Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen

Mathematische Zeitschrift

L. Lichtenstein

Springer

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

Sonderabdruck aus Band 33, Heft 4.

Erich Rothe

Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1931

ISBN 978-3-662-37473-3 ISBN 978-3-662-38238-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-38238-7

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

---

33. Band.

Inhalt:

4. Heft.

Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen.

Von

Erich Rothe in Breslau.

Für die Gleichung

$$(1)\qquad \Delta z - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \left(\Delta z \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial y_i^2}\right)$$

ist, wie bekannt, die Funktion

$$(2)\qquad \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\,\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^n}}\,e^{-\frac{r^2}{4(x-\xi)}} \qquad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\eta_i)^2;\ x \geqq \xi\right)$$

eine Grundlösung. Unter Anwendung sukzessiver Approximationen bewies Gevrey die Existenz einer Grundlösung auch für die allgemeinere Gleichung

$$(3)\qquad \Delta z - \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial z}{\partial y_\nu} + c\,z = 0,$$

indem er die Funktion (2) als erste Approximation benutzte[1]). Auf die Form (3) läßt sich, wenn $n \leqq 2$ ist, durch eine Transformation der Variablen diejenige Gleichung zurückführen, die aus (3) entsteht, wenn man an Stelle von Δ einen allgemeinen linearen elliptischen Differentialausdruck setzt und bei $\frac{\partial z}{\partial x}$ noch einen Koeffizienten zuläßt[2]). Für $n \geqq 3$ ist das jedoch nicht mehr der Fall, da man dann einen elliptischen Ausdruck im allgemeinen nicht auf die Normalform transformieren kann.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Grundlösung für die Gleichung

$$(4)\qquad L(z) - R\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;{}^{3)} \qquad \left[L(z) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)\right]$$

---

[1]) Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journal d. Math., 6. sér., **9** (1913) und **10** (1914), § 75 f. Im Fall $n = 1$ hatte schon Hadamard (C. R. 1911) ebenfalls unter Anwendung sukzessiver Approximationen eine Grundlösung aufgestellt.

[2]) Gevrey, loc. cit. § 41.

[3]) Gl. (1) tritt bekanntlich bei der Behandlung der Wärmeleitung in homogenen isotropen Körpern auf; Gl. (4) entspricht der Wärmeleitung in anisotropen und inhomogenen Körpern.

unter den folgenden Voraussetzungen aufgestellt werden: In einem einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Bereiche $\overline{\overline{T}}$ [4]) des $(y_1, y_2, y_3) = (y)$-Raumes [5]) seien die Koeffizienten a_{ik} und R zweimal stetig differenzierbare Funktionen von y_1, y_2, y_3 allein; es sei dort $a_{ik} = a_{ki}$ und die Form $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$ positiv definit. Ferner sei

$$R \geqq m > 0. \tag{5}$$

Ist dann $\overline{T}$ ein ganz im Innern von $\overline{\overline{T}}$ gelegener Bereich, so wollen wir eine Grundlösung in $\overline{T}$ konstruieren. Genauer gesprochen: es soll eine Funktion $\Gamma(y, \eta, x - \xi)$ mit den folgenden Eigenschaften, die wir als Definition einer Grundlösung in $\overline{T}$ ansehen wollen, angegeben werden.

A. Für $x > \xi$ und jedes im Innern von $\overline{T}$ gelegene Punktepaar y, η ist Γ als Funktion von x, y eine reguläre Lösung von (4), als Funktion von ξ, η eine reguläre Lösung der adjungierten Gleichung

$$L(z) + R\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0. \tag{4*}$$

B. Ist T ein (echter oder unechter) Teilbereich von $\overline{T}$, $\overline{S}$ der Rand von $\overline{T}$ und $\varphi(y)$ eine in $\overline{T} + \overline{S}$ stetige Funktion, so gilt für jeden Punkt $y^{(0)}$ aus $\overline{T}$

$$\lim_{x \to 0} \int_T R(\eta)\,\varphi(\eta)\,\Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\,d\eta = \begin{cases} \varphi(y^{(0)}), \text{ wenn } y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } T, \\ 0, \text{ wenn } y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \overline{T} - T. \end{cases} \tag{6}$$

Wir werden eine Grundlösung folgendermaßen konstruieren: Sind λ_k die Eigenwerte, $u_k(y)$ die normierten Eigenfunktionen des Problems

$$L(u_k) + \lambda_k R\, u_k = 0 \quad \text{in } \overline{T}, \tag{7a}$$

$$u_k = 0 \quad \text{auf } \overline{S}, \tag{7b}$$

so wird sich die Funktion

$$\Gamma(y, \eta, x - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\, u_k(\eta)\, e^{-\lambda_k(x-\xi)} \;{}^{6)} \qquad (x > \xi) \tag{8}$$

---

[4]) Von $\overline{\overline{T}}$ sowie von allen im folgenden auftretenden Bereichen setzen wir voraus, daß der Rand stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar ist.

[5]) Hier, wie im folgenden, ist der Kürze halber y an Stelle von (y_1, y_2, y_3) geschrieben.

[6]) Als Grundlösung von (1) wird im Falle $n = 1$ gewöhnlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{4x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\alpha y\, e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha \tag{*}$$

benutzt. Spezialisiert man anderseits die Reihe (8) auf den Fall $n = 1$ mit dem Intervall $(-l, +l)$ als Bereich $\overline{T}$, so erhält man auf Grund einfacher Rechnung

$$\Gamma(y, 0, x) = \sum_{\substack{k=1,\\3,5\ldots}}^{\infty} \frac{1}{l} \cos\frac{k\pi y}{2l}\, e^{-k^2\pi^2 x/4l^2} = \frac{1}{\pi}\sum \cos\alpha y\, e^{-\alpha^2 x}\,\Delta\alpha$$

$$(\alpha = k\pi/2l;\ \Delta\alpha = \pi/l;\ k = 1, 3, 5\ldots).$$

Die Funktionen (8) und (*) stehen also zueinander in einem ähnlichen Verhältnis wie eine Fouriersche Reihe zu einem Fourierschen Integral. (Anm. bei der Korrektur.)

als Grundlösung erweisen. Eine andere (zum Nachweise der Eigenschaft B geeignetere) Form der Grundlösung (8) wird in § 2 angegeben.

