داستان مجموعه‌ها

نااوم یاکوله‌ویچ ویلنکین
ترجمهٔ پرویز شهریاری

ناائوم یاکوله‌ویچ ویلنکین

داستان مجموعه‌ها

ترجمهٔ پرویز شهریاری

انتشارات توکا، تهران، شاهرضا، روبروی دانشگاه

نااوم‌یاکوله‌ویچ ویلنکین

داستان مجموعه‌ها

چاپ اول: ۱۳۵۵

چاپ دوم: شهریورماه ۱۳۵۷

چاپ: چاپخانه نقش‌جهان، تهران

شمارهٔ ثبت کتابخانه ملی ۱۵۶۳ — ۱ر۶ر۵۷

یادداشت

درسالهای ۷۰ سدهٔ نوزدهم، ژرژکانتور ریاضی‌دان آلمانی، رشتهٔ تازه‌ای در ریاضیات بوجود آورد: نظریهٔ مجموعه‌های نامتناهی. باگذشت چند ده‌سال، تقریباً تمامی ریاضیات براساس نظریهٔ مجموعه‌ها، بازرسی شد. مفهوم‌های نظریهٔ مجموعه‌ها، کلی‌ترین خاصیت‌های موضوع‌های ریاضی را منعکس می‌کند.

معمولاً نظریهٔ مجموعه‌ها را در کتاب‌های درسی دانشکده‌ها (واحیاناً دبیرستان‌ها) به‌صورت نظری مجموعه‌ها می‌آورند. ولی دراین کتاب مفهوم‌های بنیانی نظریهٔ مجموعه‌ها و نتیجه‌هایی که از آن به‌دست می‌آید، به‌زبان ساده شرح داده شده است.

قسمت مهمی ازکتاب دربارهٔ داستان ایون‌تیخی قهرمان داستان س. له‌ما نویسندهٔ لهستانی بحث‌می‌کند، که درمسافرت فضایی خود به‌مهمانخانهٔ عجیبی برخورد می‌کند که بی‌نهایت اطاق دارد.

کتاب برای دانش‌آموزان، دانشجویان، معلمان وهمهٔ کسانی که با این رشتهٔ جالب ریاضی سروکار دارند ویا به‌آن علاقه‌مندند، می‌تواند به‌اندازهٔ کافی مفید باشد.

وقتی‌که من درکلاس هشتم درس‌می‌خواندم برای نخستین‌بار بانظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدم. این آشنایی را ضمن سخنرانی **ای. م. هلفاند**، که آن‌زمان دانشیاری خود را شروع کرده بود وحالا عضو آکادمی علوم اتحاد شوروی است، به‌دست آوردم. او دو ساعت تمام دربارهٔ چیزهایی صحبت کرد که باورکردنشان ممکن نبود: این‌که تعداد عددهای طبیعی با تعداد عددهای زوج برابر است، این‌که تعداد عددهای گویا با تعداد عددهای طبیعی یکی است، این‌که تعداد نقطه‌های واقع بریك پاره خط برابر است با تعداد نقطه‌های روی یك مربع وغیره. آشنایی بانظریهٔ مجموعه‌ها، درسالهای تحصیل من در دانشکدهٔ مکانیك ــ ریاضی‌ادامه داشت. بعد از هر درس (وباید اعتراف کردکه گاهی حتی ضمن سخنرانی‌هایی که جالب نبودند)، دانشجویان درکریدورها دور هم جمع می‌شدند و دربارهٔ مسأله‌های جالب ونمونه‌های عجیبی کــه مربوط به‌مجموعه‌ها بود با هم بحث می‌کردند. به‌خصوص دانشجویان تازه‌کار قدیمی‌ترها را سئوال‌پیچ می‌کردند که چه‌گونه می‌توان منحنی ساخت‌که ازتمام نقطه‌های یك‌مربع بگذرد ویا چگونه ممکن است تابعی ساخت‌که برای هیــچ نقطهٔآن مشتق وجود نداشته باشد و غیره.

روشن است توضیحاتی که در این‌باره داده می‌شد، به‌اصطلاح «سرانگشتی» بود. با وجود این، وقتی‌که می‌خواستیم‌امتحان بدهیم، باشنیدن این توضیحات خود را سبك‌تر احســاس می‌کردیم. ضمناً آشنایی بیش‌تر ودقیق‌تر بامبانی ریاضیات درسی، بحث‌های «کریدوری» ما را گرم‌تر می‌کرد.

من‌هم می‌خواهم، نظریهٔ مجموعه‌ها را باهمان شیوه‌ای که خودم آموخته‌ام وبیش‌تر مربوط به‌بحث‌های «کریدوری» است برای شما بازگوکنم. به‌همین مناسبت، تکیهٔ‌کاربرطرح مسأله‌های روشن گفت‌وگودربارهٔ مثال‌های عجیب وغیرقابل انتظار است، وبه‌خصوص کوشش شده است‌که نظریهٔ تابعهای بامتغیر حقیقی بیش‌تر وروشن‌تر مورد بررسی قرارگیرد.

اگراین‌کتاب باعث‌شودکه‌دانشجویان سالهای‌آخردانشکده‌ها، را شروع‌کرده‌اند، ویاحتی دانش‌آموزان دبیرستانی، شوق بیش‌تری به‌مطالعهٔ دقیق‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها پیدا کنند، به هدف خود رسیده‌ام.

درپایان کتاب، مسأله‌هایی راگذاشته‌ام تا خوانندهٔ علاقه‌مند بتواند خود را در مورد آنچه که فراگرفته است، آزمایش کند. همچنین، چه در متن‌کتاب وچه درمسأله‌ها، قسمت‌های مشکل‌تر راکه برای خوانندهٔ تازه‌کار پیچیده‌تر است، با ستاره مشخص‌کرده‌ام، ولی صرفنظرکردن ازاین قسمت‌ها، هیچ لطمه‌ای به‌مطالعهٔ مطالب بعدی نمی‌زند.

در این کتاب

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

۱

مجموعه‌ها

و انجام عمل روی آنها

مجموعه یعنی چه؟

در این فصل دربارهٔ معنای مجموعه‌ها وعملهایی‌که می‌توان روی آنها انجام داد، گفتگو می‌کنیم. باکمال تأسف مفهوم اساسی نظریه ـ یعنی مفهوم مجموعه ـ را نمی‌توان بطوردقیق تعریف‌کرد. بطور ساده می‌توان گفت‌که مجموعه یعنی «اجتماع»، «گروه» «خانواده»، «دستگاه»، «طبقه»، «کلکسیون» و از این قبیل. ولی هیچکدام از اینها تعریف ریاضی مجموعه نیست، بلکه تنها غنای زبان را برای بیان یك مفهوم می‌رساند.

برای اینکه یك مفهوم را تعریف‌کنیم، قبل از هرچیز باید آنرا به عنوان حالت خاصی از یك مفهوم کلی‌تر نشان دهیم. برای مفهوم مجموعه‌این‌بیان ممکن‌نیست،زیرا در ریاضیات مفهومی‌کلی‌ترازمجموعه نداریم.

بنابراین، بجای اینکه به‌تعریف مفهوم مجموعه بپردازیم،آنرا به کمك مثالهایی روشن می‌کنیم.

اغلب دربارهٔ تعدادی چیز صحبت می‌شود که با یك نشانهٔ کلی به‌هم مربوط شده‌اند. مثلا می‌توان دربارهٔ مجموعهٔ صندلیهای اطاق، مجموعهٔ اتمهای مشتری، مجموعهٔ یاخته‌های بدن آدمی، مجموعهٔ سیب زمینیهای یك سبد، مجموعهٔ همهٔ ماهیهای اقیانوس، مجموعهٔ همهٔ مربعهای روی صفحه، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع برمحیط یك دایرهٔ مفروض وغیره صحبت‌کرد.

چیزهایی که یك مجموعه‌را به‌وجود آورده‌اند، عضوهای آن نامیده می‌شود . برای اینکه نشان دهندکه مجموعهٔ A از عضوهای x، y، ...، z تشکیل‌شده است، معمولا می‌نویسند:

$$A = \{x , y , . . . , z\}$$

مثلا مجموعهٔ روزهای هفته از این عضوها تشکیل شده است :

{جمعه ، پنجشنبه ، چهارشنبه ، سه‌شنبه ، دوشنبه ، یك شنبه ، شنبه}

و مجموعهٔ ماههای سال از این عضوها :

{فروردین، اردیبهشت، خرداد ، تیر، مرداد، شهریور، مهر، آبان، آذر ، دی ، بهمن ، اسفند}

مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۲x - ۲۴ = ۰$ شامل دوعدد ۴ـ و ۶ ، یعنی به‌صورت {۶ ، ۴ـ} است . آکولادی که دو طرف عضوهای مجموعه قرار گرفته است به این معنی است که این عضوها در یك مجموعهٔ A به‌هم مربوط شده‌اند . اگر عضو x متعلق بـه‌مجموعهٔ A باشد به‌صورت $x \in A$ نشان می‌دهند . علامت $\in$ ، علامت عضویت‌است. اگر عضو x متعلق به مجموعهٔ A نباشد به صورت $x \notin A$ یا $x \overline{\in} A$ می‌نویسند . مثلا اگر A مجموعهٔ همهٔ عددهای زوج طبیعی باشد ، داریم : $۶ \in A$ و $۳ \notin A$.

اگر A مجموعهٔ ماههای سال باشد :

اردیبهشت $\in A$ و دوشنبه $\notin A$

به‌این‌ترتیب وقتی که ازمجموعه صحبت می‌کنیم، تعدادی چیز را در یك واحد ـ یك مجموعه ـ جمع‌آوری کرده‌ایم که این چیزها عضوهای آنرا تشکیل می‌دهند : بانی نظریهٔ مجموعه‌ها ، ژرژ کانتور ، این مطلب را چنین بیان می‌کند :

«مجموعه عبارت‌است ازیك فراوانی،که‌در ذهن‌ما به‌صورت واحد درآمده‌است.»

در حقیقت ، عضوهای یك مجموعه حتی لازم نیست درعالم واقع

وجود داشته باشد ؛ مثل موقعی که در رساله‌های مذهبی بطور جدی در بارهٔ مجموعهٔ ارواح شیاطین ، فرشتگان مقرب بارگاه و غیره مطالعه می‌شود .

برای اینکه بتوانیم مفهوم مجموعه را بهتر پیش‌خود مجسم کنیم از مثال ن. ن. لوزین عضو فرهنگستان شوروی کمك می‌گیریم . یك کیسهٔ شفاف نایلونی که از هیچ طرف شکاف یا سوراخی نداشته باشد ، در نظر بگیرید و فرض کنید در داخل این کیسه عضوهای مجموعهٔ A قرار گرفته باشد ، ضمناً بجز عضوهای مجموعهٔ A هیچ چیز دیگری در کیسه نباشد . این کیسهٔ نازك نایلونی با اشیای x داخل آن، می‌تواند به‌عنوان مجموعهٔ A در نظر گرفته شود که از عضوهای x تشکیل شده است . این کیسهٔ شفاف که همهٔ عضوها را (وفقط آنها را) دربرگرفته است ، معنای پیوند دادن اشیایی را به صورت یك مجموعهٔ واحد روشن می‌کند .

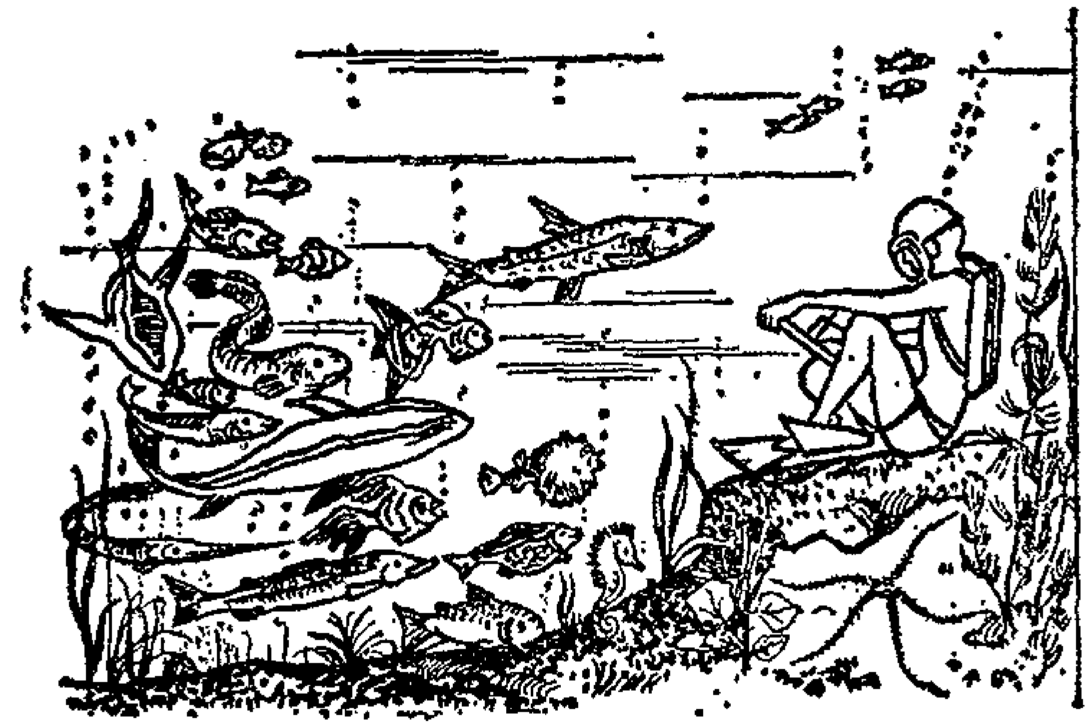
اگریك‌مجموعه تعداد معینی‌عضوداشته باشد، محدود (یا متناهی) واگر بی‌نهایت عضوداشته باشد، نامحدود (یا نامتناهی) نامیده می‌شود. مثلا مجموعهٔ درختهای جنگل، مجموعه‌ای متناهی و مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط دایره مجموعه‌ای نامتناهی است.

مجموعه را چگونه می‌دهند ؟

مجموعه را به صورتهای مختلفی می‌توان عرضه کرد . یکی از این راهها این است که فهرست کامل عضوهای مجموعه داده شود. مثلاً مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس ، که فهرست کامل آن در دفتر کلاس وجود دارد ؛ مجموعهٔ کشورهای روی زمین ، که فهرست آنها در اطلس جغرافیایی است؛ مجموعهٔ همهٔ استخوانهای بدن آدمی، که فهرست آنها درکتاب درسی تشریح، ذکر شده است.

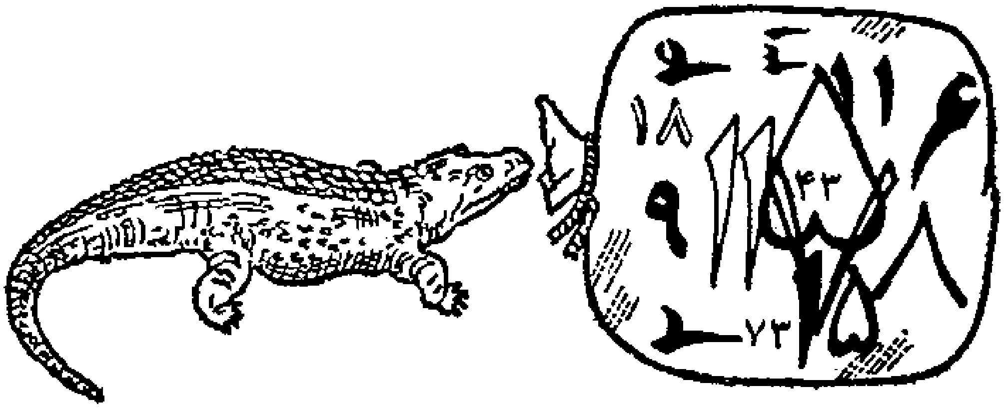
ولی این روش را در مورد مجموعه‌های نامتناهی نمی‌توان به‌کار

برد ؛ حتی در مورد مجموعه‌های متناهی هم‌گاهی به‌اشکال بر می‌خورد . مثلاً با وجودی‌که مجموعهٔ ماهیهای‌اقیانوس متناهی است، آیا می‌توان فهرست کامل‌آنرا ارائه‌داد؟ درمورد مجموعه‌های‌نامتناهی هم روشن است که نمی‌توان مثلاً مجموعهٔ همهٔ‌عددهای درست، یا مجموعهٔ‌همهٔ نقطه‌های واقع برمحیط دایره رانام برد، زیرا عمل شمارش هرگز به‌پایان نمی‌رسد.



سرشماری بزرگ ماهیها

در حالتهایی که نتوانیم فهرست کامل عضوهای مجموعه را نام ببریم ، مجموعه را به‌کمك خاصیت مشترکی از آنها مشخص می‌کنیم ، خاصیتی‌که در مورد تمام عضوهای مجموعه صادق باشد و برای هیچ چیز دیگری در جهان صادق نباشد . مثلا می‌توانیم از مجموعهٔ عددهای طبیعی نام ببریم . در این‌صورت روشن است‌که عدد ۷۳ متعلق به این مجموعه است، درحالی‌که عدد $\frac{۳}{۴}$ و یا سوسمار عضوی از این مجموعه نیست. به‌همین ترتیب $\sqrt{۲}$ و سیارهٔ کیوان متعلق به مجموعهٔ عددهای گویا نیستند، درحالی‌که $\frac{۷}{۱۵}$ عضوی از این مجموعه است .



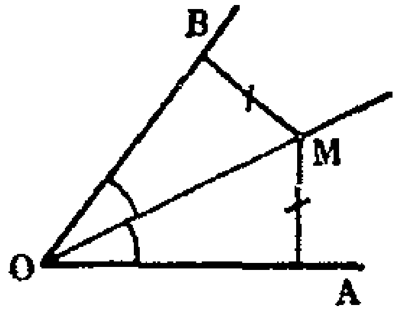
سوسمار عضوی از مجموعهٔ عددهای طبیعی نیست

در هندسه اغلب با مجموعهٔ نقطه‌هایی سر و کار داریم که با یك یا چند خاصیت مشخص شده‌اند. معمولاً، و با دید سنتی در هندسه، چنین مجموعهٔ نقطه‌ها را مکان‌هندسی نقطه‌ها می‌گویند. مثلاً: «دایرهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از یك نقطهٔ این صفحه به‌یك فاصله باشند». این تعریف به‌معنای آن است که مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که از نقطهٔ مفروضی در این صفحه به‌یك فاصله باشند، مجموعهٔ نقطه‌های واقع برمحیط یك دایره را تشکیل می‌دهند.

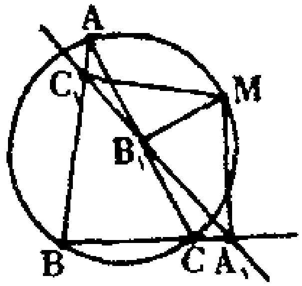
گاهی بیان مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ خواص مشخص آنها به‌اشکالاتی برخورد می‌کند. گاهی پیش می‌آید که دوخاصیت مختلف، منجر به یك مجموعه می‌شود، یعنی همهٔ عضوهایی که خاصیت اول را دارند، دارای خاصیت دوم هم هستند وبرعکس. مثلاً مجموعهٔ حیوانهای پوست کلفتی که‌صاحب دوعاج‌هستند، همان مجموعهٔ‌حیوانهای‌پوست‌کلفت‌خرطوم‌دار است: هردوخاصیت مجموعهٔ فیلها را به ما می‌دهد.

در هندسه، مثلا خاصیت «نقطهٔ M ازضلعهای زاویهٔ AOB به‌یك فاصله است» همان مجموعهٔ نقطه‌هایی را می‌دهد که از خاصیت «زاویهٔ AOM مساوی زاویهٔ MOB است» بدست می‌آید (شکل ۱ ـ در این شکل نقطه‌هایی از صفحه در نظرگرفته شده است که درداخل زاویهٔ AOB قرار دارندو از دو ضلع زاویه به‌یك فاصله‌اند). ویا در حساب خاصیت «عدد

صحیح قابل قسمت بر ۲» همان مجموعه‌ای را می‌دهد که خاصیت «رقم سمت راست عدد قابل قسمت بر ۲ است.»



شکل ۱



شکل ۲

گاهی اثبات هم ارزی دوخاصیت مشکل است. مثلا اثبات این مطلب را آزمایش کنید که هردو خاصیت زیر منجر به‌مجموعهٔ واحدی از نقطه‌ها می‌شود که در صفحهٔ مثلث ABC قرار دارند: a) پای عمودهایی که ازنقطهٔ M برضلعهای مثلث فرود می‌آوریم، روی یك‌خط راست قرار دارند، b) نقطهٔ M برمحیط دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC قراردارد (شکل۲). (اثبات انطباق این دو مجموعه، در واقع همان اثبات قضیهٔ سیمسون و قضیهٔ عکس آن است).

بطورکلی، در بسیاری از قضیه‌های هندسی صحبت بر سر اثبات انطباق در مجموعه است، مثلا مجموعهٔ مثلثهای متساوی الاضلاع با مجموعهٔ مثلثهای متساوی‌الزاویه؛ مجموعهٔ چهارضلعیهای محیطی با مجموعهٔ چهارضلعیهایی که در آنها مجموع دوضلع روبرو برابراست با مجموع دوضلع روبروی دیگر وغیره.

در بعضی موارد، هنوز انطباق یا عدم انطباق دو مجموعه‌ای که با خاصیتهایی مشخص شده‌اند، حل نشده است. مثلا تا امروز معلوم نشده است که مجموعهٔ {۳۵۱۱ , ۱۰۹۳} با مجموعهٔ عددهای اول n که در مورد آنها 2^n-2 بر n^2 قابل قسمت است، یکی است یا دو مجموعهٔ مختلف‌اند.

نارسایی وناروشنی بیان که استنباطهای گوناگونی به‌وجود می‌آورد ، مشکل بزرگتری برای مشخص کردن مجموعه‌ها به‌کمك خاصیت مشترك عضوهای‌آن است. تعداد زیادی‌ازحالتهای‌بینابینی درتعلق یا عدم تعلق آنها به مجموعهٔ مورد نظر، ما را دچار اشکال می‌کند. مثلاً فرض کنید که صحبت برسر مجموعهٔ همهٔ درختهای روی زمین باشد . از یك طرف باید معلوم‌کردکه آیا منظور تمام درختهایی است که روی زمین وجود داشته‌اند و وجود خواهند داشت ویا درختهایی‌که درفاصلهٔ معینی از زمان روی زمین بوده است (مثلا از اول اردیبهشت تا پایان آبان ۱۳۵۳) . ولی در این‌صورت این سؤال مطرح می‌شود که تکلیف ما با درختهایی که در این فاصلهٔ زمانی بریده می‌شوند چیست ؟ علاوه برآن یك رشته حالتهای بینابینی وجود داردکه در حد فاصل بین درختها و سایر رستنیها قرارگرفته‌اند وباید تصمیم‌گرفت‌که‌آیا آنها جزو مجموعهٔ مورد نظر هستند یا نه ؟

حتی « مجموعهٔ سیاره‌های دستگاه خورشیدی » هم بطور کامل مشخص نیست . همراه با سیاره‌های بزرگ (عطارد ، زهره ، زمین ، مریخ ، مشتری ، زحل ، اورانوس، نپتون و پلوتون) قریب ۱۶۰۰ سیارهٔ کوچك (که آستروئید یا سیارك نامیده می‌شوند) نیز دور خورشید می‌چرخند . بعضی از این سیارکها (مثل سه‌رس ، پالاس ، ژونو و غیره) صدهاکیلومتر قطر دارند، ولی سیارکهایی هم هستندکه قطر آنها از یك کیلومتر تجاوز نمی‌کند . هرچه روشهای مشاهدهٔ منجمین بهتر شود موفق به‌کشف سیاره‌های‌کوچکتر وکوچکتر می‌شوند . به‌همین مناسبت این پرسش پیش می‌آیدکه مرز بین سیاره‌ها وسنگهای آسمانی‌کجاست ؟ چه‌موقع بطور قطع می‌توان گفت که سیاره‌ها تمام شده است وبقیه جزو سنگهای آسمانی است ؟ شبیه این اشکال درمورد یك قهرمان بابلی پیش می‌آید که بعد از هجوم دستهٔ بنی‌کریك فریاد زد : «از کجا شهر شروع

می‌شود و در کجا بنی کریك تمام می‌شود ؟» می‌گویند کـه به او جواب دادند : شهر درست در همان جایی تمام می‌شودکه بنی‌کریك شروع می‌شود . درست شبیه این جمله که : « سیاره‌ها درست جایی تمام می‌شوند که‌سنگهای آسمانی شروع می‌شود» . به‌همین مناسبت مجموعهٔ‌سیاره‌های دستگاه خورشیدی نمی‌تواند تعریف دقیقی پیداکند .

اختلاف بین سیاره وشهاب آسمانی مربوط به اخترشناسان‌است. ولی اختلاف بین «منزل» و«کلبه» به هرکسی‌که درجایی زندگی‌می‌کند، مربوط می‌شود . به‌سادگی‌می‌توان تصورکردکه برای معرفی یك‌ساختمان ممکن است از زبان کسی نام محترمانهٔ «منزل» و از زبان دیگری نام تحقیرآمیز«کلبه»شنیده شود. به‌این‌ترتیب این سؤال که‌آیا فلان‌ساختمان به‌مجموعهٔ قصرها تعلق دارد یا نه، بستگی مستقیم‌به‌این داردکه چه‌کسی این‌مجموعه را تنظیم می‌کند.

همین اشکال در مورد مجموعهٔ کتابهای شعر هم وجود دارد . در اینجا هم پیداکردن یك مرز مشخص بین شعر و نثر (نثر آهنگ‌دار ، شعر سفید وغیره) کار ساده‌ای نیست . «مجموعهٔ افرادی که می‌توانند بطور مجانی از قطار استفاده‌کنند» هم‌کاملا مشخص نیست . مثلا بچه‌هایی‌که کمتر از ۵ سال داشته باشند ، به‌این مجموعه تعلـق دارند . ولی ممکن است این وضع پیش آید که بچه‌ای ، ضمن مسافرت قطار ، از مرز پنج سالگی خود بگذرد . دراین‌صورت معلوم‌نیست‌که آیا می‌توان‌او را عضو این مجموعه به‌حساب آورد یا نه ؟ (حکایت می‌کنند ، پدری که قانون را با دقت رعایت می‌کرد ، درلحظه‌ای‌که پسرش ۵ ساله شد ، ترمز قطار راکشید ، تا بتواند بطور دقیق ، بابت راهی که باقی مانده است ، پول بلیت پسرش را بپردازد.)

عدم دقتی هم ، که در زبان‌گفتگو وجود دارد، اغلب دشواریهای ظریفی در موارد ساده به‌وجود می‌آورد . مثلاً فرض‌کنید، A مجموعه‌ای

از n عدد طبیعی اولیه باشد:

$$n=\{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , n\}$$

و n عبارت‌باشد ازتعداد حرفهایی که دراین شعرناصرخسرو وجود دارد:

به محشرگر زبان از من نگیری نیم عاجز من از گفت و شنودت

این تعریف را ، برای مجموعهٔ A ، دو جور می‌توان فهمید . از یك‌طرف، می‌توان n را تعداد همهٔ‌حرفهایی که‌برای‌نوشتن‌شعرناصرخسرو لازم است (یعنی همهٔ حرفهایی که در چاپخانه، برای چیدن این شعر به کار برده‌اند) ، به حساب آورد . اگر این حرفها را بشماریم ، $n=۴۱$ می‌شود و دراین صورت:

$$A=\{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , ۴۱\}$$

از طرف دیگر، می‌توان n را تعداد همهٔ حرفهای مختلف وتکرار نشدهٔ الفبای زبان فارسی دانست، که در این شعر به‌کار رفته است . در چنین حالتی $n=۱۷$ می‌شود وبنابراین

$$A=\{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , ۱۷\}$$

این مثالها نشان می‌دهد که چگونه باید ، تعریف یك مجموعه را با ظرافت ودقت تنظیم کرد ، تا از ابهام وچندگانگی آن، درمفهومی که بدست می‌آید، جلوگیری شود .

بتراشد یا نتراشد ؟

دشواری مربوط به تعریف یك مجموعه ، همیشه تنهـــا مربوط به نارسایی زبان نیست. گاهی علت ، جدی‌تر از این نازك بینیهای زبان است. نمونه‌ای‌می‌آوریم: معلوم‌است که معمولاً یك‌مجموعه خاصیتهای عضو خودش را ندارد، یعنی، نمی‌تواند عضوخودش باشد(مثلاً مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی ، خود یك عدد طبیعی نیست، مجموعهٔ همهٔ مثلثها، خود یك مثلث نیست وغیره).

ولی مجموعه‌هایی هم وجود دارد، که شامل خود؛ به عنوان یکی از عضوهای آن مجموعه هستند. مثلاً مجموعهٔ مفاهیم انتزاعی، خود یک مفهوم انتزاعی است (آیا اینطور نیست؟). چون اینگونه مجموعه‌ها، به‌ندرت مورد بررسی قرار می‌گیرند، آنها را نامتعارف و همهٔ بقیهٔ مجموعه را متعارف می‌نامیم.

حالا مجموعهٔ A را در نظر می‌گیریم که عضوهای آن عبارتند از همهٔ مجموعه‌های متعارف. در نظر اول، گمان می‌رود که این تعریف هیچ عیبی ندارد؛ چرا باید عبارت «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های متعارف»، از عبارت «مجموعهٔ همهٔ مثلثها» بدتر باشد؟ ولی در واقع، در اینجا یک تناقض منطقی جدی به‌وجود می‌آید. ببینیم خود مجموعهٔ A، ازچه نوع است: متعارف یا نامتعارف؟ اگر A را یک مجموعهٔ متعارف بگیریم، در این‌صورت باید یکی از عضوهای خودش باشد (همهٔ مجموعه‌های متعارف را در مجموعهٔ A جمع کرده‌ایم). ولی اگر مجموعهٔ A، یکی از عضوهای خودش باشد، طبق تعریفی که کردیم، باید یک مجموعهٔ نامتعارف باشد. اگر هم، مجموعهٔ A را، یک مجموعهٔ نامتعارف فرض کنیم، باید بتواند یکی‌ازعضوهای‌خودش باشد، درحالی‌که بین‌عضوهای مجموعهٔ A، تنها مجموعه‌های‌متعارف‌وجود دارد ویک‌مجموعهٔ‌نامتعارف نمی‌تواند عضو آن باشد.

در مورد مجموعهٔ A، به‌یک تناقض منطقی برخورد می‌کنیم: این مجموعه، نه‌می‌تواند متعارف باشد ونه نامتعارف. این تناقض منطقی، در حالتهای خیلی ساده‌تر هم پیش می‌آید. مثلاً، اگر به سربازی دستور داده شود که تنها صورت سربازهایی از دستهٔ خود را بتراشد، که خودشان این‌کار را نمی‌کنند؛ تکلیف این سرباز با خودش چیست؟ اگر او صورت خودش را بتراشد، به‌گروهی ازسربازها تعلق پیدا می‌کند که‌خودشان‌صورتشان‌را می‌تراشند واوحق ندارد صورت چنین سربازهایی

را بتراشد. اگرهم صورت‌خودش را نتراشد، به‌گروه سربازهایی‌می‌پیوندد که صورت خود را اصلاح نکرده‌اند، که در این‌صورت او وظیفه دارد به اصلاح صورت خود بپردازد.

مثالهای‌دیگری هم وجود داردکه به‌نظرمی‌رسد، مجموعهٔ مفروض کاملاً مشخص است ، درحالی‌که با کمی دقت معلوم می‌شود که خیلی بد تعریف شده است و یا بهتر بگوییم اصلاً مشخص نشده است . مثلاً فرض کنید ، مجموعهٔ A از همهٔ عددهای‌گویایی تشکیل شده باشد، که می‌توان آنها را به کمك دویست کلمهٔ فارسی تعریف کرد (که در بین آنها کلمه‌های « صفر » ، « یك » ، « دو » و غیره هم وجود دارد) .

از آنجا که مجموعهٔ همهٔ کلمه‌های فارسی ، یك مجموعهٔ محدود است (برای سادگی کار می‌توان مثلاً فرض کرد که کلمه‌ها را تنها از

فرهنگ معین انتخاب کرده باشیم)، در نتیجه مجموعهٔ این‌گونه عددها هم، مجموعهٔ محدودی است. این عددهارا r_1 ، r_2 ، ... ، r_N می‌گیریم. حالا عدد گویای r را به این ترتیب معین می‌کنیم:

$$r = 0/n_1n_2...n_N$$

که در آن n_i (یعنی i امین رقم اعشاری عدد r) را مساوی واحد انتخاب‌کرده‌ایم، به شرطی که i امین رقم اعشاری عدد r_i مساوی واحد نباشد؛ در غیراین‌صورت $n_i = 2$.

عدد r مساوی r_1 نیست، زیرا رقم اول اعشاری‌آنها یکی نیست؛ r مساوی r_2 هم نیست، زیرا در رقم دوم اعشار با آن اختلاف دارد و غیره. بنابراین عدد r عضومجموعهٔ A نیست، درحالی‌که‌این عدد به‌کمك کلمه‌هایی‌که از دویست تجاوز نمی‌کند، معین شده است.

همچنین می‌توان در بارهٔ این پرسش فکر کرد:

کوچکترین عدد صحیحی که نتوان آنرا به کمك عبارتی تعریف کرد، که کمتر از صدکلمهٔ فارسی دارد، کدام است؟

این عدد وجود دارد، زیرا تعداد کلمه‌ها در زبان فارسی محدود است و بنابراین عددهایی وجود داردکه نتوان آنها را با عبارتی‌که‌کمتر از صدکلمه دارد، معین کرد. در این صورت یکی از این عددها هم، کوچکترین آنها خواهد بود.

از طرف دیگر چنین عددی وجود ندارد، زیرا در چند سطر قبل (با حروف شکستهٔ فارسی)، آنرا با جمله‌ای‌که‌کمتر از صدکلمه دارد، تعریف کردیم؛ بنابر مفهوم همین جمله، چنین عددی نمی‌تواند وجود داشته باشد. خود تعریف بالا، عدم وجود این عدد را ثابت می‌کند.

و این هم نمونهٔ بغرنجتری از یك مجموعهٔ متناهی، که در مورد آن نمی‌توان‌گفت‌که‌آیا شامل یك عضومفروض هست یانه. تمام صفتهای زبان فارسی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. در دستهٔ اول صفتهایی را

قرار می‌دهیم ، کـه خودش خاصیت خودش را داشته باشد ، و در دستهٔ دوم همهٔ بقیهٔ صفتها را . مثلا صفت «فارسی» به‌دستهٔ اول تعلق خواهد داشت ، زیـرا کلمهٔ «فارسی» در واژه‌نامه‌های فارسی وجود دارد ، یعنی «فارسی» بودن برای خودکلمهٔ «فارسی» هم صدق می کند . همچنین صفت «چارسیلابی» دراین دسته است ، زیراکلمهٔ «چار- سی- لا- بی» خودش از ۴ سیلاب درست شده است ، یعنی ۴ سیلاب داشتن ، برای خـود کلمهٔ «چار سیلابی» هم صدق می کند. ولی کلمهٔ «آلمانی» در واژه‌نامهٔ فارسی پیدا می‌شود، نه در زبان آلمانی، یعنی‌آلمانی بودن برای‌کلمهٔ «آلمانی» صدق نمی کند . همچنین صفت « یك سیلابی » به دستهٔ دوم تعلق دارد ، زیرا ،کلمهٔ «یك سیلابی» دارای یك سیلاب نیست (یك- سی- لا- بی = ۴ سیلاب). به‌همین‌ترتیب کلمهٔ«خاکستری»، زیرا این کلمه‌خودش‌خاکستری نیست وفقط معرف یك‌نوع رنگ است.

به‌نظر می‌رسدکه همه چیز درست است وهرصفتی در دستهٔ خودش قرار می‌گیرد . برای اینکه این دو دسته را از هم تمیز دهیم ، دو صفت جدید قبول می کنیم . صفتهایی راکـه در دستهٔ اول قرار دارند ، «خود پذیر» (به‌معنای اینکه خاصیت خود را می‌پذیرند) و صفتهایی را کـه در دستهٔ دوم قرار دارند ، «دیگر پذیر» می‌نامیم . کلمه‌هـای «خود پذیر» و «دیگر پذیر» صفت‌اند و باید هرکـدام از آنها را در یکی از دو دسته جا داد . در مورد کلمهٔ «خودپذیر» اشکالی پیش نمی‌آید ، جای ایـن صفت در دستهٔ اول است ، دراین‌صورت دارای همان خاصیتی است که‌بیان می‌کند ، مگرنه این است که در دستهٔ اول کلمه‌های خودپذیر را جا دادیم ؟ ولی در موردکلمهٔ «دیگرپذیر» دچاراشکال می‌شویم.

این کلمه را نمی‌توان در دستهٔ کلمه‌های خودپذیر قرار داد ، زیرا دراین‌صورت کلمهٔ «دیگر پذیر» باید خاصیتی را بیان کند، که خود دارا باشد، ولی خاصیتی که به‌وسیلهٔ این صفت بیان می‌شود، به‌معنای آن‌است

که باید در دستهٔ دوم قرار گیرد . ولی وقتی که در دستهٔ دوم قرار گرفت، به‌معنای آن است که نباید صاحب خاصیتی باشد، که به‌وسیلهٔ این کلمه بیان می‌شود ، یعنی باید خود پذیر باشد و در نتیجه باید در دستهٔ اول قرار گیرد ، زیرا جای کلمه‌های خودپذیر در دستهٔ دوم نیست.

در نظریهٔ مجموعه‌ها ، نمونه‌های بسیاری از اینگونه وجود دارد، که تعریف یك مجموعه ، تناقضی را در درون خود به وجود می‌آورد . این مطلب که با چه شرطهایی این وضع پیش می‌آید ، به‌بررسی عمیق‌تری در منطق ریاضی نیاز دارد و همین بررسیها چهرهٔ منطق ریاضی را بکلی دگرگون کرده است . بسیاری از این بررسیها، کاربردهایی در ساختمان نظریهٔ ماشینهای سریع‌العمل محاسبه ، نظریهٔ خودکارکردن وغیره پیدا کرد. ولی این بررسیها به‌منطق ریاضی مربوط است وما ازآن‌می‌گذریم.

از اینجا به بعد ، ما تنها به‌مجموعه‌هایی می‌پردازیم که تعریفی دقیق وبدون تناقض دارند وتشکیل آنها ، بدون هیچ شکی انجام گرفته است (مثل مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی ، مجموعهٔ همهٔ مربعهای واقع بر یك صفحه وغیره) .

مجموعهٔ تهی

خود نام « مجموعه » به این معناست که هر مجموعه باید شامل تعدادی (و لااقل دو) عضو باشد . ولی در واقع اینطور نیست . در ریاضیات ، مجموعه‌هایی هم که تنها یك عضو داشته باشند ، و یا حتی اصلا عضوی نداشته باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد . مجموعه‌های از نوع اخیر را (یعنی مجموعه‌هایی را که حتی یك عضو هم ندارند) ، مجموعهٔ تهی نام‌گذاشته‌اند وبا علامت ϕ نشان می‌دهند.

نمونه‌هایی ازمجموعهٔ تهی: مجموعهٔ اسبهای روی ماه، مجموعهٔ پستانداران ده پا ، مجموعهٔ پزشکان سه‌ساله ، مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی

معادلهٔ $x^{4} + 16 = 0$ ، مجموعهٔ جوابهای دستگاه

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$$

به‌چه‌مناسبت مفهوم مجموعهٔ تهی‌راقبول کرده‌اند؟ وقتی‌که یك مجموعه باخاصیت ویژه‌اش داده می‌شود ، همیشه از قبل معلوم نیست کـه لااقل یك عضو با این خاصیت وجود دارد یا نه ؟ مثلا فرض کنید مجموعهٔ A، از همهٔ چهار ضلعیهایی تشکیل شده باشد که

a) همهٔ زاویه‌های آنها قائمه باشد،

b) دوقطر هریك از آنها ، طولهای مختلف داشته باشد .

برای کسی که از هندسه اطلاعی ندارد ، هیچگونه تناقضی دراین تعریف وجود ندارد . ولی از قضیهٔ مربوط به تساوی قطرها در مستطیل نتیجه می‌شود که این مجموعه، تهی است. همچنین مجموعهٔ مثلثهایی که مجموع زاویه‌های هر یك از آنها با $180°$ درجـه فرق داشته بـاشد، یك مجموعهٔ تهی است؛ مجموعهٔ سه جمله‌های درجهٔ دومی کـه بیش از دو ریشه داشته باشند، تهی است. بطورکلی بسیاری از حکمهای ریاضی را می‌توان به‌صورت حکمی دربارهٔ یك مجموعهٔ تهی تنظیم‌کرد. (آزمایش کنیدکه چگونه می‌توان قضیهٔ فیثاغورث را به این ترتیب تنظیم کرد ؟)

بدون حل معادلهٔ $x^{4} - 7x^{2} - 6x + 26 = 0$ ، نمی‌توان قضاوت کرد که آیا مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی آن تهی است یا نه ؛ در حالی‌که اگر این معادله را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$(x^{2} - 4)^{2} + (x - 3)^{2} + 1 = 0$$

به روشنی معلوم می‌شودکه ریشهٔ حقیقی ندارد .

گاهی در مورد مجموعـه‌های غیر ریاضی ، به‌سختی می‌توان تهی بودن یا تهی نبودن آنها را مشخص کرد . اگـرکسی در جانور شناسی کم اطلاع باشد ، نمی‌تواند به این پرسش ، پاسخ دهد که آیا مجموعهٔ

شیرهای آبی در دریاچهٔ بایکال ، یامجموعهٔ ببرهـایی که بطور آزاد در استرالیا زندگی می‌کنند ، تهی است ؟

در بارهٔ بعضی از مجموعه‌ها ، تا امروز نتوانسته‌اند پاسخ درستی بدهند . مثلاً هنوز معلوم نیست کـه آیا مجموعهٔ همهٔ عـددهای طبیعی n که در نامساوی $n > ۲$ و معادلهٔ

$$x^n + y^n = z^n$$

صدق می‌کنند، یـك مجموعهٔ تهی است ؟ (این همان مسألهٔ مشهور فرما است) . همچنین تا امروز معلوم نشده است که آیا مجموعهٔ رقمهایی‌که در تبدیل عدد π به‌صورت اعشاری، به‌تعداد محدودی تکرار می‌شونـد ، تهی است ؟ (عدد π تا چند هزار رقم اعشاری محاسبه شده است ، ولی هنوز روشن نشده است‌که آیا همهٔ رقمهایی‌که درتبدیل اعشاری‌آن بکار می‌رود، بی‌نهایت مرتبه تکرار می‌شوند، یا تعداد تکرار بعضی از رقمها، محدود است .)

هنوز روشن نشده است که آیا مجموعهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ $x^۳ + y^۳ + z^۳ = ۳۰$ مجموعه‌ای تهی‌است؟ (روشن شده است‌که مجموعهٔ جوابهای طبیعی این معادله تهی است ، ولی دربارهٔ جوابهای صحیح ، مثبت یا منفی ، مسأله حل نشده است .)

این هم معلوم نشده است که آیا مجموعهٔ همهٔ پله‌زیودوروسها[۱] در کرهٔ زمین، یك مجموعهٔ تهی است؟ اگر موجودات دریاچهٔ لوخ‌نس واقعاً پله زیودوروس باشند ، این مجموعه ، تهی نیست .

نظریهٔ مجموعه‌ها و ریاضیات دبیرستانی

مجموعه یك مفهوم کلی است و می‌تواند از هرچیزی درست شده باشد : ماهیها ، خانـه‌ها ، مربعها ، عددهـا ، نقطه‌هـا و غیـره . همین

۱) حیواناتی از دوران دوم به شکل دوك واز دینوسورها .

خصلت ، سرچشمهٔ کاربرد بیش از حد نظریهٔ مجموعه‌ها در متنوع ترین رشته‌هـای دانش بشری است (ریاضیات ، مکانیك ، فیزیك ، زیست ـ شناسی، زبان‌شناسی و غیره) . در ریاضیات ، بخصوص مجموعه‌هایی نقش اساسی دارند ، کـه از « عنصرهای ریاضی » تشکیل شده بـاشند : شکلهای هندسی ، عددها ، عبارتهای جبری ، تابعها وغیره . ریاضیات دبیرستانی با بسیاری از اینگونه مجموعه‌ها سر وکار دارد ، اگر چه در بعضی موارد از ذکر نام «مجموعه» خودداری می‌شود . این وضع بدان مناسبت وجود دارد که اساسی‌ترین قسمتهای ریاضیات دبیرستانی تا پایان سدهٔ هفدهم پیدا شده بود ، در حالی‌که نظریهٔ مجموعه‌ها در سدهٔ نوزدهم متولد شد .

با وجود این ریاضیات دبیرستانی ، در هـر قـدم ، با مجموعـه‌ها سروکار دارد. بخصوص، اغلب به‌مجموعه‌های عددی برخورد می‌کنیم ، یعنی مجموعه‌هایی‌که از عددها تشکیل شده‌اند . نمونه‌هایی از این‌گونه مجموعه‌ها را ذکر می‌کنیم :

a) مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی ،

b) مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح (مثبت ، منفی و صفر) ،

c) مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا ،

d) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی ،

e) مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط ،

f) مجموعـهٔ مساحتهای چند ضلعیهـای منتظم محاط در دایرهٔ مفروض وغیره .

هر معادله ، با دونوع مجموعهٔ عددی سروکار دارد . نخستین آنها عبارت است از مجموعهٔ عددهایی‌که به ازای آنها، عبارت تشکیل دهندهٔ معادله، معنا داشته باشد . این مجموعهٔ عددی را حوزهٔ قابل قبول مقادیر مجهول‌گویند. مثلاً برای معادلهٔ

$$\frac{x}{x^{2}-4}+\frac{x-1}{x^{2}-9}=-\frac{1}{3}$$

حوزهٔ مقادیـر قابل قبول ، عبارت است از همهٔ عددهای x ، کـه برای آنها داشته باشیم: $x^{2}-4\neq 0$ و $x^{2}-9\neq 0$ ، یعنی همهٔ عددها ، بجز عددهای مجموعهٔ $\{-3, 3, -2, 2\}$. برای معادلهٔ

$$\sqrt{-x^{2}+x+12}+x=2+\sqrt{10}$$

حوزهٔ مقادیر قابل قبول، از عددهایی تشکیل‌شده‌است که برای آنها داشته باشیم $-x^{2}+x+12\geqslant 0$ ، یعنی $-3\leqslant x\leqslant 4$.

دومین مجموعه‌ای که به معادله‌ها و نامعادله‌ها مربوط می‌شود ، مجموعهٔ جوابهاست . مثلاً برای معادلهٔ $x^{2}-7x+12=0$ ، مجموعهٔ ریشه‌هـا ، از دو عدد تشکیل شده است : $\{3, 4\}$ ، و بـرای معادلـهٔ $\sin\pi x=0$ ، از بی‌نهایت عدد ، یعنی همهٔ عددهای صحیح . وقتی که معادله‌ای داده شده باشد ، مجموعهٔ M ریشه‌های آن ، بـه این ترتیب تعریف می‌شود : عددهایی از x که عضو مجموعهٔ M هستند ، در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند . وقتی کـه معادله‌ای حل شد ، مجموعـهٔ M را می‌نویسند (اگر محدود باشد) و یا آنرا با خاصیت ویژه‌ای که دارد ، مشخص می‌کنند (اگر نامحدود باشد) ، مثلاً اینکه همهٔ عضوهای آن صحیح‌اند .

مجموعهٔ جوابهای یك معادله ، معمولاً از چند عدد و یا (برای بیشتر معادله‌های مثلثاتی) ، از چند رشته عدد تشکیل می‌شود ، درحالی که مجموعهٔ جوابهای یك نامعادله ، قسمتی از مجموعهٔ عددهای حقیقی را پرمی‌کند . مثلاً نامعادلهٔ $4-x^{2}\geqslant 0$ در فاصلهٔ بستهٔ $-2\leqslant x\leqslant 2$ صدق می‌کند ، و نامعادلهٔ

$$(4-x^{2})(x-3)(x-5)\geqslant 0$$

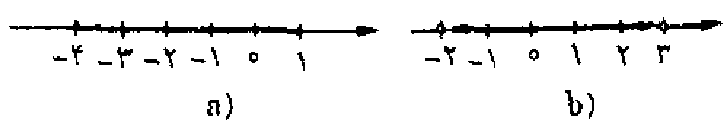
در فاصله‌های $-2\leqslant x\leqslant 2$ و $3\leqslant x\leqslant 5$. اگـر در نـامعادلـه ، علامت

تساوی وجود نداشته باشد ، از فاصلهٔ مربوط بـه جواب ، مرزها حذف می‌شود و به اصطلاح فاصله‌های باز عددی بدست می‌آید. مثلا مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ

$$(۴ - x^۲)(x - ۳)(x - ۵) > ۰$$

از فاصله‌های باز $-۲ < x < ۲$ و $۳ < x < ۵$ تشکیل می‌شود . مرزهـای ۲ـــ، ۲، ۳و۵ در نامعادله ، صدق نمی‌کند. ممکن است برای جواب یك نامعادله ، مجموعهٔ بغرنجتری بدست آید . مثلاً جـواب نـامعادلهٔ $\frac{x-۱}{۴-x} \geqslant ۰$ ، مجموعه‌ای از عددهای x است که در $۱ \leqslant x < ۴$ صدق کند. در اینجا یکی از مرزها (یعنی۱) به مجموعهٔ جواب تعلق دارد و مرز دیگر (یعنی ۴) ، عضوی از این مجموعه نیست .

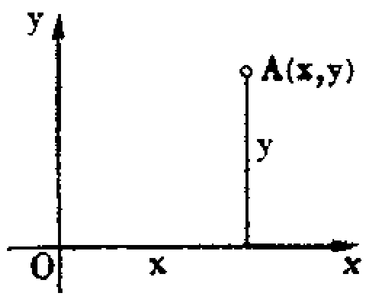
چون هر عدد حقیقی را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌ای از محور عددها نمایش داد ، یك مجموعهٔ عددی را می‌توان مثل مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر یك خط نمایش داد . مثلا روی شکل ۳ ـ a ، مجموعهٔ عددهای x کـه در شرط $-۴ \leqslant x \leqslant ۱$ صدق مـی‌کنند ، و در شکل ۳ـb ، مجموعهٔ عددهـای x که در شرط $-۲ < x < ۳$ صدق می‌کنند ، نشان داده شده است .



شکل ۳

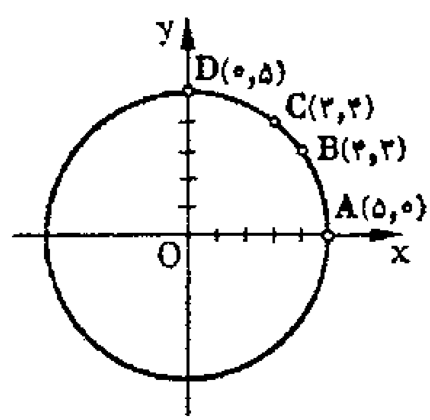
بخصوص ، وقتی‌که عضوهای یك مجموعه ، هرکدام از دو یا سه عدد درست شده باشد ، راحت‌تر است کـه بـا نمایش هندسی نشان داده شود. مثلاً معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ ، مجموعهٔ M را می‌دهد که هرعضو آن دو عدد $(x، y)$ است که به‌ازای آنها ، معادلهٔ مفروض تبدیل به اتحاد بشود. زوج عددهای $(۰، -۵)$ و $(-۴، ۳)$ به مجموعهٔ M تعلق دارند ، زیرا $۰^۲ + (-۵)^۲ = ۲۵$ و $۳^۲ + (-۴)^۲ = ۲۵$ ؛ ولی زوج‌عدد $(۱، ۶)$به

این مجموعه تعلق ندارد، زیرا $۲۵ \neq ۳۷ = ۶^۲ + ۱^۲$. ولی بیان مجموعهٔ M به این ترتیب، کاملا روشن کننده نیست . برای اینکه بیان مجموعه، روشن‌تر باشد ، از روش مختصات استفاده می‌کنیم . دستگاه مختصات دکارتی را درصفحه ، انتخاب می‌کنیم (و این همان دستگاهی است که در برنامهٔ دبیرستانی وجود دارد). در این‌صورت هرزوج عدد $(x، y)$ متناظر با نقطه‌ای از صفحه ، و هر نقطهٔ صفحه متناظر با دوعدد x و y ، مختصات نقطه، است (شکل ۴) .

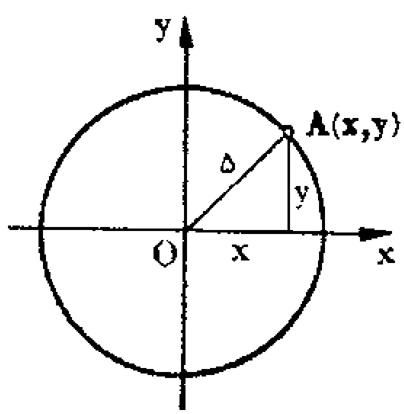


شکل ۴

اگر روی صفحه ، همهٔ زوج عددهای $(x ، y)$ را ، که برای آنها داریم: $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ ، به‌وسیلهٔ نقطه‌های متناظرآنها نشان‌دهیم، دایرهٔ به‌شعاع ۵ و مرکز واقع در مبداء مختصات ، بدست می‌آید (شکل ۵) . اگر قضیهٔ فیثاغورث را به خاطر آوریم ، به سادگی روشن می‌شود که



شکل ۵



شکل ۶

مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های $(x ، y)$، که برای‌آنها $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ ، برمجموعهٔ نقطه‌های محیط این دایره منطبق‌است (شکل ۶) .

نامساویهایی که شامل دومجهول باشند ، معمولاً یك قسمت کامل از صفحه را می‌دهند ، نه یك منحنی واقع بر صفحه را . مثلاً نامعادلهٔ $x^۲ + y^۲ \leqslant ۲۵$ ، عبارت است از مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه، که فاصلهٔ

آنها تامبداء مختصات از ۵ تجاوز نکند، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های واقع در داخل و روی محیط دایره‌ای به شعاع مساوی ۵ ومرکز واقع برمبداء مختصات . نامعادلهٔ $x^2 + y^2 < 25$ ، معرف مجموعهٔ نقطه‌های واقع در داخل همان دایره است ودیگر شامل نقطه‌های واقع برمحیط‌آن نمی‌شود.

در هندسه هم، با دو نوع مجموعه ، مواجه می‌شویم . نوع اول به قضیه‌های هندسه مربوط می‌شود ، که معمولاً دربارهٔ مجموعه‌ای از شکلهای هندسی سخن می‌رود. مثلاً ، این‌قضیه که قطرهای یك متوازی‌ـ الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند ، به مجموعهٔ همهٔ متوازی‌الاضلاعها مربوط می‌شود . نوع دوم به خود شکلهای هندسی مربوط است ، که هرکدام از آنها مجموعه‌ای از نقطه‌های تشکیل دهندهٔ آن است . به‌این ترتیب می‌توانیم از مجموعهٔ نقطه‌های یك دایره ، مجموعهٔ نقطه‌های یك مخروط وغیره گفتگو کنیم.

در جبر ، به مجموعه‌هایی از نوع مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای دومتغیره، مجموعهٔ همهٔ معادله‌های درجهٔ دوم، مجموعهٔ همهٔ معادله‌های جبری وغیره برخورد می‌کنیم . بطور ساده ، در هر قسمت ریاضیات دبیرستانی، به‌نحوی با نظریهٔ مجموعه‌ها سروکار داریم .

زیر مجموعه

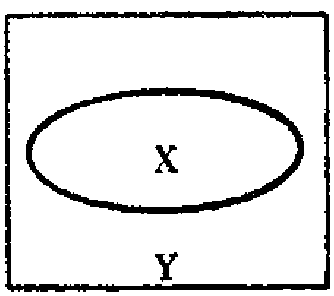
از آنجا که عضوهای یك مجموعه را می‌توان هر چیزی و با هر ماهیتی انتخاب کرد ، ورود مفهوم مجموعه ، ریاضیات را متنوع تر و ثمربخش‌ترکرد ؛ حکمی که درمورد یك مجموعه به‌اثبات برسد، می‌تواند دربارهٔ نقطه‌های یك شکل هندسی، یا مجموعهٔ عددهای طبیعی، یامجموعهٔ حیوانات یاگیاهان ، یا مجموعهٔ اتمها یامولکولها وغیره ، صادق باشد. به همین مناسبت مفهومها وقضیه‌های مربوط به مجموعه‌ها بسیارکلی و دامنهٔ کاربرد آنها پهناور است وما در اینجا دربارهٔ بعضی از آنهاگفتگو

می‌کنیم .

قبل‌ازهمه بامفهوم زیرمجموعه آشنا می‌شویم. هروقت بامجموعه‌ای سر وکار داشته باشیم ، که خود مستقل نباشد و به عنوان قسمتی از مجموعهٔ بزرگتر درنظر گرفته شده باشد ، مفهوم زیر مجموعه به‌وجود می‌آید .

مجموعهٔ B را زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ A گویند، وقتی که هر عضو x از مجموعهٔ B ، ضمناً عضوی از مجموعهٔ A باشد و در چنین حالتی می‌نویسند : $B \subset A$.

مثلاً ، اگر یك دبیرستان را در نظربگیریم ، مجموعهٔ دانش آموزان کلاس دهم ، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ دانش آموزان این دبیرستان است. مجموعهٔ دانش‌آموزان این دبیرستان هم ، به‌نوبهٔ خود ، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانهاست.



شکل ۷

مجموعهٔ همهٔ روباهها ، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ حیوانهای درنده است ؛ مجموعهٔ همهٔ حیوانهای درنده، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ پستانداران است ؛ مجموعهٔ همهٔ پستانداران ، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ حیوانهای ذی فقار است.

اگر شکل هندسی X ، قسمتی از شکل هندسی Y باشد ، مجموعهٔ نقطه‌های شکل X ، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ نقطه‌های شکل Y خواهد بود (شکل ۷) .

در هندسه هم اغلب به زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ شکلها برخورد می‌کنیم. به‌عنوان نمونه، مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

a) مجموعهٔ A تشکیل شده‌است از همهٔ چهارضلعیها ،

b) مجموعهٔ B شامل همهٔ ذوزنقه‌هاست ،

c) مجموعهٔ C از همهٔ متوازی‌الاضلاعها تشکیل شده است ،
d) مجموعهٔ D از همهٔ مستطیلها تشکیل شده است ،
e) مجموعهٔ E از همهٔ مربعها تشکیل شده‌است.

دراینجا شکل‌هر ردیف بعدی، حالت خاصی‌ازشکل ردیف‌قبل‌است (ذوزنقه حالت خاصی ازچهارضلعی‌است، متوازی‌الاضلاع حالت خاصی از ذوزنقه است وغیره). و این به‌معنای آن است‌که: هرمجموعهٔ بعدی، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ قبلی است:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E$$

همچنین در مورد نمونهٔ زیر ، هرمجموعهٔ بعدی ، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ قبلی است:

a) مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط ،
b) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی ،
c) مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا ،
d) مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح ،
e) مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی .

در بسیاری موارد ، برای اینکه زیرمجموعه‌ای را از یك مجموعه جداکنند، به‌خصوصیت مجموعهٔ مفروض، شرط تکمیلی اضافه می‌کنند. مثلاً برای اینکه زیر مجموعهٔ عددهای طبیعی را از مجموعهٔ عددهای صحیح جداکنیم، شرط $n > ۰$ را اضافه می‌کنیم وبرای‌اینکه زیرمجموعهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع را از مجموعهٔ مثلثها جدا کنیم ، شرط $a = b = c$ را به آن اضافه می‌کنیم .

* قبلاً گفتیم‌که بسیاری از قضیه‌ها را می‌توان به‌عنوان انطباق دو مجموعه ، منظم کرد . در کنار آنها ، به‌قضیه‌هایی هم برخورد می‌کنیم‌که درآنها گفتگو از این است که یك مجموعه ، زیرمجموعه‌ای از یك مجموعهٔ دیگر است . مثلا در قضیه « اگر در یك چهارضلعی ضلعها

مساوی باشد (لوزی) ، قطرها برهم عمودند » ، با دو مجموعـه سروکار داریم : مجموعهٔ A ، یعنی مجموعهٔ همهٔ لوزیهـا ؛ مجموعـهٔ B ، یعنی مجموعهٔ همهٔ چهار ضلعیهایی که قطرهای عمود برهم دارند . و محتوی قضیه این است که $A\subset B$.

اگرمجموعهٔ A، زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ B باشد: $A\subset B$، تعلق به‌مجموعهٔ A ، شرط‌کافی برای تعلق به‌مجموعهٔ B است؛ درحالی که تعلق به‌مجموعهٔ B ، شرط لازم برای تعلق به‌مجموعهٔ A نیست. مثلا فرض کنید، B مجموعهٔ همهٔ عددهای زوج مثبت باشد ، و A مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی که به رقم ۴ ختم شده‌اند. روشن است که $A\subset B$. بنابرآین برای اینکه عدد صحیح n ، زوج باشد، کافی است که به‌رقم ۴ ختم شده باشد. از طرف دیگر ، برای اینکه عددی به ۴ ختم شده باشد ، لازم است کـه حتماً زوج باشد .

در حالتی که مجموعه‌های AوB برهم منطبق باشند ، تعلق‌به‌A ، شرط لازم و کافی برای تعلق به B است. به عبارت دیگر قضیهٔ مربوط به شرط لازم وکافی، منجر به‌قضیهٔ انطباق دو مجموعه می‌شود .

