag{4}$$

$$\varphi x=fx+\int \Gamma(x,\alpha)\,f\alpha\,.\,d\alpha \tag{5}$$

auseinander, wie man sofort erkennt, wenn φx aus der zweiten Gleichung in die erste oder fx aus der ersten Gleichung in die zweite einsetzt und die Resolventen berücksichtigt; ebenso folgen auch die Gleichungen

$$fx=\varphi x-\int K(\alpha,x)\,\varphi\alpha\,.\,d\alpha, \tag{6}$$

$$\varphi x=fx+\int \Gamma(\alpha,x)\,f\alpha\,.\,d\alpha \tag{7}$$

auseinander; die Integralgleichungen (4) und (6) werden also durch die Formeln (5) und (7) aufgelöst, sobald der lösende Kern $\Gamma(x,y)$ bestimmt ist.

In einem Sonderfalle ist die Frage nach der Existenz des lösenden Kern rein algebraischer Natur, dann nämlich, wenn man als Kern die Größe

$$K_0(x,y) = \sum_{\nu}^{1,k} \Phi_\nu x \,.\, \Psi_\nu y$$

nimmt und unter Φ, Ψ im Grundgebiete stetige Funktionen des Ortes verstanden werden. In diesem Falle folgt aus der Integralgleichung

$$\varphi x = fx + \int K_0(x,\alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha$$

sofort

(8) $$\varphi x = fx + \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \Phi_\nu x,$$

wobei

(9) $$\varrho_\mu = \int \Psi_\nu \alpha \,.\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha$$

gesetzt ist. Substituiert man den Wert (8) in die Ausdrücke (9), so ergeben sich die Gleichungen

$$\varrho_\mu - \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \int \Phi_\nu \alpha \,.\, \Psi_\mu \alpha \,.\, d\alpha = \int f\alpha \,.\, \Psi_\mu \alpha \,.\, d\alpha,$$

aus denen die Größen ϱ zu bestimmen sind.

Eine Nullösung erster Art ergibt die Bedingungen

$$\varrho_\mu - \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \int \Phi_\nu \alpha \,.\, \Psi_\mu \alpha \,.\, d\alpha = 0, \quad \mu = 1,\ 2, \ldots k.$$

Vertauscht man die Rollen der Funktionszeichen Φ und Ψ, so erhält man die Bedingungen für eine Nullösung zweiter Art, indem man im Schema der Koeffizienten der Größen ϱ_ν die Zeilen und Spalten vertauscht. Dadurch wird ersichtlich, daß bei dem Kern $K_0(x,y)$ die Nullösungen erster und zweiter Art stets nur zugleich auftreten, und zwar gleichviel linear unabhängige, da der Rang der maßgebenden Determinante sich nicht ändert, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht.

Jetzt sei $K(x,y)$ wieder ein beliebiger Kern und werde angenommen, man könne den Kern K_0 so wählen, daß für die Differenz

$$K_1(x,y) = K(x,y) - K_0(x,y)$$

die Ungleichung

(10) $$\int\int K_1(x,y)^2\, dx\, dy < 1$$

gilt, also ein lösender Kern $\Gamma_1(x, y)$ existiert, der die Gleichungen

$$\Gamma_1(x, y) = K_1(x, y) + \int K_1(x, \alpha)\, \Gamma_1(\alpha, y)\, d\alpha,$$

$$\Gamma_1(x, y) = K_1(x, y) + \int K_1(\alpha, y)\, \Gamma_1(x, \alpha)\, d\alpha$$

erfüllt. Dann nimmt die Gleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha \tag{11}$$

die folgende Form an:

$$fx + \sum_{\nu}^{1,k} \Phi_\nu x \,.\, \int \Psi_\nu \alpha \,.\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha = \varphi x - \int K_1(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

oder kurz, indem wir die linke Seite Fx nennen,

$$Fx = \varphi x - \int K_1(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn wir sie als Sonderfall der Gleichung (11) oder (6) ansehen,

$$\varphi x = Fx + \int \Gamma_1(x, \alpha)\, F\alpha \,.\, d\alpha.$$

Setzen wir hier für Fx den expliziten Wert, so verschwindet die Größe K_1 und es ergibt sich die Gleichung

$$fx + \int \Gamma_1(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha$$

$$= \varphi x - \int \varphi\alpha \sum_{\nu}^{1,k} \left(\Phi_\nu x + \int \Gamma_1(x, \alpha)\, \Phi_\nu \alpha \,.\, d\alpha\right) \Psi_\nu \alpha \,.\, d\alpha.$$

Damit ist die gegebene Integralgleichung (11) auf eine solche zurückgeführt, deren Kern die Gestalt $K_0(x, y)$ hat; speziell also folgt, daß Nullösungen erster und zweiter Art bei stetigen Kernen nur zugleich auftreten.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß K_0 so gewählt werden kann, daß K_1 die Ungleichung (10) erfüllt. Um dies zu erreichen, teile man das Grundgebiet in solche Teilgebiete, daß in jedem von ihnen die Differenz zweier Werte des Kerns absolut unter einer vorgeschriebenen positiven Konstanten ε bleibt. Im νten Teilgebiete liege die Stelle y_ν; dann sei $\Psi_\nu = 0$ in allen Teilgebieten außer dem νten; in diesem sei $\Psi_\nu = 1$ mit Ausnahme eines an die Umgrenzung sich anschließenden Randgebiets von beliebig kleiner Ausdehnung, in dem Ψ_ν stetig von 1 zu 0 übergehe; allgemein werde $\Phi_\nu x = K(x, y_\nu)$ gesetzt. Dies festgesetzt, ist die Größe K_1 im Grundgebiet stetig, und gilt außerhalb der Randgebiete die Beziehung

$$|K_1(x, y)| = \left| K(x, y) - \sum_\nu^{1, k} \Phi_\nu x \,.\, \Psi_\nu y \right| < \varepsilon;$$

da nun die Gesamtausdehnung der Randgebiete beliebig klein genommen werden kann, so folgt bei passender Wahl von ε die Ungleichung

$$\iint K_1(x, y)^2 \, dx \, dy < 1.$$

§ 56.

Die Existenz der Greenschen Funktion bei allgemeineren Problemen der Wärmeleitung.

Die erhaltenen Resultate gewähren wesentliche Erleichterungen, wenn man die Methoden des § 54 auf diejenigen Probleme der Wärmeleitung übertragen will, bei denen an der Grenze des Grundgebietes Wärme ausgestrahlt wird.

Es sei etwa das Grundgebiet eben, und es werde in ihm eine Funktion des Ortes, die stationäre Temperatur Φ, gesucht, die die Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

im Innern des leitenden Gebietes und die Randbedingung

(1) $$\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi = F$$

an der Randkurve $\mathfrak{C}$ erfüllt; in dieser bedeute N die innere Normale, h eine positive Konstante und F eine stetige Funktion des Ortes auf der Kurve $\mathfrak{C}$.

Wir versuchen den Ansatz

$$\Phi x = \int \psi \alpha \,.\, \log \frac{1}{r_{xa}} \, d\alpha,$$

indem wir unter $d\alpha$ ein Element der Kurve $\mathfrak{C}$ verstehen, auf die sich auch das unbestimmte Integralzeichen beziehe. Die gesuchte Funktion erscheint als Potential der einfach im Sinne des logarithmischen Potentials mit Masse belegten Linie $\mathfrak{C}$.

Setzen wir dann

$$M = \frac{d\Phi}{dN}$$

und geben den Zeichen i, a und dem Querstrich dieselben Bedeutungen wie in § 54, so ergeben die dort benutzten Sätze über das Linienpotential die Gleichungen

$$M_i = \overline{M} + \pi\psi x, \qquad M_a = \overline{M} - \pi\psi x. \tag{2}$$

Dabei gilt die Gleichung

$$\overline{M} = \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\, d\alpha;$$

ist doch das Element des Integrals die Komponente der Anziehung des Elementes $d\alpha$ im Punkte x nach der Richtung N_x. Kombiniert man diesen Ausdruck mit den Gleichungen (2), so ergibt sich

$$M_i = \pi\psi x + \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} \cdot d\alpha,$$

und die Randbedingung (1) führt zu der Gleichung

$$0 = \pi\psi x - h\Phi x - Fx + \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} \cdot d\alpha,$$

und umgekehrt; setzt man für Φx den vorausgesetzten Wert, so ergibt sich

$$\pi\psi x = Fx - \int d\alpha . \psi\alpha \left[\frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} - h \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\right]. \tag{3}$$

Hiermit ist die Aufgabe, ψx zu finden, auf eine Integralgleichung mit dem unsymmetrischen Kern

$$K(x,\alpha) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} + \frac{h}{\pi} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}$$

zurückgeführt; das Grundgebiet bildet die Kurve $\mathfrak{C}$. Diese Größe sowie die symmetrische Funktion

$$Q(x,y) = K(x,y) + K(y,x) - \int K(x,\alpha)\, K(y,\alpha)\, d\alpha$$

sind unstetig wie $\log r_{x\alpha}$ oder $\log r_{xy}$, so daß die Theorie des § 53 angewandt und geschlossen werden kann, daß die Integralgleichung (3) eine stetige Lösung ψx besitzt, sobald man weiß, daß keine Nullösung vorhanden ist.

Eine Nullösung erster Art würde nun die Gleichung

$$-\psi x + \int K(x,\alpha)\, \psi\alpha . d\alpha = 0 \tag{4}$$

erfüllen, und für die zugehörige Größe Φ ergäben sich die Beziehungen

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \overline{\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi} = 0. \tag{5}$$

Diese sind aber nicht miteinander vereinbar. Es gilt nämlich die Identität

$$\int_{\mathfrak{G}} ds \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 \right\} = -\int d\alpha . \Phi \frac{d\Phi}{dN},$$

wenn links über die leitende Platte integriert und unter ξ, η rechtwinklige Koordinaten verstanden werden, und die zweite Gleichung (5) ergibt

$$\int_{\mathfrak{G}} ds \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 \right\} = -h \int d\alpha . \Phi^2,$$

was offenbar, da h positiv, unmöglich ist.

Eine Lösung der Gleichung (4) mit beliebigem Kern ergibt nun, indem man

$$\psi \alpha = \int K(\alpha, \beta) \psi \beta . d\beta$$

einsetzt,

$$\psi x = \int K(x, \alpha) d\alpha \int K(\alpha, \beta) \psi \beta . d\beta.$$

Ist aber die Singularität des Kerns K, wie im vorliegenden Falle, so beschaffen, daß die Integrationen wie bei brauchbar unstetigen symmetrischen Kernen vertauscht werden können und setzt man

$$K^2(x, \beta) = \int K(x, \alpha) K(\alpha, \beta) d\alpha,$$

so findet man

$$\psi x = \int K^2(x, \beta) \psi \beta . d\beta.$$

Eine Nullösung erster Art des Kerns $K(x, \alpha)$ wäre also auch eine solche des Kerns $K^2(x, \alpha)$, und dieser ist im Grundgebiet aus denselben Gründen stetig wie die gleichbezeichnete Größe bei brauchbaren unstetigen symmetrischen Kernen. Ebenso wäre eine Nullösung zweiter Art des Kerns $K(x, \alpha)$ eine solche des Kerns $K^2(x, \alpha)$. Auf letzteren ist nun die Theorie des § 55 anzuwenden; er besitzt nur Nullösungen zweiter Art, wenn solche erster Art vorhanden sind. Von den Nullösungen des Kerns K^2 kann man aber zu denen des Kerns K durch Betrachtungen übergehen, die schon in § 19 den Rückgang vom interierten zum ursprünglichen Kern vermittelten, und so erschließen, daß der Kern K, wenn er keine Nullösungen erster Art besitzt, auch keine solchen zweiter Art zuläßt. Mit dieser Schlußreihe, deren Gang wir nur andeuten, wäre die Existenz der gesuchten Greenschen Funktion für das vorgelegte Problem der Wärmeleitung erwiesen.

Die Funktion Φx ergibt sich als Potential einer einfach belegten Linie $\mathfrak{C}$ mit stetiger Dichtigkeit; hieraus folgt, daß die Größe Φx im Innern des von der Kurve $\mathfrak{C}$ umschlossenen Grundgebiets des ursprünglichen Wärmeleitungsproblems stetige erste und zweite Ableitungen besitzt, und daß an der Kurve $\mathfrak{C}$ die normalen Ableitungen der Größe Φx gegen endliche, auf der Kurve sich stetig ändernde Grenzwerte konvergieren. Dasselbe folgt daher für die im vierten Abschnitt durch $M(0, 1)$ bezeichnete Größe, die durch ein Randwertproblem von derselben Form wie Φx definiert werden kann.