Die Definition einer Grundlösung durch die Eigenschaften A und B wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß sich aus ihnen ohne Mühe eine Formel ergibt, die der sogenannten Fundamentalformel[7]) in der Theorie der Gleichung (1) entspricht (§ 4): Ist T ein einfach zusammenhängender ganz im Innern von $\bar{T}$ liegender Bereich des y-Raumes, ist S der Rand von T, ist ferner $\mathfrak{C}_{x^{(0)}}$ der durch

$$(9) \qquad 0 \leqq x \leqq x^{(0)}, \quad y \prec T$$

gegebene Bereich des vierdimensionalen $(x\,y)$-Raumes, $M_{x^{(0)}}$ sein durch

$$(10) \qquad 0 \leqq x \leqq x^{(0)}, \quad y \prec S$$

gegebener als stetig differenzierbar vorausgesetzter „Mantel", so gilt für jede nebst den auftretenden Ableitungen stetige Lösung $z(x, y)$ der Gleichung

$$(11) \qquad L(z) - R\frac{\partial z}{\partial x} = f,$$

wo f eine stetige Funktion von x, y ist, die Fundamentalformel

$$(12) \quad \int_0^{x^{(0)}}\int_S \sum_{i,k}^{3} a_{ik}\left(\Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)\frac{\partial z}{\partial y_k} - z\,\frac{\partial \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)}{\partial y_k}\right)\cos(y_i\,\nu)\,d\sigma\,dx$$

$$+\int_T R(y)\,z(0, y)\,\Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)})\,dy - \int_0^{x^{(0)}}\int_T f(x, y)\,\Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)\,dx\,dy$$

$$= \begin{cases} z(x^{(0)}, y^{(0)}), & \text{wenn } y^{(0)} \text{ im Innern von } T, \\ 0 \qquad\qquad, & \text{wenn } y^{(0)} \text{ im Innern von } \bar{T} - T. \end{cases}$$

Hierbei ist $d\sigma$ das Flächenelement, ν die äußere Normale von S.

Ferner wird sich ergeben, daß das in (12) auftretende Integral

$$U(x^{(0)}, y^{(0)}) = \int_0^{x^{(0)}}\int_T f(x, y)\,\Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)\,dx\,dy$$

unter näher zu präzisierenden Voraussetzungen über f die „Poissonsche Formel"

$$(12\text{a}) \quad L(U) - R\frac{\partial U}{\partial x} = \begin{cases} f(x^{(0)}, y^{(0)}), & y^{(0)} \text{ im Innern von } T_{x^{(0)}}, \\ 0 \qquad\qquad, & y^{(0)} \text{ im Innern von } \bar{T} - T_{x^{(0)}}, \end{cases}$$

liefert (§ 5; bei der Korrektur hinzugefügt).

Im letzten Teil der Arbeit (§ 6; bei der Korrektur hinzugefügt) wird gezeigt, daß die über die Grundlösung Γ bewiesenen Eigenschaften unter

---

[7]) Siehe etwa Goursat, Cours d'Analyse, t. III, 3. éd., p. 311, oder auch Gevrey, loc. cit. § 1 und § 35.

gewissen näher angegebenen Voraussetzungen zur Lösung der sogenannten ersten Randwertaufgabe der Gleichung (4) bzw. (11) ausreichen[8]).

Es sei noch bemerkt, daß die zum Beweis von (6) führenden Betrachtungen fast unmittelbar einen Satz über die Approximation beliebiger stetiger Funktionen durch die Eigenfunktionen des Problems (7) liefern[9]). (Siehe Anm. [13]).

§ 1.

Beweis der Behauptung A.

Wir betrachten die zu der Randbedingung (7b) und dem elliptischen Differentialausdruck $L(u)$ bzw. $L(u) - \lambda u$ gehörige Greensche Funktion $K(y, \eta)$ bzw. $G(y, \eta, \lambda)$.[10]) Nach (7) ist dann

$$u_k(y) = \lambda_k \int_T R(\eta)\, u_k(\eta)\, K(y, \eta)\, d\eta \tag{13}$$

und, da wir (7a) in der Form

$$L(u_k) - \lambda R u_k = -(\lambda + \lambda_k) R u_k$$

schreiben können, gilt auch

$$u_k(y) = (\lambda + \lambda_k) \int_T R(\eta)\, u_k(\eta)\, G(y, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{14}$$

Multiplizieren wir (13) und (14) mit $\sqrt{R(y)}$ und setzen

$$u_k(y)\sqrt{R(y)} = \bar{u}_k(y), \qquad \sqrt{R(y) R(\eta)}\, K(y, \eta) = \bar{K}(y, \eta), \tag{15}$$
$$\sqrt{R(y) R(\eta)}\, G(y, \eta, \lambda) = \bar{G}(y, \eta, \lambda),$$

---

[8]) In gleichem Umfange, aber ohne Benutzung einer Grundlösung wurde die erste Randwertaufgabe in einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit (E. Rothe, Über die Wärmeleitungsgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten im dreidimensionalen Falle, 1. Mitteilung und 2. Mitteilung) behandelt. Für den Fall der Gl. (4) vgl. auch A. Hammerstein, Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 304ff.

