K. Schwarzschild
S. Oppenheim
W. v. Dyck

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Des Sechsten Bandes Zweiter Teil Astronomie

Springer

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

SECHSTER BAND:

GEODÄSIE, GEOPHYSIK UND ASTRONOMIE

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DES SECHSTEN BANDES ZWEITER TEIL

ASTRONOMIE

REDIGIERT VON

K. SCHWARZSCHILD † (1904—1916)

S. OPPENHEIM † (1919—1928)

UND

W. v. Dyck (ab 1929 i. V.) IN MÜNCHEN

ZWEITE HÄLFTE

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH 1922-1934

ISBN 978-3-663-15463-1 ISBN 978-3-663-16034-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16034-2

Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 2. Teil, 2. Hälfte.

B. Mechanik des Himmels.

(Fortsetzung.)

21. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper.

Von S. OPPENHEIM † (in Wien).

I. Ältere Literatur.

II. Einführung des Potentialbegriffes.

III. Stabilitätsuntersuchungen.

IV. Die Gleichgewichtsfigur der Monde.

Seite

V. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren.

VI. Die Atmosphäre der Himmelskörper.

VII. Die Gestalt der Kometen.

(Abgeschlossen Juli 1919.)

22. Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Von S. Oppenheim† (in Wien). Mit einem Beitrag: Gravitation und Relativitätstheorie. Von F. Kottler in Wien.

I. Das Newtonsche Gesetz.

II. Genauigkeitsgrad des Newtonschen Gesetzes aus der Bestimmung der Massenfaktoren.

III. Berechnung des Genauigkeitsgrades für die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes auf Grund der Abhängigkeit von der Entfernung.

IV. Versuche zur Erklärung der Bewegungsanomalien auf Grund des Newtonschen Gesetzes.

V. Mögliche Korrektionen des Newtonschen Gesetzes.

(Abgeschlossen Februar 1920.)

22a. Gravitation und Relativitätstheorie. Von Fr. Kottler in Wien.

I. Spezielle Relativitätstheorie.

A. Mechanik.

B. Optik.

II. Allgemeine Relativitätstheorie.

A. Mechanik.

B. Optik.

(Abgeschlossen am 23. März 1922.)

C. Stellarastronomie.

23. Stellarastronomie. Von H. Kobold in Kiel.

I. Die charakteristischen Eigenschaften der Sterne.

II. Das Beobachtungsmaterial.

III. Ergebnisse der Bearbeitung des Beobachtungsmaterials.

A. Scheinbare Verteilung der Sterne. Die Milchstraße.

B. Die räumliche Verteilung der Sterne, Extinktion.

Seite

B. Die polytropen Kurven.

C. Polytrope Atmosphären.

D. Gaskugeln.

a) Gaskugeln von endlichem Radius.

b) Gaskugeln von unendlichem Radius.

c) Gemischte Systeme.

E. Abweichung von den Gasgesetzen.

F. Eingreifen der kinetischen Gastheorie und statistischen Mechanik.

a) Kosmische Staubmassen.

Seite

G. Über säkulare Stabilität der Gaskugeln.

H. Freie Schwingungen einer Gaskugel.

III. Aufbau der Himmelskörper unter Berücksichtigung von thermischer Energie, Gravitationsenergie und Strahlungsenergie.

A. Exkurs über Strahlung.

B. Atmosphären im Strahlungsgleichgewicht.

C. Die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe.

D. Über das Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre.

E. Gaskugeln im Strahlungsgleichgewicht.

IV. Eingreifen von Atomphysik und Quantentheorie.

A. Ionisation und Strahlung.

Seite

B. Ionisation und Lichtdruck.

(Abgeschlossen Ende 1925.)

25. Die Spektralanalyse der Gestirne. Von ADOLF HNATEK in Wien.

I. Einleitung.

II. Die theoretischen Grundlagen.

III. Die Sonne.

IV. Die Körper des Sonnensystems.

V. Das Fixsternsystem.

(Abgeschlossen Ende 1928.)

26. Astronomische Kolorimetrie. Von JOSEF HOPMANN in Leipzig. Mit Beiträgen von BERNHARD STICKER in Bonn.

I. Theoretisches und Geschichtliches.

II. Die kolorimetrischen Beobachtungsmethoden.

A. Visuelle Beobachtungsverfahren.

B. Photographische Beobachtungsverfahren.

C. Elektrische Beobachtungsverfahren.

III. Ergebnisse bei normalen Sternen.

IV. Ergebnisse bei veränderlichen Sternen.

III. Die veränderlichen Sterne.

(Abgeschlossen im August 1932.)

28. Kosmogonie. Von H. KIENLE in Göttingen.

I. Einleitung.

II. Innerer Aufbau und normale Sternentwicklung.

III. Dynamik der Entwicklungsvorgänge.

IV. Die Entstehung des Planetensystems.

V. Einzelprobleme.

(Abgeschlossen im Oktober 1933.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande VI, 2. Teil, 2. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

B. Mechanik des Himmels.
(Fortsetzung)

Heft 1. 18. IX. 1922	21. Oppenheim: Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. 22. Oppenheim: Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. 22a. Kottler: Gravitation und Relativitätstheorie.

C. Stellarastronomie.

Heft 2. 30. XI. 1926	23. Kobold: Stellarastronomie. D. Astrophysik. 24. Emden: Thermodynamik der Himmelskörper.
Heft 3. 18. VII. 1930.	25. Hnatek: Spektralanalyse der Gestirne.
Heft 4. 20. III. 1931.	26. Hopmann: Astronomische Kolorimetrie
Heft 5. 25. VII. 1933.	27. Schoenberg: Photometrie der Gestirne.
Heft 6. 30. VII. 1934.	28. Kienle: Kosmogonie. Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 2. Teil, 2. Hälfte. Sachregister zu Band VI, 2. Teil, 2. Hälfte. Namensverzeichnis zu Band VI, 2. Teil, A und B.

VI 2, 21. DIE THEORIE DER GLEICHGEWICHTS-FIGUREN DER HIMMELSKÖRPER.

Von

S. OPPENHEIM.

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

a) Lehrbücher.

J. Newton, Principia mathematica philosophiae naturalis, London 1687, 2. ed. 1714, 3. ed. 1726.

C. Maclaurin, A treatise on fluxions, Edinburg 1742.

A. Simpson, A mathematical dissertation on the figure of the Earth. London 1743.

A. C. Clairaut, La théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743. Deutsche Ausgabe unter dem Titel „Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik" von Ph. Jordain und A. v. Öttingen in Ostwalds Klassikern der Naturwissensch. Nr. 189, Leipzig 1913.

Lagrange, Mécanique analytique, Paris 1788. In Oeuvres de Lagrange. Tome 11 u. 12, Paris 1888—89.

P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste, Tome 1—5, Paris 1799—1827.

G. P. Airy, Figure of the Earth. In Encykl. Metropolitana III, London 1835.

H. Résal, Traité élementaire de mécanique céleste, I. éd. Paris 1865, II. éd. Paris 1884.

W. Thomson and *P. G. Tait,* Treatise on natural philosophy, 1. ed. Oxford 1867, 2. ed. 2 Vol. Cambridge 1879 and 1883.

J. H. Pratt, A treatise on attractions, Laplaces fonctions and the figure of the Earth. London 1871.

G. Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Autorisierte deutsche Ausgabe der „Note e rifflessione sulla teoria astronomica delle stelle cadente" von *G. von Boguslawski,* Stettin 1871.

A. R. Clarke, Geodesy, London 1880.

F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, 2 Bände, Leipzig 1880—1884.

Literatur.

F. Tisserand, Traité de mécanique céleste, Tome 1—4, Paris 1889—1896.

S. Krüger, S. J., Ellipsoidale Evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa, Diss. Leiden 1896.

H. Poincaré, Figures de l'équilibre d'une masse fluide. Leçons professées à la Sorbonne en 1900, Paris 1902.

— Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, professées à la Sorbonne, Paris 1911.

Th. Bredichins mechanische Untersuchungen über Kometenformen in systematischer Darstellung, von *R. Jägermann,* St. Petersburg 1903.

H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1906. Deutsche Ausgabe von Dr. Johann Friedel, Leipzig 1907.

H. Buchholz, Das mechanische Potential, nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet, und die Theorie der Figur der Erde, Leipzig, 1. Aufl. 1908, 2. Aufl. 1916.

P. Rudzki, Physik der Erde, Leipzig 1911.

P. Pizetti, Principii della teoria meccanica delle figure dei pianeti, Pisa 1913.

Vgl. zudem auch die Literaturübersicht in Encykl. VI 1, 7 (*Helmert*) und VI 1, 3 (*Pizetti*) ferner IV 16, Nr. 4 (*A. E. H. Love*), besonders die französische Ausgabe der Encykl. IV 18, Nr. 4 (*Appell, Beghin* und *Villat*). Außerdem widmet wohl jedes Lehrbuch der analytischen Mechanik oder Hydrodynamik dem hier behandelten Problem einige Blätter. Es schien nicht notwendig, jedes einzeln hier anzuführen.

Zur Geschichte des Problems:

J. Todhunter, A History of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace, 2 Vol., London 1873. Zitiert als *Todh.,* Hist.

b) Monographien.

F. W. Bessel, Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halleyschen Kometen und dadurch veranlaßte Bemerkungen, Astr. Nachr. 13 (1836). Gesamm. Abh. 1, p. 54, auch abgedruckt in *C. F. Zöllner,* Über die Natur der Kometen, Leipzig 1872.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Aus dem Nachlasse hergestellt von *R. Dedekind,* Gött. Nachr. 8 (1860) und J. f. Math. 58 (1861).

G. H. Darwin, 1. On the figure of equilibrium of a planet of heterogeneous density. London. Soc. Proceed. 36 (1883).

2. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid, London. Phil. Trans. 178 (1887).
3. The theory of the figure of the earth carried to the second ordre of small quantities, ebenda 60 (1899).
4. Ellipsoidal harmonic analysis, ebenda 197 (1901).
5. The pearshaped figure of equilibrium, ebenda 198 (1902).
6. The stability of the pearshaped figure of equilibrium of a rotating mass of fluid, ebenda 200 (1903).
7. The approximate determination of the form of Maclaurins spheroid, Americ. math. Soc. 4 (1903) u. 9 (1908).
8. On the integrals of the squares of ellipsoidal surface harmonic fonctions, London. Phil. Trans. 203 (1904).
9. The figure and the stability of a liquide satellite, ebenda 206 (1906).

Hamy, 1. Étude sur la figure des corps célestes, Thèse. Paris 1887.
2. Théorie de la figure des planètes, J. p. Math. VI (1890).

Hayford, The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States, Washington 1909.

K. G. Jacobi, Über die Figur des Gleichgewichtes. Annal. Phys. Ch. 33 (1834).

H. J. Kiaër, Études sur les causes des phénomènes cométaires, Diss. Christiania 1890. Auszugsweise mitgeteilt in Astr. Nachr. 126 (1891), p. 281.

S. Kowalewski, Zusätze und Bemerkungen zu Laplaces Rechnungen über die Gestalt der Saturnringe, Astr. Nachr. 111 (1885), p. 37.

P. S. Laplace, 1. Théorie de l'attraction des sphéroides et la figure des planètes, Paris, Mém. p. 1782 (1785).
2. Mémoire sur la figure de la terre, Paris. Mém. pour 1783 (1786).
3. Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, Paris. Mém. pour 1787 (1789).

A. M. Legendre, 1. Recherche sur la figure des planètes, Paris, Mém. pour 1784 (1787).
2. Suite de la recherche sur la figure des planètes, ebenda pour 1789 (1795).

Liapounoff, 1. Sur la stabilité des formes d'équilibre ellipsoidales d'un liquide en rotation (in russischer Sprache), St. Pétersb. 1884. Referat hierüber von *R. Radau* in Bull. astr. II (1885), sodann ins Französische übersetzt von Davaux u. veröffentlicht in Ann. Toulouse 1904.
2. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, St. Pétersb. Mém. XIV (1903).
3. Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la figure des planètes, ebenda XV (1904).
4. Sur un problème de Tschebyscheff, ebenda XVII (1906).
5. Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, ebenda XXII (1908).
6. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation (in 4 Teilen):
a) Étude général du problème, St. Petersb. 1906.
b) Figures derivées des ellipsoides de Maclaurin, St. Petersb. 1909.
c) Figures derivées des ellipsoides de Jacobi et Recherches relatives à la vitesse angulaire et au moment de quantité de mouvement, St. Petersb. 1911.
d) Nouvelles formules pour la recherche des figures de l'équilibre, St. Petersb. 1913.

L. Lichtenstein, 1. Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen: I. Abh. Homogene Flüssigkeiten, allgemeine Existenzsätze, Math. Zeitschr. 1 (1918), p. 229—284, 3 (1919), p. 172—174; II. Abh. Stabilitätsuntersuchungen, 5 (1919).
2. Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Berl. Ber. 1918, p. 1120—1135.

Cl. Maxwell, On the stability of the motion of Saturns' ring, Cambridge 1859. Scient. papers I vol. p. 288.

B. Globa-Michailenko, 1. Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation, Paris C. R. 163 (1916), p. 700—703, und Nouv. Ann. de Math. 16 (1916), p. 506—508.

2. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, J. de Math. 7 (1916), p. 1—78.

H. Poincaré, a) Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Act. math. VII (1885).

b) Sur la stabilité de l'equilibre des figures pyriformes, affectées par une masse fluide en rotation, London Phil. Trans. 198 (1902).

B. Riemann, Ein Beitrag zur Untersuchung über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoids, Götting. Nachr. 9 (1862). Gesamm. Werke 2. Aufl. 1892 p. 182.

E. Roche, a) Recherches sur les comètes, Paris Inst. Mém. XVI. (1848).

b) Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné, Montpellier Mém. I (1847—1850), II (1854).

c) Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes, ebenda II (1854).

d) Sur les atmosphères des comètes, Paris Obs. Mém. V (1859).

e) Reflexions sur la théorie des phénomènes cométaires, Montp. Mém. II (1860).

f) Nouvelles recherches sur la figure des atmosphères des corps célestes, Montp. Mém. V (1863).

g) Essay sur la constitution et l'origine du système solaire, ebenda VIII (1875).

h) Mémoire sur l'état interieur du globe terrestre, ebenda X (1881).

K. Schwarzschild, Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse, Diss. München 1896.

G. Stokes, 1. On attractions and on Clairauts Theorem, Cambr. Dubl. math. Journ. 4 (1849) = Coll. Pap. 2. Vol. Cambridge 1883, p. 108.

2. On the variation of gravity at the Earth, Cambridge Trans. 8 (1849) = Coll. Papers, 2 Vol., Cambridge 1883.

F. Tisserand, 1. Mémoire sur l'anneau de Saturne, Toulouse Obs. Mém. I (1880).

2. Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil, Paris Obs. Mém. XVI (1882).

P. Veronnet, Rotation de l'ellipsoide hétérogène et figure exacte de la terre, J. p. Math. VIII (1912).

Wiechert, Über die Massenverteilung im Inneren der Erde, Götting. Nachr. (1897), p. 221.

---

1. Einleitung. Die erste Anregung zu theoretischen Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, einschließlich der der Erde, gab *Newton.*[1]) Die 1672 zuerst von *J. Richer* gemachte Beobachtung, daß das Pendel einer Uhr, die von Paris nach Cayenne gebracht worden war, da um $1^1/_4$ Pariser Linien[2]) verkürzt werden mußte, um seinen normalen Gang zu erhalten, dürfte *Newton* zu der Anschauung geführt haben, daß die Erde keineswegs eine Kugel sei,

1) *Newton*, Principia, Sectio XII und XIII des ersten und XVIII—XX des zweiten Buches.

2) *Todhunter,* Hist., § 52.

sondern wie die beiden großen Planeten, Jupiter[3]) und Saturn, die im Fernrohre schon bei ganz mäßiger Vergrößerung nicht als kreisförmige Scheiben, sondern in Form von Ellipsen mit deutlich merkbarer Abplattung erscheinen, die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoides besitze. Es lag dann der Gedanke nahe, diese eigentümliche Gestalt der Erde dem Zusammenwirken der zwei auf ihrer Oberfläche wirkenden Kräfte zuzuschreiben, nämlich der Gravitation zwischen ihren einzelnen Teilchen und der durch die Rotation um ihre Achse entstehenden Fliehkraft.

So entstand und wurde zum ersten Male ein Problem formuliert, das seitdem in intensiver Weise die Mathematik beschäftigte, wie kein anderes physikalisches Problem zu ihrer Entwicklung beitrug, eine strenge Lösung aber bis heute noch nicht gefunden hat. Es lautet:

Welches sind die Endformen des relativen Gleichgewichtes, oder, wie weiterhin kurz gesagt werden soll, welches sind die möglichen Gleichgewichtsfiguren für eine Flüssigkeitsmasse, von der folgende Annahmen gemacht werden:

1. daß sie im Raume frei schwebe,
2. daß ihre Teilchen sich gegenseitig anziehen mit Kräften, die dem *Newton*schen Gravitationsgesetze gehorchen,
3. daß die ganze flüssige Masse wie ein starrer Körper um eine im Raume feste Achse mit konstanter Geschwindigkeit rotiere.[3a])

3) Darauf weist besonders der Umstand hin, daß *Newton* sofort, nachdem er für die Erde das Gesetz aufgestellt hat, das den Zusammenhang zwischen Abplattung, Fliehkraft und Schwere darstellt, es auf die Berechnung der Abplattung des Planeten Jupiter anwendet und für sie die Größe 1 : 9,2 findet. *Todhunter,* Hist., § 29.

3a) Die Gleichgewichtsfigur der Erde, unter der Voraussetzung, daß sie ursprünglich nicht flüssig, sondern *plastisch* war, so daß zu ihrer Bestimmung die Gleichungen der Elastizitätslehre in Anwendung kommen, bestimmten: *J. H. Jeans,* „On the Vibrations and stability of a gravitating planet". London Phil. Trans., 201 (1903), p. 157, ferner *A. E. Love,* The gravitational stability of the Earth, ebenda 207 (1909). Beide wollen mit dieser Annahme gewisse Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Land und Wasser auf der Erde, besonders den großen Unterschied zwischen der Nord- und Südhalbkugel der Erde in dieser Richtung, erklären. Hier wären auch zu erwähnen die Untersuchungen über die Figur der elastisch-festen Erde und deren Deformation durch Flutkräfte. Vgl. die Darstellung in *F. Klein* und *Sommerfeld,* Die Theorie des Kreisels, Leipzig (1897 bis 1910), Abschnitt VIII B: geophysikalische Anwendungen, § 7, p. 685—706. — Doch finden diese eine eingehendere Erörterung in Encykl. VI 1, 6 (*G. H. Darwin* und *S. S. Hough,* Bewegung der Hydrosphäre), besonders Nr. 37, p. 61: „Elastische Tiden und die Steifigkeit der Erde", die auch einen Nachweis der reichhaltigen Literatur über diese Frage enthalten.

2. Newton und Huygens. Die von *Newton* gegebene Lösung ist nur eine genäherte. Von der Annahme ausgehend, daß die Flüssigkeit eine homogene ist, setzt er für sie die Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoides voraus und versucht es, aus dem Verhältnisse zwischen der Schwere und der Fliehkraft die Größe der Abplattung zu berechnen. Als Gleichgewichtsbedingung benutzt er ein Prinzip, das seitdem von allen älteren Mathematikern verwendet wurde, ehe in der Folge von *Clairaut*[4]), *Euler*[5]) und *D'Alembert*[6]) die Bedingungsgleichungen in strengerer und analytischer Form aufgestellt und später von *Legendre* und *Laplace* unter Einführung des Potentialbegriffs vereinfacht wurden. Es lautet: Man denke sich durch die Erde zwei Kanäle gezogen, den einen vom Pol bis zum Erdmittelpunkt, den anderen von da bis zu einem beliebigen Punkte des Äquators. Beide Kanäle seien mit Wasser gefüllt. Im Falle des Gleichgewichtes müssen die Wassermassen in ihnen gleich schwer sein. Würde die Erde nicht rotieren, so könnte dies nur dann eintreten, wenn beide Kanäle gleiche Längen haben. Da aber die Erde rotiert und die aus dieser Rotation entstehende Fliehkraft am Äquator am größten ist, während sie am Pole verschwindet, so wird dadurch die Wassermasse am Äquator leichter erscheinen als die des durch den Pol gehenden Kanals, und zwar um einen Bruchteil, der dem Verhältnis zwischen Fliehkraft und Schwere gleichkommt.

Für dieses Verhältnis, für das im folgenden stets das Zeichen φ gelte und dessen analytischer Ausdruck

$$\varphi = \omega^2 a/g$$

lautet, wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit, a der Äquatorradius und g die Schwere am Äquator bedeutet, nimmt er den Wert

$$\varphi = 1:289$$

an. In der Tat folgt aus den Zahlen

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi/86164 \text{ sec}^{-1} \\ a &= 637\,820\,000 \text{ cm} \\ g &= 978{,}028 \text{ cm sec}^{-2} \text{ nach } \textit{Helmert}^{7)} \\ \varphi &= 1:288{,}367 = 0{,}0034678\ldots. \end{aligned}$$

---

4) *Clairaut*, Erdgestalt, I. Teil. Allgemeine Lehrsätze zur Auffindung von Voraussetzungen, die ein Gleichgewicht der Flüssigkeiten zulassen.

5) *Euler*, Principes généraux de l'équilibre des fluides, Berlin, Hist. de l'acad. 11 (1755). Einführung des Begriffs des Druckes in die Lehre von den Flüssigkeiten. Vgl. auch IV 15 (*A. E. H. Love*), Nr. 1, p. 50.

6) *D'Alembert*, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744.

7) *Helmert*, Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde, Encykl. VI 1, 7, p. 95.

Zur Bestimmung der Schwere jedes der beiden Kanäle hat *Newton* die Anziehung eines Rotationsellipsoides auf den Pol und auf einen beliebigen Punkt des Äquators zu berechnen. Diese schwierige Integrationsaufgabe beschäftigte die Mathematiker seit *Newton* aufs lebhafteste. Sie bildete einen beliebten Kräftemesser für ihren Wetteifer untereinander.[8]) *Newton* löste sie nur genähert mit einer Genauigkeit, welche einer Berücksichtigung der ersten Potenz der Abplattung gleichkommt. Sei diese mit α bezeichnet, d. h. sei, wenn $a = b$ der Äquator-, c der Polarradius ist,

$$\alpha = (a - c)/a,$$

so findet *Newton* der Reihe nach (bloß nach numerischer Berechnung mit $\alpha = 1:100$):

1. Anziehung eines Rotationsellipsoides mit den Achsen $a = b$ und c auf den Pol im Verhältnis zur Anziehung einer Kugel mit dem Radius c $= 1 + \frac{4\alpha}{5}$,
2. Anziehung einer Kugel vom Radius c im Verhältnis zur Anziehung einer Kugel vom Radius a auf einen beliebigen Punkt der Oberfläche $= \frac{c}{a} = 1 - \alpha$,
3. Anziehung einer Kugel vom Radius a im Verhältnis zur Anziehung eines Rotationsellipsoides mit den Achsen $a = b$ und c auf einen Punkt des Äquators $= 1 + \frac{2\alpha}{5}$,

und daraus durch Multiplikation:

Verhältnis der Anziehungen eines Rotationsellipsoides mit den Achsen $a = b$ und c auf den Pol und auf einen Punkt des Äquators, oder, was dasselbe ist, Verhältnis des Gewichtes des Polkanals zu dem des Äquatorkanals $= \left(1 + \frac{4\alpha}{5}\right)(1 - \alpha)\left(1 + \frac{2\alpha}{5}\right) = 1 + \frac{\alpha}{5}$, d. h. ein Ellipsoid, dessen Abplattung α ist, zieht einen Punkt am Pol mit einer um den $\frac{\alpha}{5}$ Teil größeren Kraft an als einen am Äquator. Da aber die Masse des Polkanals um den α. Teil kleiner ist als die des durch den Äquator gezogenen, so bleibt für die Änderung durch die Fliehkraft die Differenz $\alpha - \frac{\alpha}{5} = \frac{4\alpha}{5}$ übrig, welche sagt, um wieviel der letztere Kanal länger sein muß als der erstere. Es besteht also die Relation

$$\varphi = 4\alpha/5 \qquad \alpha = 5\varphi/4,$$

die das *Newton*sche Hauptergebnis darstellt: *Wenn* eine homogene Flüssigkeitsmasse, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit um *eine*

8) *Burckhardt* u. *Meyer,* Potentialtheorie, Encykl. IIa 7, Nr. 15, p. 482.

feste Achse rotiert, als Gleichgewichtsfigur die Form eines Rotationsellipsoides annimmt, so ist die Abplattung

$$(1) \qquad \alpha = 5\varphi/4.$$

Für die Erde folgt daraus $\alpha = 1:230$.

Für die Änderung der Schwere oder der Länge eines Sekundenpendels leitet er aus der Bedingung, daß $gr =$ const. ist, worin g die Schwere für den Endpunkt des Radius r bedeutet, die Formel

$$g = g_0\,(1 + \alpha \sin^2 \varphi)$$

ab und gibt eine Tafel[9]) der Pendellängen für die geographischen Breiten von 0^0 bis 90^0 von je 5^0 zu 5^0.

Die gleichen Tatsachen von der Änderung der Schwere auf der Erdoberfläche regten auch *Huygens*[10]) zu seinen Untersuchungen über die Gestalt der Erde an. Seine Behandlung des Problems unterscheidet sich namentlich darin von der *Newtons*, daß er dessen Art der Berechnung der Anziehung eines Körpers als Summe der unendlich vielen Anziehungen von Teilchen zu Teilchen desselben leugnet, sondern die Schwere als eine konstante Kraft ansieht, die im Erdmittelpunkte ihren Sitz habe, der die Fliehkraft entgegenwirke und sie am Äquator um den 1:288. Teil ihrer Intensität vermindere. Als Gleichgewichtsbedingung stellt er das Prinzip auf, daß die Oberfläche der Gleichgewichtsfigur in allen ihren Teilen auf der Resultierenden zwischen der konstanten Schwere und der Fliehkraft, d. i. auf der Richtung der Lotlinie oder der scheinbaren Schwere senkrecht stehe. Doch zur Berechnung der Oberfläche verwendet er nur wieder das *Newton*sche Prinzip der gleichschweren Kanäle.[11]) Er erhält als Abplattungswert

(2) $\qquad \alpha = \frac{1}{2}\varphi \qquad$ und speziell für die Erde $\alpha = 1:576$

---

9) Aus dieser Tafel seien hier die Werte für die geogr. Breiten $\varphi = 0^0, 45^0, 90^0$ mitgeteilt und zum Vergleiche mit neuen Beobachtungen die nach *Helmert* (Fußnote 7) angesetzt:

$\varphi = 0^0$	$l = 439{,}468'''$	$= 991{,}36$ mm;	*Helmert* $l = 990{,}95$ mm
45^0	$440{,}428$	$= 993{,}53$	$993{,}58$
90^0	$441{,}387$	$= 995{,}69$	$996{,}20.$

10) *Huygens,* Discours de la cause de la pesanteur. Erschienen als Anhang zum: Traité de la lumière, Leiden 1690. *Todhunter*, Hist., § 47 ff.

11) Die direkte Bestimmung der Gleichung der Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeitsmasse aus der Bedingung, daß sie auf der Resultierenden aus der konstanten Schwere und der Fliehkraft senkrecht steht, dürfte auf elementargeometrischem Wege zuerst durchgeführt haben *J. Hermann* in Basel in seiner „Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum et fluidorum libri duo“, Amsterdam 1716, p. 361 ff.

und als Gesetz für die Änderung der Schwere auf der Erde

$$g = g_0\,(1 + \alpha \sin^2 \varphi).$$

Clairaut[12]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß man der *Huygens*schen Auffassung der Erdanziehung die Deutung geben kann, als ob die Erde keine homogene Flüssigkeit sei, sondern ihre Dichte von der Oberfläche zum Mittelpunkte hin zunehme und in diesem fast einen unendlich großen Wert habe. Denn dann überwiegt dessen Anziehung die aller anderen Punkte, und es hat den Anschein, als ob er allein der Sitz der Anziehung sei. Die zwei theoretischen Werte der Abplattung können daher als Grenzwerte aufgefaßt werden, von denen der erste, *Newton*sche ($\alpha_1 = 5\varphi/4$), dem Falle einer homogenen Dichte der Erde, der zweite, *Huygens*sche ($\alpha_2 = \varphi/2$), dem Falle entspricht, als ob ihre Masse fast ganz im Mittelpunkte konzentriert sei. Der wahre Wert der Abplattung muß daher für alle Himmelskörper, sofern sie nur ellipsoidischer Form sind, zwischen beiden Werten liegen.

Die folgende Tafel[13]) mag ein Bild davon geben, inwieweit dieses Resultat der Wahrheit entspricht. Sie enthält für die großen Planeten des Sonnensystems und außerdem die Sonne alle Angaben, aus denen man die Größe φ und daraus α_1 und α_2 berechnen kann, sowie die Abplattungswerte selbst, soweit sie zum Teile aus direkten Messungen, zum Teile aus theoretischen Berechnungen (säkulare Störungen der Monde) bekannt sind.

Tafel I.

	Rotationsdauer	Dichte	φ	$\alpha_1 = 5\varphi/4$	$\alpha_2 = \varphi/2$	α	Kleinste Rotat.-dauer
Merkur	24^h . ?	5,65	1 : 341	1 : 275	1 : 682	?	$2^h\ 24^m$
Venus .	24 . . ?	5,41	1 : 222	1 : 178	1 : 444	?	2 28
Erde . .	23 56^m	5,56	1 : 288	1 : 230	1 : 576	1 : 298	2 25
Mars . .	24 37	3,99	1 : 217	1 : 174	1 : 434	1 : 230	2 52
Jupiter .	9 55	1,31	1 : 11,8	1 : 9,4	1 : 23,5	1 : 14	5 0
Saturn .	10 29	0,72	1 : 6,4	1 : 5,1	1 : 12,8	1 : 11	6 45
Uranus .	?	0,80	—	—	—	1 : 10	—
Neptun .	?	1,17	—	—	—	—	—
Sonne .	25^d 4 —	1,42	1 : 46 700	1 : 37 500	1 : 93 400	—	4 58

12) *Clairaut*, An Inquiry concerning the figure of such planets as revolve about an axis supposing the density continually to vary from the centre towards the surface, London Phil. Trans. 40 (1738). *Todhunter*, Hist., § 173.

13) Die Tafel ist entnommen *Tisserand*, Méc. cél. II, p. 94. Vgl. auch *Lovell*, On the limits of the oblateness of a rotating planet and the physical deductions of them, Phil. mag. 19 (1910), p. 700.

3. Das Maclaurinsche Rotationsellipsoid. Der erste, dem die Aufgabe glückte, den vollen analytischen Ausdruck für die Anziehungskräfte eines Rotationsellipsoides von homogener Dichteverteilung auf einen Punkt seiner Oberfläche aufzufinden, war *Maclaurin.*[14]) Auf dieser Grundlage konnte er nunmehr den strengen Beweis dafür geben, daß das abgeplattete Rotationsellipsoid die Gleichgewichtsfigur für eine rotierende Flüssigkeitsmasse ist. Er findet für die Komponente $X = Y$ der Anziehung auf einen Punkt des Äquators

$$X = Y = \frac{2\pi\varrho k^2 \sqrt{1-e^2}}{e^3}\, a\left(\arcsin e - e\sqrt{1-e^2}\right)$$

und für die auf den Pol

$$Z = \frac{4\pi\varrho k^2}{e^3}\, c\left(e - \sqrt{1-e^2}\arcsin e\right),$$

wenn, wie schon oben erwähnt wurde, $a = b$ die Äquator-, c die Polarachse des Ellipsoides, e dessen Exzentrizität $e = \sqrt{1 - c^2/a^2}$, ϱ die Dichte der Flüssigkeit und k^2 die Konstante (*Gauß*sche Gravitationskonstante) im *Newton*schen Gesetz bedeuten. Die Gleichgewichtsbedingung, aufgestellt auf Grund des *Newton*schen Prinzips der gleich schweren Kanäle, nimmt bei ihm die Form an,

$$(X - \varphi X) : Z = c : a$$

und gibt
$$\varphi = \frac{(3-2e^2)\arcsin e - 3e\sqrt{1-e^2}}{\arcsin e - e\sqrt{1-e^2}}$$

oder in Reihen entwickelt, die, da $e < 1$ ist, konvergieren,

$$\varphi = \frac{2}{5}e^2 + \frac{24}{175}e^4 + \frac{64}{875}e^6 + \ldots$$

und daraus durch Umkehrung

$$e^2 = \frac{5}{2}\varphi - \frac{15\varphi^2}{7} + \frac{40\varphi^3}{49} + \ldots$$

was, da die Abplattung α genähert $= \frac{1}{2}e^2$ gesetzt werden kann, bei bloßer Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung mit dem Newtonschen Resultate $\alpha = 5\varphi/4$ übereinstimmt.

Führt man statt der Exzentrizität $e = \sqrt{1 - c^2/a^2}$ die zweite

---

14) *Maclaurin*, A treatise of fluxions, Edinburg 1742. *Todhunter*, Hist., § 241 ff. Vorher hatte schon *J. Stirling* in seinem Buche „On the figure of the earth and the variation of gravity on the surface", London Phil. Trans. 39 (1735), Ausdrücke für die Anziehungskräfte X und Z gegeben, die bis zu den zweiten Potenzen der Exzentrizität gehen, und damit bewiesen, daß bis zu diesem Grade der Annäherung das abgeplattete Rotationsellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein kann.

$\varepsilon = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$ ein, so nehmen die Ausdrücke für X und Z die neue Form an

$$X = \frac{2\pi\varrho k^2}{\varepsilon^3} a[(1+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - \varepsilon]$$

$$Z = \frac{4\pi\varrho k^2}{\varepsilon^3} c(1+\varepsilon^2)(\varepsilon - \operatorname{arctg}\varepsilon),$$

und die Gleichung für φ wird

$$\varphi = \frac{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - 3\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - \varepsilon}.$$

Definiert man ferner die Größe φ etwas anders als bisher, nämlich als Verhältnis der Fliehkraft am Äquator zur Anziehung einer Kugel, deren Radius gleich ist der Äquatorachse des Ellipsoides, d. h.

$$\varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho},$$

so daß die Gleichgewichtsbedingung in

$$(X - \omega^2 a^2) : Z = c : a$$

übergeht, so wird die transzendente Bedingungsgleichung zur Bestimmung von φ

$$\varphi = 3\frac{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - 3\varepsilon}{2\varepsilon^3}. \tag{3}$$

In dieser Form, die allen weiteren Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen φ und ε zugrunde liegt, kommt die Gleichung zum ersten Male bei *D'Alembert*[15]) vor. Sie wurde von *Laplace*[16]) in seine Mécanique céleste aufgenommen. Aus ihr folgt

1. für $\varepsilon < 1$

$$\varphi = 6\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\cdot\frac{n\varepsilon^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}$$

und daraus durch Umkehrung

$$\varepsilon^2 = 2\frac{5\varphi}{4} + \frac{12}{7}\left(\frac{5\varphi}{4}\right)^2 + \frac{148}{49}\left(\frac{5\varphi}{4}\right)^3 + \cdots,$$

2. für $\varepsilon > 1$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4\varepsilon} + \frac{9\pi}{4\varepsilon^3} - \frac{6}{\varepsilon^2} - 6\sum_2^\infty \frac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n-3)\varepsilon^{2n}}$$

und

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{128}{\pi^3}\left(\frac{\varphi}{3}\right)^2 + \frac{64(128-3\pi^2)}{\pi^5}\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3 + \cdots$$

---

15) *D'Alembert*, Sur la figure de la terre, Opuscules mathém., Paris 1773. *Todhunter*, Hist., § 579.

16) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. 3, § 18; vgl. auch *Love*, Encykl. IV 2, 15, Nr. 9, p. 65.

Eine weitere Entwicklungsform, die für $\varepsilon < 1$ gültig ist, gibt *Ivory*[17]. Sie lautet

$$\varphi = \frac{2}{5}\sin^2\psi + \frac{2}{5\cdot 7}\sin^4\psi - \sum_4^\infty \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\,\frac{2n-6}{2}\sin^{2n}\psi$$

und ergibt sich aus Gleichung (3) durch die Substitution

$$\varepsilon = \operatorname{tg}\psi$$

und die Reihe

$$\psi\operatorname{cotg}\psi = 1 - \frac{1}{3}\sin^2\psi - \sum_2^\infty \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\sin^{2n}\psi.$$

4. Diskussion der Gleichung (3). *Maclaurin* verwertet die Gleichung (3) nur für den Fall, daß φ sehr klein ist. Er findet dann in Bestätigung des *Newton*schen Resultates $\varepsilon^2 = \frac{5}{2}\varphi$. Eine Tafel einander zugehöriger Werte von $a/c = 1 + \alpha$ und $1 : \sqrt{\varphi}$ gibt *Th. Simpson*[18]. Aus ihr ersieht man, daß einem gegebenen φ zwei Werte von α zugehören. Doch entgeht diese Tatsache *Simpson.* Dagegen findet er, daß für ein $1 : \sqrt{\varphi}$ ein Minimalwert existiert, dem eine obere Grenze für die Rotationsgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfigur entpricht, nämlich $1 : \sqrt{\varphi} = 1{,}7226$. Aus ihm folgt

$$\text{(3a)}\qquad \varphi = 0{,}33700,\quad \varepsilon = 2{,}5292,\quad e = 0{,}9289.$$

Bezeichnet man die Rotationsdauer der Flüssigkeitsmasse mit T, die kleinste, die dem Grenzwert $\varphi = 0{,}33700$ zugehört, mit T_0, so ist

$$T_0 = T\sqrt{\varphi/0{,}33700},$$

---

17) *Ivory*, On the figure requisite to maintain the equilibrium of a homog. fluid mass, that revolves upon an axis, London Phil. Trans. 30 (1824), p. 141. *Todh.*, Hist., § 1432.

18) *Th. Simpson*, A mathem. Dissertation on the figure of the earth, London 1743. *Todh.*, Hist., § 285.

19) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. 3, § 19. Im § 20 gibt *Laplace* einen Beweis dafür, daß ein verlängertes Rotationsellipsoid keine mögliche Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeitsmasse ist. Für ein solches hat man $i\varepsilon = \eta$ zu setzen und erhält

$$X = Y = 2\pi\varrho k^2\cdot\frac{1-\eta^2}{\eta^3}\cdot\left(\frac{\eta}{1-\eta^2} - \frac{1}{2}\lg\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

$$Z = 4\pi\varrho k^2\cdot\frac{1-\eta^2}{\eta^3}\cdot\left(\eta - \frac{1}{2}\lg\frac{1+\eta}{1-\eta}\right).$$

Die Gleichung (3) geht damit über in

$$\varphi = -\frac{3\cdot 2}{3\cdot 5}\eta^2 - \frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}\eta^4 - \frac{3\cdot 6}{7\cdot 9}\eta^6 - \cdots,$$

d. h. φ ist negativ, was physikalisch unmöglich ist. Vgl. auch *Plana*, Sur la figure mathém. de la terre. Astr. Nachr. 36 (1853), p. 166.

und nach dieser Formel sind die in der letzten Kolonne der Tafel I unter „Kleinste Rotationsdauer" mitgeteilten Werte berechnet.

Die strenge Diskussion der Gleichung (3) führte als erster *D'Alembert*[15]) durch. Sie wurde von *Laplace*[19]) in seine Mécanique céleste aufgenommen und lautet:

So lange $\varphi < 0{,}33700$, genügen der Gleichung zwei Werte von ε, der eine zu berechnen nach der für $\varepsilon < 1$, der andere nach der für $\varepsilon > 1$ geltenden Reihe.

Für $\varphi = 0{,}33700$ fallen beide Werte zusammen.

Für $\varphi > 0{,}33700$ ist eine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur unmöglich. Speziell für die Erde ist

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 = \frac{5}{4}\varphi = 1:230, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{4\varphi} = 680,$$

d. h. die eine der möglichen Gleichgewichtsfiguren ein sehr schwach abgeplattetes Rotationsellipsoid, die zweite eine sehr breite, flache Scheibe.

Ist M die Masse der Flüssigkeit gegeben, so erhält man für die Achsen des Ellipsoids

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}} \cdot \sqrt[6]{(1+\varepsilon^2)}, \quad c = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{1+\varepsilon^2}}$$

und damit als Grenzwerte für den Übergang auf $\varphi = 0$

$$\varepsilon_1 = 0, \quad a_1 = b_1 = c_1, \quad \text{d. i. die Kugel,}$$
$$\varepsilon_2 = \infty \quad a_2 = b_2 = \infty \quad c_2 = 0,$$

eine unendlich große, aber unendlich dünne Scheibe als mögliche Gleichgewichtsfiguren.

5. Diskussion des Rotationsmomentes. Die Einführung des Rotationsmomentes, das nach bekannten physikalischen Sätzen für einen rotierenden Körper konstant ist, falls auf ihn bloß *„innere"* Kräfte einwirken, oder nur solche *„äußere"*, deren Moment in bezug auf die Rotationsachse selbst gleich Null ist, als Bestimmungsgröße zur Charakterisierung der Gleichgewichtsfigur an Stelle der Rotationsgeschwindigkeit ω oder der Größe φ verdankt man *Laplace*[20]). Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Masse um die Rotationsachse mit J, so ist das Rotationsmoment

$$R = \omega J,$$

und da für eine homogene Masse

$$J = \frac{2}{5}c^2 M(1+\varepsilon^2), \quad M = \frac{4\pi}{3}\varrho c^3(1+\varepsilon^2),$$

20) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. 3, § 21.

folgt $$R^2 = \omega^2 J^2 = \frac{3\omega^2 M^2}{25\pi\varrho} \sqrt[3]{\frac{3M(1+\varepsilon^2)^2}{4\pi\varrho}},$$

was, in die Gleichung (3) substituiert, auf

$$R^2/K = 6(1+\varepsilon^2)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - 3\varepsilon}{\varepsilon^3}, \tag{4}$$

worin $$K = \frac{k^2 M^3}{25} \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}}$$

führt. Die Diskussion dieser neuen Gleichung zeigt, daß die Beziehung zwischen R^2/K und ε nunmehr eine eindeutige ist. Speziell wird die Gleichgewichtsfigur für

a) $R^2/K = 0$: $\varphi = 0$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$,
eine Kugel,

b) $R^2/K = 2{,}3065$: $\varphi = 0{,}28068$, $\varepsilon = 1{,}39457$, $\alpha = 0{,}4173$,
das Verzweigungsellipsoid mit *Jacobi*s Ellipsoid,

c) $R^2/K = 5{,}1174$: $\varphi = 0{,}33700$, $\varepsilon = 2{,}5292$, $\alpha = 0{,}6323$,
das Rotationsellipsoid, das dem Maximum von φ entspricht,

d) $R^2/K = 6{,}4803$: $\varphi = 0{,}33016$, $\varepsilon = 3{,}14156$, $\alpha = 0{,}6967$,
das *Riemann*sche Ellipsoid,

e) $R^2/K = \infty$: $\varphi = 0$, $\varepsilon = \infty$, $\alpha = \infty$,
die unendliche Scheibe.

6. Heterogene Flüssigkeiten. Clairauts Theorie. Die Annahme, daß die Himmelskörper von homogener Masse sind, entspricht der Wahrheit nicht. Schon *Newton* machte die Bemerkung, daß, wenn zwischen der von ihm berechneten Abplattung des Planeten Jupiter und dem beobachteten Werte derselben ein Unterschied bestehe, und wenn ebenso die Pendelbeobachtungen eine größere Änderung vom Pol zum Äquator fordern, als es nach seiner Theorie der Fall sein sollte, dies dem Umstande zuzuschreiben sei, daß die Dichte der Planeten keineswegs konstant ist. *Newton* glaubte jedoch, daß die Abplattung eines Planeten um so größer sein werde, je mehr seine Dichte von der Oberfläche gegen die Mitte hin zunehme.[21])

Nach *Newton* befaßte man sich vielfach damit, eine Theorie der Gleichgewichtsfiguren auch für heterogene Flüssigkeiten aufzustellen, und zwar unter verschiedenen Annahmen für die Änderungen der Dichte in ihrem Inneren. Es haben diese Untersuchungen eine besondere Bedeutung erlangt in ihrer Anwendung auf die Erde, nament-

21) Siehe die Kritik von *Newton* durch *Clairaut,* Erdgestalt, II. Teil, p. 78, 107 u. 120.

lich in ihrer Anwendung auf eine schärfere Ableitung ihrer Abplattung, eine genauere Bestimmung des Wirkungsgesetzes der Schwerkraft auf ihrer Oberfläche und eine kritische Prüfung der verschiedenen über ihre innere Konstitution aufgestellten Hypothesen. In dieser Richtung bilden sie einen Hauptgegenstand der höheren Geodäsie[22]) und sollen hier nur so weit berührt werden, als sie mit dem zu lösenden allgemeinen Problem zusammenhängen.

Die erste Lösung dieses neuen Problems rührt her von *Clairaut*[23]). Sie beruht auf folgenden Annahmen:

1. Die Erde oder die Masse, deren Gleichgewichtsfigur bestimmt werden soll, besteht aus unendlich vielen Schichten, die alle eine gemeinschaftliche Rotationsachse haben. Ihre Dichte ϱ variiert von Schicht zu Schicht, und zwar zunehmend von der Oberfläche gegen die Mitte hin, so daß $\varrho = f(r)$ ist, wenn r die Distanz einer beliebigen Schicht vom gemeinsamen Mittelpunkt aller bedeutet, und f nicht notwendig eine kontinuierliche Funktion sein muß.

2. Es ist ebensowenig notwendig, die Annahme zu machen, daß alle einzelnen Schichten ursprünglich flüssig waren. Nur die Oberflächenschicht muß als eine solche angesehen werden, die, wie wenn sie flüssig wäre, durch die gleichmäßige Rotation eine bestimmte Form erlangte und sie beibehielt. Die inneren Schichten können auch als von Anfang an fest angenommen werden. Die Lösung des Problems schließt daher auch den Fall ein, daß man die Erde als einen festen Körper ansieht, der von einer dünnen Wasserschicht bedeckt ist.

3. Jede dieser einzelnen Schichten hat die Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoides von sehr kleiner Abplattung, so daß die Berücksichtigung der ersten Potenz derselben genügt. Die Abplattungen der einzelnen Schichten sind veränderlich, aber kontinuierlich veränderlich.

Clairaut berechnet die Komponenten der Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen beliebigen Punkt desselben, daraus durch Differentiation die Kräfte einer unendlich dünnen, ellipsoidischen Schale und durch deren Integration die eines geschichteten Ellipsoides. Er erhält, indem er folgende unbestimmt bleibende Integrale einführt:

---

22) Vgl. *P. Pizetti*, Höhere Geodäsie, Encykl. VI 1, 3, besonders Nr. **1—9** u. **47—53**; ferner *F. H. Helmert,* Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde, Encykl. VI 1, 7, besonders Nr. **1—5** u. **25**.

23) *Clairaut,* Erdgestalt, II. Teil, IV. Abschnitt. *Todh.*, Hist., § 337.

$$(5)\quad \begin{cases} K = \int_0^r \varrho r^2 dr, \quad L = \int_0^r \varrho\, d(r^3\alpha), \quad N = \int_0^r \varrho\, d(r^5\alpha), \quad E = \int_0^r \varrho r^4 dr \\ F = \int_r^a \varrho \frac{d\alpha}{dr} dr, \end{cases}$$

in denen r wie oben die Distanz einer beliebigen Schichte vom gemeinsamen Mittelpunkte aller, d. h. den Radius der einzelnen Schichten, ϱ deren variable Dichte, α die variable Abplattung als Funktion von r aufgefaßt, bedeutet, ferner $z : r = \sin\theta$ gesetzt ist:

$$(6)\quad \begin{cases} X = -\frac{4\pi k^2}{3} x \left(\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5}(1 - 5\sin^2\theta) - \frac{2}{5}F\right) \\ Y = -\frac{4\pi k^2}{3} y \left(\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5}(1 - 5\sin^2\theta) - \frac{2}{5}F\right) \\ Z = -\frac{4\pi k^2}{3} z \left(\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5}(3 - 5\sin^2\theta) + \frac{4}{5}F\right) \end{cases}$$

und aus ihnen durch Substitution in die Gleichgewichtsbedingung, die bei ihm durch Elimination von dx und dz aus den beiden Gleichungen

$$(X + \omega^2 x)\, dx + Z dz = 0, \quad x dx + z(1 - 2\alpha)\, dz = 0$$

die Form $$\frac{X + \omega^2 x}{x} - \frac{Z}{z} = -\frac{2Z\alpha}{z}$$

besitzt, als erste Beziehungsgleichung zwischen den angenommenen Integralen:

$$(7)\qquad \frac{5\omega^2}{8\pi k^2} r^5 = 5\alpha r^2 K - N - r^5 F.$$

Ihre Differentiation nach r gibt die zweite Beziehungsgleichung

$$(8)\qquad \frac{5\omega^2}{8\pi k^2} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{d\alpha}{dr} + \frac{2\alpha}{r^3}\right) K - F,$$

und deren nochmalige Differentiation die dritte und Schlußgleichung

$$(9)\qquad \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\varrho r^2}{K}\frac{d\alpha}{dr} + 2\alpha\left(\frac{\varrho r}{K} - \frac{3}{r^2}\right) = 0,$$

das ist eine lineare Differentialgleichung, die den Zusammenhang zwischen ϱ und α und den Differentialquotienten von α darstellt.

Diese drei Gleichungen repräsentieren das erste *Clairaut*sche Ergebnis.

Weiter berechnet *Clairaut* die Schwere auf der Oberfläche des Ellipsoids, die er als die in die Richtung des Radiusvektors r fallende Komponente der Anziehung unter Hinzufügung der Fliehkraft definiert. Er findet für sie

$$g = \frac{4\pi k^2}{3}\left(\frac{3K_0 + L_0}{r^2} + \frac{3N_0}{5r^4}(1 - 3\sin^2\theta)\right) - \omega^2 r \cos^2\theta,$$

worin in K_0, L_0 und N_0 die über das ganze Ellipsoid, also von 0 bis a, sich erstreckenden Werte der Integrale K, L und N bedeuten. Ist nun g_p die Schwere am Pol ($\sin\theta = 1$), g_a die Schwere am Äquator ($\sin\theta = 0$) und wird ferner ω^2 ersetzt durch φ nach

$$\varphi = \frac{\omega^2 a^3}{4\pi k^2 K_0},$$

ferner $r = a(1 - \alpha_0 \sin^2\theta)$ substituiert, worin α_0 die Abplattung an der Oberfläche des Ellipsoids vorstellt, so folgt

$$\frac{g_p - g_a}{g_a} = 2\alpha_0 + \varphi - \frac{3N_0}{5a^2K_0}.$$

Es ist aber, wenn man in der Gleichung (7) die in ihr vorkommenden Größen auf die Oberfläche bezieht,

$$N_0 = 5a^2K_0(\alpha_0 - \varphi/2), \tag{7a}$$

und damit ergibt sich

$$\beta = \frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{5\varphi}{2} - \alpha_0, \tag{10}$$

das zweite *Clairaut*sche Ergebnis, das unter dem Namen des „*Clairaut*schen Theorems“[24]) bekannt ist. Es gibt für die Variation der Schwere auf der Erde die Formel

$$g_0 = g_a(1 + \beta \sin^2\theta).$$

7. D'Alembert und die Theorie der Präzession. Auf die Möglichkeit, aus der Konstanten der Präzession die Abplattung der Erde zu berechnen, hat zuerst *D'Alembert*[24a]) in seinem grundlegenden Werke hingewiesen. Unter der Annahme einer der *Clairaut*schen analogen Schichtung des Erdellipsoids berechnet er dessen Trägheitsmomente zu

$$A = B = \frac{8\pi}{3}\int_0^a \varrho r^4 dr - \frac{8\pi}{45}\int_0^a \varrho\, d(r^5\alpha) = \frac{8\pi}{3}E_0 - \frac{8\pi}{45}N_0$$

$$C = \frac{8\pi}{3}\int_0^a \varrho r^4 dr + \frac{16\pi}{45}\int_0^a \varrho\, d(r^5\alpha) = \frac{8\pi}{3}E_0 + \frac{16\pi}{45}N_0,$$

woraus für die Präzessionskonstante sich der Wert ergibt

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{5}\frac{N_0}{E_0} = \frac{a^2K_0}{E_0}(\alpha_0 - \varphi/2) = \frac{a^2M}{4\pi E_0}(\alpha_0 - \varphi/2), \tag{11}$$

wenn genähert bis auf die erste Potenz der Abplattung M die Masse des Ellipsoids $= 4\pi K_0$ angenommen wird. Dies zeigt, daß für ein

24) Zur reichen Literatur über das *Clairaut*sche Theorem siehe die bereits unter Fußnote 22 zitierten beiden Artikel der Encykl. von *Helmert* und *Pizetti*.

24a) *D'Alembert*, Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749. *Tod.*, Hist., § 385.

geschichtetes Ellipsoid wegen des unbekannten E_0 die Größe $(C-A)/C$ unbestimmt bleibt und daher aus der Präzessionskonstanten nicht *direkt* die Erdabplattung berechnet werden kann. Für ein homogenes Ellipsoid[25]) wird wegen $\alpha_0 = \frac{5}{4}\varphi$ und $4\pi E_0 = \frac{3a^2M}{5}$:

$$(C-A)/C = \alpha_0.$$

7a. Laplace und die Mondtheorie. Wendet man die *Clairaut*schen Rechnungsergebnisse für die Anziehungskräfte des geschichteten Ellipsoids auf einen äußeren Punkt an, dessen Koordinaten x, y, z, dessen Distanz vom Mittelpunkte D sein möge, und setzt $z = D \sin\delta$, wo δ die Deklination des angezogenen Körpers bedeutet, so erhält man nach Substitution des Wertes von N aus (7a) und mit Rücksicht auf $F_0 = 0$

$$X = -\frac{k^2Mx}{D^3} - \frac{3k^2Ma^2(\alpha_0 - \frac{1}{2}\varphi)x}{2D^5}(1 - 5\sin^2\delta)$$

$$Y = -\frac{k^2My}{D^3} - \frac{3k^2Ma^2(\alpha_0 - \frac{1}{2}\varphi)y}{2D^5}(1 - 5\sin^2\delta)$$

$$Z = -\frac{k^2Mz}{D^3} - \frac{3k^2Ma^2(\alpha_0 - \frac{1}{2}\varphi)z}{2D^5}(3 - 5\sin^2\delta).$$

Die ersten Glieder in diesen Ausdrücken bedingen in ihrer Anwendung auf die Bewegung des Mondes unter der anziehenden Kraft der Erde dessen reine elliptische Bewegung, die zweiten geben Zusatzkräfte an, die diese Bewegung stören. *Laplace*[26]) war der erste, der diese Störung in der Mondbewegung erkannte und darauf hinwies, daß aus ihr die Abplattung der Erde berechnet werden könne.

---

25) *H. Heger*, Bemerkungen zu der Bestimmung der Abplattungsgrenzen für das Erdsphäroid aus der Nutation, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 293, beweist, daß für ein Ellipsoid mit variabler Dichte, dessen Schichten aber ähnliche Ellipsoide sind, die Trägheitsmomente die Werte haben

$$A = B = \frac{4\pi a^2(a^2+c^2)}{3c^4}\int_0^a \varrho r^4 dr, \qquad C = \frac{8\pi a^4}{3c^4}\int_0^a \varrho r^4 dr$$

und daher das Verhältnis $(C-A)/C = \frac{a^2-c^2}{2a^2}$ unabhängig ist von der Dichteverteilung im Körper. Aber ein derartiges Ellipsoid erfüllt für jede einzelne Schichte nicht die Bedingung des Gleichgewichtes (ist nicht isostatisch) und kommt daher für die Erde wohl kaum in Betracht. In der Tat, setzt man in die *Clairaut*sche Differentialgleichung (9) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$, was der Annahme einer aus ähnlichen Ellipsoiden bestehenden Schichtung entspricht, so folgt $K = 3\varrho r^3$, was nur möglich ist, wenn ϱ konstant ist, d. h. ein homogenes Ellipsoid vorliegt.

26) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. 4, § 35; Livre VII, ch. 2; Livre XVII, ch. 3.

Die Störungen selbst äußern sich in doppelter Weise, zunächst als periodische in der Länge mit der Periode eines Knotenumlaufs und in der Breite mit der eines siderischen Mondumlaufs, sodann als säkulare im Knoten und in der Länge der Apsidenlinie. Aus ersteren, die für den Erdmond etwa 8″ in Länge und 7,5″ in Breite betragen, fand *Laplace* die Erdabplattung zu $\alpha_0 = 1:304$, *Hansen*[27]) zu 1:295 und 1:298, *E. Brown*[28]) in seinen zahlreichen theoretischen Entwicklungen zur Mondtheorie benutzt den Wert 1:296,8, den *Hayford*[28a]) aus geodätischen Messungen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika gefunden.

Die säkularen Störungen sind für den Erdmond gering[29]), bedeutender dagegen für die Satelliten der anderen Planeten und werden zur theoretischen Bestimmung der Abplattung dieser verwertet.[30])

II. Einführung des Potentialbegriffes.

8. Einführung des Potentialbegriffes. Eine wesentliche Vereinfachung erlangten die Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren durch Einführung des Potentials, das ist der Funktion

$$P = k^2 \int \frac{\varrho\, d\tau}{r}, \tag{12}$$

die Integration erstreckt über das Volumen der Flüssigkeitsmasse. Sie scheint fast gleichzeitig von *Legendre* und *Laplace*[31]) erdacht worden zu sein.

Die Gleichgewichtsbedingung wird nunmehr

$$U = P + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}, \tag{13}$$

und ihr Vergleich mit der angenommenen Gleichung der Oberfläche $F(xyz) = 0$ gibt die notwendigen Beziehungen zwischen der Rotationsgeschwindigkeit ω und den in F und P vorkommenden Para-

27) *Hansen*, Darlegung der theor. Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Leipzig Ak. Ber. 9 u. 11 (1862 u. 1864). Vgl. auch die kritische Darstellung in *Helmert*, Höhere Geodäsie II, p. 466.

28) *E. Brown*, Theorie des Erdmondes, Encykl. VI 2, Nr. 20; ebenso *Pizetti*, Encykl. VI 1, 3, Nr. 52.

28a) *Hayford*, The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States, Washington 1909.

29) *Tisserand*, Méc. cél. III, p. 147 und Encykl. VI 2, 17 (*Bauschinger*), Nr. 8.

30) *K. Laves*, Die Satelliten, Encykl. VI 2, 16, Nr. 15; *Laplace*, Méc. cél., II. Partie, Livre VII, § 20, u. Livre VIII, § 27.

31) *Todh.*, Hist., § 789; ferner: *Burkhardt* und *Meyer*, Potentialtheorie, Encykl. II 7b.

metern. Man schreibt jedoch die Bedingungsgleichung in der differentiellen Form

(13a) $$dU = dP + \omega^2(xdx + ydy) = 0,$$

und ihr Vergleich mit

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

liefert die zu diskutierenden Relationen[32])

(13b) $$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + \omega^2 x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + \omega^2 y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Für die Energie der Flüssigkeitsmasse erhält man den Ausdruck

$$W = \int P\varrho\, d\tau + \frac{1}{2}\omega^2 J = P' + \frac{1}{2}\omega^2 J,$$

und die Gleichgewichtsbedingung reduziert sich auf

$$\delta W = \delta\left(P' + \frac{1}{2}\omega^2 J\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \delta W = \delta\left(P' - \frac{R^2}{2J}\right) = 0^{32a)}$$

nach Einführung des Rotationsmomentes $R = \omega J$, woraus folgt, daß W für den Fall des Gleichgewichtes einen stationären Wert hat.

9. Theorie der geschichteten Sphäroide nach Legendre und Laplace. Die erste Wirkung der Einführung des Potentials in die Theorie der Gleichgewichtsfiguren war eine strengere Fassung der *Clairaut*schen Untersuchungen. Während *Clairaut* den einzelnen Schichten direkt die Form von Rotationsellipsoiden mit kleiner Abplattung zuschreibt, gehen *Legendre*[33]) und *Laplace*[34]) von einer allgemeinen Voraussetzung aus. Sie nehmen an, daß sie Sphäroide sind,

---

32) Über die formale Reduktion dieser Gleichungen auf eine Funktional- resp. Integrodifferentialgleichung siehe *P. Appell*, Équation fonctionelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction *Newton*ienne, Circolo mathem. 30 (1910), p. 82, und Paris C. R. 156 (1913), p. 587.

32a) Auf die Unterscheidung zwischen

$$\delta\left(P' + \frac{\omega^2}{2}J\right) = 0 \quad \text{und} \quad \delta\left(P' - \frac{R^2}{2J}\right) = 0,$$

speziell zur Frage der Stabilität der Gleichgewichtsfigur, machte zuerst *Schwarzschild* (Diss. p. 8) aufmerksam, sodann *Poincaré*, Figures, p. 37, ferner: Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation, Bull. astr. XVI (1899), p. 161. Der erste Ausdruck gibt für ein konstantes ω $\delta P' + \frac{1}{2}\omega^2\delta J = 0$, der zweite fügt noch als ergänzendes Glied hinzu $+\frac{1}{2}\omega^2\frac{(\delta J)^2}{J}$.

33) *Legendre*, Suite de la recherche sur la figure des planètes, Paris, Mém. (1789), p. 372; *Todh.*, Hist., § 891 ff.

34) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. 4.

das sind Körper, die nur um kleine Größen erster Ordnung von der reinen Kugelgestalt abweichen, und setzen deren Gleichung in der Form

(14) $$r = r_0(1 + \zeta y)$$

fest, worin ζ eine kleine Größe bedeutet, deren Quadrat zu vernachlässigen ist, und y eine Funktion der Polarkoordinaten (θ und ψ) darstellt, für die die nach *Laplace*schen Funktionen fortschreitende Reihe[35])

(14a) $$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots$$

gelte.[36]) Zunächst wird bewiesen, daß $Y_0 = 0$ wird bei der Annahme, daß für die Oberfläche $r_0 = a$ ist, wenn a den Radius der Kugel bedeutet, dessen Volumen gleich ist dem des Sphäroids, daß ebenso $Y_1 = 0$ gesetzt werden kann bei der Annahme, daß der Schwerpunkt des Sphäroids in den Anfangspunkt des Koordinatensystems falle.

Für das Potential eines derartigen Sphäroides auf einen in der Distanz D vom Mittelpunkt desselben, aber in dessen Innern befindlichen Punkt ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} P_i = {} & \frac{4\pi k^2}{D}\int_0^D \varrho r^2 dr + \frac{4\pi k^2}{D}\zeta \sum_{i=0}^{i=\infty}\int_0^D \varrho \frac{d}{dr}\left(\frac{r^{i+3}Y_i}{(2i+1)D^i}\right) dr \\ & + 4\pi k^2 \int_D^a \varrho r^2 dr + 4\pi k \zeta \sum_{i=0}^{i=\infty}\int_D^a \varrho \frac{d}{dr}\left(\frac{D^i Y_i}{(2i+1) r^{i-2}}\right) dr \end{aligned}$$

und durch dessen Substitution in die Gleichgewichtsbedingung, die *Laplace* in der Art allgemeiner annimmt, daß er außer der Fliehkraft noch andere Kräfte als wirksam voraussetzt, für die eine Reihenentwicklung von der Form $\sum_{i=0}^{i=\infty} Z_i$ gilt:

(14b) $$\left\{\begin{aligned} \frac{D^{2i+1}}{4\pi} Z_i = (2i+1) D^i Y_i \int_0^D \varrho r^2 dr - \int_0^D \varrho \frac{d}{dr}(r^{i+3} Y_i) dr \\ - D^{2i+1}\int_D^a \varrho \frac{d}{dr}(Y_i r^{-i+2}) dr, \end{aligned}\right.$$

35) Über die Konvergenz dieser Reihenentwicklung vgl. außer den allgemeinen Untersuchungen über die nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihen die speziellen von *Poisson*, Mémoire sur l'attraction des sphéroids, Conn. des temps pour 1829, p. 329; ferner *Callandreau*, Sur le développement en séries du potentiel des sphéroides de revolution, Journ. d. l'école polyt. 58 (1889), p. 128 und *Poincaré*, Figures de l'équilibre, p. 53—58; namentlich *Liapounoff*, Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, St. Pétersb. Mém. 14 (1903).

36) Von einer etwas anderen Form für die Gleichung des Sphäroids, nämlich
$$r = r_0 [1 + \zeta(A + B\cos\theta + C\cos^2\theta + \cdots)],$$
geht *D'Alembert* in dem unter Anm. 6 zitierten Buche aus.

eine Gleichung, die sich im wesentlichen mit der *Clairaut*schen Gleichung (7), deckt. Für die Erde kommt aber nur die Fliehkraft als einwirkende Kraft in Betracht, und, da diese durch

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\omega^2\frac{D^2}{3}-\frac{\omega^2}{2}D^2P_2$$

darzustellen ist, wo P_2 die Kugelfunktion zweiter Ordnung

$$\cos^2\theta-\frac{1}{3}$$

ist, so folgt, daß alle

$$Y_i=0,\ \text{von}\ i=3,4\ldots\ \text{ab}$$

zu nehmen sind und nur Y_2 allein in dem Ausdruck für $r=r_0(1+\zeta y)$ übrigbleibt. Aber auch in Y_2, dessen allgemeine Form durch

$$\begin{aligned}Y_2=A_0\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)&+A_1\sin\theta\cos\theta\sin\psi+A_3\sin^2\theta\cos2\psi\\&+A_2\sin\theta\cos\theta\cos\psi+A_4\sin^2\theta\sin2\psi\end{aligned}$$

gegeben ist, müssen alle Koeffizienten A bis auf A_0 verschwinden, und der Ausdruk für r erhält als Schlußform

$$r=r_0\left[1+\zeta Y_0+\zeta A_0\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)\right],$$

in der, wenn man die willkürliche Größe $Y_0=\frac{1}{3}A_0$ wählt, so daß die Gleichung in

$$r=r_0(1+\zeta A_0\cos^2\theta)$$

übergeht, sich ζA_0 als mit der Abplattung α identisch erweist. Damit fällt Gleichung (14b) vollständig mit (7) zusammen, und aus ihr folgt daher auch nach zweifacher Differentiation die *Clairaut*sche Differentialgleichung (9).

10. Diskussion der Clairautschen Differentialgleichung. Schon *Clairaut*[37]) zeigte, ohne auf eine direkte Integration der Differentialgleichung unter Annahme eines bestimmten Dichtigkeitsgesetzes einzugehen, durch Übergang auf eine Differenzengleichung, indem er den einzelnen Schichten von innen nach außen genommen die Achsen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die Abplattungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und die Dichtigkeiten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ zuerteilt, daß

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-1=(\varrho_1-\varrho_2)\frac{\frac{2}{3}+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^5-\frac{5}{3}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3}{\frac{5}{3}\left[\varrho_2+(\varrho_1-\varrho_2)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]}$$

und daher, wegen $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)<1$ unter der Voraussetzung $\varrho_1-\varrho_2>0$,

37) *Clairaut*, Erdgestalt, p. 134 ff.

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 > 0$ und ebenso weitergehend $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - 1 > 0 \ldots$ wird. Die Abplattungen der einzelnen Schichten wachsen vom Mittelpunkt zur Oberfläche hin, vorausgesetzt, daß die Dichten abnehmen.

Laplace[38]) ferner wies nach, daß, wenn der Fall eines unendlich großen Wertes von ϱ im Mittelpunkte der Erde ausgeschlossen wird, die Differentialgleichung für $\varrho =$ const. das einzige Integral $\alpha_0 = \frac{5}{4}\varphi$ hat, was dem *Newton*schen Ergebnisse entspricht, dagegen für die Annahme $\varrho = 0$, und nur im Mittelpunkte ϱ endlich, aber so, daß doch

$$\lim_{\varrho=0} \int_0^r \varrho r^2 dr = \text{const.}$$

wird, das einzige Integral $\alpha_0 = \frac{1}{2}\varphi$ sich ergibt, was der *Huygens*schen Hypothese entspricht, so daß, wie schon erwähnt wurde, in Übereinstimmung mit *Clairaut*

$$\frac{1}{2}\varphi < \alpha_0 < \frac{5}{4}\varphi$$

sein müsse. *Tisserand*[39]) gelang es, unter Benutzung der Gleichung (7a) durch Einführung der mittleren Dichte der Erde ϱ_m zufolge der Relation

$$\int_0^a \varrho r^2 dr = \frac{1}{3}\varrho_m a^3$$

und der Dichte an der Oberfläche ϱ_0 mit Beziehung auf

$$\int_0^a \varrho\, d(r^5\alpha) = \varrho_0 \alpha_0 a^5 - \int_0^a r^5 \alpha \frac{d\varrho}{dr} dr$$

die untere Grenze für α_0 etwas enger zu fassen, nämlich

$$\alpha_0 > \frac{\frac{1}{2}\varphi}{1 - \frac{3}{5}\frac{\varrho_0}{\varrho_m}},$$

woraus speziell für die Erde, für die ϱ_0/ϱ_m näherungsweise $= \frac{1}{2}$ ist, $\alpha_0 > \frac{5}{7}\varphi$ folgt. — Die vollständigste Diskussion führte *Radau*[40])

38) *Laplace,* Méc. cél., Livre III, ch. IV, § 34.

39) *Tisserand,* Quelques remarques au sujet de la théorie de la figure des planètes, Bull. astr. I (1884), p. 417.

40) *Radau,* Remarques sur la théorie de la figure des planètes, Bull. astr. II (1885), p. 157; ferner *Poincaré*, Sur la figure de la terre, Bull. astr. VI (1889), p. 1 u. 49, und die Darstellung in *Poincaré*, Figure de l'équilibre, p. 91 ff., sowie *Callandreau*, Remarques sur la théorie de la figure de la terre, Bull. astr. V (1888), p. 472, u. VI (1889), p. 185.

durch. Er ersetzt die veränderliche Dichte ϱ durch eine neue Größe δ, die durch die Gleichung

$$\int_0^r \varrho r^2 dr = \frac{1}{3}\delta r^3$$

als mittlere Dichte der einzelnen Schichten vom Zentrum bis zur letzten mit dem Radius r definiert wird, und führt in die Differentialgleichung die neue Variable $\eta = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}$ ein, wodurch sie die Form

$$\delta\left(r\frac{d\eta}{dr} + \eta^2 + 5\eta\right) + 2r\frac{d\delta}{dr}(1+\eta) = 0$$

annimmt. Ferner transformiert er den Ausdruck für das Verhältnis der Trägheitsmomente

$$J = \frac{C-A}{C} = a^2\left(\alpha_0 - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^a \varrho r^2 dr}{\int_0^a \varrho r^4 dr}$$

in

$$\alpha_0 - \frac{\varphi}{2} = J\left(1 - \frac{2\int_0^a \delta r^4 dr}{a^5 \varrho_m}\right)$$

und beweist, daß näherungsweise auf Grund der geänderten *Clairaut*schen Gleichung

$$\frac{2\int_0^a \varrho r^4 dr}{\varrho_m a^5} = \frac{2}{5K}\sqrt{1+\eta_0}$$

gesetzt werden kann, worin K eine Größe ist, welche für den für die Erde in Betracht kommenden Wert von η_0 zufolge der Gleichung (8) einerseits und des *Clairaut*schen Theorems andererseits, nämlich

$$\eta_0 = \frac{a}{\alpha_0}\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)_0 = \frac{\beta}{\alpha_0} - 1 = 0{,}503\ldots,$$

zwischen den nur wenig von der Einheit sich unterscheidenden Grenzen

$$1{,}0003 > K > 0{,}9996$$

eingeschlossen ist. Es ergeben sich daher für $J = (C-A)/C$ zwei Werte, ein empirischer aus der Präzessionstheorie und ein theoretischer aus der *Clairaut*schen Gleichung, deren Übereinstimmung sodann einen Maßstab für die Richtigkeit abgibt, mit der die *Clairaut*schen Annahmen als ein Abbild der Verhältnisse auf und innerhalb der Erde angesehen werden können.

Schließlich sei noch die Relation erwähnt, die *Stieltjes*[41]) aus der Gleichung (7a) ableitet, und die eine untere Schranke für die Dichte ϱ_c im Mittelpunkte der Erde gibt; sie lautet

$$(5E_0 - \varrho_0 a^5)^3(\varrho_c - \varrho_0)^2 - (3K_0 - \varrho_0 a^3) \geqq 0,$$

41) *Stieltjes*, Note sur la densité de la terre, Bull. astr. I (1884), p. 465.

und aus ihr folgt

$$\varrho_c \geqq \varrho_0 + \sqrt{\frac{(\varrho_m - \varrho_0)^5}{\left(\frac{5\varrho_m}{3\lambda} - \varrho_0\right)^3}},$$

worin zur Abkürzung $\lambda = K_0 a^2/E_0$ genommen ist, speziell für die Erde $\varrho_c \geqq 7{,}418\ldots$

11. Integration der Clairautschen Differentialgleichung. Zur Integration der *Clairaut*schen Differentialgleichungen wurden die verschiedensten Annahmen über die Dichteverteilung im Innern der Erde gemacht. *Clairaut*[42]) selbst behandelt den Fall $\varrho = \varrho_0\left(\frac{r}{a}\right)^{-m}$, den auch *G. H. Darwin*[43]) einer neuerlichen Untersuchung unterzog. Er gäbe für die Dichte im Mittelpunkte der Erde ϱ_c einen unendlich großen Wert und kommt wohl aus physikalischen Gründen nicht weiter in Betracht.

Wesentlich verschieden von diesem sind die Annahmen von *Laplace*[44])

$$\varrho = \varrho_0\left(1 + \lambda - \lambda\frac{r}{a}\right),$$

dann von *Roche*[45]), *Lipschitz*[46]) und *Lévy*[47]), die sich unter die gemeinschaftliche Form

$$\varrho = \varrho_c\left[1 - k\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda}\right]^{\mu}$$

unterordnen lassen, mit den speziellen Werten $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ für *Roche*, $\mu = 1$ für *Lipschitz*. Sie führen alle auf hypergeometrische Reihen als Integrale der *Clairaut*schen Gleichung. Hierher gehört auch die rein numerische Entwicklung, die *Helmert*[48]) gibt. Nach ihr ist

$$\varrho = 11{,}3\left[1 - 1{,}04\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0{,}275\left(\frac{r}{a}\right)^4 - \ldots\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{372}\left[1 + 0{,}178\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0{,}054\left(\frac{r}{a}\right)^4 + 0{,}016\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \ldots\right],$$

---

42) *Clairaut,* Erdgestalt, p. 129.

43) *G. H. Darwin,* On the figure of equilibrium of a planet of heteregenous density, London Phil. Proceed. 36 (1883), p. 158.

44) *Laplace,* Méc. cél., Livre XI, ch. 2, § 5; vgl. auch *Plana*, Note sur la densité moyenne de l'écorce superficielle de la terre, Astr. Nachr. 35 (1853), p. 177 u. 36 (1853), p. 313.

45) *Roche,* Note sur la loi de densité à l'intérieur de la terre, Paris C. R. 39 (1854), p. 215; Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre, Montp. Acad. Mém. X (1881), p. 48.

46) *Lipschitz*, Die Verteilung der Dichte im Inneren der Erde, J. f. Math. 62 (1863), p. 1 u. 63 (1863), p. 289.

47) *Lévy*, Sur la théorie de la figure de la terre, Paris C. R. 106 (1888), p. 1270, 1314, u. 1375.

48) *Helmert*, Höhere Geodäsie II, p. 481 ff.

und *Helmert* weist auf die geringe Konvergenz beider Reihen hin, die die Ableitung von definitiven Resultaten hindert.

Eine dritte Form rührt von *Legendre*[33]) und *Laplace*[49]) her. Sie lautet

$$\varrho = \varrho_c \frac{\sin m\left(\frac{r}{a}\right)}{m\left(\frac{r}{a}\right)},$$

und *Laplace* begründet sie durch die physikalische Anschauung, daß die Zunahme des Druckes im Erdinnern gegeben ist durch

$$\int \frac{dp}{\varrho} = \text{const.}\, \varrho$$

und andererseits gemäß der Bedingung für die Oberfläche der Gleichgewichtsfigur mit Vernachlässigung von der Abplattung proportionalen Gliedern

$$\int_0^r \frac{dp}{\varrho} = \frac{4\pi k^2}{r}\int_0^r \varrho r^2 dr + 4\pi k^2 \int_r^a \varrho r dr$$

sein muß, voraus durch zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2(\varrho r)}{dr^2} + m^2(\varrho r) = 0$$

folgt. In dem Integral dieser Gleichung $\varrho r = A \sin(mr + B)$ muß aber die Integrationskonstante $B = 0$ genommen werden, damit nicht die Dichte im Mittelpunkte der Erde unendlich, d. h. damit nicht für $r = 0$ $\varrho = \infty$ werde.

12. Numerische Daten. Um den notwendigen Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung zur Prüfung der *Clairaut*schen Theorie, speziell für die Erde, durchzuführen, stehen die folgenden numerischen Daten zur Verfügung:

1. die Dichte an der Oberfläche der Erde ϱ_0, für die aus geologischen Tatsachen

$$\varrho_0 = 2{,}5 \sim 2{,}8$$

anzusetzen ist,

2. die mittlere Dichte der Erde ϱ_m, definiert durch die Gleichung $K_0 = \int_0^a \varrho r^2 dr = \frac{1}{3} a^3 \varrho_m$, für welche aus direkten Bestimmungen[50]) im Mittel folgt

$$\varrho_m = 5{,}513\ldots,$$

3. der aus geodätischen Messungen auf der Erde abgeleitete Wert für die Abplattung der obersten Schichte[51])

$$(\textit{Bessel})\ \alpha_0 = 1:299{,}153, \quad (\textit{Clarke})\ \alpha_0 = 1:293{,}465,$$
$$(\textit{Hayford})\ \alpha_0 = 1:296{,}8,$$

49) *Laplace,* Méc. cél., Livre XI, chap. 2, § 6.

50) *Zenneck,* Gravitation, Encykl. V 2, Nr. 9, p. 34.

51) *Pizetti,* Höhere Geodäsie, Encykl. VI 1, 3, Nr. 50, p. 236.

4. der aus der Mondbewegung sich ergebende Wert derselben Größe[52])
$$\alpha_0 = 1 : 297{,}8,$$

5. die Größe β im *Clairaut*schen Theorem[53]), für die *Helmert*
$$\beta = 0{,}005285$$
findet,

6. der aus der Präzessionstheorie sich ergebende Wert für die Größe
$$J = (C - A)/C = 1 : 305{,}31 \text{ nach } \textit{Helmert}^{54)},$$
$$= 1 : 304{,}9 \ldots \text{ nach } \textit{Newcomb}^{55)}.$$

Man kann nun zunächst, mit einem Wert α_0 beginnend, nach dem *Clairaut*schen Theorem $\beta = \frac{5}{2}\varphi - \alpha_0$, sodann die Hilfsgröße $\eta_0 = \beta/\alpha_0 - 1$ und aus ihr unter Vernachlässigung von K nach dem in Nr. **10** angegebenen Verfahren $J = (C - A)/C$ berechnen. So ergeben sich die folgenden Zahlen:

$\alpha_0 =$	$1 : 296$	$1 : 297$	$1 : 298$	$1 : 299$
$\beta =$	$0{,}0052913$	$0{,}0053025$	$0{,}0053138$	$0{,}0053250$
$1 + \eta_0 =$	$1{,}56620$	$1{,}57486$	$1{,}58351$	$1{,}59216$
$J =$	$1 : 303{,}65$	$1 : 304{,}95$	$1 : 306{,}24$	$1 : 307{,}51.$

Sie lassen erkennen, daß es nicht möglich ist, sie vollständig miteinander in Übereinstimmung zu bringen, wenn auch nicht geleugnet werden kann, daß die Abweichungen nur sehr gering sind.[56])

---

52) Nach *Helmert,* Diskussion der *Hansen*schen Mondtheorie, Höh. Geod. II, p. 473; vgl. auch *E. Brown,* On the degree of accuracy of the new lunar theory and of the final values of the mean motion of the Perigée and node, Lond. Royal Soc. Month. Not. 64 (1904), p. 324, und 68 (1908), p. 450; ferner *W. de Sitter*, On the mean radius of the Earth, the intensity of gravity and the moons parallax, Amsterd. Proceed. XVIII (1915), p. 1291, und: On isostasy, the moments of inertia and the compression of the earth, ebenda XVIII (1915), p. 1295.

53) *Helmert,* Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde, Encykl. VI 1, 7, Nr. 4, p. 95.

54) *Helmert,* Höh. Geod. II, p. 437.

55) *Newcomb*, The fundamental constants of astronomy, Washington 1895. Neuestens leitete *Przybyllok* in: Über eine Bestimmung der Nutationskonstante aus Beobachtungen des internationalen Breitendienstes, Berl. Ber. (1916), p. 1257 den Wert $(C - A)/C = 1 : 304{,}99 \pm 0{,}26$ ab.

56) Vgl. die Diskussion in den in Fußnote 40 zitierten Werken, besonders *Poincaré,* Fig. de l'équil., p. 95. Was das Umkehrproblem anlangt, aus dem Potential der Anziehung eines Körpers im Äußeren die mögliche Dichteverleihung im Innern des Körpers zu bestimmen, siehe die neueren Arbeiten von *Pizzetti*; Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna, Roma Accad. Lincei 18 (1909), p. 211, ferner Ann. di math. 17 (1910), p. 225, sowie *Lauricella*: Sulla funzione potentiale di spazio corrispondente ad una assignata azzione esterna, Roma Accad. Lincei 20 (1911), p. 99 und 21 (1912), p. 18.

In gleicher Art kann man auch die Konstanten ϱ_0 und m in dem von *Laplace* und *Legendre* angenommenen Verteilungsgesetz für die Dichte innerhalb der Erde auf Grund der Daten über ϱ_0 und ϱ_m bestimmen und sodann durch Integration die Größen α_0 und $J = (C - A)/C$ berechnen. Zusammenfasssende Angaben über Berechnungen dieser Art finden sich bei *Legendre*[33]), *Clarke*[57]), *Thomson-Tait*[58]), *Harkness*[59]) und *Tisserand*[60]). Die folgenden Angaben, umgerechnet auf die mittlere Dichte der Erde $\varrho_m = 5{,}513$, sind der *Thomson-Tait*schen Physik entlehnt:

$$\varrho_m = 5{,}513$$

$m = 133^0$	$\varrho_0 = 2{,}6547$	$\varrho_c = 11{,}009$	$\alpha_0 = 1 : 295{,}31$
$= 134$	$2{,}6031$	$11{,}130$	$296{,}73$
$= 135$	$2{,}5507$	$11{,}254$	$298{,}18$
$= 136$	$2{,}4975$	$11{,}381$	$299{,}66$

$\beta = 0{,}0052835$	$(C - A)/C = 1 : 302{,}96$
52997	$304{,}75$
53161	$306{,}59$
53327	$308{,}48.$

Auch sie lassen erkennen, daß zwischen den einander zugeordneten Zahlenwerten keine volle Übereinstimmung erzielt werden kann, wiewohl die übrigbleibenden Differenzen nur sehr gering sind, etwa 1—2 % betragen und möglicherweise innerhalb der durch die Beobachtungsfehler gegebenen Grenzen fallen.

13. Diskontinuierliche Dichteverteilung. Man versuchte es vorerst, diese wohl kleinen, aber immerhin vorhandenen und konstatierten Mängel an Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung durch die Annahme einer diskontinuierlichen Massenverteilung im Innern der Erde zu beheben. So geht *Roche*[44]) von der Voraussetzung aus, daß die Erde aus drei Schichten von verschiedener, aber in jeder Schicht konstanter Dichte bestehe. In gleicher Art entwickelt *Hamy*[61]) eine neue Theorie, von der Anschauung ausgehend, daß die Erde aus einer endlichen Anzahl, d. h. aus n Schichten von konstanter Dichte gebildet sei, und wendet die gewonnenen Gleichungen auf die Fälle $n = 2$

---

57) *Clarke,* Geodesy, § 14, p. 86.

58) *Thomson-Tait,* Naturalphilosophy II, p. 407.

59) *Harkness,* On the solar parallax and its related constants, Wash. 1891, p. 95, auch Wash. Obs. 1885, App. III.

60) *Tisserand,* Méc. cél. II, ch. 15.

61) *Hamy,* Étude sur la figure des corps célestes, Thèses prés. à la faculté des sc. de Paris, 1887.

und $n = 3$ an, ohne aber damit eine bessere Übereinstimmung mit den bekannten Beobachtungsdaten zu erzielen, als sie durch die Annahme einer kontinuierlichen Dichteverteilung erlangt wird. *Tisserand*[62]) gibt auf Grundlage der *Hamy*schen Rechnungen eine neue Ableitung der *Clairaut*schen Differentialgleichung durch den Übergang auf $n = \infty$.

Hierher wären auch die zahlreichen, namentlich der älteren Literatur angehörigen Untersuchungen zu zählen, die von der Annahme ausgehen, daß die Erde aus einem festen Kerne in ellipsoidischer Form und einer darauf lagernden Flüssigkeitsschicht bestehe. Es finden sich solche vor bei *Maclaurin*[14]), *Clairaut, D'Alembert*[15]), *Laplace* und besonders auch *Lagrange* in seiner Mécanique analytique; in neuester Zeit griff wieder *Wiechert*[63]) diese Hypothese auf und kommt zu dem Ergebnisse, daß den bekannten Beobachtungsdaten noch am besten genügt werden könne durch die Annahme, daß die Erde aus einem starren Kerne (mit der Dichte $= 8$ (Eisen)) von etwa 5 Millionen Meter Radius bestehe, den ein Gesteinsmantel von $1^1/_2$ Millionen Meter Dicke umgibt.

14. Berücksichtigung der höheren Potenzen der Abplattung. Ein zweiter Weg, Theorie und Beobachtung in bessere Übereinstimmung zu bringen, ist durch die Ansicht gegeben, daß der Fehler auf die Vernachlässigung der höheren Potenzen der Abplattung bei allen bisherigen Rechnungen zurückzuführen und es daher notwendig sei, auch diese zu berücksichtigen. Versuche in dieser Hinsicht beginnen mit *Laplace* und *Legendre*[33]). Letzerer setzt für den Radiusvektor eines Meridianschnitts der Erde die Form

$$r = r_0(1 + \alpha \cos^2\theta + 3\alpha' \sin^2\theta \cos^2\theta)$$

fest, oder, was dasselbe ist, er setzt eine bis zu Kugelfunktionen 4. Ordnung gehende Entwicklung

$$r = r_0(1 + \alpha Y_2 + \alpha' Y_4)$$

an. Es hat dies die Bedeutung, die Erde als ein Rotationsellipsoid aufzufassen, das ein wenig nach einer Kugelfunktion 4. Ordnung deformiert ist. Ähnliche Entwicklungen, die bis zu Kugelfunktionen

62) *Tisserand,* Méc. cél., Tome II, ch. 14.

63) *Wiechert,* Über die Massenverteilung im Innern der Erde, Gött. Nachr. 1897, p. 221; vgl. ferner die Arbeiten von *Wiechert, Geiger* und *Guttenberg,* Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen, in Gött. Nachr. 1907, 1909, 1912 u. 1914, sowie Phys. Zeitschr. 1910, 1911, 1912 u. 1913, und *Klußmann,* Über das Innere der Erde, Diss. Göttingen 1915.

höherer Ordnung reichen, finden sich bei *Poisson*[64]) vor. *Callandreau*[65]) geht von der folgenden Annahme für den Radiusvektor aus:

$$r = a\left(\frac{1+\varepsilon^2\cos^2\theta}{1+\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} + a\varepsilon^4 k \cos^2\theta \sin^2\theta$$

und versucht es, die neu eingeführte Größe k so zu bestimmen, daß den Beobachtungsdaten besser genügt wird. Er hebt hervor, daß seine strengeren, auch das Quadrat der Abplattung berücksichtigenden Formeln bei den Planeten Jupiter und Saturn zu verwenden wären, bei denen wegen der großen Abplattung der Fehler in der Vernachlässigung der zweiten Potenz merklicher ist als bei der Erde. Doch der Erfolg der Rechnung ist ein negativer. Es zeigt sich, daß die aus dem hinzugefügten Gliede als einer Kugelfunktion 4. Ordnung entstehende Differenz nur 9 m beträgt, was eine zu vernachlässigende Größe ist. *G. H. Darwin*[66]) schreibt für den Radiusvektor die Form

$$r = a[1 - \varepsilon\cos^2\theta + (f - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

und betrachtet f und $h = \varepsilon - \frac{25}{14}\varepsilon^2 - \frac{1}{7}f$

als die zu bestimmenden Unbekannten. In gleicher Art nimmt *Wiechert* in der in Anm. 64 zitierten Abhandlung die Entwicklung

$$r = a(1 - \varepsilon\cos^2\theta - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2 2\theta) + f\cdot P_4$$

an. In beiden entspricht der erste Teil einem Rotationsellipsoid, der zweite stellt die Abweichung der wahren Gestalt der Erde von diesem dar. *Darwin* gelangt durch seine Annahme für das *Clairaut*sche Theorem zu dem Ausdruke

$$\beta = \frac{5}{2}\varphi - \alpha - \frac{17}{14}\alpha\varphi - \frac{2}{7}f.$$

Wiechert wiederum findet

$$\beta = \frac{5}{2}\varphi - \alpha - \frac{17}{14}\alpha\varphi - \frac{15}{8}\frac{f}{a}.$$

Helmert verwertet dieses Korrektionsglied in seiner Schlußformel für die Schwere, die darnach

$$g = 978{,}030(1 + 0{,}005302\sin^2\varphi - 0{,}000007\sin^2 2\varphi)$$

lautet, und zeigt, daß es eine Depression im Meeresniveau für mittlere Breiten $\varphi = \pm 45^0$ um rund 2 m hervorruft, was wiederum eine zu

---

64) *Poisson,* Mémoire sur l'attraction des sphéroides, Conn. d. Temps pour 1829 und Addition au mém. in Conn. d. Temps pour 1831.

65) *Callandreau,* Sur la théorie de la figure des planètes, Obs. Paris Mém. XIX (1889).

66) *G. H. Darwin,* The theory of the figure of the earth, carried to the second ordre of small quantities, London astr. Soc. M. N. 60 (1899), p. 82.

vernachlässigende Größe ist und keineswegs die Mängel der *Clairaut*schen Erdtheorie zu erklären vermag. Vollständigere, bis zur Kugelfunktion 4. Ordnung gehende Formeln für den Radiusvektor r, für das Potential und die Schwere g auf der Erde entwickelt *Helmert*[67]), nach *Lamé*schen Funktionen fortschreitende Reihen gibt *Rudzki*[68]). Doch ist die Einführung dieser hier von geringerer Bedeutung, da sie ja doch nur bis höchstens zu den Gliedern 2. Ordnung benutzt werden.

Indes beschränken sich alle diese Untersuchungen mehr oder weniger auf die spezielle Anwendung, auf eine Vervollständigung der *Clairaut*schen Theorie der Erde und streifen so das Gebiet der höheren Geodäsie, namentlich das Kapitel „Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde" (Encykl. VI 1, 7). Erst wieder *Liapounoff*[35]) befaßt sich mit dem allgemeineren Problem, inwieweit überhaupt ein Sphäroid von variabler Dichte eine Gleichgewichtsfigur sein kann, wenn über die die Variation der Dichte darstellende Funktion die Annahmen gemacht werden, daß sie von der Oberfläche zum Mittelpunkte hin wachse, ohne aber im Mittelpunkte einen unendlich großen Wert zu erlangen, daß sie ferner diskontinuierlich sein könne, auch nicht notwendigerweise eine analytische Funktion zu sein brauche und nicht einmal die Existenz eines ersten Differentialquotienten für sie erwiesen sein müsse. *Liapounoff* gibt ganz allgemeine Formeln an; als ein Zwischenresultat erhält er die *Clairaut*sche Gleichung. In einer besonderen Abhandlung[69]) beschäftigt er sich mit dieser und findet für die Abweichung ζ des Sphäroids von der reinen Kugelgestalt die nach der Größe $\varphi = 3\omega^2/4\pi k^2\varrho$ fortschreitende Potenzreihe

$$\zeta = \zeta_1\varphi + \zeta_2\varphi^2 + \zeta_3\varphi^3 + \cdots$$

und analoge Reihen für die abgeleiteten Funktionen $\frac{\partial\zeta}{\partial\cos\theta}$ und $\frac{\partial(\zeta a)}{\partial a}$, deren Konvergenzhalbmesser nur

$$\varphi \leqq 1:500,$$

wahrscheinlich aber größer ist, doch steht hierfür der Beweis noch aus. Ihre Anwendbarkeit auf die Erde, für die $\varphi = 1:288$ ist, kann daher nicht als gesichert gelten.

15. Das dreiachsige Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur. Einen wesentlichen Fortschritt in der allgemeinen Theorie der Gleichge-

---

67) *Helmert*, Höh. Geod. II, Kap. I u. II.

68) *Rudzki*, Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité, Paris Bull. astr. 22 (1905), p. 49.