مثلاً ، شرط لازم و کافی برای اینکه عدد n بر ۱۰ قابل قسمت باشد، این‌است که این عدد به ۰ ختم شده باشد. به‌عبارت دیگر مجموعهٔ A ، عددهای مضرب ۱۰، برمجموعهٔ B، عددهای صحیحی که به ۰ ختم شده‌اند، منطبق است.

به‌همین‌ترتیب، مجموعهٔ‌همهٔ‌لوزیها‌بر‌مجموعهٔ‌متوازی‌الاضلاعهایی که قطرهای عمود برهم دارند، منطبق است . به‌این ترتیب ، برای اینکه متوازی‌الاضلاعی ، لوزی باشد ، لازم وکافی است که قطرهای آن برهم عمود باشد . *

نظریهٔ مجموعه‌ها و آنالیز ترکیبی*

ببینیم یك مجموعهٔ محدود، چند زیر مجموعــه دارد (مجموعهٔ تهی و خود مجموعهٔ اصلی را هم ، زیر مجموعه‌هـایی از آن به حساب می‌آوریم) . مجموعه‌ای که یك عضو داشته باشد، دو زیرمجموعه دارد: ϕ و$\{a\}$. مجموعه‌ای که شامل دوعضو aو b باشد، چهارزیرمجموعه‌دارد: ϕ ،$\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{a , b\}$. اگر به این مجموعه ، عضو سوم c را اضافه کنیم ، علاوه برچهار زیرمجموعهٔ قبل : ϕ ،$\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{a , b\}$، چهار زیرمجموعهٔ دیگر: $\{c\}$ ،$\{a , c\}$، $\{b,c\}$ و$\{a,b,c\}$ هم پیدا می کنند که با اضافه کردن عضو c به هریك از زیر مجموعه‌های قبل ، بدست می‌آید . روشن است که هربار ، با اضافه کردن عضو جدیدی به مجموعه ، تعداد زیر مجموعه‌ها ، دوبرابر می‌شود . به این ترتیب، مجموعه‌ای که n عضو داشته باشد ، ۲^n زیرمجموعه خواهد داشت .

زیر مجموعه‌هـای یك مجموعهٔ محدود را می‌توان برحسب تعداد عضوهایی کـه در زیر مجموعه وجود دارد ، منظم کرد . اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد ، زیر مجموعه‌هایی از آن کـه هرکدام شامل k عضو باشد ، ترکیبهای n حرف k به k نامیده می‌شود و تعداد آنها به C_n^k نشان داده می‌شود . از آنجا کـه تعداد کل زیر مجموعه‌ها ، مساوی ۲^n است ، تساوی زیر بدست می‌آید:

$$C_n^۰ + C_n^۱ + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = ۲^n$$

برای عدد C_n^k ، رابطه‌هـای جالب زیادی وجود دارد کـه بسیاری از آنها را می‌توان با بررسی زیرمجموعه‌هایی که خواص معینی دارنـد، بدست آورد. مثلاً رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$C_n^k = C_{n-۱}^{k-۱} + C_{n-۱}^k \qquad (۱)$$

با فرض $۱ \leqslant k \leqslant n$. برای ایـن منظـور ، بین همهٔ تـرکیبهای k حرفی که از n عضو $a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . ، a_n بدست می‌آید ، آنهایی را انتخاب

می‌کنیم که شامل عضو a_n باشند. بقیهٔ $k-1$ حرف در این ترکیبها، می‌توانند از $n-1$ عضو a_1 ، a_2 ، . . . ، a_{n-1} انتخاب شده باشند. بنابراین تعداد ترکیبهایی که به این ترتیب بدست می‌آید، مساوی C_{n-1}^{k-1} خواهدشد. حالا ببینیم چندترکیب k حرفی‌از n عضو a_1 ، a_2 ،...، a_n ، باقی مانده است (که هیچکدام شامل عضو a_n نیستند.) این ترکیبها از عضوهای a_1 ، . . . ، a_{n-1} ، تشکیل شده‌اند . چون در هرترکیب ، k عضو وجود دارد. تعداد این ترکیبها مساوی C_{n-1}^{k} می‌شود. از آنجا که در هرترکیب از نوع C_n^k ، یا عضو a_n وجود دارد و یا وجود ندارد، تساوی (۱) صحیح است.

متذکر می‌شویم که برای $n \geqslant 0$ داریم: $C_n^0 = 1$، زیرا هرمجموعه، تنها یك زیر مجموعهٔ تهی دارد . همچنین روشن است که $C_n^n = 1$.

باتوجه به‌این‌نکته، می‌توان‌عدد C_n^k را به‌ترتیب حساب کرد؛ ابتدا برای $n = 0$ ، بعد برای $n = 1$ ، سپس $n = 2$ وغیره . جدول عددهای C_n^k را معمولا به‌این صورت می‌نویسند:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

که به مثلث پاسکال مشهور شده‌است.

چون $C_n^0 = C_n^n = 1$، بنابراین درضلعهای مثلث پاسکال، فقط عدد ۱ ، وجود دارد. بقیهٔ عددهای این جدول را هم، با توجه به‌تساوی (۱) ، می‌توان پیداکرد: هرعدد برابر است با مجموع دو عددی که در بالای سمت راست وسمت چپ آن قرارگرفته است . در نتیجه به این جدول

می‌رسیم:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& ۱ &&&&& \\ &&&& ۱ && ۱ &&&& \\ &&& ۱ && ۲ && ۱ &&& \\ && ۱ && ۳ && ۳ && ۱ && \\ & ۱ && ۴ && ۶ && ۴ && ۱ & \\ ۱ && ۵ && ۱۰ && ۱۰ && ۵ && ۱ \\ \end{array}$$

. . . .

رابطه‌ای وجود دارد، که به کمك آن می‌توان، عدد C_n^k را مستقیماً بدست آورد. این رابطه چنین است:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

که در آن $k! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times k$ و $۰! = ۱$. از خوانده می‌خواهیم تحقیق کند که این رابطه ، در تساوی (۱) و تساویهای $C_n^0 = C_n^n = ۱$ صدق می‌کند .

مجموعهٔ مرجع

به‌ندرت پیش می‌آید که در یك بحث ، هم گفتگو از مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط باشد وهم ازمجموعهٔ همهٔ بالنهای اقیانوس (از روشهای نظریهٔ تابعهای متغیر مختلط، برای مطالعهٔ حرکت بالنها درآب، استفاده می‌شود). معمولاً همهٔ مجموعه‌هایی که دربحثهای مختلف، با آنها سر و کار داریم ، زیرمجموعه‌ای از یك مجموعهٔ ثابت I هستند . در چنین وضعی ، مجموعهٔ I را مجموعهٔ مرجع می‌نامند .

مثلاً همهٔ مجموعه‌های عددی، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای حقیقی هستند ؛ مجموعهٔ نقطه‌های یك شکل هندسی ، زیر مجموعه‌ای از

مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های فضای هندسی و مجموعهٔ ضلعهای یك چند ضلعی مسطح ، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ پاره‌خطهای واقع بر آن صفحه هستند وغیره .

مقطع (یا حاصلضرب منطقی) مجموعه‌ها

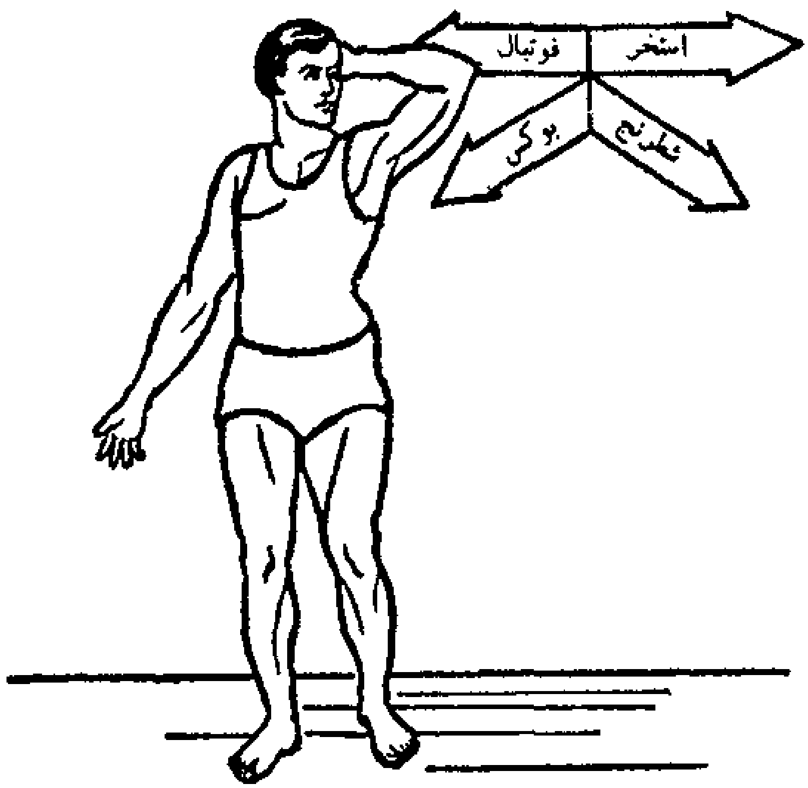
در سپتامبر سال ۱۸۸۷ ، شرلوك هولمس ، کارآگاه مشهور، می‌خواست نام یك کشتی بادی را معلوم کند[۱]. او دربارهٔ این کشتی مطلب زیادی نمی‌دانست : این کشتی ، در ژانویه یا فوریهٔ سال ۱۸۸۳ ، در پوندیشری (*Pondichery* ـ در جنوب شرقی هندوستان) ، در ژانویهٔ سال ۱۸۸۵ دربندر دندی (*Dindy* ـ در شمال شرقی بریتانیای کبیر در شوتلاند) ، و اکنون در بندرلندن است. شرلوك هولمس با استفاده ازهمین اطلاعها توانست نام کشتی را پیدا کند . برای این منظورکافی است سه مجموعه را با هم مقایسه کنیم : مجموعهٔ کشتیهای بادی که درآن زمان در پوندیشری بوده‌اند، مجموعهٔ کشتیهای بادی که در ژانویهٔ سال ۱۸۸۵ دردندی لنگر انداخته بودند ، وبالاخره مجموعهٔ همهٔ کشتیهای بادی که هم اکنون درلندن هستند . معلوم شدکه تنها یکی از کشتیها عضو هرسه مجموعه‌اند : کشتی امریکایی «ستارهٔ تنها». وقتی که شرلوك هولمس فهمیدکه جنایتکار امریکایی است ، توانست جنایت را کشف کند .

جستجوی عضوهای مشترك مجموعه‌ها ، تنها بکار کارآگاهها نمی‌خورد . دانشمند میکروب‌شناس که در پی انگیزهٔ نوعی بیماری است، نزد یکی ازبیمارها (که مبتلابه‌این‌بیماری است)، انواع میکروبها را مشاهده می‌کند ، نزد بیمار دوم ، انواع دیگری از میکروبها و نزد بیمار سوم ، انواع سوم میکروبها را می‌بینند . مجموعهٔ میکروبهایی که در بیمارهای جداگانه مشاهده می‌شود ، مختلف است ، ولی معمولاً دو

۱) برای اطلاع از تفصیل حادثه به داستان کونان دویل به‌نام «پنج دانهٔ سیب» مراجعه کنید .

یا سه میکروب در بیمارهایی که به این بیماری خاص مبتلا شده‌اند ، مشترك است . و به عنوان عامل بیماری ، به همین دو یا سه میکروب مشکوك می‌شوند . بررسیهای بعد روشن می‌کند که علت واقعی بیماری کدام است .

مجموعه‌ای که از عضوهای مشترك چند مجموعهٔ A ، B ، C ،... تشکیل شده باشد ، مقطع این مجموعه‌ها و یا حاصلضرب منطقی آنها نامیده می‌شود[1] . مقطع دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت AB یا $A\bigcap B$ نشان می‌دهند . به این ترتیب مقطع چند مجموعهٔ A ، B ، C ، . . . ، عبارت‌است ازمجموعهٔ جدیدی که تنها شامل همهٔ عضوهایی باشد که درهمهٔ مجموعه‌های A ، B ، C ، . . . وجود دارند .



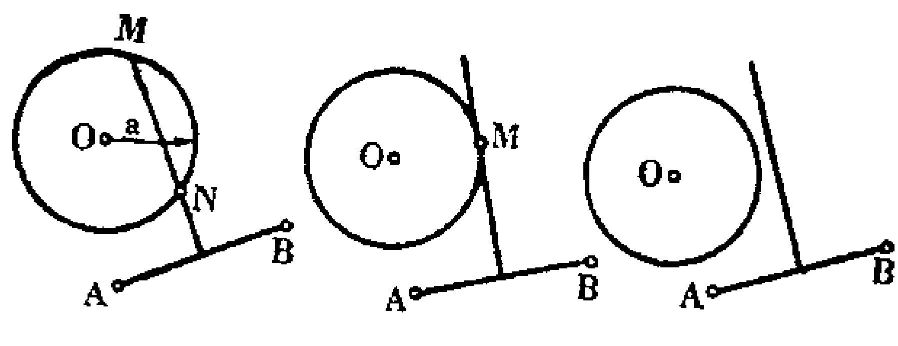
به‌کدام قسمت می‌رود ؟

مثلاً فرض‌کنید ، دانش‌آموزان یك دبیرستان در چهار رشتهٔ ورزشی‌کار می‌کنند : فوتبال ، شنا ، شطرنج و بوکس . بنابراین چهار

۱) مقطع دو مجموعه را ، اشتراك آنها هم گویند.

مجموعه از دانش‌آموزان وجود دارد: مجموعهٔ دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند ، مجموعهٔ دانش‌آموزانی که در ورزش شنا شرکت دارند و غیره. مقطع این مجموعه‌ها از دانش‌آموزانی تشکیل می‌شود که درعین‌حال در هرچهار ورزش کار می‌کنند .

* روشن است که درخود ریاضیات هم می‌توانیم کاربردهای زیادی برای مفهوم مقطع مجموعه‌ها ، پیدا کنیم . یکی از اساسی‌ترین روشها ، برای حل مسأله‌های مربوط به‌ساختمانهای هندسی ، «روش مکانهای هندسی» است . اگر بخواهیم نقطه‌ای بدست آوریم که در دو شرط صدق کند ، ابتدا یکی از شرطها را نگه می‌داریم و شرط دوم را کنار می‌گذاریم . مجموعهٔ نقطه‌هایی که در شرط اول صدق می‌کند ، یك خط را به وجود می‌آورد (مکان هندسی نقطه‌ها) . به‌همین ترتیب ، مجموعهٔ نقطه‌هایی که در شرط دوم صدق می‌کند ، خط دیگری را به وجود می‌آورد . در این‌صورت ، نقطهٔ موردنظر عبارت است از برخورد این دوخط (مکانهای هندسی) . البته ممکن است که این دو خط ، به جای یك نقطه ، در چند نقطه مشترك باشند . در چنین حالتی ، مسأله دارای چند جواب است . و اگر این خطها یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد. مثلاً فرض کنید بخواهیم نقطهٔ C را چنان پیدا کنیم که ازنقطهٔ O به فاصلهٔ مساوی a ، واز دونقطهٔ A و B به‌یك فاصله باشد. اولاً این نقطه برمحیط دایرهٔ به مرکز O وشعاع مساوی a قرار دارد ؛ ثانیاً ، این نقطه برعمودمنصف



شکل ۸

پاره خط AB واقع است . بنابراین ، برای اینکه نقطهٔ C را ، با توجه به شرطهای مسأله پیدا کنیم، کافی است نقطه‌های برخورد خط عمود منصف را با دایره بدست آوریم، که البته ممکن است دونقطه یا یك نقطه بدست آید و یا اصلا نقطهٔ برخوردی وجود نداشته باشد (شکل ۸ را ببینید) .

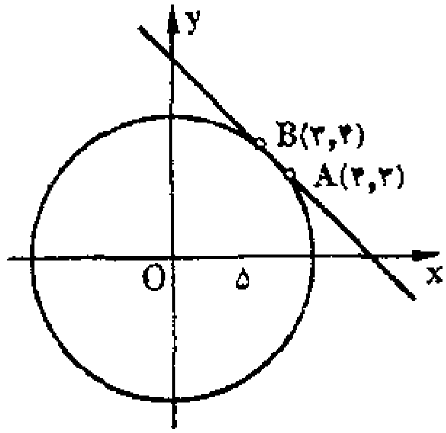
گاهی به مقطع مجموعه‌های شکلهای هندسی یا عددها برخورد می‌کنیم. مثلا مجموعهٔ همهٔ مربعها عبارت است از مقطع مجموعهٔ همهٔ مستطیلها با مجموعهٔ همهٔ لوزیها . مجموعهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع عبارت است از مقطع مجموعهٔ همهٔ مثلثها با مجموعهٔ چند ضلعیهای منتظم . مقطع مجموعهٔ عددهای طبیعی قابل قسمت بر ۲ با مجموعهٔ عددهای طبیعی قابل قسمت بر۳، عبارت‌است ازمجموعهٔ عددهای طبیعی قابل قسمت بر۶ .

حل دستگاه معادله‌ها ونامعادله‌ها هم، درواقع، منجربه جستجوی مقطع چندمجموعه می‌شود (ازعکس این مفهوم هم‌می‌توان صحبت‌کرد: مقطع چند مجموعه رامی‌توان به‌کمك حل دستگاه معادله‌ها یانامعادله‌ها، پیداکرد). مثلا فرض‌کنید بخواهیم دستگاه معادله‌های زیر راحل‌کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۲۵ \\ x+y=۷ \end{cases} \qquad (۱)$$

ازنظر جبری، باید همهٔ زوج عددهای (x,y) را پیدا کنیم که با قرار دادن آنها در هریك از معادله‌های دستگاه ، به اتحاد برسیم . ولی معادله‌های دستگاه را می‌توان بطور جداگانه در نظرگرفت . M را مجموعهٔ همهٔ زوج عددهای (x,y) می‌گیریم که در معادلهٔ اول دستگاه صدق‌کنند ، و مجموعهٔ همهٔ زوج عددهای (x,y) را که در معادلهٔ دوم دستگاه صدق می‌کنند ، N می‌نامیم . در این صورت جوابهای دستگاه عبارت‌است از زوج عددهایی‌که هم متعلق به‌مجموعهٔ M وهم متعلق به مجموعهٔ N باشند . به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ جوابهای دستگاه (۱)

عبارت است از مقطع مجموعه‌های M و N .



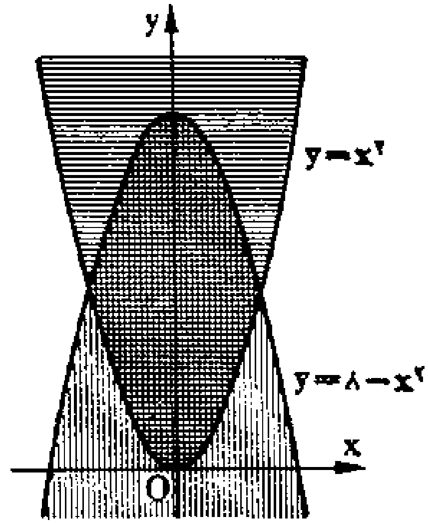
شکل ۹

این ملاحظه، در واقع همان روش هندسی حل دستگاه است ، یعنی خط نمایش تغییرات هریك از معادله‌های دستگاه را رسم کنیم و محل برخوردآنها رابدست آوریم. مثلا ، می‌دانیم که اگر مختصات نقطه‌ای مانند $A(x،y)$، در معادلهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ صدق کند، بر محیط دایره‌ای به شعاع مساوی ۵ و مرکز مبداء مختصات، قراردارد. معادلهٔ $x+y=۷$ هم‌معرف خط راستی است که روی هردومحور مختصات پاره‌خطی به طول ۷ جدا می‌کند ، اگر این دایره و خط را رسم کنیم ، معلوم می‌شود که آنها در دو نقطهٔ $A\,(۴،۳)$ و $B(۳،۴)$ یکدیگر را قطع می‌کنند . به این ترتیب ، دستگاه ما دو جواب دارد : $x_۱=۳$ ، $y_۱=۴$ و $x_۲=۴$ ، $y_۲=۳$ (شکل ۹) .

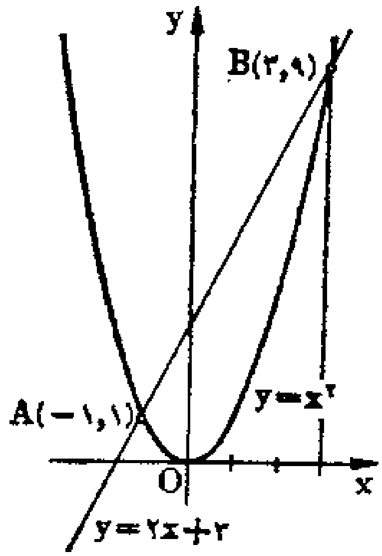
(فاصله داخل سطر) حالا، این دستگاه نامعادله‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y \geqslant x^۲ \\ y \leqslant ۸-x^۲ \end{cases} \qquad (۲)$$

مجموعهٔ M ؛ جوابهای نامعادلهٔ $y \geqslant x^۲$ از نقطه‌های $A(x،y)$ تشکیل شده است که برسهمی $y=x^۲$ و بالای آن قرار دارند . مجموعهٔ N، جوابهای نامعادلهٔ $y \leqslant ۸-x^۲$ شامل نقطه‌هایی ازصفحه است که روی سهمی $y=۸-x^۲$ وپایین آن قرار دارند (شکل ۱۰). روی شکل ۱۰ ، مجموعهٔ M را با خطهای افقی و مجموعهٔ N را با خطهای قائم نشان داده‌ایم. جواب دستگاه (۲) عبارت‌است ازمجموعهٔ P، مقطع‌مجموعه‌های M و N . روی شکل ۱۰ ، مجموعهٔ P ، با هاشورقائم و افقی نشان داده شده است . ضمناً ، نقطه‌های واقع برمرزهای مجموعهٔ P هم ، متعلق به



شکل ۱۰



شکل ۱۱

این مجموعه است .

به همین ترتیب ، معلوم می‌شود که جواب دستگاه

$$\begin{cases} y > x^۲ \\ y = ۲x + ۳ \end{cases} \qquad (۳)$$

عبارت است ازقطعه‌ای ازخط $y = ۲x + ۳$، که در بالای سهمی $y = x^۲$ قرار داشته باشد. خط، سهمی‌را درنقطه‌های $A(-۱،۱)$ و $B(۳،۹)$، قطع می‌کند و قطعه‌ای از خط که بین دو نقطهٔ AوB واقع باشد، بالای سهمی قرارگرفته است. (خودنقطه‌های AوB متعلق به مجموعهٔ جواب دستگاه نیست . شکل ۱۱ را ببینید.)

حالا به‌کمك روش‌مقطع‌مجموعه‌ها، ثابت می‌کنیم‌که معادلهٔ گنگ

$$\sqrt{۲ + x - x^۲} + \sqrt{۸x - x^۲ - ۱۵} = ۷ \qquad (۴)$$

جواب ندارد. البته می‌توان این معادله را با روش عادی جبرحل کرد، در پایان حل وقتی که ریشه‌های بدست‌آمده را در معادلهٔ (۴) آزمایش کنیم، معلوم می‌شود که این معادله ، جواب ندارد . ولی ما روش دیگری در پیش می‌گیریم . ابتدا روشن می‌کنیم که هریك از رادیکالهای معادله ، به ازای چه‌مقادیری از x، معنا دارند. رادیکال $\sqrt{۲ + x - x^۲}$ وقتی معنا

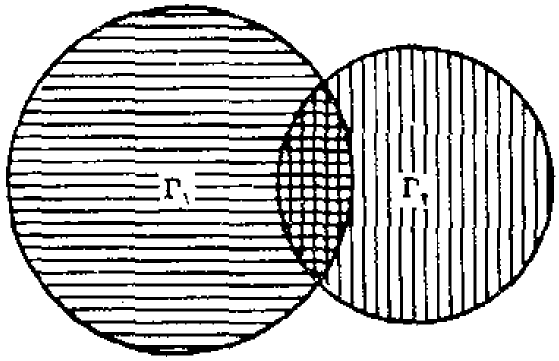
دارد که داشته باشیم: $2 + x - x^2 \geqslant 0$. با حل این نامعادله بدست می‌آید $-1 \leqslant x \leqslant 2$. درست به همین ترتیب معلوم می‌شود که رادیکال $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ ، تنها وقتی معنا دارد که داشته باشیم : $3 \leqslant x \leqslant 5$. ولی پاره خطهای $-1 \leqslant x \leqslant 2$ و $3 \leqslant x \leqslant 5$ ، نقطهٔ مشترکی ندارند ، یعنی مقطع این دو مجموعه ، یك مجموعهٔ تهی است . به این ترتیب ، حتی یك مقدار x هم نمی‌تواند درمعادلهٔ (۴) صدق کند . *

اجتماع (یا حاصلجمع منطقی) مجموعه‌ها

خیلی قبل از آنکه به مقطع مجموعه‌ها برخورد کنیم، بایکی کردن آنها سر و کار پیدا می کنیم . وقتی که دانش‌آموز سال اول دبستان ، سه مداد را روی دو مداد می‌ریزد ، دومجموعه را یکی می کند، به عبارت دیگر «اجتماع» دو مجموعه را به وجود می‌آورد . بطورکلی عمل جمع عددهای طبیعی ، با شمارش تعداد عضوهای دو مجموعه‌ای که با هم یکی می‌شوند ، ارتباط دارد . ولی در اینجا باید به نکتهٔ باریکی توجه کرد . فرض کنید دو آلیاژ داشته باشیم . آلیاژ اول از آهن،کربن ، واناديوم و منگنز و آلیاژ دوم از آهن ، کربن ، کرم و نیکل درست شده باشد . در هر آلیاژ ، ۴ عنصر شیمیایی وجود دارد ؛ ولی اگر از مخلوط کردن آنها یك آلیاژ بسازیم ، در آلیاژ جدید تنها ۶ عنصر وجود خواهد داشت؛ آهن ، کربن ، واناديوم ، منگنز ، کرم و نیکل . نکته در اینجاست که آهن و کربن در هر دو آلیاژ وجود دارد ؛ یعنی دو مجموعه‌ای را که با هم یکی کردیم ، مقطعی غیر تهی دارند . بنابراین درست‌تر است که بگوییم : جمع عددهای طبیعی ، با یکی کردن مجموعه‌های «از هم جدا» ارتباط دارد (دو مجموعه را «از هم جدا» گوییم که مقطع آنها ، مجموعه‌ای تهی باشد) .

وقتی که مقطع دو مجموعه ، تهی نباشد، در یکی کردن‌آنها ،

عضوهای تکراری ، تنها یکبار به حساب می‌آید . بنابراین اجتماع چند مجموعهٔ A،B ، . . . به مجموعهٔ جدیدی گفته می‌شود که عضوهای‌آن متعلق به یك یا چند مجموعهٔ مفروض باشد . اجتماع (یا حاصلجمع منطقی) دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت $A + B$ یا $A \bigcup B$ نشان می‌دهند.



شکل ۱۲

در شکل ۱۲ ، اجتماع دو مجموعهٔ A (نقطه‌های داخلی دایرهٔ Γ_1) و B (نقطه‌های داخلی دایرهٔ Γ_2) نشان داده شده است .

وقتی که بعضی از عضوها به چند مجموعه تعلق داشته باشند ، در مجموعهٔ اجتماع تنها یك‌مرتبه داخل خواهند شد.

به این ترتیب ، برای مجموعه‌های محدود ، تعداد عضوهای مجموعهٔ حاصلجمع ، ممکن است از مجموع تعداد عضوهای جمله‌های جمع، کمتر باشد . مثلا فرض کنید ، مجموعهٔ اول از حرفهای مختلف الفبا تشکیل شده باشد که در این نیم بیت ناصر خسرو وجود دارد:

به محشر گر زبان از من نگیری

در این مجموعه ، ۱۱ حرف مختلف الفبا وجود دارد:

ب ـ ه ـ م ـ ح ـ ش ـ ر ـ گ ـ ز ـ ا ـ ن ـ ی

همچنین ، عضوهای مجموعهٔ دوم عبارت باشد از حرفهای‌مختلف الفبا، که در نیم بیت دوم این شعر وجود دارد:

نیم عاجز من از گفت و شنودت

این مجموعهٔ دوم ، ۱۳ عضو دارد:

ن ـ ی ـ م ـ ع ـ ا ـ ج ـ ز ـ گ ـ ف ـ ت ـ و ـ ش ـ د

از اجتماع این دو مجموعه ، مجموعه‌ای بدست می‌آید که ۱۷ عضو دارد

ب ـ ه ـ م ـ ح ـ ش ـ ر ـ گ ـ ز ـ ا ـ ن ـ ی ـ ع ـ ج ـ ف ـ

ت ـ و ـ د

حرفهای «ن ـ ی ـ م ـ ا ـ ز ـ گ ـ ش» که درهر دومجموعه وجود دارد (و مجموعهٔ مقطع دو مجموعه را تشکیل می‌دهند) ، درمجموعهٔ اجتماع، تنها یکبار به حساب می‌آیند و به همین مناسبت ، مجموعهٔ اجتماع دو مجموعه ، تنها ۱۷ عضو دارد ، نه ۱۳ + ۱۱ ، یعنی ۲۴ عضو .

نمونهٔ دیگری از اجتماع مجموعه‌هایی را می‌آوریم ، که دارای عضوهای مشترکی هستند . مجموعهٔ همهٔ دانش آموزان کلاس ، اجتماع این سه مجموعه است :

الف) مجموعهٔ دانش‌آموزانی که قبول شده‌اند،

ب) مجموعهٔ دختران دانش‌آموز این کلاس،

ج) مجموعهٔ پسران دانش آموزی که قبول نشده‌اند .

روشن است که هر دانش آموز کلاس ، لااقل به یکی از این سه مجموعه ، تعلق دارد . ولی این مجموعه‌ها ، می‌توانند عضوهای مشترکی داشته باشند : دختران دانش‌آموزی که قبول شده‌اند هم عضو مجموعهٔ اول وهم عضو مجموعهٔ دوم هستند .

گاهی تعداد جمله‌های جمع ، بی‌نهایت است . مثلاً ، A_n را مجموعهٔ همهٔ کسرهای مثبت به مخرج n می‌گیریم:

$$A_1 = \left\{ \frac{m}{1} \right\} , A_2 = \left\{ \frac{m}{2} \right\} , \ldots , A_n = \left\{ \frac{m}{n} \right\} , \ldots$$

از اجتماع مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، . . . ، A_n ، . . . ، مجموعهٔ همهٔ کسرهای مثبت، یعنی کسرهایی به صورت $\frac{m}{n}$ بدست مـــی‌آید (m و n عددهایی طبیعی هستند) .

همچنین ، اگر A_3 را مجموعهٔ همهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع ، A_4 را مجموعهٔ همهٔ مربعها، A_5 را مجموعهٔ همهٔ پنج ضلعیهای منتظم و غیره

بگیریم ؛ از اجتماع آنها ، مجموعهٔ A بدست می‌آید که مجموعهٔ همهٔ چندضلعیهای منتظم است .

*حالادربارهٔ حاصلجمع منطقی مجموعه‌ها، درجبر صحبت می‌کنیم.

ادگارپو نویسندهٔ مشهور امریکایی ، دریکی از داستانهای خود می‌نویسد:

«من هرگز به ریاضی‌دانی بر نخورده‌ام که بطور جدی و قاطع ، این اعتقاد را نداشته باشد که $x^{۲}+px+q$ بطور مطلق و بدون شرط مساوی صفر است . اگر مایل باشید ، به عنوان تجربه ، به‌یکی از این عالیجنابان بگویید که به نظر شما ، ممکن است حالتی وجود داشته باشد که $x^{۲}+px+q$ بطور کامل مساوی صفر نباشد ، ولی درهمان حال که آنچه را فکر می‌کنید ، به او می‌فهمانید ، سعی کنید خود را از دسترس او دور نگه دارید، زیرا بدون شك با شما دست به یقه خواهد شد.»

مسلماً خواننده می‌داند که $x^{۲}+px+q$ می‌تواند به ازای بعضی ازمقادیر x مساوی صفرشود و به‌ازای بقیهٔ مقادیر x، مخالف صفر است. ولی دراینجا سؤال دیگری مطرح است : چرا ریاضی‌دانها همیشه کوشش می‌کنند معادله را به صورتی در آورند که یکی از دو طرف آن مساوی صفر باشد ؟ برای اینکه این مطلب روشن شود ، معادلهٔ $x^{۲}(x^{۲}-۷)=-۱۲$ را در نظر می‌گیریم ، از اینکه حاصلضرب دو عبارت مساوی -۱۲ شده است ، به سختی می‌توان فهمید که هر یك از این عبارتها چقدر است . به همین مناسبت ، حل معادله ، در چنین وضعی ، خیلی دشوار است. درحالی‌که اگر -۱۲ را به‌سمت چپ معادله ببریم و عبارتی را که بدست می‌آید ، تجزیه کنیم ، به این معادله می‌رسیم :

$$(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۳)=۰ \qquad (۱)$$

که در مورد آن می‌توان از حکم مشهور زیر استفاده کرد :

برای اینکه حاصلضربی مساوی صفر باشد ، باید لااقل یکی ازعاملهای ضرب مساوی صفر شود .

به این‌ترتیب ، حل معادلهٔ (۱) به حل دو معادلهٔ $x^۲ - ۴ = ۰$ و $x^۲ - ۳ = ۰$ منجر می‌شود . ولی برخلاف حل دستگاه معادله‌ها ، در اینجا لازم نیست دنبال عددهایی برویم که در هردو معادله صدق کند ، بلکه به عددهایی احتیاج داریم که لااقل در یکی از دو معادله صدق کند به عبارت دیگردر اینجا به‌جای مقطع ، با اجتماع مجموعه‌های ریشه‌ها سر و کار داریم . با حل معادلهٔ اول ، جوابهای $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = -۲$ و با حل معادلهٔ دوم ، جوابهای $x_۳ = \sqrt{۳}$ و $x_۴ = -\sqrt{۳}$ بدست می‌آید.

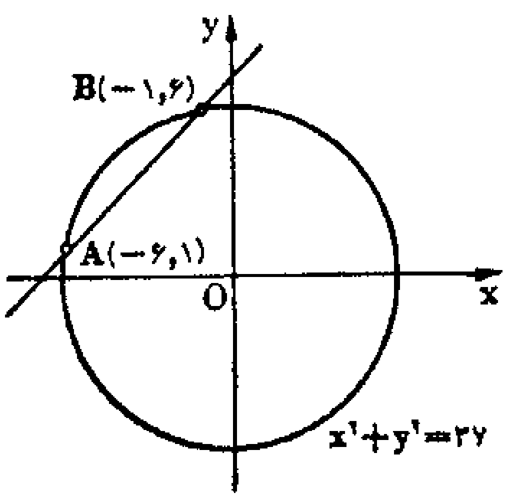
از اجتماع دو مجموعهٔ $\left\{۲ , -۲\right\}$ و $\left\{\sqrt{۳} , -\sqrt{۳}\right\}$ ، مجموعهٔ $\left\{۲ , -۲ , \sqrt{۳} , -\sqrt{۳}\right\}$ ، ریشه‌های‌معادلهٔ مفروض پیدا می‌شود.

به‌همین‌ترتیب در مورد معادلهٔ

$$(x^۲ + y^۲ - ۳۷)(y - x - ۷) = ۰ \qquad (۲)$$

مجموعهٔ جواب عبارت است از تمام نقطه‌های واقع بر محیط دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۷$ و خط راست $y = x + ۷$ (شکل۱۳) . درحالی‌که اگر به‌جای این معادله ، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۳۷ = ۰ \\ y - x - ۷ = ۰ \end{cases}$$



شکل ۱۳

داده شده بود ، تمام شکل ۱۳ به عنوان جواب بدست نمی‌آمد ، بلکه تنها دو نقطهٔ $A(-۶ , ۱)$ و $B(-۱ , ۶)$ ، که درآنجا خط، منحنی را قطع می‌کند ، پیدا می‌شد. *

اِفراز مجموعه‌ها

در حالت کلی ، مجموعه‌هایی که با هم جمع می‌شوند ، می‌توانند عضوهای مشترك داشته باشند . ولی اغلب پیش می‌آید که یك مجموعه، از اجتماع زیر مجموعه‌هایی از خودش به‌وجود آمده است، به‌نحوی که هیچ دو زیر مجموعه‌ای ، عضوهای مشترك نداشته باشند (یا آنطور که معمولاً می‌گویند یکدیگر را قطع نکرده باشند ، یعنی مجموعه‌هایی از هم جدا باشند) . در این حالت گوییم : مجموعهٔ A روی زیر مجموعه‌های از هم جدا ، اِفراز شده است.

افراز یك مجموعه ، به زیر مجموعه‌ها ، اغلب برای طبقه بندی اشیاء به‌کار می‌رود . مثلا وقتی که می‌خواهند کتابهای یك کتابخانه را منظم کنند ، مجموعهٔ همهٔ کتابها را به کتابهای ادبی ، کتابهای علوم اجتماعی ـ سیاسی، کتابهای علوم طبیعی وغیره تقسیم (افراز) می‌کنند.

در جانور شناسی ، مجموعهٔ همهٔ جانوران را به شاخه‌ها ، شاخه‌ها را به رده‌ها ، رده‌ها را به راسته‌ها ، راسته‌ها را به تیره‌ها ، تیره‌ها را به جنسها و جنسها را به نوعها تقسیم می‌کنند .

البته ، یك مجموعه را به طریقه‌های مختلف می‌توان به زیر مجموعه‌ها تقسیم کرد . مثلا برای کتابهای یك کتابخانه ، فهرستی از نویسندگان آنها ، که به‌ترتیب حرفهای الفبا تنظیم شده‌است، نیز وجود دارد : به این ترتیب که ابتدا مجموعهٔ کتابها را به زیر مجموعه‌هایی تقسیم می‌کنند، به‌نحوی که در زیر مجموعهٔ اول کتابهایی قرار دارد که نام نویسندگان آنها با حرف «الف» شروع شده است ، در زیر مجموعهٔ دوم کتابهایی که نام نویسندگان آنها با حرف «ب» شروع شده است وغیره. سپس هریك ازاین مجموعه‌هارا به زیرمجموعه‌های جدیدی تقسیم کرده‌اندکه برحسب حرف دوم نام نویسندگان تنظیم شده است وغیره .

* برای افراز یك مجموعه، به‌زیر مجموعه‌هایی از خود ، اغلب از

مفهوم عضوهای هم ارز استفاده می‌شود . برای این منظور ، ابتدا معنای «عضو x هم‌ارز است با عضو y » را تعریف می‌کنند و سپس عضوهای هم‌ارز را در یك زیر مجموعه قرار می‌دهند . ولی هر مفهوم هم‌ارزی ، برای افراز مناسب نیست. مثلا تعریف هم‌ارزی را ، برای دونفر،آشنایی آنها بایکدیگرتعریف می‌کنیم. قبول‌چنین‌تعریفی‌برای هم‌ارزی، بی‌نتیجه است ؛ زیرا می‌توان حالتی را درنظرگرفت که X آشنای Y و Y آشنای Z باشد ، درحالی‌که X و Z با هم آشنا نباشند . در این‌صورت در یك زیر مجموعه باید X و Y را قرار دهیم (آنها با هم‌آشنا هستند) ، سپس در همین زیر مجموعه باید Z را هم قرار داد (چون با Y آشناست) ؛ و به این ترتیب در یك زیرمجموعه ، دوعضو X و Z وجود داردکه با هم آشنا نیستند. برای اینکه به اینگونه حالتهای نامناسب برنخوریم ، باید برای مفهوم هم ارزی ، سه شرط زیر را در نظر بگیریم :

الف) هر عضوی با خودش هم ارز باشد؛

ب) اگرعضو X هم ارز عضو Y است، عضو Y هم، هم‌ارز عضو X باشد؛

ج) اگر X هم‌ارز عضو Y و عضو Y هم ارز عضو Z است ، عضو X هم‌ارز عضو Z باشد .

می‌توان ثابت‌کرد که رعایت این شرطها ، برای افراز یك مجموعهٔ A ، به زیر مجموعه‌هایی با عضوهای هم‌ارز، لازم و کافی است (و البته زیر مجموعه‌های مختلف ، نباید عضوهای مشترکی داشته باشند).

مثلا ، اگردو عدد صحیح x و y را وقتی هم ارز بگیریم که‌تفاوت آنها عددی زوج باشد، به‌سادگی معلوم می‌شود که هر سه شرط الف ، ب و ج برای‌آن صادق است و اگر عددهای هم‌ارز را دریك زیرمجموعه قرار دهیم ، مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح ، به دو زیر مجموعه افراز می‌شود : مجموعهٔ عددهای زوج و مجموعهٔ عددهای فرد * .

حساب مانده‌ها*

اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد، به کمك آن می‌توان مجموعهٔ عددهای طبیعی‌را به‌ترتیب زیر، به دسته‌هایی افراز کرد. دو عدد را نسبت به مدول m، همنهشت گوییم، وقتی‌که تفاضل آنها بر m قابل قسمت باشد. مثلاً* عددهای ۷ و ۱۹، نسبت به مدول ۴، همنهشت، هستند، درحالی‌که نسبت به مدول ۵، همنهشت نیستند، زیرا ۷ ـ ۱۹ یعنی ۱۲ بر۴ قابل قسمت است، ولی بر ۵ قابل قسمت نیست. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که همنهشتی عددها، نسبت به مدول مفروض، دارای تمام خاصیتهای هم‌ارزی است. بنابراین مجموعهٔ عددهای صحیح را می‌توان به زیر مجموعه‌هایی افراز کرد که عددهای هر زیر مجموعه، نسبت به مدول m همنهشت باشند. تعداد این زیر مجموعه‌ها، مساوی m است وهمهٔ عددهای یك زیرمجموعه، در تقسیم بر m، یك باقیمانده می‌دهند. مثلا اگر فرض کنیم $m = ۳$، سه زیر مجموعه، از مجموعهٔ عددهای صحیح بدست می‌آید: مجموعهٔ عددهای مضرب ۳؛ مجموعهٔ عددهایی که در تقسیم بر۳، باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهند و بالاخره مجموعهٔ عددهایی که در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ای مساوی ۲ دارند.

حالا مجموعهٔ جدید M را تشکیل می‌دهیم، که هر عضو آن مجموعه‌ای از عددهای همنهشت، نسبت به مدول m باشد. مجموعهٔ M شامل m عضو خواهد بود. در این مجموعه می‌توان عملهای جمع و ضرب را در مورد عضوهای آن انجام داد. مثلا $m = ۵$ فرض کنید، مجموعهٔ A را از عددهایی می‌گیریم که در تقسیم بر ۵، باقیمانده‌ای مساوی ۲ داشته باشند؛ و مجموعهٔ B را از عددهایی که در تقسیم بر ۵ به باقیماندهٔ ۴ برسند. اگر عدد دلخواهی از مجموعهٔ A را، به عدد دلخواهی ازمجموعهٔ B اضافه کنیم، عددی بدست می‌آیدکه درتقسیم بر ۵، باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهد، زیرا داریم:

$$(۵a+۲)+(۵b+۴)=۵(a+b+۱)+۱$$

بنا بر این می‌توان گفت که مجموع A و B عبارت است از مجموعهٔ C ، عددهایی‌که در تقسیم بر ۵ به باقیماندهٔ ۱ می‌رسند . اگر عدد دلخواهی از مجموعهٔ A را در عدد دلخواهی ازمجموعهٔ B ضرب کنیم ، عددی بدست می‌آیدکه در تقسیم بر ۵ ، باقیمانده‌ای مساوی ۳ می‌دهد ، زیرا داریم :

$$(۵a+۲)(۵b+۴)=۵(۵ab+۴a+۲b+۱)+۳$$

حساب بسیارجالبی است ، در این حساب به‌جای اینکه با مجموعهٔ نامحدود عددهای صحیح سر و کار داشته باشیم ، تنها با پنج عضو سرو کار داریم ؛ پنج مجموعهٔ عدد. هرمجموعه را به نام باقیمانده‌ای که عضوهای آن در تقسیم بر ۵ بدست می‌آورند ، می‌نامیم (مثلاً مجموعهٔ عددهای {. . . ، ۱۶ ، ۱۱ ، ۶ ، ۱ ، ۴ − ، . . .} را به‌وسیلهٔ عدد ۱، نشان می‌دهیم) . در این صورت برای «عددهای» ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، جدولهای جمع و ضرب زیر را خواهیم داشت:

جدول ضرب

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

جدول جمع

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

بخصوص این دو جدول برای حالت سادهٔ $m=۲$ بدست می‌آید:

×	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

جدول جمع نشان می‌دهد که مجموع دوعدد زوج یا مجموع دو عدد فرد مساوی یك عدد زوج و مجموع یك عدد زوج و یك عدد فرد مساوی یك عدد فرد است . جدول ضرب هم نشان می‌دهد که حاصلضرب دو عدد تنها وقتی فرد است که هر دو عامل ضرب ، فرد باشد . حساب مجموعه‌ها ، نسبت به‌یک مدول مفروض را در رشته‌ای از ریاضیات ، به‌نام نظریهٔ عددها ، بررسی می‌کنند .

تفریق مجموعه‌ها

وارنیك، بازرس پلیس، به‌گاوصندوق‌نظری‌انداخت، پیپ خود را روشن کرد وگفت : «تنها پنج نفر ممکن است‌گاوصندوق را با متهٔ برقی بازکرده باشند : آلك کونتسه، فریتس شمیت ، گوستاو هویگر ، هنریخ - کونتسمان و توماس مولر. ولی آلك ، فریتس و گوستاو هم‌اکنون در زندان موآبیت بسر می‌برند ، بنابراین هنریخ و توماس را بخواهید و ببینید دیشب کجا بوده‌اند . . . » .

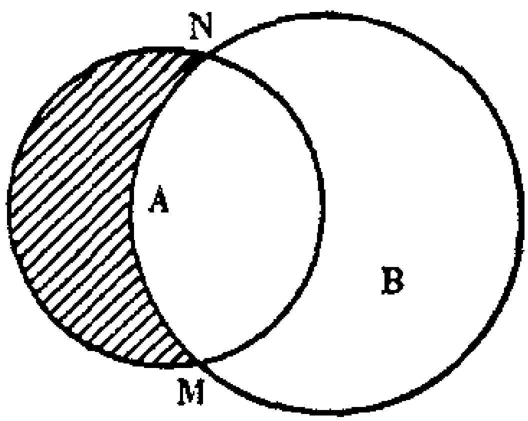
روشی که بازرس وارنیك بکاربرده است براساس تفریق مجموعه‌ها قرار دارد . او با دومجموعه سروکار دارد : مجموعهٔ A ، دزدانی که از متهٔ برقی استفاده می‌کنند؛ ومجموعهٔ B ، همهٔ ساکنین زندان موآبیت. او همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ A را که متعلق به مجموعهٔ B هم هستند ، کنار می‌گذارد و به این ترتیب ، دایرهٔ افراد مورد سوء ظن را تنگتر می‌کند .

بطور کلی تفاضل دومجموعهٔ A و B، عبارت‌است ازمجموعهٔ جدید $A-B$ ، که در آن همهٔ عضوهایی ازمجموعهٔ A ، که متعلق به‌مجموعهٔ B نیستند ، وجود دارد .

می‌بینیم ، برای‌اینکه بتوان مجموعهٔ B را ازمجموعهٔ A کم‌کرد، به‌هیچ‌وجه لازم نیست که مجموعهٔ B ، جزئی از مجموعهٔ A باشد . کم کردن B از A به معنی بیرون کردن عضوهای مشترك دو مجموعهٔ A و B از مجموعهٔ A است :

$$A-B=A-(A\bigcap B)$$

مثلاً بازرس‌پلیس ، باید از تعداد پنج دزد ، سه نفری را که هم از متهٔ برقی استفاده می‌کنند وهم درآن‌زمان در زندان بسرمی‌برند ، کنار بگذارد . اگر در شکل ۱۴ ، A ، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های دایرهٔ اول و B ، مجموعهٔ نقطه‌های دایرهٔ دوم باشد ، تفاضل آنها عبارت است ازمجموعهٔ نقطه‌های هاشورخوردهٔ داسی شکل (بدون قوس MN) .



شکل ۱۴

اگر A ، مجموعهٔ‌همهٔ دانش‌آموزان یك کلاس و B ، مجموعهٔ همهٔ دختران دانش‌آموز مدرسه باشد ؛ $A-B$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزان پسری که در این کلاس درس می‌خوانند .

در حالتی که B جزئی از مجموعهٔ A است ، $A-B$ را متمم مجموعهٔ B نسبت به A گویند و به‌وسیلهٔ B'_A نشان می‌دهند. مثلاً متمم مجموعهٔ عددهای‌زوج نسبت به‌مجموعهٔ همهٔ عددهای‌صحیح، عبارت‌است ازمجموعهٔ همهٔ عددهای فرد . متمم مجموعهٔ مربعها، نسبت به مجموعهٔ مستطیلها ، عبارت است از مجموعهٔ مستطیلهای با ضلعهای نامساوی .

و متمم همین مجموعهٔ مربعها ، نسبت به مجموعهٔ لوزیها، عبارت است از مجموعهٔ لوزیهای با قطرهای نامساوی.

اگـر همهٔ مجموعه‌ها را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از مجموعهٔ عمومی I در نظر بگیریم ، معمولا منظور از متمم مجمُوعهٔ B ، متمم آن نسبت به I است ، در این‌حالت به‌جای B'_I بطورساده B' می‌نویسند.

جبر مجموعه‌ها*

ما با عملهای‌اساسی روی مجموعه‌ها آشناشدیم: جمع (اجتماع)، تفریق و ضرب (مقطع یا اشتراك). این عملها دارای خاصیتهایی هستند ، که خاصیتهای عملهـای روی عددها را به خاطر می‌آورد . می‌دانیم که تمام جبرچند جمله‌ایها براساس چند قانونی‌که روی عددها اجرا می‌شود، ساخته شده است ؛ این قانونها با تساویهای زیر نشان داده می‌شود :

الف) $a+b=b+a$

(خاصیت جابجایی جمع) .

ب) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(خاصیت شرکت پذیری جمع) .

ج) $a+0=a$

(خاصیت صفر ـ عضو خنثی در جمع).

د) $a+(-a)=a-a=0$

(خاصیت عضوهای متقابل) .

ه) $ab=ba$

(خاصیت جابجایی ضرب) .

و) $(ab)c=a(bc)$

(خاصیت شرکت پذیری ضرب) .

ز) $\quad a(b+c)=ab+ac$

(خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع) .

ح) $\quad a\times 1=a$

(خاصیت واحد ـ عضو خنثی در ضرب) .

بیشتر این خاصیتها ، برای عملهای روی مجموعه‌ها درست است، مثلاً، روشن است که برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B می‌توان نوشت : $A\bigcup B=B\bigcup A$ (هم $A\bigcup B$ وهم $B\bigcup A$ ، معرف یك مجموعه هستند که شامل عضوهایی است که متعلق به A یا B هستند و شامل هیچ عضو دیگری غیر آن نیست) . همچنین روشن است که

$$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$$

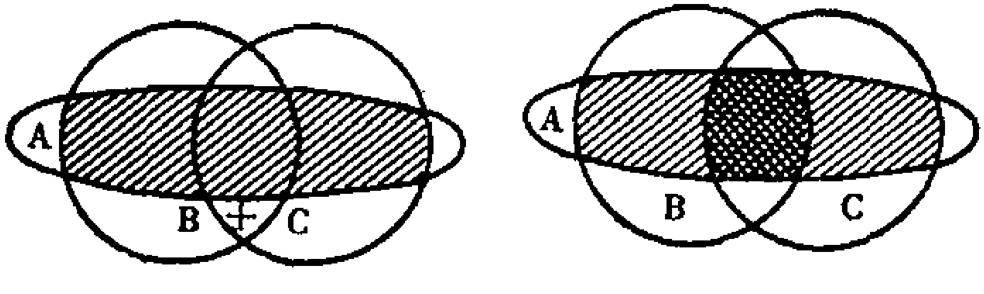
هریك از این دو مجموعه، شامل عضوهایی است که متعلق به یکی از مجموعه‌های A، B و C باشد.

همینطور ثابت می‌شود $A\bigcap B=B\bigcap A$ و $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$ (مجموعه‌های $A\bigcap B$ و $B\bigcap A$ ، از عضوهای مشترك دو مجموعهٔ A و B و مجموعه‌های $(A\bigcap B)\bigcap C$ و $A\bigcap(B\bigcap C)$، از عضوهای مشترك سه مجموعهٔ A، B و C تشکیل شده است) .

اثبات خاصیت پخشی ضرب (اشتراك) نسبت به جمع (اجتماع) مجموعه‌ها ، کمی مشکل‌تر است . در واقع باید ثابت کنیم :

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) \qquad (1)$$

اثبات منطقی این تساوی مشکل نیست ، ولی کمی دقیق است . به‌همین مناسبت ما به رسم دو شکل ،که این تساوی را روشن می‌کند ،



شکل ۱۵

اکتفا می‌کنیم (شکل ۱۵). در یکی از این شکلها، مقطع مجموعهٔ A با مجموعهٔ $B\bigcup C$ هاشورخورده است ودردیگری، مقطع A با B و A با C .

نقش صفر و واحد، در عملهای مربوط به مجموعه‌ها، به عهدهٔ مجموعه‌های ϕ (مجموعهٔ تهی) و I (مجموعهٔ عمومی) گذاشته‌شده است، یعنی داریم:

$$A\bigcup \phi = A, \qquad A\bigcap \phi = \phi, \qquad A\bigcap I = A$$

که متناظر تساویهای زیر، مربوط به عددها هستند:

$$a + ۰ = a, \qquad a \times ۰ = ۰, \qquad a \times ۱ = a$$

به‌این ترتیب جمع و ضرب منطقی (اجتماع و اشتراك) مجموعه‌ها همان خاصیتهای جمع و ضرب عددها را دارند. بنابراین همهٔ رابطه‌هایی که در جبر چند جمله‌ایها، تنها شامل جمع و ضرب هستند، دربارهٔ مجموعه‌ها هم صادق است. مثلاً اتحاد جبری

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

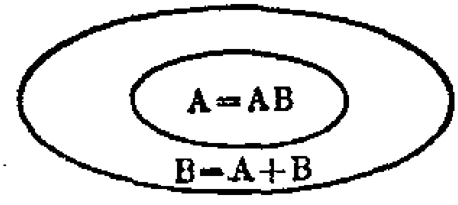
متناظر است با اتحاد

$$(A\bigcup B)^۲ = A^۲ \bigcup ۲(A\bigcap B)\bigcup B^۲$$

که در آن $۲(A\bigcap B) = A\bigcap B + A\bigcap B,\ A^۲ = A\bigcap A$

ولی جبر مجموعه‌ها، چهرهٔ دیگری هم دارد که با جبر چند جمله‌ایها متفاوت است. این تفاوت، اساساً مربوط به این نکته است که اگریکی‌ازدومجموعهٔ A و B، زیرمجموعهٔ دیگری‌باشد، رابطه‌های‌مربوط به‌اجتماع و اشتراك مجموعه‌ها، ساده می‌شود، یعنی، اگرداشته باشیم: $A\subset B$، داریم: $A\bigcup B = B$ و $A\bigcap B = A$. این مطلب به روشنی در شکل ۱۶ دیده می‌شود.

درحالت‌خاص، چون‌در هرحال‌داریم $A\subset A$، بنابراین: $A\bigcup A = A\bigcap A = A$ و چون $A\subset I$؛ پس $A\bigcup I = I$.



شکل ۱۶

به‌همین مناسبت می‌توان رابطه‌های جبر مجموعه‌ها را ساده کرد. مثلاً، چون $A^۲=A$ ، $B^۲=B$ و $A\cap B\subset A$ ، بنابراین $A^۲+۲(A\cap B)=A+۲(A\cap B)=A$ و رابطهٔ (۲) به صورت $(A\cup B)^۲=A\cup B$ در می‌آید. بطور کلی، در جبر مجموعه‌ها، صحبت از توان معنا ندارد، زیرا به ازای هر مقدار n داریم : $A^n=A$.

حالا ثابت می‌کنیم که برای مجموعه‌ها، قانون دیگری هم وجود دارد (قانون تفرق)، که نظیر آن درمورد عددها صادق نیست. این قانون چنین است :

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

برای اثبات این رابطه، کافی است پرانتزهای طرف دوم را، طبق قاعدهٔ (۱) بازکنیم و توجه کنیم که مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cap C$ ، زیر مجموعه‌هایی از مجموعهٔ A هستند : $A\cap C\subset A$ و $A\cap B\subset A$. علاوه بر آن $A\cap A=A$ است ، بنابراین

$$(A\cap A)\cup(A\cap C)\cup(B\cap A)\cup(B\cap C)=A\cup(B\cap C)$$

بالاخره ، متذکر می‌شویم که عمل تفریق مجموعه‌ها، هیچ شباهتی به‌عمل تفریق عددها ندارد. برای هرسه عدد دلخواه a، b و c، این تساوی درست است :

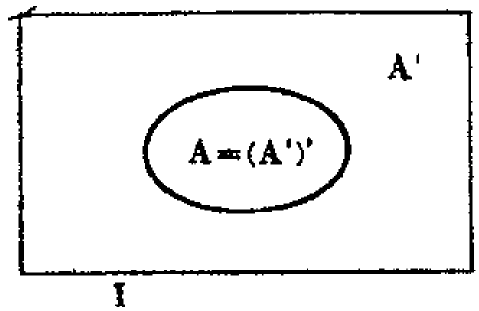
$$a+(b-c)=(a+b)-c$$

در حالی که برای سه مجموعهٔ A ، B و C در حالت کلی

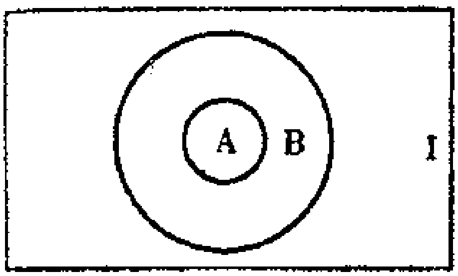
$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-C$$

مطلب بر سر این‌است که در جمع مجموعه‌ها، عضوهای تکراری را تنها یکبار به حساب می‌آوریم ، و در تفریق هم ممکن است چیزی از مجموعهٔ اصلی کم نشود. مثلاً اگر هر سه مجموعهٔ A ، B و C منطبق بر هم باشند : $A=B=C$ ، خواهیم داشت : $A\cup B=A$ و بنابراین $(A\cup B)-C=A-A=\phi$ ، یك مجموعهٔ تهی ؛ در حالی که $A\cup(B-C)=A\cup\phi=A$

درنظریهٔ مجموعه‌ها، عملهایی هم هست که درعملهای جبری وجود ندارد. این عملها ناشی از رسیدن ازمجموعهٔ مفروض A به مجموعهٔ متمم است : $A' = I - A$. روشن است که مجموعه‌های A و A' ، از هم جدا هستند و از مجموع آنها ، مجموعهٔ عمومی I بدست می‌آید . بنابراین $A \cap A' = \phi$ و $A \cup A' = I$. علاوه براین روشن است که $\phi' = I$ (متمم مجموعهٔ تهی، همان مجموعهٔ عمومی است) و $I' = \phi$. بالاخره داریم $(A')' = A$ (شکل ۱۷) .



شکل ۱۷



شکل ۱۸

حالا ثابت می‌کنیم که اگر $A \subset B$ باشد،داریم : $A' \supset B'$. در واقع ، هرچه مجموعه‌ای بزرگتر باشد ، تعداد عضوهای مجموعهٔ متمم آن کمتر است . در شکل ۱۸ ، مجموعهٔ عمومی I به شکل مستطیل و مجموعه‌های A و B به شکل دایره نشان داده شده است . متمم مجموعهٔ A شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در خارج دایرهٔ کوچکتر قرار دارند . درحالی‌که متمم مجموعهٔ B ، شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در خارج دایرهٔ بزرگتر قرار گرفته‌اند و روشن است که $A' \supset B'$.

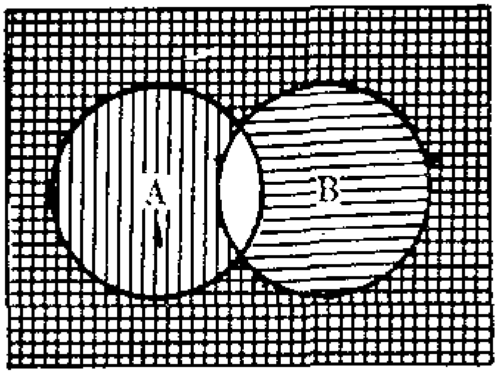
اثبات رابطه‌های زیر کمی مشکل‌تر است :

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

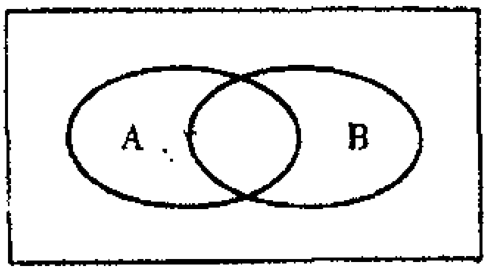
روی شکل ۱۹ ، متمم مجموعهٔ A را با خطهای افقی و متمم مجموعهٔ B را با خطهای قائم هاشور زده‌ایم . متمم مجموعهٔ $A \cup B$

شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در داخل هیچیك از دو دایره قرار نگرفته باشد . اینها همان نقطه‌هایی هستند که با هر دو نوع هاشور مشخص شده است ، یعنی نقطه‌های $A' \cap B'$. به این ترتیب روشن می‌شود که : $(A \cup B)' = A' \cap B'$.



شکل ۱۹

به‌همین ترتیب می‌توان با توجه به شکل ۲۰ ، رابطهٔ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ را به‌سادگی روشن کرد .



