Der erste

Unterricht in der Raumlehre.

Ein methodischer Leitfaden

für die unteren Klassen höherer Lehranstalten,

sowie für die Volksschule

in heuristischer Darstellung bearbeitet

von

Dr. Max Simon,

Seminarlehrer in Berlin.

Mit 58 in den Text gedruckten Figuren.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1889.

Preis 50 Pfennig.

Der erste

Unterricht in der Raumlehre.

Ein methodischer Leitfaden

für die unteren Klassen höherer Lehranstalten,

sowie für die Volksschule

in heuristischer Darstellung bearbeitet

von

Dr. Max Simon,
Seminarlehrer in Berlin.

Mit 58 in den Text gedruckten Figuren.

Springer Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1889

ISBN 978-3-662-38734-4 ISBN 978-3-662-39621-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-39621-6

Vorwort.

Es darf heutzutage als eine unabweisbare Forderung hingestellt werden, daß dem wissenschaftlichen Unterrichte in der Geometrie ein vorbereitender Kursus vorangehen müsse. Dieser hat vor allem das Anschauungsvermögen des Schülers, eine gewisse Fertigkeit im Messen und Zeichnen, sowie die Fähigkeit, logische Schlüsse in knapper Form auszudrücken, in entsprechender Weise vorzubilden.

Daß diesem Zwecke am besten die sogenannte Formenlehre als Lehrstoff dient, haben Pädagogen wie Pestalozzi, Diesterweg, Harnisch u. a. längst dargethan; doch sind nur wenige der neueren Lehrbücher diesen Vorbildern gefolgt, so daß es noch immer an einem geeigneten Leitfaden fehlt, um an der Hand desselben in einem halbjährigen oder jährigen Kursus das gedachte Ziel zu erreichen.*)

In wie weit das vorliegende Büchlein den berechtigten Anforderungen entspricht, mögen Sachkundige beurteilen; doch hat eine langjährige Erfahrung erwiesen, daß ein solcher Lehrgang wohl imstande ist, das Interesse für den Gegenstand zu wecken und wach zu halten, sowie das mathematische Denk- und Sprechvermögen zu entwickeln.

Der Unterricht lehnt sich an die Betrachtung wirklicher Körper (Modelle) an. Die Begriffe der Fläche, Kante, Ecke (Figur, Linie, Punkt) werden aus der unmittelbaren Anschauung gewonnen.

*) Vergl. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin, Grote. 1886. — „Der propädeutische Unterricht“ § 41.

Die Schüler werden angeleitet, die angeschauten Figuren nachzuzeichnen und andere nach bestimmten Maßangaben zu konstruieren. Sie lernen dabei die wichtigsten Eigenschaften der geometrischen Gebilde und deren Berechnungsweisen kennen und in mannigfachen Übungsaufgaben fürs praktische Leben nutzbar machen.

Überall wird dabei Lineal, metrisches Maßlineal, Zirkel und Transporteur in Anwendung gebracht und dadurch in der Handhabung derselben die nötige Fertigkeit angestrebt. Ein Vorwegnehmen der eigentlichen planimetrischen Lehren und ihrer strengen Beweise wird jedoch grundsätzlich möglichst vermieden.

Neben der Zeichnung geometrischer Figuren ist der Berechnung derselben besondere Aufmerksamkeit geschenkt, weil solche Berechnungen erfahrungsmäßig am besten geeignet sind, die Form- und Größenverhältnisse zur klaren Auffassung zu bringen, zudem sind sie es gerade, die von den Lehren der Geometrie im praktischen Leben am meisten Anwendung finden. Da wo auch der Rechenunterricht in der Hand des Geometrie-Lehrers ist, werden viele hier gegebene Aufgaben dort ihre Erledigung finden können, und es dürften an Stelle derselben eine größere Zahl der im Anhange behandelten Konstruktionsaufgaben heranzuziehen sein. Entbehrlich sind die genannten Rechenaufgaben um so weniger, als für viele Schüler dieser erste Unterricht der einzige bleibt, und auch eine große Zahl von Zöglingen höherer Schulen die oberen Klassen nicht erreicht, so daß sie, wenn nicht auf dieser Stufe, die Berechnung der Flächen und Körper gar nicht kennen lernen würden.

Was die Form der Darstellung betrifft, so darf angenommen werden, daß der erfahrene Lehrer, auch ohne sich durch das Buch darauf hingewiesen zu sehen, beim mündlichen Unterricht die heuristische Methode anwenden wird, und wenn er sich dabei auch nicht an die hier gestellten Fragen wird binden wollen, so kann es ihm doch nur erwünscht sein, daß, bei der häuslichen Wiederholung des in der Schule Gelernten, an den Schüler ähnliche Fragen herantreten, wie die in der Schule gehörten; die Selbstthätigkeit wird dadurch von neuem geweckt und ein mechanisches Auswendiglernen unverstandener Sätze vermieden. — Das was wirklich auswendig zu lernen ist, ist durch den Druck besonders hervorgehoben.

Die zahlreichen Figuren im Texte sollen zunächst die in Worte gekleideten Sätze dem Auge veranschaulichen; bei der Wiederholung lassen sich dann umgekehrt diese Sätze an den Figuren leicht entwickeln, und endlich dienen dieselben als Muster zu sauberen Nachzeichnungen. Die seinem größern Lehrbuche*) entnommenen sechs Schlußaufgaben über Zerlegung flächengleicher Figuren glaubt der Verfasser auch hier am Platze und empfiehlt dieselben freundlicher Beachtung.

Berlin, November 1888.

M. H.

*) Geometrie für höhere Bürgerschulen und Lehrerseminarien. Ein methodischer Leitfaden in heuristischer Darstellung. 3. Aufl. Breslau, Ferd. Hirt. 1888.

Siehe auch des Verfassers Aufsatz in d. Zeitschr. f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterr. XIX. S. 401.

Inhalt.

Erster Abschnitt. Körperbeschreibung und Flächenberechnung.

Zweiter Abschnitt. Rauminhalt der Körper.

Anhang.

Erster Abschnitt.

Körperbeschreibung und Flächenberechnung.

I. Der Würfel und das Quadrat.

1. Der vorgezeigte Körper (s. auch Fig. 1) hat die Gestalt eines bekannten Spielzeuges; man nennt ihn daher einen **Würfel.**

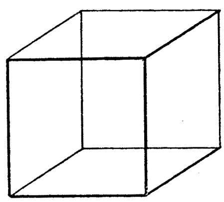

Fig. 1.

Was wir äußerlich an dem Würfel, wie an jedem andern Körper wahrnehmen (mittels des Gesichts- oder Tastsinnes), ist die **Oberfläche** des Körpers.

Aus **wieviel** Teilen besteht die Oberfläche des Würfels?

Die Teile der Oberfläche nennt man **Flächen.**

Aus **wieviel** Flächen besteht also die Oberfläche des Würfels, oder: von wieviel Flächen wird der Würfel begrenzt?

2. Da, wo zwei Flächen zusammenstoßen, entsteht eine **Kante** oder **Linie.**

Von **wieviel** Kanten wird jede Fläche des Würfels begrenzt?

Wieviel Kanten hat der Würfel im ganzen? wieviel unten? wieviel oben? wieviel an den Seiten? wieviel liegende? wieviel stehende? (wagerechte, senkrechte).

3. Da, wo zwei oder mehrere Kanten zusammenstoßen, entsteht eine **Ecke** oder ein **Punkt.**

Von **wieviel** Ecken wird jede Kante begrenzt?

Wieviel Ecken hat der Würfel? wieviel unten? wieviel oben?

4. **Wieviel** Ecken hat jede Fläche des Würfels?

Eine Fläche (Figur), welche vier Ecken hat, heißt ein **Viereck.**

Warum heißt ein Viereck auch vierkantig?

Wo finden sich sonst noch viereckige oder vierkantige Flächen? (im Zimmer? draußen?)

Miß die Länge einer Kante des Würfels (mittels eines Centimetermaßes, eines Zirkels oder auch eines Papierstreifens) und vergleiche die Länge der einen Kante mit den Längen der übrigen.

Wie zeigen sich sämtliche Kanten des Würfels in bezug auf ihre Länge?

Alle Kanten des Würfels sind gleich lang.

5. Aufgabe 1. Zeichne eine Linie, die so lang wie eine Würfelkante ist.

Aufgabe 2. Zeichne Linien von 1 cm, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 cm Länge.

Aufgabe 3. Versuche ein Viereck zu zeichnen, das genau so aussieht, wie eine Würfelfläche. Achte dabei auf die Stellung der Linien zu einander.

Der Raum zwischen zwei zusammenstoßenden Linien heißt ein **Winkel.**

Die beiden Linien, welche den Winkel einschließen, heißen **Schenkel** des Winkels.

Der Punkt, von dem die Schenkel ausgehen, heißt der **Scheitelpunkt** des Winkels.

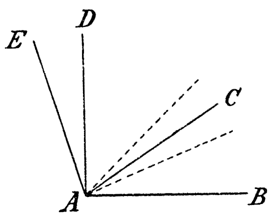

Fig. 2.

6. Aufgabe 4. Ziehe von einem Punkte, der A heißen möge, zwei Linien, AB und AC; der von diesen Linien gebildete Winkel heißt BAC oder auch CAB (nicht anders): der Scheitelpunkt muß immer in der Mitte genannt werden. — Denke den einen Schenkel, z. B. AC, um den Punkt A drehbar, so daß der Winkel enger und weiter, d. h. kleiner und größer gemacht werden könne.*)

Wird der Winkel so groß, wie die im Würfelviereck, so ist es ein **rechter** Winkel.

Ein Winkel, der **kleiner** ist als ein rechter, heißt **spitz,** ist er **größer** als ein rechter, so heißt er **stumpf.**

Anmerkung. Zum Zeichnen eines rechten Winkels kann man sich eines

*) Mit zwei dünnen Stäbchen kann dies gut veranschaulicht werden.

(rechten) Winkelhakens*) bedienen. Zum genaueren Winkelmessen dient der **Transporteur**, der in 180° (lies 180 Grad) eingeteilt ist. Der rechte Winkel hat 90°, der spitze weniger und der stumpfe Winkel mehr als 90°.

Aufgabe 5. Zeichne Winkel von 30°, 45°, 60°, 72°, 100°, 135°, 150°.

Ein Winkel von 180° heißt ein **gestreckter** Winkel. Ein rechter Winkel ist die Hälfte des gestreckten.

7. Aufgabe 6. Zeichne nunmehr ein genaues Würfelviereck. (Vergleiche die vordere Fläche in Fig. 1.)

Was gilt von den Kanten oder **Seiten** eines solchen Vierecks? was von den vier Winkeln desselben?

Warum kann man ein solches Viereck gleichseitig nennen? warum auch rechtwinklig?