69) *Liapounoff*, Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, St. Pétersb. Mém. XV (1904).

wichtsfiguren brachte die *Jacobi*sche Entdeckung[70]), daß auch ein dreiachsiges Ellipsoid die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse sein könne. Sie knüpft an an die zuerst von *Laplace*, dann von *Ivory*, *Legendre*, *Gauß*, *Chasles* und *Dirichlet* durchgeführte Berechnung des Potentials eines Ellipsoids.[71]) Sind a, b und c die drei Achsen des Ellipsoides,

$$\varepsilon = \sqrt{a^2/c^2 - 1}, \qquad \varepsilon_1 = \sqrt{b^2/c^2 - 1}$$

die zwei Exzentrizitäten, M die Masse desselben, und die Integrale

$$\chi = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 u^2)(1+\varepsilon_1^2 u^2)}}, \quad \xi = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 u^2)^3 (1+\varepsilon_1^2 u^2)}},$$

$$\eta = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 u^2)(1+\varepsilon_1^2 u^2)^3}}, \quad \zeta = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 u^2)(1+\varepsilon_1^2 u^2)}},$$

so ist das Potential, bezogen auf einen Punkt der Oberfläche mit den Koordinaten x, y und z, gegeben durch

$$P = \frac{3k^2 M}{2c^3}(c^2\chi - x^2\xi - y^2\eta - z^2\zeta),$$

und aus der Gleichung (13b) als der Bedingung des Gleichgewichtes folgt

$$(15) \qquad \omega^2 = \frac{3Mk^2}{c^3} \cdot \frac{\xi a^2 - \zeta c^2}{a^2} = \frac{3Mk^2}{c^3} \cdot \frac{\eta b^2 - \zeta c^2}{b^2}.$$

Lagrange[72]) gibt ihr die Form

$$(15') \qquad \left(\xi - \frac{c^3\omega^2}{3Mk^2}\right)\zeta^{-1} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \left(\eta - \frac{c^3\omega^2}{3Mk^2}\right)\zeta^{-1} = \frac{c^2}{b^2}$$

und schließt, daß, da ξ und η gleichartige Funktionen der Exzentrizitäten ε und ε_1 seien, aus ihnen notwendigerweise

$$\xi = \eta, \qquad a = b, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1$$

folge, so als ob nur das Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur möglich wäre. Erst *Jacobi* machte darauf aufmerksam, daß dieser Schluß nicht richtig ist. Durch Subtraktion der beiden *Lagrange*schen Gleichungen voneinander und nach Substitution der Integrale

70) *Jacobi*, Über die Figur des Gleichgewichtes, Annal. Phys. 33 (1834), p. 229 = Conn. d. Temps pour 1837 = *Jacobi*, Gesamm. Werke 2 (1882), p. 19.

71) Vgl. *Burckhardt* und *Meyer*, Potentialtheorie, Encykl. II a, 7 b; ferner die Sammlung der bezüglichen Arbeiten in *Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 19: Über die Anziehung homogener Ellipsoide.

72) *Lagrange*, Méc. anal. I, Sect. VII, § 26; *Todh.*, Hist., § 1581.

für ξ, η und ζ folgt nämlich

$$(15\text{b}) \qquad (\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)(1-\varepsilon^2\varepsilon_1^2u^2)\,du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2u^2)^3(1+\varepsilon_1^2u^2)^3}} = 0,$$

und diese Gleichung zeigt wohl die eine Wurzel $\varepsilon = \varepsilon_1$, die dem Rotationsellipsoide entspricht, aber auch das Integral für sich kann für gewisse Werte von ε und ε_1, ohne daß $\varepsilon = \varepsilon_1$ ist, verschwinden, wobei, solange ε und ε_1 reell sind, für ω^2 oder die daraus abgeleitete Größe φ der positive Wert

$$(15\text{c}) \begin{cases} \varphi = \dfrac{3\omega^2}{4\pi k^2\varrho} = 3\varepsilon^2\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon_1^2}} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2u^2)^3(1+\varepsilon_1^2u^2)}} \\ \qquad = 3\varepsilon_1^2\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon_1^2}{1+\varepsilon^2}} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2u^2)(1+\varepsilon_1^2u^2)^3}} \end{cases}$$

oder in symmetrischer Darstellung

$$\varphi = 3\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon_1^2)} \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2u^2)^3(1+\varepsilon_1^2u^2)^3}}$$

folgt. Mit der Diskussion der Bedingungsgleichung (15) befaßten sich *Liouville*[72a]), *O. E. Meyer*[73]) und *Plana*[74]). Sie ergab das folgende Resultat: Damit das Integral in (15b) Null werde, müssen einige seiner Teile negativ sein. Solche negative Glieder können, da $u \leqq 1$ ist, nur aus dem Faktor $1 - \varepsilon^2\varepsilon_1^2u^2$ entstehen, und zwar nur dann, wenn 1. ε und ε_1 beide reell sind, und 2. mindestens eine von ihnen größer als 1 ist. Die erste Bedingung sagt, daß dann wegen $a > c$ und $b > c$ die Rotationsachse die kürzeste Achse sein müsse, die zweite fordert wegen $\varepsilon > 1$ oder $\varepsilon_1 > 1$

$$a > c\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad b > c\sqrt{2},$$

das ist eine sehr große Abplattung, die weder bei der Erde[75]) noch

72a) *Liouville,* Sur les figures ellipsoidales à trois axes inégaux, qui peuvent convenire à l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, Conn. d. Temps pour 1846, p. 85; ferner Paris C. R. 16 (1843), p. 216 und J. de Math. XVI (1851), p. 241.

73) *O. E. Meyer,* De aequilibrii formis ellipsoidicis, J. f. Math. 24 (1824), p. 44.

74) *Plana,* Sur l'état d'equilibre de l'ellipsoide fluide à trois axes inégaux, Astr. Nachr. 36 (1853), p. 313.

75) Trotzdem versuchte man es, die Hypothese des dreiachsigen Ellipsoides auch auf die Erde auszudehnen, um in der Art die Fehler der *Clairaut*schen Theorie zu beheben. Doch mit negativem Erfolge. Es gelang nicht, die zweite Äquatorachse mit genügender Schärfe zu bestimmen, noch erzielte man einen besseren Anschluß an die Beobachtungen. Vgl. *Helmert,* Höh. Geod. I, p. 15.

bei den anderen Planeten vorkommt. Speziell für die Erde, für die $\varphi = 1 : 288$ ist, folgen die Werte[76])

$$a : b : c = 52{,}4425 : 1{,}0023134 : 1.$$

Die Beziehung zwischen den Größen φ, ε und ε_1, wie sie durch (15) dargestellt ist, ist eine eindeutige. Einem bestimmten Werte von φ entspricht nur stets ein Wertepaar von ε und ε_1, die, da die beiden Exzentrizitäten miteinander vertauschbar sind, wohl zwei, aber nur gegeneinander um 90^0 gedrehte, also im physikalischen Sinne identische Ellipsoide bestimmen. Dies ist der Fall, solange

$$\varphi \leqq 0{,}28067226.$$

Für diesen oberen Grenzwert[77]) selbst fallen ε und ε_1 zusammen, die zwei Gleichungen (15c) für φ gehen über in

$$(16)\begin{cases} \varphi = \frac{3}{8\varepsilon^5}[\varepsilon(\varepsilon^2 + 3) + (\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 3)\operatorname{arctg}\varepsilon] \\ \qquad\qquad = \frac{3}{2\varepsilon^3}[-3\varepsilon + (\varepsilon^2 + 3)\operatorname{arctg}\varepsilon] \end{cases}$$

und geben zur Berechnung von ε die transzendente Gleichung

$$(16\text{a}) \qquad (3\varepsilon^4 + 14\varepsilon^2 + 3)\operatorname{arctg}\varepsilon - \varepsilon(13\varepsilon^2 + 3) = 0,$$

deren einzige reelle Wurzel $\varepsilon = 1{,}394604096$ mit dem entsprechenden Abplattungswert $\alpha = \frac{a-c}{a} = 0{,}4172758$ ist. Für die untere Grenze $\varphi = 0$ dagegen erhält man

entweder $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon_1 = \infty$ und damit $a = c = 0$ und $b = \infty$

oder $\varepsilon = \infty$ und $\varepsilon_1 = 0$ und damit $b = c = 0$ und $a = \infty$,

d. h. die Gleichgewichtsfigur degeneriert in diesem Falle in eine unendlich lange und unendlich dünne Nadel, die entweder in die Richtung der X- oder in die der Y-Achse fällt.

Ebenso ist die Beziehung zwischen dem Rotationsmoment R und

76) *Kostka*, Über die Auffindung ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren, Berl. Ber. 1870, p. 116, und *J. Krüger*, S. J., Evenwichtsformen, Leiden 1896, p. 75.

77) Diese Zahl wurde zuerst von *Liouville* (siehe Fußnote 72a) berechnet. Weitere numerische Angaben über einander zugehörige Werte von φ, ε und ε_1 finden sich bei *Darwin*, On *Jacobi*'s figure of equilibrium for a rotating mass of fluid, London Royal Soc. Proceed. 41 (1887), p. 319. Die bei *Darwin* vorkommende Größe μ steht mit der Größe K in dem Zusammenhang $R^2/K = 25\mu^2$; vgl. auch *Thomson-Tait*, Natur. philosophy II, § 778″, p. 332; ferner Näherungsrechnungen über das *Jacobi*sche Ellipsoid von *Matthiessen*, Über die Gesetze der Bewegung und Abplattung von im Gleichgewicht befindlichen Ellipsoiden, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 290. Die oben angegebenen Zahlen mit ihren 7—8 Dezimalstellen rühren her von *Kaibura*, On the *Jacobi*an ellipsoid, Tokyo Proceed. Math. Soc. 4 (1907), p. 99.

den Exzentrizitäten eine eindeutige. Führt man wieder, wie im Falle der *Maclaurin*schen Ellipsoide, die Hilfsgröße

$$K = \frac{k^2 M^3}{25} \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}}$$

ein, so folgt aus (15) die Relation

$$(17)\quad R^2/K = 3(2+\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)^2 \sqrt[6]{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon_1^2)} \int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 u^2)^3(1+\varepsilon_1^2 u^2)^3}},$$

und für $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1{,}3946\ldots$ wird $R^2/K = 2{,}3065\ldots$, aber dieser Wert ist nunmehr ein unterer Grenzwert, denn für die unendliche Nadel als Grenzfigur ist wohl $\varphi = 0$, aber $R^2/K = \infty$, so daß die dreiachsigen Ellipsoide als Gleichgewichtsfiguren sich bilden zwischen den Grenzen

$$(18)\qquad 0 < \varphi \leqq 0{,}28067 \quad \text{und} \quad 2{,}3065\ldots \leqq R^2/K < \infty.$$

16. Das heterogene dreiachsige Ellipsoid. Die Theorie des dreiachsigen Ellipsoides als Gleichgewichtsfigur bei ungleichförmiger Dichte ist noch wenig ausgebildet. Sie hängt, wie die bezüglichen Untersuchungen zeigen, aufs innigste zusammen mit der Frage nach der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit der flüssigen Masse.

Unter der Annahme, daß die Dichte der Flüssigkeit von ihrer Oberfläche an bis zum Zentrum entweder konstant abnehme oder konstant anwachse, lassen sich einige allgemeine Sätze aufstellen. Der erste rührt von *Hamy*[78]) her. Er sagt, daß bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit, die einem permanenten Gleichgewichtszustande der Flüssigkeit entspricht[79]), die Niveauflächen, welche die Schichten gleicher Dichte voneinander trennen, im Falle sie einzeln die Gleichgewichtsbedingung erfüllen sollen und ihre Hauptachsen zusammenfallen, unmöglich Ellipsoide sein können. Damit hängt zusammen, daß auch die *Clairaut-Laplace*schen Sphäroide keineswegs eine streng ellipsoidische Form haben. Analog beweist *Poincaré*[80]) den Satz, daß, wenn ein fester Kern von beliebiger Form von n Schichten einer flüssigen Masse bedeckt wird, das ganze System ferner um eine gemeinschaftliche Achse mit konstanter Geschwindigkeit rotiert, und die äußere Oberfläche sowie die einzelnen Schichten Ellipsoide sind, die Gleich-

---

78) *Hamy,* Étude sur la figure des corps célestes, Thèses pr. à la fac., Paris 1887, und Théorie de la figure des planètes, J. pour Math. VI (1890), p. 69.

79) *Poincaré* beweist in „Figures d'équilibre" p. 28 direkt, daß zum Gleichgewichtszustand eine konstante Rotationsgeschwindigkeit notwendig sei.

80) *Poincaré,* Sur l'équilibre d'une masse hétérogène, Paris C. R. 107 (1888), p. 1571; vgl. auch *Volterra,* Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre, Acta math. 27 (1903), p. 105.

gewichtsbedingung fordert, daß alle diese Ellipsoide homofokal sind. Für den inneren Kern gäbe dies, wenn auch dieser flüssig wäre, eine unendlich große Abplattung.

Untersuchungen über veränderliche Rotationsgeschwindigkeiten, und zwar sowohl über ihre Variation längs einer Niveaufläche (Differentialquotient von ω nach $\mu = \cos\theta$) sowie innerhalb der Flüssigkeit von Schicht zu Schicht (Differentialquotient von ω nach r), führte *Veronnet*[81]) durch. Er hebt deren Bedeutung hervor mit dem besonderen Hinweise auf die veränderliche Rotationsgeschwindigkeit, die die Beobachtungen an der Oberfläche der Sonne wie auch an den beiden Planeten Jupiter und Saturn erkennen lassen.

III. Stabilitätsuntersuchungen.

17. Grenzen der Rotationsgeschwindigkeit. *Poincaré*[82]) hat zuerst bewiesen, daß für die Winkelgeschwindigkeit ω eine obere Grenze gilt. Er leitet sie aus der Forderung ab, daß die Schwerkraft auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur nach innen gerichtet sein müsse, andernfalls die Flüssigkeit keine zusammenhängende Masse bilden könnte. Durch Anwendung der *Green*schen Transformationsformel

$$\int d\tau\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]=\int\frac{\partial U}{\partial n}ds$$

auf die Gleichgewichtsbedingung (13) findet er die Beziehung

$$\int\frac{\partial U}{\partial n}ds = -4\pi k^2 M + 2\omega^2 V, \tag{19}$$

worin M wie früher die Masse und V das Volumen der Flüssigkeit bedeutet. Da aber

$$\int\frac{\partial U}{\partial n}ds \leqq 0$$

ist, so muß

$$\omega^2 V \leqq 2\pi k^2 M \tag{20}$$

sein, oder, wenn man eine homogene Dichteverteilung voraussetzt,

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} \leqq 1 \tag{21}$$

sein. Einen engeren oberen Grenzwert, gültig speziell für Rotationsellipsoide, findet *Zeipel*[83]), indem er für die Schwere am Äquator

81) *Veronnet*, Rotation de l'éllipsoide homogène et figure exacte de la terre, J. pour Math. VIII (1912), p. 331.

82) *Poincaré*, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Bull. astr. II (1885), p. 100, und Fig. d'équil., p. 11.

83) *Zeipel*, Über das äußere Potential eines heterogenen in Rotation befindlichen Sphäroids, dessen flüssige Oberfläche eine Gleichgewichtsfigur ist, Bihang. Akad. Stockholm 24 (1898).

$$g_a = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=a} - \omega^2 a$$

den Ausdruck aufstellt

$$g_a = -4\pi k^2 \varrho a \left\{1 - \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} \cdot \frac{3 \operatorname{arctg} \varepsilon - \varepsilon(3-\varepsilon^2)}{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arctg} \varepsilon - 3\varepsilon}\right\}$$

und nunmehr zeigt, daß der bei der Größe $\omega^2/2\pi k^2\varrho$ stehende Faktor als Funktion von ε betrachtet, den Maximalwert $^9/_4$ hat, so daß, damit g_a stets negativ bleibe,

(21a) $$\omega^2/2\pi k^2\varrho > \tfrac{4}{9}$$

sein muß. Einen noch engeren Grenzwert für konvexe Gleichgewichtsfiguren, welche die Bedingung erfüllen, daß an ihrer Oberfläche sich Punkte von der Eigenschaft

$$\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial n} = 0,$$

deren Flächennormale also parallel der Rotationsachse ist, vorfinden, leitet *Crudeli*[84]) aus der *Green*schen Gleichung

$$4\pi U = \int \left(U \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma - \int \frac{\Delta_2 U}{r} dS$$

ab, zu

(21b) $$\omega^2/2\pi k^2\varrho < \tfrac{1}{2},$$

während oben aus der Diskussion der transzendenten Gleichung (3), welche den Zusammenhang zwischen ω und ε für das Rotationsellipsoid darstellt, $\omega^2/2\pi k^2\varrho < 0{,}22467\ldots$

folgt. Nach einer Bemerkung von *Lichtenstein*[85]) ist die von *Crudeli* als eine Einschränkung gedachte Forderung bei konvexen Gleichgewichtsfiguren immer erfüllt.

Weitere allgemeine Sätze über homogene Gleichgewichtsfiguren leitet *Lichtenstein* in einer neueren Arbeit ab[86]): so z. B.: die *Poincaré*sche Schranke gilt auch noch dann, wenn die Flüssigkeit Zugkräften widersteht oder unter einem beliebig großen konstanten Außendruck sich befindet; ferner: Jede Gleichgewichtsfigur hat eine auf die Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene.

84) *Crudeli,* Nuovo limite superiore della velocità angolari dei fluidi homogenei, rotanti uniformamente, limitati da figura di equilibrio, Rom. Accad. Lincei. 19, I (1910), p. 666, und 19, II (1910), p. 41; vgl. auch: Contributo alla teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido incompressibile dotato di motu rotatorio, Nuov. Cim. 17 (1908), p. 168.

85) *L. Lichtenstein,* Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeitsmassen, deren Teilchen einander nach dem *Newton*schen Gesetze anziehen, Berl. Ber. 1918, p. 1120—1135.

86) *L. Lichtenstein,* Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren homogener rotierender Flüssigkeiten, I. Abh.: Allgemeine Existenzsätze; II. Abh.: Stabilitätsbetrachtungen, Math. Zeitschr. 1 (1918) und 5 (1919).

18. Stabilität der Gleichgewichtsfiguren. Ältere Literatur. Die Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtsfiguren scheint als erster *D'Alembert*[87]) aufgeworfen zu haben. Seine Schlußweise, die der Analogie mit modernen Entwicklungen nicht entbehrt, ist die folgende.

Für den Fall des Gleichgewichtes besteht zwischen der Rotationsgeschwindigkeit der ellipsoidischen Figur und ihrer Exzentrizität ε die Beziehung

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = \frac{1}{\varepsilon^3}((\varepsilon^2 + 3) \operatorname{arctg} \varepsilon - 3\varepsilon).$$

Ihr entsprechen, wie bekannt, solange $\omega^2/2\pi k^2 \varrho$ unter einer bestimmten Grenze liegt, zwei Wurzeln. Es sei ε_1 die kleinere, ε_2 die größere. Zunächst werde eine Gleichgewichtsfigur angenommen, deren Exzentrizität ε_1 ist. Wird ihr Gleichgewicht gestört und damit die Figur deformiert, so können, was die Exzentrizität ε der neuen Figur anlangt, zwei Fälle eintreten:

$$\varepsilon < \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \varepsilon > \varepsilon_1.$$

Der erstere Fall involviert eine Vergrößerung des Gewichts des Polkanals (nach der *Newton*schen Vorstellung) gegenüber dem des Äquatorkanals, dadurch ein Herausstoßen des Wassers aus diesem und daher das Bestreben, die Exzentrizität ε zu vergrößern oder die ursprüngliche Form der Gleichgewichtsfigur wiederherzustellen. Der zweite Fall $\varepsilon > \varepsilon_1$ bewirkt eine Vergrößerung des Gewichts des Äquatorkanals gegenüber dem des polaren und damit die Tendenz, das Wasser gegen die Pole hinzutreiben, d. h. die Exzentrizität der gestörten Figur zu verkleinern und den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wiederherzustellen; die Figur mit der Exzentrizität ε_1 ist also gegen beide Störungen stabil.

Genau das Entgegengesetzte tritt ein, wenn die Exzentrizität der ursprünglichen Figur der größere Wurzelwert ε_2 ist. Diese Figur ist daher eine instabile. Der Fall endlich, daß die beiden Wurzeln ε_1 und ε_2 zusammenfallen, gibt eine singuläre Lösung, die *D'Alembert* dadurch charakterisiert, daß er sie für eine Störung, durch welche ihre Exzentrizität verkleinert wird, als eine stabile, dagegen für eine entgegengesetzte Störung, welche ihre Exzentrizität vergrößert, als eine instabile bezeichnet (partielle Instabilität).

Die gleiche Schlußweise wendet auch *Laplace*[88]) in seiner Mé-

87) Vgl. Fußnote 15, siehe auch den Streit zwischen *Boskowich* und *D'Alembert*: *Todh.*, Hist., § 470, 567 und 690.

88) *Laplace*, Méc. cél., Livre III, ch. IV, p. 27 u. 28; ferner Livre IV, ch. 2: De la stabilité de l'équilibre des mers; vgl. die Kritik durch *Poincaré*, Sur l'équilibre, § 6.

canique céleste an, jedoch nur im Hinblick auf die spezielle Annahme, daß die Erde aus einem starren Kerne bestehe, den eine Wassermasse bedecke, eine Annahme, welche die Grundlage seiner Theorie der Ebbe- und Fluterscheinungen bildet.

Anderweitige Untersuchungen über die Stabilitätsfrage kommen in der älteren Literatur nicht vor, und es ist merkwürdig, wenn sich *Airy*[89]) über diese Frage dahin äußert, daß die Anschauung, nach der von den zwei einer gegebenen Rotationsgeschwindigkeit entsprechenden Gleichgewichtsfiguren die eine im stabilen, die andere im labilen Gleichgewichte sein solle, nicht korrekt sein könne; vielmehr müsse aus dem Umstande, daß für ein gegebenes Rotationsmoment nur eine Gleichgewichtsform resultiere, mit Notwendigkeit gefolgert werden, daß ihr Gleichgewicht stets stabil sei.

19. Dynamische Stabilität. Die modernen Untersuchungen über die Stabilität der Gleichgewichtsfiguren teilen sich in zwei Gruppen. Die erstere diskutiert die kleinen Schwingungen, die in einer Flüssigkeit bei einer Störung ihres Gleichgewichtes entstehen und die, sofern man nur die ersten Potenzen berücksichtigt, auf lineare Differentialgleichungen führen. Ist der bei der Integration auftretende Zeitfaktor von der Form $e^{(\alpha+\beta i)t}$, so sagt man, die Figur habe

1. gewöhnliche Stabilität, wenn $\alpha = 0$,
2. säkulare Stabilität, wenn $\alpha < 0$ ist.

Die allgemeinsten Untersuchungen dieser Art[90]) für den Fall, daß die Flüssigkeit die Form eines dreiachsigen Ellipsoides hat, auf ihrer Oberfläche ein konstanter Druck lastet und ihre Teilchen aufeinander dem *Newton*schen Gesetze gehorchende Kräfte ausüben, wurden von *Dirichlet*[91]) und *Riemann*[92]) begonnen. Von den allgemeinen von beiden behandelten Fällen interessiert hier nur jener, nach dem eine anfängliche Rotation des Ellipsoids um eine seiner Hauptachsen vorhanden ist. *Dirichlet* zeigt, daß die Integration der Differentialgleichungen in zwei Spezialfällen gelingt, 1. im Falle eines um die Z-Achse symmetrischen, d. h. eines Rotationsellipsoides, 2. für ein dreiachsiges, aber nur dann, wenn zwischen den Achsen a, b und c eine gewisse Beziehung besteht. Beide Fälle führen auf die p. 33 und 34 erwähnten Bedingungsgleichungen als Zusammenhang zwischen diesen Achsen einerseits und der Rotationsgeschwindigkeit ω

89) *Airy*, Figure of the earth, Encykl. Brit. 1843, Art. 28, p. 180.

90) Vgl. auch *A. E. Love*, Hydrodynamik II, IV 16, p. 125.

91) *Dirichlet*, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Gött. Nachr. 14 (1857) und J. f. Math. 58 (1861).

andererseits. In etwas anderer Art behandelt *Riemann*[92]) das Problem. Er kommt auf die transzendente Gleichung

$$\varepsilon(7\varepsilon^2 + 3) - \operatorname{arctg} \varepsilon\,(\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2 + 3) = 0 \tag{22}$$

als Grenzexzentrizität ε, bei deren Überschreiten Labilität des Ellipsoides eintritt. Die einzige reelle Wurzel dieser Gleichung ist $\varepsilon = 3{,}14156$.

Auch *Poincaré*[93]) untersucht die Wellenbewegungen auf einem dreiachsigen Ellipsoid und beweist, daß bei der Darstellung der Störungen durch harmonische Funktionen die den einzelnen Funktionen verschiedener Ordnung entsprechenden Bewegungen unabhängig voneinander vor sich gehen. Nach der gleichen Methode behandelte *Bryan*[94]) die Schwingungen auf einem Rotationsellipsoide, bestimmte ihre Perioden für die einzelnen Kugelfunktionen verschiedener Ordnung und gelangt so für die Kugelfunktion P_2^2 zur *Riemann*schen Gleichung.

20. Statische Stabilität. Das Energiekriterium. Die Frage nach der statischen Stabilität der Gleichgewichtsfiguren knüpft an das Prinzip von *Dirichlet* an, nach welchem ein ruhendes mechanisches System dann im stabilen Gleichgewicht ist, wenn seine potentielle Energie für die Ruhelage kleiner ist als für alle benachbarten Lagen. *Thomson* und *Tait*[95]) haben das Prinzip auch auf den Fall des relativen Gleichgewichtes einer rotierenden Flüssigkeitsmasse ausgedehnt und *Poincaré*[96]), dann *Basset*[97]), *Schwarzschild*[98]) und endlich *Liapounoff*[99]) vollständigere Beweise für die Übertragung des Prinzipes auf diesen Fall geliefert. Darnach lautet es:

Eine Gleichgewichtsfigur ist stabil, wenn bei unverändertem Rotationsmoment ihre Energie im Verhältnisse zu allen möglichen benachbarten Massenanordnungen ein wirkliches Minimum ist, dagegen bei geändertem, wenn die neue Figur, die der Bedingung des Mini-

92) *Riemann,* Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides, Gött. Nachr. 9 (1861) = Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 168; vgl. auch *Steckloff,* Annal. Toulouse 1902, p. 171.

93) *Poincaré,* Sur l'équilibre, p. 363.

94) *Bryan,* The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity, London Phil. Trans. 189 (1889), p. 187.

95) *Thomson-Tait,* Treatise II, § 778''.

96) *Poincaré,* Sur l'équilibre, p. 293.

97) *Basset,* On the stability of *Mauclaurins* liquid spheroid, Cambridge Proc. Math. Soc. VIII (1892).

98) *Schwarzschild,* Die *Poincaré*sche Theorie des Gleichgewichtes einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, Inauguraldiss., München 1896.

99) *Liapounoff,* I u. II.

mums entspricht, einem größeren Rotationsmoment angehört. Die so gefundenen Stabilitätsbedingungen ändern sich jedoch, wenn man der Figur außerdem gewisse Bedingungen auferlegt, und man gelangt so zu der Vorstellung einer *bedingten* Stabilität, von der namentlich *Liapounoff* eine größere Zahl spezieller Fälle entwickelt.

Um den Ausdruck für die geänderte Energie zu berechnen, denke man sich auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur in normaler Richtung teils im positiven, teils im negativen Sinne Massenschichten von der Dicke ζ aufgetragen, so aber, daß durch sie weder das Gesamtvolumen der Flüssigkeit, noch auch die Lage ihres Schwerpunktes geändert wird, was die Integrale

$$\int \zeta\, ds = \int x \zeta\, ds = \int y \zeta\, ds = \int z \zeta\, ds = 0$$

nach sich zieht. Bei Berücksichtigung bloß von Gliedern, die der zweiten Potenz von ζ entsprechen, erhält der Ausdruck für die zweite Variation der Energie W, das ist $\delta_2 W$, die Form[100])

$$(23)\quad \delta_2 W = \frac{1}{2}\int \frac{\partial P}{\partial n}\zeta\, ds - \frac{k^2\varrho}{2}\int\int \zeta\zeta_1 \frac{ds\, ds_1}{r} + \frac{\omega^2}{2J}\left[\int (x^2 + y^2)\zeta\, ds\right]^2.$$

In ihr entspricht das dritte Glied einer Variation des Trägheitsmomentes der Flüssigkeit. Es ist bei einer gleichzeitigen Variation der Rotationsgeschwindigkeit ω oder des Rotationsmomentes R durch

$$\frac{\omega}{J}\frac{\partial J}{\partial R}(\delta R)^2$$

zu ergänzen.

Als ein spezielles Beispiel der Behandlung dieser Gleichung (23) nimmt *Liapounoff*[101]) für die Verschiebung ζ die Form an, die einer Rotation um die Z-Achse entspricht. Durch sie nimmt (23) die Form

$$\delta_2 W = \omega^2 \frac{J_z}{J_y}(J_z - J_y)\theta_x^2 + \omega^2 \cdot \frac{J_z}{J_x}(J_z - J_x)\theta_y^2$$

an, in der J_x, J_y und J_z die Trägheitsmomente um die drei Hauptachsen X, Y und Z bedeuten; und diese Form zeigt, daß W nur

100) In dieser Form, mit Ausschluß des dritten Gliedes, das den von der Veränderung des Trägheitsmomentes J der flüssigen Masse abhängigen Teil der variierten Energie darstellt, findet sich der Ausdruck schon vor bei *Liouville,* Formules génerales relatives à la question de la stabilité d'une masse liquide, douée d'un mouvement de rotation, Add. Conn. d. T. 1855, p. 26; ferner Paris C. R. XV (1842), p. 903, und XVI (1843), p. 363; dann *Gießen,* Über die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit, Jahresber. über die h. Schulen Opladen 1872—73; *Hagen,* S. J., Über die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiachsigen Ellipsoide mit kleiner Exzentrizität ausgebreiteten Flüssigkeit, Zeitschr. Math. Phys. 22 (1877).

101) *Liapounoff*, I, p. 35.

dann ein Minimum, oder $\delta_2 W > 0$ sein kann, wenn

$$J_z > J_y \quad \text{und} \quad J_z > J_x,$$

eine Bedingung, die aussagt, daß zur Stabilität einer Gleichgewichtsfigur notwendig ist, daß die Rotationsachse die kürzeste Achse des Hauptträgheitsellipsoids sei. Einen anderen Beweis dieses Satzes gibt *Poincaré*[102]).

Im singulären Falle, wenn $\delta_2 W = 0$ ist, genügt die bis zu den zweiten Potenzen von ζ gehende Entwicklung nicht, sie muß durch die Berücksichtigung der höheren Potenzen ergänzt werden. Ausführungen hierzu geben *Schwarzschild*[103]), *Poincaré*[104]) und *G. H. Darwin*[105]) im Anschluß an die Behandlung von *Poincaré*, sowie *Liapounoff*[106]) und neuerdings *L. Lichtenstein*[86]).

Durch Einführung von Normalfunktionen φ_i, die den Integralrelationen

$$(24)\quad \begin{cases} \int \varphi_i \varphi_k ds = 0 \text{ oder } = 1, \text{ je nachdem } i = k \text{ oder } i \neq k, \\ \int \varphi_i' ds' \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\omega^2}{T}(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \right\} = c_i s_i \varphi_i \end{cases}$$

genügen, und die Annahme einer entsprechenden Reihenentwicklung

$$\zeta = \sum A_i \varphi_i$$

geht der Ausdruck für $\delta_2 W$ über in eine Summe von voneinander unabhängigen Quadraten

$$(25)\qquad \delta_2 W = \sum B_i^2 (1 - s_i).$$

Die hierin auftretenden Konstanten $1 - s_i$ nennt *Poincaré* die *Stabilitäts*koeffizienten der Gleichgewichtsfiguren.

21. Verzweigungs- und Grenzfiguren. Solange für eine bestimmte Gleichgewichtsfigur keiner der Stabilitätskoeffizienten aus der Reihe $1 - s_i$ zu Null wird, sondern sie alle positiv sind, ist die Gleichgewichtsfigur stabil. Eine Singularität tritt ein, wenn $1 - s_i = 0$

102) *Poincaré,* Figures, p. 35.

103) *Schwarzschild,* Dissert., p. 19: Vollständiger Ausdruck der Energie einer deformierten Figur.

104) *Poincaré,* Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes, London Phil. Trans. 198 (1902), p. 333.

105) *Darwin,* The stability of the pear-shaped figures of equilibrium, London Phil. Trans. 200 (1903), p. 251, ferner: The approximate determination of the Form of *Maclaurin* spheroid, Trans. Americ. Math. Soc. 4 (1903), p. 113, und 9 (1908), p. 34.

106) *Liapounoff,* Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, St. Pétersb. Mém. XXII (1908).

wird. Für diesen Fall stellt *Poincaré*[107]) ein heuristisches Prinzip auf, das er das Prinzip des Wechsels der Stabilität nennt.

Man betrachte eine Gleichgewichtskonfiguration eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden, in dem die Koordinaten von einem Parameter abhängen, so entspricht einer jeden ein Punkt in einem n-dimensionalen Raum, und ihrer kontinuierlichen Aufeinanderfolge eine Reihe von solchen Punkten, oder eine Kurve. (In dem besonderen Falle einer Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten ist die Anzahl n der Freiheitsgrade unendlich groß.) Diese nennt *Poincaré* eine lineare Reihe. Im Allgemeinen wird die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen keineswegs eine eindeutige sein. Es folgt daraus, daß man nicht eine eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren darstellende Kurve, sondern mehrere Kurvenzweige erhalten wird, deren jede sich mit dem Parameter kontinuierlich ändert, ohne daß ausgesagt werden kann, wo diese Kurven beginnen, wo sie enden oder ob sie sich in irgendwelchen Punkten verzweigen. Die Bedingung der Stabilität erfordert nur, daß die zweite Variation von W, d. h. die quadratische Form

$$\delta_2 W = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_i \partial \zeta_k} \zeta_i \zeta_k ,$$

eine definite positive ist oder daß in dem transformierten Ausdruck

$$\delta_2 W = \sum B_i^2 (1 - s_i)$$

alle Stabilitätskoeffizienten $1 - s_i > 0$ sind. Die Bedingung, daß einer von ihnen verschwindet, ist identisch mit der, daß für einen bestimmten Wert des Parameters die Funktionaldeterminante der Größen $\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}$ Null wird, was wieder nur dann eintreten kann, wenn mindestens zwei der Kurvenzweige sich in einem Punkte des Raumes schneiden, d. h. daß die zugehörige Gleichgewichtsfigur gleichzeitig zwei Reihen angehört.

Ist das Verschwinden von $1 - s_i$ gleichzeitig mit einem Zeichenwechsel verbunden, so sind tatsächlich für einen dem betreffenden Parameterwert unendlich benachbarten Punkt zwei Figuren vorhanden, die nur unendlich wenig voneinander abweichen und für den bestimmten Parameterwert zusammenfallen. In diesem Fall der wirklichen Kreuzung heißt die Figur eine Kreuzungsfigur. Sonst, wenn die eine Reihe

107) *Poincaré,* Sur l'équilibre, p. 261 ff., ferner: Figures, p. 164. Ferner die Vervollständigungen hierzu von *Schwarzschild,* Dissert., p. 38. Man vergleiche hierzu die mathematisch vollkommeneren und strengen Beweise von *Liapounoff* (Fußnote 106) und *Lichtenstein* (Fußnote 86).

bloß durch einen singulären Punkt hindurch (ohne Zeichenwechsel) in die zweite übergeht, eine Grenzfigur.

Kreuzen sich daher zwei Reihen von Gleichgewichtsfiguren, welche beide je einen Kurvenweg für einen positiven und einen negativen Wert des Parameters, d. h. zu einem größeren wie einem kleineren Rotationsmoment entsenden, und die eine Reihe ist vor der Kreuzung stabil, nach der Kreuzung instabil, so ist die andere vor der Kreuzung instabil und nach ihr stabil. Es findet in der Kreuzung ein Umtausch der Stabilitäten statt. Gehört aber der eine Zweig wohl zu beiden, der andere aber nur zu größeren oder nur zu kleineren Werten des Rotationsmomentes, dann findet ein solcher Wechsel der Stabilitäten nicht statt. Liegt eine Grenzfigur vor, von der überhaupt nur zwei Kurvenzweige ausgehen, so haben beide den gleichen Stabilitätscharakter, wenn sie verschiedenen Werten des Rotationsmomentes angehören, sind aber von verschiedenem Charakter bei gleichen Werten von R.

22. **Die Stabilität der Kugel als Gleichgewichtsfigur.** Die Stabilitätskoeffizienten der Kugel als Gleichgewichtsfigur hat zuerst *Liapounoff*[108]) berechnet. Indem er für die in (24) eingeführten Normalfunktionen φ Kugelfunktionen verwertet, für die den Gleichungen (24) entsprechende Relationen gelten, nämlich

$$\int ds\, P_n P_m = 0 \quad (\text{wenn } n \neq m) \quad \text{und} = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (\text{wenn } n = m)$$

$$\text{und} \int ds' P_n' \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi a}{2n+1} P_n$$

(worin P_n' dem Flächenelement ds' der Kugel, deren Radius a ist, angehört, während r den Abstand dieser von einem festen Punkte der Oberfläche bedeutet, zu dem wieder die Funktion P_n gehört), d. i. die Gleichung (23) mit Vernachlässigung des dritten Gliedes in ihr, was hier wegen $\omega = 0$ gestattet ist, erhält er mit Berücksichtigung von

$$g = \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{4\pi k^2 \varrho}{3} a$$

und der Annahme einer Entwicklung

$$\zeta = \sum A_n P_n$$

für die zweite Variation der Energie den Ausdruck

$$\delta_2 W = 8\pi^2 k^2 \varrho^2 a^2 \sum \frac{A_n^2}{2n+1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

in dem die Summe $\sum$ mit $n = 2$ beginnt, da wegen Unveränder-

108) *Liapounoff*, I, chap. 2. La stabilité de la sphère, p. 39.

lichkeit des Volumens und wegen der unveränderten Lage des Schwerpunktes die Kugelfunktionen 0. und 1. Ordnung nicht in Betracht kommen.

Man sieht, daß die Stabilitätskoeffizienten der Kugel nicht negativ werden können. Es ist also die Kugel eine gewissermaßen absolut stabile Form. Einen zweiten, mehr anschaulichen Beweis hiefür gibt *Poincaré*[109]). Er stützt sich auf folgende zwei Sätze: 1. Das *Newton*sche Potential irgendeines Körpers in bezug auf einen beliebigen Aufpunkt ist stets kleiner als das Potential einer Kugel von gleichem Volumen in bezug auf ihren Mittelpunkt. 2. Die Energie eines Körpers von gegebenem Volumen erreicht ihren Maximalwert für jenen, dessen Begrenzung eine Kugelfläche ist.[110])

23. Die Stabilitätskoeffizienten des dreiachsigen Ellipsoides. Zur Darstellung der Stabilitätskoeffizienten des dreiachsigen Ellipsoides als Gleichgewichtsfigur eignen sich nach *Poincaré* als Vertreter der Funktionen φ *Lamé*sche Funktionen. Die für sie eingeführte Schreibweise möge, da sie nicht einheitlich ist, hier zuerst erklärt werden:

Die Gleichung des Grundellipsoides sei

$$\frac{x^2}{\varrho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

mit der Annahme $a < b < c$, so daß ihre drei reellen Wurzeln λ, μ und ν als die elliptischen Koordinaten eines Punktes den Ungleichungen

$$a < \nu < b < \mu < c < \lambda < \infty$$

genügen. Die Funktionen von λ seien mit $L(\lambda)$ bezeichnet, die ihnen adjungierten zweiter Art mit $K(\lambda)$, so daß

$$K(\lambda) = (2n+1)L(\lambda)\int \frac{\lambda\, d\lambda}{(L(\lambda))^2\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}},$$

und endlich die Funktionen von μ und ν mit $E(\mu)$ und $E(\nu)$. Die hinzuzufügenden Indizes seien so gewählt, daß, wenn für $a = b$ das dreiachsige Ellipsoid in ein abgeplattetes, und dementsprechend die Produkte $E(\mu)E(\nu)$ in Kugelfunktionen übergehen,

$$E_s^n(\mu)E_s^n(\nu) = P_k^n(\vartheta)\cos k\psi \text{ mit } s = 2k+1$$

und

$$E_s^n(\mu)E_s^n(\nu) = P_k^n(\vartheta)\sin k\psi \text{ mit } s = 2k,$$

---

109) *Poincaré,* Fußnote 82 und Figures, p. 15; ferner: Sur un théorème de M. Liapounoff rélativ à l'équilibre d'une masse fluide, Paris C. R. 104 (1887), p. 622. Die Abhandlung von Liapounoff findet sich in Charkow math. Gesellsch. Mitt. I (1884), p. 43 in russischer Sprache.

110) Für diesen Satz von *Liapounoff* hat neuerdings *P. Carleman* einen sehr einfachen Beweis gegeben, Math. Zeitschr. 3 (1919), p. 1—7, ebenso *Lichtenstein,* ebenda 3 (1919), p. 8—10.

wenn ϑ, ψ die Polarkoordinaten bedeuten unter der Annahme

$$x = \sqrt{\lambda^2 - a^2} \sin\vartheta \sin\psi$$
$$y = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sin\vartheta \sin\psi$$
$$z = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cos\vartheta\,.$$

Mit Berücksichtigung der beiden *Liouville*schen Relationen[111])

$$\int l ds E_s^m(\mu) E_s^m(\nu) E_\sigma^n(\mu) E_\sigma^n(\nu) = 0 \text{ für } m \neq n, \text{ und}$$
$$= \text{const.} = c_s^n \text{ für } m = n$$

$$\int l_0 ds_0 \frac{E_s^n(\mu_0') E_s^n(\nu_0')}{r} = \frac{4\pi}{2n+1} L_s^n(\lambda_0) K_s^n(\lambda_1) E_s^n(\mu_1) E_s^n(\nu_1) \text{ für } \lambda_1 > \lambda_0$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1} L_s^n(\lambda_1) K_s^n(\lambda_0) E_s^n(\mu_1) E_s^n(\nu_1) \text{ für } \lambda_1 < \lambda_0,$$

ferner der Gleichung

$$g = \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{4\pi k^2 \varrho}{3} K_1^1(\lambda_0) L_1^1(\lambda_0) / l_0\,,$$

aus der folgt, daß auf der Oberfläche eines Ellipsoides (mit dem Parameter λ_0) nicht g, sondern $g l_0$ konstant ist, und endlich der Annahme für die Entwicklung von ζ in der Form

$$\zeta = \sum A_s^n E_s^n(\mu) E_s^n(\nu),$$

in der die Summierung mit $n = 2$ beginnt, — erhält man für die Energie den Ausdruck

$$\delta_2 W = 8\pi^2 k^2 \varrho^2 \sum c_s^n (A_s^n)^2 \left[\frac{1}{3} K_1^1(\lambda) L_1^1(\lambda) - \frac{1}{2n+1} K_s^n(\lambda) L_s^n(\lambda)\right].$$

Man sieht, daß der Faktor:

$$\frac{1}{3} K_1^1(\lambda) L_1^1(\lambda) - \frac{1}{2n+1} K_s^n(\lambda) L_s^n(\lambda) \tag{26}$$

die Stabilitätskoeffizienten des dreiachsigen Ellipsoides darstellt, doch wieder nur mit Vernachlässigung des in (23) auftretenden dritten Gliedes.

Nun lauten die den Gleichungen (15) entsprechenden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines Ellipsoides überhaupt, wenn man sie durch *Lamé*sche Funktionen darstellt:

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} \frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho} &= \frac{L_2^1(\lambda) L_1^1(\lambda)}{L_3^1(\lambda)} \left(L_3^1(\lambda) K_3^1(\lambda) - L_1^1(\lambda) K_1^1(\lambda)\right) \\ &= \frac{L_3^1(\lambda) L_1^1(\lambda)}{L_2^1(\lambda)} \left(L_2^1(\lambda) K_2^1(\lambda) - L_1^1(\lambda) K_1^1(\lambda)\right). \end{aligned} \right.$$

---

111) Zur speziellen Literatur über *Lamé*sche Funktionen mit Rücksicht auf das Problem der Gleichgewichtsfiguren kämen außerdem in Betracht: *Poincaré* in: Sur l'équilibre, p. 299, ferner Figures, p. 112. *Hamy* in der Fußn. 61 zitierten Abh., *Liapounoff,* I und II, endlich *G. H. Darwin,* Ellipsoidal harmonic analysis, London Phil. Trans. 197 (1901), p. 461, und 203 (1904), p. 111.

Die erste Lösung derselben

$$L_2^1 = L_3^1, \ K_2^1 = K_3^1$$

führt zum Rotationsellipsoid[112]), die zweite, die das *Jacobi*sche Ellipsoid gibt, deutet mit der aus (26) abzuleitenden Gleichung

$$\frac{1}{3} L_1^1(\lambda) K_1^1(\lambda) - \frac{1}{5} L_4^2(\lambda) K_4^2(\lambda) = 0 \tag{28}$$

auf das Auftreten eines Nullpunktes, und zwar für den $n = 2$ und $s = 4$ angehörenden Stabilitätskoeffizienten hin. Das *Jacobi*sche Ellipsoid ist daher eine singuläre und, da die weitere Diskussion zeigt, daß der Koeffizient für größere Werte von λ als die dem Nullwerden entsprechenden negativ wird, eine Verzweigungsfigur, die die Reihe der stabilen Rotationsellipsoide von ihrem Beginn an, d. i. der Kugel abschließt.

24. Die birnenförmigen und andere Gleichgewichtsfiguren bedingter Stabilität. Mit der Frage nach der Abhängigkeit der Wurzeln der Gleichung (26)

$$\frac{1}{3} K_1^1(\lambda) L_1^1(\lambda) - \frac{1}{2n+1} K_s^n(\lambda) L_s^n(\lambda) = 0$$

von den beiden Ordnungszahlen n und s befaßten sich *Poincaré*, *Schwarzschild* und *Liapounoff*[113]). Sie gab folgende zwei Hauptsätze: Die Funktionen $K_s^n L_s^n$, die den Faktor $z = \sqrt{\lambda^2 - c^2}$ enthalten, können zu reellen Wurzeln von (26) keine Veranlassung geben. Sie kommen daher zur Aufsuchung singulärer Figuren nicht in Betracht. Für die anderen Funktionen ist die Reihenfolge der Wurzeln ihrer Größe nach bestimmt durch den Index n.

Was zunächst die Ordnungszahl $n = 2$ anlangt, so kommen nur die Funktionen E_1^2, E_4^2 und E_5^2 in Betracht. Die zwei letzteren lassen aus dem Rotationsellipsoide dreiachsige entstehen, entsprechend den Deformationen $\zeta_1 \cong xy$, die zu E_4^2, und $\zeta_2 \cong x^2 - y^2$, die zu E_5^2 gehört. Beide Ellipsoide gehen durch eine Drehung um 90° ineinander über und stellen daher nur *eine* neue Reihe von Gleichgewichtsfiguren vor, die sich an die Rotationsellipsoide anschließt. Es sind dies die *Jacobi*schen Ellipsoide.

Zu der Funktion E_1^2, die ebenfalls eine reelle Wurzel der Gleichung (26) gibt, gehört die Deformation $\zeta \simeq (x^2 + y^2 - 3z^2)$. Sie

112) Eine direkte Darstellung der Stabilitätskoeffizienten des Rotationsellipsoides durch Kugelfunktionen geben *Bryan* (vgl. Fußnote 94) und *Basset*, On the Stability of *Maclaurin's* liquid spheroid, Cambridge Phil. Proceed. VIII (1892).

113) Vgl. die in Fußnote 111 zitierten Abh., ferner die auf Kugelfunktionen sich beziehende analoge Gleichung p. 45.

läßt den Rotationscharakter der ursprünglichen Figur intakt und vergrößert nur deren Exzentrizität. Ihr entspricht, wie man sich durch Ausführung der Integrale $K_1^2, \ldots$ überzeugt, das p. 14 erwähnte Grenzellipsoid, über das hinaus keine ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren mehr möglich sind.

Von den Funktionen dritter Ordnung sind nur E_5^3 und E_6^3 zu erwähnen. Die von ihnen abhängenden Deformationen lauten

$$\zeta \cong x\left(\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}-1\right) \text{ mit } h \text{ als der größeren Wurzel der Gl. } \frac{3}{h^2-a^2}+\frac{1}{h^2-b^2}+\frac{1}{h^2-c^2}=0,$$

$$\zeta \cong y\left(\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}-1\right) \text{ mit } h \text{ als der größeren Wurzel der Gl. } \frac{1}{h^2-a^2}+\frac{3}{h^2-b^2}+\frac{1}{h^2-c^2}=0.$$

Sie bestimmen, da man wieder a und b miteinander vertauschen kann, nur eine neue Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die höherer Ordnung sind als die Ellipsoide. Ihrer Form nach wurden sie zuerst von *Poincaré* festgestellt und von *G. H. Darwin* die birnen- oder hantelförmigen Figuren (pear-shaped figures) genannt. Mit ihnen schließt die Reihe der *Jacobi*schen Ellipsoide ab (das betreffende Grenzellipsoid wurde von *Darwin*[114]) berechnet). Doch über ihre Stabilität oder die Art ihrer Verzweigung mit den *Jacobi*schen Ellipsoiden läßt sich bis nun noch nichts Entscheidendes sagen. Die Entscheidung ließe sich nur durch Bestimmung des Vorzeichens der Koeffizienten gewisser höherer Glieder in der Entwicklung von $\delta_2 W$ durchführen. Rechnungen in dieser Richtung sind von *G. H. Darwin* und *Liapounoff*[115]) gemacht worden, führten aber zu entgegengesetzten Resultaten. Nach *Darwin* gehören sie einem größeren Rotationsmoment an, wären also die stabile Fortsetzung der *Jacobi*schen Ellipsoide, nach *Liapounoff* aber wäre gerade das Entgegengesetzte der Fall.

Weitere neue aus den *Jacobi*schen Ellipsoiden abzuleitende Gleichgewichtsfiguren unter der Voraussetzung bedingter Stabilität unter-

---

114) *Darwin,* On the pear-shaped figure of equilibrium. London Phil. Trans. 198 (1902), p. 301.

115) *Darwin,* The stability of the pears-haped figure of equilibrium, London Phil. Trans. 200 (1903), p. 251; *Liapounoff,* I und II; vgl. auch *Benesch,* Über das Vorzeichen des *Poincaré*schen Ausdruckes für die Stabilität der birnenförmigen Figur, Astr. Nachr. 186 (1911), p. 305, sowie *Jeans,* Potential of ellipsoidal bodies and the figure of equilibrium of rotating liquid mass, London Phil. Trans. 214 (1914), sowie *N. Mudd,* The gravitational Potential and Energy of harmonic deformation of any ordre: Messenger Math. 40 (1911), p. 137.

sucht *Liapounoff*[116]). Zunächst für den Fall der Erhaltung des Rotationscharakters gelangt er von den Rotationsellipsoiden zu dem durch die Funktion E_1^2 bestimmten Grenzellipsoid, von ihm zu der durch die Funktion E_1^4 charakterisierten Figur. Die aus ihr folgende Deformation ζ ist gegeben durch

$$\zeta \cong \left(\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}-1\right),$$

wenn für h und k die beiden größten Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{1}{h^2-a^2}+\frac{1}{h^2-b^2}+\frac{1}{h^2-c^2}=-\frac{4}{h^2-k^2}$$

$$\frac{1}{k^2-a^2}+\frac{1}{k^2-b^2}+\frac{1}{k^2-c^2}=\frac{4}{h^2-k^2}$$

genommen werden müssen.

Setzt man aber nach *Liapounoff* im Anschlusse an das *Jacobi*sche Ellipsoid E_4^2 die Bedingung fest, daß die neue Figur sowie das gegebene dreiachsige Ellipsoid zwei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen um die Rotationsache habe, dann ist diese bestimmt durch E_8^4, d. i. eine Deformation

$$\zeta \cong xy\left(\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}-1\right),$$

worin h die größere Wurzel der Gleichung

$$\frac{3}{h^2-a^2}+\frac{3}{h^2-b^2}+\frac{1}{h^2-c^2}=0$$

ist.

25. Numerische Daten. Die im folgenden mitgeteilten Zahlen, die den Arbeiten von *G. H. Darwin* entnommen sind, mögen ein Bild der Reihenfolge der stabilen Gleichgewichtsfiguren, insoweit sie ellipsoidischer Form sind, geben:

1. Kugel:

$$\varphi=\frac{3\omega^2}{4\pi k^2\varrho}=0 \qquad \varepsilon=0 \qquad R^2/K=0.$$

2. Rotationsellipsoide:

$\varphi = 0{,}0364$	$\varepsilon = 0{,}3145$	$R^2/K = 0{,}1550$	$\sin\psi = 0{,}3$	(nach p. 13)
0,0654	0,4364	0,2938	0,4	
0,1035	0,5773	0,5015	0,5	
0,1510	0,7500	0,8140	0,6	
0,2080	0,9804	1,3034	0,7	

116) *Liapounoff,* I und II; ferner: Sur les figures d'équilibre peu différentes des éllipsoides, 4 Teile, St. Petersb. Mém. 1906, 1909, 1911 und 1913, sowie: Sur un problème de *Tchebycheff,* St. Petersb. Mém. XVII (1905).

$\varphi = 0{,}2719$	$\varepsilon = 1{,}3333$	$R^2/K = 2{,}1488$	$\sin\psi = 0{,}8$
0,2807	1,3946	2,3065	= Verzweigungsfigur,
0,3281	2,0000	3,8369	*Jacobi*sches Ellipsoid.
0,3370	2,5292	5,1174	= Grenzellipsoid.
0,3302	3,1416	6,4803	= *Riemann*sches Ellipsoid.[117]
0	∞	∞	= die unendlich große u. unendlich dünne Scheibe.

3. Dreiachsige Ellipsoide:

$\varphi = 0{,}2807$	$\varepsilon = 1{,}3946$	$\varepsilon_1 = 1{,}3946$	$R^2/K = 2{,}3065$	
0,2718	1,7319	1,1335	2,4555	
0,2489	2,1445	0,9292	2,9019	
0,2130	2,7204	0,7543	3,7942	= Verzweigung mit den birnenförmigen Figuren.
0,1608	3,734.	0,578.	5,782.	
0,1002	5,667.	0,395.	10,381.	
0	∞	0	∞	= die unendlich lange u. unendlich dünne Nadel.

IV. Die Gleichgewichtsfigur der Monde.

26. Figur des Mondes. Dem Übergange von der allgemeinen Theorie der Gleichgewichtsfiguren auf das speziellere Problem der Bestimmung der Gestalt des Erdmondes und der Satelliten der anderen Planeten liegen folgende Annahmen zugrunde: 1. Eine homogene Flüssigkeit bewege sich als Satellit um einen (starren) Zentralkörper derart, daß er ihm stets dieselbe Seite zuwende und seine Winkelgeschwindigkeit ω bei dieser Bewegung nach dem dritten *Kepler*schen Gesetze gegeben ist, durch

$$\omega^2 = k^2\,(M + E)/\Delta^3,$$

117) Die Bedingungsgleichung für das *Riemann*sche Ellipsoid schreibt sich, dargestellt durch *Lamé*sche Funktionen, in der Form (abgesehen von der einen durch $K_2{}^1(\lambda) = K_3{}^1(\lambda)$ bestimmten Wurzel):

$$L_2{}^1(\lambda)\,\{K_3{}^1(\lambda)\,L_3{}^1(\lambda) - K_1{}^1(\lambda)\,L_1{}^1(\lambda)\} - L_3{}^1(\lambda)\,\{K_2{}^1(\lambda)\,L_2{}^1(\lambda) - K_1{}^1(\lambda)\,L_1{}^1(\lambda)\} = 0,$$

während die analoge für das *Jacobi*sche Ellipsoid

$$(L_2{}^1(\lambda))^2\,\{K_3{}^1(\lambda)\,L_3{}^1(\lambda) - K_1{}^1(\lambda)\,L_1{}^1(\lambda)\} - (L_3{}^1(\lambda))^2\,\{K_2{}^1(\lambda)\,L_2{}^1(\lambda) - K_1{}^1(\lambda)\,L_1{}^1(\lambda)\} = 0$$

lautet und infolge der Relation

$$(L_2{}^1(\lambda))^2 K_3{}^1(\lambda)\,L_3{}^1(\lambda) - (L_3{}^1(\lambda))^2 K_2{}^1(\lambda)\,L_2{}^1(\lambda) = \frac{3(a^2 - b^2)}{5}\,K_4{}^2(\lambda)\,L_4{}^2(\lambda)$$

in $$\tfrac{1}{3}K_1{}^1(\lambda)\,L_1{}^1(\lambda) - \tfrac{1}{5}K_4{}^2(\lambda)\,L_4{}^2(\lambda) = 0$$ übergeht.

wenn M die Masse des Mondes, E die des Hauptplaneten und Δ die Distanz ihrer Mittelpunkte bedeutet. 2. Sie stehe unter der Einwirkung der Gravitationskräfte ihrer eigenen Teilchen P und 3. unter der Anziehung P_1 des Zentralkörpers. Zur Berechnung der letzteren werde ein Koordinatensystem vorausgesetzt, dessen XY-Ebene mit der Bahnebene des Mondes zusammenfällt, und dessen X-Achse nach dem Hauptplaneten gerichtet ist. Außerdem werde angenommen, daß die Dimensionen des Mondes gegen seine Distanz Δ vom Planeten kleine Größen erster Ordnung seien, so daß bei der Entwicklung von $1/\Delta$ bloß die Glieder bis zur zweiten Ordnung angeschrieben werden sollen. Eine weitergehende Entwicklung hätte zur Folge, daß dem Monde eine Gestalt zugeschrieben würde, die eine Fläche höheren als 2. Grades wäre. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für P_1 der Ausdruck:

$$P_1 = \frac{k^2 E}{\Delta}\left(1 + \frac{x}{\Delta} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2\Delta^2}\right) - \frac{k^2 E x}{\Delta^2}, \tag{29}$$

während für P als das Potential eines dreiachsigen Ellipsoides die unter 15 erwähnte Form zu substituieren ist. Die Gleichgewichtsbedingung wird damit

$$P + P_1 + \tfrac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}^{118)} \tag{30}$$

und ist mit der Gleichung des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu identifizieren. *Laplace* diskutiert die daraus sich ergebenden Gleichungen nur unter der Annahme, daß die Exzentrizitäten des Mondellipsoides ε und ε_1 sehr klein sind. In diesem Falle liefert eine Näherungsrechnung für die Integrale ξ, η und ζ in dem Ausdrucke

118) In dieser Form kommt die Gleichung zum ersten Male vor bei *Laplace,* Méc. cél., Livre III, § 23. Vgl. auch *Giesen,* Über die Gestalt eines um einen Zentralkörper rotierenden homogenen flüssigen Satelliten, Zeitschr. f. Math. XXI (1876), p. 49, ferner *Matthiessen,* Über die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der Satelliten der Erde und des Jupiter, Zeitschr. f. Math. XXV (1880), p. 72. Die theoretischen Untersuchungen über die Figur des Mondes überhaupt beginnen mit *D'Alembert.* (Vgl. Fußnote 15.) Derselbe stellte das folgende rein mathematische Problem auf: Eine homogene flüssige Masse rotiere mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine beliebige Achse. Sie stehe einerseits unter der Einwirkung der Gravitationskräfte ihrer eigenen Massenteilchen, anderseits unter dem Einflusse der Anziehung eines entfernten Körpers in beliebiger Lage. Es ist die Gleichung für die Gleichgewichtsfigur zu bestimmen. Erst *Laplace* nimmt an, daß der entfernte Körper in der Äquatorebene der Flüssigkeitsmasse liege, und kommt so zu dem spezielleren Problem der Bestimmung der Gestalt des Erdmondes. *Todh.,* Hist. § 616 ff.

für P die Werte:

$$-\xi = \tfrac{1}{3}\left[1 - \tfrac{3}{10}(3\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2)\right], \qquad -\eta = \tfrac{1}{3}\left[1 - \tfrac{3}{10}(\varepsilon^2 + 3\varepsilon_1^2)\right],$$
$$-\zeta = \tfrac{1}{3}\left[1 - \tfrac{3}{10}(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2)\right]$$

und mit ihnen erhält man

$$\varepsilon^2 = \frac{5}{2}\,\frac{M + 4E}{M}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^3 \qquad \varepsilon_1^2 = \frac{5}{2}\,\frac{M + E}{M}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^3$$

oder mit Vernachlässigung des kleinen Bruches M gegenüber E

$$\varepsilon^2 = 10\,\frac{E}{M}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^3 \qquad \varepsilon_1^2 = \frac{5}{2}\,\frac{E}{M}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^3$$

Nach den für den Erdmond gültigen Daten $E/M = 81$, $\Delta/c = 221$ ergibt sich hieraus

$$\varepsilon^2 = 0{,}0000750, \qquad \varepsilon_1^2 = 0{,}0000188,$$

Zahlen, welche, wenn man den Radius des Mondes zu 1741 km annimmt, für die linearen Differenzen seiner drei Hauptachsen die äußerst kleinen Werte

$$a - c = 65 \text{ m}, \qquad b - c = 16 \text{ m},$$

liefern, die wohl schwer je durch eine direkte Messung der sichtbaren Mondscheibe am Himmel konstatiert werden dürften. In der Tat ergaben auch alle Messungen der Mondfigur, die von *Wichmann*, *Schur*, *Hartwig* u. a. ausgeführt wurden, für ihren Umriß völlig die Form eines Kreises, natürlich bis auf die überragenden Berge. Erst *Franz*[119]) gelang es, durch Messungen auf Photogrammen, die bei verschiedenen Librationsperioden aufgenommen wurden, eine Höhenschichtenkarte des Mondes zu entwerfen und die einzelnen Messungen durch Anschluß an ein dreiachsiges Ellipsoid auszugleichen. Die Rechnung ergab für die Verlängerung in der Richtung zur Erde

$$\frac{a - c}{c} = 0{,}00114 \pm 0{,}00578.$$

Anderseits leitet er aus einer Diskussion der *Wichman*schen Beobachtungen zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes für dessen Trägheitsmomente J_x, J_y und J_z die Werte

$$\frac{J_z - J_y}{J_x} = 0{,}000300, \quad \frac{J_z - J_x}{J_y} = 0{,}000614, \quad \frac{J_y - J_x}{J_z} = 0{,}000314,$$

119) *Franz*, „Die Figur des Mondes" in Königsberger Sternw. Beob. Bd. 38 (1899), ferner Mitteil. d. Sternw. Breslau I (1901), II (1903); vgl. auch *Hayn*, Selenographische Koordinaten, Leipzig Abh. Ak. 1902, 1904, 1907 u. 1914, und die Referate über diese Arbeiten in Astr. Ges. Vs. Bd. 35, 36 u. 38, ferner *Franz*, Die Randlandschaften des Mondes, Nov. Act. Leop. 99 (1913) und *Hayn*, Über die Abweichung des Mondrandes von der Kreisform, Astr. Nachr. 168 (1903), p. 2.

ab, welche unter der Annahme einer homogenen Schichtung des Mondes direkt dessen entsprechenden Abplattungen proportional sind.

Theorie und Beobachtung stehen daher soweit miteinander in Übereinstimmung, als beide für die Gestalt des Mondes die eines gegen die Erde hin verlängerten dreiachsigen Ellipsoides fordern, nur sind die theoretischen Werte der Abplattung bedeutend kleiner als die aus den Beobachtungen abgeleiteten[120]), und selbst bei den Rechnungen von *Franz* ist der mittlere Fehler der Messungen größer als ihr Ergebnis, so daß dieses fast als illusorisch bezeichnet werden kann.

27. Stabilität der Gleichgewichtsfigur eines Mondes. Mit der Diskussion der allgemeinen Gleichung für das Gleichgewicht, durch die die Gestalt eines Mondes bestimmt wird, befaßte sich *Roche.*[121]) Er gibt zunächst der Gleichung (30) die Form

$$(30\text{a})\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi k^2\varrho} = \frac{3(1+\mu)(\xi a^2-\zeta c^2)}{(3+\mu)\,a^2+c^2}\cdot\frac{ab}{c^2} = \frac{3(1+\mu)(\eta b^2-\zeta c^2)}{\mu b^2+c^2}\cdot\frac{ab}{c^2},$$

in der M die Masse des Mondes $M=\frac{4\pi}{3}\varrho abc$, μ ihr Verhältnis zu der des Hauptplaneten $\mu = M/E$ und ξ, η und ζ die unter 15 erwähnten Integrale bedeuten, und gelangt damit zu folgenden Ergebnissen: Ist die Distanz des Mondes vom Hauptkörper groß und mithin nach dem dritten *Kepler*schen Gesetze seine Rotationsgeschwindigkeit klein, so existieren stets zwei Reihen ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren, von denen die eine aus weniger abgeplatteten, die andere aus stärker abgeplatteten dreiachsigen Ellipsoiden besteht. Im Grenzfalle $\omega = 0$ ist das erste nahe eine Kugel[122]), das zweite geht in eine unendlich

120) *Laplace,* Méc. cél. Livre V, ch. 2, § 19, bemerkt hierzu: Sans doute les hautes montagnes et les autres inégalités, que l'on observe à la surface de la lune, ont sur les différences de ces moments d'inertie une influence très sensible et autant plus grande que l'applatissement du sphéroide lunaire est fort petit et sa masse peu considérable. Vgl. auch über die Nichtanwendbarkeit der *Clairaut*schen Theorie auf den Mond *W. de Sitter,* The motion of the lunar perigé and node and the figure of the Earth, Amsterdam. Proceed. XVIII (1915), p. 1309.

121) *Roche,* La figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point eloigné, Mém. Acad. Montpellier I (1850), II (1854). Vgl. auch die Darstellung in *Tisserand,* Méc. cél. II, chap. 8, ferner *S. J. Krüger,* Evenwichtsformen, p. 30 und 111.

122) So finden sich für die 4 großen Jupitermonde die Achsenverhältnisse:

	Δ/r_1	$2r$	μ	$3\omega^2/4\pi k^2\varrho$	$a:c$	$b:c$
I	5,933	4070 km	0,00001688	0,00678	1,03390	1,00847
II	9,439	3430	0,00002323	0,00024	1,00366	1,00092
III	15,057	5790	0,00008844	0,00023	1,00114	1,00028
IV	26,426	4830	0,00004247	0,00005	1.00025	1,00006

dünne und unendlich lange nach dem Hauptplaneten gerichtete Nadel über. Vermindert sich die Distanz und wächst im entsprechenden Maße ω, so geht die Kugel in ein mehr und mehr sich verlängerndes Ellipsoid über, das um die kleinste Achse rotiert, während die größte stets dem Hauptkörper zugewandt ist, das zweite nadelförmige Ellipsoid hingegen verkürzt sich. Schließlich vereinigen sich beide Formenreihen zu einem Ellipsoid, über das hinaus keine weiteren ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren mehr möglich sind. Die Rotationsgeschwindigkeit ω, zu der diese Grenzfigur gehört, bestimmt sich aus den Gleichungen für den Fall

$$\mu = 0 \text{ zu: } \frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho} \leqq 0{,}069, \tag{31}$$
$$\mu = 1 \text{ zu: } \frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho} \leqq 0{,}108,$$

während für $\mu = \infty$ $\frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho} = \frac{3(\xi a^2 - \zeta c^2)ab}{a^2c^2} = \frac{3(\eta b^2 - \zeta c^2)ab}{b^2 c^2}$ folgt, welche Gleichung mit der in 15 abgeleiteten und für das *Jacobi*sche Ellipsoid gültigen identisch ist und $3\omega^2/4\pi k^2\varrho = 0{,}28063$ gibt.

Dieser Rotationsgeschwindigkeit entspricht eine gewisse Distanz vom Hauptplaneten. Ist die Dichte des letzteren ϱ_0 — sein Radius, wenn man seine ganze Masse zu einer Kugel zusammenballt, r_0 und damit $E = \frac{4\pi}{3}\varrho_0 r_0^3$ so folgt für den Fall

$$\mu = 0: \quad 0{,}069 \leqq \frac{\varrho_0}{\varrho}\left(\frac{r_0}{\Delta_0}\right)^3 \quad \text{oder } \Delta_0 \geqq 2{,}44\, r_0 \sqrt[3]{\varrho_0/\varrho} \text{ [123])}$$

$$\mu = 1: \quad 0{,}108 \leqq 2\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)\left(\frac{r_0}{\Delta_0}\right)^3 \text{ oder } \Delta_0 \geqq 2{,}64\, r_0 \sqrt[3]{\varrho_0/\varrho}$$

---

123) Auf einem etwas anderen Wege gelangt *Vaughan*, „On the form of satellites revolving at small distances from their primaries", Phil. mag. XX (1861), p. 418, und XXI (1861), p. 269, zu dem gleichen Werte für die Grenzdistanz Δ_0 eines Mondes. Er stellt die Bedingung auf, daß die Stabilität eines flüssigen Satelliten ein Ende erreicht, wenn die Schwere auf ihm einerseits durch die Fliehkraft, anderseits durch die anziehende Kraft des Hauptplaneten aufgehoben wird, betrachtet aber bei der Berechnung der Schwere den Mond als ein verlängertes Umdrehungsellipsoid, d. h. er setzt $\varepsilon_1 = 0$, $b = c$ und verwendet die Fußnote 19 mitgeteilten Werte für die Anziehungskräfte eines solchen Ellipsoides. Er kommt so zu der Gleichung

$$\frac{\varrho_0}{\varrho}\left(\frac{r_0}{\Delta_0}\right)^3 = \frac{3(1-\varepsilon^2)}{4-\varepsilon^2}\left\{\frac{3-\varepsilon^2}{4\varepsilon^2}\lg\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{3}{2\varepsilon}\right\}$$

deren Grenzwert für reelle Werte bei $\varepsilon = 0{,}88$ zu $\frac{\varrho_0}{\varrho}\left(\frac{r_0}{\Delta_0}\right)^3 = 0{,}06945$ eintritt, woraus $\Delta_0 = 2{,}489\, r_0 \sqrt[3]{\varrho_0/\varrho}$ folgt.

als die fragliche Grenzdistanz, bis zu welcher ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren für einen Satelliten existieren.

Für den Fall Mond und Erde, in welchem $\varrho_0/\varrho = 1{,}63$ ist, erhält man $\Delta_0 = 2{,}87\, r$, während tatsächlich $\Delta = 60\, r$ ist.

Das aus den *Roche*schen Entwicklungen folgende Ergebnis, daß für eine gegebene Rotationsgeschwindigkeit ω eines Mondes zwei Formen des Gleichgewichtes existieren, ein weniger und ein stärker abgeplattetes dreiachsiges Ellipsoid, welche beide Formen für einen bestimmten Wert von ω ineinander übergehen, läßt nach *Poincaré* die Deutung zu, daß diese zwei Formen zwei lineare Reihen darstellen, die für die Grenzgeschwindigkeit sich vereinigen. Damit entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welche von diesen zwei Reihen die stabilen, und welche die instabilen Formen enthält, und dann zu entscheiden, ob das Ellipsoid, in dem sich beide Reihen begegnen, eine Grenz- oder eine Verzweigungsfigur ist. Diese Untersuchung führte *Schwarzschild* durch.[124]) Er geht von der aus (23) abzuleitenden Energiegleichung

$$W = \tfrac{1}{2}\int P\,d\tau + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 J + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \int d\tau\,(2x^2 - y^2 - z^2)$$

oder

$$W = \tfrac{1}{2}\int P\,d\tau + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \int d\tau\,(3x^2 - z^2)$$

aus. Durch Einführung der Deformation ζ folgt aus ihr

$$(32)\qquad d_2 W = \tfrac{1}{2}\int \frac{dU}{dn}\zeta^2 ds - \frac{k^2}{2}\int\!\!\int \frac{\zeta\zeta^1 ds\, ds^1}{r} + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \int ds\,\zeta\,(3x^2 - z^2).$$

Die ersten zwei Glieder dieser Gleichung lassen sich durch Annahme einer nach *Lamé*schen Funktionen fortschreitenden Entwicklung in eine Summe von Quadraten transformieren und geben die gleichen Stabilitätskoeffizienten wie die ellipsoidischen Figuren überhaupt. Das dritte Glied dagegen, das durch die zwei *Lamé*schen Produkte $E_1^2(\mu)\, E_1^2(\nu)$ und $E_3^2(\mu)\, E_3^2(\nu)$ dargestellt werden kann, bleibt, wie *Schwarzschild* nachweist, für alle *Lamé*schen Funktionen zweiter Ordnung entsprechenden Deformationen stets von Null verschieden und positiv. Es ist daher das durch die Grenzdistanz charakterisierte Ellipsoid eine Grenz- und keine Verzweigungsfigur, an die sich neue Gleichgewichtsfiguren anschließen.

Beide Untersuchungen, sowohl die von *Roche* wie die von *Schwarzschild*, nehmen den Hauptplaneten als einen starren Körper an, d. h. sie vernachlässigen die Wirkung, die der Mond durch seine Anziehung auf die Gestaltung von dessen Oberfläche haben könnte. Den allgemeineren

124) *Schwarzschild*, Diss., p. 46.

Fall zweier sich wechselseitig beeinflussender und um eine gemeinschaftliche Achse rotierender Flüssigkeitsmassen behandelt *Darwin*[125]), speziell im Hinblicke darauf, daß die zwei Massen sich gegenseitig berühren und ineinander fließen (Annahme, daß μ ein variabler Parameter ist), und in der Erwartung, damit auf umgekehrtem Wege einen Anschluß an die *Poincaré*schen birnenförmigen Figuren zu erzielen. Allein das Resultat der Entwicklungen ist ein negatives. Es zeigt sich, daß keine von den da entstehenden ellipsoidischen Figuren Stabilität besitzt, außer wenn ihre gegenseitige Distanz eine sehr große ist, was sie wieder den *Roche*schen Ellipsoiden vergleichbar macht. Eine angenommene Elliptizität des Hauptplaneten induziert gewissermaßen eine viel rascher eintretende Instabilität der Satelliten als dessen reine Kugelgestalt.

V. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren.

28. Zylindrische Gleichgewichtsfiguren. Im Anschluß an seine Theorie des Saturnringes gibt *Laplace*[126]) als erster die Berechnung des Potentials eines unendlich langen Zylinders, und *Matthiessen*[127]) wies daraufhin die Existenz zylindrischer Gleichgewichtsfiguren nach. — Nimmt man die Z-Achse als Rotationsachse an und setzt die Gleichung eines normal auf sie bezogenen elliptischen Querschnittes in der Form

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

fest, so hat man für das Potential eines unendlich langen Zylinders von diesem Querschnitt auf einen beliebigen Punkt desselben, dessen Koordinaten x, y und $z = 0$ sein mögen, den Ausdruck

$$(33) \qquad P = -2\pi k^2 \varrho\, (bx^2 + ay^2)/(a + b),$$

und die Gleichgewichtsbedingung wird damit

$$-2\pi k^2 \varrho\, (bx^2 + ay^2)/(a + b) + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Ihr Vergleich mit der Gleichung der Ellipse gibt für die Rotationsgeschwindigkeit ω in ihrer Abhängigkeit von den beiden Achsen a

125) *Darwin*, On figures of equilibrium of rotating masses of fluid, London Phil. Trans. 178 (1887), p. 379 und: On the figure and stabilidy of a liquid satellite, ebenda 206 (1906), p. 161, siehe auch *Moulton*, Note on the possibility of fission of an contracting rotating fluid mass: Astroph. J. 29 (1909), p. 1—13.

126) *Laplace*, Méc. cél., Livre II, ch. 6: „De la figure de l'anneau de Saturne".

127) *Matthiessen*, Über die Gleichgewichtsfiguren homogener freier rotierender Flüssigkeiten, Kiel. Univers.-Schrift. (1857).

und b den Wert

$$\text{(33a)} \qquad \frac{\omega^2}{4\pi k^2 \varrho} = \frac{ab}{(a+b)^2} \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{a-b}{a+b} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\pi k^2 \varrho}},$$

woraus folgt, daß notwendigerweise

$$\frac{\omega^2}{\pi k^2 \varrho} < 1$$

sein muß, wenn ein elliptischer Zylinder eine Gleichgewichtsfigur sein soll, und daß für den Kreiszylinder

$$\omega^2/\pi k^2 \varrho = 1 \qquad \text{ist.}$$

Die Stabilitätskoeffizienten der zylindrischen Gleichgewichtsformen und ihre Verzweigungen untersuchte — ganz im *Poincaré*schen Sinne — *Jeans*[128]), indem er vom Kreiszylinder $r^2 = x^2 + y^2 = a^2$ ausgehend Deformationen desselben in der Form

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 + \sum_1^\infty 2 a_n r^n \cos n\theta$$

annimmt, in welcher a_n kleine Größen gegenüber a bedeuten und gewissermaßen die Störungen der Kreisform des Zylinders vorstellen.

Den Fall elliptischer Gleichgewichtsfiguren (mit verschwindender Z-Achse, im Gegensatze zu den zylindrischen mit unendlich großer Z-Achse), d. i. also das reine zweidimensionale Problem der Ebene behandelte *Insolera.*[129])

29. Theorie des Saturnringes nach Laplace. Die Theorie der zylindrischen Gleichgewichtsfiguren bildete für *Laplace*[130]) den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über den Ring des Saturn. Unter der Annahme, daß der Ring ein flüssiger Körper und daher als solcher die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse sei, löste er als erster die Aufgabe, das Potential eines Ringes zu berechnen, indem er dieses Potential mit dem eines unendlich langen Zylinders

128) *Jeans,* On the equilibrium of rotating liquid cylinders, London Phil. Trans. 200 (1902), p. 67. Hier sind auch die jüngst von *B. Globa-Michailenko* neu gefundenen und Paris C. R. 163 (1916), p. 700, Nouv. Ann. de Math. 16 (1916), p. 506, und J. de Math. 7 (1916), p. 1—78 untersuchten Gleichgewichtsfiguren zu erwähnen, die die Form von von 2 koaxialen Kreiszylindern begrenzten Schichten mit den Radien R_1 und $R_2 = hR_1 < R_1$ haben und für die die Gleichgewichtsbedingung zu

$$\frac{\omega^2}{\pi k^2 \varrho} = \frac{1 - h^2 + h^2 \lg h^2}{1 - h^2}$$

sich ergibt.

129) *Insolera,* Figure ellittiche di equilibrio di un velo piano liquido ruotante, Circ. math. Palermo XVIII (1904), p. 16.

130) *Laplace,* Méc. cél., Livre II, ch. 6 und *Tisserand,* Méc. cél., Tome II, ch. IX; ferner *Todh.,* Hist. § 868—870, sowie § 1118.

identifiziert, die Lösung ist daher nur eine genäherte, auch fehlt die Bestimmung der Grenzen, inwieweit diese Annäherung der Wahrheit entspricht. Der Rechnung legt er zwei Koordinatensysteme zugrunde, mit parallelen Achsen und den Anfangspunkten für das erste im Schwerpunkt des Saturn, für das zweite im Mittelpunkte eines Querschnittes des Ringes, so daß, wenn die Koordinaten eines beliebigen Ringpunktes in dem einen x, y und z, in dem andern ξ, η, ζ sind, die Relationen

$$x = \Delta + \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

bestehen, wofern Δ die Distanz des Ringmittelpunktes vom Mittelpunkte des Saturn oder den mittleren Radius des Ringes bedeutet.

Setzt man als Gleichung der erzeugenden Figur, durch deren Rotation der Ring entsteht, die der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

fest, so hat man der Reihe nach:

1. für die Kraftkomponenten der Anziehung eines unendlich langen Zylinders auf einen beliebigen Punkt seiner Oberfläche, d. i. in diesem Falle des Ringes

$$4\pi k^2 \varrho \xi \frac{c}{a+c}, \qquad 4\pi k^2 \varrho \eta \frac{a}{a+c}; \tag{34}$$

2. für die Komponenten der Anziehung des Saturn auf denselben Punkt nach einer analogen Entwicklung, wie in Gl. (29) im Falle der Theorie der Figur des Mondes:

$$-k^2 M\left(\frac{1}{\Delta^2} - \frac{2\xi}{\Delta^3}\right), \qquad -k^2 M \frac{\zeta}{\Delta^3}; \tag{34a}$$

3. schließlich die Fliehkraft

$$\omega^2(\Delta + \xi) \tag{34b}$$

mit der Gleichgewichtsbedingung:

$$\left[\left(\frac{k^2 M}{\Delta^2} - \omega^2 \Delta\right)\frac{1}{\xi} + \left(4\pi k^2 \varrho \frac{c}{a+c} - \frac{2k^2 M}{\Delta^3} - \omega^2\right)\right] \tag{35}$$
$$: \left[\frac{k^2 M}{\Delta^3} + 4\pi k^2 \varrho \frac{a}{a+c}\right] = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{c^2}.$$

Aus ihr folgen die zwei Relationen

$$\omega^2 = \frac{k^2 M}{\Delta^3},$$

welche die Rotationsgeschwindigkeit des Ringes identifiziert mit der eines Satelliten in der gleichen Distanz vom Mittelpunkte des Saturn, und

$$\frac{M}{4\pi\varrho\Delta^3} = \frac{ac(a-c)}{(a+c)(3a^2+c^2)} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)}, \tag{36}$$

wenn $\lambda = a/c$ ist. Die Diskussion der letzten Gleichung gibt als erste Bedingung

$$\lambda > 1 \quad \text{oder} \quad a > c,$$

d. h. die erzeugende Figur des Ringes kann nur eine Ellipse sein, deren große Achse nach dem Hauptplaneten gerichtet ist, als zweite ferner, daß für

$$\frac{M}{4\pi\varrho\Delta^3} \lesseqgtr 0{,}0543026^{131)}$$

die Gleichung dritten Grades zwei oder nur eine oder keine positive Wurzel hat.

30. Allgemeine Untersuchungen über ringförmige Gleichgewichtsfiguren. Allgemeine Untersuchungen über ringförmige Gleichgewichtsfiguren mit spezieller Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie des Saturn, d. h. abgesehen von dem rein mathematischen Problem der Berechnung des Potentials eines Ringes[132]) und ohne Einführung der *Laplace*schen Näherung, rühren von Frau *Kowalewski*[133]) und *Poincaré*[134]) her. Frau *Kowalewski* nimmt als erzeugende Figur des Ringes eine Linie an, welche wenig von einer Ellipse abweicht, eine Symmetrieachse besitzt, die in ihrer Verlängerung die Rotationsachse des Ringes rechtwinkelig schneidet, und außerdem so gestaltet ist, daß jede der Symmetrieachse parallele Gerade sie nur in zwei

---

131) Ersetzt man in Gl. 36 M durch $\frac{4\pi}{3}\varrho_0 R_0^3$, wo ϱ_0 die mittlere Dichte und R_0 den mittleren Radius des Saturn bedeuten möge, so folgt

$$\varrho/\varrho_0 \geqq 6 \cdot 14 \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3.$$

Nun ist für den äußeren Ring $\Delta = 2{,}20\, R_0$, und damit wird $\varrho \geqq 0{,}576\,\varrho_0$, dagegen für den inneren Ring $\Delta = 1{,}77\, R_0$ und $\varrho \geqq 1{,}11\,\varrho_0$, zwei Resultate, die wenig wahrscheinlich sind (vielmehr dürfte für beide Saturnringe ϱ sehr viel kleiner sein als ϱ_0) und gegen die Hypothese von dem flüssigen Zustande des Ringes sprechen.

132) Berechnungen über das Potential eines Ringes geben u. a: *C. Neumann,* Über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862; ferner: Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864; *Riemann,* Über das Potential eines Ringes, Gesamtw. (1892), p. 431; *Hicks,* Potential of an anchorring or tore, London Phil. Trans. 178 (1887), p. 58; *F. W. Dyson,* The potential of an anchorring, London Phil. Trans. 183 (1893), p. 43 und 1401, sowie Proceed. London 53 (1893), p. 372.

133) Frau *Sophie Kowalewski,* Zusätze und Bemerkungen zu *Laplaces* Berechnungen über die Gestalt der Saturnringe, Astr. Nachr. 111 (1885), p. 37.

134) *H. Poincaré,* Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation, Bull. astr. II (1885), p. 109 und 404.

Punkten trifft. In dem oben angenommenen Koordinatensystem laute ihre Gleichung:

$$\xi = -\Delta\sigma\cos\tau, \tag{37}$$
$$\zeta = \Delta\sigma\varphi(\tau) = \Delta\sigma(\alpha_1\sin\tau + \alpha_2\sin 2\tau + \alpha_3\sin 3\tau + \cdots),$$

und es bedeutet darin τ eine reelle Variable, die alle Werte von 0 bis 2π durchläuft, und σ eine kleine Größe, die andeuten soll, daß die Fläche des Querschnittes gegenüber den Dimensionen des Saturn sehr klein ist. Die Größe α_1 stellt die Abplattung des elliptischen Ringes vor, und da, wie seit *Laplace* bekannt ist, die Annahme eines solchen schon eine ziemliche Annäherung an die Wahrheit gibt, sollen die anderen Koeffizienten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gegenüber α_1 als Größen erster Ordnung angesehen werden. Die Rechnung führt auf elliptische Integrale. Doch Frau *Kowalewski* zeigt, daß diese in nach $\cos n\tau$ fortschreitende *Fourier*sche Reihen entwickelbar sind, so daß man hat

1. für das Potential des Ringes P_1:
$$P_1 = k^2\pi\varrho\Delta^2\sigma^2(\nu_0 + \nu_1\cos\tau + \nu_2\cos 2\tau + \nu_3\cos 3\tau + \cdots),$$
2. für das Potential der Anziehung des Saturn P_2:
$$P_2 = \frac{k^2 M}{\sqrt{(\Delta+\xi)^2+\zeta^2}} = \frac{k^2 M}{\Delta}\Big(m_0 + m_1\cos\tau + m_2\cos 2\tau + \cdots\Big),$$
3. endlich für das Potential der Fliehkraft P_3:
$$P_3 = \tfrac{1}{2}\omega^2(\Delta+\xi)^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2\Delta^2(1 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 - 2\sigma\cos\tau + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cos 2\tau);$$

und diese drei Potentiale einer Konstanten gleichgesetzt, geben die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht des angenommenen ringförmigen Körpers ab, aus denen die Unbekannten des Problems, ω, σ, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ berechnet werden müssen. Frau *Kowalewski* beweist, daß eine solche Bestimmung möglich ist, wenn sie auch die tatsächliche Rechnung nur bis zu dem Koeffizienten α_2 in dem für ζ angenommenen Ausdrucke durchführt.[135])

Nimmt man zunächst $\alpha_2 = 0$ an, und vernachlässigt ferner die zweiten Potenzen von σ, so ergibt sich die *Laplace*sche Näherung, nämlich die Gleichung dritten Grades

$$\frac{M}{4\pi\varrho\Delta^3} = \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1+\alpha_1)(3+\alpha_1{}^2)}, \tag{36}$$

135) Die *Kowalewski*schen Rechnungen wurden weitergeführt bis zu den Gliedern 4. Ordnung von Frl. *Klumpke,* Contributions à l'étude des anneaux de Saturne, Ann Obs. Paris XXI (1895). Eine weitere Ergänzung, die an die ellipsoidische Gestalt des Saturn anknüpft, d. h. den Ausdruck von P_2 durch den strengeren für das Potential eines Ellipsoides ersetzt, rührt her von *Meineke,* Ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen bei Anziehung durch einen ellipsoidischen Zentralkörper, Inaug.-Diss., Halle 1905.

und aus ihr wieder ein Näherungswert für α_2:

$$\alpha_2 = \frac{1-\alpha_1^2}{8} \cdot \frac{9+3\alpha_1+17\alpha_1^2+15\alpha_1^3}{3-9\alpha_1-11\alpha_1^2-15\alpha_1^3}\alpha_1^2 + \cdots \tag{36a}$$

Die *Laplace*sche Gleichung hat, wenn $M/4\pi\varrho\Delta^3$ unter der Grenze 0,0543 . . liegt, zwei positive Wurzeln. Für die kleinere wird α_2 positiv und daher die Gleichung der Erzeugenden

$$\xi = \cos\tau, \quad \zeta = \alpha_1 \sin\tau + \alpha_2 \sin 2\tau,$$

für die größere ist α_2 negativ, und damit wird nunmehr die die Form der Erzeugenden bestimmende Gleichung

$$\xi = \cos\tau, \quad \zeta = \alpha_1 \sin\tau - \alpha_2 \sin 2\tau.$$ [136])

In dem Falle, daß ein Ring ohne Zentralkörper als Gleichgewichtsfigur untersucht werden soll, hat man einzig $m_0 = m_1 = m_2 = \cdots = 0$ zu setzen und die sich da ergebenden Gleichungen zu diskutieren. Es zeigt sich, daß auch in diesem Falle den Bedingungen reelle Lösungen entsprechen, und damit erscheint die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren selbst ohne einen Zentralkörper nachgewiesen. Die Rechnung selbst liefert das Ergebnis, daß unter dieser Annahme

$$\frac{\omega^2}{\pi k^2 \varrho}, \quad 1 - \alpha_1 \text{ und } \alpha_2$$

ihrer Größe nach von gleicher Ordnung sein müssen.

Unabhängig von Frau *Kowalewski* behandelte *Poincaré* [134]) das Problem. Er geht von dem Ausdrucke

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a(1 + \beta_1 \cos\tau + \beta_2 \cos 2\tau + \cdots) = a\varphi(\tau) \tag{38}$$

als Gleichung der Erzeugenden des Ringes aus, wobei er die Größen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ als kleine Größen ansieht. Die Annahme $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = 0$ führt ihn zunächst auf das Potential eines Kreisringes, sodann zur Vervollständigung des erhaltenen Ausdruckes durch die von den β_i herrührenden Beiträge

$$\sum (2\pi a^2 \beta_i \cos i\tau)/i.$$

Er untersucht in gleicher Art den Fall zweier voneinander unabhän-

136) In spezieller Anwendung auf den Ring des Saturn ergibt sich für die *Laplace*sche Gleichung

$$0{,}04644 = \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1+\alpha_1)(3+\alpha_1^2)},$$

deren zwei positive Wurzeln $\alpha_1 = 0{,}22$ und $0{,}58$ sind. Da der Saturnring sehr flach ist, so kommt nur der Wert $\alpha_1 = 0{,}22$ für das Achsenverhältnis der Querschnittellipse in Betracht. Zu ihr gehört der positive Wert $\alpha_2 = 0{,}851$, wenn Saturn als Kugel, dagegen der davon sehr verschiedene Wert $\alpha_2 = 11{,}23$, wenn Saturn als Ellipsoid mit der Abplattung $1:9{,}18$ angenommen wird. Vgl. *Tisserand,* Méc. cél. II, chap. 9, und *Meineke,* Diss., p. 27.

giger Ringe, für deren Dimensionen er a_1 und a_2 — und für ihre Distanzen vom Mittelpunkte des Saturn Δ_1 und Δ_2 annimmt. Dazu, daß beide Ringe gleiche Rotationsgeschwindigkeit haben, ist erforderlich, daß $\Delta_1 - \Delta_2$ gegen Δ sehr klein sein muß, außer es besteht die Relation $a_1 : a_2 = \Delta_1 : \Delta_2$.[137])

Die Frage nach der allgemeinsten Form der Kurven, die als Leitlinien ringförmiger Gleichgewichtsfiguren dienen können, wenn sie unter der Einwirkung ihrer eigenen Anziehung sowie der eines Zentralkörpers stehen, löste *Levi-Civitá*[138]). Er gewinnt für die Komponenten der Anziehung eines solchen Ringes die asymptotischen Ausdrücke

$$X = k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dx}{ds}\right) \quad Y = k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dy}{ds}\right) \quad Z = k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dz}{ds}\right),$$

die es ihm gestatten, die Gleichgewichtsbedingungen, wenn P das Potential der Anziehung des Saturn und der Fliehkraft bedeutet, in die neue Form zu bringen:

$$k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dx}{ds}\right) + \varrho \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dy}{ds}\right) + \varrho \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$
$$k^2 q \frac{d}{ds}\left(\varrho^2 \frac{dz}{ds}\right) + \varrho \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

in der man sich die Dichte ϱ als von s abhängig zu denken hat und außerdem

$$q = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau_0 \int_\tau d\tau_1 \lg \frac{l}{\Delta_{01}}$$

ist, wo τ den Querschnitt des Ringes, $d\tau_0$ und $d\tau_1$ zwei Elemente

137) Vgl. auch *Matthiessen*, Allgemeine Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitskörper, Kiel. Univ.-Chronik (1859); ferner: Über Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als diskontinuierliche Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, Zeitschr. Math. Phys. X (1865), p. 59; endlich die Fußn. 118 zitierte Abhandlung, in der sich auch numerische Angaben über Ringe vorfinden und deren Verzweigungen mit den ellipsoidischen Gleichgewichtsformen.