شکل ۲۰

با تعدادی از خاصیتهای عمل با مجموعه‌ها، آشنا شدیم. بهتر است که این خاصیتها را خلاصه کنیم (می‌دانیم که معمولاً مجموعهٔ تهی را با ϕ ، مجموعهٔ عمومی را با I ، متمم مجموعهٔ A را نسبت به‌مجموعهٔ عمومی با A' نشان می‌دهند) :

۱) $A \subset A$.

۲) اگر داشته باشیم $A \subset B$ و $B \subset A$ ، خواهیم داشت : $A = B$.

۳) اگر داشته باشیم $A \subset B$ و $B \subset C$ ، خواهیم داشت : $A \subset C$.

۴) $\phi \subset A$.

۵) $A \subset I$.

۶) $A \cup B = B \cup A$.

۷) $A \cap B = B \cap A$.

۸) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

۹) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

۱۰) $A \cup A = A$.

۱۱) $A \cap A = A$.

۱۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

۱۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$.

۱۴) $A \cup \phi = A$.

۱۵) $A \cap I = A$.

۱۶) $A \cup I = I$.

۱۷) $A \cap \phi = \phi$.

۱۸) رابطهٔ $A \subset B$ هم ارز است با هریك از دو رابطهٔ $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.

۱۹) $A \cup A' = I$.

۲۰) $A \cap A' = \phi$.

۲۱) $\phi' = I$.

۲۲) $I' = \phi$

۲۳) $(A')' = A$.

۲۴) رابطهٔ $A \subset B$ هم ارز است با $B' \subset A'$.

۲۵) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

۲۶) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

بین خاصیتهای ۱ تا ۲۶ ، هرجا که یکی از «رابطه‌های دوگان»

$$\supset \text{ ، } \subset$$

$$I \text{ ، } \phi$$

$$\cap \text{ ، } \cup$$

وجود داشته باشد، می‌توان از یك رابطه، رابطهٔ دیگری را بدست آورد. مثلاً از این راه می‌توان از رابطهٔ ۶) به رابطهٔ ۷) و از رابطهٔ ۱۲) به رابطهٔ ۱۳) رسید و غیره .

از اینجا می‌توان نتیجه.گرفت که اگر قضیه‌ای را از رابطه‌های ۱ تا۲۶ بدست‌آوریم، حتماً قضیهٔدیگری‌را هم‌که دوگان این قضیه است، می‌توان بدست آورد .

بدیهی است که به‌خاطر سپردن همهٔ رابطه‌های ۱ تا ۲۶ خیلی ساده نیست، ولی این کار لازم هم نیست ، می‌توان خود را به دو عمل اساسی محدود کرد: اجتماع مجموعه‌ها و تشکیل متمم ، که سه رابطهٔ زیر برای آنها کافی است :

a) $A \cup B = B \cup A$ ،

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ،

c) $(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A$ ،

حالا عمل حاصلضرب منطقی $A \cap B$ ، رابطهٔ $A \subset B$ و مجموعه‌های I و ϕ را این‌طور تعریف می‌کنیم :

d) $A \cap B$ طبق تعریف برابر است با $(A' \cup B')'$ ؛

e) $A \subset B$ طبق تعریف یعنی $A \cup B = B$ ؛

f) $I = A \cup A'$ و $\phi = I'$.

در این‌صورت تمام خاصیتهای ۱ تا ۲۶ را می‌توان از رابطه‌های a تا f بدست آورد .

سیارهٔ افسانه‌ها

یك‌روز ، موقع صرف قهوه در باشگاه مسافران بین کهکشانها ، ایون تیخی[1] ، عضو برجستهٔ این باشگاه نقل می‌کرد :

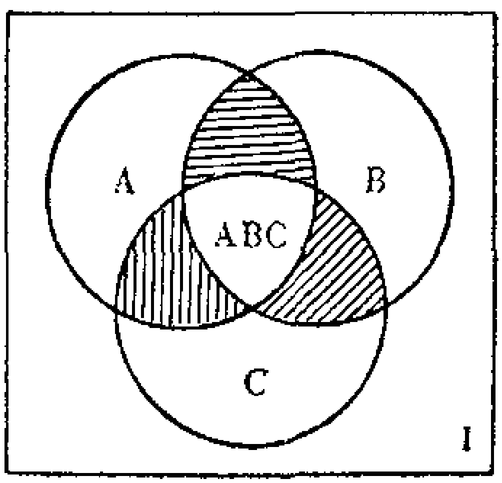
«پیاده شدن در سیارهٔ گسیود خیلی مشکل بود . ولی وقتی روی سطح سیاره فرود آمدم ، از اینکه تصمیم به دیدن آنجا گرفته بودم ، پشیمان شدم: درآنجا موجوداتی زندگی می‌کردند که عجیب‌تر ازخدایان افسانه‌ای یونان قدیم بودند . یك هیئت ۱۰۰۰ نفری از ساکنین سیاره ، به استقبال من آمدند . ۸۱۱ نفر از آنها دارای یك چشم بودند ، مثل

۱) مسافرت ایون تیخی راستا نیسلاو لم ، نویسندهٔ مشهور لهستانی در کتاب «یادداشت های روزانهٔ ایون تیخی در ستاره‌ها» شرح داده است . نویسندهٔ «داستان مجموعه‌ها» امیدوار است که ستا نیسلاو لم ، او را به‌خاطر تقلید ناشیانه‌ای که از نوشتهٔ اوکرده است ، ببخشد و ضمناً خوانندهٔ این کتاب ، نارساییهای ادبی این قسمت را به حساب س . لم نگذارد .

پلی‌فم غول؛ ۷۵۲ نفر، به‌جای موهایشان، مار بود، مثل مدوزی‌گودگودن، ۴۱۸نفرشان دمی مثل دم‌ماهی‌داشتند، مثل‌دختران‌دریا. ضمناً ۵۷۰نفر از این‌عجیب‌الخلقه‌ها، هم یك‌چشم بودند وهم به‌جای‌مو، ماربرسرشان بود؛ ۳۶۵نفرشان یك‌چشم‌بودند ودم‌ماهی داشتند؛ ۳۴۸ نفر به‌جای موی سر، مار و دم ماهی داشتند و بالاخره ۲۹۷ نفرشان، هم یك چشم بودند وهم به‌جای موی سر، مار داشتند و هم دمشان مثل دم ماهی‌بود. بزرگترین آنها به‌طرف من آمد و گفت . . . » .

ولی اعضای باشگاه نفهمیدند، ایون تیخی درسیارهٔ عجایب چه شنید، پروفسور تارانتوف، که به داستان مسافر گوش می‌کرد، بلافاصله در ذهن خود برآوردی کرد و با صدای بلند گفت :

« ایون عـزیز ! من حاضرم امتحان‌کنیم که دراین سیاره چند نفر فقط یك چشم دارند، چند نفر فقط‌به‌جای موها، مار دارند و چند نفرفقط دمی شبیه دم ماهی دارند. من امیدوارم که لااقل قانونهـای ریاضیات در این سیاره به افسانه تبدیل نشده باشد.»



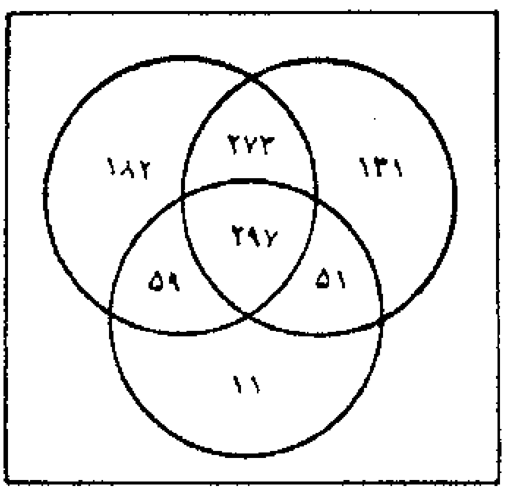
شکل ۲۱

تارانتوف یك‌دستمال کاغذی از روی میز برداشت، روی آن طرح شکل ۲۱ را رسم کرد و گفت :

«مجموعهٔ همهٔ اعضای هیئت نمایندگی را به I، مجمـوعهٔ یك چشمیها را به A، مجموعهٔ مارموها را به B و بالاخره مجموعهٔ دم ماهیها را به C نشان مـی‌دهیم. مجموعهٔ I را بـه شکل مستطیل و سه مجموعهٔ دیگر را با دایره، مشخص کرده‌ایم. سه دایره، مستطیل را به ۸ قسمت تقسیم کرده‌اند. ببینیم در هر یك از این قسمتها چند عضو

وجود دارد . طبق فرض در مجموعهٔ $A\bigcap B$ (یا بطور ساده AB) ، ۵۷۰ عضو وجود دارد (که یك چشم و مارمو هستند) ، مجموعهٔ $A\bigcap B\bigcap C$ (یا بطور ساده ABC) ، ۲۹۷ عضو دارد (یك چشم ، مارمو و دم ماهی). بنابراین در مجموعهٔ $(A\bigcap B)-(A\bigcap B\bigcap C)$ ۲۷۳ عضو باید باشد . این همان مجموعه‌ای است که در شکل ۲۱ باخطهای افقی هاشور خورده است . به‌همین‌ترتیب معلوم‌می‌شود که‌مجموعهٔ $(A\bigcap C)-(A\bigcap B\bigcap C)$، ۵۹ عضو (که در شکل ۲۱ با خطهای قائم هاشور خورده) و مجموعهٔ $(B\bigcap C)-(A\bigcap B\bigcap C)$، ۵۱ عضو (درشکل ۲۱ باخطهای مایل هاشور خورده) دارد.

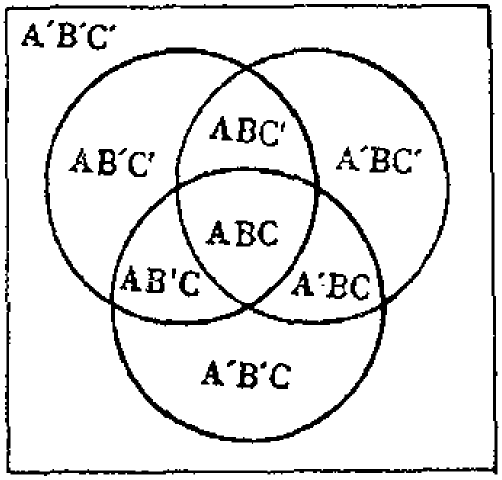
حالا به‌سادگی می‌توان قسمتی از مجموعهٔ A را که متعلق به $B\bigcup C$ نیست ، از لحاظ عددی مشخص کرد . برای این منظور باید از عدد ۸۱۱، عددهای ۵۷۰ (مربوط به مجموعهٔ $A\bigcap B$) و ۵۹ (مربوط به مجموعهٔ $(A\bigcap C)-(A\bigcap B\bigcap C)$) راکم کرد. ۱۸۲موجودباقی‌می‌ماند که یك چشم هستند،ولی نه‌به‌جای موها، مار دارند و نه‌دمشان شبیه دم ماهی است. با همین روش معلوم می‌شود که در مجموعهٔ $B-(A\bigcup C)$، ۱۳۱ موجود و در مجموعهٔ $C-(A\bigcup B)$ ، ۱۱ موجود وجود دارد . این نتیجه‌ها، در شکل ۲۲ نشان داده شده است.



شکل۲۲

حالا ببینیم در این هیئت نمایندگی چند نفر بوده‌اند که نه یك چشم، نه مارمو ونه دم ماهی نبوده‌اند، به عبارت دیگر می‌خواهیم‌تعداد عضوهای مجموعهٔ $I-A-B-C$ را پیداکنیم. ازآنجاکه مجموعه‌های جداگانه‌ای که در شکل ۲۲ نشان داده شده است، اشتراکی ندارند، باید

بطور ساده از عدد ۱۰۰۰ ، مجموع ۱۱ + ۱۳۱ + ۱۸۲ + ۵۱ + ۵۹ + ۲۷۳ + ۲۹۷ را کم کنیم . ولی این مجموع برابر است با ۱۰۰۴ و بنابراین مجموعهٔ $I - A - B - C$ دارای ۴ – عضو می‌شود. **ولی ایون** عزیز قبول کن که حتی در سیارهٔ افسانه‌ها هم نمی‌تواند **مجموعه‌ای با** تعداد عضوهای منفی وجود داشته باشد.



شکل ۲۳

* دربارهٔ راه حل پروفسور تارانتوف کمی دقت کنیم. ما تمام مجموعهٔ I را بـه ۸ زیر مجمـوعه تجزیه کردیم و تعداد عضوهای هریك ازاین زیر مجموعه‌ها راپیدا کردیم. مطلب اصلی در اینجاست که این زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌هایی از هم جدا هستند . ولی‌این تجزیه را به‌ترتیب دیگری هم می‌توان بدست آورد. می‌دانیم:

$$I = A \bigcup A' = B \bigcup B' = C \bigcup C'$$

و بنابراین

$$I = (A \bigcup A') \bigcap (B \bigcup B') \bigcap (C \bigcup C') = (A \bigcap B \bigcap C) \bigcup$$
$$\bigcup (A \bigcap B \bigcap C') \bigcup (A \bigcap B' \bigcap C) \bigcup (A \bigcap B' \bigcap C') \bigcup$$
$$\bigcup (A' \bigcap B \bigcap C) \bigcup (A' \bigcap B \bigcap C') \bigcup (A' \bigcap B' \bigcap C) \bigcup (A' \bigcap B' \bigcap C')$$

مجموعهٔ I به ۸ زیر مجموعه تجزیه شد و اینها همان زیر مجموعه‌هایی هستند که قبلاً پروفسور تارانتوف بدست آورده بود (شکل ۲۳) .

از این رابطه ، بلافاصله بدست می‌آید :

$$N(A' \bigcap B' \bigcap C') = N(I) - N(A \bigcap B \bigcap C) - N(A \bigcap B \bigcap C') -$$
$$- N(A \bigcap B' \bigcap C) - N(A \bigcap B' \bigcap C') - N(A' \bigcap B \bigcap C) -$$
$$- N(A' \bigcap B \bigcap C') - N(A' \bigcap B' \bigcap C)$$

که درآن $N(D)$ یعنی تعداد عضوهای‌مجموعهٔ D. این رابطه را می‌توان

طوری تبدیل کرد که شامل A' ، B' و C' ، متممهای A ، B و C نباشد.

برای این منظور C' را به $I-C$ تغییر می‌دهیم ، بدست می‌آید:

$$A\cap B\cap C'=A\cap B\cap(I-C)=A\cap B-A\cap B\cap C$$

و بنابراین :

$$N(A\cap B\cap C')=N(A\cap B)-N(A\cap B\cap C);$$
$$N(A\cap B'\cap C')=N(A\cap B')-N(A\cap B'\cap C);\ldots$$

سپس B' را به $I-B$ و بالاخره A' را به $I-A$ تبدیل می‌کنیم ، سر آخر به این رابطه می‌رسیم :

$$N(A'\cap B'\cap C')=N(I)-N(A)-N(B)-N(C)+N(A\cap B)+$$
$$+N(A\cap C)+N(B\cap C)-N(A\cap B\cap C)$$

از این رابطه می‌توان برای حل مسأله‌هایی از نوع مسألهٔ بالا استفاده کرد .

مثلاً تارانتوف می‌توانست باتوجه به این رابطه، نتیجه بگیرد :

$$N(A'\cap B'\cap C')=۱۰۰۰-۸۱۱-۷۵۲-۴۱۸+۵۷۰+۳۵۶+$$
$$*\ +۳۴۸-۲۹۷=-۴$$

نمونهٔ‌دیگری دربارهٔ محاسبهٔ‌عددی مجموعه‌های محدود می‌آوریم. این مسأله متعلق به لوئیس کرول ، مؤلف کتاب آلیس درسرزمین عجایب است . این‌مطلب جالب‌است‌که دوجسون ریاضی‌دان زیر نام‌مستعار لوئیس کرول این مطالب را نوشته است .

کرول در یکی از داستانهای خود ، این مسأله را می‌آورد :

«در یك نبرد سخت ، از ۱۰۰ راهزن ، ۷۰ نفر یك چشم خود را از دست دادند، ۷۵ نفر یك گوش ، ۸۰ نفر یك دست و ۸۵ نفر یك پای خود را . حداقل چند نفر از آنها هم چشم ، هم گوش ، هم دست و هم پای خود را از دست داده‌اند ؟ »

مجموعهٔ آدمهای یك چشم را A، مجموعهٔ آدمهای یك گوش را B، مجموعهٔ آدمهای یك دست را C وبالاخره مجموعهٔ‌آدمهای یك پا را

D می‌نامیم . مسأله می‌خواهد که مجموعهٔ $A \cap B \cap C \cap D$ را تخمین بزنیم. روشن است که تمام مجموعهٔ عمومی I ، تشکیل شده است ازاین مجموعهٔ $A \cap B \cap C \cap D$ وازراهزنهایی‌که یا هردوچشم، یا هردوگوش، یا هر دو دست و یا هردو پای خودرا حفظ کرده‌اند . بنابراین:

$$I = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup (A \cap B \cap C \cap D)$$

ازاینجا نتیجه‌می‌شودکه تعدادعضوهای مجموعهٔ I نمی‌تواندکمتر ازمجموع‌تعدادعضوهای مجموعه‌های A'، B'، C'، D' و $A \cap B \cap C \cap D$ باشد(تعداد عضوهای مجموعهٔ I وقتی مساوی‌مجموع‌تعداد عضوهای این مجموعه‌هاست‌که مجموعه‌های A' ، B' ، C' و D' ، دو به‌دو از هم جدا باشند). ولی تعداد عضوهای‌مجموعهٔ A' مساوی ۳۰، مجموعهٔ B' مساوی ۲۵ ، مجموعهٔ C' مساوی ۲۰ و مجموعهٔ D' مساوی ۱۵ است . چون تعداد عضوهای مجموعهٔ عمومی (یا مرجع) مساوی ۱۰۰ است ، داریم:

$$۱۰۰ \leqslant ۳۰ + ۲۵ + ۲۰ + ۱۵ + N(A \cap B \cap C \cap D)$$

و ازآنجا:

$$N(A \cap B \cap C \cap D) \geqslant ۱۰۰ - ۳۰ - ۲۵ - ۲۰ - ۱۵ = ۱۰$$

به این ترتیب لااقل ۱۰ نفر از راهزنها ، هم چشم ، هم‌گوش ،هم دست و هم پای خود را از دست داده‌اند .

جبر بول*

در ریاضیات ، بـه عنصرهای دیگری هم ، غیر از مجموعه‌ها، بر می‌خوریم،که دربارهٔ آنها عملهای جمع و ضرب‌به‌نحوی تعریف شده‌اند که با شرطهای ۱ تا ۲۶ سازگارند . این دستگاهها در سال ۱۸۴۷ ، به وسیلهٔ بول ریاضی‌دان انگلیسی ، مـورد مطالعه قـرارگرفت[1] ، به‌همین مناسبت ، اینگونه دستگاهها ، را جبر بول می‌نامند . ولی وقتی که این

۱) اتل لیلیان ووی نیچ، نویسندهٔ کتاب معروفِ «خرمگس» ، دختر همین بول ریاضی دان است .

نامگذاری کاملاً جای خود را بازکرده بود ، معلوم شد که قبل از بول، در سال ۱۶۸۵ ، جبری با همین قانونها بـه وسیلهٔ برادران برنولی مورد بررسی قرار گرفته بود .

دلیل اینکه برادران برنولی و بول، به‌یك مطلب توجه کردند، کاملاً قابل فهم است: همهٔ آنها به‌جبر منطقی علاقمند بودند که امکان می‌داد قضاوتها وبیانها را به‌شکل جبری عرضه‌کرد . وجبربول، وسیله‌ای است که درست در همین جهت خدمت می‌کند . عبارتها را در منطق ریاضی، گزاره می‌گویند که می‌تواند درست یا نادرست باشد. به‌این مناسبت در واقع، منطق به این پرسش علاقه‌ای نداردکه آیا یك‌گزاره درست است یا نادرست. در منطق ریاضی تنها در این باره بحث می‌کنندکه با چه قانونهایی می‌توان از گزاره‌های مفروض، گزاره‌های مرکب‌تری بدست آورد و چگونه از درستی ونادرستی گزاره‌های اصلی،درستی و نادرستی گزاره‌های مرکب معلوم می‌شود .

روی گزاره‌ها ، عملهای زیر را می‌توان انجام داد :

۱) نقض ـ که گزارهٔ مفروض X را به گزارهٔ نقیض آن $\overline{X}$ تبدیل می‌کند . نقیض یك گزاره وقتی درست است‌که گزارهٔ مفروض نادرست باشد و وقتی نادرست است که گزارهٔ X درست باشد .

۲) ترکیب عطفی ـ که از دوگزارهٔ مفروض X و Y ، گزارهٔ سوم $X \wedge Y$ را به‌وجود می‌آورد وتنها درحالتی درست است که هردو گزارهٔ X و Y درست باشند .

۳) ترکیب فصلی ـ که از دو گزارهٔ مفروض X و Y ، گـزارهٔ سوم $X \vee Y$ را به‌وجود می‌آورد ودرحالتی‌درست‌است که‌لااقل یکی‌ازدوگزارهٔ مفروض درست باشد .

۴) ترکیب شرطی ـ که از دوگزارهٔ مفـروض X و Y ، گـزارهٔ سوم $X \Longrightarrow Y$ را به‌وجود می‌آورد و تنها درحالتی نادرست است‌که X درست

و Y نادرست باشد.

در بسیاری موارد ، یك گزاره به‌معنای آن‌است که عضوی مانند x، به‌زیر مجموعهٔ A از یك مجموعهٔ عمومی I تعلق دارد. در این مـــورد ، عملهای ۱ تا ۴ روی گزاره‌ها، متناظر با عملهای مشخصی روی مجموعه‌ها است. مثلاً نقیض گزارهٔ «$x \in A$» عبارت‌است از گزارهٔ «$x \in A'$». به‌این ترتیب، بدست‌آوردن متمم A ، متناظر است بانقیض گزارهٔ «$x \in A$». به‌همین ترتیب ، عمل اشتراك یا مقطع مجموعه‌های A و B ، متناظراست با ترکیب عطفی گزاره‌های «$x \in A$» و «$x \in B$»؛ عمل اجتماع مجموعه‌ها، متناظر است با ترکیب فصلی؛ ورابطهٔ $A \subset B$، متناظر است با ترکیب شرطی «$x \in A$» و «$x \in B$». ضمناً گزارهٔ «$x \in I$» همیشه درست و گزارهٔ «$x \in \phi$» همیشه نادرست است .

از آنچه گفتیم بطور طبیعی برمی‌آید که قانونهای ۱ تا ۲۶ نه‌تنها برای مجموعه‌ها، بلکه برای گزاره‌ها هم صحیح‌است، به‌شرطی که مفهوم $A \cap B$ رابه‌عنوان ترکیب عطفی گزاره‌ها؛ $A \cup B$ را به‌عنوان ترکیب فصلی گزاره‌ها؛ A' را به‌عنوان نقیض گـزارهٔ A ؛ $A \subset B$ را بـه‌عنوان ترکیب شرطی گزاره‌ها؛ I را به‌عنوان گزارهٔ همیشه درست و ϕ رابه‌عنوان گزارهٔ همیشه نادرست بپذیریم. به‌این ترتیب ، فرضهای «درست ـ گزاره»، جبر را نسبت به‌عملهای ۱ تا ۴ به‌وجود می‌آورد .

ولی جبر بول را با روشهای دیگری هم می‌توان ساخت (بـدون توجه به‌گزاره‌ها). مثلا همهٔ انواع ممکنهٔ دنباله‌ای را کـه شامل n رقـم باشد ، در نظرمی‌گیریم ، به‌نحوی که‌هررقم آن مساوی صفریا یك باشد . جمع و ضرب دو نمونه از این دنباله را «با روش مختصاتـی» تعریف می‌کنیم، ضمناً جدولهای جمع وضرب را به‌این‌صورت‌ترتیب می‌دهیم:

	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

ضرب منطقی

	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

جمع منطقی

مثلاً

$$(1,0,0,1)+(1,1,0,1)=(1,1,0,1),$$
$$(1,0,0,1).(1,1,0,1)=(1,0,0,1)$$

سپس ، اگر $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ باشد، وقتی $y \subset x$ می‌گیریم که برای هر مختصات داشته باشیم: $x_k \leqslant y_k$. اگر در دنباله، ۰ را به ۱ و ۱ را به ۰ تبدیل کنیم ، دنبالهٔ جدیدی بدست می‌آید که آنرا x' می‌نامیم . بالاخره ϕ را به‌وسیلهٔ دنبالهٔ (۰,۰,...,۰) و I را به‌وسیلهٔ دنبالهٔ (۱,۱,...,۱) نشان می‌دهیم. ازخواننده می‌خواهیم ، قانونهای ۱ تا ۲۶ را برای عملهای روی دنباله‌ها آزمایش کند .

نمونهٔ جالبی از جبر بول را به‌این ترتیب می‌توان بدست آورد که همهٔ مقسوم علیه‌های طبیعی یك عدد طبیعی N را ، که از حاصلضرب چند عدد اول مختلف بدست آمده است ، در نظر بگیریم . به‌عنوان عمل جمع مقسوم علیه‌ها ، تشکیل کوچکترین مضرب مشترك این مقسوم علیه‌ها ، و به‌عنوان عمل ضرب ، تشکیل بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها را انتخاب می‌کنیم . متمم مقسوم‌علیه n را ، عدد $n'=\frac{N}{n}$ می‌گیریم . بالاخره $m \subset n$ به‌حساب می‌آوریم، وقتی که m بر n قابل‌قسمت باشد . به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این عملها با شرطهای ۱ تا ۲۶ از نظر «جبر مجموعه‌ها» سازگارند، ضمناً نقش مجموعهٔ تهی ϕ به عهدهٔ عدد ۱ ، و نقش مجموعهٔ عمومی I به‌عهدهٔ عدد N است .

مثلا اگر $N = ۳۰$ بگیریم ، جبر بول از عـددهای (۱۰،۱۵،۳۰ ،۱،۲،۳،۵،۶) تشکیل شده است.«مجموع»مقسوم‌علیه‌های ۲ و ۵ برابر است با ۱۰ ، و «حاصلضرب» آنها برابر است با ۱ . متمم مقسوم‌علیه ۳ عبارت‌است‌از۱۰، زیرا داریم: ۱۰ = ۳ ÷ ۳۰ = ′۳. بالاخره ۱۵ $\subset$ ۵، زیرا ۱۵ بر ۵ قابل‌قسمت است .

۲

دنیای شگفت آور

بی‌نهایت

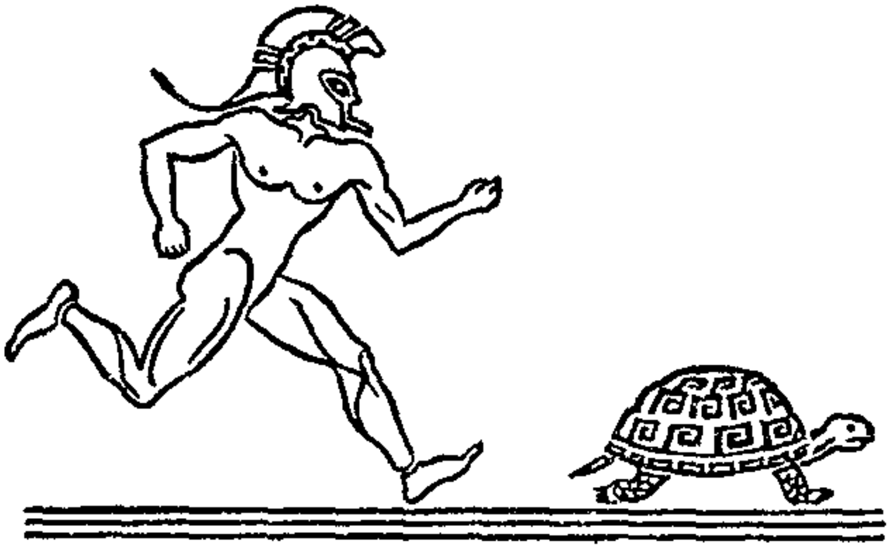
رازهای بی‌نهایت

بدون هیچ مبالغه‌ای می‌توان گفت که فکر بی‌نهایت در تمام ریاضیات نفوذ کرده است . در ریاضیات ، معمولا به‌اشیاء جداگانه (عددها یا شکلهای‌هندسی) علاقه‌ای ندارند ، بلکه دستهٔ کاملی از آنهارا مورد بررسی قرار می‌دهند : همهٔ عددهای طبیعی ، همهٔ عددها وغیره، که دراین‌صورت ازمجموعهٔ عضوهای جداگانهٔ بی‌شماری‌تشکیل شده‌اند .

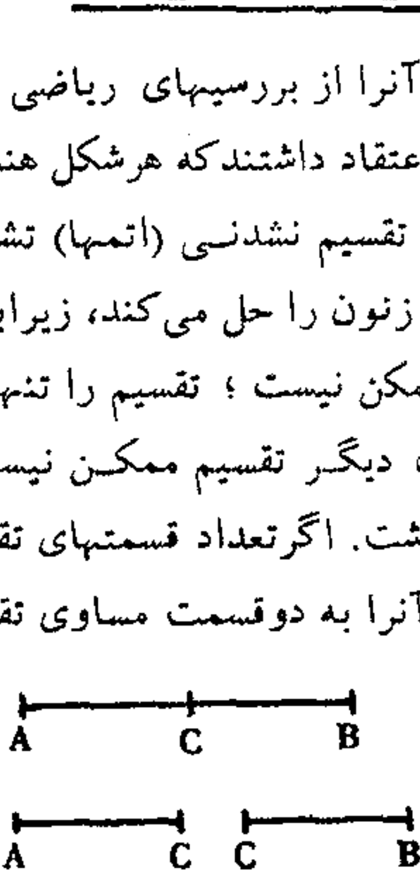
به‌همین مناسبت ریاضی‌دانها و فیلسوفها ، همیشه به‌مفهوم بی‌نهایت علاقمند بوده‌اند . این علاقه از همان زمانی به‌وجود آمد که معلوم شد بعد از هرعدد طبیعی ، عدد طبیعی دیگری قرار گرفته است ، یعنی رشتهٔ عددها نامحدود است . ولی نخستین آزمایشهای مربوط به آموزش بی‌نهایت ، منجربه‌معماهای زیادی شد.

مثلا ، زنون ،فیلسوف یونانی، با استفاده از مفهوم بی‌نهایت ، ناممکن بودن حرکت را ثابت‌کرد . او می‌گفت ، برای اینکه تیربتواند فاصله‌ای را طی‌کند ، ابتدا باید از نیم اول راه بگذرد، ولی قبل ازآنکه نیم اول راه را طی‌کند ، باید از یك‌چهارم اول راه ، از یك هشتم آن وغیره بگذرد . چون عمل نصف‌کردن هرگزتمام نمی‌شود (بی‌نهایت بار می‌شود آنرا نصف‌کرد) ، بنابراین تیر هم هرگز نمی‌تواند ازجای خود تکان بخورد . به‌همین ترتیب ، او ثابت کرد که آشیل تندپا ، هرگز نمی‌تواند به‌لاك‌پشت برسد .

به‌علت‌همین معماها وسفسطه‌ها بودکه ریاضی‌دانهای یونان قدیم،



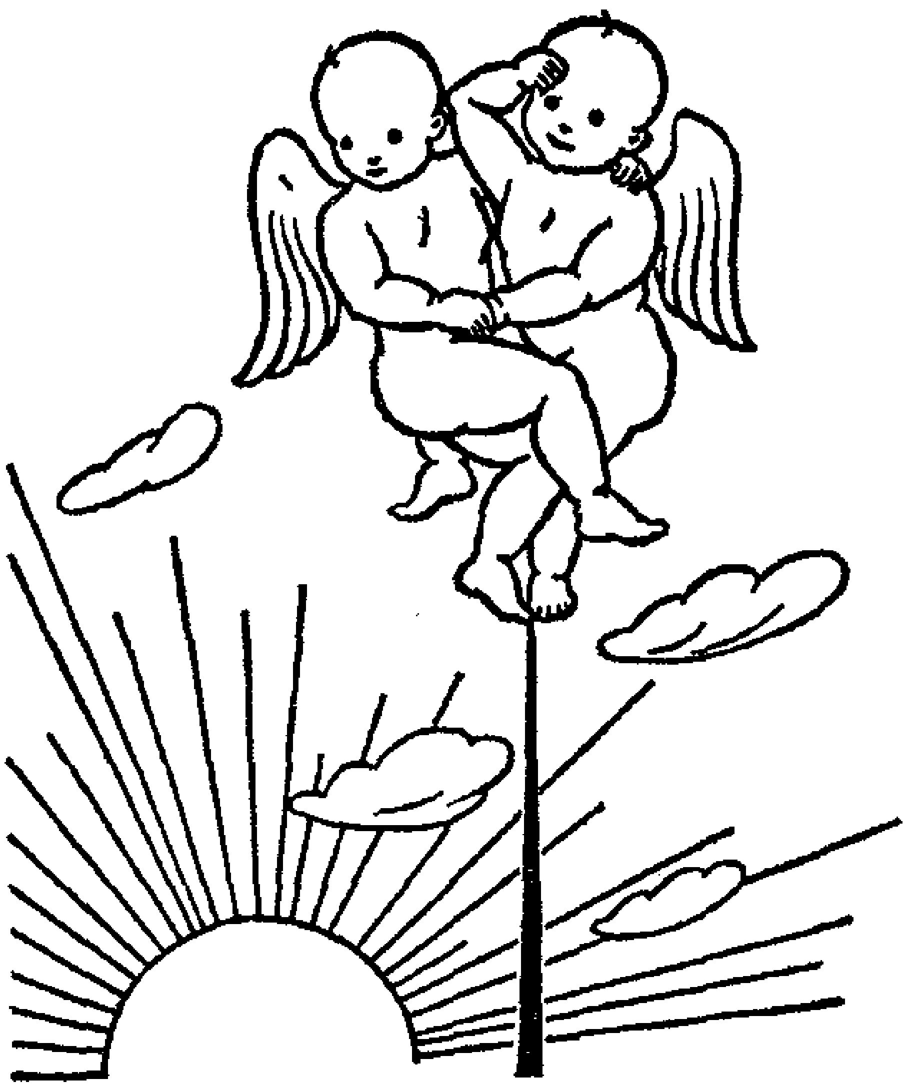
از برخورد با بی‌نهایت فرار می‌کردند و آنرا از بررسیهای ریاضی خود کنارگذاشته بودند . بعضی ازفیلسوفها اعتقاد داشتندکه هرشکل هندسی از تعداد محدودی قسمتهای بسیارکوچك تقسیم نشدنی (اتمها) تشکیل شده است . نظریهٔ اتمی به‌سادگی معمای زنون را حل می‌کند، زیرابنابر نظریهٔ اتمی ، بی‌نهایت تقسیم متوالی ممکن نیست ؛ تقسیم را تنها تا اتمها می‌توان انجام داد و از آن به‌بعد ، دیگر تقسیم ممکن نیست . ولی در این نظریه مشکل دیگری وجود داشت. اگرتعداد قسمتهای تقسیم نشدنی یك پاره‌خط ، فرد باشد، نمی‌توان‌آنرا به دوقسمت مساوی تقسیم کرد (شکل ۲۴) . دایره را هم نمی‌توان به دو قسمت مساوی تقسیم‌کرد: مرکز دایره تنها روی یکی از این قسمتها قرار می‌گیرد و این متناقض با تساوی آنهاست .



شکل ۲۴

بحث دربارهٔ بی‌نهایت‌گاه به‌گاه شدت می‌گرفت. مثلا ، افلاطون فیلسوف مشهور یونانی با چنان آشتی‌ناپذیری با نظریهٔ اتمی دموکریت در افتادکه همه‌جا نسخه‌های خطی این مؤلف را جستجو می‌کرد وآنهارا ازبین می‌برد ـ این روش مبارزه، تا قبل ازاختراع چاپ، خیلی مؤثربود.

روشهایی که متضمن استفاده از مفهوم بی‌نهایت بود، به‌دانشمندان یونانی اجازه داد که به‌نتیجه‌های مهمی، بخصوص در هندسه، دست یابند. ولی معماهای زنون، آنها را به‌احتیاط وملاحظه‌کاری عادت داد. مثلاً اقلیدس، نظریهٔ معروف خود را دربارهٔ نامحدود بودن مجموعهٔ عددهای اول، اینطور بیان می‌کند: «عددهای اول بیشتر از هر مقداری هستندکه برای عددهای اول پیشنهاد شود». به‌این ترتیب، اقلیدس تعداد عددهای اول را بیشتر از هرمقدار پیشنهادی می‌داند، ولی در این باره سکوت می‌کندکه آیا این مقدار بی‌نهایت است یا نه! دانشمندان یونان باستان، با چنان دقتی، روشهایی را که مفهوم بی‌نهایت در آن نقشی داشت، پنهان‌کردندکه در سده‌های ۱۶ و ۱۷، ریاضی‌دانهای اروپایی ناچار شدند دوباره این روشها را کشف کنند.



چند فرشته در انتهای سوزن جاگرفته‌اند؟

در سده‌های میانه، مفهوم بی‌نهایت اغلب دربحثهایی از این قبیل پیش می‌آمدکه آیا مجموعهٔ فرشته‌هایی‌که در انتهای یك سوزن جا می‌گیرند، متناهی‌است یا نامتناهی؟ کاربرد وسیع بی‌نهایت در ریاضیات، از سدهٔ هفدهم شروع می‌شود، یعنی زمانی‌که‌آنالیز ریاضی به‌وجودآمد. مفاهیمی از قبیل «مقدار بی‌نهایت بزرگ» و «مقدار بی‌نهایت کوچك» در هرقدم در استدلالهای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولی در این دوره با مجموعه‌ای که بی‌نهایت عضو داشته باشد، کاری نداشتند، بلکه با مقادیری‌کار داشتندکه ضمن تغییر خود بزرگ و بزرگتر می‌شدند، تا جایی‌که سرانجام ازهرمقدارثابتی تجاوزمی‌کردند. این مقادیررا «بالقوه بی‌نهایت بزرگ» می‌نامیدند، به‌این‌مفهوم که‌می‌توانند به‌هراندازهٔ دلخواه بزرگ شوند.

در میانه‌های سدهٔ نوزدهم، بررسی مجموعه‌هایی‌که از بی‌نهایت عضوتشکیل‌شده بودند،شروع‌شد وازاینجا به‌تحلیل‌مفهوم بی‌نهایت اقدام کردند. آفرینندگان نظریهٔ ریاضی مجموعه‌های نامتناهی برنارد بولتسانو ریاضی‌دان اهل چك (که‌کار اصلی او سالها پس ازمرگ او چاپ شد) و ژرژ کانتور ریاضی‌دان اهل‌آلمان بودند. این دانشمندان بی‌نظیر موفق‌شدند نظریهٔ مجموعه‌ها را به‌یکی از قسمتهای مهم ریاضیات‌تبدیل‌کنند.

موفقیت اساسی بولتسانو و کانتور در مطالعهٔ خواص مجموعه‌های نامتناهی بود؛ خواص مجموعه‌های متناهی تاقبل ازآنها هم روشن بود. معلوم شدکه خاصیتهای مجموعه‌های متناهی ونامتناهی،کاملاً شبیه هم نیستند: بسیاری‌چیزهاکه‌برای مجموعه‌های متناهی ممکن‌نیست،به‌سادگی در مجموعه‌های نامتناهی صدق می‌کند. مثلاً فرض‌کنید در هر اطاق یك مهمانخانه یك مسافر باشد و شما بخواهید در هر اطاق آن باز هم یك اجاره‌نشین ساکن‌کنید، به‌نحوی که در وضع‌جدید هم، در هراطاق تنها یك‌نفر زندگی‌کند. خیال‌می‌کنید چنین‌کاری ممکن‌است؟ البته،اگرتعداد

اطاقهای مهمانخانه محدود باشد، ممکن نیست. ولی اگر این مهمانخانه بی‌نهایت اطاق داشته باشد، وضع چگونه‌است؟ ولی چنین مهمانخانه‌هایی را تنها می‌توان درداستانهای ایون تیخی، آشنایی که بین ستارها مسافرت می‌کند، پیداکرد. از زبان خود او بشنویم.

مهمانخانهٔ عجیب
یا هزار و یکمین مسافرت ایون تیخی

خیلی دیر به‌خانه برگشتم، شب یاد بود، در باشگاه «کهکشان آندرومد»، تا خیلی بعد از نیمه شب طول کشید. کابوس تمام شب، دست از من برنمی‌داشت. خوابهای آشفته می‌دیدم. مثل این بود که دیوهیولایی می‌خواست مرا ببلعد. به‌نظرم آمد که دوباره روی سیارهٔ دودنوتها پرواز می‌کنم و نفهمیدم که چگونه ماشین بزرگی که در آنجا آدمها را به‌شش گوشه تبدیل می‌کرد، فرارکرد... زنگ تلفن، مرا به‌دنیای واقعی برگرداند. پروفسور تارانتوف، دوست قدیمی و همکار من در مسافرتهای فضایی بین ستارگان، پای تلفن بود، که می‌گفت:

«ایون عزیز، یك دستور فوری. منجمین، چیز عجیبی در کیهان کشف کرده‌اند، از یك کهکشان به‌کهکشان دیگر، خط سیاه اسرارآمیزی کشیده شده است. هیچکس نمی‌داند موضوع از چه قرار است. بهترین رادیو تلسکوپها، تلسکوپهای نوترونی و جاذبه‌ای، نتوانسته‌اند پرده از این راز بردارند. امید همه، تنها به‌توست. فوراً به‌طرف ستارگان آ ت د- ۱۵۸۷، پروازکن».

فردای آن‌روز موشك فوتونی خودم را از تعمیرگاه گرفتم، شتاب سنج زمانی وآدمك الکترونی را درآن نصب کردم. آدمك همهٔ زبانهای فضایی و همهٔ داستانهای مربوط به ستارگان را می‌دانست (ومی‌توانست مرا از تنهایی و دلتنگی نجات دهد). من به‌طرف مأموریت خود پرواز

کردم .

وقتی که آدمك تمام داستانهای خود را تمام کرد و می‌خواست که آنهارا از نو شروع کند (هیچ چیز بدترازاین نیست که آدمك الکترونی تاریخ باستان را برای بار دهم تکرار کند)، هدف مسافرت از دورنمایان شد . مه تیره‌رنگی که خط اسرارآمیزرا گسترده بود درعقب‌بودوجلوآن به چشم می‌خورد : «مهمانخانهٔ فضا» .

معلوم شدآوارگان بین ستاره‌ها ،که من زمانی برای آنها سیارهٔ کوچکی ساخته بودم ، سیارهٔ خود را ، به مناسبت اینکه به تکه‌های کوچکی تقسیم شده بود ، از دست داده و دوباره بدون پناهگاه باقی مانده‌اند . اینها برای اینکه بیش ازاین درکهکشانهای بیگانه سرگردان نمانند ، تصمیم گرفتند ساختمان عظیمی برای همهٔ مسافرین فضایی بسازند . این مهمانخانه تقریباً از همهٔ کهکشانها می‌گذشت . می‌گویم «تقریباً همه» زیراآوارگان، بعضی ازکهکشانهای غیرمسکونی را خراب کرده بودند و از باقیماندهٔ آنها برجهای مهمانخانه را ساخته بودند .

مهمانخانه کاملاً مجهزبود.درهراطاق آن‌شیرهایی‌بودکه پلاسمای سرد وگرم درآنها جریان داشت. درصورت تمایل می‌شد شب به‌صورت گردهای اتمی درآمد وصبح دوباره به‌حالت اول برگشت.

مهمتر از همه اینکه مهمانخانه بی‌نهایت اطاق داشت . آوارگان امیدوار بودند که به این ترتیب ، هیچ مسافری در فضا سرگردان نماند و به جملهٔ ناراحت‌کنندهٔ «اطاق خالی نداریم» برنخورد .

با همهٔ اینها ، من شانس نیاوردم . وقتی که به اطاق انتظار مهمانخانه رفتم ، نخستین چیزی که به چشمم خورد ، این تابلو بود: «اعضای کنگرهٔ جانورشناسان فضایی ، برای ثبت نام خود به طبقهٔ ۱۲۷ مراجعه کنند» .

چون جانورشناسان فضایی از همهٔ کهکشانها آمده بودند ، یك

مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دادند ، به‌همین مناسبت همهٔ اطاقها به وسیلهٔ نمایندگان کنگره اشغال شده بود . برای من جایی پیدا نمی‌شد . مسئول ذخیرهٔ جا در مهمانخانه واقعاً تلاش کرد که مرا در کنار یکی از جانورشناسان جابدهد. ولی وقتی برای من روشن شد که یکی از همسایه‌هایی

ساختمان مهمانخانهٔ فضا

که برای من منظور شده بود با گاز مسموم‌کننده و بدبوی فلوئور نفس می‌کشد ، و دیگری در درجهٔ حرارت ۸۶۰ درجه زندگی می‌کند، با کمال ادب از همجواری این همسایه‌های «مطبوع» عذر خواستم .

خوشبختانه ، مدیر مهمانخانه از آوارگان بود و خدمتهایی که من زمانی به گروه او انجام داده بودم ، به‌خاطر داشت . او سعی داشت به‌هرترتیبی شده مرا درمهمانخانه‌جا بدهد، آخرهنگام شب درمسافرتهای فضایی احتمال ورم ریه‌ها زیاد است . او بعد از کمی فکر ، به مسئول ذخیرهٔ جا روکرد و گفت :

ـ او را به اطاق شمارهٔ ۱ بفرست .

مسئول ذخیرهٔ جا با تعجب پرسید :

ـ پس کسی راکه در این اطاق ساکن است کجا بفرستم ؟

ـ او را به اطاق شمارهٔ ۲ بفرست ، ساکن شمارهٔ ۲ را به‌شمارهٔ ۳ و ساکن شمارهٔ ۳ را به شمارهٔ ۴ و غیره .

اینجا بود که من به خاصیت غیرعادی مهمانخانه پی بردم . اگر تعداد اطاقهای مهمانخانه محدود بود ، این راه حل باعث می‌شد که مسافر آخرین اطاق در فضای بین ستاره‌ها سرگردان بماند . ولی چون تعداد اطاقهای مهمانخانه، بی‌نهایت بود ، هیچکس بدون جا باقی نماند و من جای هیچ مسافر دیگری را نگرفتم .

و من هیچ تعجب نکردم، وقتی‌که صبح فردای‌آنروز به‌من‌پیشنهاد شد که به اطاق شمارهٔ ۱۰۰۰۰۰۰ منتقل شوم . مطلب این بود که نمایندده‌های کهکشان و. س . ك ۳۴۷۲ درکنگرهٔ‌جانورشناسان فضایی دیر رسیده بودند و می‌بایستی به تعداد آنها که ۹۹۹۹۹۹ نفر بودند، اطاق خالی تهیه کرد . ولی وقتی که روز سوم اقامت خودم در مهمانخانه به مسئول ذخیرهٔ جا مراجعه‌کردم ، چشمهایم سیاهی رفت . درمقابل پنجره صفی به نوبت ایستاده بود که انتهای آن جای دوری نزدیکیهای ابرهای

ماژلان‌گم می‌شد . این صداها پیاپی به‌گوش می‌رسید :

«دو تمبر کهکشان آندرومد را با تمبر سیروس عوض می‌کنم !»

«چه کسی تمبر سال ۵۷ سدهٔ فضایی را دارد ؟»

با حیرت به‌طرف مسئول رفتم وپرسیدم :

ـ اینها کیستند ؟

ـ کنگرهٔ تمبرشناسان بین کهکشانها .

ـ و عدهٔ آنها زیاد است؟

ـ عدهٔ آنها بی‌نهایت است : از هر کهکشان یك نماینده آمده است .

ـ ولی‌آنها را چطور جا می‌دهید ، آخرجانورشناسان فضایی فردا خارج خواهند شد .

ـ نمی‌دانم . پنج دقیقه‌ای است که در بارهٔ همین مطلب با مدیر صحبت می‌کنم .

ولی مسأله کاملاً پیچیده بود و این پنج دقیقه (همانطور که در زمین هم اغلب پیش می‌آید) درست یك‌ساعت طول کشید. بالاخره مسئول ذخیرهٔ جا از مدیر مهمانخانه جدا شد وشروع به جا دادن مسافران کرد . ابتدا دستور داد مسافر اطاق شمارهٔ ۱ به شمارهٔ ۲ برود . این دستور برای من عجیب بود ، زیرا با تجربه‌ای که داشتم می‌دانستم که به این ترتیب تنها یك‌اطاق‌خالی می‌شود،درحالی‌که تعداد تمبرشناسان بی‌نهایت بود . ولی مسئول به دستورات خود ادامه داد :

ـ مسافر اطاق شمارهٔ ۲ به شمارهٔ ۴ ، مسافر شمارهٔ ۳ به شمارهٔ ۶ و بطورکلی مسافر اطاق شمارهٔ n به اطاق شمارهٔ $2n$ منتقل شود .

حالا دیگر نقشهٔ او معلوم بود: به این ترتیب، او بی‌نهایت اطاق با شماره‌های فرد را خالی‌کرده بود و می‌توانست تمبرشناسان را درآنها جا دهد . در نتیجه اطاقهای با شمارهٔ زوج در اختیار جانورشناسان و

اطاقهای با شمارهٔ فرد در اختیار تمبرشناسان قرارگرفت! و اما من: در سه روزی که در آنجا بودم چنان آشنایی و دوستی با جانورشناسان پیدا کرده بودم، که آنها مرا به عنوان رئیس افتخاری کنگرهٔ خود انتخاب کرده بودند ؛ من‌هم همراه جانور شناسان اطاق خود را تـرك کردم و از شمارهٔ ۱۰۰۰۰۰۰ به اطاق شمارهٔ ۲۰۰۰۰۰۰ رفتم . تمبرشناس آشنای من که در نوبت ۵۷۴ بود ، اطاق شمارهٔ ۱۱۴۷ را اشغال کرد. بطورکلی تمبرشناسی که در ردیف n ام بود ، در اطاق شمارهٔ $2n-1$ ساکن شد.

روز بعد وضع اطاقها بهترشد ؛ کنگرهٔ جانورشناسان تمام شده بود وآنها به خانه‌های خود بازگشتند. من‌هم به محل اقامت مدیرمهمانخانه انتقال پیداکردم که درآنجا یك اطاق خالی شده بود. ولی این موقعیت، که خیلی خوب بود ، همیشه مورد موافقت مسئول تهیهٔ جـا قرار نمی گرفت. میزبان مهمان‌نواز من دلتنگ بود. از او پرسیدم:

ـ چه پیش‌آمده است ؟

ـ نیمی از شماره‌ها خالی است ؛ نقشهٔ مالی اجرا نمی‌شود .

در واقع من اصلاً نمی‌فهمیدم که صحبت برسرکدام نقشهٔ مالی است ، آخر پول از یك مجموعهٔ نامحدود وصول می‌شد ، ولی با وجود این توصیه‌کردم :

ـ مسافران را فشرده‌تر کنید ، آنها را طوری جابجا کنیدکه همهٔ اطاقها اشغال شود .

انجام این کار خیلی ساده بود . تمبرشناسان در اطاقهای باشمارهٔ فـرد ، ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ و غیره بودند . ساکن اطاق شمارهٔ ۱ به‌جای خود باقی می‌ماند ، از شمارهٔ ۳ به شمارهٔ ۲، از شمارهٔ ۵ به شمارهٔ ۳، از شمارهٔ ۷ بـه شمارهٔ ۴ و غیره منتقل مـی‌شد . در نتیجه ، بـدون اینکه مسافر جدیدی وارد شود ، تمام اطاقها پر می‌شد .

ولی نگرانیهای مدیردراینجا تمام نمی‌شد . معلوم شدکه‌آوارگان

به ساختن همین مهمانخانهٔ فضا ، اکتفا نکرده‌اند . معمارهای ناآرام و خستگی‌ناپذیر ، مجموعهٔ نامحدودی مهمانخانه ساخته‌بودندکه درهرکدام ازآنها هم بی‌نهایت اطاق وجود داشت . برای این منظور ،آنها بسیاری ازکهکشانها راخراب کرده‌بودند،این عمل تعادل بین کهکشانهارا به‌هم زده بودکه می‌توانست موجب عواقب غم‌انگیزی بشود ، به‌همین مناسبت به آنها پیشنهاد شده بود که همهٔ مهمانخانه‌ها ، بجز مهمانخانهٔ فضا را ببندند ومصالح آنهارا به‌جای اصلی برگردانند . ولی اجرای این دستور مشکل بود ، زیرا همهٔ مهمانخانه‌ها (و از آنجمله مهمانخانهٔ ما)، پراز مسافر بودند. می‌بایستی ساکنین بی‌نهایت مهمانخانه را ،که هرکدام از آنها بی‌نهایت مستأجر داشت ، به یك مهمانخانه منتقل کرد ، که تازه خود این مهمانخانه هم پر بود . مدیر با صدای بلندگفت :

ـ برای من کافی است ! من ابتدا دریك مهمانخانهٔ پر یك‌نفر جا دادم ، سپس ۹۹۹۹۹۹ مسافر جدید را ، سپس بـی‌نهایت مراجعه‌کنندهٔ تازه را پذیرفتم ، حالا از من می‌خواهند که مجموعهٔ نامتناهی که شامل مجموعه‌های نامتناهی مستأجراست دراین مهمانخانه‌جابدهم. نه! مهمانخانه که‌کش نمی‌آید ، من چطور جا تهیه‌کنم ؟

ولی‌دستورباید اجراشود وبعدازپنج‌روزباید همه‌چیزآمادهٔ پذیرفتن مهمانهای جدیدباشد. هیچکس در این روزها درمهمانخانه کارنمی‌کرد ، همه فکر می‌کردندکه چگونه مسأله را حل‌کنند . حل مسأله به مسابقه گـذاشته شد و اعلام شد کـه برندهٔ آن به‌جای دریافت‌جایزه ، به‌یکی از کهکشانها مسافرت مجانی خواهدکرد . ولی همهٔ راه حلهای پیشنهادی به مناسبت ناتوانی‌آنها برگردانده شد . مثلاً آشپز جوانی پیشنهادکرده بودکه ساکنین موجود مهمانخانهٔ ما به اطاقهای شمارهٔ ۱،۱۰۰۱،۲۰۰۱ و غیره منتقل شوند. سپس ساکنین مهمانخانهٔ دوم را دراطاقهای شمارهٔ ۲ ، ۱۰۰۲ ، ۲۰۰۲ و غیره و ساکنین مهمانخانهٔ سوم را در اطاقهای

شمارهٔ ۳، ۱۰۰۳، ۲۰۰۳ و غیره جا دهند و همینطور برای مهمانخانه‌های بعدی. این طرح به‌این‌مناسبت برگردانده شد که تنها برای مسافران ۱۰۰۰ مهمانخانه جا تهیه می‌کرد و ساکنین مهمانخانهٔ ۱۰۰۱ بدون جا می‌ماندند.

به‌این مناسبت، این موضوع به‌خاطرم آمد که وقتی که سناتورهای متملق رومی به امپراطور تیبر پیشنهاد کردند که ماه سپتامبر را به‌افتخار او «تیبر» بنامند (ماههای قبلی هم به نام امپراطورها، ژول و اگوست نامیده می‌شد)، امپراطور با طعنه پرسید: «در این‌صورت به امپراطور سیزدهم چه پیشنهادی خواهید کرد؟»

حسابدار مهمانخانه راه حلی پیشنهاد کرد که خیلی بد نبود. او توصیه کرد که ازخاصیت تصاعدهندسی استفاده شود و ساکنین مهمانخانه‌ها را به این ترتیب جا بدهند: ساکنین مهمانخانهٔ اول را در شماره‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و غیره (این عددها تشکیل یك تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ می‌دهند)، ساکنین مهمانخانهٔ دوم درشماره‌های ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و غیره (و اینها جمله‌های یك تصاعد هندسی با قدر نسبت ۳ هستند). به‌همین ترتیب برای ساکنین سایر مهمانخانه‌ها. مدیر از او پرسید:

ـ پس برای ساکنین مهمانخانهٔ سوم باید از تصاعد هندسی با قدر نسبت ۴ استفاده کرد؟

حسابدار جواب داد:

ـ البته.

ـ در این صورت به اشکال برمی‌خوریم، در اطاق شمارهٔ ۴، مسافری از مهمانخانهٔ اول را جا داده‌ایم وحالا باید درهمانجا، مسافری از مهمانخانهٔ سوم را جا بدهیم.

حالادیگرنوبت من بود که ثابت کنم بی‌جهت‌پنج‌سال وقت خودرا

در آکادمی ستاره به‌خاطر تحصیل ریاضیات ، صرف نکرده‌ام .

ـ از عددهای اول استفاده کنید ! ساکنین مهمانخانهٔ اول را در شماره‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... ، ساکنین مهمانخانهٔ دوم را درشماره‌های ۳ ، ۹ ، ۲۷ ، ۸۱ ، ... ، ساکنین مهمانخانهٔ سوم را در شماره‌های ۵، ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ، ... ، ساکنین مهمانخانهٔ چهارم را در شماره‌های ۷ ، ۴۹ ، ۳۴۳ ، ... جا بدهید .

مدیر پرسید :

ـآیا در این‌صورت دیگردر هیچ اطاقی دومسافر نخواهد بود ؟

ـ نه ! زیرا اگر دو عدد اول را در نظر بگیریم ، هیچ توانی از آنها (به‌شرطی‌که نماعددی طبیعی باشد) با هم‌مساوی نخواهد بود. اگر p و q دوعدد اول و ضمناً $p \neq q$ ، و m و n دوعدد طبیعی باشد ، داریم $p^m \neq q^n$.

مدیر استدلال مرا تأییدکرد و همان وقت روش‌کاملتری هم‌ارائه داد، که درآن فقط ازدوعدد اول ۲ و ۳ استفاده می‌شد . او پیشنهادکرد که ساکن اطاق شمارهٔ mام از مهمانخانهٔ n ام را به‌اطاق شمارهٔ $۲^m \times ۳^n$ از مهمانخانهٔ خودمان بفرستیم ، زیرا اگر $m \neq p$ و $n \neq q$ باشد ، داریم : $۲^m \times ۳^n \neq ۲^p \times ۳^q$. به این ترتیب در هیچ اطاقی دونفرنخواهد بود.

این پیشنهادهمه را به وجدآورد . مسأله‌ای‌که به‌نظر حل نشدنی می‌رسید ، حل شده بود . ولی جایزه را نه من بردم و نه مدیر ، زیرا در راه حلهای ما تعداد زیادی از اطاقها خالی می‌ماند (در پیشنهاد من شماره‌هایی از نوع ۶ ، ۱۰ ، ۱۲ و بطورکلی هر شماره‌ای که توانی از یك عدد اول نبود؛ ودرپیشنهاد مدیر، شماره‌هایی‌که به‌صورت$۲^m \times ۳^n$ نبودند) . بهترین پیشنهاد را یکی از تمبرشناسان دادکه رئیس آکادمی ریاضی‌کهکشان قو بود .

او توصیه‌کردکه ابتدا جدولی ترتیب دهیم به‌نحوی‌که درسطرهای

این جدول ، شمارهٔ مهمانخانه‌ها و درستونهای آن ، شمارهٔ اطاقها قرار داشته باشد . مثلاً در برخورد سطر چهارم و ستون ششم نوشته شود : اطاق ششم از مهمانخانهٔ چهارم . ایـن جدول چنین است (البته این ، گوشهٔ چپ وبالای جدول است، زیرا برای نوشتن تمام جدول به‌بی‌نهایت سطر و ستون نیاز داریم) :

(۱ ، ۱) (۱ ، ۲) (۱ ، ۳) (۱ ، ۴) (۱ ، ۵) ... (۱ ، n) ...
(۲ ، ۱) (۲ ، ۲) (۲ ، ۳) (۲ ، ۴) (۲ ، ۵) ... (۲ ، n) ...
(۳ ، ۱) (۳ ، ۲) (۳ ، ۳) (۳ ، ۴) (۳ ، ۵) ... (۳ ، n) ...
(۴ ، ۱) (۴ ، ۲) (۴ ، ۳) (۴ ، ۴) (۴ ، ۵) ... (۴ ، n) ...
(۵ ، ۱) (۵ ، ۲) (۵ ، ۳) (۵ ، ۴) (۵ ، ۵) ... (۵ ، n) ...
. . . .
(m ، ۱) (m ، ۲) (m ، ۳) (m ، ۴) (m ، ۵) ... (m ، n) ...
. . . .

تمبرشناس ریاضی‌دان گفت :

ـ و حالاآنها رابه‌ترتیب مربعی در مهمانخانهٔ خودتان جا دهید .

ـ چطور ؟ مدیر روش کار را نفهمیده بود .

ـ (۱،۱) رأ در شمارهٔ ۱ جا دهید ، یعنی از اطاق اول مهمانخانهٔ اول به شمارهٔ ۱ ؛ از (۲ ، ۱) به‌شمارهٔ ۲ ، یعنی از اطاق دوم مهمانخانهٔ اول به‌شمارهٔ ۲ ؛ از (۲ ، ۲) به شمارهٔ ۳ ، یعنی ازاطاق دوم مهمانخانهٔ دوم به شمارهٔ ۳؛ از (۱ ، ۲) به شمارهٔ ۴، یعنی از اطاق اول مهمانخانهٔ دوم به‌شمارهٔ ۴ . به این ترتیب ساکنین مربع به ضلع ۲ راکه در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرارگرفته است ، جا داده‌اید . حالا مستأجر (۳،۱) را به شمارهٔ ۵ منتقل کنید ؛ از (۳ ، ۲) به شمارهٔ ۶ ؛ از (۳ ، ۳) بـه شمارهٔ ۷ ؛ از (۲ ، ۳) به شمارهٔ ۸ ؛ از (۱ ، ۳) به شمارهٔ ۹ . به این ترتیب مربع به ضلع ۳ هم تمام می‌شود .