Ein gleichseitig rechtwinkliges Viereck heißt ein **Quadrat.**

Aufgabe 7. Zeichne Quadrate mit Seiten von 3 cm; 4 cm; 5 cm; 4,5 cm; 5,8 cm; 7 cm.

Wie groß ist der **Umfang** (d. h. die Summe der vier Seiten) eines jeden der gezeichneten Quadrate?

Wie groß ist die Seite eines Quadrats, dessen Umfang ist: 24 cm; 30 cm; 85 cm; 100 cm?

Wie berechnet man den Umfang aus der Seite, und wie die Seite aus dem Umfang des Quadrats?

8. Aufgabe 8. Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 1 cm lang ist (Fig. 3).

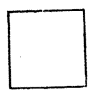
Fig. 3.

Ein Quadrat, dessen Seite 1 cm lang ist, heißt ein **Quadratcentimeter** (1 qcm).

Was ist ein Quadratmillimeter (1 qmm)? was ein Quadratdecimeter (1 qdm)? was ein Quadratmeter (1 qm)? was ein Quadratkilometer (1 qkm)? (was eine Quadratmeile?)

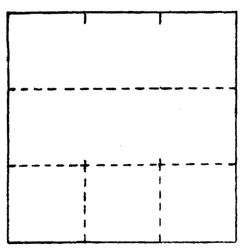
Fig. 4.

9. Aufgabe 9. Zeichne Quadrate mit Seiten von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 cm, und siehe zu, in wieviel Quadratcentimeter sich ein jedes zerlegen läßt (Fig. 4).

*) Einen Winkelhaken erhält man auch durch geeignetes zweimaliges Zusammenfalten eines Blattes Papier.

Warum nennt man 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 die **Quadratzahlen** von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

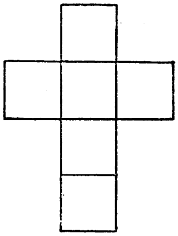

Fig. 5.

Nenne noch mehr Quadratzahlen und die dazu gehörigen Seitenzahlen (oder **Quadratwurzeln**).

10. Aufgabe 10. Zeichne das Netz eines Würfels (Fig. 5) und berechne die Gesamtoberfläche desselben.

II. Die Säule oder das Prisma.

a. Das (gerade) vierseitige Prisma und das Rechteck.

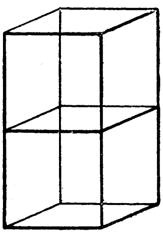

Fig. 6.

11. Setzt man zwei oder mehrere gleich große Würfel genau auf einander, so entsteht ein Körper, den man **Säule** oder **Prisma** nennt.

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat ein solches Prisma?

Was für eine Fläche ist die untere? die obere?

Wodurch unterscheiden sich die Seitenflächen von jenen, die man Grundflächen nennt?

Worin stimmen die Seitenflächen mit den Grundflächen überein?

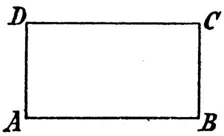

Fig. 7.

Ein rechtwinkliges ungleichseitiges Viereck heißt ein **Rechteck** (Fig. 7).

12. Was gilt von der Größe je zweier Gegenseiten eines Rechtecks? was von je zwei anstoßenden Seiten?

Welche Lage haben die Gegenseiten zu einander?

Zwei Linien, welche **nie** zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge, sind **gleichlaufend** oder **parallel.**

Aufgabe 11. Zeichne zwei parallele Linien von 4 cm Länge.

Zeige an dem Prisma alle parallelen Kanten, auch alle parallelen Flächen.

Wo finden sich sonst parallele Linien und Rechtecke?

13. Warum heißt das besprochene Prisma ein vierseitiges?

Was für Flächen würden entstehen, wenn man dieses Prisma an irgend einer Stelle *parallel* zur *Grundfläche* durchschnitte?

Warum heißt dieses Prisma auch ein *quadratisches*?

Ein Körper, dessen Seitenflächen Rechtecke und dessen Grundflächen Quadrate sind, ist ein **quadratisches** *Prisma.*

14. *Aufgabe* 12. Zeichne Rechtecke, deren *längere* Seiten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 cm und deren kürzere Seiten alle 1 cm lang sind.

In wieviel Quadratcentimeter läßt sich ein jedes der gezeichneten Rechtecke zerlegen?

Aufgabe 13. Vergrößere eines der gezeichneten Rechtecke, z. B. das von 5 cm Länge, derart, daß es 3 cm breit wird (Fig. 8).

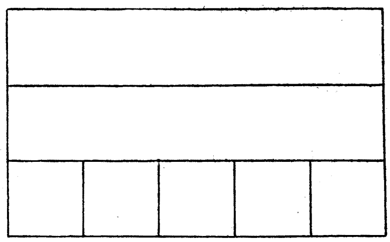

Fig. 8.

In **wieviel** Rechtecke von 5 cm Länge und 1 cm Breite läßt sich das ganze Rechteck zerlegen?

Wieviel Quadratcentimeter enthält ein jedes der drei schmalen Rechtecke? wieviel alle drei?

15. *Aufgabe* 13. Zeichne Rechtecke
deren Länge 6, 7, 9, 12, 15 cm und
deren Breite 2, 4, 5, 7, 12 cm beträgt,
denke dieselben in schmale Rechtecke von je 1 cm Breite zerlegt, und berechne den **Quadratinhalt** eines jeden der gezeichneten Rechtecke.

Man findet den (Quadrat=) Inhalt eines Rechtecks, wenn man die (Maßzahlen der) Länge und Breite mit einander multipliziert.

Nennt man die eine Seite des Rechtecks die **Grundlinie,** so heißt die anstoßende Seite die **Höhe** desselben.

Wie wird also der Inhalt des Rechtecks aus *Grundlinie* und *Höhe* berechnet?

Warum berechnet man den Inhalt eines *Quadrats*, indem man eine Seite *mit sich selbst* multipliziert?

Grundlinie und Höhe schließen einen rechten Winkel ein.

Linien, die einen rechten Winkel bilden, stehen **senkrecht** *oder* **lotrecht** *auf einander.* (Senkblei, Lot).

16. Aufgabe 14. Der Inhalt eines Rechtecks sei:

20 qcm, 35, 48, 50, 74, 100 qcm;

die Grundlinien 5 cm, 7, 9, 13, 28, 75 cm.

Wie groß ist die Höhe jedes dieser Rechtecke?

Wie berechnet man die Höhe eines Rechtecks aus dessen Inhalt und Grundlinie?

Wie berechnet man die Grundlinie eines Rechtecks aus dessen Inhalt und Höhe?

Aufgabe 15. Zeichne zwei Rechtecke von gleichem Inhalt mit verschiedenen Grundlinien.

Aufgabe 16. Zeichne ein Quadrat, das einem Rechteck gleich ist, welches eine Grundlinie von 9 cm und eine Höhe von 4 cm hat.

17. Aufgabe. Miß Grundlinie und Höhe (oder Länge und Breite) verschiedener Rechtecke (im Zimmer, im Freien) und berechne deren Inhalt nach qcm oder auch nach größeren Maßen (Vergl. § 8).

Wieviel qcm hat 1 qm? wieviel qm hat 1 a (Ar)? wieviel qm hat 1 ha (Hektar)? u. s. w.

18. **Wie** groß ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt ist: 16 qm; 49, 100, 144, 225, 400 qm?

Um aus dem Inhalt eines Quadrats die Seite zu berechnen, muß man eine Zahl suchen, die, mit sich selbst multipliziert, den Inhalt giebt. (Vergl. § 9, auch § 7 Ende.)

Anmerkung. Ist aus einer größeren Zahl, z. B. aus 729, die Wurzel zu berechnen, so erkennt man leicht, daß dieselbe zwischen 20 und 30 liegt. Versucht man es dann mit 25, so giebt 25 × 25 erst 625; 26 genügt auch noch nicht, wohl aber 27. Die Quadratwurzel läßt sich jedoch nicht immer genau durch eine Zahl ausdrücken. Die Wurzel aus 12 liegt z. B. zwischen 3 und 4; sie ist kleiner als 3,5 und größer als 3,4; sie kann aber auch noch näher berechnet werden. Da 3,5 zu groß und 3,4 zu klein ist, so versucht man es mit 3,45 (3,45 × = 3,45 11,9025), das der Wahrheit schon nahe kommt; noch genauer ist 3,46 (11,9716). 3,47 gäbe schon 12,0309.

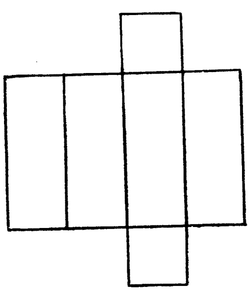

Fig. 9.

Wie findet man aus dem Umfang des Quadrats dessen Seite? (Keine Verwechselung!)

19. Aufgabe 18. Zeichne das Netz eines quadratischen Prismas und berechne dessen Oberfläche (Fig. 9).

20. Legt man ein quadratisches Prisma auf eine Seitenfläche, so hat man ein rechtwinkliges Prisma.

Ein Körper, dessen Grundflächen Rechtecke und dessen Seitenflächen rechtwinklige Vierecke sind, ist ein **rechteckiges Prisma.**

Anmerkung. Die Seitenflächen eines rechteckigen Prismas sind entweder alle vier Rechtecke oder teils Rechtecke, teils Quadrate.

Welche Kanten eines rechteckigen Prismas muß man messen, um dessen Oberfläche berechnen zu können?

Aufgabe 19. Zeichne das Netz eines rechteckigen Prismas.

Wo finden sich rechteckige Prismen? (Fast an allen Möbeln).

Anmerkung. Außer den quadratischen und rechteckigen Prismen giebt es auch solche vierseitige Prismen, deren Grundflächen unregelmäßige Vierecke sind. Knifft man ein Blatt Papier dreimal ein, so daß vier ungleiche Rechtecke entstehen, so kann man damit ein unregelmäßig vierseitiges Prisma veranschaulichen.

Ein Prisma von geringer Höhe, bei dem also die Grundflächen viel größer als die Seitenflächen sind, heißt eine **Platte** oder **Tafel.**

b. Das (gerade) dreiseitige Prisma und das Dreieck.

21. Denkt man sich ein vierseitiges Prisma durch einen Schnitt, der längs zweier nicht benachbarter Seitenkanten geführt wird, in zwei Körper zerlegt, so erhält man **dreiseitige** Prismen.

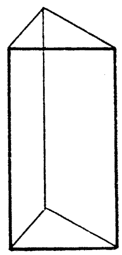

Fig. 10.

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat ein dreiseitiges Prisma? wieviel Grundflächen? wieviel Seitenflächen?

Was für Flächen sind die Seitenflächen?

Was für Flächen sind die Grundflächen?

Was für Flächen sind die den Grundflächen parallelen Querschnitte?