138) *Levi-Civitá,* 1. Sull' attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa, Atti Linc. Rom. 18 (2) (1908), p. 1; 2. Sull' attrazione newtoniana di un tubo sottile, ebenda p. 413 u. 553; 3. Sulla forma dell' anello de Saturno, Atti Inst. Venet. 68 (1909), p. 557; 4. Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all' anello de Saturno, Circ. math. Palermo 33 (1912), p. 354; ferner *Viterbi,* Su una classe speziale di forme dell' anello de Saturno, Atti Inst. Venet. 69 (1910), p. 1129.

desselben und Δ_{01} ihre gegenseitige Distanz vorstellen. Aus der Analogie dieser Gleichungen mit denen für einen elastischen Faden folgen, da speziell $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ ist, zwei den physikalischen Sätzen von der Erhaltung der Energie und dem Flächenprinzip entsprechende Integrale, nämlich

$$2k^2 q\varrho + P = \text{const.} \quad k^2 q\varrho^2\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = \text{const.}$$

Als spezielle Beispiele behandelt *Levi-Civitá* die Fälle ebener Leitkurven, dann rein kreis- wie genähert kreisförmiger Leitlinien.

31. Statische Stabilität der Ringe. Schon *Laplace*[139]) wies nach, daß ein homogener flüssiger Ring von an allen Stellen gleichem elliptischem Querschnitt keine stabile Gleichgewichtsfigur einer rotierenden flüssigen Masse sein könne. Er fand, daß, wenn der Mittelpunkt des Saturn sich nur ein wenig gegen den des Ringes verschiebt, dies eine verstärkte Anziehung auf die näheren Teile des Ringes nach sich ziehen, damit eine weitere Verschiebung der beiden Mittelpunkte in demselben Sinne und schließlich ein Zusammenfallen des Ringes mit dem Saturn bewirken würde. Ist p_1 die anziehende Kraft des Ringes auf einen inneren Punkt seiner Oberfläche und Δ_1 dessen Distanz vom Mittelpunkte des Saturn, ist ebenso p_2 die gleiche Kraft auf einen äußeren Punkt und Δ_2 seine Distanz vom Saturn, so fordert die Stabilität des Ringes, daß

$$P_1 = p_1 - \frac{k^2 M}{\Delta_1} + \omega^2\Delta_1 > 0, \quad P_2 = p_2 - \frac{k^2 M}{\Delta_2} + \omega^2\Delta_2 < 0,$$

woraus durch Elimination von ω^2

$$p_1\Delta_2 - p_2\Delta_1 > \frac{k^2 M}{\Delta_1^2\Delta_2^2}(\Delta_2^3 - \Delta_1^3) \tag{39}$$

folgt, eine Relation, die für die Dimensionen des Saturnringes nicht erfüllt ist.

Eingehender befaßte sich *Tisserand*[140]) mit dieser Relation. Indem er die Größen p_1 und p_2 aus der Annahme berechnet, daß der Ring einem kreisförmigen Hohlzylinder von der Dicke $\Delta_2 - \Delta_1$ und

139) *Laplace,* Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, Mém. Paris (1787), p. 249; ferner Méc. cél., Livre III, ch. VI; *Todh.,* Hist. § 866 und 1123. Vgl. die kritischen Bemerkungen hiezu von *Plana,* A Lettre relating the Saturn's ring, in Zach. Mon. Korr. I (1818), p. 346; ferner in neuester Zeit: *Bohl,* Über die Bewegungen eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage, J. f. Math. 127 (1904), p. 179, sowie: Über ein Dreikörperproblem, Zeitschr. Math. Phys. 54 (1907), p. 381.

140) *Tisserand,* Mémoire sur l'anneau de Saturne, Mém. obs. Toulouse I (1880), p. 64, sowie Méc. cél. II, chap. 9.

der Höhe h gleichzusetzen sei, kommt er mit den Zahlenwerten $\Delta_1 = 13{,}33''$, $\Delta_2 = 19{,}66''$ für die Dimensionen, dann $\pi h(\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\varrho$ für die Masse des Ringes und $\frac{4\pi}{3}a^2c\varrho_0$ für die des Saturn auf die der (39) entsprechende Ungleichung

$$\text{(39a)} \qquad 0{,}535h + 7{,}121h \lg\frac{1}{h} - 8{,}681\frac{\varrho_0}{\varrho} > 0,$$

welche, wenn sie eine reelle Wurzel haben soll, fordert, daß

$$\varrho > \tfrac{1}{4}\varrho_0$$

wird, ein Resultat, das mit der geringen Masse des Ringes gegenüber der des Saturn nicht verträglich ist.

Zu einem solchen Grenzwert[141]) für das Verhältnis ϱ/ϱ_0 gelangt man auch auf Grund der *Poincaré*schen Gleichung (21), nach welcher für alle Gleichgewichtsfiguren notwendigerweise

$$\omega^2 < 2\pi k^2\varrho$$

sein muß. Setzt man $\omega^2 = k^2M/\Delta^3 = \frac{4\pi k^2\varrho_0}{3}\left(\frac{r_0}{\Delta}\right)^3$, wenn r_0 den mittleren Radius des Saturn bedeutet, so folgt

$$\varrho > \frac{2}{3}\varrho_0\left(\frac{r_0}{\Delta}\right)^3,$$

woraus für den äußeren Ring $\Delta = 2{,}20r_0, \qquad \varrho > \varrho_0/16,$

für den inneren Ring $\Delta = 1{,}77r_0, \qquad \varrho > \varrho_0/8{,}3,$

sich ergeben d. s. Werte, welche viel zu groß sind und daher gegen die Annahme sprechen, daß der Ring von flüssiger Konstitution ist.

Die Tatsache endlich, daß für den Fall als $M/4\pi\varrho\Delta^3 < 0{,}0543\ldots$ die *Laplace*sche Gleichung (36) zwei positive Wurzeln hat, welche für $M/4\pi\varrho\Delta^3 = 0{,}0543\ldots$ zusammenfallen, läßt schließen, daß auch hier, wie im Falle der Monde, zwei Reihen ringförmiger Gleichgewichtsfiguren, die eine mit geringer, die zweite mit stärker abgeplattetem Querschnitt, existieren, welche für den speziellen Grenzwert von 0,0543 eine singuläre Figur geben. Die Frage, ob sie eine Verzweigungs- oder eine Grenzfigur ist, beantwortete *Poincaré*[142]). Er betrachtet in dem von ihm angenommenen Ausdruck für den Radius des Querschnittes

$$r = a(1 + \beta_1\cos\tau + \beta_2\cos 2\tau + \beta_3\cos 3\tau + \cdots)$$

die Koeffizienten $\beta_2, \beta_3, \ldots$ als die die Deformation seiner rein elliptischen Form bedingenden Größen, und weist nach, daß sie zu der

141) *Poincaré,* Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne, Bull. astr. II (1885), p. 507.

142) *Poincaré,* Act. Math. VII, p. 287.

potentiellen Energie W des Ringes die Zusatzglieder

$$\delta_2 W = \sum \beta_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

erzeugen, aus denen folgt, daß die Stabilitätskoeffizienten ringförmiger Figuren bei der Annahme derartiger Störungen die Werte

$$\frac{1}{n} - 1$$

haben. Da keiner derselben verschwindet, so kann über die Stabilität der Figuren nichts ausgesagt werden.

32. Dynamische Stabilität der Ringe. Mit der Frage nach der Bewegung des Mittelpunktes des Ringes um den des Saturn und der Aufstellung der Bedingungen, wann sie durch eine periodische Funktion der Zeit darstellbar ist und daher bei einer kleinen anfänglichen Störung klein bleibt, wenn sie es ursprünglich war, befaßte sich *Maxwell*[143]). Er geht von den bekannten Differentialgleichungen aus, die für die Bewegung zweier Punkte gelten, deren Massen M und M' sind

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{M+M'}{M}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) = \frac{M+M'}{M}\frac{\partial P}{\partial \vartheta}$$

wozu als dritte

$$MJ^2 \frac{d^2(\vartheta + \varphi)}{dt} = M' \frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

hinzukommt, die die Rotation des Ringes um den Saturn bestimmt, wenn in ihnen außerdem r deren Distanz, ϑ und φ zwei Winkel bedeuten, die die Verbindungslinie r einerseits mit einer festen durch den Mittelpunkt des Saturn gehenden, andererseits mit einer mit dem Ringe fest verbundenen Richtung einschließt und MJ^2 dessen Trägheitsmoment um die Rotationsachse ist. Die Annahme $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\vartheta = \omega t$, wo r_0 und φ_0 konstante Anfangswerte vorstellen, führt auf eine weitere gleichförmige Rotation des Ringes um den Saturn, wozu die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \qquad r\omega^2 = \frac{M+M'}{M}\frac{\partial P}{\partial r}$$

lauten. Für den Fall einer kleinen Störung setzt *Maxwell*

$$r = r_0 + r_1 \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \qquad \vartheta = \omega t + \vartheta_1$$

und betrachtet r_1, ϑ_1 und φ_1 als kleine Größen, deren Quadrat zu vernachlässigen ist. Dadurch gehen die Differentialgleichungen in

143) *Maxwell,* On the stability of the motion of Saturn's ring, Cambridge 1859, in Scientif. papers I, p. 288—374. Vgl. hiezu auch *Callandreau,* Sur les calculs de *Maxwell* au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne, Bull. astr. VII (1890), p. 69.

lineare mit konstanten Koeffizienten über, und *Maxwell* integriert sie unter der Annahme einer unregelmäßigen Dichteverteilung in der Form

$$(40) \quad \mu = \frac{\Delta \varrho}{2 a \pi}\left(1 + 2f \cos\tau + \frac{2}{3} g \cos 2\tau + \frac{2}{3} h \sin 2\tau + 2i \cos(3\tau + \alpha) \cdots\right)$$

die ihn zu der die Periode n der Bewegung bestimmenden Gleichung 4. Grades führt:[144])

$$(41) \quad n^4(1 - f^2) - (1 - \tfrac{5}{2} f^2 + \tfrac{1}{2} f^2 g) n^2 \omega^2 + \tfrac{1}{4}(9 - 24 f^2 + 8 f^2 g - g^2 - h^2)\omega^4 = 0.$$

Der Fall $f = g = h = 0$, d. i. eines homogenen Kreisringes, gibt wegen

$$n^4 - n^2\omega^2 + \frac{a}{4}\omega^4 = 0$$

keine reelle Wurzeln für n, womit seine Instabilität für diese Annahme erwiesen ist. Der Fall $h = g = 0$, aber $f \gtrless 0$, d. h. die Voraussetzung, daß der Ring auf einer Seite dicker ist als auf der anderen, führt zu der Gleichung

$$n^4(1 - f^2) - (1 - \tfrac{5}{2} f^2) n^2 \omega^2 + \tfrac{1}{4}(9 - 25 f^2)\omega^4 = 0,$$

welche nur dann für n eine reelle Wurzel gibt, wenn

$$0{,}37445 < f^2 < 0{,}375.$$

Nach dem Anblick des Ringes im Fernrohre aber ist mindestens $f^2 < 0{,}25$ anzunehmen, und damit ist wieder seine Instabilität erwiesen. Das gleiche ist auch der Fall bei der Annahme, daß der Ring im ganzen homogen ist und nur an einer Stelle eine Unregelmäßigkeit zeige. Es kommt dies, wie *Maxwell* beweist, auf den Ansatz $h = 0$, aber $g = 3f$ heraus. Durch ihn transformiert sich die Bestimmungs-

144) Die Berechtigung zu solchen Vernachlässigungen in den Differentialgleichungen bei Anwendung auf Stabilitätsfragen bestreitet *v. Seeliger* in „Über *Maxwells* und *Hirns* Untersuchungen über die Konstitution der Saturnringe: München Ber. 24 (1894), p. 161, hebt aber gleichzeitig hervor, daß die speziellen Annahmen, auf denen das *Maxwell*sche Problem beruht und die den tatsächlichen Verhältnissen beim Saturnring nicht entsprechen, mit der Frage nach seiner Stabilität wenig zu tun haben. Man kommt der Wahrheit viel näher, wenn man den Ring als homogen betrachtet, als wenn man ihn anders annimmt, und für diesen einfachsten Fall läßt sich seine Instabilität schon aus den strengen Differentialgleichungen ableiten durch den Beweis, daß $\frac{\partial P}{\partial r}$ stets positiv ist, was bedeutet, daß der Mittelpunkt des Saturn von dem des Ringes abgestoßen wird, und daher ein Zusammenstoß beider unausbleiblich ist.

Die Frage nach der Stabilität eines festen Ringes, jedoch in Rücksicht auf die Beanspruchung seiner elastischen Festigkeit behandelt *Hirn* in: Le monde de Saturne, ses conditions d'existence et de durée: Colmar soc. bull. 1872; siehe die kritischen Bemerkungen von *v. Seeliger* auch hierzu in der eben zitierten Abhandlung.

gleichung für die Periode n der Schwingungen in

$$(1+f)n^4-(1+f-\tfrac{3}{2}f^2)n^2\omega^2+\tfrac{1}{4}(9+9f-24f^2)\omega^4=0$$

eine Gleichung, die nur unter der Bedingung

$$0{,}8279>f>0{,}8158$$

eine reelle Wurzel für n liefert. Nimmt man $f=0{,}82$ an, so heißt dies, daß die auf dem sonst homogenen Ringe aufzulegende Masse mindestens 0,82 der Masse des ganzen Ringes sein müßte, um eine stabile Bewegung desselben zu ermöglichen, ein Resultat, das der Beobachtung, d. i. dem Anblick des Ringes im Fernrohre und der Regelmäßigkeit, die er da zeigt, keineswegs entspricht.

Im zweiten Teil endlich behandelt *Maxwell* die Annahme, daß der Ring von staubförmiger Konstitution ist. Um eine Berechnung der Bewegung der einzelnen den Ring zusammensetzenden Monde durchführen zu können, erdachte er sich folgende Anordnung derselben und konstruierte auch ein Modell, das die da möglichen Bewegungen veranschaulichen sollte: p Monde von gleicher Masse μ seien in gleicher Entfernung voneinander, $\vartheta=2\pi/p$, in einem Kreise vom Radius Δ angenommen. Eine mögliche Bewegung des ganzen Systems ist dann offenbar die, daß jeder dieser Monde sich mit der konstanten Geschwindigkeit ω in diesem Kreise drehe, wobei ω hauptsächlich von der Anziehung des Saturn nach der Relation $\omega^2=k^2M/\Delta^3$ abhängig zu denken ist. Für diese ungestörte Bewegung sind die Polarkoordinaten irgendeines Körpers gegeben durch

$$(42)\qquad r_\gamma=\Delta,\quad v_\gamma=\gamma\vartheta+\omega t.$$

Für den Fall der Störung ihrer Bewegung durch ihre gegenseitige Anziehung werden diese Koordinaten

$$(42\text{a})\qquad r_\gamma=\Delta(1+\delta_\gamma),\quad v_\gamma=\gamma\vartheta+\omega t+\sigma_\gamma,$$

und entwickelt man die Störungsfunktion, deren Potential durch

$$P=k^2\sum\sum\frac{\mu}{\sqrt{r_i^2+r_k^2-2r_ir_k\cos(v_i-v_k)}}$$

gegeben ist, bis zu den zweiten Potenzen der Größen δ und σ, so folgt als Endergebnis ein System von $2p$ linearen Differentialgleichungen, für welche allgemeine Lösungen in der Form

$$\delta_\gamma=\sum A_{\gamma i}\cos(n_it+\alpha+i\gamma\vartheta),\qquad \sigma_\gamma=\sum B_{\gamma i}\sin(n_it+\alpha+i\gamma\vartheta)$$

gesucht werden. *Maxwell* beweist, daß die die Periode der Bewegung charakterisierende Zahl n reell wird, wenn man nur die Masse μ jedes einzelnen der Monde recht klein annimmt gegenüber der Masse M des Saturn. Als Grenzwert folgt

$$\mu p<\frac{2{,}30}{p^2}.$$

In diesem Resultate, daß μp, d. i. die Masse des Ringes, abhängig erscheint von der Zahl p der Körper, liegt, wie *Poincaré*[145]) sagt, eine Schwierigkeit der Theorie. Man kann sie aber dadurch umgehen, daß man die gar zu einfache Annahme einer nahezu regelmäßigen Verteilung der Körper innerhalb eines Kreises vom bestimmten Radius durch die entsprechendere einer Anordnung derselben innerhalb eines Ringes von kleiner Dicke, aber endlicher Breite ersetzt. Die Zahl der Körper ist dann p^3, und die Bedingung der Stabilität wird nunmehr

$$mp^3 < A,$$

wo A eine Zahl bedeutet, die einem kleinen Bruchteil der Masse M des Saturn gleich anzunehmen ist.

VI. Die Atmosphäre der Himmelskörper.

33. Gleichgewichtsfigur der Atmosphäre eines Himmelskörpers. Die theoretischen Untersuchungen über die Atmosphäre der Himmelskörper beginnen mit *D'Alembert*[146]), wurden von *Laplace* fortgesetzt und von *Roche*[147]) dahin verallgemeinert, daß sie auch die Kräfte mit in Betracht ziehen, die man als bei der Bildung der Kometenschweife wirksam anzunehmen genötigt ist, und daher auch den Fall der Gleichgewichtsgestalten der Kometen umfassen. Sie stützen sich auf folgende Annahmen: Es sei O der Mittelpunkt eines Himmelskörpers, und M seine Masse, ferner sei m die Masse eines Teilchens seiner Atmosphäre, x, y und z seine Koordinaten in bezug auf O als Koordinatenanfangspunkt, r seine Distanz von O, und ω seine Rotationsgeschwindigkeit, wobei die Z-Achse als Rotationsachse angenommen werde. Außerdem sei noch ein zweiter Körper vorhanden, M' seine Masse, $\xi = \Delta$, $\eta = \zeta = 0$ seine Koordinaten, und es übe dieser Körper auf das Teilchen m neben der reinen *Newton*schen Anziehung,

145) *Poincaré,* Figures, p. 201.

146) *D'Alembert,* Sur les atmosphères des corps célestes, in Opusc. math., Vol. VI, Paris 1773; *Todh.*, Hist. § 637 u. 1126. Die Darstellung *D'Alemberts* wurde von *Laplace* in seine Méc. cél., Livre III, ch. 7, übernommen.

147) *Roche,* Recherches sur les atmosphères des corps célestes, Par. Obs. Mém. V (1859); dann: Reflexions sur la théorie des phénomènes cométaires, Mém. Montpellier II (1860), und Nouvelles recherches sur les atm. des corps célestes, ebenda IV (1862). Vgl. auch *Poincaré,* Les hypothèses cosmogoniques, Paris 1911, p. 15; *Tisserand,* Méc. cél. IV (1896), chap. 14, und *Résal,* Traité de méc. cél., Paris 1865, p. 163. — Über weitergehende, einerseits thermodynamische, andrerseits kosmologische Fragen, die sich auf das Problem der Atmosphären der Himmelskörper beziehen, vgl. die Artikel Encykl. VI 2, 25 (Thermodynamik der Himmelskörper) und VI 2, 26 (Kosmogonie) von *Emden.*

deren Größe durch $k^2 M'/D^2$ dargestellt wird, noch eine abstoßende Kraft aus, deren Größe durch $-k^2 M' \mu / D^2$ in Einheiten der *Newton*schen Anziehung gegeben ist. Führt man noch die Entwicklung von

$$D^2 = (\Delta - \xi)^2 + y^2 + z^2$$

bis auf Größen 2. Ordnung in Δ durch, so ist für das Potential aller auf das Teilchen m wirkenden Kräfte die Form

$$(43) \quad P = \frac{k^2 M'(1-\mu)(2x^2 - y^2 - z^2)}{2\Delta^3} - \frac{k^2 M' \mu x}{\Delta^2} + \frac{k^2 M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

anzusetzen, und

$$P = \text{const.}$$

ist die allgemeinste Gleichung der Niveauflächen oder der Gleichgewichtsfigur der Atmosphäre eines Himmelskörpers, mit der Einschränkung, daß weder auf die gegenseitige Einwirkung der einzelnen Teilchen innerhalb der Atmosphäre noch auf die Änderung des Potentials infolge der etwa nicht kugelförmigen Gestalt des Zentralkörpers, um den die Atmosphäre lagert, Rücksicht genommen wird.

Die Diskussion der Gleichung knüpft an die folgenden zwei Definitionen an: zunächst an die der *Grenzfläche*, bestimmt durch die Bedingung $\partial P / \partial r = 0$, und der durch sie bedingten Teilung der Niveauflächen in *innere* und *äußere*, je nachdem für sie

$$\frac{\partial P}{\partial r} \lessgtr 0$$

ist, sodann an die der *freien Oberfläche* der Atmosphäre, als jener unter den Niveauflächen, für die die Konstante (const.) so gewählt ist, daß ihrem größten Radius in der Richtung der X-Achse

$$x = r_x \qquad y = z = 0$$

der kleinste der Grenzfläche entspricht. Sie stellt die äußerste Niveaufläche vor, bis zu der sich die Atmosphäre erheben kann, ohne vollständig den Zusammenhang mit dem anziehenden Zentralkörper zu verlieren, und gibt gleichzeitig die Bedingungen für deren Stabilität an aus der Lösung der Frage, wann sie eine geschlossene Fläche ist.

Zur Bestimmung der Atmosphäre der Sonne hat man $M' = 0$ zu setzen und erhält damit als Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{k^2 M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C$$

(diese sind Rotationsflächen um die Z-Achse), ferner

$$\frac{k^2 M}{r} - \omega^2 (x^2 + y^2) = 0$$

als Gleichung der Grenzfläche, und

$$\frac{k^2 M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\omega k^2 M)^2}$$

als die der freien Oberfläche. Sie besteht aus zwei ins Unendliche gehenden Mantelflächen, die in der XY-Ebene den Kreis $x^2 + y^2 = \sqrt[3]{(k^2 M/\omega^2)^2}$ als Doppelkurve haben und einen geschlossenen linsenförmigen Körper begrenzen, dessen Abplattung, da $x = y = \sqrt[3]{k^2 M/\omega^2}$ für $z = 0$, und $z = \frac{2}{3}\sqrt[3]{k^2 M/\omega^2}$ für $x = y = 0$ ist, sich zu $\frac{1}{3}$ ergibt.

Für den Mond, unter der Annahme, daß seine Atmosphäre auch unter dem Einflusse der anziehenden Kraft der Erde stehe, hat man M' mit der Masse desselben zu identifizieren, $\mu = 0$ und $\omega^2 = k^2(M + M')/\Delta^3$ zu setzen. Die Gleichung der Niveauflächen wird

$$\frac{k^2 M'(2x^2 - y^2 - z^2)}{2\Delta^3} + \frac{k^2 M}{r} + \frac{k^2(M + M')(x^2 + y^2)}{2\Delta^3} = C,$$

die der Grenzfläche

$$\frac{k^2 M'(2x^2 - y^2 - z^2)}{\Delta^3} - \frac{k^2 M}{r} + \frac{k^2(M + M')(x^2 + y^2)}{2\Delta^3} = 0,$$

und der Wert

$$C = \frac{3k^2 M}{2D}\sqrt[3]{\frac{3M' + M}{M}}$$

gibt die der freien Oberfläche.

VII. Die Gestalt der Kometen.

34. Gleichgewichtsfigur der Kometen. Bei der Anwendung der Gleichung (43) auf die Bestimmung der Gestalt der Kometen wird entweder direkt $\omega = 0$ angenommen. Dies ist der einfachste Fall. Die Niveauflächen sind dann Rotationsflächen um die X-Achse, mit einem Asymptotenkegel, dessen Gleichung

$$y^2 + z^2 = 2(x - \sigma)^2,$$

ist mit $\sigma = \mu\Delta/4(1 - \mu)$. Oder man identifiziert ω mit der Winkelgeschwindigkeit des Kometen um die Sonne und setzt, wenn q seine Periheldistanz bedeutet, für Zeiten in der Nähe des Perihels

$$\omega^2 = 2k^2 M'/q^3$$

dagegen wieder $\omega = 0$ fürs Aphel.

Die Diskussion der hier zur Berechnung der Schnittpunkte mit der X-Achse dienenden Gleichung 3. Grades zeigt, daß die freie Oberfläche aus einem geschlossenen Flächenstück besteht, an das sich nur an der der Sonne abgewandten Seite ein ins Unendliche sich erstreckender Mantel anschließt, so daß die ganze Fläche sehr wohl den Eindruck eines Kometenkernes mit einem Schweife hervorruft.

35. Dynamische Theorie der Kometenschweife. Die dynamischen Untersuchungen zur Theorie der Kometenschweife beginnen mit der erst von *Olbers*[148]) und *Bessel*[149]) aufs klarste und bestimmteste ausgesprochenen Erkenntnis, daß sie aus leuchtender Materie bestehen, die fortdauernd oder in periodischen Stößen aus dem Kerne gegen die Sonne hin ausströmt, dann aber durch eine von dieser ausgehenden Abstoßungskraft in die entgegengesetzte Richtung getrieben wird. Darnach sind also die Schweife der Kometen der Inbegriff der Bahnen, die die einzelnen Kometenteilchen, welche in einem bestimmten Augenblicke (Kurven der Isochronen) aus der Wirkungssphäre des Kernes ausgeschleudert werden, nunmehr infolge der ihnen erteilten Anfangsgeschwindigkeit und unter der Einwirkung der sonst im Kerne vorhandenen Massenteilchen sowie der Abstoßungskraft der Sonne (Kurve der Syndynamen) beschreiben.

Sind x, y und $z = 0$ die Koordinaten des Schwerpunktes (Kern) des Kometen, so mögen für seine Bewegung um die Sonne die gewöhnlichen Gleichungen

$$x'' + k^2 Mx/r^3 = 0, \quad y'' + k^2 My/r^3 = 0 \tag{44}$$

gelten, sind ferner X, Y und Z die Koordinaten eines Massenteilchens

148) *Olbers,* Über den Schweif des großen Kometen von 1811, Monatl. Korresp. XXV (1812), p. 3.

149) *Bessel,* Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des *Halley*schen Kometen und dadurch veranlaßte Bemerkungen, Astr. Nachr. 13 (1836), p. 186. Über die reiche Kometenliteratur vgl. besonders die historische und kritische Zusammenstellung über die Arbeiten von *Bessel* und *Bredichin* in *R. Jägermann,* Prof. Dr. *Th. Bredichins* Mechanische Untersuchungen über Kometenformen in systematischer Darstellung, St. Petersburg 1903. Andere Kometentheorien sind die von *W. Peirce,* On the theory of the tail of Komet 1858 VI, Astr. J. V (1858), p. 186, sowie VI (1859), p. 50, der von der Annahme ausgeht, daß die ausgeschleuderten Kometenteilchen sich in dem (konvexen) Hyperbelast bewegen, dessen zweiter Brennpunkt sich in der Sonne befindet, ebenso auch *W. A. Norton,* On the dynamical condition of the head of a comet, Americ. J. of Sc. XXX, 1859; Theoretical determination of the dimensions of *Donati*'s Komet, Americ. J. of Sc. XXXII (1861), p. 61. — Der erste, der die Tatsache entdeckte, daß anfänglich die Kometenmaterie zur Sonne ausströme, so lange bis sie einen gewissen Abstand vom Kerne erreiche, daraufhin um ihn umbiege, zurückkehre und dann erst sich stetig von der Sonne entferne und den leuchtenden von der Sonne abgewendeten Schweif bilde, soll *Hooke* gewesen sein, bei Gelegenheit der mit einem Fernrohre angestellten Beobachtungen der Kometen von 1680 und 1682.

in der Hülle des Kometen, so soll deren Bewegung um die Sonne durch

$$(44\text{a})\quad X'' + k^2M(1-\mu)\,X/R^3 = \frac{\partial U}{\partial X},\quad Y'' + k^2M(1-\mu)\,Y/R^3 = \frac{\partial U}{\partial Y},$$
$$Z'' + k^2M(1-\mu)Z/R^3 = \frac{\partial U}{\partial Z}$$

bestimmt erscheinen, wobei μ die neben der reinen Anziehungskraft der Sonne wirkende Abstoßungskraft derselben und U das Potential der störenden Einwirkung der andern im Kerne vorhandenen Massenteilchen bedeutet. Die Verbindung zwischen den Koordinaten X, Y, Z und x, y, z wird hergestellt durch Einführung von Relativkoordinaten ξ, η und ζ, die nach Art eines mit variabler Geschwindigkeit rotierenden Systems durch die Gleichungen

$$(45)\quad X - x = (\xi x + \eta y)/r,\quad Y - y = (\xi y - \eta x)/r,\quad Z = \zeta$$

definiert werden. Aus der aus ihnen sich ergebenden Relation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 = (r+\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

folgt, daß die Koordinate ξ in der Richtung des Radiusvektors zwischen Kern und Sonne, η in der darauf senkrechten liegt, so daß bei Annahme von Polarkoordinaten

$$\xi = \Delta\cos\varphi,\quad \eta = \Delta\sin\varphi$$

Δ und φ der direkten Beobachtung einzelner im Schweife des Kometen liegender Punkte zugänglich sind und an ihrer Hand daher ein Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung durchgeführt werden kann.

Bessel setzt in seinen Untersuchungen $U = 0$, sowie $\zeta = 0$, leitet dann die folgenden Näherungsgleichungen ab:

$$(46)\quad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{k^2M\mu}{r^2} - \dfrac{2k\sqrt{Mp}}{r^2}\eta' + \dfrac{2k\sqrt{Mp}\cdot r'}{r^3}\eta + \left(\dfrac{2k^2M(1-\mu)}{r^3} + \dfrac{k^2Mp}{r^4}\right)\xi, \\ \eta'' = \qquad + \dfrac{2k\sqrt{Mp}}{r^2}\xi' - \dfrac{2k\sqrt{Mp}\cdot r'}{r^3}\xi - \left(\dfrac{k^2M(1-\mu)}{r^3} - \dfrac{k^2Mp}{r^4}\right)\eta, \end{cases}$$

in denen die Größen p und r sich auf die Bewegung des Kometen um die Sonne beziehen, und versucht sie durch nach der Zeit fortschreitende Potenzreihen zu integrieren, deren Konvergenz hier insoweit vorausgesetzt werden kann, als sie nur für vom Momente des Austritts des Teilchens aus dem Kerne nicht sehr weit entfernte Zeiten verwertet werden sollen. Mit Vernachlässigung der die Anfangslage des Kometenteilchens bestimmenden Konstanten findet er nach Entwicklung bis zu den dritten Potenzen der Zeit:[150])

---

150) Die Formeln von *Bessel* wurden teils verbessert, teils auf einen höheren Genauigkeitsgrad gebracht von *Pape,* Untersuchungen über die Erscheinung des

$$(46\text{ a})\qquad \begin{cases} \xi = \xi_0' t + \dfrac{k^2 M \mu}{2 r^2} t^2 + 2 r' \dfrac{k^2 M \mu}{3 r^3} t^3 + \cdots \\ \eta = \eta_0' t + \dfrac{k \sqrt{Mp}\, \xi_0'}{r^2} t^2 + \dfrac{k^3 M \mu \sqrt{Mp}}{3 r^4} t^3 + \cdots, \end{cases}$$

worin ξ_0' und η_0' die Anfangsgeschwindigkeiten der Ausströmung bedeuten. Aus ihnen ist durch Elimination von t die Gleichung der Bahnkurve (Syndyname) des Massenteilchens, durch die die Form des Schweifes bedingt erscheint, abzuleiten. Es folgt wieder mit einigen Vernachlässigungen

$$\eta = \eta_0' r \left[\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2\xi}{\mu M}} - \frac{2}{3} r' \frac{2\xi}{k^2 \mu M}\right] + \frac{2\sqrt{2p}}{3r} \cdot \frac{\xi\sqrt{\xi}}{\sqrt{\mu}}$$

oder noch kürzer unter der Annahme, daß die Geschwindigkeitskomponente η_0' der Ausströmung $= 0$ ist:

$$\eta = \frac{2\sqrt{2p}}{r} \cdot \frac{\xi\sqrt{\xi}}{\mu}.$$

eine Gleichung, die eine genäherte Berechnung von μ aus den der direkten Beobachtung zugänglichen Koordinaten η und ξ von Punkten in der Schweifachse des Kometen und den aus seinem Laufe bekannten p und r gestattet. Ebenso erhält man nach Substitution von $\xi_0' = -g \cos G$, $\eta_0' = g \sin G$ und durch Elimination von G aus denselben Gleichungen die Kurven der Isochronen, als deren Enveloppe man den Kopf des Kometen ansehen kann. Für sie erhält man in erster Annäherung die Gleichung der Parabel

$$\eta^2 = \frac{2 g^2 r^2}{k^2 M \mu} \xi + \left(\frac{g^2 r^2}{k^2 M \mu}\right)^2,$$

und ihr zufolge stellt sich der Kopf als das entsprechende Rotationsparaboloid dar, so daß, wenn man mit ε die Entfernung seines Scheitels vom Kern bezeichnet,

$$\varepsilon = \frac{g^2 r^2}{k^2 M \mu}$$

großen Kometen vom Jahre 1858, Astr. Nachr. 49 (1858), p. 309; sodann *Winneke,* Pulkowaer Beobachtungen des großen Kometen vom Jahre 1858, Mém. St. Petersburg I (1859); sowie Untersuchungen über die Natur der Kometen, ebenda II (1860) u. Astr. Nachr. 52 (1860), p. 255; *Marcuse,* Über die physische Beschaffenheit der Kometen, Inaug.-Dissert., Berlin 1884; *v. Hepperger,* Bestimmung der Repulsivkraft der Sonne aus Beobachtungen in der Schweifachse von Kometen gelegener Punkte, Wien Ber. 88 (1884), p. 7; ferner die Referate von *Radau* über die zwei letzten Abh. im Bull. astr. I (1884), p. 189; *Kreutz,* Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II, 1. Teil, Kiel 1888, p. 85. Vgl. auch die Entwicklungen von *Charlier* in seiner Mechanik des Himmels, Leipzig 1902, I. Teil, p. 194.

wird, eine Gleichung, die wieder einen Näherungswert für die Ausströmungsgeschwindigkeit $g^2 = \xi_0'^2 + \eta_0'^2$ aus der Beobachtungsgröße Δ liefert.

36. Die Bredichinsche Typenteilung der Kometenschweife. Die eingehendsten Untersuchungen über die Schweife der Kometen nach der *Bessel*schen Theorie verdankt man *Th. Bredichin.*[151]) Mehr als 50 Kometen älterer und neuerer Zeit aus den Jahren 1472—1902, bei denen sich eine Schweifentwicklung gezeigt hat und Beobachtungen in dieser Richtung vorlagen, unterzog er einer kritischen Behandlung, teils unter direkter Anwendung der *Bessel*schen Näherungsformeln, teils nach Ableitung strengerer Formeln für die hyperbolische Bewegung der Massenteilchen, teils nach einem mehr graphischen Verfahren, indem er aus angenommenen Werten für μ, g und G die *Bessel*schen Koordinaten ξ und η berechnet, darnach sich theoretische Schweifkurven zeichnet und diese mit den Beobachtungen vergleicht.

Das Hauptergebnis dieser ausgebreiteten Rechnungen ist die Entdeckung der drei Schweiftypen.[152]) Die aus den Beobachtungen für die Größe der Repulsivkraft der Sonne abgeleiteten Zahlenwerte ließen eine Einteilung derselben in drei durch größere Zahlenintervalle voneinander getrennte Gruppen erkennen, denen ebenso auch drei voneinander verschiedene Werte der Anfangsgeschwindigkeit g entsprachen, und die für die einzelnen Kometen typisch zu sein schienen, wobei, wenn ein Komet mehrere Schweife zeigte, diese verschiedenen Typen angehörten. Als endgültige Werte für die jedem Typus zukommenden Werte von μ und g gibt *Bredichin* die Zahlen an:

I.	Typus:	$\mu = 18$		$g = 0{,}34 - 0{,}10$,
II.	„	μ zwischen	$2{,}2 - 0{,}5$	$g = 0{,}07 - 0{,}03$,
III.	„	μ „	$0{,}3 - 0{,}0$	$g = 0{,}02 - 0{,}01$.

Neuere Beobachtungen[153]) führen jedoch auf Werte für μ, die den

151) Vgl. die Fußnote 149 zitierte Zusammenstellung von *Jägermann,* ferner das Referat von *Oppenheim* in Ast. Ges. Vjs. 40 (1905), p. 1. Die einzelnen Rechnungen von *Bredichin* erschienen zumeist in den von ihm herausgegebenen Annales de l'observatoire de Moscou, und auszugsweise auch in den Astr. Nachr.

152) Die Entdeckung der Typenteilung der Kometenschweife findet sich vor in Ann. de l'obs. de Moscou VII (1860), p. 63. Vgl. auch *Bredichin,* Révision des valeurs numériques de la force répulsive du soleil, Leipzig 1885.

153) So findet *Jägermann,* Die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1892 I, Astr. Nachr. 176 (1906), p. 1, $\mu = 35{,}2$, $g = 0{,}056952$, ebenso in: Über die beim Kometen 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie,

für den ersten Typus gefundenen weitaus über- und bis auf $\mu = 89$ ansteigen, wobei die da vorkommenden Zahlenwerte 35—36, 71—72 und 89—90 auf Vielfache der Zahl 18 hindeuten.

Die Typenteilung der Kometenschweife führte zur Frage nach dem Ursprung der Repulsivkraft der Sonne. *Olbers* wollte sie auf rein elektrische Kräfte zurückführen. *Bessel* und *Bredichin* bemühten sich mehr in der Richtung, aus ihrer Existenz die Bewegung der Teilchen und damit die verschiedenen Formen der Kometenschweife abzuleiten. Die Frage nach ihrer Natur stand bei ihnen an zweiter Stelle. Erst *Zöllner*[154]) befaßte sich eingehender mit der elektrischen Theorie der Abstoßungskraft der Sonne. Unter Einführung der Größen E und e als der Mengen der freien Elektrizität an den Oberflächen von Sonne und Schweifteilchen des Kometen, M und m ihrer gravitierenden Massen, D und d der elektrischen Dichten, r des Radius und s der Massendichte des Teilchens leitet er aus $\mu = Ee/k^2Mm$ die Relation

$$\frac{\mu r s}{D d} = \text{const.} \tag{47}$$

ab. *Bredichin* gibt dieser Gleichung im Hinblick auf die drei Schweiftypen die Form

$$\frac{\mu_1 r_1 s_1}{D_1 d_1} = \frac{\mu_2 r_2 s_2}{D_2 d_2} = \frac{\mu_3 r_3 s_3}{D_3 d_3}, \tag{47 a}$$

und, indem er nun $D_1 = D_2 = D_3$, ebenso $d_1 = d_2 = d_3$ und schließlich auch noch als approximativ richtig $r_1 = r_2 = r_3$ annimmt, findet er

$$\mu_1 s_1 = \mu_2 s_2 = \mu_3 s_3$$

oder, wenn m_1, m_2 und m_3 die Molekulargewichte der den Kometenschweif bildenden gasförmigen Stoffe bedeuten:

$$\mu_1 m_1 = \mu_2 m_2 = \mu_3 m_3 .$$

Mém. St. Petersburg XVI (1905), $\mu = 89$; ferner *A. Kopff* in den Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums auf dem Königsstuhl III (1909), sowie: Über die Bewegung der Schweifmaterie beim Kometen 1903 IV, Astr. Nachr. 176 (1907), p. 149, $\mu = 89{,}4$. Neuere kritische Untersuchungen über die *Bessel*sche Kometentheorie ferner sind: *A. Kopff,* Über die *Bessel-Bredichin*sche Theorie der Kometenschweife, Astr. Nachr. 179 (1908), p. 211, und die Entgegnung von *A. Orloff,* Sur la théorie des queues des comètes, Publ. de l'Observ. de Dorpat 21 (1911).

154) *Zöllner,* Über die Größe und elektrische Dichtigheit der Schweifteilchen eines Kometen, Astr. Nachr. 86 (1876), p. 257 u. 87 (1876), p. 273, und Ges. wiss. Abh., II. Bd., II. Teil, Leipzig 1872, p. 752; sowie auch: Über die Stabilität kosmischer Massen und die physische Beschaffenheit der Kometen, Leipzig Ges. Wiss. Abh. XXIII (1871) wieder abgedruckt in: Über die Natur der Kometen, Leipzig 1872.

Aus ihr folgen, unter der Voraussetzung, daß die Schweife des ersten Typus ($\mu = 18$) aus reinem Wasserstoff bestehen,

$$\text{für } \frac{m_2}{m_1} \text{ die Zahlen } 8\text{—}36,$$

$$\text{„ } \frac{m_3}{m_1} \text{ „ „ } 50\text{—}100.$$

Neuestens versuchte man es, die Existenz der Repulsivkraft der Sonne auf den Druck[155]) zurückzuführen, welchen nach der *Maxwell*schen Theorie ein strahlender Körper, also auch die Sonne, auf jeden absorbierenden oder reflektierenden Körper ausübt. Mit der Frage, ob dieser Druck einen so großen Betrag erreichen kann, daß die durch ihn hervorgerufene und ihm gleichwertige Sonnenrepulsion, wie es die Schweife des Typus I verlangen, 18 mal so groß ist als die reine Anziehung der Sonne, befaßte sich *Schwarzschild*[156]). Er findet die Zahlen 19—20 als oberen Grenzwert für μ. Dies steht mit dem *Bredichin*schen Ergebnis in bester Übereinstimmung, dafür aber im Widerspruch mit den neuesten bei einigen Kometen gefundenen Werten, die bis auf $\mu = 89$ ansteigen.

37. Die Kometentheorie von Schiaparelli. Von der *Bessel*schen Theorie der Kometenschweife unterscheidet sich die von *Schiaparelli*[157]) dadurch, daß sie ihr Hauptgewicht nicht auf die Repulsivkraft der Sonne, d. i. die Größe μ, sondern auf die in den Gl. (44a) auftretende Größe U legt, der gegenüber in ihrem Verhältnis zur reinen Anziehung der Sonne diese die Wirkung haben soll, die Kometenmaterie in ihrer Annäherung an die Sonne zu zerstreuen und damit zur Schweifentwicklung beizutragen. Mathematische Darstellungen zur *Schiaparelli*schen Auflösungstheorie der Kometen gaben *Charlier*[158]) und *L. Picart*[159]). Sie nehmen einen kugelförmigen Haufen von nur

155) *Lebedew,* Über die abstoßende Kraft strahlender Körper, Ann. Phys. 45 (1892), p. 292; ferner *Svante Arrhenius,* Über die Ursache der Nordlichter, Phys. Zeitschr. II (1900), p. 81 und 97, sowie: Kosmische Physik (1903), p. 206.

156) *Schwarzschild,* Über den Druck des Lichtes auf kleine Kugeln und die *Arrhenius*sche Theorie der Kometenschweife, München Ber. XXXI (1901), p. 204.

157) Vgl. außer den vielen Originalmitteilungen von *Schiaparelli* im Bull. meteor. dell Osserv. de Coll. Romano die Zusammenfassung derselben von *Boguslawski,* Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, deutsche Ausgabe, Stettin 1871.

158) *Charlier,* Formation des courants météoriques par la désagrégation des comètes, St. Petersb. Bull. XXXII (1888).

159) *Luc Picart,* Sur la desagrégation des essaims météoriques, Thèses de fac. de Paris 1892.

lose miteinander zusammenhängenden Massenteilchen von der mittleren Dichte δ und dem Radius ϱ_0 an, die sich gegenseitig anziehen. Dann ist, wenn das Teilchen, dessen Bewegung unter dem Einfluß der Sonne wie aller seiner Nachbarteilchen untersucht werden soll, innerhalb des Kugelhaufens sich befindet:

$$U_1 = -\frac{2\pi}{3} k^2 \varrho^2 \delta$$

oder, wenn seine ganze Masse $m = \frac{4\pi}{3}\varrho_0{}^3\delta$ und außerdem $k^2 M = n^2 a^3$ gesetzt wird:

$$U_1 = \frac{n^2}{2}\left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^3 \frac{m}{M}\varrho^2 = \frac{1}{2} n^2 \varrho^2 \nu,$$

wo Kürze halber $\nu = ma^3/M\varrho_0{}^3$ ist, dagegen für einen außerhalb liegenden Massenpunkt:

$$U_2 = \frac{k^2 m}{\varrho} = \frac{n^2 a^3}{\varrho} \cdot \frac{m}{M},$$

und zu den Gleichungen (46) treten, wenn man in ihnen jedoch $\mu = 0$ annimmt, auf der rechten Seite die Glieder hinzu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} &= -\nu n^2 \xi \quad \text{bzw.} & \frac{\partial U_2}{\partial \xi} &= -\nu n^2 a^3 \xi/\varrho^3, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \eta} &= -\nu n^2 \eta & \frac{\partial U_2}{\partial \eta} &= -\nu n^2 a^3 \eta/\varrho^3, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} &= -\nu n^2 \zeta & \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} &= -\nu n^2 a^3 \zeta/\varrho^3. \end{aligned}$$

Im ersten Falle, und unter der einer ersten Annäherung gleichkommenden Voraussetzung einer Kreisbahn für den Schwerpunkt des Haufens, für die $r = p$, $\frac{dr}{dt} = 0$, $k^2 M = n^2 p^3$ ist, folgt ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren determinierende Gleichung als Bedingung seiner Stabilität

$$(48) \qquad \nu > 3 \quad \text{oder} \quad \frac{m}{M} > 3\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)^3$$

gibt, welche *Charlier* noch in der Form $T > T_0\sqrt{3}$ ansetzt, sofern T die Umlaufszeit des ganzen Haufens um die Sonne, T_0 die des Massenteilchens um den Schwerpunkt bedeutet. Wird jedoch keine solche gleichförmige Rotation vorausgesetzt, sowie für den zweiten Fall, der Geltung der Funktion U_2, wird das System zu einem mit periodischen Koeffizienten, das eine Ähnlichkeit hat mit dem von *Hill* zur Berechnung der als Variation bezeichneten Störungen der Mondbewegung aufgestellten. Die Diskussion über die Stabilität führt *Picart* mit Hilfe der *Hill*schen Grenzkurve durch. Er gelangt damit zu der Bedingungsgleichung

$$\frac{m}{M} > 3\left(\frac{a'}{a}\right)^3, \tag{48 a}$$

worin a' die große Achse der Bahn bedeutet, die das betrachtete Kometenteilchen um den Kern beschreiben würde, wenn die Sonnenanziehung nicht vorhanden wäre, wogegen im Falle einer elliptischen Bewegung des Kernes um die Sonne die Stabilitätsbedingung in

$$\frac{m}{M} > \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \{3 + e^2 H + \cdots\} \tag{48 b}$$

übergeht, in der H eine Funktion der Bahnelemente dieser Bewegung ist.

(Abgeschlossen Juli 1919.)

VI 2, 22. KRITIK DES NEWTONSCHEN GRAVITATIONSGESETZES.

VON

S. OPPENHEIM

IN WIEN.

MIT EINEM BEITRAG:

GRAVITATION UND RELATIVITÄTSTHEORIE.

VON

F. KOTTLER

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Monographien.

Eine spezielle Literatur über das im vorliegenden Artikel behandelte Thema ist nicht vorhanden. Es sei daher hier nur auf einige der wichtigsten, im folgenden erwähnten Monographien verwiesen.

H. Bruns, Die Figur der Erde, Potsdam. geod. Inst. 1878.
F. Tisserand, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du soleil, Paris. Obs. mém. 16 (1882).
— Note sur l'état actuel de la théorie de la lune, Paris. Bull. astr. 8 (1891).

F. Tisserand, Confrontation des observations avec la théorie de la gravitation, Méc. cél. IV (1896), chapt. 29.

Abel Souchon, Traité d'astronomie pratique, Paris 1883.

— Traité d'astronomie théorique, Paris 1889, besonders die Introduction historique.

W. Killing, Die Mechanik in nicht-euklidischen Raumformen, J. f. Math. 98 (1885).

W. Harkness, On the solar parallax and its related constants, Washington 1885.

R. Lehman-Filhés, Über die Bewegung der Planeten unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft, Astr. Nachr. 110 (1884).

J. Bauschinger, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur, München 1884.

S. Newcomb, The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895.

P. Harzer, Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten, Leipzig. Preisschrift 1895.

O. Backlund, Sur la masse de la planète Mercure et sur l'accéleration du mouvement moyen de comète d'Encke, Paris Bull. astr. 11 (1894).

P. Drude, Über Fernwirkungen, Ann. Phys. Chem. 62 (1897).

L. Schulhof, Les comètes periodiques, l'état actuel de leurs théories, Paris. Bull. astr. 15 (1898).

E. Wiechert, Über die Massenverteilung im Innern der Erde, Gött. Nachr. 1897.

H. v. Seeliger, Über das Newtonsche Gesetz, Münch. Ber. 26 (1896).

— Über Zusammenstöße und Teilungen planetarischer Massen, Münch. Abh. 1891.

— Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht, Münch. Ber. 31 (1901).

— Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Münch. Ber. 36 (1906).

K. Schwarzschild, Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes, Astr. Ges. Vjs. 35 (1900).

H. Poincaré, La mesure de la gravité et la géodésie, Paris. Bull. astr. 18 (1901).

O Hecker, Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers, Potsdam. geod. Inst. 32 (1907).

W. Schweydar, Beobachtungen der Änderung der Intensität der Schwerkraft durch den Mond, Berl. Ber. 1914.

— Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschichte, Potsdam. geod. Inst. 1912.

— Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond, ebenda 1914.

— Theorie der Deformation der Erde durch Flutkräfte, ebenda 1916.

W. Hayford, The figure of the Earth and isostasy from measurement in United-States, Washington 1909.

W. Bowie, Effect of topography and isostatic compensation upon intensity of gravity, Washington 1912.

F. Helmert, Über die Genauigkeit der Dimensionen des *Hayford*schen Erdellipsoids, Berl. Ber. 1911.

— Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festland, ebenda 1915.

K. F. Bottlinger, Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes, Münch. Diss. 1912.

— Zur Frage nach der Absorption der Gravitation, Münch. Ber. 1914.

W. de Sitter, The absorption of gravity and the longitude of the Moon, Amsterd. Proceed. 21 (1912).

Vorbemerkung. Dieser Artikel schließt an den unter dem Titel „Gravitation“ in dieser Encyklopädie V 2 (1901) erschienenen von *J. Zenneck* (Straßburg) an, mit dem Unterschiede jedoch, daß, während dieser in physikalischer Richtung Vollständigkeit erstrebt, der vorliegende die astronomische Seite des Problems bevorzugen soll.

I. Das Newtonsche Gesetz.

1. Das Newtonsche Gesetz. Das Grundgesetz der Gravitation wurde zuerst von *Newton* [1]) erkannt und im dritten Bande seiner „Philosophiae naturalis principia mathematica“, Prop. I—VIII ausgesprochen. Es lautet: Befinden sich irgendwo in einem Raume in einem bestimmten Zeitmomente zwei Massenelemente von den Massen m_1 und m_2 und in der Entfernung r, so üben sie in demselben Momente (Instantanwirkung) aufeinander eine anziehende Kraft [2]) aus (d. h. sie erteilen einander eine Beschleunigung), die in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt, proportional dem Produkte ihrer Massen zu- und im Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernung abnimmt. Der analytische Ausdruck für die Größe dieser Kraft ist daher gegeben durch

$$K = -k^2 m_1 m_2 : r^2, \tag{1}$$

worin k^2 eine universelle, d. h. nur vom angenommenen Maßsystem und nicht auch vom Medium, indem die Anziehung erfolgt, abhängige Konstante bedeutet und das Zeichen — gewählt ist, um eine Anziehung auszudrücken.

Newton hat dieses Gesetz aus den von *Kepler* empirisch gefundenen Gesetzen der Bewegung der Planeten um die Sonne erschlossen und es sodann nicht nur auf dieses Hauptproblem der theoretischen Astronomie (Mechanik des Himmels) angewendet, sondern auch auf andere weitere Gebiete ausgedehnt, wie die Bestimmung der Gestalt der Himmelskörper, Ableitung des Gesetzes für die Variation der Schwere auf der Erde, Erklärung der Ebbe- und Fluterscheinungen,

1) Über die Vorgeschichte der Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch *Newton* berichtet *F. Rosenberger*, Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien, Leipzig 1895. Das Buch von *Todhunter*, History of the mathematical theories of Attraction and the Figure of the Earth, 2 Bde., London 1873, schildert mehr die mathematische Durchführung des Gesetzes der Anziehung in Hinsicht auf die Bestimmung der Gestalt der Erde und die Theorie des Potentials. Eine gute Übersicht über die vor-newtonsche Zeit gibt auch *Isenkrahe*, Das Rätsel der Schwerkraft, Leipzig 1879.

2) Über die Frage nach der Gravitation als unvermittelten Fern- oder durch das Zwischenmedium bedingten Nahkraft vgl. den Anhang (*Fr. Kottler*).

der Präzession und Nutation, Gebiete, die seitdem alle als zur theoretischen Astronomie gehörig betrachtet werden.

2. Das Newtonsche Gesetz und der Raum. Der hohe Grad der Genauigkeit, der durch die Anwendung dieses Gesetzes auf die erwähnten Probleme erzielt wurde, führte mehrfach zu der Ansicht, als ob es schon in unserer Raumanschauung begründet und daher ein aprioristisches Erkenntnisresultat[3]) sei. Sowie die Intensität des Lichtes oder des Schalles im quadratischen Gesetze mit der Entfernung vom Licht- oder Schallerreger abnimmt, so besteht auch das gleiche Verhältnis für die Anziehungsäußerung eines Massenteilchens dadurch, daß sie sich auf immer größeren Kugelflächen ausbreitet. In diesem Sinne setzt *Killing*[4]) den analytischen Ausdruck für das Anziehungsgesetz bei der Übertragung auf den sphärisch-elliptischen Raum mit dem Krümmungsradius R in der Form

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} \tag{2}$$

fest, entsprechend dem Satze, daß in einem solchen Raume die Oberfläche einer Kugel vom Radius r durch $4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$ bestimmt ist. Ihm kommt das Potential

$$P = \frac{k^2 m_1 m_2}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} \tag{2a}$$

zu. In gleicher Art wird das für einen Raum von n Dimensionen[5]) erweiterte *Newton*sche Gesetz zu

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{R^{n-1} \sin^{n-1} \frac{r}{R}}$$

angenommen. Für das entsprechende Potential P ergeben sich dabei zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Für ein ungerades n wird

3) *I. Kant,* Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik: Der Hauptfrage 2. Teil, § 38.

4) *W. Killing,* Die Mechanik in nicht-euklidischen Raumformen, J. f. Math. 98 (1885), p. 1—48. Ferner *H. Liebmann,* Nicht-euklidische Geometrie, Samml. Schubert, Leipzig 1912, p. 207; sowie: Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nicht-euklidischen Raume, Leipz. Ber. 54 (1902), p. 393. Über die Zweideutigkeit des Potentials im elliptischen gegenüber dem im sphärischen Raume s. *F. Klein,* Die nicht-euklidische Geometrie, Vorl. Göttingen 1893, IIB, p. 206.

5) *E. Schering,* Die Schwerkraft im Gaußschen Raume, Gött. Nachr. 1870, und Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaußschen und Riemannschen Räumen, ebenda 1873 = Ges. Werke 1, p. 155 u. 177.

$$P = \cos\frac{r}{R}\left[\frac{\alpha}{\sin\frac{r}{R}} + \frac{\beta}{\sin^3\frac{r}{R}} + \frac{\gamma}{\sin^5\frac{r}{R}} + \cdots\right]$$

eine aus $\frac{n-1}{2}$ Gliedern bestehende Reihe, in der α, β, γ reine Zahlenkoeffizienten sind; für ein geradzahliges n dagegen enthält die Reihe nur $\frac{n-2}{2}$ Glieder, zu denen noch ein log hinzukommt:

$$P = \log \operatorname{ctg}\frac{r}{2R} + \cos\frac{r}{R}\left(\frac{\alpha}{\sin\frac{r}{R}} + \frac{\beta}{\sin^3\frac{r}{R}} + \cdots\right).$$

Hieraus entspringt ein ungleichmäßiges Verhalten der Größe P in diesen beiden Fällen für $r = \infty$.

Andererseits ist jedoch das *Newton*sche Gesetz eine natürliche Konsequenz der folgenden zwei Forderungen[6]):

1. die Feldstärke der Gravitation F ist wirbellos, und in den Raumgebieten, in denen keine Massen vorhanden sind, quellenfrei verteilt, d. h. es gilt die Gleichung

(3) $$\operatorname{rot} F = 0;$$

2. wo aber Massen vorhanden sind, ist die Divergenz der Feldstärke in einem bestimmten Punkte des Raumes proportional der dort befindlichen Massendichte ϱ mit dem Proportionalitätsfaktor $4\pi k^2$, d. h. es gilt die zweite Gleichung

(3a) $$\operatorname{div} F = -4\pi k^2 \varrho.$$

Beide führen unter Einführung des Potentials P_1 auf die *Laplace-Poisson*sche Gleichung

(4) $$F = \operatorname{grad} P_1, \quad \Delta_2 P_1 = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = -4\pi k^2 \varrho.$$

Hierbei ist unter der Feldstärke F die auf die Masseneinheit bezogene Anziehungskraft verstanden, aus der die zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 wirkende Anziehung durch Multiplikation mit der angezogenen Masse folgt, etwa $K = m_1 F$. Die einzige Lösung der Gleichung (4) ist, wenn man die Bedingung vorschreibt, daß die Funktion P im Unendlichen den Grenzwert Null habe, und, da es sich nur um Massenanziehung handelt, daher Flächendichten und Doppelschichten ausgeschlossen sind,

(4a) $$P = k^2 m_2 \int \frac{\varrho' d\tau'}{r},$$

wo in dem Integrale die akzentuierten Buchstaben solche Stellen des Raumes bezeichnen, die von den das Potential P erzeugenden Massen besetzt sind.

---

6) *J. Zenneck,* Encykl. V 2, 34.

Hiermit im Zusammenhange steht die Frage nach der Ausdehnung der Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes auf den unendlichen Raum, wenn er unendlich viel Masse enthält. *C. Neumann*[7]) und unabhängig von ihm *H. v. Seeliger*[8]) haben zuerst auf die hier auftretenden Schwierigkeiten aufmerksam gemacht und nachgewiesen, daß unter diesen Voraussetzungen sich für das Gesamtpotential die gesamte Kraft sowie die Zerrung, darunter der Unterschied der Kräfte in zwei unendlich nahen Punkten verstanden, unendliche oder vollständig unbestimmbare Werte ergeben. Im elliptischen Raume verschwinden diese Unbestimmtheiten[9]), und zwar sowohl, wenn man das *Newton*sche Gesetz in seiner reinen Form $\frac{-k^2 m_1 m_2}{r}$ als auch in der Form $-k^2 m_1 m_2 \operatorname{ctg} \frac{r}{R}$ der Rechnung zugrunde legt. Will man sie auch im *Euklid*schen Raume zum Verschwinden bringen, so muß man die Form des Gesetzes ändern.[10]) Derartige neue Modifikationen sind: der schon von *Laplace*[11]) herrührende Vorschlag

$$K = \frac{k^2 m_1 m_2 e^{-\alpha r}}{r^2}, \tag{5}$$

ferner der *Neumann*sche[12])

$$P = \frac{k^2 m_1 m_2 e^{-\alpha r}}{r}, \tag{5a}$$

anzunehmen, während das von *G. Green*[13]), dann von *A. Hall*[14]) untersuchte Gesetz

$$P = \frac{k^2 m_1 m_2}{r^{1+\lambda}}, \tag{5b}$$

worin λ eine kleine Zahl bedeutet, die Schwierigkeiten nicht behebt.

---

7) *C. Neumann,* Leipz. Ber. 26 (1874), p. 97.

8) *H. Seeliger,* Über das Newtonsche Gravitationsgesetz, Astr. Nachr. 137 (1895), p. 129—136 und Münch. Ber. 26 (1896), p. 373—400. — Kontroverse zwischen *H. Seeliger* und *J. Wilsing,* hierüber Astr. Nachr. 137 u. 138 (1895).

9) *J. Lense,* Das Newtonsche Gesetz in nicht-euklidischen Räumen, Wien. Ber. 126 (1917), p. 1037—1063.

10) Die Einführung von negativen Massen, welche zur Behebung dieser Schwierigkeiten *A. Föppl,* Münch. Ber. 27 (1897), p. 93—99, vorschlägt, dürfte wohl in der Astronomie keinen Anklang finden. Vgl. auch *C. V. Charlier,* Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann, Lund. Obs. Medd. 22 (1908), Nr. 38.

11) *Laplace,* Méc. cél., t. V, livre XVI, ch. 4.

12) *C. Neumann,* Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernewirkung, Leipzig 1896.

13) *G. Green,* Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids, analogous to the electric fluid, Cambr. Phil. Trans. 1833 = Math. Papers, London 1871, p. 123.

14) *A. Hall,* A suggestion in the theory of Mercury, Astr. J. 14 (1894).

Aber jede derartige formale Änderung des *Newton*schen Gesetzes bringt den Nachteil mit sich, daß nun nicht mehr der Kraftfluß, der durch eine geschlossene Fläche nach außen strömt, nur den innerhalb dieser Fläche vorhandenen Massen seinen Ursprung verdankt, denn es wird

$$\int \frac{\partial P}{\partial n}\,df = \int \Delta_2 P\,d\tau \gtrless -4\pi k^2 \int \varrho\,d\tau,$$

so daß es den Anschein hat, als ob der Raum selbst entweder als ein die Anziehung absorbierender oder sie verstärkender Faktor auftrete.

3. Bestimmung der Gravitationskonstanten k in astronomischen Einheiten. Die in der Astronomie bei der Untersuchung der Bewegung der Planeten gebräuchlichen Einheiten der Zeit, der Entfernung und der Masse sind: der mittlere Sonnentag[15]), die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, d. h. die halbe große Achse der von der Erde um die Sonne beschriebenen Ellipse, und die Masse der Sonne. Unter Einführung dieser Einheiten hat zuerst *Gauß*[16]) eine Berechnung der Konstanten k in dem analytischen Ausdrucke für das *Newton*sche Gesetz vorgenommen. Bezeichnet man mit E die Masse der Erde, S die der Sonne (daher $S = 1$), T ihre Umlaufszeit um die Sonne, und a die halbe große Bahnachse, so ist nach dem dritten *Kepler*schen Gesetz

$$k = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T\sqrt{S+E}}, \tag{6}$$

und daraus folgt mit den von *Gauß* angenommenen Werten

$$\begin{aligned} a &= 1,\\ T &= 365{,}2563835 \text{ mittlere Sonnentage},\\ E &= 1 : 354710,\\ k &= 0{,}01720209895 \cdots = 3548{,}18761 \cdots'',\\ \lg k &= 8{,}2355814414 \cdots = 3{,}55000665746 \cdots. \end{aligned}$$

Aber schon *Leverrier* in seinen umfassenden Rechnungen über die Bewegung der großen Planeten und *Hansen* in seiner Mondtheorie konnten über T und E bessere Annahmen machen. Da diese den Wert von k einigermaßen ändern, eine solche Änderung jedoch manche Unzukömmlichkeit nach sich zöge, namentlich eine Umrechnung der

15) Über die Definition des mittleren Sonnentages s. Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 2 und VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 13.

16) *C. F. Gauß,* Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809 = Ges. Werke 9, Göttingen 1906, Liber primus, sectio prima, p. 14, und Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 4.

von *Gauß* berechneten Tafeln erfordern würde, so hat schon *Leverrier*[17]) sich entschlossen, sie als eine absolute Konstante gelten zu lassen und vielmehr die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, a, den neuen Werten T und E entsprechend zu ändern. Mit ihnen

$$T = 365{,}2553574 \text{ mittlere Sonnentage,}$$
$$E = 1 : 330000,$$
$$k = 0{,}01720209895\ldots,$$

folgt $\quad a = 1{,}000000127\ldots, \quad \log a = 0{,}000000099\ldots.$

Infolge dieser Festsetzung ist nicht mehr die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne die Einheit der Distanz, sondern diese erscheint durch die *Gauß*sche Anziehungskonstante festgelegt als jene, in welcher ein Massenpunkt von der Masse $1 : 354710$ in $365{,}2563835\ldots$ mittleren Sonntagen einen vollen Umlauf um die Sonne ($S = 1$) beschreiben oder auch, wenn man in der Gl. (6) $E = 0$ und T ändert[18]), als jene mittlere Entfernung, in welcher ein Punkt von der Masse $= 0$ in

$$T = \frac{2\pi}{k} = 365{,}256898400519\ldots \text{ mittleren Sonnentagen}$$

in einer Kreisbahn um die Sonne geführt würde.

4. Die Konstante k in absoluten Maßeinheiten (C.-G.-S.-System). Um die Konstante k in dem Zentimeter-Gramm-Sekunden-System auszudrücken, ist sie mit der dritten Potenz der mittleren Entfernung a der Erde von der Sonne in cm zu multiplizieren und durch das Produkt aus der Masse der Sonne, S, in g und dem Quadrat der Anzahl der Sekunden in einem mittleren Sonnentage (86400) zu dividieren. Die in diesen Maßeinheiten (cm, g, sec) ausgedrückte Konstante, sie sei, um sie von der astronomisch gebräuchlichen zu unterscheiden,

---

17) *U. J. Leverrier,* Paris. Observ. Ann. 1 (1855), p. 189. Vgl. hierzu noch *W. Lehmann,* Anfrage an die praktischen Astronomen wegen eines theoretischen Bedenkens die Beob. Saturns gegen die Zeit seiner Quadratur betreffend, Astr. Nachr. 55 (1861), p. 1 u. 65. *Leverrier,* Erwiderung darauf: Monthl. Not. 21. (1861), p. 193; ferner *W. Lehmann,* Exakte Berechnung der Gaußschen Konstanten k, Astr. Nachr. 56 (1862), p. 321 und *S. Newcomb,* Über Dr. Lehmanns Neubestimmung der Gaußschen Konstanten, ebenda 37 (1862), p. 65. Der von *W. Lehmann* berechnete Wert ist $k = 0{,}01720712950$ $\lg k = 8{,}2355807433$. Vgl. auch *J. J. See,* Note on the accuracy of the Gaussian constant of the solar system, Astr. Nachr. 166 (1904), p. 90.

18) *Th. Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen 1, Leipzig 1882, 2. Aufl., p. 49. Einfacher wäre es jedoch, von vornherein $k = 1$ anzusetzen und dementsprechend die Längeneinheit oder die Zeiteinheit zu ändern. Im ersteren Falle wäre die neue Längeneinheit $A = \left(\frac{a^3}{k^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 15{,}0064876\ldots$, im zweiten die neue Zeiteinheit $t = 58{,}13244087\ldots$ mittlere Sonnentage.

mit k_1 bezeichnet, stellt die Größe der Anziehung vor, die zwei Massen von je einem Gramm in einer Entfernung von einem Zentimeter aufeinander ausüben.

Für die erste zur Ausführung der Reduktion notwendige Größe, a = der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, hat man, wenn man die Horizontal-Äquatorial-Parallaxe der Sonne mit $p_\odot$ und den Äquatorhalbmesser der Erde mit R_a bezeichnet,

$$a = \frac{R_a}{\sin p_\odot} = \frac{R_a}{p_\odot}$$

wegen der Kleinheit des Winkels zu nehmen. Die Reduktion setzt also die Kenntnis der Sonnenparallaxe voraus. Der gegenwärtig[19]) in der Astronomie für sie angenommene Wert ist

$$p_\odot = 8{,}800'',$$

woraus für a, je nach dem für R_a anzusetzenden Werte, folgt

Bessel:	$R_a = 637\,739\,715$ cm,	$a = 1494{,}81 \cdot 10^{10}$ cm,
Hayford:	$= 637\,838\,800$ „ ,	$= 1495{,}04 \cdot 10^{10}$ „ ,
Helmert:	$= 637\,820\,000$ „ ,	$= 1494{,}99 \cdot 10^{10}$ „ .

Die zweite zur Durchführung der Reduktion notwendige Größe ist die Masse der Sonne, S, in g. Sie ist aus der Masse der Erde, E, in g und dem astronomisch zu bestimmenden Verhältnis $E : S$ zu berechnen. Für dieses wird heute

$$E : S = 1 : 329\,390$$

als der beste Wert anerkannt, während E aus der Beschleunigung g abzuleiten ist, welche freifallende Körper auf der Erde durch sie erfahren. Unter der Annahme, daß die Erde eine Kugel mit dem Radius R ist, wäre

$$g = k_1^2 E : R^2 \quad \text{oder} \quad k_1^2 E = g R^2. \tag{7}$$

Zu der gleichen Formel gelangt man auch, wenn man die Erde als ein Ellipsoid (Sphäroid) ansieht, hierbei aber für R jenen Halbmesser nimmt, für den die in der Anziehung eines Ellipsoids auftretenden höheren Glieder, Kugelfunktionen zweiter Ordnung, verschwinden. Dies tritt ein für die geographische Breite φ, die durch

$$\sin^2 \varphi = \tfrac{1}{3}$$

19) Seit der „Conférence internationale des étoiles fondamentales de 1896 à Paris." Vgl. Procés verbaux Paris 1896. Eine ausführliche Zusammenstellung aller maßgebenden Werte für $p_\odot$ gibt *S. Newcomb*, Fundamental constants of astronomy Wash. 1893, p. 157 u. 166; eine historische Darstellung des Problems ihrer Bestimmung *F. Cohn*, Encykl. VI 2, 2, Nr. 9b und VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 5 u. 25.

bestimmt ist. Ferner muß für g die wahre Anziehungsbeschleunigung der Erde und nicht die um die Fliehkraft verminderte, sogenannte scheinbare Schwere substituiert werden. Bezeichnet man daher die Abplattung der Erde mit α, so daß

$$R = R_a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) \tag{8}$$

die Variation der scheinbaren Schwere G mit β, so daß

$$G = G_a(1 + \beta \sin^2 \varphi) \tag{9}$$

und endlich mit λ das Verhältnis der Fliehkraft zur Schwere, so ist

$$g = G_a(1 + \lambda) + G_a(\beta - \lambda) \sin^2 \varphi \tag{10}$$

anzusetzen und nunmehr in Gl. (8) und (10) $\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}$ zu substituieren. Es folgt mit Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der kleinen Größen, α, β und λ und mit Rücksicht auf die aus dem *Clairaut*schen Theorem fließende Relation $\alpha = \frac{5}{2}\lambda - \beta$

$$k_1^2 E = gR^2 = G_a R_a^2 (1 + \beta - \lambda)\,^{20)} = G_a R_a^2 (1 + \tfrac{3}{5}\beta - \tfrac{2}{5}\alpha). \tag{8a}$$

Mit dem neuesten *Helmert*schen Wert[21])

$$g = 978{,}052\,(1 + 0{,}005285 \sin^2 \varphi),$$

den drei oben angeführten Werten von R_a und den entsprechenden Werten von α erhält man:

Bessel:	$\alpha = 1 : 299{,}15,$	$\log k_1^2 E = 20{,}60044,$
Hayford:	$= 1 : 296{,}96,$	$= 20{,}60057,$
Helmert:	$= 1 : 296{,}7,$	$= 20{,}60055.$

Eine zweite Gleichung, durch die die beiden Unbekannten k_1 und E voneinander getrennt werden könnten, läßt sich nicht aufstellen. Es folgt daraus, daß die Reduktion der Konstanten k des *Newton*schen Gesetzes von den astronomisch verwendeten Einheiten auf die physikalische des Dyn auf rein astronomischem Wege nicht durchführbar ist. Es bedarf hierzu physikalischer Beobachtungen. Man nennt sie Bestimmungen der mittleren Dichte der Erde. Ein ausführliches Referat über sie enthält der Artikel Gravitation von *Zenneck*, Encykl. V 2. Darnach ist im Mittel aus den besten bisherigen Bestimmungen

$$k_1^2 = 6{,}675 \cdot 10^{-8} \text{ Dyn},$$

20) Diese Formel findet sich bis auf Glieder zweiter Ordnung der kleinen Größen β und λ entwickelt bei *F. Helmert*, Höhere Geodäsie 2, p. 460, ferner Encykl. VI 1, 7 (*Helmert*), Nr. **3** und VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. **10**.

21) *F. Helmert*, Neue Formeln über den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festlande, Berl. Ber. 1915, p. 676.

woraus für dieselbe Größe in astronomischen Einheiten:

$$(\textit{Bessel})\ k = 0{,}017128, \quad (\textit{Hayford})\ k = 0{,}017126,$$
$$(\textit{Helmert})\ k = 0{,}017126$$

folgt, welche Werte gegenüber dem durch rein astronomische Daten bestimmten

$$k = 0{,}017202$$

Fehler von 0,43—0,44 % bedingen.

II. Genauigkeitsgrad des Newtonschen Gesetzes aus der Bestimmung der Massenfaktoren.[22])

5. Masse der Planeten aus Mondelongationen. Die erste Massenbestimmung von Planeten gelang *Newton*[23]) bei jenen (Erde, Jupiter und Saturn), die bei ihrer Umlaufsbewegung um die Sonne von einem oder mehreren Monden begleitet sind. Sie erfolgte hier aus dem Vergleiche der Anziehungskraft, die die Sonne auf die Planeten ausübt, mit der zwischen ihnen und den Monden wirksamen. Bezeichnet man mit P_i die Masse eines Planeten, ausgedrückt in der Einheit der Sonnenmasse, $S = 1$, mit M_k die eines seiner Monde, ausgedrückt wieder in der Einheit der Planetenmasse (speziell M die Masse des Erdmondes), seien ferner T_i und τ_k die Umlaufszeiten des Planeten um die Sonne und die der Monde um den Planeten, endlich D_i und d_k die mittleren Entfernungen Planet—Sonne sowie Mond—Planet, und

22) Über die allgemeine Frage nach der Abhängigkeit der Anziehung von der Masse vgl. den Artikel von *J. Zenneck,* Encykl. V 2, Nr. **11—14**, p. 37 ff. In ihm wird der Einwand von *Vicaire,* Paris C. R. 1874, p. 790—794, besprochen. Nach ihm soll die Anziehung K zwischen den zwei Massenteilchen m_1 und m_2 als homogene Funktion von m_1 und m_2 in der Form $Km_1 m_2 = m_1^k f\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ gesetzt werden und gilt daher, wenn man f in eine *Taylor*sche Reihe entwickelt, nur in erster Annäherung $Km_1 m_2 = m_1^{k-1} m_2 f'(0)$. *Bessel* wiederum (Untersuchungen des Teiles planetarischer Störungen, welche aus der Bewegung der Sonne entstehen, Berl. Abh. 1824 = Ges. Abh. 1, p. 84) stellt eine Reihe von Bedingungsgleichungen auf, denen die Massenfaktoren im Anziehungsgesetz genügen müssen, um der Erfahrung und dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht zu widersprechen. Er beweist, daß man diesen Gleichungen auch noch durch andere Beziehungen zwischen m_1 und m_2 als gerade deren Produkt genügen kann. Nach der von *Mach* (Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig 1888, II. Kap. § 5: Kritik des Massenbegriffes) gegebenen Definition der Masse als Verhältnis zwischen Beschleunigung und Kraft sind jedoch beide Einwendungen belanglos. Über die Unterscheidung zwischen träger und gravitierender Masse, d. h. der Masse als Trägheits- und Anziehungskoeffizient, und der neuen Äquivalenzannahme *Einsteins* vgl. die Beilage von *Kottler*.

23) *Newton,* Principia, lib. 3, prop. 8, coroll. 2.

R_i der Äquatorhalbmesser des Planeten, so ist genähert nach dem dritten *Kepler*schen Gesetz, d. i. mit Vernachlässigung der Massenkorrektionen $\sqrt{S + P_i}$ und $\sqrt{P_i + M_k}$,

$$(11) \qquad 1 : P_i = \left(\frac{\tau_k}{T_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_i}{d_k}\right)^3.$$

Newton gelangt auf Grund dieser Näherungsformel zu den Werten

Masse der Erde $= 1 : 193758$,
Masse des Jupiter $= 1 : \quad 1067$,
Masse des Saturn $= 1 : \quad 3021$.

Die strenge Formel für P_i hat *Bessel*[24]) aufgestellt. Sie berücksichtigt ebenso die *Newton*sche Massenkorrektion im Ausdrucke für das dritte *Kepler*sche Gesetz, wie die ellipsoidische Gestalt des Planeten, und lautet:

$$(11\text{a}) \quad 1 : P_i = \left(\frac{\tau_k}{T_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_i}{d_k}\right)^3 \cdot \frac{1 + M_k}{1 + \Sigma M_k} \cdot \left[1 + \left(\frac{R_i}{d_k}\right)^2 \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\lambda_i\right)\right] \cdot$$

Für die Erde selbst deckt sich diese Methode der Massenbestimmung mit der Vergleichung der Fallbeschleunigung schwerer Körper auf ihrer Oberfläche und der Beschleunigung, welche sie (besser der Schwerpunkt von Mond und Erde) durch die Sonne erleidet, das ist nichts anderes als Gl. (8a), wenn in ihr die Gravitationskonstante k_1^2 durch

$$k_1^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 (S + E)}$$

ersetzt wird. Damit wird, wenn noch $a = R_a : p_\odot$ angenommen wird, mit Vernachlässigung von E gegen $S = 1$

$$(8\text{b}) \qquad \frac{E}{S} = E = \frac{G_a T^2 (1 + \beta - \lambda)}{4\pi^2 R_a} p_\odot^3.$$

Es zeigt sich, daß die Masse der Erde (bzw. Erde allein) hauptsächlich von der Annahme über die Sonnenparallaxe $p_\odot$ abhängt, so daß diese Gleichung[25]) mehr zur Bestimmung dieser Größe aus der anderweitig abzuleitenden Erdmasse verwendet wird. Es fanden:

$$(12) \quad \begin{array}{lll} \textit{U. J. Leverrier}^{26)}\text{:} & E = 44{,}318 \cdot 10^{-10} p_\odot^3, & p_\odot = 608''\,79 \sqrt[3]{E}, \\ \textit{F. Tisserand}^{27)}\text{:} & = 44{,}171 \cdot 10^{-10} p_\odot^3, & = 609''\,49 \sqrt[3]{E}, \\ \textit{S. Newcomb}^{28)}\text{:} & = 44{,}162 \cdot 10^{-10} p_\odot^3, & = 609''\,51 \sqrt[3]{E} \end{array}$$

---

24) *F. W. Bessel,* Bestimmung der Masse des Jupiter, Astr. Unters. 2 (1842) = Ges. Abh. 3, p. 348 und Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 22.

25) *S. Newcomb,* Fund. const., p. 123 und Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 9b und VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 15.

26) Paris C. R. 75 (1872), p. 165.

27) *F. Tisserand,* Resumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du soleil, Paris. Obs. Mém. 16 (1882).

28) *S. Newcomb,* Fund. const., p. 100 u. 194.

und daraus mit $p_\odot = 8{,}800''$ und Berücksichtigung der Masse des Mondes zu $M = \frac{E}{81{,}53}$

$$1 : E = 327100, \quad = 328190, \quad = 328250$$

gegenüber dem von der internationalen Konferenz in Paris 1896 akzeptierten Wert 1 : 329390.[29]) Der große Unterschied des *Newton*schen Resultates (1 : 193758) rührt davon her, daß *Newton* bei seiner Rechnung den Parallaxenwert $p_\odot = 10{,}5''$ benutzt.

Um ein zutreffendes Bild über die bei diesen Berechnungen erzielte Genauigkeit zu erlangen, seien im folgenden neben den von der internationalen Konferenz in Paris 1896 angenommenen Werten für die Massen der Planeten, die als Mittelwerte aller vorher durchgeführten Bestimmungen angesehen werden können, einige neueren Datums angeführt.

Jupiter	1 : 1047,355	Paris. Conf. internat. 1896.
	1 : 1047,30	*Cookson*, Cape Obs. Ann. (12) 2 (1902).
Saturn	1 : 3501,6	Paris. Conf. intern. 1896.
	1 : 3493,3	*H. Struve*, Pulk. Obs. 11 (1898).
	1 : 3492,1	*H. Struve*, Astr. Nachr. 162 (1903).
Uranus	1 : 22869	Paris. Conf. intern. 1896.
	1 : 23383	*O. Bergstrand*, Upsala Nova acta 3 (1904).
Neptun	1 : 19700	Paris. Conf. intern. 1896.
	1 : 18445	*J. J. See*, Astr. Nachr. 153 (1900).
Mars	1 : 3093500	Paris. Conf. intern. 1896 = *A. Hall*, Wash. Obs. 1878.
	1 : 3090153	*H. Struve*, St. Petersb. Mém. 8 (1899).

6. Masse der Planeten aus Störungen von Planeten. Schwieriger gestaltet sich das Problem der Massenbestimmung der Planeten aus ihren gegenseitigen sowie aus den Störungen, die sie auf die kleinen Planeten ausüben. Der Weg für diese Berechnung besteht darin, mit genäherten Massenwerten die Störungen zu rechnen und sodann die gestörten Koordinaten mit den aus den tatsächlichen Beobachtungen am Himmel sich ergebenden Positionen der Planeten zu vergleichen. Die auftretenden Differenzen (Beob.-Rechnung) dienen zur Verbesserung der approximativ angenommenen Massenwerte.

Angewendet wurde diese Methode zunächst bei den oberen Planeten, von Jupiter an, aus ihren gegenseitigen Störungen, dann zur speziellen Ableitung der Masse des Jupiter aus den von ihm auf die kleinen Planeten ausgeübten Störungen. Hierher ist auch zu zählen

29) Hier bedeutet in Gl. 12 E die Masse der Erde allein; will man die des Mondes einschließen, so ändert sich bei der Annahme $E = 81{,}53\,M$ die Konstante in 606″33, 607″00, 607″04 gegenüber dem von *Bauschinger* (a. a. O. Nr. 15) errechneten Wert 607″02.

die Berechnung der Masse von Erde und Mond aus den Störungen des Planeten Eros.[30]) Endlich sind noch zu erwähnen die berühmten, von *Leverrier*[31]) aufgestellten kritischen Gleichungen, die die Massen der vier inneren Planeten, Merkur, Venus, Erde und Mars einerseits und außerdem die säkularen Störungen ihrer Bahnelemente, Knotenlänge und Bahnneigung, Perihellänge und Exzentrizität als Unbekannte enthalten. Es zeigte sich das eigentümliche Resultat, daß man ihnen nicht vollständig genügen kann, ohne daß Fehler übrigbleiben, die auf verschiedene Anomalien in den Bewegungen dieser Planeten hinweisen. Nach *U. J. Leverrier* befaßten sich *F. Tisserand*[27]), *J. Bauschinger*[32]), *W. Harkness*[33]), *S. Newcomb*[34]), *P. Harzer*[35]), *A. Hall*[36]) mit ihnen, doch stets mit dem gleichen negativen Erfolg.

Bestimmungen der Jupitermasse aus den Störungen der kleinen Planeten sind, abgesehen von einigen älteren Rechnungen, von *Nicolai* (1823, Planet Juno) und *Encke* (1826, Planet Vesta) nur zwei der neueren Zeit angehörige erwähnenswert, Planet Themis durch *F. Krueger*[37]) und Polyhymnia durch *S. Newcomb.*[38])

Einzelne numerische Angaben sind:

Jupiter	1 : 1047,54	*F. Krueger* (Planet Themis, 1872).
	1 : 1047,34	*S. Newcomb* (Planet Polyhymnia, 1894).
	1 : 1047,38	*F. G. Hill* (Planet Saturn, 1895).
Saturn	1 : 3529,6	*Leverrier* (Planet Jupiter, 1876).
Uranus	1 : 22000	*S. Newcomb* (Planet Neptun, 1895).
Neptun	1 : 19700	*S. Newcomb* (Planet Uranus, 1893).
Mars	1 : 2994710	*Leverrier* (Planet Erde, 1858).
	1 : 2812526	*Leverrier* (Planet Jupiter, 1876).

30) *G. Witt,* Über die Notwendigkeit einer Verbesserung der Masse des Systems Erde—Mond, Astr. Ges. Vjs. 43 (1908), p. 295.

31) *Leverrier,* Théorie et tables du mouvement de Mercure, Paris. Obs. Ann. 5 (1850) und de Venus, ebenda 6 (1861).

32) *J. Bauschinger,* Untersuch. über die Bewegung des Planeten Merkur, München 1884, sowie Schlußdarstellung in Encykl. VI 2, 17, Nr. 23.

33) *W. Harkness,* On the solar parallax and its related constants, Wash. Obs. App. 3 (1885).

34) *S. Newcomb,* Discussion and results of observations of transits of Mercury, Wash. Astr. pap. 1 (1882), und The Fund. const., Wash. 1896.

35) *P. Harzer,* Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten, Preisschrift. Jabl.-Ges., Leipzig 1895.

36) *A. Hall,* Note on the Masses of Mercury, Venus and Earth, Astr. J. 24 (1905), p. 164.

37) *F. Krueger,* Untersuchungen über die Bahn des Planeten Themis, Helsingfors. Finn. Soc. Abh. 1873.

38) *S. Newcomb,* On the elements of (33) Polyhymnia and the mass of Jupiter, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 130.

Erde + Mond	1 : 325700	*F. Tisserand* (Neureduktion der *Leverrier*schen Gleichung, 1881).
	1 : 327920	*G. Witt* (Planet Eros, 1908).
Venus	1 : 400246	*Leverrier* (Planet Erde, 1858).
	1 : 412550	*Leverrier* (Planet Mars, 1861).
	1 : 425500	*F. Tisserand* (aus der Variation der Schiefe der Ekliptik, 1881).
	1 : 408000	Paris. Conf. intern. 1896.
Merkur	1 : 5310000	*Leverrier* (Planet Venus, 1861).
	1 : 4316547	*Leverrier* (Planet Mars, 1861).
	1 : 7100000 1 : 3800000	*F. Tisserand,* Zwei Grenzwerte aus den *Leverrier*schen Gleichungen, 1881.
	1 : 6000000	Paris. Conf. intern. 1896.

Was schließlich die Gruppe der kleinen Planeten anlangt, so ist klar, daß wegen der Kleinheit ihrer Einzelmassen und wohl auch ihrer Gesamtmasse deren direkte Bestimmung aus irgendwelchen Störungen auf andere Planeten oder aus ihren gegenseitigen Störungen fast ganz ausgeschlossen ist. Einen Versuch in dieser Richtung bedeuten die Rechnungen *Harzers*[39]), welcher in die *Leverrier*schen Gleichungen unter Einführung der neuen Reduktionswerte von *Newcomb* noch die Gesamtmasse der kleinen Planeten (sowie eine eventuelle Abplattung der Sonne) als neue Unbekannte einbezieht und durch deren Auflösung

$$1 : 2070000$$

findet. Zu einem wesentlich anderen Resultate, nämlich

$$1 : 296000000,$$

gelangt *J. Bauschinger*[40]) auf Grund eines rein statistischen Verfahrens, in dem er unter der Annahme, daß die Albedo der kleinen Planeten gleich ist dem arithmetischen Mittel der von Mars und Merkur, deren mittlere Radien, sodann deren Gesamtvolumen ($= 1 : 900$ der Erde) und endlich, deren Dichte gleich der der Erde voraussetzend, die Gesamtmasse berechnet.

7. Masse der Planeten aus Kometenstörungen. Hier kommen nur Jupiter und Merkur in Betracht, der erstere wegen seiner großen Masse, durch die er auf die periodischen Kometen von der Umlaufszeit von 5—7 Jahren einwirkt, deren Apheldistanz zwischen 5—6 astro-

39) *P. Harzer,* Fußnote 35, p. 220 ff. Den wesentlich kleineren Wert 1 : 37130000 findet *G. Ravené*, Über die Masse der Asteroiden, Astr. Nachr. 140 (1896), p. 355. Doch vgl. hierzu die Bemerkungen von *P. Harzer,* Astr. Nachr. 141 (1896), p. 39, sowie *A. v. Brunn*, Über die Masse des Planetoidenringes, Danzig Naturf. Gesellsch. 12 (1910).

40) *J. Bauschinger,* Tabellen zur Geschichte und Statistik der kleinen Planeten, Berl. Rechen Inst. Veröff. 16 (1901).

nomische Einheiten gerade in seine Wirkungssphäre fällt, und der zweite nur in betreff des *Encke*schen Kometen.

Die Jupitermasse wurde berechnet von *Axel Möller*[41]) aus den Störungen des *Faye*schen Kometen ($T = 7{,}44$ Jahre, $a(1+e) = 5{,}93$) und von *E. v. Härdtl*[42]) aus denen des *Winneke*schen Kometen ($T = 5{,}62$ Jahre, $a(1+e) = 5{,}55$) und gab die zwei Werte

$$1:1047{,}788 \pm 0{,}185 \quad \text{bzw.} \quad 1:1047{,}175 \pm 0{,}014.$$

Die Versuche, aus den Störungen des *Encke*schen Kometen die Masse des Merkurs zu finden, führten zu keinem genauen Ergebnis. *Encke*[43]) gelangt aus seinen, die Beobachtungen des Kometen von 1818—1848 umfassenden Rechnungen zu den stark divergierenden Werten:

$$1:3200448 \quad \text{und} \quad 1:10252900$$

mit $1:4878172$ als dem wahrscheinlichsten Mittelwert, *E. v. Asten*[44]) wieder aus den Erscheinungen (1818—1875) während der in den Zeiten 1835 August, 1848 November und 1858 Oktober bemerkenswerte Annäherungen an Merkur stattfanden, zu dem mittleren Werte:

$$1:7636400,$$

endlich *O. Backlund*[45]) zu dem abermals stark davon abweichenden Wert

$$1:2668700.$$

Eine Neureduktion aller Beobachtungen des Kometen und eine Neuberechnung der Störungen[46]) führte zu

$1:9647000$ aus den Erscheinungen 1819—1858,
$1:9745000$ „ „ „ 1878—1891.

wobei die Störungen in der mittleren Anomalie

41) *A. Möller,* Bericht über die Resultate einer neuen Berechnung der Elemente des *Faye*schen Kometen, Astr. Ges. Vjs. 7 (1872), p. 85.

42) *E. von Härdtl*, Die Bahn des periodischen Kometen von *Winneke* in den Jahren 1858—1886 nebst einer neuen Bestimmung der Jupitermasse, Wien. Denkschr. 55 (1888), p. 215 und 56 (1889), p. 150.

43) *J. F. Encke,* Über den Kometen von *Pons,* Berl. Abh. 1842—1857 = Ges. Werke 1, p. 23—52.

44) *E. v. Asten,* Untersuchungen über die Theorie des *Encke*schen Kometen, I. Teil: St. Pétersb. Mém. 19 (1871); II. Teil: Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875, ebenda 26 (1878).

45) *O. Backlund,* Untersuchungen über die Bewegung des Kometen *Encke* (1865—1881), drei Abh. in St. Péterb. Mem. 1881—1886.

46) *O. Backlund,* Rechnungen und Untersuchungen über den *Encke*schen Kometen, fünf Abh. St. Pétersb. 1892—1894; ferner der zusammenfassende Bericht, Sur la masse de la planète Mercure et sur l'accélération du mouvement moyen de la comète d'*Encke*, Par. Bull. astr. 11 (1894), p. 473.

zwischen	1819—1842	den	Betrag	von	$+ 3' 46''$,
„	1842—1858	„	„	„	$+ 8' 49''$,
„	1878—1891	„	„	„	$+ 0' 59''$

erreichen, so daß die Genauigkeit der Berechnung der Merkurmasse aus den älteren Erscheinungen trotz der schlechteren Beobachtungen die aus den neueren überwiegt. *Backlund* weist darauf hin, daß je nach dem Aussehen des Kometen in verschiedenen Abständen von der Sonne und je nach der verschiedenen Stärke der benutzten optischen Instrumente systematische Unterschiede zwischen den Beobachtungen entstehen, die es erklärlich machen, daß es bisher noch nicht gelungen ist, sämtliche selbst in einer Erscheinung beobachteten Positionen des Kometen in befriedigender Weise darzustellen.