ریاضی‌دان تمبرشناس کاغذی برداشت و روی آن طرح زیر را رسم کرد :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & \dots & (1,n) & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \dots & (2,n) & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \dots & (3,n) & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & \dots & (4,n) & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & \dots & (5,n) & \dots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & (n,5) & \leftarrow\dots & (n,n) & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

مدیر که هنوز تردید داشت پرسید :

ـ آیا به این ترتیب برای همه‌جا خواهد بود ؟

ـ البته ! در این‌طرح، ما در n^2 شمارهٔ مهمانخانهٔ خودمان،ساکنین n اطاق اول n مهمانخانهٔ اول را جا داده‌ایم ، به‌همین ترتیب دیر یا زود نوبت دیگران هم فرا می‌رسد . مثلاً اگر کسی در اطاق شمارهٔ ۱۳۶ از مهمانخانهٔ شمارهٔ ۲۱۷ باشد، اطاق خودش را در قدم ۲۱۷ ام بدست می‌آورد . شمارهٔ اطاق او را به‌سادگی می‌توان حساب کرد . این شماره برابر است با $217^2 - 136 + 1$. بطورکلی ، اگرکسی در اطاق شمارهٔ n ازمهمانخانهٔ m باشد، درحالت $n \geqslant m$ به‌اطاق‌شمارهٔ $(n-1)^2 + m$، و در حالت $n<m$ به اطاق شمارهٔ $m^2 - n + 1$ منتقل می‌شود .

این‌طرح‌پیشنهادی بسیارجالب بود،همهٔ ساکنین‌همهٔ‌مهمانخانه‌ها، در مهمانخانهٔ ما جا می‌گرفتند وضمناً هیچکدام از اطاقهای «مهمانخانهٔ

فضا» هم‌خالی‌نمی‌ماند. ریاضی‌دان تمبرشناس جایزهٔ مسافرت به‌کهکشان ل . ت . ر ـ ۲۸۷ را برده بود .

مدیربه‌افتخارحل این مشکل، جایزه‌ای ترتیب داد که همهٔ ساکنین مهمانخانه از آن برخوردار شدند . ترتیب این جایزه هم خالی از اشکال نبود . ساکنین اطاقهای شماره‌های زوج نیم‌ساعت تأخیر کردند و وقتی که به سالن آمدند ، همهٔ صندلیها اشغال بود ؛ میزبان مهمان‌نواز برای همهٔ‌آنها جا تهیه کرد، منتها کمی طول کشید تاهرکسی به‌صندلی جدیدش منتقل شود (البته بدون اینکه حتی یك صندلی جدید به سالن آورده شود) . سپس به‌هریك از مهمانها دو پرس بستنی داده شد ، در حالی‌که برای هرمهمان تنها یك پرس درست شده بود . امیدوارم خواننده بفهمد که این وضع چگونه پیش‌آمده است .

من بعد ازآنکه بستنیها را خوردم، درموشك فوتونی خود نشستم و به زمین بازگشتم تا همهٔ آنچه راکه در فضا دیده بودم، برای ساکنین زمین بازگو کنم . علاوه برآن می‌خواستم با ریاضی‌دانهای نامی زمین و دوست خودم پروفسور تارانتوف در بارهٔ خاصیتهای یك مجموعهٔ‌نامتناهی بحث کنم .

از نویسنده

تا اینجا به داستان قهرمان خود گوش کردیم ، ولی بعضی از حکایتهای او در آدم ایجاد شك می‌کند . بنا برنظریهٔ نسبیت نمی‌توان علامتها را با سرعتی بیش از ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر درثانیه فرستاد. بنابراین حتی برای اینکه نخستین دستور مسئول مهمانخانه به اطاقها برسد ، به بی‌نهایت وقت نیاز داریم . ولی از ایون تیخی بیش از این نباید انتظار داشت ، تمام مسافرت او همراه با نشدنیهاست .

این فصل کتاب را به‌مجموعه‌های نامتناهی اختصاص داده‌ایم؛ ولی

برای داشتن نمونـه‌هایی از این مجموعه‌ها ، لازم نیست به فضای بین ستارگان پروازکنیم ، بلکه از پاره خط [a،۱] یا مربع به‌ضلع ۱ گفتگو خواهیم کرد ، که‌درآنجاها‌هم به اندازهٔ کافی‌به پیش آمدهای غیر عادی برخواهیم خورد .

مجموعه‌ها را چگونه مقایسه می کنند

در فصل اول از خاصیتهایی نام بردیم که هم برای مجموعه‌های متناهی و هم برای مجموعه‌های نامتناهی درست است . حالا می‌خواهیم به‌خاصیتهایی بپردازیم که تنها مربوط به‌مجموعه‌های نامتناهی است. از قصهٔ ایون تیخی معلوم می‌شود که این خاصیتها، بکلی باآنچه‌که دربارهٔ مجموعه‌های متناهی مـی‌دانیم ، متفاوت است : چیزهایی کـه برای مجموعه‌های متناهی نشدنی است ، بـرای مجموعه‌های نامتناهی شدنـی به‌نظر می‌رسد .

نخستین موضوعی‌که در اینجا به‌آن می‌پردازیم، موضوع مقایسهٔ مجموعه‌های بی‌نهایت با یکدیگر است . برای مجموعه‌های متناهی با طبیعتهای‌مختلف، همیشه‌می‌توان گفت که کدامیك‌شامل‌عضو بیشتری‌است و کدامیك‌شامل‌عضو کمتر. ولی‌مقایسهٔ‌مجموعه‌های‌نامتناهی‌خیلی‌پیچیده‌تر است. مثلاً پاسخ به‌این‌پرسش‌را به‌سادگی نمی‌توان داد‌که کدام بیشترند: عددهای طبیعی یا عددهای‌گویا ؛ عددهای‌گویا یا عددهای حقیقی ؟کجا نقطه‌های بیشتری است ؛ روی یك پـاره خط یا روی تمام خط ؛ روی یك خط یا داخل یك مربع ؟

اگر بطور سطحی قضاوت کنیم، به‌نظر می‌رسد که پاسخ به این پرسشها ، خیلی هم مشکل نیست . مگر نه این‌است‌که مجموعهٔ عددهای طبیعی قسمتی از عـددهای گویاست ، مگر پاره خط جزئی از تمام خط نیست ؟آیا از اینجا روشن نمی‌شودکه عددهای طبیعی‌کمتر از عددهای

گویا یا نقطه‌های روی یك پاره خط کمتر از نقطه‌های روی تمام خطاست؟ خواهیم دید که این نتیجه‌گیری به‌هیچوجه روشن نیست . ما هیچ کجا ثابت نکرده‌ایم که قانونهای مجموعه‌های متناهی برای مجموعه‌های نامتناهی هم درست است ؛ مثلاً معلوم نیست که قانون «جزء کمتر از کل است» درمورد مجموعه‌های نامتناهی هم درست باشد .

مهمتر ازهمه این‌است که آزمایش مقایسهٔ مجموعه‌های نامتناهی ، از این طریق که ببینیم کدامیك جزئی ازدیگری است ، اغلب مواجه با عدم موفقیت می‌شود. مثلاً کجا نقطه‌های بیشتری وجود دارد، درداخل مربع یا روی یك خط نامحدود؟ آخرنه مربع را می‌توان روی خط راست قرارداد و نه خط راست را می‌توان خم کرد و به داخل مربع برد. وچقدر مجموعه‌های نامتناهی وجود دارد که یکی قسمتی از دیگری نمی‌تواند باشد! مجموعهٔ مربعهای واقع برصفحه ومجموعهٔ دایره‌های واقع برهمین صفحه ، حتی یك عضو مشترك هم ندارند . چطور باید آنها را مقایسه کرد ؟ چگونه می‌توان دانست که در جهان کدام بیشترند : اتمهای ازت یا اتمهای اکسیژن ؟

به این ترتیب مشکل کار روشن است . ابتدا این مطلب را روشن می‌کنیم که درچه حالتی می‌توان گفت دریك مجموعه همانقدرعضووجود دارد که در مجموعهٔ دیگر ، به عبارت دیگر روشن می‌کنیم که در چه حالتهایی ، تعداد عضوهای دومجموعهٔ نامتناهی «برابر» است .

درمجلس رقص

مسألهٔ مقایسهٔ مجموعه‌های متناهی به‌سادگی حل می‌شود . برای اینکه بدانیم آیا تعداد عضوهای دومجموعهٔ متناهی ، یکی است یا نه ، کافی‌است که آنهارا بشماریم . اگردهردومورد یك‌عدد بدست‌آید، به‌این معنا است که در دو مجموعه به‌یك تعداد عضو وجود دارد. ولی‌درمورد

مجموعه‌های نامتناهی ، این روش به درد نمی‌خورد ، زیرا برای شمردن عضوهای یك‌مجموعهٔ نامتناهی باید تمامی عمرخود را وقف کنیم و تازه نتوانیم به انتهای کاربرسیم .

در مورد مجموعه‌های متناهی هم ، روش شمردن همیشه بهترین روش نیست . مثلاً یك صحنهٔ رقص را در نظر بگیریم . چطور می‌شود فهمیدکه‌آیا تعداد پسرها با تعداد دخترها برابراست یا نه؟ البته‌می‌توان خواهش کردکه پسرها یك‌طرف ودخترهاطرف دیگربایستند و تعداد اینها و آنها را بشماریم . با این روش اولاً اطلاعات غیر لازمی بدست می‌آوریم ، ما نیازی به دانستن تعداد پسرها و دخترهانداشتیم ، بلکه تنها می‌خواستیم بدانیم که آیا تعداد آنها برابراست یا نه . ثانیاً برای اینکه جوانها را به صحنهٔ رقص ببریم باید ابتدا آنها را معطل کنیم تا بعد از شمردن آنها ، اجازهٔ ورود به صحنهٔ رقص را داشته باشند .

پس چه بایدکرد ؟ از ارکسترمی‌خواهیم موسیقی را شروع کندکه همه بتوانند باآن‌برقصند.دراین‌صورت پسرها، دخترها را به‌رقص‌دعوت می‌کنیم و... مسألهٔ ما هم حل‌می‌شود . اگرهمهٔ پسرها و همهٔ دخترها به رقص مشغول باشند ، یعنی اگر همهٔ جوانها دو به دو با هم برقصند ، روشن می‌شودکه تعداد دخترها وپسرها درصحنهٔ رقص مساوی است .

درست با همین روش می‌توان فهمید که تعداد تماشاچیها در تئاتر ، با تعداد صندلیها برابر است . اگر در موقع نمایش ، همهٔ جاها اشغال شده باشد ، ضمناً هیچکدام از تماشاچیها در راهرو سرپا نباشند وروی هرصندلی هم تنهایك‌نفرنشسته باشد، می‌توان مطمئن شدکه تعداد تماشاچیها با تعداد صندلیها برابراست .

وقتی‌که دریك روز بارانی ،کسانی از خیابان می‌گذرند ، تعداد آدمها برابراست با تعداد بارانیهای‌آنها ؛ هرآدمی تنها یك بارانی دارد وضمناًکسی درچنین روزی ، بدون بارانی بیرون نمی‌آید .

تناظر یك به یك

با روشی آشنا شدیم که به کمك آن بتوانیم از تساوی عضوهای دو مجموعهٔ متناهی، بدون شمردن عضوهای آنها، مطلع شویم . همین روش را برای مجموعه‌های نامتناهی هم می‌توان بکار برد . منتهی در اینجا لزومی ندارد که از ارکستر یاری بخواهیم ، بلکه کافی است عضوهای دو مجموعه‌ای را که باید با هم مقایسه کنیم ، به صورت «زوجهای رقص» درآوریم .

فرض کنید دو مجموعهٔ A و B به‌ما داده باشند. گویند بین آنها تناظر یك به یك وجود دارد ، وقتی که بتوان عضوهای این دومجموعه‌را به‌صورت $(a\ ,\ b)$ به‌نحوی تنظیم کرد که:

۱) عضو a متعلق به مجموعهٔ A ، و عضو b متعلق به مجموعهٔ B باشد ؛

۲) هرعضو از این دو مجموعه، دریکی وتنها یکی از این زوجها قرارگرفته باشد .

مثلاً اگرمجموعهٔ A عبارت ازپسرهایی باشد که در رقص شرکت دارند ، ومجموعهٔ B ازدخترهای شرکت‌کنندهٔ در این رقص تشکیل شده باشد، زوجهای (a , b) عبارت‌است ازپسرها ودخترهایی‌که با هم رقص می‌کنند . اگر A ، مجموعهٔ تماشاچیها و B ، مجموعهٔ صندلیهای تئاتر باشد، زوج (a , b) یعنی تماشاچی وصندلی‌که روی آن نشسته است . بالاخره اگر A مجموعهٔ آدمهای خیابان ، و B مجموعهٔ بارانیهای آنها باشد ، زوج (a , b) عبارت است از یك آدم و بارانی او .

روشن است‌که هرتناظر ، یك به یك نیست . اگر A مجموعهٔ همهٔ درختهای روی زمین ، و B مجموعهٔ میوه‌های روی این درختها باشد ، بین این مجموعه‌ها می‌توان تناظری برقرارکرد : هرمیوه متناظر است با درختی که روی آن به وجود آمده است . ولی این ، تناظر یك به یك

نیست : روی بسیاری ازدرختها بیش ازیك میوه وجود دارد، وبسیاری دیگر هنوز میوه‌ای ندارند. بنابراین بعضی از عضوهای a (درختها) در بیش از یك زوج شرکت دارند ، وبعضی دیگر ازعضوهای a حتی در یك زوج هم نیستند .

وجود تناظر یك به یك برای مجموعه‌های متناهی ، بـه معنای آن‌است که تعداد عضوهای این مجموعه‌ها با هم برابر است. نقطهٔ تحول اساسی درنظریهٔ مجموعه‌ها مربوط به زمانی است که کانتور تصمیم گرفت فکر تناظر یك به یك را برای مقایسهٔ مجموعه‌های‌نامتناهی هم بکاربرد.

بنابرنظرکانتور ،برای دومجموعهٔ A و B (که ممکن است‌نامتناهی هم باشند) وقتی تعداد عضوها برابر است که بتوان بین این دومجموعه ، تناظر یك به یك برقرارکرد .

معمولاً ریاضی‌دانها نمی‌گویند کـه «مجموعه‌های A و B به یك تعداد عضو دارند»، بلکه می‌گویند : «A و B هم‌قوت‌اند » یا «مجموعه‌های A و B هم‌ارزند» ؛ گرچه، اگردر این‌حالت بگوییم « دو مجموعه هم‌عددند» غلط نیست.

به این ترتیب کلمهٔ «قوت» برای مجموعه‌های نامتناهی ، همان معنی «تعداد عضوها» برای مجموعه‌های متناهی را دارد.

ب. بولتسانو دانشمند اهل چك هم قبل‌از کانتور به مفهوم تناظر یك به یك توجه کرده بود. منتهی او در مقابل دشواریهایی که ناشی از این مفهوم بود، عقب‌نشینی کرد. ما هم خواهیم دیدکه قبول تناظر یك به‌یك برای مقایسهٔ مجموعه‌های نامتناهی ، منجر به برخوردهایی با بسیاری از حکمهای مورد قبول می‌شود.

آیا جزء مساوی کل است؟

جدی‌ترین برخورد بـا موقعیت «جزء کمتر از کل است» ، به وجود

می‌آیدکه در سپیده‌دم تکامل ریاضیات مورد قبول قرار گرفته است. این حکم برای مجموعه‌های متناهی، بدون هیچ شرطی، درست است، ولی دربارهٔ مجموعه‌های نامتناهی قدرت خود را از دست می‌دهد. به خاطر بیاوریم که مدیر مهمانخانهٔ عجیب فضا، چگونه توانست ساکنین تمام اطاقها را به‌اطاقهای شمارهٔ زوج منتقل‌کند. برای این منظور، او دستور داد که ساکنان اطاق شمارهٔ n به اطاق شمارهٔ $۲n$ منتقل شود. به زبان دیگر، جابجایی بنابر طرح زیر انجام گرفت:

$$\begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & n \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۲ & ۴ & ۶ & \ldots, & ۲n \ldots \end{array}$$

و این طرح، بین مجموعهٔ عددهای‌طبیعی

$$۱،\ ۲،\ ۳،\ \ldots\ n،\ \ldots$$

و جزئی از آن، یعنی مجموعهٔ عددهای زوج

$$۲،\ ۴،\ ۶،\ \ldots،\ ۲n،\ \ldots$$

تناظر یك به یك برقرار می‌کند. و ما قرار براین گذاشتیم که اگر دو مجموعه درتناظریك‌به‌یك باشند، ازلحاظ تعداد عضوها برابرند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، برابراست با تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای زوج.

درست به همین ترتیب می‌توان بین مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ عددهای به صورت

$$۱۰،\ ۱۰۰،\ ۱۰۰۰،\ ۱۰۰۰۰،\ \ldots$$

تناظر یك به یك برقرار کرد. برای این منظور باید هر عدد طبیعی n را با عدد ۱۰^n متناظر کرد:

$$n \rightarrow ۱۰^n$$

باز هم به همین ترتیب می‌توان بین مجموعهٔ عددهای طبیعی و

مجموعهٔ عددهای طبیعی مجذور کامل، تناظر یك به یك برقرار کرد :

$$n \to n^2$$

ویا بین مجموعهٔ عددهای طبیعی ومجموعهٔ عددهای طبیعی مکعب کامل :

$$n \to n^3$$

و غیره.

بطور کلـی همیشه می‌توان بین مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی و هرزیر مجموعهٔ نامتناهی ازآن، تناظر یك به‌یك برقرار کـرد . برای این منظور کافی است عددهای این زیر مجموعه را به ترتیب شماره گـذاری کنیم.

* بی‌جهت نیست که می‌گویند هیچ‌چیز در زیرآسمان تازه نیست. گالیله هم در ابتدای سدهٔ هفدهم، دربارهٔ تناقضات بی‌نهایت فکر کرد و امکان برقرارکردن تناظریك به‌یك بین مجموعهٔ عددهای طبیعی ومجموعهٔ مجذورهای آنها را کشف‌کرد. گالیله در کتاب خودش به نام «بحثها و اثباتهای ریاضی مربوط به مکانیك...» (سال ۱۶۳۸) ، گفتگویی ترتیب داده است که در آن سالویاتی (که فکر خود گالیله را بیان می‌کند) : می‌گوید :

«آنچه گفتیم از جمله مشکلات است وناشی از آن است‌که ما با عقل محدود خود دربارهٔ بی‌نهایت قضاوت می‌کنیم و خاصیتهایی را که برای یك چیزمحدود ومتناهی درست است به‌بی‌نهایت هم نسبت می‌دهیم. در حالی‌که این روش درست نیست ؛ زیرا خاصیتهایی مثل بـزرگتر ، کوچکتر وتساوی را برای بی‌نهایت نه‌می‌توان بکاربرد و نه‌می‌توان‌گفت که یك بی‌نهایت بزرگتر یا کوچکتر از بی‌نهایت دیگر و یا مساوی آن است» .

سالویاتی درتأیید فکرش متذکر می‌شود‌که ازیك طرف «مجذورها همانقدر وجود دارند کـه ریشه‌های آنها، زیرا هرمجذوری ریشه‌ای دارد

وهرریشه‌ای مجذوری؛ هیچ مجذوری دو ریشه ندارد وهیچ ریشه‌ای بیش از یك مجذور ندارد ...[1] ضمناً تعداد ریشه‌ها برابر است با مقدار همهٔ عددها بطورکلی، از آنجاکه هیچ عددی وجود نداردکه مجذوری نداشته باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که تعداد مجذور[1] برابر است با مقدار کل همهٔ عددها ...»

از طرف دیگر، سالویاتی متذکر می‌شود که «مقدار همهٔ عددها که شامل مجذورها وغیرمجذورهاست، ازتنها یك قسمت آن، یعنی مجذورها، بیشتراست»، ضمناً «هرچه به‌عددهای‌بزرگتربرسیم، تعداد مجذورهامرتباً وبه نسبت زیادی کمتر می‌شود» . سالویاتی ، به عنوان راه‌حلی برای این تناقض، چنین پیشنهاد می‌کند :

« من امکان راه‌حل دیگری جز این نمی‌بینم که قبول کنیم مقدار عددها بطورکلی بی‌نهایت است ، تعداد مجذورها بی‌نهایت است و تعداد جذرها هم بی‌نهایت است. نمی‌توان‌گفت که‌تعداد مجذورهاکمتر ازمقدار همهٔ عددها ویا آخری بیشتراز اولی است: خاصیتهای تساوی و همچنین بزرگتر و کوچکتر ، وقتی که صحبت از بی‌نهایت است ، موردی پیدا نمی‌کند، این مفهومها تنها برای مقادیر محدود بکارمی‌روند».

می‌بینیم که گالیله ، فکرتناظر یك‌به‌یك را تعقیب می‌کند ومتوجه می‌شود که چنین تناظری را می‌توان بین مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ مجذورها برقرارکرد، وبنابراین تعداد عضوهای این دومجموعه را می‌توان مساوی به حساب آورد. این مطلب را هم می‌فهمدکه برای مجموعه‌های نامتناهی، ممکن است زیر مجموعه ، مساوی کل مجموعه باشد . ولی گالیله از اینجا نتیجهٔ نادرستی می‌گیرد : همهٔ بی‌نهایتها مساوی‌اند؛ اوتنها با زیر مجموعه‌های طبیعی سروکار دارد وآنها را هم می‌توان شماره‌گذاری کرد.

---

۱) در اینجا تنها عددهای طبیعی مورد نظراست.

گالیله نتوانست‌پیش خود تصور کندکه مجموعهٔ نقطه‌های‌پاره‌خط را نمی‌توان شماره‌گذاری کرد (ما بزودی در این باره صحبت خواهیم کرد) . او شبیه پیروان فلسفهٔ اتمی دنیای باستان ، گمان می‌کند، که پاره‌خط از مجموعهٔ نامتناهی اتمها تشکیل شده است.*

مجموعه‌های شمارا

هرمجموعه‌ای‌که با مجموعهٔ عددهای طبیعی هم‌عدد باشد، مجموعهٔ شمارا نامیده می‌شود . به زبان دیگر ، مجموعه‌ای را شمارا گوییم که نامتناهی باشد ، ولی بتوان عضوهای آنرا به ردیف عددهای طبیعی شماره‌گذاری کرد. مثلاً مجموعهٔ عددهای زوج، مجموعهٔ عددهای فرد، مجموعهٔ عددهای اول، وبطورکلی هر زیر مجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ عددهای طبیعی ، مجموعه‌هایی شمارا هستند .

گاهی برای اینکه شمارا بودن یك مجموعه را ثابت کنیم، لازم می‌شود دست به‌ابتکارهایی بزنیم. مثلاً مجموعهٔ همهٔ عددهای درست را انتخاب می‌کنیم (هم مثبت وهم منفی):

$$\ldots، -n، \ldots، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، \ldots، n، \ldots$$

اگر شماره‌گذاری این مجموعه را از جایی شروع کنیم، در این صورت این شماره‌گذاری هرگز تمام نمی‌شود و همهٔ عددهایی که قبل از نقطهٔ شروع قرار گرفته‌اند ، بدون شماره باقی می‌مانند. برای اینکه ضمن شماره‌گذاری، حتی یك عدد هم ازقلم نیفتد، باید این مجموعه را در دو سطر وبه صورت زیر نوشت :

$$\begin{array}{cccccccc} ۰، & ۱، & ۲، & ۳، & ۴، & ۵، & ۶، & \ldots \\ -۱، & -۲، & -۳، & -۴، & -۵، & -۶، & -۷، & \ldots \end{array}$$

وآنها را ستونی شماره‌گذاری کرد : برای ۰ شمارهٔ ۱، برای۱ - شمارهٔ ۲، برای ۱ شمارهٔ ۳، برای ۲-شمارهٔ ۴ وغیره. به زبان دیگر، همهٔ عدد-

های مثبت و صفر را با عددهای فرد، وهمهٔ عددهای منفی را با عددهای زوج شماره‌گذاری می‌کنیم. ایـن کاملاً شبیه راه حلی است که مدیر مهمانخانه، بـرای جادادن تمبرشناسها، در مهمانخانه‌ای کـه به وسیلهٔ جانورشناسان پرشده بود، مورد استفاده قرار داده بود.

ولی اگـر شماره‌گذاری مجموعهٔ همهٔ عددهـای درست به‌سادگی برگزارشد، برای اثبات شمارا بودن مجموعهٔ عددهای گویا به دشواری‌هایی برمی‌خوریم. عددهای گویا کاملاً تنگ هم قرارگرفته‌اند: بین هردو عدد گویای دلخواه، بـی‌نهایت عدد گویای دیگر وجود دارد، به همین مناسبت برای شماره‌گذاری آنها بلاتکلیف می‌مانیم؛ به نظر می‌رسد که بین هردوعدد دلخواه باید بی‌نهایت عدد را شماره‌گذاری‌کرد واین وضع هم هـرگز پایان نمی‌یابد. حقیقت هم همین است کـه عددهای گویا را نمی‌توان به ردیف مقادیر صعودی آنها، شماره‌گذاری کرد.

ولی اگر فکـر تنظیم عددهای گویا بـه صورت صعودی را کنار بگذاریـم، می‌توانیم راهی برای شماره گذاری آنها پیدا کنیم. بـه این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا همهٔ کسرهای مثبت با مخرج ۱را می‌نویسیم، بعد همهٔ کسرهای مثبت بامخرج۲، سپس کسرهای مثبت با مخرج ۳وغیره. جدولی به‌صورت زیربدست می‌آید:

$$\begin{array}{l}
\frac{۱}{۱},\ \frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۱},\ \frac{۴}{۱},\ \frac{۵}{۱},\ \ldots \\
\frac{۱}{۲},\ \frac{۲}{۲},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۴}{۲},\ \frac{۵}{۲},\ \ldots \\
\frac{۱}{۳},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۳}{۳},\ \frac{۴}{۳},\ \frac{۵}{۳},\ \ldots \\
\frac{۱}{۴},\ \frac{۲}{۴},\ \frac{۳}{۴},\ \frac{۴}{۴},\ \frac{۵}{۴},\ \ldots \\
\frac{۱}{۵},\ \frac{۲}{۵},\ \frac{۳}{۵},\ \frac{۴}{۵},\ \frac{۵}{۵},\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

روشن است که در این جدول هر عدد گویا و مثبت دلخواه را می‌توان پیدا کرد ، ولی هرعدد تنها یکبار ظاهر نشده است. مثلاً عدد ۳ به صورتهای $\frac{۳}{۱}$ ، $\frac{۶}{۲}$ ، $\frac{۹}{۳}$ وغیره وجود دارد.

حالا به شماره‌گذاری می‌پردازیم. برای این منظور اقدام آخرمدیر مهمانخانهٔ فضا را بـه خاطر می‌آوریم ، که توانست ساکنین بـی‌نهایت مهمانخانهٔ دیگررا دراطاقهای مهمانخانهٔ خود جادهد. او ازشماره‌گذاری مربعی استفاده‌کرد. ماهم درست همان روش را بکارمی‌بریم، بااین تفاوت که در اینجا بعضی ازکسرها را حذف می‌کنیم (مثلاً، چون $\frac{۱}{۱}$ را شمارهٔ ۱ دادیم، دیگرکسرهای $\frac{۲}{۲}$ ، $\frac{۳}{۳}$ و غیره را حذف مـی‌کنیم ، زیرا آنها هم همان مقدار $\frac{۱}{۱}$ را بیان می‌کنند) . در این صورت ردیف زیر برای‌شماره‌گذاری عددهای مثبت وگویا بدست می‌آید :

$$۱ ، ۲ ، \frac{۱}{۲} ، ۳ ، \frac{۳}{۲} ، \frac{۲}{۳} ، \frac{۱}{۳} ، ۴ ، \frac{۴}{۳} ، \frac{۳}{۴} ، \frac{۱}{۴} ، ...$$

به این ترتیب توانستیم همهٔ عددهای مثبت گویا را شماره‌گذاری کنیم. حالا دیگر به سادگی می‌توان فهمید که چگونه باید همهٔ عددهای گویا (چه مثبت و چه منفی) را شماره‌گذاری‌کرد . برای این منظور باید آنها را در دو سطـر جداگانه نوشت ، عددهای یك سطر را با شماره‌های زوج وعددهای سطردیگر را باشماره‌های فرد شماره‌گذاری‌کرد (و ضمناً صفر را هم جزو یکی از سطرها به‌حساب آورد).

بطورکلی، اگرمجموعهٔ شمارایی ازمجموعه‌های شمارا را روی‌هم بریزیم ، مجموعه‌ای شمارا بدست می‌آید . این مطلب را بـه‌کمك شماره گذاری مربعی می‌توان بدست آورد.

عددهای جبری *

ما توانستیم همهٔ عددهای گویا را شماره‌گذاری کنیم. ولی عددهای گویا تنها به‌کمك تقسیم و از عددهای طبیعی بدست می‌آیند (و ضمناً ممکن است علامت آن‌هم تغییر کند). حالا عمل ریشه‌گرفتن را هم اضافه‌می‌کنیم و همهٔ‌عددهایی‌را درنظرمی‌گیریم که‌بتوان ازعددهای‌طبیعی‌به کمك این عمل وعملهای حساب بدست آورد. بین این عددها می‌توان از $\sqrt[3]{2}+1$ ، $\sqrt[4]{3-\sqrt{6}}$ وحتی عددی مثل عدد زیر نام برد:

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[15]{147+\sqrt{3}}-\sqrt[14]{6+\sqrt{2}}}{\sqrt[21]{289-\sqrt[9]{4+\sqrt{2}}}+1}}$$

در برابراین پرسش قرار می‌گیریم: آیا می‌توان مجموعهٔ همهٔ این عددها را شماره‌گذاری‌کرد؟ پاسخ به این پرسش خیلی دشوارتر از مورد عددهای گویاست. کدام عدد را باید با شمارهٔ کوچکتری نوشت $\sqrt[3]{2}$ یا $\sqrt{3}$؟ ولی ثابت می‌شودکه این مجموعه‌شمارا است، یعنی عضوهای آنرا می‌توان شماره‌گذاری کرد.

برای اینکه این حکم را ثابت‌کنیم، ابتدا متذکر می‌شویم که هر عددی از این نوع، ریشهٔ یك معادلهٔ جبری به صورت

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (1)$$

است، که در آن $a_0\neq 0$ و a_1، ...، a_n عددهایی صحیح‌اند. مثلاً $\frac{3}{7}$ ریشهٔ معادلهٔ $7x-3=0$، $\sqrt[3]{5}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^3-5=0$ و $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^6-6x^4+12x^2-11=0$ است. گاهی نوشتن معادله‌ای که‌عدد مفروض‌درآن صدق‌کند، بسیارمشکل است، ولی همیشه می‌توان به نتیجه رسید. حالا خودتان آزمایش کنید و معادله‌ای درست کنید که

عدد $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ درآن صدق کند.

متذکر می‌شویم که همهٔ ریشه‌های یك معادلهٔ به صورت (۱) را (به شرطی که a_0 ، a_1 ، ... ، a_n عددهای صحیحی باشند) نمی‌توان با عددهای طبیعی و به‌کمك عملهای حساب و ریشه‌گرفتن بیان کرد. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ

$$x^5-3x+3=0$$

را نمی‌توان به این صورت نشان داد ، این معادله به اصطلاح به کمك رادیکالها حل نمی‌شود. همهٔ عددهایی‌که بتوانند ریشهٔ معادله‌ای از نوع (۱) باضریبهای صحیح باشد، عددهای جبری نامیده می‌شود. به‌این‌ترتیب مجموعهٔ عددهای جبری شامل همهٔ عددهایی هم هست‌که ازعددهای طبیعی به‌کمك عملهای حساب وریشه‌گرفتن بدست می‌آید. بنابراین اگربتوانیم مجموعهٔ همهٔ عددهای جبری را شماره‌گذاری کنیم ، به این معناست که مسألهٔ مورد نظر ما هم حل شده است.

ولی قبل از آنکه به شماره‌گذاری عددهای جبری بپردازیم، باید خود معادله های جبری به صورت (۱) را شماره‌گذاری کنیم ، که البته در این‌صورت مشکل‌ماهم حل‌شده است. هرمعادلهٔ جبری‌درجهٔ n، حداکثر n ریشه دارد ، به این ترتیب وقتی که‌همهٔ معادله‌های جبری با ضریبهای صحیح را شماره‌گذاری‌کردیم، جدولی درست می‌کنیم، در سطر اول این جدول ریشه‌های مختلف معادلهٔ اول را قرار می‌دهیم، در سطر دوم تمام ریشه‌های مختلف معادلهٔ دوم را که با ریشه‌های‌معادلهٔ اول فرق دارند ، در سطر سوم ریشه‌های متمایز معادلهٔ سوم را که با ریشه‌های معادله‌های اول و دوم فرق دارند و غیره . جدولی به این صورت بدست می‌آید:

$$\begin{array}{l} a_1 \to a_2 \to \dots \to a_k \to \\ \to b_1 \to b_2 \to \dots \to b_l \to \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

$$\to c_1 \to c_2 \to \dots \to c_m \to$$

. . . .

از اینجا روشن می‌شود که همهٔ عددهای این جدول را به‌چه‌ترتیب می‌توان شماره گذاری کرد (پیکانها ردیف شماره گذاری را مشخص می‌کند).

حالا به شماره گذاری مجموعهٔ معادله‌های جبری با ضریبهای صحیح می‌پردازیم. این عمل را به دو روش می‌توان انجام داد. روش اول این است که هرمعادلهٔ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

را به ترتیب «ارتفاع» آن قرار دهیم، یعنی عدد

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

مثلاً ارتفاع معادلهٔ $2x^4 - 3x + 5 = 0$ برابراست با:

$$4 + 2 + 3 + 5 = 14$$

روشن است که تعداد معادله‌های با ارتفاع مفروض، محدود است. مثلاً دو معادله به ارتفاع ۲ هستند: $x = 0$ و $-x = 0$ ، شش معادله به ارتفاع ۳ هستند: $x^2 = 0$ ، $-x^2 = 0$ ، $x + 1 = 0$ ، $x - 1 = 0$ ، $-x + 1 = 0$ و $-x - 1 = 0$. واکنون معادله‌ها را به این ترتیب شماره گذاری می‌کنیم: ابتدا همهٔ معادله‌های با ارتفاع ۲ را شماره گذاری می‌کنیم (معادلهٔ با ارتفاع ۱ وجود ندارد)؛ سپس همهٔ معادله‌های با ارتفاع ۳، بعد همهٔ معادله‌های با ارتفاع ۴ و غیره. شروع این شماره گذاری به این ترتیب است:

N	۱	۲	۳	۴	۵
	$x = 0$	$-x = 0$	$x^2 = 0$	$-x^2 = 0$	$x + 1 = 0$
N	۶	۷	۸	۹	۱۰
	$x - 1 = 0$	$-x + 1 = 0$	$-x - 1 = 0$	$x^3 = 0$	$-x^3 = 0$

در نتیجه همهٔ معادله‌ها شماره‌گذاری می‌شوند، وسپس همانطور که قبلاً گفتیم ، به‌کمك آن، عددهای جبری هم شماره‌گذاری خواهد شد.

روش مذکور برای شماره‌گذاری معادله‌ها، این نارسایی را دارد که به سختی می‌توان شمارهٔ یك معادلهٔ مفروض را پیداکرد (اگرچه این مسأله هم حل شدنی است). راه‌حل دوم برهمان فکری قرار داردکه مدیر مهمانخانهٔ مشهور فضا، می‌خواست مشکل بزرگ خود را براساس آن حل‌کند. به‌خاطربیاوریم که اوازعددهای‌به‌صورت $۲^{n} \times ۳^{m}$ استفاده‌کرده بود. ما برای اینکه مسألهٔ خود را حل‌کنیم از همهٔ عددهای اول استفاده می‌کنیم. خواننده این مطلب را می‌داند که هرعدد طبیعی را تنها به یك طریق می‌توان به عاملهای اول تجزیه کرد.

به این ترتیب عمل می‌کنیم : ابتدا همهٔ عددهای صحیح را شماره گذاری می‌کنیم (آنطورکه در ابتدای بندقبل صفحهٔ ۹۶ انجام دادیم) : شمارهٔ عدد صحیح a را با $\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. هرمعادلهٔ به صورت

$$a_{۰}x^{n} + a_{۱}x^{n-۱} + \ldots + a_{n} = ۰$$

را (به‌یاد داشته باشیم که $a_{۰}$ ، ... ، a_{n} ، عددهایی صحیح‌اند) متناظربا این عدد قرار می‌دهیم :

$$۲^{\mathbf{a}_{n}} \times ۳^{\mathbf{a}_{n-۱}} \times \ldots \times p_{n+۱}^{\mathbf{a}_{۰}}$$

($p_{n+۱}$ را به معنی $(n+۱)$ امین عدد اول گرفته‌ایم) . مثلاً معادلهٔ $۳x^{۲} - ۲ = ۰$ متناظر با این شماره است :

$$۲^{۴} \times ۳^{۱} \times ۵^{۵} = ۱۵۰۰۰۰$$

زیرا شمارهٔ عدد صحیح ۲ — مساوی ۴، شمارهٔ صفر مساوی ۱ و شمارهٔ عدد صحیح ۳ مساوی ۵ است) . حالا دیگر هرمعادله‌ای ، شمارهٔ خودش را دارد ، ضمناً معادله‌های مختلف ، شماره‌های مختلف خواهند داشت (هر عدد صحیح N تنها به یك طریق می‌تواند به عاملهای اول

تجزیه شود ، یعنی تنها به یك طریق عددهای $\mathbf{a}_n$، $\mathbf{a}_{n-1}$، ... ، $\mathbf{a}_0$ را می‌دهد؛ این عددهاهم متناظربا عددهای صحیح معین a_n ، a_{n-1}، ... ، a_0 هستندکه‌درنتیجه متناظر به‌معادلهٔ مشخصی از $(a_0 x^n + \ldots + a_n = 0)$.

علامتهای بی‌نهایت روی صفحه *

روشی را که برای شماره‌گذاری همهٔ عددهای جبری بکار بردیم ، می‌توان در حالتهای دیگـر هم مورد استفاده قرار داد، در اینجا وضعیت کلی چنین است : فرض کنید مجموعهٔ شمارایی از مجموعه‌های شمارای A_1 ، ... ، A_n ، ... داده شده باشد. ازعضوهای‌این مجموعه‌ها «دسته» های محدودی تشکیل می‌دهیم ، به‌نحوی‌که در هردسته بیش از یك عضو ازهرمجموعهٔ A_k نباشد. به‌عبارت دیگردرهردستهٔ به‌صورت $(a_m, \ldots, a_l)$، داشته باشیم: $a_l \in A_l$ ، ... ، $a_m \in A_m$ (تعداد عضوهای دسته‌های مختلف می‌توانـد مختلف باشد ، تنها این مهم است کـه هر دسته شامل تعداد محدودی‌عضوباشد). دراین‌صورت مجموعهٔ همهٔ این دسته‌ها، مجموعه‌ای شمارا است.

بـرای اثبات این حکم کافی است به هـردسته $(a_m, \ldots, a_l)$ ، عددی نسبت دهیم:

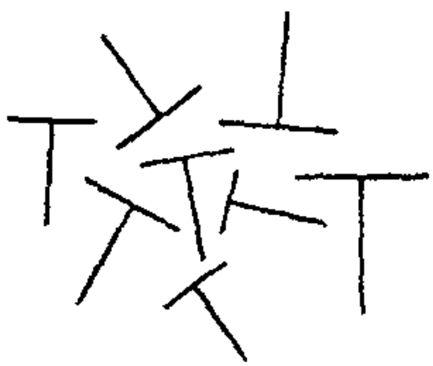
$$N = p_m^{\mathbf{a}_m} \ldots p_l^{\mathbf{a}_l}$$

که در آن p_m یعنی m امین عـدد اول و غیره ، $\mathbf{a}_m$ یعنی شمـارهٔ عضو a_m در مجموعهٔ A_m و غیره (در علامتگذاری اینجا ، علامت m در عضو a_m نشان می‌دهدکه این عضو متعلق به‌کدام مجموعه است، و شمارهٔ این عضو را در مجموعهٔ A_m مشخص نمی‌کند). با استفاده ازنوع استدلالـی که در مورد معادله‌های جبری بکار بردیم ، ثابت می‌شود که هر دسته‌ای متناظر با عدد خاصی است، یعنی مجموعهٔ همهٔ دسته‌ها قابل شماره‌گذاری

هستند . اگر مایل باشیم می‌توان به ترتیب دیگری عمل کرد : هردستهٔ $(a_1, \ldots, a_m)$ را متناظر با «ارتفاع» خود $h = n + \mathbf{a}_1 + \ldots \mathbf{a}_m$ قرار داد، ابتدا دستهٔ با ارتفاع ۲ را شماره‌گذاری کرد، سپس دستهٔ با ارتفاع ۳ و غیره.

ازحکمی که ثابت کردیم نتیجه می‌شود که اگر عضوهای مجموعه‌ای را بتوان با دسته‌هایی به صورت $(a_1, \ldots, a_m)$ داد (که در آن a_1 عضو مجموعـهٔ شمارای A_1، a_2 عضو مجموعهٔ شمارای A_2 و غیره باشد)، در این صورت خود مجموعهٔ A یا شمارا است و یا متناهی . مثلاً مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه که مختصات هریك از آنها عددهایی گویـا باشد، یك مجموعـهٔ شمارا است : هر نقطه به معنی دسته‌ای از دو عدد گویای (r_1, r_2) است ومجموعهٔ عددهای گویا هم، مجموعه‌ای شمارا است.

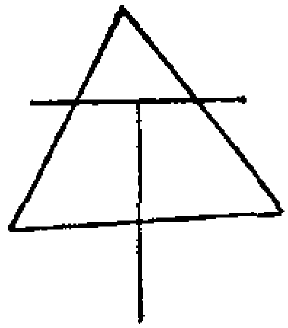
نمونهٔ پیچیده‌تری از اثبات شمارا بودن یك مجموعه می‌آوریم: فرض کنید حـرفهای T را روی صفحه قرار داده باشیم، به‌نحوی که هیچ دو حرفی نقطهٔ مشترك نداشته باشند (اندازه‌های حرفها می‌تواند مختلف باشد ـ شکل ۲۵).



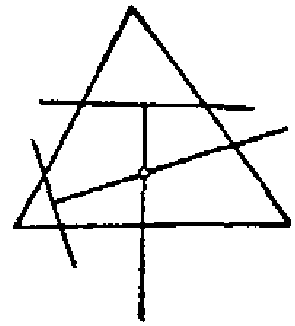
شکل ۲۵

ثابت می‌کنیم که این مجموعهٔ حرفهای T یا شمارااست ویامتناهی. برای این منظور دستگـاه مختصات را روی صفحه انتخاب می‌کنیم و به هرحرف T مثلثی نسبت می‌دهیم که مختصات رأسهای آن عددهایی گویا باشد ویك ضلع آن «پایهٔ» حرف T و دو ضلع دیگر آن «دوشاخهٔ پهلویی» این حرف را قطع کرده باشد (شکل ۲۶).

از نظر هندسی روشن است که اگر دو حرف T متناظر با یك مثلث باشند، باید یکدیگر را قطع کرده باشند ـ شکل ۲۷ را ببینید (ولی ، مثل

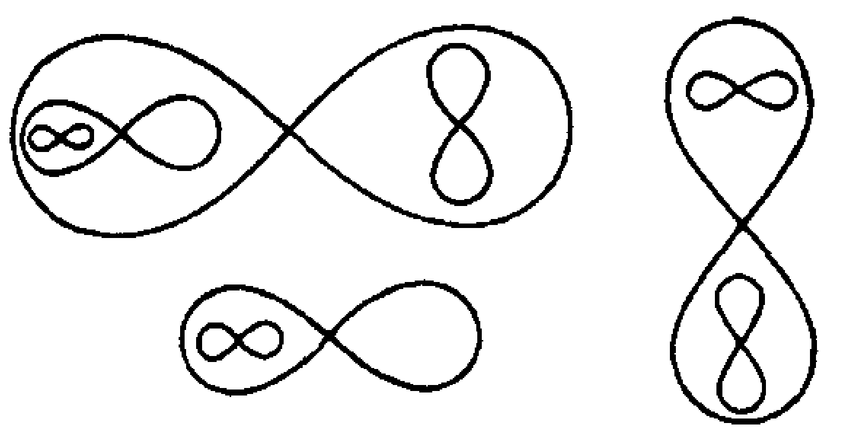


شکل ۲۷



شکل ۲۶

بسیاری از مـوارد دیگرکه در ریاضیات پیش مـی‌آید ، اثبات دقیق این حکم به هیچوجه ساده نیست) . چون طبق شرط ، حرفهای T دو به دو غیر متقاطع‌اند ، بنابراین حـرفهای متفاوت متناظر با مثلثهای متفاوت است. به این ترتیب بـاید ثابت کنیم که مجموعهٔ مثلثهایی که انتخاب کرده‌ایم، مجموعه‌ای شمارا یا مجموعه‌ای محدود است. متذکر می‌شویم که هـر مثلث به وسیلهٔ سه رأس خود A ، B و C و هررأس بـه وسیلهٔ مختصات خود مشخص می‌شود . چون رأسهای مثلث را طوری انتخاب کردیم که مختصات هرکدام ازآنها با دوعددگویا بیان می‌شود، هرمثلث به وسیلهٔ شش عدد گویا مشخص می‌شودکه مختصات رأسهای آن است. ولی مجموعهٔ دسته‌های شش تایی عددهای گویا، مجموعه‌ای شمارااست. بنابراین مجموعهٔ مثلثهای با رأسهای «گویا» ودرنتیجه مجموعهٔ مثلث‌هایی‌که ما برای حرف T ساختیم، یا مجموعه‌ای شمارا و یـا مجموعه‌ای متناهی‌است. به‌این‌ترتیب مجموعهٔ‌حرفهای T هم یاشمارا ویامتناهی‌است.



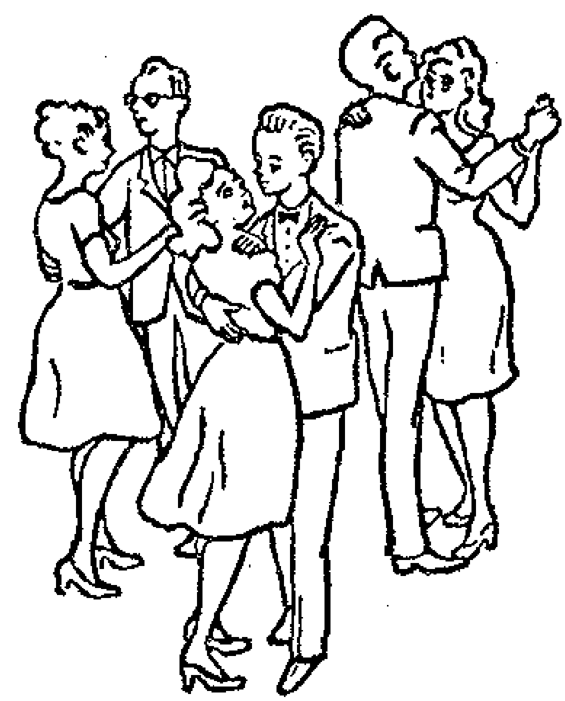
شکل ۲۸

درست بـا همین روش می‌توان ثابت کرد که اگـر علامتهای ∞ (بی‌نهایت) را طوری روی صفحه رسم کنیم که دو به دو نقطهٔ مشترکی نداشته باشند (شکل ۲۸)، مجموعهٔ آنها یا شمارا ویا متناهی است .

مجموعه‌های نامساوی

تا اینجا برای ما روشن شده است کـه جملهٔ «تعداد عضوهای دو مجموعه برابرند» چه معنایی دارد.

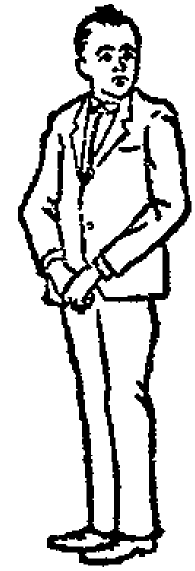
حالا روشن می‌کنیم که جملهٔ «یك مجموعه بیشتراز مجموعهٔ دیگر عضو دارد» بچه‌معناست . برای مجموعه‌هـای متناهی هم می‌توان این مطلب را، بدون شمردن عضوهای آنهـا ، روشن کـرد . کافی است نمونه‌ای راکه پیش از این دربارهٔ مجلس رقص ذکرکردیم، به خاطر آوریم.



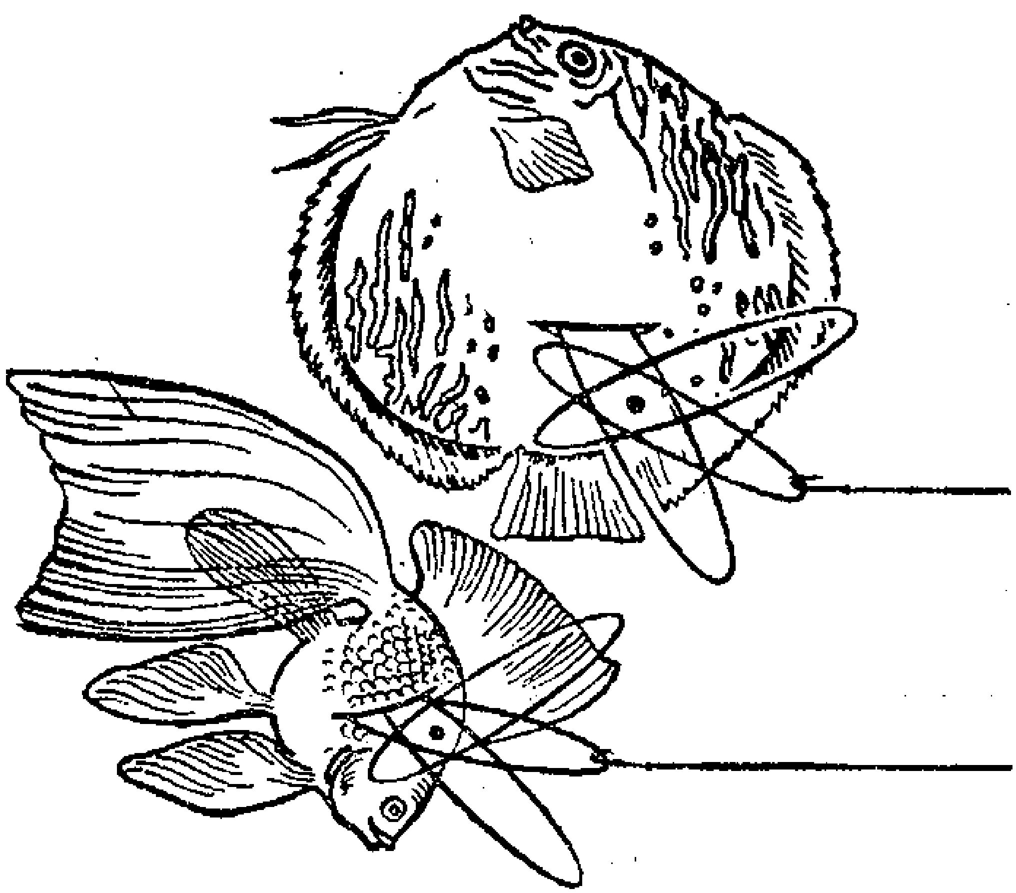
وقتی‌که ارکستر شروع به نواختن می‌کند و پسرها ، دخترها را به رقص دعوت می‌کنند ، اگر چند پسربی‌دست ویا نتوانندزوجی را برای خـود پیدا کنند ، روشن می‌شود که تعداد پسرها بیشتر است. و اگر تعدادی از دخترها با دلتنگی تماشاچی زوجهایی باشند که در صحنهٔ رقص‌اند، روشن می‌شود که تعداد دخترها بیشتر است .

در این حالتها به این ترتیب عمل کرده‌ایم : بین یك مجموعه و قسمتی از مجموعهٔ دیگر ، تناظر یك به‌یك برقرارکرده‌ایم . اگر به این کار موفق شویم ، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ دوم ، نسبت به مجموعهٔ

اول ، تعداد بیشتری عضو دارد . با استفاده از همین روش می‌توان نتیجه گرفت که تعداد ماهیهای اقیانوسها کمتر از تعداد اتمهای روی کرهٔ زمین است (با وجودی که این دو مجموعه متناهی‌اند ، آیا می‌توانید عضوهای آنها را بشمارید؟). برای این منظور کافی است هرماهی را با یکی از اتمهای تشکیل‌دهندهٔ بدن ماهی ، متناظر کنیم . به این ترتیب بین مجموعهٔ همهٔ ماهیها وقسمتی از مجموعهٔ اتمهای موجود در کرهٔ زمین، تناظر یك به‌یك برقرار می‌شود .



برای اوزوجی باقی‌نمانده‌است



هرماهی به یك اتم

متأسفانه برای مجموعه‌های نامتناهی نمی‌توان به‌همین سادگی عمل کرد. مادرهمین کتاب دیده‌ایم که‌چگونه‌تعدادعضوهای‌یك‌مجموعه، باتعداد

عضو های قسمتی از آن مجموعه ، برابر است . بنا براین تنها از این حقیقت که مجموعهٔ A به‌تعداد قسمتی از مجموعهٔ B عضو دارد، نمی‌شود نتیجه گرفت که تعداد عضوهای مجموعهٔ A کمتر از تعداد عضوهای مجموعهٔ B است .

باید عبارت را ساده‌تر کنیم و بگوییم : اگر مجموعهٔ A بتواند با قسمتی از مجموعهٔ B در تناظر یك به یك قرار گیرد، به این معناست که مجموعهٔ B ناکمتر از مجموعهٔ A عضو دارد. می‌توان ثابت کرد که این رابطه، دارای تمام خاصیتهای خوب نامساویهاست:

۱) هرمجموعهٔ A عضوهایی ناکمتر از خود این مجموعه دارد .

۲) اگر عضوهای مجموعهٔ A ناکمتر از عضوهای مجموعهٔ B ، و عضوهای مجموعهٔ B ناکمتر از عضوهای مجموعهٔ C باشد، دراین‌صورت عضوهای مجموعهٔ A ناکمتر از عضوهای مجموعهٔ C است.

۳) اگر عضوهای مجموعهٔ A ناکمتر از عضوهای مجموعهٔ B ، و عضوهای مجموعهٔ B ناکمتر از عضوهای مجموعهٔ A باشد، دراین‌صورت تعداد عضوهای آنها برابر است (یعنی بین عضوهای این دو مجموعه می‌توان تناظر یك به‌یك برقرار کرد) .

ممکن است پیش آید که مجموعهٔ B ناکمتر از مجموعهٔ A عضو داشته باشد ، ولی این دو مجموعه هم‌ارز نباشند . به‌عبارت دیگر ممکن است بین مجموعهٔ A و زیرمجموعهٔ B_1 از مجموعهٔ B ، تناظر یك به‌یك برقرار باشد ، ولی بین مجموعهٔ A و تمام مجموعهٔ B این تناظر یك به‌یك برقرار نشود . و این همان حالتی است که ما خواهیم گفت ، عضوهای مجموعهٔ B بیشتر از عضوهای مجموعهٔ A است .

مجموعهٔ شمارا ـ کوچکترین بین بی‌نهایتها*

قبلاً دیدیم که هر زیر مجموعهٔ نامتناهی، از مجموعهٔ عدد های

طبیعی ، مجموعه‌ای شمارا است . از اینجا نتیجه می‌شود که نمی‌توان مجموعهٔ نامتناهی پیدا کرد که قوت آن کمتر از قوت مجموعهٔ شمارا باشد ، حالا ثابت می‌کنیم که در مجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعهٔ شمارا وجود دارد ، و از آنجا نتیجه می‌گیریم که قوت مجموعهٔ شمارا از قوت هر مجموعهٔ نامتناهی نابیشتر است ، یعنی این قوت در بین بی‌نهایتها ، کمترین است .

برای اینکه زیرمجموعه‌ای شمارا از مجموعهٔ نامتناهی A انتخاب کنیم ، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم. عضوی مانند x_1 را انتخاب می‌کنیم، این انتخاب همیشه ممکن است ، زیرا مجموعهٔ A نامتناهی و در هرحالتی غیرتهی است. روشن است که بعد از خارج کردن عضو x_1 ، مجموعهٔ A خالی نمی‌شود و می‌توانیم عضو دوم x_2 را از آن جدا کنیم . بعد از آن، عضو سوم x_3 را انتخاب می‌کنیم و غیره . در نتیجه ، از مجموعهٔ A، زیرمجموعهٔ شمارایی که عضوهای آن شماره‌گذاری شده‌اند، بیرون آورده می‌شود :

$$X=\{x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots\}$$

برای تکمیل این اثبات ، می‌توان اضافه کرد که بعد از جدا کردن زیرمجموعهٔ شمارا ، مجموعهٔ نامتناهی باقی می‌ماند . برای این منظور باید بعد از آنکه زیر مجموعهٔ X را بیرون آوردیم ، همهٔ عضو های با شماره‌های زوج را به جای خود برگردانیم . در نتیجه مثل این است که زیر مجموعهٔ شمارای

$$Y=\{x_1 , x_3 , x_5 , \ldots\}$$

را بیرون آورده‌ایم و مجموعه‌ای باقی‌مانده است که بازهم شامل بی‌نهایت عضو است :

$$\{x_2 , x_4 , x_6 , \ldots , x_{2n} , \ldots\}$$

و ممکن است عضوهای بسیار دیگری هم داشته باشد .

قضیه‌های زیر به‌سادگی ثابت می‌شود:

اگر به‌یك مجموعهٔ نامتناهی ، یك مجموعهٔ شمارا اضافه شود، در قوت آن تغییری به‌وجود نمی‌آید،

اگر از یك مجموعهٔ ناشمارا ، مجموعهٔ شمارایی را جدا کنیم ، قوت آن تغییر نمی‌کند.

این دو قضیه باز هم تأیید می‌کنندکه مجموعه‌های شمارا ، بین مجموعه‌های نامتناهی ،کوچکترین آنها هستند .

مجموعه‌های ناشمارا

همهٔ مجموعه‌هایی که تااینجا ساخته‌ایم، مجموعه‌های‌شمارا بودند. این پرسش به‌ذهن می‌رسدکه آیا بطورکلی همهٔ مجموعه‌های نامتناهی ، شمارا نیستند ؟ اگر اینطور بود، زندگی ریاضی‌دانها آرام و ساده بود: همهٔ مجموعه‌های نامتناهی به‌تعداد مساوی عضو دارند و هیچ تحلیل دیگری از بی‌نهایت لازم نبود . ولی معلوم شده است‌که مطلب پیچیده‌تر از اینهاست، مجموعه‌های‌ناشمارا وجود دارد، آن‌هم‌با قوتهای مختلف. یکی از مجموعه‌های ناشمارا،که همه به‌خوبی با آن‌آشنا هستیم، مجموعهٔ همهٔ نقطه های روی یك خط راست است . ولی قبل از آنکه در بارهٔ این مجموعه صحبت‌کنیم ، مجموعهٔ دیگری را مطرح می‌کنیم‌که خیلی به‌این مجموعه نزدیك است و به‌روشهای مختلف پرکردن مهمانخانهٔ غیرعادی مربوط می‌شود .

متذکر می‌شویم‌که اثبات ناشمارا بودن یك مجموعه به‌هیچوجه ساده نیست. برای اینکه ثابت‌کنیم‌یك مجموعه، شمارا است،کافی است دربارهٔ قانونی فکرکنیم‌که بنابرآن بشود عضوهای مجموعه را شماره گذاری‌کرد. درحالی‌که‌برای اثبات ناشمارا بودن یك مجموعه، بایدثابت کردکه چنین قانونی‌وجود ندارد ونمی‌تواند وجود داشته باشد. به‌عبارت

دیگر دربارهٔ قانونی نمی‌توان فکر کرد که به‌کمك آن بشود شمارا نبودن عضوهای یك مجموعه را ثابت کرد . کانتور ، برای اثبات ناشمارا بودن مجموعه‌ها ، روش جالبی فکر کرد که نام حرکت قطری به‌آن داده شده (و ما در صفحهٔ ۲۱ ماهیت آنرا آورده‌ایم) . روش کانتور را با این داستان ایون‌تیخی روشن می‌کنیم .

صورت‌برداری ناموفق

تا اینجا من از موفقیتهای مدیر مهمانخانهٔ غیرعادی صحبت کردم : چگونه او توانست در مهمانخانه‌ای که تمام اطاقهای آن پربود، باز هم بی‌نهایت مستأجر ساکن کند ؛ سپس حتی موفق شد ساکنین مجموعهٔ نامتناهی از همین نوع مهمانخانهٔ غیرعادی را در مهمانخانهٔ خود جا دهد. ولی وضعی پیش آمد که این افسونگر بی‌نظیر هم دچار عدم موفقیت شد.

ازمرکزمؤسسهٔ مهمانخانه‌های فضایی دستوری رسید که ازقبل همهٔ انواع ممکن پر کردن اطاقها را مشخص کنند. خواسته شده بود که جدولی تنظیم شود ، به‌نحوی که هرسطر آن یکی‌ازحالتها را نشان دهد. برای این منظور می‌بایست اطاقهای پر با واحد و اطاقهای خالی با صفر مشخص شود . مثلاً حالت

$$1010101010 \ldots$$

به‌این معناست که همهٔ اطاقهای با شمارهٔ فرد پر و همهٔ اطاقهای با شمارهٔ زوج خالی است ، حالت

$$1111111111111 \ldots$$

به‌این معناست که همهٔ اطاقهای مهمانخانه پر است ، و حالت

$$0000000000000 \ldots$$

که نشانهٔ یك ورشکستگی مالی است . به‌معنای آن است که تمام اطاقهای

مهمانخانه خالی است .