Sind die Kanten der Grundfläche gleich groß, so bilden sie ein gleichseitiges Dreieck, und das Prisma heißt dann ein gleichseitiges.

22. Aufgabe 20. Ziehe eine Linie AB von 3 cm und versuche über AB ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. (Benutzung des Zirkels Fig. 11).

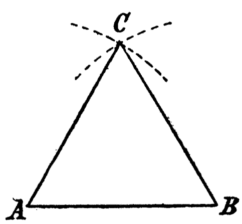

Fig. 11.

Zeichne noch andere gleichseitige Dreiecke und miß deren Winkel.

23. Aufgabe 21. Zeichne einen beliebigen Winkel. Mache die Schenkel BA und

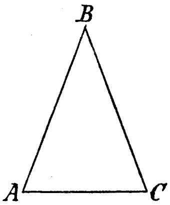

Fig. 12.

BC gleich lang, z. B. je 4 cm, und bilde mit der Linie AC das Dreieck BAC.

Ein Dreieck, das zwei gleiche Seiten hat, heißt **gleichschenklig.** Der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel heißt der Winkel an der **Spitze,** und die der Spitze gegenüberliegende Seite heißt die **Grundlinie** des gleichschenkligen Dreiecks.

Wie heißen die Winkel an der Grundlinie in dem gezeichneten Dreieck?

Miß dieselben und vergleiche ihre Größe mit einander.

Wodurch unterscheidet sich das gleichschenklige Dreieck von dem gleichseitigen?

24. Aufgabe 22. Zeichne ein Dreieck mit drei ungleichen Seiten — ein **ungleichseitiges** Dreieck.

Wie sind die Winkel desselben?

Wie viel Arten von Dreiecken giebt es (mit Rücksicht auf die Seiten)?

Aufgabe 23. Zeichne Dreiecke, deren Seiten sind:
a. 3, 5, 7 cm; b. 4, 5, 6 cm; c. 3, 4, 5 cm; d. 3, 4, 6 cm.

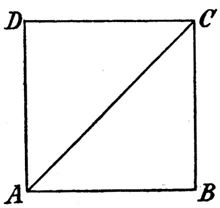

Fig. 13.

25. Aufgabe 24. Zeichne ein Quadrat ABCD (Fig. 13) und verbinde zwei gegenüberliegende Ecken mit einander, z. B. A mit C.

Die Linie, welche zwei Ecken einer Figur verbindet, ohne eine Seite der Figur zu sein, heißt eine **Diagonale.**

Wieviel Diagonalen lassen sich in einem Viereck ziehen? (Wieviel in einem Dreieck?)

Wie heißen die beiden Dreiecke, in die das Quadrat durch die Diagonale geteilt ist?

Was für Dreiecke sind es? (§ 23.)

Was für Winkel hat jedes dieser Dreiecke?

Ein Dreieck, das einen rechten Winkel (und zwei spitze) hat, heißt **rechtwinklig.**

Was für Dreiecke erhält man, wenn man in einem Rechteck eine Diagonale zieht?

26. Aufgabe 25. Zeichne einen stumpfen Winkel und verbinde die Endpunkte der Schenkel.

Was für Winkel enthält das Dreieck außer dem stumpfen? (Fig. 14.)

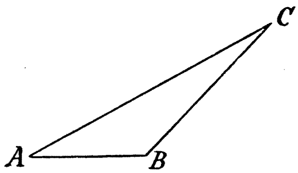

Fig. 14.

Was ist ein **stumpfwinkliges** Dreieck?

Was ist ein **spitzwinkliges** Dreieck?

Was für ein Dreieck ist das gleichseitige in Bezug auf die Winkel?

Wieviel Arten von Dreiecken giebt es in Bezug auf die Winkel? wieviel in Bezug auf die Seiten?

Nenne die sechs Arten von Dreiecken.

27. Aufgabe 26.

Zeichne ein gleichseitiges Dreieck.
" " gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck.
" " " stumpfwinkliges "
" " " spitzwinkliges "
" " ungleichseitig rechtwinkliges "
" " " stumpfwinkliges "
" " " spitzwinkliges "

28. Aufgabe 27. Zeichne zwei gleiche gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke. (Fig. 15.)

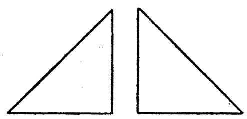

Fig. 15.

Wie muß man diese Dreiecke auf einander legen, damit sie sich vollständig decken?

Wie kann man sie an einander legen, damit sie ein Quadrat bilden?

Wie, damit sie zusammen ein Dreieck bilden?

Was für ein Dreieck ist dies: a) in Bezug auf die Seiten, b) in Bezug auf die Winkel?

29. Aufgabe 28. Zeichne zwei gleiche ungleichseitig rechtwinklige Dreiecke.

Was für Figuren entstehen durch die verschiedenartige Aneinanderlegung dieser Dreiecke?

Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die den rechten Winkel einschließenden Seiten die **Katheten,** und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die **Hypotenuse.**

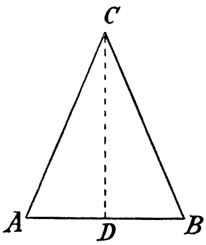

Fig. 16.

30. Aufgabe 29. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ACB so, daß AB die Grundlinie bildet.

Was für eine Linie muß man von der Spitze C aus ziehen, um das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige zu zerlegen?

Wie muß man diese Dreiecke auf einander legen, damit sie sich decken?

Die Linie, welche die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet, steht **senkrecht** auf dieser und heißt die **Höhe** des gleichschenkligen Dreiecks.

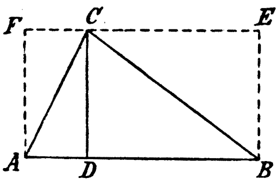

Fig. 17.

31. Aufgabe 30. Zeichne ein beliebiges Dreieck ACB (Fig. 17), so daß die größte Seite AB die Grundlinie wird. Fälle von C das Lot CD auf AB. Dies ist die Höhe des Dreiecks.

In **welche** zwei rechtwinklige Dreiecke heißt ACB zerlegt?

Wie läßt sich jedes Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen?

Zeichne auf derselben Grundlinie AB ein Rechteck, das dieselbe Höhe wie das Dreieck hat.

Der wievielte Teil ist das Dreieck ACD von dem Rechteck AFCD?

Der wievielte Teil ist das Dreieck BCD von dem Rechteck BECD?

Der wievielte Teil ist also auch das ganze Dreieck ACB von dem ganzen Rechteck AFEB?

Wie groß wäre der Inhalt des Rechtecks AFEB, wenn die Grundlinie AB = 5 cm und die Höhe CD = 3 cm wäre?

Wie groß wäre dann der Inhalt des Dreiecks ACB?

Aufgabe 31. **Wie** groß wäre der Inhalt des Dreiecks, wenn
die Grundlinie 3, 4, 7, 12, 18 cm und
die Höhe 4, 7, 9, 11, 17 cm wäre?

Wie findet man den Inhalt eines jeden Dreiecks?

Man findet den **Inhalt eines Dreiecks,** indem man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

Oder auch: Inhalt = Grundlinie mal halbe Höhe
= Höhe mal halbe Grundlinie.

32. Wie läßt sich das Rechteck ABEF (Fig. 17) in zwei gleiche Rechtecke zerlegen?

Warum muß jedes dieser Rechtecke denselben Inhalt wie das Dreieck ACB haben?

Aufgabe 32. Zeichne ein Rechteck das denselben Inhalt wie ein gegebenes Dreieck hat, oder verwandle ein Dreieck in ein Rechteck.

Aufgabe 33. Zeichne ein Rechteck, das 2, 3, 4, 5mal so groß als ein gegebenes ist.

Aufgabe 34. Zeichne ein Dreieck, das 2, 3, 4, 5mal so groß als ein gegebenes ist.

Aufgabe 35. Teile ein gegebenes Rechteck in 2, 3, 4, 5 gleiche Teile, ebenso ein gegebenes Dreieck.

Aufgabe 36. Zeichne ein Rechteck, das 6mal so groß als ein gegebenes Dreieck ist.

Aufgabe 37. Versuche ein Quadrat zu zeichnen, das doppelt so groß als ein gegebenes ist!

Warum ist das Quadrat der Diagonale ACEF (Fig. 18) doppelt so groß als das kleinere Quadrat ABCD? oder: das Hypotenusenquadrat doppelt so groß als das Kathetenquadrat.

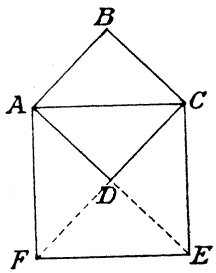

Fig. 18.

In welchen rechtwinkligen Dreiecken ist dies immer der Fall, in welchen nicht?

Wie berechnet man die Diagonale eines Quadrats aus seiner Seite?

33. Aufgabe 38. Zeichne auf der Grundlinie AB ein gleichschenkliges Dreieck ACB (Fig. 19) und unterhalb derselben Grundlinie ein ebenso großes gleichschenkliges Dreieck ADB.

Was gilt von den Seiten des dadurch entstandenen Vierecks ACBD? was von den Winkeln?

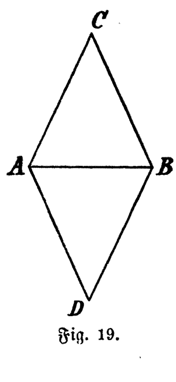

Fig. 19.

Ein gleichseitiges Viereck mit schiefen (nicht rechten) Winkeln heißt eine **Raute** (ein Rhombus).

Wodurch unterscheidet sich die Raute vom Quadrat?

Man kann die Raute ein verschobenes Quadrat nennen.

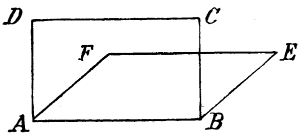

Fig. 20.

Werden die Seiten eines Rechtecks schiefwinklig verschoben, so bleiben die gegenüberliegenden Seiten immer noch parallel. (Fig. 20.)

Ein Viereck mit parallelen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

Warum sind Quadrate, Rechtecke und Rauten auch Parallelogramme?

Gewöhnlich nennt man nur das ungleichseitig schiefwinklige Viereck mit parallelen Gegenseiten Parallelogramm.

Wie sind die gegenüberliegenden Winkel eines jeden Parallelogramms?

Wiederholung: **Was** ist ein gleichs. rechtw. Parallelogramm?

" " " ungleichs. " "

" " " gleichs. schiefw. "

" " " ungleichs. " "

Umgekehrt: **Was** ist ein Quadrat? ein Rechteck? eine Raute? ein Parallelogramm?

34. Aufgabe 39. Zeichne zwei gleiche ungleichseitige Dreiecke.

Wie lassen sich diese Dreiecke zu einem Parallelogramm zusammensetzen?

Wie teilt man ein Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke?