§ 57.

Das Dirichletsche Problem im Raume.

Die Aufgabe, eine Funktion Φ zu bestimmen, die in dem von der Fläche $\mathfrak{F}$ umschlossenen Gebiet die Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

erfüllt, an der Fläche selbst aber gegen gegebene Grenzwerte gemäß der Gleichung

$$\Phi_i = \overline{F}$$

konvergiert, kann in derselben Weise, wie das bei dem Dirichletschen Problem in der Ebene durchgeführt ist, auf eine Integralgleichung zurückgeführt werden, indem man in den Formeln des § 54 überall $\log (1/r_{\alpha x})$ durch $1/r_{\alpha x}$ ersetzt und durch $d\alpha$ ein Element der Fläche $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Hält man im übrigen die Bezeichnungen des § 54 aufrecht und nimmt an, die Fläche $\mathfrak{F}$ sei überall stetig gekrümmt, so setzt man

$$\Phi x = \frac{1}{2\pi} \int \psi \alpha \cdot \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r_{\alpha x}} \right) d\alpha$$

an, wobei wie in allen kommenden unbestimmten Integralzeichen über die Fläche $\mathfrak{F}$ als Grundgebiet zu integrieren ist. Dann gelten die Gleichungen

$$\overline{\Phi} x = \Phi_i x - \psi x = \Phi_a x + \psi x,$$

und man findet für die unbekannte Funktion ψ die Integralgleichung

$$\psi x = F x + \int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha,$$

wobei gesetzt ist

$$(1) \qquad K(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r_{\alpha x}} \right).$$

Diese Größe wird auf dem Grundgebiet unendlich, so daß die Methode des § 54 nicht mehr ohne weiteres angewandt werden kann.

Diese Schwierigkeit überwinden wir, wie früher in ähnlichen Fällen, indem wir zu iterierten Kernen übergehen.

Sei allgemein die Gleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{2}$$

gegeben und werde

$$K^2(x, y) = \int K(x, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha,$$

$$K^3(x, y) = \int K^2(x, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha$$

gesetzt; darf man die Integrationen vertauschen, was wir in diesem Paragraphen überhaupt voraussetzen wollen, so findet man leicht auch die Gleichung

$$\begin{aligned} K^3(x, y) &= \int\!\!\int K(x, \beta)\, K(\beta, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha\, d\beta \\ &= \int K(x, \alpha)\, K^2(\alpha, y)\, d\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Substituiert man nun in der Gleichung (2) rechts für $\varphi \alpha$ den Wert, den die Gleichung selbst ergibt, so folgt

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, f\alpha \,.\, d\alpha + \int K^2(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

und hieraus,. indem man nochmals die Gleichung (2) benutzt,

$$\begin{aligned} \varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, f\alpha\, d\alpha + \int K^2(x, \alpha)\, f\alpha \,.\, d\alpha \\ + \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \end{aligned}$$

oder kurz

$$\varphi x = \bar{f}x + \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha.$$

Wenn also, wie im Falle des Kernes (1) gezeigt werden kann, die Größe $K^3(x, \alpha)$ auf dem Grundgebiet stetig bleibt, so ist die Integralgleichung mit unstetigem Kern auf eine solche mit stetigem Kern zurückgeführt.

Um diesen Zusammenhang genauer zu verfolgen, untersuchen wir die Beziehung zwischen den Nullösungen der Kerne $K(x, \alpha)$ und $K^3(x, \alpha)$. Hat ersterer eine Nullösung, so gilt offenbar dasselbe von $K^3(x, \alpha)$; etwas schwieriger ist die umgekehrte Frage. Werde also die Gleichung

$$\varphi x = \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{4}$$

vorausgesetzt, und seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die drei Werte der dritten Einheitswurzel, speziell $\varrho_1 = 1$. Dann setze man

$$3\,\theta_\nu x = \varphi x + \varrho_\nu \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha + \varrho_\nu^2 \int K^2(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha;$$

diese Größen können nicht alle drei identisch verschwinden, da sonst dasselbe von φx gälte. Man findet nun ohne weiteres

$$3 \int K(x, \beta)\, \theta_\nu \beta \,.\, d\beta = \int K(x, \beta)\, \varphi \beta \,.\, d\beta$$

$$+ \varrho_\nu \int\!\!\int K(x, \beta) K(\beta, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha\, d\beta + \varrho_\nu^2 \int\!\!\int K(x, \beta) K^2(\beta, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{3\,\theta_\nu x - \varphi x}{\varrho_\nu} + \varrho_\nu^2 \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

oder auf Grund der Gleichung (4)

$$\theta_\nu x = \varrho_\nu \int K(x, \beta)\, \theta_\nu \beta \,.\, d\beta. \tag{5}$$

Gerade so würde man von einer zum Kern $K^3(x, \alpha)$ gehörigen Nullösung zweiter Art, also einer Lösung der Gleichung

$$\varphi x = \int K^3(\alpha, x)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zu einer Gleichung

$$\theta_\nu x = \varrho_\nu \int K(\beta, x)\, \theta_\nu \beta \,.\, d\beta \tag{6}$$

gelangen.

Die durchgeführte Untersuchung läßt sich offenbar auf beliebige iterierte Kerne $K^m(x, \alpha)$ übertragen, in denen m eine ungerade Zahl ist; aus einer Nullösung eines solchen kann man stets eine Nullösung des ursprünglichen Kernes herstellen. Bei symmetrischen Kernen erhält man hieraus das Resultat, daß aus einer Eigenfunktion eines iterierten Kernes stets eine solche des ursprünglichen abgeleitet werden kann.

Für die gegenwärtige Untersuchung bemerken wir nur, daß nach § 55 der Kern K^3 Nullösungen erster und zweiter Art stets nur zugleich besitzt; die Existenz solcher ist also überhaupt ausgeschlossen, wenn entweder die Gleichung (5) oder die Gleichung (6) als unmöglich nachgewiesen wird. Das wird uns beim räumlichen Dirichletschen Problem betreffs der Gleichung (6) in der Weise gelingen, daß wir zeigen: sie kann weder für komplexe Werte von ϱ_ν erfüllt werden noch für den Wert $\varrho_\nu = 1$.

Dies vorausgesetzt, kann nach § 53 die Gleichung

$$\varphi x = \bar{f} x + \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{7}$$

bei beliebiger Wahl der stetigen Funktion $\bar{f}$ aufgelöst werden. Um aber zu der ursprünglichen Gleichung

$$\varphi x = f x + \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zurückzukommen, machen wir von dem in § 53 eingeführten lösenden Kern der Gleichung (7) Gebrauch, der existiert, da keine Nullösungen vorhanden sind. Sei $\Gamma^3(x, \alpha)$ dieser lösende Kern, so daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} K^3(x, y) + \int \Gamma^3(\alpha, y)\, K^3(x, \alpha)\, d\alpha &= \Gamma^3(x, y) \\ K^3(x, y) + \int \Gamma^3(x, \alpha)\, K^3(\alpha, y)\, d\alpha &= \Gamma^3(x, y) \end{aligned} \tag{8}$$

gelten.

Man setze nun

$$\Omega(x, y) = K(x, y) + K^2(x, y) + K^3(x, y),$$

$$\Gamma(x, y) = \Omega(x, y) + \int \Gamma^3(\alpha, y)\, \Omega(x, \alpha)\, d\alpha;$$

dann gilt zunächst die Identität

$$\begin{aligned} &\Omega(x, y) - \int \Omega(\alpha, y)\, K(x, \alpha)\, d\alpha \\ &= K(x, y) - \int K^3(\alpha, y)\, K(x, \alpha)\, d\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

oder auch, indem wir auf das letzte Integral die bei der Gleichung (3) benutzten Umformungen anwenden,

$$\begin{aligned} &\Omega(x, y) - \int \Omega(\alpha, y)\, K(x, \alpha)\, d\alpha \\ &= K(x, y) - \int K^3(x, \alpha)\, K(\alpha, y)\, d\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

Jetzt bilden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} X &= \Gamma(x, y) - \int \Gamma(\alpha, y) K(x, \alpha)\, d\alpha \\ &= \Omega(x, y) + \int \Omega(x, \alpha)\, \Gamma^3(\alpha, y)\, d\alpha \\ &\quad - \int \Omega(\alpha, y)\, K(x, \alpha)\, d\alpha - \iint \Omega(\alpha, \beta)\, \Gamma^3(\beta, y)\, K(x, \alpha)\, d\alpha\, d\beta; \end{aligned}$$

ziehen wir das erste und dritte Glied gemäß der Formel (10) zusammen, so ergibt sich

$$X = K(x, y) - \int K^3(x, \alpha) K(\alpha, y) d\alpha$$
$$+ \int \Omega(x, \beta) \Gamma^3(\beta, y) d\beta$$
$$- \int\int \Omega(\alpha, \beta) \Gamma^3(\beta, y) K(x, \alpha) d\alpha d\beta,$$

oder, indem wir die Integrationen im letzten Gliede vertauschen und der Formel (9) gemäß

$$\Omega(x, \beta) - \int \Omega(\alpha, \beta) K(x, \alpha) d\alpha = K(x, \beta) - \int K(x, \alpha) K^3(\alpha, \beta) d\alpha$$

setzen,

$$X = K(x, y) + \int \Gamma^3(\beta, y) d\beta \left\{ K(x, \beta) - \int K(x, \alpha) K^3(\alpha, \beta) d\alpha \right\}$$
$$- \int K(x, \alpha) K^3(\alpha, y) d\alpha$$
$$= K(x, y) + \int K(x, \alpha) d\alpha \left\{ \Gamma^3(\alpha, y) - K^3(\alpha, y) \right.$$
$$\left. - \int \Gamma^3(\beta, y) K^3(\alpha, \beta) d\beta \right\}.$$

Im letzten der erhaltenen Glieder verschwindet aber der Integrand der Gleichung (8) zufolge; somit ergibt sich

$$(11) \qquad X = K(x, y) = \Gamma(x, y) - \int \Gamma(\alpha, y) K(x, \alpha) d\alpha.$$

Auf Grund dieses Resultats kann die ursprüngliche Integralgleichung

$$(12) \qquad \varphi x = f x + \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha$$

leicht aufgelöst werden; setzt man nämlich

$$(13) \qquad \varphi x = f x + \int \Gamma(x, \alpha) f \alpha . d\alpha,$$

so findet man

$$\varphi \alpha = f \alpha + \int \Gamma(\alpha, \beta) f \beta . d\beta,$$

$$\int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha = \int K(x, \alpha) f \alpha . d\alpha$$
$$+ \int\int \Gamma(\alpha, \beta) K(x, \alpha) f \beta . d\beta d\alpha,$$

oder, indem man die Integrationen vertauscht und die Gleichung (11) oder

$$\int \Gamma(\alpha, \beta) K(x, \alpha) d\alpha = \Gamma(x, \beta) - K(x, \beta)$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned}\int K(x, \alpha)\varphi\alpha . d\alpha &= \int K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha \\ &+ \int f\beta . [\Gamma(x, \beta) - K(x, \beta)] d\beta \\ &= \varphi x - fx,\end{aligned}$$

womit die Gleichung (12) erwiesen ist. Diese Gleichung hat also die Lösung (13).

§ 58.

Das räumliche Dirichletsche Problem; spezielle Durchführung.

Um die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen anwenden zu können, muß gezeigt werden, daß die durchgeführten Integrationen zu bestimmten Werten führen und in der Weise, wie es geschehen ist, vertauscht werden dürfen. Dies gelingt mittels der Entwicklungen des § 44, sobald wir uns über die Unstetigkeit von $K^2(x, y)$ und $K^3(x, y)$ klar geworden sind. Für diese Größen ist die geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ das Grundgebiet, die das für die Dirichletsche Aufgabe vorgelegte räumliche Gebiet $\mathfrak{R}$ umschließt.

Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Form der Größe $K(\alpha, \beta)$ sieht man zunächst, daß dieselbe unstetig wird wie $\cos w / r^2_{\alpha\beta}$, wenn w den Winkel zwischen den Richtungen N oder N und $r_{\alpha\beta}$ bedeutet. Da wir nun die Fläche $\mathfrak{F}$ stetig gekrümmt voraussetzen, so nähert sich der Bruch $\cos w / r_{\alpha\beta}$ einer endlichen Grenze, wenn die Stellen α und β zusammenrücken. Die Größe $K(\alpha, \beta)$ wird also unstetig wie $1/r_{\alpha\beta}$, und man kann für ein die Stelle β umfassendes Gebiet $\mathfrak{U}$, das hinreichend klein ist,

$$K(\alpha, \beta) = \frac{A}{r_{\alpha\beta}} + M$$

setzen, wobei A gegenüber der Stelle α eine Konstante bedeutet, deren absoluter Betrag unter einer von β unabhängigen Grenze bleibt, und M im Gebiet $\mathfrak{U}$ eine stetige Funktion der Stelle α ist.

Man nehme nun das Gebiet $\mathfrak{U}$ so klein, daß es sich auf eine gewisse Ebene eindeutig in das schlichte Gebiet $\overline{\mathfrak{U}}$ projiziert.

Bezeichnet man in diesem durch $\bar{r}_{\alpha\beta}$ und $d\bar{\alpha}$ die Projektionen des Abstandes $r_{\alpha\beta}$ und des Elementes $d\alpha$, so bleiben die Verhältnisse $r_{\alpha\beta}/\bar{r}_{\alpha\beta}$, $d\bar{\alpha}/d\alpha$ und $d\alpha/d\bar{\alpha}$ zwischen positiven endlichen Grenzen. Daraus folgt, daß man setzen kann

$$(1) \qquad \int\limits_{\mathfrak{U}} K(\alpha, \beta) f\alpha \,.\, d\alpha = \int\limits_{\bar{\mathfrak{U}}} \frac{M^0 \, d\bar{\alpha}}{\bar{r}_{\alpha\beta}},$$

wobei M^0 im Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ endlich und stetig ist, wenn $f\alpha$ im Gebiet $\mathfrak{U}$ eine stetige Funktion des Ortes bedeutet. Da nun das Integral

$$\int \frac{d\bar{\alpha}}{\bar{r}_{\alpha\beta}},$$

erstreckt über ein innerhalb fester Schranken liegendes Gebiet, absolut unter einer von β unabhängigen endlichen Grenze liegt, so ist die Größe (1) endlich und ändert sich stetig mit β, wenn diese Stelle innerhalb des Gebietes $\mathfrak{U}$ bleibt.

Bildet man ferner das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{U}} K(\alpha, \gamma)\, K(\gamma, \beta)\, d\gamma,$$

in dem die Stellen α und β zunächst dem Gebiet $\mathfrak{U}$ angehören mögen, so sieht man aus den durchgeführten Betrachtungen, daß man das Integral in der Form

$$\int\limits_{\bar{\mathfrak{U}}} \frac{M^1 \, d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\, \bar{r}_{\beta\gamma}}$$

schreiben kann, wobei die überstrichenen Größen die Projektionen der nicht überstrichenen sind, und M^1 dieselben Stetigkeitseigenschaften wie M^0 besitzt. Das letzte Integral ist aber absolut kleiner als das mit einer gewissen positiven Konstanten multiplizierte Integral

$$\int\limits_{\bar{\mathfrak{U}}} \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\, \bar{r}_{\beta\gamma}},$$

dessen Wert wir untersuchen wollen.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, das Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ sei die Fläche einer Ellipse mit den Brennpunkten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$; die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $\bar{\gamma}$ in bezug auf die Hauptachsen dieser Ellipse seien ξ und η, und die Gleichung der Ellipse, die der bezeichneten konfokal ist und durch den Punkt $\bar{\gamma}$ geht, sei

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man ferner

$$a^2 - b^2 = \mathfrak{e}^2, \qquad \xi = a\cos\theta, \qquad \eta = b\sin\theta,$$

so ist $\mathfrak{e}$ konstant und man findet

$$\bar{r}_{\alpha\gamma}^2 = (a\cos\theta - \mathfrak{e})^2 + b^2\sin^2\theta = (\mathfrak{e}\cos\varphi - a)^2,$$

$$\bar{r}_{\beta\gamma}^2 = (\mathfrak{e}\cos\theta + a)^2, \qquad \bar{r}_{\alpha\gamma}\bar{r}_{\beta\gamma} = a^2 - \mathfrak{e}^2\cos^2\theta,$$

$$d\bar{\gamma} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(b,\theta)}\,d\,b\,d\,\theta = \frac{a^2 - \mathfrak{e}^2\cos^2\theta}{a}\,d\,b\,d\,\theta,$$

$$\int \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\bar{r}_{\beta\gamma}} = \int \frac{d\,b\,d\,\varphi}{a}.$$

Hat nun die das Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ umschließende Ellipse die Halbachsen a_0 und b_0, so folgt

$$\int\limits_{\bar{\mathfrak{U}}} \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\bar{r}_{\beta\gamma}} = \int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi \int\limits_0^{b_0} \frac{d\,b}{\sqrt{b^2 + \mathfrak{e}^2}} = -2\pi\log\mathfrak{e} + \log\left(b_0^2 + \sqrt{b_0^2 + \mathfrak{e}^2}\right).$$

Diese Größe wird, da $\bar{r}_{\alpha\beta} = 2\,\mathfrak{e}$, unendlich wie $-2\pi\log\bar{r}_{\alpha\beta}$ oder wie $-2\pi\log r_{\alpha\beta}$, wenn die Stellen α und β zusammenrücken. Dasselbe gilt daher von den Integralen

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} f\gamma\,.\,K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\,\gamma, \qquad K^2(\alpha,\beta) = \int\limits_{\mathfrak{F}} K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\,\gamma,$$

wenn $f\gamma$ eine beliebige stetige Funktion des Ortes im Gebiet $\mathfrak{F}$ bedeutet.

In Integralen wie

$$\int f\alpha\,.\,K^2(\beta,\alpha)\,d\,\alpha, \qquad \int f\alpha\,.\,K^2(\alpha,\beta)\,d\,\alpha = \int f\alpha\,.\,d\,\alpha \int K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\gamma$$

kann nun nach § 44, in welchem die Symmetrie der Kerne nicht benutzt wird, die Reihenfolge der Integrationen nach α und γ umgekehrt werden. Allerdings sind die dortigen Größen (7) nicht mehr stetig, wohl aber so integrierbar, daß die mit ihnen angesetzte Beziehung (10) des § 44 und damit die ganze Schlußreihe bei Bestand bleibt.

Man übersieht ferner leicht, daß das mit einer stetigen Funktion f gebildete Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{U}} \log r_{\alpha\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{r_{\beta\gamma}}\,f(\alpha,\beta)$$

über ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{U}$ erstreckt endlich bleibt, auch wenn die Stellen α und β zusammenfallen. Man braucht es nur in die Form

$$\int\limits_{\overline{\mathfrak{U}}} \log \overline{r_{\alpha\gamma}} \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\beta\gamma}} \cdot M$$

zu bringen, wobei die Größe M offenbar im Integrationsgebiet stetig ist, und im Gebiete $\overline{\mathfrak{U}}$ Polarkoordinaten mit $\bar{\beta}$ als Zentrum einzuführen; dann folgt das Behauptete aus der Tatsache, daß

$$\int \log u\, d u$$

endlich ist, auch wenn man an die Grenze $u = 0$ heranintegriert. Hieraus folgt weiter, daß das Integral

$$K^3(\alpha, \beta) = \int\limits_{\mathfrak{F}} K(\alpha, \gamma)\, K^2(\gamma, \beta)\, d\gamma$$

im Grundgebiet $\mathfrak{F}$ endlich und stetig ist; sein Integrand kann als Größe $F(0, 1)$ im Sinne des § 44 betrachtet werden, in der es nicht wesentlich ist, daß die beiden stellenweise singulären Faktoren $K(0, 1)$ und $K(1, 2)$ aus derselben Funktion K entspringen, sondern nur, daß beide in der erforderlichen Weise integriert und abgeschätzt werden können. Die Sätze des § 44 zeigen somit, daß im Integral

$$\int f\alpha \,.\, K^3(\alpha, \beta)\, d\alpha = \int f\alpha \,.\, d\alpha \int K(\alpha, \gamma)\, K^2(\gamma, \beta)\, d\gamma$$

die Integrationen vertauscht werden dürfen.

Hiermit sind diejenigen Teile des vorigen Paragraphen gerechtfertigt, in denen von der Singularität der Größen K, K^2, K^3 Gebrauch gemacht und Integrationen unstetiger Integranden vertauscht werden.

§ 59.

Nullösungen beim räumlichen Dirichletschen Problem.

Um die Kette der Schlüsse vollständig zu machen, die das räumliche Dirichletsche Problem erledigen, bleibt nach § 57 noch entweder zu zeigen, daß die Gleichung

$$\varphi x = c \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha$$

weder wenn c den Wert Eins hat, noch wenn c komplex ist, eine Lösung besitzt; oder diese Behauptungen sind für die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi x = c \int K(\alpha, x)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zu beweisen, was nach § 57 dasselbe leistet. In letzterer Form ist der Beweis leichter.

Um ihn durchzuführen, gehen wir von der Formel

$$K(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d N_a} \left(\frac{1}{r_{ax}}\right)$$

aus und schließen aus ihr

$$K(\alpha, x)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha = -\frac{\varphi \alpha}{2\pi} \frac{d}{d N_x} \left(\frac{1}{r_{ax}}\right) d\alpha.$$

Diese Größe ist die im Punkte x nach der Richtung N_x wirkende Komponente der Kraft, die das Element $d\alpha$ mit der Masse $-d\alpha \,.\, \varphi\alpha / 2\pi$ belegt im Punkte x ausübt. Bilden wir daher das Flächenpotential

$$U = -\int_{\mathfrak{F}} \frac{\varphi\alpha}{2\pi} \frac{d\alpha}{r_{ax}},$$

indem wir unter x auch Stellen im Innern oder Äußern der Fläche $\mathfrak{F}$ verstehen, und bezeichnen durch N wie bisher die innere, durch N' die äußere Normale dieser Fläche, so können wir die Größen

$$(2) \qquad \begin{aligned} M_i &= \left(\frac{dU}{dN}\right)_i, \quad M_a = -\left(\frac{dU}{dN'}\right)_a = \left(\frac{dU}{dN}\right)_a \\ \overline{M} &= \int K(\alpha, x)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha \end{aligned}$$

bilden, und ihre Bedeutung ist folgende. M_i und M_a sind die Grenzwerte, denen die in der Richtung N wirkende Kraftkomponente zustrebt, wenn man sich dem auf der Fläche $\mathfrak{F}$ liegenden Punkte x von innen oder außen annähert, etwa auf einer zur Fläche normalen Geraden, deren Richtung man, ehe die Fläche $\mathfrak{F}$ erreicht wird, als Richtung N nimmt; $\overline{M}$ aber ist die nach der Richtung N_x genommene Komponente der Anziehung, wenn der Punkt x in der anziehenden Fläche $\mathfrak{F}$ selbst liegt. Die Theorie des Flächenpotentials gibt, da $-\varphi\alpha \,.\, (2\pi)^{-1}$ die Dichtigkeit ist, die Gleichungen

$$M_i = \overline{M} + \varphi x, \qquad M_a = \overline{M} - \varphi x,$$

oder

$$M_i - M_a = 2\varphi x, \qquad M_i + M_a = 2\overline{M}.$$

Benutzt man daher die Gleichungen (2), so führt die vorausgesetzte Beziehung (1) zu der Gleichung

$$M_i - M_a = c(M_i + M_a)$$

oder

$$\frac{dU}{dN} + \frac{dU}{dN'} = c\left(\frac{dU}{dN} - \frac{dU}{dN'}\right); \tag{3}$$

dabei bedeuten die Brüche mit dem Nenner dN den durch das Suffix i bezeichneten Grenzwert, die Brüche mit dem Nenner dN' den durch a bezeichneten, was wir für die folgenden Formeln festhalten.