مدیر کارهای زیادی داشت و به‌همین مناسبت فکر کرد این مسأله را بطور ساده‌ای حل کند. در هرطبقه یك نگهبان بود و او می‌توانست به نسبت اطاقهایی که در اختیار دارد ، حالتهای مختلف پرکردن آنها را مشخص کند . ضمناً توجه می‌کنند که حالتهای تکراری وجود نداشته باشد. بعد ازچند روز صورتها به‌مدیر داده شد و اوآنها را دریك صورت جمع کرد .

مدیر پرسید:

ـ خیال می‌کنید این صورت کامل باشد ، آیا حالت خاصی از قلم نیفتاده است ؟

جواب دادم :

ـ معلوم نیست ، تعداد حالتها بی‌نهایت است و من نمی دانم چطور باید آزمایش کرد که آیا حالت دیگری وجود دارد یا نه .

ناگهان فکری به‌نظرم آمد (اگرچه‌ممکن است دربارهٔ قابلیت فکر خود مبالغه کرده باشم ، زیرا بحثهایی که با پروفسور تاراتتوف دربارهٔ مجموعه‌های بی‌نهایت داشته‌ام ، در این‌باره بی‌اثر نبوده است) .

ـ من می‌توانم ثابت کنم که این صورت کامل نیست و حالتی را ارائه می‌دهم که بدون تردید در این صورت وجود ندارد .

ـ با این مطلب که صورت کامل نیست موافقم، ولی چطور می‌شود حالتی راکه از قلم افتاده است، نشان داد. آخر دراینجا بی‌نهایت حالت وجود دارد .

ما در این باره شرط بستیم . من کار خودرا شروع کردم . برنامهٔ هرحالت را بردر اطاقی که شماره‌اش با شمارهٔ آن حالت تطبیق می‌کرد نصب کردم (خواننده به‌خاطر داردکه تعداد حالتها با تعداد اطاقهای مهمانخانه یکی بود) . و بعد خیلی ساده عمل کردم. به‌در اطاق اول مراجعه

کردم و دیدم که حالت متناظر با آن ، با رقم ۰ شروع می‌شود. در دفتر یادداشت خود رقم ۱ را نوشتم، این رقم اول حالتی بود که من می‌خواستم بدست بیاورم .

وقتی که به در اطاق دوم رفتم ، دیگر به رقم اول حالتی که روی آن نصب بود ، توجه نکردم ، زیرا رقم اول حالت مورد نظر خود را قبلاً انتخاب کرده بودم . توجه خود را به رقم دوم برگرداندم. دیدم که رقم دوم در حالتی که روی در دوم نصب شده ، مساوی ۱ است ، من در دفترخود رقم ۰ را یادداشت کردم . به‌همین ترتیب‌درمورد رقم سوم حالت مورد نظرخود عمل کردم ، به در اطاق سوم مراجعه کردم ، رقم سوم حالت مربوط به‌این اطاق ۱ بود و من دردفترخود ۰را یادداشت کردم. بطور کلی اگر رقم n ام مربوط به حالت n ام مساوی ۰ بود ، من در دفترخود ۱ را یادداشت کردم و اگر رقم nام حالت nام مساوی ۱ بود ، من ۰ را یادداشت کردم .

وقتی که همهٔ اطاقهای مهمانخانه را تمام کردم[1] ، در دفتر خود دنباله‌ای از صفرها و واحدها را یادداشت کرده بودم .

به اطاق مدیر برگشتم وگفتم :

ـ این همان حالت گمشده‌ای است که شما می‌خواستید .

ـ ازکجا معلوم است که این حالت وجود نداشت ؟

ـ این حالت نمی‌تواند همان حالت اول باشد ، زیرا رقم اول آنها با هم فرق دارد، حالت دوم هم نیست ، زیرا رقم دوم آنها یکی نیست، با حالت سوم هم در رقم سوم‌متفاوت است وبطور کلی‌با حالت nام دررقم nام فرق دارد .

شرطرا برده‌بودم‌وحق‌سکونت مجانی‌دایمی درمهمانخانه‌را بدست آوردم .

---

۱) و معلوم نیست برای این‌کار چقدر وقت صرف کرده است ؟

در عین حال معلوم شد علت اینکه حالتهای مختلف را نمی‌توان بامجموعه‌ای شمارا بیان کرد، این‌است که‌همیشه می‌توان حالتی پیداکرد که دراین مجموعه وجود ندارد. واین به معنای‌آن است که مجموعهٔ همهٔ انواع پرکردن مهمانخانه ، مجموعه‌ای ناشمارا است و مسأله در مقابل مدیر حل نشدنی باقی ماند .

تصمیم گرفتند دراین باره تلگرافی تنظیم شود . بایدگفت که در این مهمانخانهٔ غیرعادی، تلگراف هم غیرعادی بود ، علامتهای تلگراف هم از بی‌نهایت (البته مجموعه‌ای شمارا) نقطه و خط تشکیل می‌شد ، مثلاً به این‌صورت

و غیره . ــ ــ ــ ــ . ــ ــ . ــ

من فوراً متوجه شدم‌که مجموعهٔ همهٔ انواع تلگرافها هم ناشمارا است ، زیرا می‌توان به‌جای نقطه وخط، ۰ و ۱ قرار داد و در این‌صورت به مسأله‌ای کاملاً شبیه مسألهٔ انواع پرکردن مهمانخانه می‌رسیم .

تلگرام فرستاده شد و من به‌گرمی از مدیر مهمانخانه خدا حافظی کردم‌تا به‌طرف کهکشان ر. گ. ت-۸۰۶۷پروازکنم تا طبق مأموریتی که داشتم، فیلمهایی از آنجا تهیه‌کنم . . .

ناشمارای متصله

حالا دیگر می‌توانیم بدون دشواری ثابت‌کنیم که مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع بریك خط راست ، مجموعه‌ای ناشمارا است . به‌جای این مجموعه ، می‌توان از مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی صحبت کرد ، زیرا هرنقطه از خط راست متناظر با یك عدد حقیقی است و برعکس .

هرعدد حقیقی را می‌توان به صورت یك کسر اعشاری نامتناهی نوشت ، به این ترتیب :

$$a_{۰}/a_{۱}a_{۲}a_{۳}\ldots a_{n}\ldots$$

بعضی از این عـددهـا ، دو نماد دارنـد ، مثلاً* . . . ۰/۵۰۰۰ و ... ۰/۴۹۹۹ ، یك عددرا بیان می‌کنند. برای مشخص بودن وضع، ما از نماد اول ،که با صفر، نوشته شده است ، استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم به‌طریقی موفق شده باشیم‌که همهٔ عددهای حقیقی را شماره‌گذاری‌کنیم . برای اینکه ثابت‌کنیم این فرض درست نیست ، کافی است‌لااقل یك عدد بدون شماره پیدا کنیم. با به‌خاطرآوردن روش ایون تیخی ، به این ترتیب عمل می‌کنیم :

ابتدا صفر را می‌نویسیم و ممیزی بعد از آن‌می‌زنیم. سپس عددی را که شمارهٔ اول را ، در شماره‌گذاری عددهای حقیقی، بخودگرفته است انتخاب می‌کنیم و اولین رقم بعد از ممیز (یعنی اولین رقم اعشاری) را در نظر می‌گیریم . اگر این رقـم غیر از ۱ باشد ، در عـددی کـه مـا می‌خواهیم بنـویسیم ، بـه‌عنوان اولین رقـم بعد از ممیز ، ۱ را قـرار می‌دهیم ، و اگر این رقم مساوی ۱ باشد ، ما رقم ۲ را بعد از ممیز می‌نویسیم ، بعد به عدد شمارهٔ ۲ می‌پردازیم و تنها رقم دوم بعد ازممیز را در آن مورد توجه قرار می‌دهیم . دوباره ، اگر این رقم مساوی واحد نباشد، ما در عدد خود به‌جای سدگان ۱ را قرارمی‌دهیم ، و اگر این رقم مساوی واحد باشد ، رقم ۲ را انتخاب مـی‌کنیم . به‌همین ترتیب جلـو می‌رویم ، هربار برای رقم nام عدد خود ، به رقم nام عدد شمارهٔ n توجه می‌کنیم . در نتیجه به عددی می‌رسیم مثل

$$N = ۰/۱۱۲۱۲۱۱ \ldots$$

روشن است‌که این عدد هیچ شماره‌ای ندارد، زیرا رقم اول اعشاری آن با عدد شمارهٔ ۱ فرق دارد ، رقم دوم آن با عدد شمارهٔ ۲ ، رقم سوم آن با عدد شمارهٔ ۳ و ... بطورکلی رقم nام بعد از ممیز در این عدد با رقم nام عدد شمارهٔ n متفاوت است و غیره (با صفحهٔ ۲۱ مقایسه‌کنید).

برای اینکه خواننده بهتر متوجه شودکه چگونه عدد بدون شماره

بدست می‌آید، فرض می‌کنیم که در شماره‌گذاری عددهای حقیقی ، پنج عدد اول به این صورت باشند :

$$۴/۲۷۳۶۴\ ...$$
$$-۱/۳۱۲۲۶\ ...$$
$$۷/۹۵۴۷۱\ ...$$
$$۰/۶۲۴۱۹\ ...$$
$$۸/۵۶۲۸۰\ ...$$

در این‌صورت ، عددی‌که در شماره‌گذاری عددهای حقیقی وجود ندارد، باپنج رقم اعشاری زیر شروع می‌شود :

$$۰/۱۲۱۲۱\ ...$$

بدیهی است‌که این عدد تنها نیست و عددهای بسیاری می‌توان پیدا کردکه بدون شماره باشند (مثلاً می‌توان رقمهای غیر از ۲ را به ۲ و رقمهای مساوی ۲ را به ۷ تبدیل‌کنیم و یا هرجور دیگر) . ولی برای ماکافی است‌که تنها یك عدد بدون شماره پیدا کنیم تا ثابت شودکه فرض ما درمورد امکان شماره‌گذاری عددهای حقیقی، درست‌نیست.

وجود عددهای غیرجبری (ترانساندانت) *

گفتیم‌که عدد جبری به عددی‌گفته می‌شودکه بتواند ریشهٔ معادلهٔ

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + ... + a_n = ۰$$

با ضریبهای صحیح ، باشد. عددی‌که نتواند ریشهٔ چنین معادله‌ای باشد ، غیر جبری[۱] نامیده می‌شود .

در دورهٔ طولانی از حیات علمی ، ریاضی‌دانها تنها با عددهای جبری مثل $\frac{۷}{۱۵}$ ، $\sqrt[۸]{۱۰}$ ، $\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۲}$ وغیره سر وکار داشتند . تنها در سال ۱۸۴۴ بودکه لیوویل ریاضی‌دان فرانسوی ، در اثرکوششهای زیاد خود ،

۱) عدد غیرجبری را درکتابهای فارسی ، متعالی هم‌گفته‌اند

موفق شد چند عدد غیر جبری را پیدا کند . اثبات غیرجبری بودن عدد π هم ،که در سال ۱۸۸۲ و به وسیلهٔ لیندمان انجام گرفت ، یك پیش‌آمد بزرگ علمی بود ، زیرا از آنجا عدم امکان تربیع دایره ثابت می‌شد .

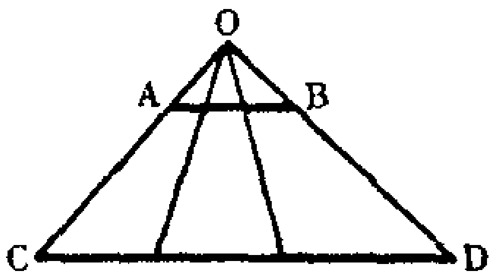
و یکباره معلوم شد که عددهای جبری ، که در هر قدم به آنها برخورد می‌کنیم، در واقع کمیاب‌ترند،در حالی که‌عددهای غیرجبری ،که به دشواری بدست می‌آیند ، مجموعهٔ پهناورتری را تشکیل می‌دهند . در واقع ما دیدیم که عددهای جبری ، یك مجموعهٔ شمارا تشکیل می‌دهند ، در حالی که مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی ، همانطور که ثابت کردیم ، مجموعه‌ای ناشمارا می‌باشد . به این ترتیب اختلاف مجموعهٔ عددهای حقیقی و مجموعهٔ عددهای جبری (یعنی مجموعهٔ عددهای غیر جبری) ، خود مجموعه‌ای ناشمارا می‌شود .

اثبات وجود عددهای غیرجبری ، که در سال ۱۸۸۳ و به وسیلهٔ کانتور داده شد، اثرات بزرگ و شگفتی در ریاضیات باقی‌گذاشت . کانتور توانسته بود وجود عددهای غیرجبری را ثابت کند، بدون اینکه حتی یك نمونهٔ مشخص از این عددها را بسازد ، بلکه تنها فراوانی وجود آنها را مسلم ساخته بود . ولی همین مطلب که ارزش اثبات کانتور را می‌رساند ، جنبهٔ ضعف آنرا هم نشان می‌دهد .

از قضیهٔ لیوویل راه ساده‌ای برای ساختن نمونه‌های مشخص عددهای غیرجبری بدست می‌آید. مثلاً عدد . . . ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۰۰۰۱ یك عدد غیرجبری است ،که در آن بعد از اولین واحد ـ یك صفر، بعد از واحد دوم ـ دو صفر ، بعد از واحد سوم ـ شش صفر و بطورکلی بعد از واحد nام ـ $n!$ صفرقرارگرفته‌است. درحالی که‌ازروش استدلال کانتور نمی‌توان مستقیماً راهی برای ساختن نمونه‌ای از عددهای غیرجبری پیداکرد ؛ این استدلال،به اصطلاح ریاضی‌دانها، غیر سازنده است: در این استدلال تنها فرض عدم وجود عددهای غیرجبری به‌تناقض کشیده می‌شود و دیگرهیچ.

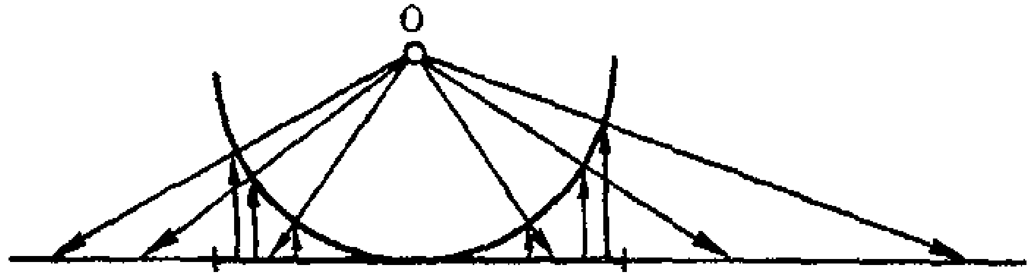
نقطه‌های واقع برپاره خطهای بلند وکوتاه همعددند

تا وقتی که خواننده با شگفتیهای مجموعـه‌هـای نامتناهی آشنا نبود ، در برابر این پرسش که : «کجا تعـداد نقطه‌هـا بیشتر است ، روی پاره خط به طول یك میلیمتر یا روی پاره خط به طول یك متر؟» بدون اینکه سایهٔ تردید برقضاوت او افتاده باشد، به روشنی می‌گفت: یك متر ۱۰۰۰ بار بزرگتر از یك میلیمتر است و بنابراین در همانجا هم ، تعداد نقطه‌ها بیشتر است . ولی حالا ، احتمالاً خوانندهٔ ما از اظهارنظر دربارهٔ مجموعه‌های بی‌نهایت و مددخواهی از آنچه‌که در زندگی عادی‌آموخته است ، پرهیزکند . و در واقع هم تعداد نقطه‌های واقع بر پاره خـط کوچك برابراست با تعداد نقطه‌های واقع بر پاره‌خط بزرگتر. به‌عبارت دیگر، همیشه می‌توان بین نقطه‌های دو پاره خط، تناظر یك به یك برقرارکرد. درستی این مطلب را می‌توانید به روشنی درشکل ۲۹ ببینید.



شکل ۲۹

به‌سختی می‌توان به این فکرتسلیم شد که روی پاره خطی به طول یك میلیون سال‌نوری همانقدر نقطه وجود داردکه روی شعاع هستهٔ اتم .

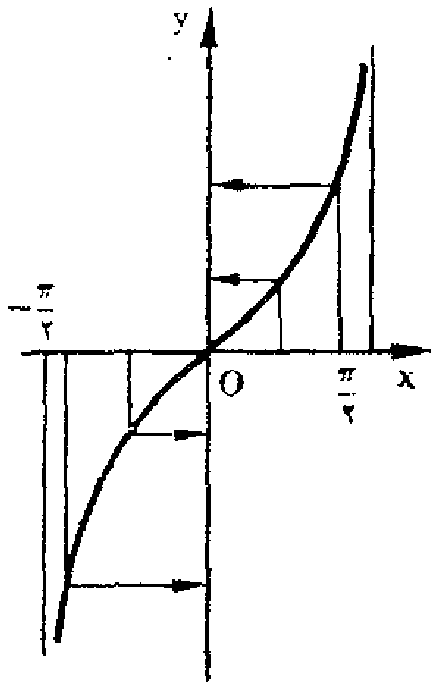


شکل ۳۰

ولی شگفتی‌آورتر است وقتی‌که بدانیم روی یك خـط نامتناهی همانقدر نقطه است‌که روی یك پاره خط ، یعنی بین مجموعهٔ نقطه‌های

واقع بریك خط نامتناهی ومجموعهٔ نقطه‌های واقع بریك پاره خط می‌توان تناظر یك به یك برقرار کرد .

حتی می‌توانیم تمام پاره‌خط را انتخاب نکنیم و دو انتهای آنرا حذف کنیم (یعنی به جای یك فاصلهٔ بسته ، یك فاصلهٔ باز اختیار کنیم) . در شکل ۳۰ می‌بینیم که چگونه می‌توان بین این فاصلهٔ باز (پاره خط بدون دو انتها) و خط راست ، تناظر یك به یك برقرار کرد . ابتدا نقطه‌های این فاصله را روی نیمدایره منعکس می کنیم ، سپس نقطه‌های نیمدایره را روی خط راست تصویر می‌کنیم (تصویر مرکزی) . روشن است که با این روش هر نقطهٔ این فاصله با یکی و فقط با یکی از نقطه‌های خط راست متناظر می‌شود ، ضمناً حتی یك نقطه از خط راست هم کنارگذاشته نمی‌شود.



شکل ۳۱

این تناظر را به‌طریق دیگری‌هم می‌توان برقرار کرد: به‌کمك منحنی تانژانتی ، نمایش تغییرات تابع $y = tg\,x$ (شکل ۳۱) .

پاره خط و مربع

ریاضی‌دانها، علی‌رغم میل خود، به این حقیقت که تعداد نقطه‌های واقع بریك خط راست برابر است با تعداد نقطه‌های واقع بریك پاره‌خط، تسلیم شدند. با وجود این ، نتیجهٔ بعدی که کانتور گرفت ، باز هم غیر منتظره بود . کانتور ، برای جستجوی مجموعه‌هایی که بیشتر از یك پاره خط عضو داشته‌باشد، متوجه مجموعهٔ نقطه‌های داخل یك مربع شد. نمی‌شد

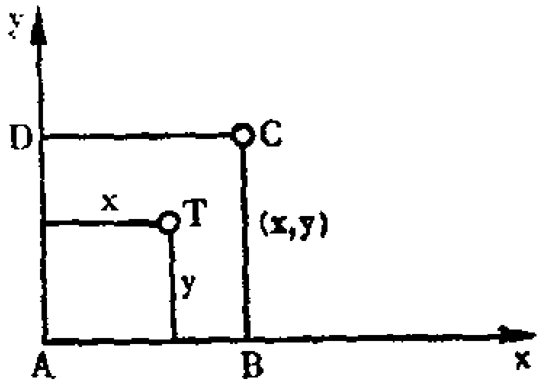
تردیدی برای نتیجه‌گیری داشت : پاره خط کاملاً بریکی ازضلعهای مربع قابل انطباق است، ولی خود مجموعهٔ همهٔ پاره خطهایی که رویهٔ مربع را پوشانده‌اند ، دارای همان قوت مجموعهٔ نقطه‌های یك پاره‌خط است .

کانتور در طول سه سال (از ۱۸۷۱ تا ۱۸۷۴) در جستجوی ایـن مطلب بود که ثابت کند بین نقطه‌هـای واقع بریك پـاره خط و نقطه‌های واقع در داخل مربع ، نمی‌توان تناظر یك به یك برقرار کرد .

سالها گذشت و نتیجهٔ موردنظر بدست نیامد. ولی ناگهان وبطور غیرمنتظره‌ای توانست تناظری راکه ناممکن مـی‌پنداشت ، ثـابت کند . خود او هم به‌نتیجه‌ای که بدست آورده بود ، باور نداشت. او به ددکیند ریاضی‌دان نوشت : «من نتیجه را می‌بینم ، ولی آنرا باور نمی‌کنم» .

ولی همه چیز در جهت تسلیم به این حقیقت بود که تصور قبلی اشراقی نـادرست است، و در مـربع همانقدر نقطه وجود دارد که روی یك پاره خط. اثبات دقیق این حکم کمی‌مشکل است و به‌همین مناسبت ما تنها استخوان‌بندی اثبات کانتور را طرح می‌کنیم .

پاره خط [۱ ، ۰] و مربع به ضلع‌مساوی ۱ را انتخاب‌می‌کنیم. این مربع را می‌توان به نوعی که در شکل ۳۲ نشان داده شده است ، قرارداد. می‌خواهیم بین نقطه‌های پاره خط و مربع، تناظر یك به یك برقرار کنیم. تصویر نقطه‌های مربع



شکل ۳۲

برپاره خط AB کمکی به‌ما نمی‌کند ، زیرا هرنقطهٔ پاره خط AB ، می‌تواند تصویر بی‌نهایت نقطه از مربع باشد (مثلاً همهٔ نقطه‌های پاره‌خط DA ، روی نقطهٔ A تصویر می‌شود) .

مسأله را به این طریق حل می‌کنیم : هرنقطهٔ T از مربع $ABCD$

را می‌توان به‌وسیلهٔ دو عدد x و y ، مختصات این نقطه ، مشخص کرد (یا بطور ساده‌تر ، هرنقطهٔ این مربع به‌وسیلهٔ فاصله‌های آن تا ضلعهای AB و AD مشخص می‌شود) . این عددها را می‌توان به صورت کسرهای اعشاری نامتناهی نوشت . چون x و y از واحد بزرگتر نیستند ، این کسرها به صورت زیر خواهند بود :

$$x = ۰/\alpha_۱\alpha_۲ \ldots \alpha_n \ldots \qquad (۱)$$
$$y = ۰/\beta_۱\beta_۲ \ldots \beta_n \ldots \qquad (۲)$$

(برای سهولت کار ، نقطه‌های واقع برضلعهای مربع را در نظر نمی‌گیریم و تنها به نقطه‌های داخلی آن می‌پردازیم). در اینجا α_n و β_n، رقمهای‌اعشاری عددهای x و y هستند، مثلاً اگر $x = ۰/۶۳۲۰۵\ldots$ و $y = ۰/۲۱۳۵۷\ldots$ باشد، $\alpha_۱ = ۶$ ، $\alpha_۲ = ۳$ ، $\alpha_۳ = ۲$وغیره، و $\beta_۱ = ۲$ و $\beta_۲ = ۱$ ، $\beta_۳ = ۳$ و غیره خواهد بود .

حالا باید نقطه‌ای مانند Q از پاره خط AB را پیدا کنیم که متناظر با نقطهٔ T باشد. کافی‌است طول پاره‌خط AQ را پیدا کنیم. طول این‌پاره خط را مساوی عدد z می‌گیریم که رقمهای اعشاری آن از طریق «برزدن» رقمهای اعشاری عددهای x و y بدست می‌آید . به عبارت دیگر از دو نماد (۱) و (۲) ، نماد سومی می‌سازیم که رقمهای اعشاری آن به این ترتیب انتخاب شده باشد :

$$z = ۰/\alpha_۱\beta_۱\alpha_۲\beta_۲\alpha_۳\beta_۳ \ldots \alpha_n\beta_n \ldots$$

مثلاً اگر داشته باشیم:

$$x = ۰/۵۱۵۶۲۳\ldots$$
$$y = ۰/۷۳۴۸۵۶\ldots$$

می‌نویسیم :

$$z = ۰/۵۷۱۳۵۴۶۸۲۵۳۶\ldots$$

نقطهٔ z بر پاره خط [۱ , ۰] قرار دارد و روشن است که نقطه‌های مختلف مربع ، متناظر با نقطه‌های مختلف پاره خط است . اگر دو نقطهٔ

T و T' برهم منطبق نباشند ، لااقل یکی از رقمهای اعشاری عددهای x و x' یا y و y' با هم متفاوت خواهد بود ، و همین مطلب به معنای آن است که عددهای اعشاری z و z' برهم منطبق نیستند. با تحلیل مفصلتری ثابت می‌شود که در این صورت دو نقطهٔ متناظر z و z' هم منطبق بریکدیگر نیستند .

از این راه همهٔ نقطه‌های پاره خط بدست نمی‌آید . مثلاً نقطهٔ $z = ۰/۱۹۱۹۱۹...$ را باید از زوج $x = ۰/۱۱۱...$ و $y = ۰/۹۹۹...$ بدست آورد که متناظر با یکی از نقطه‌های واقع برضلع مربع است و شرط ما این بود که نقطه‌های واقع برضلعهای مربع را به حساب نیاوریم . بنابراین ضمن نگاشت مربع بر پاره خط ، نقطهٔ z تصویر هیچ نقطه‌ای از مربع نیست .

به‌این ترتیب ، بین نقطه‌های مربع و قسمتی از نقطه‌های پاره خط [۰ و ۱] ، تناظر یك به یك بر قرار کردیم . این مطلب ثابت می‌کند که مجموعهٔ نقطه‌های مربع ، قوتی نابیشتر از قوت مجموعهٔ نقطه‌های پاره خط دارد . ولی قوت آن کمتر هم نیست و بنابراین این قوتها برابرند .

* با کمی تغییر در بحث ، می‌توان بین تمام نقطه‌های مربع و تمام نقطه‌های پاره خط ، تناظر یك به یك برقرار کرد . برای این منظور باید رقمهای مختصات را با احتیاط بیشتری به‌هم مخلوط کرد.

دوباره به‌جای تمام مربع $ABCD$، تنها قسمتی از آنرا که با حذف ضلعهای BC و CD بدست می‌آید، انتخاب می‌کنیم. مختصات نقطه‌های این قسمت در نامساویهای $۰ \leqslant x < ۱$ و $۰ \leqslant y < ۱$ صدق می‌کنند. این مختصات را می‌توان به صورت کسرهای اعشاری نامتناهی نوشت ، ضمناً این کسرها نمی‌توانند به رقمهای متوالی مساوی ۹ ختم شوند .

حالا رقمهایی را که درنماد اعشاری x و y وجود دارد به‌گروههایی تقسیم می‌کنیم : بعد از هررقم غیر ۹، خط قائم کوتاهی می‌کشیم. مثلاً

اگر داشته باشیم :

$$x = ۰/۳۹۹۴۵۹۹۹۶۷\ldots$$
$$y = ۰/۹۵۹۹۷۸۰۹۰\ldots$$

تقسیم به‌گروهها به‌این صورت خواهد بود :

$$x \sim ۳|۹۹۴|۵|۹۹۹۶|۷|\ldots$$
$$y \sim ۹۵|۹۹۷|۸|۰|۹۰|\ldots$$

حالا این گروه‌ها را شبیه حالت قبل ، داخل هم می‌کنیم . دنبالهٔ نامتناهی گروه‌های رقمها بدست می‌آید:

$$۳|۹۵|۹۹۴|۹۹۷|۵|۸|۹۹۹۶|۰|۷|۹۰|\ldots$$

خطهای قائم را حذف می‌کنیم و به جلوآن صفر قرار می‌دهیم، این کسر اعشاری بدست می‌آید :

$$z = ۰/۳۹۵۹۹۴۹۹۷۵۸۹۹۹۶۰۷۹۰\ldots$$

که متناظر با نقطهٔ $M(x ، y)$ از مربع است .

می‌توان ثابت کرد که این تناظر بین نقطه‌های مربع $۰ \leqslant x < ۱$ ، $۰ \leqslant y < ۱$ و فاصلهٔ $۰ \leqslant z < ۱$ ، یك تناظرمتقابل یك به یك است . حالا دیگر به‌سادگی می‌توان تناظربین‌نقطه‌های‌تمام مربع $ABCD$ ونقطه‌های یك پاره‌خط را برقرار کرد. برای‌این‌منظور کافی‌است پاره‌خطی‌به‌طول ۳ انتخاب کرد و تناظر یك به یك را بین قسمتی از مربع ، یعنی $۰ \leqslant x < ۱$ ، $۰ \leqslant y < ۱$ با فاصله $۰ \leqslant z < ۱$ برقرار نمود و سپس بین خط شکستهٔ BCD و پاره خط $۱ \leqslant z \leqslant ۳$ این تناظر را برقرار نمود . *

نه تنها مربع ، بلکه مکعب هم دارای همان تعداد نقطه است که یك پاره خط ، بطور کلی هرشکل هندسی که لااقل یك خط داشته باشد ، دارای همانقدر نقطه است که یك پاره خط . اینگونه مجموعه‌ها را ، مجموعه‌های با قوت متصله گویند (به عبارت دیگر اگر مجموعهٔ A با مجموعهٔ عددهای حقیقی هم عدد باشد ، A قوت متصله دارد) . مجموعهٔ

تلگرامهای نامتناهی هم قوت متصله دارد (صفحهٔ ۱۱۴را ببینید) .

معلوم نیست چرا یکی از مسأله‌ها حل نمی‌شود ؟

تا اینجا با دو نوع مجموعهٔ نامتناهی آشنا شده‌ایم. یکی از آنها همعدد با مجموعهٔ عددهای طبیعی است ، و دیگری همعدد با مجموعهٔ نقطه‌های روی خط راست . معلوم شد که در مجموعهٔ دوم ، عضوهای بیشتری وجود دارد . بطور طبیعی سؤالی پیش می‌آید : آیا مجموعهٔ «بینابینی» وجود ندارد که بیشتر از مجموعهٔ عددهای طبیعی و کمتر از مجموعهٔ نقطه‌های واقع برخط راست، عضو داشته باشد؟ این سؤال به مسألهٔ متصله مشهور شده است. در بارهٔ این مسأله، بسیاری از ریاضی‌دانهای مشهور (خود کانتور و ریاضی‌دانهای بعد از او) فکر کرده‌اند، ولی تا زمان ما این مسأله حل نشده باقی مانده است . ن. ن. لوزین ، ریاضی‌دان بزرگ وبنیان‌گذار مکتب شوروی نظریهٔ تابعهای با متغیرهای حقیقی، سالهای زیادی دربارهٔ مسألهٔ متصله فکر کرد ؛ ولی حل مسأله ، مثل سراب بیابان از دسترس دور می‌شد (لوزین در جریان تلاش برای حل این مسأله ، یك رشته مسأله‌های مشکل مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها را حل کرد و شاخهٔ کاملی در ریاضیات به‌نام نظریهٔ ترسیمی مجموعه‌ها به وجود آورد).

یك روز نوجوان پانزده‌ساله‌ای به‌نام لواشنیرلمان، که استعداد ریاضی فوق‌العاده‌ای داشت ، نزد لوزین آمد (بعدها او یکی از ریاضی‌دانهای مشهور شوروی شد) . لوزین برای اینکه استعداد ریاضی‌دان جوان را آزمایش کند، سی مسألهٔ دشوار درمقابل او گذاشت. لوزین حل ۲۹ مسأله را می‌دانست، اما مسألهٔ سی‌ام، مسألهٔ متصله بود. ولی ریاضی‌دان جوان بعد از یك هفته نزد لوزین برگشت و با اندوه گفت : «معلوم نیست چرا یکی از مسأله‌ها حل نمی‌شود» .

ناکامی درحل مسالهٔ متصله، تصادفی نبود . موقعیت این مساله،

تاریخ پوستولات مربوط به خطهای موازی را به یاد می‌آورد. در یك دورهٔ دوهزار ساله، کوشش کردند که این پوستولات را از دیگر اصلهای هندسی نتیجه بگیرند. بعد از کارهای لوباچوسکی، هیلبرت و دیگر دانشمندان، روشن شد که این پوستولات تناقضی با اصلهای دیگر ندارد، ولی ضمناً نمی‌تواند به عنوان نتیجه‌ای از آنها بدست آید.

در اینجا هم به نظر می‌رسد که در اصل موضوعی کردن نظریهٔ مجموعه‌ها، حکم مربوط به وجود قوت بینابینی متناقض با دیگر اصلها نیست (نتیجه‌گیری ریاضی‌دان آلمانی ك. گودل ـ سال ۱۹۳۸)، ولی نمی‌تواند از آنها نتیجه شود (این مطلب در همین گذشتهٔ نزدیك، تقریباً در یك‌زمان و بدون ارتباط با هم، به وسیلهٔ کوئن امریکایی درسالهای ۱۹۶۳ ـ ۱۹۶۴ و وپنکا اهل چك در سال ۱۹۶۴، ثابت شد).

آیا مجموعه‌ای با بزرگترین قوت وجود دارد؟*

بزرگترین قوتی که تااینجامی‌شناسیم، عبارت‌است ازقوت مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یك خط راست، یعنی قوت متصله. نه مجموعهٔ نقطه‌های مربع و نه مجموعهٔ نقطه‌های مکعب، هیچکدام قوت بزرگتری ندارند. آیا قوت متصله، بزرگترین قوتها نیست؟ معلوم شده است‌که نه. علاوه برآن اصلاً مجموعهٔ با بزرگترین قوت وجود ندارد. برای هرمجموعهٔ A، مجموعهٔ دیگری وجود داردکه قوت آن بیشتر از قوت مجموعهٔ A است. این مجموعه، مثلاً مجموعهٔ B و عبارت است از مجموعهٔ همهٔ تابعهایی که بروی A داده شده و مقادیر ۰ و ۱ را قبول می‌کنند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که قوت مجموعهٔ B کمتر از قوت مجموعهٔ A نیست. برای این منظور، هرنقطهٔ a از مجموعهٔ A را متناظر با تابع $f_a(x)$ می‌گیریم که در این نقطه مقدار ۱ و در بقیهٔ نقطه‌ها مقدار ۰ را

قبول می‌کند . روشن است که نقطه‌های مختلف ، متناظـر بـا تابعهای مختلف است . مثلاً اگر مجموعهٔ A از سه نقطهٔ ۱ ، ۲ ، ۳ تشکیل شده باشد، نقطهٔ۱ متناظربا تابعی است که دراین نقطه مقدار۱ را قبول می‌کند، درحالی‌که نقطهٔ ۲ متناظر با تابعی است که در نقطهٔ ۱ ، مقدار ۰ را قبول می‌کند ، و این تابعها مساوی یکدیگر نیستند .

به این ترتیب قوت مجموعهٔ B کمتر از قوت مجموعهٔ A نیست. حالا ثابت می‌کنیم که این قوتها مساوی یکدیگر نیستند ، یعنی تناظـر یك به یك بین عضوهای مجموعه‌های A و B وجود ندارد . روش برهان خلف را انتخاب می‌کنیم . فرض می‌کنیم که چنین تناظری وجود داشته باشد .

دراین‌صورت تابعی را که متناظر با عضو a از مجموعهٔ A است، با $f_a(x)$ نشان می‌دهیم. به‌خاطر می‌آوریم که همهٔ تابعهای $f_a(x)$ تنها دو مقدار ۰ و ۱ را قبول می‌کنند .

تابع جدید $\varphi(x)$ را در نظر می‌گیریم که از تساوی زیـر بدست می‌آید :

$$\varphi(x) = ۱ - f_x(x)$$

برای اینکه مقدار تابع $\varphi(x)$ را در نقطـه‌ای مانند a از A پیدا کنیم ، ابتدا باید تابع $f_a(x)$ متناظر این نقطه را بدست آوریم و مقدار این تابع را به‌ازای $x = a$ از ۱ کم کنیم . روشن است که تابع $\varphi(x)$ هم بـه روی A داده می‌شود و تنها مقادیر ۰ و ۱ را قبول می‌کند . بنابراین $\varphi(x)$ عبارت است از عضوهایی از مجموعهٔ B . ولی دراین‌صورت طبق فرض، $\varphi(x)$ متناظر با نقطه‌ای مانند b از A است ، یعنی

$$\varphi(x) = f_b(x)$$

با در نظر گرفتن تساوی اول برای $\varphi(x)$ ، برای همهٔ مقادیر x از A ، بدست می‌آید :

$$۱ - f_{x}(x) = f_{b}(x)$$

در این تساوی $b = x$ می‌گیریم . در این صورت بدست می‌آید :

$$۱ - f_{b}(b) = f_{b}(b)$$

و بنابراین :

$$f_{b}(b) = \frac{۱}{۲}$$

ولی این نتیجه، متناقض با آن است که مقادیر تابع $f_{b}(x)$ مساوی ۰ و ۱ است . این تناقض ثابت می‌کند که تناظر یك به یك بین مجموعه‌های A و B نمی‌تواند وجود داشته باشد .

به این ترتیب برای هرمجموعهٔ A ، می‌توان مجموعهٔ B را با قوت بیشتر ساخت ، یعنی مجموعه‌ای با بزرگترین قوت وجود ندارد .

متذکر می‌شویم که مجموعهٔ B را به ترتیب دیگری هم می‌توان ساخت . مجموعهٔ B را می‌توان به عنوان همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A در نظر گرفت . C را زیرمجموعه‌ای از A در نظرمی‌گیریم . تابع $f(x)$ را مساوی ۱ می‌گیریم به‌شرطی که داشته باشیم $x \in C$ ، ومساوی ۰ به‌شرطی که داشته باشیم $x \notin C$. روشن است که زیرمجموعه‌های مختلف متناظر با تابعهای مختلف‌اند . برعکس هرتابع $f(x)$ ،که دو مقدار ۰ و ۱ را قبول می‌کند ، متناظر با زیرمجموعه‌ای از A است ،که به‌ازای عضوهای x آن، این تابع مقدار ۱ را قبول می‌کند. بنابراین بین مجموعهٔ تابعهایی که بروی مجموعهٔ A داده شده است و مقادیر ۰ و ۱ را قبول می‌کنند ، و مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A ، تناظر یك به یك برقرار می‌شود .

حساب بی‌نهایت *

ما با قوتهای مجموعه‌های مختلف آشنا شده‌ایم . همانطور که قبلاً هم گفته شد ، مفهوم قوت تعمیم مفهوم تعداد عضوهای یك مجموعهٔ متناهی است. ولی روی عددهای طبیعی می‌توان عملهای حساب را انجام

داد : می‌توان آنها را با هم جمع کرد ، از هم کم کرد ، در هم ضرب کرد و غیره . این عملها انعکاسی از بعضی عملهای روی مجموعه‌ها هستند . مثلاً جمع عددهای طبیعی متناظر با اجتماع دو مجموعهٔ متناهی از هم جدا است . اگر در یکی از این مجموعه‌ها m عضو ، و در دیگری n عضو وجود داشته باشد ، در اجتماع آنها $m+n$ عضو وجود دارد .

به‌همین ترتیب، عملهای روی قوتها هم تعریف شده است . برای قوتها علامتهای خاصی در نظر گرفته شده است . مثلاً قوت مجموعه‌های شمارا با $\aleph_0$ نشان داده می‌شود ($\aleph$ ، نخستین حرف الفبای عبری قدیم است و الف نامیده می‌شود). قوت متصله را با $\mathfrak{c}$ (تسه ـ گوتیك) ، قوت مجموعهٔ همهٔ تابعهایی را که بروی محور حقیقی داده می‌شود با f و غیره نشان می‌دهند .

قوتها را می‌توان کاملاً شبیه عددهای طبیعی با هم جمع کرد . اگر قوت مجموعهٔ A مساوی m و قوت مجموعهٔ B مساوی n ، و ضمناً دو مجموعهٔ A و B از هم جدا باشد ، قوت مجموعهٔ $A+B$ را بـه $m+n$ نشان می‌دهند . از خاصیتهای اجتماع مجموعه‌ها ، نتیجه می‌شود که

$$m+n=n+m$$

$$m+(n+p)=(m+n)+p$$

ولی بسیاری از قاعده‌های جمع قوتهای بی‌نهایت ، به قاعده‌های عادی حساب شباهت ندارد . از این حقیقت نباید تعجب کرد ، زیرا همانطور که می‌دانیم، خاصیتهای مجموعه‌های نامتناهی هیچ‌شباهتی به‌خاصیتهای مجموعه‌های متناهی نـدارد . مثلاً در حساب بـی‌نهایت ، این تساویها درست است :

۱) $n+\aleph_0=\aleph_0$،

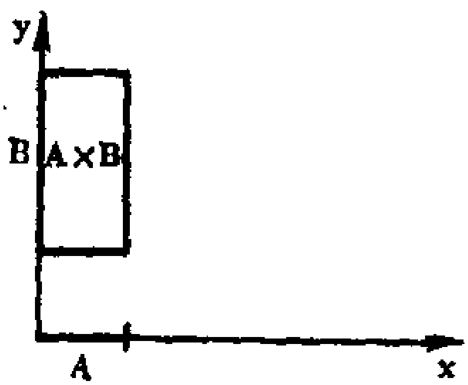
۲) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$،

۳) $\aleph_0+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$، ۴) $\quad C + C = C$،

۵) $\quad C + f = f$

رابطهٔ اول بــه ایــن معناست کــه اجتمـاع یك مجموعهٔ متناهی بـا یك مجموعهٔ شمارا ، عبارت‌است از یك مجموعـهٔ شمارا ؛ رابطهٔ دوم نشان می‌دهد که از اجتماع دومجموعهٔ شما را ، یك مجموعهٔ شمارا بدست می‌آید ؛ رابطهٔ سوم می‌گوید که اجتماع یك مجموعهٔ شمارا با مجموعهٔ قوت متصله ، یك مجموعهٔ قـوت متصله مـی‌دهد ؛ و خـواننده خـود می‌تواند معنای سایر رابطه‌ها را خود روشن کند .

حالا ببینیم کـه قوتهای بی‌نهایت را چگونه درهم ضرب می‌کنند. برای این منظور باید قبلاً بدانیم که ضرب عددهای طبیعی با کدام عمل روی مجموعه‌ها مربوط می‌شود فرض کنید که A مجموعه‌ای شامل m عضو ، و B مجموعه‌ای شامل n عضو باشد . مجموعهٔ جدید $A \times B$ را تشکیل می‌دهیم که عضوهای آن همهٔ زوجهای ممکنهٔ (a , b) باشد ، که در آن $a \in A$ و $b \in B$ است . اگر عضوهای مجموعهٔ اول را a_1 ، ... ، a_m ، و عضوهای مجموعهٔ دوم را b_1، ...، b_n بنامیم ، این زوجها را می‌توان به صورت جدول زیرمنظم کرد :



شکل ۲۳

$$(a_1 , b_1) \ldots (a_1 , b_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_m , b_1) \ldots (a_m , b_n)$$

روشن است که تعداد این زوجها برابر است با mn ، یعنی حاصلضـرب عددهای m و n .

به انجام همین عمل روی مجموعه‌های نامتناهی مـی‌پردازیم . A

و B را دو مجموعهٔ نـامتناهی فرض کنید . حاصلضرب مستقیم آنها را $A \times B$ می‌نامیم که عضوهای آن همهٔ زوجهای ممکنهٔ $(a ، b)$ باشد ، با شرط $a \in A$ و $b \in B$. مثلاً ، اگر A مجموعهٔ نقطه‌های پاره خط [۱ ، ۰] و B مجموعهٔ نقطه‌های پاره‌خط [۳ ، ۱] باشد، مجموعهٔ $A \times B$ را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌های مستطیلی که درشکل ۳۳ نشان داده شده است، مشخص کرد . در واقع ، هرنقطهٔ این مستطیل متناظر با دو تصویر آن روی محورهااست.

اگر قوت مجموعهٔ A مساوی m و قـوت مجموعهٔ B مساوی n باشد ، قوت مجموعهٔ $A \times B$ را به mn نشان می‌دهیم . قانونهای زیر برای ضرب قوتها وجود دارد :

$$mn = nm$$
$$(mn)p = m(np),$$
$$m(n+p) = mn + mp$$

و بالاخره این تساویها درست است :

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \mathbf{C} = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{CC} = \mathbf{C}$$

رابطهٔ اول نشان می‌دهد که اگر A و B دو مجموعهٔ شمارا باشند، مجموعهٔ همهٔ زوجهای $(a ، b)$ $(a \in A$ و $b \in B)$ نیز شماراست و این نوع دیگری از تنظیم همان حکم است که : از اجتماع مجموعهٔ شمارایی ازمجموعه‌های شمارا، یك مجموعهٔ شمارا بدست می‌آید. تساوی $\mathbf{CC} = \mathbf{C}$ نشان می‌دهد که تعداد نقطه‌های پاره خط برابر است با تعداد نقطه‌های روی مربع ، زیرا $\mathbf{C}$ یعنی تعداد نقطه‌های روی پاره خط و $\mathbf{CC}$ یعنی تعداد نقطه‌های در حاصلضرب مستقیم پاره خط در خودش ، یا به عبارت دیگر تعداد نقطه‌های روی مربع .

توان بی‌نهایت *

از آنجا که ما دیگر می‌توانیم قوتها را در هم ضرب کنیم ، می‌توانیم هرقوت را به توان دلخواهی با نمای طبیعی برسانیم . حالا روشن می‌کنیم که چگونه توان یك قوت را بانمای بی‌نهایت می‌توان بدست آورد ، یعنی معنای n^{m} را روشن می‌کنیم . برای این منظور دوباره به مجموعه‌های متناهی برمی‌گردیم و مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم که تعداد عضوهای آن مساوی n^{m} باشد .

به این ترتیب عمل می‌کنیم . فرض می‌کنیم مجموعهٔ A دارای m عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو باشد . B^{A} را مجموعه‌آی می‌گیریم که عضوهای آن عبارت باشند ازهمهٔ تابعهای ممکنی که روی مجموعهٔ A داده شده و مقادیری در مجموعهٔ B قبول می‌کنند . به عبارت دیگر ، هرعضو مجموعهٔ B^{A} قانونی را نشان می‌دهد ، که طبق آن عضو a از مجموعهٔ A ، در مقابل عضو $b=f(a)$ از مجموعهٔ B قرار می‌گیرد . مثلاً فرض کنید که مجموعهٔ A از سه عدد : ۱ و ۲ و ۳ ، و مجموعهٔ B از دو عضو : نقطه و خط ، تشکیل شده باشد ؛ در این‌صورت عضوهای مجموعهٔ B^{A} از «تابعهایی» به‌صورت $f(۱) = .$ ، $f(۲) = .$ ، $f(۲) = -$ ، یا $f(۱) = -$ ، $f(۲) = .$ ، $f(۳) = .$ تشکیل شده است . این «تابعها» را می‌توان بطور ساده به وسیلهٔ دنباله‌هایی از نقطه و خط داد ، که از سه علامت تشکیل شده‌باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که تعداد این دنباله‌ها مساوی ۸ ، یعنی $۲^{۳}$ است ، به این ترتیب :

. . . ؛ . . — ؛ . — . ؛ . — —

— . . ؛ — . — ؛ — — . ؛ — — —

ما $۲^{۳} = ۸$ دنباله بدست می‌آوریم ، و این تصادفی نیست . اگر مجموعهٔ A از m عضو ، و مجموعهٔ B از n عضو تشکیل شده باشد ، B^{A} از n^{m} عضو تشکیل می‌شود . از خواننده می‌خواهیم که خود این حکم را

ثابت کند .

حالا دیگر می‌توانیم روشن کنیم که اگر m و n قوتهای بی‌نهایت باشند ، n^m چه معنایی دارد . مجموعهٔ A را با قوت m و مجموعهٔ B را با قوت n انتخاب می کنیم و B^A را مجموعهٔ همهٔ «تابعهایی» می گیریم که روی A داده شده و مقادیری در B قبول می کنند ؛ قوت این مجموعه هم n^m است .

قبلاً دیدیم که برای هرمجموعهٔ A ، قوت مجموعهٔ تابعهایی که روی A داده شده و مقادیر ۰ و ۱ را قبول می کنند، بیشتر از قوت خود مجموعهٔ A است. این به‌معنای آن‌است که برای هرقوت m، این نامساوی درست است :

$$2^m > m$$

وهمچنین خاطرنشان می کنم که :

$$c = 2^{\aleph_0}$$

قبلاً هم دیدیم که مجموعهٔ همهٔ تلگرامهای بی‌نهایت ، دارای قوت متصله هستند. ولی هرتلگرام بی‌نهایت، چیزی نیست جز تابعی که روی مجموعهٔ عددهای طبیعی داده شده است و تنها دو مقدار نقطه و خط را قبول می کند . به این ترتیب مجموعهٔ همهٔ تلگرامهای بی‌نهایت قوتی مساوی $2^{\aleph_0}$ دارد . درواقع تساوی مورد نظر ما هم ثابت شد .

مجموعه‌های مرتب

قوت مجموعه (یا آنطورکه گاهی می گویند : عدد اصلی مجموعه) تنها نیمی ازکار عددهای طبیعی را انجام می‌دهد . می‌دانیم که عددهای طبیعی تنها برای پاسخ گفتن به پرسش «چقدر ؟» بکار نمی‌رود ، بلکه علاوه برآن به پرسش «درکدام ردیف ؟» هم پاسخ می‌دهد . به عبارت دیگر ، ما تنها از «دو» ، «پنج» و «بیست» صحبت نمی کنیم ، بلکه

«دوم» ، «پنجم» و «بیستم» را هم بکار می‌بریم . قوت مجموعه ، هیچ تصوری دربارهٔ اینکه عضوهای مجموعه ، چگونه مرتب شده‌اند ، بدست نمی‌دهد. با وجود آنکه مجموعهٔ همـهٔ عددهای صحیح به تعداد مجموعهٔ عددهای طبیعی عضو دارد ، مرتب‌کردن عددهای صحیح را بـا شیوه‌های مختلف می‌توان انجام داد . در مجموعهٔ عددهای طبیعی، نخستین عضو وجود دارد ، در حالی‌که در مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح ، چنین عضو نخستینی وجود ندارد .

بنابراین عدد اصلی (یا قوت) مجموعه‌ها ، برای بررسی ، ردیف استقرار عضوها در مجموعه‌کافی نیست و به مفهوم تازه‌ای نیاز داریم . ابتدا مفهوم مجموعهٔ مرتب را می‌آوریم . گویند مجموعهٔ A مرتب است ، وقتی‌که برای هرزوج ازعضوهای آن مفهوم نامساوی $a < b$ تعریف شده باشد ، و این نامساوی بایدخاصیتهای زیر را داشته باشد :

۱) اگر $a < b$ ، آنگاه $a \neq b$ ؛
۲) اگر $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.

مجموعهٔ همهٔعددهای حقیقی، مجموعهٔ همهٔعددهای‌گویا، مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی و غیره ، به سادگی مرتب می‌شود. در مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط هم می‌توان ترتیب را واردکرد ؛ مثلاً $a + bi < c + di$ می‌گیریم ، وقتی‌که یا $a < c$ و یا $a = c$ و $b < d$ باشد . با این قـرارداد خواهیم داشت: $۲ + ۱۵i < ۳ + ۱۰i$ و $۲ + ۴i < ۲ + ۵i$ ، به‌همین‌ترتیب می‌توان مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایها را مرتب‌کرد . متذکر می‌شویم که مفهوم ترتیب را به‌طریقه‌های مختلف می‌توان دریك مجموعه واردکرد.

مثلاً مجموعهٔ همهٔ‌کلمه‌های متفاوتی را کـه در این کتاب بکار رفته است ، در نظر می‌گیریم . این مجموعه را می‌توان مثلاً به این ترتیب مرتب‌کرد : کتاب‌را برمی‌داریم وشروع به‌خواندن می‌کنیم و همهٔ کلمه‌های تازه‌ای را که به‌ترتیب برخورد می‌کنیم، یادداشت می‌نماییم.

در این حالت قانون مرتب بودن را می‌توان به این صورت توضیح داد: کلمهٔ A قبل از کلمهٔ B قرار می‌گیرد ، وقتی که ضمن خواندن کتاب به کلمهٔ A ، قبل از کلمهٔ B برخورد کنیم .

ولی به ترتیب دیگری هم می‌توان عمل کرد : کلمـهٔ A را قبل از کلمهٔ B به حساب آوریم، وقتی که در فرهنگ الفبایی ،کلمهٔ A قبل از کلمهٔ B باشد . روشن است که این دو نوع مرتب بودن عضوها برای یك مجموعه ، با هم فرق دارد .

دومجموعهٔ مرتب A و B را از یك نوع‌مرتب گویند ، وقتی که‌بدون برهم خوردن ردیف عضوها، بتوان تناظر یك‌به‌یك بین‌آنها برقرار کرد. به زبان دیگر اگر a_1b_1 و a_2b_2 ، آنگاه از $a_1<a_2$ نتیجه شود $b_1<b_2$.

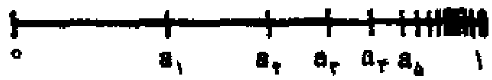
مثلاً هردو پاره خط ، به‌یك نوع مرتب‌اند . تناظر یك به‌یك بین نقطه‌های دوپاره‌خط ،که درشکل ۲۹ نشان داده شده است ، ردیف نقطه‌ها را عوض نمی‌کند . همچنین تناظری که در شکل ۳۰ بین یك خط و یك پاره‌خط (با حذف دو انتهای‌آن) برقرار کردیم، ترتیب نقطه‌ها را حفظ می‌کند . ولی پاره خط و خط راست به دونوع مختلف مرتب شده‌اند . البته بین آنها هم می‌توان تناظر یك‌به‌یك برقرارکرد ، منتهی این تناظر ردیف را به هم می‌زند ، زیرا در پاره خط نقطه‌های ابتدا و انتها وجود دارد ، در حالی‌که در خط راست چنین نقطه‌هایی وجود ندارد .

مجموعه‌های خوش‌ترتیب

حتی مجموعه‌های شمارا را می‌توان با روشهای مختلف مرتب کرد . مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی ، مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح و مجموعهٔ همهٔ عددهای گویـا ، مجموعه‌هایی شمارا هستند . ولـی مرتب بودن این مجموعه‌ها، بکلی با هم فرق دارد . درمجموعهٔ عددهای طبیعی، نخستین عضو وجود دارد (عدد ۱) . در حالی‌که نه در مجموعهٔ همهٔ

عددهای صحیح و نه در مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا ، عضو نخستین وجود ندارد . از طرف دیگر در مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ عددهای صحیح ، می‌توان دو عضو نشان داد که بین آنها هیچ عضو دیگری از این مجموعه‌ها وجود نداشته باشد (مثل عددهای ۵ و ۶) ، درحالی‌که بین هردو عضو دلخواه از مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا ، بی‌نهایت عضو ازهمین مجموعه وجود دارد .

کانتور ، برای اینکه این مجموعه‌های مرتب مختلف را ازهم جدا کند ، نوع خاصی از مجموعه‌های مرتب را ، که بعضی از خاصیتهای آنهارا می‌توان کاملاً از روی خاصیتهای مجموعهٔ عددهای طبیعی فهمید، درگروه جداگانه‌ای قرار داد. اگر در مجموعهٔ عددهای طبیعی یک‌زیر مجموعهٔ غیر تهی انتخاب کنیم ، بین عضوهای این زیر مجموعه ، کوچکترین (یا سمت چپ‌ترین) عضو وجود دارد . کانتور به مجموعه‌هایی که دارای چنین خاصیتی باشند ، مجموعه‌های خوش‌ترتیب نام نهاد ، به عبارت دیگر ، مجموعهٔ مرتب A وقتی خوش‌ترتیب است که هر زیر مجموعهٔ غیر تهی آن دارای نخستین عضو باشد .

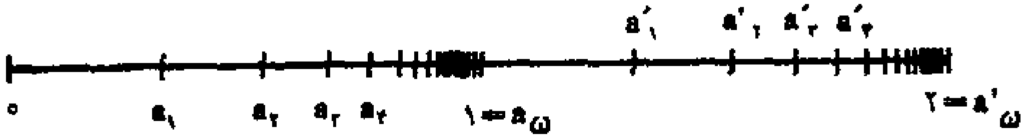


شکل ۳۴ - a

همانطور که گفتیم ساده‌ترین مجموعهٔ خوش‌ترتیب ، مجموعهٔ عددهای طبیعی است . این مجموعه را می‌توان روی نیم‌خط (∞ ، ۰) به وسیلهٔ نقطه‌های ۱، ۲، ۳، ... نشان داد. ولی نگاشت خط روی پاره‌خط، که در شکل ۳۰ نشان داده شده است ، ردیف نقطه‌ها را حفظ می‌کند. بنابراین نیم‌خط (∞ ، ۰) را می‌توان به فاصلهٔ باز (۱،۰) تبدیل کرد . به‌این‌ترتیب به‌جای نقطه‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . ، می‌توان نقطه‌هایی روی فاصلهٔ (۱ ، ۰) انتخاب کرد . مجموعهٔ نامتناهی نقطه‌های a_1 ، a_2 ،... ، a_n ،... بدست می‌آید که به نقطهٔ ۱ نزدیك می‌شوند (شکل ۳۴-a) .

حالا نقطهٔ ۱ را در نظر می‌گیریم . این نقطه را با عددهای معمولی نمی‌توان شماره‌گذاری کرد، زیرا تمام شماره‌ها را برای نقطه‌های a_1، a_2، ...، a_n، ... بکار برده‌ایم . برای اینکه این نقطه را هم شماره‌گذاری کنیم ، به عدد تازه‌ای نیاز داریم ،که در میان عددهای طبیعی یافت نمی‌شود ، از آنجا که نقطهٔ ۱ بعد از همهٔ نقطه‌های a_1،...،a_n،... قرارگرفته است (که به‌کمک عددهای معمولی شماره‌گذاری شده‌اند) ، این عدد جدید را «ترانسفینی» نامیده‌اند (ازکلمه‌های لاتینی *trans* به معنی «بعد از» و *finitae* به معنی «متناهی») و این عدد ترانسفینی راکه بلافاصله بعد از همهٔ عددهای طبیعی ۱و۲،۳،...، قرارگرفته است با ω نشان می‌دهند . به این‌ترتیب نقطهٔ ۱ باعلامت a_ω نشان داده‌می‌شود. مجموعهٔ A همهٔ نقطه‌های a_1 ، . . . ، a_n ، . . . ، a_ω، خودیک مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌است (فکرکنید چرا ؟) .

و حالا نقطه‌های مجموعهٔ A را به بعد از ۱ می‌بریم . به‌این‌ترتیب که نقطهٔ a_1 به نقطهٔ $a'_1 = a_1 + 1$ ، نقطهٔ a_2 به نقطهٔ $a'_2 = a_2 + 1$ و غیره برده شود . در نتیجه مجموعهٔ B بدست می‌آید که ازنقطه‌های a'_1، a'_2 ، . . . ، a'_n ، ... ، a'_ω تشکیل شده‌است.به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه‌مجموعهٔ $A + B$ خوش‌ترتیب‌است.عضوهای‌آنراشماره‌گذاری‌کنیم. نقطه‌های مجموعه A را شماره‌گذاری‌کرده‌ایم . نقطهٔ a'_1 بلافاصله بعداز نقطهٔ a_ω قرار دارد (شکل ۳۴ـ b را ببینید) ، بنابراین طبیعی است که



شکل ۳۴ - b

آنرا با عددترانسفینی ۱ + ω شماره‌گذاری‌کنیم ، یعنی $a'_1 = a_\omega + 1$.
به‌همین‌ترتیب‌برای نقطهٔ بعدی یعنی a'_2 که به‌وسیلهٔ عدد ترانفینی ۲ + ω

شماره‌گذاری می‌شود. نقطهٔ a'_{ω}، که بعدازهمهٔ نقطه‌های $a_{\omega}+۱$، . . . ، $a_{\omega}+n$، ... می‌آید وبه‌وسیلهٔ عدد ترانسفینی ۲ω شماره‌گذاری‌می‌شود: $a'_{\omega}=a_{۲\omega}$.

احتمالاً خواننده خود متوجه شده باشد که می‌توان مجموعهٔ A را دوباره به جلو برد و نقطه های جدیدی بدست آورد، که با عدد های $۲\omega+۱$، ...، $۲\omega+n$، ...، ۳ω شماره‌گذاری‌می‌شوند. اگربه‌همین‌ترتیب ادامه دهیم ، مجموعهٔ خوش‌ترتیبی بدست می‌آید که از نقطه‌هایی تشکیل شده است و این نقطه‌ها به وسیلهٔ عددهای ترانسفینی به شکل $k\omega+n$ شماره‌گذاری شده‌اند (k و n عددهایی طبیعی‌اند) .

ولی در این ساختمان ، عددهای ترانسفینی تمام نمی‌شود . زیرا به این ترتیب ما دوباره به مجموعه‌ای می‌رسیم که روی تمام نیم‌خط $(۰, \infty)$ قرار گرفته است ، و ضمناً روی هر پاره‌خط $(n, n+۱)$ از این نیم‌خط ، بی‌نهایت نقطه از مجموعهٔ ما وجود دارد . دوباره نگاشت نیم‌خط $(۰, \infty)$ را روی فاصلهٔ باز $(۰, ۱)$ بدست می‌آوریم . مجموعهٔ نقطه‌هایی بدست می‌آید که مرتباً به ۱ نزدیك می‌شود. برای شماره‌گذاری نقطهٔ ۱، به عدد ترانسفینی تازه‌ای نیاز داریم که آنرا به $\omega^{۲}$ نشان می‌دهیم. بعد از آن می‌توان عددهای ترانسفینی $\omega^{۲}+۱$ ، . . . ، $\omega^{۳}$، ...، ω^{n}، ...، و حتی ω^{ω} را ساخت . این عدد ترانسفینی هم وجود دارد :

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

ولی ما بیش از این روی این مطلب بحث نمی‌کنیم .