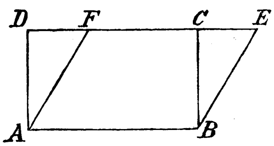

Fig. 21.

35. Aufgabe 40. Zeichne ein Rechteck ABCD (Fig. 21) und auf der größeren Seite AB, als Grundlinie, ein Parallelogramm von gleicher Höhe, ABEF.

Warum muß der Inhalt des Parallelogramms gleich dem des Rechtecks sein?

Wie berechnet man den Inhalt eines Parallelogramms?

Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe — also gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

36. Aufgabe 41. Zeichne ein Quadrat, ein Rechteck, eine Raute und ein Parallelogramm und ziehe in jeder dieser Figuren die beiden Diagonalen.

In welchen Figuren sind beide Diagonalen gleich? in welchen ungleich?

In welchen Figuren stehen die Diagonalen auf einander senkrecht? in welchen schief?

In welchen Figuren werden die Winkel von den Diagonalen halbiert? in welchen nicht?

In welchen Figuren halbieren die Diagonalen einander?

37. Was für ein Viereck entsteht, wenn man die Schenkel eines Winkels ACB (Fig. 22) über den Scheitelpunkt hinaus um sich selbst verlängert, also CD = CA und CE = CB macht, und dann die freien Punkte verbindet?

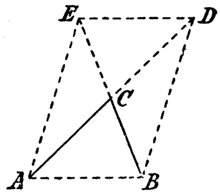

Fig. 22.

Wie müßte der Winkel ACB beschaffen sein, um auf gleiche Weise eine Raute zu liefern?

Wie, um ein Rechteck, wie endlich, um ein Quadrat zu liefern?

Aufgabe 42. Zeichne hiernach einen rechten Winkel (mit alleiniger Benutzung eines Meßlineals).

Aufgabe 43. Ein Quadrat von gegebener Seitenlänge auf diese Art zu zeichnen.

Hat man, wie oben, ein Rechteck ABCD (Fig. 23) gezeichnet, so schneidet man von demselben das Quadrat ABEF ab und zieht darin die Diagonale AE. Jetzt macht man die verlängerten Seiten AB und AF, nämlich AG und AH, so groß wie die gegebene Quadratseite und zieht GH, welche von der verlängerten AE in J getroffen wird. Verlängert man dann AJ um sich selbst bis K, so ist K die vierte Ecke des gesuchten Quadrats.

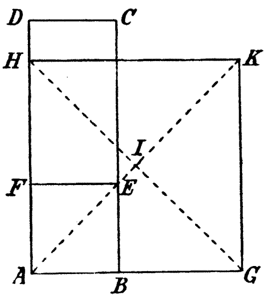

Fig. 23.

Anmerkung. Etwas umständlicher wird die Lösung dieser Aufgabe, wenn die Quadratseite nicht bloß der Länge, sondern auch der Lage nach gegeben ist.

38. Aufgabe 43. Zeichne das Netz eines dreiseitigen Prismas und berechne die Oberfläche desselben.

c. Mehrseitige Prismen und Vielecke.

39. **Was** ist ein fünfseitiges Prisma?

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat ein solches?

Was für Figuren sind die Seitenflächen? was die Grundflächen? was die zu den Grundflächen parallelen Querschnitte?

Was gilt von der Lage und Größe der beiden Grundflächen eines jeden Prismas?

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat ein 6-, 7-, 8-, 12-, 15-, 20-seitiges Prisma?

Welche Prismen haben parallele Seitenflächen?

Was für ein Prisma hat 11 Flächen?

" " " " " 36 Kanten?

" " " " " 30 Ecken?

Um **wieviel** übertrifft die Zahl der Flächen und Ecken zusammen in jedem Prisma die Zahl der Kanten?

40. Um auch die Oberfläche mehrseitiger Prismen berechnen zu können, bedarf es der Berechnung ihrer Grundflächen, also mehrseitiger Figuren oder **Vielecke** (Polygone).

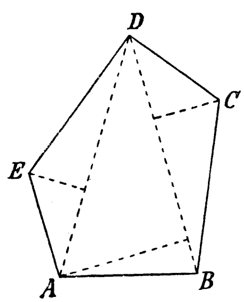

Fig. 24.

Aufgabe 44. Zeichne ein Fünfeck (Fig. 24). Ziehe von einer Ecke (D) aus die möglichen Diagonalen (DA, DB).

Wieviel und welche Dreiecke setzen das Fünfeck zusammen?

Wie berechnet man ein jedes derselben?

Wie findet man den Inhalt des Fünfecks?

Aufgabe 45. Zeichne ein Sechseck, Siebeneck, Achteck u. s. w. und berechne den Inhalt dieser Vielecke.

Aufgabe 46. Zeichne Rechtecke, die denselben Inhalt, wie die obigen Vielecke haben.

III. Die Spitzsäule oder Pyramide.

41. Legt man durch einen Punkt der oberen Grundfläche eines Prismas Schnitte längs der Kanten der untern Grundfläche, so erhält man einen Körper, der nur eine Grundfläche und dieser gegenüber eine **Spitze** hat.

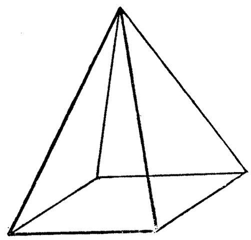

Fig. 25.

Ein solcher Körper heißt eine **Pyramide.**

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat eine vierseitige Pyramide? (vergl. Fig. 25).

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat eine 3=, 5=, 8=, 12=, 20=seitige Pyramide?

Was für Flächen sind die Seitenflächen?

Welche Pyramide hat 8 Flächen? welche hat 8 Kanten? welche hat 8 Ecken?

Vergleiche die Zahl der Flächen und Ecken zusammen mit der Zahl der Kanten (§ 39 Ende).

Aufgabe 47. Zeichne das Netz einer dreiseitigen Pyramide und berechne deren Oberfläche.

42. Aufgabe 48. Zeichne das Netz einer dreiseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten und bilde daraus den Körper.

Warum gewährt diese Pyramide immer denselben Anblick, welche Fläche man auch als Grundfläche nimmt?

Ein Körper, der lauter gleiche Kanten, gleiche Flächen, gleiche Winkel und gleichkantige Ecken hat (d. h. wo in jeder Ecke gleich viel Kanten zusammentreffen), heißt **regelmäßig.**

Warum nennt man die regelmäßige dreiseitige Pyramide ein regelmäßiges **Vierflach?**

Warum ist auch der Würfel ein regelmäßiger Körper, und zwar ein **Sechsflach?**

43. Aufgabe 49. Zeichne das Netz einer quadratischen vierseitigen Pyramide, deren Kanten alle gleich sind. Bilde aus diesem Netz den Körper. Verfertige noch einen zweiten ganz gleichen Körper und setze beide mit den Grundflächen genau aneinander.

Warum erhält man so ein regelmäßiges **Achtflach?**

44. Außer den genannten drei regelmäßigen Körpern giebt es überhaupt nur noch zwei: das **Zwölfflach** und das **Zwanzigflach.** Jenes wird von 12 Fünfecken, dieses von 20 Dreiecken begrenzt.*)

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat jeder der fünf regelmäßigen Körper?

Wie berechnet man die Oberflächen der regelmäßigen Körper?

IV. Der Cylinder (die Rundsäule, Walze) und der Kreis.

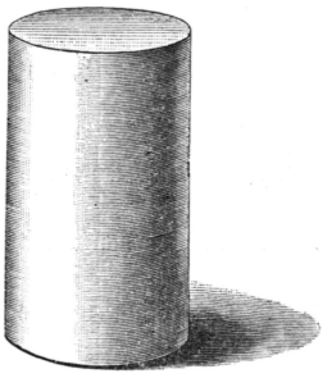

Fig. 26.

45. Sieht man ein vielseitiges Prisma aus der Ferne an, oder läßt man es sich schnell drehen, so verschwinden die Seitenkanten, und die Seitenflächen bilden eine einzige gekrümmte Fläche. — Auch die Ecken der Grundflächen verschwinden, und sämtliche Grundkanten bilden eine einzige krumme Linie, einen **Kreis.**

Ein Körper, der zwei gleiche kreisrunde Grundflächen und eine gekrümmte Seitenfläche hat, heißt **Cylinder.**

Steht der Cylinder auf einer seiner Grundflächen, so nennt man ihn auch eine **Rundsäule;** liegt er auf (einer Linie) der Seitenfläche, so nennt man ihn auch eine **Walze.**

Ganz niedrige Rundsäulen heißen Scheiben, ganz kurze Walzen heißen Rollen.

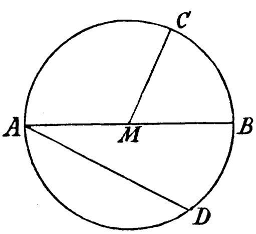

Fig. 27.

46. Aufgabe 50. Zeichne mit einer beliebigen Zirkelöffnung einen **Kreis** (Fig. 27).

Was ist die Kreisfläche? was der Kreisumfang?

Warum heißt der Punkt M, um den der Kreis gezeichnet ist, der **Mittelpunkt?**

Ziehe vom Mittelpunkte aus mehrere gerade Linien nach dem Umfange des Kreises.

---

*) Netze zu den regelmäßigen Körpern enthält der Bogen III von des Verfassers: 5 Bog. Modelliernetze geometrischer Körper. Berlin, Bormann. Preis je 25 ₰.

Warum sind diese Strahlen oder Radien alle einander gleich?

Ziehe von irgend einem Punkte A des Kreisumfanges eine Linie durch den Mittelpunkt, die auf der entgegengesetzten Seite den Umfang in B trifft, also den Durchmesser AB.

Aus **wieviel** Radien besteht der Durchmesser?

Warum sind alle Durchmesser eines Kreises einander gleich?

Warum nennt man den Radius auch Halbmesser?

47. Ziehe vom Punkte A (Fig. 27) noch andere Linien nach dem Umfange, z. B. AD.

Eine Linie, welche irgend zwei Punkte des Kreisumfanges verbindet, heißt eine **Sehne.**

Wodurch unterscheidet sich der Durchmesser von den übrigen Sehnen des Kreises: a) der Lage nach; b) der Größe nach?

Denke den Durchmesser AB (Fig. 28) um den einen Endpunkt B drehbar und beachte, wie die von dem Durchmesser sich abschneidenden Sehnen immer kleiner werden, je größer der Winkel wird, den er mit seiner ursprünglichen Lage einschließt. Wird der Winkel (ABG) ein rechter, so schrumpft die Sehne zu einem Punkt zusammen, und die Linie BG hat mit dem Kreise nur noch diesen einen Punkt gemein, d. h. sie berührt den Kreis in diesem Punkte und heißt nun eine Berührende oder **Tangente** des Kreises.