E. v. Härdtl[42]) hat die Masse des Merkur aus den Störungen des *Winnekes*chen Kometen in den Erscheinungen 1858, 1869, 1875 und 1886 gleichzeitig mit der Jupitermasse berechnet und zu

$$1:5012842 \pm 687873$$

gefunden. Er geht dabei von dem Näherungswerte $1:5205000$ aus und leitet deren Korrektion zu $+ 0{,}0383331 \pm 0{,}1679300$ ab, die zeigt, daß ihr wahrscheinlicher Fehler größer ist als die Korrektion selbst, so daß ihm die erhaltene Zahl von sehr problematischem Wert erscheint. Dagegen hält er an dem abgerundeten Wert $1:5000000$ fest, indem er nachweist, daß weder die größte von *v. Asten* gefundene Zahl $1:2400000$, noch dessen kleinste $1:11760000$, selbst wenn man größere Korrektionen der Massen von Erde, Venus, Mars und Jupiter zuläßt und in den Störungsrechnungen etwaige Unsicherheiten nicht ausschließt, zu befriedigenden Darstellungen der Beobachtungen des Kometen führen. Es ist dieses Ergebnis für ihn Veranlassung, die Rechnungen von *v. Asten* und *Backlund* zu revidieren. Und da zeigt sich ihm das Resultat, daß, wenn man in deren Rechnungen, die als Unbekannte die folgenden Größen enthalten: ΔM_0 Korrektion der mittleren Anomalie des Kometen, $\Delta\mu$ die der mittleren Bewegung, $\Delta\mu'$ die der angenommenen Beschleunigung, und Δm_1, Δm_2 und Δm_3 die Massenkorrektionen von Jupiter, Erde und Merkur, — bloß die Größen $\Delta\mu$ und Δm_3 (Merkur) beibehält, man zu

$$1:5648600 \pm 2000$$

gelangt und daß, wenn man das gleiche Verfahren mit den *Backlund*schen Gleichungen ausführt, zu dem neuen hiermit in überraschender Übereinstimmung stehenden Werte

$$1:5669700 \pm 60000$$

kommt. Es unterliegt daher fast keinem Zweifel, daß die Schwierigkeit in der Bestimmung der Merkurmasse aus den Störungen des *Encke*schen Kometen einzig in der gleichzeitigen Berechnung der unbekannten und, wie man heute weiß, keineswegs konstanten, sondern diskontinuierlich-veränderlichen Akzeleration seiner mittleren Bewegung liegt. Diese Schwierigkeit, d. i. die Tatsache, daß die Kometen in ihrer Bewegung sekundären Kraftwirkungen ausgesetzt sind, macht die Massenbestimmung aus ihren Störungen überhaupt fraglich.

8. Masse des Erdmondes. a) *Ebbe und Fluterscheinungen:* Die erste Massenbestimmung des Erdmondes führte *Newton*[47]) durch. Aus der störenden Kraft, die die Sonne auf die Bewegung des Mondes ausübt, und die er in der Form $\frac{\tau^2 g}{T^2}$ in Einheiten der Schwerkraft ausgedrückt ansetzt, berechnet er zunächst durch Division durch 60^3, entsprechend der Annahme, daß die Distanz des Mondes von der Erde 60 Erdhalbmesser zählt, die störende Kraft der Sonne auf einen Punkt der Erdoberfläche und identifiziert sie mit ihrer „fluterzeugenden" Kraft, $K_\odot$, für die damit folgt

$$K_\odot = \frac{\tau^2 g}{T^2 60^3}.$$

Die Höhe der Sonnenflut, $h_\odot$, findet er sodann aus der Überlegung, daß die Kraft $K_\odot$ die Höhe der Flut in dem gleichen Maße erzeuge, wie die Fliehkraft die Ausbauchung der Erde am Äquator oder deren Abplattung an den Polen bewirke. Bezeichnet daher, wie schon oben, λ das Verhältnis der Fliehkraft zur Schwere, α die Abplattung der Erde, so wird

$$h_\odot = \frac{\tau^2 g}{T^2 60^3} \cdot \frac{\alpha R}{\lambda g}$$

oder, wenn man nach dem dritten *Kepler*schen Gesetz die Umlaufszeiten τ (des Mondes um die Erde) und T (der Erde um die Sonne) durch

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k^2 E}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k^2 S}$$

ersetzt,
$$K_\odot = \frac{S}{E} \cdot \frac{d^3}{a^3} \cdot \frac{g}{60^3}, \quad h_\odot = \frac{S}{E} \cdot \frac{d^3}{a^3} \cdot \frac{1}{60^3} \cdot \frac{\alpha R}{\lambda},$$

und der letzte Ausdruck ist, abgesehen von dem Zahlenfaktor $\frac{\alpha}{\lambda}$, der ohnehin nur wenig von 1 verschieden ist, mit dem aus der Gleichgewichtstheorie[48]) folgenden identisch.

Die fluterzeugende Kraft des Mondes, $K_☾$, leitet er aus dem Verhältnis der Hochflut zur Nippflut ab, für die er aus Beobachtungen

47) *Newton*, Principia, lib. 1, prop. 66 corr. 19 und lib. 3, prop. 24, 34 und 37.

48) *G. H. Darwin* und *S. S. Hough*, Bewegung der Hydrosphäre, Encykl. VI 1, 6, Nr. 3.

an der Mündung des Avonflusses unterhalb Bristol $\frac{9}{5}$ annimmt,

$$\frac{K_☾ + K_\odot}{K_☾ - K_\odot} = \frac{9}{5}$$

und nach Anbringung der Korrektionsfaktoren[49])

$$\frac{c_1 K_☾ - K_\odot \cos 37^0}{c_2 \cos 22^0 13' \cdot K_☾ - K_\odot \cos 37^0} = \frac{9}{5},$$

woraus
$$K_☾ = 4{,}483 K_\odot$$

und schließlich die Masse des Mondes folgt

$$M = E : 39{,}8.$$

Wenn man bloß die halbtägigen Gezeiten in Betracht zieht, so gibt die Gleichgewichtstheorie für die Höhe der Fluten

$$(13) \quad \begin{aligned} &\text{durch die Sonne} \quad h_\odot = \frac{3}{4}\frac{K^2 S}{a^3} R^2 \cos^2\delta_\odot \cos^2\varphi \cos 2(\theta - \alpha_\odot), \\ &\text{durch den Mond} \quad h_☾ = \frac{3}{4}\frac{K^2 M}{d^3} R^2 \cos^2\delta_☾ \cos^2\varphi \cos 2(\theta - \alpha_☾). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gelten für eine ganz flüssige Erde. Wird angenommen, daß die Erde aus einem festen Kerne von der Dichte ϱ_m bestehe, den eine Wassermasse von der Dichte ϱ_0 ganz bedecke, so kommt als

49) Diese Korrektionsfaktoren sind: 1. an Stelle $K_\odot$ ist zu setzen $K_\odot \cos 37^0$, entsprechend der Anschauung, daß die Hoch- und Nippfluten nicht sofort eintreten, wenn Mond und Sonne in Opposition oder Konjunktion zueinander stehen, sondern erst dann, wenn sie beiläufig um $18{,}5^0$ voneinander entfernt stehen. Wie Sommer und Winter ihre größte Macht nicht direkt in den Solstitien, sondern erst dann äußern, wenn die Sonne um etwa ein Zehntel des Kreises von ihnen entfernt ist, ebenso findet die größte Flut des Meeres nach dem Durchgang des Mondes durch den Meridian des Ortes statt, wenn Mond und Sonne um ein Zehntel des ganzen Zwischenraumes zweier aufeinanderfolgenden Fluten voneinander entfernt stehen. Dieser Abstand beträgt $18{;}5^0$, und im Verhältnisse des Kosinus dieses doppelten Abstandes, $\cos 37^0$, ist die Kraft der Sonne, $K_\odot$, zu verkleinern. 2. Ebenso ist im Nenner statt $K_☾$ zu setzen $K_☾ \cos 22^0 13'$, da in den Quadraturen die mittlere Deklination des Mondes $22^0 13'$ beträgt. 3. Endlich ist noch auf die Variation der Monddistanz von der Erde, d, Rücksicht zu nehmen. Ist e die Exzentrizität der Mondbahn, so ist zu $K_☾$ als Faktor hinzuzufügen:

$$\text{im Zähler:} \quad \left[\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 18)}\right]^3 = c_1,$$

$$\text{im Nenner:} \quad \left[\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 18)}\right]^3 = c_2,$$

wobei $1 - \frac{e^2}{4}$ aus $\sqrt{(1-e^2)} : \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-e^2})$ enstanden ist. Doch bestimmt *Newton* die Exzentrizität e aus der Annahme $\sqrt{1-e^2} = \frac{69}{70}$ und somit genähert $e^2 = 1 : 35$.

ein die Fluthöhen vergrößender Faktor

$$F_1 = 1 : \left(1 - \frac{3\varrho_0}{5\varrho_m}\right)$$

hinzu. Berücksichtigt man auch noch die Tiefe des Meeres h, so tritt nach der *Laplace*schen Bewegungs- oder der *Airy*schen Kanaltheorie als neuer Faktor

$$F_2 = 1 : \left[\frac{n^2 R^2}{gh} - 1\right] \text{ }^{50)}$$

auf, indem n die scheinbare Winkelgeschwindigkeit von Sonne oder Mond um die Erde bedeutet und daher für beide Körper nicht den gleichen Wert hat. (Es ist genähert $\frac{n_\odot}{n_☾} = 30 : 29$.) Durch diesen Faktor werden die zwei Fluthöhen $h_\odot$ und $h_☾$ in verschiedener Art beeinflußt, und man muß daher, wenn man aus dem Verhältnis der Springfluten $h_\odot + h_☾$ zu den Nippfluten $h_☾ - h_\odot$ die Größe $h_☾ : h_\odot$ und daraus die Masse des Mondes rechnen will, dessen Wirkung aus den beiden h eliminieren.[51]) *Laplace*[52]) erreicht dies durch Diskussion der Höhen h für verschiedene Deklinationen für Mond und Sonne und erhält so für die Mondmasse den Wert

$$1 : 74{,}9.$$

Nach seiner Methode fanden andere Rechner die noch immer weit voneinander abweichenden Werte

$$1 : 63 \quad \text{bis} \quad 1 : 88.$$

Auch die harmonische Analyse, die *W. Thomson* (*Lord Kelvin*)[53]) 1866 zur Vorausberechnung der Fluthöhen in die Theorie einführte, brachte keine wesentliche Besserung. Auf ihrer Grundlage gelangt *Ferrel*[54]) zu den Grenzwerten

$$1 : 68 - 1 : 88,$$

und endlich *Harkness*[55]), der auch eine Zusammenstellung aller bisher gefundenen Zahlen gibt, zu

$$1 : 78{,}653 \pm 1{,}374.$$

---

50) Über die Ableitung aller dieser Formeln s. den Artikel von *G. H. Darwin* und *S. Hough,* Encykl. VI 1, 6, Nr. 5—11.

51) *Airy* findet in „Tides and waves", Encykl. Metrop. 1842, § 455, daß, wenn man die Tiefe des Meeres zu 4 englischen Meilen annimmt, man die Masse des Mondes um ein Zehntel, bei 8 Meilen Tiefe um ein Sechstel zu groß fände.

52) *Laplace,* Méc. cél., 5. livre 13, chap. 3, § 10.

53) Zur Literatur über die harmonische Analyse vgl. Fußnote 32 in dem Encykl.-Art. VI 1, 6 (*G. H. Darwin*).

54) *W. Ferrel,* On the Moons mass, deduced from a discussion of the tides of Boston harbor, U. S. Coast. Surv. Rep. 1870, App. 20 und Tidal Researches, ebenda 1874, dann 1878, App. 11 und 1882, App. 17.

55) Vgl. Fußn. 33, p. 112.

Dazu bemerkt *G. H. Darwin*[56]), daß die allgemeine Tendenz aller dieser Bestimmungen dahingehe, der Mondmasse einen zu großen Wert zuzuschreiben.

b) *Mondmasse aus der Präzessions- und Nutationstheorie:* Die theoretischen Werte für die Konstanten der Präzession und Nutation sind[57]):

$$P_{\odot} = \frac{3}{2} \cdot \frac{K^2 S}{a^3} \cdot \frac{C-A}{C} \cos\varepsilon \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right),$$

$$(14) \qquad P_{☾} = \frac{3}{2} \cdot \frac{K^2 M}{d^3} \cdot \frac{C-A}{C} \cos\varepsilon \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{3}{2} i_1^2\right),$$

$$N = \frac{3}{2} \cdot \frac{K^2 M}{d^3} \cdot \frac{C-A}{C} \cos\varepsilon \cos\Omega_{☾} \cdot \frac{i_1}{\omega} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 - \frac{5}{8} i_1^2\right),$$

Ausdrücke, in denen neben den schon bekannten Zeichen C, A die Hauptträgheitsmomente der Erde, e die Exzentrizität der Erdbahn, e_1 die der Mondbahn, i_1 deren Neigung, $\Omega_{☾}$ deren Knotenlänge, ω die Umlaufsgeschwindigkeit des Mondknotens und ε die Schiefe der Ekliptik bedeuten. Die Beobachtungen geben die Summe $P_{\odot} + P_{☾} = l$, als die luni-solare Präzession in Länge und N als Nutation in Schiefe. Aus letzterer berechnet man zuerst den unbekannten Faktor $\frac{C-A}{C}$, die sogenannte „mechanische Elliptizität" der Erde, mit deren Kenntnis sich sodann die Summe l in ihre zwei Teile $P_{\odot}$ und $P_{☾}$ zerlegen läßt, deren Division endlich zur Bestimmung von $\frac{M}{S}$ führt. *Oppolzer* findet aus dem *Bessel*schen Wert der allgemeinen Präzession $l = 5023{,}572''$, dem *Nyrén*schen für die Nutation $N = 9{,}2365''$ und der *Leverrier*schen Erdmasse $E = 1 : 330000$

$$\frac{C-A}{C} = 1 : 306{,}63, \quad M : E = 1 : 80{,}1.$$

Aus den *Newcomb*schen[58]) Werten $l = 5036{,}84''$, $N = 9{,}210''$ und $E = 1 : 328016$ dagegen folgt

$$\frac{C-A}{C} = 1 : 305{,}52, \quad M : E = 1 : 81{,}58 \pm 0{,}20.$$

c) *Mondmasse aus Ungleichheiten der Sonnenbewegung:* Die Erde ist in ihrem Umlaufe um die Sonne einer kleinen Störung ausgesetzt, deren Ursache in der Tatsache liegt, daß nicht ihr Mittelpunkt, sondern der Schwerpunkt des Systems Mond-Erde die Bahn um die

56) Encykl. VI 1, 6, Nr. 36.

57) Über die Abteilung dieser Formeln vgl. insbesondere *Klein* und *Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Abschn. VIII; *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung 1, 2. Aufl., § 5; *Tisserand*, Méc. cél. 2, chap. 22—27; *Bauschinger*, Bahnbestimmung, Abschn. V; sowie auch Encykl. VI 2, 17, Nr. 9.

58) *S. Newcomb*, Fund. const., p. 133.

Sonne beschreibt. Diese ist, abgesehen von anderweitigen sekundären Wirkungen, eine Ellipse, deren lineare Dimension nur von dem Massenverhältnis beider abhängt. Indem man die Koordinaten der Sonne oder der anderen Himmelskörper auf ein System bezieht, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der ruhend gedachten Erde ist, muß sich in ihnen eine periodisch verlaufende Ungleichheit zeigen, die der wechselnden Stellung dieses Schwerpunktes der Sonne gegenüber entspricht. Zu ihrer Ermittelung sind am besten Sonnenbeobachtungen geeignet, die sich über viele synodische Mondumläufe erstrecken müssen. *Leverrier*[59]) bestimmte ihre Amplitude zu 6,50″ aus Sonnenbeobachtungen von Greenwich (1816—1850), Paris (1804—1845), Königsberg (1814 bis 1830), *Newcomb*[60]) zu 6,53″ ± 0,03″ aus Beobachtungen in Greenwich (1851—1864) und Washington (1861—1865). Die große Genauigkeit der modernen Meridian- und Heliometerbeobachtungen erzielte es, daß man statt der Sonne auch Positionsbestimmungen der kleinen Planeten unter der Voraussetzung ihrer besonderen Erdnähe in gleicher Art zu diesem Zwecke verwenden konnte. Dies führten *D. Gill*[61]) durch unter Benutzung von Heliometerbeobachtungen der Planeten Iris, Victoria und Sappho, ferner *A. R. Hinks*[62]) aus photographischen des Planeten Eros (1900—1901).

Bezeichnen $L_\odot$ und $L_☾$ Länge von Sonne und Mond, $\beta_☾$ dessen Breite, so ist der theoretische Wert dieser Störung in Länge (die Breitenstörung kommt, da sie die zu große Periode eines Umlaufes des Mondknotens besitzt, weniger in Betracht)

$$(15) \qquad \Delta L_\odot = \frac{M}{E} \cdot \frac{\sin p_\odot}{\sin p_☾} \cos \beta_☾ \sin (L_☾ - L_\odot),$$

wie man sieht, der unbekannten Größe $M:E$ direkt proportional.[63])

59) *U. J. Leverrier,* Théorie of tables du mouvement apparent du soleil, Paris. Obs. Mém. 4 (1858).

60) *S. Newcomb,* Investigation of the distance of the sun, Wash. Obs. 1865, App. II.

61) *D. Gill,* A determination of the solar parallax and the mass of the moon from heliometer-observations of the minor planets, Iris, Victoria and Sappho, 2 vol. with cooperation of *A. Auwers* and *W. L. Elkin*, Cape Obs. Ann. 6 (1897) und 7 (1896); sowie Remarks on the best method of determining the position of the planets by observations, Lond. Month. Not. 54 (1894), p. 350.

62) *A. R. Hinks,* The mass of the moon derived from the photographic observations of Eros 1900—1901, Lond. Month. Not. 70 (1910), p. 63—75; ferner Conf. astrophotogr. circulaires 1—12, Paris 1900—1907; besonders Circ. 8 und *F. Cohn,* Encykl. VI 2, 5, Nr. 8 und VI, 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 8.

63) Vorerst wurde diese Ungleichheit zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwendet, erst neuestens auch zur Massenbestimmung des Mondes. Vgl. ***Kurt***

Mit dem von *S. Newcomb* akzeptierten Werte 6,465″ als Koeffizienten dieser Störung und der Sonnenparallaxe $p_\odot = 8{,}800''$ sowie der des Mondes $p_☾ = 57'2{,}52''$ folgt

$$M : E = 1 : 82{,}033,$$

während *Gill* und *Hinks* finden:

$$M : E = 1 : 81{,}702 \pm 0{,}141 \quad \text{bzw.} \quad 1 : 81{,}53 \pm 0{,}47.$$

d) *Mondmasse aus der parallaktischen Ungleichheit der Mondbewegung:* In der Bewegung des Mondes tritt ein Störungsglied auf, das von dem Unterschied der Sonnenanziehung auf den Voll- bzw. Neumond herrührt. Da es zumeist zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwertet wird, führt diese Ungleichheit die Bezeichnung „parallaktische" Ungleichheit.[64]) Ihr theoretischer Wert ist

$$\Delta L_☾ = -\frac{E-M}{E+M}\cdot F\cdot\frac{\sin p_\odot}{\sin p_☾}\sin(L_☾ - L_\odot), \tag{16}$$

wo F eine nach $m = \frac{n_\odot}{n_☾}$ fortschreitende Potenzreihe bedeutet. Nach *Newcomb*[65]) ist der Wert der Konstanten

$$\frac{E-M}{E+M}\cdot\frac{\sin p_\odot}{\sin p_☾}F = 124{,}66'',$$

und berücksichtigt man den Wert von $F = 0{,}241010$, so erhält man

$$\frac{E-M}{E+M} = 0{,}9753, \quad \text{d. h.} \quad M : E = 1 : 79{,}9.$$

Es ist klar, selbst abgesehen von sonstigen bei der Bestimmung des Koeffizienten dieser Störung auftretenden Schwierigkeiten, daß diese Ableitung der Mondmasse keineswegs in ihrer Genauigkeit an die beiden vorgenannten heranreicht.

9. Masse der Monde der anderen Planeten. Die Massen der Satelliten der anderen Planeten als der Erde werden aus den säkularen Teilen ihrer gegenseitigen Störungen abgeleitet. Da sie im allgemeinen, wenn man die Verhältniszahl der Masse des Erdmondes 1 : 81 als das Normale ansieht, sehr viel kleiner sind als diese, so sind auch die Störungen recht klein und wachsen nur dadurch bedeutender an, daß zwischen ihren mittleren Bewegungen eigentümliche Kommensurabilitätsverhältnisse bestehen, deren aus ihnen ent-

---

Laves, Der Koeff. der sogenannten lunaren Gleichung der Erdbewegung, Astr. Nachr. 132 (1893), p. 177 und On the determination of the principal term of the nutation, Astr. Journ. 14 (1895), p. 33.

64) *Delaunay,* Theorie du mouvement de la lune 2 (1867), p. 342; *Hansen,* Darlegung, Leipz. Abh. 6 (1862) und Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 17.

65) *S. Newcomb,* Fund. const., p. 190

springenden Librationen gleichzeitig aber der analytischen Theorie vielfache Schwierigkeiten bereiten.

Für den Planeten Jupiter ist die Theorie der vier ersten schon seit *Galilei* bekannten Monde noch am vollständigsten durchgeführt von *Laplace*[66]), dann von *Souillart*[67]) und endlich neuestens von *de Sitter.*[68]) Die von ihnen gefundenen Zahlen sind:

Masse des 1. Mondes	$10^5 \cdot m_1 =$ 1,73281	3,77267	2,60 . . .,
„ „ 2. „	$10^5 \cdot m_2 =$ 2,32355	2,45305	2,31 . . .,
„ „ 3. „	$10^5 \cdot m_3 =$ 8,84972	8,21795	8,04 . . .,
„ „ 4. „	$10^5 \cdot m_4 =$ 4,26591	2,31333	4,24751

in Einheiten der Jupitermasse.[69]) Für den innersten, der Zeit seiner Entdeckung nach (9. September 1892), 5. Mond sowie die anderen vier, noch später aufgefundenen, sind noch nicht genügende Beobachtungsdaten vorhanden, um aus ihnen die Massen ableiten zu können.

Das gleiche gilt auch für die zwei, 1877 von *Asaph Hall* in Washington entdeckten Monde des Mars (Phobos und Deimos) sowie für die vier Monde des Uranus (Ariel, Umbriel, Titania und Oberon). Der Planet Neptun hat nur einen Mond, dessen Masse sich nur aus einer eventuell konstatierten Präzession der Rotationsachse des Planeten berechnen ließe.

Das System des Saturn besteht aus 10 Monden und einem Ringe. Seine Theorie bietet daher noch mehr Schwierigkeiten. Es ist bis heute nicht gelungen, die Bewegungen aller 10 Monde unter ihrer gegenseitigen Anziehung sowie der des Ringes und des stark abgeplatteten Saturnellipsoides zu bestimmen. Im folgenden seien nur neben den Angaben über die Masse des Ringes noch die des größten unter den 10 Monden, „Titan", angeführt, von dem die zahlreichsten Berechnungen vorliegen.

---

66) *Laplace,* Méc. cél., livre 10.

67) *Souillart,* Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter I p., Lond. Astr. Soc. Mem. 45 (1880); II p. Paris. Mém. des sav. étr. 30 (1882); ferner Ergänzungen in Paris. Bull. astr. 11 (1894), p. 145 u. 513.

68) *W. de Sitter,* Over de massas en de baanelementen der Satelliten van Jupiter, Amst. Versl. 16 (1908), p. 579 u. 709.

69) Der große Unterschied in den Angaben über die Massen des 1. und 4. Mondes nach *Laplace* und *Souillart* rührt daher, daß *Laplace* den aus den Verfinsterungen der Monde abgeleiteten Koeffizienten für die Länge des dritten Mondes zu 115,73 annimmt, während *Souillart* ihn nach einer Neubestimmung von *Damoiseau* zu 65,073 ansetzt und so fast auf die Hälfte reduziert. *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, p. 81.

Masse des *Titan:*	1 : 4678	*H. Struve,* Pulkova Obs. (1888).
	1 : 4714	*G. W. Hill,* Astr. Journ. 8 (1888).
	1 : 4500	*A. Hall,* Astr. Journ. 22 (1902).
	1 : 4172	*Eichelberger,* Wash. Observ. (1911).
	1 : 4125	*H. Samter,* Berl. Ber. (1912).
Masse des *Ringes:*	1 : 1118	*Bessel,* Ges. Abh. 1 (1840), p. 160.
	1 : 1960	*M. W. Meyer,* Astr. Nachr. 108 (1884).
	1 : 1000	*Tisserand,* Méc. cél. 4 (1896), p. 103.
	1 : 7092	*A. Hall,* Astr. Journ. 22 (1902).

alle Zahlen, in Einheiten der Saturnmasse.

10. Prüfung der Ergebnisse. Die für die Masse der Planeten mitgeteilten Zahlenwerte geben ein Bild davon, inwieweit die Abhängigkeit der *Newton*schen Gravitationskraft von der Quantität der Masse und ihre Unabhängigkeit von der Qualität als zutreffend angesehen werden kann. Die beste Übereinstimmung zeigt sich beim Planeten Jupiter, was bei der absoluten Größe der von ihm verursachten Störungen nur natürlich ist. Man erhält als Mittelwert[70]):

a) aus den Bewegungen seiner Monde $1:1047{,}3$,
b) aus den Störungen auf andere Planeten $1:1047{,}3$, Diff. $= 0{,}02\,\%$
c) aus den Störungen auf Kometen $1:1047{,}5$.

Weniger gut stimmen die Angaben bei Saturn:

a) aus den Bewegungen seiner Monde $1:3500$,
b) aus den Störungen auf andere Planeten $1:3530$, Diff. $= 0{,}8\,\%$

noch größere Differenzen zeigen sich bei Mars

a) aus den Bewegungen seiner Monde $1:3092000$,
b) aus den Störungen auf andere Planeten $1:2904000$, Diff. $= 6\%$

sowie bei Uranus und Neptun

a) $1:22000$, b) $1:23400$, Diff. $= 6\%$, a) $1:18450$, b) $1:19700$, Diff. $= 6\%$,

ebenso auch beim Erdmonde. Aus den Ebbe- und Fluterscheinungen folgt seine Masse im Mittel zu $1:78$, aus der Präzessionstheorie zu $1:80 - 1:82$, aus den Ungleichheiten der Sonnenbewegung zu $1:81{,}7$, Zahlen, die weit mehr als die für die Jupitermasse angeführten, voneinander abweichen. Doch ist hierbei nicht des Umstandes zu ver-

---

70) Eine vollständige Zusammenstellung aller bisher für die Masse der Planeten abgeleiteten Zahlen findet sich bei *Harkness* (Fußnote 33), p. 33—35; ferner *J. J. See,* On the degree of accuracy attainable in determining the position of *Laplaces* invariable plane, Astr. Nachr. 164 (1903), p. 161; ferner in bezug auf Merkur, Astr. Nachr. 156 (1901), p. 362, und auch 167 (1903), p. 113 und 171 (1906), p. 369, endlich Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. **24** u. **26**.

gessen, daß gerade die Masse des Mondes in inniger Weise mit anderen ebenfalls nur sehr ungenau bekannten Größen, wie der Parallaxe der Sonne oder der Erdmasse, verknüpft ist, so daß es erlaubt sein dürfte, die Differenzen mehr diesem Abhängigkeitsverhältnisse als irgendeiner Verschiedenheit in der Anziehung des Mondes auf Körper verschiedener Qualität zuzuschreiben.

Kommt daher auch die Methode der astronomischen Prüfung der Massen zweier sich anziehender Körper keineswegs an Genauigkeit den physikalischen[71]) gleich —, wie solche schon *Newton* mit Pendeln von verschiedenem Material, ferner *Bessel* nach einem verfeinerten Verfahren mit einer Genauigkeit von 1 : 400% ausgeführt hat, und neuestens von *v. Eötvös*[72]) mit der noch empfindlicheren Drehwage unter Anwendung der verschiedensten Substanzen bis auf 10^{-6}% in der Gravitationskonstanten k unternommen wurden —, so ist doch nicht zu verkennen, daß auch astronomischerseits das Massengesetz als soweit sichergestellt anzusehen ist, daß in den aus der Anziehung berechneten Massen höchstens Fehler bis zu 1 : 50% ihrer Werte vorkommen dürfen.

11. Masse von Doppelsternen. Auch die Massen von Doppelsternen, und zwar sowohl von visuellen wie spektroskopischen, sowie ferner von jenen veränderlichen Sternen, deren Lichtwechsel man auf Verfinsterungserscheinungen zweier umeinander kreisenden Körper zurückführt (photometrische Bedeckungssterne), können berechnet werden. Die Berechnung beruht auf der Annahme, daß die aus deren Bahnbestimmung abgeleitete Anziehungskonstante k mit der in unserem Sonnensystem gültigen ihrem absoluten Betrage nach identisch ist.

Bezeichnen a_1 die große Halbachse der Ellipse, die zwei Doppelsterne umeinander beschreiben, T_1 ihre Umlaufszeit, m_1 und m_2 ihre Massen, so gilt die dem dritten *Kepler*schen Gesetz entsprechende Gleichung

$$\frac{4 a_1^3 \pi^2}{T_1^2} = k^2 (m_1 + m_2).$$

Andererseits hat man für das System Sonne-Erde, mit Vernachlässigung der Erdmasse gegenüber der der Sonne

$$\frac{4 a^3 \pi^2}{T^2} = k^2 S$$

und die Division beider Gleichungen gibt, unter der oben angeführten

71) Referat hierüber *Zenneck,* Encykl. V 1, Nr. 11—13.

72) *v. Eötvös,* Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn 8 (1891), p. 64 und Ann. Phys. 59 (1896), p. 354.

Voraussetzung der Gleichheit der beiden k Werte[73]),

$$\frac{m_1 + m_2}{S} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Diese Gleichung enthält neben der Summe der zwei Massen noch eine Unbekannte, nämlich die Distanz der Sterne von der Sonne oder ihre Parallaxe, deren Kenntnis zur Berechnung von a_1 in derselben Einheit, in der a ausgedrückt wird, notwendig ist. Ist diese bekannt und gleich p'' angenommen und gleicher Art a_1 in Bogensekunden angesetzt, so folgt

$$(17) \qquad \frac{m_1 + m_2}{S} = \left(\frac{a_1''}{p''}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Die aus ihr unter der Annahme $m_1 + m_2 = S$ resultierende Parallaxe

$$p'' = a_1''(T : T_1)^{\frac{2}{3}}$$

wird die hypothetische Parallaxe des Doppelsternes genannt. Tritt außerdem noch, wie beispielsweise bei veränderlichen Eigenbewegungen, die Kenntnis der Bahn jeder der Komponenten hinzu, so gibt der Schwerpunktssatz eine zweite Gleichung, in der das Verhältnis $m_1 : m_2$ vorkommt, und es gestattet dann Gl. (17) eine getrennte Rechnung von $\frac{m_1}{S}$ und $\frac{m_2}{S}$. Bei spektroskopischen Doppelsternen dagegen gibt die Bahnbestimmung nicht die Größe a_1 allein, sondern nur das Produkt $\frac{a_1}{\sin i}$, wenn i der Neigungswinkel der Bahnebene gegen den Visionsradius bedeutet, und die Massengleichung enthält daher eine neue Unbekannte.

Bei veränderlichen Bedeckungssternen gestatten die Beobachtungen aus der Dauer des Lichtwechsels, d. i. der Zeit zwischen den beiden äußeren Berührungen der Körper, gesehen von der Erde aus, ferner aus der Dauer des Minimums als der Zeit zwischen den beiden inneren Berührungen oder aus der Variation der Lichtintensität, sofern sich der Begleiter zur Zeit des Minimums ganz auf den Hauptstern projiziert und dessen Oberfläche in allen ihren Teilen Licht von gleicher Intensität ausstrahlt, eine Berechnung der Radien der beiden als Kugeln angenommenen Körper, R_1 und R_2, im Verhältnis zu a_1 dem Radius ihrer Kreisbahn und damit einen interessanten Schluß[74]) auf ihre mittlere Dichte. Sei diese ϱ, die der Sonne ϱ_1, so ist

$$(18) \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \frac{R^3}{R_1^3 + R_2^3}.$$

---

73) *J. v. Hepperger*, Bahnbestimmung der Doppelsterne und Satelliten, Encykl. VI 2, 11, Nr. 2.

74) Encykl. VI 2 11 (*Hepperger*), Nr. 6.

III. Berechnung des Genauigkeitsgrades für die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes auf Grund der Abhängigkeit von der Entfernung.

12. Berechnung der Fallbeschleunigung auf der Erde aus der Mondbewegung. Schon *Newton* zeigte, wie man aus der Kreisbewegung des Mondes um die Erde die Größe der Schwerebeschleunigung berechnen könne. Die Beschleunigung, unter der diese nämlich vor sich geht, ist gegeben durch

$$4\pi^2 d^3 E : \tau^2 (E + M).$$

Sie gilt für die Entfernung d der beiden Körper, Mond und Erde voneinander. Um sie mit der Beschleunigung der Schwere auf der Erdoberfläche identisch zu machen, hat man sie auf die Entfernung R gleich dem Erdradius zu reduzieren und erhält so

$$g = \frac{4\pi^2 R}{\tau^2} \left(\frac{d}{R}\right)^3 \frac{E}{E+M} = n_1^2 R \left(\frac{d}{R}\right)^3 \cdot \frac{E}{E+M} \cdots,$$

wenn mit $n_1 = \frac{2\pi}{\tau}$ die mittlere Bewegung des Mondes bezeichnet wird. Diese Näherungsgleichung ist noch dahin zu korrigieren, daß ein Glied hinzugefügt wird, das von der störenden Einwirkung der Sonne auf die Bahn des Mondes herrührt. Der Mittelwert dieser Störung ist $\frac{k^2 S d^3}{2 D^3} = \frac{n^2 d^3}{2}$, wenn $n = \frac{k^2 S}{D^3}$ die mittlere Bewegung der Sonne bedeutet, und damit wird nach Reduktion auf die Oberfläche der Erde das Korrektionsglied $= \frac{1}{2} n^2 R \left(\frac{d}{R}\right)^3$, so daß die strengere Gleichung folgt:

$$g = \left(n_1^2 + \frac{1}{2} n^2\right) R \left(\frac{d}{R}\right)^3 \cdot \frac{E}{E+M}.$$

Nunmehr entsteht noch die Frage nach der Bedeutung der Größe g. Offenbar ist hier, sowie Nr. 4 bei der Berechnung der Gravitationskonstanten k (in Dyn) für sie der von der Fliehkraft, d. h. von der Variation der Schwere auf der Erde befreite Teil, zu nehmen. Damit ist

$$g = \frac{g_a}{(1 - \beta + \lambda)}$$

zu setzen, so daß die Schlußgleichung[75])

$$(19) \qquad g_a = \left(n_1^2 + \frac{1}{2} n^2\right) R \left(\frac{d}{R}\right)^3 \frac{E}{E+M} (1 - \beta + \lambda) \ldots$$

---

75) *Helmert* verwendet diese Gleichung (Höhere Geodäsie II, p. 463) zur Berechnung von R. Vgl. auch *F. Cohn,* Encykl. VI 2, 2, Nr. 9b.

lautet. Mit den Zahlen

$$n_1 = 2\pi : 27{,}32166 \qquad n = 2\pi : 365{,}256 \qquad \frac{d}{R} = 60{,}2715$$

$$E : E + M = 81{,}45 : 82{,}45 \qquad \beta = 0{,}005285 \qquad \lambda = 0{,}003467 \text{ und}$$

$$R = 6378200\, m$$

folgt

$$g_a = 9{,}7827\, m,$$

was gegen den *Helmert*schen Wert 9,7805 einen Fehler von 0,22 *mm* $= 0{,}022\,\%$ bedeutet. Hiermit erscheint das Gesetz des Quadrates der Entfernung für die Anziehung für die Distanz Mond—Erde im Vergleiche zu deren Radius mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}$ festgelegt.[76])

13. Theorie der Erdgestalt. Geodätische Messungen auf der Erde lieferten in Bestätigung der *Newton*schen Lehre, daß die Figur der Erde als Folge des Einflusses der zwei auf ihrer Oberfläche wirkenden Hauptkräfte, der Schwere und der Fliehkraft, nicht die einer Kugel, als vielmehr die eines Rotationsellipsoides sein müsse, das Resultat, daß der Erde tatsächlich eine solche Form zuzuschreiben sei bis auf kleine Differenzen (Lotabweichungen als Größen zweiter Ordnung, wenn man die Differenzen zwischen Kugel und Ellipsoid als solche erster Ordnung auffaßt). Von den vielen sich auf diese Messungen stützenden Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids seien hier als die wichtigsten und anerkanntesten erwähnt:

1. Die *Bessel*sche[77]), die $R_a = 6377397\, m \quad R_P = 6356098\, m$ gab, woraus für die Abplattung α nach der Definition folgt:

$$\alpha = (R_a - R_P) : R_a = 1 : 299{,}1529.$$

---

76) *S. Newcomb* (Fund. const., p. 119) meint hierzu: The close agreement between the observed parallaxe of the moon ($d : R$) and that derived from the force of gravitation on the Earth's surface shows that between two distances, one the radius of the Earth and the other the distance of the Moon, the deviation from the law of square can be only a small fraction of the thousandth part, or, we may say — a quantity of the order of the magnitude of the five-thousandth part (0,02 %). Es hängt jedoch der für g_a errechnete Wert hauptsächlich von der Mondparallaxe, $d : R$ ab. Die oben angesetzte Zahl gibt $p_{☾} = 0°57'2''42$. Legt man den *Newcomb*schen Wert $0°57'2''68$ der Rechnung zugrunde, so zeigt sich eine volle Übereinstimmung, aus der folgt, daß der Fehler von 0,02 % nur durch den Unterschied in den Angaben für $p_{☾}$ bedingt ist. Über die Genauigkeit des Wertes der Mondparallaxe $p_{☾}$ vgl. Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 16.

77) *F. W. Bessel,* Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht: Astr. Nachr. 14 (1837), p. 333, 19 (1841), p. 97.

2. Die *Clarke*sche[78]), $R_a = 6378289\ m \quad R_P = 6356515\ m$
$\alpha = 1 : 293{,}465.$

3. Die *Hayford*sche[79]), $R_a = 6378388\ m \quad R_P = 6356909\ m$
$\alpha = 1 : 296{,}96.$

4. Die *Helmert*schen[80]) Mittelwerte,

$$R_a = 6378200 \quad R_P = 6356818 \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : 298{,}3.$$

Diesen Beobachtungsergebnissen stehen die Versuche gegenüber, die Abplattung auch theoretisch zu berechnen. Sie beginnen gleichfalls mit *Newton*, der als erster das unter dem Namen des Problems der Bestimmung der Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse bekannte Problem aufstellte, das seitdem eine der Hauptaufgaben[81]) der theoretischen Astronomie bildet. Seine Lösung erfolgt auf Grundlage der folgenden Annahmen:

1. Die Erde ist eine im Raume frei schwebende Flüssigkeitsmasse.

2. Ihre Teilchen ziehen einander mit einer Kraft an, die dem *Newton*schen Gesetze gehorcht.

3. Sie rotiere wie ein starrer Körper um eine im Raume feste Achse mit konstanter Geschwindigkeit.

Wird dann angenommen, daß die Erde ursprünglich im feurigflüssigen Zustande war, in diesem die dieser Theorie entsprechende Gleichgewichtsform annahm und sie auch bei der späteren Abkühlung und Bildung der Oberflächenkruste beibehielt, so erhält man den gesuchten Zusammenhang zwischen den zwei hier hauptsächlich in Betracht kommenden Größen, der Abplattung der Erde α und dem Verhältnisse zwischen Fliehkraft und Schwere auf ihr, λ.

Newton[82]) findet unter der Voraussetzung einer homogenen Dichteverteilung der Erde

$$\alpha = 5\lambda : 4. \tag{20a}$$

---

78) *A. R. Clarke,* Ordnance trigonometrical survey: London (1858), ferner On the figure of the Earth, London Roy. astr. soc. Mem. 29 (1859); Phil. mag. 6 (1878) und das Lehrbuch der Geodäsie „Geodesy" Oxford (1880).

79) *W. Hayford,* The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States, Washington (1909), ferner: Supplementary investigations, Wash. 1910; vgl. auch *F. R. Helmert,* Über die Genauigkeit der Dimensionen des *Hayford*schen Erdellipsoids, Berl. Ber. 1911, p. 10.

80) *F. R. Helmert,* Die Größe der Erde, Berl. Ber. 1906, p. 525—537.

81) *S. Oppenheim,* Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. Encykl. VI 2, 21.

82) *J. Newton,* Principia: Sektion XII und XIII des ersten und XVIII—XX des zweiten Buches.

Huygens[83]) dagegen, der das Problem nach *Newton* aufgriff, auf Grundlage seiner Auffassung der Gravitation als einer vom Mittelpunkte der Erde ausgehenden und sonst konstanten Kraft,

(20 b) $$\alpha = \lambda : 2.$$

Clairaut[84]) weist nach, daß diese zwei Werte als Grenzfälle anzusehen sind, zwischen denen der wahre Wert der Abplattung der Erde, sowie jeder ellipsoidischen Gleichgewichtsfigur liege, so zwar, daß der *Newton*sche dem Falle einer homogenen Flüssigkeit (ϱ = const.), der *Huygens*sche dagegen dem entspricht, als ob die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre. Es muß daher

$$\tfrac{5}{4}\lambda > \alpha > \tfrac{1}{2}\lambda$$

sein. Inwieweit diese Ungleichheit für jene Planeten, für die λ berechnet werden kann, erfüllt ist, zeigt die folgende Übersicht:

	T = Rotationsdauer	ϱ = Dichte	λ	$\frac{5}{4}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda$	α : Beob.
Erde	23^h56^m	5,56	1 : 288	1 : 230	1 : 576	1 : 298
Mars	24^h37^m	3,99	1 : 217	1 : 174	1 : 434	1 : 230
Jupiter[85])	9^h55^m	1,31	1 : 11,8	1 : 9,4	1 : 23,5	1 : 16
Saturn	14^h29^m	0,72	1 : 6,4	1 : 5,1	1 : 12,8	1 : 10
Sonne	25^d4	1,42	1 : 46700	1 : 38000	1 : 93000	unmeßb.

Die Untersuchungen *Newtons* ergänzten *Clairaut*[84]) und sodann *Legendre*[86]) und *Laplace*[87]) durch die allgemeinere Voraussetzung einer heterogenen, doch kontinuierlich von der Oberfläche nach dem Inneren hin zunehmenden Dichteverteilung der Erde, ferner *Wiechert*[88]) durch die einer diskontinuierlichen, nämlich einer Teilung der Erde in zwei Schichten, einen Kern von der Dichte des Eisens und einen darüber lagernden Mantel von der Dichte 2,5—2,8.

Das Ergebnis der *Rechnungen Clairauts* ist ein doppeltes, zunächst eine Differentialgleichung, welcher die Abplattungen der einzelnen

83) *Ch. Huygens*, Traité de la lumière: Anhang Discours de la cause de la pesanteur: Leiden 1690.

84) *A. C. Clairaut*, La théorie de la figure de la terre, Paris 1743, deutsche Ausgabe in *Ostwald*, Klass. der Naturwiss. Nr. 189 unter dem Titel: Die Erdgestalt.

85) Die Abplattung des Planeten Jupiter berechnete schon *Newton* zu 1 : 9,3 aus der der Erde als indirekt proportional dem Quadrate des Verhältnisses der Rotationsdauer beider ($T^2 : T_1^2$) und dem ihrer Dichten ($\varrho : \varrho_1$), d. i. nach der Formel: $\alpha_1 = \alpha \dfrac{T^2}{T_1^2} \dfrac{\varrho}{\varrho_1}$.

86) *A. M. Legendre*, Recherche sur la figure des planètes. Paris, Mém. 1788 und 1789.

87) *P. S. Laplace*, Mec. céleste, Livre III, chap. 4.

88) *E. Wiechert*, Über die Massenverteilung im Innern der Erde. Gött. Nachr. 1897, p. 221.

Schichten gleicher Dichte, in die die Erde zerfällt, genügen müssen, wenn jede von ihnen die Gleichgewichtsbedingung erfüllt (isostatische Lagerung). In sie geht als Hauptgröße ein das Gesetz, nach welchem die Dichte dieser Schichten von der Oberfläche nach dem Inneren zunimmt, und da dieses Gesetz nicht bekannt ist, läßt sich die Differentialgleichung nicht integrieren, sondern sie gestattet nur wieder die Aufstellung von Grenzwerten, für die Abplattung, die jedoch nunmehr weitaus enger sind als die den Gleichungen (20) entsprechenden. Sodann als zweites, eine Beziehung zwischen der Variation der Schwere auf der Erde und dem Oberflächenwerte der Abplattung, die unter dem Namen des *Clairaut*schen Theorems bekannt ist.

14. Die Schwere auf der Erde. Das Clairautsche Theorem. Für das Gesetz der Änderung der Schwere auf der Erdoberfläche vom Pol zum Äquator setzt *Newton* die Beziehung fest

$$g_\varphi \cdot R_\varphi = \text{const},$$

worin g_φ die Schwere und R_φ den Radius der Erde für die geographische Breite φ bedeuten. Hieraus folgt

$$R_\varphi = R_a(1 - \alpha \sin^2\varphi) \quad g_\varphi = g_a(1 + \alpha \sin^2\varphi)$$

bis auf Glieder zweiter Ordnung in α. *Newton* gibt darnach eine Tafel der Pendellängen für die geographischen Breiten von 0—90° von je 5 zu 5°, aus der hier die für $\varphi = 0°$, 45° und 90° gültigen umgewandelt in mm mitgeteilt, andererseits des Vergleichs halber die von *Fr. Helmert* gerechneten hinzugefügt seien.

$\varphi = 0°$	*Newton* $l = 991{,}36$ *mm*	*Helmert* 990,95
45°	993,53	993,58
90°	995,69	996,20.

Die strengere Formel fand *Clairaut.*[89]) Wird angenommen

$$g_\varphi = g_a(1 + \beta \sin^2\varphi),$$

so gilt die Relation

$$\beta = \frac{5\lambda}{2} - \alpha, \tag{21a}$$

die als das *Clairaut*sche *Theorem*[90]) bezeichnet wird. *G. Stokes*[91]) fand, daß die Gültigkeit des Theorems unabhängig ist von jeder speziellen

89) *A. C. Clairaut,* Erdgestalt, Teil II, Abschn. IV.

90) Zur reichhaltigen Literatur über das *Clairaut*sche Theorem vgl. insbesondere die beiden Artikel der Encykl. VI 1, 3 (*Pizetti*), Nr. **4** und **47—53**, sowie VI 1, 7 (*Helmert*), Nr. **1—5** und **25**.

91) *G. Stokes,* On attractions and *Clairauts* Theorem: Cambr., Dubl. Math. T. 4 (1849) sowie On the variation of gravity at the surface of the earth. Cambr., Trans. Phil. Soc. 8 (1849) = Papers, Cambr. 1883, Vol. II.

Annahme über die Massenverteilung im Inneren der Erde und nur der Bedingung unterliegt, daß die einzelnen Erdschichten im hydrostatischen Gleichgewichte stehen (isostatische Lagerung). Einen neuen Beweis des *Stoke*schen Satzes gab *Poincaré*[92]); eine Erweiterung des *Clairaut*schen Theorems durch Ausdehnung auf Glieder zweiter Ordnung *Helmert.*[93])

Gibt man der Gleichung (21a) die Form

$$\beta - \tfrac{5}{4}\lambda = \tfrac{5}{4}\lambda - \alpha, \tag{21b}$$

so drückt sie, da $\frac{5}{4}\lambda$ die der homogenen Erde entsprechende Abplattung vorstellt, die Beziehung aus, daß für eine nicht homogene Erde die Variation der Schwere auf ihr um soviel größer sich ergibt als die Abplattung der homogenen Erde, wie diese größer ist als ihre wahre Abplattung.

Die Gleichung (21a) gestattet eine Berechnung der Abplattung der Erde einzig aus Schweremessungen und war damit Veranlassung, entsprechende Pendelbeobachtungen auf der ganzen Erdoberfläche durchzuführen. Zu diesem Zwecke wurden von den Staaten größere Expeditionen ausgerüstet, über welche *Helmert* und *Borrass*[94]) berichten. Eine Diskussion aller dieser Beobachtungen gibt *F. Helmert*[93]) und leitet daraus die Formel ab:

$$g_\varphi = 9{,}7805\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi),$$

die er später[95]) in $g_\varphi = 9{,}7805\,(1 + 0{,}005285 \sin^2\varphi)$

umwandelt. Aus der ersteren folgt

$$\alpha = 1 : 297{,}09 \quad \text{bzw.} \quad 1 : 298{,}2,$$

aus der zweiten $\alpha = 1 : 295{,}47$ „ $1 : 296{,}7$,

wobei die an zweiter Stelle stehenden Zahlen aus einer Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung folgen, während die ersteren dem *Clairaut*schen Theorem in seiner einfachsten Form entsprechen. *Bowie*[96]) erhält $\alpha = 1 : 298{,}4.$

---

92) *H. Poincaré* in seinem Cours de la physique math. à la Sorbonne (1886) — nach *Callandreau*, Sur la théorie de la figure des planètes: Paris, Obs. Mém. XIX (1889).

93) *F. Helmert,* Höhere Geodäsie II, p. 77 und Encykl. VI 1, 7, Nr. 2 und VI 1, 3 (*Pizetti*), Nr. 4.

94) *F. Helmert,* Höhere Geodäsie II, p. 191 und *E. Borrass,* Int. Erdmess. (1900) II und (1903) II.

95) *F. Helmert,* Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festland. Berl. Ber. 1915, p. 676.

96) *W. Bowie,* Effect of Topography and isostatic Compensation upon the intensity of Gravity: Washington 1912.

15. Lotabweichungen und Schwereanomalien. (Theorie des Geoids.) Für die beiden erwähnten Methoden zur Berechnung der Abplattung, die rein geodätische und die auf Pendelmessungen beruhende, gilt als Ausgangspunkt die Hypothese[97]), daß man erstens die Oberfläche der Weltmeere ansehen dürfe als Teile einer einzigen geschlossenen analytischen Fläche von einfachem Bildungsgesetz und daß zweitens die Normalen dieser Fläche in allen bei den Messungen in Betracht kommenden Punkten des Erdkörpers zugleich die Richtung der Schwere angeben. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß diese zwei Annahmen keineswegs streng erfüllt sind. Zwischen Theorie und Messung zeigen sich Widersprüche von solchem Betrage, daß es nicht angeht, sie einzig als Beobachtungsfehler zu bezeichnen. Man nennt sie, sofern sie sich als Unterschiede in den Richtungen der astronomisch bestimmten Normalen der physischen Erdoberfläche gegen die auf Grund eines Rotationsellipsoids (Referenzellipsoid) berechneten (geodätisch festgelegten) erweisen, *Lotabweichungen*, andererseits *Schwerestörungen*, als Unterschiede zwischen den aus den beobachteten Pendellängen und den nach dem *Clairaut*schen Theorem abgeleiteten g.

Es unterliegt nun keinem Zweifel, daß diese konstatierten Abweichungen in Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche ihren Grund haben. Berge und Täler, oder die lokale Terraingestaltung, die gesamten Kontinente, im Gegensatze dazu wieder Ungleichheiten der Meerestiefe, ungleiche Dichten, die schon die äußere Erdkruste zeigt und die sich vielleicht noch ziemlich tief unter diese erstrecken, müssen sowohl auf die Lotlinien als die Richtung der Schwerkraft, wie auf ihre Größe einen merklichen Einfluß ausüben. Die Annahme daher, daß der Erdkörper ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsachse mit deren Hauptträgheitsachse zusammenfalle, ist nur wieder eine Annäherung, zu der man hauptsächlich auf Grundlage hydrostatischer Überlegungen gekommen ist. Wie vor *Newton* die Annahme der Kugelgestalt der Erde eine solche war (etwa eine vom ersten Grade), ist sie eine zweiten Grades, die durch die Ergebnisse der Beobachtungen nunmehr durch eine dritten Grades zu ersetzen ist. Diese neue Approximierung ist jene ideale Erdoberfläche, die als das Produkt der Gesamtwirkung aller dieser ungleichmäßig verteilten Elemente aufzufassen ist. Man nennt sie das *Geoid*[98]) und definiert sie als jene Fläche,

---

97) *H. Bruns,* Die Figur der Erde. Potsdam, Kgl. preuß. geodät. Inst. Publ. (1878) Einleitung, und *H. Poincaré,* Les mesures de gravité et la geodésie. Paris, Bull. astr. 18 (1901), p. 5—39.

98) Vgl. *C. F. Gauß,* Über den Breitenunterschied zwischen Göttingen und Altona. Gött. 1828. Ges. Werke IX p. 49; dann *F. W. Bessel* und *J. Baeyer,* Die

die in allen ihren Teilen, entsprechend dem Hauptgesetz über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten, die wahren Lotlinien senkrecht durchschneidet.

Vielfach versuchte man es, aus den auf der Erdoberfläche sichtbaren Massen, die Lotablenkungen und Schwerestörungen zu berechnen und sie sodann mit den tatsächlich beobachteten zu vergleichen. Eine erste gab *Hutton*[99]), wenn er den von *Maskelyne* zu beiden Seiten des Berges *Shehallien* 1774 beobachteten Breitenunterschied statt 42,9″ zu 54,6″ findet, aber zu 50″ berechnet. Über weitere solche Rechnungen berichtet *Helmert*[100]); danach wurde zwischen den geodätischen Stationen Benediktbeuren und München als Lotablenkung beobachtet

in Breite	$\Delta\varphi = 9{,}00''$	(astron.-geod.)	$= 8{,}64''$	(berechnet)
„ Azimut	$\Delta A = -5{,}83''$	„	$= -5{,}22''$	„

Bekanntlich hat man solche Beobachtungen, sowie auch die entsprechenden Beobachtungen von Schwerestörungen[101]), bisher mehr dazu benutzt, aus ihnen die mittlere Dichte der Erde abzuleiten und dann vielfach direkte, diesem Zwecke dienende Messungen angestellt. Sie ergaben jedoch Werte, die eine sehr geringe Übereinstimmung untereinander aufweisen und durch die nach anderen Methoden (Laboratoriumsarbeiten) durchgeführten weitaus übertroffen wurden.[102]) Die ersteren schwanken zwischen 4,713—6,566, die zweiten nur innerhalb der Grenzen 5,49—5,57.

16. Die Schwerkraft im Erdinnern. Die Clairautsche Differentialgleichung. Die *Clairaut*sche Differentialgleichung[103]) gibt eine Beziehung zwischen der Zunahme der Dichte, ϱ, in den einzelnen Schichten der Erde und der Abnahme ihrer Abplattungen, α, (ϱ und α hierbei als kontinuierliche Funktionen des variablen Radius, r, betrachtet).

Gradmessung in Ostpreußen, Berlin 1836. Den Namen „*Geoid*“ hat *J. B. Listing*, Über unsere jetzige Kenntnis der Größe und der Gestalt der Erde, Gött. Nachr. (1873), eingeführt.

99) Zitiert nach *Todhunter*, History of the theories of attraction and the figure of the Earth, London 1873 § 726 und 1607; ferner *Airy*, The figure of the Earth, London 1829, p. 171.

100) *F. Helmert*, Höhere Geod. II, Kap. 4.

101) *Plana* und *Carlini*, Pendelbeobachtungen am Fuße und auf der Spitze des Mont Cenis: *F. Carlini*, Milano, Effemeridi astron. 1824 App. und *C. Giulio*, Torino, Acc. Mem. 2 (1840), p. 379.

102) Vgl. *Zenneck*, Encykl. V 1, Nr. 7 u. 9 und die Zusammenstellung der Einzelwerte in *Harkness* (Fußnote 33) p. 89.

103) Über ihre Ableitung und die Bedingungen ihrer Gültigkeit vgl. *S. Oppenheim*, Encykl. VI 2, 21, Nr. 6.

Setzt man der Kürze halber

$$\int_0^R \varrho r^2\, dr = \mu,$$

so lautet sie

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\varrho r^2}{\mu}\frac{d\alpha}{dr} + \left[\frac{2\varrho r}{\mu} - \frac{6}{r^2}\right]\alpha = 0 \ldots \tag{22a}$$

oder in der *Radau*schen[104]) Form

$$\frac{d}{dr}\left[r^5 \cdot \bar{\varrho}\sqrt{1+\eta}\right] = \frac{5r^4\bar{\varrho}}{\sqrt{1+\eta}}\left[1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}\right]\ldots \tag{22b}$$

mit den Abkürzungen

$$\eta = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr} \quad \text{und} \quad \bar{\varrho} = \frac{1}{r^3}\int_0^r \varrho r^2\, dr,$$

welche gegenüber der ursprünglichen *Clairaut*schen den Vorteil hat, daß der Teil $K = \left(1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}\right) : \sqrt{1+\eta}$ für die für die Erde in Betracht kommenden Werte von η zwischen 0,54—0,56 sich nur wenig von 1 unterscheidet (es ist K für diese zwei Annahmen $= 0{,}999\,898$ bzw. 0,999705), so daß in fast genügender Annäherung

$$\frac{d}{dr}\left(r^5 \cdot \bar{\varrho} \cdot \sqrt{1+\eta}\right) = 5r^4 \cdot \bar{\varrho}$$

gesetzt werden kann.

Versuche zu ihrer Integration unter verschiedenen Hypothesen über das Gesetz, nach welchem ϱ mit r zunimmt, sind vielfach gemacht worden. Die hauptsächlichsten sind:

$$\begin{aligned} &\textit{Roche-Lipschitz} && \varrho = \varrho_c\left[1 - k\left(\frac{r}{R_a}\right)^{\lambda_1}\right]^{\lambda_2}, \\ (23)\quad &\textit{Legendre-Laplace} && \varrho = \frac{\varrho_c}{\frac{mr}{R_a}}\sin\frac{mr}{R_a}, \\ &\textit{Helmert} && \varrho = \varrho_c\left[1 - k_1\left(\frac{r}{R_a}\right)^2 + k_2\left(\frac{r}{R_a}\right)^4 \ldots\right]^1, \end{aligned}$$

wobei ϱ_c die Dichte im Erdmittelpunkte darstellt. Zur Berechnung der in ihnen enthaltenen Parameter dienen die folgenden numerischen Daten:

1. Die mittlere Dichte der Erde $\varrho_m = 5{,}513 \ldots$,
2. Die Dichte an der Oberfläche $\varrho_0 = 2{,}6$—$2{,}8 \ldots$,
3. Aus der Präzessionstheorie $\frac{C-A}{C} = 1 : 305{,}6 \ldots$,
4. Die Konstante β der Variation der Schwere $\beta = 0{,}005285$,
5. Die Abplattung der Erde an der Oberfläche $\alpha_0 = 1 : 298 \ldots$

---

104) *R. Radau*, Remarque sur la théorie de la figure des planètes, Paris, Bull. astr. 11 (1885).

Es ist bisher nicht gelungen, ihnen allen vollständig zu genügen. Stets bleiben Reste übrig, die wohl sehr klein sind und hart an der Genauigkeitsgrenze dieser verschiedensten Beobachtungen entnommenen Angaben liegen[105]), aber durch ihr Vorhandensein darauf hinzudeuten scheinen, daß die Annahmen, auf denen die Aufstellung der Gleichung beruht, doch nicht ganz der Wahrheit entsprechen. Versuche, sie durch eine diskontinuierliche Massenverteilung innerhalb der Erde zu ersetzen oder durch Berücksichtigung der zweiten Potenz der Abplattung α zu ergänzen, führten nur zu einem wenig besseren Erfolge.

Aus der genähert gültigen Gleichung

$$g = \frac{4\pi k^2}{R^2} \int_0^R \varrho r^2 \, dr$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{dg}{dR} = 4\pi k^2 \left[\varrho - \frac{2}{3} \varrho_m\right]$$

und daraus für die Oberfläche der Erde (Index 0) und für ihr Zentrum (Index c)

$$\left(\frac{dg}{dR}\right)_0 = 4\pi k^2 \left[\varrho_0 - \frac{2}{3} \varrho_m\right] < 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dg}{dR}\right)_c = 4\pi k^2 \varrho_c > 0.$$

Es muß daher im Inneren der Erde einen Punkt geben, für den

$$\frac{dg}{dR} = 0,$$

also g ein Maximum hat (Theorem von *Saigey*[106])), so daß die Schwerkraft zunächst von der Oberfläche nach dem Inneren der Erde zunimmt, bis zu einem Maximalwert, g', um von da ab erst stetig bis zum Mittelpunkte abzunehmen. Nach *Helmert* ist der entsprechende Radius R

$$R' = 0{,}82 R \quad \text{und die Schwere daselbst} \quad g' = 1{,}05 g_a.$$

Ihm kommt als Tiefe, von der Oberfläche an gerechnet, $0{,}18 R = 1150$ km zu, während die größte bis heute erreichte Tiefe etwa 1—2 km beträgt.

Pendelversuche zur Bestimmung der Schwere in ihr rühren her von *Airy* und *R. v. Sterneck*.[107]) Doch wurden auch diese mehr zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erde verwendet und sind weniger zur Beantwortung der Frage nach der Zunahme der Schwere

---

105) Vgl. *H. Poincaré,* Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1902, p. 94—96; ferner *S. Oppenheim,* Encykl. VI 2, 21, Nr. 12—14.

106) *Saigey,* Petite Physique du globe terrestre. *F. Tisserand,* Méc. cél. II, chapt. 15, sowie *Helmert,* Höh. Geod. II, p. 492.

107) Vgl. *F. Helmert,* Encykl. VI 1, 7, Nr. 21.

in deren Inneren oder zu einer Prüfung des Genauigkeitsgrades für die Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes daselbst geeignet. Auch ihre Ergebnisse haben gegenüber den aus Laboratoriumsversuchen stammenden nur ein geringes Gewicht.[108])

17. Die Abplattung der Erde, aus der Theorie der Präzession und Mondbewegung. Die Theorie der Präzession (vgl. Nr. 8b) gibt einen Wert für die Differenz der zwei Hauptträgheitsmomente der Erde, A und C

$$\frac{C-A}{C} = 1:305{,}5 \text{ bzw. } = 1:306{,}6.$$

Für den Fall einer homogenen Dichteverteilung wäre dieses Verhältnis identisch mit der Abplattung α, für eine nicht homogene dagegen und bei Berücksichtigung der der *Clairaut*schen Theorie zugrunde liegenden Annahmen ist

$$(24)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{8\pi}{3}\int_0^{R_a} \varrho r^4\, dr - \frac{8\pi}{45}\int_0^{R_a} \varrho\, d(r^5\alpha) \\ C &= \frac{8\pi}{3}\int_0^{R_a} \varrho r^4\, dr + \frac{16\pi}{45}\int_0^{R_a} \varrho\, d(r^5\alpha). \end{aligned}$$

Nach *Clairaut* läßt sich das zweite Integral durch die für die Oberfläche der Erde gültigen und daher der Messung zugänglichen Werte darstellen, nicht aber das erste. Es ist, wenn mit E die Masse der Erde bezeichnet wird, wohl

$$(24\text{a})\qquad \int_0^{R_a} \varrho\, d(r^5\alpha) = \frac{5}{4\pi} R_a^2 E\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right),$$

aber, um auch das erste Integral zu berechnen, muß eine Annahme über die Dichte als Funktion von r gemacht werden, und daher ist die Kenntnis von $(C - A) : C$ nicht geeignet, aus ihr auf die Erdabplattung zu schließen.

Dagegen ist das Potential der Anziehung der Erde auf eine außerhalb ihr in der Entfernung d von ihrem Mittelpunkt befindliche Masse gegeben durch

$$(25\text{a})\qquad P = \frac{k^2 E}{d} - \frac{(C-A)k^2}{d^3} P_2$$

mit P_2 als der ihrer Lage entsprechenden Kugelfunktion zweiter Ordnung, und daher mit Rücksicht auf die beiden Ausdrücke für A und C und die Gleichung (24a) durch die Oberflächenabplattung α darstellbar,

$$(25\text{b})\qquad P = \frac{k^2 E}{d} - \frac{2}{3}\frac{Ek^2 \cdot R_\alpha^2}{d^3}\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) P_2.$$

108) *Zenneck,* Encykl. V 1, Nr. 7.

In der Anwendung auf den Mond sagt dies aus, daß dessen Bewegung um die Erde nicht einzig durch das Potential $k^2 E : d$ geregelt werde, sondern daß außerdem noch eine von der Abplattung der Erde herrührende störende Kraft vorhanden ist. *Laplace*[109]) hat zuerst auf sie aufmerksam gemacht und aus ihr $\alpha = 1 : 305$ gefunden. Neuere Entwickelungen rühren her von *P. Hansen*[110]), aus dessen Daten *Helmert* $\alpha = 1 : 297{,}8$ berechnet, dann von *G. W. Hill*[111]) und neuestens von *E. Brown*[112]), der ursprünglich den Wert $1 : 297$ bevorzugte, aber in seiner letzten Veröffentlichung[113]) in einer zusammenfassenden Übersicht über alle seine in verschiedenen getrennten Arbeiten gewonnenen Resultate auf $1 : 294$ zurückgreift, und dieser Wahl die Werte der seinen neuen Mondtafeln zugrunde liegenden Elemente der Mondbahn anpaßt.

Die hier angeführten Zahlen sind mit den in Nr. **13** und **14** angeführten und aus geodätischen Messungen und Pendelbeobachtungen fließenden direkt vergleichbar.

18. Theorie der Ebbe und Flut. Eine weitere Gruppe von Erscheinungen auf der Erde, die durch die kombinierte Anziehung von Sonne und Mond hervorgerufen zur Prüfung des *Newton*schen Gesetzes herangezogen werden können, sind die der Ebbe und Flut. Schon Nr. **8** bei der Berechnung der Mondmasse erwähnt, soll hier ihre Theorie mehr in der Richtung verwertet werden, inwieweit die auf Grundlage des *Newton*schen Gesetzes durchgeführte Vorausberechnung der Höhe der Flut und ihrer Eintrittszeit mit den Beobachtungen in Übereinstimmung steht. Es ist, sagt jedoch in diesem Sinne *G. H. Darwin*[114]), nicht wahrscheinlich, daß es jemals möglich sein wird, die Natur der Meeresschwingungen als Ganzes mit einiger Genauigkeit zu bestimmen. Das Problem ist ein zu verwickeltes, als daß es gelingen könnte, aller die Erscheinungen beeinflußender Nebenumstände, wie der unaufhörlichen Veränderungen der Gezeitenkräfte, der komplizierten Umrisse der Meeresküste, der variablen Tiefe des Meeres

---

109) *Laplace,* Mec. cél., Livre 7, chap. 2 und Livre 16, chap. 3 und Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. **10**.

110) *P. A. Hansen,* Darlegungen, Leipzig. Abh. 6 (1864) und 7 (1865); vgl. auch die Kritik von *F. Helmert,* Höhere Geod. II, p. 469.

111) *G. W. Will,* Determination of the inequalities of the Moons motion which are produced by the figure of the Earth, Astr. pap. 3 (1884) = Works 2.

112) *E. Brown*, Encykl. VI 2, 14, Nr. **20** (1914) und sein Vortrag vor der Britt. Ass. for the Adv. of Science: Science 40 (1914), p. 389—401.

113) *E. Brown,* London Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 508.

114) *G. H. Darwin,* Tides and kindred phenomena in the solar system, Boston 1899; deutsche Ausgabe von *A. Pockels,* Leipzig 1902, Kap. XI, p. 175.

Herr zu werden, wenn auch, wie dies *Darwin* hervorhebt, schon *eine* gelungene Vorherbestimmung als ein Triumph der allgemeinen Gravitation bezeichnet werden müßte.

Erst die harmonische Analyse brachte hier eine Wendung. Wohl versuchte schon *Laplace*[115]) die Phasen der einzelnen Partialfluten und ihre Amplituden als Unbekannte in die Theorie einzuführen und sie aus Beobachtungen zu berechnen. Es gelang ihm dadurch, eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu erzielen, als sie die einfache Gleichgewichts- oder seine Schwingungstheorie erreichte. Aber diese Methode wies nur da halbwegs Erfolge auf, wo, wie im Atlantischen Ozean, die täglichen Ungleichheiten der Gezeiten nur gering sind und sich daher diese fast vollständig durch zwei harmonische Funktionen, entsprechend den zwei Halbtagsperioden von Sonne und Mond, deren Phasen und Amplituden kleinen periodischen Schwankungen unterworfen sind, darstellen lassen.[116]) Die harmonische Analyse erweiterte die *Laplace*sche Methode dahin, daß sie das Potential der fluterzeugenden Kräfte durch Auflösung in eine größere Zahl harmonischer Funktionen (Partialtiden) mit verschiedenen, der Bewegung von Sonne und Mond, der Knoten- und Perigäumlänge seiner Bahn angepaßten Perioden vervollständigte[117]) und jeder Partialflut von ihnen eine empirisch zu bestimmende Phase und Amplitude zuwies, derart, daß nur deren Perioden der auf Basis der Gravitationslehre entwickelten Theorie entnommen sind.

Damit wird eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erzielt, und *G. H. Darwin*[118]) gibt einige Beispiele für die Erfolge der Vorherbestimmung.

19. Theorie der Lot- und Schwerestörungen durch die Anziehung von Sonne und Mond. Analoges gilt auch von den fast unendlich kleinen, durch die direkte Wirkung von Sonne und Mond erzeugten Störungen[119]) in der Richtung des Lotes und der Intensität

115) *Laplace,* Méc. cél., Livre 4, chap. 1—4.

116) *G. H. Darwin* und *S. S. Hough,* Bewegung der Hydrosphäre, Encykl. VI 1, 6, Nr. 22.

117) Über die Zahl und Bezeichnung dieser einzelnen Perioden vgl. Fußnote 116, Nr. 23.

118) Fußnote 116, Nr. 32 und Fußnote 114, Kap. XIV.

119) *C. A. F. Peters,* Von den kleinen Ablenkungen der Lotlinie und des Niveaus, St. Petersb. Bull. III. 1845; dann *F. Helmert*, Höh. Geod. II, Kap. 5; Encykl. VI 1, 7, Nr. 25; ferner *A. Gaillot,* Influence de l'attraction lunaire sur la direction de la verticale und sur l'intensité de la pesanteur. Paris, Bull. astr. 1 (1884), p. 113 und Conséquences rélatives à la marche de la pendule. Ebenda p. 217.

der Schwere. Für das Potential der fluterzeugenden Kraft gibt die Theorie den Ausdruck

$$P = c_☾ R_a g\,(\cos^2\zeta_☾ - \tfrac{1}{3}) + c_\odot R_a g\,(\cos^2\zeta_\odot - \tfrac{1}{3}) \ldots \tag{26}$$

mit der Bezeichnung von $\zeta_☾$ und $\zeta_\odot$ als der Zenitdistanz von Mond und Sonne für den betreffenden Beobachtungsort, und $c_☾$ und $c_\odot$ zwei Faktoren

$$c_☾ = \frac{3}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{R_a}{d}\right)^3 \qquad c_\odot = \frac{3}{2}\frac{S}{E}\left(\frac{R_a}{D}\right)^3,$$

deren numerischen Werte

$$c_☾ = 0{,}0174'' \qquad c_\odot = 0{,}0080''$$

sind, und daraus folgt für die zwei Komponenten der Lotstörung längs der Erdoberfläche

$$\text{(27 a)} \qquad \begin{aligned} &\text{in der Richtung } O-W \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial \lambda}}{R_a g \cos\varphi}, \\ &\text{in der Richtung } N-S \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial \varphi}}{R_a g}, \end{aligned}$$

und endlich für die in vertikaler Richtung fallende, die sich als eine Verminderung der Erdschwere äußert,

$$\Delta g = P : g \tag{27 b}$$

mit den Amplituden

$$c_☾ = g : 17\,800\,000 \qquad c_\odot = g : 38\,800\,000.$$

Lange Zeit bemühte man sich, diese Störungen nachzuweisen, bis endlich *F. Zöllner* auf das Horizontalpendel[120]) als das wegen seiner hohen Empfindlichkeit zu diesem Zwecke geeignetste Instrument hinwies. Doch auch diese schlugen anfangs fehl und erst die Arbeiten von *O. Hecker*[121]) und *W. Schweydar*[122]) brachten den gewünschten Er-

120) Ausführliche Literaturangaben über die Geschichte und Verwendung des Horizontalpendels finden sich in *G. H. Darwin*, Encykl. VI 1, 6, Nr. **21**, sowie Fußn. 114, Kap. 5 u. 6.

121) *O. Hecker*, Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers, Potsdam, Geodät. Inst., Veröff. Nr. 32 (1907).

122) *W. Schweydar*, Ein Beitrag zur Bestimmung des Starrheitskoeff. der Erde, Gerland Beitr. Geoph. 9 (1907); dann Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht (1902), sowie Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond (1914) und Theorie der Deformation der Erde durch Flutkräfte (1916) in den Veröffentl. des geodät. Inst. Potsdam, Nr. 54, 59 u. 60. Hier sind auch zu erwähnen die neuesten Versuche von *A. A. Michelson* und *H. G. Gale*, ausgeführt mit einem Wasserpendel, das die durch die Anziehung von Sonne und Mond infolge der Änderung der Lotrechten verursachten Niveauunterschiede in langen Röhren zu beobachten gestattet. Astrophys. Journ. 39 (1914), p. 105—138 und 50 (1919), p. 346—355.

folg. Leider wieder nicht in dem gehofften Ausmaße. Sie zeigten, daß die beobachteten Schwingungen des Pendels nur etwa $^2/_3$ der theoretischen Amplitude betragen, und daß dieser Faktor nicht für alle Partialtiden der gleiche ist. Die Erklärung dieser neuen Erfahrungstatsache wird in der Anschauung gesucht, daß die Erde nicht völlig starr sei, sondern ihr ein bestimmter Grad der Nachgiebigkeit den fluterzeugenden Kräften gegenüber zukomme. Aus dem Verhältnisse γ der beobachteten Amplitude zu der theoretischen, einer starren Erde entsprechenden, muß sich daher der Koeffizient ihrer elastischen Nachgiebigkeit μ (Starrheitskoeffizient) berechnen lassen.

So findet *Schweydar* aus den ganztägigen Lotstörungen der in der harmonischen Analyse mit K_1 und O bezeichneten Partialkräfte für das Verhältnis γ den Wert

$$\gamma = 0{,}827 \pm 0{,}036,$$

andererseits aus den mit einem Bifilargravimeter während eines ganzen Jahres gemessenen Intensitätsänderungen der Schwere[123])

$$\gamma = 0{,}833 \ldots$$

Aus dem ersteren ergibt sich in Verbindung mit der Variation der *Euler*schen von 303 Tagen in die *Chandler*sche Periode der Schwankungen der Polhöhe von 434 Tagen

$$\mu = 2{,}64 \cdot 10^{11} \text{ im C.G.S.-System},$$

während sich gleichzeitig aus diesen Angaben die Geschwindigkeit v der transversalen Erdbebenwellen ganz entsprechend den Beobachtungen für die Erdoberfläche[124])

$$\text{zu } v = 4 \text{ km/sec}$$

berechnet, eine Übereinstimmung, die sich auf die Variation von μ, dann ϱ der Dichte der Erde und die daraus abgeleiteten v erstreckt.[125])

20. Zusammenfassung der Ergebnisse. Zur Beurteilung der Frage nach der Genauigkeit für die Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes in der Abhängigkeit von der Entfernung der anziehenden Körper voneinander kommen die mitgeteilten Ergebnisse in mehrfacher Richtung in Betracht. Die Berechnung der Abplattung der Erde aus Pendelmessungen auf ihrer Oberfläche und ihr Vergleich mit den geodätischen Bestimmungen zeigen eine wohl nicht vollständige, aber doch

123) *W. Schweydar,* Beobachtungen der Änderung der Intensität der Schwerkraft durch den Mond, Berl. Ber. (1915), p. 454.

124) *Geiger* und *Gutenberg,* Über Erdbebenwellen, in den Gött. Nachr. 1906 bis 1912.

125) Vgl. Encykl. VI 1, 6 (*G. H. Darwin* u. *S. Hough*), Nr. 37.

innerhalb der für sie abgeleiteten Grenzwerte fallende Übereinstimmung. Desgleichen weisen auch die Berechnungen der Lotablenkungen der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten auf der Erde und damit im Zusammenhange die Berechnung ihrer mittleren Dichte aus ihnen und deren Vergleich mit den analogen Ableitungen in Laboratorien mit Hilfe von Pendeln, dann der einfachen und der Drehwage, bei denen die anziehenden Massen in den verschiedensten Entfernungen voneinander von einigen Metern bis zu mehreren Kilometern standen, nur Abweichungen auf, die, zwischen 4,7—6,6 mit dem wahren Mittelwert 5,513 liegend, etwa auf 15% ansteigen, und bis zu gleichem Betrage scheint damit das quadratische Gesetz der Entfernung in dem analytischen Ausdruck für die Anziehung zweier Körper innerhalb der Distanzen von einigen Metern bis zum Radius der Erde von 6380000 m sichergestellt.[126]) Dagegen werden die störenden Kräfte von Sonne und Mond, die sich auf der Erdoberfläche in doppelter Art äußern, zunächst als periodische Bewegungen der Wassermassen auf ihr, die als Ebbe- und Fluterscheinungen, und sodann als periodische Änderungen ihrer Niveaufläche, die als Variationen der Lotrichtung und der Intensität der Schwere auftreten, wie auch im entgegengesetzten Sinne der störende Einfluß der Erdabplattung auf die Bewegung des Mondes, durch das quadratische Gesetz der Anziehung fast vollständig wiedergegeben. Damit erscheint seine Genauigkeit, für die vorher in Nr. 12 für die Entfernung des Mondes von der Erde ein Fehler von 0,02% gefunden wurde, im gleichen, wenn auch nicht so präzise feststellbaren Betrage für die Distanz der Sonne von der Erde sichergestellt.

21. Theorie der Planeten. Eine erste vollständige Durcharbeitung der Bewegungstheorien der großen Planeten rührt, abgesehen von älteren theoretisch unzulänglichen Versuchen[127]), her von *La-*

---

126) *S. Newcomb,* Coming down to smaller distances, we find that the close agreement between the density of the Earth, as derived from the attraction of small masses at distances of a fraction of a meter, with the density which we might apriori suppose the Earth to have, shows that within a range of distance extending from less than one meter to more than six million meters the accumulated deviation from the law can scarcely amount to its third part. *S. Newcomb,* Fund. const., p. 120 (Fortsetzung des Zitates in § 12). Doch auch hier ist zu erwägen, daß die Differenzen 4,7—6,6 in den aus den Lotablenkungen abgeleiteten Werten für die Erddichte wohl mehr der Schwierigkeit, hierbei alle Terrainverhältnisse zu berücksichtigen, als einer Unvollständigkeit des *Newton*schen Gesetzes zuzuschreiben sind.

127) Vgl. die Introduction historique in *Abel Souchons* Traité de l'astronomie pratique, Paris 1883, die eine ausführliche Darstellung der Entwickelung der astronomischen Tafeln und Ephemeridensammlungen gibt.

place.[128]) Ihm folgten sodann *U. J. Leverrier*[129]), *S. Newcomb*[130]) und *G. W. Hill.*[131]) Bei *Laplace* und den auf seine theoretischen Entwicklungen sich stützenden Tafeln sind die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtungen noch recht groß. Sie steigen bei den *Bouvard*schen Tafeln des Jupiter und Saturn bis auf 12″ im geozentrischen Ort an, teils wegen der noch mangelhaften Reduktionselemente der Fixsternörter, teils wohl auch wegen Ungenauigkeiten oder nicht gerechtfertigter Vernachlässigungen der Theorie. Weitaus kleiner sind sie schon bei *Leverrier* und *Newcomb.*

Was zunächst die vier inneren Planeten anlangt, so zeigt die neue Diskussion *Newcombs*[132]), daß man allen Beobachtungen derselben, d. s. Meridianbeobachtungen und speziell bei Merkur und Venus in Betracht kommenden Beobachtungen ihrer Vorübergänge vor der Sonne — durch die Theorie mit Ausnahme der folgenden Differenzen zwischen den theoretischen Werten der säkularen Veränderungen der Bahnelemente, Neigung i, Exzentrizität e, und Länge der Knoten Ω, und des Perihels π und ihren aus den Beobachtungen abgeleiteten — gerecht werden kann.

128) Die speziellen Theorien der großen Planeten von *Laplace*, erschienen in dessen Méc. céleste, Tome III, Livre VI, chap. 8—14, im Jahre 1802. Auf sie gründen sich die Tafeln von *A. Bouvard* von Jupiter, Saturn und Uranus, Paris 1821, *J. Delambre,* Tables du soleil, Paris 1806 u. a.; vgl. die Zusammenstellung in *R. Wolf,* Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur. Bd. II, Zürich 1892, p. 401 und Encykl. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 21.

129) *U. J. Leverriers* Planetentafeln erschienen in den Mémoires de l'observatoire de Paris, und zwar der Reihe nach Erde (bzw. Sonne) Bd. 4 (1858), Merkur 5 (1859), Venus und Mars 6 (1861), Jupiter und Saturn 12 (1876), Uranus und Neptun 14 (1877).

130) *S. Newcomb,* An investigation of the orbit of Neptune with general tables of its motion; Smiths. Kontributions. XV, 1865 und ebenso Uranus (1870); dann die neueren Arbeiten in den Washington Astr. papers 6 (1898): die vier inneren Planeten, und 7 (1898) Uranus und Neptun.

131) *G. W. Hill,* Tables of Jupiter and Saturn in Wash. Astr. pap. 7 (1898).

132) *S. Newcomb,* Fund. const., p. 109 und 185. Die Zahl der Beobachtungen, die hierbei in Verwendung kamen, sind: 1676 für die Sonne, 3929 für Merkur, 4889 für Venus und 1597 für Mars. — Über eine neue Kritik der *Newcomb*schen Marstheorie vgl. *F. E. Roß*, Astr. Journ. 29 (1916), p. 152. Eine gute kritische Übersicht über den Vergleich der Planetenbeobachtungen mit der Theorie gibt auch *F. Tisserand,* Méc. cél., Tome 4, chap. 29: Confrontation de la loi de Newton avec les observations. Über die im folgenden mitgeteilte Fehlertafel vgl. auch Encykl. VI 2, 1 (*Anding*), Nr. 5 und 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 23.

		Beob.	Theorie	Diff.	mittl. Fehler
	Merkur Δi	$+\ 7{,}14''$	$+\ 6{,}76''$	$+0{,}38''$	$\pm 0{,}80''$
	$\sin i\,\Delta\Omega$	$-\ 91{,}89''$	$-\ 92{,}50''$	$+0{,}61''$	$\pm 0{,}52''$
	Δe	$+\ 3{,}36''$	$+\ 4{,}24''$	$-0{,}88''$	$\pm 0{,}50''$
	$e\Delta\pi$	$+118{,}24''$	$+109{,}76''$	$+8{,}48''$	$\pm 0{,}43''$
	Venus Δi	$+\ 3{,}87''$	$+\ 3{,}49''$	$+0{,}38''$	$\pm 0{,}33''$
	$\sin i\,\Delta\Omega$	$-105{,}40''$	$-106{,}00''$	$+0{,}60''$	$\pm 0{,}17''$
	Δe	$-\ 9{,}46''$	$-\ 9{,}67''$	$+0{,}21''$	$\pm 0{,}31''$
(28)	$e\Delta\pi$	$+\ 0{,}29''$	$+\ 0{,}34''$	$-0{,}05''$	$\pm 0{,}25''$
	Erde Δe	$-\ 8{,}55''$	$-\ 8{,}57''$	$+0{,}02''$	$\pm 0{,}10''$
	$e\Delta\pi$	$+\ 19{,}48''$	$+\ 19{,}38''$	$+0{,}10''$	$\pm 0{,}13''$
	$\Delta\varepsilon$	$-\ 47{,}11''$	$-\ 46{,}89''$	$-0{,}22''$	$\pm 0{,}27''$
	Mars Δi	$-\ 2{,}26''$	$-\ 2{,}25''$	$-0{,}01''$	$\pm 0{,}20''$
	$\sin i\,\Delta\Omega$	$-\ 72{,}60''$	$-\ 72{,}63''$	$+0{,}03''$	$\pm 0{,}22''$
	Δe	$+\ 19{,}00''$	$+\ 18{,}71''$	$+0{,}29''$	$\pm 0{,}27''$
	$e\Delta\pi$	$+149{,}55''$	$+148{,}80''$	$+0{,}75''$	$\pm 0{,}35''$.

Von diesen Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung ist die in der Länge des Merkurperihels die größte. Sie war schon *Leverrier* bekannt, aber noch nicht mit der Genauigkeit, wie nunmehr seit der neuerlichen Diskussion *Newcombs*. Auffälligere Störungen, die gegenüber ihren mittleren Fehlern von merklicher Größe sind, seien hier noch speziell angeführt. Es sind dies neben der Störung im Merkurperihel:

Merkurperihel	$e\Delta\pi$	$= +\ 8{,}48'' \pm 0{,}43''$,
Merkurexzentrizität	Δe	$= -\ 0{,}88'' \pm 0{,}50''$,
Venusknoten	$\sin i\,\Delta\Omega$	$= +\ 0{,}60'' \pm 0{,}17''$,
Marsperihel	$e\Delta\pi$	$= +\ 0{,}75'' \pm 0{,}35''$.

Die Theorien von Jupiter und Saturn bieten wegen deren größeren Massen und auch wegen der zwischen ihren Umlaufszeiten bestehenden Kommensurabilität (5 : 2) größere Schwierigkeiten. Doch ist gerade bei ersteren der Erfolg der umfassenden Rechnungen *Leverriers* ein glänzender. Die Beobachtungen dieses Planeten, die in den Zeitraum 1750—1869 fallen, werden nach ihnen soweit dargestellt, daß die übrigbleibenden Fehler in heliozentrischen Längen selten mehr als $\pm 1''$ überschreiten. Weniger glücklich war *Leverrier* bezüglich des Saturn. Die älteren Beobachtungen von 1750—1826 weisen Fehler auf, die in heliozentrischer Länge $\pm 9''$ erreichen, die neueren von 1837—1869 solche von $\pm 5''$. Es hat nun *A. Gaillot*[133]) einige Irrtümer und Ungenauigkeiten in den Rechnungen *Leverriers* nachgewiesen und darnach neue Tafeln[134]) für Jupiter und Saturn konstru-

133) *A. Gaillot*, Addition à la théorie du mouvement de Saturne par Le Verrier, Paris C. R. 120 (1895), p. 26.

134) *A. Gaillot*, Tables rectifiées du mouvement de Saturne, Paris, Obs. Mém. 24 (1904), und ebenso de Jupiter, ebenda 31 (1913).

iert, die eine weit bessere Darstellung der Beobachtungen geben. Die Fehler gehen im Maximum auf $\pm 3''$, scheinen jedoch auf einen kleinen systematischen Gang hinzudeuten. Die auf die *Hansen*sche Störungstheorie sich stützenden Tafeln von *G. W. Hill*[131]) geben eine bessere Darstellung der Beobachtungen, aber auch die hier auftretenden Fehler zeigen einen gleichen systematischen Gang.[135])

Die Planeten Uranus (entdeckt am 13. März 1781 von *W. Herschel*) und Neptun (am 23. Sept. 1845 von *J. G. Galle* nach den Rechnungen *Leverriers*) sind gewissermaßen noch zu neu, als daß die theoretische Bahnbestimmung für die Elemente ihrer Bahn und ihre säkularen Veränderungen die gleiche Sicherheit geben könnte wie für die älteren Planeten. Zudem hängen beide wegen der nahen Kommensurabilität ihrer Umlaufszeiten (2 : 1) so innig zusammen, daß nur eine gleichzeitige Behandlung ihrer Bewegungstheorien möglich ist. Trotzdem ist der Erfolg der neuesten rektifizierten Tafeln von *Gaillot*[136]) ein guter. Immerhin scheint sich auch in den hier übrigbleibenden Fehlern ein systematischer Gang zu äußern, der vielfach zu Untersuchungen über einen neuen, noch jenseits des Neptun sich um die Sonne bewegenden Planeten[137]) Veranlassung gab.

Was den Schwarm der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter anlangt, so ist nur von wenigen von ihnen bis heute eine vollständige Bahnbestimmung und ein sorgfältiger Vergleich aller Beobachtungen mit der Theorie durchgeführt und von diesen wenigen genügen alle den Beobachtungen fast vollständig. Als Beispiele seien angeführt: die Theorie des Planeten *Vesta* von *G. Leveau*[138]), die den Zeitraum 1810—1880 umfaßt und in der die Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen $\Delta\alpha = +4{,}0''$ bis $-2{,}2''$ und $\Delta\delta = +3{,}9''$ bis $-1{,}4''$ liegen, dann die der *Egeria* von *H. Samter.*[139])

135) *G. W. Hill,* Comparison of the new tables of Jupiter and Saturne with the observations of Greenwich of 1889—1900, Astr. Journ. 24 (1905), p. 60. Die $\Delta\alpha$ sind meist negativ, die $\Delta\delta$ wieder positiv und langsam ansteigend bis auf $2''$ für 1900.

136) *A. Gaillot,* Tables nouvelles d'Uranus et Neptune: Paris, Obs. Mém. 28 (1910).

137) Von den zahlreichen Versuchen in der Bahnberechnung dieses sogenannten transneptunischen Planeten seien erwähnt: *G. Forbes,* Edinburgh, Roy. Soc. Proc. 10 (1880), p. 426; dann *G. Todd* in Americ. Journ of sc. 120 (1880), p. 231; *W. H. Pickering,* A search for a planet beyond Neptun, Harvard, Ann. 61 (1909); *Gaillot,* Contributions à la recherche des planètes ultraneptuniennes, Paris C. R. 148 (1909), p. 754 und *P. Lowell,* Memoir on a transneptunien planet. *Lowell,* Obs. Mem. 1 (1915).

138) *G. Leveau,* Tables du mouvement de Vesta, Paris, Obs. Mém. 21 (1896).

139) *H. Samter,* Über die Bahn des Planeten Egeria, Berl. Ber. 1901, p: 1239—1251.

Zu erwähnen wäre außerdem der Parallaxenplanet *Eros*[30]), dessen Beobachtungen aus dem Zeitraum von 1893—1907 nach den Rechnungen von *G. Witt* zu einer Bestimmung der Erdmasse führten, deren Genauigkeit alle früheren Bestimmungen weitaus übertrifft ($S:E = 327920 \pm 143$), wo jedoch, wie hier *Witt* bemerkt, in den übrig bleibenden Fehlern eine Gesetzmäßigkeit zu liegen scheint, die unmöglich von den vernachlässigten Merkurstörungen herrühren kann, deren Untersuchung aber erst kommenden Jahren überlassen werden muß.

22. Theorie der Kometen. Die Beobachtungen der Kometen besitzen nicht jenen Grad der Genauigkeit wie die der Planeten. Ihre unregelmäßige Figur, ihr verwaschenes Aussehen im Fernrohre machen sie zur genauen Pointierung und Messung wenig geeignet. Die bei einer Bestimmung einer Kometenbahn restlichen Fehler zwischen Theorie und Beobachtung sind daher im allgemeinen bedeutend größer als die bei den Planetentheorien resultierenden und daher zur Entscheidung der Frage nach dem Genauigkeitsgrad des *Newton*schen Gesetzes wenig tauglich. Dies gilt sowohl von den nur in einer Erscheinung beobachteten Kometen, wiewohl diese wieder in anderer Richtung manches Interesse bieten, so etwa Bahnunterschiede aus Beobachtungen vor und nach dem Perihel[140]), wie auch von den in mehreren Wiederkehren aufgefundenen periodischen.

Von den bisher bekannt gewordenen Anomalien in den Bewegungen der Kometen ist die des *Encke*schen durch die zu ihrer Erklärung herangezogene Lehre vom widerstehenden Medium im Weltraume populär geworden. Sie äußert sich als eine Beschleunigung seiner mittleren Bewegung Δn, erwies sich jedoch bisher nicht als eine konstante, sondern, wie aus den umfangreichen Rechnungen von *Backlund*[141]) hervorgeht, als eine diskontinuierlich veränderliche Größe. Ihr Betrag war:

---

140) Siehe die Bahnbestimmung des Kometen 1886 I von *A. Svedstrup*, Kopenhagen 1905, dessen Beobachtungen vom 1. Dezember 1885 bis 30. Juli 1886 mit dem Perihel 6. April 1886 reichen und deren Gesamtheit sich nur unter der Annahme $(k) = k\,(1 - 0{,}0000415)$, d. i. einer Verminderung der *Gauß*schen Gravitationskonstanten, darstellen ließ.

141) Zur Geschichte des *Encke*schen Kometen wären zu erwähnen: die Arbeiten von *Encke*, Fußn. 43; dann die unter Fußn. 44, 45, 46 zitierten Abhandlungen von *von Asten* und *O. Backlund*, denen noch dessen neuesten Arbeiten hinzuzufügen sind: Vergleich der Theorie des *Encke*schen Kometen mit den Beobachtungen 1894—1895, St. Petersb. Mém. 16 (1904); La comète d'Encke 1891—1908, ebenda 30 (1911); sowie die Berichte in den Astr. Nachr. 184 (1910), p. 89 u. 190, (1912), p. 49.

	1786—1819	$\Delta n = + 0{,}00167''$
zwischen	1819—1858	$= + 0{,}102651''$
„	1865—1871 schwankend zwischen	$0{,}00''$ und $0{,}06''$
	1871—1895	$+ 0{,}067715''$
	1895—1904	$+ 0{,}048600''$
	1908	$+ 0{,}01258''$.