اصل نامفهوم

قبلاً گفتیم که بعضی از مجموعه‌ها را می‌توان به طریقه‌های مختلف مرتب کرد. آیا بطور کلی می‌توان هرمجموعه‌ای را مرتب کرد، و اگر بتوان، آیا همیشه می‌توان از یك مجموعهٔ مفروض، مجموعهٔ خوش‌ترتیبی بدست آورد؟ بسیاری از ریاضی‌دانها روی این مسأله کار کرده‌اند، مگر نه این‌است‌که ازحل مثبت نتیجه می‌شودکه هرمجموعه‌ای را می‌توان به‌کمك عددهای ترانسفینی شماره‌گذاری کرد؟

ناگهان راه‌حل‌ساده وکوتاهی درسال ۱۹۰۴ به‌وسیلهٔ ارنست‌تسرمه‌لو منتشر شد. او ثابت کرد که هر مجموعه‌ای را می‌توان خوش‌ترتیب کرد (کانتور در سال ۱۸۸۳، این نتیجه را پیش‌بینی کرده بود). ولی اثبات تسرمه‌لو مورد پسند همهٔ ریاضی‌دانها قرارنگرفت. مطلب بر سر این‌است که این اثبات برحکمی متکی است‌که برای خود او و دیگر ریاضی‌دانها، به هیچوجه واضح نیست. این حکم، که بعدها به نام اصل انتخاب یا اصل تسرمه‌لو معروف شد، چنین است:

فرض کنید که در مقابل شما چندکوپهٔ سیب قرار گرفته باشد. روشن‌است‌که می‌توان ازهرکوپه، سیبی انتخاب وآنها را درکوپهٔ‌جدیدی جمع کرد. به نظر می‌رسدکه همین عمل را می‌توان درحالتی هم‌که در هرکوپه بی‌نهایت سیب وجود دارد و تعدادکوپه‌ها هم بی‌نهایت است، انجام داد. اصل انتخاب هم همین است:

اگر مجموعهٔ نامتناهی، از مجموعه‌های نامتناهی، مفروض باشد، بدون اینکه از قبل قانونی برای انتخاب معین شده باشد، می‌توان از هرمجموعه یك عضو را انتخاب کرد.

مطلب برسر این است که اصل انتخاب منجر به اثباتی می‌شودکه بکلی غیرسازنده است، یعنی مثلاً ثابت می‌کندکه نمی‌تواند مجموعه‌ای وجود داشته باشدکه نتواند مرتب باشد، ولی هیچگونه روش سازنده‌ای

برای مرتب کردن مجموعه ، از این اثبات بدست نمی‌آید . ریاضی‌دانها در طول سالهای زیادی از اصل انتخاب استفاده می‌کردند و درستی آنرا واضح به حساب می‌آوردند . ولی هرچه در بارهٔ آن بیشتر دقت‌کردند، بیشتر به معمایی بودن آن پی بردند . بسیاری از قضیه‌هایی که به کمك اصل انتخاب ثابت شده بود ، بکلی با حکمهای روشن ، متناقض درآمد به همین مناسبت برتراندراسل ریاضی‌دان مشهور ، دربارهٔ این اصل چنین می‌گوید :

« درابتدا روشن به نظر می‌رسد ، ولی هرچه عمیق‌تر در بارهٔ آن فکر می‌کنم ، نتیجه‌های عجیب و غریب‌تری ازآن بدست می‌آورم و در آخر از فهم این مطلب صرفنظر می‌کنم‌که این اصل چه معنی دارد » .

باوجود این، بسیاری ازریاضی‌دانهابا آسودگی‌خاطر دربررسیهای خودشان ، از اصل انتخاب استفاده می‌کنند .

در همین گذشتهٔ نزدیك، به اثبات این مطلب توفیق یافته‌اند که اصل انتخاب نه با دیگر اصلهای مجموعه‌ها متناقض است و نه می‌تواند از آنها نتیجه شود .

دوسیب از یك سیب

در بارهٔ یکی از نتیجه‌های شگفت اصل انتخاب صحبت می‌کنیم. احتمالاً شما بارها شاهد کار شعبده‌بازهای تردست در صحنه بوده‌اید . شعبده‌بازکیسهٔ خالی را به تماشاچی نشان می‌دهد ، بعد یك‌گلوله در آن می‌اندازد و دوتا خارج می‌کند ، دو گلوله می‌اندازد و چهارتا خارج می‌کند ، چهار گلوله را در کیسه می‌اندازد و هشت تا از آن بیرون می‌آورد . البته در این مورد همه می‌دانند که هیچ معجزه‌ای صورت نمی‌گیرد و هرچه هست در « تردستی » شعبده‌باز است . ولی در نظریهٔ مجموعه‌ها ، چنین معجزه‌ای وجود دارد .

یك سیب معمولی انتخاب می‌کنیم وآنرا به‌نحوی به چهارقسمت تقسیم می‌کنیم . به‌نظر روشن می‌رسد که اگر تنها دوتا از این قسمتها را انتخاب کنیم، نمی‌توان ازآنها یك سیب کامل‌درست‌کرد (درست همانطور که اگر نصف یك پرتقال را بخوریم ، نمی‌توان از بقیهٔ قسمتهای آن یك پرتقال‌کامل درست‌کرد) .

ولی ریاضی‌دان می‌تواندکره را به نحوی به چهار قسمت تقسیم کند که از دو قسمت آن بتوان کرهٔ کاملی با همان شعاع درست کرد ؛ بدون اینکه هیچ چیز به آنها اضافه کنیم ، تنها آنها را مثل جسمهای صلب حرکت می‌دهیم ، از دو قسمت دیگر هم می‌توان کره‌ای کاملا شبیه

تردستی

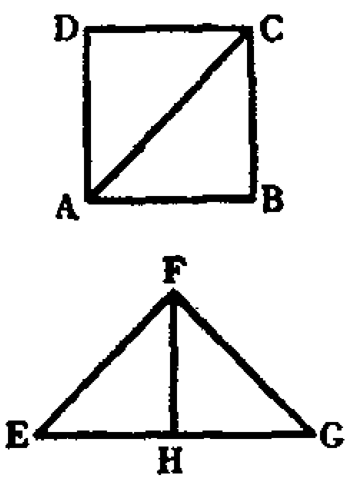
اولی درست کرد ، به این ترتیب از یك کره ، دو کرهٔ مساوی با آن بدست می‌آید . با کمال تأسف ، این مسأله تنها به صورت نظری حل می‌شود، والا می‌شد از یك سیب ، دوسیب از همان نوع بدست آورد ، سپس آنها را به چهار سیب ، بعد به هشت سیب و غیره تبدیل کرد ، البته حل عملی این مسأله هم ممکن نیست . زیرا با قانون بقای ماده متناقض است .

چنین تقسیمی از کره به چهار قسمت ، بر اساس اصل انتخاب قرار دارد .

در بارهٔ نتیجه‌های عجیب‌تری که از اصل انتخاب بدست می‌آید ، دیگر در اینجا صحبتی نمی‌کنیم.

تقسیمهای محدود*

خواننده احتمالاً ازهندسه مفهوم شکلهای هم‌ترکیب را به خاطر دارد . دوشکل XوY را هم‌ترکیب گویند ، وقتی که‌بتوان آنها را به‌ترتیب به شکلهای X_1،...،X_m و Y_1،...،Y_m تقسیم کرد، به‌نحوی که شکل X_1 باشکل Y_1 همنهشت (قابل‌انطباق)، شکل X_2 با شکل Y_2 و بالاخره شکل X_m با شکل Y_m همنهشت باشد . مثلاً روشن است که مربع به‌ضلع a با مثلث متساوی الساقین و قائم‌الزاویهٔ به قاعدهٔ $2a$ هم‌ترکیب است (شکل ۳۵) .



شکل ۳۵

ولی از نظرگاه نظریهٔ مجموعه‌ها ، این تعریف کاملاً روشن نیست .

درحقیقت، ضمن تقسیم شکل، نقطه‌هایی را که روی خط تقسیم وجود دارند ، دوبار به حساب می‌آوریم ؛ از هریك از این نقطه‌ها ، دو نقطه بدست می‌آید: روی هرقسمت، یك نقطه .

و به این‌ترتیب ، تقسیم مربع $ABCD$ و مثلث EFG در شکل ۳۵ ، به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ها ، به‌درد نمی‌خورد : بعد از تقسیم مثلث و قرار دادن قسمتهای آن در کنار هم تا به صورت مربع درآید ، نقطه‌های ضلعهای EF و FG روی هم قرار می‌گیرند و یك قطر AC از مربع را می‌دهند ، سپس نقطه‌های ارتفاع FH «به دو قسمت» می‌شوند وضلعهای AB و CD از مربع را به وجود آورند .

بنابراین شکلهای هم‌ترکیب‌را درنظریهٔ مجموعه‌ها، به‌نحودیگری باید تعریف کرد. شکلهای XوY را هم‌ترکیب گوییم وقتی که بتوان آنها را به تعداد محدودی قسمتهای دوبه‌دوغیرمتقاطع تقسیم کرد:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m,$$
$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$$

به نحوی که X_1 همنهشت Y_1 ، X_2 همنهشت Y_2 ، . . . ، X_m همنهشت Y_m باشد .

به نظر می‌رسد که ازاین نقطه نظر ، مربع $ABCD$ هم‌ترکیب با مثلث EFG است . ولی اثبات این حکم به اندازهٔ کافی دشوار است . اگر خواننده علاقمند باشد این اثبات را بداند ، می‌تواند آنرا در کتاب «نظریه مجموعه‌ها» تألیف واتسلاوسرپینسکی پیدا کند[1] .

س . باناخ و آ . تارسکی ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای اینکه دوچندضلعی مسطح به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ها هم‌ترکیب باشند ، این‌است که مساحتهای آنها مساوی باشد . طبعاً می‌توان انتظار داشت که این شرط برای چندوجهیها ، تساوی حجم آنها باشد . ولی این استنباط درست نیست . باناخ وتارسکی به‌کمك اصل انتخاب ثابت کردند که‌هردو چندوجهی (محدود) به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ها ، حتی وقتی که‌حجمهای مختلف دارند ، هم‌ترکیب‌اند . آنها ثابت کردند که به این مفهوم کره با

---

۱) صفحهٔ ۶۳ ترجمهٔ فارسی‌کتاب سرپینسکی دیده شود .

مکعب ، و بطورکلی هردو جسم محدود ، با یکدیگر هم ترکیب است . متذکرمی‌شویم که چه درحالت تقسیم کره (که قبلاً ازآن صحبت‌کردیم) و چه در حالت هم‌ترکیبی کره ومکعب ، از عمل انتخاب دلخواه استفاده می‌شود . روش مشخص تقسیم را در اینجا نمی‌توان نشان داد . در این تقسیم فرضی، قسمتهای « عجیبی » بدست می‌آید که حجم ندارند و ریاضی‌دانها به آنها اندازه‌ناپذیر می‌گویند .

۳

تابعها و منحنیهای عجیب

یا

گشت‌وگذار در موزهٔ ریاضی

پیشرفت مفهوم تابع

بسیاری از مفهومهای ریاضی راه درازی را درجهت تکامل پیموده‌اند. یك مفهوم ریاضی ابتدا به عنوان تعمیم آگاهیهایی که از راه مشاهده و تجربهٔ طولانی بدست آمده است ، به وجود می‌آید . به‌تدریج از این آگاهیهای مشاهده‌ای و از راه کنار گذاشتن حالتهای خاص و اتفاقی ، و توجه به حالتهای کلی و همیشگی ، تعریف دقیق ریاضی جان می‌گیرد . اغلب پیش می‌آید که این تعریف نه تنها برای چیزهایی که بررسی آنها مربوط به این تعریف است ، کفایت می‌کند ، بلکه شامل چیزهایی هم می‌شود که قبلاً حتی در بارهٔ آنها فکر هم نکرده بودند . بررسی این چیزهای تازه و عبور به انتزاع بالاتر ، خود پایه‌ای برای پیش بردن تعریف نخستین و دقیق‌تر کردن آن می‌شود . همراه این پیشرفت ، مفهوم ریاضی موردنظرهدف وسیع‌تر و وسیع‌تری پیدا می‌کند. دایرهٔ گسترده‌تری از چیزها را دربرمی‌گیرد، و کاربردهای گوناگون‌تری بدست می‌آورد.

به عنوان نمونه ، مفهوم عدد ، از زمانهای دور پیش از تاریخ ، وقتی که تنها می‌توانستند «یك ، دو ، بسیار» را بشمارند ، تا زمان ما ، چه راه درازی را پیموده است ! عددهای طبیعی ، کسرها ، عددهای منفی ، عددهای مختلط ، کواترنیونها ، عددهای فوق مختلط و ... این را هم بگوییم که همیشه تعمیم یك مفهوم ریاضی ، با خوشحالی همهٔ ریاضی‌دانها روبرو نشده است . مثلاً نه تنها عددهای مختلط ، بلکه حتی عددهای منفی هم تامدتها ، مورد تأیید بسیاری ازدانشمندان نبوده است .

مفهوم تابع هم از راه پرفراز و نشیبی گذشته است . فکر رابطهٔ بین چند کمیت ، ظاهراً از دانش یونان باستان سردرآورده است . ولی کمیتها در آنجا تنها سرشت هندسی داشته‌اند . حتی نیوتون ،که یکی از پایه‌گذاران آنالیز ریاضی است، برای بررسی کمیتهای مربوط به‌هم ، از زبان‌هندسی استفاده می‌کند .گرچه فرما و دکارت هم ازمفهوم تابع‌استفاده می‌کردند ، ولی خود اصطلاح « تابع » در سال ۱۶۹۴ و در نوشته‌های لایب‌نیتس دانشمند آلمانی ، که همزمان با نیوتون در به وجود آوردن آنالیز ریاضی تلاش می‌کرد ، وارد شده است . ولی مفهوم تابع برای لایب‌نیتس ، معنای خیلی تنگ و محدودی داشت، و تنها مربوط به‌بعضی پاره‌خطها می‌شدکه وضع آنها، به‌جای نقطه روی منحنی ارتباط داشت : تحت مماس ، تحت قائم ، شعاع انحناء و غیره . به این ترتیب لایب‌نیتس هم در موضع هندسی باقی مانده بود ، تا اینکه ای . برنولی، شاگرد لایب‌نیتس درسال ۱۷۱۸ ، تعریف تابع را از قید صورتهای‌هندسی آن آزادکرد: «تابع یك مقدار متغیر ، به‌کمیتی‌گفته می‌شودکه به‌ترتیبی از این مقدار متغیر و مقادیر ثابت به وجود آمده باشد » .

گام بعدی را در پیشرفت مفهوم تابع ، لئونارد اولر ، عضو آکادمی پترزبورگ وشاگرد نابغهٔ ای . برنولی ،برداشت. او درکتاب خود به‌نام «حساب دیفرانسیل»، تابع را چنین تعریف می‌کند: «مقادیری را تابع‌گویند که وابسته به مقادیر دیگری باشند ، به‌نحوی که با تغییر دومیها ، اولیها هم تغییر کنند » .

ولی مفهوم تابع برای اولر و ریاضی‌دانهای هم‌زمان او ، مربوط به امکان بیان تابع به وسیلهٔ یك دستور بود . از نظر ریاضی‌دانهای سدهٔ هیجدهم ، نوشتهٔ .

$$y=\begin{cases} x & (x<0) \\ x^2 & (x\geqslant 0) \end{cases}$$

دو تابع را تعریف می‌کرد (و نه یك تابع را) .

به‌زودی معلوم شدکه مطلب به این سادگیها نیست . د . برنولی ضمن حل مسألهٔ مربوط به نوسانهای سیم ، به جوابی به صورت یك رشتهٔ مثلثاتی رسید . ما در اینجا در بارهٔ چگونگی این رابطه صحبت نمی‌کنیم ، تنها به این نکته اشاره می‌کنیم که شکل سیم به کمك یك دستور داده می‌شد (اگرچه شامل بی‌نهایت جمله بود) .

همین مسألهٔ نوسانهای سیم را ، دالامبر دانشمند فرانسوی هم حل کرد . جواب دالامبر بکلی به‌صورتی غیر ازجواب برنولی بود و به ازای آوندهای مختلف (آوند = آرگومان) ، دستورهای متفاوتی می‌داد .

ظاهراً در برابر ریاضیات سدهٔ هیجدهم ، تناقضی حل نشدنی قرار گرفته بود : برای یك مسأله دو جواب بدست آمده بود ؛ ضمناً یکی از این جوابها برای همهٔ مقادیر مختلف آوند با یك دستور بیان می‌شد ، درحالی‌که دیگری دستورهای مختلفی را درمقابل ما می‌گذاشت. به‌خاطر این وضع، جواب د . برنولی مورد تردید قرارگرفت : گمان‌کردند که او تمام جوابهای مسأله را پیدا نکرده است ، بلکه تنها به‌جوابهایی دست یافته است‌که به وسیلهٔ یك دستور بیان می‌شوند . بحث ومشاجرهٔ شدیدی به وجود آمد ،که درآن همهٔ ریاضی‌دانهای بزرگ سدهٔ هیجدهم ــ اولر ، دالامبر و دیگران‌ــ شرکت داشتند .

در واقع بحث بر سر مفهوم تابع ، در بارهٔ رابطه‌های تابعی و در بارهٔ امکان بیان این رابطه به وسیلهٔ دستور بود . حل قطعی این مسأله در ابتدای سدهٔ نوزدهم و به‌وسیلهٔ ژ . فوریه ، ریاضی‌دان فرانسوی به دست آمد. فوریه ثابت‌کرد، مجموع رشتهٔ بی‌پایانی‌که از تابعهای‌مثلثاتی تشکیل شده است ، ممکن است در فاصله‌های مختلف ، با دستورهای متفاوت بیان شود . فوریه ، بعد از اثبات این حکم ، تعریف تازه‌ای از تابع داد و روی این مطلب تکیه‌کردکه: مهم‌این‌است‌که مقدارتابع داده

شده باشد ، و اینکه این مقدار به وسیلهٔ یك دستور مشخص شده باشد یا نه ، اهمیتی ندارد .

نتیجه‌گیری فوریه به وسیلهٔ دیریکله ریاضی‌دان آلمانی دقیق‌تر شد. اوثابت‌کرد مجموع رشتهٔ مثلثاتی می‌تواند هرمنحنی دلخواهی را نمایش دهد، تنها باید تعداد ماکزیممها ومی‌نیممها دراین منحنی محدود باشد و منحنی تا ارتفاع بی‌نهایت بالا نرود . دیریکله ، تعریف فوریه را برای تابع دقیق‌تر کرد و آنرا به صورتی درآورد که امروز هم مورد استفاده است (قبل‌ازآن‌هم لاکروا، لباچوسکی وبعضی ریاضی‌دانهای دیگر، تعریفی نزدیك به تعریف دیریکله برای تابع داده بودند) . دیریکله برای تابع این تعریف را می‌آورد : « مقدار متغیر y را تابع مقدار متغیر x گوییم ، وقتی‌که هرمقدار x متناظر با یك مقدار معین و منحصر مقدار y باشد»

بعدها به جملهٔ « هرمقدار x»، جملهٔ « که متعلق به‌فلان مجموعه است» را اضافه کردند (زیرا لزومی ندارد که تابع برای همهٔ مقادیر x ، معین باشد) .

این تعریف به اندازهٔ کافی‌کلی بود ، در آن هیچ صحبتی از این نشده است‌که تابع باید در فاصله‌ای‌که معین است ، به وسیلهٔ یك دستور داده شود . حتی از این هم بالاتر، تابع می‌تواند با کلمه‌ها معین شود و اصلاً دستوری برای آن داده نشود . مثلاً خود دیریکله ، این تابع را در نظر می‌گیرد :

$$f(x)=\begin{cases} \text{۰، وقتی‌که } x \text{ عددی‌گنگ است} \\ \text{۱، وقتی که } x \text{ عددی‌گویا است} \end{cases}$$

از نظرگاه ریاضی‌دانهای سدهٔ هیجدهم ، ایـن تعریف هیچ تابعی را نمی‌دهد، زیرا دستوری وجود نداردکه به‌کمك آن بتوان تابع دیریکله را محاسبه‌کرد. با وجود این، چنین‌تعریفی تابع راکاملاً مشخص می‌کند. از این تعریف‌کاملاً روشن است‌که مثلاً

$$f(\frac{۳}{۴}) = ۱ ، \qquad f(\sqrt{۲}) = ۰$$

در واقع ، تعریف دیریکله (با اضافه‌ای که به آن اشاره کردیم) ، برای تابعهای عددی از آوندهای عددی ، پایان کار بود . پیشرفت بعدی مربوط به بررسی تابعهایی بود که روی مجموعه‌های دلخواه داده شده باشد و همچنین مقادیری که روی مجموعه‌های دلخواه قبول کنند . مثلاً فرض کنید دو مجموعهٔ A و B داده شده باشد ، و فرض کنید هر عضو a ازمجموعهٔ A متناظر با عضو b ازمجموعهٔ B باشد. در این صورت گویند تابعی روی مجموعهٔ A با مقادیری توی مجموعهٔ B داده شده است . مفهوم تابع ، در تعریف کلی‌ترخود با مفهومهای تناظر ، نگاشت و تبدیل یکی شده است.

از این نظرگاه ، مثلاً مساحت مثلث ، تابعی است که روی مجموعهٔ همهٔ مثلثها داده شده و مقادیری توی مجموعهٔ عددهای مثبت قبول می‌کند. همچنین دایرهٔ محاط درمثلث ، تابعی است روی مجموعهٔ همهٔ مثلثها با مقادیری توی مجموعهٔ دایره‌ها. ولی ما دراینجا روی این نقطه‌نظر کلی نمی‌ایستیم و تنها به تابعهایی می‌پردازیم که روی مجموعه‌های عددی داده شده‌اند و مقادیر عددی را قبول می‌کنند .

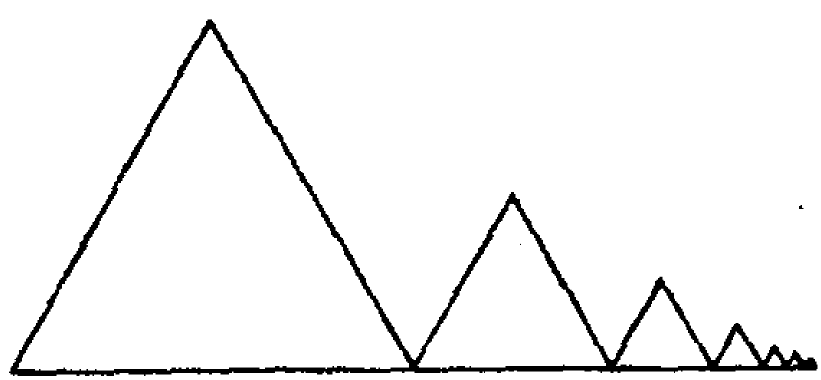
جن از شیشه آزاد می‌شود

تعریف دیریکله این امکان را به وجود آورد که تابعهایی با عجیب‌ترین خاصیتها، ساخته شود. اگر پیش از آن ، برای ساختن تابعی با خاصیتهای مورد نظر، لازم بود دستورهای گوناگونی را به هم ترکیب کنند ، حالا دیگر، کار خیلی ساده شده بود ، و امکان بررسی تابعهای مختلف، بدون اینکه دربارهٔ وجود یك دستور یگانه برای آن فکر کنیم، پیدا شد . و از نیمهٔ سدهٔ گذشته ، تابعهایی ساخته شد که خاصیتهای آن

بکلی با خاصیتهای تابعهای معمولی، متفاوت بود. بدون شك، خود دیریکله هم گمان نمی‌برد که چه نتیجه‌های عجیبی از کار او بدست می‌آید.

خود تابع دیریکله، که ما پیش از این یادی از آن کردیم، به اندازهٔ کافی غیرعادی است. در هر پاره خط کوچك محور طول، بی‌نهایت عددگویا و بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. ولی تابع دیریکله برای عددهای گویا، مساوی واحد و برای عددهای گنگ، مساوی صفر است. بنابراین، وقتی که x روی محور طول حرکت می‌کند، مقدار تابع مرتباً از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ می‌پرد. نمایش تغییرات این تابع را نمی‌توان رسم کرد، زیرا این تابع در تمام نقطه‌های خود ناپیوسته است.

ولی در میان تابعهای پیوسته هم، تابعهایی با خاصیتهای عجیب پیدا می‌شود. مثلاً، آیا می‌توان تابع پیوسته‌ای پیدا کرد که در یك فاصلهٔ محدود، بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد؟ در نظر اول گمان می‌رود که چنین چیزی ممکن نیست. مگر نه این‌است که تابع باید بتواند ازنقطهٔ ماکزیمم به‌طرف نقطهٔ می‌نیمم پایین برود و سپس ازنقطهٔ می‌نیمم به طرف نقطهٔ ماکزیمم بالا برود و غیره. و چگونه می‌تواند این عمل را در یك فاصلهٔ محدود بی‌نهایت بار انجام دهد؟ با وجود این، چنین تابع عجیبی وجود دارد و ضمناً ساختن آن هم خیلی ساده است.



شکل ۳۶

این تابع را در فاصلهٔ [۰ ، ۱] می‌سازیم. برای این منظور، پاره‌خط را نصف می‌کنیم و روی نیمهٔ چپ آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی

بنا می‌کنیم . حالا دوباره نیمهٔ باقیماندهٔ طرف راست را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی قطعهٔ $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$ مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم . عمل مذکور را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم ، برای ما «سلسله جبالی» بدست می‌آید که دارای بی‌نهایت «قله» است و مرتباً به طرف نقطهٔ ۱ پایین می‌آید (شکل ۳۶) . خط شکسته‌ای را که به این ترتیب بدست می‌آید ، به عنوان نمایش تغییرات تابع $f(x)$ می‌گیریم . در این صورت ، تابع برای هرنقطه از پاره خط [۱ ، ۰] ، بجز نقطهٔ انتهایی سمت راست ، معین است . در این نقطه هم فرض می‌کنیم : $f(1) = 0$.

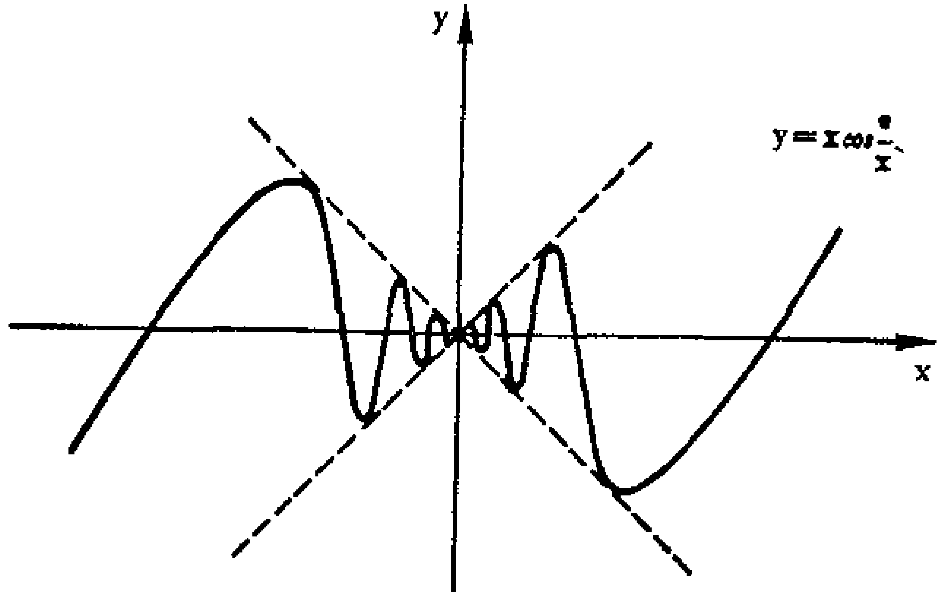
ازآنجاکه با نزدیك شدن به نقطهٔ ۱ ، ارتفاع رأسها به‌سمت صفر میل می‌کند ، تابعی‌که بدست‌آورده‌ایم در تمام نقطه‌های فاصلهٔ [۱ ، ۰] پیوسته ، و ضمناً تعداد ماکزیممها و می‌نیممها در این فاصله بی‌نهایت است .

ریاضی‌دان سدهٔ هیجدهم ، برای اینکه چنین تابعی را بسازد ، مجبور بود تابعهای مختلف زیادی را با هم ترکیب‌کند ، بدون اینکه به این مطلب پی برده باشدکه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

در فاصلهٔ [۱ ، ۰] دارای بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است (شکل ۳۷ راببینید) .

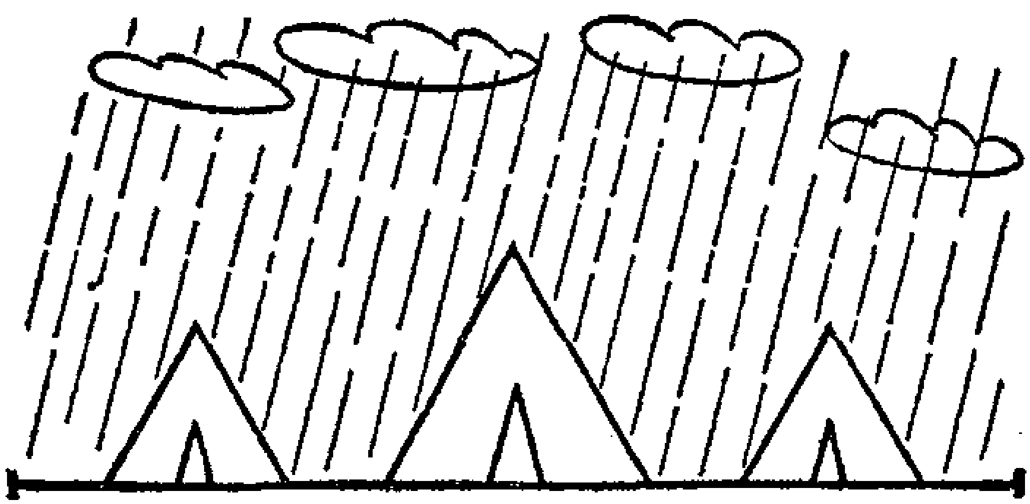
ولی تابعی‌که بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم دارد ، تازه آغاز پیشامدهای شگفتی‌آور برای ریاضی‌دانها بود . این آغاز آزاد شدن جن از شیشه بود .



شکل ۳۷

نقطه‌های نمناك

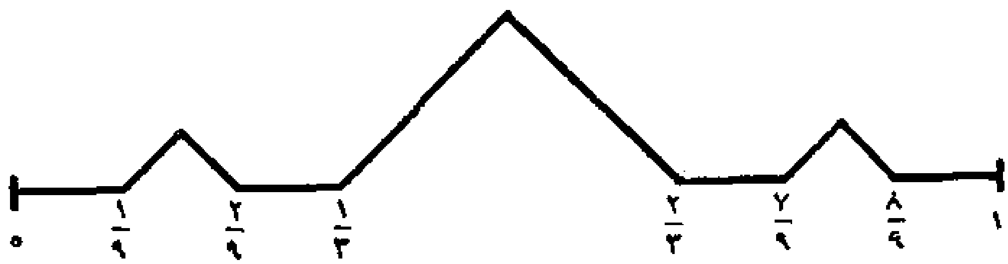
درتابعهایی‌که هم‌اکنون نام بردیم، تنها یك نقطه (یعنی نقطهٔ ۱) وجود داردکه درکنار آن بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است. حالا تابع دیگری می‌سازیم که در آن، اینگونه نقطه‌ها، خیلی زیاد باشد.



باران می‌بارد

فرض‌کنیم روی پاره خط [۱ و ۰] از محور طول از بالا باران ببارد. برای حفظ آن از باران به این ترتیب عمل می‌کنیم، پاره خط [۱ و ۰] را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کینم و روی قسمت

وسط ، چادری به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع قرار می‌دهیم . این چادر همهٔ نقطه‌های قسمت وسط را ازباران حفظ می‌کند (بجز دو انتهای این قسمت ، یعنی نقطه‌های $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$) . حالا هرکدام از دو قسمت دیگـر را دوباره به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و هریك از قسمتهای وسط را باچادری به‌همین شکل می‌پوشانیم (البته ضلع مثلثهای جدیدکوچکتر از ضلع مثلث قبلی است) . برای ما خطی بدست می‌آید که در شکل ۳۸ نشان داده شده است . در مرحلهٔ سوم ، چهار چادر و سپس هشت چادر و غیره می‌سازیم .



شکل ۳۸

پرسشی پیش می‌آید ،آیا همهٔ نقطه‌های پاره‌خط به‌وسیلهٔ این خط شکستهٔ دندانه‌ای از باران محفوظ می‌ماند ، یا نقطه‌هایی باقی مـی‌ماند که از باران خیس می‌شود ؟ بعضی از این نقطه‌های «نمناك» به سادگی بدست می‌آید ، آنها دو انتهای پاره‌خطهایی هستندکه با چادر پوشیده شده است (یعنی نقطه‌هایی مثل $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۱}{۹}$ ، $\frac{۲}{۹}$ ، $\frac{۷}{۹}$ ، $\frac{۸}{۹}$ و غیره) . همـهٔ این نقطه‌ها با ساختن چادرهای مربوطهٔ خود بی‌حفاظ می‌ماند وچادرهای بعدی هم آنها را نمی‌پوشاند . به‌سادگی معلوم می‌شودکه تعداد اینگونه نقطه‌ها بی‌نهایت است ، منتهی مجموعه‌ای شمارا تشکیل می‌دهند .

ولی معلوم شدکه علاوه براین مجموعهٔ شمارا ازنقطه‌های «نمناك»، مجموعه‌ای با قوت متصله از این نقطه‌ها وجود دارد . بـرای شرح این نقطه‌هـا ، بهتر است در دستگاه عـدد شماری بـه مبنـای ۳ کار کنیم .

می‌دانیم که این دستگاه هم شبیه دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ (دستگاه معمولی) است ، منتهی اگر در دستگاه به مبنای ۱۰ ، واحد هر رقم ۱۰ برابر واحد رقم قبل از خود است ، در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، واحد هررقم ۳ برابر واحد رقم قبلی است. به‌همین مناسبت ، برای نوشتن عددها در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، به‌جای ده رقم، تنها به سه رقم ۰ ، ۱ و ۲ نیاز داریم .

به سادگی می‌توان هرعددی را که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ نوشته شده است ، به مبنای ده برد . مثلاً عددی که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ به صورت:

$$۰/۰۲۰۲۰۲۰۲...$$

نوشته شده باشد، در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ۱۰ به صورت مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی زیر در می‌آید :

$$\frac{۲}{۳^{۲}}+\frac{۲}{۳^{۴}}+\frac{۲}{۳^{۶}}+\cdots$$

این مجموع برابر $\frac{۱}{۴}$ است و بنابراین:

$$\frac{۱}{۴}=۰/۰۲۰۲۰۲...$$

حالا می‌توانیم با دقت بگوییم ، بعد از آنکه همهٔ چادرهای حفاظ را ساختیم ، چه نقطه‌هایی ، نمناك باقی می‌ماند . چادر اول ، نقطه‌هایی را که بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ واقع‌است ،محفوظ می‌کند، ولی همهٔ این نقطه‌ها،آنهایی هستندکه دردستگاه عددشماری به‌مبنای۳، به این‌صورت نوشته‌می‌شوند:

$$۰/۱...$$

نقطه‌ها به معنی رقمهای دلخواهی از ۰ ، ۱ و ۲ هستند (درست مثل حالت دستگاه دهدهی ،که نقطه‌های بین $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۲}{۱۰}$ با رقم ۱ بعد از

ممیز شروع می‌شوند ، یعنی به صورت ...۰/۱ هستند) .

بعد ازنخستین گام، نقطه‌های نمناکی که باقی می‌ماند، در دستگاه عدد شماری به مبنای سه ، به صورت:

$$0/0\ldots$$

یا به صورت

$$0/2\ldots$$

خواهند بود .

به‌همین ترتیب ثابت می‌شودکه بعد از برپا داشتن دو چادر، در گام دوم ، نقطه‌های باقی‌ماندهٔ نمناك ، در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، به صورت یکی از چهار حالت زیر شروع می‌شوند :

$$0/00\ldots$$

$$0/02\ldots$$

$$0/20\ldots$$

$$0/22\ldots$$

به این ترتیب با هرگام ، نقطه‌هایی را از باران حفظ می‌کنیم که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، با رقمهای مساوی واحد نوشته می‌شود . درنتیجه در انتهای کار ، نقطه‌هایی درمعرض ریزش باران باقی می‌مانندکه در نمایش آنها در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ می‌توان بدون استفاده از رقم ۱ (یعنی تنها با رقمهای ۰ و ۲) نوشت . مثلاً به عنوان نقطه‌های نمناك

$$\frac{1}{4}=0/020202\ldots$$

یا :

$$\frac{3}{4}=0/20202\ldots$$

و غیره باقی می‌ماند .

و حالا معلوم می‌شود که چرا مجموعهٔ نقطه‌های «نمناك» قـوت متصله دارد . این مجموعه را می‌توان در تناظر یك بـه یك با مجموعهٔ تلگرامهای بی‌نهایت قرارداد (صفحهٔ ۱۱۴را بـ نید). برای این منظور، کافی است هرنقطهٔ به‌صورت:

$$0/20220200...$$

را متناظر با تلگرامی گرفت که درآن ۰ و۲ به‌ترتیب به نقطه وخط تبدیل شده است . به‌این ترتیب عددهای مختلف، متناظر با تلگرامهای مختلف خواهد شد . می‌دانیم که مجموعهٔ ایـن تلگرامها ، قـوت متصله دارد ، بنابراین مجموعهٔ نقطه‌های نمناك هم قوت متصله خواهند داشت. .

مجموعهٔ نقطه‌هایی را که ما «نمناك» نامیدیم ، برای نخستین بار کانتور ساخت و به‌همین مناسبت به‌آن مجموعهٔ کانتور گویند. از ساختمان چادرها معلوم می‌شود که درنزدیکی هرنقطه ازمجموعهٔ کانتور ، بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم به شکل دندانه وجود دارد .

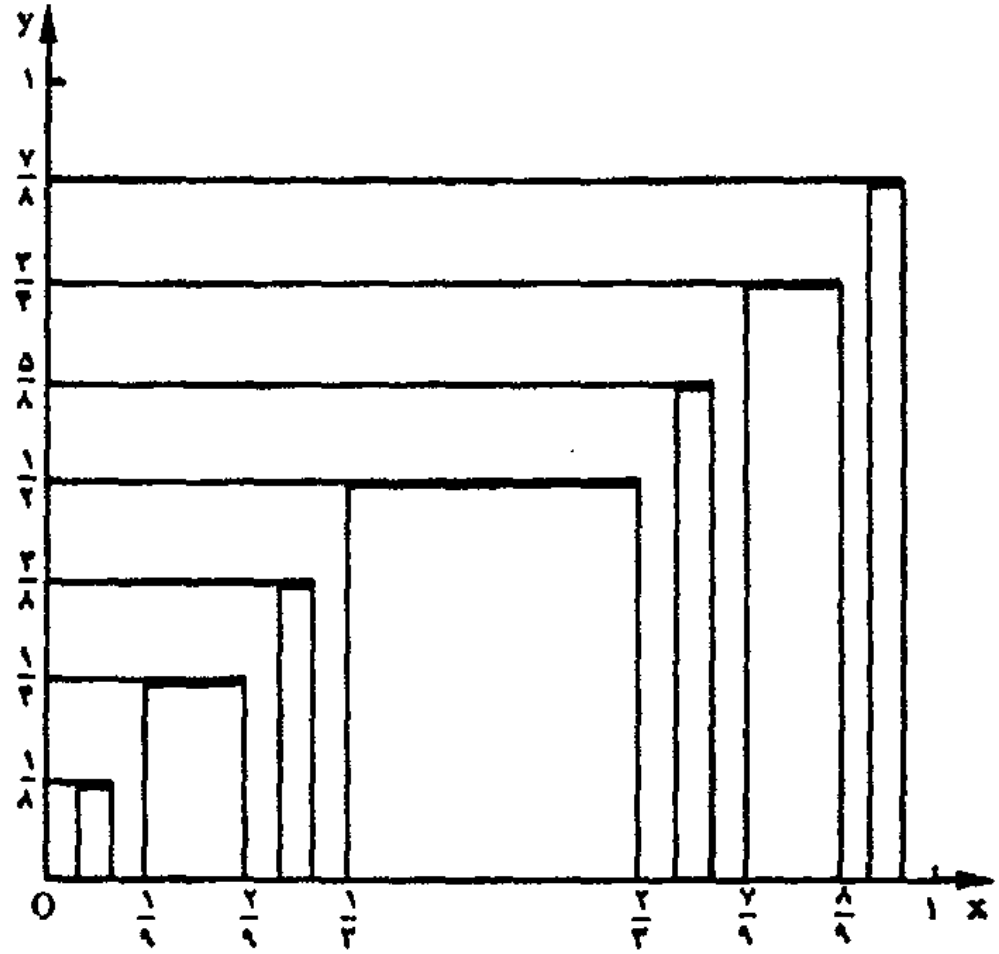
پله‌کان عجیب

تابع جالب دیگری وجود داردکه به همین مجموعهٔ کانتور مربوط می‌شود. این تابع‌به‌این‌ترتیب ساخته‌می‌شود. دوباره‌پاره‌خط[۱ ، ۰]رابه‌سه قسمت مساوی تقسیم‌وفرض می‌کنیم که‌تابع ما برای‌همهٔ‌نقطه‌های قسمت وسط،مساوی $\frac{1}{2}$ باشد . بعد قسمت سمت چپ و قسمت سمت راست را بازبه‌سه‌قسمت مساوی تقسیم‌وفرض‌می‌کنیم که‌تابع‌مادرفاصلهٔ $\frac{1}{9}$ تا $\frac{2}{9}$ مساوی $\frac{1}{4}$ و در فاصلهٔ $\frac{7}{9}$ تا $\frac{8}{9}$ مساوی $\frac{3}{4}$ باشد. حالا چهار پاره‌خط برای ما باقی می‌ماندکه روی آنها ، تابع ما هنوز معین نیست :

$$[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$$

هریك از این فاصله‌ها را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و تابع را روی قسمت وسط هرکدام از آنها به‌ترتیب مساوی $\frac{1}{8}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{8}$ و $\frac{7}{8}$ می‌گیریم .

با ادامهٔ این عمل ، تابعی بدست می‌آوریم که برای تمام نقطه‌های «خشك» ، یعنی نقطه‌هایی که متعلق به مجموعهٔ کانتور ، نیستند ، معین است . به‌سادگی می‌توان تابع را دراین نقطه‌ها هم تعریف کرد، به‌نحوی که بعد از آن تابع ما پیوسته و غیرنزولی باشد . نمایش تغییرات تابعی که بدست می‌آید ، به تقریب درشکل ۳۹ نشان داده شده است . این



شکل ۳۹

نمایش تغییرات به شکل پله‌کانی است که بی‌نهایت پله دارد (روی شکل همهٔ پله‌ها نشان داده نشده است) .

بعد از آنکه با نمایش تغییرات تابعی آشنا شده‌ایم که دارای بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است، پله‌کانی با بی‌نهایت پله، چه تعجبی دارد؟ ولی شگفتی جای دیگری است. طول کلی همهٔ این پله‌ها را بدست می‌آوریم .

طول پلهٔ اول مساوی $\frac{۱}{۳}$ است (منظور اولین پله‌ای است که ضمن ساختن تابع بدست آوردیم) ، دو پلهٔ بعدی هرکدام به طول $\frac{۲}{۹}$ و چهار پلهٔ بعد از آن ، هرکدام به طول $\frac{۱}{۲۷}$ است و غیره . بنابراین مجموع طولهای همهٔ پله‌ها به‌صورت مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی بیان می‌شود :

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۹}+\frac{۴}{۲۷}+\frac{۸}{۸۱}+\dots$$

که حاصل آن برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}}=۱$$

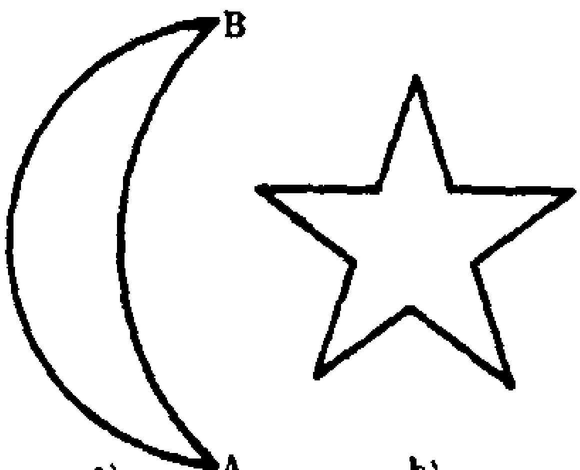
یعنی طول کلی همهٔ پله‌ها برابر است با ۱ . ولی در این تابع پله‌کانی ، مطلقاً همهٔ مسیرهایی که از روی نقطه‌های مجموعهٔ کانتور عبور می‌کند ، به‌حساب نیامده است . سهم این مجموعه «خیلی‌کم» باقی مانده است، اگرچه این مجموعه قوت متصلـه دارد ، ولی طولش برابر صفرمی‌شود! (طول تمام پاره خط [۰ ، ۱] مساوی۱ است و طول کلی پله‌ها هم مساوی ۱ شده است ، به‌نحوی‌که سهم مجموعهٔ کانتور،

تنها طولی برابر صفر باقی مانده است). به این ترتیب ، تابع ما توانست تا ۱ بالا برود ، اگر چه تنها در زمینهٔ مجموعه‌ای به طـول صفر رشد می‌کند و هیچ شکافی هم در آن وجود ندارد ! آیا این از شگفتیها نیست؟

منحنی خاردار

در جریان صدها سال ، ریاضی‌دانها تنها با منحنیهایی سروکار داشتند که تقریباً در هر نقطهٔ آنها می‌شد مماسی بر منحنی رسم کرد . اگر هم به حالت استثنایی برمی‌خوردند ، تنها مربوط به چند نقطه بود . در این نقطه‌ها ، مثل این بود که منحنی شکسته است و به‌همین‌مناسبت هم آنها را نقطه‌های شکستگی می‌گفتند . منحنی که در شکل ۴۰ ـ a نشان داده شده است ، دو شکستگی ، و در شکل ۴۰ ـ b ده نقطهٔ شکستگی دارد

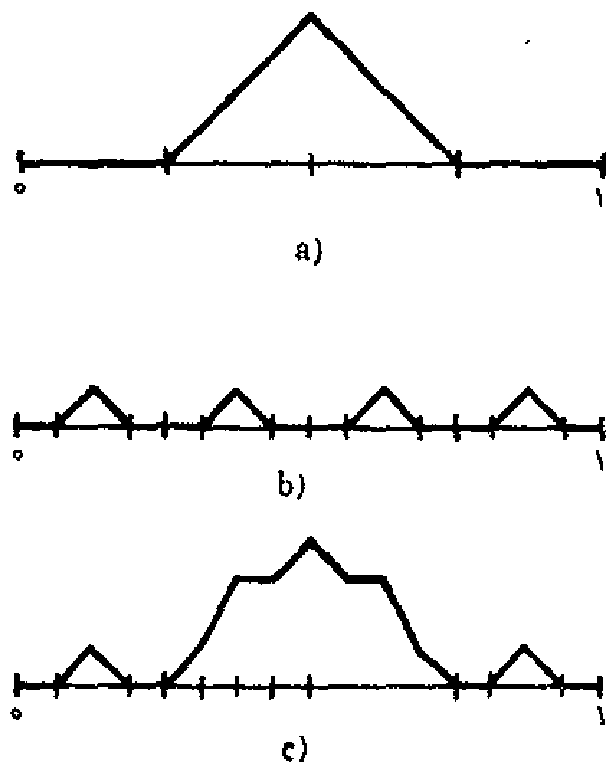
ولی منحنیهایی که ما قبلاً ساختیم ، بی‌نهایت نقطهٔ شکستگی دارند : در شکـل ۳۶ مجـمـوعـهٔ نامتناهی ولی شمارا از این‌نقطه‌ها، و در شکل ۳۸ مجموعهٔ نامتناهـی با قوت‌متصله از این نقطه‌ها وجود دارد . این منحنی در تمام نقطه‌های مجموعهٔ کانتور و علاوه بر آن در رأسهای مثلثها ، شکستگی دارد . بـا وجود ایـن ، حتی شکستگیهای منحنی شکل ۳۸ ، در مقایسهٔ مجموعهٔ نقطه‌هایی که طول آن صفر است ، «ناچیز» به‌نظر می‌رسد .



شکل ۴۰

تا مدتها ، ریاضی‌دانها باور نمی‌کردند کـه ممکن است منحنـی پیوسته‌ای وجود داشته باشد که تمام آن از دندانه‌ها ، شکستگیها و

خارها تشکیل شده باشد . ریاضی‌دانها تا چه اندازه دچار شگفتی شدند ، وقتی توانستند این منحنی را بسازند ، و بالاتر از آن تابعی را بدست آورندکه نمایش تغییرات آن چنین حصاری از خارها باشد . نخستین کسی که به‌این کار موفق شد، بولتسانو ریاضی‌دان چك بود . ولی نوشتهٔ او چاپ نشد و نخستین نمونه از این نوع به وسیلهٔ ك. وایرشتراس ریاضی‌دان آلمانی منتشر شد . طرح نمونهٔ وایرشتراس خیلی دشوار است- همینقدر می‌گوییم که او براساس نظریهٔ رشته‌های مثلثاتی، این نمونه را ساخته بود. ولی نمونهٔ بولتسانو خیلی ساده است ومنحنی را که ما قبلاً ساخته‌ایم به خاطر می‌آورد .



شکل ۴۱

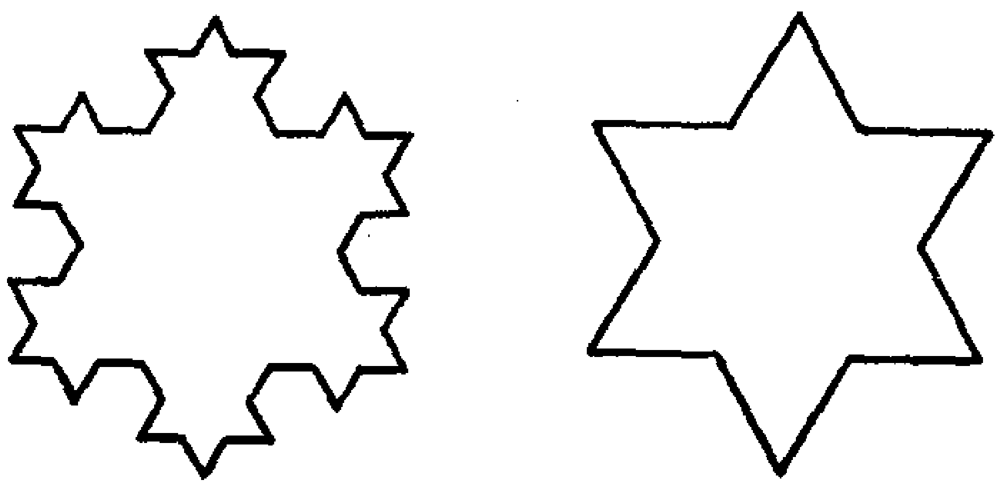
دراینجامثال بولتسانو را با کمی تغییر می‌آوریم . پاره خط [۱ ، ۰] را به‌چهار قسمت‌مساوی‌تقسیم می‌کنیم و روی دو قسمت وسط ، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی می‌سازیم (شکل ۴۱-a) . شکلی که بدست می‌آید ، نمایش تغییرات تابعی است که ما آنرا به $y = f_1(x)$ نشان می‌دهیم .

حالا هریك از چهار قسمت را باز هم به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ومتناظر با آنها چهارمثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌سازیم (شکل ۴۱ ـ b) . نمایش تغییرات تابع دوم $y = f_2(x)$ بدست می‌آید . اگر این دو تابع را جمع کنیم ، نمایش تغییرات مجموع $y = f_1(x) + f_2(x)$ بدست می‌آید که در شکل ۴۱ ـ c نشان داده شده

است . دیده می‌شود که منحنی بدست آمده دیگر شکستگیهای زیادی دارد . در قدم بعدی دوباره هریك از قسمتها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و ۱۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌سازیم و تابع متناظر آن $y=f_{3}(x)$ را به‌تابع $y=f_{1}(x)+f_{2}(x)$ اضافه می‌کنیم.

با ادامهٔ این روش ، خط شکسته‌ای با تعداد خیلی خیلی زیاد شکستگی بدست می‌آید . در حالت حدی، منحنی بدست می‌آید که در هر نقطهٔ خود شکستگی دارد و حتی در یك نقطهٔ آن هم نمی‌توان مماسی بر منحنی رسم کرد .

نمونهٔ دیگری از منحنیهایی که در هیچیك از نقطه‌های خود مماس ندارد ، به وسیلهٔ وان ـ در ـ واردن ریاضی‌دان هلندی عرضه شد. او مثلث متساوی‌الاضلاعی انتخاب کرد ، هریك از ضلعهای آنرا به‌سه قسمت مساوی تقسیم کرد و روی قسمتهای وسط مثلثهای متساوی‌ـ الاضلاع جدیدی ، درخارج مثلث اصلی ، ساخت . برای او یك ستارهٔ

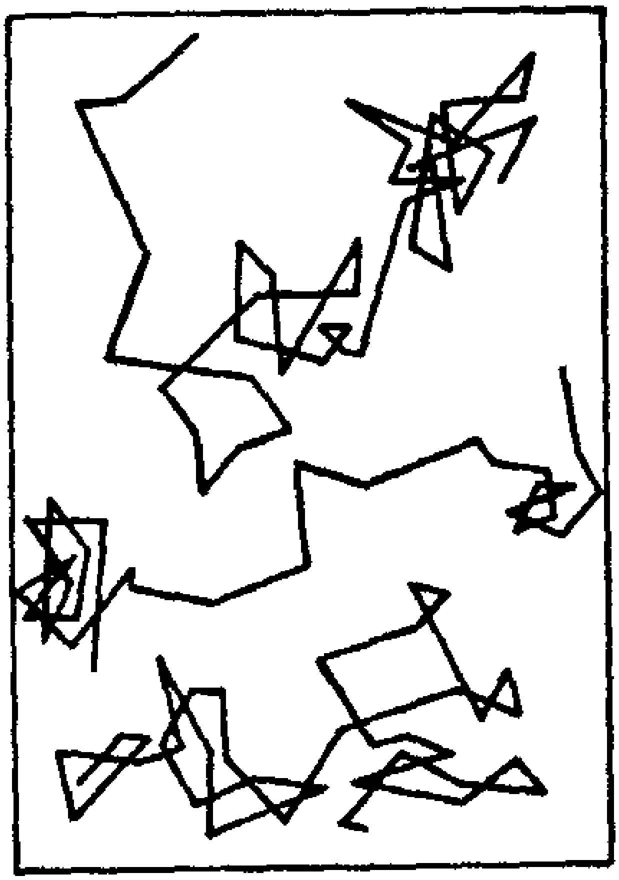


b) a)

شکل ۴۲

شش پر بدست آمد (شکل ۴۲ ـ a) . حالا دوباره هر یك از دوازده ضلع این‌ستاره رابه سه قسمت مساوی تقسیم‌کرد و روی قسمتهای وسط هر ضلع ، مثلث متساوی‌الاضلاعی بنا کرد و شکل «پرخاری» را که درشکل ۴۲ ـ b دیده می‌شود ، پیدا کرد. پس از آنکه بی‌نهایت مرتبه این روش

را ادامه دهیم ، منحنی بدست می‌آید که در هرنقطهٔ آن شکستگی وجود دارد .



شکل ۴۳

ریاضی‌دانها تابعهای پیوستهٔ زیادی ساختند ، که در هیچ نقطه از منحنی آنها نمی‌شد مماس رسم کرد و شروع به بررسی خاصیتهای آنها کردند . این خاصیتها بکلی با خاصیتهای منحنی‌های هموار «سر به راهی» که تا آن‌زمان سر و کار داشتند، متفاوت بود. به‌همین مناسبت، ریاضی‌دانهایی که کار سنتی خود را بر مماس گذاشته بودند ، با شگفتی به این تابعها نگاه می‌کردند . شارل هرمیت نمایندهٔ مشهور آنالیز کلاسیك به دوست خود ستیل‌تیس ، ریاضی‌دان هلندی ، چنین می‌نویسد :

«من با هراس از این بلیه‌ای که دامنگیر تابعهای پیوسته شده است رو برمی‌گردانم ، تابعهای پیوسته‌ای که حتی در یکی از نقطه‌های خود، مشتق ندارند» (یعنی آنطور که ما گفتیم ، همه جا و در همهٔ نقطه‌ها ، شکستگی دارند) .

۲. پوانکاره ، دانشمند معروف فرانسوی نوشت :

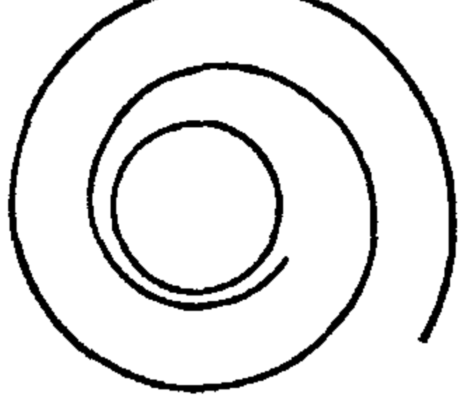
«زمانی برای پیدا کردن تابعهای جدید ، یك هدف عملی در نظر بود ، ولی حالا دنبال تابعهای خاصی می‌روند تا عدم‌کفایت بررسیهای پدران ما را ثابت‌کنند ، و جز این هیچ نتیجهٔ دیگری از این بابت عاید

ما نمی‌شود » .

ولی پیشرفت بعدی دانش نشان داد که حق با پوانکاره نیست . در فیزیك به‌منحنیهایی برمی‌خوریم که منحنیهای خاردار وان ـ در ـ واردن ودیگران را به‌خاطرمی‌آورد . مثلاً مسیر جزءهایی که در حرکت براونی شرکت دارند (تحت تأثیرضربهٔ مولکولها)، از این قبیل است. ف. په‌رن، دانشمند فرانسوی ، حرکت این جزءها را رسم کرده است . او جای هر جزء را دقیقه به‌دقیقه مشاهده کرد و نقطه‌هایی را که به‌این ترتیب بدست آورد ، بـا خط راست به‌هم پیوست . در نتیجه خطهای شکستهٔ پیچ در پیچی پیدا کرد که نمونه‌هایی از آنها را در شکـل ۴۳ نشان داده‌ایـم . ولی نبایدتصور کرد که هرجزء درفاصلهٔ دو لحظهٔ مشاهده روی خط راست حرکت می‌کند. اگر په‌رن به‌جای هردقیقه، هرثانیه‌ای یکبارجای جزءها را مطالعه می‌کرد ، هرکدام از این پاره خطهای راست ، به صورت خط شکسته‌ای شبیه آنچه‌که در شکل ۴۳ می‌بینیم ، در می‌آمد . و هـرچـه فاصلهٔ زمانی بین دو مشاهـدهٔ متوالـی را کـوچکتر کنیم ، خط شکستهٔ مفروض پیچیده‌تر و شکسته‌تر می‌شود . ن. وینر ، ریاضی‌دان امریکایی ، ثابت‌کرده است‌که حرکت جزء های براونی بقدری کند است‌که می‌توان از اینرسی آن صرفنظرکرد ، این حرکت روی منحنی انجام می‌گیرد که در هیچ نقطهٔ آن مماسی وجود ندارد .

منحنی بسته با طول بی‌نهایت

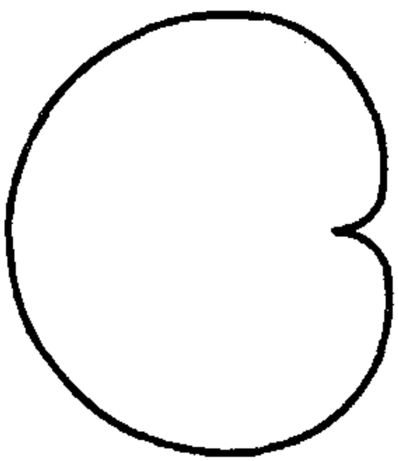
ما اغلب به‌منحنیهایی‌که طول بی‌نهایت دارند برمی‌خوریم: خط راست ، سهمی ، هذلولی و غیره . همهٔ این منحنیها تا بی‌نهایت ادامه دارنـد و بنابراین بی‌نهایت بودن طول آنها، تعجبی ندارد . با وجود این به‌آسانی می‌توان منحنیهایی ساخت‌که تمام آن در قسمت محـدودی از صفحـه واقع باشد ، ولی طول بی‌نهایت داشته باشد . برای این منظور باید



شکل ۴۴

دایره‌ای انتخاب کرد و دور آن مارپیچی را بی‌نهایت مرتبه پیچاند (شکل ۴۴) . چون تعداد دورها بی‌نهایت است وطول هر دور هم بیشتر از طول دایره است ، بنابراین طول تمام مارپیچ ، بی‌نهایت می‌شود .

ولی آیا منحنی بسته ، با طول بی‌نهایت وجود دارد ؟ منحنیهای بستهٔ معمولی، مثل‌دایره ، بیضی ، کاردیوئید (شکل ۴۵) و غیره، طولی محدود دارند . ولی طول منحنی‌خاردار وان‌ـدرـ واردن ، بی‌نهایت است .