Wäre nun zunächst $c = 1$, so gäbe die Gleichung (3) auf der Fläche $\mathfrak{F}$

$$\frac{dU}{dN'} = 0. \tag{4}$$

Umgibt man $\mathfrak{F}$ mit einer zweiten Fläche $\mathfrak{F}''$, die mit jener den Raum $\mathfrak{R}''$ einschließt, und nennt man ds'' das Flächenelement, N'' die nach dem Innern des Raumes $\mathfrak{R}''$ gerichtete Normale der Fläche $\mathfrak{F}''$, so ergibt die Gaussische Integraltransformation

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{R}''} d\tau\left(\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)^2\right) \\ = -\int\limits_{\mathfrak{F}} U\frac{dU}{dN'}\,d\alpha - \int\limits_{\mathfrak{F}''} U\frac{dU}{dN''}\,ds''.\end{aligned} \tag{5}$$

Hier verschwindet das erste Glied der rechten Seite der Gleichung (4) zufolge; das zweite kann, da U und dU/dN'' im Unendlichen auf bekannte Weise verschwinden, absolut beliebig klein gemacht werden, indem man die Fläche $\mathfrak{F}''$ hinreichend weit hinausschiebt. Daraus folgt, daß die Größen $\partial U/\partial \xi$ usf. im Außenraum der Fläche $\mathfrak{F}$ verschwinden, U also hier eine Konstante ist, die den Wert Null hat, weil U im Unendlichen verschwindet.

Nun ist U als Flächenpotential an der Fläche $\mathfrak{F}$ und im Innenraum derselben stetig, muß also auch in diesem überall verschwinden, so daß sich auch

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_i = 0$$

ergäbe, mithin $M_a = M_i = 0$ und $\varphi x = 0$. Der Fall $c = 1$ ist damit erledigt.

Jetzt untersuchen wir die Gleichung (3), wenn c komplex ist. Dann gilt dasselbe von $\varphi\alpha$; da diese Größe aber überall nur linear vorkommt, so sind die benutzten Gleichungen der Potentialtheorie auch bei komplexen Werten der Dichtigkeit gültig, und das Potential sowie jede Kraftkomponente fällt dabei komplex aus. Es sei z. B.
$$U = V + Wi, \qquad c = a + bi;$$
dann zerfällt die Gleichung (3) in die beiden folgenden:
$$\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'} - a\left[\frac{dV}{dN} - \frac{dV}{dN'}\right] + b\left[\frac{dW}{dN} - \frac{dW}{dN'}\right] = 0,$$
$$\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'} - a\left[\frac{dW}{dN} - \frac{dW}{dN'}\right] - b\left[\frac{dV}{dN} - \frac{dV}{dN'}\right] = 0.$$
Multipliziert man diese Gleichungen mit W und $-V$ oder mit V und W, addiert sie und integriert über das Grundgebiet, so vereinfacht sich das erhaltene Resultat durch die Gleichungen
$$\int\left(V\frac{dW}{dN} - W\frac{dV}{dN}\right)d\alpha = 0, \qquad \int\left(V\frac{dW}{dN'} - W\frac{dV}{dN'}\right)d\alpha = 0,$$
deren erste unmittelbar aus der Gaußschen Integraltransformation für den von der Fläche $\mathfrak{F}$ umschlossenen Innenraum $\mathfrak{R}$ folgt, die zweite aus derselben Transformation für den Außenraum der Fläche $\mathfrak{F}$ und den Unendlichkeitseigenschaften der gewöhnlichen Potentiale. Mittels dieser Gleichungen findet man durch die angegebenen Operationen folgende Gleichungen:
$$b\int W\frac{dW}{dN}\,d\alpha - b\int W\frac{dW}{dN'}\,d\alpha + b\int V\frac{dV}{dN}\,d\alpha - b\int V\frac{dV}{dN'}\,d\alpha = 0,$$
wofür wir kurz schreiben $\quad bT = 0,$

und $\quad -aT + \int V\left(\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'}\right)d\alpha + \int W\left(\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'}\right)d\alpha = 0.$

Wenn nun c komplex, also b von Null verschieden ist, ergibt sich sofort
$$(6) \quad T = 0, \quad \int\left[V\left(\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'}\right) + W\left(\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'}\right)\right]d\alpha = 0.$$
Diese Gleichung transformieren wir mittels der Identitäten
$$\int V\frac{dV}{dN}\,d\alpha = -\int_{\mathfrak{R}} d\tau\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)^2\right]$$
$$\int V\frac{dV}{dN'}\,d\alpha = -\int_{\mathfrak{R}'} d\tau\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)^2\right],$$

indem wir durch $\mathfrak{R}'$ den Außenraum der Fläche $\mathfrak{F}$ bezeichnen und analoge Gleichungen für W aufstellen, indem wir die an die Gleichung (5) geknüpften Erwägungen auf die Potentiale V und W übertragen. Die linke Seite der zweiten Gleichung (6) geht dann in eine Summe von Integralen negativer Quadrate über und die Gleichung zeigt, daß die Ableitungen von V und W nach ξ, η, ζ im Außenraum $\mathfrak{R}'$ wie im Innenraum $\mathfrak{R}$ verschwinden, die Potentiale V und W im ganzen Raume konstant sind, die zugehörigen Dichtigkeiten also, mit denen die Fläche $\mathfrak{F}$ belegt ist, d. h. der reelle und imaginäre Teil der Funktion $\varphi\alpha$, verschwinden.

Damit ist gezeigt, daß keine Lösungen der Gleichung (1) bei komplexen Werten von c existieren, und die Entwicklungen des § 57 sind so weit ergänzt, wie es nötig war, um zu zeigen, daß die Dirichletsche Aufgabe durch den dort gegebenen Ausdruck wirklich gelöst wird.

Achter Abschnitt.

Die Fredholmschen Reihen.

§ 60.

Formale Auflösung von Integralgleichungen und Integralgleichungssystemen.

Ersetzt man die Integralgleichung

$$\psi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha$$

durch das System der linearen Gleichungen

$$\psi\alpha_\varrho = f\alpha_\varrho + \sum_{\nu=1}^{n} K(\alpha_\varrho, \alpha_\nu)\,(\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)\,\psi\alpha_\nu,$$

$$\varrho = 1, 2 \ldots n,$$

und löst diese durch Determinanten auf, so wird es plausibel, daß die Integralgleichung in folgender Weise durch die Fredholmschen Reihen aufgelöst wird:

$$\psi x = fx + \frac{1}{D}\int D(x, \alpha)\, f\alpha \,.\, d\alpha,$$

$$D(x, \alpha) = A_0(x, \alpha) - \frac{A_1(x, \alpha)}{1!} + \frac{A_2(x, \alpha)}{2!} - \cdots,$$

$$D = 1 - \frac{A_1}{1!} + \frac{A_2}{2!} - \frac{A_3}{3!} + \cdots.$$

In diesen ist gesetzt

$$A_0(x, y) = K(x, y),$$

$$A_n(x, y) = \iint \cdots \int d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, \alpha_1) & \ldots & K(x, \alpha_n) \\ K(\alpha_1, y) & K(\alpha_1, \alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(\alpha_n, y) & K(\alpha_n, \alpha_1) & \ldots & K(\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix},$$

$$A_n = \int A_{n-1}(\alpha, \alpha)\, d\alpha.$$

Offenbar hat man hier mit Determinanten zu tun, deren Elemente die Form $K(x, \alpha_n)$, $K(\alpha_n, y)$, $K(\alpha_m, \alpha_n)$ haben. Diese wollen wir kurz durch $(x n)$, $(n y)$, $(m n)$ bezeichnen. Die Determinanten haben ferner die Eigenschaft, daß das erste Argument der Größen $(\alpha \beta)$ in jeder Zeile, das zweite in jeder Spalte dasselbe bleibt; sie sind also durch ihr Diagonalglied vollkommen bestimmt. Sie mögen demgemäß durch das in eckige Klammern geschlossene Diagonalglied dargestellt werden. Mit dieser Bezeichnungsweise erhält man

$$A_n(x, y) = \int \cdots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n [(x y)(11)(22)\ldots(n n)].$$

Wir wollen nun die Größe $A_n(x, y)$ dadurch umformen, daß wir die in ihr vorkommende Determinante nach den Gliedern ihrer ersten Spalte ordnen. Dann finden wir

$$[(xy)(11)\ldots(nn)] = (xy)[(11)(22)\ldots(nn)] - (1y)[(x1)(22)\ldots(nn)] \\ + (2y)[(x1)(12)(33)\ldots(nn)] - (3y)[(x1)(12)(23)(44)\ldots(nn)] + \cdots.$$

Die Determinanten der rechten Seite sind hier nach folgendem Gesetz gebildet. Die zweiten Ziffern sind immer die der Reihe $1, 2 \ldots n$, die ersten Zeichen sind $x, 1, 2 \ldots n$, von denen sukzessive das erste, zweite, dritte ... weggelassen wird. Dem entspricht es vollkommen, daß man Determinanten haben will, bei denen die Spalten aus den letzten n Spalten der ursprünglichen Determinante gebildet sind, während die Zeilen diejenigen der ursprünglichen sind, nachdem man die erste, zweite, dritte Zeile weggelassen hat und so fort. Nun erhält man, indem man zwei Spalten vertauscht, oder in den Elementen unserer Determinante die an zweiter Stelle stehenden Ziffern vertauscht, die folgenden Gleichungen:

$$[(x1)(12)(33)\ldots(nn)] = -[(x2)(11)(33)\ldots(nn)],$$
$$[(x1)(12)(23)(44)\ldots(nn)] = [(x3)(11)(22)(44)\ldots(nn)],$$
$$[(x1)(12)(23)(34)(55)\ldots(nn)] = -[(x4)(11)(22)(33)(55)\ldots(nn)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Somit ergibt sich

$$A_n(x, y) = \\ \int \cdots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \{(xy)[(11)(22)\ldots(nn)] - (1y)[(x1)(22)\ldots(nn)] \\ - (2y)[(x2)(11)(33)\ldots(nn)] - (3y)[(x3)(11)(22)(44)\ldots(nn)]\} \cdots.$$

Die Integrale der einzelnen rechts auftretenden Glieder außer dem ersten sind aber identisch, da ein mehrfaches Integral von der Bezeichnung der Integrationsvariablen unabhängig ist. Man hat z. B., indem man die Bedeutung der Integrationsvariablen α_1 und α_2 vertauscht, die Gleichung

$$\int \dots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n (1\,y)[(x\,1)(22)\dots(n\,n)]$$
$$= \int \cdots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n (2\,y)[(x\,2)(11)(33)\dots(n\,n)].$$

Der Wert des ersten dieser Integrale, mithin auch der aller anderen kann aber offenbar geschrieben werden:

$$\int d\alpha_1 K(\alpha_1, y) \int \dots \int d\alpha_2 \dots d\alpha_n [(x\,1)(22)\dots(n\,n)]$$
$$= \int K(\alpha_1, y) A_{n-1}(x, \alpha_1)\, d\alpha_1.$$

Da ferner offenbar die Gleichung

$$\int \dots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n [(11)(22)\dots(n\,n)] = \int A_{n-1}(\alpha_1, \alpha_1)\, d\alpha_1 = A_n$$

gilt, so findet man die Rekursionsformel

$$(1) \qquad A_n(x, y) = A_n K(x, y) - n \int K(\alpha, y) A_{n-1}(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Operiert man mit den Zeilen, wie hier mit den Spalten geschehen ist, so findet man eine entsprechende Rekursionsformel

$$(2) \qquad A_n(x, y) = A_n K(x, y) - n \int K(x, \alpha) A_{n-1}(\alpha, y)\, d\alpha.$$

Diese beiden Identitäten genügen, um zu zeigen, daß die Integralgleichung durch den Quotienten $D(x, y)/D$ erfüllt wird, sobald nur feststeht, daß die Reihe $D(x, y)$ bezüglich beider Argumente im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert. Unter dieser Voraussetzung finden wir nämlich, indem wir von der Gleichung (2) oder

$$(-1)^{n+1} \frac{A_n(x, y)}{n!} = \frac{A_n K(x, y)(-1)^{n+1}}{n!} + \int K(x, \alpha)(-1)^n \frac{A_{n-1}(\alpha, y)}{(n-1)!}\, d\alpha$$

ausgehen und über n summieren, das folgende Resultat:

$$-K(x, y) + D(x, y) = K(x, y)(D - 1) + \int K(x, \alpha) D(\alpha, y)\, d\alpha$$

oder auch

$$(3) \qquad D(x, y) = D . K(x, y) + \int K(x, \alpha) D(\alpha, y)\, d\alpha.$$

Ebenso leicht ergibt sich aus der Formel (1) die Gleichung

$$(4) \qquad D(x, y) = D . K(x, y) + \int K(\alpha, y) D(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Die Formeln (3) und (4) sind also bewiesen, sobald die bezeichnete Eigenschaft der **Fredholmschen** Reihen feststeht.