Einen ausführlichen Bericht über den Stand der Rechnungen über periodische Kometen und über noch bei einigen anderen vermutete Beschleunigungen ihrer mittleren Bewegungen gibt *L. Schulhof.*[142])

23. Theorie des Erdmondes. Bedeutend schwieriger als für die Planeten gestaltet sich der Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung beim Erdmonde.[143]) Hier fehlt es zwar nicht an zahlreichen, jeden wünschenswerten Grad der Genauigkeit besitzenden Beobachtungen. Zudem können auch die älteren Angaben über Sonnen- und Mondesfinsternisse, von der die Geschichte berichtet, mit Erfolg dazu benutzt werden, um namentlich die säkularen Veränderungen der Bahnelemente des Mondes zu berechnen.[144]) Dafür aber sind die Schwierigkeiten einer vollen analytischen Lösung des Problems bis heute noch nicht in einer Weise überwunden, daß sie den Bedürfnissen der modernen Astronomie genügen konnte. Von den der neueren Zeit angehörenden Theorien sind zu erwähnen: 1. Die Theorie von *Hansen*[145]), nach der Tafeln gerechnet sind, die heute mit den an ihnen von *S. Newcomb* angebrachten Korrektionen im allgemeinen Gebrauche stehen und die Grundlage der in allen astronomischen Jahrbüchern veröffentlichten

---

142) *L. Schulhof,* Les comètes periodiques: état actuel de leurs théories, Paris. Bull. astr. 15 (1898), p. 323—364.

143) Zur Geschichte des Vergleiches seien erwähnt: Die Introduction historique in *A. Souchons* Traité de l'astronom. pratique, Fußn. 127; dann *Tisserand,* Méc. cél. 3 (1894), chap. 19 und Paris. Bull. astr. 8 (1891); dann ein Vortrag von *S. Newcomb,* La théorie du mouvement de la lune, son histoire et son état actuel — vor dem 4. internat. Math.-Kongreß in Rom 1908; und der Artikel von *E. Brown,* Encykl. VI 2, 14 (1915), besonders Nr. 26.

144) Die Grundlage für diese Verwendung bildet der Kanon der Finsternisse von *Th. Oppolzer*, Wien. Denkschr. 52 (1887); ferner *F. K. Ginzel*, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, Wien. Ber. 85 (1882), 88 (1883) und 89 (1884); sowie dessen spezieller Kanon über Mondes- und Sonnenfinsternisse von 900 v. Chr. bis 60 n. Chr., Berlin 1899.

145) *P. A. Hansen*, Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam luna perlustrat, Gotha 1838; dann: Die Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Leipz. Ges. Abh. 6 (1862) und 7 (1864); und Tables de la lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle, London 1857; und der Vergleich mit den Beob. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 15 (1854).

Mondephemeriden bilden, 2. die von *C. Delaunay*[146]), nach denen erst in den letzten Jahren Tafeln berechnet wurden, und 3. die modernste, sich auf die speziellen Untersuchungen *G. W. Hills* stützende Theorie von *E. Brown*[147]), nach denen Tafeln in Vorbereitung sind. Die von *Oppolzer*[148]) begonnene Theorie blieb leider unvollendet, ebenso sind noch nicht voll entwickelt die Untersuchungen von *H. Andoyer.*[149])

Schon *Hansen* gibt einen Vergleich seiner Theorie mit allen Meridianbeobachtungen des Mondes innerhalb des Zeitraumes von 1750—1850 und zeigt, daß ihre Fehler im Maximum 1—2″ betragen und nur vereinzelt auf 2,5″ ansteigen. *Newcomb*[150]) dehnte diese Vergleichungen *Hansens* 1. auf die neueren Beobachtungen bis 1870 aus und weist nach, daß die Fehler der Tafeln langsam bis auf 5″ zunehmen, 2. auf die älteren Beobachtungen vor 1750 und zwar sowohl auf vier mit ziemlich genauen Orts- und Zeitangaben von *Ptolemäus* mitgeteilte Finsternisse von 688, 382 und 189 v. Chr. und 134 n. Chr., deren Fehler — 18,5′ in Länge beträgt, wie auf drei von *Albategnius* angegebenen arabischen aus den Jahren 850, 927 und 986, deren Fehler sich zu — 2,5′ ergibt, und auf ältere Mondbeobachtungen von 1625—1750, die absteigende Fehler von — 50″ bis 0″ aufweisen. Für die neueren Beobachtungen vervollständigte *Neison*[151]) diese bis zum Jahre 1885 und fand die Tafelfehler weiter ansteigend bis — 14,8″ für das Jahr 1884.

Der Erfolg der *Hansen*schen Theorie ist daher ein zweifelhafter, und man ging natürlich eifrig daran, die Ursache dieses Mangels an Übereinstimmung aufzufinden. Dieser schwierigen Aufgabe unterzog

146) *C. Delaunay,* Théorie du mouvement de la lune, Par. Mém. 28 (1860) u. 29 (1867), mit den neuestens nach ihnen gerechneten Tafeln von *Radau*: Tables de la lune, fondées sur la théorie de *Delaunay*, Par. Bureau des longit. 7 (1911).

147) *E. W. Brown,* Investigations in the lunar theory, Amer. J. of Math. 17 (1895), p. 318—358; und Theory of the motion of the moon, London Astr. Soc. Mem. 53 (1897 u. 1899), 54 (1900), 59 (1908).

148) *Th. v. Oppolzer*, Entwurf einer Mondtheorie, Wien. Ak. Denkschriften 52 (1886); und nach dessen Tode *R. Schram,* Zum Entwurf einer Mondtheorie gehörende Entwicklung der Differentialquotienten, ebenda 54 (1888).

149) *H. Andoyer,* Théorie de la lune, Toulouse Fac. Ann. 6 (1892), 7 (1893); dann Toulouse Obs. Ann. 3 (1899); Par. Bull. astr. 18 (1901), 19 (1902), 24 (1907).

150) *S. Newcomb,* Researches of the motion of the moon, Wash. Obs. App. 2 (1875).

151) *E. Neison,* London Astr. Soc. Mem. 48 (1884). Weitere Literaturangaben über Vergleiche zwischen Theorie und Beobachtungen findet man in: Encykl. VI 2, 14 (*E. Brown*), Nr. 26.

sich *S. Newcomb.*[152]) Er verglich die Sonnenstörungen nach *Hansen* mit denen nach *Delaunay.* Beide nach ganz verschiedenen Methoden gerechnet, stimmen so gut miteinander überein, daß mit Recht gesagt werden kann, das Problem der Berechnung dieser Störungen sei durch sie praktisch vollständig gelöst. Nur in den Planetenstörungen zeigte sich eine Differenz. *Hansen* hatte hier zwei langperiodische Glieder, die von den Störungen der Venus herrühren und die Form

$$G_1 = 15{,}34'' \sin(18V - 16E - g + 30{,}2^0) \ldots \text{ Periode } 273 \text{ Jahre}$$
$$G_2 = 21{,}47'' \sin(8V - 13E + 4{,}44^0) \ldots \qquad \text{,,} \quad 239 \quad \text{,,}$$

haben, gefunden, während sie nach *Delaunay* die Amplituden

$$16{,}34'' \quad \text{und} \quad 0{,}27''$$

besitzen. Eine zweite Differenz bezieht sich auf die von *Halley* entdeckte und zuerst von *Laplace* auf ihre wahre Ursache zurückgeführte säkulare Beschleunigung in der mittleren Länge des Mondes. *Hansen* gab für sie den Wert von 12,17″, *Delaunay* dagegen bloß von 6,18″, welcher schließlich nach anderen theoretischen Entwickelungen als der richtigere anerkannt wurde.[153]) Die *Newcomb*schen Korrektionen der *Hansen*schen Tafeln, als Ergebnis seiner umfassenden Rechnungen, die daher als Fehler der Theorie und als gegen die unbedingte Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes sprechende Anomalien in der Bewegung des Mondes aufzufassen wären, erstrecken sich auf folgende Fälle:

1. Das Störungsglied G_1 ist weder in der Form von *Hansen* noch in der von *Delaunay* richtig, sondern durch

$$G_1 = +\,12{,}95'' \sin(18V - 16E - g + 100{,}6^0) =$$
$$+\,12{,}95'' \sin(1{,}31^0\,(t - 1800) + 100{,}6^0)$$

zu ersetzen. (Das Glied G_2 ist fast gleich Null, d. h. von *Delaunay* richtig berechnet.)

2. Aus einer strengen Ausgleichung aller geschichtlich übermittelten Finsternisse von 720 v. Chr. bis 134 n. Chr. folgt als säkulare Beschleunigung der mittleren Mondlänge 7,96″ im Jahrhundert, während die besten Theorien für sie nur 6,08″ geben, so daß ein bisher unerklärter Rest von $1{,}88'' \equiv 2''$ übrig bleibt.

3. Außerdem zeigen sich jedoch in den Abweichungen zwischen

152) *S. Newcomb,* s. Fußn. 150; ferner Investigation of corrections to *Hansens* tables of the moon, Wash. Obs. 1876; On the mean motion of the moon. Amer. J. of Math. 1877; A transformation of *Hansens* lunar theory compared with that of *Delaunay,* Wash. Obs. 1882.

153) Über die Geschichte dieser Berechnung s. *E. Brown,* Encykl. VI 2, 14, Nr. 23.

Beobachtung und Rechnung noch kleinere Schwankungen (von *Newcomb* Fluktuationen genannt) mit einer Amplitude von 3″ und fast zwanzigjähriger, und von 1″ in etwa dreijähriger Periode. Ein anschauliches Bild von ihnen gibt *S. Newcomb* in der Abhandlung[154]) Fluctuations in the mean motion of the moon.

Es sind dies Resultate, die *E. Brown*[155]) auf Grund eines Vergleiches der von *Newcomb* abgeleiteten Mondörter mit seiner eigenen Theorie bestätigt, wenn auch die Kurve der Abweichungen nach seinen mit denen nach *Newcombs* Bestimmungen nicht voll zusammenfällt. Der Grund hiervon liegt hauptsächlich darin, daß *Newcomb* den *Helmert*schen Wert der Erdplattung 1 : 298,3 seinen Rechnungen zugrunde legt, *Brown* dagegen den *Hayford*schen 1 : 296, ja sogar auf 1 : 294 zurückgreift, und ihm die Werte der Bahnelemente des Mondes anpaßt, auf die seine neuen Tafeln sich stützen sollen.

24. **Theorie der Satelliten und Doppelsterne.** Weder die Theorie der Satelliten der anderen Planeten als der der Erde, noch die der visuellen, dann der optisch nicht trennbaren spektroskopischen Doppelsterne und noch weniger die der photometrischen Bedeckungssterne sind zu einem vollgültigen Nachweise für die Genauigkeit des quadratischen Entfernungsgesetzes in der *Newton*schen Formel geeignet. Hauptsächlich aus dem Grunde, weil die ihnen zugrunde liegenden Messungen nicht den Grad der Präzision besitzen, der denen der Planeten zukommt. Bei den Doppelsternen tritt außerdem noch die Frage hinzu, ob die *Newton*sche Gravitationskraft allein imstande ist, deren Bewegungen zu erklären. Man gelangt durch diese Frage, wie bekannt, zu dem rein mathematischen Problem, aus der beobachteten Bahn zweier Körper umeinander das Gesetz der zwischen ihnen wirkenden Kraft zu berechnen, das zuerst von *J. Bertrand*[156]) ausgesprochen wurde.

Im großen und ganzen hat sich in diesen Systemen das *Newton*sche Gesetz bewährt, doch über etwaige kleine Korrektionsglieder, die innerhalb unseres Planetensystems zu den unleidlichsten Mißstimmungen zwischen Theorie und Beobachtung Veranlassung geben würden, können sie keine Auskunft geben. Wie es sich nun gar mit der Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes als genauer Formel durch die weiten

154) London Astr. Soc. Month. Not. 69 (1909), p. 169.

155) *E. Brown,* The longitude of the moon, London Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), 75 (1915); und Encykl. VI 2, 14 (1914), Nr. 26. Vgl. als Schlußdarstellung seiner Mondtheorie den Vortrag vor der Britt. Ass. for the Adv. of Science: Science 40 (1914), p. 389—401.

156) Über das *Bertrand*sche Problem vgl. *F. Tisserand,* Méc. cél. 1, chap. 2.

Fixsternräume verhält, darüber liegt bis jetzt auch nicht die geringste Erfahrung vor.[157]) Auch die neueren Arbeiten über die Bewegungsverhältnisse in Sternhaufen[158]), die an die Verteilung der Sterne in ihnen anknüpfen, können hier keine Änderung bringen.

IV. Versuche zur Erklärung der Bewegungsanomalien auf Grund des Newtonschen Gesetzes.

25. Hypothetische Massen. a) *Einwirkung eines Planeten oder eines Planetenringes.* Vor allem erregte die größte unter den konstatierten Bewegungsanomalien der Planeten, die säkulare Störung in der Perihellänge des Merkur, die Aufmerksamkeit. Sie beträgt

$$e\Delta\pi = 8''78 \quad \text{und mit Rücksicht auf } e = 0{,}2056 \quad \Delta\pi = 41''25.$$

Schon *Leverrier*[159]) hat den Versuch ausgeführt, sie durch die Einwirkung eines Planeten oder einer Gruppe von mehreren, d. i. mehr oder weniger eines Schwarmes von Planeten nach Art der sich zwischen Mars und Jupiter bewegenden Asteroiden zu lösen. Die Theorie verlangt, daß dieser Planet oder Planetenring zwischen Sonne und Merkur liegen müsse, sonst würde er eine ähnliche Störung auf die Venus ausüben. Sie verlangt weiter, daß seine Bahnebene nahezu mit der des Merkur zusammenfalle, soll nicht in dessen Bahn eine Knotenbewegung entstehen, die die Theorie heute nicht zeigt. Die Frage, ob dieser Planet oder Ring von Planeten wirklich existiert, beschäftigte lange Zeit hindurch die Astronomen[160]), doch das eifrigste Nachforschen nach ihm führte bisher zu keinem positiven Ergebnis.

---

157) Vgl. *Seeliger,* „Über Doppelsterne" im Handwörterb. der Astr., Breslau 1897, p. 671—696, enthalten in *Klinkerfuß-Buchholz,* Theoret. Astr., Braunschw. 1912, 3. Aufl., p. 776; sowie auch *Seeliger*, Über das Newtonsche Gesetz, Münch. Ber. 26 (1896), p. 383.

158) Von den hierher gehörigen Arbeiten wären zu erwähnen: *A. S. Eddington,* The Dynamic of a globular cluster, London Astr. Soc. Month. Nat. 74 (1914), 75 (1915), 76 (1916); ferner *J. H. Jeans*, The kinetic theory of Starcluster, ebenda 74 (1914), 75 (1915); dann *C. V. L. Charlier* bes.: Statistical Mechanics based on the Law of Newton, Lund. Medd. 14 (1916); *E. Strömgren,* Astr. Nachr. 203 (1916) und *J. Lense,* ebenda 204 (1917).

159) *Leverrier,* Par. Obs. Mém. 5 (1859); vgl. ferner *J. Bauschinger*, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur, München 1884, p. 15 ff.; dann *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, chap. 29, p. 525 und *P. Harzer,* Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten, Leipz. Ak. Preisschr. 1895, p. 68.

160) Vgl. die Entdeckung des Planeten „Vulkan" durch den Amateur *Lescarbault* und die an sie sich knüpfenden Rechnungen von *Leverrier*, Les planètes intramercurielles, Astr. Nachr. 88 (1876), p. 347; dann *v. Oppolzer*, Elemente des Vulkan, ebenda 94 (1879), p. 97 u. 303, sowie eine Entgegnung von *C. H.*

Bezeichnet m_1 die Masse des Planeten, d_1 seine Entfernung von der Sonne und n_1 seine mittlere Bewegung, so ist die Perihelstörung, die er auf einen zweiten Planeten mit den entsprechenden Größen m, d und n ausübt, gegeben durch:

$$\Delta\pi = \frac{nd}{e(1+m)} \cdot \frac{m_1 d_1}{2\pi}\left[C_0'' - a_1 C_0'\right], \tag{29}$$

worin C_0'' und C_0' aus dem Säkularteil der Störungsfunktion zu berechnende Koeffizienten sind. Der Ausdruck enthält zwei Unbekannte m_1 und d_1 und gestattet es nur für beliebige d_1 das zugehörige m_1 zu finden. Man erhält

	$d_1 = 0{,}23$	$m_1 = 1:7000000$	größte Elongation	13^0
	$0{,}19$	$1:4700000$	von der Sonne	11
(29a)	$0{,}15$	$1:2350000$		9
	$0{,}1426$	$1:1992000$		9
	$0{,}00466$	$1:\quad 1551$		0,

während für Merkur $d = 0{,}388$, $m = 1:6000000$ ist. Es folgt somit für die Mitte der Distanz Merkur—Sonne eine Masse, welche der des Merkur ungefähr gleich kommt, ja vielleicht sie übertrifft, und eine Elongation von der Sonne von 10—13°, die, wenn der fragliche Planet auch bei gewöhnlicher Durchforschung des Himmels durch die Sonnenstrahlen verdeckt würde, ihn doch bei Sonnenfinsternissen als einen glänzenden Stern oder bei seinen häufigen Vorübergängen vor der Sonnenscheibe als einen scharf begrenzten Punkt hervortreten lassen müßte. Nichts von dem allen ist durch die Erfahrung bestätigt, noch weniger in den Fällen, wo seine Distanz von der Sonne kleiner wäre als 0,19. Die Annahme $d_1 = 0{,}1426$ entspricht der *Leverrier*schen Bahnbestimmung des *Lescarbault*schen[160]) Planeten.

Die Hypothese eines Planeten ist daher unter allen Umständen fallen zu lassen und durch die eines Planetenringes zu ersetzen. Für die Wirkung eines solchen, ihn in der Form eines Kreises annehmend und seine Masse mit m_1 bezeichnend, findet man[161])

$$\Delta\pi = \frac{m_1 n_1}{d_1^2} = k m_1 d_1^{-\frac{7}{2}}, \tag{30}$$

aus welcher Gleichung, da $\Delta\pi = 41''25$ ist, m_1 zu berechnen ist. Wendet man den so gefundenen Wert auf die anderen inneren Planeten an, so erhält man

für Venus:	$\Delta\pi = 4{,}6''$	Erde: $1{,}5''$	Mars: $0{,}34''$
	$e\Delta\pi = 0{,}032''$	$0{,}025''$	$0{,}031''$,

Peters, ebenda p. 303, 321, 337; ferner *v. Oppolzer*, Vortrag über das Newtonsche Attraktionsgesetz in der Vers. deutscher Naturf. u. Ärzte, Salzburg 1881.

161) *S. Newcomb*, Fund. const., p. 112.

d. h. eine entsprechend der $\frac{7}{2}$ Potenz der Bahnachse des gestörten Planeten so rasche Abnahme der Wirkung, daß sie schon für den nächsten, die Venus, als unmerklich angesehen werden kann.

Will man es gleichzeitig versuchen auch die kleine — aber doch scheinbar reelle — Knotenstörung der Venus mit in die Berechnung der Masse m_1 des Planetenringes einzubeziehen, indem man dessen Ebene als nicht mit der des Merkur zusammenfallend annimmt, so folgt für deren Lage in bezug auf die Ekliptik[162])

$$i = 9^0 \quad \Omega = 48^0,$$

aber, this great inclination, meint hierzu *Newcomb*, seems in the highest degree improbable if not mechanically impossible, since there would be a tendency for the planes of the orbits of a ring of planets so situated to scatter themselves around a plane somewhere between that of the orbit of Mercury and that of the invariable plane of the planetary system, which is nearly the same as that of the orbit of Jupiter. — Diese Instabilität wäre als der einzige Grund gegen die Zulässigkeit dieser Hypothese anzuführen, während für sie ihre relative Einfachheit spricht sowie der Umstand, daß im Sonnensystem Analoga für sie im Schwarm der kleinen Planeten oder im Ring des Saturn vorhanden sind.

b) *Elliptizität der Sonne und die Sonnenkorona.* Denkt man sich den supponierten Planetenring direkt an die Sonne angelegt und dann seine Masse derart vom Äquator gegen die Pole hin verteilt, daß eine ellipsoidische Gestalt der Sonne entsteht (in diesem Sinne ist in der Gleichung (29a) die 5. Zeile zu verstehen, in der für $a_1 = 0{,}00466$, d. i. den Radius der Sonne in astronomischen Längeneinheiten das zugehörige $m_1 = 1 : 1551$ berechnet erscheint), so bedeutet jetzt diese Zahl ihre äquatoreale Ausbauchung im Verhältnis zu ihrer ganzen Masse. Ihr entspricht, wenn man die beiden Radien der Sonne am Pol und am Äquator mit r_a und r_p bezeichnet, nach der Beziehung

$$\frac{4\pi}{3} r_a^2 r_p - \frac{4\pi}{3} r_p^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot r_a^2 r_p : 1551$$

genähert der Abplattungswert

$$(r_a - r_p) : r_a = 1 : 3100$$

oder auf die scheinbare Größe der Sonne bezogen, eine Differenz der Radien im Betrage von $0{,}32''$.

Der aus der Rotationsgeschwindigkeit der Sonne resultierende

162) Merkwürdigerweise weicht diese Bahnebene nur wenig von der Rotationsebene der Sonne ab, für die die entsprechenden Zahlen $i = 7^0$, $\Omega = 74^0$ lauten.

theoretische Wert der Abplattung liegt jedoch zwischen den Grenzen[163])

$$1:37000 \quad \text{und} \quad 1:93000.$$

Direkte Messungen an der Sonne ergaben, wie dies eine sorgfältige Diskussion aller Sonnenbeobachtungen durch *A. Auwers*[164]) nachgewiesen hat, keine — oder höchstens nur eine — solche Spur, für deren obere Schranke 1 : 50 000 anzusetzen wäre. Damit ist auch der negative Erfolg dieser Hypothese entschieden.

Kann so die störende Masse nicht innerhalb der Photosphäre der Sonne liegen, so sucht sie nunmehr *Harzer*[165]) wiederum außerhalb, aber in deren unmittelbaren Umgebung, in der bei Sonnenfinsternissen sichtbaren Korona. Die Annahme, daß sie eine mittlere Dichte von $\frac{1}{15}$ des Wasserstoffgases habe, und daß ihr eine vorwiegende Ausbreitung in der Ebene des Sonnenäquators zukomme, würde genügen, um sowohl die anomale Perihelbewegung des Merkur voll zu erklären, ohne dessen Knotenbewegung zu ändern, noch auf die entfernteren Planeten Venus und Erde eine merkliche Einwirkung auszuüben. Man könnte sich dabei die Masse der Korona entweder in einem kreisförmigen Ring kondensiert denken, der eine sehr geringe Dicke hat, und dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der Sonne und dessen Ebene mit dem Äquator der Sonne zusammenfällt, oder in einem Zylinder, der mit seinen parallelen Grundflächen die Sonne berührt, und dessen Durchmesser etwa viermal so groß ist als der der Sonne.

Dieser Annahme entsprechend führt *Harzer* in die Gleichungen für die säkularen Veränderungen der Bahnelemente der vier inneren Planeten mit den von *Newcomb* für sie festgestellten empirischen Werten als neue Unbekannte ein: 1. Die Differenz der Hauptträgheitsmomente des Systems Sonne und Korona und 2. die Masse m des Schwarms der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter, diese zu dem Zwecke, um gleichzeitig die kleine Anomalie in der Perihelbewegung des Mars von 0,75″ herabzudrücken, und findet als Lösung für die erste

$$(C - A) : S = \delta = 111{,}18 \ldots$$

was seiner mechanischen Wirkung nach auf die Bewegung des Merkur

163) Vgl. *S. Oppenheim*, Encykl. VI 2, 21, Nr. 2.

164) *A. Auwers*, Untersuchungen über den Durchmesser der Sonne, Berl. Ber. 1886 u. 1887; sowie Der Sonnendurchmesser und Venusdurchmesser nach Beobachtungen an den Heliometern der deutschen Venus-Expedition, Astr. Nachr. 128 (1891).

165) *P. Harzer*, Über die Rotationsbewegung der Sonne, Astr. Nachr. 127 (1891), p. 17; dann Über die Bewegung der Merkurperihels, ebenda 127 (1891), p. 81 sowie in der Preisschrift, p. 70 u. 230.

identisch wäre mit einer Sonne, deren Abplattung 1 : 72000 merklich unter die von *Auwers* für sie vorgeschriebene Grenze fällt, für die zweite

$$m = 1 : 2070000,$$

welcher Wert gegenüber dem aus statistischen Überlegungen gefundenen als zu groß bezeichnet werden muß.

Unsere Kenntnisse von der Sonne, ja dem ganzen Komplex von Erscheinungen, den uns die Sonne mit ihrer Umgebung bietet, fügt *Harzer* hinzu, sind noch zu gering, als daß man über die Zulässigkeit einer ohnehin nur auf eine sehr genäherte Rechnung sich stützenden Hypothese ein klares Urteil fällen könnte.

c) *Ein Merkurmond.* Einen neuen Versuch, die Bewegungsanomalie des Merkur zu erklären, führt *E. Härdtl*[166]) ein durch die Annahme, der Planet sei von einem bisher noch nicht entdeckten Mond begleitet. Durch das Vorhandensein eines solchen erfährt er eine Perihelstörung, die genähert durch

$$\Delta\pi = \frac{3}{4}\frac{m_1}{m}\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 nt \tag{31}$$

dargestellt wird, wenn m, n und d sich auf den Planeten, m_1 und d_1 auf den fraglichen Mond beziehen, oder in Zahlen umgesetzt:

$$0{,}41'' = 3945000\, m_1 d_1^2 : m d^2,$$

eine Gleichung, die wieder zwei Unbekannte enthält. Einander zugeordnete Werte sind

$m_1/m = 1 : 80$	$d_1 : d = 0{,}00295$	$T =$ (Umlaufszeit) $= 33$ Tage
„ $= 1 : 100$	„ $= 0{,}00330$	„ $= 39$ „
„ $= 1 : 200$	„ $= 0{,}00466$	„ $= 66$ „ .

Ungünstig für diesen neuen Versuch ist wie bei den früheren die gar zu große Masse, die darnach der Mond haben müßte, um die Störung in dem konstatierten Betrage von 41″ (nach *Leverrier*) zu erklären und demgemäß auch die große Helligkeit, mit der er in der Nähe des Merkur aufleuchten würde, so daß es unwahrscheinlich ist, daß er sich bis heute habe der Wahrnehmung entziehen können. Dazu kommt noch, daß, um keine Knotenstörung zu erhalten, die in diesem Falle retrograd sein würde, die Annahme gemacht werden müßte, daß seine Bahnebene genau mit der des Merkur zusammenfalle.

d) *Das Zodiakallicht und die Seeligersche Theorie. Seeliger*[167]) führt

166) *E. Härdtl,* Zur Frage nach der Perihelbewegung des Planeten Merkur, Wien. Ber. 103 (1894). Für die Erde beträgt die durch die Anwesenheit des Mondes hervorgerufene säkulare Perihelstörung $0{,}0698'' t^2$.

167) *Seeliger,* Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht, Münch. Ber. 1901; dann Über die sogenannte absolute Bewegung, ebenda 1906, und Das

die Erscheinung des Zodiakallichts auf eine fein verteilte Materie zurück, die sich symmetrisch um die Sonne gruppiert, wie aus den Beobachtungen sich nachweisen läßt, über die Erdbahn hinausragt und deren Flächen gleicher Dichtigkeit scheibenförmige Rotationsflächen (stark abgeplattete Rotationsellipsoide) sind, deren Dichte mit der Entfernung von der Sonne abnimmt. Auf Grundlage dieser Anschauung stellt er sich die Aufgabe, Dichte und Bahnlage dieser Ellipsoide nicht bloß aus der anomalen Perihelbewegung des Merkur, sondern gleichzeitig aus allen Resten zu berechnen, die, wie die *Newcomb*sche Ausgleichsrechnung zeigt, in den säkularen Variationen der Elemente der vier inneren Planeten übrig bleiben (Gleich. (28), p. 125), doch, wie leicht erklärlich, mit Ausnahme deren Exzentrizitäten. Ursprünglich nimmt er fünf solcher Ellipsoide an, in den Distanzen

0,10 0,17 0,24 0,60 1,2235.

Die Rechnung zeigt aber, daß die Koeffizienten, die die den drei ersten Ellipsoiden entsprechenden Störungsbeiträge zu den säkularen Veränderungen bestimmen, so nahe proportional verlaufen, daß nicht daran gedacht werden könne, ihre Wirkungen voneinander zu trennen. Die drei Flächen wurden daher zu einer in der Distanz 0,24 vereinigt, dessen Dichte ϱ_1, Bahnlage i_1 und Ω_1 die ersten drei Unbekannten des Problems bildeten. Ebenso wies der Verlauf der Koeffizienten nach, daß das 4. Ellipsoid (Distanz 0,60) keinen nennenswerten Beitrag zur Darstellung der empirischen Korrektionen liefere. Es wurde daher nicht weiter berücksichtigt und blieb nun noch das 5. übrig, das zwischen Erde und Mars liegt, in der Distanz 1,224. Für dieses wurde die Annahme gemacht, daß seine Äquatorebene mit der Äquatorebene der Sonne zusammenfalle und daher bloß seine Dichte ϱ_2 als 4. Unbekannte angesetzt ist. Was die Abplattungen der Ellipsoide betrifft, so zeigte sich ebenfalls, daß sie innerhalb weiter Grenzen willkürlich angenommen werden konnten, ohne eine wesentliche Änderung in der Darstellung der empirischen Restglieder zu veranlassen. Es wurde für das erste Ellipsoid die Elliptizität $\lambda = 10$, für das zweite $\lambda = 5$ angesetzt, denen die Abplattungen 0,9 bzw. 0,8 entsprechen. Daß diese Annahmen die Massenverteilung im Zodiakallicht nur in ganz allgemeinen Umrissen bestimmen, ist klar, aber dies spricht, wie hier *Seeliger* meint, mehr zu gunsten als zu ungunsten der ganzen Hypothese.

Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, ebenda 1906, p. 595; sowie Astr. Ges. Vjs. 41 (1906). Vgl. auch den Artikel *Anding*, Encykl. VI 2, 1: Über Koordinaten und Zeit, besonders Nr. 5: Mechanische Bestimmung der Präzessionskonstanten.

Neben diesen vier Unbekannten, ϱ_1, i_1 und Ω_1 für das erste Ellipsoid ($d_1 = 0{,}24$) und $\varrho_2 (i_2 = 7^0, \ \Omega_2 = 78^0, \ d_2 = 1{,}2235)$ für das zweite, wurde jedoch noch eine fünfte eingeführt, die sich zur Darstellung der *Newcomb*schen Restglieder als wichtig, ja als unumgänglich notwendig erwies. Es ist dies die Rotationskomponente r (die bezüglichen p und q ergaben sich beide als nahezu $= 0$), die sich auf die Orientierung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie gegen das „absolute“ oder Inertialsystem bezieht und die hundertjährige Drehung dieses Systems um eine auf der Ekliptik senkrechte Achse bedeutet, für deren Einführung schon vorher von *Seeliger* und *Anding* Vorarbeiten durchgeführt worden waren.

Die Rechnung ergab für die fünf Unbekannten die Werte:

$$i_1 = 6{,}95^0 \pm 0{,}97^0 \qquad \Omega_1 = 40{,}03^0 \pm 7{,}3^0$$
$$\varrho_1 = 2{,}18 \cdot 10^{-11} \qquad \varrho_2 = 0{,}31 \cdot 10^{-11} \qquad r = 5{,}693'' \pm 1{,}68''$$

und mit ihnen die Darstellung:

(32)

		Newcomb	Ellipsoid 1.	2.	r	Summe	Beob.-Rechn.	mittlerer Fehler
$e\Delta\pi$	Merkur	+8,48″	+7,396″	−0,108″	+1,203″	+8,49″	−0,01″	±0,43″
	Venus	−0,05″	+0,015″	−0,009″	+0,040″	+0,05″	−0,10″	±0,25″
	Erde	+0,10″	+0,012″	−0,037″	+0,098″	+0,07″	+0,03″	±0,13″
	Mars	+0,75″	+0,014″	+0,033″	+0,546″	+0,59″	+0,16″	±0,35″
$i\Delta\Omega$	Merkur	+0,61″	−0,049″	−0,016″	+0,713″	+0,65″	−0,04″	±0,52″
	Venus	+0,60″	+0,088″	+0,144″	+0,346″	+0,58″	+0,02″	±0,17″
	Mars	+0,03″	+0,014″	+0,030″	+0,189″	+0,23″	−0,20″	±0,22″
Δi	Merkur	+0,38″	+0,574″	−0,057″	—	+0,52″	−0,14″	±0,80″
	Venus	+0,38″	+0,159″	+0,009″	—	+0,17″	+0,21″	±0,33″
	Mars	−0,01″	+0,003″	−0,020″	—	−0,02″	+0,01″	±0,20″

zeigt, daß alle größeren Differenzen, wie $e\Delta\pi$ bei Merkur und Mars und $i\Delta\Omega$ bei der Venus, fast vollkommen verschwunden und die an sich kleineren vorhandenen nirgends merklich oder ungebührlich vergrößert wurden. Damit ist wohl die Aufgabe, die empirischen Korrektionen in den Bewegungen der inneren Planeten auf eine störende Einwirkung des Zodiakallichtes zurückzuführen, wobei über die Verteilung der Massen in ihm ganz plausible, nirgends irgendwie unzulässige oder den Beobachtungen widersprechende Annahmen vorliegen, gelöst, doch entstehen Bedenken über den Einfluß, den sie möglicherweise auf die Lage der Ekliptik — als der Bahnebene der Erde — und auch der des Erdmondes haben können. Diese Bedenken zerstreute *W. de Sitter*[168]), welcher, gestützt auf Rechnungen von

168) *J. Woltjer*, On the *Seeligers* hypothesis about the anomalies in the motion of the inner planets, und *W. de Sitter*, Remarks on M. *Woltjers* paper concerning *Seeligers* hypothesis, Amsterd. Proceed. 17 (1914), p. 23 u. 26. Vgl.

Woltjer, findet, daß der Einfluß der zwei *Seeliger*schen Ellipsoide sowie der von ihm angenommenen Rotation des empirischen Koordinatensystems sowohl auf die Lage der Ekliptik und die Präzessionsgröße, wie auch auf die der Mondbahn nur unmerklich ist. Die durch sie hervorgerufenen Störungen fallen innerhalb der für diese durch die Beobachtungen festgelegten Fehlergrenzen. Sie betragen für den Mond als hundertjährige Variationen des Perigäums und des Knotens $+ 2''$ bzw. $- 2''$.

26. Die Hypothese des widerstehenden Mediums. a) *Enckes Hypothese.* Die Hypothese des widerstehenden Mediums wurde von *Encke*[169]) eingeführt, um die § 22 erwähnte Anomalie in der Bewegung des nach ihm benannten Kometen zu erklären. Die Einführung erfolgte auf eine von *Olbers* gegebene Anregung hin trotz des Widerspruches *F. W. Bessels*[170]), der den störenden Einfluß auf die Bewegung des Kometen als eine Art Rückstoß betrachtet wissen wollte, den die bei der Schweifbildung tätigen Kräfte auf die Bewegung ausüben. Doch der Erfolg blieb zunächst auf der Seite *Enckes*. Vom Jahre 1786—1865, in den zahlreichen Erscheinungen des Kometen während dieses Zeitraumes, war die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen eine so entsprechende auf Grundlage der neu eingeführten Hypothese, daß an ihrer Richtigkeit nicht gezweifelt werden konnte. Im Jahre 1865 trat die erste Wendung ein. Die von da ab nach *Enckes* Tode von *Asten*[44]) fortgeführten — und außerdem bis 1819 zurückgreifenden — Bahnberechnungen des Kometen zeigten, daß für den Zeitraum von 1865—1871 die Störungen der Planeten ausreichend und die Berücksichtigung einer außergewöhnlichen Anomalie nicht notwendig sei, um zwischen Beobachtung und Rechnung die erwünschte Harmonie herzustellen, daß aber wieder im folgenden Umlaufe 1875 ein besserer Einklang erzielt werde, wenn man die

---

auch *G. O. James*, Relation on the inertial and empirical trihedrion of gravitational system, Astr. J. 27 (1913), p. 77.

169) Siehe Fußn. 43. Über das widerstehende Medium, im Zusammenhange mit der Theorie des *Encke*schen Kometen, und auch vom allgemeinen astronomischen Standpunkte hat sich eine reiche Literatur gebildet; vgl. *Rebeur-Paschwitz*, Über eine Bewegung der Kometen im widerstehenden Medium, Berlin 1883; ferner *L. Picart*, Sur l'accélération apparente du mouvement de quelques comètes periodiques, Par. Bull. astr. 21 (1904); *A. Wilkens*, Über die kosmogonische Bedeutung der durch Auflösung des Kometen entstehende Bewegungsanomalie, Astr. Nachr. 196 (1914), p. 57.

170) *F. W. Bessel*, Bemerkungen über die mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehung allein berücksichtigenden Theorie der Kometen, Astr. Nachr. 13 (1840), p. 345 = Ges. Abh. 1, p. 80.

*Encke*sche Hypothese zu Hilfe nehme; nur sei die Störung bloß $\frac{2}{3}$ der von *Encke* vorher bestimmten. Von da ab blieb, wie der neue Rechner *O. Backlund*[45]) nachweist, sie wieder konstant bis 1895 und erlitt da eine nochmalige Verringerung um $\frac{1}{3}$, und wie es den Anschein hat, eine letzte im Jahre 1908.

Um diese neuen Unregelmäßigkeiten zu erklären, nimmt *Backlund* an, daß die säkulare Beschleunigung Δn der mittleren täglichen Bewegung des Kometen proportional mit der Zeit, gemäß der Gleichung

$$\Delta n = \Delta n_0(1 - \nu t)$$

abnehme; eine Neuausgleichung aller Beobachtungen auf ihrer Basis gibt jedoch

$$\nu = 0.$$

Er setzt ferner

$$\Delta n = \Delta n_0(1 - \gamma),$$

wobei γ von den durch die Störungen der Elemente bedingten Veränderungen abhängig sein soll. Doch auch da wird die beste Darstellung der Beobachtungen erzielt, für

$$\gamma = 0.$$

Die Akzeleration der mittleren Bewegung des *Encke*schen Kometen, schließt *Backlund*, ist eine der bestkonstatierten astronomischen Tatsachen. Niemand kann sie leugnen, aber in ihrer Erklärung können die Meinungen auseinandergehen. Es scheint durch die Untersuchung bewiesen zu sein, daß die einfache Hypothese eines widerstehenden Mediums, das in irgendwie regelmäßiger Verteilung um die Sonne lagert, und dessen Dichte daher mit der Entfernung von der Sonne kontinuierlich nach einem bestimmten Gesetze abnimmt, mit der beobachteten Bewegung des Kometen nicht verträglich ist. Vielmehr wären hier diskontinuierliche Störungen anzunehmen, und, wie aus den Beobachtungen mit großer Wahrscheinlichkeit folgt, dürften solche besonders in den Jahren

1858, 1868, 1895 und 1908

stattgefunden haben[171]). Damit wird aber die ursprüngliche *Encke*sche Hypothese auf die *Seeliger*sche von der Erfüllung des ganzen Weltenraumes mit kosmischen Staubmassen zurückgeführt.

---

171) Man fühlt sich da gedrängt, einen Zusammenhang zwischen diesen Störungen und anderen Erscheinungen am Himmel aufzusuchen. Vor allem bieten sich die Perioden größerer Aktivität auf der Sonne als geeignetste Vergleichsobjekte dar. Vgl. *O. Backlund*, London Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910). Doch sind solche Koinzidenzen stets mit großer Vorsicht anzusetzen. Vgl. den Artikel *J. Holetschek*, Über die Bewegungs- und Helligkeitseigentümlichkeiten des *Encke*schen Kometen, Wien. Sternw. Kalender 1915.

b) *Seeligers Theorie*[172]). Die Massen, welche nach der *von Seeliger*schen Theorie den ganzen Welt-, oder wie hier bloß in Betracht zu ziehen ist, den interplanetarischen Raum erfüllen, und hauptsächlich der Anziehung der Sonne folgend, nach den *Kepler*schen Gesetzen ihre bestimmten Bahnen um sie beschreiben, können in zweifacher Richtung auf die sich in ihnen bewegenden Himmelskörper eine störende Wirkung ausüben:

1. in der durch Zusammenstöße mit der Erde und dem Monde erzeugten Vergrößerung ihrer Massen, was für die Erde mit einer Änderung ihrer Rotationsdauer verbunden ist, Umstände, auf die zuerst *Th. v. Oppolzer*[173]) aufmerksam machte und sie zur Erklärung der Unregelmäßigkeit in der mittleren Bewegung des Mondes heranzuziehen versuchte; von ihr soll weiter unten, Nr. 27 c, die Rede sein.

2. in einer Art von durch diese Staubwolken verursachtem Widerstand, bei dem, wie die bezüglichen Entwickelungen *Seeliger*s es zeigen, die störenden Einflüsse proportional sind dem Quadrate der Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers (Kometen) und der Dichte dieser Massen als ihrer Menge in der Volumseinheit, ein Ergebnis, das den Annahmen *Encke*s über die Wirkungsweise des widerstehenden Mediums vollständig entspricht, so daß hierdurch die Bewegungsanomalie des *Encke*schen Kometen nicht nur formal, sondern auch durch den Umstand, daß die Verteilung der Massen um die Sonne eine ganz unregelmäßige ist, mithin diskontinuierliche Dichtigkeitsänderungen in ihnen sehr wahrscheinlich sind, die sonst rätselhaften Änderungen in den Widerstandskonstanten ihre Erklärung finden könnten.

---

172) *H. v. Seeliger,* Über Zusammenstöße u. Teilungen planetarischer Massen, Münch. Akad. Abh. 17 (1891).

173) *Th. v. Oppolzer,* Über eine Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Säkularakzeleration in der Länge des Mondes und der tatsächlichen bedingen kann, Astr. Nachr. 108 (1884), p. 67, und die Bemerkungen dazu von *C. Braun,* ebd. p. 259. Die *Oppolzer*sche Anschauung gab zu dem neuen Problem Veranlassung, die Bewegung zweier Körper umeinander für den Fall, daß ihre Massen mit der Zeit veränderlich sind, zu untersuchen. *H. Gyldèn* hat dasselbe zuerst behandelt, Astr. Nachr. 109 (1884), p. 1; dann *E. O. Lovett*, ebd. 158 (1902), p. 337; *J. Meschtschersky,* Astr. Nachr. 132 (1892), p. 192; 158 (1902), p. 337; vgl. das Referat von *R. Radau* in Paris Bull. Astr. 19 (1902), p. 462; dann *R. Lehman-Filhés,* Astr. Nachr. 145 (1898), p. 353; *E. Strömgren,* ebd. 163 (1903), p. 129; *C. Plummer,* London Month. Not. 66 (1906), p. 83; *G. Armellini,* Rom. Acc. Lincei 21 (1912), 22 (1913) und 23 (1914) mit dem Hinweise auf *P. Appell,* Mécanique rationelle I, p. 409, und *M. Tomaselli* und *F. S. Zarlatti* in Paris Bull. Astr. 31 (1914), p. 150.

c) *Der Lichtdruck.* Nachdem durch die Experimentaluntersuchungen von *P. Lebedew* u. a. die Tatsache des Lichtdruckes festgestellt worden, befaßte man sich auch mit seinem Einfluß auf die Bewegung der Himmelskörper und suchte Abweichungen vom *Newton*schen Gesetz aus ihm abzuleiten. Man betrachtete hierbei den Lichtdruck als nur in der Richtung des Radiusvektors zwischen Sonne und dem angezogenen Körper wirksam und erhielt daher einzig eine Änderung der Sonnenanziehung im Verhältnisse[174])

$$1 - \frac{\lambda}{\varrho r},$$

wenn ϱ die Dichte und r den Radius des Körpers bedeuten und r als groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes angenommen wird, ferner λ eine Konstante vorstellt, die von der Form des Körpers (Verhältnis seiner Oberfläche zum Volumen) abhängt.

J. H. Poynting[175]) machte zuerst darauf aufmerksam, daß infolge der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes auch die Richtung des Druckes auf den angezogenen Körper durch eine Art Aberration geändert werde und *H. Seeliger*[176]) findet sodann, außer der erwähnten Störung, noch solche parallel zum und senkrecht auf den Radiusvektor. Beide haben eine Ähnlichkeit mit den Störungskomponenten, welche bei Bewegungen in einem widerstehenden Medium auftreten. Eine Überschlagsrechnung ergibt bei passender Wahl von ϱ und r den Betrag der Störung von einer Größenordnung, die wohl ganz in die von *Backlund* für den *Encke*schen Kometen gefundene fällt, ohne daß aber dabei an eine restlose Erklärung der bei diesem Kometen sich zeigenden Bewegungsanomalien zu denken wäre.

27. Veränderungen in der Rotationsdauer der Erde. a) *Theorie.* Bezeichnet man den konstanten Teil der Rotationsgeschwindigkeit der Erde mit ω_0, ihre Verzögerung mit $\Delta\omega$, so daß ihr tatsächlicher Wert

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega \cdot t \tag{33}$$

174) *P. Lebedew,* Die physikalischen Ursachen der Abweichungen vom *Newton*schen Gravitationsgesetze, Astr. Gesells. Vjs. 37 (1902), p. 220. — Der Artikel enthält eine ausführliche Literaturangabe über den Lichtdruck überhaupt.

175) *J. H. Poynting,* Radiation in the solar system, London Phil. Trans. 202 (1904), p. 525, und Radiation Pressure, Phil. mag. 9 (1905), p. 393. *Poynting* macht hier auch Berechnungen über den Widerstand, den die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne infolge ihrer Ausstrahlung erleidet; weitere Bemerkungen dazu von *E. B. Wilson,* The revolution of a dark particle about a luminous centre, Ann. of Math. 1907, p. 134, und *Th. H. Brown,* The effect of radiation on a small particle revolving about Jupiter, ebd. 16 (1914), p. 22.

176) *H. Seeliger,* Über den Einfluß des Lichtdruckes auf die Bewegung planetarischer Körper, Astr. Nachr. 187 (1911), p. 417.

ist, so wird jeder Meridian der Erde gegen seinen ungestörten Ort um die Größe

$$\tfrac{1}{2}\Delta\omega t^2$$

zurückbleiben. Da aber die Bewegungstheorie der Planeten und des Mondes auf ein mit der Erdrotation gleichmäßiges Fortschreiten der Zeit gegründet wird, so wird sich dieses Zurückbleiben auf deren Bewegung im Verhältnis zu ihrer Winkelgeschwindigkeit um die Erde übertragen und eine scheinbare Beschleunigung derselben hervorrufen. Setzt man die mittlere tägliche Bewegung des Mondes speziell gleich $n_☾$, so wird diese scheinbare Beschleunigung zu

$$\tfrac{1}{2}\Delta\omega n_☾ t^2$$

anwachsen und man hat, da diese ungefähr $2''$ im Jahrhundert ausmacht, für die Unbekannte $\Delta\omega$ die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Delta\omega n_☾ = 2'',$$

aus der sich ergibt $\Delta\omega = 23{,}08 \cdot 10^{-10},$

ein Betrag, der nach Multiplikation mit 86400 und 36525 dem Voreilen einer richtig gehenden Uhr gegenüber der Rotationsdauer der Erde um 7^s265 für ein Jahrhundert entspricht. Dies würde für eine vollständig starre Erde gelten, für eine elastisch nachgiebige kommt noch eine Veränderung im Verhältnisse zu ihrem Starrheitskoeffizienten hinzu. Macht man weiter noch die Annahme, daß die Größe $\Delta\omega$ keine konstante, sondern eine periodisch veränderliche Größe ist, so würde auch die durch sie hervorgerufene Ungleichheit in der Bewegung des Mondes nicht konstant, sondern periodisch veränderlich sein und man wäre damit in der Lage, die gesamten Abweichungen in der Theorie des Mondes als scheinbare zu bezeichnen, hervorgerufen durch irgendwelche Variationen in der Rotation der Erde.

b) *Flutreibung*[177]). Schon *J. Kant* hatte 1754 auf die Flutreibung hingewiesen als eine mögliche Ursache für eine Verkürzung der Rotationsdauer der Erde und damit eine Verlängerung des Sterntages. 1848 stellte *J. R. Mayer* in seiner Dynamik des Himmels eine ähnliche Behauptung auf, ebenso *H. Helmholtz* in seinem Vortrage: Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Leistungen der Physik (1854). Doch erst *C. Delaunay*[178]) sucht durch sie die Unregelmäßigkeit in der Bewegung des Mondes

177) Geschichtliches zur Theorie der Flutreibung vgl. den Artikel *G. H. Darwin* und *S. S. Hough*, Encykl. VI 1, 6, besonders Nr. 41.

178) *C. Delaunay*, Sur l'existence d'une cause nouvelle ayant une influence sensible sur la valeur de l'équation séculaire de la lune, Paris C. R. 61 (1865), p. 1023, ferner 62 (1866), p. 197, und *J. Bertrand*, ebd. p. 162.

zu erklären. Da er für diese aus der Theorie nicht erklärte säkulare Beschleunigung 6″ annimmt, so findet er eine Verlängerung des Tages um 22 Sekunden für ein Jahrhundert, ein Resultat, das seitdem in viele Lehrbücher Eingang gefunden hat. Am intensivsten befaßten sich *W. Thomson* (Lord *Kelvin*)[179]) und *G. H. Darwin*[180]) mit dieser Frage. Letzterer weist in seinen Untersuchungen über die Rotation und Präzession eines zähflüssigen Ellipsoides nach, daß dessen Rotationsgeschwindigkeit durch die Einwirkung der Flutkräfte einen ganz unregelmäßigen Charakter habe und außer von dem Grade der Zähigkeit noch von den Perioden der Flutkräfte und den Verzögerungen der Fluten gegen ihre theoretischen Eintrittszeiten abhänge. Aber schon die Ansicht[181]), daß die Erde starr und nur von einer flüssigen Wassermasse bedeckt ist, in welcher durch Sonne und Mond Flutbewegungen hervorgerufen werden, genügt und macht es wahrscheinlich, daß ihre Rotationsgeschwindigkeit sowohl säkularen wie periodischen Variationen unterworfen ist. Eine vollständige Theorie der Rotations- und Präzessionsbewegung der Erde, welche allen auf ihr tatsächlich vorhandenen Verhältnissen Rechnung tragen will, steht daher im innigsten Zusammenhange mit der Theorie der Ebbe- und Fluterscheinungen und erst eine vollständige Erklärung der Unregelmäßigkeiten in diesem Erscheinungsgebiete wird einen wesentlichen Fortschritt in unserer Kenntnis von den Störungen in der Rotationsbewegung der Erde mit sich bringen. In diesem Sinne hängt das Problem außerdem noch mit den Polschwankungen und der Umwandlung der freien *Euler*schen Periode des Rotationspols der Erde von 306 in die *Chandler*sche von 432 Tagen zusammen. Auch diese, der elastischen Nachgiebigkeit der Erde zugeschrieben, bedingt eine Veränderlichkeit des Hauptträgheitsmomentes der Erde in bezug auf ihre Rotationsachse, welche eine säkulare wie periodische Verlängerung des Tages nach sich zieht, die mindestens einen Teil des Widerspruches in der Mondtheorie lösen könnte.[182])

---

179) *W. Thomson* und *P. Tait,* Natural philosophy, 2. Aufl., Cambridge 1883, part. 1, app. 9(a).

180) *G. H. Darwin,* Scientific papers, Cambridge 1907, Vol. I: Oceanic tides and lunar disturbance of gravity; Vol. II (1908): The tidal friction. Vgl. auch die Darstellung in *H. Poincaré,* Les hypothéses cosmogoniques, Paris 1911, chapt. 7, Théorie de Sir *G. H. Darwin.*

181) *S. Oppenheim,* Über die Rotation und Präzession eines flüssigen Sphäroids, Wien. Ber. 1885.

182) Zahlreiche Arbeiten in dieser Richtung enthalten die neuen Bände der London. Month. Not. aus den Jahren 1900 u. 1915, von *J. Larmor*, The irregularities in the Earths Rotation, dann *E. H. Hills* und *H. Plauert.*

Die Frage, ob diese veränderliche Rotationsgeschwindigkeit der Erde sich auch noch in anderen Erscheinungen am Himmel bemerkbar mache, behandelt am eingehendsten *S. Newcomb*[183]). Zuerst zieht er eine Untersuchung von *S. Glasenapp*[184]) heran, welcher eine solche Verzögerung aus einer Reduktion einer großen Reihe von Beobachtungen über Verfinsterungen der vier großen Jupitermonde, die er zu einer Neuberechnung der Aberrationszeit unternommen hatte, erschließen will. Hierauf versucht er es mit der Bewegung des Merkur, der in seinen regelmäßigen und in ziemlich rascher Aufeinanderfolge sich abspielenden Vorübergängen vor der Sonnenscheibe zur Entscheidung dieser Frage besonders geeignet ist. Aber trotz mancher Übereinstimmung erzielt er kein befriedigendes Resultat. Das Beobachtungsmaterial betreffend die Jupitermonde scheint ihm noch zu wenig kritisch gesichtet, das der Merkurvorübergänge führt wohl auf eine Rotationsveränderlichkeit, aber diese ist bedeutend kleiner, als sie zur vollen Erklärung der Mondanomalie notwendig wäre. Er kommt daher zu dem Schlusse, daß zurzeit die Frage nach der Verzögerung der Rotationsdauer der Erde noch als eine offene bezeichnet werden muß.

c) *Massenvergrößerung der Erde. Th. v. Oppolzer*[173]) will die säkulare Ungleichheit in der Länge des Mondes — ähnlich wie die des *Encke*schen Kometen — durch die Bewegung von Mond und Erde in einem mit Meteormassen erfüllten Raum (*Seeliger*s Theorie des kosmischen Staubes[172])) erklären. Doch soll nach seiner Anschauung dessen störende Wirkung nicht allein einen Widerstand bedingen (die hierdurch hervorgerufene Änderung in der mittleren Länge des Mondes sei ΔL_1), sondern neben diesem auch noch durch eine Vergrößerung der Mondmasse (die dadurch entstehende säkulare Längenstörung sei ΔL_2), sowie endlich durch eine gleichzeitige der Erdmasse, mit der eine Verminderung ihrer Rotationsgeschwindigkeit, damit eine

183) *S. Newcomb,* On the possible variability of the Earths axis of rotation, Amer. J. of. sc. 7 (1874); ferner in seinen Untersuchungen über die Merkurvorübergänge vor der Sonnenscheibe in Astr. Pap. 1 (1882). — Vgl. das Referat in Astr. Ges. Vjs. 8 (1874), p. 183, und die Schlußabhandlung: On a desirableness of a re-investigation of the problem growing out of the mean motion of the moon, London Month. Not. 63 (1903), p. 316.

184) *S. Glasenapp,* Untersuchung über die Verfinsterungen der Jupitersatelliten in den Jahren 1848—1873, Inaug.-Diss. St. Petersb. 1874 (in russischer Sprache) und den Bericht hierüber von *A. Downing* in The observ. 12 (1889), p. 173 u. 210; ferner *N. Stoyanoff,* Exposé de la méthode de M. Glasenapp pour la réduction des observations des eclipses des satellites de Jupiter. Toulouse Fac. Ann. 5 (1903), p. 151.

Änderung des Zeitmaßes und durch deren Übertragung auf die Bewegung des Mondes eine scheinbare Beschleunigung (ΔL_3) verbunden ist.

Wird angenommen, daß bei der Bewegung von Mond und Erde in diesem mit Staub erfüllten Raume die von beiden Körpern aufgenommenen Massen auf deren Oberflächen gleichmäßig verteilt werden und dabei, ihre mittlere Dichte als mit der mittleren Dichte der Erde identisch vorausgesetzt, die Schichthöhe h erreichen, so erhält man für die Vergrößerung der Erdmasse

$$\Delta E = \frac{3h}{R} E,$$

für die des Mondes

$$\Delta M = \Delta E \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \frac{3h}{R} E \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^2,$$

wenn, wie stets R den Radius der Erdkugel und R' den des Mondes bedeutet, und damit für die drei Gruppen von Störungen:

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 &= \frac{3}{2} \cdot 1{,}26 \cdot \frac{\Delta M}{M} n t^2 &&= 1{,}89 \cdot \frac{3h}{R} 81 \cdot \frac{9}{121} n t^2 \\
\Delta L_2 &= \frac{\Delta E + \Delta M}{E + M} n t^2 &&= \frac{3h}{R} \cdot \frac{81}{82} \cdot \frac{130}{121} n t^2 \\
\Delta L_3 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\Delta E}{3E} n t^2 &&= \frac{5h}{2R} n t^2,
\end{aligned} \tag{34}$$

was mit den Annahmen $E = 81 M$, $R' = 3R : 11$ in Zahlen umgesetzt, und h in mm ausgedrückt, zu

$$\Delta L_1 = 9{,}28'' t^2 h, \quad \Delta L_2 = 0{,}87'' t^2 h, \quad \Delta L_3 = 0{,}68'' t^2 h$$

führt. Soll nun die ganze säkulare Störung $2''$ sein, so wäre h aus

$$2'' = 10{,}83'' h$$

zu berechnen. Hieraus folgt für h als die Niederschlagshöhe des kosmischen Staubes auf die Erdoberfläche für ein Jahrhundert $h = 0{,}19$ mm, eine wohl sehr kleine Zahl, die aber doch sagt, daß das tägliche Quantum an Staub, daß damit die Erde aufzunehmen hätte, 14,8 Millionen Tonnen betragen müßte, eine Zahl wiederum, die viel zu groß und daher wenig wahrscheinlich ist.[185])

185) Von anderen Versuchen, sowohl die Störungen in dem Laufe des *Encke*schen Kometen wie in dem des Mondes zu erklären, seien noch erwähnt: *C. V. Charlier*, Über die Akzeleration der mittleren Bewegung der Kometen, Lund. Medd. 29 (1906), der von dem Satze ausgeht, daß, wenn zwei Körper sich in einer und derselben Bahn hintereinander und in kurzem Abstande voneinander bewegen, der vorangehende in seinem Laufe beschleunigt, der nachfolgende verzögert wird, was eine säkulare Änderung ihrer mittleren Längen hervorruft, die es gestatten würde, ihre Massen aus dieser Störung zu berechnen. Auf den *Encke*schen Kometen angewendet, führt diese Annahme auf die Masse $m = 1 : 2{,}57 \cdot 10^{12}$.

V. Mögliche Korrektionen des Newtonschen Gesetzes.

28. Änderung des Exponenten. Schon *Newton*[186]) bewies, daß, wenn die Anziehung zweier Massenteilchen nicht genau das quadratische Gesetz befolgt, sondern im Potenzexponenten eine geringe Abweichung von der Zahl 2 vorhanden sein sollte, etwa in der Form, daß das Kraftgesetz durch

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^{2+\lambda}} \tag{35a}$$

gegeben ist, daraus eine säkulare Störung der Perihele der Planeten entsteht, von der Größe

$$\Delta\pi = \frac{\lambda n t}{2} = \frac{\lambda k t}{2} a^{-\frac{3}{2}}. \tag{35b}$$

Er schließt dann aus der Tatsache, daß derartige Perihelungleichheiten bisher nicht konstatiert werden konnten, daß eine solche Abweichung von der Zahl 2 nicht vorhanden ist, mindestens sehr klein sein müsse. Umgekehrt versuchte *A. Hall*[14]) diese mögliche Differenz im *Newton*schen Gesetze dazu zu verwerten, die Anomalie in der Bewegung des Merkur zu erklären. Es wäre damit nur die Abweichungsgröße λ aus der Gleichung

$$\frac{\lambda n}{2} = 41{,}25''$$

zu berechnen, was mit $n = 14732{,}56''$ als mittlerer täglichen Bewegung des Merkur, zu

$$\lambda = 15{,}33 \cdot 10^{-8}$$

führt. Die Annahme, daß im Ausdrucke für das *Newton*sche Gesetz statt des Exponenten

$$2 \quad 2{,}0000001533$$

steht, würde also genügen, die erwähnte Unregelmäßigkeit in der Bewegungstheorie des Merkur zu beseitigen. Sie würde gleichzeitig in den Theorien der anderen Planeten die Störungen:

Ferner *M. Simonin*, Sur l'accélération du mouvement de la comète d'Encke, Paris. Bull. astr. 18 (1901), p. 451, der die Störung in dem Laufe des *Encke*schen Kometen, dessen mittlere tägliche Bewegung 1072″ beträgt, zurückführen will auf die Annäherung oder den gleichzeitigen Durchgang durch den Schnittpunkt der Bahn des Kometen und eines kleinen Planeten, dessen mittlere Bewegung ebenso oder doppelt so groß ist. Endlich *P. de Saint-Blancat*, Action d'une masse intramercurielle sur la longitude de la lune, Toulouse Fac. Ann. 9 (1907), p. 1.

186) *J. Newton*, Principia, liber 1, sectio 9.

Venus	$\varDelta\pi = 16{,}12''$	$e\varDelta\pi = 0{,}112''$
Erde	$= 9{,}94''$	$= 0{,}166''$
Mars	$= 5{,}28''$	$= 0{,}492''$
Jupiter	$= 0{,}84''$	$= 0{,}040''$
Saturn	$= 0{,}34''$	$= 0{,}019''$

hervorrufen, die alle als genügend klein und innerhalb der wahrscheinlichen Beobachtungsfehler liegend angesehen werden können und daher nicht weiter in Betracht kommen.

Wendet man aber die Zahl $\lambda = 15{,}33 \cdot 10^{-8}$ auf die Bewegung des Mondes um die Erde an, so erhält man die äußerst großen, der Genauigkeit der Mondtheorie widersprechenden Störungswerte[187])

$$\varDelta\pi = 132{,}8'' \quad e\varDelta\pi = 7{,}29'',$$

die, um sie auf eine halbwegs erträgliche Größe herabzudrücken, als welche man

$$e\varDelta\pi = 2'' \quad \text{und damit} \quad \varDelta\pi = 36{,}4''$$

ansetzen kann, zu $\qquad \lambda = 42{,}1 \cdot 10^{-10}$

führen, wodurch aber wieder der Widerspruch in der Merkurtheorie ungelöst bleibt. Da ferner durch diese Form des Kraftausdruckes die Schwierigkeit in seiner Ausdehnung auf den unendlichen Raum mit unendlicher Massenerfüllung nicht behoben wird, so bietet sie im Vergleich zum reinen *Newton*schen Gesetze keine Vorteile und dürfte daher endgültig zu verwerfen sein.

29. Absorption der Gravitation. Eine Absorption der Gravitation kann auf zwei verschiedene Arten auftreten, ebenso als allgemeine (kosmische) Absorption beim Durchgange der einzelnen Gravitationsstrahlen durch den Raum überhaupt, oder als spezielle (innere Absorption oder Abschattung) beim Durchgang der Strahlen durch eine Masse von endlicher Dichte, wie etwa bei Mondfinsternissen, wo der von der Sonne kommende Gravitationsstrahl erst den Erdkörper durchdringen muß, ehe er auf den Mond auffällt.

Im ersten Falle kommt zu dem analytischen Ausdruck für die gravitierende Wirkung zwischen zwei Körpern allgemein der Absorptionsfaktor $e^{-\alpha r}$ hinzu. Dies kann wieder in doppelter Art geschehen, indem der Faktor zur Kraft K oder zum Potential P der Kraft hinzu-

187) *E. Brown,* On the verification on the Newtonian law, London. Month. Not. 63 (1903), p. 396. Vgl. auch *S. Newcomb,* Fund. const., p. 119, ferner *P. Harzer,* Preisschrift, p. 75, welcher sagt, daß die Änderung des Exponenten 2 in $2 + \lambda$ ihn so anmutet, wie die Vorstellung eines Raumes nicht von 3, sondern von $3 + \lambda$ Dimensionen. — *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, chap. 29, p. 529.

gesetzt wird. Dementsprechend ergeben sich zwei verschiedene Korrektionen des *Newton*schen Gesetzes, entweder

$$(36) \qquad K_1 = -\frac{k^2 m_1 m_2 e^{-\alpha_1 r}}{r^2},$$

wofür das Potential P_1 sich nicht in geschlossener Form darstellen läßt, oder

$$(37) \quad P_2 = \frac{k^2 m_1 m_2 e^{-\alpha_2 r}}{r}, \quad \text{woraus} \quad K_2 = -\frac{k^2 m_1 m_2 e^{-\alpha_2 r}(1+\alpha_2 r)}{r^2}$$

folgt. Beide Fälle geben in ihrer Anwendung auf die Bewegung der Planeten zu Störungen als Abweichungen von deren rein elliptischen Laufe Veranlassung, die wohl alle Elemente, merkwürdigerweise aber meist die Länge des Perihels betreffen, und daher vielfach zur Erklärung der Anomalie in der Merkurtheorie herangezogen wurden[188]). Diese Perihelstörungen sind, die Halbachsen der Bahnen mit a bezeichnet,

$$\Delta\pi_1 = \tfrac{1}{2}\alpha_1 a n = \frac{\alpha_1 k}{2\sqrt{a}}, \quad \Delta\pi_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2 a^2 n = \tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2 k\sqrt{a},$$

und, sollen sie für den Planeten Merkur 41,25″ für ein Jahrhundert geben, so folgt

$$\alpha_1 = 39{,}6 \cdot 10^{-8}, \quad \alpha_2 = 10{,}115 \cdot 10^{-4}.$$

Für die anderen Planeten berechnet sich aus ihnen:

Venus	$\Delta\pi_1 = +\ 30{,}2''$	$e\Delta\pi_1 = +\ 0{,}20''$	$\Delta\pi_2 = +\ 56{,}4''$	$e\Delta\pi_2 = +\ 0{,}38''$
Erde	$+\ 25{,}7''$	$+\ 0{,}43''$	$+\ 61{,}3''$	$+\ 1{,}01''$
Mars	$+\ 20{,}8''$	$+\ 1{,}90''$	$+\ 81{,}8''$	$+\ 7{,}63''$
Jupiter	$+\ 11{,}3''$	$+\ 0{,}55''$	$+\ 151{,}8''$	$+\ 7{,}33''$
Saturn	$+\ 8{,}3''$	$+\ 0{,}46''$	$+\ 205{,}0''$	$+\ 11{,}46''$

Die Zahlen der ersten Gruppe können noch als unmerkliche, den Beobachtungen noch nicht direkt widersprechende Störungsbeträge angesehen werden, die der zweiten aber nicht mehr und die ihnen entsprechende Annahme ist daher jedenfalls zu verwerfen. Bei der Anwendung auf den Mond erhält man

$$\Delta\pi_1 = +0{,}88'' \quad e\Delta\pi_1 = +0{,}048'' \quad \Delta\pi_2 = +0{,}006'' \quad e\Delta\pi_2 = +0{,}0003''$$

für beide Fälle zu vernachlässigende Werte.

Das Kraftgesetz K_1 kommt schon bei *Laplace*[11]) vor. Er verwendet es zur Berechnung der Anziehung einer Kugel vom Radius R auf einen äußeren Punkt in der Entfernung r und erhält hierfür den Ausdruck

$$K = \frac{-k^2 m_1 m_2}{r^2}\left(1 - \frac{3}{4}\alpha_1 R\right).$$

188) Das erste Kraftgesetz K_1 rührt von *Seeliger* her, vgl. Fußnote 8), das zweite von *C. Neumann*, siehe Fußnote 12).

Da nun die Kraft, die die Erde auf den Mond ausübt, mit einer Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-6}$ ihres Wertes durch das *Newton*sche Gesetz allein bestimmt wird, so schließt *Laplace* daraus, daß dieser aus der Absorption der Gravitation bedingte Unterschied $\frac{3}{4}\alpha_1 R$ höchstens 10^{-6} betragen könne.

Bei der zweiten Art der Absorption, der materiellen Schwächung der Gravitation, wirkt diese nur während der kurzen Dauer einer Finsternis wie ein Impuls, der den Lauf des Mondes stört, und um den gesamten Verlauf der Störung zu erhalten, ist daher eine Summierung dieser Impulse über die Finsternisse einer Periode durchzuführen. *K. Bottlinger*[189]) führt diese Rechnung durch für die Finsternisse vom 9. III. 1830 bis 15. XII. 1913, *W. de Sitter*[190]) teilt diese erst nach der Sarosperiode und summiert dann über 12 Sarosperioden von 1703,0 bis 1919,4. *Bottlinger* vergleicht die von ihm in einem willkürlichen Maße erhaltenen Zahlen vorerst mit der von *Newcomb*[154]) aufgestellten Fehlertabelle der *Hansen*schen Mondtheorie und erhält mit dem Abschattungsfaktor $\alpha = 3 \cdot 10^{-15}$ (im C. G. S. System) eine von 1830—1870 reichende recht gute Darstellung der *Newcomb*schen Fehler, die aber von da ab ganz ins Gegenteil umschlägt, während ein Vergleich mit den von *Brown*[155]) gefundenen Abweichungen überhaupt versagte. Zu dem gleichen negativen Ergebnisse kommt auch *de Sitter*. Er findet, daß die Art dieser Störung unabhängig ist von einer speziellen Annahme über die Dichteverteilung innerhalb der Erde, daß sie sich ferner sehr genähert durch eine Sinuskurve von der Periode einer Saros darstellen lasse, daß aber die konstatierten Fluktuationen in der Bewegung des Mondes viel unregelmäßiger verlaufen und daher einer reinen Sinuskurve nicht entsprechen. Auch die langperiodischen Glieder, die aus einer höheren Kommensurabilität zwischen dem drakonitischen Monate von 27,21222 Tagen und dem synodischen von 29,53059 entstehen (die Sarosperiode von 18,03 Jahren entspricht der Kommensurabilität von 223 : 242, und eine höhere wäre 3087 : 3350 identisch mit 249,6 Jahren), zeigen gleiche Unstimmigkeiten zwischen Beobachtung und Rechnung, die den Wert der Hypothese noch weiter in Frage stellen.

30. Abhängigkeit von der Krümmung des Raumes. Eine formale Änderung im analytischen Ausdruck für das *Newton*sche Gesetz

189) *K. F. Bottlinger,* Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes, Inaug.-Diss., gekr. Preisschrift, München 1912; ferner: Zur Frage der Absorption der Gravitation, München Ber. 1914, p. 223.

190) *W. de Sitter,* The absorption of the gravitation and the longitude of the moon, Amsterdam Proceed. 15 (1913), p. 808.

kann auch eintreten durch die Annahme, daß der Raum, in dem die Bewegung der Planeten um die Sonne stattfindet, nicht ein euklidischer, sondern etwa ein elliptischer, aber mit konstantem Krümmungsradius R ist. Mit der Frage nach der Bewegung in einem solchen hat man sich vielfach befaßt (vgl. Nr. 2: Das *Newton*sche Gesetz und der Raum)[191]), und es ergab sich das Resultat, daß die Bahnen der Planeten, von ihren gegenseitigen Störungen abgesehen, sphärische Kegelschnitte ohne Perihelbewegung sind, deren Unterschied gegen die entsprechenden ebenen Bahnkurven von der Größenordnung R^{-2} ist. Man kann aber auch die Frage aufwerfen, wie es sich mit der Zentralbewegung verhalten wird, wenn man

1. das *Newton*sche Gesetz formell beibehält, aber einen elliptischen Raum voraussetzt,

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{\mathfrak{r}^2} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{r} = R \arcsin\left(\frac{r}{R}\right), \tag{38}$$

2. oder einen euklidischen Raum annimmt, aber das *Newton*sche Gesetz entsprechend einem elliptischen ändert,

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}, \tag{39a}$$

was bis auf Glieder von der Größe R^{-2} entwickelt, zu

$$K = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^2} + \frac{k^2 m_1 m_2}{3 R^2} \quad \text{oder} \quad P = \frac{k^2 m_1 m_2}{r} + \frac{k^2 m_1 m_2 r}{3 R^2} \tag{39b}$$

führt. Man erhält bei demselben Genauigkeitsgrad eine progressive Perihelbewegung und zwar in beiden Fällen von gleichem Betrage, wie von vornherein zu erwarten war, von der Größe

$$\varDelta\pi = \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{3 R^2}\, 36525$$

für ein Jahrhundert. Da nun, will man nicht mit feststehenden astronomischen Tatsachen bezüglich der Parallaxen und der Verteilung der Sterne in Widerspruch kommen, nach *Schwarzschild*[192]) für R mindestens ein Wert von $100 \cdot 10^6$ Erdbahnradien anzusetzen ist, so würden daraus

$$\text{für Merkur } \varDelta\pi = 26.''10^{-10}, \qquad \text{für Neptun } 237.''10^{-10}$$

191) Außer den in der Fußnote 4) zitierten Abhandlungen seien noch erwähnt: *C. Neumann,* Ausdehnung der *Kepler*schen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugel stattfindet, Leipzig. Ber. 38 (1886), p. 1; dann *J. Lense,* Das Newtonsche Gesetz in nicht-euklidischen Räumen, Wien. Ber. 126 (1917), p. 1037.

192) *K. Schwarzschild,* Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes, Astr. Ges. Vjs. 35 (1900), p. 337.

folgen, das sind durchaus unmerkliche Zahlen. Sollte $\Delta\pi$ von beobachtbarer Größe, z. B. 10″ für ein Jahrhundert sein, so dürfte R höchstens 1000 Erdbahnradien betragen, nach *Schwarzschild* eine durchaus unzulässige Annahme. Durch Beobachtungen von Planetenstörungen läßt sich also zunächst kein Urteil über die Raumkrümmung fällen.

31. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. a) *Ältere Theorie.* Die älteren Untersuchungen zur Frage, welchen Einfluß die Annahme einer endlichen Fortleitungsgeschwindigkeit der Gravitation[193]) auf die Bewegung der Planeten habe und welche Korrektion des *Newton*schen Gesetzes durch sie bedingt ist, lassen sich in zwei Gruppen teilen. Die erste beginnt mit *Laplace*[194]), die zweite mit dem von *W. Weber* in der älteren Elektrizitätslehre aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetz und seiner Übertragung auf das astronomische Problem der Planetenbewegung. Beide Gruppen unterscheiden sich wesentlich voneinander. Die erste gibt dem *Newton*schen Gesetze Zusatzglieder von der Größe $v : c$ in erster Potenz, wenn v die Geschwindigkeit des Planeten und c die der Fortpflanzung der Gravitation bedeutet. Damit werden, wenn man c mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes identifiziert, die aus ihnen entstehenden Störungen sehr groß oder man muß, um sie auf ein erträgliches, den Beobachtungen nicht gar zu sehr widersprechendes Maß herabzudrücken, c als die Fortleitung der Gravitation viele tausende Male größer nehmen als die des Lichtes. Die zweite Gruppe enthält in den Zusatzgliedern nur das Verhältnis $v : c$ im Quadrat. Deshalb werden die durch sie bedingten Störungen, selbst wenn man für c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes substituiert, im Gegensatze wieder zu klein. Es sind daher weder die der ersten noch die der zweiten Gruppe zugrundeliegenden Annahmen, die aus einer endlichen Geschwindigkeit der Gravitation fließenden Bewegungsstörungen der Planeten und des Mondes in Rechnung zu ziehen, geeignet, die da auftretenden Anomalien zu erklären.

Merkwürdigerweise zeigt sich zwischen den beiden Gruppen noch ein anderer wesentlicher Unterschied. Bei der ersten ergeben die auf-

193) Vgl. die Referate über diese Frage von: *S. Oppenheim,* Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, Jahresb. des akad. Gymn. Wien (1895); *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, chap. 28 (1896); *P. Drude,* Über Fernwirkungen, Ann. Phys. Chem. 62 (1897) und *J. Zenneck,* Encykl. V 2, Nr. **20**, p. **44**.

194) *Laplace,* Méc. cél. 4, Livre X, chap. 7. Sur les altérations que le mouvement des planètes et des comètes peut éprouver par la transmissions successive de la pesanteur. Vgl. auch: *Laplace,* Exposition du système du monde, Livre IV, chap. 17.

tretenden Zusatzglieder eine säkulare Störung in der Bahnachse a und damit infolge der Relatiou $a^3n^2 = k^2$ auch eine in der mittleren Bewegung n und eine Beschleunigung in der mittleren Länge L. Sie schien daher vorzugsweise zur Erklärung des kleinen Fehlbetrages in der Mondtheorie geeignet. Bei der zweiten Gruppe dagegen ist der säkulare Teil $\varDelta a = 0$ und von den Störungen der anderen Elemente die in der Länge des Perihels π am größten. Sie wurde daher bei der Erklärung der Merkuranomalie bevorzugt.

Laplace[194]) bestimmt den Einfluß der endlichen Fortpflanzung der Gravitation durch eine Art Aberration, indem er in die Bewegungsgleichungen eine Störungskomponente S einführt, die auf dem Radiusvektor r zwischen anziehendem und angezogenem Körper senkrecht steht und dem Produkte aus der reinen *Newton*schen Kraft, K, zwischen beiden in das Verhältnis $v : c$ gleich ist, wobei $v = \frac{ds}{dt}$, d. h. der relativen Bahngeschwindigkeit des einen um den anderen gleich gesetzt wird:

$$S = + K \frac{ds}{dt} \frac{1}{c} = - \frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^2} \frac{ds}{dt} \frac{1}{c}. \tag{40a}$$

Ihr entspricht die Störung der Bahnachse $\varDelta a$ und damit eine säkulare Beschleunigung der mittleren Länge

$$\varDelta a = - \frac{a^2 n^2}{c}, \quad \varDelta L = \frac{3an^3}{2c} t^2 = \frac{3k^3}{2c\sqrt{a^7}} t^2. \tag{40b}$$

Unter der Annahme $c = 3{,}10^5$ km/sek^{-1} folgt daraus für die Bewegung der Erde um die Sonne eine tägliche Änderung $\varDelta L = 0{,}00008''$ und für die des Mondes um die Erde $\varDelta L = 0{,}0558''$, beides so große Beträge, daß, um sie auf das den astronomischen Beobachtungen nach noch zulässige Maß von etwa $1''$ für ein Jahrhundert zu reduzieren, eine mehr als millionenfache Vergrößerung von c erforderlich wäre.

Eine wesentlich andere Behandlung erfährt das Problem bei *R. Lehman-Filhés*[195]) und *J. von Hepperger*[196]). Bei beiden tritt schon der Begriff der infolge der endlichen Geschwindigkeit der Gravitation retardierten Kraftwirkung auf, indem die Koordinaten genommen werden für einen späteren bzw. früheren Zeitmoment, je nach der Zeit,

---

195) *R. Lehman-Filhés,* Über die Bewegung der Planeten unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft, Astr. Nachr. 110 (1884), p. 209, und: Über die Säkularstörungen der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft, München. Ber. 25 (1895), p. 371.

196) *J. von Hepperger,* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, Wien. Ber. 97 (1888).

die die Gravitation braucht, um von dem einen Körper zum anderen zu gelangen. Die Entwicklung wird bis zu der ersten Potenz von $v:c$ durchgeführt. Hierbei nimmt *Lehman-Filhés* die Geschwindigkeit der Sonne, *v. Hepperger* dagegen die des Schwerpunktes von Sonne und Planet als konstant und mit der Eigenbewegung der Sonne identisch an. Bei ersterem kommen daher nur Störungsglieder vor, die mit dem Verhältnisse $g:c$ multipliziert erscheinen, unter g den Vektor der Sonnenbewegung im Raume mit den Komponenten g_x, g_y und g_z verstanden, bei dem zweiten auch solche, die von der relativen Bewegung beider Körper umeinander abhängen. Die einflußreichste unter den säkularen Teilen der Störungen ist Δa und damit in Verbindung die entsprechende Δn und ΔL. Aber diese hat hier ein negatives Vorzeichen, so daß sie nicht eine säkulare Beschleunigung, sondern im Gegenteil eine Verzögerung darstellt. Die Frage nach der Erklärung der Anomalie in der Mondbewegung bleibt daher durch sie ganz und gar unerledigt. Die Störung selbst ist (*Lehman-Filhés*)

$$(41\text{a})\qquad \Delta a = \frac{a e n}{\sqrt{1-e^2}}\frac{g_y}{c}, \quad \Delta L = -\frac{3}{2} n^2 \frac{a e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{g_y}{c} t^2,$$

und der von der relativen Bewegung herrührende Teil (*v. Hepperger*)

$$(41\text{b})\qquad \Delta a = \frac{2EM}{(E+M)^2}\frac{2a^2 n}{c}, \quad \Delta L = -\frac{3}{2}\frac{2EM}{(E+M)^2}\frac{a n^3}{c} t^2.$$

Dieser deckt sich, wie man beim Vergleich mit Gleich. (40b) findet, bis auf das Vorzeichen und den Massenfaktor $2EM:(E+M)^2$ mit dem Ergebnisse der *Laplace*schen Annahme, so daß die dort gemachten Bemerkungen über den absoluten Betrag von c auch hier gültig bleiben, zumal der Massenfaktor, der für die Verhältnisse Mond—Erde genähert gleich $2:81$ ist, nicht genügend klein erscheint, um die Störung zu erniedrigen.

b) *Die älteren elektrodynamischen Gesetze.* Die der zweiten Gruppe angehörenden Untersuchungen reihen sich an das *Weber*sche elektrodynamische Grundgesetz an. *C. Neumann*[197]) versuchte auf eine von *Gauß* gegebene Anregung hin, auf Grundlage einer Art Retardation des Potentials, eine Ableitung desselben. Er setzt an Stelle des reinen *Newton*schen Potentials

$$P_0 = k^2 m_1 m_2 : r_0,$$

wo r_0 die dem Augenblicke t_0 der Emission entsprechende Distanz der

197) *C. Neumann,* Prinzipien der Elektrodynamik, Bonn. Univ. Festschr. 1868, dann die Diskussion mit *R. Clausius,* Pogg. Ann. 135 (1868) und *Newton*sches Prinzip der Fernwirkungen (Leipzig 1896), Kap. VIII.

beiden sich anziehenden Punkte bedeutet,

$$P = k^2 m_1 m_2 : r,$$

wo r die dem etwas späteren Momente t entsprechende Distanz vorstellt, in dem das Potential den anderen Punkt erreicht hat, und nimmt schließlich, nach Entwickelung bis auf Glieder erster Ordnung in c

$$r = r_0 - \frac{r_0}{c}\frac{dr}{dt} = r_0\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)$$

an. So ergibt sich der neue Ausdruck

$$(42\,\mathrm{a})\quad P = k^2 m_1 m_2 : r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right) = k^2 m_1 m_2\left[1 + \frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] : r$$

nach einer weiteren Entwicklung bis auf Größen zweiter Ordnung in c. Aber bei der Berechnung der Kraft K aus ihm, die nach der *Lagrange*schen Form durchzuführen ist,

$$K = \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial r'}\right)$$

zeigt sich, daß das Glied erster Ordnung $\frac{1}{c}\left(\frac{dr}{dt}\right)$ entfällt, und es daher genügt,

$$(42\,\mathrm{b})\qquad P = k^2 m_1 m_2\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] : r$$

anzunehmen, was sich mit dem *Weber*schen elektrodynamischen Grundgesetze deckt.

In Anwendung auf die Bewegung der Planeten[198]) folgt aus ihm als bedeutendste unter den säkularen Störungen

$$\varDelta\pi = n^3 a^2 : c^2 = k^3 : c^2\sqrt{a^5},$$

deren Auswertung unter der Annahme $c = 3{,}10^5$ km/sec^{-1} für die Planeten die Zahlen gibt:

Merkur	$\varDelta\pi = +\ 13{,}65''$	$e\varDelta\pi = +\ 2{,}89''$
Venus	$2{,}86''$	$0{,}02''$
Erde	$1{,}27''$	$0{,}02''$
Mars	$0{,}44''$	$0{,}04''$
Jupiter	$0{,}02''$	$0{,}00''$,

die bis auf Merkur unter die durch die Beobachtungen konstatierbaren Grenzen fallen, aber selbst für diesen an den Betrag von $41{,}25''$ nicht heranreichen. Wollte man ihn erzielen, so müßte man etwa $c = 3{,}10^5 : \sqrt{3}$ km/sec^{-1} annehmen. Für die Bewegung des Mondes um die Erde folgt $\varDelta\pi = 0{,}0202''$ also eine unmerkliche Größe.

---

198) *F. Tisserand,* Sur le mouvement des planètes autour du soleil d'après la loi électrodynamique de Weber, Paris C. R. 75 (1872), p. 760; ferner *G. Holzmüller,* Zeitschr. Math. Phys. 1 (1870), p. 69, und *H. Servus,* Inaug.-Diss. Halle (1885).

Nach dem von *Riemann*[199]) aufgestellten Gesetze ist

$$(43)\qquad P = k^2 m_1 m_2 \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)\right] : r$$

und aus ihm folgt, in gleicher Weise wie beim *Weber*schen, neben $\Delta a = 0$ als sonstige wichtigste säkulare Störung,

$$\Delta\pi = 2n^3 a^2 : c^2,$$

das ist genau der doppelte Betrag. Er reicht bei der Annahme $c = 3{,}10^5$ km/sec^{-1} zur Erklärung der Merkuranomalie nicht aus. Einem von *M. Lévy*[199]) gemachten Vorschlage gemäß, die beiden Gesetze P_W und P_R durch Einführung eines unbestimmten Parameters α zu einem in der Form

$$P = P_W + \alpha(P_W - P_R)$$

zu vereinen, würde zur Berechnung von α die Gleichung

$$13{,}65'' + \alpha(27{,}30'' - 13{,}65'') = 41{,}25''$$

und aus ihr der Näherungswert $\alpha = 2$ folgen. Das Potential

$$(44)\qquad P = k^2 m_1 m_2 \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\right\} : r$$

bringt also unter der Annahme, daß c mit der Lichtgeschwindigkeit identisch ist, den vollen Fehlbetrag in der Merkurtheorie zur Darstellung.

Eine andere Verallgemeinerung des *Weber*schen Gesetzes rührt von *P. Gerber*[200]) her. Er führt in den *Neumann*schen Ausdruck für das Potential (Gleich. (42a)) in dessen Nenner den unbestimmten Exponenten α ein:

$$(45\text{a})\quad P = k^2 m_1 m_2 : r\left[1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right]^\alpha = k^2 m_1 m_2 \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] : r$$

und erhält so als säkulare Perihelstörung

$$\Delta\pi = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{a^2 n^3}{c^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\cdot 13{,}65'',$$

aus der, unter der Annahme $\Delta\pi = 41{,}25''$, für α die zwei Werte $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_2 = -3$ folgen. Das Potential

$$(45\text{b})\qquad P = k^2 m_1 m_2 \left[1 + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] : r$$

199) *B. Riemann,* Ein Beitrag zur Elektrodynamik, Ges. Abh. 1867, p. 270. Über die Bewegung der Planeten bei Annahme dieses Gesetzes vgl. *O. Liman,* Inaug.-Diss. Halle (1886), dann *M. Lévy,* Paris C. R. 110 (1890), p. 545.

200) *P. Gerber,* Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 93; ferner: Jahresber. Real-Progymn. Stargard (1902), wieder abgedruckt Ann. Phys. Chem. 52 (1917), p. 415 und die Entgegnungen von *Seeliger,* ebd. 53 (1917), p. 31 u. 54 (1917), p. 38 sowie *Oppenheim,* ebd. 53 (1917), p. 163.

würde daher ebenfalls die volle Anomalie in der Merkurtheorie erklären — mit der Annahme $c = 3{,}10^5$ km/sec^{-1}.

Wesentlich verschieden von den beiden bisher angeführten ist das *Clausius*sche[201]) Gesetz. Es führt in das Potential an Stelle der relativen Geschwindigkeiten deren absolute Werte ein in der Form

$$(46\text{a})\qquad P = k^2 m_1 m_2 \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{dy_2}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dz_2}{dt}\right)\right] : r,$$

und macht damit die Störungen wieder von der Eigenbewegung der Sonne abhängig. Sind dann g_x, g_y und g_z wie oben deren Komponenten, und $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ die relativen Geschwindigkeiten, so ist

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{dx}{dt} + g_x$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{dx}{dt} + g_x$$
und analog für y und z

zu setzen und man erhält für P den neuen Ausdruck:

$$(46\text{b})\qquad P = \frac{k^2 m_1 m_2}{r}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left\{-\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\partial t}\right)^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{m_1 - m_2}{(m_1+m_2)}\left(g_x\frac{dx}{dt} + g_y\frac{dy}{dt} + g_z\frac{dz}{dt}\right) + g_x^2 + g_y^2 + g_z^2\right\}\right].$$

Dieser gibt als säkulare Störung neben $\varDelta a = 0$ noch

$$e\varDelta\pi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g_y \frac{n^2 a}{c^2},$$

entsprechend dem zweiten Glied, in dem die Störung darstellenden Teil von P, während der erste Teil bis auf den Faktor $m_1 m_2 : (m_1 + m_2)^2$ dem *Riemann*schen Gesetze gleichkommt, und das dritte konstante Glied sich in die Gravitationskonstante k^2 einschließen läßt, die damit den Wert erhält:

$$k^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2\right)\right].$$

Eine eigenartige Stellung in diesen Gravitationstheorien nimmt die *Jaumann*sche Theorie[202]) ein. Sie fügt zur *Laplace-Poisson*schen Gleichung, der das gewöhnliche *Newton*sche Potential genügt, zwei Glieder hinzu: eines, das die Verbreitung des Potential mit der Zeit darstellen soll und, da nur der erste Differentialquotient nach der Zeit hineinspielt, diese mit der Ausbreitung der Wärme in den Körpern vergleicht, und das zweite, das der Divergenz des Geschwindig-

201) *R. Clausius,* Über ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik, Pogg. Ann. 150 (1875), p. 657.

202) *G. Jaumann,* Theorie der Gravitation, Wien. Ber. 121 (1912), p. 95.

keitsvektors g des sich bewegenden Körpers proportional ist. Die Gleichung lautet daher

$$\frac{\alpha\varrho}{n}\frac{dP}{dt}+\frac{\beta}{n}P\operatorname{div}[g(\varrho-\varrho_0)]+4\pi\varkappa(\varrho-\varrho_0)=\Delta_2 P.$$

Sie enthält die neuen Konstanten, α als eine Art Wärmekapazität, n ein Wärmeleitungsvermögen, ϱ die Dichte des Stoffes an der Stelle des Raumes, für die das Potential berechnet ist, ϱ_0 die des freien Äthers, so daß $\frac{n}{\alpha\varrho}$ die Verbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation vorstellt, und endlich β eine Materialkonstante, die mit der Gravitationskonstanten k^2 in der Verbindung $\beta\varkappa = 4\pi n k^2$ steht. Die Gleichung sagt, daß im freien Äther ($\varrho = \varrho_0$) mit großer Annäherung das reine *Newton*sche Gesetz gilt, an anderen Stellen aber, wo Materie vorhanden ist, treten Abweichungen ein. Ein Versuch jedoch, aus der *Newcomb*schen Fehlertafel die numerischen Werte der neu eingeführten Konstanten zu bestimmen und sie in bezug auf ihre physikalische Möglichkeit zu prüfen, liegt bisher nicht vor.

Berichtigung.

p. 83. Fußn. 2 ist zu streichen.

p. 91. Fußn. 22 Schlußsatz: Über die Unterscheidung . . . ist zu streichen.

(Abgeschlossen Februar 1920.)

VI 2, 22a. GRAVITATION UND RELATIVITÄTSTHEORIE.

Von

FRIEDRICH KOTTLER

in Wien.[1])

Inhaltsübersicht.

---

1) In dem vorliegenden Referat wurde aus Platzrücksichten von der ursprünglichen Ausarbeitung nur das für die astronomischen Anwendungen der Relativitätstheorie Nötige beibehalten, dagegen alles Prinzipielle (Relativität der Bewegung, Kosmologie usw.), alles Mathematische (Tensoranalysis und Differentialinvarianten), endlich alles rein Physikalische (Energetik u. dgl.), soweit es für die astronomischen Anwendungen entbehrlich ist, weggelassen. Diesbezüglich sei auf ein bei Teubner in Vorbereitung befindliches Buch des Referenten oder auf den Artikel V 19 (Relativitätstheorie) von *W. Pauli jr.* (auch als Sonderdruck bei Teubner erschienen) verwiesen. — Für Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge ist der Referent Herrn *W. de Sitter* (Leiden), für Mitarbeit an der Korrektur Herrn *F. Zerner* (Wien) zu herzlichem Danke verpflichtet.

Literatur.

Es ist hier nur die astronomisch wichtige Literatur aufgezählt. Im übrigen siehe die Angaben in V 19 (*Pauli*).

A. Spezielle Relativitätstheorie.

H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig 1910 (Teubner), Nr. XIV, XVII—XX; zitiert als Abh.
— Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen usw. Leipzig 1913 (Teubner), 3. Auflage 1920. S. 74—89; zitiert als Samml.
— Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten zu Haarlem. Leipzig 1914 (Teubner). 2. Vorlesung; zitiert als Vorl.
W. de Sitter, On the bearing of the principle of relativity on gravitational astronomy, London Astr. Soc. M. N. 71 (1911), p. 388—415.

B. Allgemeine Relativitätstheorie.

W. de Sitter, Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, London Astr. Soc. M. N. First paper 76 (1916), p. 699—728. Second paper 77 (1916), p. 155—184. [Die dritte Abhandlung 78 (1917), p. 3—28 enthält nur Kosmologie]; zitiert als *de Sitter* I, II und III.
K. F. Bottlinger, Die astronomischen Prüfungsmöglichkeiten der Relativitätstheorie, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 17 (1920), p. 146—161.