[9]) Vgl. E. Rothe, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen (Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. 28), wo ein Spezialfall des genannten Satzes bewiesen wurde.

[10]) Die Existenz solcher Greenschen Funktionen ist sichergestellt, da E. E. Levi (Rend. d. Pal. 24 (1907)) die Existenz einer Grundlösung und unter Benutzung der Levischen Grundlösung L. Lichtenstein und W. Sternberg gleichzeitig (Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 198 und 21, S. 286) die Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe bewiesen haben. — Die Schlüsse von § 1 sind im wesentlichen die gleichen wie bei A. Hammerstein, loc. cit. S. 305f.

so erhalten wir für die $\bar{u}_k$ die Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen

$$\bar{u}_k(y) = \lambda_k \int_{\bar{T}} \bar{u}_k(\eta) \bar{K}(y, \eta)\, d\eta, \tag{16}$$

$$\bar{u}_k(y) = (\lambda_k + \lambda) \int_{\bar{T}} \bar{u}_k(\eta) \bar{G}(y, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{17}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Reihe (8) und die aus ihr durch gliedweise Differentiation nach x und ξ entstandenen Reihen für $y, \eta \prec \bar{T}$ und $x - \xi \geqq \delta > 0$ gleichmäßig konvergieren. Da, wie bekannt, die Eigenwerte λ_k von (7) nicht negativ sind, ist

$$e^{-\lambda_k(x-\xi)} < (\nu+2)!\, \lambda_k^{-(\nu+2)} (x-\xi)^{-(\nu+2)} \leqq (\nu+2)!\, (\lambda_k \delta)^{-(\nu+2)} \tag{18}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher ergibt sich nach (5) für irgend zwei positive ganze Zahlen k_0 und k_1

$$\sum_{k_0}^{k_1} |u_k(y) u_k(\eta) (-\lambda_k)^\nu e^{-\lambda_k(x-\xi)}| \leqq \frac{1}{m} \sum_1^\infty |\bar{u}_k(y) \bar{u}_k(\eta) \lambda_k^\nu e^{-\lambda_k(x-\xi)}| \tag{19}$$
$$\leqq \frac{1}{m} \frac{(\nu+2)!}{\delta^{\nu+2}} \sqrt{\sum_{k_0}^{k_1} \frac{u_k^2(y)}{\lambda_k^2} \sum_{k_0}^{k_1} \frac{u_k^2(\eta)}{\lambda_k^2}},$$

womit die Behauptung wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_1^\infty u_k^2/\lambda_k^2$ bewiesen ist. Aus ihr folgt offenbar, daß die Reihe (8) beliebig oft gliedweise nach x und ξ differenziert werden darf.

Nunmehr können wir zeigen, daß Γ als Funktion von x, y eine Lösung von (4) ist. Wie man sofort sieht, gilt die Behauptung jedenfalls für jeden einzelnen Summanden der Reihe (8). Setzt man daher

$$s_n = \sum_1^n u_k(y) u_k(\eta) e^{-\lambda_k(x-\xi)},$$

so ist

$$L_y(s_n) = R \frac{\partial s_n}{\partial x},\text{[11]}$$

also

$$s_n(y, \eta, x-\xi) = \int_{\bar{T}} R(\zeta) \frac{\partial s_n(\zeta, \eta, x-\xi)}{\partial x} K(y, \zeta)\, d\zeta. \tag{20}$$

Da nun nach dem schon Bewiesenen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^\nu s_n}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^\nu \Gamma}{\partial x^\nu} \quad (\text{glm. für } x - \xi \geqq \delta > 0;\ y, \eta \prec \bar{T}), \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{21}$$

---

[11]) Der Index y bedeutet, daß der Operator L in bezug auf y (nicht η) anzuwenden ist.

ist, so folgt aus (20)

$$\Gamma(y,\eta,x-\xi)=\int_{\overline{T}} R(\zeta)\frac{\partial\Gamma(\zeta,\eta,x-\xi)}{\partial x}K(y,\zeta)\,d\zeta;$$

hieraus aber folgt auf Grund der Eigenschaften der Greenschen Funktion K das behauptete Bestehen von (4), falls der Faktor von K einmal stetig nach ζ differenzierbar ist. Um dies noch einzusehen, beachten wir, daß nach (20)

$$\frac{\partial s_n(y,\eta,x-\xi)}{\partial x}=\int_{\overline{T}} R(\zeta)\frac{\partial^2 s_n(\zeta,\eta,x-\xi)}{\partial x^2}K(y,\zeta)\,d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 s_n(y,\eta,x-\xi)}{\partial y_i\,\partial x}=\int_{\overline{T}} R(\zeta)\frac{\partial^2 s_n(\zeta,\eta,x-\xi)}{\partial x^2}\frac{\partial K(y,\zeta)}{\partial y_i}\,d\zeta \tag{22}$$

und daß $\int_{\overline{T}}\left|\frac{\partial K(y,\zeta)}{\partial y_i}\right|d\zeta$ beschränkt ist, wenn sich y in einem abgeschlossenen, ganz im Innern von $\overline{T}$ gelegenen Bereiche $\overline{T}'$ bewegt. Hieraus folgt auf Grund von (21) leicht die gleichmäßige Konvergenz der rechten Seite von (22) für $y,\eta\prec\overline{T}'$, $x-\xi\geqq\delta$. Daher konvergiert auch die linke Seite in (22) gleichmäßig, woraus sich offenbar die nachzuweisende Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{R\,\partial\Gamma}{\partial x}\right)$ ergibt.

Daß Γ als Funktion von η,ξ die Gleichung (4*) erfüllt, folgt jetzt unmittelbar aus

$$L_\eta\Gamma=L_y\Gamma,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial x},$$

so daß die Eigenschaft A in allen Teilen nachgewiesen ist.

§ 2.

Eine andere Darstellung von Γ.