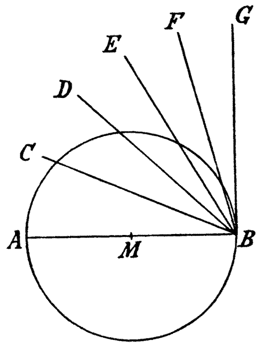

Fig. 28.

Aufgabe 51. An einen Kreis in einem gegebenen Punkte eine Tangente anzulegen.

48. Aufgabe 52. Zeichne in einen Kreis um M (Fig. 29) zwei auf einander senkrechte Durchmesser AB und CD und lege durch die vier Punkte A, B, C, D Tangenten an den Kreis. Das dadurch entstehende Viereck heiße EFGH.

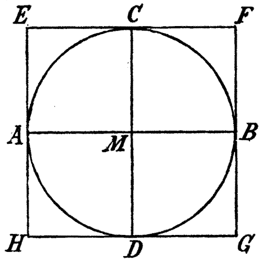

Fig. 29.

Was für ein Viereck ist EFGH?

Man sagt, das Viereck sei dem Kreise umgeschrieben oder nennt es auch ein Tangentenviereck.

Wieviel mal so groß als der Durchmesser ist der Umfang des dem Kreise umgeschriebenen Quadrats?

Warum ist der Kreisumfang stets kleiner als **vier** Durchmesser?

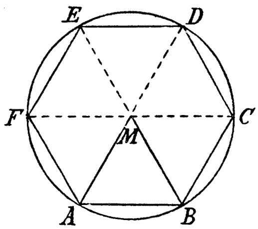

Fig. 30.

49. Aufgabe 53. Zeichne in einen Kreis um M (Fig. 30.) eine Sehne AB gleich dem Radius; ziehe auch die Radien MA und MB.

Was für ein Dreieck ist AMB?

Wieviel Grad hat der Mittelpunktswinkel AMB?

Warum lassen sich in dem Kreise sechs solcher Dreiecke aneinander legen?

Wieviel mal so groß als der Durchmesser ist der Umfang dieses dem Kreise eingeschriebenen Sechsecks?

Warum ist der Kreisumfang größer als **drei** Durchmesser? (Vergleiche § 48.)

Wem kommt der Kreisumfang näher, dem umgeschriebenen Quadrat oder dem eingeschriebenen Sechseck?

Warum ist der Kreisumfang also noch kleiner als $3\frac{1}{2}$ Durchmesser?

Man hat gefunden, daß der Umfang eines jeden Kreises ungefähr 3,14mal so groß als der Durchmesser ist.

Anmerkung: Während die Zahl $3{,}14 = 3\frac{7}{50}$ für die Berechnung des Kreisumfanges noch etwas zu klein ist, ist die Zahl $3\frac{1}{7} = 3\frac{7}{49}$ schon zu groß. Die richtige Zahl, welche zwischen beiden liegen muß, läßt sich nicht ganz genau berechnen: sie wird gewöhnlich mit dem griechischen Buchstaben π (lies pi) kurz bezeichnet.

50. Aufgabe 54. Berechne den Umfang eines Kreises, dessen Radius ist: 4 cm; 5 cm; 7,5 cm; 13,8 cm; 15,25 cm.

Wie läßt sich aus dem Kreisumfange der Durchmesser und dann der Radius berechnen?

Aufgabe 55. **Wie** groß ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang ist: 12,56; 21,98; 34,54; 50; 100 cm?

Aufgabe 56. Wie groß ist der Durchmesser des Erdäquators, wenn dieser 5400 Meilen beträgt?

Aufgabe 57. Wie groß wäre ein kreisförmiger Meridian, wenn die Erdachse 6 Meilen kürzer als der Äquatorial-Durchmesser ist?

Aufgabe 58. Ein Baumstamm hat unten einen Umfang von 3 m, oben einen solchen von 1 m; um wieviel ist er unten dicker als oben?

Aufgabe 59. Es soll ein runder Tisch für 7 Personen gefertigt werden; eine jede Person braucht 50 cm Platz. Wie groß ist der Radius des Tisches?

51. Welche Form muß ein Blatt Papier haben, wenn damit die Seitenfläche oder der **Mantel** eines Cylinders bedeckt werden soll?

Welches ist die Grundlinie des Rechtecks, das der aufgerollte Cylindermantel darstellt? welches die Höhe?

Der Cylindermantel wird berechnet, indem man den Umfang des Grundkreises mit der Höhe multipliziert.

52. Vergleiche in Fig. 29 das Quadrat des Radius mit der Fläche des Kreises.

Warum ist der Flächeninhalt des Kreises kleiner als vier Quadrate des Radius?

Der Inhalt des Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat des Radius mit 3,14 ($3^1/_7$, π) multipliziert.

Nennt man den Radius „r", so ist die Rechenformel für den Inhalt des Kreises: $r \cdot r \cdot \pi$ oder $r^2 \pi$; die für den Umfang: $2 r \pi$.

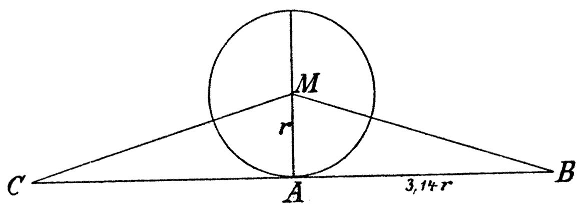

Fig. 31.

Anmerkung. Denkt man sich den Kreis in sehr viele Dreiecke zerlegt, die ihre Spitze im Mittelpunkt und ihre Grundlinien in dem Kreisumfange haben, so sind alle diese Dreiecke zusammen so groß, wie ein einziges Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange, und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist. (S. Fig. 31.) Der Inhalt dieses Dreiecks ist gleich dem halben Umfang mal Radius, also $= r \pi \cdot r$ und das ist: $r^2 \pi$.

Wie berechnet man aus der Fläche des Kreises den Radius desselben?

Aufgabe 60. Berechne die Flächen der in § 50 angegebenen Kreise.

53. Aufgabe 61. Berechne nunmehr die Gesamtoberfläche eines Cylinders,

deſſen Durchmesser: 6; 7; 9; 12; 25 cm und
deſſen Höhe: 9; 12; 5,5; 8,3; 12,9 cm ist.

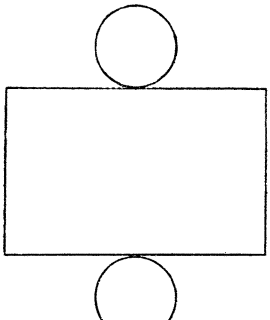

Fig. 32.

54. Denkt man sich die Mitten der Grundflächen eines Cylinders durch eine Linie verbunden, so ist dies die **Achse** des Cylinders.

Wenn die Walze rollt, so dreht sie sich um ihre Achse.

55. Aufgabe 62. Zeichne das Netz eines Cylinders und berechne die Oberfläche desselben. (Fig. 32.)

Wie groß muß die Grundlinie des Rechtecks genommen werden?

V. Der Kegel.

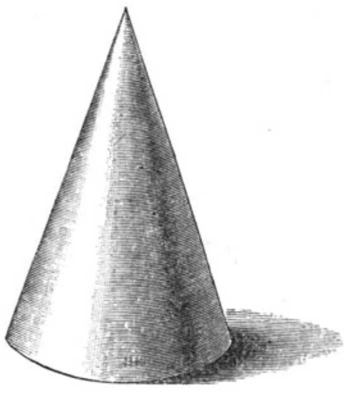

Fig. 33.

56. Wie aus dem Prisma durch Abrundung der Seitenflächen ein Cylinder, so entsteht auf gleiche Weise aus der Pyramide ein **Kegel.**

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat der Kegel?

Gilt für die Zahl der Flächen, Kanten und Ecken des Cylinders und Kegels dasselbe Gesetz, wie (in §§ 39 und 41) für Prisma und Pyramide?

Was für eine Fläche ist die Grundfläche? was die Seitenfläche?

Was ist die Achse des Kegels?

Was ist eine Seitenlinie des Kegels?

Welche Form muß ein Blatt Papier haben, wenn damit der Mantel des Kegels bedeckt werden soll?

Der Teil einer Kreisfläche, welcher von zwei Radien und dem zwischenliegenden Bogen begrenzt wird, heißt **Kreisausschnitt.**

(Ein Kreisabschnitt wird von Bogen und Sehne begrenzt.)

Wie berechnet man den Inhalt eines Kreisausschnittes? (Zerlegung in Dreiecke! Vergl. § 52 Anm.).

Warum ist die Fläche des Kegelmantels gleich dem halben Produkt aus dem Umfange des Grundkreises und der Seitenlinie? ($r \pi s$)

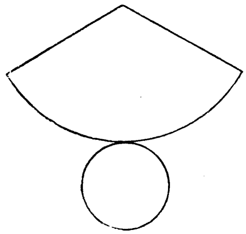

Fig. 34.

57. Aufgabe 63. Zeichne das Netz eines Kegels und berechne die Oberfläche desselben. (Fig. 34.)

Anmerkung. Um das Netz richtig zu zeichnen, muß man den Bogen des Kreisausschnitts gleich dem Umfang des Grundkreises machen. Dazu ist nötig, den Winkel des Kreisausschnitts zu berechnen. Dieser Winkel ist der sovielte Teil von 360^0, wie r von s.

Wie groß müssen r und s genommen werden, damit jener Winkel 90^0, 120^0, 180^0 wird?

58. Macht man am Kegel einen Querschnitt parallel zur Grundfläche, so erhält man außer dem kleinern Kegel noch einen **Kegelstumpf.**

Wie kann man den Mantel des Kegelstumpfs berechnen, wenn der kleine Kegel (die Spitze) auch vorhanden ist?

Wie berechnet man den Mantel des Kegelstumpfs, wenn nur dieser vorhanden ist?

Man multipliziert den mittlern Umfang der beiden Grundflächen mit der Seitenlinie.

Oder: Sind r und r_1 die Radien der Grundkreise, so ist der Mantel des Kegelstumpfs $=$

$$\frac{2 r \pi + 2 r_1 \pi}{2} . s = (r + r_1) \pi s.$$

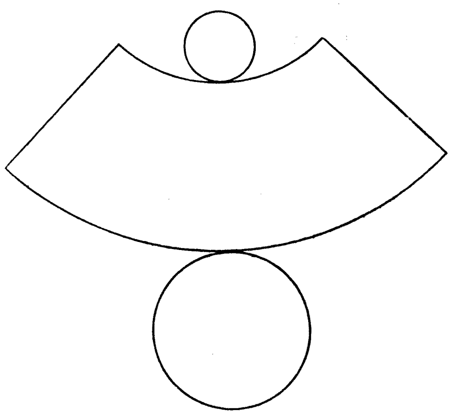

Fig. 35.