I. Spezielle Relativitätstheorie.

A. Mechanik.

1. Mechanik des Massenpunktes in der speziellen Relativitätstheorie. Die Mechanik der Relativitätstheorie vereinigt die drei Impulssätze und den Energiesatz zu einer einheitlichen Aussage in einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, den drei räumlichen plus einer zeitlichen.

In der speziellen Relativitätstheorie (sp. Rel.th.) hat diese Mannigfaltigkeit (die sog. *Minkowski*sche „Welt") eine (pseudo)euklidische Maßbestimmung; bedeuten xyz kartesische Koordinaten, t die Zeit, c die

Lichtgeschwindigkeit, so behandelt man die Zeit t oder besser die Größe $ct\sqrt{-1}$ wie eine vierte kartesische Koordinate und setzt für das Quadrat des unendlich kleinen Abstands [1a]) zweier benachbarter „Weltpunkte"

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -\sum_{i=1}^{4} dx_i^2 \tag{1}$$

mit $\quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ct\sqrt{-1}.$

Irgend ein Massenpunkt beschreibt vermöge seiner Bewegung in dieser „Welt" seine „Weltlinie", d. i. den Inbegriff seiner sämtlichen Lagen mit den zugehörigen Zeiten. Die Weltlinie bleibt ungeändert, wenn das kartesische Koordinatensystem der $x_1 x_2 x_3 x_4$ eine *orthogonale* Transformation erfährt. Eine solche ist z. B. die Lorentztransformation (vgl. Nr. 4), welche geometrisch eine Drehung der Zeitachse, physikalisch den Übergang zu einem neuen, relativ zum alten gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssystem bedeutet. Die sp. Rel.th. behauptet überdies noch die Unabhängigkeit aller Aussagen der Mechanik (sowie auch anderer Gebiete) von der absoluten Geschwindigkeit des Bezugssystems, ja sie erklärt diese überhaupt für unfeststellbar. Eine analoge Unabhängigkeit besteht bekanntlich in der *Newton*schen Mechanik gleichfalls; alle gegeneinander irgendwie gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssysteme sind nach deren Relativitätsprinzip gleichberechtigte Systeme (*Inertialsysteme*) zur Beschreibung der mechanischen Erscheinungen. Der Unterschied beider Relativitätsprinzipe liegt nur in der Behandlung der Zeit als Parameters bei *Newton*, als vierter Koordinate in der sp. Rel.th.

Jene einheitliche vierdimensionale Aussage, welche die drei Impulssätze und den Energiesatz zum *Impulsenergiesatz* vereinigt, erhält man für die Mechanik des Massenpunktes in der sp. Rel.th. aus folgendem Variationsprinzip:

$$-\delta\int_1^2 c^2 m\, ds + \int_1^2 ds \sum_{i=1}^{4} X_i \delta x_i = 0. \tag{2}$$

Es tritt an Stelle des *Hamilton*schen Prinzips der *Newton*schen Mechanik

$$\delta\int_1^2 (T - U)\, dt + \int_1^2 dt (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \tag{2a}$$

Dabei bedeuten in (2):

m eine Massenkonstante des bewegten Massenpunktes,

1a) In Encykl. V 19 (*W. Pauli jr.*) wird statt (1) die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ gewählt.

$X_1 X_2 X_3$ die drei räumlichen Komponenten der *Minkowski*schen Viererkraft,

X_4 ihre zeitliche Komponente, die der Arbeitsleistung der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft proportional ist.

Die Integration geht längs der Weltlinie des Massenpunktes zwischen einer Anfangslage 1 und einer Endlage 2. ds ist das Element des nach (1) entlang der Weltlinie gemessenen Bogens. Seine physikalische Bedeutung ergibt sich aus:

$$(3) \qquad ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$
$$= c\,dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = c\,d\tau,$$

wo $d\tau$ offenbar das Element einer Zeit τ, der *Eigenzeit* des Massenpunkts, ist, die zu einem ganz bestimmten vierdimensionalen Koordinatensystem, dem *Eigensystem* oder *Ruhsystem* des Massenpunktes, gehört. Wie der Name sagt, ist dies jenes durch eine passende Drehung (Lorentztransformation) immer herstellbare System, das diejenige geradlinige und gleichförmige Bewegung besitzt, welche der Massenpunkt augenblicks hat; in einem solchen System ruht ja der Massenpunkt für den Augenblick, d. h. er besitzt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 0.$$

In jedem anderen System muß daher $v \leqq c$ vorausgesetzt werden, da $d\tau$ reell sein muß (Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit). Die Variation in (2) ist bei Festhaltung von Anfangs- und Endlage 1 bzw. 2 zu vollziehen, und zwar so, daß die Eigenzeit τ oder der Bogen s, gerechnet von der Anfangslage 1 bis zur jeweilig zu variierenden Lage, nicht variiert wird.

Die Bedeutung der Zeichen in (2a) ist wohlbekannt: XYZ ist die *Newton*sche Kraft, $T = \frac{1}{2}mv^2$ die kinetische Energie, U die potentielle Energie des Massenpunktes. Letztere ist bekanntlich in der *Newton*schen Mechanik nur bis auf eine additive Konstante bestimmbar, welche man, wenn man will, als latente Energie des Massenpunktes deuten kann. Die Variation in (2a) betrifft nur die räumlichen Koordinaten, läßt aber die Zeit unvariiert.

So ergibt sich aus (2) der Impulsenergiesatz der Mechanik des Massenpunktes in der sp. Rel.th. in der Form:

$$(4) \qquad -\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx_i}{d\tau}\right) + X_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

während aus (2a) die Impulssätze der *Newton*schen Mechanik des Massenpunktes

$$
(4\,\mathrm{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) + X = 0, \quad -\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) + Y = 0, \\ -\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) + Z = 0 \end{aligned} \right.
$$

folgen. Vergleichung der drei ersten Gleichungen von (4) mit (4a) ergibt, daß die räumlichen Komponenten der *Minkowski*schen Viererkraft mit der *Newton*schen Kraft durch

$$
(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 = X\frac{dt}{d\tau} = X \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad X_2 = Y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ X_3 = Z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right.
$$

zusammenhängen. Der Unterschied zwischen den Impulssätzen der sp. Rel.th. und denen der *Newton*schen Mechanik beruht sonach darauf, daß jene an Stelle von (4a) die Gleichungen:

$$
(4\,\mathrm{b}) \left\{ \begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt}\right) + X = 0, \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt}\right) + Y = 0, \\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\right) + Z = 0 \end{aligned} \right.
$$

hat, d. h. eine von der Geschwindigkeit v abhängige „Masse“ $M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ an Stelle der konstanten Masse m. Die „Masse“ M nähert sich für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ der Konstanten m, welche also die Masse gemessen im Ruhsystem des Massenpunktes oder seine *Ruhmasse* ist. Während daher die *Newton*sche Mechanik die Ruhmasse als unveränderte Masse für beliebig hohe Geschwindigkeiten beibehält, wächst nach der sp. Rel.th. die „Masse“ M mit wachsender Geschwindigkeit immer mehr und nähert sich für $v = c$ dem Werte Unendlich. Nach der sp. Rel.th. kann also ein Massenpunkt höchstens bis auf Lichtgeschwindigkeit und nicht darüber hinaus beschleunigt werden.

Die 4. Gleichung in (4) stellt nach dem eingangs Erwähnten den Energiesatz dar. Dieser fließt bei der *Newton*schen Mechanik als eine Folge aus den Impulssätzen (4a) in der Form:

$$
(7\,\mathrm{a}) \qquad -\frac{d}{dt}(T+U) + \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) = 0,
$$

während er sich in der Mechanik der sp. Rel.th. als vierte gleichberechtigte Gleichung neben die drei Impulssätze stellt. Vergleichung mit (7 a) ergibt, daß die vierte Komponente der *Minkowski*schen Viererkraft mit der Arbeitsleistung der *Newton*schen Kraft durch

$$X_4 = \frac{\sqrt{-1}}{c}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6}$$

zusammenhängt. Der Unterschied zwischen beiden beruht sonach darauf, daß erstere an Stelle von (7a) die Gleichung:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) = 0 \tag{7b}$$

hat; mithin entfällt der Unterschied zwischen kinetischer und potentieller Energie des Massenpunktes, und es gibt nur einen Ausdruck für seine Gesamtenergie E, nämlich

$$E = Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

Für kleine Geschwindigkeiten geht dies über in den Ausdruck $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, welcher mit dem *Newton*schen Ausdruck $U + T$ für die Gesamtenergie zusammenfällt, sobald man dem Massenpunkt eine „innere Energie"

$$U = mc^2 \tag{9}$$

zuordnet. Hierin liegt das Gesetz von der *Trägheit der Energie*, soweit es für den Massenpunkt in Betracht kommt, und die Zurückführung der Masse eines Körpers auf seinen Energieinhalt.

Die vier Gleichungen (4) der Relativitätstheorie sind nicht unabhängig von einander, ebenso wie in der *Newton*schen Mechanik der Energiesatz aus den Impulssätzen folgt. Denn es besteht die Identität:

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{dx_i}{d\tau}\left\{-\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx_i}{d\tau}\right) + X_i\right\} \equiv 0 \tag{10}$$

(*Minkowski*sche Orthogonalitätsrelation), welche unter der Voraussetzung, daß $\frac{dm}{d\tau} = 0$ ist, d. h. nach dem Obigen, daß die innere Energie des Massenpunkts während der Bewegung konstant bleibt (adiabatische Bewegung), einfach bestätigt werden kann.

2. Das Newtonsche Gesetz in der speziellen Relativitätstheorie. Um das *Newton*sche Gravitationsgesetz der sp. Rel.th. anzupassen, geht man am besten von folgenden Annahmen aus:

a) Die Gravitationswirkung pflanzt sich mit Lichtgeschwindigkeit fort.

b) Das *Newton*sche Gravitationsgesetz ist strenge richtig in einem Bezugssystem, in welchem der anziehende Körper momentan ruht, welches auch immer die Bewegung des angezogenen Körpers sei.

Unter diesen Annahmen gelingt es, durch eine Lorentztransformation die Form des *Newton*schen Gesetzes in einem beliebigen Bezugssystem der sp. Rel.th. anzugeben.[2]) Man hat hierbei nur alle auf das ursprüngliche Bezugssystem bezogenen Größen durch *vierdimensionale*, vektorielle, d. i. vom Koordinatensystem unabhängige *Invarianten* bzw. *Kovarianten* auszudrücken, um direkt die auf das allgemeine Bezugssystem bezogene Form vor sich zu haben. Man beachte, daß die zweite der obigen Annahmen der Beschleunigung des anziehenden Körpers keinen Einfluß auf die Anziehungswirkung zugesteht, was sicherlich nur angenähert richtig, aber wegen der Kleinheit der astronomisch vorkommenden Beschleunigungen zulässig ist.

Die angedeutete Rechnung verläuft im einzelnen wie folgt: Es sei m' die anziehende Masse, ihre Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'^0 = 0$ im Ruhsystem K^0 der Masse m', ihre Koordinaten $x'^0 y'^0 z'^0$; die angezogene Masse sei m, ihre Geschwindigkeit in K^0 sei $\mathfrak{v}^0$, ihre Koordinaten $x^0 y^0 z^0$. Es bedeute ferner $r^{0\,2} = (x^0 - x'^0)^2 + (y^0 - y'^0)^2 + (z^0 - z'^0)^2$. Gemäß der Annahme a) gehört, wenn t'^0 der Zeitmoment ist, in welchem m' in $x'^0 y'^0 z'^0$ betrachtet wird, eine spätere Zeit t^0 zu dem Moment, in welchem die Wirkung von m' in der Lage $x^0 y^0 z^0$ von m eintrifft. Und zwar ist:

$$t^0 = t'^0 + \frac{r^0}{c}. \tag{11}$$

Nach Annahme b) wirkt auf m in K^0 genau die *Newton*sche Kraft:

$$X^0 = -\frac{k^2 m' m}{r^{0\,3}}(x^0 - x'^0), \quad Y^0 = -\frac{k^2 m' m}{r^{0\,3}}(y^0 - y'^0),$$

$$Z^0 = -\frac{k^2 m' m}{r^{0\,3}}(z^0 - z'^0).$$

Gemäß der Mechanik der sp. Rel.th. (vgl. (5) und (6)) gehört zu ihr der Vektor der *Minkowski*schen Viererkraft:

$$X_1^0 = X^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{0\,2}}{c^2}}}, \quad X_2^0 = Y^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{0\,2}}{c^2}}}, \quad X_3^0 = Z^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

$$X_4^0 = \frac{\sqrt{-1}}{c}\left(X^0 \frac{dx^0}{dt^0} + Y^0 \frac{dy^0}{dt^0} + Z^0 \frac{dz^0}{dt^0}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{0\,2}}{c^2}}}.$$

---

2) Vgl. *H. A. Lorentz,* Vorl., Nachtrag 3, wo allerdings umgekehrt verfahren und gezeigt wird, daß unsere Gleichungen (15b) gegen eine Lorentztransformation kovariant sind.

Die Bewegungsgleichungen der angezogenen Masse m lauten daher nach (4):

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right) = -\frac{k^2 m'}{r^{0\,3}}(x^0 - x'^0)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy^0}{d\tau}\right) = -\frac{k^2 m'}{r^{0\,3}}(y^0 - y'^0)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dz^0}{d\tau}\right) = -\frac{k^2 m'}{r^{0\,3}}(z^0 - z'^0)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{-1}\,c\frac{dt_0}{d\tau}\right) = -\frac{k^2 m'}{r^{0\,3}}\frac{\sqrt{-1}}{c}\left\{(x^0 - x'^0)\frac{dx^0}{dt^0} + (y^0 - y'^0)\frac{dy^0}{dt^0} + (z^0 - z'^0)\frac{dz^0}{dt^0}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}}.$$

Die rechten Seiten müssen die Komponenten eines *Vierervektors* bilden. Um diesen anzugeben, bedenke man, daß die Eigenzeit τ nach (3) eine Invariante der Lorentztransformation ist. Also gehört zu der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^0$ mit den Komponenten $\frac{dx^0}{dt^0}\,\frac{dy^0}{dt^0}\,\frac{dz^0}{dt^0}$ ein Vierervektor mit den vier Komponenten:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt^0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}}, \qquad \frac{dy^0}{d\tau} = \frac{dy^0}{dt^0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

$$\frac{dz^0}{d\tau} = \frac{dz^0}{dt^0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}}, \qquad \sqrt{-1}\,c\frac{dt^0}{d\tau} = \sqrt{-1}\,c\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}},$$

und ebenso zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'^0 = 0$ ein Vierervektor:

$$\frac{dx'^0}{dt'} = 0, \quad \frac{dy'^0}{dt'} = 0, \quad \frac{dz'^0}{dt'} = 0, \quad \sqrt{-1}\,c\frac{dt'^0}{d\tau'} = \sqrt{-1}\,c.$$

Endlich bilden die Differenzen der Koordinaten und Zeiten einen Vierervektor:

$$x^0 - x'^0, \quad y^0 - y'^0, \quad z^0 - z'^0, \quad \sqrt{-1}\,c(t^0 - t'^0) = \sqrt{-1}\,r^0.$$

Dann bestätigt man leicht, wenn wieder zur Indizesbezeichnung übergegangen wird:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}} = -\frac{1}{c^2}\sum_{h=1}^{4}\frac{dx_h^0}{d\tau}\frac{dx_h'^0}{d\tau'} = -\frac{1}{c^2}\sum_{h=1}^{4}\frac{dx_h}{d\tau}\frac{dx_h'}{d\tau'},$$

$$r^0 = -\frac{1}{c}\sum_h (x_h^0 - x_h'^0)\frac{dx_h'^0}{d\tau'} = -\frac{1}{c}\sum_h (x_h - x_h')\frac{dx_h'}{d\tau'},$$

wo sich die ohne den Index 0 geschriebenen Koordinaten x auf ein *beliebiges* Bezugssystem K beziehen. Somit schreibt sich der gesuchte Vierervektor, der zur *Newton*schen Kraft gehört, in einem beliebigen System K:

$$(12)\quad X_i = -\frac{k^2 m' c}{\left[\sum_h (x_h - x_h')\frac{dx_h'}{d\tau'}\right]^3}\left[(x_i - x_i')\sum_h \frac{dx_h}{d\tau}\frac{dx_h'}{d\tau'} - \frac{dx_i'}{d\tau'}\sum_h (x_h - x_h')\frac{dx_h}{d\tau}\right].$$

Hierin bedeuten natürlich:

$$x_1 - x_1' = x - x', \quad x_2 - x_2' = y - y', \quad x_3 - x_3' = z - z',$$
$$x_4 - x_4' = \sqrt{-1}\, c(t - t'),$$
$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{dz}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$\frac{dx_4}{d\tau} = \sqrt{-1}\, c\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$\frac{dx_1'}{d\tau'} = \frac{dx'}{dt'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_2'}{d\tau'} = \frac{dy'}{dt'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_3'}{d\tau'} = \frac{dz'}{dt'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}},$$
$$\frac{dx_4'}{d\tau'} = \sqrt{-1}\, c\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}},$$

und es besteht die zu (11) analoge Gleichung:

$$(11\text{a})\qquad t = t' + \frac{r}{c},$$

da die Gleichung, die mit (11) gleichbedeutend ist,

$$(11\text{b})\qquad \sum_{h=1}^{4}(x_h^0 - x_h'^0)^2 = 0 = \sum_h (x_h - x_h')^2$$

gegen eine Lorentztransformation (orthogonale Transformation) invariant ist.

Somit lauten die Bewegungsgleichungen der angezogenen Masse m in einem beliebigen Bezugssystem K, in welchem die anziehende Masse m' die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}' \neq 0$ besitzt:

$$(13)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{k^2 m'\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{r^3\left(1-\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v}')}{rc}\right)^3}\left\{(x-x')\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}\right) - \frac{\mathfrak{v}_x'}{c}\left(r - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v})}{c}\right)\right\}$$

usw.

mit den üblichen Bezeichnungen der dreidimensionalen Vektoranalysis.

Man beachte hierbei, daß die Lage $x'y'z'$ von m' nicht gleichzeitig mit der Lage xyz von m ist, sondern entsprechend (11a) zeitlich früher als diese. Wünscht man diejenige Lage $x''y''z''$ von m', die mit xyz *gleichzeitig* ist, zu kennen, so muß man wissen, wie sich m' nach der Zeit t' bis zur Zeit t bewegt hat. Macht man die Annahme, daß diese Bewegung gleichförmig und geradlinig sei, was bei der Kleinheit des Zeitunterschiedes $t - t'$ (*Latenszeit*) infolge der geringen astronomischen Beschleunigungen statthaft ist, so kommt:

$$x' = x'' - \mathfrak{v}_x' \frac{r}{c}, \quad y' = y'' - \mathfrak{v}_y' \frac{r}{c}, \quad z' = z'' - \mathfrak{v}_z' \frac{r}{c}.$$

Bezeichnet man den dreidimensionalen Vektor mit den Komponenten $x - x''$, $y - y''$, $z - z''$ durch $\mathfrak{R}$, so kommen statt (13) die Gleichungen:

$$(14)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{k^2 m'\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{R^3\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}+\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v}')^2}{R^2c^2}}\right)^3}\left((x-x'')\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}\right)+\mathfrak{v}_x'\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v})}{c^2}\right)$$

usw.

Wie man sieht, weicht dies nur in Größen 2. Ordnung hinsichtlich der Quotienten $\frac{v}{c}$ bzw. $\frac{v'}{c}$ von der klassischen Form des *Newton*schen Gesetzes:

$$(14\text{a})\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{k^2 m'}{R^3}(x - x'') \quad \text{usw.}$$

ab, und geht, wie es nach Annahme b) sein muß, im System K_0, d. i. für $v' = 0$, genau in die Form (14a) über. Man beachte, daß in der *Newton*schen Mechanik der Unterschied zwischen den Lagen $x'y'z'$ und $x''y''z''$ wegfällt, weil dortselbst die Lichtgeschwindigkeit c, also auch nach Annahme a) die Geschwindigkeit der Gravitation, als unendlich groß behandelt wird.

Für die Praxis der Astronomie genügt es, (14) nur bis zu den Größen 2. Ordnung genau zu nehmen. Man erhält so:

$$(15\text{a})\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{c^2}\frac{dx}{dt}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2m'}{R^3}\left[(x-x'')\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v}')^2}{R^2c^2}\right)+\mathfrak{v}_x'\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v})}{c^2}\right] \quad \text{usw.,}$$

wo $\dot{\mathfrak{v}}_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ usw. geschrieben ist. Dafür kann man auch schreiben:

$$(15\text{b})\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2m'}{R^3}\left[(x-x'')\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v}')^2}{c^2}\right) - (\mathfrak{v}_x - \mathfrak{v}_x')\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v})}{c^2}\right] \quad \text{usw.}$$

Wünscht man die Gegenwirkung von m auf m' zu kennen, so hat man offenbar eine zu (15) ganz analoge Gleichung, in welcher nur die gestrichenen und ungestrichenen Größen vertauscht, sowie das Vorzeichen von $\mathfrak{R}$ — (jedoch natürlich nicht das von R) — umgekehrt sind:

$$(16)\quad \frac{d^2x''}{dt^2} = -\frac{k^2m}{R^3}\Big[-(x-x'')\Big(1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v})^2}{c^2}\Big) - (\mathfrak{v}_x-\mathfrak{v}_x')\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v}')}{c^2}\Big].$$

Wirkung und Gegenwirkung sind also in der Mechanik der Relativitätstheorie *nicht* entgegengesetzt gleich. Der Schwerpunkt beider Massen ist also nicht unbeschleunigt.

Der Ausdruck (12) für die Viererkraft läßt sich übrigens auch aus einer Potentialfunktion ableiten, die jedoch nicht nur von den Koordinaten der angezogenen und der anziehenden Masse, sondern auch von deren Geschwindigkeiten[3]) abhängt. Und zwar ist in (2):

$$\int_1^2 ds \sum_i X_i \delta x_i = -\delta \int_1^2 ds\, P,$$

wobei

$$(17)\qquad P = -\frac{k^2mm'}{c}\sum_i \frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_i'}{d\tau'} \Big/ \sum_i (x_i-x_i')\frac{dx_i'}{d\tau'},$$

so daß also:

$$(18)\qquad X_i = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)}\right) - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Bei der Differentiation in (18) ist zu beachten, daß wegen (11b) die x' oder besser das τ' von den x abhängen, und zwar ergibt sich durch Differentiation von (11b) die Formel:

$$(19)\qquad \frac{\partial \tau'}{\partial x_i} = (x_i-x_i') \Big/ \sum_h (x_h-x_h')\frac{dx_h'}{d\tau'}. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Die Formeln (17), (18) sind die relativistische Verallgemeinerung des *Newton*schen Potentials[4]), wobei dieses in der Form (für das System K^0):

$$-\frac{k^2mm'}{r^0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{0\,2}}{c^2}}}$$

anzusetzen ist $\left(\text{anstatt } -\frac{k^2mm'}{r^0}\right)$ wegen des Unterschiedes von *Minkowski*scher und *Newton*scher *Kraft* (vgl. (5)). Die Formel (18) kann dazu dienen, die Form zu berechnen, die das *Newton*sche Gesetz bei Berücksichtigung eines *Einflusses der Beschleunigung der anziehenden Masse* (also sozusagen der Strahlung) haben würde. Man erhält dann

3) Nach Analogie des sogenannten *effektiven Potentials* von *Riemann*; vgl. Encykl. V 12 (*Reiff* und *Sommerfeld*), p. 47 f.

4) Wir setzen in diesem Referate die *Newton*sche Kraft gleich dem *negativen* Gradienten eines Potentials entsprechend der modernen Bezeichnungsweise.

die aus der Elektronentheorie wohlbekannten Formeln von *K. Schwarzschild*[5]) für die ponderomotorische Kraft, die ein beliebig bewegtes punktförmiges Elektron auf ein zweites ausübt. Von *Schwarzschild* stammt auch die Formel (17), nur in etwas anderer Gestalt.

Den Umweg über die Elektronentheorie nahmen auch die ersten Versuche von *H. A. Lorentz*, die Form des *Newton*schen Gesetzes für bewegte Körper zu finden.[6]) Von diesen und der anschließenden Literatur wird in der folgenden Nr. die Rede sein.

3. Astronomische Anwendungen der relativistischen Form des Newtonschen Gesetzes. In der genannten Arbeit hatte *Lorentz* eine elektromagnetische Theorie der Gravitation aufgestellt, worüber man den Artikel von *Zenneck* vergleichen wolle.[7]) Er wollte durch die Berücksichtigung einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation zu einer Korrektur des *Newton*schen Gesetzes für bewegte Körper gelangen, bei welchen sich ja (im Gegensatz zu ruhenden Körpern) ein Einfluß der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit zeigen müßte, und erhoffte von dieser Korrektur eine Aufklärung der von *Leverrier* entdeckten säkularen Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur. Vgl. hierüber die Artikel von *Zenneck*[8]) und von *Oppenheim*[9]).

Die Arbeit von *Lorentz* steht noch nicht auf dem Boden des Relativitätsprinzips. Infolgedessen tritt in der Formel (15a) $\mathfrak{v}'$ als absolute Geschwindigkeit der anziehenden Masse auf; *Lorentz*, der eine ähnliche Formel, wie die rechte Seite von (15a), verwendet, operiert daher noch mit der absoluten Geschwindigkeit des Sonnensystems. Das Relativitätsprinzip lehrt hingegen, daß in einem mit dem Sonnensystem festverbundenen Bezugssystem K^0, also in heliozentrischen Koordinaten, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'^0$ des Systems gleich Null zu setzen ist. Dann reduziert sich die *rechte Seite* von (15a) auf die klassische Form des *Newton*schen Gesetzes, d. i. auf die rechte Seite von (14a). *Der gesuchte Einfluß der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation auf das Newtonsche Gesetz entfällt also*, soweit es sich um die Beschleunigung eines Planeten m gegen die Sonne m' gemäß der rechten Seite von (15a) handelt. Man könnte nun allerdings meinen, daß ein mit der Sonne fest verbundenes System kein im Sinne der sp. Rel.th. *berechtigtes Bezugssystem* sei, indem die Sonne die Gegen-

5) *K. Schwarzschild*, Gött. Nachr. 1903, p. 125, 132; vgl. auch Encykl. V 14 *Lorentz*), p. 199f.

6) *H. A. Lorentz*, Amst. Akad. Versl. 8 (1900), p. 603.

7) Encykl. V 2 (*Zenneck*), p. 60.

8) Encykl. V 2 (*Zenneck*), Nr. **21—24**.

9) Encykl. VI 2, 22 (*Oppenheim*), Nr. **31**.

beschleunigung des Planeten gemäß der rechten Seite von (16) erfährt, das System daher nicht beschleunigungsfrei wäre. Betrachtet man aber die Masse m des Planeten als unendlich klein gegen die Masse m' der Sonne, so kann man die Sonne als in einem berechtigten System ruhend ansehen, und der obige Schluß besteht wieder zu Recht. Auf diese Weise reduzieren sich die Gleichungen (14) und (15b) auf

$$\text{(14*)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = -\frac{k^2 m'}{R^3}(x - x'') \quad \text{usw.,}$$

$$\text{(15*)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2 m'}{R^3}\left[(x - x'')\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - \mathfrak{v}_x \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v})}{c^2}\right] \quad \text{usw.,}$$

d. h. es verbleibt der Einfluß der von der Relativitätstheorie behaupteten *Veränderlichkeit der Masse* mit wachsender Geschwindigkeit. Diesen Einfluß zu berechnen haben *A. Wilkens*[10]) und genauer *F. Wacker*[11]) unternommen. Ihre Rechnungen sind überprüft von *de Sitter*[12]).

De Sitter behandelte in seiner Arbeit außer der auf (12) zurückgehenden relativistischen Verallgemeinerung des *Newton*schen Gesetzes, die er Gesetz II nennt, und die in exakter Form zuerst von *Poincare* aufgestellt wurde[13]) (wobei *Poincaré* übrigens schon von der Metrik (1) der sp. Rel.th. *vor Minkowski* Gebrauch macht), eine zweite Form, die ebenfalls von *Poincaré* herrührt[14]) und später von *Minkowski* selbst übernommen wurde[15]). Dieses zweite Gesetz I, wie es *de Sitter* nennt, berücksichtigt nicht den Unterschied zwischen *Minkowski*scher und *Newton*scher Kraft, und ist daher vom Standpunkt der Mechanik der sp. Rel.th. abzulehnen. Es ergibt sich übrigens aus (12), wenn man durch $-\frac{1}{c^2}\sum_h \frac{dx^h}{d\tau}\frac{dx'_h}{d\tau'}$, welches ja in K^0 gleich $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{0\,2}}{c^2}}}$ wird, dividiert.

De Sitter bestätigt das *Wacker*sche Resultat, daß der Einfluß der Veränderlichkeit der Masse zu einer *Perihelbewegung des Merkur* im

---

10) *A. Wilkens,* Vierteljahrschr. A. G. 1904 — Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 846.

11) *F. Wacker,* Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 300; Inaug.-Diss. Tübingen (Leipzig 1909).

12) *W. de Sitter,* London Astr. Soc. M. N. 71 (1911), p. 388.

13) *H. Poincaré,* Palermo Rend. Circ. math. 21 (1906), p. 129—175, insbes. p. 175, Formel (14). — Diese Arbeit *Poincarés* stammt vom 23. Juli 1905 und ist die Ausarbeitung einer Note gleichen Titels aus den Paris C. R. 140 (5. Juni 1905), p. 1504—8. Hier wurde zum erstenmal, *vor Einstein,* das „Postulat" der Relativität ausgesprochen.

14) *H. Poincaré,* l. c. p. 174, Formel (11).

15) *H. Minkowski,* Gött. Nachr. 1908, p. 110 (Anhang), Formel (25).

Betrage von etwa 7″2 per Jahrhundert, welche etwa 6 mal kleiner als die beobachtete ist, Anlaß gibt. Bei den übrigen Planeten ist der Einfluß unmerklich. *De Sitter* berechnet weiter den Einfluß der Beschleunigung der Sonne, wenn die Masse des Planeten nicht vernachlässigt wird, indem er das Bezugssystem nicht in der Sonne, sondern in einem beschleunigungsfreien Punkte verankert. Ein solcher ist zwar nicht der Schwerpunkt von Sonne und Planet, wie in Nr. 2 schon erwähnt ist, jedoch läßt sich ein solcher Punkt unschwer angeben (*de Sitter*, l. c. p. 399). Man hat dann die Relativbeschleunigung des Planeten gegen die Sonne durch Subtraktion der Gleichung (16) von (15b) zu berechnen. Die Rechnung nach der Methode der Störungen[16]) findet man l. c. p. 403—6. Es ergibt sich für Merkur wiederum 7″15 Perihelbewegung per Jahrhundert; alles Übrige ist unmerklich. Dadurch wird erneut bestätigt, daß der Einfluß der Bewegung der Sonne, auf welchen man ursprünglich die Korrektur des *Newton*schen Gesetzes zu gründen gehofft hatte, Null ist. Es verbleibt nur der von der veränderlichen Masse herrührende Effekt der linken Seite von (15a).[17]) Dieser ergibt allerdings eine zu kleine Perihelbewegung des Merkur; allein *de Sitter* bemerkt l. c. p. 408, daß, wenn die *Seeliger*sche Theorie des Einflusses der Zodiakallichtmaterie[18]) auf die Bewegung der inneren Planeten herangezogen wird, der erwähnte Effekt gleichwohl brauchbar wird. Bei *Seeliger* bleibt nämlich ein unerklärter Rest von ungefähr gleicher Größe, den dieser auf eine Rotation des empirischen astronomischen Koordinatensystems gegenüber einem richtigen Inertialsystem zurückführt.[19]) Diese Rotation wäre durch die Massenveränderlichkeit der sp. Rel.-th. entbehrlich gemacht.[19a])

Schließlich möge bemerkt werden: dieser Einfluß der Massenveränderlichkeit ist unter ganz analogen mathematischen Verhältnissen wie im Sonnensystem bei der *Kepler*-Ellipse des negativen Elektrons im *Bohr-Rutherford*schen Atommodell von *Sommerfeld*[20]) zur Erklärung der Feinstruktur der Spektrallinien unter Zuziehung der Quantentheorie verwendet worden. Auch die Erklärung der Perihelbewegung des

---

16) Jedoch von Druckfehlern entstellt, die (zum Teil) in einer späteren Arbeit *de Sitters*, London Astr. Soc. M. N. 76 (1916), insbes. p. 725, verbessert sind.

17) Dies ist gegenüber der Darstellung bei *Lorentz*, Das Relativitätsprinzip, Vorl., l. c. p. 20 oder in desselben Autors Göttinger Vorträgen, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1239 unten (Samml. „Das Relativitätsprinzip“ p. 80 unten) zu betonen.

18) *H. v. Seeliger*, München Ber. 1906, p. 595.

19) Vgl. auch Encykl. VI 2, 1 (*Anding*).

19a) Vgl. jedoch *W. de Sitter*, Amst. Akad. Versl. 22 (1914), p. 1239 und *W. de Sitter*, I (vgl. Nr. 16).

Merkur geht durch die allgemeine Relativitätstheorie (allg. Rel.th.) im wesentlichen auf die gleiche Wurzel zurück wie der hier besprochene Effekt, beide nämlich auf das $\int ds$ im Variationsprinzip (2). Vgl. darüber Nr. **15**.

B. Optik.

4. Optik in bewegten Körpern nach der speziellen Relativitätstheorie. Wir besprechen hier anhangsweise die Gesetze der Optik in bewegten Körpern, und zwar zuerst die Gesetze der *Lichtstrahlen* (geometrische Optik), hernach die der *Wellennormalen* (Wellenoptik). Das Variationsprinzip (2) bestimmt für den kräftefreien Fall ($X_i = 0$) die Bewegung des sich selbst überlassenen Massenpunktes:

$$\delta \int_1^2 ds = 0. \tag{20}$$

Es bestimmt aber auch die Bahn eines Lichtstrahls, wenn die Nebenbedingung

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \tag{21}$$

(Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit) hinzugefügt wird. Und zwar gelten (20) und (21) für jedes berechtigte Bezugssystem. Hierin liegt das *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.* Geht man also von einem Bezugssystem zu einem gleichförmig und geradlinig, etwa mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse, relativ zum ersten bewegten Bezugssystem über, so kommt man durch das genannte Prinzip zu einem Widerspruch gegen die klassische Mechanik. Nach dieser ist nämlich irgendeine Geschwindigkeit, beurteilt vom neuen System, gleich der geometrischen Differenz der im alten System gemessenen Geschwindigkeit und der Translatationsgeschwindigkeit v. Wenn also, wie der Versuch von *Michelson* (Nr. 5) beweist, die Lichtgeschwindigkeit in jeder beliebigen Richtung in jedem berechtigten Bezugssystem immer konstant gleich c sein soll, so muß die klassische Mechanik reformiert werden, indem an die Stelle ihrer Formeln die Formeln der Lorentztransformation gesetzt werden. Bedeuten $xyzt$ die alten, $x'y'z't'$ die neuen Koordinaten, so lautet die Lorentztransformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{22}$$

20) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 51 (1916), p. 1.

mit der Auflösung:

$$(23) \qquad x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dies ist, wie schon in Nr. 1 erwähnt, eine euklidische Drehung der Zeitachse in der $x_1 x_4$-Ebene, wenn wieder $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t\sqrt{-1}$ gesetzt werden, wobei die Tangente des imaginären Drehwinkels $\varphi\sqrt{-1}$ den Wert $\operatorname{tg}(\sqrt{-1}\,\varphi) = \frac{v}{c\sqrt{-1}}$ erhält. Für $v \ll c$ erhält man aus (22) durch Grenzübergang die Formeln der sogenannten *Galileitransformation*:

$$(24) \qquad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

der klassischen Mechanik (mit *absoluter* Zeit $t' = t$).

Zufolge (22) ändert sich tatsächlich das *Additionsgesetz der Geschwindigkeiten* in der gewünschten Weise. Während aus (24) entsprechend der klassischen Mechanik nach Differentiation und Division durch dt'

$$(26) \qquad \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt},$$

also die geometrische Differenz aus der alten Geschwindigkeit und der der Translation folgt, ergibt sich in gleicher Weise aus (22) das *Einstein*sche *Additionsgesetz der Geschwindigkeiten*:

$$(25) \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}},$$

welches für $c = \infty$ wieder in (26) übergeht.

Aus dem Additionsgesetz (25) lassen sich die Gesetze der Strahlenoptik in bewegten Körpern, insbesondere das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, deduzieren. Wir betrachten folgende Beispiele:

a) Im System $xyzt$ laufe ein Lichtstrahl senkrecht zur x-Richtung, etwa in der y-Achse: $\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = c$. Dann folgt für das System $x'y'z't'$

$$\frac{dx'}{dt'} = -v, \quad \frac{dy'}{dt'} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \frac{dz'}{dt'} = 0.$$

D. h., der Lichtstrahl erleidet eine *Aberration*, indem er im „bewegten“ System $x'y'z't'$ eine Zusatzgeschwindigkeit v entgegengesetzt zur Richtung der Bewegung erhält. Die Lichtquelle, von der er kommt, erscheint daher in Richtung der Bewegung des „bewegten“ Systems verschoben. Dies stimmt überein mit der klassischen Theorie der geometrischen Optik. Während aber diese $\frac{dx'}{dt'} = -v$, $\frac{dy'}{dt'} = c$, $\frac{dz'}{dt'} = 0$ hat, also einen Aberrationswinkel φ, dessen Tangente $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c}$ ist, treten in der Relativitätstheorie dafür $\frac{dx'}{dt'} = -v$, $\frac{dy'}{dt'} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\frac{dz'}{dt'} = 0$, so daß $\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2$ wiederum gleich c^2 wird. Der Unterschied des neuen Aberrationswinkels gegen den klassischen ist aber nur eine Größe 2. Ordnung, also unmerklich für die astronomischen Geschwindigkeiten.

Durch die bei diesem Beispiel erzielte Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erklärt sich das Resultat des Versuches von *Michelson*, soweit es sich um den *transversalen* Arm des Interferometers (d. i. den quer zur Erdbewegung liegenden) handelt.

b) Im System $xyzt$ laufe ein Lichtstrahl parallel zur x-Richtung: $\frac{dx}{dt} = c$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Im „bewegten" System $x'y'z't'$ wird: $\frac{dx'}{dt'} = c$, $\frac{dy'}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = 0$ an Stelle des Resultates der klassischen Theorie $\frac{dx'}{dt'} = c - v$, $\frac{dy'}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = 0$.

Durch die so erzielte Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erklärt sich das Resultat des Versuches von *Michelson*, soweit es sich um den *longitudinalen* Arm des Interferometers (d. i. den längs der Erdbewegung liegenden) handelt.

c) Man betrachte ein ponderables Medium mit dem Brechungsindex n und sehe vorläufig von der Dispersion ab. Dann beträgt die Lichtgeschwindigkeit für *jede* Farbe $\frac{c}{n}$. Im System $xyzt$ fasse man nun einen in diesem Medium parallel zur x-Richtung laufenden Strahl auf: $\frac{dx}{dt} = \frac{c}{n}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Dann folgt für das System $x'y'z't'$:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{v}{cn}} \sim \frac{c}{n} - v\left[1 - \frac{1}{n^2}\right] + \cdots, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = 0.$$

D. h. bis auf Größen 2. Ordnung läuft für den „bewegten" Beobachter im System $x'y'z't'$ der Strahl nicht mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$, sonsern mit der geometrischen Differenz aus $\frac{c}{n}$ und seiner Translationsgeschwindigkeit, letztere jedoch multipliziert mit $1 - \frac{1}{n^2}$, *dem Fresnelschen Mitführungskoeffizienten.* Er ist Null für den leeren Raum

($n = 1$) und wird höchstens gleich 1 für ein unendlich stark brechendes Medium.

Da man natürlich ebensogut das System $xyzt$ als mit der Geschwindigkeit v entgegengesetzt zur x-Richtung „bewegt" und das System $x'y'z't'$ als „ruhend" ansehen kann, so findet man, daß vom ruhenden System aus, die Lichtgeschwindigkeit im bewegten ponderablen Medium als die geometrische Summe aus $\frac{c}{n}$ und der mit dem *Fresnel*schen Mitführungskoeffizienten multiplizierten Translationsgeschwindigkeit des Mediums ist. Dies erklärt die *partielle Mitführung des Lichtes* im strömenden Wasser (Versuch von *Fizeau*, Nr. 5). Die klassische geometrische Optik würde volle Mitführung ergeben: $\frac{dx'}{dt'} = \frac{c}{n} - v$, und zwar gleicherweise für den Äther wie für die ponderable Materie.

Nach Erledigung der Strahlenoptik werde nunmehr eine ebene Welle betrachtet von der Gestalt

$$A \cos \nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right),$$

wo A die Amplitude, ν die Frequenz, α, β, γ die Richtungskosinusse der Wellennormalen ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), V die Wellengeschwindigkeit sind. Wir diskutieren wieder folgende Beispiele zur Lorentztransformation:

α) Im System $xyzt$ verlaufe eine Welle senkrecht zur x-Achse mit der Geschwindigkeit c: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$; $V = c$. Gemäß (23) wird für das System $x'y'z't'$:

$$\cos \nu \left(t - \frac{y}{c}\right) = \cos \nu \left[\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{y'}{c}\right] = \cos \nu' \left[t' - \frac{\alpha' x' + \beta' y'}{V'}\right],$$

wobei

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \alpha' = -\frac{v}{c}, \quad \beta' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{gesetzt ist;} \quad V' = c.$$

D. h., wir haben genau wie vorhin in a) die gleiche *Aberration*, diesmal der Wellennormale anstatt des Strahls; Normale und Strahl fallen also in beiden Systemen zusammen. Auch die Wellengeschwindigkeit bleibt konstant gleich c. Dafür tritt eine Frequenzänderung, allerdings bloß 2. Ordnung, auf (*transversaler Dopplereffekt*).

β) Im System $xyzt$ verlaufe eine Welle parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit c: $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$; $V = c$. Gemäß (23) wird für das System $x'y'z't'$:

$$\cos\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) = \cos\nu\left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] = \cos\nu'\left[t' - \frac{\alpha' x' + \beta' y'}{V'}\right],$$

wobei

$$\nu' = \frac{\nu\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = \gamma' = 0; \quad V' = c.$$

D. h.: Zusammenfallen von Normale und Strahl. Konstanz der Wellengeschwindigkeit wie in b). Auftreten des *longitudinalen Dopplereffekts*: Dem „bewegten" Beobachter erscheint das Licht mit verminderter Frequenz ν', wenn er sich *mit* dem Licht bewegt, d. h. wenn er sich von der Lichtquelle entfernt. Der klassische Dopplereffekt wäre bloß $\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right)$; hier tritt noch ein Unterschied 2. Ordnung auf.

γ) Im System $xyzt$ verlaufe eine Welle im ponderablen Medium vom Brechungsindex n parallel zur x-Richtung. Es werde aber jetzt im Gegensatz zu c) die *Dispersion* berücksichtigt; dann ist n eine Funktion $n(\nu)$ der Frequenz. Die Lichtgeschwindigkeit $\frac{c}{n}$ ist daher für verschiedene Frequenzen verschieden. Im System $xyzt$ hat man $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$; $V = \frac{c}{n}$. Gemäß (23) wird für das System $x'y'z't'$:

$$\cos\nu\left(t - \frac{x}{c}n\right) = \cos\nu'\left(t' - \frac{x'}{V'}\right),$$

wo

$$\nu' = \nu\frac{\left(1 - \frac{nv}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad V' = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{v}{cn}} \sim \frac{c}{n} - v\left[1 - \frac{1}{n^2}\right].$$

Hierin bezieht sich n auf die Frequenz ν, die die Welle im System $xyzt$ aufweist. Wünscht man die Frequenz ν' einzuführen, die die Welle im System $x'y'z't'$ hat, so hat man einen Brechungsindex n', der zu ν' gehört und bis auf Größen 2. Ordnung mittels *Taylor*scher Reihenentwicklung durch n wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$n' = n(\nu') = n(\nu)\left[1 - \frac{v}{c}\cdot\nu\frac{dn}{d\nu}\right].$$

Hieraus folgt umgekehrt, bis auf Größen 2. Ordnung:

$$n = n'\left(1 + \frac{v}{c}\nu\frac{dn}{d\nu}\right),$$

somit bis auf Größen 2. Ordnung:

$$V' \sim \frac{c}{n'} - v\frac{\nu}{n'}\frac{dn}{d\nu} - v\left[1 - \frac{1}{n'^2}\right].$$

Es zeigt sich mithin eine mit Rücksicht auf die Dispersion etwas veränderte *Mitführung des Lichts*, wenn wieder das System $x'y'z't'$ als „ruhend" und das System $xyzt$ mit dem ponderablen Medium als „bewegt" (und zwar mit der Geschwindigkeit v entgegengesetzt zur x-Achse) aufgefaßt wird. Zu beachten ist, daß in dem vorliegenden Falle, wo Wellennormale und Bewegungsrichtung parallel sind, aber auch nur in diesem Falle, Strahl und Wellennormale im bewegten ponderablen Medium zusammenfallen. *Bei beliebiger Orientierung der Wellennormale zur Bewegungsrichtung unterscheiden sich Strahl und Wellennormale und ebenso Strahlen- und Normalengeschwindigkeit voneinander in ponderablen Medien.*

Bemerkt werde, daß die vorstehende Formel für die vom nicht mitbewegten Beobachter gemessene Geschwindigkeit V' sich aus der Zeit berechnet, die er für den Lichtweg zwischen zwei *nicht mitbewegten* Punkten beobachtet. Dies sind bei *Fizeaus* Versuch die Glasflächen, durch welche das Licht in die ruhende Röhre eintritt, in welcher das Wasser strömt. Bei der von *Zeeman* (Nr. 5) vorgenommenen Abänderung des Mitführungsversuchs, wo ein massiver Glasstab als Ganzes bewegt wird, gilt daher die Formel für V' nicht ohne weiteres, wenn der Lichtweg zwischen den *mitbewegten* Ein- und Austrittsflächen genommen wird.[29])

5. Beziehungen der Optik in bewegten Körpern zur Astronomie. Im weiteren Sinne gehören fast alle Versuche über optische Erscheinungen in bewegten Körpern in das Gebiet der Astronomie, weil es sich bei ihnen meist um die Bewegung der Erde bzw. des Sonnensystems handelt. Wir geben darum nachstehend eine Übersicht der wichtigsten dieser Versuche in tunlichst chronologischer Anordnung, wobei die zeitgenössische Erklärung sowie die heute auf Grund der sp. Rel.th. geltende (letztere durch Hinweise auf Nr. 4) beigefügt wird. Man kann hierbei 3 Epochen unterscheiden: A. Versuche, welche unter der Herrschaft der Emissionstheorie des Lichtes entstanden. B. Solche, welche unter der Herrschaft der elastischen (Äther)wellentheorie entstanden. C. Endlich solche, mit welchen die Krisis des Lichtäthers beginnt, die zur sp. Rel.th. geführt hat.

A. An erster Stelle steht die Entdeckung der astronomischen Aberration durch *James Bradley*, 1727. Ihre Erklärung auf Grund des Additionsgesetzes der Geschwindigkeiten der klassischen Mechanik ist unmittelbar evident, sobald die Lichtstrahlen als Bahnen von Korpuskeln angesehen werden, die mit Lichtgeschwindigkeit emittiert worden sind und von einem mit der Erde mitbewegten Beobachter betrachtet werden. Über die astronomische Behandlung der Aberration vgl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 7a und VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), Nr. 6; ihre relativistische Erklärung Nr. 4a) bzw. α).

B. Nach der Aufstellung der Undulationstheorie des Lichtes auf Grund der Hypothese des Lichtäthers als eines elastischen Mediums durch *Augustin Fresnel* entsteht die Aufgabe, die Aberration auf Grund der Wellentheorie zu erklären. Nimmt man mit *Fresnel*[21]) den Äther als *ruhend* an, so ist unmittelbar evident, daß die Wellennormalen keine Aberration erleiden können. Wohl aber erleiden die Strahlenbündel eine solche.[22]) Denn weil das Licht zu seiner Fortpflanzung Zeit braucht, wird man z. B. einen stellaren Lichtstrahl, der eine mit der Erde mitbewegte Blende passiert hat, durch eine hinter dieser aufgestellte ebenfalls mitbewegte zweite Blende hindurch nur dann beobachten können, wenn diese zweite Blende aus der ursprünglichen Richtung entgegen der Bewegungsrichtung der Erde um ein Stück verschoben wird, welches dem von der Erde zurückgelegten Weg während der Zeit entspricht, die der Lichtstrahl zum Durcheilen des Zwischenraumes zwischen beiden Blenden braucht. Die neue Richtung, welche die beiden Blenden nunmehr bestimmen, der *relative* Strahl, bildet mit der ursprünglichen Richtung, dem *absoluten* Strahl, den Aberrationswinkel. Der absolute Strahl hat die Richtung der Wellennormale.

Diese Erklärung stößt auf Schwierigkeiten, wenn die Fortpflanzung des Lichtes in bewegter *ponderabler Materie* betrachtet wird. Die Beobachtungen werden ja nicht mittels Blenden, sondern mittels Glaslinsen u. dgl. gemacht. Diese Schwierigkeiten deckte zuerst *Arago*[23]) auf.

Versuch von Arago. Arago beobachtete einen Stern durch ein Prisma hindurch zu verschiedenen Tageszeiten. Wenn die Geschwindigkeit des zur Beobachtung gelangenden relativen Strahls, wie nach dem Vorigen zu erwarten stünde, immer gleich der geometrischen Differenz aus der Geschwindigkeit des absoluten Strahls weniger der Translationsgeschwindigkeit der Erde wäre, so müßte, da zu verschiedenen Tageszeiten diese letztere Geschwindigkeit eine verschiedene ist,

---

21) Lettre de *Fresnel* à *Arago*, Ann. chim. phys. 9 (1818), p. 57, Oeuvres complètes de *Fresnel* 2, p. 627.

22) Vgl. für das folgende *H. A. Lorentz,* Arch. neérl. 21 (1887), p. 103 ff. oder Abh. I. Nr. XIV, p. 341 ff.

23) *F. Arago*, Oeuvres complètes 1 (Paris 1854), in der Notice biographique sur *Fresnel,* insbes. p. 156. — Genauere Beschreibung des Versuchs von *Arago* bei *J. B. Biot,* Traité élementaire d'astronomie physique 5, 3ᵉ éd. (Paris 1857), p. 364 note.

die Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit des relativen Strahls im Prisma eine verschieden starke Brechung bzw. Ablenkung dieses Strahls zur Folge haben; denn die Brechung hängt von der Geschwindigkeit ab. Tatsächlich wurde aber von *Arago* kein Einfluß der Richtung der Erdbewegung auf die Größe der Ablenkung beobachtet.

Mitführungshypothese von Fresnel. Während *Arago* seinen Versuch nur als Widerlegung der Emissionstheorie, durch die ja ein solcher Einfluß gefordert würde, betrachtete, gab *Fresnel* in dem zitierten Brief an *Arago* eine Erklärung des Versuchs auf Grund der Wellentheorie. Darnach würde nur der *freie* Äther außerhalb der Erde *ganz* ruhen, der innerhalb der Erde und aller ponderablen Materie befindliche Äther würde bei der Bewegung *zum Teil mitgenommen*, und zwar im Verhältnisse des Überschusses, den die Dichte des Äthers innerhalb der ponderablen Materie gegenüber der Dichte des freien Äthers besitze; ein Maß für diesen Überschuß sei der Brechungsexponent. Nach der Elastizitätstheorie ergibt sich nämlich für die Wellengeschwindigkeit eine Größe, die proportional ist der umgekehrten Quadratwurzel der Dichte des elastischen Mediums. Demgemäß ist das Quadrat des Brechungsindex n gleich dem Verhältnis der Dichte des Äthers in der ponderablen Materie zu der Dichte des freien Äthers. (Von den Schwierigkeiten der Dispersion ist hierbei abgesehen.) Hieraus schließt *Fresnel*, daß die Geschwindigkeit des relativen Strahls gleich ist der Geschwindigkeit des absoluten Strahls in dem betreffenden Medium, vermindert um die mit $\frac{1}{n^2}$ multiplizierte Translationsgeschwindigkeit der Bewegung des Mediums. Dies umfaßt sowohl den Fall der Aberration im freien Äther ($n = 1$), wo die Geschwindigkeit des absoluten Strahls um die volle Translationsgeschwindigkeit vermindert wird, wie den Fall der Brechung eines stellaren Lichtstrahls in einem terrestrischen Prisma, wo infolge der teilweisen Mitführung des Lichtstrahls durch die Materie des Prismas die Geschwindigkeit des absoluten Strahls bloß um das $\frac{1}{n^2}$fache der Translationsgeschwindigkeit vermindert wird. Da in dem letzteren Fall die gewöhnliche Brechung des einfallenden Strahls noch hinzutritt, und zwar natürlich im Sinne einer Verminderung der Strahlengeschwindigkeit, *kompensieren* sich beide Effekte — partielle Mitführung und Brechung — wie die Rechnung zeigt, genau so, daß die Brechung des relativen Strahls *unbeeinflußt* wird von der Bewegung der Erde.

Versuch von Fizeau. Die Mitführungshypothese *Fresnels* ist experimentell bestätigt durch *H. Fizeaus* berühmten Versuch mit strömendem Wasser[24]). Hier wird mit terrestrischen Hilfsmitteln eine Bewegung eines ponderablen Mediums — Wasser, das mit 4—7 m Geschwindigkeit strömt — hergestellt, und mittels der Interferenz zweier Strahlen, von denen einer *mit*, der zweite *entgegen* dem Wasser läuft, die infolge der Bewegung des Wassers eingetretene Veränderung der Geschwindigkeiten beider Strahlen gemessen. Der Versuch ist später durch *Michelson* und *Morley*[25]) mit Strömungsgeschwindigkeiten zwischen 5,7 und 8,7 m Geschwindigkeit wiederholt worden und ergab eine sehr gute Bestätigung, wobei allerdings der durch die Bewegung hervorgerufene Dopplereffekt (vgl. Nr. 4, γ) nicht berücksichtigt wurde.[26]) Neuerdings hat *P. Zeeman*[27]) die *Fresnel*sche Theorie am bewegten Wasser besonders genau bestätigt. Er hat sodann Versuche an bewegten festen (Glas)körpern durchgeführt[28]), bei welchen an Stelle der Formeln Nr. 4 unter c) bzw. γ) eine andere Formel tritt, da hier der Lichtweg nicht zwischen zwei festen, sondern zwischen zwei beweglichen Ein- und Austrittsflächen gemessen wird.[29])

Versuche von Hoek. Nachdem durch *Fizeaus* Versuch auf terrestrischem Bereiche die *Fresnel*sche Theorie bestätigt worden war, beschäftigten sich zahlreiche Zeitgenossen mit ihrer Kritik und Überprüfung. Den Einfluß der Richtung der Erdbewegung auf die Lage des von einem wassergefüllten Fernrohr entworfenen Bildpunkts eines *irdischen* Lichtpunkts untersuchen *M. Hoek*[30]), *E. Ketteler*[31]), *Respighi*[32]). Es ergibt sich kein solcher Einfluß, wie es der Theorie von *Fresnel* entspricht. *Hoek*[33]) untersucht auch eine Interferenzerscheinung, indem er zwei Strahlen miteinander interferieren läßt, die ein wassergefülltes Rohr, das zur Richtung der Erdbewegung parallel steht, in entgegengesetztem Sinne durchlaufen haben. Es ergibt sich gleichfalls kein Einfluß der Erdbewegung auf die Interferenzerscheinung.[34])

---

24) *H. Fizeau*, Paris C. R. 33 (1851), p. 349; Ann. chim. phys. (3) 57 (1859), p. 385.

25) *A. A. Michelson* u. *E. W. Morley*, Amer. J. Science (3) 31 (1886), p. 377.

26) *H. A. Lorentz*, Versuch einer Theorie der elektr. u. opt. Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895, § 72; Theory of electrons, Leipzig 1909, § 164.

27) *P. Zeeman*, Amst. Akad. Versl. 23 (1914), p. 245; 24 (1915), p. 18.

28) *P. Zeeman*, ebenda 28 (1919), p. 1451; *P. Zeeman* u. *A. Snethlage*, ebenda 28 (1919), p. 1462.

29) Vgl. *M. Laue*, Ann. d. Phys. 62 (1920), p. 458ff., § 3.

30) *M. Hoek*, Astr. Nachr. 73 (1869), p. 193.

31) *E. Ketteler*, Astronomische Undulationstheorie, Bonn 1873, p. 66.

32) *Respighi*, Bologna Ist. Mem. 2 (1862), p. 279.

33) *M. Hoek*, Arch. neérl. 3 (1868), p. 180.

34) Andere Interferenzerscheinungen wurden hinsichtlich des Einflusses der

Versuch von Airy. Die Einflußlosigkeit der Erdbewegung auf die Brechung des von einer *außerterrestrischen* Lichtquelle herkommenden Lichts bestätigte *Airy*[35]) nach einer von *Boscovich* herrührenden Idee, indem er die Aberration im wassergefüllten Fernrohr maß und gleich der im luftgefüllten Fernrohr fand. Er widerlegte damit gegenteilige Behauptungen und Versuche von *W. Klinkerfues*[36]).

Theorien von Stokes und von Lorentz. Die vorstehend geschilderten Versuche behandeln im wesentlichen drei Tatsachen.[37]) Erstens die *Aberration*; zweitens den Umstand, daß sich auf einen *stellaren* Lichtstrahl, wenn seine scheinbare Richtung und Frequenz bestimmt sind, die Gesetze der gewöhnlichen Optik anwenden lassen, ohne weiter auf die Bewegung der Erde zu achten (*Arago, Airy*); drittens, daß alle von *terrestrischen* Lichtquellen erzeugten optischen Phänomene völlig unabhängig sind von der Erdbewegung (*Hoek, Ketteler* usf.).

Zur Erklärung genügt die *Fresnel*sche partielle Mitführungstheorie des Lichtäthers. Dieser Theorie, die den (freien) Äther als einen die Materie durchdringenden, also ruhenden *festen* Körper ansieht, steht die Theorie der vollen Mitnahme des Äthers an der Erdoberfläche von *G. G. Stokes*[38]) gegenüber, welche den freien Äther als eine (zähe), die genügend dichte Materie nicht durchdringende, daher an ihrer Oberfläche mitgenommene *Flüssigkeit* ansieht. Man sieht ohne weiteres, daß dann für terrestrische Phänomene die Erdbewegung einflußlos sein muß, und daß die Aberration zustande kommt, wenn nur die an die Erde angrenzende Ätherschicht volle Mitnahme, die entfernteren Schichten nach außen zu abnehmende Mitnahme aufweisen. Jedoch ist *Wirbelfreiheit* der Ätherströmung zur richtigen Erklärung der Aberration erforderlich.[39]) Mit der Wirbelfreiheit ist aber der durch die volle Mitnahme geforderte Ausschluß jeder *Gleitung* des Äthers an der Erdoberfläche unverträglich, wenn man nicht *Kompressibilität* des Äthers zuhilfe nehmen will.[40]) Eine Kompressibilität des Äthers müßte sich durch eine Variabilität der Lichtgeschwindigkeit

---

Erdbewegung untersucht von *E. Ketteler,* l. c. p. 67 und *E. Mascart,* Ann. Éc. Norm. (2) 1 (1872), p. 166.

35) *G. B. Airy,* London Roy. Soc. Proc. 20 (1871), p. 35.

36) *W. Klinkerfues,* Astr. Nachr. 66 (1866), p. 387, Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie, Leipzig 1867, insbes. p. 53.

37) *Lorentz,* Theory of electrons, § 152.

38) *G. G. Stokes,* Phil. Mag. 27 (1845), p. 9; Math. phys. pap. 1, p. 134.

39) *Lorentz,* Arch. neérl. 21 (1887), § 6.

40) *Lorentz,* Amst. Akad. Versl. 7 (1899), p. 523 = Abh. Nr. XIX, p. 454; Theory of electrons, § 149.

in der Nähe großer bewegter Körper bemerkbar machen.[41]) Infolgedessen scheint die Theorie von *Stokes* nicht annehmbar. Bemerkt werde, daß sie der von *H. Hertz*[42]) aufgestellten Theorie der Optik in bewegten Körpern zugrunde liegt.

Die Theorie von *Fresnel* ist durch *Lorentz*[43]) ausgebaut worden. Bei Vernachlässigung der Größen 2. Ordnung zeigt sich, daß die optischen Phänomene auf der Erde bestimmt werden, wenn man das *Fermat*sche Prinzip der kürzesten Lichtzeit anstatt auf die *absoluten* Strahlen — also auf die „wahren" Lichtwege — einfach auf die *relativen* Strahlen — also auf die „scheinbaren" Lichtwege — anwendet, und daher mit den letzteren so rechnet, als wären es *gewöhnliche* Strahlen in einem ruhenden Medium. Daß die relativen Strahlen nicht mit den zugehörigen Wellennormalen zusammenfallen, wie bereits oben erwähnt ist, tut also dabei nichts zur Sache.

Dopplereffekt. Auf Grund der klassischen Kinematik (Galileitransformation) ist ohne weiteres klar, daß ein sich einer ruhenden Lichtquelle nähernder Beobachter in der Zeiteinheit mehr Wellenzüge empfängt als ein ruhender oder gar ein sich entfernender Beobachter, da der erstere den Wellen entgegenläuft[44]). Nach anfänglichen Angriffen (*Petzval, Klinkerfues* u. a.) hat das Prinzip in der Astrophysik die umfassendste Anwendung und Bestätigung erfahren[45]) (*Lockyer, Secchi, Vogel, Campbell* u. a.). Eine terrestrische Bestätigung des Prinzips, nämlich den Nachweis der infolge vielfacher Reflexionen an gegeneinander rotierenden Spiegeln eintretenden Dopplerverschiebung lieferten, nach Vorversuchen von *Belopolsky*[46]), *Galitzin* und *Wilip*[47]). Sie konnten einen Dopplereffekt von ungefähr $^1/_4$ km/sec^{-1} Geschwindigkeit messen und bestätigen. Auch der von *Stark*[48]) an bewegten Kanalstrahlen be-

41) Eine solche wird zur Erklärung der Ablenkung der Lichtstrahlen an der Sonnenoberfläche im Gegensatz zur *Einstein*schen Erklärung neuerdings herangezogen durch *L. Silberstein,* Phil. Mag. 39 (1920), p. 161; vgl. Anm. 56, 143).

42) *H. Hertz,* Ann. Phys. 41 (1890), p. 369.

43) *Lorentz*, Arch. neérl. 21 (1887) = Theory of electrons, § 150—155.

44) Ursprünglich ausgesprochen von *Ch. Doppler,* Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss. (1842), p. 462, und irrtümlich zur Erklärung der Farbenverschiedenheiten der Sterne (Verschiebung des *ganzen* Spektrums) angewendet. Richtig (für die *einzelne* Spektrallinie) formuliert von *H. Fizeau,* gelesen vor der Societé philomathique, Paris 1848; gedruckt Ann. chim. phys. 19 (1870), p. 211.

45) Erste Anwendung am Sirius durch *W. Huggins,* Phil. Trans. 158 (1868), p. 529 zugleich mit einer Bemerkung von *Maxwell,* ebenda p. 532.

46) *A. Belopolsky,* Astroph. J. 13 (1901), p. 15.

47) *B. Galitzin* u. *Wilip,* Astroph. J. 26 (1907), p. 49.

48) *J. Stark,* Ann. d. Phys. 21 (1906), p. 401.

obachtete Dopplereffekt kann als terrestrische Bestätigung des Prinzips herangezogen werden.

C. Der wesentliche Punkt der klassischen *Fresnel*schen Äthertheorie ist der, daß die Geschwindigkeit der relativen Strahlen, mit denen ein durch den freien Äther hindurch bewegter Beobachter operieren muß, die geometrische Differenz aus der Geschwindigkeit des absoluten Strahls und der Translationsgeschwindigkeit des Beobachters ist. Danach hätte man also ein Mittel, durch Messung der Lichtgeschwindigkeit in irgendeinem System die Bewegung desselben relativ zum ruhenden Äther (die „absolute" Bewegung) festzustellen. Darauf hat zuerst *Maxwell* hingewiesen.[49]) Und zwar wendet er diese Betrachtung sowohl auf die „absolute" Bewegung der Erde[49]) als auch auf die des ganzen Sonnensystems[50]) an.

Was die erstere anbelangt, so ist bekannt, daß *terrestrische* Messungen der Lichtgeschwindigkeit wegen der Größe der letzteren sich auf einen *geschlossenen* Lichtweg beziehen müssen. Die Folge davon ist, daß im Resultat der Einfluß der Erdgeschwindigkeit, weil er sich bei der einen Hälfte dieses Lichtwegs addiert, bei der andern subtrahiert, in *erster* Ordnung herausfällt und daß also nur ein Effekt *zweiter* Ordnung übrig bleibt. *Maxwell* meinte damals, daß dieser Effekt zu klein sei, um beobachtet werden zu können.

Was die letztere anbelangt, so besitzen die *astronomischen* Messungen der Lichtgeschwindigkeit den Vorzug, sich auf *ungeschlossene* Lichtwege zu beziehen. Infolgedessen bleibt hier ein Effekt erster Ordnung bestehen. *Maxwell* zieht die *Römer*sche Methode der Messung der Lichtgeschwindigkeit in Betracht. Man muß hierzu bloß die aus den Verfinsterungen der Jupitersatelliten resultierende Lichtgeschwindigkeit in zwei Punkten der Bahn des Jupiters vergleichen, die um die halbe Umlaufszeit auseinander liegen und die so beschaffen sind, daß die Richtung Sonne—Jupiter in dem einen ungefähr parallel, in dem andern ungefähr entgegengesetzt parallel der mutmaßlichen Translationsrichtung des Sonnensystems ist. Dabei ist der Einfachheit halber der Beobachter auf der Sonne anstatt auf der Erde gedacht. Man sieht aus dieser Idee *Maxwells, daß die früher viel verbreitete Behauptung, die Fresnelsche Theorie erkläre das Ausbleiben aller Effekte erster Ordnung, unrichtig ist,* wofern der eben besprochene Effekt tatsächlich ebenso negativ ausfällt, wie alle andern auf die absolute Bewegung bezüglichen Effekte.[51])

49) *J. Cl. Maxwell,* London Roy. Soc. Proc. 30 (1879—80). p. 108.

50) *J. Cl. Maxwell,* Encycl. Brit., 9th ed., article „Ether".

51) Darauf hat zum erstenmal *W. Ritz* hingewiesen. Recherches critiques

Versuch von Michelson. Die erstere Idee *Maxwells* ist experimentell verwirklicht in dem bekannten Versuch von *Michelson.* Es werden zwei Strahlen zur Interferenz gebracht, welche beziehungsweise parallel und senkrecht zur Erdbewegung verlaufen. Dreht man das Interferometer, so daß der zur Erdbewegung parallele Arm und der zur Erdbewegung senkrechte Arm ihre Rollen vertauschen, so sollte sich nach der *Fresnel*schen Theorie eine Verschiebung der Interferenzstreifen in der Größe eines Effekts zweiter Ordnung ergeben. Der erste Versuch von *Michelson*[52]) hatte Armlängen von 1,2 m. Die erwartete Verschiebung war 0,08 Interferenz Streifenbreiten.. Die beobachtete betrug im Mittel 0,02. Daraus schloß *Michelson* auf die Unrichtigkeit der *Fresnel*schen und auf die Richtigkeit der *Stokes*schen Theorie. Einwände von *Lorentz*[53]) veranlaßten *Michelson* zu einer Wiederholung des Versuchs[54]). Die gesamte Weglänge für den transversalen und für den longitudinalen Strahl betrug jetzt 22 m anstatt der früheren $2 \times 1{,}2$ m. Die erwartete Verschiebung betrug 0,4 Streifenbreiten; beobachtet wurden maximal 0,02.

Dieses negative Resultat veranlaßten *Lorentz*[55]) und *Fitz-Gerald*[56]) zur Aufstellung der Hypothese, daß der longitudinale Arm des Interferometers infolge der Bewegung durch den Äther sich kontrahiere, wodurch sich die zugehörige Lichtzeit verkürze, die nach *Fresnel* für den longitudinalen größer als für den transversalen Arm gewesen wäre, während jetzt beide gleiche Lichtzeit bekämen. Dies führte in der Folge *Lorentz*[57]) zu der nach ihm benannten Transformation, nachdem *Poincaré*[58]) den ad hoc-Charakter der Kontraktionshypothese be-

---

sur l'électrodynamique générale. Ann. chim. phys. 13 (1908), p. 145 ff., § 9 oder Oeuvres, Paris 1911, p. 363.

52) *A. A. Michelson,* Amer. J. of Science 22 (1881), p. 20.

53) *Lorentz,* Arch. Neérl. 21 (1887), § 25—26.

54) *A. A. Michelson* und *E. W. Morley,* Amer. J. of Science 34 (1887), p. 333.

55) *H. A. Lorentz,* Amst. Akad. Versl. 1 (1892), p. 74. — Abh. XVII, p. 443 f.

56) *G. F. Fitz-Gerald* nach *O. Lodge,* London Phil. Trans. 184 (1893), p. 749. *Lodge* berichtet in dieser Arbeit von seinen Versuchen zur Widerlegung der *Stokes*schen Theorie. Lichtstrahlen, zwischen rotierenden Scheiben hindurchgeschickt, werden nicht abgelenkt, der Äther also durch die Scheiben nicht mitgenommen. Dies ließe sich jedoch durch die geringe Masse der Scheiben erklären. Vgl. *O. Lodge,* Phil. Mag. 39 (1920), p. 160 zu der in 41) erwähnten Arbeit von *L. Silberstein.*

57) *H. A. Lorentz,* Amst. Acad. Proc. 6 (1904), p. 809, auch Samml.; die Formeln der Lorentztransformation übrigens schon bei *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1887, p. 41.

58) *H. Poincaré,* Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris 1, p. 22.

anstandet hatte. Hieraus erstand die sp. Rel.th., indem *Poincaré*[59]) das „Relativitätspostulat", *Einstein*[60]) das „Relativitätsprinzip" aufstellten, *wonach die absolute Bewegung relativ zum Äther durch optische (und elektromagnetische) Mittel unfeststellbar sein müsse. Einstein* schloß hieraus, da danach beliebig gleichförmig und geradlinig gegeneinander bewegte Systeme hinsichtlich der optischen (und elektrischen) Gesetze vollkommen gleichwertig sind (*Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*), auf die *Überflüssigkeit der Vorstellung des Lichtäthers*, da sich dieser in keiner Weise bemerkbar mache.

Eine dritte Wiederholung des *Michelson*-Versuches unternahmen noch *E. W. Morley* und *D. C. Miller*[61]) mit dem Ergebnis, daß die eintretende Verschiebung jedenfalls kleiner war als der hundertste Teil der nach *Fresnel* erwarteten. (Relativistische Erklärung Nr. 4, a) und b) bzw. α) und β).)

Maxwells Vorschlag zur Bestimmung der absoluten Bewegung des Sonnensystems. Wenn das Relativitätsprinzip und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit richtig sind, folgt natürlich, daß auch der zweite obenerwähnte Vorschlag *Maxwells*, welcher sich auf eine *astronomische* Methode, die Lichtgeschwindigkeit zu messen, bezieht, ein negatives Resultat ergeben muß. Dieser Vorschlag ist diskutiert von *Burton*[62]). Aus 330 photometrischen Beobachtungen der Verfinsterungen des 1. Jupitersatelliten, die an der Harvardsternwarte gemacht worden waren, schätzt er den Fehler, mit dem das nach der klassischen Mechanik und nach *Fresnel* berechnete Resultat für die Geschwindigkeit des Sonnensystems behaftet würde, auf $\pm$ 50 km/sec. Bekanntlich schätzt man die Geschwindigkeit der Sonne relativ zum Fixsternhimmel (was nicht mit der Geschwindigkeit relativ zum Äther zusammenfallen muß) auf bloß 20 km/sec, so daß dermalen noch nicht die genügende Genauigkeit der Beobachtungen erreichbar ist, die für die Überprüfung dieses Effekts notwendig wäre.

Bemerkt werde, daß *Lorentz* das gemäß dem Relativitätsprinzip erwartete Ausbleiben dieses Effekts durch die Abänderung des *Newton*schen Gravitationsgesetzes in der speziellen Relativitätstheorie zu erklären scheint[63]). Demgegenüber hat schon *Ritz* l. c.[51]) hervorgehoben,

59) *H. Poincaré*, Paris C. R. 140 (1905), p. 1504. — Palermo Rend. Circ. math. 21 (1906), p. 129.

60) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 891 (auch in der Sammlung „Das Relativitätsprinzip").

61) *E. W. Morley* und *D. C. Miller*, Phil. Mag. 9 (1905), p. 680.

62) *C. V. Burton*, Phil. Mag. 19 (1910), p. 417. — Vgl. *F. Höffler*, Astr. Ges. Vjs. 31 (1896), p. 297 und *K. F. Bottlinger*, Astr. Nachr. 211 (1920), p. 237.

63) *H. A. Lorentz*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1234 (Samml. p. 80 u. Vorl. p. 20).

daß diese Modifikation des *Newton*schen Gesetzes für bewegte Zentralkörper bloß von der zweiten Ordnung ist (vgl. Nr. 2—3). *De Sitter*[64]) betont, daß das Ausbleiben des Effekts nichts mit dynamischen Gesetzen zu tun hat, sondern eine bloße Folge der Kinematik des Relativitätsprinzips ist. Betrachtet man nämlich die Bahn des Planeten als Kreis in einem mit der Sonne mitbewegten System, so ist sie nicht mehr kreisförmig in einem System, relativ zu welchem die Sonne nicht mehr ruht, wie es der „Äther" *Maxwells* wäre. Daraus folgt, daß die Zeiten, die der Planet zu den beiden „Hälften" seiner Bahn braucht, im neuen System ungleich groß sind; dies kompensiert den von *Maxwell* erwarteten Effekt. Die Lichtzeiten und daher die Lichtgeschwindigkeit bleiben also auch im neuen System konstant.

Theorie von Ritz. W. Ritz hat nach dem Sturz der klassischen Kinematik durch die sp. Rel.th. zur Vermeidung dieses radikalen Auswegs die Rückkehr zur Emissionstheorie des Lichts versucht.[65]) Danach wäre der negative Ausfall des *Michelson*-Versuchs auf Grund der klassischen Kinematik erklärbar, weil die Lichtkörperchen, welche sich *Ritz* nicht materiell, sondern als Energiezentren denkt, die Geschwindigkeit der emittierenden Lichtquelle besäßen. Dadurch erklären sich übrigens alle vorgenannten Versuche bis auf die partielle Mitführung des Lichts durch die Materie. Diese will *Ritz* durch eine gewisse Reaktion der geladenen Materie auf die Lichtteilchen erklären.

Zur Widerlegung der *Ritz*schen Theorie bemerkt *W. de Sitter*[66]), daß die Verhältnisse bei den Doppelsternen das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sehr genau bestätigen. Nach *Ritz* müßte sich nämlich die Geschwindigkeit des Begleiters zur Geschwindigkeit des uns von ihm zugesendeten Lichts superponieren. Dadurch würde das Licht aus einigen Stellen seiner Bahn erheblich rascher als aus anderen Stellen zu uns gelangen. Es könnten daher frühere Positionen des Begleiters gleichzeitig mit späteren von uns gesehen werden.

64) *W. de Sitter*, l. c. p. 13, § 16.

65) *W. Ritz*, l. c. Fußnote 51, bes. die introduction.

66) *W. de Sitter*, Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 429 oder Amst. Acad. Proceed. 15 (1913), p. 1297; auch *W. Zurhellen*, Astr. Nachr. 198 (1914), p. 1. — Vgl. zur *Ritz*schen Theorie *P. Ehrenfest*, „Zur Krise der Lichtätherhypothese", Berlin 1913. — Einen Einwand von *E. Freundlich*, der Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 835 [zugleich mit *P. Guthnick*, Astr. Nachr. 195 (1913), p. 265] die auffällige Vorliebe der Apsidenlinien bei spektroskopischen Doppelsternen für die Richtung nach der Sonne als scheinbar und bedingt durch eine partielle Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle erklären wollte, widerlegt *de Sitter*, Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 1267. — Über angebliche terrestrische Widerlegungen der *Ritz*schen Theorie (*Majorana*) vgl. den Artikel von *W. Pauli* V 19, Nr. 3.

Dies wäre möglich, weil die Geschwindigkeiten, die man bei spektroskopischen Doppelsternen nach dem Dopplereffekt tatsächlich messen kann, von der Ordnung 100 km/sec sind.[67])

II. Allgemeine Relativitätstheorie.

A. Mechanik.

6. Das Prinzip der allgemeinen Relativität. Betrachtungen über die *Trägheit* aller Energie führten *Planck*[68]) und *Einstein*[69]) auf die Frage, ob alle Energie auch *schwer* sei. Wenn der aus der *Galilei-Newton*schen Theorie der Gravitation überlieferte Grundsatz von der Identität der trägen und schweren Masse auch für den erweiterten Trägheitsbegriff der relativistischen Dynamik gilt, so folgerte *Einstein*[70]) einen „Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichts", da ja das Licht elektromagnetische Energie, also Trägheit besitzt, daher auch der Schwere unterliegen muß.

Dann aber läßt sich im Schwerefeld das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welches der sp. Rel.th. zugrunde liegt, nicht mehr allgemein aufrechterhalten; es muß vielmehr auf unendlich kleine Bereiche beschränkt werden, innerhalb deren das Schwerefeld nicht merklich variiert. Die Maßbestimmung (1) der sp. Rel.th., welche jenes Prinzip ausdrückt (Nr. 4), erweist sich daher bloß als ein spezieller, auf *lokale Bereiche* beschränkter Fall einer weit allgemeineren Maßbestimmung, deren Koeffizienten von Stelle zu Stelle variieren, da das Schwerefeld und mithin das von diesem abhängige Gesetz der Ausbreitung des Lichts von Stelle zu Stelle variiert. Die allgemeinste Maßbestimmung, die solcherart an Stelle der speziellen Maßbestimmung (1) treten kann, ist offenbar gegeben durch eine quadratische Differentialform mit variablen Koeffizienten:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k. \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \tag{27}$$

Hierin bedeuten $x_1 x_2 x_3$ irgend drei raumartige, x_4 einen zeitartigen Parameter, welche zur raumzeitlichen Festlegung eines Ereignisses dienen. Diese Koordinaten x_i sind nun im allgemeinen keine *kartesischen*, wie es die vier *Minkowski*schen bei der *euklidischen* Maßbestimmung (1)

67) Hier möge noch auf einen astronomisch vielleicht feststellbaren Effekt 2. Ordnung, der aus der sp. Rel.th. folgt, hingewiesen werden. Vgl. *A. Kopff,* Phys. Ztschr. 23 (1922), p. 120. Berichtigung hierzu, ebenda, p. 255.

68) *M. Planck,* Berl. Ber. 1907, insbes. p. 544.

69) *A. Einstein,* Jahrb. d. Radioakt. 4 (1907), § 11 u. § 17—20.

70) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 898 ff., insbes. § 2.

waren. Kartesische Koordinaten sind bei einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit mit der allgemeinsten Maßbestimmung (27) überhaupt nicht möglich. Die x_i sind vielmehr irgendwelche *generalisierte* Koordinaten im Sinne von *Lagrange* oder *krummlinige* im Sinne von *Gauß*.

Da es also im allgemeinen Fall (27) kein Koordinatensystem gibt, welches, wie im speziellen Falle (1) die kartesischen Koordinaten, durch die Maßbestimmung selbst ausgezeichnet wäre, müssen alle möglichen Systeme in Betracht gezogen werden. *Einstein*[70a]) formuliert nun das *Prinzip der allgemeinen Relativität, welches verlangt, daß die Naturgesetze in einer Form ausgesprochen werden müssen, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist.* Mathematisch gesprochen heißt dies, daß die betreffenden Differentialgleichungen usw. invariant sein müssen gegenüber beliebigen Transformationen der x_i. Dabei sind nicht nur Transformationen der drei räumlichen x untereinander, sondern auch solche, welche die „Zeit" x_4 mittransformieren, zugelassen. Diese letzteren haben, wie das spezielle Beispiel der Lorentztransformation zeigt, *kinematischen* Charakter, d. h. sie ändern den Bewegungszustand des Koordinatensystems. Infolgedessen sagt das Prinzip der allgemeinen Relativität unter anderem aus, daß die Naturgesetze vom Bewegungszustand des Koordinatensystems unabhängig sind. Es behauptet also die *Relativität aller Bewegung,* nicht nur die der gleichförmigen und geradlinigen Translation.

Einstein bedient sich bei der Aufsuchung der angekündigten neuen Form der Naturgesetze eines mathematischen Apparats, der schon fertig ausgebildet vorlag. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Übertragung der üblichen Vektor- und Tensoranalysis, d. i. der *Invariantentheorie* der mathematischen Physik, von kartesisch-euklidischen Koordinaten wie bei (1) auf allgemeine wie bei (27). Diese Übertragung gelingt durch den Grundsatz, daß auch in einer beliebigen Mannigfaltigkeit wie bei (27) im unendlich kleinen lokalen Bereiche eine euklidische Maßbestimmung (1) eingeführt werden kann, daß also die übliche Vektoranalysis auch im allgemeinen Falle in *differentiellen* Bereichen Geltung hat. Die bezügliche Invariantentheorie, die also zu einer Theorie der Differentialinvarianten erweitert werden muß, war an *geometrischen* Verhältnissen auf Grund von Arbeiten von *Riemann, Christoffel, Lipschitz* durch *Ricci* und *Levi-Civita*[71]) ausgebildet worden. Auf *physikalische* Verhältnisse in der Relativitätstheorie war sie

70a) *A. Einstein* und *M. Großmann,* Ztschr. Math. Phys. 62 (1913), auch separat bei Teubner unter dem Titel: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation", Leipzig 1913, zitiert als „Entwurf".

71) *G. Ricci* und *T. Levi-Civita,* Math. Ann. 54 (1901), p. 125 ff.

bereits durch *Kottler*[72]) angewendet worden, der eine Maßbestimmung (1), transformiert auf beliebige generalisierte Koordinaten, betrachtet hatte (zwecks Untersuchung der Relativität der beschleunigten Bewegung), wobei der mathematische Apparat der gleiche wie bei der allgemeinen Maßbestimmung (27) ist.

Für das Folgende genügt es, den Begriff der kovarianten bzw. kontravarianten Vektoren und Tensoren anzugeben. Das Urbild eines *kontravarianten* Vektors ist da Differential der Koordinaten, die unendlich kleine Strecke. Beim Übergang zu andern Koordinaten $x_1' x_2' x_3' x_4'$ transformieren sich die Differentiale dx_i wie folgt:

$$d x_i = \sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial x_\lambda'} d x_\lambda'. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Demgemäß wird als ein kontravarianter Vektor 1. Stufe ein Inbegriff von vier Größen A^1, A^2, A^3, A^4 (bezeichnet durch hochgestellte Indizes) definiert, die sich wie die Differentiale dx_i transformieren:

$$A^i = \sum_{\lambda=1}^{4} A'^\lambda \frac{\partial x_i}{\partial x_\lambda'}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{28}$$

(Eigentlich sollten also die dx_i auch hochgestellte Indizes als Zeichen ihrer Kontravarianz tragen, wie z. B. in Encykl. V 19 (*W. Pauli jr.*); dieses unterbleibt hier, da die x_i selbst keine vektorielle Bedeutung haben und traditionsgemäß mit tiefen Indizes geschrieben werden.) Ganz analog bezeichnet man einen Inbegriff von 16 Größen A^{11}, A^{12}, ... A^{44} mit je zwei Indizes als einen *kontravarianten Tensor* 2. Stufe, wenn diese sich wie die Produkte der Differentiale transformieren:

$$A^{ik} = \sum_{\lambda, \mu} A'^{\lambda\mu} \frac{\partial x_i}{\partial x_\lambda'} \frac{\partial x_k}{\partial x_\mu'}. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

Das Urbild eines *kovarianten Vektors* sind die Differentialquotienten einer skalaren (invarianten) Funktion f; sie transformieren sich wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda'} \frac{\partial x_\lambda'}{\partial x_i}.$$

Demgemäß wird als ein kovarianter Vektor 1. Stufe ein Inbegriff von vier Größen A_1, A_2, A_3, A_4 (bezeichnet durch tiefgestellte Indizes) definiert, die sich wie die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ transformieren:

$$A_i = \sum_\lambda A_\lambda' \frac{\partial x_\lambda'}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{30}$$

Ebenso ist ein *kovarianter* Tensor 2. Stufe ein Inbegriff von 16 Größen

72) *F. Kottler,* Wien. Ber. 121 (1912), p. 1659 ff.

$A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{44}$, die sich wie die Produkte der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ transformieren:

$$A_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} A'_{\lambda\mu} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_k}. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{31}$$

Einen solchen kovarianten und obendrein symmetrischen ($g_{ik} = g_{ki}$) Tensor 2. Stufe bilden die Koeffizienten g_{ik}, da *nach dem Prinzip der allgemeinen Relativität die quadratische Differentialform in* (27) *offenbar eine Invariante ist.* Man hat also:

$$g_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} g'_{\lambda\mu} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_k}$$

(*Fundamentaltensor*). Zu diesem Tensor läßt sich mittels der Relationen

$$\sum_p g_{ip} g^{kp} = \delta_i^k \begin{cases} = 1, & i = k \\ = 0, & i \neq k \end{cases} \tag{32}$$

ein *reziproker* Tensor 2. Stufe mit den Komponenten g^{ik} bilden, welcher offenbar, da die rechte Seite von (32) invariant ist, kontravariant sein muß. Es erweist sich, daß diese g^{ik} je gleich sind den Unterdeterminanten der Matrix

$$\| g_{ik} \|, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

welche zu dem Element g_{ik} adjungiert sind, gebrochen durch die Determinante $g = | g_{ik} |$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$.

7. Mechanik des Massenpunktes in der allgemeinen Relativitätstheorie. Die vorstehend erwähnte Theorie der Invarianz oder Kovarianz (wie man oft kurz statt Kovarianz und Kontravarianz sagt) lieferte nun *Einstein* das Mittel zur *Übertragung* der schon bekannten Naturgesetze (Mechanik, Elektrizität) auf die allgemeine Raumzeitmannigfaltigkeit mit der Maßbestimmung (27), sowie das *heuristische Prinzip* bei der Aufsuchung der noch unbekannten Naturgesetze (Gravitation). Wir besprechen in dieser Nummer die Übertragung der Gesetze der Mechanik.[73])

Zufolge der Gültigkeit der sp. Rel.-th. im Unendlich-kleinen bedeutet ds das Element der (lokalen) Eigenzeit, die ein mit einem Massenpunkt mitbewegter Beobachter in einer auf lokalen Bereich beschränkten Maßbestimmung (1) beobachtet; insbesondere gibt $ds = 0$ das (lokale) Gesetz der Ausbreitung der Lichtstrahlen an.

Das Gesetz der Bewegung eines sich selbst überlassenen Massenpunktes lautete nach (2), wenn $X_i = 0$ gesetzt wird:

$$\delta \int_1^2 U ds = 0,$$

73) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 38 (1912), Nachtrag p. 458, ferner Entwurf (1913), § 1 des Ersten Teils.

wenn man von (9) Gebrauch macht. U ist die gesamte innere Energie des Massenpunktes, gemessen in dem obenerwähnten mitbewegten System, also sicherlich eine Invariante gegenüber allen Transformationen der Koordinaten, ebenso wie ds eine solche ist. Das obige Variationsprinzip kann daher gemäß dem Prinzip der allgemeinen Relativität ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Ist insbesondere die Bewegung des Massenpunktes adiabatisch, so ist $U = \text{const}$ während der Bewegung, und das Gesetz für einen solcherart bewegten Massenpunkt lautet dann einfach:

$$(33) \qquad \delta \int_1^2 ds = 0,$$

wobei gemäß (27) $ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k}$ einzusetzen ist, d. h. die Weltlinie des in einem beliebigen Schwerefeld sich selbst überlassenen Massenpunkts ist eine Extremale der Maßbestimmung (27) (*Geodätische Linie*).

Die Bewegung, die der im Schwerefeld sich selbst überlassene Massenpunkt zufolge (33) beschreibt, ist aber natürlich keine geradlinig gleichförmige wie bei der euklidischen Maßbestimmung (1). Sie wird vielmehr, wenn der Einfluß des Schwerefeldes auf die Koeffizienten der Maßbestimmung (27) richtig bestimmt ist, diejenige *beschleunigte* Bewegung sein, die der Massenpunkt unter dem Einfluß der Massen einschlägt, die das Schwerefeld erzeugen. Damit ergibt sich eine Vereinigung von Trägheits- und Schwerebewegung, die ihren prägnanten Ausdruck in dem von *Einstein* formulierten *Prinzip der Äquivalenz* findet. Danach ist jedes Trägheitsfeld, d. h. ein Beschleunigungsfeld, das von der Verwendung eines nichtinertialen Bezugssystems herrührt, wie z. B. das Feld in einem fallenden Kasten oder auf einer rotierenden Scheibe, einem Schwerefelde völlig äquivalent. (Aber natürlich ist umgekehrt ein beliebiges Schwerefeld einem Trägheitsfeld im allgemeinen nicht äquivalent.) Eine Folge dieses Prinzips und zugleich die erste Bestätigung der allg. Rel.th. ist es, daß die Masse U aus den Gesetzen der Bewegung des Massenpunkts im Schwerefeld ganz herausfällt, d. h. daß der *Grundsatz der Identität von träger und schwerer Masse hier seine Erklärung findet.*

Die allg. Rel.th. hat daher, sofern die Koeffizienten der Maßbestimmung (27) richtig bestimmt sind, die Mechanik des Schwerefeldes zur Folge. Zur Aufstellung der vier Impulsenergiesätze führe man die Variation in (33) durch. Man erhält die vier Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_p g_{ip}\frac{dx_p}{ds}\right)-\frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i}\frac{dx_p}{ds}\frac{dx_q}{ds}=0 \quad (i=1,2,3,4)$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$\sum_p g_{ip}\frac{d^2x_p}{ds}+\sum_{p,q}\begin{bmatrix}p\,q\\ i\end{bmatrix}\frac{dx_p}{ds}\frac{dx_q}{ds}=0. \tag{34}$$

Hieraus nach Auflösung nach $\frac{d^2x_p}{ds^2}$:

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}+\sum_{p,q}\begin{Bmatrix}p\,q\\ i\end{Bmatrix}\frac{dx_p}{ds}\frac{dx_q}{ds}=0 \tag{35}$$

mit den Abkürzungen[73a])

$$\begin{bmatrix}p\,q\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x_q}+\frac{\partial g_{iq}}{\partial x_p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i}\right) \quad (\textit{Christoffel}\text{-Symbol der 1. Art})$$

$$\begin{Bmatrix}p\,q\\ i\end{Bmatrix}=\sum_r g^{ir}\begin{bmatrix}p\,q\\ r\end{bmatrix} \quad (\textit{Christoffel}\text{-Symbol der 2. Art}).$$

Die Bewegungsgleichungen (35) unterscheiden sich von den analogen Gleichungen (10) der sp. Rel.th. (für $X_i=0$) durch den zweiten Term der rechten Seite, welcher von den 1. Differentialquotienten der Koeffizienten g_{ik} abhängt. Dieser gibt also die „Beschleunigung" an, die das Schwerefeld dem Massenpunkt erteilt. Da diese Beschleunigung durch Differentiation der g_{ik} berechnet wird, nennt man die g_{ik} auch die „Potentiale" des Schwerefelds. Das *Einstein*sche Schwerefeld besitzt hiernach *zehn* Potentiale, die einen symmetrischen Tensor 2. Stufe bilden, an Stelle des *einen* skalaren Potentials des *Newton*schen Schwerefeldes.

Für den Fall einer (nicht auf lokale Bereiche beschränkten) Maßbestimmung (1) werden sämtliche g_{ik} konstant. Denn es wird dann:

$$-g_{ik}=\delta_{ik}=\begin{Bmatrix}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{Bmatrix}. \tag{36}$$

In diesem Fall wird die „Beschleunigung" des Massenpunkts durch das Schwerefeld Null; es ist nach der üblichen *Newton*schen Ausdrucksweise kein Schwerefeld vorhanden. Die Maßbestimmung (1) charakterisiert daher den leeren Raum in sehr großer Entfernung von aller Materie. Nach der *Einstein*schen Auffassung ist diese Ausdrucksweise nicht korrekt. Denn es würde ja dann noch immer eine Trägheitsbewegung des sich selbst überlassenen Massenpunktes, nämlich die geradlinig gleichförmige Bewegung resultieren. Jede Trägheitsbewegung ist aber prinzipiell mit einer Schwerebewegung äquivalent.

73a) In Encykl. V 19 (*W. Pauli jr.*) mit $\Gamma_{i,pq}$ bzw. Γ^i_{pq} bezeichnet.