Ist $\overline{G}(y,\eta,\lambda)$ die in (15) definierte Funktion, so setzen wir

$$\begin{aligned}&G_0(y,\eta,\lambda)=\lambda\overline{G}(y,\eta,\lambda),\\ &G_{\nu+1}(y,\eta,\lambda)=\int_{\overline{T}} G_0(y,\zeta,\lambda)\,G_\nu(\eta,\zeta,\lambda)\,d\zeta\qquad(\nu=0,1,2,\ldots)\end{aligned}\tag{23}$$

und

$$\Gamma_\nu(y,\eta,x)=G_\nu\left(y,\eta,\frac{\nu}{x}\right).\tag{24}$$

Dann behaupten wir

$$\lim_{\nu\to\infty}\Gamma_\nu(y,\eta,x)=\sqrt{R(y)\,R(\eta)}\,\Gamma(y,\eta,x),\tag{25}$$

und zwar ist die Konvergenz gleichmäßig für $y,\eta\prec\overline{T}$ und $x\geqq\delta$.

G_ν ist nach (23) der mit $\lambda^{\nu+1}$ multiplizierte $(\nu+1)$-fach iterierte Kern der Integralgleichung (17). Daher ist für $\nu \geqq 1$

$$G_\nu(y, \eta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{\nu+1}}, \tag{26}$$

also

$$\Gamma_\nu(y, \eta, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}}. \tag{27}$$

Wegen $\lambda_k > 0$ ist nun für $x > 0$

$$\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1} > \binom{\nu+1}{2}\left(\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^2 > \frac{\lambda_k^2 x^2}{2!} \tag{28}$$

und wir erhalten die von x und ν unabhängige Abschätzung

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}} \right| \leqq \frac{2!}{\delta^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2} \qquad (x \geqq \delta). \tag{29}$$

Ebenso folgt aus (18)

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)\,e^{-\lambda_k x}| \leqq \frac{2!}{\delta^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2} \qquad (x \geqq \delta). \tag{30}$$

Ist nun ε eine vorgegebene positive Zahl, so wählen wir N so, daß die rechte Seite in (29) und (30) kleiner als ε wird, was wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2}$ möglich ist. Dann wird nach (8) und (27) bis (30)

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{R(y)\,R(\eta)}\,\Gamma(y, \eta, x) - \Gamma_\nu(y, \eta, x) \right| \\ &\qquad \leqq \left| \sum_{1}^{N} \bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta) \left[e^{-\lambda_k x} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}} \right] \right| + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $\nu \to \infty$ konvergiert (bei festem N) der erste rechtsstehende Summand gleichmäßig gegen 0. Hieraus folgt offenbar die Behauptung (25), da ε beliebig ist.

§ 3.

Beweis der Behauptung B.

Wir beginnen damit, einige Eigenschaften der G_ν festzustellen.

1. Es ist $G_\nu(y, \eta, \lambda) = 0$, wenn y am Rande von $\bar{T}$ liegt.
2. $G_\nu(y, \eta, \lambda) = G_\nu(\eta, y, \lambda)$.
3. $G_\nu \geqq 0$ für $y, \eta \prec \bar{T}$ und $\lambda > 0$.

Die Behauptungen 1. bis 3. sind richtig für $\nu = 0$. Der allgemeine Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion auf Grund der Rekursionsformel (23).

4. Sei $\psi(y)$ eine in $\bar{T}$ einmal stetig differenzierbare Funktion und $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu+1}$ die durch die folgende Kette von Randwertproblemen definierten Funktionen

$$
(33)\qquad
\begin{array}{llll}
L(v_1) - \lambda R v_1 & = -\lambda R \psi; & v_1 & = 0 \text{ am Rande von } \bar{T}, \\
L(v_2) - \lambda R v_2 & = -\lambda R v_1; & v_2 & = 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \bar{T}, \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
L(v_{\nu+1}) - \lambda R v_{\nu+1} & = -\lambda R v_\nu; & v_{\nu+1} & = 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \bar{T},
\end{array}
$$

Setzt man dann

$$\bar{\psi}(y) = \sqrt{R(y)}\,\psi(y), \qquad \bar{v}_\mu(y) = \sqrt{R(y)}\,v_\mu(y) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu+1),$$

so ist

$$(34)\qquad \bar{v}_{\nu+1}(y) = \int_{\bar{T}} \bar{\psi}(\eta)\,G_\nu(y, \eta, \lambda)\,d\eta.$$

Beweis. Nach der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion $G(y, \eta, \lambda)$ ist

$$v_1(y) = \lambda \int_{\bar{T}} R(\eta)\,\psi(\eta)\,G(y, \eta, \lambda)\,d\eta,$$

also nach (23) und (15)

$$\bar{v}_1(y) = \int_{\bar{T}} \bar{\psi}(\eta)\,G_0(y, \eta, \lambda)\,d\eta.$$

Die Behauptung ist daher richtig für $\nu = 0$. Für beliebiges ν folgt sie durch vollständige Induktion nach (23).

5. Es ist für jeden Teilbereich T von $\bar{T}$

$$(35)\qquad 0 \leqq \int_T \sqrt{R(\eta)}\,G_\nu(y, \eta, \lambda)\,d\eta \leqq \sqrt{R(y)} \qquad (y \prec \bar{T};\ \lambda > 0).$$

Der eine Teil der Behauptung folgt aus 3.; der andere lautet für $\nu = 0$ nach (23)

$$\lambda \int_T R(\eta)\,G(y, \eta, \lambda)\,d\eta \leqq 1;$$

das ist aber richtig[12]). Der Beweis für beliebiges ν durch vollständige Induktion nach (23).