59. Aufgabe 64. Zeichne das Netz eines Kegelstumpfs (Fig. 35) und berechne die Oberfläche.*)

*) Netze zum Cylinder, Kegel und Kegelstumpf enthält Bogen II der schon erwähnten Modelliernetze. Bogen I enthält die Netze ebenflächiger Körper.

VI. Die Kugel.

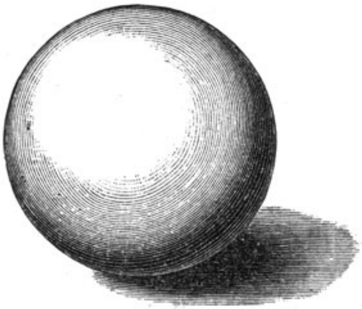

Fig. 36.

60. Wollte man auch die Kugel aus einem ebenflächigen Körper ableiten, so könnte man etwa ein regelmäßiges Zwanzigflach in schnelle Umdrehung versetzen.

Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat die **Kugel**.

Die Oberfläche der Kugel ist eine **allseitig** gleichmäßig gekrümmte Fläche.

Wie ist die Oberfläche eines Eies? wie der Mantel des Cylinders und des Kegels?

Was ist Mittelpunkt, Radius, Durchmesser der Kugel?

Was ist ein größter Kreis auf der Kugeloberfläche? was ein größter Durchschnitt der Kugel? was eine **Halbkugel?**

61. Vergleiche die Größen der beiden Flächen einer Halbkugel mit einander.

Man hat gefunden, daß die **gekrümmte** Fläche der Halbkugel genau **doppelt** so groß als die **ebene** Fläche ist.

Warum ist die Rechenformel für die Kugeloberfläche $4r^2\pi$.

Warum ist die Kugeloberfläche auch gleich dem Mantel eines sie einhüllenden Cylinders von gleicher Höhe?

62. Aufgabe 65. Berechne die Oberfläche einer Kugel, wenn der Radius ist: 5, 7, 9, 15, 30 cm.

Aufgabe 66. Wie groß ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche 113,04 qcm ist?

Aufgabe 67. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn der Durchmesser gleich 1720 Ml.; wie groß, wenn der Umfang gleich 5400 Ml. angenommen wird?

Warum läßt sich von der Oberfläche der Kugel kein ebenes Netz herstellen?

Wiederholung.

Was für ein Körper ist von nur einer Fläche begrenzt? — welcher von zwei Flächen? — welcher von drei Flächen? — welcher von mindestens vier Flächen? — welcher von mindestens fünf Flächen?

Zweiter Abschnitt.

Rauminhalt (Volumen) der Körper.

VII. Rauminhalt des Prismas.

63. Wie Längen (Linien) nur durch Linienmaße, Flächen nur durch Flächenmaße gemessen werden können, so werden Körper durch Körper gemessen.

Das Längenmaß ist eine gerade Linie: cm, m u. s. w.

Das Flächenmaß ist ein Quadrat: qcm, qm, a u. s. w.

Das Körpermaß ist ein Würfel.

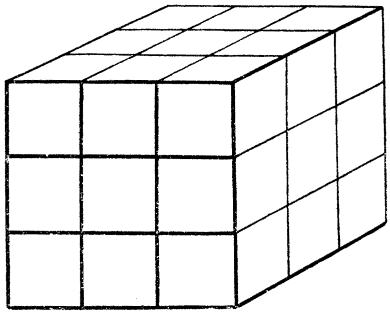

Fig. 37.

Ein Würfel (Kubus), dessen Kanten 1 cm lang sind, heißt ein **Kubikcentimeter.**

Was ist ein Kubikmeter (cbm)? — was 1 cdm? 1 ccm? 1 cmm? 1 ckm? (1 Kubikmeile?)

64. Gesetzt der Würfel, Fig. 37, hätte Kanten von 3 cm Länge, und man teilte denselben in Platten von je 1 cm Höhe:

In **wieviel** ccm ließe sich dann jede der drei Platten, und in wieviel der ganze Würfel zerlegen?

Aufgabe 68. **Wieviel** ccm enthält ein Würfel, dessen Kanten sind: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 cm?

Warum nennt man 8 die Kubikzahl von 2? — warum 125 die Kubikzahl von 5? 1000 die Kubikzahl von 10?

Wie findet man den Rauminhalt eines Würfels aus seiner Seite?

Der Rauminhalt eines Würfels wird gefunden, wenn man die Seite dreimal als Faktor setzt (dreimal mit sich selbst multipliziert).

Wie findet man die Seite eines Würfels aus seinem Rauminhalt?

Um aus dem Rauminhalt eines Würfels die Seite zu finden, muß man eine Zahl suchen, die, dreimal als Faktor gesetzt, den Inhalt giebt.

Aufgabe 69. Ein ccm Wasser wiegt 1 g (Gramm); was wiegt ein Liter Wasser (1 cdm)? — was eine Tonne (1 cbm)?

65. Wie berechnet man den Rauminhalt eines quadratischen Prismas, dessen Grundkante 3 cm und dessen Höhe 5 cm ist?

(Zerlegung in Platten von 1 cm Höhe u. s. w.)

Aufgabe 70. Berechne den Rauminhalt folgender rechteckiger Prismen:

Grundkanten:	5 u. 3 cm;	7 u. 5 cm;	15 u. 12 cm
Höhe:	7 „	8 „	20 „

Welche drei Kanten des rechteckigen Prismas müssen gemessen werden, um dessen Inhalt zu finden?

Der Rauminhalt eines **rechteckigen Prismas** wird gefunden, wenn man **Länge, Breite** und **Höhe** mit einander multipliziert.

Aufgabe 71. Die Kanten eines Würfels seien 8 cm, die Grundkanten eines rechteckigen Prismas 12 und 3 cm; wie hoch muß dieses sein, damit es mit dem Würfel gleichen Inhalt habe?

66. Der Inhalt **eines jeden Prismas** wird gefunden, wenn man dessen **Grundfläche** mit der **Höhe** multipliziert.

Warum haben alle Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleichen Rauminhalt?

Aufgabe 72. Wie berechnet man den Inhalt eines 3-, 5-, 6-, 10-, 15-seitigen Prismas?

VIII. Rauminhalt des Cylinders.

67. Warum ist der Rauminhalt eines Cylinders gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe?

Wann ist ein Cylinder einem Prisma inhaltsgleich?

Was muß man am Cylinder messen, um dessen Rauminhalt berechnen zu können?

Aufgabe 73. Berechne den Rauminhalt der Cylinder § 53.

68. Aufgabe 74. Ein Liter Wasser wiegt 1000 g; wieviel ccm enthält ein Litermaß?

Aufgabe 75. Wie hoch muß ein Litermaß sein, dessen Durchmesser 8, 9, 10 cm ist?

Wieviel qcm Blech ist zur Herstellung dieser Litermaße erforderlich?

Aufgabe 76. Wie groß muß der Durchmesser eines Litermaßes genommen werden, wenn die Höhe desselben 10, 11, 12 cm ist?

IX. Rauminhalt der Pyramide.

69. Legt man bei einem dreiseitigen, gleichseitigen Prisma einen Schnitt durch eine Ecke der obern Grundfläche und durch die gegenüberliegende Kante der untern Grundfläche, so schneidet man eine dreiseitige Pyramide ab, die mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Durch einen zweiten Schnitt läßt sich eine ganz eben solche Pyramide von dem Prisma abschneiden, und der übrig bleibende Körper ist ebenfalls eine dreiseitige Pyramide, die den anderen beiden dem Inhalte nach gleich ist.*)

Warum ist eine Pyramide gleich dem dritten Teile eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe?

Aufgabe 77. Die größte ägyptische Pyramide (die des Cheops) ist 135 m hoch, die Grundkanten sind 226 m lang. Wie groß ist der Rauminhalt derselben?

Aufgabe 78. Wie groß ist der Rauminhalt eines regelmäßigen Achtflachs, dessen Kanten 5 cm lang sind?

X. Rauminhalt des Kegels.

70. Warum ist der Rauminhalt eines Kegels gleich dem einer Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe?

Wie findet man den Rauminhalt eines Kegels?

Aufgabe 79. Berechne den Rauminhalt eines Kegels, dessen Grundfläche einen Durchmesser von: 5, 9, 13, 25 cm hat, und dessen Höhe 7, 12, 18, 30 cm beträgt.

*) Netze zu dieser Dreiteilung des Prismas enthält Bogen IV der oben erwähnten Modelliernetze.

Warum ist der Rauminhalt eines Kegels der dritte Teil von dem eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe?

71. Um den Rauminhalt eines Kegelstumpfs (vergl. § 58) zu berechnen, muß man den Inhalt der abgeschnittenen Spitze von dem Inhalt des ganzen Kegels subtrahieren.

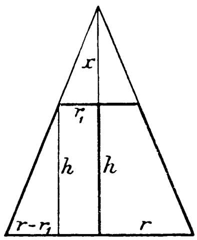

Fig. 38.

Die Höhe dieser Spitze läßt sich aus den beiden Radien der Grundkreise (r u. r_1) und der Höhe des Kegelstumpfs (h) berechnen.

(Fig. 38) Aus $x : r_1 = h : r-r_1$

folgt $x = \frac{h \cdot r_1}{r-r_1}$

Wäre $r = 12$ cm, $r_1 = 7$ cm und $h = 10$ cm,

so wäre $x = \frac{10 \cdot 7}{5} = 14$ cm.

Wie groß wäre dann der Inhalt des Kegelstumpfs?

Anmerkung. Man könnte auch folgendermaßen schließen: Während der Radius von 12 cm um 5 cm abnimmt, wächst die Höhe um 10 cm; bei einer Abnahme von 1 cm würde die Höhe nur 2 cm sein; da bis zur Spitze der Radius um 12 cm abnimmt, muß die Höhe bis auf 12.2 cm anwachsen. Die Höhe des ganzen Kegels wäre also 24 cm, mithin die der Spitze 14 cm.

Annähernd findet man auf leichtere Weise den Rauminhalt des Kegelstumpfs, wenn man den mittleren Querschnitt (dessen Radius gleich der halben Summe der gegebenen Radien ist) mit der Höhe des Kegelstumpfs multipliziert. Dieser Wert ist aber immer zu klein und dies um so mehr, je größer der Unterschied der beiden Radien ist.

72. Aufgabe 74. Berechne (auf beide Weisen) den Inhalt eines Baumstumpfs, dessen unterer Durchmesser 1,5 m, dessen oberer Durchmesser 0,5 m und dessen Länge 5 m beträgt.

Welchen Wert hat das Holz, wenn 1 cbm mit 3,50 ℳ berechnet wird?

XI. Rauminhalt der Kugel.

73. Denkt man sich die Kugel in sehr viele (dreiseitige) Pyramiden zerlegt, die alle ihre Spitzen im Mittelpunkte der Kugel und ihre Grundflächen in der Oberfläche derselben haben, so müssen sie alle zusammen einer Pyramide gleich sein, deren Grundfläche gleich der Oberfläche der Kugel und deren Höhe gleich dem Radius ist.