Hier möge noch beiläufig bemerkt werden, daß die Fredholmschen Reihen, wenn sie die Integralgleichung mit stückweise stetigem Kern auflösen, auch dasselbe für Systeme von Integralgleichungen leisten.

Seien z. B. die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{aligned} \varphi_1 x &= f_1 x + \int_0^1 K_{11}(x, \alpha)\, \varphi_1 \alpha . d\alpha + \int_0^1 K_{12}(x, \alpha)\, \varphi_2 \alpha . d\alpha, \\ \varphi_2 x &= f_2 x + \int_0^1 K_{21}(x, \alpha)\, \varphi_1 \alpha . d\alpha + \int_0^1 K_{22}(x, \alpha)\, \varphi_2 \alpha . d\alpha \end{aligned}$$

vorgelegt, in denen über ein lineares Gebiet integriert wird, innerhalb dessen die Funktionen $K_{\mu\nu}(x, \alpha)$ bezüglich jedes Arguments stückweise stetig sind; $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ seien die Unbekannten. Dann setze man für die Gebiete

$$\begin{aligned} &1.\quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \\ &2.\quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad 1 \leqq y \leqq 2, \\ &3.\quad 1 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \\ &4.\quad 1 \leqq x \leqq 2, \quad 1 \leqq y \leqq 1 \end{aligned}$$

die folgenden Definitionen an, deren jede sich auf das gleich numerierte Gebiet bezieht:

$$\begin{aligned} &1.\quad K(x, y) = K_{11}(x, y), \\ &2.\quad K(x, y) = K_{12}(x, y-1), \\ &3.\quad K(x, y) = K_{21}(x-1, y), \\ &4.\quad K(x, y) = K_{22}(x-1, y-1). \end{aligned}$$

Ferner gelte das erste oder zweite der Gleichungssysteme

$$\varphi x = \varphi_1 x, \quad f x = f_1 x; \qquad f x = f_2(x-1), \quad \varphi x = \varphi_2(x-1),$$

je nachdem x der Strecke von 0 bis 1 oder von 1 bis 2 angehört. Dann können die Gleichungen (5) in die eine Gleichung

$$\varphi x = f x + \int_0^2 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha$$

übergeführt werden, deren Kern auf der Strecke von 0 bis 2 stückweise stetig ist, wenn dasselbe von den Größen $K_{\mu\nu}$ auf der Strecke von 0 bis 1 gilt.

Diese Betrachtung kann offenbar leicht verallgemeinert und dazu benutzt werden, die Ergebnisse des dritten Abschnitts auf Systeme von Integralgleichungen zu übertragen.

§ 61.

Der Hadamardsche Determinantensatz.

Zu den wichtigsten Eigenschaften der Fredholmschen Reihen führt folgende algebraische Betrachtung.

Unter einer orthogonalen Substitution versteht man bekanntlich eine lineare Substitution von der Form

$$y_\nu = \sum_{\varrho}^{1,n} a_{\nu\varrho} x_\varrho,$$

bei welcher die Identität

$$\sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

besteht. Hat man im besonderen $n = 2$, so lehren die offenbar zusammen bestehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ y_2 &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \\ y_1^2 + x_2^2 &= y_1^2 + y_2^2, \end{aligned}$$

in denen α ein beliebiger Winkel sein kann, daß es eine orthogonale Substitution gibt, bei der die Koeffizienten einer Reihe sich zueinander verhalten wie gegebene Größen, die nicht alle gleich Null sind.

Diesen Satz kann man leicht durch vollständige Induktion auf Substitutionen in beliebig vielen Variablen ausdehnen. Sei nämlich der Satz für $n-1$ Variable bewiesen, so daß in den zusammen bestehenden Gleichungen

$$\sum_{\varrho}^{1,n-1} a_{\nu\varrho} x_\varrho = y_\nu, \qquad \sum_{\nu}^{1,n-1} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n-1} x_\nu^2$$

bewirkt werden kann, daß

$$a_{11} = \lambda c_1, \quad a_{12} = \lambda c_2, \quad \ldots a_{1,n-1} = \lambda c_{n-1},$$

wobei $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$ beliebig gegebene Größen sind, die nicht alle verschwinden, und λ ein von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor ist. Dann fügen wir das Variablenpaar $x_n = y_n$ hinzu, so daß die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

gilt, und bilden weiter die Substitution

$$z_1 = y_1 \cos\alpha - y_n \sin\alpha,$$
$$z_n = y_1 \sin\alpha + y_n \cos\alpha,$$
$$z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3, \quad \ldots z_{n-1} = y_{n-1}.$$

Alsdann haben wir offenbar die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} z_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

und besonders die Beziehung

$$z_1 = \cos\alpha \sum_{\nu}^{1,n-1} a_{1\nu} x_\nu - x_n \sin\alpha.$$

Die Koeffizienten dieses Ausdrucks sind

$$\lambda c_1 \cos\alpha, \quad \lambda c_2 \cos\alpha, \quad \ldots \lambda c_{n-1} \cos\alpha, \quad -\sin\alpha,$$

und man kann durch passende Wahl des Winkels α bewirken, daß

$$-\sin\alpha = c_n \lambda \cos\alpha,$$

wenn c_n eine beliebig vorgeschriebene Größe bedeutet. Auf diese Weise ist erreicht, daß die Koeffizienten in der ersten Reihe der die Variablen x und z verknüpfenden Substitution den willkürlich gegebenen Größen $c_1, c_2 \ldots c_n$ proportional sind. Die Schlußreihe versagt nur, wenn $n-1$ Größen c verschwinden; dann ist aber die gesuchte orthogonale Substitution einfach eine Permutation der Größen x_ν, bei der x_1 und x_n sich vertauschen.

Jetzt seien $x_{1\nu}, x_{2\nu} \ldots x_{n\nu}$, indem man $\nu = 1, 2 \ldots n$ setzt, n Wertsysteme der Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$, und man wende auf diese eine orthogonale Substitution in der schon oben gebrauchten Form an, indem man setzt

$$y_\nu = \sum_{\varrho}^{1,n} a_{\nu\varrho} x_\varrho.$$

Die jenen n speziellen Wertsystemen entsprechenden Systeme der Größen y seien $y_{1\nu}, y_{2\nu} \ldots y_{n\nu}$. Dann kann man nach dem oben erhaltenen Resultat die Koeffizienten α so wählen, daß die Gleichungen

$$y_{12} = y_{13} = \cdots = y_{1n} = 0$$

gelten. Denn das gibt die $n-1$ homogenen Gleichungen

$$\sum_{\varrho}^{1,n} a_{1\varrho} x_{\varrho\sigma} = 0, \quad \sigma = 2, 3 \ldots n,$$

die man immer durch Unbekannte erfüllen kann, deren Werte nicht sämtlich verschwinden. Diesen Unbekannten können dann, wie gezeigt, die Größen $a_{11}, a_{12} \dots a_{1n}$ proportional gesetzt werden.

Weiter transformiere man die Variablen $y_2, y_3 \dots y_n$ durch eine orthogonale Transformation derart in die neuen Variablen $z_2, z_3 \dots z_n$, daß die Gleichungen

$$z_{23} = z_{24} = \cdots = z_{2n} = 0$$

bestehen, wobei allgemein $z_{2\nu}, z_{3\nu} \dots z_{n\nu}$ das Wertsystem bedeute, das dem System $y_{2\nu}, y_{3\nu} \dots y_{n\nu}$ entspricht. Die hierzu dienende Substitution kann zugleich als eine Transformation der n Variablen $y_1, y_2 \dots y_n$ angesehen werden, indem man die eine Gleichung $z_1 = y_1$ hinzufügt. Dann kann auch das Variablensystem $z_1, z_2 \dots z_n$ als durch orthogonale Transformation aus den Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$ hervorgegangen erscheinen und die speziellen Werte, die den Größen $x_{\mu\nu}$ entsprechen, bilden ein System von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{ccccc} z_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & z_{22} & 0 & \dots & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \dots & z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

In diesem enthalten die erste und zweite Zeile rechts von der Diagonale nur Nullen. Auf diese Weise geht man weiter und stellt ein System her, in welchem die drei ersten Zeilen dieselbe Eigenschaft haben, die soeben für die erste und zweite erreicht wurde. So fährt man fort, bis man schließlich erreicht hat, daß die $n-1$ ersten Zeilen rechts von der Diagonale nur Nullen enthalten. Sind die letzten Variablen t, so hat man dann ein Größensystem von der Form

$$\begin{array}{cccc} t_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & t_{n-1,3} & \dots 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots t_{nn} \end{array}$$

erzielt und der Wert der aus diesem gebildeten Determinante ist offenbar $t_{11} t_{22} \dots t_{nn}$.

Nun haben die Determinanten der orthogonalen Substitution stets den Wert ± 1; die Determinante des transformierten Größensystems ist gleich der des ursprünglichen multipliziert mit der Substitutionsdeterminante. Daraus folgt, daß die ursprüngliche

Determinante dem absoluten Werte nach gleich dem Produkt der n Größen $t_{\nu\nu}$ ist, da die Größen $t_{\mu\nu}$ durch orthogonale Substitution aus den ursprünglichen Größen $x_{\mu\nu}$ abgeleitet sind.

Jetzt werde vorausgesetzt, die Größen $x_{\mu\nu}$ seien dem absoluten Betrage nach nicht größer als 1. Die Größen t seien in der Form

$$t_\nu = \sum_\varrho^{1,n} b_{\nu\varrho} x_\varrho$$

angesetzt und es besteht die Gleichung

$$\sum_\nu^{1,n} t_\nu^2 = \sum_\nu^{1,n} x_\nu^2.$$

Aus dieser folgen bekanntlich unmittelbar die Gleichungssysteme

$$\sum_\nu^{1,n} b_{\nu\varrho}^2 = 1, \qquad \sum_\nu^{1,n} b_{\nu\varrho} b_{\nu\sigma} = 0, \qquad \varrho \gtrless \sigma,$$

$$\sum_\varrho^{1,n} b_{\nu\varrho}^2 = 1, \qquad \sum_\varrho^{1,n} b_{\mu\varrho} b_{\nu\varrho} = 0, \qquad \mu \gtrless \nu.$$

Da nun zwischen beliebigen reellen Größen c_ν, x_ν die allgemeine Ungleichung

$$\left(\sum_\varrho c_\varrho x_\varrho\right)^2 \leqq \sum_\varrho c_\varrho^2 \cdot \sum_\nu x_\varrho^2$$

gilt, so folgt, indem man $c_\varrho = b_{\nu\varrho}$ setzt,

$$t_\nu^2 \leqq \sum_\nu^{1,n} x_\nu^2 \sum_\nu b_{\nu\varrho}^2, \qquad t_\nu^2 \leqq \sum_\nu^{1,n} x_\nu^2.$$

Bei der Annahme $|x_\nu| \leqq 1$ folgt also

$$|t_\nu| \leqq \sqrt{n};$$

im besonderen ergibt sich

$$|t_{\nu\nu}| \leqq \sqrt{n}.$$

Da ferner für die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

oben die Gleichung

$$|\varDelta| = t_{11} t_{22} \dots t_{nn}$$

abgeleitet ist, so folgt

$$|\varDelta| < \sqrt{n^n},$$

und die Hadamardsche Ungleichung ist vollständig bewiesen.

Diese Ungleichung, die zunächst nur für den Fall reeller Elemente $x_{\mu\nu}$ abgeleitet ist, bleibt richtig, wenn die in einer Spalte stehenden Elemente sämtlich rein imaginär sind. Hat man daher eine Determinante aus komplexen Elementen, die sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als 1, etwa die Determinante der Elemente $a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}$, wobei die zweiten Zeiger in den Spalten, die ersten in den Reihen konstant bleiben, und zerlegt man die Determinante entsprechend den beiden in jeder Spalte stehenden Summanden in Determinanten, deren Spalten entweder aus Gliedern wie $a_{1\nu}, a_{2\nu} \ldots a_{n\nu}$ oder aus Gliedern wie $i b_{1\varrho}, i b_{2\varrho} \ldots i b_{n\varrho}$ bestehen, so ist die Anzahl dieser Summanden 2^n. Auf jeden einzelnen von ihnen kann die für reelle Elemente geltende Hadamardsche Ungleichung angewandt werden. Die Determinante der komplexen Elemente $a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}$ ist also absolut kleiner als $2^n \sqrt{n^n}$, wenn die absoluten Beträge der Elemente kleiner als 1 sind.