---

[12]) Wegen des Beweises hierfür siehe S. 74 der in Anm. [9]) zitierten Arbeit. Die folgenden Beweise des Textes (bis S. 498) beruhen im wesentlichen auf einer passenden Ausdehnung der in der genannten Arbeit angewandten Methode.

6. Unter den Voraussetzungen von 4. ist

$$(36)\qquad \begin{aligned} |\bar{v}_{\nu+1}(y)| &\leqq \sqrt{R(y)}\,\mathrm{Max}\,|\psi| \\ |v_{\nu+1}(y)| &\leqq \mathrm{Max}\,|\psi| \end{aligned} \qquad (y \prec \bar{T};\ \lambda > 0).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (34) und (35).

7. Sind die Voraussetzungen von 4. erfüllt, ist überdies $\psi = 0$ am Rande von $\bar{T}$, existiert ferner $L(\psi)$ und ist einmal stetig nach den y_i differenzierbar, so ist

$$(37)\qquad |v_{\nu+1}(y) - \psi(y)| \leqq \frac{\nu+1}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \qquad (y \prec \bar{T};\ \lambda > 0).$$

Beweis. Durch passende Subtraktionen erhält man aus (33)

$$\begin{array}{lll} L(v_1-\psi) - \lambda R(v_1-\psi) &= -\lambda R\cdot\frac{L(\psi)}{\lambda R}; & v_1-\psi = 0 \text{ am Rande von } \bar{T}, \\ L(v_2-v_1) - \lambda R(v_2-v_1) &= -\lambda R\cdot(v_1-\psi); & v_2-v_1 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \bar{T}, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ L(v_{\nu+1}-v_\nu) - \lambda R(v_{\nu+1}-v_\nu) &= -\lambda R\cdot(v_\nu - v_{\nu-1}); & v_{\nu+1}-v_\nu = 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \bar{T}. \end{array}$$

Durch passende Anwendung von 6. folgt daher

$$\mathrm{Max}\,|v_{\nu+1} - v_\nu| \leqq \mathrm{Max}\,|v_\nu - v_{\nu-1}| \ldots \leqq \mathrm{Max}\,|v_1 - \psi| \leqq \mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{\lambda R}\right|,$$

also

$$|v_{\nu+1} - \psi| \leqq |v_{\nu+1} - v_\nu| + |v_\nu - v_{\nu-1}| + \ldots + |v_1 - \psi| \leqq \frac{\nu+1}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right|,$$

womit (37) bewiesen ist.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Behauptung B (S. 489) für den Fall beweisen, daß

$$\varphi \equiv 1.$$

Sei also T ein Teilbereich von $\bar{T}$. Wir betrachten zuerst den Fall, daß $y^{(0)}$ innerer Punkt von T ist. Sei alsdann σ eine positive Zahl, die so klein gewählt ist, daß die Kugel K_σ um $y^{(0)}$ mit dem Radius σ ganz im Innern von T liegt. Sei ferner

$$\psi(y, y^{(0)}) = \begin{cases} (\sigma^4 - r^4)^4 & \text{für } r \leqq \sigma \\ 0 & \quad ,, \quad r > \sigma \end{cases} \qquad [r^2 = \Sigma(y_i - y_i^{(0)})^2].$$

$\psi(y, y^{(0)})$ genügt, wie man sich leicht überzeugt, als Funktion von y den Voraussetzungen von 7.; ferner ist ψ nicht negativ und erreicht für $y = y^{(0)}$ sein Maximum. Sind daher $v_1, \ldots, v_{\nu+1}$ die Lösungen der Randwertprobleme (33) (wobei $y^{(0)}$ als Parameter auftritt), so ist nach (37)

$$|\psi(y, y^{(0)}) - v_\nu(y, y^{(0)})| \leqq \frac{\nu}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right|$$

oder unter Beachtung von 4. und 3.

$$\psi(y, y^{(0)}) - \frac{\nu}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq v_\nu(y, y^{(0)}) = \frac{1}{\sqrt{R(y)}}\int\limits_T \overline{\psi}(\eta, y^{(0)})\, G_{\nu-1}(y, \eta, \lambda)\, d\eta$$
$$\leqq \frac{\psi(y^{(0)}, y^{(0)})}{\sqrt{R(y)}}\int\limits_T \sqrt{R(\eta)}\, G_{\nu-1}(y, \eta, \lambda)\, d\eta.$$

Setzen wir hierin $y = y^{(0)}$ und dividieren durch die positive Zahl $\psi(y^{(0)}, y^{(0)})$, so erhalten wir unter Beachtung von (35)

$$(38)\qquad 1 - \frac{\nu}{\lambda\psi(y^{(0)}, y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{R(y^{(0)})}}\int\limits_T \sqrt{R(\eta)}\, G_{\nu-1}(y^{(0)}, \eta, \lambda)\, d\eta \leqq 1.$$ [13]

Setzen wir speziell $\lambda = \frac{\nu-1}{x}$, d. h. $\frac{\nu}{\lambda} = x\left(1 + \frac{1}{\nu-1}\right)$, so kommt nach (24)

$$1 - x\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)\frac{1}{\psi(y^{(0)}, y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{R(y^{(0)})}}\int\limits_T \sqrt{R(\eta)}\, \Gamma_{\nu-1}(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \leqq 1$$

und nach (25)

$$(39)\qquad 1 - \frac{x}{\psi(y^{(0)}, y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \int\limits_T R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \leqq 1,$$

woraus die Behauptung

$$(40)\qquad \lim_{x\to 0}\int\limits_T R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 1 \qquad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } T)$$

folgt.