Welchen Inhalt hat eine solche Pyramide?

Warum ist der Rauminhalt der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$?

Aufgabe 81. Berechne den Rauminhalt der Kugeln § 62.

Aufgabe 82. Wieviel Kubikmeilen enthält die Erde?

74. Vergleiche den Rauminhalt der Kugel mit dem eines sie umhüllenden Cylinders von gleicher Höhe und gleichem Durchmesser.

Wie verhalten sich die Volumina eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders von gleicher Höhe und gleichem Durchmesser?

XII. Rauminhalt der regelmäßigen Körper.

75. Jeder regelmäßige Körper hat einen Mittelpunkt, der gleichen Abstand von allen Ecken und gleichen Abstand von allen Flächen hat.

In **wieviel** gleiche Pyramiden läßt sich jeder der fünf regelmäßigen Körper zerlegen?

Wie berechnet man den Rauminhalt eines regelmäßigen Körpers?

XIII. Schiefe Körper.

76. Bei den bisherigen Berechnungen der Prismen, Cylinder und Kegel sind die Körper so gewählt worden, daß die Seitenkanten der Prismen senkrecht zu den Grundkanten und die Achsen der Cylinder und Kegel senkrecht zu den Grundflächen waren. Ist dies der Fall, so nennt man die Körper **gerade**, sonst heißen sie **schief.**

Bei der Teilung des dreiseitigen Prismas (§ 69) in drei gleiche Pyramiden, waren letztere schief geworden; denn ihre Spitze lag nicht senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Die Berechnung des Rauminhalts schiefer Körper geschieht in gleicher Weise wie die der geraden. Die Berechnung der Oberfläche schiefer ebenflächiger Körper bietet auch keine Schwierigkeit; doch lassen sich die Mäntel schiefer Cylinder und Kegel nur annähernd richtig finden.

XIV. Unregelmäßige Körper.

77. Man kommt oft in die Lage, den Rauminhalt eines ganz unregelmäßigen Körpers, z. B. eines Steines, eines Stückes Metall bestimmen zu müssen; wie verfährt man dabei?

Man legt den Körper in ein Gefäß von bekanntem Rauminhalt, z. B. ein Litermaß und dergl., nnd gießt dann so viel Wasser zu, bis das Gefäß voll ist.

Wie erfährt man auf diese Weise den Rauminhalt des unregelmäßigen Körpers?

Womit hätte man das Gefäß zu füllen, wenn es sich um einen Körper handelte, der im Wasser löslich ist (Steinsalz)?

(**Wie** findet man den Rauminhalt eines Körpers, aus dessen absolutem und specifischem Gewichte?)

78. Den Inhalt eines Eimers berechnet man wie den eines Kegelstumpfs, den eines Fasses annähernd als den zweier gleicher Kegelstumpfe.

Bei ovalen (elliptischen) Gefäßen findet man die Grundfläche, wenn man den längsten Radius mit dem kürzesten multipliziert und dies Produkt noch mit π multipliziert, also $a \,.\, b \,.\, \pi$ berechnet. (Vergl. § 52).

Anhang*).

1. Aufgabe. Eine gerade Linie AB (Fig. 39) zu halbieren.

Man schlägt um A und B gleiche Kreise, die sich in den Punkten C und D schneiden. Die Verbindungslinie CD halbiert dann AB.

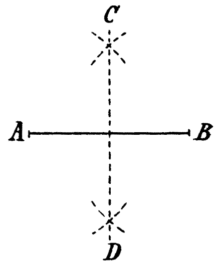

Fig. 39.

2. Eine gerade Linie AB in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Teile zu teilen. (Nach 1.)

3. Eine gerade Linie AB (Fig. 40) in drei gleiche Teile zu teilen.

Man zieht von A aus eine Linie und schneidet auf derselben von A aus drei gleiche Strecken A x = x y = x z ab; dann verbindet man den letzten Teilpunkt z mit B und zieht von den übrigen Teilpunkten aus Parallelen zu z B; dann ist AB in die verlangte Anzahl gleicher Teile geteilt. Ähnlich verfährt man, wenn AB in 5 und mehr gleiche Teile geteilt werden soll.

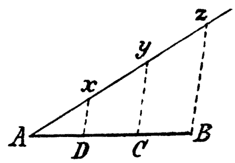

Fig. 40.

4. Einen Winkel A zu halbieren. (Fig. 41.)

Man schlägt um den Scheitelpunkt A einen Kreis, der die Schenkel in den Punkten B und C schneidet. Schlägt man um diese Punkte gleiche Kreise und verbindet einen Durchschnittspunkt D dieser Kreise mit A, so ist der Winkel halbiert.

5. Einen Winkel in 4, 8, 16 gleiche Teile zu teilen. (Nach 4.)

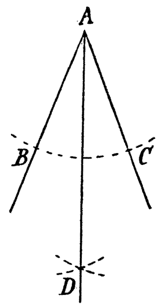

Fig. 41.

*) Auch die Lösungen dieser Aufgaben lassen sich heuristisch entwickeln.

6. Einen Winkel in drei oder eine andere beliebige Zahl gleicher Teile zu teilen.

Man schlägt um den Scheitelpunkt einen Kreis und sucht den zwischen den Schenkeln liegenden Kreisbogen (durch Versuch mit dem Zirkel) in die verlangte Zahl gleicher Teile zu teilen, dann verbindet man die Teilpunkte mit dem Scheitelpunkt des gegebenen Winkels.

(Die Lösung kann nur annähernd richtig werden).

7. Auf einer geraden Linie in einem gegebenen Punkte A ein Lot (eine Senkrechte) zu **errichten.**

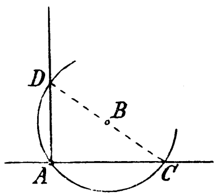

Fig. 42.

Man behandelt die Linie als gestreckten Winkel und halbiert diesen nach 4.

Oder: Man schlägt um irgend einen Punkt B, der außerhalb der Linie liegt, mit dem Radius BA einen Kreis, welcher die Linie in einem zweiten Punkte C schneidet; dann zieht man von C aus den Durchmesser CD und verbindet D mit A, so steht DA senkrecht auf AC. (Fig. 42.)

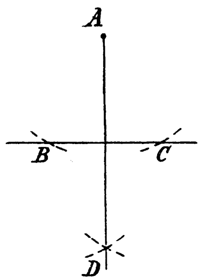

Fig. 43.

8. Von einem Punkte außerhalb einer Linie auf dieselbe ein Lot zu **fällen.** (Fig. 43.)

Man schlägt um den gegebenen Punkt A einen Kreis, der die Linie in den Punkten B und C schneidet; dann schlägt man um diese Punkte gleiche Kreise und verbindet einen Durchschnittspunkt D derselben mit dem Punkte A.

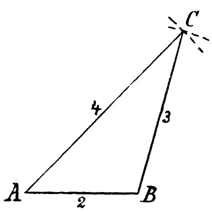

Fig. 44.

9. Ein Dreieck nachzuzeichnen, dessen drei Seiten gemessen werden können. (Fig. 44.)

(Die Seiten seien 2, 3, 4 cm).

Man zieht eine Linie AB von 2 cm, schlägt um A einen Kreis mit einem Radius von 3 cm, um B einen solchen mit einem Radius von 4 cm und verbindet den einen Durchschnittspunkt C dieser Kreise mit A und B.

(Es lassen sich aus 3 Seiten vier Dreiecke zeichnen, die sich durch ihre Lage, nicht aber durch ihre Größe unterscheiden).

10. Einen gegebenen Winkel nachzuzeichnen.

Man verbindet einen Punkt des einen Schenkels mit irgend einem Punkt des andern Schenkels und zeichnet das so entstandene Dreieck nach; dann ist auch der Winkel der gleiche.

(Die Zeichnung vereinfacht sich etwas, wenn man aus dem Winkel ein gleichschenkliges Dreieck macht).

11. Durch einen Punkt A zu einer Linie BC eine Parallele zu ziehen. (Fig. 45.)

Man verbindet den Punkt A mit einem beliebigen Punkte D der Linie BC und legt den Winkel ADB an AD in A nach der entgegengesetzten Seite hin an, so daß Winkel DAE = ADB wird. (Wechselwinkel.) Oder: Man zeichnet das Dreieck ABD so an die andere Seite von AD, daß die gleichen Seiten einander gegenüberliegen.

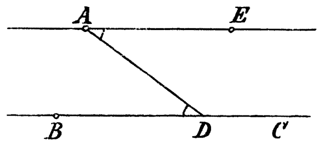

Fig. 45.

12. Ein Dreieck nachzuzeichnen, von dem zwei Seiten und der Zwischenwinkel gemessen werden können. (1,5 cm; 2,6 cm; 40°). (Fig. 46.)

Man zeichnet einen Winkel A von 40°, macht den einen Schenkel AB = 1,5 cm, den anderen AC = 2,6 cm und zieht BC.

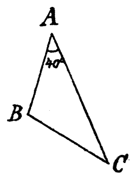

Fig. 46.

13. Ein Dreieck nachzuzeichnen, von dem zwei Seiten und ein anderer als der Zwischenwinkel gemessen werden können. (3 cm; 4 cm, 40°). (Fig. 47 u. 48).

a) Der Winkel liegt der größeren Seite gegenüber. (Fig. 47.)

Man zeichnet eine Linie AB = 3 cm (die kleinere Seite), legt an AB in A den Winkel von 40° an und schlägt um B mit einem Radius von 4 cm einen Kreis, welcher den freien Schenkel des

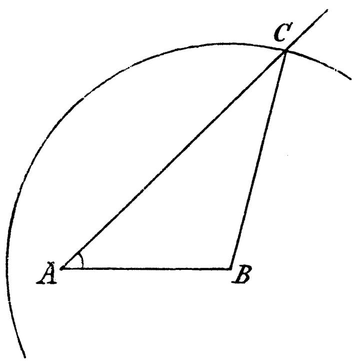

Fig. 47.

Winkels nur in einem Punkte C schneiden kann; dann zieht man BC.

b) Der Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber. (Fig. 48.)

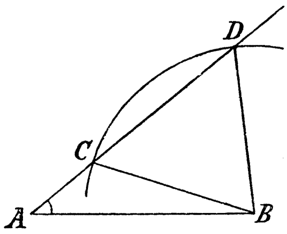

Fig. 48.

Man zieht eine Linie AB = 4 cm (die größere Seite) legt an AB in A den Winkel von 40° an und schlägt um B mit einem Radius von 3 cm einen Kreis. Dieser schneidet den freien Schenkel in zwei Punkten C und D. Verbindet man diese Punkte mit B, so erhält man zwei verschiedene Dreiecke. (Die Aufgabe ist also unbestimmt).