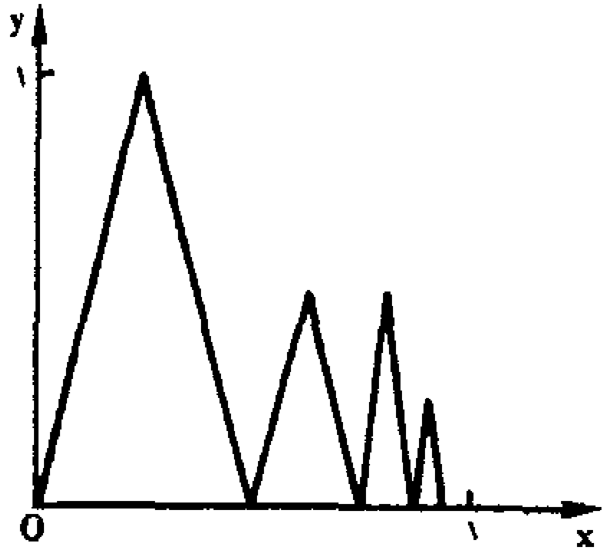


شکل ۴۵

در واقع ، اگر محیط مثلث‌اصلی را مساوی ۳ بگیریم ، بعد از برداشتن نخستین‌گام ، شکل ستاره‌ای شش پری بدست می‌آید که به‌سادگی محیط‌آن قابل محاسبه است ، این محیط برابر است با ۴ . در گام دوم ، خط شکستهٔ بسته‌ای بدست می‌آید که از ۶۴ پاره خط درست شده و طول هرکدام از آنها مساوی $\frac{۱}{۹}$ است و بنابراین محیط آن مساوی $\frac{۶۴}{۹}$ می‌شود . سپس خط شکستهٔ بسته‌ای با محیط مساوی $\frac{۲۵۶}{۲۷}$ بدست می‌آید و غیره . بطور کلی، بعد ازگامnام ، خط شکستهٔ بسته‌ای با محیطی مساوی $۳ \times (\frac{۴}{۳})^n$ بدست می‌آید . ولی این مقدار ، با بزرگ شدن n ، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند . بنابراین طول منحنی وان ـ در ـ واردن مساوی بی‌نهایت

است .

منحنیهای دیگری هم با طول بی‌نهایت وجود دارد. مثلاً منحنی را به‌این ترتیب می‌سازیم. پاره‌خط [۱ ، ۰] را نصف می‌کنیم و روی‌نیمهٔ چپ‌آن‌مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۱ می‌سازیم : سپس پاره‌خط [$\frac{۱}{۲}$ ، ۱] را نصف می‌کنیم وبعد روی نیمهٔ چپ آن



شکل ۴۶

[$\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۳}{۴}$] ، مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ می‌سازیم . مثلث متساوی‌الساقین بعدی‌راروی پاره خط [$\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۷}{۸}$] و به‌همان ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ می‌سازیم ؛ مثلث چهارم بعد از آنرا با ارتفاع مساوی $\frac{۱}{۴}$می‌سازیم‌وغیره(شکل۴۶).

در اینجا هم سلسلهٔ جبال نزولی ، شبیه شکل ۳۶ بدست می‌آید ، ولی در اینجا باکندی نزول می‌کند . روشن است‌که طول هرساق مثلث اول بزرگتر از۱، ساق مثلث دوم وسوم بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ ، ساق مثلثهای چهارم، پنجم ، ششم ، و هفتم بزرگتر از $\frac{۱}{۴}$ است و غیره . (طول ساق همیشه از ارتفاع مثلث بیشتر است.) بنابراین طول تمام خط شکسته ، از مجموع رشتهٔ بی‌نهایت‌زیرکمتر نیست :

$$۲ + (\frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}) + (\frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴}) + \dots$$

ولی مجموع عددهای داخل‌هرمربع برابراست‌با۲،وتعداد پرانتزها

هم مساوی بی‌نهایت است . بنابراین مجموع این رشته مساوی بی‌نهایت می‌شود، یعنی طول خط شکستهٔ ما هم بی‌نهایت خواهد بود .

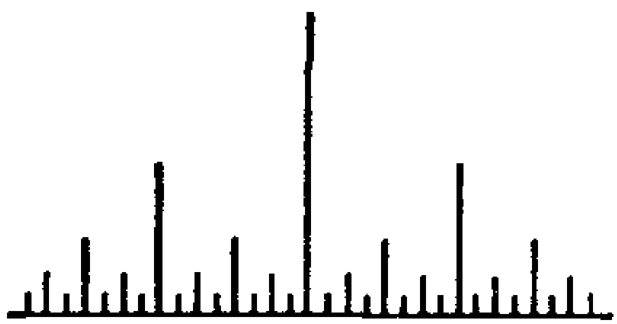
قالی ریاضی

می‌گویند که روزی کاتوین دوم از یکی از ژنرالها پرسید : خمپاره انداز با اژدرافکن چه فرقی دارد ؟ ژنرال که خودش را گم کرده بود ، با دستپاچگی جواب داد : «ببینید سرور من، خمپاره‌انداز یك چیزخاص است ، در حالی که اژدرافکن چیزخاص دیگری است». اگرازکسی هم که نسبت به ریاضیات بیگانه است ، تفاوت بین خط ، سطح و جسم را را بپرسید، احتمالاً جوابی شبیه‌جواب‌ژنرال دریافت‌می کنید. ازاین‌بالاتر، کسی که مورد پرسش قرارگرفته است ، دچار حیرت می‌شود که چگونه به این موضوع روشن جواب بدهد . آخر برای همه روشن است که خط سطح و جسم ، چیزهای بکلی متفاوتی هستند و هیچکس مثلاً منحنی دایره را سطح و یا کره را خط نمی‌نامد .

یك استاد بزرگ شطرنج لطیفه‌ای دارد . او می‌گوید : فرق بین استاد و مبتدی در بازی شطرنج در این است که برای مبتدی همه چیز در وضع روشنی قرار دارد ، در حالی که برای استاد همه چیز درپرده‌ای از ابهام است . همین وضع دربارهٔ پرسش ما هم مطرح است . البته در مورد شکلهایی از هندسه مانند مربع و دایره هیچکس دچار تردید نمی‌شود که آیا خط هستند یا سطح . ولی پس از آنکه دراثر کشف کانتور ،علم پیشرفت کرد ، شکلهای هندسی عجیبی پیدا شد که نه تنها دانش‌آموزان دبیرستانی ، بلکه حتی استادان آزمودهٔ ریاضی هم از جواب فوری در می‌مانند که آیا این شکل خط است یا سطح و یا جسم .

و حالا به‌یکی از این شکلها می‌پردازیم . پاره خط [۰ , ۱] را انتخاب می‌کنیم ، آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و پاره‌خطی

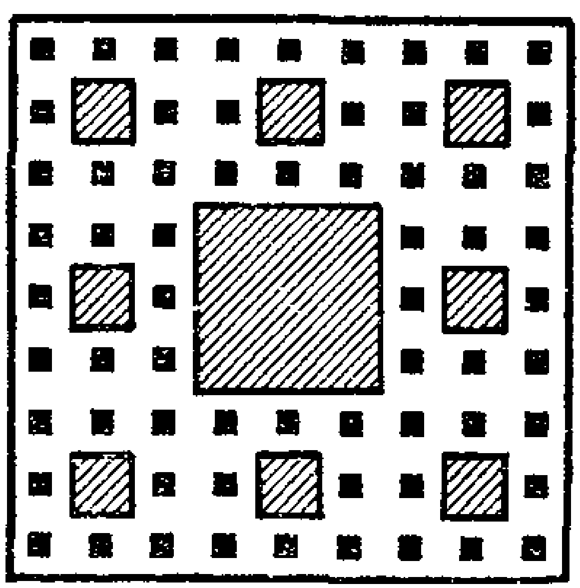
به طول $\frac{1}{2}$ عمود براین پاره خط و در وسط آن رسم می کنیم، بعد هرکدام از دو نیمه را به دو قسمت مساوی تقسیم ودوباره در نقطه‌های تقسیم پاره خطهایی ، منتهی این بار به طول $\frac{1}{4}$ ؛ برآن عمود می کنیم . سپس هر یك از پاره خطهای جدید را نصف می‌کنیم و از نقطه‌های تقسیم پاره خطهای عمودی به طول $\frac{1}{8}$ رسم می کنیم . بعد از مرحلهٔ پنجم بـه شکلی شبیه آنچه که درشکل ۴۷ نشان داده‌ایم،می‌رسیم. ولی ما به‌مرحلهٔ پنجم اکتفا نمی‌کنیم و عمل را با همین روش ، بی‌نهایت بار ادامه می‌دهیم. درنتیجه یك‌شکل هندسی بدست می‌آید . حالا بگویید که این چه شکلی است، خط یا سطح؟ بی‌نهایت عمود رسم کرده‌ایم ، و



شکل ۴۷

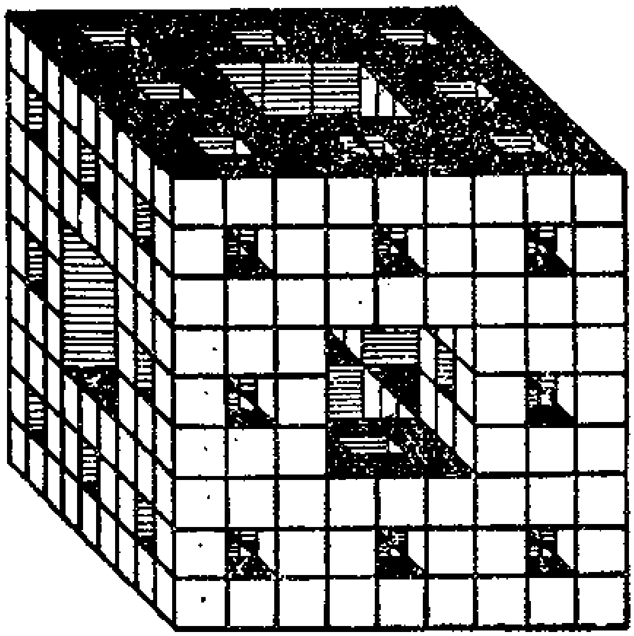
آیا اینها قطعه‌کوچکی را درکنار پاره خط [۱ و ۰] پر نمی‌کنند؟ جواب به این پرسش خیلی هم ساده نیست .

واین‌هم مثالی‌دیگر: مربعی به ضلع ۱ انتخاب می کنیم ، آنرا به ۹ قسمت مساوی‌تقسیم می‌کنیم و قسمت وسط آنرا جدا می‌کنیم (ضلعهای مربع جدا شده باقی می‌ماند) . بعد هرکدام از مربعهای باقیمانده را دوباره بـه ۹ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، مربع وسط را جدا می کنیم.



شکل ۴۸

اگر یك مرحلهٔ دیگر پیش برویم ، به شکل ۴۸ می‌رسیم (مربعهای جدا شده هاشور خورده و یا سیاه شده‌اند) . روشن است که شکل ۴۸ ، هنوز یك سطح است . ولی ما در مرحلهٔ سوم متوقف نمی‌شویم و عمل تقسیم مربعها به ۹ قسمت مساوی و جدا کردن مربع وسط را ، بی‌نهایت بار ادامه می‌دهیم . پس از پایان کار به‌یك شکل هندسی می‌رسیم که به‌نام دانشمند لهستانی به وجود آورندهٔ آن ، قالی سرپینسکی نامیده می‌شود.



شکل ۴۹

این شکل شبیه پارچه‌ای است که به وسیلهٔ بافندهٔ مجنونی بافته شده باشد . در جهت درازا و پهنا ، نخهای تار و پود با نقشهای زیبا ومتقارنی به‌هم بافته شده‌اند ، ولی خود پارچه بکلی سوراخ سوراخ است و حتی یك قطعهٔ کامل در آن وجود ندارد و هر قطعهٔ مربعی کوچکی که انتخاب کنیم ، سوراخی در وسط دارد . و بطور کلی معلوم نیست که این قالی چگونه است ؛ خط است یا سطح ؟ از یك طرف ، این شکل حتی یك تیکهٔ درست هم ندارد و بنابراین مشکل است که آنرا سطح به حساب آورد ، از طرف دیگر ، از نخهایی تشکیل شده است که با چنین نقشهای پیچیده‌ای پیوند دارند ، و چه‌کسی می‌تواند بدون آنکه تردید کند ، قالی سرپینسکی را نوعی خط در نظر بگیرد. در هرحالتی رسم این «منحنی» هم غیرممکن است .

با وجود این ، قالی سرپینسکی ، بغرنج‌ترین شکل هندسی نیست. به‌جای مربع، می‌توان مکعبی انتخاب کرد و آنرا به ۲۷ قسمت مساوی

تقسیم کرد و سپس مکعب مرکزی را همراه با شش مکعب مجاورش ، از آن جدا کرد . بعد هریك از مکعبهای باقیمانده را دوباره به ۲۷ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و عمل جدا کردن را تکرار می‌کنیم (در شکل ۴۹ ، مکعب مفروض بعد از انجام مرحلهٔ دوم ، دیده می‌شود) . این عمل را با همین روش ، بی‌نهایت مرتبه ادامه دهیم ، در پایان کار چه شکلی می‌ماند ـ خط ، سطح یا جسم ؟

اقلیدس ، تقاضای کمك را رد می‌کند

پیش از این ، هروقت که ریاضی‌دانی با یك سؤال پیچیدهٔ هندسی برخورد می‌کرد ، قبل از همه به کتاب اقلیدس مراجعه می‌کرد تا ببیند این استاد بزرگ چه نوشته است . در طول قریب دوهزار سال ، اقلیدس معیار ریاضی‌دانها ، و کتاب او فرهنگ تفکرات هندسی بود . حتی فیلسوفهایی که تلاش می‌کردند خود را ازسرزنش دیگران به‌خاطربی‌دقتی در استدلالها ، برحذردارند ، به زبان اقلیدس رومی‌آوردند و حکمهای خود را به عنوان اصل ، لم و قضیه طرح می‌کردند .

و درست آنچه‌که مورد نیازماست ، به وسیلهٔ اقلیدس بدون هیچ ابهامی بیان شده است . سطرهای اول «مقدمات» ، کتاب اقلیدس ، چنین است .

۱. نقطه چیزی است که هیچ جزئی ندارد .
۲. خط هم ، امتدادی بدون پهناست.
۳. خط به نقطه ختم می‌شود .
۴. سطح چیزی است که تنها درازا و پهنا دارد .
۵. سطح به خط ختم می‌شود .
۶. مرز یا حد ، یعنی جایی که چیزی به آن ختم می‌شود .
۷. شکل عبارت‌است ازچیزی که شامل مرزیا مزرهایی است .

اینها همان چیزهایی است که به دنبالش بودیم ، ولی اینها را نمی‌توان تعریفهای دقیق ریاضی شمرد . برای کسی که نقطه ، خط و سطح را نمی‌شناسد ، مشکل است که از این « تعریفها » چیزی عایدش شود و همان جواب ژنرال دست‌وپا گم کرده را به‌خاطر می‌آورد که : «خط چیز خاصی است ، ولی سطح ، چیز خاص دیگری است » . به‌هرحال ازاین تعریفها نمی‌شود فهمید کـه قالی سرپینسکی خط است یا سطح ، آیا فقط درازا دارد یا هم درازا دارد و هم پهنا .

ولی در زمان اقلیدس ، شکلهای پیچیده ای مثل قالی‌سرپینسکی را نمی‌شناختند ، و بـرای شکلهای ساده هم خیلی نیاز به تعریف نداشتند : هر کسی می‌توانست ببیند که روی شکل کجا خط است و کجا سطح . ولی ظاهراً خود اقلیدس هم احساس می‌کرد که تعریفهـای او از مفهومهـای اساسی ، آنقدرها هم خوب نیست . اقلیدس در تمام موارد ، در ابتدای مقاله ، تعریفها را می‌آورد و سپس بکلی آنها را فراموش می‌کند وحتی یکبار هم در تمام کتاب خود از آنها استفاده نمی‌کند .

آیا به تعریفهای دقیق‌تری نیاز داریم ؟

در طول دوهزارسال ، اقلیدس از اعتباری جدی برخوردار بود و هرگونه تردیـدی در مورد موقعیت هندسهٔ اقلیدسی ، به عنوان تـوهین جدی به‌حیثیت تمامی ریاضیات تلقی می‌شد. کارل فردریك گوس یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهای قرن نوزدهم، که قبل از لباچوسکی به فکرهندسهٔ غیراقلیدسی رسیده بود ، جرأت نکـردکـه نتیجهٔ بررسیهای خود را نشر دهد و به‌یکی از دوستانش نوشت که از هیاهوی بوتیاها[1] می‌ترسم . تنها نیکلای ایوانویچ‌لباچوسکی هندسه‌دان بزرگ‌روس بودکه باشجاعت علمی و علی‌رغم تمسخر دانشمندانی‌که حرف او را نمی‌فهمیدند ،کشف‌خودرا

---

۱) یك طایفهٔ یونانی‌که به‌نقص عقل و حماقت مشهور بوده‌اند .

در زمینهٔ هندسهٔ غیراقلیدسی ، منتشر کرد .

بعد از انتشار اثر لباچوسکی ، روشن شد که دو هندسه وجود دارد که از لحاظ منطقی به یك اندازه بی‌نقص‌اند ، ولی از نظر حکمها وقضیه‌ها بکلی باهم فرق دارند. ولی این حقیقت به‌معنای این است که هر استنادی به جملهٔ « از لحاظ هندسی روشن است» ، ارزش خود را ازدست می‌دهد. هرحکم هندسی باید براساس تعریفهای دقیق و استدلالهای منطقی بدون نقص باشد . و در هرحال ، برای مفهومهای اساسی هندسه ، یعنی خط و شکل و جسم ، باید تعریفهای دقیقی ارائه داد و به‌هیچ وجه از این قبیل نباشد که « این چیز خاصی است و آن چیز خاص دیگری است» .

توجه به دقت در تعریفها ، نه تنها در هندسه ، بلکه بــه آنالیز ریاضی سدهٔ نوزدهم هم کشیده شد .

از برکت حساب دیفرانسیل وانتگرال که در اثر کارهای گوناگون نیوتون ، لایب‌نیتس ، اولر ، لاگرانژ و دیگرریاضی‌دانهای بزرگ سده‌هـای هفدهم و هیجدهم ، مسأله‌های گوناگونی از محاسبهٔ مسیر حرکت گلولهٔ توپ گرفته تا پیش‌بینی حرکت سیاره‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار ، حل شد. ولی مفهومهای اساسی که به کمك آنها به این نتیجه‌های جـدی دست یافتند ، بکلی غیردقیق بود . اساسی‌ترین مفهوم آنالیز ریاضی آن‌زمان ، مفهوم بی‌نهایت کوچك بود که در مرز بود و نبود به‌نظر می‌رسید، چیزی در ردیف صفر ، اما نه صفر کامل . و ریاضی‌دانهای سدهٔ هیجدهم ناچار بودند شاگردان مردد خود را با کلمه‌های « کار کنید ! ایمان پیدا خواهید کرد» ، دلگرم کنند .

ولی ریاضیات ، مذهب نیست که بر پایهٔ ایمان بنا شود ، ازهمه مهمتر ، روشهایی که در دست استادان بزرگ، چنین نتیجه های جالبی به‌بار آورد، به وسیلهٔ شاگردان کوچکتر ولی با استعداد ، منجر به خطا و پارادوکس شد . استقراء سادهٔ ریاضی ، استادان را از خطای ناشی از

احساس غریزی ، که اغلب سریع‌تر از استدلال منطقی طولانی، منجربه حصول جـواب مـی‌شود ، حفظ مـی‌کرد ؛ ولی شاگـردان چنین وسیلهٔ آزمایشی را نداشتند ، و به‌همین مناسبت‌در پایان سدهٔ هیجدهم ، جنجال فوق‌العاده‌ای بر سر انبوه رابطه‌هایی که ارزش آنـها کمتر از کاغذی بود که برای چاپ آنها مصرف شده بود ، و قضیه‌های مشکوکی که میدان کاربرد آنها بکلی نامعلوم بود ، به وجود آمد .

درست مثل‌بچه‌ای‌که به‌اسباب‌بازی‌قشنگ‌شکستهٔ‌خود نگاه‌می‌کند که چطور آنرا از نوبسازد، ریاضی‌دانهای سدهٔ نوزدهم، همهٔ مفهومهایی را که تا آن‌زمان بکار می‌رفته است ، مورد انتقاد جدی وبیرحمانه‌قرار دادند و شروع به نوسازی ریاضیات بر اساس تعریفهای دقیق کردند . استناد به روشنی موضوع ،کنارگذاشته شد و به‌جای آن خواستار دقت منطقی شدند[1] . ولی منطق مورد نیاز ، حتی با ساده‌ترین جمله‌هایی که در دورهٔ آنالیز ریاضی بکار می‌رفت ، سازگار نبود ، نمونه‌ای بیاوریم:

«میدان G را در نظرمی‌گیریم‌که به‌وسیلهٔ منحنی بستهٔ Γ محدود شده است .»

منحنی بسته‌یعنی چه؟ چرا این‌منحنی میدان را محدود می‌کند ؟ منحنی بسته ، صفحه را به چند قسمت تقسیم می‌کند وکدامیك از این قسمتها مورد بررسی است ؟

ریاضی‌دانهای‌سدهٔ هیجدهم برای هیچکدام ازاین پرسشها ، پاسخی نداشتند.آنها بطورساده، شکل بیضی‌مانندی می‌کشیدند وگمان می‌کردند که به این ترتیب همهٔ حرفها را زده‌اند ، ولـی در سدهٔ نوزده ، دیگر به رسم شکل اعتقادی نداشتند . برای‌کسانی‌که با تحلیلی کار می‌کردند ، پرسش « خط چیست ؟ » همچنان یکی از جدی‌ترین بحثها بود . و خیلی

---

۱) و در واقع ، ضمن این «تصفیه» ،گاهی به‌جای آب، ماهی را هم از ظرف بیرون ریختند ، ولی در سدهٔ بیستم بسیاری از آنچه را که کنار گذاشته شده بود ، دوباره به علم بازگرداندند .

طول‌کشید تا به این پرسش ، جواب درستی داده شد .

خط ، به عنوان اثر حرکت نقطه

برای اینکه بتوانیم تعریف دقیقی از خط بدهیم ، باید ازشکلها و نمونه‌های محسوسی شروع کنیم که برخورد با آنها منجر به پیدایش این مفهوم ریاضی شده است : نخ نازك دراز ، شعاع نور ، جادهٔ باریك و طولانی و غیره . در همهٔ این موردها ، طول آنقدر بزرگتر از پهناست که می‌توان از پهنا صرفنظر کرد . از همین‌جا تصور ریاضی خط ، که بدون پهناست ، به وجود آمده است .

برای نخستین بار ، کامیل‌ژردان ریاضی‌دان فرانسوی کوشش کرد تعریف دقیقی برای خط پیدا کند . او از اینجا شروع کرد که مسیر حرکت یك جسم بسیارکوچك، عبارت‌است از لولهٔ دراز وباریکی . هر اندازه‌که اندازه‌های جسم کوچکتر شود ، لوله باریکتر و باریکترمی‌شود، به‌نحوی که درحد به‌سمت خط ، یعنی مسیر حرکت نقطه ، میل می‌کند که دارای پهنا نیست . به‌همین مناسبت ، او خط را به عنوان مسیر حرکت نقطه می‌پذیرد . ضمناً این نقطه باید بطور پیوسته و بدون‌جهش حرکت‌کند .

تعریف ژردان را می‌توان به صورت دقیقتری بیان کرد . برای اینکه موقعیت نقطهٔ متحرك را بدانیم ، باید مختصات آنرا در هر لحظهٔ حرکت در دست داشته باشیم . از آنجا که حرکت در یك فاصلهٔ‌زمانی محدود ادامه دارد ، بدون اینکه به کلی بودن مطلب لطمه‌ای بخورد ، می‌توان این فاصله را [۱و۰] فرض کرد . به زبان دیگر ، نقطهٔ مفروض حرکت خود را از لحظه‌ای ، که آنرا مبدأ به‌حساب می‌آوریم ، شروع می‌کند و بعد از واحدی از زمان (یك ثانیه ، یك دقیقه ، یك سال یا هر مدت دیگر) به پایان می‌رساند . در هر لحظهٔ زمانی t ، در جریان

این فاصله ، مختصات نقطهٔ متحرك معلوم می‌شود . بنابراین مختصات نقطه ، بستگی به لحظهٔ زمانی t دارد و تابعی ازآن‌است . این تابعها را (برای حالتی‌که حرکت نقطه روی یك صفحه جریان دارد) با $f(t)$ و $g(t)$ نشان می‌دهیم :

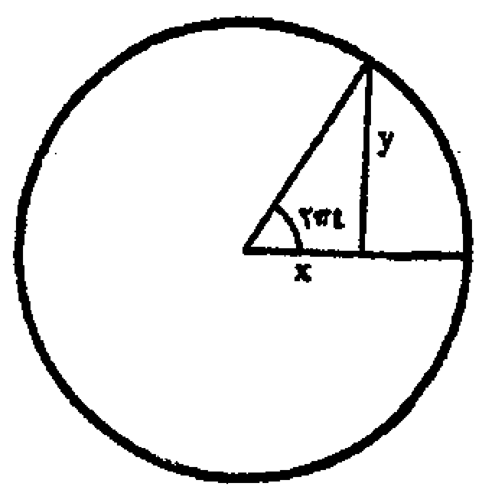
$$x=f(t) \quad \text{و} \quad y=g(t)$$

این شرط‌که نقطه بطورپیوسته حرکت می‌کند ، به‌معنای‌آن‌است که تابعهای $f(t)$ و $g(t)$ در هرنقطهٔ فاصلهٔ [۰،۱] پیوسته‌اند. روشن‌تر بگوییم؛ برای هرتغییرکوچك t ،تابعهای $f(t)$ و $g(t)$ باید مقدار کمی تغییرکنند. دقیق‌تر: اگر $t_1, \ldots, t_n$ ، به مقداری مثل t نزدیك شود یعنی $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, t_n = t$ ، تساویهای زیر برقرار است :

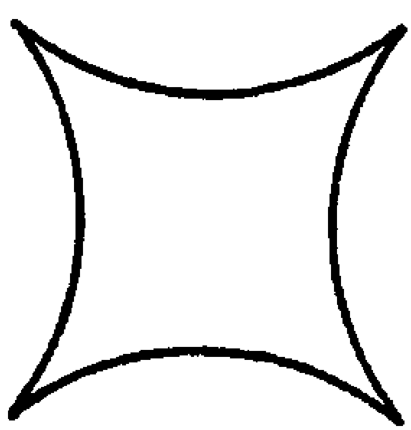
$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, f(t_n) = f(t)$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, g(t_n) = g(t)$$

تعریف ژردان موفقیت زیادی پیداکرد. همهٔ خطهایی‌که درآن‌زمان مورد بررسی ریاضیات بود ، منحنیهایی به مفهوم ژردان یا آنطور که می‌گویند منحنیهای ژردانی بودند . مثلاً دایره‌ای به شعاع ۱ انتخاب می‌کنیم . طول محیط این دایره برابر است با 2π ، بنابراین برای اینکه



شکل ۵۰



شکل ۵۱

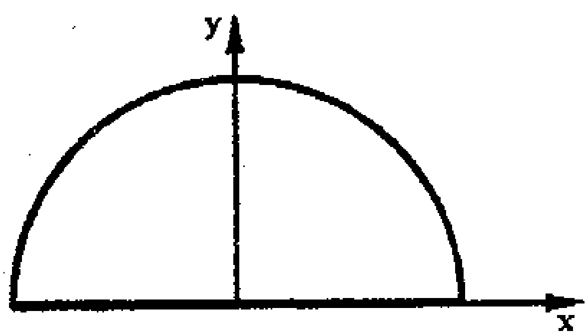
محیط آن در واحد زمان پیموده شود ، باید نقطه با سرعت π ۲ حرکت کنند . به این ترتیب در لحظهٔ t ، این نقطه کمانی به طـول πt ۲ را طی کرده است . از شکل ۵۰ معلوم می‌شود که مختصات آن در لحظهٔ t ، چنین می‌شود :

$$x = cos\ ۲\pi t$$
$$y = sin\ ۲\pi t$$

که آنها را معادله‌های پارامتری دایره گویند . معادله‌های پارامتری برای منحنی که در شکل ۵۱ نشان داده شده است (که نام آن آستروئیداست) به این‌صورت است:

$$x = cos^{۳}\ ۲\pi t$$
$$y = sin^{۳}\ ۲\pi t$$

خط ژردانی ممکن است از منحنیهای مختلفی‌تشکیل شده‌باشد مثلاً می‌توان محیط نیم‌دایره‌ای‌را انتخاب کرد که‌ازنیم‌دایرهٔ‌به‌شعاع ۱ و قطر آن به وجـود آمـده است (شکل ۵۲) . نقطهٔ متحرک‌در نیمی از زمان ، نیم‌دایره و درنیم دوم زمان، قطرآن را می‌پیماید. عبارتهایی را که مختصات نقطهٔ متحرك را روی دایره بیان مـی‌کند ،می‌شناسیم . ضمن حرکت نقطه روی قطر، مقدار y مساوی صفرباقی‌می‌ماند و مقدار x از ۱ — تا ۱ + تغییر می‌کند . در نتیجه معادله‌های پارامتری زیر را برای این محیط بدست می‌آوریم .



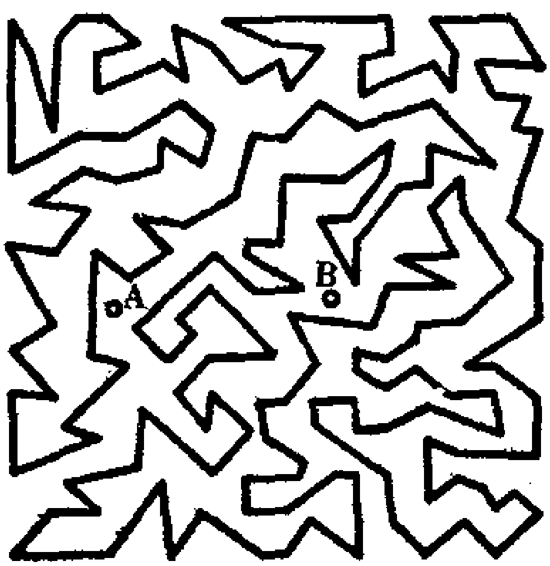
شکل ۵۲

$$x = \begin{cases} cos\ ۲\pi t & (۰ \leqslant t \leqslant \frac{۱}{۲}) \\ ۴t - ۳ & (\frac{۱}{۲} \leqslant t \leqslant ۱) \end{cases}$$

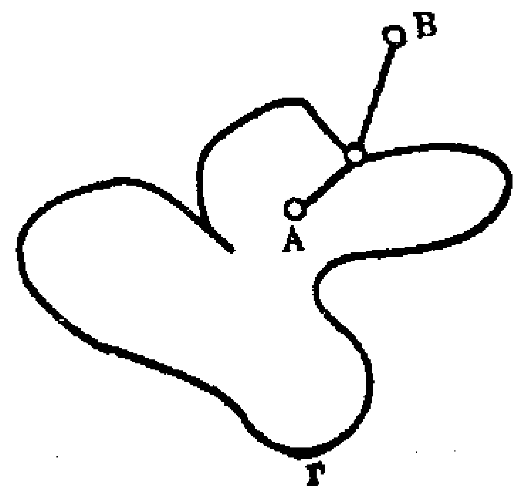
$$y = \begin{cases} \sin 2\pi t & (0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1) \end{cases}$$

قضیه‌ای روشن با اثباتی بسیار مشکل

ژردان ، با استفاده از مفهوم منحنی ، که به وسیلهٔ خود او داده شده بود ، توانست مفهوم جمله‌ای را که قبلاً[۲] از یك کتاب درسی آنالیز ریاضی نقل کردیم، دقیقتر کند. این جمله چنین بود: «میدان G را در نظر می‌گیریم که به‌وسیلهٔ منحنی بستهٔ Γ محدود شده‌است». منحنی ژردانی وقتی بسته است که به ازای $t = 1$ در همان نقطه‌ای باشد که به ازای $t = 0$ بود. ضمناً اگر لحظه‌های زمانی مختلف t_1 و t_2، که بین ۰ و ۱ قرار دارند ، متناظر با نقطه‌های مختلف منحنی باشد ، این منحنی خودش را قطع نمی‌کند .



شکل ۵۴



شکل ۵۳

ژردان قضیهٔ زیر را ثابت کرد :

منحنی ژردانی Γ ، اگر بسته باشد و اگر خودش را قطع نکند ، صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند . اگر دو نقطه در یکی از این قسمتها انتخاب شود، می‌توان آنها را با خط‌شکسته‌ای که منحنی Γ را قطع نمی‌کند،

به‌هم وصل کرد ! ولی اگر نقطه‌ها ، از قسمتهای مختلف انتخاب شود، نمی‌توان به‌وسیلهٔ چنین خط شکسته‌ای آنها را به‌هم مربوط کرد ، هرخط شکسته‌ای که آنها را به‌هم وصل کند با منحنی Γ برخورد خواهد داشت (شکل ۵۳) .

این قضیه‌بسیار روشن به‌نظرمی‌رسد، ولی اثبات‌آن به استدلالهای بسیار ظریفی نیاز دارد . حتی برای حالتی که خط Γ یك چندضلعی‌بسته است ، اثبات قضیه بسیار پیچیده است . خودتان را آزمایش کنید و بلافاصله بگویید که آیا می‌توان دونقطهٔ A و B را در شکل ۵۴ طوری با یك خط‌شکسته به‌هم وصل کردکه دورهٔ Γ را قطع نکنند .

دو قسمتی که به وسیلهٔ منحنی بستهٔ ژردان روی صفحه به وجود می‌آید ، میدانهای داخلی وخارجی محدود به این منحنی نامیده می‌شود. به این ترتیب مفهوم میدانی که به وسیلهٔ یك منحنی بسته محدود شده است ، به صورت مفهوم دقیقی درمی‌آید .

منحنی از تمام نقطه‌های مربع عبور می‌کند

وقتی‌که ژردان تعریف خودش را از منحنی‌داد ، ابتدا به‌نظررسید که همه‌چیز حل شده است و تعریف دقیقی برای مفهوم خط بدست آمده است‌که متکی برمشاهده نیست. ولی به‌زودی معلوم‌شدکه اینطورنیست، تعریف ژردان نه‌تنها در مورد خطهایی که برای ریاضی‌دانها عادی بود ، کفایت می‌کرد ، بلکه شامل شکلهایی هم می‌شدکه هیچکس آنها را خط نمی‌نامد . ریاضی‌دانها ، حالا دیگر با منحنیهای خاردار هرجور بود آشتی‌کرده‌بودند، ولی هیچکس‌تصوراین‌را هم‌نمی‌کردکه‌مثلاً مربع راهم می‌توان خط به حساب آورد . معلوم شد که هم مربع ، هم مثلث و هم دایره (منظورتنها محیط مثلث ، مربع یا دایره نیست ، بلکه تمام‌مثلث، مربع یا دایره با همهٔ نقطه‌های‌داخلی‌آنها مورد نظر است) ، طبق تعریف

ژردان ، خط هستند . این مطلب را په‌آنو ریاضی‌دان ایتالیایی ثابت‌کرد .

پیش از این گفتیم که کانتور توانست بین نقطه‌های یك پاره‌خط و نقطه‌های روی یك مربع ، تناظر یك‌به‌یك برقرارکند ، یعنی ثابت‌کردکه روی یك پاره‌خط همانقدرنقطه وجود داردکه روی یك مربع . این تناظر پیوسته نیست ، وقتی‌که نقطه روی پاره‌خط حرکت می‌کند، نقطه متناظر آن روی مربع‌مثل خزوك نمی‌خزد ، بلکه مثل‌كك پرش می‌کند . مثلاً روی پاره‌خط ، این نقطه‌ها را انتخاب می‌کنیم :

۰/۴۹۹۹۹۹۹۹... و ۰/۵۰۰۰۰۰۰۰...

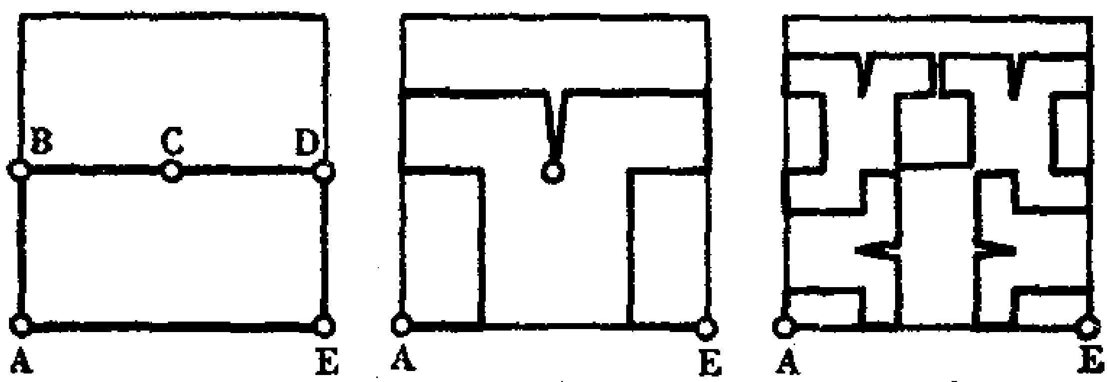
این دو نقطه به‌اندازهٔ‌کافی به‌هم نزدیکند . ولی نقطه‌های متناظر آنها روی مربع دورازهم قرار دارند . اولین آنها، نقطه‌های (۰/۰۰۰... ، ۰/۵۰۰۰...) را متناظر می‌کندکه روی ضلع پایینی مربع قرار گرفته است ، درحالی‌که دومین آنها ، نقطه‌های (۰/۹۹۹... ، ۰/۴۹۹۹...) را متناظر می‌کندکه روی ضلع بالایی مربع قراردارد . اگرتعداد رقمهای ۹ را در عدد دوم زیادکنیم ، به عـدد اول نزدیك می‌شود ، در حالی‌که نمی‌توان تصورکردکه نقطه‌های متناظرآنها به‌هم نزدیك شود.

به این ترتیب ، اگر چه نگاشت کانتوری پاره‌خط روی مربع در تناظر یك‌به‌یك است ، ولی پیوسته نیست . و بنابراین از این راه منحنی ژردانی بـدست نمی‌آید . په‌آنو مـوفق شد نگاشت دیگـری از مجموعهٔ نقطه‌های واقع‌برپاره خطراروی‌مجموعهٔ نقطه‌های‌مربع‌بسازد، که بنابرآن نقطه‌های‌نزدیك به‌هم درپاره‌خط، متناظر با نقطه‌های نزدیك به‌هم درمربع است ، به عبارت دیگر ، په‌آنو توانست خط منحنی (به مفهوم ژردان) بسازدکه از همهٔ نقطه‌های مربع عبورکرده باشد !

بدیهی است‌که منحنی په‌آنو را نمی‌توانیم رسم‌کنیم ، مگراینکه به تقلید از نقاشیهای تجریدی ، یك مربع را سیاه‌کنیم. مگر نه این‌است که در این مربع هیچ‌چیز فرق نمی‌کند ، نمی‌شود فهمیدکه منحنی ازکجا

شروع و به کجا ختم شده است ، و چگونه مربع را دور زده است .
به‌همین مناسبت ، به‌جای نقاشی تجریدی ، ازفیزیك په‌ان پیروی می‌کنیم و موقعیتهای نقطهٔ متحرك را باپاره‌خطهای راست به‌هم وصل می‌کنیم. هرچه فاصلهٔ زمانی بین موقعیتهای جداگانه را کوچکتر بگیریم ، خط شکسته‌ای که بدست می‌آید به منحنی په‌آنو نزدیکتر خواهد بود .

ابتدا موقعیت نقطهٔ متحرك را در هر $\frac{۱}{۴}$ ثانیه در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر وضع نقطه را در ابتدای حرکت، بعد ازگذشت $\frac{۱}{۴}$ ثانیه از شروع حرکت ، بعد ازگذشت $\frac{۱}{۲}$ ثانیه از شروع حرکت ، بعد از $\frac{۳}{۴}$ ثانیه و بالاخره در انتهای حرکت ، مشخص می‌کنیم . به این‌ترتیب ۵ نقطه بدست می‌آوریم . از وصل این ۵ نقطه به یکدیگر ، خط شکستهٔ $ABCDE$ بدست می‌آیدکه در شکل ۵۵- a نشان داده شده است .



a) b) c)

شکل ۵۵

روشن است‌که این خط شکسته از همهٔ نقطه‌های مربع نمی‌گذرد . با کم‌کردن فاصلهٔ زمانی ، موقعیت نقطه‌ها را برای هر $\frac{۱}{۱۶}$ ثانیه‌یکبار، معین می‌کنیم . خط شکسته پیچ‌درپیچ‌تر وتعداد نقطه‌های شکستگی‌بیشتر می‌شود و به صورتی‌که درشکل۵۵ – b می‌بینیم درمی‌آید . اگر باز هم موقعیت نقطه‌ها را با فاصلهٔ زمانی کمتردر نظربگیریم ، به شکل۵۵ – c می‌رسیم . می‌بینیم که خط شکسته فشرده‌تر و فشرده‌تر مربع را پر می‌کند وبه‌هر نقطهٔ دلخواه آن نزدیك و نزدیکتر می‌شود . و در حد ، وقتی که

موقعیت نقطه‌ها را در تمام لحظه‌های متوالی در نظر بگیریم ، منحنی په‌آنو بدست می‌آید که از همهٔ نقطه‌های مربع گذشته است .

متذکرمی‌شویم که درمقایسهٔبا روش‌کانتور ، منحنی په‌آنو امتیازی دارد و آن این است که این منحنی پیوسته است ، ولی در عوض چیز دیگری را از دست می‌دهد . منحنی په‌آنو نگاشت پاره‌خط بر مربع را در تناظر یك‌به‌یك قرار نمی‌دهد . این منحنی از هرنقطهٔ مربع چندبار می‌گذرد . بعدها ثابت شد که نمی‌توان در عین‌حال هم پیوستگی و هم تناظر یك به‌یك را با هم به وجود آورد : منحنی ژردانی وجود ندارد که از همهٔ نقطه‌های مربع، و ضمناً از هرنقطهٔ آن تنها یکبار ، گذشته باشد.

همه‌چیز در معرض نابودی

به‌سختی می‌توان اثری‌راکه‌نتیجه‌گیری په‌آنو روی‌دنیای‌ریاضیات باقی‌گذاشت ، ارزیابی‌کرد . به‌نظرمی‌رسید که همه‌چیزبه‌هم ریخته است : بنیانی‌ترین تعریفهای ریاضی، معنای خود را از دست داده‌اند و اختلافی بین خط و سطح ، و بین سطح وجسم دیده نمی‌شود (عدم امکان برقراری تناظر یك‌به‌یك و به صورت پیوسته ، بین پاره‌خط و مربع ، هنوز ثابت نشده بود). هانری‌پوانکاره، ریاضی‌دان مشهورفرانسوی، باتلخی‌فریادزد:

«چطور ممکن است که احساس درونی تا به‌این اندازه مارا فریب دهد!» .

روشن شد که تعریف ژردان از خط ، بی‌عیب نیست. از یك‌طرف این تعریف بقدری وسیع است که شامل منحنی په‌آنو هم می‌شود . ازطرف دیگر بقدری تعریف تنگی است‌که نمی‌تواند شامل همهٔ نمونه‌هایی بشود که ما به‌خاطر حس درونی خود وبه‌خاطر روشنی موضوع، آنها را خط به حساب می‌آوریم. مثلاً خطی که درشکل ۴۴صفحه ۱۶۵ نشان داده‌ایم (دایره با مارپیچی‌که دور آن پیچیده است) ، هنوزمنحنی ژردانی‌نیست.

نارسایی پنهانی دیگری هم در تعریف ژردان پیدا شد : در این تعریف تنها گفتگو از منحنی نمی‌رود ، بلکه به آهنگ حرکت نقطه وچگونگی این حرکت هم بستگی دارد . فرض کنیدکه نقطهٔ متحرك نیم اول دایره را در $\frac{1}{4}$ دقیقه‌ونیم دوم آنرا در $\frac{3}{4}$ دقیقه طی کند . روشن است که در این‌حالت معادله‌های پارامتری دیگری ، غیر از معادله‌های صفحهٔ ۱۷۶ ، بدست می‌آید .

نقطه می‌تواند محیط دایره را با شیوه‌های مختلف ، با زیادکردن وکم‌کردن سرعت طی‌کند. بنابراین تنها برای‌دایره، معادله‌های‌پارامتری مختلفی بدست می‌آید . به سختی می‌توان حدس زد که معادله‌های

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

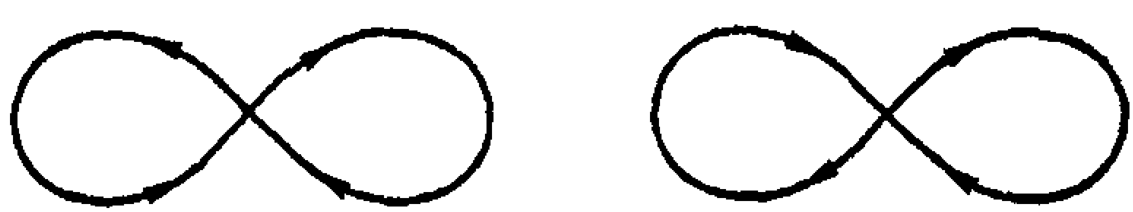
$$y=\frac{2t}{1+t^2}$$

همان دایره‌ای را می‌دهدکه از معادله‌های زیر بدست می‌آید :

$$x=\cos 2\pi t$$

$$y=\sin 2\pi t$$

و برای منحنیهای بغرنج‌تر به‌سادگی سر درگمی به‌وجود می‌آید . مثلاً لمینسکات را در نظر می‌گیریم. این منحنی را می‌توان به‌ترتیبی که در شکل ۵۶ـ a و یا آنطور که در شکل ۵۶ـ b نشان داده شده است ، دور



a)

b)

شکل ۵۶

زد . وروشن‌است‌که اگربه‌معادله‌های مختلف‌آن دردوحالت نگاه‌کنیم ، به سختی می‌توان فهمیدکه آیا متعلق به‌یك منحنی هستند یا منحنیهای

مختلف .

به این ترتیب دوباره در برابر این پرسش قرار می‌گیریم که خط چیست و چه تفاوتی با سطح دارد ؟ پاسخ به این پرسش به بررسیهای کلی کانتور در بارهٔ شکلهای هندسی مربوط می‌شود .

مجسمه‌ها را چگونه می‌سازند ؟

کانتور ضمن به وجود آوردن نظریهٔ مجموعه‌ها ، به این پرسش رسید که شکل هندسی چیست؟ یك پاسخ کلی به این پرسش چنین است : شکل هندسی عبارت‌است ازمجموعه‌ای ازنقطه‌های فضا. اگراین مجموعه بر صفحه قرارگیرد ، شکل هندسی مسطح بدست می‌آید . ولی این پاسخ خیلی کلی است و به این مفهوم ، تقریباً هیچ خاصیت مورد نظری را به «شکل» نسبت نمی‌دهد .

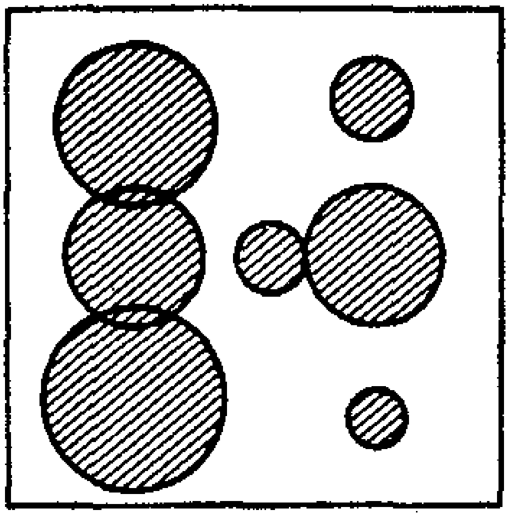
بنابراین درنظراول‌باید خود را به‌گروهی‌از این مجموعه‌ها محدود کرد و ازمیان‌آنها ، آنچه را که به خاصیتهای شکلهای هندسی معمولی نزدیکتر است ، جدا کرد .

برای اینکه این دسته از شکلها را جدا کنیم ، روشن می‌کنیم که شکلهای معمولی از قبیل مربع ، دایره، پاره‌خط ، خط راست، آستروئید وغیره ، چه اشتراکی نسبت به‌هم دارند. به‌نظرمی‌رسدکه همهٔ این‌شکلها را می‌توان با روش واحدی بدست آورد .

حکایت می‌کنند که وقتی از «ودن» مجسمه‌ساز معروف پرسیدند که چطور توانسته است مجسمه‌های فوق‌العادهٔ خود را به‌وجود آورد، پاسخ می‌دهد: «یك قطعه مرمرانتخاب می‌کنم وهمهٔ آنچه ا که زیادی است ، از آن جدا می‌کنم» .

درست با همین روش می‌توان هرشکل هندسی مسطحهٔ محدود را بدست آورد : باید چارچوبی را که این شکل در آن قرار گرفته است،

انتخاب کرد وسپس همهٔ زیادیها را از آن جدا نمود . ولی این جدا کردن را باید به‌تدریج، ونه‌یکباره انجام داد ، در هرگام قطعه‌ای را که به‌شکل دایره است از آن جدا می‌کنیم. در این میان، خود دایره جدا می‌شود ، ولی دورهٔ آن در شکل باقی می‌ماند .

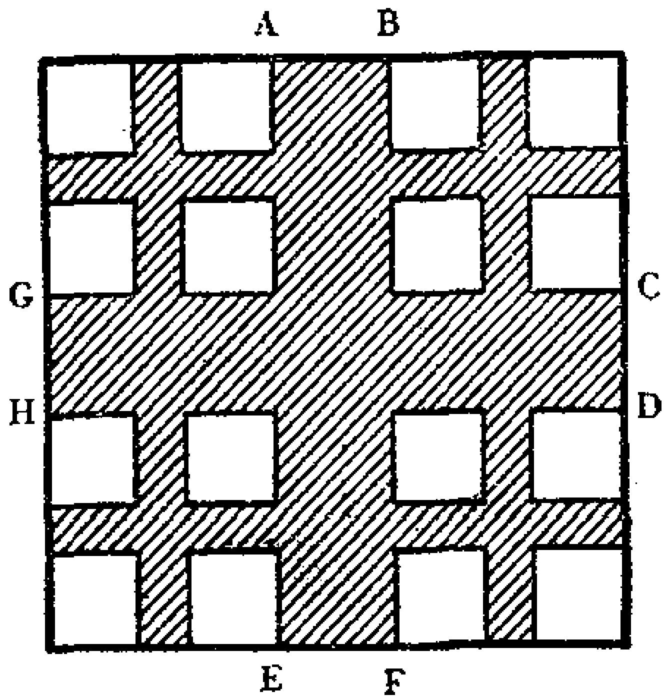


شکل ۵۷

دربرخورد اول به‌نظر می‌رسد که به‌این‌ترتیب می‌توان تنهاشکلهایی شبیه آنچه‌که در شکل ۵۷ دیده می‌شود ، بدست آورد . ولی مطلب بر سر این‌است که نه یك یا دو دایره ، بلکه مجموعهٔ شمارایی دایره جدا می‌کنند . وبه‌کمك جداکردن مجموعهٔ شمارای دایره‌ها، می‌توان هرشکل دلخواه را بدست آورد . برای این منظور چنین عمل می‌کنیم : همهٔ دایره‌هایی را انتخاب می‌کنیم که هردومختص مرکز وشعاع آن،عددهایی گویا باشند . با توجه به قضیه‌ای که در صفحهٔ ۱۰۴آوردیم ، مجموعهٔ این دایره‌ها ، شمارااست ، حالا همهٔ دایره‌هایی از این مجموعه را ، که در داخل‌آنها حتی‌یك نقطه‌ازشکل هندسی ما وجود ندارد ، جدا می‌کنیم. روشن است‌که بعد از این عمل ، تنها خود این شکل باقی می‌ماند و تعداد دایره‌های جدا شده بیشتر از حد شمارا نیست .

البته ناچارنیستیم که‌قطعه‌های‌جداشده‌رابه‌شکل‌دایره‌انتخاب کنیم. به‌جای دایره می‌توان مربع، مستطیل یا بیضی اختیار کرد، تنها یك شرط را باید در نظرگرفت : نقطه‌های داخلی شکل جدا شده خارج می‌شود و محیط آن باقی می‌ماند ..

به کمك جدا کردن مجموعهٔ شمارایی دایره (مربع و غیره) ، علاوه بر شکلهای هندسی عادی ، مجموعه‌های دیگری را هم می‌توان بدست آورد که خاصیتهای بسیار جالبی دارند . مثلاً ، قالی سرپینسکی که بارها در بارهٔ آن صحبت کرده‌ایم ، از همین راه بدست می‌آید : از مربعی به ضلع ۱ ، مربعهایی که یکی پس از دیگری کوچکتر می‌شوند ، جدا می‌کنیم ، به‌نحوی که ضلعهای آنهاباقی بماند .



شکل ۵۸

ولی ، با این‌روش می‌توان «شکلهایی» هم بدست‌آورد که یکپارچه نباشد. مثلاً اگر شبیه شکل ۵۸ ، «صلیبها » را جداکنیم، درانتهای کار مجموعه‌ای بدست می‌آید که شامل حتی یك تکهٔ درست هم نیست (به اصطلاح کاملاً غیرمرتبط‌اند) . به‌همین مناسبت این‌محدودیت را می‌پذیریم که بعد از هر برش ، مجموعه‌ای یکپارچه باقی بماند . در این‌صورت بعد ازهمهٔ برشها هم مجموعه‌ای یکپارچه باقی می‌ماند (یعنی به اصطلاح ریاضی‌دانها ، یك مجموعهٔ مرتبط) ، علاوه براین مجموعه‌ای که بدست می‌آید محدود است ، یعنی تمامی آن در یك مربع قرار دارد .

به‌این‌ترتیب، مجموعه‌های مورد بررسی دارای این‌شرطها هستند:

۱) مجموعهٔ F ازیك مربع، با جداکردن مجموعهٔ شمارای دایره‌ها (مربعها و غیره) ، با حفظ محیط آنها ، بدست می‌آید ؛

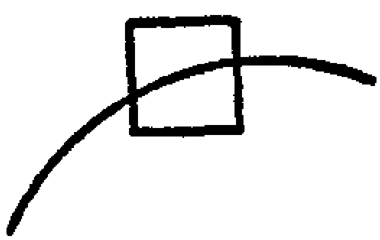
۲) مجموعهٔ F یکپارچه (مرتبط) است .

کانتور این مجموعه‌ها را هم ، متصله نامید (کلمهٔ لاتینی «*Continuum*» به‌معنی«پیوسته») . متصله‌هاهم‌مجموعه‌های‌عمومی هستند که خاصیتهایی نزدیك به خاصیتهای شکلهای هندسی دارند .

خط کانتور

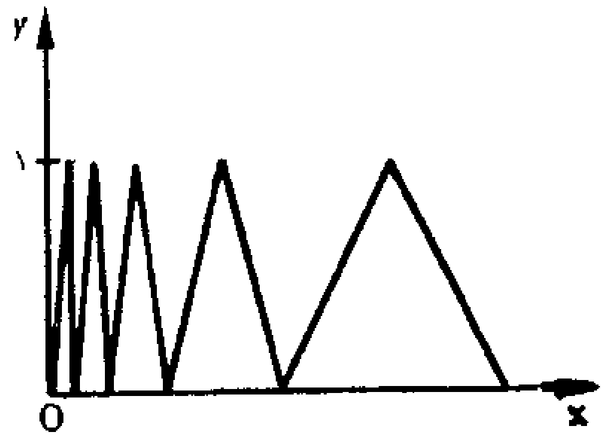
حالا دیگر آمادگی این را داریم که به پرسش مورد نظر پاسخ دهیم : خط مسطحه چیست ؟ چون خط مسطحه باید یك شکل هندسی باشد ، روشن است‌که باید آنرا بین متصله‌ها جستجو کرد . ولی مثلاً دایره و مربع (منظور مجموعهٔ نقطه‌های واقع در داخل و روی محیط دایره یامربع است) هم متصله هستند، درحالی‌که این شکلها را نمی‌توان خط به حساب آورد . بنابراین باید شرط دیگری را اضافه کنیم تا این شکلها را مشخص‌کند .

توجه می‌کنیم‌که دایره و مربع شامل یك‌تکهٔ « پروبه‌هم پیوسته» ازسطح است، درحالی‌که خط تکهٔ به‌هم‌پیوسته‌ای ازسطح‌راشامل نمی‌شود؛ هرچقدرکه مربع راکوچك بگیریم ، همیشه در آن نقطه‌هایی پیدا می‌شود که متعلق به خط نیست (شکل ۵۹) . و این همان شرطی است‌که باید اضافه‌کنیم : از نظرکانتور ، خط مسطحه به‌متصلهٔ واقع بر صفحه‌ای‌گفته می‌شودکه حتی شامل یك‌تکهٔ «پرو به‌هم پیوستهٔ» صفحه‌نباشد (یعنی در هر مربع دلخواه صفحه ، نقطه‌هایی وجود داشته باشدکه به این خط متعلق نباشد) .



شکل ۵۹

مثلاً[۴] پاره‌خط ، محیط مثلث ، محیط دایره، دورهٔ ستارهٔ پنج پر، همه خط هستند . قالی‌سرپینسکی هم یك خط می‌شود ، زیرا برای بدست آوردن آن ، همهٔ مربعهای تقسیم را سوراخ کرده‌ایم و حتی یك قطعهٔ کامل مسطحه درآن باقی نمی‌ماند . محیط‌دایره، هم همراه با مارپیچی که دور آن پیچیده است ، خط می‌شود ؛ همچنین شکل دندانه‌ای‌شکل ۶۰ همراه با پاره‌خط [۱ و ۰] از محور عرض هم طبق این تعریف یك خط خواهد بود. بطورکلی همهٔ شکلهایی‌که به‌کمك احساس درونی وبه مفهوم سادهٔ تصور ما ، خط‌هستند، از نظرتعریف‌کانتوری آن نیز خط به‌حساب می‌آیند، وتمام شکلهایی که شامل لااقل یك قطعه‌کامل‌سطح باشند ، در ردیف خطهای‌کانتوری نیستند .



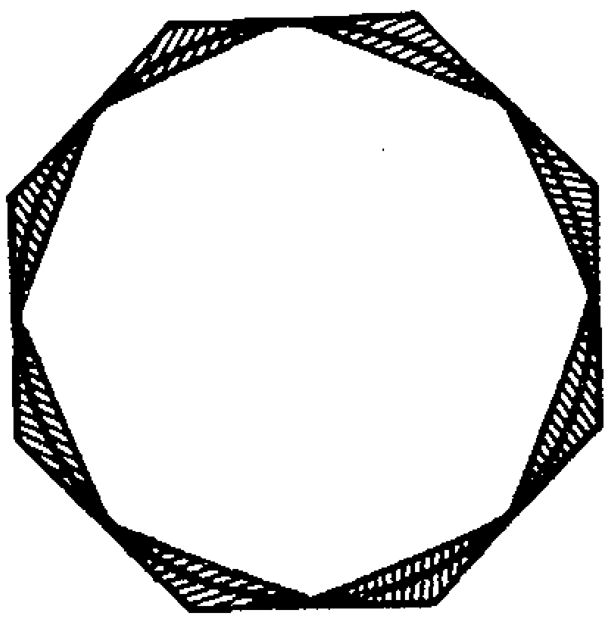
شکل ۶۰

ولی در بین خطهای کانتوری ، نمونه‌هایی هم وجود دارد که خاصیتهای آنها هیچ شباهتی به خطهای معمولی ندارد. و حالامابه‌شرح بعضی از این خطها می‌پردازیم .

آیا مساحت خط همیشه مساوی صفر است ؟

بعد ازآنکه خواننده با خطی آشنا شده است‌که از همهٔ نقطه‌های مربع می‌گذرد ، می‌تواند آمادگی هر مطلبی‌را داشته باشد . با وجود این ، آیا ممکن است‌که خط دارای مساحت باشد ؟ اقلیدس می‌گفت‌که خط یك درازای بدون پهنااست . و در جایی‌که پهنایی وجود ندارد، از کجا می‌توان مساحتی پیدا کرد ؟ درتعریف‌کانتوری خط هم‌گفته می‌شود که شامل‌هیچ‌قطعهٔ کاملی ازسطح نیست. پس‌چگونه می‌توان به مساحتی برای آن رسید ؟ با وجود همهٔ اینها ، در دادن پاسخ قطعی شتاب نکنید.

قبل از آنکه به بررسی این پرسش بپردازیم ، دربارهٔ مفهوم جمله‌هایی که بکار می‌بریم ، موافقت کنیم . ببینیم جملهٔ «خط دارای مساحت صفر است» یا «خط دارای مساحت غیرصفر است» به‌چه معنی است؟ عادی‌ترین خطها را انتخاب می‌کنیم : پاره خط راست . چون پهنای پاره خط مساوی صفر است ، می‌توان آنرا در داخل مستطیلی که مساحت آن تا حد دلخواه کوچك است ، جا داد ؛ تنها باید عرض این مستطیل را به حد دلخواه کوچك گرفت . به‌همین ترتیب می‌توان دایره را بین چند ضلعیهایی قرار داد ، که مساحت بین آنها به‌اندازهٔ دلخواه کوچك باشد .