Hieraus schließt man sofort, daß der absolute Wert einer Determinante mit reellen oder komplexen Elementen, die sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als g sind, unter der Grenze

$$g^n (2 \sqrt{n})^n$$

liegt.

§ 62.

Die Konvergenz der Fredholmschen Reihen.

Das erhaltene Resultat wenden wir auf die Determinanten an, die in den Ausdrücken $A_n(x, y)$ und A_n vorkommen. Der Kern $K(x, y)$ sei im Grundgebiet als Funktion jeder der Stellen x und y stückweise stetig, übrigens reell oder komplex. Dann gibt es eine solche positive Konstante g, daß die Ungleichung

$$|K(x, y)| < g$$

gilt, wenn die Stellen x und y das Grundgebiet durchlaufen, und man findet sofort die Ungleichungen

$$|A_n(x, y)| < g^{n+1} (2 \sqrt{n+1})^{n+1} c^n,$$
$$|A_n| < g^n (2 \sqrt{n})^n c^n,$$

in denen c den Wert des Integrals $\int dx$, erstreckt über das Grundgebiet, bedeutet. Die einzelnen Glieder der Reihe $D(x, y)$ sind daher absolut kleiner, als die entsprechenden der Reihe

$$R = g + \sum_{n}^{1, \infty} (2g)^{n+1} (\sqrt{n+1})^{n+1} \frac{c^n}{n!}.$$

Diese ist aber konvergent. Denn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist, wenn man das folgende als Zähler, das vorhergehende als Nenner nimmt, einfach

$$2g\sqrt{n+1}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^n\frac{c}{n}=\frac{2gc}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

und da die Größe
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dem Grenzwert e mit wachsenden Werten von n zustrebt, so ist der Wert dieses Quotienten bei hinreichend großem Wert von n beliebig klein. Ebenso ist mit der Reihe

$$R_0 = 1+\sum_n^{1,\infty}(2g)^n(\sqrt{n})^n\frac{c^n}{n!}$$

die Reihe D zu vergleichen; sie konvergiert jedenfalls nicht schlechter als die Reihe R_0. Da die Reihe R ferner von den Stellen x, y gänzlich unabhängig ist, konvergiert die Reihe $D(x,y)$ gleichmäßig. Damit sind die notwendigen Grundlagen gegeben, um aus der Rekursionsformel des § 60 die Gleichungen

(1) $$D(x,y) = DK(x,y)+\int K(\alpha,y)D(x,\alpha)\,d\alpha,$$

(2) $$D(x,y) = DK(x,y)+\int K(x,\alpha)D(\alpha,y)\,d\alpha$$

erschließen zu können, die somit für beliebige symmetrische oder unsymmetrische Kerne $K(x,y)$ der oben bezeichneten Art bewiesen sind.

Ist ferner D von Null verschieden, so liefert die Formel

$$\psi x = fx + \frac{1}{D}\int D(x,\alpha)f\alpha . d\alpha$$

eine Lösung der Gleichung

$$\psi x = fx + \int K(x,\alpha)\psi\alpha . d\alpha.$$

Ein besonders wichtiger Sonderfall ist der, daß der Kern $K(x,y)$ eine ganze rationale Funktion eines Parameters λ ist, der auch komplexe Werte annehmen kann. Beschränkt man diese auf ein festes, übrigens beliebiges Gebiet $\mathfrak{G}$, so liegt die Funktion $K(x,y)$ dem absoluten Betrage nach unter einer von λ unabhängigen Grenze g, und die Reihen D und $D(x,y)$ konvergieren gleichmäßig auch in bezug auf λ, sind also nach dem Theorem von Weierstrass im Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktionen von λ. Da nun diese Folgerung für ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{G}$

gezogen werden kann, so sind die Größen D und $D(x, y)$ ganze transzendente Funktionen von λ.

Enthält die Größe $K(x, y)$ den Parameter λ als einfachen Faktor und bezeichnen wir durch $K(x, y)$ und $D(x, y)$ die Größen, die bisher $K(x, y)/\lambda$ und $D(x, y)/\lambda$ hießen, so finden wir, daß die Funktionalgleichung

$$\psi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha$$

durch einen Quotienten zweier ganzer Funktionen von λ, also durch eine meromorphe Funktion dieser Größe gelöst wird, womit die Schmidtsche Formel verallgemeinert wird.

Am einfachsten gestaltet sich die Lösung, wenn wir fx durch $K(x, y)$ ersetzen; dann erhält man einfach die Fredholmsche Resolvente

$$\psi x = K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha, \tag{3}$$

aus der man schließt, daß ψx dem lösenden Kern $\Gamma(x, y)$ gleichzusetzen ist; dieser hat den Wert

$$\Gamma(x, y) = \frac{D(x, y)}{D},$$

wie aus der Gleichung (1) hervorgeht. Die Reihen D und $D(x, y)$ haben jetzt entsprechend der geänderten Bezeichnung die folgende Gestalt

$$D(x, y) = K(x, y) - \lambda A_1(x, y) + \frac{\lambda^2}{1.2} A_2(x, y) - \cdots,$$

$$D = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} A_2 - \cdots$$

und aus der Beziehung

$$A_n = \int A_{n-1}(\alpha, \alpha)\, d\alpha$$

folgt die Gleichung

$$\int D(x, x)\, dx = -\frac{dD}{d\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Folgerung unter der Voraussetzung

$$D\Big|^{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

Man entwickele auch die Größen $D(x, y)$ nach Potenzen von $\lambda - \lambda_1$ und es sei etwa

$$D(x, y) = D_1(x, y)\, (\lambda - \lambda_1)^k + D_2(x, y)\, (\lambda - \lambda_1)^{k+1} + \cdots.$$

Dann sind $D_\nu(x, y)$ nach der Bildungsweise der Reihe $D(x, y)$ stetige Funktionen von x und y, deren erste nicht identisch verschwindet. Die Größe
$$\int D(x, x)\, dx$$
enthält mindestens die Potenz $(\lambda - \lambda_1)^k$ als Faktor, und dasselbe gilt von $dD/d\lambda$; mithin enthält D mindestens die Potenz $(\lambda - \lambda_1)^{k+1}$. Die Stelle λ_1 ist also sicher ein Pol für den Bruch $D(x, y)/D$ und die Gleichung (2) ergibt
$$D_1(x, y) = \frac{\lambda D K(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \lambda \int D_1(\alpha, y) K(x, \alpha)\, d\alpha + \cdots,$$
wobei rechts nur Glieder weggelassen sind, die eine ganz durch $\lambda - \lambda_1$ teilbare Funktion von λ bilden. Nun ist auch D durch $(\lambda - \lambda_1)^k$, wie gezeigt, teilbar und gibt einen Quotienten, der für $\lambda = \lambda_1$ verschwindet; mithin erhält man die Gleichung
$$D_1(x, y) = \lambda_1 \int D_1(\alpha, y) K(x, \alpha)\, d\alpha,$$
und da $D_1(x, y)$ nicht identisch verschwindet, kann man y so fixieren, daß eine nicht identisch verschwindende Funktion von x herauskommt. Damit hat man eine Lösung der homogenen Integralgleichung
$$\varphi x = \lambda_1 \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{4}$$
gewonnen. Eine solche ist vorhanden, wenn D an irgend einer Stelle $\lambda = \lambda_1$ verschwindet.

Ebenso ergibt sich mittels der Gleichung (1)
$$D_1(x, y) = \lambda_1 \int D_1(x, \alpha) K(\alpha, y)\, d\alpha$$
und eine Lösung der Integralgleichung
$$\psi y = \lambda_1 \int K(\alpha, y)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha; \tag{5}$$
die Gleichungen (4) und (5) haben nach § 55 gleich viel linear unabhängige Lösungen, was sich auch aus den Fredholmschen Reihen erkennen läßt.

Multipliziert man die Gleichung (4) mit $D(u, x)$, integriert und benutzt die Resolvente (1), so folgt
$$\int D(u, x)\, \varphi x \,.\, dx = \lambda_1 \int\!\!\int K(x, \alpha)\, D(u, x)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha\, dx$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda} \int \varphi \alpha \,.\, d\alpha \{D(u, \alpha) - D K(u, \alpha)\},$$

oder indem man nochmals die Gleichung (4) benutzt und das Zeichen Γ einführt,

$$\varphi u = (\lambda_1 - \lambda) \int \Gamma(u, x) \varphi x \,.\, dx;$$

ebenso ergeben die Gleichung (5) und (2)

$$\psi u = (\lambda_1 - \lambda) \int \Gamma(x, u) \varphi x \,.\, dx.$$

Damit sind die Eigenschaften des lösenden Kerns erhalten, die wir in besonderen Fällen des vierten und sechsten Abschnitts schon vielfach benutzt haben.

Endlich ergeben die Gleichungen (4), (5), in denen wir jetzt φ_1 und ψ_1 für φ und ψ schreiben wollen, kombiniert mit den einem anderen Eigenwert entsprechenden Gleichungen

$$\varphi_2 x = \lambda_2 \int K(x, \alpha) \varphi_2 \alpha \,.\, d\alpha, \tag{6}$$

$$\psi_2 x = \lambda_2 \int K(\alpha, x) \psi_2 \alpha \,.\, dx, \tag{7}$$

indem man die Gleichung (4) mit $\lambda_2 \psi_2 x$, die Gleichung (7) mit $\lambda_1 \varphi_1 x$ multipliziert und nach x integriert

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int \varphi_1 x \,.\, \psi_2 x \,.\, dx = \lambda_1 \lambda_2 \int\int K(x, \alpha) \varphi_1 \alpha \,.\, \psi_2 x \,.\, d\alpha\, dx$$
$$- \lambda_1 \lambda_2 \int\int K(\alpha, x) \varphi_1 x \,.\, \psi_2 \alpha \,.\, dx\, d\alpha = 0,$$

oder

$$\int \varphi_1 x \,.\, \psi_2 x \,.\, dx = 0;$$

ebenso ergeben die Gleichungen (5) und (6)

$$\int \varphi_2 x \,.\, \psi_1 x \,.\, dx = 0.$$

Damit haben wir den Anschluß an den Begriff des biorthogonalen Systems erreicht, von dem in den §§ 49 und 50 unter besonderen Voraussetzungen die Rede war.

§ 63.

Die Fredholmschen Reihen und die symmetrischen Kerne.

Daß die Größe D bei reellen symmetrischen Kernen, also unter der Voraussetzung

$$K(x, y) = K(y, x),$$

immer mindestens einmal verschwindet, kann jetzt auf eine neue Weise leicht gezeigt werden. In der Tat versuchen wir den lösenden Kern $\Gamma(x, y)$ nach Potenzen von λ zu entwickeln, so müßte die erhaltene Reihe beständig konvergieren, wenn der Nenner D nirgends verschwinden sollte. Läßt sich also zeigen, daß diese Reihe nicht beständig konvergieren kann, so wird notwendig mindestens eine Wurzel der Gleichung $D = 0$ vorhanden sein.

Aus der Gleichung (3) des § 62 ergibt sich nun, wenn wir

$$\psi x = \Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda K^2(x, y) + \lambda^2 K^3(x, y) + \cdots$$

ansetzen, sofort die allgemeine Beziehung

$$K^{n+1}(x, y) = \int K^n(\alpha, y) K(x, \alpha) d\alpha.$$

Die Größen K^n sind also mit den in § 19 ebenso bezeichneten identisch und es besteht wie dort die Gleichung

$$K^{m+n}(x, y) = \int K^m(x, \alpha) K^n(y, \alpha) d\alpha.$$

Aus dieser folgt unmittelbar mittels der Schwarzschen Ungleichung, indem man $n = m + 2$ und x für y setzt,

$$(1) \qquad K^{2m}(x, x) K^{2m+4}(x, x) - [K^{2m+2}(x, x)]^2 \geqq 0.$$

Wenn nun $K^{2m}(x, x)$ für irgend einen Wert von x verschwindet, so würde diese Ungleichung sofort dasselbe für $K^{2m+2}(x, x)$ und ebenso für alle folgenden Größen $K^{2r}(x, x)$ ergeben. Die Größe

$$K^2(x, x) = \int K(\alpha, x)^2 d\alpha$$

ist aber offenbar positiv; wäre $K^{2s}(x, x)$ die erste Größe ihrer Art, deren Exponent eine Potenz von 2 ist und die verschwindet, so ergäbe die Identität

$$K^{2s}(x, x) = \int K^s(x, \alpha)^2 d\alpha,$$

daß auch $K^s(x, x)$ verschwände, was der Definition des Zeigers $2s$ widerspricht. Da nun, wenn überhaupt eine Größe $K^{2n}(x, x)$ den Wert Null hätte, dasselbe auch von einer ebensolchen Größe gelten müßte, in der für $2n$ eine Potenz von 2 gesetzt ist, so zeigen die erhaltenen Resultate, daß alle Größen $K^{2m}(x, x)$ positiv sind.