Sei jetzt $y^{(0)}$ innerer Punkt von $\overline{T} - T$. Nach dem schon Bewiesenen ist dann

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_{\overline{T}-T} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\int\limits_{\overline{T}} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 1.$$

---

[13]) Macht man in (38) bei festem ν den Grenzübergang $\lambda \to \infty$, so folgt

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_T \sqrt{R(\eta)}\, G_{\nu-1}(y^{(0)}, \eta, \lambda)\, d\eta = \sqrt{R(y^{(0)})} \qquad (y^{(0)} < T).$$

Hieraus ergibt sich (ähnlich wie im Text auf S. 498), daß auch für jede stetige Funktion φ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_T \sqrt{R(\eta)}\,\varphi(\eta)\, G_{\nu-1}(y^{(0)}, \eta, \lambda)\, d\eta = \sqrt{R(y^{(0)})}\,\varphi(y^{(0)}).$$

Wendet man dies auf $T = \overline{T}$ an und beachtet, daß $G_{\nu-1}$ der mit λ^ν multiplizierte ν-fach iterierte Kern der Integralgleichung (17) ist, so folgt

$$\varphi(y^{(0)}) = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k u_k(y^{(0)})}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^\nu} \qquad \left(c_k = \int\limits_T R(\eta)\,\varphi(\eta)\, u_k(\eta)\, d\eta\right)$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für jede stetige (nicht notwendig der Randbedingung (7b) genügende) Funktion φ. Der Fall $\nu = 1$ wurde bereits in der in Anm. [9]) zitierten Arbeit bewiesen. (Anm. bei der Korrektur.)

Wegen $\int\limits_{T} = \int\limits_{\bar{T}} - \int\limits_{\bar{T}-T}$ folgt daher die Behauptung

$$(41) \qquad \lim_{x \to 0} \int\limits_{T} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 0 \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T} - T).$$

Sei jetzt $\varphi(y)$ eine beliebige stetige Funktion und $y^{(0)}$ zunächst ein innerer Punkt von T. Wir schreiben dann

$$(42) \qquad \begin{aligned} &\int\limits_{T} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \\ &= \varphi(y^{(0)}) \int\limits_{T} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \\ &\quad + \int\limits_{T} R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^{(0)})]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta. \end{aligned}$$

Sei ε eine vorgegebene positive Zahl und U eine ganz in T gelegene Umgebung von $y^{(0)}$ von der Eigenschaft, daß $|\varphi(\eta) - \varphi(y^{(0)})| < \varepsilon$ ist, wenn η in U liegt. Dann ist nach (39)

$$\left| \int\limits_{U} R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^{0})]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| < \varepsilon,$$

und da $y^{(0)}$ äußerer Punkt von $T - U$ ist, nach (41)

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \left| \int\limits_{T-U} R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^{0})]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| \\ &\qquad \leqq 2 \operatorname{Max} |\varphi| \lim_{x \to 0} \int\limits_{T-U} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 0. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (40) folgt daher aus (42) für alle genügend kleinen positiven x

$$\left| \int\limits_{T} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, dx - \varphi(y^{(0)}) \right| < 3\varepsilon,$$

womit der erste Teil der Behauptung (6) bewiesen ist.

Der *zweite* Teil von (6) folgt unter Beachtung von

$$\left| \int\limits_{T} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| \leqq \operatorname{Max} |\varphi| \int\limits_{T} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta$$

unmittelbar aus (41).

§ 4.

Beweis der Fundamentalformel.

Nach dem Beweis von (6) ergibt sich nun die Fundamentalformel (12) in der üblichen Weise:

Setzt man

$$M(u) \equiv L(u) - R \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad M^*(u) \equiv L(u) + R \frac{\partial u}{\partial x},$$

so ist für irgend zwei zweimal nach den y_i und einmal nach x differenzierbare Funktionen $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, y)$

$$(43)\qquad \alpha M(\beta) - \beta M^*(\alpha) = \sum_{i,k}^{3}{}_1 \frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ik}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y_k} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}\right)\right] - R\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x}.$$

Integriert man diese Identität zuerst über den y-Bereich T[14]) und dann über x von 0 bis $x^{(0)}$, so erhält man (unter Voraussetzung der Stetigkeit der in (43) auftretenden Ableitungen von α und β):

$$(44)\qquad \int_0^{x^{(0)}}\int_T [\alpha M(\beta) - \beta M^*(\alpha)]\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{x^{(0)}}\int_S \sum_{i,k}^{3}{}_1 a_{ik}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y_k} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}\right)\cos(y_i\nu)\, d\sigma\, dx$$

$$- \int_T R(y)\,\alpha(x^{(0)}, y)\,\beta(x^{(0)}, y)\, dy + \int_T R(y)\,\alpha(0, y)\,\beta(0, y)\, dy.$$

Ist nun $\beta(x, y)$ eine Lösung z von

$$M(z) = f(x, y),$$

wo f eine gegebene stetige Funktion ist, und ist

$$\alpha(x, y) = \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x) \qquad (h > 0;\; y^{(0)} \prec \overline{T}),$$

so daß

$$M^*(\alpha) = 0,$$

so liefert (44)

$$(45)\quad \int_T R(y)\, z(y, x^{(0)})\, \Gamma(y^{(0)}, y, h)\, dy = \int_0^{x^{(0)}}\int_S \sum_{i,k}^{3}{}_1 a_{ik}\left(\Gamma\frac{\partial z}{\partial y_k} - z\frac{\partial\Gamma}{\partial y_k}\right)\cos(y_i\nu)\, d\sigma\, dx$$

$$+ \int_T R(y)\, z(0, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h)\, dy$$

$$- \int_0^{x^{(0)}}\int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x)\, dx\, dy.$$