شکل ۶۹

برای این منظور کافی است چند ضلعی منتظمی با تعداد ضلعهای زیاد ، در آن محاط کنیم و چند ضلعی متشابه با آن را بر دایره محیط کنیم . میدانی که بین این دو چند ضلعی قرار گرفته است ، مساحت کوچکی دارد (هرچه تعداد ضلعهای چند ضلعیها بیشتر باشد، این مساحت کوچکتر است) و محیط دایره کاملاً در این میدان قرار دارد .

حالا دیگر معنای جملهٔ خط دارای مساحت صفر است روشن می‌شود. این جمله به این معنی است که عدد مثبت ε را هرقدر کوچك انتخاب کنیم ، میدان چند ضلعی پیدا می‌شود که شامل خط است و مساحتی کمتر از ε دارد . و اگر برای یك عدد مثبت ε ، نتوان چنین میدانی را پیدا کرد ، مساحت خط مساوی صفر نخواهد بود .

برای اینکه این تعریف روشن‌تر شود، آنرا در مورد خطی که پیچیده‌تر از پاره خط و دایره باشد ، بکار می‌بریم . یکی از این خطها ،

قالی سرپینسکی است . مساحت آنرا پیدا می‌کنیم . به‌خاطر مـی‌آوریم که مساحت تمام مربع برابر است با ۱ . در گام اول ، مربعی را از آن جدا کرده‌ایم که مساحت آن مساوی $\frac{۱}{۹}$ است . در نتیجه میدان چندضلعی با مساحت $\frac{۸}{۹}$ بدست می‌آید . در مرحلهٔ دوم ۸ مربع جدا می‌کنیم که هرکدام‌از آنها مساحتی‌مساوی $\frac{۱}{۸۱}$ دارد . بعد از این مرحله ، میدان چند ضلعی پیدا می‌شودکه مساحت آن چنین است :

$$\frac{۸}{۹}-\frac{۸}{۸۱}=\frac{۶۴}{۸۱}=\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}$$

حالا دیگر روشن است‌که بعد از مرحلهٔ سوم ، میدان چند ضلعی به مساحت $\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۳}$ و سپس $\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۴}$ و غیره خواهد شد . ولـی اگـر یك کسر مثبت‌کوچکتر از واحد را مرتباً به توانهای بزرگتر و بزرگتر برسانیم ، در حد به‌سمت صفرمیل می‌کند ، اگر داشته باشیم $۰ < q < ۱$ ، خواهیم داشت :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, q^{n}=۰$$

و در حالت خاص : $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۸}{۹}\right)^{n}=۰$.ولی‌بنابرتعریف‌حد، این مطلب به این معنی است‌که برای هر $\varepsilon > ۰$ ، عددی برای n پیدا می‌شودکه به ازای آن داشته باشیم $\left(\frac{۸}{۹}\right)^{n} < \varepsilon$. بنابراین بعد از مرحلهٔ nام ، میدان چند ضلعی بدست می‌آیدکه مساحت آن‌کمتر از ε است . واین میدان، قالی سرپینسکی را بطور کامل می‌پوشاند. مساحت قالی سرپینسکی مساوی صفر می‌شود .

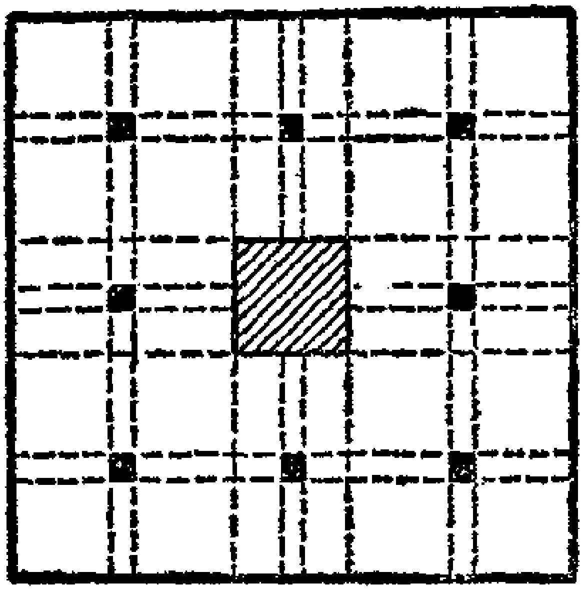
به‌نظرمی‌رسدکه تعریف اقلیدس به پیروزی کامـل رسیده است .

حتی برای خط به این پیچیدگی ، مثل قالی سرپینسکی ، مساحت مساوی صفر می‌شود . ولی جشن پیروزی ، دیری نمی‌پاید . آخر هیچکس ما را مجبور نمی‌کند قطعه‌هایی به این بزرگی جدا کنیم . با صرفه جویی بیشتری عمل می‌کنیم و مربع را به‌جای ۹ قسمت بـه ۲۵ قسمت تقسیم می‌کنیم (یعنی هرضلع آنرا به ۵ قسمت) . مربع وسط را ، که مساحتی مساوی $\frac{۱}{۲۵}$ دارد، از آن جدا می‌کنیم . حالاشاید خواننده بخواهدهریك از ۲۴ مربع باقیمانده را دوباره به ۲۵ قسمت تقسیم کند و از هرکدام، مربع وسط را بردارد . ولی این با فکرصرفه‌جویی مـا نمی‌سازد. به‌جای آن ، پاره خطهایی که مربع بریده شده را محدود مـی‌کنند ، انتخاب و آنها را ادامه می‌دهیم تا ضلعهای مربع بزرگ را قطع کنند بـرای ما ۴ مربع (درگوشه‌ها) و ۴ مستطیل بدست می‌آید . در هریك از این مربعها و مستطیلها ، صلیبی به پهنای $\frac{۱}{۲۵}$ رسم و قسمت وسط صلیب را جـدا می‌کنیم (شکل ۶۲) . چون مساحت هرکدام از ایـن قسمتهای مـرکزی مساوی $\frac{۱}{۶۲۵}$ است، مساحت همهٔ مربعهایی که درمرحلهٔ دوم بریده می‌شود، برابر $\frac{۸}{۶۲۵}$ خواهدشد . درمرحلهٔ سوم ، ۶۴ مربع جدا می‌شود که روی‌هم مساحتی برابر $\frac{۶۴}{۲۵^۳}$ یعنی $\frac{۶۴}{۱۵۶۲۵}$ خواهد داشت و غیره . این مساحتها تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند :

$$\frac{۱}{۲۵}+\frac{۸}{۲۵^۲}+\frac{۶۴}{۲۵^۳}+\dots$$

که قدر نسبتی مساوی $\frac{۸}{۲۵}$ دارد . مجموع همهٔ جمله‌های این تصاعـد هندسی مساوی $\frac{۱}{۱۷}$ است. ولی این به‌چه‌معنی است؟ این نتیجه به معنای

آن است که در هرمرحله، مقدار مساحتی که باقی می‌ماند از $\frac{16}{17}$ کمتر نیست، و میدان چند ضلعی که مساحت آن کمتر از $\frac{16}{17}$ باشد و باقیماندهٔ مربع را پوشانده باشد، وجود ندارد. ولی مگرنه اینکه این باقیمانده، مثل قالی سرپینسکی، عبارت‌است ازیك منحنی (به‌مفهوم تعریف کانتوری آن)ـ برای ساختن آن هرمستطیل را سوراخ کرده‌ایم، و حتی یك مستطیل کامل هم در آن وجود ندارد.



شکل ۶۲

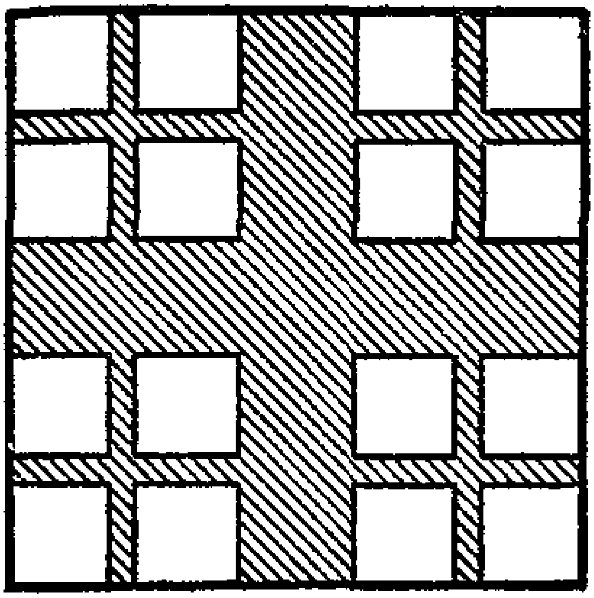
به این ترتیب معلوم می‌شود که منحنی، به مفهوم تعریف کانتوری آن، می‌تواند مساحتی غیر صفر داشته باشد.

میدان بدون مساحت

با همهٔ اینها نمونهٔ مورد بررسی خیلی قانع کننده نیست: خطی که بدست آوردیم در سر تا سر خود از نقطه‌هایی تشکیل شده است که به‌هم برخورده‌اند و هیچ میدانی را محدود نمی‌کند. بنابراین پرسشی پیش می‌آید: آیا می‌توان منحنی «خوبی» بدست آورد که نقطه‌های به‌هم برخورده نداشته باشد (یعنی منحنی بستهٔ ژردانی بدون اینکه با خودش برخورد داشته باشد) و مساحتی غیرصفر داشته باشد؟ ظاهراً ممکن است!

برای ساختن این منحنی، ساختمان قبلی را کمی تغییر می‌دهیم. ابتدا مجموعه‌ای می‌سازیم که در آن نه تنها تکه‌های کامل سطح، بلکه حتی تکه‌های کامل خط هم پیدا نشود، ولی مساحت آن مساوی صفر

نباشد . برای این منظور ، به‌جای مربعهای مرکزی، صلیبهای کامل را، مطابق آنچه کـه در شکل ۶۳ می‌بینید ، جدا مـی‌کنیم . ضمناً اندازه‌های صلیب اول را طـوری می‌گیریم که مساحت آن $\frac{۸}{۲۵}$ باشد، به‌همین تـرتـیب مساحت همـهٔ صلیبهایی که در مرحلهٔ دوم جدا مـی‌شود مساوی $\frac{۶۴}{۶۲۵}$ یعنی $(\frac{۸}{۲۵})^۲$ وبرای مرحلهٔ سوم $(\frac{۸}{۲۵})^۳$ و غیـره



شکل ۶۳

باشد . دراین‌صورت همهٔ صلیبهای جدا شده مساوی مجموع جمله‌های تصاعد هندسی زیر می‌شود :

$$\frac{۸}{۲۵}+(\frac{۸}{۲۵})^۲+(\frac{۸}{۲۵})^۳+\ldots$$

یعنی مساوی $\frac{۸}{۱۷}$. ولی‌این مقدار کمترازنصف مساحت‌تمام مربع است. به این ترتیب سهم مساحت باقیمانده مساوی $\frac{۹}{۱۷}$ مساحت تـمـام مـربـع می‌شود . ولی برای ساختن این باقیمانده ، صلیبهای کاملی را از مربع جدا کرده‌ایم . هیچ دو نقطه‌ای ازاین باقیمانده‌را نمی‌شود با خطی به‌هم وصل کرد ، حتی خط به مفهوم کانتور ؛ هرگونه ارتباطی بین نقطه‌هـای این باقیمانده از بین رفته است . آنطورکـه ریاضـی‌دانها مـی‌گویند ، باقیمانده عبارت‌است ازمجموعه‌ای بکلی غیرمرتبط . ولی مساحت این مجموعه‌ای که نه‌شامل یك تکهٔ کامل سطح ونه شامل یك تکهٔ قوس منحنی است ، مخالف صفر است ؛ در هیچ حالتی یك میدان چند ضلعی ، که

مساحتی کمتر از $\frac{۹}{۱۷}$ داشته باشد ، این مجموعه را نمی‌پوشاند .

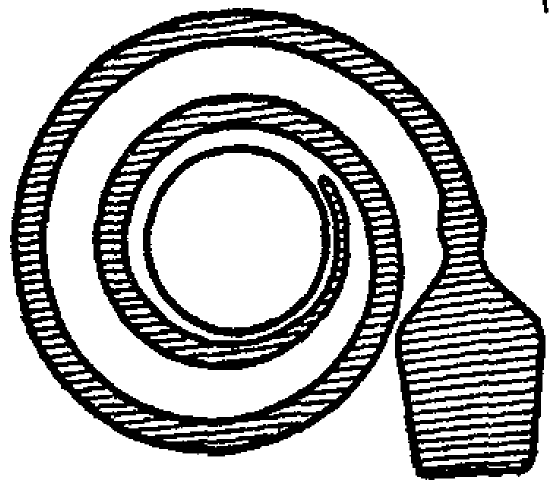
حالا دیگر به سادگی می‌توان منحنی بسته‌ای ساخت که بخود بر نخورده باشد و مساحتی غیر صفر داشته باشد . برای این منظـور باید نقطه‌های بدست آمده را به‌هم وصل کنیم (درست شبیه آنچه که دربـارهٔ منحنی که از همهٔ نقطه‌های مربع عبور می‌کرد ، انجام دادیم) . از آنجا که در هرمرحله ، یك صلیب کامل را جدا کرده‌ایم ، خطی که بدست می‌آید با خودش برخورد ندارد (و در همین نکته هـم با منحنی په‌آنو تفاوت دارد). ولی چون این خط از همهٔ نقطه‌های مجموعه،که مساحتی حداقل مساوی $\frac{۹}{۱۷}$ داشت ، می‌گذرد ، مساحت خط بدست آمـده هـم ، حداقل مساوی $\frac{۹}{۱۷}$ است .

وحالادیگر هیچ چیزمانع آن نیست تا میدانی بسازیم که مساحت نداشته باشد . برای این منظور کافـی است نقطه‌هـای A و B از منحنی بدست آمده را به وسیلهٔ خط دلخواهی ، و مثلاً نیم‌دایره، به‌هم مربوط کنیم . به این ترتیب خط Γ که به این ترتیب بدست می‌آید ، میدانی مانند G را محدود می‌کند . مساحت این میدان چقدر است ؟ جواب را نمی‌توان داد ، مگر اینکه بدانیم که آیا مرزهای ایـن میدان را هم جزئی از آن به حساب می‌آوریم یا نه ؛ آخر خود مرز مساحتی دارد که حداقل مساوی $\frac{۹}{۱۷}$ است . روشن است که میدان مـا دارای مساحت معمولی نیست. درریاضیات، به‌چنین میدانهایی که‌دارای‌مساحت معمولی نیستند ، مساحت ناپذیرگویند .

نمونه‌های غیرمنتظره

شاید بعد از پیدا شدن منحنی په‌آنو ، ریاضی‌دانها مطمئن بودند

که «عجیب‌ترین» تابعها و خطهای غیرعادی را شناخته‌اند. با وجود این، بعد از آن هم بارها متوسل به احساس درونی هندسی شده‌اند. برای اینکه به تفاوت خاصیتهای خط‌کانتوری با خط معمولی پی‌ببریم، بهتر است به‌گزارش تاریخی زیر توجه‌کنیم :



شکل ۶۴

در ابتدای سدهٔ بیستم، تعدادی از نوشته‌های شن‌فلیس ریاضی‌دان مشهور چاپ شدکه در آنها دربارهٔ خاصیتهای مختلف منحنیها، مرز میدانها و غیره صحبت شده بود. ضمناً شن‌فلیس اغلب برجملهٔ «از لحاظ هندسی روشن است» تکیه‌کرده بود. ولی بعد از چند سال، در سال ۱۹۱۰، مقالهٔ‌کوتاهی (تنها ۱۲ سطر) به وسیلهٔ براوور ریاضی‌دان جوان هلندی چاپ شد. در این مقاله مثالهای عجیبی آمده بود که ضمن آن معلوم می‌شد یکی از نتیجه‌گیریهای شن‌فلیس‌کاملاً نادرست است و بقیه، اگر چه درست‌اند، به دقت اثبات نشده‌اند. به‌راستی که جملهٔ «از لحاظ هندسی روشن است» شوخی بدی با شن‌فلیس کرده بود.

برای اینکه نشان دهیم، چگونه ممکن است یك حکم «روشن» نادرست باشد، بعضی از مثالهای براوور را می‌آوریم (برای این منظور از سادهٔ شدهٔ مطلب‌که بعداً انجام‌گرفته است، استفاده می‌کنیم).

براوور میدان محدودی می‌سازدکه مرز آن به مفهوم عادی خود، متصله نیست. برای این منظور یك «بطری» انتخاب می‌کند، گلوی آنرا می‌کشد و دور یك دایره می‌پیچاند (شکل ۶۴). در نتیجه میدانی بدست می‌آورد که به وسیلهٔ دو مارپیچ و «بطری» محدود شده است. ولی این مرز متصله نیست، برای اینکه این اشکال برطرف شود، باید

به مارپیچ ، محیط دایره‌ای را که دور آن پیچیده شده است ، اضافه کرد .

ولی اگر محیط دایره را به مارپیچ اضافه کنیم ، مشکل تازه‌ای پیدا می‌شود : نقطه‌های مرز را نمی‌توان به نقطه‌های میدان ، با خطهای به طول محدود وصل کرد .

میدانها و مرزها

بارها از میدان ومرزصحبت کرده‌ایم و حالا موقع آن‌است که این مفهومها را دقیقتر بیان کنیم . معلوم شدکه تعریف ژردان از خط کاملاً دقیق نیست، به‌همین مناسبت تعریف میدان را هم باید بازسازی کنیم .

مجموعهٔباز به هر مجموعه‌ای گوییم که از اجتماع دایره‌ها با حذف مرزها (محیطها) بدست آمده باشد. بخصوص متمم هرمتصلهٔ مسطحه‌ای، یك مجموعهٔ مسطحهٔ باز است . همهٔ میدانهای مسطحهٔ معمولی (داخل دایره ، مربع ، مثلث و غیره) ، نمونه‌های مجموعه‌های باز (مسطحه) هستند . علاوه بر آن ، اینها مجموعه‌های مرتبطانـد : هر دو نقطه از مجموعه را می‌توان با خط شکسته‌ای به‌هم وصل کرد ، بدون اینکه این خط از میدان خارج شود . همین خاصیتها ، میدان مسطحه را تعریف می‌کند .

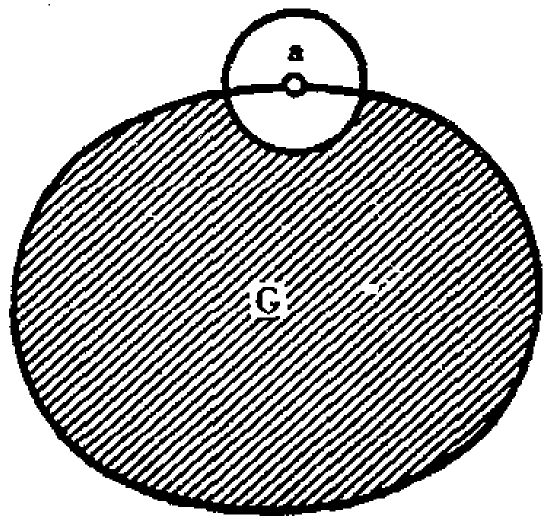
میدان مسطحه ، به مجموعهٔ مرتبطی ازنقطه‌های صفحه‌گفته می‌شود که از اجتماع دایره‌ها با حذف مرزهای آنها ، به وجود آمده است .

تعداد این دایره‌ها می‌تواند دلخواه باشد . با وجود این می‌توان ثابت کردکه هر میدان را می‌توان با مجموعهٔ شمارایی از دایره‌ها تشکیل داد .

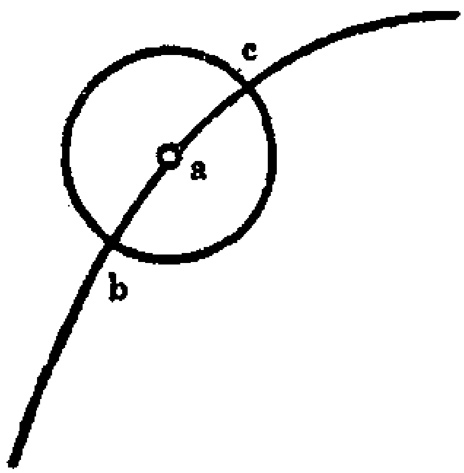
دایره‌ای که محیط آنرا کنارگذاشته باشیم ، حومهٔ a ، مرکز آن، نامیده می‌شود . روشن است که هرنقطه دارای بی‌نهایت حومه است .

a را نقطهٔ مرزی میدان G گویند وقتی که در هرحومهٔ نقطهٔ a هم از نقطه‌های میدان G وجود داشته باشد و هم نقطه‌هایی که به G تعلق ندارند (شکل ۶۵) .

به‌همین ترتیب می‌توان مجموعه‌های باز، میدانها ونقطه‌های‌مرزی میدانها را در فضا تعریف‌کرد . تنها اختلافی‌که وجود دارد ، دراینجا

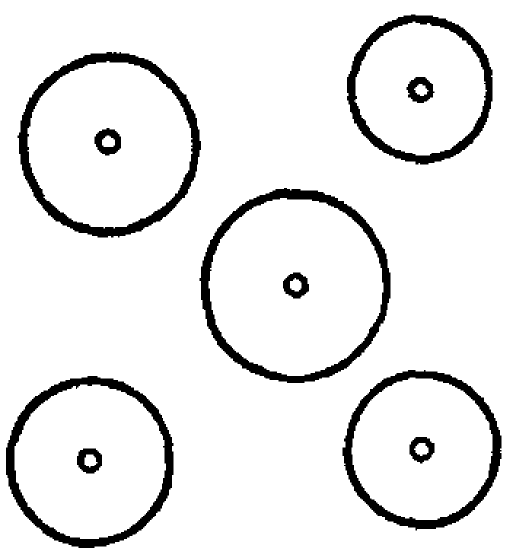


شکل ۶۵



شکل ۶۶

باید به‌جای دایره‌هایی که مرزهای آنها را جدا کرده‌ایم ،کره‌هایی با مرزهای جدا شده انتخاب کنیم (مرزکره ، همان سطح آن‌است) . همراه‌بامفهوم حومهٔ‌نقطه(درصفحه وفضا) ، باید با مفهوم حومهٔ نسبی نقطه‌که متعلق به مجموعه‌ای مثل A است، آشنا شویم . روشن است



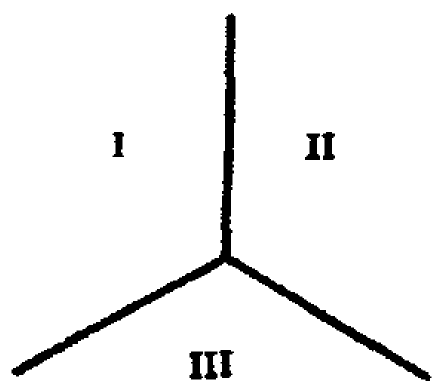
شکل ۶۷

که‌مجموعهٔ نقطه‌هایی ازحومه‌که متعلق به‌مجموعهٔ A باشد، عبارت‌است از اشتراك حومهٔ معمولی این نقطه با خود مجموعهٔ A . مثلاً اگر A خطی کـه در شکل ۶۶ نشان داده شده است ، و G حومهٔ نقطهٔ a باشد ، حومهٔ نسبی این نقطه عبارت‌است ازقطعه‌ای ازخط‌کـه بین b و c واقع

است . اگر مجموعهٔ A از چند نقطه تشکیل شده باشد ، در هریك از نقطه‌های آن حومهٔ نسبی وجود داردکه منحصراً از آن نقطه تشکیل شده است . برای بدست آوردن این حومهٔ نسبی باید حومهٔ معمولی نقطه را طوری انتخاب‌کردکه شامل نقطه‌های دیگر مجموعه نباشد (شکل ۶۷).

عملیات بزرگ آبیاری

حالا دربارهٔ نمونهٔ دیگری ازمثالهای عجیب براوور گفتگومی‌کنیم. نقشهٔ‌یك‌کشور را با کشورهای همسایهٔ آن رسم می‌کنیم . تقریباً هر نقطهٔ مرزی این‌کشورمتعلق به دووتنها دوکشور است : کشور مفروض و یکی از همسایه‌های آن. بنابراین در هرنقطهٔ مرزی دومرزدار ایستاده است : یکی از خود این کشور و دیگری‌ازکشورهمسایه.چندنقطه‌ای



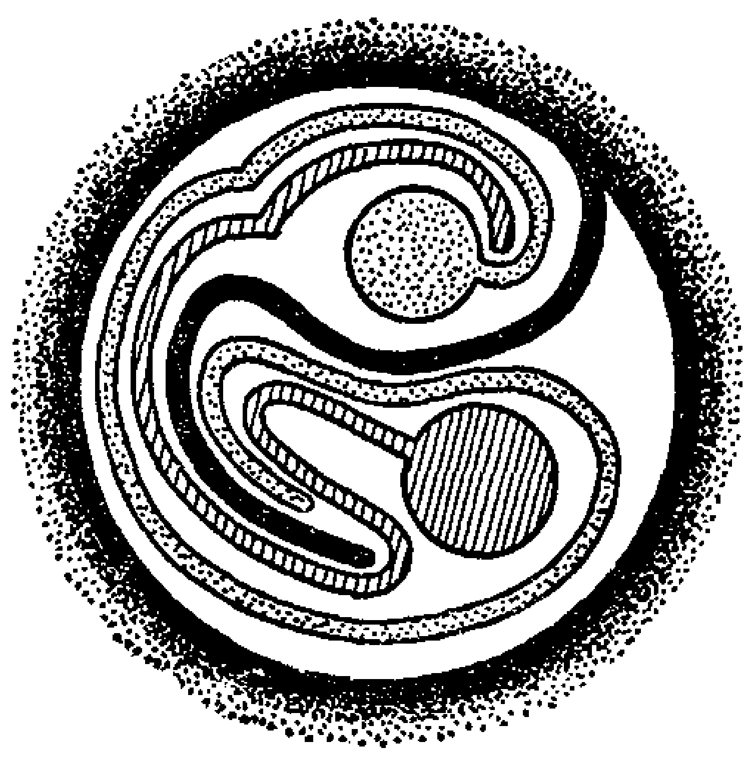
شکل ۶۸

هم درنقشه وجود داردکه در آنجا سه‌کشور به‌هم رسیده‌اند (شکل۶۸). در این نقطه‌ها هم، سه مرزدار ایستاده است. ولی تعداد اینگونه نقطه‌ها در مرز، محدود است. و روشن به‌نظرمی‌رسدکه اینگونه نقطه‌ها نمی‌تواند تمام مرز راپرکند،یعنی نمی‌شودسه‌میدان (سه‌کشور)وجود داشته‌باشدکه یك مرز مشترك داشته باشند . به عبارت دیگرکاملا روشن به‌نظرمی‌رسد که‌سه مرزدار ازسه‌کشورمختلف، نمی‌تواند درهرنقطهٔ مرزایستاده باشد .

ولی براوور توانست سه میدان با این خاصیت بسازد . برای اینکه از این مثال سردرآوریم ، فرض‌کنیدکه جزیره‌ای دراقیانوسی واقع‌باشد و در این جزیره دو دریاچهٔ آب شیرین وجود داشته باشد . فقط دریکی از دریاچه‌هاآب خنك است ودیگری‌آب‌گرم دارد . حالا عملیات‌آبیاری را به این ترتیب طرح می‌کنیم. در طول شبانه‌روز اول، آبروهایی از

اقیانوس و از دو دریاچه به‌نحوی تعبیه می‌کنیم که هریك از آبروها « کور » باشد (یعنی هرکدام به صورت خلیجی با آب مربوطه) وبا یکدیگر تماسی نداشته باشند و ضمناً فاصلهٔ هر نقطه از خشکی تا آب اقیانوس وتاآب‌هریك ازدریاچه‌هاکمترازیك‌کیلومتر باشد (شکل ۶۹) .

در نیمی از شبانه‌روز بعد ، آبروها را طوری ادامه می‌دهیم که مثل قبل «کور» باشند و با هم تماسی‌نداشته باشند، ولی فاصلهٔ هرنقطهٔ خشکی تا هریك از سه آبرو کمتراز $\frac{1}{2}$ کیلـومتر باشد . البته در ایـن مرحله ، باید آبروها را باریکتر از مرحلهٔ قبل ساخت . در یك چهارم شبانه روز بعدی ، آبروها را طوری ادامه می‌دهیم کـه فاصلهٔ هر نقطهٔ خشکی تا هریك از آنها کمتر از $\frac{1}{4}$ کیلومتر باشد و غیره. در هرمرحله، آبروها نسبت به مرحلهٔ قبل پرپیچ و خم‌تر و باریکتر می‌شود . بعد از دوشبانه‌روز، تمام جزیره از این سه آبرو پوشیده و تبدیل به‌خطهایی از آبروها می‌شود . می‌توان در هرنقطهٔ دلخواه جزیره ایستاد و در



شکل ۶۹

همانجا آب شور اقیانوس یا آب شیرین گرم و یا آب شیرین سرد یکی ازدریاچه‌ها را برداشت. ضمناً آنها به‌هیچوجه به‌هم مخلوط نشده‌اند. اگر به‌جای اقیانوس ودریاچه‌ها، سه کشور در نظر بگیریم، نقشهٔ عجیبی را که قبلاً از آن صحبت کرده‌ایم، بدست می‌آوریم : در هرنقطهٔ مرزی باید سه مرزدار ، هریك متعلق به یکی ازکشورها ، وجود داشته باشد.

تکلیف ُبعد چه می‌شود ؟

گفتیم که در تعریف کانتوری یك نارسایی وجود دارد : این تعریف برای منحنیهای فضایی اصلاً به‌درد نمی‌خورد ، و اینکه سطح در فضا چگونه است ،کسی چیزی نمی‌داند .

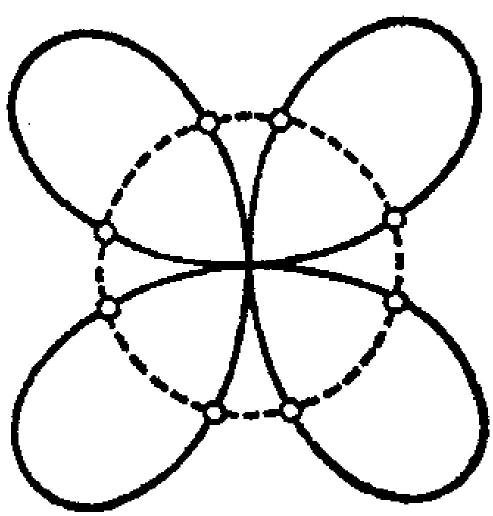
در تابستان سال ۱۹۲۱ ، دیمیتری فدرُوویچ یگورُوف ، استاد ممتاز دانشگاه مسکو ، این مسأله را (که منحنی فضایی و سطح در فضا ، چیست) درمقابل شاگرد بیست وسه سالهٔ خود پاول ساموئیلویچ اوریسون قرار داد .

اوریسون به‌زودی متوجه شد که مسألهٔ یگورُوف حالت خاصی از یك مسألهٔ کاملاً کلی‌تراست : ُبعد در شکل هندسی چیست ، یعنی شکل هندسی چند بعد دارد ، چرا باید گفت که پاره خط یا محیط دایره یك بعد ، مربع دو بعد و مکعب یا کره سه بعد دارد ؟ پاول سرگه‌یویچ الکساندرُوف عضو فرهنگستان و رئیس جامعهٔ ریاضی مسکو، که در آن‌زمان دوست اوریسون و آسپیران جوانی بود ، دربارهٔ این سالهای زندگی دوست خود اینطور به‌خاطر می‌آورد :

«... تمام تابستان سال ۱۹۲۱ با تلاش شدیدی به‌خاطر یافتن تعریف «واقعی» ُبعدگذشت ؛ پاول ساموئیلویچ از یك نوع به‌سراغ نوع دیگری می‌رفت ، پیوسته نمونه‌هایی می‌ساخت که معلوم کند ، چرا باید این و یا آن نوع را کنارگذاشت . و این کار دو ماه تفکر واقعی و

همه جانبه بود . بالاخره در یکی از روزهای آخر اوگوست، پاول ساموئیلویچ با آمادگی کامل ازخواب برخاست . اوبه تعریف نهایی بُعد رسیده بود... در همان روز پاول ساموئیلویچ اوریسون ضمن آب‌تنی در رودخانهٔ کلیازما ، دربارهٔ تعریفی که برای بُعد پیدا کرده بود، برای من شرح داد و همانجا ضمن این گفتگو، طرح ساختمانی نظریهٔ بعد را ریخت که همراه با یك رشته قضیه بودکه بعدها و در جریان چند ماه یکی پس از دیگری ثابت شدند . بعدها ، من دیگر هرگز مانند آن صبح روز اوگوست، در بحثی چنین پربار از مفهومهای جدید ریاضی ، نه شرکت داشته‌ام و نه شاهد بوده‌ام . تمام برنامه‌ای که در آن روز طرح شده بود ، در طول زمستان سالهای ۱۹۲۱ ـ ۱۹۲۲ و بهار سال ۱۹۲۲ بطورکامل انجام ونظریهٔ بُعدکاملاً آماده شد ...»

اساس فکر اوریسون برای تعریف بعد چنین است : برای اینکه قسمتی از خط را از تمام بقیهٔ خط جدا کنیم ، معمولاً دو یا چند نقطه کافی است (در شکل ۷۰ ، برای اینکه قسمتی ازگل چهاربرگی را که شامل مرکز آن‌است ، ازبقیهٔ گل جدا کنیم ، به هشت نقطه نیاز داریم). ولی قسمتی از سطح را نمی‌توان از بقیهٔ آن به‌کمك نقطه‌ها جدا کرد ، برای این منظور حتماً یك خط‌کامل لازم است. درست به‌همین ترتیب، برای جداکردن قسمتی ازفضای سه‌بعدی از بقیهٔ فضا، باید از سطح استفاده‌کرد .


شکل ۷۵

همهٔ اینها را باید دقیقتر کرد : در بعضی از خطها ، برای جدا کردن قسمتی ازآن، بی‌نهایت نقطه لازم است ، ولی این نقطه‌ها در مجموعهٔ خود ، یك خط را تشکیل نمی‌دهند . اوریسون موفق شد همهٔ تعریفهای لازم را منظم کند . از

جهتی، تعریف اوریسون، تعریف اقلیدس را به‌خاطر می‌آورد (نقطه ، حد خط است ؛ خط، حد سطح است) . ولی‌این شباهت مثل شباهتی است که بین کشتیهای یونانی باکشتیهای اقیانوس پیمای امروزی وجود دارد .

تعریف استقرایی بُعد *

حالا دقیقتر دربارهٔ تعریف اوریسون از بُعد شکل هندسی صحبت می‌کنیم. ابتدا روشن می‌کنیم‌که مجموعهٔ با بُعد صفر چیست. مجموعهٔ با اندازهٔ صفرنمونه‌ای، عبارت‌است ازمجموعه‌ای‌که ازیك نقطه ، و یا لااقل از تعداد محدودی نقطه ، تشکیل شده باشد . ولی در هرنقطهٔ این مجموعه ، حومهٔ نسبی با مرز تهی وجود دارد (شکل ۶۷ را ببینید) . اوریسون هم همین‌خاصیت را برای تعریف مجموعهٔ با بُعد صفر انتخاب کرد . این تعریف به این ترتیب بیان می‌شود :

مجموعهٔ F به شرطی بُعد صفر داردکه هرنقطهٔ آن‌دارای حومهٔ نسبی به حد لازم کوچك و با مرز تهی باشد .

در بیشتر موارد ، برای اینکه ثابت‌کنیم مجموعه‌ای با بعد صفر است ، برای هرنقطهٔ آن حومهٔ معمولی به حد لازم‌کوچك می‌سازیم که مرزآن‌شامل‌حتی یك‌نقطهٔ‌مجموعهٔF هم‌نباشد (در این حالت‌مرزحومهٔ نسبی بدون شك تهی خواهد بود) . ولی مجموعه‌های با اندازهٔ صفر وجود داردکه در فضای سه بعدی قرارگرفته‌اند و برای نقطه‌های آن نمی‌توان حومه‌های معمولی را ساخت .

جملهٔ «به حد لازم‌کوچك» را به مناسبت زیر، به تعریف اضافه کرده‌ایم . اگر این جمله نباشد ، مثلاً برای هرمربعی می‌توان دایره‌ای با چنان بزرگی انتخاب کردکه تمام مربع در داخل آن بیفتد و حتی یك نقطهٔ مربع در مرز دایره واقع نشود . و اگر این جمله در تعریف نباشد ، نتیجه می‌شودکه بُعد مربع ،که‌درواقع‌مساوی۲ است،برابر صفراست .

نه تنها مجموعه‌های متناهی ، بلکه بسیاری از مجموعه‌های نامتناهی هم دارای بعد صفرهستند. مثلاً مجموعه‌ای را در نظرمی‌گیریم که از نقطه‌هایی واقع برمحوربه‌طولهای 0، 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ...، $\frac{1}{n}$، ...، تشکیل شده باشد. روشن‌است‌که درهرنقطهٔ این مجموعه، حومه‌ای به‌حد لازم‌کوچك وجود دارد، به‌نحوی‌که مرز آن‌شامل نقطه‌های این مجموعه نباشد . تنها تردید ممکن است برای نقطهٔ 0 به وجود آید . ولی اگر حومهٔ آنرا به شعاع α بگیریم ، به‌نحوی‌که α عددی‌گنگ باشد، حتی یکی از نقطه‌های مجموعه هم در مرز این حومه قرار نمی‌گیرد .

مجموعهٔ Q نقطه‌های به مختص‌گویا واقع‌برخط‌راست هم‌بعدصفر دارد. برای اینکه دراین مورد قانع‌شویم ،کافی است‌به‌عنوان‌حومهٔ‌نقطهٔ a در Q ، فاصله‌ای به مرکز این نقطه انتخاب‌کنیم که طولش عددی گنگ باشد . با این تعریف ، مجموعهٔ‌کانتوری (صفحهٔ ۱۵۷ را ببینید) و مجموعه‌ای‌که از مربع با حذف صلیبها بدست می‌آید (صفحهٔ ۱۸۵ را ببینید) و بسیاری مجموعه‌های دیگر ، به بعد صفرخواهد بود .

به‌همین ترتیب می‌توان مجموعه‌های با بعد صفررا نه تنها روی صفحه ، بلکه در فضا هم ساخت (البته ، در این حالت حومهٔ نقطه‌ها را مثل حومهٔ فضایی در نظر می‌گیریم) .

بعد از آنکه اوریسون مجموعهٔ بـا بُعد صفررا تعریف‌کرد ، به مجموعهٔ یك بعدی ، یعنی خط پرداخت . اینجا دیگر حومه‌های کوچك با مرز تهی وجود ندارد (شکل ۷۰ را ببینید) . با وجود این ، برای خطهای معمولی ، مرز حومه با خود خط تنها در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند . ولی مجموعه‌ای‌که از تعداد محدودی نقطه تشکیل شده باشد ، بعد صفردارد . اوریسون ، با تعمیم این مطلب ، به‌ترتیب زیر مجموعه‌های با بعد واحد را تعریف‌کرد :

مجموعهٔ F با بعد واحد است وقتی که با بعد صفر نباشد و در هر نقطهٔ آن حومهٔ نسبی به حد لازم کوچك وجود داشته باشد که مرز آن با بعد صفر باشد .

معلوم شد که نه تنها خطهای معمولی (دایره ، پاره خط راست ، بیضی و غیره) طبق تعریف اوریسون بعد واحد دارند ، بلکه تمام خطهای کانتوری هم دارای همین بعد واحد هستند . بنابراین نه تنها مفهوم مسطحه، بلکه مفهوم فضایی خط را هم می‌توان تعریف کرد :

خط عبارت است از متصلهٔ بعد واحد .

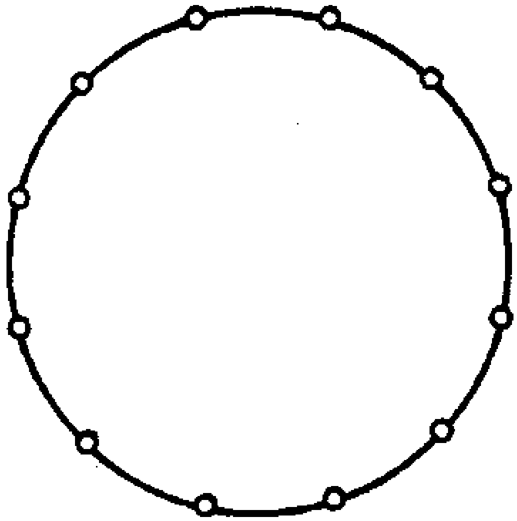
حالا دیگر روشن است که سطح ، جسمهای سه بعدی و بطور کلی مجموعه‌های با هرتعداد بعد را چگونه باید تعریف کرد ؟ از آنجا که اوریسون ابتدا تعریف بعد ۰، سپس به کمك این تعریف ، تعریف بعد ۱ ، سپس به‌همین ترتیب، تعریف بعد ۲ و غیره را می‌دهد ، تعریف کلی اوریسون را از بعد ، تعریف استقرایی گویند .

نیازی به تقریظ نیست ، آنرا چاپ کنید !

اوریسون قضیه‌های جالب بسیاری مربوط به مفهوم بعد ، ثابت کرد . ولی یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های مربوط به این زمینه را نتوانست ثابت کند : اثبات این حکم بدست نیامد که مکعب معمولی دارای سه بعد است . بعد از تلاش بسیار و طولانی راه خروج از بن بست را پیدا کرد ، تصمیم گرفت که تعریف تازه‌ای از بعد بدهد . ما به تفصیل دربارهٔ این تعریف صحبت نمی‌کنیم و تنها روی شکلهای ساده‌ای آنرا شرح می‌دهیم :

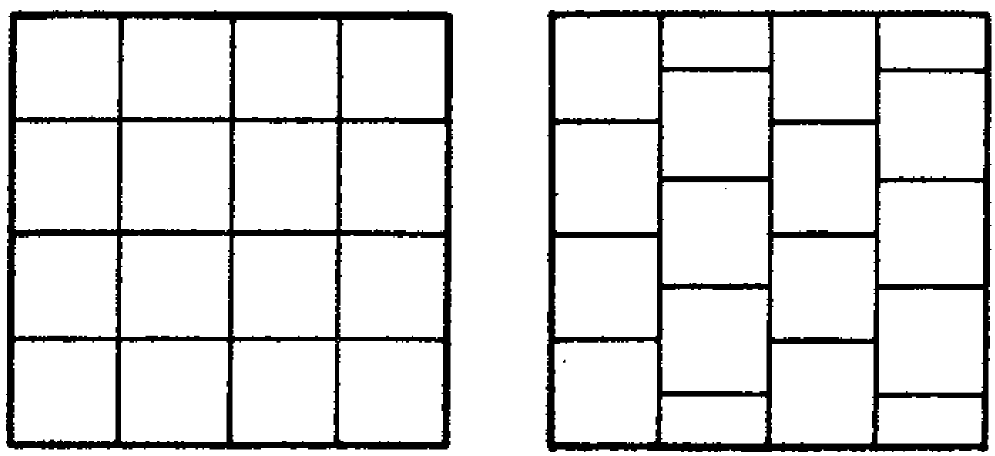
اگر پاره خط یا محیط دایره را در نظر بگیریم ، می‌توان آنرا به قطعه‌های به حد لازم کوچك ، طوری تقسیم کرد که هرنقطهٔ آن متعلق به

بیش از دوقطعه نباشد (شکل ۷۱). برای این منظور باید هرقطعه را همراه با مرزهای آن (یعنی نقطه‌های انتهایی) در نظر گرفت. سطح مربع را به این ترتیب، نمی‌توان تقسیم کرد. در نظر اول به نظر می‌رسد که برای تقسیم مربع به قطعه‌ها، همیشه نقطه‌هایی وجود



شکل ۷۱

دارد که متعلق به چهار قطعه هستند (شکل ۷۲ ـ a) . ولی اگر تقسیمها را مثل آجرهایی که پهلوی هم می‌چینند، انجام دهیم،



a)　　　　b)

شکل ۷۲

می‌توان گفت که هرنقطه نمی‌تواند به‌بیش از سه قطعه تعلق داشته باشد (شکل ۷۲ ـ b). به‌همین ترتیب برای مکعب هم تقسیمهایی وجود دارد که آنرا به مکعب مستطیلهای کوچك تقسیم می‌کند وضمناً هرنقطهٔ آن به بیش از چهار مکعب مستطیل تعلق ندارد.

اوریسون هم همین خاصیت را برای تعریف تازهٔ خود از بُعد، انتخاب کرد. شکلی را n بعدی گوییم، وقتی که بتوان آنرا به قسمتهای بستهٔ به حدلازم کوچك تقسیم کرد، به‌نحوی که حتی یك نقطهٔ آن متعلق

به $n+2$ قسمت مختلف نباشد ، ولی در هرتقسیم به‌اندازهٔ کافی کوچك، نقطه‌هایی پیدا شودکه به $n+1$ قسمت مختلف تعلق داشته باشد .

اوریسون به‌کمك این تعریف برای بعد ، ثابت‌کردکه مربع ۲ بعد دارد و غیره . و سپس او ثابت‌کردکه این تعریف ، با تعریف اول او از بعد ، هم‌ارز است .

نظریهٔ بعدها ،که به وسیلهٔ اوریسون ساخته شد ، اثر فوق‌العاده‌ای در جهان ریاضی‌کرد . حادثهٔ زیراین مطلب را به‌خوبی روشن می‌کند. اوریسون در مأموریت خارج ازکشوری‌که داشت ، دربارهٔ نتیجه‌گیریهای خودش درگوتینگن سخنرانی‌کرد . قبل از تسلط نازیها، گوتینگن یکی از مرکزهای اصلی ریاضیات بود . داوید هیلبرت ، رئیس مکتب ریاضی گوتینگن ، بعد از سخنرانی اوریسون گفت که باید این نتیجه‌گیریها را در مجلهٔ «*Mathematische Annalen*» که یکی از مهمترین مجله‌های ریاضی آن‌زمان بود ، چاپ‌کرد . بعد از چند ماه ، اوریسون دوباره در گوتینگن سخنرانی‌کرد ، هیلبرت از مدیر مجله پرسیدکه آیا اثر اوریسون را چاپ کرده است . به او جواب دادند که باید تقریظی بـه این اثر نوشته شود . هیلبرت فریاد زد : «ولی من صریحاً گفتم‌که تقریظی لازم نیست، باید آنرا چاپ‌کرد!» و بعد از این بیان صریح، مقاله را بلافاصله چاپ‌کردند .

اوریسون در طول سه‌سال، فعالیت علمی خود را ادامه داد ، کـه البته از لحاظ عمق و شدت یکنواخت نبود (او در این مدت چند ده‌تایی از اثرهای خود را چاپ‌کرد) . در ۱۷ اوگوست سال ۱۹۲۴ ، حادثهٔ غم انگیزی زندگی او را درهم نوردید ، اوکه در شرایط طوفانی آب ، در خلیج گاسکون شنا می‌کرد، غرق شد.

بعد از مرگ پاول ساموئیلویچ اوریسون ، طـرحهـای مقدماتـی و دستنویسهای زیادی از نتیجه‌گیریهای چاپ نشده ، از او باقـی ماند .

دوست نزدیك او (و ضمناً همکار او در بسیاری از کارها)، پاول سرگه‌یوویچ آلکساندروف ، با بررسی نوشته‌های او ، آنها را برای چاپ آماده کرد و در دسترس ریاضی‌دانها قرارداد . در زمان ما نظریهٔ بعدها ، اساسی‌ترین فصل ریاضیات را تشکیل می‌دهد .

نتیجه

مجموعه‌های نامتناهی خاصیتهای غیرعادی دارند . به مناسبت بررسی این خاصیتها ، ریاضی‌دانها قضاوتهای خود را بیشتر و بیشتر محکم کردند و اثباتهای خود را با تفصیل بیشتری تحلیل کردند و در این راه رشتهٔ بسیار مهمی از ریاضیات ، یعنی منطق ریاضی را به وجود آوردند . تا مدتها گمان می‌کردند که نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی، دانشهای مجردی هستند که هیچگونه کاربرد عملی ندارند . ولی وقتی که ماشینهای محاسبهٔ الکترونی پیدا شد ، معلوم شد که مسألهٔ برنامه‌ریزی برای این ماشینها دقیقاً به روشهای منطق ریاضی مربوط است، وبسیاری ازبررسیهایی که‌جدا اززندگی به‌نظرمی‌رسید، اهمیت عملی به‌سزایی کسب کرد (از اینگونه در تاریخ دانش بسیار است ؛ در همین ابتدای سالهای سی سدهٔ حاضر در بسیای ازکتابها نوشته شده بود : «اورانیوم اهمیت عملی ندارد») .

در زمان ما ، نظریهٔ مجموعه‌ها یکی از اساسی‌ترین رشته‌های ریاضی و در ردیف آنالیزفونکسیونل ، توپولوژی ، جبرعمومی و غیره به‌شمار می‌رود . درخود نظریهٔ مجموعه‌ها هم ، بررسیهای عمیقی انجام گرفته است . این بررسیها به خود بنیانهای ریاضی مربوط می‌شود . در این راه روشن شدکه نظر «ساده لوحانه» به مفهوم مجموعه‌ها (آنطور که در این کتاب به آن پرداختیم) به‌هیچ‌وجه کافی نیست و روش درست ، همان روش اصل‌موضوعی در نظریهٔ مجموعه‌هااست ، ولی پرداختن به این بررسیها از چارچوبی که برای این کتاب در نظرگرفتیم ، خارج می‌شود.

مثالها و تمرینها

۱. مجموعهٔ A از عددهای صحیحی تشکیل شده است که بر ۴ قابل قسمت‌اند ، مجموعهٔ B از عددهای صحیحی که بر ۱۰ قابل قسمت‌اند و مجموعهٔ C از عددهای صحیحی که بر ۷۵ قابل قسمت‌اند . مجموعهٔ ABC از چه عددهایی تشکیل شده است ؟

۲. درکتابخانه ، کتابهایی در رشته‌های مختلف دانش و هنر وجود دارد . مجموعهٔ همهٔ کتابهای کتابخانه را A و مجموعهٔ همهٔ کتابهای ریاضی را (نه تنها درکتابخانهٔ مفروض) B می‌نامیم . مجموعهٔ $A - B$ را مشخص کنید .

۳. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ، این عبارت را ساده کنید :

$$(A+B+C)(A+B)-[A+(B-C)]A$$

۴. مجموعهٔ A از نقطه‌های $M(x , y)$ صفحه تشکیل شده است که در مورد آنها $|x| \leqslant ۴$ و $|y| \leqslant ۴$ ، مجموعهٔ B از نقطه‌هایی از صفحه که برای آنها $x^۲+y^۲ \leqslant ۲۵$ و مجموعهٔ C از نقطه‌هایی از صفحه که برای آنها $x > ۰$. مجموعهٔ $AB - C$ را نشان دهید .

۵. این تساویها را ثابت کنید :

$$a) \quad (A-B)-C=(A-C)-(B-C),$$
$$b) \quad (A-B)+(B-C)+(C-A)+ABC=A+B+C$$

۶. ثابت کنید :

$$a) \quad AC+BD \subset (A+B)(C+D),$$

b) $(B-C)-(B-A)\subset A-C$،

c) $A-C\subset(A-B)+(B-C)$

۷. آیا از $A-B=C$ نتیجه می‌شود $A=B+C$؟

۸. آیا از $A=B+C$ نتیجه می‌شود $A-B=C$؟

۹. چه رابطه‌ای بین این مجموعه‌ها وجود دارد ؟

a) $A-(B+C)$ و $(A-B)-C$

b) $A+(B-C)$ و $(A+B)-C$

c) $(A-B)+C$ و $A+(C-B)$

۱۰. با استفاده ازرابطه‌های ۱ تا ۲۶ درصفحه‌های۵۹و۶۰، این عبارت را ساده‌کنید :

$$[(X-Y)'(X'+Y')]'$$

۱۱. بین فاصلهٔ $0<x<1$ و تمام محور عددها ، تناظر یك به یك برقرار کنید .

۱۲. بین مجموعه‌های عددی $0\leqslant x<1$ و $0\leqslant x<\infty$ تناظر یك به‌یك برقرار کنید .

*۱۳. بین پاره خط $0\leqslant x\leqslant 1$ و فاصلهٔ باز $0<x<1$ تناظر یك به‌یك برقرار کنید .

۱۴. تناظر یك به یك را در نگاشت پاره خط $0\leqslant x\leqslant 1$ برتمام محور عددها برقرار کنید .

*۱۵. بین مجموعهٔ همهٔ عددهای پاره خط $0\leqslant x\leqslant 1$ و مجموعهٔ عددهای گنگ همین فاصله ، تناظر یك به یك برقرار کنید .

*۱۶. تناظر یك به یك را در نگاشت نیم خط $0\leqslant x<\infty$ برتمام محور عددها پیدا کنید .

۱۷. بین نقطه‌های صفحه و نقطه‌های کره ، با حذف یك نقطهٔ آن ، تناظر یك به یك برقرار کنید .

*۱۸. بین نقطه‌های صفحه و نقطه‌های کره ، تناظر یك به یك برقرار کنید.

۱۹. بین نقطه‌های مربع باز $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ و نقطه‌های صفحه، تناظر یك به یك برقرار کنید .

۲۰. بین مجموعهٔ عددهای گویای پاره خط $0 \leqslant x \leqslant 1$ و مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه ،که هر دو مختص آنها عددی گویااست ؛ تناظر یك به یك برقرار کنید .

۲۱. بین مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح و مجموعهٔ همهٔ سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم با ضریبهای صحیح ، تناظر یك به یك برقرار کنید .

*۲۲. بین مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی و مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه ، تناظر یك به‌یك برقرار کنید.

۲۳. بین مجموعهٔ همه عددهای حقیقی و مجموعهٔ همهٔ سه جمله‌ایهای درجه دوم با ضریبهای حقیقی ، تناظر یك به یك برقرار کنید .

۲۴. قوت مجموعهٔ همهٔ چهارضلعیهای مسطحه ، که مختصات رأسهای آنها عددهایی‌گویااست ،کدام است ؟

۲۵. مطلوب‌است قوت مجموعهٔ همهٔ چند ضلعیهای‌مسطحه‌که مختصات همهٔ رأسهای آنها ، عددهایی‌گویا باشد .

۲۶. قوت مجموعهٔ همهٔ چند وجهیهای محدب،که مختصات همهٔ رأسهای آنهاگویااست ،کدام است ؟

۲۷. مطلوب‌است قوت مجموعهٔ‌همهٔ‌تابعهای‌گویا، باضریبهای صحیح،هم در صورت و هم در مخرج .

۲۸. مطلوب‌است‌قوت مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهایی که‌ضریبهای آنها ، عددهایی‌گویا باشد .

۲۹. مطلوب‌است قوت مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های عددهای طبیعی .

۳۰. مطلوب‌است قوت‌مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های‌متناهی از عددهای طبیعی.

۳۱. مطلوب‌است قوت مجموعهٔ همهٔ‌دنباله‌های صعودی ازعددهای طبیعی.

۳۲. قوت مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای درجه سوم با ضربهای حقیقی را پیدا کنید .

۳۳. قوت مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای با ضریبهای حقیقی را پیدا کنید .

۳۴. آیا می‌توان روی صفحه ، مجموعه‌ای با قوت متصله از دایره‌های متقاطع ساخت ؟

۳۵. آیا می‌توان روی صفحه ، مجموعه‌ای با قوت متصله از حرفهای دو به دو متقاطع Γ ساخت ؟ از حرفهای N چطور ؟

۳۶. آیا می‌توان روی صفحه ، متصله‌ای از حرفهای دو به دو متقاطع A ساخت ؟ از حرفهای δ چطور ؟

۳۷. قوت مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی که در نوشتن آنها به صورت دهدهی به رقم ۷ برخورد می‌کنیم ، کدام است ؟

۳۸. قوت مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی‌که در نوشتن آنها به صورت دهدهی به رقم ۵ برخورد نمی‌کنیم ،کدام است ؟

۳۹. قوت مجموعهٔ عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ که در نوشتن دهدهی آنها در مرتبهٔ دوم به رقم ۶ برخورد می‌کنیم و در مرتبه‌های دیگر این رقم وجود ندارد ، پیدا کنید .

۴۰. ثابت‌کنیدکه اگر داشته باشیم $A-B\sim B-A$ ، خواهیم داشت : $A\sim B$ ($A\sim B$ به‌معنای این‌است‌که A و B یك قوت دارند) .

۴۱. ثابت کنید که اگر $A\subset B$ و $A\sim A+C$ ، در این‌صورت $B\sim B+C$.

۴۲. آیا این حکم درست است : «اگر $A\sim B$ ، $C\supset A$ ، $C\supset B$ ، در این‌صورت $C-A\sim C-B$» ؟

۴۳. آیا این حکم درست است : «اگر $A\sim C$ ، $B\sim D$ و ضمناً $A\supset B$ ، $C\supset D$ ، آنگاه $A-B\sim C-D$» ؟

۴۴. همهٔ نقطه‌های گویای پاره خط $[0, 1]$ را شماره‌گذاری می‌کنیم. دنبالهٔ نقطه‌های r_1، r_2، ...، r_n، ... بدست می‌آید. حومهٔ نقطهٔ r_1 را به شعاع $\frac{1}{10}$، حومهٔ نقطهٔ r_2 را به شعاع $\frac{1}{20}$، حومهٔ نقطهٔ r_3 را به شعاع $\frac{1}{40}$ و غیره می‌سازیم. همهٔ حومه‌هایی را که بدست می‌آید، جمع می‌کنیم. آیا مجموعهٔ M که به این ترتیب بدست می‌آید، شامل تمام پاره خط است؟

۴۵. طول مجموعهٔ M از مسألهٔ ۴۴ را تخمین بزنید.

***۴۶.** مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های عددهای حقیقی $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. ثابت کنید این مجموعه قوت متصله دارد.

***۴۷.** تابع پیوسته‌ای بسازید که روی هرپاره خط، بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد.

***۴۸.** M را مجموعه‌ای از نقطه‌های پاره خط $[0, 1]$ می‌گیریم که بتوان آنها را به صورت کسرهای دهدهی نوشت و هیچکدام از رقمهای دهدهی آن مساوی ۳ و ۸ نباشد. ثابت کنید برای نوشتن این مجموعه، متناوباً از پاره خط، فاصله‌هایی حذف می‌شود.

***۴۹.** همین مسأله را برای موردی حل کنید که در نوشتن دهدهی به ترکیب ۳۸ (با همین ردیف) برخورد نکنیم.

***۵۰.** a را نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ M گویند، وقتی که در هرحومهٔ آن، بی‌نهایت نقطهٔ این مجموعه وجود داشته باشد. ثابت کنید که هرنقطهٔ حدی مجموعهٔ کانتوری (صفحهٔ ۱۵۷ را ببینید)، به این مجموعه تعلق دارد. برعکس ثابت کنید که هرنقطه از مجموعهٔ کانتوری، یک نقطهٔ حدی برای آن است. همین حکم را برای مسأله‌های ۴۸ و

۴۹ هم ثابت کنید .

۵۱. ثابت کنید که هر نقطه از پاره خط [۱ ، ۰] ، برای مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای $0 \leqslant r \leqslant 1$ ، یك نقطهٔ حدی است .

۵۲. آیا برای مجموعهٔ عددهای صحیح ،نقطهٔ حدی وجود دارد ؟

۵۳. ثابت کنید که متمم هرمجموعهٔ باز در صفحه ، شامل همهٔ نقطه‌های حدی خود است .

۵۴. ثابت کنید که اگرمجموعه‌ای شامل همهٔ نقطه‌های حدی خودش باشد، متمم آن یك مجموعهٔ باز است .

۵۵. نمونهٔ مجموعه‌هایی واقع برصفحه ذکر کنید که :

الف) نقطه‌های مرزی نداشته باشند ،

ب) نقطه‌های مرزی داشته باشند ، ولی هیچکدام از این نقطه‌ها به مجموعه تعلق نداشته باشند .

ج) شامل نقطه‌های مرزی خود باشند ،

د) فقط از نقطه‌های مرزی تشکیل شده باشند ،

ه) تنها شامل قسمتی از نقطه‌های مرزی خود باشند .

۵۶. نمونهٔ مجموعه‌هایی درفضا بسازید که خاصیتهای الف تا ه از مسألهٔ ۵۵ را داشته باشند .

۱

امروز دیگر می‌دانیم که از لحاظ منطقی می‌توان تقریباً همهٔ ریاضیات معاصر را از یك سرچشمه، یعنی نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجه گرفت

ن. بورباکی

تأثیر بی‌اندازهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در پیشرفت ریاضیات نیم‌قرن اخیر، چیزی است که‌امروز همه به‌آن اعتقاد دارند.

پ. س. آلکساندروف
آ. ن. کولموگوروف

نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور جدی در بسیاری از رشته‌های ریاضیات نفوذ کرده و برآنها اثر گذاشته است؛ و به‌خصوص نقش اصلی در بررسیهای مربوط به‌بنیانهای منطقی و فلسفی ریاضیات داشته است

ر. کورانت

عضوهای مجموعه‌ها را می‌توان از متنوع‌ترین چیزها انتخاب کرد: کتابها، اتمها، عددها، تابعها، نقطه‌ها، زاویه‌ها و غیره. به‌همین مناسبت، از همان شروع کارروشن است که نظریهٔ مجموعه‌ها، چه وسعت فوق‌العاده‌ای دارد و چگونه در رشته‌های گوناگون دانش بشری (ریاضیات، مکانیك، فیزیك) به‌کار می‌رود.

ن. ن. لوزین

قانونهایی که برعددهای نامتناهی ترانسفینی حکومت می‌کند، از بیخ و بن با قانونهای حوزهٔ عددهای متناهی، فرق دارد

ژ. کانتور

۲۲۵ ریال