Jetzt ergibt die erhaltene Ungleichung (1), daß die Reihe

$$R = \sum_n^{1, \infty} K^{2n}(x, x) \lambda^{2n-1}$$

für gewisse Werte von λ divergiert; denn der Quotient eines Gliedes durch ein vorhergehendes ist

$$Q_n = \frac{K^{2n+2}(x, x)}{K^{2n}(x, x)} \lambda^2.$$

Nach der Ungleichung (1) ist aber

$$\frac{K^{2n+2}(x, x)}{K^{2n}(x, x)} \leqq \frac{K^{2n+4}(x, x)}{K^{2n+2}(x, x)},$$

und die Nenner sind, wie gezeigt, von Null verschieden. Somit folgt, daß der Quotient Q_n mit n anwächst, also bei passender Wahl von λ immer größer als Eins ist. Die Reihe R ist also divergent; sie ist aber nur als Teil in der Taylorschen Reihe $\Gamma(x, x)$ enthalten; mithin kann diese nicht beständig konvergieren.

Damit ist gezeigt, daß die Größe D mindestens eine Nullstelle als Funktion von λ besitzt; jeder stetige symmetrische Kern hat also mindestens eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion.

Sei nun λ_1 irgend ein Pol der meromorphen Funktion $\Gamma(x, y)$, und gelte in der Umgebung der Stelle λ_1 folgende Entwicklung:

$$\Gamma(x, y) = \frac{D(x, y)}{D} = \frac{f_k(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1);$$

durch f_k seien dabei stetige Funktionen der Argumente x, y, durch $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bezeichnet. Dann gibt die Gleichung (3) des § 62:

$$\frac{f_k(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1)$$

$$= K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha) \left[\frac{f_k(\alpha, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(\alpha, y)}{\lambda - \lambda_1}\right] d\alpha + \mathfrak{P}_1(\lambda - \lambda_1)$$

oder

$$f_k(x, y) + (\lambda - \lambda_1) f_{k-1}(x, y) + (\lambda - \lambda_1)^2 \mathfrak{P}_2(\lambda - \lambda_1)$$

$$= K(x, y)(\lambda - \lambda_1)^k + \lambda \int K(x, \alpha) f_k(\alpha, y)\, d\alpha$$

$$+ (\lambda - \lambda_1) \int K(x, \alpha) f_{k-1}(\alpha, y)\, d\alpha + (\lambda - \lambda_1)^2 \mathfrak{P}_3(\lambda - \lambda_1),$$

wobei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ wiederum Potenzreihen bedeuten. Setzt man hier $\lambda = \lambda_1$, so findet man

$$f_k(x, y) = \lambda_1 \int K(x, \alpha) f_k(\alpha, y)\, d\alpha.$$

Differenziert man dagegen erst nach λ und setzt erst in der erhaltenen Gleichung $\lambda = \lambda_1$, so findet man

$$f_{k-1}(x, y) = \int K(x, \alpha) f_k(\alpha, y)\, d\alpha + \lambda_1 \int K(x, \alpha) f_{k-1}(\alpha, y)\, d\alpha$$
$$= \frac{f_k(x, y)}{\lambda_1} + \lambda_1 \int K(x, \alpha) f_{k-1}(\alpha, y)\, d\alpha.$$

Kombiniert man die beiden letzten Gleichungen, indem man die erste mit $f_{k-1}(x, y)$, die zweite mit $f_k(x, y)$ multipliziert und die Differenz beider bildet; integriert man sodann nach x, so ergibt sich

$$0 = \frac{1}{\lambda_1} \int f_k(x, y)^2\, dx$$
$$+ \lambda_1 \int K(x, \alpha) \{f_k(x, y) f_{k-1}(\alpha, y) - f_k(\alpha, y) f_{k-1}(x, y)\}\, d\alpha\, dx.$$

Hier ist das letzte Integral bei symmetrischem Kern gleich Null; also müßte auch $f_k(x, y)$ identisch verschwinden entgegen der Voraussetzung. Die Zahl k kann also nicht größer als Eins sein; im Falle eines symmetrischen Kerns sind alle Pole des lösenden Kerns einfach.

In der Umgebung eines solchen Poles sei diese Größe in der Form

$$\Gamma(x, y) = \frac{D(x, y)}{D} = -\frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1) \tag{2}$$

entwickelbar. Dann ist die Größe

$$\Gamma_1(x, y) = \frac{D(x, y)}{D} + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1}$$

an der Stelle $\lambda = \lambda_1$ nicht mehr singulär. Beschränken wir uns nun auf symmetrische Kerne, die keine anderen als positive Eigenwerte besitzen, also positiv definit sind, so ist einer von ihnen der kleinste; er werde durch λ_1 bezeichnet. Dann liegt in der Ebene der komplexen Größe λ auf der Kreisfläche mit dem Radius λ_1 kein anderer Pol als λ_1. Die Taylorsche Entwicklung der Größe $\Gamma_1(x, y)$ konvergiert also noch für einen Wert $\lambda = \lambda_1 + \tau$, in welchem τ eine positive Größe bedeutet. Diese Entwicklung kann explizit in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x, y) &= K(x, y) + \sum_n^{1, \infty} K^{n+1}(x, y) \lambda^n + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} \\ &= \frac{f_1(x, y)}{\lambda_1} + K(x, y) + \sum_n^{1, \infty} \left[K^{n+1}(x, y) - \frac{f_1(x, y)}{\lambda_1^{\,n+1}}\right] \lambda^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Da nun diese Reihe konvergiert, wenn man $\lambda = \lambda_1 + \tau$ setzt, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \left[\left(K^{n+1}(x, y) - \frac{f_1(x, y)}{\lambda_1^{n+1}}\right)(\lambda_1 + \tau)^n\right] = 0$$

oder

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{(\lambda_1 + \tau)^n}{\lambda_1^{n+1}} \left(\lambda_1^{n+1} K^{n+1}(x, y) - f_1(x, y)\right)\right] = 0,$$

also a fortiori

$$\lim_{n=\infty} \left[\lambda_1^{n+1} K^{n+1}(x, y) - f_1(x, y)\right] = 0,$$

$$f_1(x, y) = \lim_{n=\infty} \left[\lambda_1^{n+1} K^{n+1}(x, y)\right].$$

Da nun nach dem Obigen $f_1(x, y)$ eine Eigenfunktion des Kerns ist, so ist wiederum das Verfahren des § 19 abgeleitet, eine Eigenfunktion durch einen Grenzprozeß herzustellen, sobald der zugehörige Eigenwert gefunden ist.

Aber auch für diesen selbst ergibt sich aus der erhaltenen Formel ein Grenzprozeß, durch den man ihn herstellen kann. Da nämlich die Produkte

$$\lambda_1^n K^n(x, y), \qquad \lambda_1^{n+k} K^{n+k}(x, y)$$

bei wachsenden Werten von n einander nahezu gleich werden, so ergibt sich

$$\lambda_1 = \lim_{n=\infty} \frac{K^n(x, y)}{K^{n+1}(x, y)}, \qquad \lambda_1^2 = \lim_{n=\infty} \frac{K^n(x, y)}{K^{n+2}(x, y)}.$$

Diese Ausdrücke werden illusorisch, wenn der Nenner verschwindet. Man vermeidet dies bei dem zweiten nach den oben durchgeführten Betrachtungen, indem man n gerade nimmt und $x = y$ setzt. Ein spezieller, vielleicht zweckmäßiger Grenzprozeß wird durch die Formel

$$\lambda_1^{2^n} = \lim_{n=\infty} \frac{K^{2^n}(x, x)}{K^{2^{n+1}}(x, x)}$$

angegeben.

Beiläufig findet man auch noch leicht eine Formel, durch die die Anzahl der zu dem Eigenwert λ_1 gehörigen Eigenfunktionen bestimmt werden kann. Erinnert man sich nämlich der Formeln

$$\int D(x, x)\, dx = -\frac{dD}{d\lambda}, \quad \frac{D(x, x)}{D} = K(x, x) + \sum_n^{1, \infty} K^{n+1}(x, x)\, \lambda^n,$$

und setzt wie früher

$$U_n = \int K^n(x, x)\, dx,$$

so findet man die Taylorsche Entwicklung

$$-\frac{d \log D}{d \lambda} = U_1 + U_2 \lambda + U_3 \lambda^2 + \cdots,$$

und der absolut kleinste Pol dieser offenbar meromorphen Funktion ist wiederum λ_1. Ist nun $\lambda = \lambda_1$ eine q-fache Nullstelle der ganzen Funktion D, so kann man in folgender Form entwickeln

$$\frac{d \log D}{d \lambda} = \frac{q}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1).$$

Vergleicht man die beiden für die linke Seite dieser Gleichung erhaltenen Reihen, so findet man durch die bei den Entwicklungen (2) und (3) gezogenen Schlüsse

$$q = \lim_{n=\infty} (U_n \lambda_1^n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist, wenn man n gerade nimmt, die Größe U des § 18. Ferner ist die Größe $\Gamma(x, y)$ bei jedem von allen λ_n verschiedenen Werte von λ als Lösung einer nicht homogenen Integralgleichung nach § 23 eindeutig bestimmt, also mit der dort ebenso bezeichneten Größe identisch. Daraus folgt, daß auch die Größen D hier und in § 23 dieselben sind. Dort trat in dem Produkt

$$D = \prod_n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda/\lambda_n}$$

der λ_1 enthaltende Faktor so oft auf, wie die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen beträgt, die zum Eigenwert λ_1 gehören. Diese Anzahl ist also, wenn nur positive Eigenwerte vorhanden sind, gleich der Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = \lambda_1$ in der Fredholmschen Reihe D.

Anmerkungen.

Erster Abschnitt.

§ 6. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Annalen **57**, 1903.

Zweiter Abschnitt.

§ 8. Lord Rayleigh, Theory of sound I, Chap. 5, 1894.

§ 10. Die dynamische Deutung der Legendreschen Polynome stammt aus einer Prüfungsarbeit von K. Fischer. Breslau 1910.

§ 12. Frank, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden. Sitzungsberichte der Wiener Akademie **117** (II a), 1908.

§§ 13, 14. Schaefer und Juretzka, Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen von Saiten und Stäben. Phys. Zeitschrift **10**, 1909. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur 1909.

§ 15. Kneser, Dynamische Deutung gewisser Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur 1909.

§ 17. Fredholm, Sur la théorie des spectres. Comptes rendus **142**, 1906. Schaefer, Dispersionstheorie und Serienspektren. Ann. d. Phys. (4) **28**, 1909. Üder die Bestimmung der Elektronenzahl aus der Dispersion. Ann. d. Phys. (4) **32**, 1910.

Dritter Abschnitt.

Als grundlegend für die allgemeine Theorie seien folgende Arbeiten angeführt:

Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfversigt af akademiens förhandlingar **57**, Stockholm 1900.

Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionelles. Acta math. **27**, 1903.

Die Theorie der symmetrischen Kerne und besonders die vorliegende Darstellung beruht auf folgenden grundlegenden Arbeiten:

Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Erste und zweite Mitteilung. Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1904. Zusammen mit weiteren Mitteilungen veröffentlicht in einem Buch desselben Titels, Leipzig 1912.

Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissertation, Göttingen 1905, Math. Annalen **63**.

§ 18. Die Schwarzsche Ungleichung und die Schwarzschen Konstanten nach H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Acta soc. Fennicae **15**, 1885. Ges. Math. Abhandlungen **1**.

Die Schwarzsche Ungleichung ist von Landsberg in eine Gleichung verwandelt:

$$\int (fx)^2\,dx \int (Fx)^2\,dx - \left(\int fx \,.\, Fx \,.\, dx\right)^2 = \frac{1}{2}\iint \begin{vmatrix} fx_1 & Fx_1 \\ fx_2 & Fx_2 \end{vmatrix}^2 dx_1\,dx_2.$$

Math. Annalen **69**, 1910.