In dieser Formel lassen wir nun unter der Annahme, daß $y^{(0)}$ nicht auf dem Rande von T liegt, h gegen 0 gehen. Dann ist in dem zweiten in (45) rechts stehenden Integral $x \neq x^{(0)}$; daher kann in ihm der Grenzübergang vollzogen werden, indem in Γ $h = 0$ gesetzt wird. Das ist aber, wie wir behaupten, auch in dem letzten der rechts stehenden Integrale erlaubt. Schreibt man nämlich bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{x^{(0)}}\int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x)\, dy\, dx = \int_0^{x^{(0)}-\varepsilon}\int_T \ldots dy\, dx + \int_{x^{(0)}-\varepsilon}^{x^{(0)}}\int_T \ldots dy\, dx,$$

[14]) Wegen der Bedeutung der Bezeichnung T sowie der folgenden S, ν und $d\sigma$ siehe S. 490.

so ist die Behauptung für den ersten Summanden gewiß richtig. Der zweite ist aber nach (39) und (5) absolut genommen höchstens gleich

$$\operatorname{Max}\left|\frac{f}{R}\right| \cdot \int\limits_{x^{(0)}-\varepsilon}^{x^{(0)}} dx \leqq \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{Max}|f|}{m},$$

woraus die Behauptung offenbar folgt.

Wegen (6) erhalten wir daher aus (45) die Fundamentalformel (12), da nunmehr auch für das erste rechts stehende Integral die Existenz eines Grenzwertes für $h \to 0$ folgt, und man sich leicht überlegt, daß dieser durch Nullsetzen von h erhalten wird.

§ 5.

Beweis der Poissonschen Formel[15]).

Wir haben

$$U(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_T f(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi \qquad (T \prec \bar{T})$$

zu betrachten und (12a) zu beweisen. Wir setzen

$$(46) \qquad F(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi, \eta), & \text{wenn } \eta \text{ in } T, \\ 0 \quad , & \text{wenn } \eta \text{ nicht in } T. \end{cases}$$

Es ist dann

$$(47) \qquad U(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_{\bar{T}} F(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi.$$

Von f setzen wir einmal stetige Differenzierbarkeit nach η und zweimal stetige Differenzierbarkeit nach ξ voraus. Die gleichen Eigenschaften besitzt dann F mit Ausnahme der Randpunkte von T. Setzt man nun in (47) für Γ die Reihe (8) ein und beachtet die Tatsache, daß die Reihe (8) gleichmäßig für $x - \xi \geqq \delta$ konvergiert, so ergibt sich

$$(48) \qquad U(x, y) = \lim_{x_1 \to x} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \int\limits_0^{x_1} [F(\xi)]_k\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi \qquad (0 < x_1 < x),$$

wobei

$$[F(\xi)]_k = \int\limits_{\bar{T}} F(\xi, \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta.$$

Formt man nun das Integral in (48) durch partielle Integration um:

$$\int\limits_0^{x_1} [F(\xi)]_k\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi = [F(\xi)]_k \frac{e^{-\lambda_k (x-\xi)}}{\lambda_k}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=x_1} - \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi,$$

---

[15]) § 5 und § 6 wurden bei der Korrektur hinzugefügt.

so erkennt man auf Grund der Besselschen Ungleichung sowie der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum \frac{u_k^2}{\lambda_k^2}$, daß die so entstandene Reihe gleichmäßig in x und y konvergiert, also der Grenzübergang $x_1 \to x$ in (48) gliedweise ausgeführt werden kann. Man erhält so

$$(49) \quad U(x,y) = \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k - \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(0)]_k e^{-\lambda_k x} - \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}\int_0^x \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k(x-\xi)} d\xi .$$

Nun ist auf Grund von (13)

$$(50) \qquad \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k = \int_T K(y,\eta) F(x,\eta)\, d\eta ,$$

folglich

$$(51) \quad \left(L - R\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k\right) = -F(x,y) - R\int_T K(y,\eta)\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial x}\, d\eta .$$

Ferner genügt jedes Glied der *zweiten* Summe in (49) der homogenen Gleichung (4); hieraus folgt durch die gleichen Betrachtungen wie in § 1

$$(52) \qquad \left(L - R\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(0)]_k e^{-\lambda_k x}\right) = 0 .$$

Die dritte Summe in (49) schließlich ist

$$(53) \qquad \int_0^x H(x,\xi)\, d\xi ,$$

wenn

$$\int_T \sum_k \frac{u_k(y)\, u_k(\eta)}{\lambda_k} \frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi} e^{-\lambda_k(x-\xi)} d\eta = H(x,\xi)$$

gesetzt ist. $H(x,\xi)$ ist stetig in dem abgeschlossenen Intervall $0 \leqq \xi \leqq x$; für $0 \leqq \xi < x$ ist nach (8)

$$(54) \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\int_T \Gamma(y,\eta,x-\xi)\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\, d\eta ,$$

hat also auf Grund von (6) einen endlichen Grenzwert für $\xi - x \to 0$. Hieraus folgt, daß die Ableitung des Integrals (53) nach x nach der gewöhnlichen Regel

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x H(x,\xi)\, d\xi = H(x,x) + \int_0^x \frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi)\, d\xi$$

gebildet werden darf. Wir haben also unter Beachtung von (50) und (54)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}\int_0^x \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k(x-\xi)}\,d\xi\right\} \tag{55}$$

$$= \int_{\overline{T}} K(y,\eta)\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta - \int_0^x\int_{\overline{T}} \Gamma(y,\eta,x-\xi)\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\,d\eta\,d\xi.$$

Um auf den dritten Summanden von (49) auch den Operator L anzuwenden, schreiben wir diesen in der sich ohne weiteres aus (13) und (8) ergebenden Form[16])

$$-\int_0^x\int_{\overline{T}} K(y,\zeta)R(\zeta)\int_{\overline{T}}\Gamma(\zeta,\eta,x-\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi,\eta)\,d\eta\,d\zeta\,d\xi. \tag{56}$$