14. Ein Dreieck nachzuzeichnen, von dem eine Seite und zwei Winkel gemessen werden können. (Fig. 49.)

a) Die beiden anliegenden Winkel.

Man zieht eine Linie AB gleich der gemessenen Seite und legt in den Endpunkten die gemessenen Winkel an.

b) Ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel. (5 cm; 60°; 75°.)

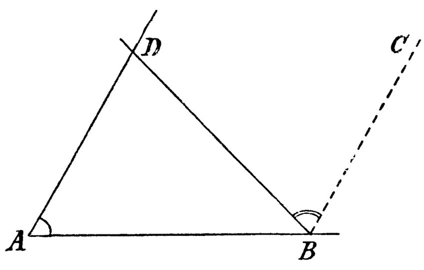

Fig. 49.

Man zieht eine Linie AB von 5 cm, legt an dieselbe in A einen Winkel von 60° an und zieht von B aus eine Parallele BC zu dem freien Schenkel; legt man dann an BC in B nach innen einen Winkel von 75° an, so trifft der freie Schenkel den ersten in einem Punkte D, und Winkel ADB ist auch 75°. (Wechselwinkel.)

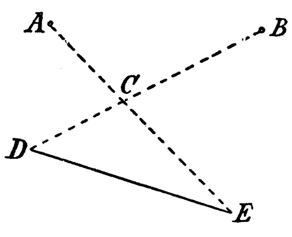

Fig. 50.

15. Eine gerade Linie zu messen, von der nur die Endpunkte (A, B) zugänglich sind. (Fig. 50.)

Man sucht einen Punkt C, dessen

Entfernung von A und B meßbar ist, dann mißt man den Winkel ACB und verfährt nach 12.

16. Eine gerade Linie zu messen, von der nur ein Endpunkt (A) zugänglich ist. (Fig. 51.)

Man sucht einen Punkt C, der sich mit A durch eine gerade Linie verbinden läßt. Nun mißt man AC und den Winkel CAB; dann zeichnet man eine Linie C x, die nach dem Punkt B hin gerichtet ist und mißt auch den Winkel A C x. Jetzt verfährt man nach 14a.

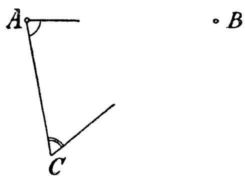

Fig. 51.

17. Ein Viereck nachzuzeichnen (ABCD).

a) Man teilt das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und zeichnet diese nach.

b) Man zieht eine Linie a b = AB, legt an a b in a den Winkel A und an b den Winkel B an, macht bc = Bb und a d = AD und zieht DC.

18. Ein beliebiges Vieleck nachzuzeichnen. Ähnlich wie 17.

19. Ein Dreieck ABC in verjüngtem Maßstabe nachzuzeichnen (Fig. 52).

Man zieht von irgend einem Punkte (a) der Seite AC eine Linie a b parallel AB, so ist a C b das in verjüngtem Maßstabe gezeichnete Dreieck.

Wäre C a = $\frac{1}{3}$ CA, so wäre auch C b = $\frac{1}{3}$ CB und a b = $\frac{1}{3}$ AB u. s. w.

Man sagt, die Seiten des kleinen Dreiecks stehen in demselben Verhältnis zu einander, wie die des großen, oder: die Seiten des kleinen Dreiecks sind denen des großen proportional. Da das kleine Dreieck dieselbe Form, wie das große hat, so sagt man auch: die Dreiecke seien **ähnlich**. Ähnliche Dreiecke haben entsprechend gleiche Winkel.

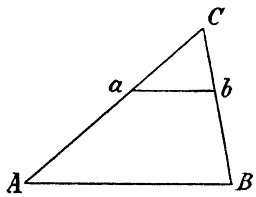

Fig. 52.

20. Ein großes Dreieck mittels des verjüngten Maßstabes zu berechnen.

Gesetzt, ABC wäre das zu berechnende Dreieck, von dem nur die Seite AB und die anliegenden Winkel meßbar wären (80 m, 60° 72°). Man zeichnet eine Linie a b von 8 cm und legt daran die Winkel von 60° und 72°, dann ist das kleinere Dreieck a c b dem Dreieck ACB ähnlich.

Da nun AB 1000 mal so groß ist als a b, so braucht man nur a c und b c zu messen, um zu wissen, daß AC = 1000 a c und BC = 1000 b c ist.

Mißt man dann noch die Höhe des kleinen Dreiecks (c d), so kennt man auch die Höhe des großen Dreiecks und kann dessen Flächeninhalt finden.

21. Die Höhe eines Turmes zu berechnen. (Fig. 53.)

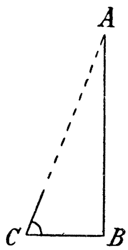

Fig. 53.

AB stelle die Höhe des Turmes dar. Man zieht vom Fuße des Turmes eine Linie BC, die 30 m lang sein möge, dann sieht man von C nach der Spitze des Turmes hin und bestimmt den Winkel BCA, etwa zu 70°, und da der Winkel CBA bekannt ist (ein Rechter), so läßt sich ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck herstellen und das große danach berechnen.

22. Vom Zimmer aus die Entfernung einer Turmspitze zu berechnen.

Man zeichnet im Zimmer auf einem Tische eine (nicht zu kleine) Linie AB, von deren Endpunkten man die Spitze des Turmes (C) sehen kann. Man bestimmt nun die Größe der Winkel CAB und CBA und zeichnet ein Dreieck a b c, das dem Dreieck ABC ähnlich ist. AC ist dann so viel mal a c, als a b in AB enthalten ist.

23. Zeichne ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck.

Wieviel solcher Dreiecke lassen sich um den Scheitelpunkt des rechten Winkels aneinander legen? (Fig. 18.) Was für eine Figur entsteht dadurch?

Wieviel gleichseitige Dreiecke lassen sich um einen Punkt aneinander legen? Was für eine Figur entsteht dadurch? (Fig. 30.) Was gilt von den Seiten und Winkeln so entstandener Figuren?

Merke: Ein Vieleck mit lauter gleichen Seiten und gleichen Winkeln heißt ein **regelmäßiges** Vieleck.

Wieviel Grad betragen alle Winkel um einen Punkt herum?

Wieviel Grad beträgt jeder der Mittelpunktswinkel eines **regelmäßigen Sechsecks, Achtecks, Zwölfecks?**

Wie kann man hiernach ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneck zeichnen?

24. Wie kann man durch Teilung des Kreisumfanges regelmäßige Figuren zeichnen?

25. Zeichne ein Dreieck ACB; halbiere eine Seite, z. B. AB in D und ziehe CD.

Warum sind die Dreiecke ACD und BCD gleich groß (§ 31) (Fig. 54).

Ziehe DF parallel BC und DE parallel AC. Wie läßt sich aus den Teilen des Dreiecks ACD das Dreieck BCD zusammensetzen, und umgekehrt.

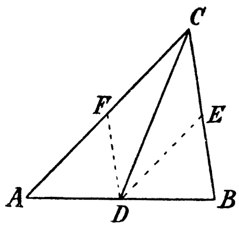

Fig. 54.

26. Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe so zu zerlegen, daß sich aus den Teilen des einen das andere zusammensetzen lasse. (Fig. 55.)

Seien ABCD und ABEF zu zerlegen, so trage man auf AD die Strecke BO, so oft es geht, ab und ziehe von den Teilpunkten G,H Parallelen zu AF. Ebenso trage man auf BE die Strecke AO, so oft es geht, ab und ziehe von den Teilpunkten J,K Parallelen zu BC.

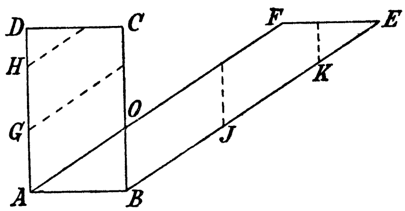

Fig. 55.

27. Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe in obiger Weise zu zerlegen.

Seien ACB und ADB die zu zerlegenden Dreiecke, so ziehe man von E, der Mitte von AC aus, EF parallel AB, dann AJ parallel BD und BK parallel AC. Dadurch wird Dreieck BGK = CGE und das Parallelogramm ABKE = △ ACB. Ebenso wird △ AHJ = DHF und Parallelogramm AJFB = △ ADB.

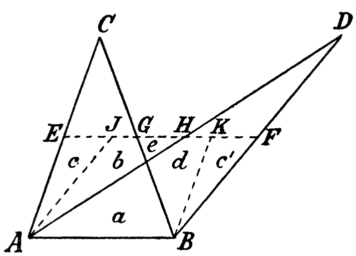

Fig. 56.

Nun besteht $\triangle$ ACB aus den Stücken a, b, c, d, e und $\triangle$ ADB aus den Stücken a, b, c^1, d, e, und da $c = c^1$, so läßt sich aus den Teilen des einen Dreiecks das andere herstellen.

28. Zwei Quadrate so zu zerlegen, daß sich aus den Teilen beider ein einziges Quadrat zusammensetzen läßt. (Fig. 57.)

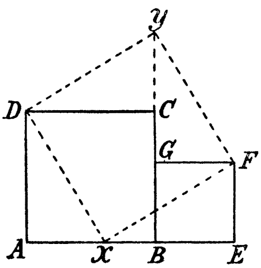

Fig. 57.

Seien ABCD und BEFG die gegebenen Quadrate, so mache man AX = BE und ziehe DX und XF. Bringt man dann das Dreieck DAX in die Lage von DCY und das Dreieck FEX in die Lage von FGY, so das Quadrat DXFY die verlangte Summe der beiden Quadrate. (Pythagoras).

29. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der Differenz zweier Quadrate ist.

Sei (nach Fig. 57) ABCD das kleinere der beiden Quadrate, so schlage man um D mit der Seite des größeren Quadrats einen Kreisbogen, der AB in X schneidet. Vollendet man das Quadrat DXFY, so hat man nur von F Lote auf BC und auf die Verlängerung von AB zu fällen, um in dem Quadrat BEFG die Differenz der beiden Quadrate zu erhalten.

30. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln (Fig. 58).

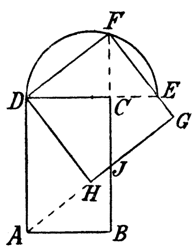

Fig. 58.

Sei ABCD das gegebene Rechteck, so verlängere man die kleinere Seite DC, bis DE = der größeren DA wird, schlage über DE einen Halbkreis und verlängere BC, bis sie den Bogen in F trifft. Ziehe DF und parallel damit AJ, deren Verlängerung die Verlängerung von FE in G trifft, endlich noch DH lotrecht zu AG, so ist DFGH das verlangte Quadrat. Es entsteht durch Verschiebung des Dreiecks DHA in die Lage von FGJ, und des Dreiecks AJB in die Lage von DFC.