§ 21. Die Besselsche Ungleichung findet sich für den Fall trigonometrischer Funktionen zuerst bei Bessel, Astron. Nachrichten, Bd. VI, 1828. Auch sie kann in eine Gleichung verwandelt werden:

$$\left\{\int (f\alpha)^2\,d\alpha - \sum_{\nu}^{1,k} \int f\alpha \,.\, \varphi_\nu \alpha \,.\, d\alpha\right\}^2$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\iint\cdots\int \begin{vmatrix} f\alpha_1 & \varphi_1\alpha_1 & \cdots \varphi_k\alpha_1 \\ f\alpha_2 & \varphi_1\alpha_2 & \cdots \varphi_k\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f\alpha_{k+1} & \varphi_1\alpha_{k+1} & \cdots \varphi_k\alpha_{k+1} \end{vmatrix}^2 d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_{k+1}.$$

Nach Koschmieder Archiv d. Math. (3) **23**.

Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie § 200. Leipzig 1909.

§ 24. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. London Phil. Transactions (A) **219**, 1909.

Kneser, Belastete Integralgleichungen. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **38**, 1914.

J. Schur, Über die Entwicklung einer gegebenen Funktion nach den Eigenfunktionen eines positiv-definiten Kerns. Math. Abhandlungen, H. A. Schwarz gewidmet. Berlin 1914.

Carslaw, Functions of positive type and their application to the determination of Green's functions. Messenger of Math. **501**, 1913.

§ 25. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. Math. Annalen **71**, 1911. Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung. Crelles Journal **141**, 1912.

Vierter Abschnitt.

Die klassischen Arbeiten von Sturm und Liouville finden sich im Journal de math. **1**, **2**, **3**, 1836—1838.

§ 27. Kneser, Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. Math. Annalen **63**, 1907.

§ 28. Stekloff, Refroidissement de la barre hétérogène. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) **3**, 1901.

§ 29. Stekloff, Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions. Communications de la soc. math. de Kharkoff **10**, 1909.

§ 30. Kneser, Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Annalen **58**, 1904.

Anwendungen der Methode des § 30 auf Probleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung enthalten folgende Arbeiten:

Juretzka, Die Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. Dissertation, Breslau 1909.

Sternberg, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik mittels der Methode der Integralgleichungen. Dissertation, Breslau 1912. Die Arbeit behandelt den Stab von veränderlichem Querschnitt und die elastische Kreisplatte.

Die Abgeschlossenheitsformel nach Stekloff, Sur certaines égalités générales. Mém. de l'académie de St. Pétersbourg, classe phys.-math. (8) **15**, 1904, sowie nach der zu § 27 angeführten Arbeit.

§ 31. Duhamel, Mém. sur les vibrations d'une corde flexible, chargée d'un ou de plusieurs curseurs. Journal de l'Ecole polytechnique (1) cah. 29, Paris 1843.

Lord Rayleigh, Theory of sound I, Nr. 135, 1894.

K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Leipzig 1908. Das Werk enthält schöne Randwertaufgaben vom Sturm-Liouvilleschen Typus, die auf belastete Orthogonalität und belastete Integralgleichungen führen.

Teichmann, Mechanische Probleme die auf belastete Integralgleichungen führen. Dissertation, Breslau 1919. Behandelt wird die Saite mit zwei aufgesetzten Massen, und das an einer Achse mit einem Ende befestigte und um sie rotierende Seil, in das ein Knoten geschlagen ist. Bei der ersten Aufgabe werden Kern und Eigenfunktionen trigonometrisch ausgedrückt; bei der zweiten durch die hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(1-\beta, 1-\alpha, 3/2, z)$, $F(\alpha, \beta, 1, 1-z)$.

Kneser, Die zu § 24 angeführte Arbeit.

§ 32. Darstellungen willkürlicher Funktionen durch Besselsche bei Sternberg (§ 30), Laudien (§ 47), Jaroschek (§ 47) und Kneser (§ 30, 45).

§§ 33, 34. Entsprechende Untersuchungen über Jacobische Polynome

$$T_n = x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2} - \alpha - n, \frac{1}{x^2}\right)$$

gibt Koschmieder, Untersuchungen über Jacobische Polynome, Habilitationsschrift, Breslau 1919. Math. Zeitschrift 8, 1920. Bei ungeradem n sind die Polynome T_n Eigenfunktionen des Kerns

$$K(x, \xi) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha}, \quad x < \xi.$$

Für $\alpha = 1/3$, $\wp u = \wp(u \mid 0, -1)$, n ungerade sind $T_n(\wp' u)$ die Eigenfunktionen des Kerns

$$K(u, v) = 9(\zeta u - \eta), \quad u < v$$

auf dem Grundgebiet $\omega/3 \cdots 4\omega/3$ mit den Eigenwerten $n\left(n - (1/3)\right)$.

Wenn $\alpha = 1/4$, $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sn}\,u.\mathrm{dn}\,u$, $k = \sqrt{1/2}$ gesetzt wird, sind $T_n(x)$ die Eigenfunktionen des Kerns

$$\mathfrak{K}(u, v) = 2\,(E(u) - u),\; u < v;$$

$E(u)$ ist im Sinne der Jacobischen Bezeichnung das Integral zweiter Gattung als Funktion des Integrals erster Gattung; das Grundgebiet ist die Strecke $0 \cdots K$.

Die Ausdrücke T_n, in denen x elliptischen Funktionen gleichgesetzt sind, können als Fortbildung der Kugelfunktion $P_n(\cos\theta)$ gelten.

R. Neumann, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. Dissertation, Breslau 1912. Die Arbeit behandelt den Fall unendlich ausgedehnter Grundgebiete, für den die Anwendung der allgemeinen Sätze besonders gerechtfertigt wird. Definiert man die Hermiteschen Polynome durch die Gleichung

$$e^{-hx+hh} = \sum_n^{0,\infty} \frac{h^n}{n!}\,\mathfrak{P}_n x,$$

so sind die Größen

$$\varphi_n x = e^{-1/2xx}\,\mathfrak{P}_n x$$

auf der Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns mit unstetiger Ableitung

$$K(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{1/2(xx+yy)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha\alpha}\, d\alpha \int_{+\infty}^{y} e^{-\beta\beta}\, d\beta, \quad x < y$$

und es gilt die Gleichung

$$\varphi_n x = (2n+2) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha.$$

Eine Funktion fx ist auf der ganzen Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ nach den Funktionen $\varphi_n x$ entwickelbar, wenn sie ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen an einer endlichen Anzahl von Stellen unstetig wird, und im Unendlichen mindestens wie $x^{-\varepsilon-5/2}$ verschwindet, wobei ε positiv und beliebig klein ist.

Ähnliche Sätze gelten für die Laguerreschen Polynome, die als Nenner der Näherungsbrüche bei der Entwicklung der Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots$$

in einen Kettenbruch definiert werden können. Das Grundgebiet ist die Strecke von $-\infty$ bis 0.

Fünfter Abschnitt.

Strenge und einfache Beweise der vielfach gebrauchten Sätze der Potentialtheorie finden sich bei Schmidt, Bemerkung zur Potentialtheorie. Math. Abhandlungen, H. A. Schwarz gewidmet. Berlin 1914.

§§ 38 bis 40, 43. Die Rechnungen sind Prüfungsarbeiten von E. Bergmann und V. Wellmann entnommen. Breslau 1910.

Carslaw, The Greens functions for the equation $\Delta u + k^2 u = 0$. Proc. London math. society (2) **13**, 1916; **16**, 1919.

§ 44. Betreffs der Vertauschung von Integrationen ist anzuführen Plemelj, Die linearen Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Monatshefte für Math. u. Phys. **15**, 1904.

Stekloff, Théorie générale des fonctions fondamentales. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) **6**, 1904.

§ 45. Kneser, Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen von zwei Variablen. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **27**, 1909.

§ 46. Weyl, Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung. Crelles Journal **141**, 1912.

Sechster Abschnitt.

Betreffs der funktionentheoretischen Methode:

Kneser, Math. Annalen 63 (1907) (§ 27).

Hilb, Über Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen entspringen. Crelles Journal **140**, 1911.

Freund, Entwicklung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Dissertation, Breslau 1909. Hier findet sich die Methode der Funktion $Z = e^{cz}/(e^z + 1)$ in verallgemeinerter Form entwickelt und wird zur Verbesserung der älteren funktionentheoretischen Beweise von Cauchy für die Fouriersche und verwandte Reihen benutzt.

§§ 47, 48. Duhamel, Mém. sur le calcul, des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides. Mém. prés. par divers savants **5**, Paris 1838. Second mém. sur les phénomènes thermo-méchaniques. Journal de l'Ecole polytechnique cah. 25, 36, 1837.

F. Neumann, Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichmäßig erwärmten unkristallinischen Körpern. Abhandl. der Berliner Akademie 1841. Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Leipzig 1885.

Liouville, Sur un problème thermomécanique Journal de math. **2**.

Koschmieder, Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe. Crelles Journal **143**, 1913. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen wird funktionentheoretisch in einem Sonderfalle begründet, der sich auf Fouriersche Reihen zurückführen läßt.

Laudien, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen spezieller orthogonaler und biorthogonaler Systeme. Dissertation, Breslau 1914. Behandelt wird die thermoelastische Deformation der Kugel, die auf eine Integrodifferentialgleichung führt, sowie einige auf Liouville (s. oben) zurückgehende analytische Randwertaufgaben. Funktionentheoretische Methode der Konvergenzbeweise nach der Dissertation von Freund (s. oben), auch bei der Entwicklung unstetiger Funktionen.

Laudien, Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem. Crelles Journal **148**, 1917.

Jaroschek, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Gliedern biorthogonaler Funktionssysteme bei einigen thermomechanischen Aufgaben.

Dissertation, Breslau 1918. Die Arbeit behandelt die thermoelastischen Vorgänge bei geraden Stäben mit verschiedenen Endbedingungen und bei kreisförmigen Platten nach F. Neumann. In allen Fällen werden die Greenschen Funktionen in Teilbrüche entwickelt, teils durch direkte Diskussion, teils nach der Methode von Freund, und die Darstellungsfrage wird jedesmal allgemein erledigt. Die Kreisplatten führen auf Besselsche Funktionen.

Westfall, Zur Theorie der Integralgleichungen. Dissertation, Göttingen 1905.

Birkhoff, Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. Transactions Amer. math. society **9**, 1908.

A. Schur, Zur Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen. Dissertation, Würzburg 1920.

Volk, Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variablen nach den Funktionen des elliptischen Zylinders. Dissertation, München 1920. Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen. Math. Annalen **86**, 1922.

§ 49. Hilb, Über Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Annalen **71**, 1911.

Haupt, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems. Sitzungsberichte der Bayer. Akademie der Wissenschaften 1912.

Kneser, Bestimmung des Geschlechts spezieller ganzer transzendenter Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **24**, 1915.

§ 50. Hilb, Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen. Sitzungsber. der phys.-med. Sozietät Erlangen **43**, 1911.

Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Annalen **68**, 1910.

§ 51. Hilb, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Annalen **76**, 1915.

Betschler, Über Integraldarstellungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen entspringen. Dissertation, Würzburg 1914.

Siebenter Abschnitt.

§ 53. Schmidt, Math. Annalen **63**, s. oben zum dritten Abschnitt.

§ 55. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Annalen **64**, 1907.

§ 56. Picard, Sur quelques applications de l'équation fonctionelle de M. Fredholm. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **22**, 1906.

§§ 58, 59. Plemelj, s. § 44. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen. Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft Nr. 40, 1911.

Achter Abschnitt.

§ 60. Plemelj, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatshefte für Math. und Phys. **15**, 1904.

Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (s. oben zu § 23), Kap. 18, 19. Hier findet sich eine systematische Darlegung der Grundzüge der gesamten Theorie der Integralgleichungen, sowohl nach der Seite der Fredholmschen Reihen wie der Hilbertschen Sätze über symmetrische Kerne.

§ 62. Goursat, Recherches sur les équations intégrales linéaires. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) **10**, 1908.

J. Schur, Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen. Math. Annalen **66**, 1909.

Landsberg, Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Annalen **69**, 1910.

§ 63. Darboux, Mém. sur l'approximation des fonctions de très grand nombres. Journal de math. (3) **4**, 1878.

Kneser, Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **22**, 1906.

Druckfehler.

S. 231, Zeile 16 von oben ist zu lesen: $e^{-\sigma i x}$ für $e^{-\varrho i x}$,
„ 9 „ unten „ „ „ $e^{-(x+\eta)\delta}$ für $e^{(x+\eta)\delta}$.