Diese setzt in Evidenz, daß die Operation L gerade $R(y)$ multipliziert mit dem Integral

$$\int_0^x\int_{\overline{T}}\Gamma(y,\eta,x-\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi \tag{57}$$

liefert, falls dieser Ausdruck einmal stetig nach y differenzierbar ist, und aus (49), (51), (52), (55) und (46) folgt dann die Behauptung (12a). Um noch die stetige Differenzierbarkeit von (57) einzusehen, formen wir diesen Ausdruck in der gleichen Weise um wie früher (47). Wir erhalten dann einen Ausdruck, der aus der rechten Seite von (49) hervorgeht, wenn wir dort F durch $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ ersetzen; diesen können wir dann auch so schreiben (vgl. (50) und (56)):

$$\int_{\overline{T}} K(y,\eta)\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta - \int_{\overline{T}} K(y,\zeta)R(\zeta)\int_{\overline{T}}\Gamma(\zeta,\eta,x)\frac{\partial F(0,\eta)}{\partial x}\,d\eta\,d\zeta$$

$$-\int_0^x\int_{\overline{T}} K(y,\zeta)R(\zeta)\int_{\overline{T}}\Gamma(\zeta,\eta,x-\xi)\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\,d\eta\,d\zeta\,d\xi.$$

Da die Faktoren von K unter den Integralen stetige Funktionen sind, kann man unter den Integralen nach y differenzieren.

---

[16]) Man vertausche in dem in Rede stehenden dritten Summanden von (49) die Integration nach ξ mit der Summation und beachte, daß $\sum_k u_k(y)\,u_k(\eta)\,e^{-\lambda_k(x-\xi)}$ bei festem $\xi < x$ absolut und gleichmäßig in y und η konvergiert.

§ 6.

Zur ersten Randwertaufgabe.

Die sogenannte erste Randwertaufgabe, eine Funktion z zu finden, die im Innern des Bereiches (9) eine Lösung von (11) ist und für $x = 0$ sowie auf M_x vorgegebene Werte annimmt, läßt sich mit Hilfe der im vorstehenden bewiesenen Eigenschaften noch nicht unter ebenso geringen Voraussetzungen erledigen wie die entsprechende Aufgabe in der Theorie der speziellen Gleichung (1). Hierzu fehlen noch gewisse Eigenschaften der Grundlösung, die dem Verhalten des Potentials einer Doppelschicht entsprechen und in der Theorie der genannten speziellen Gleichung[17]) wesentlich benutzt werden.

Zur Behandlung der Randwertaufgabe zerlegen wir diese in bekannter Weise in zwei Teilaufgaben:

1. Eine Lösung u von (4) zu finden, die den Randbedingungen

$$u(x, y) \to u_0(y^{(0)}) \quad \text{für} \quad (x, y) \to (0, y^{(0)}) \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T}), \tag{58a}$$

$$u(x, y) \to 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \to (\xi, \eta) \quad (\eta \text{ auf } \bar{S},\ \xi > 0) \tag{58b}$$

genügt, wobei u_0 eine vorgegebene in $\bar{T}$ definierte Funktion ist.

2. Eine Lösung v von (11) zu finden, die den Randbedingungen

$$v(x, y) \to 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \to (0, y^{(0)}) \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T}), \tag{59a}$$

$$v(x, y) \to \varphi(\xi, \eta) \quad \text{für} \quad (x, y) \to (\xi, \eta) \quad (\eta \text{ auf } \bar{S},\ \xi > 0) \tag{59b}$$

genügt, wobei φ eine vorgegebene auf M_x definierte Funktion ist.

$z = u + v$ ist dann eine Lösung von (11), die (58a) und (59b) genügt.

Das Problem 1 wird nun bei stetigem u_0 durch

$$u(x, y) = \int_{\bar{T}} u_0(\eta)\, \Gamma(y, \eta, x)\, d\eta$$

vollständig gelöst, wie man unmittelbar aus A, B (S. 489) und (7b) schließt, wenn man beachtet, daß die Konvergenz in (6) gleichmäßig ist für alle x, deren Entfernung vom Rande von $\bar{T}$ oberhalb einer festen positiven Zahl liegt[18]), und daß ebenso die Reihe (8) für $x - \xi \geqq \delta > 0$

---

[17]) Siehe z. B. Goursat, Cours d'analyse t. **3**. ch. XXIX.

[18]) Dies folgt sofort aus der Abschätzung (39) auf S. 497 im Verein mit dem Beweis auf S. 498.

gleichmäßig konvergiert. Ist ferner in (59b) die Funktion φ dreimal stetig differenzierbar und kennt man eine im Bereich (9) einschließlich des Randes dreimal stetig nach x und y differenzierbare Funktion $\Phi(x, y)$, die die Randbedingung (59b) befriedigt (ohne notwendigerweise einer Differentialgleichung zu genügen[19]), so kann man das Problem 2. ebenfalls lösen, falls f die Voraussetzungen von § 5 erfüllt. In der Tat genügt dann $w = v - \Phi$ der Gleichung

$$L(w) - R\frac{\partial w}{\partial x} = g(x, y) \qquad \left(g = f - L(\Phi) + R\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$$

und einer Randbedingung der Form (58a), (58b). Da auf Grund der gemachten Annahmen g einmal stetig nach y und zweimal stetig nach x differenzierbar ist, wird diese Aufgabe offenbar durch

$$w = \int_0^x \int_{\overline{T}} g(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi + \int_{\overline{T}} u_0(\eta)\, \Gamma(y, \eta, x)\, d\eta$$

gelöst.

---

[19]) Für den Fall, daß $\overline{T}$ ein Sternbereich ist, wird die explizite Konstruktion einer solchen Funktion Φ in der in Anm. [8]) zitierten Arbeit angegeben.

(Eingegangen am 16. März 1930.)