Sie muß daher durch *umliegende Massen* bestimmt sein, auch wenn diese sehr entfernt sind. Dies führt auf die *Mach*sche Auffassung des Trägheitsgesetzes[74]) und in weiterer Folge auf eigentümliche Schwierigkeiten der *Einstein*schen Theorie, da der völlig leere Raum und das erwähnte „*Mach*sche Prinzip“ einander widersprechen. So kommt *Einstein*[75]) zu der Auffassung, daß die Werte (36) als Grenzwerte der Koeffizienten für große Entfernung von den Massen abzulehnen sind, d. h. daß die Welt als Ganzes nicht leer sein kann. Die Werte (36) hätten demnach immer nur lokale, nie universale Geltung.

8. Das Verhältnis der Mechanik des Massenpunktes zur Mechanik der Kontinua. Man ersetze im mitbewegten Eigensystem den Massenpunkt durch das Volumelement dV^0 und setze demgemäß die Energie:

$$U = W^0 \, dV^0,$$

wo W^0 eine (Ruhe)energiedichte ist. Definiert man nun

$$T^{ik} = W^0 \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}, \tag{37}$$

so ist dies sicherlich ein kontravarianter (symmetrischer) Tensor 2. Stufe, da W^0 und ds Invarianten des Massenpunktes sind. Aus der Identität

$$\left\{\begin{aligned} & W^0\left[\frac{d}{ds}\left(\sum_p g_{ip}\frac{dx_p}{ds}\right) - \frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i}\frac{dx_p}{ds}\frac{dx_q}{ds}\right] \\ & \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{p,q}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sqrt{g}\, g_{iq} T^{pq}\right) - \frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i} T^{pq}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}\right. \tag{38}$$

bei deren Ableitung Gebrauch gemacht ist von der Kontinuitätsgleichung der Materie:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_p \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sqrt{g}\, W^0 \frac{dx_p}{ds}\right) = 0,$$

welche ähnlich wie in der Hydrodynamik aussagt, daß Masse weder neu erzeugt noch vernichtet werden kann, folgt wegen (34):

$$\sum_p \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sqrt{g}\, T_i^p\right) - \frac{1}{2}\sum_{pq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i} T^{pq}\sqrt{g} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{39}$$

wobei

$$T_i^p = \sum_q g_{iq} T^{pq}$$

als „gemischter“ Tensor eingeführt ist. Er ist bezüglich des unteren Index kovariant, bezüglich des oberen kontravariant.

Die Bewegungsgleichungen (39) mit dem Werte (37) des Tensors

---

74) *E. Mach,* Erhaltung der Arbeit 1871 (Abdruck Leipzig 1909), insbes. Note 1; Mechanik, 5. Aufl. (Leipzig 1904), p. 243–252.

75) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1917, p. 142.

T, die für die Mechanik des starren Volumelements gelten, haben die allgemeine Form, die die Impulsenergiesätze in der Mechanik der *kontinuierlichen Medien* annehmen.

In der sp. Rel.th. wird gezeigt[76]), daß die Impulsenergiesätze für die kontinuierlichen Medien die Form annehmen:

$$\sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} T_i^p = 0. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{39a}$$

Dabei liegt eine universale Maßbestimmung (1) zugrunde, und es bedeuten (in kartesischen Orthogonalkoordinaten):

$$\begin{array}{llll}
T_1^1 = p_{xx}, & T_1^2 = p_{x\cdot\cdot}, & T_1^3 = p_{xz}, & T_1^4 = \frac{c}{\sqrt{-1}}\mathfrak{g}_x, \\
T_2^1 = p_{yx}, & T_2^2 = p_{yy}, & T_2^3 = p_{yz}, & T_2^4 = \frac{c}{\sqrt{-1}}\mathfrak{g}_y, \\
T_3^1 = p_{zx}, & T_3^2 = p_{zy}, & T_3^3 = p_{zz}, & T_3^4 = \frac{c}{\sqrt{-1}}\mathfrak{g}_z, \\
T_4^1 = \frac{1}{\sqrt{-1}c}\mathfrak{S}_x, & T_4^2 = \frac{1}{\sqrt{-1}c}\mathfrak{S}_y, & T_4^3 = \frac{1}{\sqrt{-1}c}\mathfrak{S}_z, & T_4^4 = W.
\end{array}$$

Hierin bedeuten:

Die $p_{xx} p_{xy} \ldots$ die elastischen Spannungen[77]), z. B. p_{xy} die in der x-Richtung auf das zur y-Achse normale Flächenelement ausgeübte Spannung. (Es gilt bekanntlich $p_{xy} = p_{yx}$),

die $\mathfrak{g}_x\, \mathfrak{g}_y\, \mathfrak{g}_z$ die Komponenten der auf die Einheit des tatsächlichen Volumens (nicht des Ruhvolumens) bezogenen Dichte des Impulses,

die $\mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_y \mathfrak{S}_z$ die auf die Einheit der Oberfläche und der Zeit bezogene Energieströmung,

endlich W die Dichte der Energie.

Der Impuls $\mathfrak{g}$ wird durch die Symmetriebedingung $T^{ik} = T^{ki}$, welche in der speziellen Relativitätstheorie auch $T_i^k = T_k^i$ nach sich zieht, definiert, man findet

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$$

(Satz von der *Trägheit aller Energie*). In gewöhnlicher Schreibweise lautet (39a):

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial t} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

---

76) *M. Planck*, Phys. Ztschr. 9 (1908), p. 828. — *M. Laue*, Ann. d. Phys. 35 (1911), 524 ff. oder das Relativitätsprinzip, Braunschweig 1911, I. Band, § 27.

77) Streng genommen sind die elastischen Spannungen nicht durch die p, sondern durch die sogenannten relativen Spannungen bestimmt (*Laue*, l. c. § 29).

Die ersten 3 Gleichungen geben die Bilanz des Impulses: Dieser ändert sich nur infolge von Spannungen, die auf der Oberfläche des Elements angreifen und eine von Null verschiedene Gesamtresultierende zur Folge haben (Divergenz des Spannungstensors p ungleich Null). Die letzte Gleichung gibt die Bilanz der Energie: Diese ändert sich nur infolge einer Energieströmung, die durch die Oberfläche des Elements hindurchtritt und eine von Null verschiedene Gesamtresultierende hat (Divergenz des Energieströmungsvektors $\mathfrak{S}$ ungleich Null).

In der allgemeinen Relativitätstheorie tritt an Stelle von (39a) die Form (39). Diese zeigt, daß die Bilanz von Impuls und Energie durch das Schwerefeld gestört wird, da der zweite Term in (39) die Ableitungen der Potentiale des Schwerefelds enthält. Auf diese Weise ist *Einstein*[78]) dazu gelangt, diesen Zusatzterm zu erklären, indem er dem Schwerefeld ebenfalls Spannungen, Impuls und Energie zuschrieb. Er erzielte dadurch wieder die Form (39a), indem jetzt zu dem Impulsenergietensor der Materie ein solcher für das Schwerefeld hinzutritt. Leider ist diese Form nicht mehr allgemein kovariant. Die *Einstein*schen Überlegungen führen daher auf Abhängigkeiten vom Koordinatensystem, welche sich nur beseitigen lassen, wenn an Stelle des Volumelements ein ganzes *abgeschlossenes* System gesetzt wird.

Bemerkt werde, daß die einfachen Werte (37) für den materiellen Tensor nur bei einem starren Volumelement (Massenpunkt) oder bei einem abgeschlossenen System, welches ja einem Massenpunkte dynamisch äquivalent ist, möglich sind. Nur in diesen Fällen ist die Trägheit auf einen (Massen-)Skalar, die Ruhmasse U oder W^0, zurückzuführen. Im allgemeinen Fall tragen alle Komponenten $\mathring{T}^{ik}$ des auf das mitbewegte System K_0 bezogenen Tensors insbesondere auch die elastischen Spannungen p^0_{xx} etc. zur Vergrößerung des Trägheitswiderstandes gegen Beschleunigung bei. Hingegen reduziert sich im Ruhsystem K_0 der Tensor (37) auf die Werte:

$$\text{alle} \quad \mathring{T}^{ik} = 0 \quad \text{bis auf} \quad \mathring{T}^{44} = W^0.$$

Ruhspannungen (und natürlich Ruhimpuls) sind Null. Die Energieströmung in jedem andern Bezugssystem ist daher ein rein konvektiver Transport der Ruheenergie.

9. Theorie des Schwerefeldes. Bei der Aufsuchung der noch unbekannten Gesetze des Schwerefeldes[79]) benützte, wie schon ange-

78) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1918, p. 448.

79) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, p. 778, 844; Ann. d. Phys. 49 (1916).

deutet wurde, *Einstein* die Kovarianzforderung der allgemeinen Relativitätstheorie geradezu als heuristisches Prinzip.

Die *Einstein*sche Theorie des Schwerefeldes ist eine Verallgemeinerung des Gedankens der *Laplace-Poisson*schen Potentialtheorie, die Abhängigkeit des Schwerepotentials Φ von der Massenverteilung μ durch eine Differentialgleichung (die *Laplace-Poisson*sche Gleichung)

$$\Delta \Phi = 4\pi k^2 \mu$$

zu beschreiben. An Stelle des skalaren Potentials Φ tritt bei *Einstein* der Tensor der 10 Potentiale g_{ik}, anstelle der skalaren Massendichte μ tritt der Tensor der 10 Spannungen, Impuls- und Energiedichten T^{ik}. Man hat daher 10 partielle Differentialgleichungen zu erwarten:

$$G^{ik} = -\frac{\varkappa}{c^2} T^{ik} \tag{40}$$

(wo $\varkappa$ eine universelle Konstante ist)[80]); diese Gleichungen (*Feldgleichungen*) beschreiben den Zusammenhang, der zwischen den Werten der g_{ik} und der Verteilung der das Schwerefeld erzeugenden Materie besteht. Dabei sind die G^{ik} Differentialausdrücke 2. Ordnung in den g_{ik} und ihren Ableitungen. Sie erweisen sich, wie gleich hier betont werde, als nichtlinear, so daß das *Prinzip der ungestörten Superposition* zweier Schwerefelder bei *Einstein* im Gegensatz zur linearen *Laplace-Poisson*schen Theorie *nicht* mehr besteht.

Bei der Aufgabe, die Form der linken Seiten in (40) zu bestimmen, leistet die Kovarianzforderung, wie erwähnt, vorzügliche Dienste als heuristisches Prinzip. Denn die rechte Seite in (40) ist ein kontravarianter Tensor 2. Stufe; also muß es auch die linke Seite sein, und dies genügt zur möglichst eindeutigen Festlegung der G^{ik}. Es zeigt sich, daß es im wesentlichen nur einen einzigen Tensor gibt, welcher die g_{ik} und ihre Ableitungen bis zur 2. Ordnung enthält und wenigstens in den Ableitungen linear ist. Dieser Tensor ist aus gewissen Differentialinvarianten bzw. -kovarianten gebildet, welche schon *Riemann* in der Theorie einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit verwendete, deren Maßbestimmung durch eine allgemeinste quadratische Differentialform gegeben wird. Man setze:

---

80) Um mit der Bedeutung des Tensors T in der sp. Rel.th. (für $x_4 = ct\sqrt{-1}$) in Übereinstimmung zu bleiben, haben wir im Gegensatz zu den meisten Autoren auf der rechten Seite von (40) $\frac{\varkappa}{c^2}$ anstatt $\varkappa$ geschrieben. Man hätte sonst z. B. $T_4^4 = \frac{W}{c^2}$ anstatt W (wie in unserer Schreibweise), wenn $x_4 = ct\sqrt{-1}$ genommen wird.

$$
(41)\qquad \begin{aligned} R_{pq,rs} &= -R_{qp,rs} = -R_{pq,sr} = R_{rs,pq} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_s}\begin{bmatrix} pr \\ q \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{bmatrix} ps \\ q \end{bmatrix} + \sum_{l,m} g^{lm}\left(\begin{bmatrix} ps \\ l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} qr \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} pr \\ l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} qs \\ m \end{bmatrix}\right) \end{aligned}
$$

dabei gelten die Identitäten:

$$
(41\mathrm{a})\qquad R_{pq,rs} + R_{pr,sq} + R_{ps,qr} = 0
$$

für alle möglichen Kombinationen $pqrs$. Der Tensor R ist ein kovarianter Tensor 4. Stufe; aus ihm bilde man einen Tensor 2. Stufe durch „Verjüngung“:

$$
(42)\qquad R_{pr} = \sum_{q,s} g^{qs} R_{pq,rs} = R_{rp}.
$$

Dann hat man

$$
(43)\qquad G_{ik} = \tfrac{1}{2} g_{ik} \cdot R - R_{ik}
$$

mit

$$
(44)\qquad R = \sum_{p,q} g^{pq} R_{pq}.
$$

Aus dem kovarianten Tensor G_{ik} folgt endlich der kontravariante Tensor

$$
(45)\qquad G^{ik} = \sum_{p,q} g^{ip} g^{kq} G_{pq}.
$$

Umgekehrt kann man auf diese Weise ähnlich, wie schon bei (39), zu dem kontravarianten Tensor T^{ik} einen reinen (ungemischten) kovarianten T_{ik} ableiten:

$$
T_{ik} = \sum_{p,q} g_{ip} g_{kq} T^{pq}.
$$

Zu der erwähnten eindeutigen Festlegung des Tensors G ist noch zu bemerken, daß man am besten von einer Invarianzforderung an Stelle einer Kovarianzforderung ausgeht. Dann kommt man[81]) auf die Invariante R als die einzige Differentialinvariante, welche die g_{ik} und ihre Ableitungen 1. und 2. Ordnung (die letzteren linear) enthält. (*Riemann*scher Skalar.) Allerdings ist diese Festlegung nicht eindeutig, denn $R + \lambda$, wo λ eine Konstante ist, ist ebenfalls eine solche Invariante. Den Tensor G_{ik} gewinnt man nun aus der Invariante R bzw. $R + \lambda$, in einfacher Weise, am besten durch ein Variationsprinzip.[82])

Durch die eben besprochene Vieldeutigkeit ist es möglich, an Stelle des Tensors G_{ik} den allgemeineren Tensor $G_{ik} + \frac{1}{2}\lambda g_{ik}$ zu setzen, wo

81) *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, Berlin 1921 (4. Auflage), Anhang II.

82) Vgl. *H. Weyl*, l. c. § 28.

λ eine beliebige universelle Konstante ist. An Stelle der Differentialgleichungen (40) treten dann Differentialgleichungen:

$$G^{ik} + \frac{1}{2}\lambda g^{ik} = \frac{1}{2}(R + \lambda)g^{ik} - R^{ik} = -\frac{\varkappa}{c^2}T^{ik}. \tag{40a}$$

Der Tensor G_{ik} muß die 4 Identitäten (*Hilbert*)[82a])

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_p \frac{\partial}{\partial x_p}(G_i^p\sqrt{g}) - \frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_i}G^{pq} = 0 \tag{46}$$

befriedigen, weil der Tensor T^{ik} auf der rechten Seite von (40) die Impulsenergiesätze (39) befriedigt.

Daß es überhaupt möglich ist, die Identitäten (46) für den Tensor G^{ik} zu postulieren, geht auf den tieferen Zusammenhang der ganzen Theorie mit einem Wirkungsprinzip zurück, welches sowohl für die materiellen Vorgänge, die durch den Tensor T beschrieben werden, als auch für die Gravitation, die durch den Tensor G dargestellt wird, je ein invariantes Wirkungsintegral enthält. Formuliert man die Aussage, daß beide Integrale gegenüber einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten x invariant sein müssen, so erhält man je 4 Identitäten, welche sich als die Impulsenergiesätze (39) bzw. (46) erweisen. Diese Invarianzeigenschaft bedingt also den gemeinsamen Ursprung beider Gruppen von Gleichungen und erklärt mithin die Möglichkeit, dem Tensor G von vornherein die Bedingungen (46) aufzuerlegen.

Die Folge des Bestehens der Identitäten (46) ist, daß nicht alle 10 Gleichungen (40) von einander unabhängig sind. Es sind also 4 Gleichungen eine Folge der übrigen 6. Es scheint demnach, als ob das Problem der Bestimmung der Potentiale des Schwerefeldes aus der Verteilung der Materie unterbestimmt wäre, da 4 von den g_{ik} unbestimmt, also willkürlich bleiben. Tatsächlich *müssen* aber 4 willkürliche Funktionen in der Lösung des Problems auftreten, da ja das Koordinatensystem zufolge des Prinzips der allgemeinen Relativität noch ganz beliebig ist; jede Transformation der Koordinaten ist also zulässig, und dies bedingt das Auftreten von 4 willkürlichen Funktionen, entsprechend den 4 willkürlichen Funktionen, welche in einer allgemeinen Koordinatentransformation

$$x_i = f_i(x_1' x_2' x_3' x_4') \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

auftreten.

82a) *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1915, p. 399, Theorem III.

Es werde noch bemerkt, daß auch der Tensor $G^{ik} + \frac{1}{2}\lambda g^{ik}$ Identitäten von der Form (46) befriedigt. Die Form (40a) hat *Einstein* zur Lösung der in Nr. 7 erwähnten Schwierigkeiten des leeren Raums im kosmologischen Problem herangezogen. Sie gestatten es, eine homogene endliche Welt mit nicht verschwindender mittlerer Dichte aufzubauen.[83]) Im folgenden wird darauf nicht weiter eingegangen werden. Es werden daher nur die Feldgleichungen in der Form (40) beibehalten.

Die Feldgleichungen (40) gestatten noch eine andere Schreibweise. Man hat:

$$R = -\frac{\varkappa}{c^2}\sum_{i,k} g_{ik} T^{ik} = -\frac{\varkappa}{c^2} T.$$

Mithin kann man statt (40) auch schreiben:

$$R^{ik} = \frac{\varkappa}{c^2}\left(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T\right). \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{47}$$

10. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen. Für die Zwecke der Astronomie genügt es, die Feldgleichungen (40) genähert zu integrieren.

Zu diesem Zwecke machen wir mit *A. Einstein*[84]) die Annahme, daß sich die Potentiale g_{ik} nur wenig von den Werten (36), die sie vermöge der speziellen Relativitätstheorie annehmen, unterscheiden. Es soll also, anders ausgedrückt, der Raum im Großen leer sein und nur in der Umgebung der vereinzelt auftretenden Körper soll die Maßbestimmung durch diese beeinflußt sein. Der Zweck der nachfolgenden Integration ist es, in Verbindung mit dem Variationsprinzip (33) der Mechanik zu zeigen, daß durch diese Abänderung der Maßbestimmung die klassische Theorie der Gravitation erhalten wird.

Wir setzen demgemäß an:

$$g_{ik} = -\delta_{ik} + \varkappa\gamma_{ik} + \cdots \qquad (i, k) \tag{48}$$

indem wir die g_{ik} nach Potenzen der universellen Konstante $\varkappa$ entwickelt denken, welche auf der rechten Seite von (40) auftritt (*Einstein*sche Gravitationskonstante). Es wird sich zeigen, daß diese Konstante in dem gewöhnlichen cmgrsec-System eine sehr kleine Zahl ist. Wir vernachlässigen im folgenden alle Größen von der Ordnung $\varkappa^2$ usw.

---

83) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1917, p. 142f.; vgl. auch *W. de Sitter,* III, p. 3ff. — *F. Klein,* Gött. Nachr. 1918, III. Teil, p. 414—423. — *A. Einstein,* Berl. Ber. 1918, p. 270. — *H. Weyl,* Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 31 oder Raum, Zeit Materie § 34. — *A. Kopff,* Naturwissenschaften 9 (1921), p. 9.

84) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, p. 688.

Demgemäß hat man:

$$
(48\mathrm{a})\left\{
\begin{aligned}
& g^{ik} = -\delta_{ik} - \varkappa\gamma_{ik} + \cdots \\
& \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\varkappa\left\{\frac{\partial\gamma_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial\gamma_{li}}{\partial x_k} - \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_l}\right\} + \cdots, \quad \left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} = -\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} + \cdots \\
& R_{ik,lm} = \frac{1}{2}\varkappa\left\{\frac{\partial^2\gamma_{kl}}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial^2\gamma_{mi}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2\gamma_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2\gamma_{km}}{\partial x_i \partial x_l}\right\} + \cdots \\
& R_{ik} = -\sum_p R_{ip,kp} = -\frac{1}{2}\varkappa\sum_p\left\{\frac{\partial^2\gamma_{pk}}{\partial x_i \partial x_p} + \frac{\partial^2\gamma_{ip}}{\partial x_k \partial x_p}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x_p \partial x_p} - \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_i \partial x_k}\right\} + \cdots \\
& R^{ik} = R_{ik} + \cdots \\
& R = \sum_{p,q} R_{pq,pq} + \cdots = \varkappa\sum_{p,q}\left\{\frac{\partial^2\gamma_{pq}}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_q \partial x_q}\right\} + \cdots \\
& G^{ik} = \frac{1}{2}Rg^{ik} - R^{ik} = -\frac{1}{2}\varkappa\delta_{ik}\sum_{p,q}\left\{\frac{\partial^2\gamma_{pq}}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_q \partial x_q}\right\} \\
& \quad + \frac{1}{2}\varkappa\sum_p\left\{\frac{\partial^2\gamma_{pk}}{\partial x_i \partial x_p} + \frac{\partial^2\gamma_{ip}}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x_p \partial x_p} - \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_i \partial x_k}\right\} + \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Mithin erhält man die Gleichungen:

$$
(49)\quad
\begin{aligned}
& \sum_p\left\{-\frac{\partial^2\gamma_{pk}}{\partial x_i \partial x_p} - \frac{\partial^2\gamma_{ip}}{\partial x_k \partial x_p} + \frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x_p \partial x_p} + \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_i \partial x_k}\right\} \\
& \qquad + \delta_{ik}\sum_{p,q}\left\{\frac{\partial^2\gamma_{pq}}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{\partial^2\gamma_{pp}}{\partial x_q \partial x_q}\right\} = \frac{2}{c^2}T^{ik}, \ (i,k = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

die Integration dieser linearen Differentialgleichungen reicht mit Ausnahme des Koeffizienten g_{44} (Nr. **13**) vollkommen für die in der Praxis erreichbare Genauigkeit aus und vertritt die Integration der nichtlinearen Differentialgleichungen (40).

Die linken Seiten der Gleichungen (49) sind natürlich nicht unabhängig von einander, sondern erfüllen 4 Relationen von der Form der Impulsenergiesätze, natürlich unter Beachtung der hier erstrebten Genauigkeit (vgl. (46)). Dies kann man dazu benutzen, den γ_{ik} 4 Relationen aufzuerlegen, welche die Integration vereinfachen. (Festlegung des Koordinatensystems bis auf eine enge Gruppe von Transformationen.) Als solche Relationen erweisen sich am vorteilhaftesten die 4 Relationen:

$$\sum_p \frac{\partial\gamma_{ip}}{\partial x_p} - \frac{1}{2}\sum_p \frac{\partial\gamma_{pp}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3,4)$$

oder nach Einführung von

$$(50\mathrm{a})\qquad \gamma'_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\sum_p \gamma_{pp}:$$

$$(50\mathrm{b})\qquad \sum_p \frac{\partial\gamma'_{ip}}{\partial x_p} = 0.$$

Es geht dann (49) über in

$$\sum_p \frac{\partial^2 \gamma'_{ik}}{\partial x_p^2} = \frac{2}{c^2} T^{ik} \tag{51}$$

damit ist die Integration der 10 Feldgleichungen auf die Integration eines bekannten Typus von partiellen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, nämlich des Typus der Wellengleichung, zurückgeführt.

Man bemerkt natürlich, daß die linken Seiten von (51) die vier Relationen

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_p \frac{\partial^2 \gamma'_{ik}}{\partial x_p^2}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

erfüllen. Vernachlässigt man rechts Größen erster und höherer Ordnung in $\varkappa$, so hat man ebenfalls:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(T^{ik}) \sim 0.$$

Dies ist die Folge der Identitäten (46). Das Koordinatensystem ist durch (48) und (50b) bis auf eine orthogonale (Lorentz-)Transformation eingeschränkt. D. h. die hier entwickelte Näherungstheorie des Schwerefeldes ist invariant gegen eine geradlinige gleichförmige Translation des Bezugssystems.[85])

Das allgemeine Integral von (51) lautet (bei Abwesenheit von flächenhafter Verteilung der Materie und bei den Grenzbedingungen $\lim \gamma'_{ik} = 0$ im Unendlichen):

$$\gamma'_{ik} = -\frac{1}{2\pi c^2}\int \frac{[T^{ik}]_{t-\frac{r}{c}}}{r}\, dx\, dy\, dz. \tag{52}$$

Hier ist gemäß der sp. Rel.th. $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct\sqrt{-1}$ gesetzt; r bedeutet $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ d. i. die Entfernung des im Ursprung zu denkenden Aufpunkts von dem Element $dx\,dy\,dz$. Die Werte von $[T^{ik}]_{t-\frac{r}{c}}$ sind zu nehmen an der Stelle xyz, jedoch nicht zur Zeit t, in der die Wirkung im Aufpunkt studiert wird, sondern um die Zeit $\frac{r}{c}$ früher (Lichtzeit). Hieraus geht hervor, *daß sich die Gravitation nach der Einsteinschen Theorie mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen muß.*

11. Das Feld diskreter Massenpunkte. Setzt man in (52)

$$T^{ik} = W^0 \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}$$

d. i. gemäß (37) den Wert des Tensors für ein System diskreter Massenpunkte und beschränkt sich auf den Fall, daß die das Feld

---

85) Vgl. die Rechnung bei *W. de Sitter,* II, § 27.

erregenden Massen in dem bestimmten Koordinatensystem $x_1 x_2 x_3 x_4$ nahezu ruhen $\left(\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0, \frac{dx_4}{ds} = \sqrt{-1}\right)$, so hat man aus (52):

$$\gamma'_{ik} = \gamma'_{i4} = 0, \qquad (i, k \neq 4)$$

$$\gamma'_{44} = + \frac{1}{2\pi c^2} \int \frac{W^0 dV^0}{r} = + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}.$$

wo die $\sum\limits_{\mathfrak{a}}$ über sämtliche Massenpunkte des Feldes läuft und $m_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{c^2} \int\limits_{\mathfrak{a}} W^0 dV^0$ die Masse des $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Massenpunktes bedeutet. Gemäß (50a) ist

$$\gamma_{ik} = \gamma'_{ik} - \frac{\delta_{ik}}{2} \sum_p \gamma'_{pp},$$

also

$$\gamma_{ik} = - \delta_{ik} \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}, \quad \gamma_{i4} = 0, \qquad (i, k \neq 4)$$

$$\gamma_{44} = + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}.$$

Somit wird, in der Ordnung $\varkappa$ genau, der Fundamentaltensor der Maßbestimmung:

$$(53) \quad \begin{cases} g_{ik} = - \delta_{ik} \left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi} \sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\right) + \cdots & (i, k \neq 4) \\ g_{i4} = 0 + \cdots & (i \neq 4) \\ g_{44} = - \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}} + \cdots\right) \end{cases}$$

also die Maßbestimmung selbst:

$$(54) \quad \begin{aligned} ds^2 = - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \cdot \left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\right) \\ + c^2 \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\right) dt^2. \end{aligned}$$

Ruhen die das Feld erzeugenden Massenpunkte nicht, bewegen sie sich aber immerhin langsam gegen die Lichtgeschwindigkeit, so hat man[86]) nach den Methoden der Elektronentheorie bis auf Größen 2. Ordnung in den Quotienten „Geschwindigkeit eines Massenpunktes gebrochen durch die Lichtgeschwindigkeit" folgende Werte:

$$\gamma'_{ik} = 0, \quad \gamma'_{i4} = - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}} \frac{\dot{x}_{i\mathfrak{a}}}{c}, \quad \gamma'_{44} = + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}, \quad (i, k \neq 4)$$

86) *W. de Sitter*, II, insb. p. 161.

wo $\dot{x}_{i\mathfrak{a}} = \frac{d x_{i\mathfrak{a}}}{dt}$ die i^{te} Komponente der gewöhnlichen Geschwindigkeit des $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Massenpunkts bedeutet; $r_\mathfrak{a}$ ist diesmal die Entfernung des $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Massenpunkts vom Aufpunkt zur gleichen Zeit t, nicht zu einer früheren Zeit. Somit wird in diesem Fall:

$$(55)\quad \begin{cases} g_{ik} = -\,\delta_{ik}\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right) + \cdots & (i, k \neq 4) \\ g_{i4} = -\,\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,\varkappa\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\frac{\dot{x}_{i\mathfrak{a}}}{c} + \cdots & (i \neq 4) \\ g_{44} = -\left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right) + \cdots \end{cases}$$

Die Maßbestimmung wird:

$$(56)\quad ds^2 = -\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$+ 2\frac{\varkappa}{2\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}(\dot{x}_\mathfrak{a}dx + \dot{y}_\mathfrak{a}dy + \dot{z}_\mathfrak{a}dz)dt + c^2\left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right)dt^2.$$

12. Die Newtonsche Gravitationstheorie. Wir kommen nun zur mechanischen Wirkung des Feldes auf einen Massenpunkt. Die Newtonsche Theorie setzt die Newtonsche Mechanik voraus, daher muß das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenpunktes gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigbar sein. (*Langsame Bewegung im Schwerefeld.*) Gemäß (35) hat man für die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes im Falle des Feldes (53) bei Vernachlässigung der Quadrate aller Körpergeschwindigkeiten und der Größen $\varkappa^2$ zufolge (48a):

$$\frac{d^2 x_i}{c^2 dt^2} - 2\sum_{p \neq 4}\begin{bmatrix} p\,4 \\ i \end{bmatrix}\dot{x}_p \cdot \sqrt{-1} + \begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} = \frac{d^2 x_i}{c^2 dt^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} = 0, \quad (i \neq 4)$$

$$\frac{d^2 x_4}{c^2 dt^2} - 2\sum_{p \neq 4}\begin{bmatrix} p\,4 \\ 4 \end{bmatrix}\dot{x}_p \cdot \sqrt{-1} + \begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{d^2 x_4}{c^2 dt^2} - 0 \qquad = 0,$$

denn die Größen g_{i4}, $i \neq 4$, sind Null und die zeitlichen Differentialquotienten der g_{ik} müssen, da die das Feld erzeugenden Massenpunkte im System nahezu ruhen, den Geschwindigkeiten derselben proportional, also klein von der ersten Ordnung gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sein. Es bleiben daher die Gleichungen der klassischen Gravitationstheorie

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \cdot c^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

mit $g_{44} = \text{const.} + \frac{\varkappa}{4\pi}\sum_\mathfrak{a}\frac{m_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}$ gemäß (53).

Die *Einstein*sche (tensorielle) Gravitationstheorie fällt also unter den angeführten Voraussetzungen (langsame Bewegung im statischen Schwerefeld) mit der *Newton*schen (skalaren) Gravitationstheorie zusammen. Der Koeffizient $-\frac{1}{2} g_{44} c^2$ spielt dabei die Rolle des skalaren Schwerepotentials.[4])

Die Vergleichung beider Theorien führt zu der Relation:

$$\varkappa = \frac{8 \pi k^2}{c^2}, \tag{57}$$

wo k^2 die gewöhnliche (*Newton*sche) Gravitationskonstante

$$= 6{,}68 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \text{ gr}^{-1}$$

ist und $\varkappa$ die universelle *Einstein*sche Konstante. Diese wird tatsächlich, wie bei (48) vorausgesetzt wurde, eine sehr kleine Zahl:

$$\varkappa = 1{,}87 \cdot 10^{-27} \text{ cm gr}^{-1},$$

$\varkappa$ enthält c^2 im Nenner und ist daher nach der üblichen Ausdrucksweise eine unendlich kleine Größe 2. Ordnung.

13. Die Perihelbewegung des Merkur. Wir wenden uns nun zum Fall der *raschen* Bewegung im statischen Schwerfelde (53). Man weiß, daß man schon auf Grund der sp. Rel.th. (Massenveränderlichkeit, Nr. **1—3**) Abweichungen von der *Newton*schen Mechanik erwarten kann, wenn die Geschwindigkeit der bewegten Masse so groß wird, daß man die Größen 2. Ordnung nicht mehr vernachlässigen darf. Es kommt jetzt noch dazu, daß die *Einstein*sche Gravitationstheorie bei Berücksichtigung der Größen 2. Ordnung auch für langsam bewegte Massen von der *Newton*schen abweicht. Es wird sich dabei zeigen, daß man mit der in (53) gegebenen Näherung, welche bis zur ersten Potenz von $\varkappa$, also bis zur 2. Ordnung genau ist, nicht ausreicht; vielmehr benötigt man für den Koeffizienten g_{44} die Kenntnis des mit $\varkappa^2$ multiplizierten Gliedes, also einer Größe 4. Ordnung.

Wir schreiben statt (35):

$$\frac{d^2 x_i}{d x_4^2}\left(\frac{d x_4}{d s}\right)^2 + \frac{d x_i}{d x_4}\left(\frac{d^2 x_4}{d s}\right)^2 + \sum_{p, q} \begin{Bmatrix} p\, q \\ i \end{Bmatrix} \frac{d x_p}{d x_4} \frac{d x_q}{d x_4}\left(\frac{d x_4}{d s}\right)^2 = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d^2 x_4}{d s^2} + \sum_{p, q} \begin{Bmatrix} p\, q \\ 4 \end{Bmatrix} \frac{d x_p}{d x_4} \frac{d x_q}{d x_4}\left(\frac{d x_4}{d s}\right)^2 = 0.$$

Hieraus erhält man die Bewegungsgleichungen mit $x_4 = ct\sqrt{-1}$ als independenter Variablen:

$$\frac{d^2 x_i}{d x_4^2} + \sum_{p, q}\left(\begin{Bmatrix} p\, q \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p\, q \\ 4 \end{Bmatrix} \frac{d x_i}{d x_4}\right) \frac{d x_p}{d x_4} \frac{d x_q}{d x_4} = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Der erste Term ist von der Ordnung zwei; bei der beabsichtigten Näherung muß man daher im zweiten Term bis zur Ordnung 4 gehen.

Betrachtet man die Werte $p, q = 1, 2, 3$, so hat man, da die *Christoffel*-Symbole nach (48a) den Faktor $\varkappa$ tragen, also mindestens 2. Ordnung sind, nur den Term

$$\sum_{p,q=1}^{3} \begin{Bmatrix} pq \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_p}{dx_4} \frac{dx_q}{dx_4}$$

beizubehalten, denn $\frac{dx_1}{dx_4}, \frac{dx_2}{dx_4}, \frac{dx_3}{dx_4}$ sind je von der Ordnung 1. Hierbei braucht man in $\begin{Bmatrix} pq \\ i \end{Bmatrix}$ offenbar nur das mit $\varkappa$ multiplizierte Glied, also die aus (53) folgenden Werte. Betrachtet man sodann die Werte $p = 4$, $q = 1, 2, 3$ oder $q = 4$, $p = 1, 2, 3$, so sieht man, daß man zu nehmen hat:

$$2 \sum_{p=1}^{3} \left(\begin{Bmatrix} p4 \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p4 \\ 4 \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{dx_4} \right) \frac{dx_p}{dx_4},$$

wobei ebenfalls die Näherung (53) für die *Christoffel*symbole ausreicht. Betrachtet man endlich $p = 4$, $q = 4$, so hat man:

$$\left(\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 44 \\ 4 \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{dx_4} \right).$$

Und hier benötigt man offenbar $\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix}$ bis auf die Größen $\varkappa^2$, reicht also nicht mit der Näherung (53) aus, vielmehr muß man, weil $\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix} = \sum_p g^{ip} \begin{bmatrix} 44 \\ p \end{bmatrix}$ ist, die $\begin{bmatrix} 44 \\ p \end{bmatrix}$ bis auf Größen 4. Ordnung ($\varkappa^2$) kennen. Diese sind aber bei einem statischen Schwerefelde, bei welchem alle g_{ik} von der Zeit unabhängig sein müssen, bestimmt durch die räumlichen Differentialquotienten von g_{44}. Also muß man g_{44} bis auf die Größen ($\varkappa^2$) genau bestimmen.[86])

Diese Bestimmung findet sich durchgeführt bei *Droste*[87]) und bei *de Sitter*.[88])

Statt nun durch die Methode der sukzessiven Approximationen, etwa nach *Droste*, das gesuchte Glied von der Ordnung $\varkappa^2$ in g_{44} zu bestimmen, ist es vorzuziehen, die Betrachtungen der raschen Bewegung im statischen Schwerefeld auf das *Einkörperproblem* als den praktisch wichtigsten Fall einzuschränken (Planet von der Masse Null

86) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915 p. 831, entwickelt die g_{ik} nur bis zu den Größen von der Ordnung $\varkappa$, gibt hingegen die $\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix}$ bis zu den Größen $\varkappa^2$, was auf dasselbe hinausläuft. Überdies enthält sein g_{44} wegen der Koordinatenwahl (58a) (vgl. Nr. 14) keine Glieder höherer Ordnung in $\varkappa$ als der ersten.

87) *J. Droste,* Amst. Akad. Versl. 25 (1916), p. 460.

88) *W. de Sitter,* Amst. Akad. Versl. 25 (1916), p. 232 oder I, § 11; II, § 21, 22.

im Felde eines ruhenden Zentralkörpers). Für diesen Fall gibt es aber eine *exakte* Lösung, die nahezu gleichzeitig von *Schwarzschild*[89]) und *Droste*[90]) gegeben worden ist, und die sich rascher als die zweite Näherungslösung gewinnen läßt; diese soll in der folgenden Nummer abgeleitet werden.

14. Strenge Lösung der Feldgleichungen für das radialsymmetrische statische Schwerefeld. Der Zentralkörper soll im Ursprung der Koordinaten ruhen. Dann sind die g_{ik} von der Zeit unabhängig, und überdies muß jeder dreidimensionale Raum $x_4 = \text{const.}$ radiale Symmetrie in bezug auf den Ursprung aufweisen. Wie wir wissen, können wir den g_{ik} vier willkürliche Bedingungen auferlegen. Als solche wählt man passend, um möglichst mit dem Koordinatensystem bei (53) im Einklang zu bleiben, zunächst drei Bedingungen:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0.$$

Wenn man in dem jetzt verbleibenden ds^2 die Bedingung der radialen Symmetrie des Raums ausdrückt, so hat man notwendig die Gestalt:

$$ds^2 = -g_{44}dx_4^{\,2} - \lambda\sum_{i=1}^{3} dx_i^{\,2} - l\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i dx_i\Big)^2,$$

wo λ und l Funktionen von $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^{\,2}$ allein sind. Denn das räumliche Element $-\sum\limits_{i,k=1}^{3} g_{ik}dx_i dx_k$ in ds^2 muß gegenüber orthogonalen Drehungstransformationen des dreidimensionalen Raumes mit dem Ursprung als Drehungszentrum invariant sein, es muß sich also aus den Invarianten der (gewöhnlichen) Vektoren (in kartesischen Koordinaten) mit den Komponenten $dx_1 dx_2 dx_3$ bzw. $x_1 x_2 x_3$ zusammensetzen lassen, wobei diese Invarianten sich auf die Beträge und das skalare Produkt beider Vektoren reduzieren. Das verwendete Koordinatensystem $x_1 x_2 x_3$ ist natürlich nur angenähert (für $\varkappa \sim 0$) ein kartesisches System.

Die vierte willkürliche Bedingung für die g_{ik} ermöglicht es nun, von den zwei unbekannten Faktoren λ, l einen vorzugeben. *Schwarzschild* hat im Anschluß an das erwähnte von *Einstein* verwendete Bezugssystem:

(58a) $$\lambda = 1,$$

de Sitter hingegen wählt:

(58b) $$l = 0.$$

Es ist klar, daß nur diese letztere Wahl mit dem bei (53) zugrunde-

89) *K. Schwarzschild,* Berl. Ber. 1916, p. 189.

90) *J. Droste,* Amst. Akad. Versl. 25 (1916), p. 163.

gelegten Koordinatensystem in Einklang steht. Man hat bei ihr allerdings, wie schon erwähnt[86]), den Nachteil, daß das Glied mit $\varkappa^2$ in g_{44} nicht verschwindet, wie bei den Koordinaten von *Einstein-Schwarzschild*, so daß es notwendig wird, auf die zweite Näherung einzugehen. Man hat aber dafür den Vorteil, daß bei der Berechnung der Planetenbahn gemäß (58b) die elliptischen Integrale vermieden werden, die bei (58a) hineinkommen. Die Bahn wird nach (58a) eine gewöhnliche Ellipse, allerdings mit Perihelbewegung. Wir entscheiden uns hier für (58a), weil sich die Feldgleichungen einfacher gestalten. (Nachher kehren wir zu (58b) durch Transformation zurück.)

Man führe am besten Polarkoordinaten $\bar{r}\theta\varphi$ mit dem Zentrum im Zentralkörper ein. Es wird mit $x_4 = ct\sqrt{-1}$:

$$ds^2 = + f^2 dt^2 - h^2 d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{59}$$

wo $h^2 = 1 + l\bar{r}^2$ gesetzt ist. f und h sind Funktionen von $\bar{r}$ allein.

Die Rechnung[91]) ergibt bei Verwendung der gemischten Tensoren in leicht verständlicher Indizesbezeichnung:

$$G_{\bar{r}}^{\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{2f'}{fh^2}\frac{1}{\bar{r}},$$

$$G_t^t = -\frac{1}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) - \frac{2h'}{h^3}\frac{1}{\bar{r}}.$$

Alle übrigen G_i^k sind von diesen beiden abhängig oder identisch Null. Befindet man sich außerhalb des Zentralkörpers im materiefreien Raum, so sind alle $T_i^k = 0$, und somit $G_i^k = -\varkappa T_i^k = 0$. Man hat daher zunächst aus $G_t^t = 0$: $\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\alpha}{\bar{r}}$, wo α eine Integrationskonstante ist. Damit kommt aus $G_{\bar{r}}^{\bar{r}} = 0$: $f^2 = \text{const}\left(1 - \frac{\alpha}{\bar{r}}\right)$. Die Konstante muß natürlich so gewählt werden, daß (59) im Unendlichfernen ($\bar{r} = \infty$) in die Maßbestimmung der sp. Rel.th.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

übergeht. Somit const. $= c^2$; so daß

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{\bar{r}}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{\bar{r}}} - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{60}$$

Hieraus kann man leicht durch Transformation eine Form gewinnen, welche der *de Sitter*schen Bedingung (58b) Genüge leistet und daher den Vergleich mit der Näherung (53) gestattet: Man setze

$$\bar{r} = r\left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right)^2. \tag{61}$$

91) *de Sitter*, I, § 10; am elegantesten bei *Weyl*, l. c. § 31 mit Hilfe eines Variationsprinzips.

Es kommt:

$$(62)\quad ds^2 = c^2 \left(\frac{1-\frac{\alpha}{4r}}{1+\frac{\alpha}{4r}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{4r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

d. h. tatsächlich $l = 0$, $\lambda = \left(1+\frac{\alpha}{4r}\right)^4$. Die *Schwarzschild*sche Form (60) und die *de Sitter*sche Form (62) unterscheiden sich also nur durch die Art, wie die Entfernung r vom Zentralkörper aus gemessen wird.

Nunmehr kann man durch Vergleich von (62) mit der Näherung (53) die Bedeutung der Integrationskonstante α ermitteln. Man hat aus (62), wenn wieder kartesische Koordinaten $x_1, x_2, x_3, x_4 = ct\sqrt{-1}$ eingeführt werden:

$$(62\text{a})\quad g_{ik} = -\delta_{ik}\left(1+\frac{\alpha}{4r}\right)^4,\; g_{i4} = 0,\; g_{44} = -\left(\frac{1-\frac{\alpha}{4r}}{1+\frac{\alpha}{4r}}\right)^2 \cdot (i,k = 1,2,3)$$

Hierin hat man α als mit $\varkappa$ proportional anzusehen, da ja für $\varkappa = 0$ die Form (62) in die Form der sp. Rel.th. (keine Gravitation) übergehen muß. Entwickelt man demgemäß die obigen Werte (62a) der g_{ik} bis zur Potenz α^1, so hat man

$$(62\text{b})\quad g_{ik} \sim -\delta_{ik}\left(1+\frac{\alpha}{r}+\cdots\right),\quad g_{i4} \sim 0,\quad g_{44} \sim -\left(1-\frac{\alpha}{r}+\cdots\right).$$

Der Vergleich mit (53) ergibt:

$$(63)\qquad \alpha = \frac{\varkappa}{4\pi} M = \frac{2k^2 M}{c^2},$$

wenn M die Masse des Zentralkörpers ist.

In zweiter Näherung ist nach *de Sitter*[92]) aus (62a):

$$(62\text{c})\qquad g_{44} \sim -\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha^2}{2r^2}+\cdots\right).$$

Hingegen hat man für *Einstein-Schwarzschilds* Koordinatensystem (60):

$$(60\text{a})\quad \bar g_{44} = -\left(1-\frac{\alpha}{\bar r}\right),\quad \bar g_{i4} = 0,\quad \bar g_{ik} = -\delta_{ik} - \frac{\bar x_i \bar x_k}{\bar r^2}\,\frac{\alpha}{\bar r - \alpha}.$$

Man entnimmt hieraus, wie schon erwähnt, daß die zweite Näherung von $\bar g_{44}$ in diesem System nichts Neues liefert, da $\bar g_{44}$ die Größe α, also $\varkappa$ nur bis zur Potenz 1 enthält. Für das Folgende bedienen wir uns wieder der Koordinatenwahl (58b) nach *de Sitter*.

---

92) Man beachte, daß *de Sitter* $x_4 = ct$ und nicht $x_4 = ct\sqrt{-1}$, wie wir, hat; daher steht bei ihm $-g_{44}$ statt unseres g_{44}. Ferner trennt er den Faktor $\varkappa$ von γ_{44} bzw. $\varkappa^2$ von β_{44} nicht ab. Seine Konstanten $\lambda^2 = \frac{k^2}{c^2} = \frac{\varkappa}{8\pi}$, $\lambda_0^2 = \lambda^2 M = \frac{k^2 M}{c^2}$.

15. Die Perihelbewegung des Merkur (Fortsetzung). Wir kehren zur Betrachtung der raschen Bewegung eines Massenpunktes im statischen Schwerefeld zurück. Wir haben also, wenn wir für einen Augenblick ein allgemeines statisches Schwerefeld an Stelle des Feldes (62a) ins Auge fassen, folgende Werte der g_{ik} gemäß Nr. **13** und (53) zugrundezulegen:

$$g_{ik} = -\delta_{ik} - \varkappa\gamma_{44}, \quad g_{i4} = 0, \quad g_{44} = -1 + \varkappa\gamma_{44} + \varkappa^2\beta_{44}.$$

Die Bewegungsgleichungen werden gemäß Nr. **13** und (48a)

$$(63)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x_i}{dx_4^2} + \varkappa\frac{dx_i}{dx_4}\sum_{p=1}^{3}\frac{dx_p}{dx_4}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_p} - \frac{\varkappa}{2}\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{dx_p}{dx_4}\right)^2\cdot\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_i} + \varkappa\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_p}\frac{dx_i}{dx_4}\frac{dx_p}{dx_4} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\varkappa\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\varkappa^2\frac{\partial\beta_{44}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\varkappa^2\gamma_{44}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_i} = 0.^{93)} \qquad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\right.$$

In ihnen ist nach (53) $\gamma_{44} = \frac{1}{4\pi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}$ das *Newton*sche Potential (bis auf einen bloßen Zahlenfaktor); ferner β_{44} die gesuchte zweite Näherung für g_{44}. Für das Einkörperproblem kommt hieraus gemäß (62b), (62c) und (63):

$$(64) \quad \ddot{x}_i + k^2M\frac{x_i}{r^3}\left(1 + \frac{1}{c^2}\sum_{p=1}^{3}\dot{x}_p^2\right) - \frac{4\dot{x}_i}{c^2}\frac{k^2M}{r^3}\sum_{p=1}^{3}x_p\dot{x}_p - \frac{4k^4M^2}{c^2}\frac{x_i}{r^4} = 0.$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

Hingegen hatte die sp. Rel.th. (Nr. **3**, Gleich. (15)) in den jetzigen Bezeichnungen

$$(15^*) \quad \ddot{x}_i + k^2M\frac{x_i}{r^3}\left(1 - \frac{1}{2c^2}\sum_{p=1}^{3}\dot{x}_p^2\right) - \frac{\dot{x}_i}{c^2}\frac{k^2M}{r^3}\sum_{p=1}^{3}x_p\dot{x}_p = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Zur Integration von (64) bemerken wir[94]: Bei Einführung von Polarkoordinaten $r\vartheta\varphi$ wird:

$$(64a)\left\{\begin{aligned} &\ddot{r} - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 - r\dot{\vartheta}^2 + \frac{k^2M}{r^2} = k^2M\left\{\frac{4k^2M}{c^2}\cdot\frac{1}{r^3} + \frac{3}{c^2}\frac{\dot{r}^2}{r^2}\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{1}{c^2}\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{c^2}\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right\}, \\ &\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} - 2\operatorname{cotg}\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = \frac{4k^2M}{c^2}\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r^2}, \\ &\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = \frac{4k^2M}{c^2}\frac{\dot{r}\dot{\vartheta}}{r^2}.\end{aligned}\right.$$

93) Hier steht in der zweiten Zeile die bis auf Größen $\varkappa^2$ genaue Entwicklung von $\left\{\begin{matrix}44\\ i\end{matrix}\right\}$.

94) *W. de Sitter,* Amst. Akad. Versl. 25 (1916), p. 232, insbes. § 3; ferner I, § 16—17.

Wenn einmal $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = 0$ ist, so folgt aus der letzten Gleichung, daß dies ständig der Fall ist. Die Bewegung ist *eben*; wir wählen als Ebene die Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Es kommt:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{k^2 M}{r^2} = k^2 M \left\{ \frac{4k^2 M}{c^2}\frac{1}{r^3} + \frac{3}{c^2}\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}^2 \right\},$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{4k^2 M}{c^2}\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r^2}.$$

Die linken Seiten sind hierin gleichlautend mit denen in der *Newton*schen Theorie; allerdings sind sie hier nicht Null wie bei *Newton*, sondern klein von der 2. Ordnung. Das Integral des Flächensatzes lautet jetzt (bis auf Größen 3. Ordnung):

$$r^2\dot{\varphi} = k\sqrt{M}\sqrt{p_0}\left(1 - \frac{4k^2 M}{c^2}\frac{1}{r}\right),$$

wo p_0 eine Integrationskonstante (der Parameter der Bahnellipse nach *Newton*, d. i. für $c = \infty$) ist. Das Integral der lebendigen Kräfte wird (bis auf Größen 3. Ordnung):

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k^2 M}{r} = -\frac{k^2 M}{2a_0} + \frac{k^4 M^2}{c^2}\left[\frac{3}{a_0 r} - \frac{5}{r^2}\right],$$

wo a_0 eine neue Integrationskonstante (die halbe große Achse der Bahnellipse nach *Newton*, d. i. für $c = \infty$) ist. Die Differentialgleichung für die Bahn wird hiernach:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cdot\frac{1}{p_0} + \frac{1}{a_0 p_0} = \frac{k^2 M}{c^2}\frac{1}{p_0}\left[\frac{6}{r^2} - \frac{2}{a_0 r}\right].$$

Links stehen wieder die Glieder der *Newton*schen Theorie; rechts steht anstatt Null, wie bei *Newton*, ein Ausdruck 2. Ordnung. Das Integral wird

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos g\varphi, \tag{65}$$

wobei gesetzt ist:

$$p = a(1 - e^2) = p_0\left(1 + \frac{k^2 M}{c^2}\frac{1}{a_0} - \frac{6k^2 M}{c^2}\frac{1}{p_0}\right),$$

$$a = a_0 - \frac{k^2 M}{c^2}, \quad g = 1 - \frac{3k^2 M}{c^2}\frac{1}{p_0}.$$

Die Bahn ist also eine Ellipse mit positiver Perihelbewegung. Während eines Umlaufs verschiebt sich das Perihel um

$$d\varpi = \frac{2\pi}{g} - 2\pi = 2\pi\cdot\frac{3k^2 M}{c^2}\frac{1}{p_0} = \frac{24\pi^3 a_0^2}{c^2 T_0^2(1 - e_0^2)}, \tag{66}$$

wo e_0, T_0 die aus der *Newton*schen Theorie bekannte Bedeutung haben. Für einen Umlauf kommt im Mittel (die Umlaufszeit hängt hier natürlich von dem Ausgangspunkt ab), wenn $\overline{T}$ die mittlere Umlaufszeit für einen Zuwachs in φ um 2π bedeutet:

$$(67)\qquad 4\pi^2 \frac{a^3}{\overline{T}^2} = k^2 M\left[1 - \frac{3k^2 M}{c^2}\frac{1-3e_0^2}{p_0}\right]$$

an Stelle des dritten *Kepler*schen Gesetzes

$$4\pi^2 \frac{a_0^3}{T_0^{\,2}} = k^2 M.$$

De Sitter beweist noch, daß der einzige beobachtbare säkulare Störungseffekt, wobei er die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen als störende Kräfte auffaßt, sich auf die Perihelbewegung reduziert. Weder im Knoten noch in der Neigung resultieren infolge der allg. Rel.th. bemerkbare säkulare Effekte. Es resultiert allerdings noch, jedoch nur in den Koordinaten (60), eine säkulare Variation der mittleren Länge der Epoche $dL_0 \sim -2d\varpi$,

die jedoch nicht beobachtbar ist.

Zum Schlusse werde noch bemerkt, daß die Bewegung des Perihels nach der sp. Rel.th. (15*) für einen Umlauf

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{k^2 M}{c^2}\frac{1}{p_0} = \frac{4\pi^3 a_0^2}{c^2 T_0^{\,2}(1-e_0^2)},$$

also $^1/_6$ des Wertes (66) der allg. Rel.th. ausmacht.

16. Zahlenwerte. Die Gegenüberstellung der nach *Newcomb* (Astronomical constants p. 109) verbleibenden unerklärten Restglieder in den Perihelbewegungen der vier inneren Planeten mit dem Relativitätseffekt (66) zeigt die folgende Tabelle für $e\,d\varpi$:

	Unerklärte Restglieder nach *Newcomb*		Berechnet nach *Einstein* (66)
Merkur	+ 8″48	(± 0″43)	+ 8″82
Venus	— 0″05	(± 0″25)	+ 0″05
Erde	+ 0″10	(± 0″13)	+ 0″07
Mars	+ 0″75	(± 0″35)	+ 0″13

De Sitter findet (Monthly Not. l. c. § 19), indem er an Stelle des *Newcomb*schen Wertes der Präzessionskonstante für 1850, 5023″71, den Wert 5024″90 wählt und dementsprechend die *Newcomb*schen Werte korrigiert, für den säkularen Periheleffekt $e\,d\varpi$:

	Beobachtung	Berechnet mit Berücksichtigung von (66)	Differenz
Merkur	+ 118″00 ± 0″40	+ 118″58 ± 0″16	— 0″58 ± 0″43
Venus	+ 0″28 ± 0″20	+ 0″39 ± 0″15	— 0″11 ± 0″25
Erde	+ 19″46 ± 0″12	+ 19″45 ± 0″05	+ 0″01 ± 0″13
Mars	+ 149″44 ± 0″35	+ 148″93 ± 0″04	+ 0″49 ± 0″35

Hieraus schließt *de Sitter*: Die *Seeliger*sche Hypothese[95]) der Zodiakallichtmaterie zur Erklärung der Anomalie des Merkur ist überflüssig. Wenn es eine solche Materie gibt, so hat sie höchstens $^1/_{200}$ der ihr von *Seeliger* zugeschriebenen Dichte.

Ferner zeigen die jetzt noch verbleibenden Restglieder (ebenso die hier nicht mitgeteilten auf die Knotenbewegung bezüglichen) keine Bevorzugung eines bestimmten Vorzeichens. Sie können daher, wie *de Sitter* bemerkt, nicht erklärt werden durch die von *Anding*[96]) und *Seeliger*[95]) angenommene Rotation des empirischen Koordinatensystems gegenüber einem „Inertialsystem" um eine zur Ekliptikebene senkrechte Achse. Übrigens sind diese Restglieder, von der Knotenbewegung der Venus abgesehen, unbedeutend. Über die Möglichkeit ihrer Erklärung durch Korrekturen an den Massen der Planeten vgl. *de Sitter*, Amst. Akad. l. c.[94]) Schluß im Gegensatz zu *Bauschinger*[97]).

Neuerdings ist die ganze Basis dieser Bestätigung der allg. Rel.th., nämlich die Rechnung *Newcombs*, durch *Großmann*[98]) angegriffen worden. Er findet:

1. *Newcomb* hat einen Teil der Präzession nicht berücksichtigt, wodurch sein $d\varpi$ um ca. $3''$ zu groß ist.

2. Es ist auffallend, daß, obwohl sich die definitiven Sonnenelemente nur wenig von den ursprünglichen, wie Merkur sie liefert, unterscheiden, die Korrektion der Säkularvariation des Merkurperihels sich von $-1''01$ auf $+6''34$ ändert.

3. Die Größe der Venusmasse ist von entscheidendem Einfluß auf die Perihellage des Merkur. *Newcomb* berechnet sie aus den periodischen Störungen in Länge der Sonne und des Merkur und verwirft den aus den säkularen Störungen des Merkur folgenden Wert, der von dem ersteren stark abweicht, ohne eine Untersuchung über die Zuverlässigkeit des angenommenen Massenwertes.

4. *Newcomb* verwirft ohne ausreichende Begründung die Lösung aus den Beobachtungen, welche ausschließlich am Meridiankreis gemacht sind, und verwendet diese nur kombiniert mit den Beobachtungen der Durchgänge des Merkur durch die Sonnenscheibe. Auch das hierbei befolgte Rechenverfahren, soweit es überhaupt durchsichtig ist, unterliegt manchem Bedenken.

95) *H. v. Seeliger*, München. Ber. 1906, p. 595; vgl. VI 2, 22 (*Oppenheim*) Nr. 25 d).

96) *E. Anding*, Encykl. VI 2, 1.

97) *J. Bauschinger*, Encykl. VI 2, 17, p. 888 ff.

98) *E. Großmann*, Ztschr. f. Phys. 5 (1921), p. 280 oder Astr. Nachr. 219 (1921), p. 41, 195.

Großmann kommt zu dem Schluß, daß aus den Meridiankreisbeobachtungen allein $+29''$ und aus den mit den Meridiankreisbeobachtungen kombinierten Durchgängen $+38''$ für $d\varpi$ folgt (beide auf definitive Sonnenelemente korrigiert).

Die *Einstein*sche Theorie fordert hingegen gemäß (60) für $d\varpi$ den Wert $+43''$, wobei sehr gesicherte astronomische Konstante der Rechnung zugrundeliegen.

17. Die Bewegung des Mondes.[99]) Zunächst werde das Feld von n langsam bewegten Körpern betrachtet. Nach *Droste*, l. c.[87]), hat man allgemein, wenn die Geschwindigkeiten als unendlich klein von der ersten Ordnung angesehen werden, in der benötigten Näherung (g_{ik} bis zur 2. Ordnung, g_{i4} bis zur 3. und g_{44} zur 4.) mit $x_4 = ct\sqrt{-1}$:

$$(68)\quad \begin{cases} g_{ik} = -\delta_{ik} - \delta_{ik}\dfrac{\varkappa}{4\pi}\sum\limits_{\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}, \\ g_{i4} = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\varkappa}{2\pi}\sum\limits_{\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\dot{x}_{i\mathfrak{a}}}{c}, \qquad\qquad (i,k = 1,2,3) \\ g_{44} = -1 + \dfrac{\varkappa}{4\pi}\sum\limits_{\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\varkappa^2}{16\pi^2}\Big(\sum\limits_{\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\Big)^2 + \dfrac{3\varkappa}{8\pi}\sum\limits_{\mathfrak{a}}^{3}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\dot{x}_{i\mathfrak{a}}^2}{c^2} \\ \qquad + \dfrac{\varkappa^2}{4\pi^2}\sum\limits_{\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{a}}}\sum\limits_{\mathfrak{b}\neq\mathfrak{a}}\dfrac{m_{\mathfrak{b}}}{r_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}} + \dfrac{\varkappa}{8\pi}\sum\limits_{\mathfrak{a}} m_{\mathfrak{a}}\dfrac{\ddot{r}_{\mathfrak{a}}}{c^2}. \end{cases}$$

Diese Größen bestimmen das Feld im Ursprung (alle $r_{\mathfrak{a}} = 0$). Wenn einer der n Körper im Ursprung sich befindet, so hat man natürlich in den $\sum\limits_{\mathfrak{a}}$ diesen Körper auszulassen, hingegen in der $\sum\limits_{\mathfrak{b}}$ ihn mitzuzählen. Das Koordinatensystem, das zu (68) gehört, ist (Nr. **10**) ein Inertialsystem (*Lorentz-Minkowski*sches System, natürlich für $\varkappa \sim 0$), in welchem (Nr. **11**) die n Körper nahezu ruhen. Vom Standpunkt der *Newton*schen Theorie wäre dies also ein im Schwerpunkt der n Körper angebrachtes Inertialsystem; in der Relativitätstheorie ist aber bekanntlich (wegen Ungültigkeit des Reaktionsprinzips bei endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, Nr. 2) der Schwerpunkt nicht unbeschleunigt, also als Ursprung eines Inertialsystems strenge nicht brauchbar. Aus (68) folgen für den Körper mit dem Index $\mathfrak{c}$ die Bewegungsgleichungen:

99) *W. de Sitter*, II, § 20—26.

$$
(69)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\ddot{x}_{i\mathfrak{c}} + k^2 \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} = \frac{4k^4}{c^2} \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} m_{\mathfrak{b}} \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3 r_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}} \\
&\qquad\qquad + \frac{4k^2}{c^2} \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \sum_{p=1}^{3} \frac{x_{p\mathfrak{c}} - x_{p\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} \dot{x}_{p\mathfrak{c}} \dot{x}_{i\mathfrak{c}} \\
&- \frac{k^2}{c^2} \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} \left[\sum_{p=1}^{3} \left(\dot{x}_{p\mathfrak{c}}^2 + 2\dot{x}_{p\mathfrak{a}}^2 + \frac{1}{2}[x_{p\mathfrak{a}} - x_{p\mathfrak{c}}] \ddot{x}_{p\mathfrak{a}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} \left(\sum_{p=1}^{3} \frac{x_{p\mathfrak{a}} - x_{p\mathfrak{c}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}} \dot{x}_{p\mathfrak{a}} \right)^2 \right] + \frac{k^2}{c^2} \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{7}{2} \frac{\ddot{x}_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}} \right. \\
&\quad + 3 \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} \sum_{p=1}^{3} (x_{p\mathfrak{a}} - x_{p\mathfrak{c}}) \dot{x}_{p\mathfrak{a}} \\
&\quad \left. + 4 \sum_{p=1}^{3} \frac{(x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}})\dot{x}_{p\mathfrak{a}} - (x_{p\mathfrak{c}} - x_{p\mathfrak{a}})\dot{x}_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} \dot{x}_{p\mathfrak{c}} \right\} \\
&\quad - \frac{2k^4}{c^2} \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^3} \sum_{\mathfrak{b}\neq\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \frac{m_{\mathfrak{b}}}{r_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}} - \frac{2k^4}{c^2} m_{\mathfrak{c}} \sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}} m_{\mathfrak{a}} \frac{x_{i\mathfrak{c}} - x_{i\mathfrak{a}}}{r_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}^4}. \\
&\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}
\right.
$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder ist die folgende: Links stehen die Ausdrücke der *Newton*schen Theorie. Die ersten drei Terme rechts sind die Verallgemeinerung der aus (64) bekannten Wirkungen der übrigen $n - 1$ Massen, auf den als Massenpunkt aufgefaßten $\mathfrak{c}^{\text{ten}}$ Körper, diese $n - 1$ Massen noch als ruhend gedacht. Der 4. bis 10. Term rührt von der Bewegung dieser $n - 1$ Massen her. Die beiden letzten endlich sind dem Problem der n-Körper zum Unterschiede von dem Problem eines Körpers in der *Einstein*schen Theorie eigentümlich, und sind ebenso wie der erste Term rechts nicht linear in den Massen der $n - 1$ Körper, was eine Folge der Nichtlinearität der *Einstein*schen Feldgleichungen ist.

Bei der Anwendung von (69) auf die Bewegung der *Planeten* hat man zu bedenken, daß deren Massen gegen die Masse der Sonne als Größen 1. Ordnung behandelt werden können. Die Folge davon ist, daß nur die Glieder in (69) übrig bleiben, welche von der Sonne herrühren, während die Einwirkungen der übrigen Planeten sich auf die gewöhnlichen Störungsglieder der *Newton*schen Theorie reduzieren. Die Integration ist also durch Nr. **15** in Verbindung mit den bekannten Störungsrechnungen hinreichend genau erledigt.

Etwas Neues bietet hingegen die *Einstein*sche Theorie bei der Untersuchung der Bewegung des *Mondes* im Felde der Erde und der

Sonne. Hierbei hat man natürlich die auf der rechten Seite von (69) auftretenden Beschleunigungen genügend genau durch die *Newton*schen Werte, d. i. die gleich Null gesetzten linken Seiten von (69), auszudrücken. Der Ursprung des Koordinatensystems kann mit gleicher Genauigkeit in die Sonne verlegt werden, so daß man nur die Differenz der heliozentrischen Bewegungen des Mondes und der Erde zu bilden hat. Die Exzentrizität der Erdbahn kann vernachlässigt werden, so daß die heliozentrische Entfernung der Erde konstant ist.

Zunächst betrachtet *de Sitter* die Bewegung von Erde und Mond allein ohne Sonne. Der einzige beobachtbare neue säkulare Effekt ist eine Bewegung des Perigäums genau analog zur Bewegung des Perihels des Merkur (66). Sein Betrag per Jahrhundert ist 0″06.

Sodann betrachtet er die von der Sonne allein herrührende Störung, wobei die „Interferenz" der Felder von Erde und von Sonne, d. i. die Glieder mit den Koeffizienten Sonnenmasse mal Erdmasse in der heliozentrischen Beschleunigung des Mondes bzw. Sonnenmasse mal Mondmasse, in der heliozentrischen Beschleunigung der Erde vernachlässigt und nur die Glieder mit der Sonnenmasse allein und mit Sonnenmasse mal Mondmasse bzw. Sonnenmasse mal Erdmasse in den heliozentrischen Beschleunigungen von Mond bzw. Erde berücksichtigt werden. Hierbei tritt der Faktor $\frac{k^2 M}{\varrho^3}$ auf, wo M Sonnenmasse, ϱ heliozentrische Entfernung der Erde bedeuten. Er wird in der gewöhnlichen Störungstheorie nach dem dritten *Kepler*schen Gesetz gleichgesetzt $\frac{4\pi^2}{T_0{}^2}$, wo T_0 die mittlere Umlaufszeit der Sonne (Erde) ist. Dies ist jedoch in der neuen Theorie unzulässig, wie (67) zeigt. Über den resultierenden Effekt der Sonne s. w. u.

Endlich ergibt sich für die „Interferenz"glieder des Erd- und des Sonnenfeldes kein wesentlicher säkularer Term.

Es verbleibt daher der von der Sonne allein herrührende Effekt, welcher als Störung zu dem Erdfeld, beide jedoch nach der allg. Rel.th. berechnet, hinzutritt. *De Sitter* findet für diese Störung die folgenden Ausdrücke, wenn S die radiale, T die transversale, W die orthogonale Komponente bedeuten, wobei die aus der *Newton*schen Theorie bekannten Ausdrücke weggelassen worden sind und nur die von der neuen Theorie (inklusive der Abänderung des dritten *Kepler*schen Gesetzes) herrührenden Terme angeschrieben werden:

$$k^2 m_{\text{♁}} S = -3 k^2 m_{\odot} \left(\frac{n_{\odot}}{c^2}\right) \frac{r_{\text{☾}} \dot{\vartheta}_{\text{☾}}}{\varrho}, \quad k^2 m_{\odot} T = +3 k^2 m_{\odot} \left(\frac{n_{\odot}}{c^2}\right) \frac{\dot{r}_{\text{☾}}}{\varrho_{\text{♁}}},$$

$$k^2 m_{\text{♁}} W = \dotplus 3 k^2 m_{\odot} \left(\frac{n}{c^2}\right) \frac{z_{\text{☾}} \dot{\vartheta}_{\text{☾}}}{\varrho_{\text{♁}}}.$$

Hierin bedeuten $r_☾ \vartheta_☾$ die Koordinaten des Mondes in seiner Bahn, $z_☾$ die senkrecht zur Ekliptik gemessene Koordinate; $n_\odot$ ist die mittlere Bewegung der Sonne, $m_\odot$ ihre Masse, $m_♁$, $\varrho_♁$ Masse und mittlere heliozentrische Distanz der Erde.

Die Auswertung ergibt eine neue säkulare Bewegung von Perigäum, Knoten und mittlerer Länge der Epoche des Mondes unter dem Einfluß der Sonne vom Betrag

$$(70) \qquad d_1 \varpi_☾ = d_1 \Omega_☾ = \tfrac{1}{4} d_1 L_{0☾} = \frac{3}{2} \frac{k^2 m_\odot}{c^2 \varrho_♁} \cdot n_♁ t.$$

Für $t = 100$ Jahre wird dies gleich $+ 1''91$.

Beobachtet ist[100]) per Jahrhundert:

Nach *Brown, Cowell* $d_1 \pi = + 14643536'' \pm 2''$,
nach *Newcomb, de Vos* $d_1 \pi = + 14643530'' \pm 2''$,
nach *Newcomb, Brown* $d_1 \Omega = - 6967944'' \pm 2''$.

Berechnet [inklusive (70)] ist:

$d_1 \varpi = 14643534'' \pm 2''$ Differenz $\begin{cases} \text{nach } \textit{Brown} & + 2'' \pm 3'', \\ \text{nach } \textit{Newcomb} & - 4'' \pm 3'', \end{cases}$

$d_1 \Omega = - 6967939'' \pm 2''$ Differenz $- 5'' \pm 3''$.

Der Effekt liegt also vorläufig innerhalb der Beobachtungsfehler und der theoretischen Unsicherheiten.

Der hier besprochene neue Effekt hat eine besondere Bedeutung vom Standpunkte der Differentialgeometrie der vierdimensionalen Welt[101]), wie *Schouten* entdeckt hat.

Man beachte nämlich, daß (70) die Elemente des Mondes gar nicht enthält, sondern nur von der Bewegung der Erde um die Sonne herrührt. Zufolge der allg. Rel.th. erfolgt die Revolution (= krummlinige Translation) der Erde in einem nichteuklidischen Raum. Genauer gesprochen hätte man allerdings die vierdimensionale Weltlinie der Erde in einer nichteuklidischen vierdimensionalen Welt zu betrachten; zum Zwecke der Verdeutlichung des *Schouten*schen Gedankens werde hiervon abgesehen und die dreidimensionale Bahnkurve (ohne Rücksicht auf die Zeit) betrachtet. Jede Translation ist eine Parallelverschiebung eines starren Gerüsts. Eine solche Parallelverschiebung ist aber ohne weiteres nur im euklidischen Raum möglich Im nichteuklidischen muß der Parallelismus erst definiert werden

100) *W. de Sitter,* Amst. Acad. Proc. 17 (1915), p. 1309.

101) *J. A. Schouten,* Amst. Akad. Versl. 27 (1918), p. 214; ebenda 29 (1921), p. 1150; *A. D. Fokker,* ebenda 29 (1920), p. 611; *W. de Sitter,* London Astr. Soc. M. N. 81 (1920), wo zugleich eine Berichtigung der in II, p. 172 unrichtigen Formel (97) [gleich unserer Formel (70)] gegeben ist.

(*Levi-Civita* 1917 und *Schouten* 1918).[102]) Er führt zu einer Nichtintegrabilität der Parallelverschiebung längs geschlossener Bahnen, d. h. z. B. die Erdachse ist ihrer früheren Lage nicht mehr parallel, wenn die Erde in ihren Ausgangspunkt zurückkehrt. Dadurch entsteht also ein *neuer* Präzessionseffekt außer den wohlbekannten Effekten. Befestigt man daher ein Achsengerüst starr in der Erde, so überträgt sich seine Präzessionsbewegung auf die von ihm aus, also geozentrisch beobachteten Gestirne, und dies ist der Grund für das Auftreten des Effekts (70) beim Monde, da ja (70) für die geozentrische Bewegung des Mondes abgeleitet wurde.

Wenn also die Unsicherheiten in der gewöhnlichen Lunisolarpräzession, die im wesentlichen durch die Unkenntnis der Hauptträgheitsmomente der Erde bedingt sind, bis auf eine weitere Dezimale reduziert werden könnten, hätte man in dem erwähnten neuen Präzessionseffekt eine bedeutungsvolle Möglichkeit zur Prüfung der metrischen Grundlagen der allg. Rel.th.

18. Der Einfluß der Rotation der Sonne.[103]) Wie schon aus der *Einstein*schen Näherungslösung (52) oder durch Vergleich von (55) mit (53) ersichtlich ist, verändert die Bewegung der Körper ihr Schwerefeld, da ja die *Einstein*sche Gravitationstheorie tensoriell ist, also nicht nur von der Massendichte, sondern auch von dem Massenimpuls (überdies auch von den elastischen Spannungen in der Materie) abhängt.

Wie man aus (52) sieht, hat man, sobald man im Schlußresultat nur bis zu den Effekten 2. Ordnung gehen will, einen Einfluß der Rotation der Sonne bloß in den $g_{14} g_{24} g_{34}$ zu berücksichtigen. Man erhält so:

$$g_{i4} = -\sqrt{-1}\,\frac{\varkappa}{2\pi c}\int \frac{\varrho}{r}\,\dot{x}_i \cdot dV,$$

wo in dem Tensor (37) $\frac{W_0}{c^2} = \varrho$ geschrieben wurde. Bei Einführung von Polarkoordinaten $\mathfrak{r}\vartheta\varphi$ (Polarachse = Rotationsachse der Sonne = z-Achse):

$$x = \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\varphi \quad y = \mathfrak{r}\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \mathfrak{r}\cos\vartheta$$

findet man für die Geschwindigkeit eines Punktes im Innern der Sonne, wenn Ω ihre Winkelgeschwindigkeit bedeutet,

$$\dot{x} = -\,\mathfrak{r}\sin\vartheta\sin\varphi\,\Omega, \quad \dot{y} = -\,\mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\varphi\,\Omega, \quad \dot{z} = 0.$$

Dies führt mit $r_0\vartheta_0\varphi_0$ als Koordinaten des Aufpunkts und $r^2 = \mathfrak{r}^2 + r_0^2 - 2r\mathfrak{r}_0(\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0))$ auf:

$$g_{14} = -\sqrt{-1}\,\frac{\varkappa}{2\pi c}\int \frac{\varrho\cdot(-\,\mathfrak{r}\sin\vartheta\sin\varphi\,\Omega)\,\mathfrak{r}^2 d\mathfrak{r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\sqrt{r_0^2 + \mathfrak{r}^2 - 2r_0\mathfrak{r}(\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0))}}$$

102) Vgl. *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie (1921), § 14.

103) *W. de Sitter*, I, §§ 14, 18.

und daraus bei homogener Dichteverteilung ϱ und bei $r_0 \gg R$, wo R der Sonnenradius ist:

$$g_{14} \sim \sqrt{-1}\,\frac{k^2 M}{c^2}\,\frac{\Omega}{c}\,\frac{4}{5}\,\frac{R^2}{r_0{}^2}\sin\vartheta_0 \sin\varphi_0,$$

ebenso

$$g_{24} = -\sqrt{-1}\,\frac{k^2 M}{c^2}\,\frac{\Omega}{c}\,\frac{4}{5}\,\frac{R^2}{r_0^2}\sin\vartheta_0 \cos\varphi_0, \quad g_{34} = 0,$$

oder in Polarkoordinaten:

$$(71) \qquad g_{r4} = g_{\vartheta 4} = 0, \quad g_{\varphi 4} = -\sqrt{-1}\,\frac{4}{5}\,\frac{k^2 M}{c^2}\,\frac{\Omega}{c}\,\frac{R^2}{r_0}\sin^2\vartheta_0.$$

Wenn jetzt der Index 0 für den Aufpunkt wieder weggelassen wird, so gibt dies in den Bewegungsgleichungen (64a) die folgenden Zusatzterme zu den rechten Seiten:

$$\frac{4}{5}k^2 M\frac{\Omega}{c}R^2\sin^2\vartheta\,\frac{\dot\varphi}{c}\cdot\frac{1}{r^2}, \quad \text{bzw.} \quad -\frac{4}{5}k^2 M\frac{\Omega}{c}R^2\left[\frac{\dot r}{c}\,\frac{1}{r^3} + 2\frac{\dot\vartheta}{c}\operatorname{cotg}\vartheta\cdot\frac{1}{r^2}\right],$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{4}{5}k^2 M\frac{\Omega}{c}R^2\sin 2\vartheta\,\frac{\dot\vartheta}{c}\,\frac{1}{r^2}.$$

Wählt man als Bahnebene die Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so hat man eine radiale und transversale Störungskraft vom Betrage:

$$k^2 M\cdot S = \frac{4}{5}\,\frac{k^2 M}{c^2}\,\Omega R^2\cdot\frac{\dot\varphi}{r^2} \sim \frac{4}{5}\,\frac{k^3 M\sqrt{M}}{c^2}\,\Omega R^2\sqrt{p_0}\cdot\frac{1}{r^4},$$

$$k^2 M\cdot T = -\frac{4}{5}\,\frac{k^2 M}{c^2}\,\Omega R^2\cdot\frac{\dot r}{r^3}, \quad k^2 M\cdot W = 0.$$

Hieraus resultiert wieder eine Perihelbewegung

$$d_2\varpi = -\frac{8}{5}k\sqrt{\frac{M}{p_0^3}}\,\frac{\Omega R^2}{c^2}\cdot 2\pi$$

per Umlauf. Im Vergleich zu (66) hat man

$$\frac{d_2\varpi}{d\varpi} = -\frac{8}{15}\,\frac{R^2\Omega}{k\sqrt{Mp_0}},$$

was ein sehr kleiner Bruch ist. Für Merkur hat er z. B. den Wert $2{,}62\cdot 10^{-4}$. Der Effekt $d_2\varpi$ kann daher gegenüber $d\varpi$ ganz vernachlässigt werden.

Die Lösung (71) ist später, unabhängig von *de Sitter*, von *Lense* und *Thirring*[104]) wiedergefunden und zum Studium des Einflusses der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde verwendet worden. Sie finden die gleiche Formel für $d_2\varpi$ und überdies einen analogen Effekt im Knoten Ω und mittlerer Länge der Epoche L_0 nach der Formel:

$$(72) \qquad d_2\varpi = -2\,d_2\Omega = d_2 L_0.$$

---

104) *J. Lense* u. *H. Thirring*, Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 156 und *J. Lense*, Astr. Nachr. 206 (1918), p. 117.

Sie untersuchen ferner den *relativistischen Gesamteffekt*, der sich aus der Perihelbewegung nach (66) (Typus Merkur, Ursache *schnelle Bewegung*), aus der Knotenbewegung und Perigäumsbewegung nach (70)[105] (Typus Erdmond, Ursache *Präzessionseffekt* im nichteuklidischen Raume) und endlich aus der Bewegung von Perizentrum und Knoten nach (71) (Ursache *Eigenrotation* des Zentralkörpers) ergibt, an den Monden aller Planeten. Aus ihren Resultaten sei hervorgehoben:

säkulare Perihelbewegung gemäß	Gl. (66)	Gl. (70)	Gl. (71)
V. Mond des Jupiter	+ 36′37″	—	— 3′46″
I. „ „ Saturn	+ 5 46	—	— 41
I. „ „ Jupiter	+ 4 28	—	— 18
II. „ „ Saturn	+ 3 3	—	— 19
I. „ „ Mars	+ 22	+ 0″7	—
II. „ „ Mars	+ 2	+ 0″7	—

Die Elemente aller dieser Satelliten sind aber vorläufig noch zu ungenau bestimmt, um diese Effekte feststellen zu können.

Zum Schluß sei eine Zusammenstellung der Formeln für die Relativitätseffekte (per Umlauf) gegeben:

a) Schnelligkeitseffekt (Typus Merkur) nach (66):

$$d\varpi = 2\pi \cdot \frac{3n^2a^2}{c^2(1-e^2)},$$

b) Präzessionseffekt (Typus Erdmond) nach (70):

$$d_1\varpi = d_1\Omega = \tfrac{1}{4}d_1L_0 = 2\pi \cdot \frac{3}{2}\frac{N^2A^2}{c^2},$$

c) Rotationseffekt (Typus Jupitermond V) nach (71):

$$d_2\varpi = -2d_2\Omega = d_2L_0 = -2\pi \cdot \frac{8}{5}\frac{n\Omega R^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}}.$$

Die kleinen Buchstaben auf der rechten Seite beziehen sich dabei auf den jeweilig betrachteten Himmelskörper, die großen Buchstaben daselbst auf den zugehörigen Zentralkörper.

B. Optik.

19. Die Rotverschiebung der Spektrallinien der Sonne.[106]) Die im Eigensystem (Nr. **1**, Nr. 7) gemessenen Größen eines punktförmigen Systems sind sicherlich (adiabatische) Invarianten desselben auch gemäß der allg. Rel.th. während der ganzen Dauer seiner Existenz. Insbesondere gehört dazu die Eigenzeit *ds*. Hat man also einen rein

105) *Lense* und *Thirring* bringen hierbei an der Formel (70) *de Sitters* eine Korrektur an, indem sie schreiben $d_1\varpi = 4d_1\Omega$, l. c. p. 162, Anm. 1. Dies beruht auf einem Irrtum.

zeitlichen Vorgang in jenem System, wie beispielsweise eine periodische Lichtschwingung eines mitgeführten Atoms, so müssen sich die betreffenden Zahlen, hier also die Periode, in jedem Augenblick im mitgeführten System ungeändert wiederfinden. Anders ist es in einem nicht mitgeführten, sondern beliebigen System. Da die Zeitmessung x_4 in einem solchen System infolge des Vorhandenseins des Schwerefeldes vom Orte (und von der Zeit) abhängt, so wird ein und dasselbe Atom in dieser Zeit x_4, beispielsweise an der Sonnenoberfläche, eine andere Frequenz aufweisen als an der Erde. Wenn wir also die Spektrallinien der Sonne auf der Erde beobachten und in der Zeit x_4 messen, so sehen wir sie genau in der Frequenz, die ihnen (in dieser Zeit x_4) auf der Sonne zukommt. Vergleichen wir daher die solaren Spektrallinien mit den entsprechenden terrestrischen Linien (ebenfalls auf die Zeit x_4 bezogen), so müssen sich die Sonnenlinien gegen die irdischen verschoben vorfinden, da ja auf der Sonne ein mächtiges Schwerefeld herrscht, während auf der Erde die Einwirkung desselben schon sehr schwach ist. (Das eigene Feld der Erde kommt nicht in Betracht.) Die Größe des Effekts ergibt sich aus der Invarianz der Frequenz in Eigenzeit ds; für ein Zeitintervall dx_4 wird:

$$ds^2 = +(g_{44}\,dx_4^{\,2})_{\odot} = +(g_{44}\,dx_4^{\,2})_{\male}$$

oder wegen $x_4 = ct\sqrt{-1}$:

$$\frac{dt_{\male}}{dt_{\odot}} = \frac{\nu_{\odot}}{\nu_{\male}} = \frac{(\sqrt{-g_{44}})_{\odot}}{(\sqrt{-g_{44}})_{\male}},$$

wo ν die Frequenz ist; somit nach (53), wenn R der Sonnenradius ist:

(73) $$\frac{\nu_{\odot}}{\nu_{\male}} \sim \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{R}}{1} = 1 - \frac{k^2 M}{c^2 R}$$

daher

(73a) $$\frac{\nu_{\odot} - \nu_{\male}}{\nu_{\male}} = \frac{\varDelta\nu}{\nu_{\male}} = -\frac{k^2 M}{c^2 R} = -2{,}12 \cdot 10^{-6},$$

was eine Verschiebung $\varDelta\nu$ nach Rot im Betrag von rund $2 \cdot 10^{-6}$ der betreffenden Frequenz bedeutet. Dies entspricht, mit dem Dopplereffekt verglichen, einer radialen Geschwindigkeit von $+0{,}63$ km/sec. Für Blau von 4000 Å Wellenlänge gibt dies z. B. eine Rotverschiebung von $8 \cdot 10^{-3}$ Å. Der Effekt liegt also gerade oberhalb der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit, ist aber bisher noch nicht einwandfrei konstatiert worden, wie aus dem Nachfolgenden hervorgehen wird.

---

106) Literatur: *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 898 ff. (Sammlung „Relativitätsprinzip"); Ann. d. Phys. 49 (1916), § 22; Theoretisches zur Formel (73) (unter teilweise anderer Darstellung) bei *M. Laue,* Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 659; Ztsch. f Phys. 3 (1920), p. 389.

Mögliche Störungen sind[106a]):

1. *Druck* (auch elektrische Einflüsse: Poleffekt im Lichtbogen).[106b]) Durch Druck erklärte man früher die im allgemeinen tatsächlich vorhandene geringe Rotverschiebung der Sonnenlinien[107]). Doch zeigte sich[108]), daß diese Verschiebung mit der terrestrisch beobachtbaren Druckverschiebung nicht übereinstimmt. Man untersucht deshalb überhaupt am passendsten wenig druckempfindliche Gebiete des Sonnenspektrums, wie z. B. die früher dem Cyan zugeschriebene Stickstoffbande bei $\lambda = 3883$ Å, die nach Laboratoriumsversuchen (in Emission) sehr wenig durch Druckänderung beeinflußt wird.

2. *Dopplereffekt.* Dieser befolgt durchaus das gleiche Gesetz wie der Einsteineffekt (73) (Verschiebung $\Delta\nu$ proportional der Frequenz ν), ist daher auch bei Heranziehung nicht bloß eines einzigen, sondern verschiedener Spektralgebiete nicht ohne weiteres zu eliminieren. Ein solcher Dopplereffekt könnte z. B. von einer systematischen vertikalen Strömung der leuchtenden Gase in der Sonne aufwärts (Violettverschiebung in der Sonnenmitte, Null an den Rändern) bzw. abwärts (Rotverschiebung in der Mitte, Null an den Rändern) oder von einer horizontalen Strömung vom Sonnenpol zum Sonnenäquator und umgekehrt (Maximum an den Polen) oder endlich vielleicht von einer horizontalen Strömung entlang dem Äquator (Maximum an den Äquatorrändern) herrühren. Hieraus folgert *Bottlinger*[109]), daß alle diese systematischen Strömungen nur ausgeschaltet werden können, indem an den Äquatorenden beobachtet und das Mittel aus beiden Enden genommen wird. Bemerkt werde, daß *Schwarzschild*[110]), *St. John*[111]) und *Evershed*[117]) am äußeren Rand eine Rotverschiebung beobachteten, was durch die erwähnten Strömungen erklärt werden kann („Randeffekt" von *Schwarzschild;* auch „Halm"effekt).

3. *Störung der Linien durch Überlagerung fremder Linien.* Schon *Schwarzschild*[112]) erwähnt, daß viele Linien der erwähnten Stickstoffbande mit Nachbarlinien zusammen eine Art Band bilden, indem der

106a) Vgl. insbes. *W. G. Duffield,* London Astr. Soc. M. N. 80 (1920), p. 262.

106b) *Ch. E. St. John* u. *H. D. Babcock,* Astrophys. J. 46 (1917), p. 138.

107) *L. E. Jewell,* Astroph. J. 3 (1896), p. 89.

108) *J. Evershed,* Kodaikanal Observ. Bull. 36 (1914). — Dies veranlaßte *E. Freundlich,* die beobachtete Rotverschiebung allein durch den Einsteineffekt (73) zu erklären (Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 369). Siehe jedoch die im nachfolgenden erwähnte Untersuchung *Schwarzschilds.*

109) *K. F. Bottlinger,* Jahrb. f. Rad. u. Elekt. 17 (1920), § 3, p. 156 f.

110) *K. Schwarzschild,* Berl. Ber. 1914, p. 1201.

111) *Ch. E. St. John;* Astroph. J. 46 (1917), 249

112) l. c. p. 1206.

Zwischenraum zwischen den Linien (in Emission) ebenfalls mit Licht erfüllt ist. Andere Linien haben mehr zufällige Begleiter auf der einen oder andern Seite. Es zeigte sich, daß jede Unsymmetrie dieser Art den Vergleich (des Emissionspektrums) mit der Sonne illusorisch macht. Aus diesem Grunde bevorzugen *Schwarzschild* und *St. John* die schwächeren (feineren) Linien vor den stärkeren (breiteren). Zwecks Feststellung der Symmetrie oder Unsymmetrie im Bau der Linien des Vergleichs (Emissions-) spektrums haben *L. Grebe* und *A. Bachem*[113]) dieselben mikrophotometriert, nachdem sie in einer früheren Arbeit[114]) die verschiedene scheinbar schwankende Größe der Verschiebungen bei verschiedenen Linien der erwähnten Stickstoffbande, die auch bei *Schwarzschild* und *St. John* auffällt, festgestellt hatten. Sie führen als eine Ursache die Ungleichwertigkeit der verschiedenen Linien infolge der durch die Photometrierung aufgedeckten mehr oder minder großen *Unsymmetrie* innerhalb der Breite der Linie an. Bemerkt werde, daß diese Unsymmetrien sich hauptsächlich nur bei dem irdischen Vergleichsspektrum in Emission, hingegen fast gar nicht bei dem Sonnenspektrum in Absorption bemerkbar machen, weil die Absorptionslinie eine vollständige Auslöschung des kontinuierlichen Spektrums entsprechend der Gesamtbreite der Emissionslinie ohne Rücksicht auf deren inneren Bau ist. Bei weitem die wichtigere Ursache ist aber die Störung (*Anlagerung*) durch Nachbarlinien, wie die späteren Untersuchungen von *Grebe* und *Bachem*[115]) ergeben; solche Störungen sind wieder in dem Sonnenspektrum noch häufiger als im irdischen Vergleichsspektrum.

4. *Anomale Dispersion.* Bekanntlich hat *W. H. Julius*[116]) die bislang noch bestrittene Hypothese aufgestellt, daß anomale Dispersion eine Hauptrolle bei der Intensitätsverteilung in den *Fraunhofer*schen Linien spielt. Diese sind nämlich nach *Julius* dunkle Banden, die dadurch verbreitert worden sind, daß das Licht der betreffenden Wellenlängen durch anomale Dispersion der von dem Licht durchsetzten Gasmassen weggebrochen wird. Dadurch kommt eine Assymmetrie der betreffenden Absorptionslinie zustande, und zwar ergibt sich im allgemeinen, weil der „mittlere Brechungsindex" der wegbrechenden

113) *L. Grebe* u. *A. Bachem,* Ztschr. f. Phys. 1 (1920), p. 51; 2 (1920), p. 415.

114) *L. Grebe* u. *A. Bachem,* Verh. d. deutschen phys. Ges. 21 (1919), p. 454.

115) *L. Grebe,* Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 665.

116) *W. H. Julius,* Phys. Ztschr. 2 (1901), p. 348; 3 (1902), p. 154; Le Radium 7 (1910), p. 281. Vgl. *E. Pringsheim,* Physik der Sonne, Leipzig 1910, p. 278 ff.; *W. H. Julius* u. *P. H. van Cittert,* Amst. Akad. Versl. 29 (1920); Arch. néerl. 5 (1921), p. 296; *W. H. Julius,* Arch. néerl. 6 (1922), p. 92.

Sonnenschicht > 1 ist, eine Rotverschiebung, welche um so ausgeprägter ist, je länger der in diesen Schichten zurückgelegte Strahlenweg ist. Dies erklärt nach *Julius* den „Randeffekt". Der Gravitationseffekt müßte nach *Julius* noch zu dieser Rotverschiebung addiert werden, wenn er existiert und wenn nicht zufällige Ursachen im Sinne einer Violettverschiebung kompensierend wirken.

Die Resultate der einzelnen Beobachter sind:

Schwarzschild[110]): Bande $\lambda = 3844 - 3883$ Å in der Mitte der Sonnenscheibe.

21 Linien der Intensität *(Rowland)* 0 und 1 im Mittel:

Rotverschiebung: $2{,}2 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Å $= 0{,}17 \pm 0{,}05$ km/sec;

13 Linien der Intensität 2—4 im Mittel:

Rotverschiebung: $4{,}5 \cdot 10^{-3} \pm 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Å $= 0{,}36 \pm 0{,}11$ km/sec.

Die *Einstein*sche Theorie würde $8{,}1 \cdot 10^{-3}$ Å $= 0{,}63$ km/sec erfordern.

Randeffekt:

Abstand von der Sonnenmitte in Sonnenradien	0	0,72	0,86	0,93	0,97
Rotverschiebung der schwächeren Linien in km/sec	0,17	0,09	0,08	0,30	0,41
Rotverschiebung der stärkeren Linien in km/sec	0,33	0,19	0,11	0,24	0,17
Rotverschiebung aller Linien	0,22	0,12	0,08	0,27	0,31

St. John[111]): Gleiche Bande, Mitte der Sonnenscheibe:

25 Linien der Intensität 0 und 1 im Mittel:

Rotverschiebung: $-1 \cdot 10^{-3}$ Å $(+ 0{,}6 \cdot 10^{-3})$;

18 Linien der Intensität 2—4 im Mittel:

Rotverschiebung: $+ 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Å $(2{,}4 \cdot 10^{-3})$.

Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf direkte Vergleichung der *N*-Linien im Sonnenspektrum und im Lichtbogen, während den andern Zahlen auch indirekte Vergleichungen mit Zuhilfenahme von Eisenlinien zugrundeliegen.

Sonnenrand: 17 Linien (0—1) im Mittel: Rotverschiebung: 0 Å;

18 Linien (2—4) im Mittel: Rotversch. $3{,}6 \cdot 10^{-3}$ Å.

St. John erklärt die geringe vorhandene Rotverschiebung durch vertikale Strömungen aufwärts bzw. abwärts, entsprechend der bzw. verschiedenen Ursprungslage der starken bzw. schwachen Linien.[117])

Grebe und *Bachem*[114]):

Gleiche Bande, Sonnenmitte, 36 Linien 0—4 im Mittel:

Rotverschiebung: 0,30 km/sec $\left(\begin{array}{ll}\text{demgegenüber } \textit{Schwarzschild:} & 0{,}25 \\ \quad\text{„} \qquad \textit{St. John:} & 0{,}05\end{array}\right)$.

117) Vgl. auch *J. Evershed* u. *T. Royds*, Kodaikanal Observ. Bull. 39 (1916), mit ähnlichen Resultaten, *J. Evershed*, Observatory 41 (1918), p. 531.

Vergleichung von Sonnenmitte und Sonnenrand (0,95 Sonnenradius Exzentrizität) ergibt nur kleine Differenzen, die auf Rechnung der Unschärfe der Randlinien gesetzt werden. Die Druckunabhängigkeit der Bande wurde im Laboratorium neuerlich geprüft und bestätigt.

Grebe und *Bachem*[113]): Nach Photometrierung werden 27 Linien wegen Unsymmetrien im Bau ausgeschieden; die verbleibenden 9 sind einwandfrei gebaut und liefern im Mittel Rotverschiebung: 0,56 km/sec. (Die entsprechenden bei *Schwarzschild* 0,63, *St. John* 0,32, *Evershed* und *Royds* 0,67.) Hieraus wird auf das Vorhandensein des Einsteineffekts von 0,63 geschlossen. Daß die Störung durch Anlagerung zu den früher erwähnten, durchweg zu kleinen, niemals zu großen Rotverschiebungen führt, wird durch die mangelhafte Auswahl bei der Zuordnung von Sonnen- und terrestrischen Linien erklärt, bei welcher der Einsteineffekt nie in Rechnung gezogen wurde, so daß nur die Linien als brauchbar beibehalten wurden, bei denen Sonnenlinien und terrestrische Linien einander durch die Störung genähert, nicht aber die, wo sie durch diese voneinander entfernt sind. — *Grebe* hat dann[118]) unter der Annahme, daß die Überlagerungen nach den Zufallsgesetzen verteilt sind, also eine hierdurch vorgetäuschte Violettverschiebung ebenso wahrscheinlich sei wie eine Rotverschiebung unter Verzicht auf jede Auswahl die Messungen an der Bande 3883 Å von *Rowland* im Sonnenspektrum mit denen von *Uhler* und *Patterson* im irdischen Spektrum verglichen, wobei sich im Mittel die Störung durch Überlagerung herausheben muß. Er erhält als Mittel über 100 Linien von 3858 bis 3870 Å eine Rotverschiebung von 0,6 km/sec, allerdings unter Zuhilfenahme des von *St. John* gemessenen Randeffekts.[119])

Zu erwähnen ist noch eine Messung von *Perot*[120]) an der *CN*-Bande $\lambda = 4197$ Å. In einer Vorarbeit[121]) war die Beeinflußbarkeit dieser Bande und der Bande 3883 durch Druck festgestellt worden (relative Vergrößerung der Wellenlänge um $1{,}6 \cdot 10^{-6}$, also Rotverschiebung von 0,48 km/sec in Luft von 2 cm Hg gegenüber Luft von Atmosphärendruck). Unter Verwendung der *Delandres*schen Theorie der Spektroheliogramme findet *Perot*, daß die Bande aus Sonnenschichten niedrigen Druckes stammt, weshalb er die Wellenlänge des irdischen Ver-

118) *L. Grebe*, Ztschr. f. Phys. 4 (1921), p. 105.

119) Zu diesen Fragen vgl. noch *E. St. John*, Observatory 43 (1920), p. 551; *J. Evershed*, ebenda; *L. C. Glaser*, Phys. Ztschr. 23 (1922), p. 100, und Jahrb. f. Rad. u. Elektr. 1922 (im Erscheinen).

120) *A. Perot*, Paris. C. R. 171 (1920) p. 229.

121) *A. Perot*, ebenda 170 (1920), p. 988. Vgl. auch *A. Perot*, ebenda 172 (1921), p. 578 (Magnesiumlinien); *H. Buisson* et *Ch. Fabry*, 172 (1921), p. 1020.

gleichsspektrums auf niederen Druck durch Vergrößerung um $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ bringt. Die Vergleichung Sonne—Erde ergibt eine Vergrößerung der Wellenlänge der Bande 4197 um $2{,}2 \cdot 10^{-6}$, welche um einen Dopplereffekt einer vertikalen Abwärtsströmung von $0{,}6 \cdot 10^{-6}$ (aus den Heliogrammen und einem Randeffekt ermittelt) zu vermindern ist, so daß $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Vergrößerung oder 0,48 km/sec Rotverschiebung resultieren. *Perot* findet als Randeffekt gegenüber dem Zentrum eine Violettverschiebung von $0{,}28 \cdot 10^{-6}$ Wellenlänge in 0,72 Sonnenradien Exzentrizität. Auf Überlagerung der Linien wurde nicht besonders geachtet.

20. Die Rotverschiebung bei den Fixsternen. Wenn man die Formel (73a) auf andere leuchtende Sterne als die Sonne anwendet, so findet man:

$$\frac{\Delta v_*}{v_*} = -\frac{k^2 M_*}{c^2 R_*} = -2{,}12 \cdot 10^{-6} \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{2/3} \left(\frac{\varrho_*}{\varrho_\odot}\right)^{1/3}, \tag{73b}$$

wo ϱ_* bzw. $\varrho_\odot$ die Dichten von Stern bzw. Sonne bedeuten.

Nun zeigen viele helle Fixsterne einen Dopplereffekt von $+4$ bis $+6$ km/sec, namentlich die Sterne der weißesten Spektralklasse B (Heliumsterne), als Mittelwert aus allen Radialgeschwindigkeiten der einzelnen Individuen der betreffenden Spektralklasse. Es scheint beispielsweise, als ob die Gesamtheit der Sterne der Klasse B in bezug auf das Sonnensystem eine Expansionsbewegung mit einer mittleren Geschwindigkeit von $k = +5$ km/sec ausführen würde.[122]) *Campbell* vermutet, daß die Wellenlängen der einzelnen Linien in den B-Sternen z. B. infolge Druckes größer sind, als von den Beobachtern angenommen wird. *Freundlich* hat diesen „k-Effekt" als *Einstein*sche Gravitationsverschiebung zu deuten versucht.[123]) Er nimmt für die mittlere Masse eines B-Sternes $M_* = 14\, M_\odot$ (aus Diskussion spektroskopischer Doppelsterne) und für die Dichte $\varrho_* = 0{,}1\, \varrho_\odot$ (aus Diskussion der Helligkeitsschwankungen infolge Bedeckungen einer Komponente eines Doppelsternes durch die andere). Dies ergibt jedoch bloß 17 km/sec, also bloß $^1/_3$ des beobachteten Wertes. Um den richtigen Effekt zu ergeben, müßte man also ϱ_* nahezu 30-mal größer annehmen, was mit der Diskussion der photometrischen Beobachtungen unvereinbar wäre. Oder man müßte, wenn man die

---

122) *W. W. Campbell*, Stellar Motions, Chapter VI, p. 201—205 (insbes. Table XIII). Dabei ist natürlich die Sonnenbewegung (Apex $\alpha = 272^\circ$, $\delta = +27^\circ 30$, $V = 17{,}77$ km/sec) bereits mit der Komponente, die in den Visionsradius fällt, abgezogen.

123) *E. Freundlich*, Phys. Ztschr. 16 (1915), p. 115 (durch einen Fehler entstellt); Astr. Nachr. 202 (1915), p. 17. — *H. Seeliger*, Astr. Nachr. 202 (1916), p. 83. — *E. Freundlich*, ebenda, p. 147. — *W. de Sitter* I, § 13.

Dichte unverändert lassen will, die Masse etwa fünfmal so groß nehmen, was mit den Erfahrungen an den spektroskopischen Doppelsternen unvereinbar ist. *Freundlich* entscheidet sich gleichwohl in einer späteren Arbeit[124]) für die letztere Eventualität und bringt als Stütze für die Möglichkeit größerer Massen vor, daß sich mit $M_* = \text{ca. } 70\ M_\odot$ und $\varrho_* = 0{,}1\ \varrho_\odot$ sowie einer Temperatur von etwa 13500^0 aus dem *Stefan-Boltzmann*schen Gesetz die absolute Helligkeit und damit und aus der scheinbaren Helligkeit z. B. der in der Oriongruppe stehenden B-Sterne angenähert eine richtige Parallaxe (0″004) gegen anderweitig bestimmte (0″005—0″008) ermitteln läßt (Größenklasse der Sonne — 0,1 in 1″ Parallaxe Entfernung). (Allerdings geht nur die dritte Wurzel des Massenverhältnisses Stern—Sonne in das Endresultat ein. Anm. d. Refer.) Gegenüber dieser Vergrößerung der Massen bemerkt *Bottlinger*[109]), daß man bei keinem Sterne (mit einziger Ausnahme des ν Geminorum, der auf 70 Sonnenmassen führt) auf mehr als 30 Sonnenmassen schließen darf.[125])

Freundlich stützt[124]) die Anschauung, daß der „*k*-Effekt" eine Gravitationswirkung ist, überdies dadurch, daß die B-Sterne im Orionnebel eine im Mittel um 6 km/sec größere positive Radialbewegung aufzuweisen scheinen als der Nebel selbst, mit dem sie in organischem Zusammenhang stehen. Dieser Zusammenhang wird durch die *Eddington*sche Theorie des Strahlungsgleichgewichts der Sterne begründet, wonach Sterne großer Massen und hoher effektiver Temperatur (B- und O-Sterne) häufig von feinverteilter Materie umgeben sein müssen, die sich von der Hauptmasse infolge des hohen Strahlungsdrucks ablöst. Vermöge dieses Zusammenhangs bilden die Orionsterne und der Orionnebel ein System mit gemeinsamer mittlerer Bewegung. Der Überschuß der mittleren Radialbewegung der ersteren über die des letzteren kommt daher als Einsteineffekt auf Rechnung der größeren Masse der Sterne im Vergleich zu der Nebelmasse. Demgegenüber weist *Bottlinger*[109]) auf die Möglichkeit hin, daß es sich doch um einen richtigen Dopplereffekt handeln kann, indem die Nebelmaterie durch den Strahlungsdruck der Sterne ausgestoßen wurde und sich daher in einer relativen Annäherung an uns im Visionsradius befindet. *Kohl*[126]) vermutet einen Dopplereffekt infolge Rotation des Nebels, da dessen Radialgeschwindigkeit nur für die hellste Stelle in guter Übereinstimmung bestimmt ist, während benachbarte Stellen um 15 km/sec schwankende Werte ergeben.

124) *E. Freundlich,* Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 561.
125) Vgl. *H. Ludendorff,* Astr. Nachr. 211 (1920), p. 105.
126) *O. Kohl,* Phys. Ztschr. 22 (1921), p. 665.

Freundlich führt ferner die sogenannten ruhenden Kalziumlinien in den Spektren mancher B-Sterne, die in bezug auf die übrigen Linien periodische Schwankungen um eine Mittellage aufweisen, als Beleg für einen Einsteineffekt an. Er sieht diese Kalziumlinien als die Anzeichen einer diese Sterne umgebenden weiten Atmosphäre an, was ebenfalls durch die *Eddington*sche Theorie begründet wird. Es ergibt sich wieder ein Überschuß der Rotverschiebung der betreffenden Sterne von im Mittel 6,3 km/sec gegen die Kalziumlinien.

Endlich ergibt sich aus neueren Rechnungen *Gyllenbergs*[127]), daß nicht nur die B-Sterne, sondern auch die K- und M-Sterne einen k-Effekt von $+ 3{,}6$ bzw. $+ 5{,}3$ km/sec zeigen. Da es sich hier um ganz andere zur Messung benutzte Linien handelt als bei den B-Sternen, scheint die *Campbell*sche Erklärung des k-Effekts durch Druck widerlegt, weil doch hier ganz andere Verhältnisse als dort vorliegen. Gegen die Deutung als Relativitätseffekt wendet *Bottlinger*[109]) ein, daß die K- und M-Sterne ganz bestimmt noch viel kleinere Dichte als die B-Sterne haben, weshalb man bis zu 1000 Sonnenmassen für sie folgern müßte, um den Effekt als Einsteineffekt deuten zu können. Er verweist auch auf die Existenz des k-Effekts bei Spiralnebeln[128]) (700 km/sec), wo man zu ganz unmöglichen Werten für Dichte und Masse geführt würde, wenn man ihn als Gravitationswirkung deuten wollte.

Im Gegensatz zu den Bemühungen *Freundlichs*, auf statistischem Wege die unbekannten Anteile von Dopplereffekt und Einsteineffekt an den beobachteten Verschiebungen zu trennen, befaßt sich *Kohl*[126]) mit einem Sternstrom, nämlich dem Taurusstrom (Hyadengruppe), bei welcher die Gleichheit und der Parallelismus der Geschwindigkeiten aller Mitglieder aus visuellen Methoden (Existenz des Konvergenzpunktes der sämtlichen Eigenbewegungen an der Himmelssphäre) feststeht, so daß relative Rotverschiebungen hier auf Rechnung der größeren Masse der einzelnen Individuen als Einsteineffekt gesetzt und nicht als Dopplereffekt gedeutet werden können. Er trennt die Sterne nach der absoluten Helligkeit in Riesen (große Masse, geringe Dichte) und Zwerge (kleine Masse, größere Dichte), wobei sich ein größerer Gravitationseffekt bei den ersteren als bei den letzteren einstellen muß, da die Masse quadratisch, die Dichte nur mit der ersten Potenz in die Formel (73 b) eingeht. Die Stromgeschwindigkeit der Riesen ergibt sich zu $+ 43{,}8$ km/sec, die der Zwerge zu $41{,}3$ km/sec. Die Differenz von $2{,}5 \pm 0{,}9$ km/sec wird daher als Einsteineffekt gedeutet.

127) *W. Gyllenberg,* Medd. Lund II, Nr. 13 (1915).

128) *K. Lundmark,* Svensk. Akad. Handl. 60 (1920), Nr. 8.

Es werde noch bemerkt, daß der schon erwähnte Umstand, daß die Spiralnebel eine mittlere Rotverschiebung von 700 km/sec zeigen[129]), eine Rolle in den kosmologischen Hypothesen von *de Sitter*[130]) und *Weyl*[131]) spielt.

21. Die Ablenkung der Lichtstrahlen im Schwerefeld der Sonne. Würde die *Newton*sche Mechanik auch für Lichtgeschwindigkeit Geltung haben, so müßte sich aus der *Newton*schen Gravitationstheorie die Bahn eines Lichtstrahls im Schwerefeld einer punktförmigen Masse, wenn er nicht nur träge, sondern auch gleiche schwere Masse hätte, wie folgt berechnen: Man hätte das Energieintegral:

$$E = T + U = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k^2 M}{r} = \text{const} = \frac{1}{2}c^2$$

und den Flächensatz
$$r^2\dot{\varphi} = \text{const},$$

wobei Polarkoordinaten $r\vartheta\varphi$ und die Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ als Bahnebene des Lichtstrahls angenommen sind. Hieraus rechnet sich als Bahnkurve eine Hyperbel, da die Gesamtenergie $\frac{1}{2}c^2$ positiv ist. (c ist die Geschwindigkeit im Unendlichen, also die gewöhnliche Lichtgeschwindigkeit.)

Nennt man δ den Außenwinkel der beiden Asymptoten, so gilt

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{a}{b} = \frac{k^2 M}{2E}\cdot\frac{1}{b},$$

wo a die reelle Halbachse der Hyperbel, b die imaginäre (= kürzester Abstand Asymptote — Brennpunkt) sind. Man hat hieraus

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{k^2 M}{c^2}\cdot\frac{1}{b}$$

oder in erster Näherung, da δ bei nicht zu kleinem b sicher klein gegenüber $\frac{k^2 M}{c^2}$ ist, für die Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerefeld der Sonne aus seiner ursprünglichen Richtung:

$$\delta \sim \frac{2k^2 M}{c^2}\,\frac{1}{b} = 4{,}24\cdot 10^{-6} = 0''875, \tag{74}$$

wenn $b = R$ (Sonnenradius), M = Sonnenmasse genommen werden.[132])

129) *H.* u. *M. Shapley,* Astroph. J. 50 (1919), Table V auf p. 125.

130) *W. de Sitter,* III, p. 26 Deutung zugunsten des kosmologischen Systems B von *de Sitter,* in welchem die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen Null wird. — Vgl. hierzu auch *de Sitter,* II, § 28, wo aus dem Fehlen einer Violettverschiebung in den Sternspektren eine obere Grenze für die Gesamtmasse des Fixsternsystems hergeleitet wird.

131) *H. Weyl,* Phys. Ztschr. 22 (1921), p. 473, § 7 zugunsten der Inselwelthypothese.

132) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 898.

Tatsächlich gilt aber die oben zugrundegelegte *Newton*sche Mechanik nur für Geschwindigkeiten, die sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Da wir es aber jetzt geradezu mit Lichtgeschwindigkeit zu tun haben, ist die obige Rechnung falsch, wie schon aus der speziellen Relativitätstheorie folgen würde. Um also die richtigen Werte zu erhalten, muß man die Bewegungsgleichungen (34) für das *Einstein-Schwarzschild*sche ds^2 (60) oder das *de Sitter*sche ds^2 (62) exakt integrieren (mit der Nebenbedingung $ds = 0$).

Wenn man aber nicht die Bahn des Lichtstrahls, sondern nur seine Ablenkung δ kennen lernen will, welche gemäß (74) eine Größe 2. Ordnung ist, so genügt folgende Näherungsbetrachtung[133]): Die Bewegung eines Lichtstrahls im statischen Schwerefeld kann auch anstatt durch das Variationsprinzip (33) mit der Nebenbedingung $ds = 0$ durch folgendes Variationsprinzip (*Fermat*sches Prinzip der kürzesten Lichtzeit)

$$\delta \int_1^2 \frac{d\sigma}{f} = 0 \tag{74a}$$

gegeben werden. Hierbei ist für ein statisches Schwerefeld $\left(g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0,\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = 0\right)$:

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = -\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Die dreidimensionale Form $d\sigma^2$ bestimmt das Linienelement in den Räumen $t = \text{const.}$ Genau auf die analoge Form wie (74a) läßt sich aber bekanntlich nach *Jacobi* das Prinzip der kleinsten Wirkung, wenn der Satz der lebendigen Kräfte $T + U = \text{const} = E$ gilt, bringen. Man hat

$$\delta \int_1^2 d\mathfrak{s} \sqrt{E - U} = 0, \tag{74b}$$

wo $d\mathfrak{s}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ bedeutet. Für die vorhin durchgeführte Berechnung der Bahnkurve des Lichtstrahls im Schwerefeld nach *Newton* hatten wir $E = \frac{1}{2} c^2$, $U = -\frac{k^2 M}{r}$. Anderseits gilt nach (62) (*de Sitters* Koordinaten):

$$ds^2 = f^2 dt^2 - \lambda\, d\mathfrak{s}^2,$$

wo $f^2 = c^2 \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{4r}}{1 + \frac{\alpha}{4r}}\right)^2$, $\lambda = \left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right)^4$, $\alpha = \frac{2k^2 M}{c^2}$. Es ist also

133) *T. Levi-Civita*, Rom. Linc. Rend. 26 (1917, 1. sem.) p. 458, ferner Rivista d'Ottica e Mecanica 1 (1920), insbes. p. 199.

$d\sigma^2 = \lambda d\mathfrak{s}^2$ und
$$\delta \int_1^2 \frac{\left(1+\frac{\alpha}{4r}\right)^3}{1-\frac{\alpha}{4r}} d\mathfrak{s} = 0$$
in den Koordinaten *de Sitters* das *Fermat*sche Variationsprinzip für den Lichtstrahl. Bis auf Größen höherer Ordnung als der 2^{ten} ist dies
$$\delta \int_1^2 d\mathfrak{s} \left(1 + \frac{2k^2M}{c^2r} + \cdots\right) = 0.$$
Anderseits gibt das *Jacobi*sche Wirkungsprinzip (74b) nach Division durch die Konstante $\frac{c}{\sqrt{2}}$
$$\delta \int_1^2 d\mathfrak{s} \sqrt{1 + \frac{2k^2M}{c^2r}} \sim \delta \int_1^2 d\mathfrak{s} \left(1 + \frac{k^2M}{c^2r} + \cdots\right).$$

Beschränkt man sich also auf Größen 2. Ordnung, so sieht man, daß man die *Newton*sche Rechnung verbessern oder das *Jacobi*sche klassische Prinzip beibehalten kann, wenn man nur $2U$ statt U darin einsetzt. D. h. bis auf Größen höherer als 2. Ordnung ist die Ablenkung δ der Lichtstrahlen im Schwerefeld der Sonne gemäß der Mechanik der allg. Rel.th. richtig wiedergegeben durch

(75) $$\delta \sim \frac{4k^2M}{c^2}\frac{1}{R} = 1''75.$$ [134])

22. Die Beobachtungen bei der Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919. Die Ablenkung (75) im Schwerefeld der Sonne kann natürlich nur bei totalen Bedeckungen der Sonnenscheibe an Sternen beobachtet werden, die der Sonnenscheibe sehr nahe stehen, da der Effekt verkehrt proportional mit der Entfernung abnimmt. Allerdings haben *A.* und *F. Lindemann*[135]) versucht, Sterne in nächster Nähe der Sonne bei Tageslicht mit Hilfe des Umstandes zu beobachten, daß die Helligkeitsverteilung im Spektrum eines Sterns gegenüber dem wesentlich blauen Tageshimmel einen Unterschied durch das bei dem Stern über-

134) *W. de Sitter,* I, § 14 berechnet den Effekt der Rotation der Sonne auf die Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerefeld derselben. Der Lichtstrahl erfährt in erster Näherung nach seiner Formel (45) l. c. in unseren Bezeichnungen, wenn er in der Äquatorebene der Sonne aus dem Unendlichen im bzw. entgegengesetzt zum Sinn der Rotation ankommt, an der Sonnenoberfläche eine Gesamtablenkung im Betrag von
$$\delta_1 \sim 2 \cdot \frac{4}{5}\frac{k^2M}{c^2}\frac{\Omega}{c}$$
von der Sonne weg bzw. zur Sonne hin. Somit ist $\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{2}{5} R \frac{\Omega}{c} \sim \frac{1}{400\,000}$.

135) *A.* u. *F. Lindemann*, London Astr. Soc. M. N. 77 (1916), p. 140.

dies vorhandene Rot aufweist (Verwendung rotempfindlicher Platten!); definitive Resultate sind bisher nicht erzielt. Nach verschiedenen nicht geglückten Beobachtungen (1914 *Freundlich* in Südrußland; 1918 Lick-Observatorium) gelang es zwei englischen Expeditionen (*Crommelin* und *Davidson* in Sobral, Nordbrasilien, einerseits und *Eddington* und *Cottingham* auf der Insel Principe an der afrikanischen Küste anderseits) den Effekt bei der totalen Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 festzustellen.[136]) Diese war besonders günstig wegen der großen Zahl heller sonnennaher Sterne (Sternbild des Stiers).

Das Endresultat ist das folgende:

Nummer	Name des Sterns	Größe	Radiale Ablenkung (berechnet)	Radiale Ablenkung (beobachtet)
11	66 Tauri	5,5	0″32	0″20
10	72 Tauri	5,5	33	32
6	υ Tauri	4,5	40	56
5	Piazzi, IV 61	6,0	53	54
4	$\varkappa^1$ Tauri	4,5	75	84
2	Piazzi, IV 82	5,8	85	97
3	$\varkappa^2$ Tauri	5,5	88	1″02

(Mittel aus 7 Photographien mit vierzölligem (10 cm Öffnung) Objektiv von ca. 6 m Brennweite in Sobral.) Auf die Sonnenoberfläche reduziert gibt dies 1″98 $\pm$ 0″12 anstatt der 1″75 nach Formel (75). Die Expedition in Sobral hatte überdies ein auf acht Zoll (20 cm) abgeblendetes Objektiv von ca. 3,5 m Brennweite des Astrographen von Greenwich, welches jedoch während der Sonnenfinsternis vermutlich durch Temperatureinflüsse aus der Fokussierung kam und unscharfe Photographien lieferte. Die Expedition in Principe hatte das gleichfalls auf acht Zoll reduzierte Objektiv des Astrographen von Oxford, erzielte jedoch wegen Bewölkung nur zwei brauchbare Platten. Ihr Resultat ist 1″61 $\pm$ 0″30 auf die Sonnenoberfläche reduziert.

Beide Expeditionen hatten leider nicht parallaktische Montierung der Fernrohre, sondern fest montierte Fernrohre mit Spiegelzoelostaten.

Im besonderen möge zu der Reduktion der Photogramme bemerkt werden:

Die Expedition in Sobral konnte ungefähr sechs Wochen später die gleiche Himmelsstelle unter ähnlichen Bedingungen hinsichtlich der Höhe am Nachthimmel aufnehmen. Dadurch war die Möglichkeit zur Vergleichung der während der Finsternis abgelenkten Sternbilder und der unabgelenkten gegeben, wodurch die Ablenkung in Rektaszen-

136) *F. W. Dyson, A. S. Eddington* u. *C. Davidson,* London Phil. Trans. A 220 (1920), p. 291.

sion und Deklination vermessen werden konnte. Diese Vermessung vermittelte eine Aufnahme des Nachthimmels, die durch die Rückseite einer photographischen (Glas)platte hindurch gemacht worden war, so daß Vergleichung von Schicht auf Schicht bei den Finsternis- oder Vergleichsplatten einerseits und dieser „Bezugsplatte“ anderseits möglich war. Die resultierenden Ablenkungen Δx, Δy in rechtwinkligen Koordinaten können herrühren: 1. Von einer *Verschiebung* der verglichenen Platte relativ zur Bezugsplatte. Die Koordinaten x, y aller Sterne erfahren hierdurch die gleichen Änderungen $\Delta x = c$, $\Delta y = f$ 2. Von einer *Verdrehung* der verglichenen Platte relativ zur Bezugsplatte. Die hieraus resultierenden Ablenkungen Δx bzw. Δy sind y bzw. x proportional. 3. Der Maßstab, unter dem eine Bogensekunde am Himmel auf der Platte abgebildet wird (*Skalenwert*), ist für die verglichene Platte infolge anderer Fokussierung ein anderer als für die Bezugsplatte. Die hieraus resultierenden Ablenkungen wachsen mit dem Abstand vom Mittelpunkt; Δx bzw. Δy sind also x bzw. y proportional, wobei wegen möglicher Ungleichwertigkeit der beiden Richtungen verschiedene Proportionalitätsfaktoren a bzw. e eingesetzt werden. 4. Endlich vom *Einsteineffekt*, welcher proportional $E_x = \frac{x}{r^2}$ bzw. $E_y = \frac{y}{r^2}$ zu setzen ist, wobei der Proportionalitätsfaktor α sei. Man hat daher für jede solche Vergleichung anzusetzen:

$$\Delta x = ax + by + c + \alpha E_x,$$
$$\Delta y = dx + ey + f + \alpha E_y$$

und auszugleichen für die Finsternis- bzw. für die Vergleichsplatten. Es ergibt sich dabei auch ein von Null verschiedener Wert von α für die Vergleichsplatten, obwohl dort keine Lichtablenkung wirksam war. Und zwar ist α im Mittel

aus Rektaszension für

Finsternisplatten 0^r120, Vergleichsplatten 0^r015, Differenz 0^r105,

aus Deklination für

Finsternisplatten 0^r129, Vergleichsplatten 0^r031, Differenz 0^r098

in Revolutionen (r) der Mikrometerschraube ($1^r = 6''25$ am Himmel). Daß α sich nicht zu Null für die Vergleichsplatten ergibt, ist durch die unvermeidlichen Fehler bei der Zwischenschaltung der Bezugsplatte zu erklären. Bemerkt werde, daß die Ausgleichung erkennen läßt, daß den Beobachtungen in Deklination ein zweimal so großes Gewicht als denen in Rektaszension zukommt. Schließlich ergibt sich mit einem wahrscheinlichen Fehler von 6%:

$$\alpha = 0^r100 = 0''625.$$

Hierbei ist als Einheit der Entfernung r der Abstand von $50'$ von der Sonnenmitte (scheinbarer Sonnenhalbmesser zur Zeit der Finsternis $15'8$) gewählt. Das ergibt am Sonnenrand daher $1''98 \pm 0''12$.

Durch die Ausgleichung wird der *unbekannte* Skalenwert (a bzw. e für Rektasz. bzw. Dekl.) eliminiert. Es ist aber wünschenswert, den Maßstab genau zu kennen, um etwaige systematische Fehler in den Beobachtungen unter den geänderten Bedingungen und infolge des Transports der Objektive zu eliminieren. Zu diesem Zwecke hat die Expedition in Principe ein Kontrollgebiet am Himmel (bei Arcturus) aufgenommen und nach ihrer Rückkehr das gleiche Gebiet in Oxford photographiert. Bei dem verwendeten Astrographenobjektiv ergab die Vergleichung, daß das Kontrollgebiet (wenigstens in Deklination) keine nennenswerten systematischen Abweichungen in Principe gegenüber Oxford zeigt. Der Maßstab erwies sich etwas größer in Principe als in Oxford, entsprechend einer etwaigen Vergrößerung der Brennweite um ca. 1,2 mm (bei 3,43 m ursprüngl. Brennweite) infolge der erhöhten Temperatur. [Es war 1 mm auf der Platte ungefähr 1 Bogenminute am Himmel, der *Einstein*effekt daher von der Größenordnung 200^{stel} mm auf der Platte.] Die Konstanten a, e, ebenso b, d hängen auch von den Unterschieden in Brechung und Aberration ab, wobei die Unterschiede in geographischer Breite, Druck und Temperatur zwischen Oxford und Principe zu berücksichtigen sind. Bringt man diesbezügliche Korrekturen an, so sollten die resultierenden Werte a', e', b', d' bzw. den Gleichungen $a' = e'$ und $b' + d' = 0$ genügen. Nur die letztere Gleichung ist angenähert erfüllt, die erstere nicht, indem $e' > a'$ wird. Dies geht auf den Einfluß des Zoelostatenspiegels oder auf eine Erschütterung der Linsen des Objektives während des Transports zurück.

23. Mögliche andere Ursachen für die Lichtablenkung. Wenn man von Schichtverzerrungen in der photographischen Platte absieht[137]), die jedoch kaum imstande sein dürften, den beobachteten Gravitationseffekt vorzutäuschen, und wenn man ferner von Einflüssen der raschen Temperaturänderungen während der Finsternis auf Zoelostatenspiegel und Linsen (vgl. das Verhalten des Astrographen in Sobral) absieht, die möglicherweise eine Bildverzerrung zur Folge haben könnten[138]), bleiben folgende drei Ursachen, die außerhalb der Apparatur gelegen sind und den Effekt vortäuschen könnten:

137) *L. Silberstein,* Monthl. Not. 80 (1920), p. 631. Zwecks ihrer Eliminierung empfiehlt *Freundlich,* Naturwissensch. 8 (1920), p. 671, auf die Platten vor der Aufnahme ein feines Koordinatennetz aufzukopieren.

138) *K. F. Bottlinger,* l. c. 109), p. 149.

1. Eine *laterale Brechung* der von den Sternen kommenden Lichtstrahlen in der abgekühlten Erdatmosphäre beim Durchgang durch den Schattenkegel des Mondes[139]); der Temperaturfall im Schattenkegel müßte jedoch 20 Grad per Minute ausmachen, um angesichts der Schnelligkeit von 50 km per Minute, mit der der Schattenkegel des Mondes über die Erde hinwegstreicht, einen Effekt von der Größe des beobachteten auszumachen. Der wirklich vorhandene Temperaturfall ist höchstens groß genug, um $0''1$, d. i. 5%, des Effekts zu ergeben.

2. Eine *Lichtbrechung* in einer die Sonne umgebenden Atmosphäre.[140]) *Dyson*, *Eddington* und *Davidson*[136]) geben an, daß der Brechungsindex der Koronamaterie, wenn diese für den Effekt verantwortlich gemacht würde, oder einer sonstigen Atmosphäre $1 + 4{,}14 \cdot 10^{-6} r^{-1}$ (r Entfernung vom Mittelpunkt gemessen in Sonnenradien) sein müßte. D. h. in der Entfernung von $r = 2$ (einen Sonnenradius oberhalb der Oberfläche) wäre der Brechungsindex $1 + 2{,}1 \cdot 10^{-6}$; das würde entsprechen: Luft bei $1/_{140}$ Atmosphären, Wasserstoff bei $1/_{60}$ Atm. oder Helium bei $1/_{20}$ Atm. *Lindemann*[140]) gibt an, daß die Dichte dieser Materie 10^{-8} bis 10^{-9} in 500000 km oberhalb der Sonnenoberfläche (ca. $5/_7$ Sonnenradien) sein müßte.

[Die sieben vermessenen Sterne 3, 2, 4, 5, 6, 10, 11 liegen zwischen $30'$ (2 Sonnenradien) und $90'$ (6 Sonnenradien) Zentralabstand.]

Freundlich[140]) berechnet für ein Gas von $1/_{10000}$ Erdatmosphärendichte eine Schwächung des Lichtes um 0,2 Größenklassen auf $8 \cdot 10^4$ km Lichtweg. Bei einer Dichte von $1/_{100}$ Erdatmosphäre tritt dies daher schon auf $8 \cdot 10^2$ km ein. Durchläuft der Strahl also bloß auf einem Weg von einem Sonnenradius ein solches Gas, so wird er um 200 Größenklassen geschwächt, also völlig absorbiert.

Emden[140]) berechnet für eine konzentrisch geschichtete, in hydrostatischem Gleichgewicht befindliche Sonnenatmosphäre ebenfalls, daß der *Einstein*effekt auch nicht zu einem merklichen Bruchteil von der gewöhnlichen Brechung in derselben herrühren könnte.

Bottlinger[109]) erörtert, nachdem die uns bekannten Gase, wie gezeigt, nicht in Betracht kommen, den Einfluß des „Koroniums" und des Wasserstoffs, deren Linien sich oft bis zu $20'$ Abstand vom Sonnen-

---

139) *A. Anderson*, Nature 104 (1919), p. 354, 393, 436, 563; *A. S. Eddington*, *A. C. Crommelin*, ebenda p. 372; *W. H. Dines*, *L. F. Richardson*, ebenda p. 393; *A. Schuster*, ebenda p. 468, 714; *E. Freundlich*, Naturwissensch. 8 (1920), p. 672.

140) *F. Lindemann*, Observatory 41, p. 323; *H. F. Newall*, Monthl. Not. 80 (1919), p. 22; *E. Freundlich*, Sternwarte Berlin, Beob. Ergebnisse Nr. 15 (1915), p. 77; *R. Emden*, Münch. Ber. 1920, p. 387.

rand, also mitten in dem Beobachtungsgebiet der Sonnenfinsternis-expedition, zeigen; dies wird namentlich im Zusammenhang mit dem Folgenden wichtig.

3. Die *jährliche Refraktion* (*Courvoisier*effekt).[141]) Nach *L. Courvoisier* zeigen die Sternorte eine Verschiebung mit jährlicher Periodizität, also im Sinne einer zirkumsolaren Refraktion. *Courvoisier* gibt für diese Verschiebung die empirische Formel

$$0''55\left(1-\sqrt{\cos\frac{g}{2}}\right),$$

wo g der Abstand vom Gegenpunkt der Sonne ist. Er verwertet hierbei eigene und fremde Messungen der verschiedensten Sternwarten. In 50^0 Entfernung von der Sonne ($g = 130^0$) z. B. gibt dies noch $0''19$ (beobachtet von *Courvoisier* an β Ursae majoris ist $0''24 \pm 0''05$), während der Gravitationseffekt dortselbst schon ganz unmerklich sein muß. Am Sonnenrand liefert die empirische Formel ca. $0''6$; dies ist also wesentlich kleiner, als der Gravitationseffekt an dieser Stelle beträgt. Der *Courvoisier*effekt scheint also nach einem ganz anderen Gesetze mit der Entfernung von der Sonne abzunehmen, sofern er wirklich zirkumsolarer Natur ist.[142]) Der Effekt besitzt vermutlich ein Maximum in der Nähe der Sonne und nimmt in noch größerer Nähe zur Sonne wieder ab. Die empirische Formel *Courvoisier*s wird demnach am Sonnenrande keinesfalls mehr gelten können. *Courvoisier* hat die Ausgleichungsrechnungen der englischen Expedition unter Hinzufügung eines auf die jährliche Refraktion bezüglichen Gliedes wiederholt, um festzustellen, ob die Konstante α (Nr. 22) hierdurch verfälscht sein könnte. Denn es könnte ja sein, daß das erwähnte Maximum so nahe an die Sonnenoberfläche fällt, daß *Einstein*effekt und *Courvoisier*effekt sich hier verstärken. Das Ergebnis seiner Rechnung ist negativ. Beide Effekte können, wie die Ausgleichungsrechnung ergeben hat, nicht zugleich bestehen. Die jährliche Refraktion muß daher, wenn die bei der Sonnenfinsternis beobachtete Ablenkung auf den *Einstein*effekt zurückgeht, an der Sonne verschwindend klein sein. Es erwächst aber natürlich die Aufgabe, in Zukunft auch sonnenfernere Sterne zu vermessen; denn für diese muß wieder eine verschwindende Ablenkung beobachtet werden, wenn anders die bisher beobachteten Ablenkungen an sonnennahen Sternen ausschließlich auf den *Einstein*effekt und nicht

141) *L. Courvoisier,* Astr. Nachr. 209 (1919), p. 337; 211 (1920), p. 305; Naturwissensch. 8 (1920), p. 514; *E. Freundlich,* Naturwissensch., l. c. p. 672; *P. Guthnick,* Naturwissensch. 8 (1920), p. 814.

142) *P. Harzer,* Astr. Nachr. 4025, leitet die zirkumsolare Natur des Effekts aus der Annahme einer Ätherverdichtung an der Sonne theoretisch ab.

auf den *Courvoisier*effekt zurückgehen. Dies erfordert besonders korrigierte Objektive zwecks Vermeidung optischer Abbildungsfehler am Rande des Bildes.

Über die Deutung der jährlichen Refraktion sei nur soviel bemerkt, daß die Meinungen zwischen einem physiologischen Ursprung (Helligkeitsgefälle am Himmel in der Nähe der beim *Courvoisier*effekt beobachteten Objekte bedingt beim Beobachter einen systematischen Fehler in der Agnoszierung der richtigen Position) und einem physikalischen Ursprung (leichte Gase, wie Koronium und Nebulium) schwanken.[109]) Die letztere Deutung würde ernstliche Schwierigkeiten für die Realität des Einsteineffektes zur Folge haben.

4. *Photographische Effekte.* Es wäre denkbar, daß bei den Sonnenfinsternisaufnahmen ein photographischer Effekt als Fehlerquelle in Betracht käme, da der Himmelsgrund in Sonnennähe ein starkes Helligkeitsgefälle hat Darüber sind definitive Resultate noch nicht vorhanden.

Außer an der Sonne könnten noch Ablenkungen der zu uns gelangenden Lichtstrahlen am Rande des *Jupiter* — nach der Theorie im Betrage von 0″016 — beobachtbar sein. Man könnte hierzu den Vorübergang des Jupiter vor einem Fixstern wählen, was allerdings ein seltenes Ereignis ist. Überdies ist der angegebene Betrag, trotzdem er in die Größenordnung der Parallaxenmessungen fällt, an der Grenze der heute möglichen Genauigkeit.[143])

143) Zur Erklärung der beobachteten Ablenkung der Lichtstrahlen von der Sonne auf Grund einer Ätherverdichtung im Sinne der *Stokes-Planck*schen Hypothese des kompressiblen an der Materie haftenden Äthers vgl. *L. Silberstein,* Phil. Mag. 39 (1920), p. 161. Diese Theorie hätte nach *Silberstein* den Vorteil, den positiven Ausfall der Beobachtungen über die Lichtablenkung an der Sonne mit dem negativen Ausfall der bisherigen Beobachtungen über die Rotverschiebung auf der Sonne zu versöhnen, da sie auf den Gesetzen der klassischen Mechanik ruht. Man vgl. hierüber auch *Lorentz,* Abhandl. usw. Nr. XV, § 18, wo die Frage einer Lichtablenkung in der Nähe des Jupiter durch eine von der Rotation dieses Planeten herrührende Bewegung seiner mitgenommenen Ätherhülle erörtert wird.

(Abgeschlossen am 31. März 1922.)

VI 2, 23. STELLARASTRONOMIE.

Von

H. KOBOLD

IN KIEL.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

F. W. Bessel, Fundamenta Astronomiae pro anno 1755 deducta ex observationibus viri incomparabilis J. Bradley, Königsberg 1818.

W. Struve, Études d'astronomie stellaire, St. Petersburg 1847.

C. A. F. Peters, Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes, St. Petersburg 1848.

Ch. André, Traité d'astronomie stellaire I, Paris 1899.

H. Kobold, Der Bau des Fixsternsystems, Braunschweig 1906.

W. W. Campbell, Stellar motions with special reference to motions determined by means of the spectrograph, New Haven 1913.

A. S. Eddington, Stellar movements and the structure of the universe, London 1914.

W. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie, 4 Bände, Breslau 1897—1902. Artikel: Eigenbewegung des Sonnensystems von *H. Kobold;* Sternkataloge und -karten von *F. Ristenpart;* Universum von *F. Ristenpart.*

Für geschichtliche Fragen besonders:

R. Wolf, Handbuch der Astronomie, 2 Bände, 2. Aufl., Zürich 1890—92.

I. Die charakteristischen Eigenschaften der Sterne.

Bis in die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts beherrschte die Spekulation stellarastronomische Forschungen. Erst die durch *Bradleys* (1692—1762) Wirken eingeleitete Entwicklung der neueren praktischen Astronomie öffnete sichere Wege, die über den Bereich des Sonnensystems hinaus in das Universum führten. Zwei Quellen sind es, aus denen unsere Kenntnisse über den Bau und die Vorgänge in dem unsere Sonne umgebenden System der Sterne und über seine Entwicklung fließen. Sie sind gegeben 1. im Ort der Sterne und seinen Änderungen mit der Zeit und 2. in dem von den Sternen uns zugesendeten Lichte nach Quantität und Qualität. Die Daten und charakteristischen Merkmale, die auf dieser Grundlage die praktische Astronomie der stellarastronomischen Forschung darbietet, zerfallen in zwei Kategorien: Unmittelbare und mittelbare Beobachtungsergebnisse.

1. Die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse.

1. Die Zahl der Sterne und ihre Verteilung über den Himmel. Diese Daten bilden den Ausdruck des Gesamtbildes des Sternsystems, wie es uns erscheint, und ergeben die Grundlage für statistische Untersuchungen über seinen Bau.

2. Der scheinbare Ort. Er ist bestimmt durch die sphärischen Koordinaten der Rektaszension und Deklination oder der Länge und Breite, worüber das nähere in dem Kapitel über sphärische Astronomie Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*) gesagt ist.

3. Die Entfernung. Die Methoden der Entfernungsbestimmung der Sterne zerfallen, je nachdem welche der beiden Quellen für die Erforschung der Eigenschaften der Sterne benutzt wird, in zwei Gruppen. An den Ort des Sterns ist die ältere trigonometrische Methode geknüpft, an die physikalischen Eigenschaften des Lichtes, das der Stern uns zusendet, die neuere spektroskopische Methode. Die trigonometrische Methode ist schon in dem Artikel Reduktion der astronomischen Beobachtungen Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. **9c** auseinandergesetzt, sie liefert uns die jährliche Parallaxe der Fixsterne oder kurz einfach die Fixsternparallaxe als den Winkel, unter welchem vom Stern aus gesehen die mittlere Entfernung Erde-Sonne erscheint, und auf dem Wege über die Eigenbewegungen (EB.) der Sterne, die Säkularparallaxe als den Winkel, unter dem die jährliche Bewegung der Sonne in ihrer als geradlinig angenommenen Bahn im Raume erscheint.

Die spektroskopische Methode geht aus von gewissen Merkmalen der Größe der Leuchtkraft eines Sternes, die in der relativen Intensität einiger Linien, besonders der metallischen, oder auch bestimmter

Stellen des Spektrums zum Ausdruck kommen.[1]) Sie ermittelt daraus die absolute Größe, die der Stern in der Einheit der Entfernung haben würde, und berechnet durch Vergleich mit der scheinbaren Größe die Entfernung nach dem Gesetz der Abnahme der scheinbaren Helligkeit mit dem Quadrat der Entfernung. Die jährliche Parallaxe, die als Ausgangspunkt der Entfernungsbestimmung der Sterne dient, mißt diese Entfernung durch ihr Verhältnis zur Entfernung Erde-Sonne. Diese letztere Entfernung ist aber im Vergleich zu den Fixsternentfernungen zu klein, um als Maßeinheit für sie zu dienen, da sie zu unbequem großen Zahlen führte. Man hat deshalb als Einheit der Fixsternentfernungen ein Vielfaches der astronomischen Einheit eingeführt. *Charlier* nennt das 10^6-fache der astronomischen Einheit Siriometer. Die Siriusweite, mit der *Seeliger* rechnet, entspricht der zu einer jährlichen Parallaxe von $0{,}2''$ gehörenden Entfernung. Am gebräuchlichsten ist ein Grundmaß, das der zu einer Parallaxe von $1''$ gehörenden Entfernung entspricht. Der Verfasser nennt es Sternweite, *Turner* hat die Bezeichnung Parsec dafür vorgeschlagen. Es ist also eine Sternweite $= 1$ Parsec $= \frac{1}{5}$ Siriusweite $= 206\,265$ astronomische Einheiten $= 0{,}206$ Siriometer, und einem Siriometer entspricht die Parallaxe $0{,}206''$.

4. Die Bewegung. Die Bewegung der Sterne im Raume äußert sich in den Beobachtungen zerlegt in zwei Komponenten: einer Ortsänderung an der Sphäre und einer Änderung der Entfernung von uns. Jene, die Eigenbewegung, auch laterale Bewegung genannt, erfolgt senkrecht zum Visionsradius; diese, die Radialbewegung, in der Richtung des Visionsradius. Die Ableitung der Eigenbewegungen aus den Beobachtungen ist in dem Artikel Reduktion der astronomischen Beobachtungen [Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 7 b] auseinandergesetzt. Zur Kenntnis der Radialbewegung führen die Änderungen, die im Spektrum einer Lichtquelle als Folge ihrer Bewegung nach dem *Doppler*schen Prinzip[2]) entstehen, das freilich erst in der von *Fizeau*[3]) gemachten

---

1) Die Methode ist begründet von *A. Kohlschütter* [Carnegie Yearbook Nr. 12 (1913), p. 219], der mit Hilfe der auf dem Mt. Wilson Observatory aufgenommenen Spektren von Sternen, deren Entfernung auf trigonometrischem Wege bestimmt war und deren wahre Leuchtkraft damit aus der scheinbaren berechnet werden konnte, die Kriterien der Leuchtkraftstärke im Spektrum ermittelte. Die ersten Anwendungen sind beschrieben Astroph. Journ. 40 (1914), p. 385.

2) *Ch. Doppler,* Über das farbige Licht der Doppelsterne, Prag Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss. (5) 2 (1842), p. 465.

3) *H. Fizeau,* Ann. chim. et phys. (4) 19 (1870), p. 211. Abdruck eines am 12. Dez. 1848 in der Soc. Philomatique gehaltenen Vortrags. Über eine theoretische Begründung des Prinzips vgl. Encykl. V 19 (*W. Pauli jr.*), Nr. 6 und VI 2,

Anwendung auf einzelne Emissions- und Absorptionslinien zum Ziele führte. Die durch die Bewegung bewirkte Änderung der Wellenlänge λ einer bestimmten Linie ergibt sich durch die Formel

$$\Delta\lambda\left(1+\frac{v_\odot}{v}\right)=\lambda\cdot\frac{v_*-v_\odot}{v}.$$

Darin bedeutet v die Geschwindigkeit des Lichtes, v_* ist die in die Richtung der Verbindungslinie Sonne-Stern fallende Komponente der sekundlichen Bewegung des Sterns, $v_\odot$ diejenige des Beobachters, beide positiv gerechnet in der Richtung von der Sonne zum Stern. $v_\odot$ setzt sich zusammen aus den drei dem Beobachter innewohnenden Bewegungen: aus der Drehung der Erde, aus der Bahnbewegung der Erde und aus der Bewegung des Sonnensystems im Raume. Der Faktor $\left(1+\frac{v_\odot}{v}\right)$ darf stets $=1$ gesetzt werden.

5. Die scheinbare Helligkeit. Sie wird ausgedrückt in Größenklassen und gemessen in Einheiten und Bruchteilen der Größenklasse. Die dem freien Auge eben sichtbaren Sterne haben die Größe $6{,}0^m$ (m = magnitudo), und die scheinbare Helligkeit nimmt in den Größenklassen mit wachsender Ordnungszahl derart ab, daß ihr dekadischer Logarithmus von Klasse zu Klasse um 0,4 kleiner wird. Die Helligkeit h eines Sterns der scheinbaren Größe $0{,}0^m$ setzen wir $=1$, also ist $\log h_0 = 0$. Für Sterne heller als $0{,}0^m$ wird die Klassenzahl negativ. Allgemein gilt

$$\log h_m = -\,0{,}4\,m. \tag{1}$$

Wegen der Verschiedenheit der Farbenempfindlichkeit des Auges und der photographischen Platte ist die visuelle Helligkeit eines Sterns von seiner photographischen zu unterscheiden.

22a (*F. Kottler*), Nr. 4 u. 5; praktisch ist es durch Anwendung auf die Sonne zur Messung der aus der Rotation folgenden Bewegung von Punkten am Ost- und Westrande, sowie durch Messung von auch aus der Bahnbewegung bekannten Bewegungen an Gestirnen — so beim Kometen 1882 II an den D-Linien durch *Thollon* und *Gouy* [Paris C. R. 95 (1882), p. 555; 96 (1883), p. 371] — erprobt. Auch experimentell ist der Nachweis der Richtigkeit des Prinzips für Lichtwellen erbracht durch Versuche von *Belopolsky* [Astr. Nachr. 137 (1895), p. 33; Astroph. Journ. 13 (1901), p. 15] und *Galitzin* und *Wilip* [Astroph. Journ. 26 (1907), p. 49] mit rasch rotierenden den Lichtstrahl mehrmals reflektierenden und dadurch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit merklich ändernden Spiegeln, sowie durch *Fabry* und *Buisson* [Paris C. R. 158 (1914), p. 1498] mit Hilfe einer beleuchteten, rasch rotierenden und in einer gegen die Ebene der Rotation nur wenig geneigten Richtung beobachteten reflektierenden Scheibe und Bestimmung der Wellenlänge der von den beiden Enden eines Durchmessers der Scheibe, die eine relative Geschwindigkeit von 200 m/sec hatten, ausgesendeten Lichtstrahlen.

6. Das Spektrum. Nach ihrer Farbe zerfallen die Sterne in drei Gruppen, die weißen, die gelblichen und die rötlichen Sterne. Die charakteristischen Merkmale des Spektrums dieser Gruppen sind schon von *Fraunhofer*[4]) erkannt, strenger umschrieben von *Secchi*[5]), der unter Hinzufügung einer vierten, nur wenig zahlreichen und nur schwache Sterne enthaltenden Gruppe, der tiefroten Sterne, vier Hauptsterntypen unterschied:

Typus I. Weiße Siriussterne
„ II. Gelbe Sonnensterne
„ III. Rötliche Sterne
„ IV. Tiefrote Sterne.

Durch *Pickering* wurde noch hinzugefügt:

Typus V. Sterne mit hellen Linien.

Die Einführung der Photographie ließ jedoch noch feinere Unterscheidungsmerkmale in den Spektren erkennen. Jetzt ist die gebräuchlichste Klassifikation die des Draper-Katalogs. Die Klassen werden durch Buchstaben bezeichnet. Beginnend mit den Sternen, die ein Gasspektrum mit hellen Linien zeigen und die Klasse O (Wolf-Rayet-Sterne) bilden, ist die Reihenfolge der Klassen:

B = Orionsterne oder Heliumsterne nach den dem Spektrum das Gepräge gebenden starken Heliumlinien;
A = Siriussterne mit sehr intensiven Wasserstofflinien;
F = Procyonsterne, Wasserstofflinien weniger auffallend, daneben sind die Linien des Kalzium sehr kräftig, Übergang von den weißen zu den gelben Sternen;
G = Sonnentypus, neben den sehr zahlreichen metallischen Linien treten die des Wasserstoffs nicht mehr besonders hervor;
K = Übergangstypus von den gelben zu den roten Sternen, die Wasserstofflinien treten immer mehr zurück und die Kalziumlinien überwiegen mehr und mehr, die Absorption nimmt besonders im violetten Teil zu;
M = Blau und Violett ist sehr schwach, breite Absorptionsbanden mit gegen die violette Kante wachsender Intensität;
N = größte Intensität der breiten Absorptionsbanden an der roten Kante.

Eine Übergangsklasse R ist noch zwischen G und N eingeschaltet, die Sterne enthält auf einer Zwischenstufe zwischen diesen beiden Typen, ebenso wie K eine Zwischenstufe zwischen G und M

4) *J. Fraunhofer,* Gesammelte Schriften, München 1888, p. 143.
5) Astr. Nachr. 73 (1869), p. 129.

ist. Eine dritte Abzweigung, charakterisiert durch das Auftreten von Absorptionsbanden neben Absorptions- und Emissionslinien, hat die Bezeichnung S erhalten. Einzelne eigentümliche, in die beschriebenen Typen nicht einzureihende Spektren, sind unter Q vereinigt und mit P sind die Spektren der planetarischen Nebel bezeichnet.

Kleinere Variationen werden im Typus O durch die Unterabteilungen Oa, Ob, Oc, Od, Oe und beim Typus M durch Ma, Mb, Mc, Md unterschieden, und die allmähliche Entwicklung der charakteristischen Merkmale in den einzelnen Klassen wird durch 10 Stufen angedeutet. Es bezeichnet z. B. $F0$ das reine F-Spektrum, $F1G$ (kürzer $F1$ geschrieben) ein F-Spektrum, in dem die Eigentümlichkeiten des G-Spektrums schon in sehr geringem Grade angedeutet sind, während $F5G$, oder $F5$, ein Spektrum bezeichnet, das in der Mitte zwischen dem reinen F- und dem reinen G-Spektrum steht. Ein der Bezeichnung von Klasse und Unterabteilung hinzugefügtes p, z. B. $A0p$, zeigt kleinere Eigentümlichkeiten im Spektrum an, und in gleicher Weise gebraucht bezeichnet s scharfe, n verwaschene (neblige) Linien.

Die in dem Spektrum zum Ausdruck kommende Verschiedenheit des Lichtes der Sterne gibt sich auch kund in einer Verschiedenheit der Einwirkung des Lichtes der Sterne von verschiedenem Typus auf die Netzhaut und auf die photographische Platte. Es ist daher der Unterschied der visuellen und der photographischen scheinbaren Helligkeit eines und desselben Sternes in verschiedenen Spektralklassen verschieden. Die Differenz der photographischen und der visuellen Größe, im Sinne photographisch—visuell, wird als Farbenindex bezeichnet. Die photographische Größenskala ist gegen die visuelle festgelegt durch die Festsetzung, daß beide für die Sterne vom Typus $A0$ bei der Helligkeit $6{,}0^{\mathrm{m}}$ übereinstimmen sollen. Die durch den Farbenindex vermittelte Beziehung zwischen den beiden Skalen ist dann folgende:

Typus	$B0$	$B5$	$A0$	$A5$	$F0$	$F5$
Farbenindex	$-0{,}24^{\mathrm{m}}$	$-0{,}12^{\mathrm{m}}$	$0{,}00^{\mathrm{m}}$	$+0{,}14^{\mathrm{m}}$	$+0{,}28^{\mathrm{m}}$	$+0{,}42^{\mathrm{m}}$
Typus	$G0$	$G5$	$K0$	$K5$	M	
Farbenindex	$+0{,}56^{\mathrm{m}}$	$+0{,}78^{\mathrm{m}}$	$+1{,}00^{\mathrm{m}}$	$+1{,}18^{\mathrm{m}}$	$+1{,}35^{\mathrm{m}}$.	

Statt einer Beschreibung der Farbentönung, in der ein Stern dem Auge erscheint, hat man jetzt gleichfalls eine Farbenskala eingeführt. Die gebräuchlichste ist die *Osthoff*sche[6]), die von 0^{c} bis 9^{c} geht. Es be zeichnet 0^{c} Reinweiß, 4^{c} Reingelb, 7^{c} Orange (Gelb und Rot zu gleichen Teilen), 9^{c} Rot. Da das Auge bei schwachen Sternen die Fär-

6) Astr. Nachr. 192 (1912), p. 85.

bung nicht festzustellen vermag, ersetzt man zweckmäßig die Bestimmung des Farbenindex durch die Bestimmung der Wellenlänge desjenigen Lichtes, das im Stern von der größten Wirksamkeit ist, der sogenannten Effektiven Wellenlänge, durch Abstandsmessung der durch geeignete Gitter erzeugten Beugungsbilder.

2. Die mittelbaren Beobachtungsergebnisse. Mittelbar führen die Beobachtungen zu folgenden Daten:

1. Der Ort im Raume. Aus dem scheinbaren Ort und der Entfernung bestimmen sich die rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \varrho \cos\alpha \cos\delta, \quad y = \varrho \sin\alpha \cos\delta, \quad z = \varrho \sin\delta,$$

die den wahren Ort des Sternes relativ zur Sonne in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der Grundebene des Äquators und einer auf den Frühlingspunkt zielenden X-Achse bestimmen. Für die Zwecke der Stellarastronomie ist es oft vorteilhafter, an die Stelle von Rektaszension und Deklination die Länge und Breite in bezug auf die Ebene der Milchstraße als Grundebene zu setzen. Die galaktische Länge wird vom aufsteigenden Knoten der Milchstraße auf dem Äquator aus gezählt im Sinne der wachsenden Rektaszension.

2. Verteilung im Raume. Sie folgt durch Abzählung aus den räumlichen Koordinaten. Mathematisch wird sie ausgedrückt durch zwei Funktionen, die Häufigkeitsfunktion der Leuchtkraft i, die durch $\varphi(i)$ bezeichnet wird und die Verteilung der Leuchtkräfte auf die Gesamtheit der Sterne angibt, und die Dichtefunktion $D(\varrho)$, die die Zahl der in der Raumeinheit enthaltenen Sterne in der Entfernung ϱ von der Sonne angibt.

3. Totalbewegung. Sie wird uns bekannt, wenn uns die beiden Komponenten der Bewegung, Eigenbewegung und Radialbewegung, und gleichzeitig die Entfernung gegeben sind. Sind $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die jährlichen durch die EB. bewirkten Änderungen der Rektaszension und Deklination, μ der Betrag der Eigenbewegung, φ ihr Positionswinkel, π die Parallaxe des Sterns, $\Delta\varrho$ seine sekundliche Radialbewegung in Kilometern ausgedrückt und v_* seine lineare Bewegung in der Zeitsekunde relativ zur Sonne, und ist ferner k der Faktor zur Zurückführung der jährlichen in Bogenmaß ausgedrückten Eigenbewegung auf lineares Maß:

$$k = \frac{149\,500\,000}{365{,}256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}737,$$

so ist

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mu'' \sin\varphi = \Delta\alpha \cos\delta & \mu'' \cos\varphi = \Delta\delta \\ \mu \text{ km/sec} = k\dfrac{\mu''}{\pi} & v_*^2 = \mu^2 + (\Delta\varrho)^2. \end{cases}$$

4. Leuchtkraft. Die absolute Helligkeit oder die Leuchtkraft H eines Sternes ist seine Helligkeit in der Einheit der Entfernung, sie folgt aus der scheinbaren Helligkeit h durch $h = c\,\frac{H}{\varrho^2}\cdot$ Die Konstante c bestimmen wir so, daß die Leuchtkraft eines Sternes der scheinbaren Helligkeit 1, also der Größe 0, in der Entfernung 1 gleich 1 wird, dann wird einfach $h = \frac{H}{\varrho^2}\cdot$ Die Größe, in der ein Stern in der Entfernung 1 erscheinen würde, nennen wir seine absolute Größe M. Es ist dann $\log H = -0{,}4M$. Die scheinbare Größe der Sonne in der wirklichen, der astronomischen Einheit der Entfernungen entsprechenden Entfernung ist $= -26{,}7^{\mathrm{m}}$, in der Entfernung einer Sternweite wäre die Größe der Sonne $= -0{,}13^{\mathrm{m}}$, also $\log h_{\odot(\varrho=1)} = 0{,}052$ oder $h_{\odot(\varrho=1)} = H_\odot = 1{,}13$. Die Leuchtkraft der Sonne stellt also nahezu die Einheit dar, nach der wir die Leuchtkräfte messen. Zwischen der scheinbaren Größe, der Entfernung und der Leuchtkraft bestehen die Beziehungen

$$(3)\qquad \begin{cases} m = 5\log\varrho - \frac{5}{2}\log H, \quad \log\varrho = 0{,}2m + \frac{1}{2}\log H, \\ \qquad M = m - 5\log\varrho = m + 5\log\pi. \end{cases}$$

5. Masse, Dichte, Größe, Temperatur. Über Masse- und Dichteverhältnisse der Sterne haben wir Kenntnis erlangt durch das Studium der Doppelsternsysteme. Die visuellen Doppelsternsysteme liefern uns aus der Umlaufszeit durch das dritte *Kepler*sche Gesetz die Kenntnis der Gesamtmasse des Systems und, wenn wir die Lage des Schwerpunktes aus seiner Bewegung durch Anschluß an benachbarte an der Bahnbewegung des Systems nicht teilnehmende Sterne kennen, auch die Kenntnis der Einzelmassen. Bei den spektroskopischen Doppelsternen kennen wir durch die Bewegungsgesetze sofort $\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1+m_2)^2}$ (i = Neigung der Bahnebene gegen den Visionsradius). Ist das Spektrum beider Komponenten meßbar, so kennen wir $m_1 \sin^3 i$ und $m_2 \sin^3 i$. Es sind uns also stets Minimalwerte der Masse gegeben. Bei den Bedeckungsveränderlichen aber lernen wir m_1 und m_2 selbst kennen, außerdem aber auch die Radien der Sterne und demnach auch die Dichten. Nähere Ausführungen hierüber finden sich in dem Artikel: Bahnbestimmung der Doppelsterne, Encykl. VI 2, 11 (*Hepperger*). Zu weiteren Aufschlüssen über die Größen der Sterne gelangen wir auf photometrischem Wege. Ist $\varkappa$ = die Leuchtkraft des Flächenelements einer leuchtenden Sternscheibe vom Radius R, dann ist die Gesamtleuchtkraft des Sterns H = konst. $\varkappa R^2$ und seine scheinbare Helligkeit h_m = konst. $\frac{\varkappa R^2}{\varrho^2}\cdot$ Führt man als Vergleichsobjekt die Sonne ein, deren

scheinbare Helligkeit in der Einheit der Entfernung $= 1{,}13$ ist, so besteht die Beziehung

$$(4) \qquad \log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) = -0{,}026 - 0{,}2m - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_\odot}\right) + \log\varrho\,.$$

Unter der Voraussetzung der Gleichheit der Leuchtkraft des Flächenelementes bei allen Gestirnen ($\varkappa = \varkappa_\odot$) gibt diese Gleichung die „äquivalenten Radien der Gestirne". Die Ermittelung des wahren Wertes von $\varkappa$ erfordert die Bestimmung der effektiven Temperaturen, d. h. der Temperatur des schwarzen Körpers gleicher Strahlungsenergie wie die des betreffenden Gestirnes, s. Encykl. VI 2, 25 (*Guthnick*).

II. Das Beobachtungsmaterial.

3. Ältere Sternkataloge.[7]) Als Ausgangspunkt ausreichend gesicherter Berechnungen dient der aus *Bradleys* Beobachtungen in Greenwich mit den 1750 aufgestellten neuen Instrumenten abgeleitete Katalog, dem *Bessel*[8]) zu Anfang des vorigen Jahrhunderts die sicheren Grundlagen abgewann, auf denen die neuere praktische Beobachtungskunst sich aufbaut, und der im letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts von *Auwers*[9]) durch Verbindung mit ihm gleichwertigen neueren Katalogen zu einer weiteren Sicherung und Vervollkommnung unserer Kenntnis der Sternörter verwertet wurde. Zur weiteren Festigung dieser Ausgangsepoche von 1750 unterwarf *Auwers* auch die von 1743—1753 mit den älteren Instrumenten in Greenwich angestellten Beobachtungen einer den neuen Grundlagen einer scharfen Reduktion gerecht werdenden Bearbeitung.[10]) Dem gleichen Zwecke war auch eine Bearbeitung der in der Zeit von 1756 bis 1760 von *Tobias Mayer* in Göttingen angestellten Beobachtungen von Sternörtern durch *Auwers* gewidmet, deren Genauigkeit allerdings hinter

7) Eine ausführliche Übersicht über die vom Altertum bis in die neuere Zeit veröffentlichten Sternkataloge gibt *E. B. Knobel,* The chronology of star catalogues, London R. Astr. Soc. Mem. 43 (1877). Die neuzeitliche Literatur ist zusammengestellt in *F. Ristenpart,* Fehlerverzeichnis zu den Sternkatalogen des 18. und 19. Jahrhunderts, Astr. Nachr. Erg.-Heft 16 (1909), und Geschichte des Fixsternhimmels herausgegeben von der preußischen Akad. d. Wiss. Abt. 1, Bd. 1, Karlsruhe 1922. Bezüglich Sternkataloge vgl. auch Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 4 u. 8.

8) *F. W. Bessel,* Fundamenta Astronomiae pro anno 1755 deducta ex observationibus viri incomparabilis J. Bradley, Königsberg 1818.

9) *A. Auwers,* Neue Reduktion der Bradleyschen Beobachtungen, 3 Bde., St. Petersburg 1882, 1888, 1903.

10) *A. Auwers,* Bearbeitung der Bradleyschen Beobachtungen an den alten Meridianinstrumenten der Greenwicher Sternwarte, 3 Bde., Leipzig 1912, 1913, 1914.

der von *Bradley* erzielten erheblich zurückbleibt. Mit der weiteren Vervollkommnung des zur Festlegung der Sternörter dienenden Meridiankreises und der Beobachtungs- und Reduktionsmethoden[11]) wuchs auch die Zahl der sich der Aufgabe der Bestimmung der Örter der Sterne widmenden Sternwarten.

Als eine zweite mit einem allgemeinen großen Aufschwung der beobachtenden Astronomie verbundene Hauptepoche ist der Anfang des 19. Jahrhunderts zu betrachten. Sie ist besonders gekennzeichnet durch eine außerordentliche Erweiterung unserer Kenntnisse durch Ausdehnung der Beobachtungen auf die schwächeren Sterne. Das *Piazzi*sche Sternverzeichnis[12]), das die Positionen von 7646 Sternen enthält, und die Zonenbeobachtungen *Lalandes*[13]) und *Bessels*[14]), die für die Mehrzahl der schwächeren Sterne bis 9^m des nördlichen Himmels einen sicheren Ausgangsort bestimmen, sind die Hauptvertreter dieser Epoche.

Als dritte Hauptepoche ist dann das Jahr 1875 zu betrachten, als Epoche des Katalogs der Astronomischen Gesellschaft, der entstanden ist durch Zusammenschluß einer Reihe von Sternwarten Europas und Nordamerikas und sich die Beobachtung der Sterne bis zur 9. Größe des nördlichen Himmels von $+80^0$ bis -2^0 Deklination nach einem gemeinsamen Plane zur Aufgabe stellte. Der Katalog wurde später bis -23^0 Deklination in gleicher Weise fortgeführt. Diese zweite Abteilung ist auf die Epoche 1900 reduziert.[15])

Nach der Aufgabe, deren Lösung in erster Linie der Bearbeitung zugrunde lag, zerfallen die Kataloge in verschiedene Kategorien.

4. Fundamentalkataloge. Die Festlegung von Punkten an der Sphäre geht aus von einer Anzahl ausgewählter Sterne, deren Koordinaten mit möglichst großer Schärfe bestimmt werden durch An-

11) Vgl. die Zusammenstellung der mittleren Beobachtungsfehler, Encykl. VI 2, 5 (*F. Cohn*), p. 272.

12) *G. Piazzi,* Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae ineunte saeculo XIX, Palermo 1814.

13) *J. de Lalande,* Histoire céleste française, Paris An IX [1801]. Die Beobachtungen sind zu einem 1847 von der Brit. Assoc. for the Advancement of Science herausgegebenen Katalog verarbeitet. Neue Reduktionstafeln von *v. Asten* in Astr. Ges. Vjs. 3, Suppl. (1868), vgl. auch *E. Weiß,* Ann. d. Wiener Sternwarte 5 (1887), p. 124.

14) Königsberg Beob. 7.—17. Abt. 1822—1835; zu zwei Katalogen verarbeitet von *M. Weisse*: Zone -15^0 bis $+15^0$ Dekl. (1846), Zone $+15^0$ bis $+45^0$ (1863). Neue Reduktionstafeln von *E. Luther* in Königsberg Beob. Abt. 37_2 (1886).

15) Katalog d. Astr. Ges. 1. Abt. $+80^0$ bis -2^0 Dekl. für 1875, 1.—15. Stück, Leipzig 1890—1910. 2. Abt. -2^0 bis -23^0 Dekl. für 1900; 1.—4. Stück (bis -18^0 reichend), Leipzig 1904—1912. Zone -18^0 bis -23^0 (Algier), Paris 1924.

schluß untereinander und durch Beziehung des ganzen Systems auf die Sonne. Den ersten solchen Fundamentalkatalog stellte *Maskelyne*[16]) auf. Die von ihm sorgfältig ausgewählten 36 Hauptsterne bilden das feste Gerüst für alle späteren Kataloge. *Bessel* leitete aus Königsberger Beobachtungen die Örter dieser Sterne für zwei Epochen 1815 und 1825 ab, verband diese mit den Positionen, die er aus den *Bradley*schen Beobachtungen bestimmt hatte, und gab in den Tabulae Regiomontanae[17]) bequeme Hilfsmittel zur Berechnung ihres scheinbaren Ortes für jeden 10. Tag des Jahrhunderts 1750—1850. *Wolfers*[18]) erweiterte die Zahl der Fundamentalsterne neben den beiden Polsternen α und δ Ursae min., die schon *Bessel* hinzugenommen hatte, noch um 9 und leitete für sie verbesserte Örter ab, indem er durch Vergleichen der aus 7 neueren Katalogen entnommenen Positionen der *Maskelyne*schen Fundamentalsterne mit den Positionen der Tabulae Regiomontanae die Reduktion dieser Kataloge auf ein gemeinsames System und die systematischen Reduktionen der einzelnen Kataloge auf dieses System bestimmte. Als dann die Astronomische Gesellschaft die Neubestimmung der Sterne bis zur 9. Größe des nördlichen Himmels unternahm, wurde die Aufstellung eines eine hinreichende Anzahl möglichst gleichmäßig über den Himmel verteilter Fundamentalsterne erforderlich, um durch Anschluß der einzelnen Deklinationszonen an dieselben ein einheitliches System für den ganzen Katalog zu gewährleisten. *Auwers* benutzte bei der Aufstellung dieses Katalogs 336 Sterne der Liste von 374 Hauptsternen der Sternwarte Pulkowa und fügte noch 203 Zusatzsterne hinzu. Die Bewegungen der Sterne leitete *Auwers* ab aus der Verbindung des Ortes für 1755 nach *Bradley* mit einem Orte für 1865 nach neueren Beobachtungen gleichfalls in Greenwich. Dieser Katalog von 539 Sternen[19]) (A.G.C.) wurde später zur Fort-

16) *N. Maskelyne,* Tables for computing the apparent places of the fixed stars, London 1774. In dieser ersten Form enthielt der Katalog nur 34 Sterne. Die endgültige Form erhielt er in Greenwich Observ. 1802.

17) *F. W. Bessel,* Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850, Königsberg 1830. Die Rektaszensionen der Tab. Reg. beruhen auf der Verbindung der *Bradley*schen Positionen (8) mit den Positionen des zweiten *Bessel*schen Fundamentalkatalogs für 1825 [Astr. Nachr. 4 (1825), p. 97], die Deklinationen auf den durch Königsberger Beobachtungen für 1820 bestimmten Örtern [Königsberg Beob. 7. Abt. (1822), p. XXXIII] und den durch Vergleichung mit den Örtern für 1755 abgeleiteten jährlichen Änderungen.

18) *J. Wolfers,* Tabulae reductionum observationum astronomicarum, Berlin 1858.

19) *A. Auwers,* Fundamentalkatalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel, Astr. Ges. Publ. 14, Leipzig 1879.

setzung der Zonen bis — 23° Deklination um 83 Sterne[20]) und endlich für den ganzen Südhimmel um 480 Sterne[21]) erweitert. Mit dem vorläufigen Katalog wurden sämtliche aus der Zeit von 1755 bis Anfang des 20. Jahrhunderts vorliegenden Beobachtungsreihen verglichen, die systematische Reduktion auf das System des Katalogs[22]) und die relativen Gewichte[23]) ermittelt und unter Berücksichtigung derselben die endgültigen Positionen der einzelnen Sterne im System des Katalogs und die Beziehung des vorläufigen Systems des Katalogs zu einem zwischen allen einzelnen Systemen die Mitte haltenden bestimmt.[24]) Durch Übergang auf dieses wahrscheinlichste System und Berücksichtigung der von *Newcomb*[25]) bestimmten Korrektion des Äquinoktiums des vorläufigen Systems entstand dann das endgültige System, das jetzt in einer Auswahl von 905 Sternen nebst 20 Polsternen von *J. Peters* bearbeitet als Grundlage[26]) der täglichen Sternephemeriden des Berliner Jahrbuchs (N.F.K.) dient.

Nach gleichen Prinzipien arbeitete auch *Newcomb*, indem er zunächst für 29 der *Maskelyne*schen Fundamentalsterne das beste vorhandene Material zur Ableitung von Korrektionen für die Örter der Tabulae Regiomontanae ausglich.[27]) Das so entstandene Rektaszensionssystem bildete den Ausgangspunkt aller in gleicher Richtung liegenden Arbeiten jener Periode. Für seine Arbeiten in der Planeten- und Mondtheorie stellte *Newcomb* später einen Fundamentalkatalog auf unter besonderer Berücksichtigung der Zodiakalsterne.[28]) *Newcomb* wurde dann 1896 durch die Pariser internationale Fundamentalstern-Konferenz zur Aufstellung eines provisorischen Katalogs als Grundlage des geplanten internationalen Fundamentalkatalogs beauftragt. Diese Arbeit wurde im Nautical-Almanac-Office in Washington ausgeführt und führte zur Erstellung eines Katalogs von 1596 Sternen.[29])

20) *A. Auwers,* Mittlere Örter von 83 Sternen für 1875,0, Astr. Ges. Publ. 17, Leipzig 1883.

21) *A. Auwers,* Fundamentalkatalog für Zonenbeobachtungen am Südhimmel und südlicher Polarkatalog für die Epoche 1900, Astr. Nachr. 143 (1897), p. 361.

22) Astr. Nachr. 134 (1894), p. 33; 143 (1897), p. 65; 145 (1898), p. 101; 162 (1903), p. 357.

23) Astr. Nachr. 151 (1900), p. 225; 162 (1903), p. 357.

24) Astr. Nachr. 164 (1904), p. 225.

25) Washington Astr. Papers 8 II (1898), p. 156.

26) Berliner Rechen-Inst. Veröff. Nr. 33 (1907).

27) *S. Newcomb,* On the right ascensions of the equatorial fundamental stars, Washington Obs. 1870, App. III (1872).

28) Catalogue of 1098 standard clock and zodiacal stars, Washington Astr. Papers 1 (1880).

29) Catalogue of fundamental stars reduced to an absolute system, Washington Astr. Papers 8 II (1898).

Eine dritte Bearbeitung führte *L. Boss* aus. Er schuf zunächst für Gradmessungsarbeiten in einem 500 Sterne enthaltenden Katalog[30]) ein eigenes Deklinationssystem und fügte später 179 Sterne südlich von — 20° Deklination hinzu.[31]) Als Ausgangspunkt für die Herstellung eines großen, den ganzen Himmel vom Nord- bis Südpol umfassenden Generalkatalogs für das Studium der Sternbewegungen stellte er dann einen 627 Sterne enthaltenden Fundamentalkatalog auf.[32]) Diese *Boss*sche Ausgleichung unterscheidet sich von der *Auwers*schen in einem wesentlichen Punkte, indem sie nämlich den *Bradley*-Katalog nicht zu dem fast ausschließlich maßgebenden Ausgangspunkt macht, sondern ihn einfach mit dem der Sicherheit seiner Positionen entsprechenden Gewichte in die Reihe der Kataloge einordnet.

Für das Studium der Sternbewegungen ist die strenge Reduktion der Bestimmungen verschiedener Beobachter auf ein einheitliches, von den Fehlern des Instrumentes und den persönlichen Fehlern des Beobachters befreites System von größter Wichtigkeit, da die Bewegungen und diese Fehler Größen gleicher Ordnung sind, vgl. Encykl. VI 2 (*F. Cohn*), p. 249 ff. Die Beziehung des *Auwers*schen und des *Boss*schen Fundamentalsystems zueinander ist von *B. Boss* im Astron. Journ. 26 (1910), p. 126 festgelegt. Die systematischen Reduktionen auf das *Auwers*sche System sind zusammengestellt in Astr. Nachr. Erg.heft 7 (1904). Weitere Reduktionstabellen auf *Auwers* gibt *H. Battermann* in Beob. Ergebn. der Sternw. Berlin, Nr. 12 (Berlin 1909). Für das *Boss*sche System dienen die Tafeln im Anhang III des P.G.C. (vgl. Note 42). Eine Erweiterung derselben durch Einbeziehung der späteren Sternkataloge gab *A. J. Roy* (1921).[33])

5. Kataloge der einzelnen Sternwarten. Für die bei weitem überwiegende Mehrzahl der Beobachtungsreihen am Meridiankreise bildet das in den Fundamentalkatalogen niedergelegte Ergebnis sehr umfangreicher Untersuchungen etwas fest gegebenes, sie bedienen sich der in diesen Systemen festgelegten ausgezeichneten Punkte am Himmel als unveränderlicher Normalpunkte. Natürlich ergeben sie auch wieder Material für eine spätere Verbesserung der in den Fundamentalkatalogen angenommenen relativen Lage dieser Punkte. Die Zahl dieser Beobachtungsreihen ist sehr groß. *Knobel*[7]) zählt schon Januar 1876 527 Sternkataloge auf. Dabei sind aber viele Verzeichnisse mit-

30) Report of the Northern Boundary Commission, Washington 1879.

31) Astron. Journ. 19 (1898), p. 121.

32) Astron. Journ. 23 (1903), p. 17, auch als besondere Publikation: Catalogue of 627 Principal Stars erschienen.

33) Systematic corrections and weights of Catalogues (1921).

genommen, die nur aus anderen Quellen zusammengetragen sind, oder sich auf besondere Objekte, wie Doppelsterne, Sternhaufen, Nebel, beziehen. *Ristenpart*[34]) führt 1899 in einer Übersicht selbständiger, stimmfähiger Sternkataloge 313 auf. Es handelt sich dabei um ein nach Umfang, wie Inhalt und Anlage sehr ungleichförmiges Material. Während bei einzelnen Katalogen ein Plan, der zur Auswahl der beobachteten Objekte geführt hat, nicht erkennbar ist, ist er bei anderen klar ausgesprochen. Zu nennen wären in dieser Beziehung vor allem die Zonenkataloge, die entstanden sind in der Weise, daß der Beobachter bei nur innerhalb enger Grenzen in Deklination bewegtem Instrumente alle Sterne beobachtete, die das Gesichtsfeld passierten. Solche Kataloge sind von *Lalande*, *Bessel*, *Argelander*, *Gould* und *Thome* hergestellt. Das wichtigste Unternehmen dieser Art ist der Katalog der Astronomischen Gesellschaft[15]), der für 5° breite Zonen die Positionen aller Sterne bis 9. Größe von + 80° bis — 23° Deklination gibt. Nach gleichen Gesichtspunkten werden auch die Sterne des Südhimmels auf den Sternwarten in Cordoba[35]) und La Plata[36]) beobachtet. Die Zahl der beobachteten Sterne beträgt jetzt etwa 180000. Zur Sicherung der Verbindung der einzelnen Reihen des nördlichen Himmels untereinander und mit dem Fundamentalsystem dient der von *Küstner* in Bonn in völlig einheitlicher Weise und im strengen Anschluß an den *Auwers*schen Fundamentalkatalog beobachtete Katalog von 10663 Sternen.[37])

6. Photographische Sternkataloge. Die Festlegung der Örter aller Sterne des Himmels bis zur 11. Größe auf photographischem Wege ist das Ziel eines anderen internationalen Unternehmens. Der Himmel ist in 18 Deklinationszonen etwa gleichen Areals geteilt. Die einzelnen Zonen sind von verschiedenen Sternwarten zur Beobachtung übernommen. Es werden mit gleichartigen Instrumenten Aufnahmen, die ein Areal von 2° im Quadrat bedecken, gemacht. Die Aufnahmen bedecken den Himmel doppelt, so daß der Punkt, in dem vier Platten der ersten Aufnahme zusammenstoßen, die Mitte einer Platte der zweiten Aufnahme ist. Jeder Stern kommt zweimal vor. Die Platten werden nach rechtwinkligen Koordinaten vermessen[38]) und

34) Valentiner Handwörterbuch, Artikel „Sternkataloge und Sternkarten".

35) Cordoba Resultados, Vol. 22, 23, 24 (1913, 1914, 1925), Zone — 22° bis — 37°, Fortsetzung bis — 52° in Arbeit.

36) La Plata Publicaciones 5 (1919), Zone — 52° bis — 57°; Zone — 57° bis — 62° vollendet.

37) Bonn Sternw. Veröff. 10 (1908).

38) Über Ausführung und Genauigkeit dieser Messungen vgl. Encykl. VI 2, 5 (*F. Cohn*), Nr. 4 B und Nr. 7.

es werden die Hilfsmittel gegeben zur Ableitung der sphärischen Koordinaten aus den rechtwinkligen im Anschluß an diejenigen Sterne der Platten, deren Koordinaten aus Meridianbeobachtungen bekannt sind. Eine nach einheitlichem Plane durch Mitwirkung mehrerer Sternwarten durchgeführte Neubestimmung der Koordinaten dieser Anhaltsterne für eine der Zeit der Aufnahme der Platten naheliegende Epoche ist mit der Arbeit verbunden. Mehrere der an der Arbeit beteiligten Sternwarten geben unmittelbar die sphärischen Koordinaten selbst. Erforderlich sind 22000 Platten, die schätzungsweise die Positionen von drei bis vier Millionen Sternen liefern werden. Ein großer Teil des Materials ist schon zugänglich.[39])

7. **Sammelkataloge.** Wenn das in diesen Katalogen niedergelegte Material für die Position eines einzelnen Sternes voll ausgenutzt werden soll, wäre eine Prüfung aller vorliegenden Kataloge erforderlich. Diese Arbeit wird durch verschiedene Sammelwerke geleistet. Bedeutendere Werke dieser Art aus neuerer Zeit sind der Astronomical Society's Catalogue[40]) und der British Association Catalogue (B.A.C.)[41]) von *F. Baily*, deren letzterer noch jetzt vielfach für Sternbezeichnungen benutzt wird. An die Stelle des B.A.C. trat 60 Jahre später der Preliminary General Catalogue (P.G.C.) von *Lewis Boss*[42]), in dem für alle Sterne, für die das vorhandene Material ausreichte, die auf Grund der vorhin erwähnten Untersuchungen über die systematischen Abweichungen der verschiedenen Kataloge auf ein einheitliches System bezogenen Örter gegeben werden. Die Erweiterung dieses Katalogs zu einem etwa 25000 Sterne enthaltenden bis zur 7. Größe reichenden Generalkatalog des ganzen Himmels nach gleichen Gesichtspunkten, für die noch ergänzende Beobachtungen erforderlich sind, ist die weitere Aufgabe des von der Carnegie Institution unterstützten Unternehmens. In der Ausführung begriffen ist auch das als „Geschichte des Fixsternhimmels" bezeichnete Sammelwerk der Akademie der Wissenschaften in Berlin, das für alle Sterne des Himmels die in

39) Über den Stand des Unternehmens zu Anfang 1921 wird berichtet in London Astr. Soc. Month. Not. 81, p. 327. Die umfangreichen Dokumente und Abhandlungen, die in Verbindung mit der Ausführung des Unternehmens stehen, sind veröffentlicht in dem Bull. du comité intern. permanent pour l'exécution photogr. de la carte du ciel, Paris 1892 ff.

40) Catalogue of 2881 principal fixed stars, red. to Jan. 1 1830, London 1827.

41) The Catalogue of stars of the Brit. Ass. for the advancement of science, red. to Jan. 1 1850, London 1845. Örter von 8377 Sternen nach 32 Quellen mit Reduktionskonstanten.

42) *L. Boss,* Preliminary General Catalogue of 6188 stars for 1900, Washington 1910 (im folgenden unter P.G.C. zitiert).

dem Zeitraum von 1750—1900 angestellten Meridianbeobachtungen ohne jede Einschränkung sammeln und auf das Äquinoktium 1875 reduziert veröffentlichen will.[43]) Eine Quellensammlung für alle Sterne des Himmels nördlich von — 22° Deklination ist auch auf der Sternwarte des Yale College angelegt.

8. **Durchmusterungskataloge.** Während in diesen Verzeichnissen das Hauptaugenmerk auf die genaue Ortsangabe gelegt ist, tritt in anderen die Vollständigkeit bis zu einer bestimmten Grenze mehr in den Vordergrund. *Argelanders* Uranometria Nova (Berlin 1843) und *Heis'* Atlas Coelestis Novus (Köln 1872) sind Sternverzeichnisse beigefügt, die alle im mittleren Europa mit freiem Auge sichtbaren Sterne enthalten. *Behrmanns* Atlas des südlichen gestirnten Himmels, Leipzig 1874, und *Goulds* Uranometria Argentina[44]) bieten das Gleiche für den Südhimmel. In der Uranométrie Générale von *J. C. Houzeau*[45]) ist eine einheitliche Bearbeitung für den ganzen Himmel versucht. Vielfach benutzt wird das alle Sterne bis zur $6\frac{1}{2}$. Größe enthaltende Sternverzeichnis von *Ambronn* (Berlin 1907). Die Sterne bis zur Größe $6{,}4^m$ enthält ein von *Backhouse* zusammengestellter Katalog.[46])

Eine höhere Stufe der Vollständigkeit wird erreicht in den durch *Argelander* ins Leben gerufenen Durchmusterungsarbeiten, die in Bonn und in Cordoba ausgeführt sind. Der erste Teil der Bonner Durchmusterung (BD.), im wesentlichen von *Krueger* und *Schönfeld* beobachtet[47]), reicht vom Nordpol bis zu — 2° Deklination und enthält 324188 Sterne; die Vollständigkeit ist erreicht bis etwa zur Größe $9{,}2^m$, das Verzeichnis enthält aber wenigstens außerhalb der Milchstraßengegend noch viele schwächere Sterne bis zu 10^m. Die von *Schönfeld* ausgeführte Fortsetzung[48]) erstreckt sich auf den Gürtel zwischen — 2° und — 23° der Deklination, in dem 133659 Sterne verzeichnet sind. In diesem Teile ist Vollständigkeit bis etwa $9{,}5^m$ erzielt. Die Durchmusterung des Südhimmels auf der Sternwarte in Cordoba ist bis — 62° Deklination fertiggestellt.[49]) Mit 578802 Ster-

43) Geschichte des Fixsternhimmels. Abt. I. Der nördliche Sternhimmel, Bd. 1, 2, 3, 4, Karlsruhe (1922—1925).

44) Cordoba Resultados 1 (1879).

45) Bruxelles Obs. Ann. Nouv. Sér. 1 (1878).

46) *T. W. Backhouse*, Cat. of 9842 stars, Sunderland 1911.

47) Bonner Sternverzeichnis 1.—3. Sektion. Bonn Sternw. Beob. 3, 4, 5 (1859, 1861, 1862). Anastatischer Neudruck mit Berichtigungen und Zusätzen von *F. Küstner* (1903).

48) Bonner Sternverzeichnis 4. Sektion, Bonn Sternw. Beob. 8 (1886).

49) Cordoba Durchmusterung, Cordoba Resultados 16, 17, 18, 21 (1892, 1894, 1900, 1914), im folgenden mit (C.D.) bezeichnet.

nen reicht sie bis zur 10. Größe herab. Für die Südpolarkalotte innerhalb des 62. Grades südlicher Deklination liegt jetzt ein einigermaßen gleichartiges Material nur vor in der auf der Kap-Sternwarte ausgeführten photographischen Durchmusterung des Südhimmels zwischen — 19° und dem Südpol.[50]) Sie enthält 454875 Sterne. Davon fallen 61782 Sterne auf das von den visuellen Durchmusterungen nicht bedeckte Areal vom Südpol bis zum Parallel — 62°. Die Expositionszeiten sind so gewählt, daß auf den Platten alle Sterne der Bonner Durchmusterung gut meßbar seien. Aber wegen der Verschiedenheit der visuellen und der photographischen Größen ist ein Vergleich bezüglich der Grenzgrößen nicht möglich. Die photographische Grenzgröße der Kap-Durchmusterung wird etwa $9{,}2^m$ sein. Die Gesamtzahl der in diesen Durchmusterungen vorkommenden Sterne des Himmels bis zu einer zwischen 9^m und 10^m liegenden, etwas wechselnden Grenzgröße ist rund 1100000.

Eine weitere Hinausschiebung der Grenzgröße für eine Erforschung des Himmels ist nur auf photographischem Wege möglich. Sie wurde eingeleitet von *Gill* durch die eben angeführte Kap-Durchmusterung und verwirklicht durch das schon erwähnte von *Mouchez* organisierte internationale Unternehmen der photographischen Himmelskarte, das aus den 3—4 Minuten belichteten Platten zu einem Katalog der genauen Örter aller Sterne des Himmels bis zu 11^m photogr. führen und in den für die Karte selbst herzustellenden Platten von 40^m Belichtungszeit das Material liefern wird, bis zu einer weit niedrigeren Helligkeitsgrenze vorzudringen.

9. Kataloge von Sternhaufen und Nebeln. Für die Bestimmung der Koordinaten der Sternhaufen und der Nebelflecke muß im allgemeinen der Weg des differentiellen Anschlusses an benachbarte Sterne bekannter Position betreten werden. Außer zwei größeren Reihen von Ortsbestimmungen von Nebelflecken am Meridiankreise von *Engelmann* in Leipzig[51]) und *Becker* am Dun-Echt-Observatorium[52]) finden sich nur von einzelnen besonders hellen oder mit sternförmigem Kern versehenen Objekten Örter in Sternkatalogen. Dagegen liegt eine beträchtliche Anzahl von Reihen von Ortsbestimmungen von Sternhaufen und Nebelflecken auf differentiellem Wege teils unmittelbar am Fernrohr teils auf photographischen Platten vor. Der New General Catalogue of nebulae

---

50) The Cape photogr. Durchmusterung, Cape Obs. Ann. 3, 4, 5 (1896, 1897, 1900), im folgenden mit (C.P.D.) bezeichnet.

51) Astr. Nachr. 104 (1883), p. 193.

52) Edinburgh Obs. Ann. 1 (1902).

and clusters of stars von *Dreyer*[53]) und zwei Ergänzungen dazu geben die vollständigste Sammlung von genäherten Örtern dieser Objekte und der Quellen, aus denen sie entnommen sind. In den Annalen der Straßburger Sternwarte Band IV (1911) sind die aus der großen Straßburger Reihe von Nebelbeobachtungen gewonnenen genauen Positionen sowie die Neubearbeitung mehrerer anderer Reihen von *Wirtz* mitgeteilt. Größere Reihen von aus der Vermessung photographischer Aufnahmen gewonnenen Positionen von Nebelflecken sind in den Veröffentlichungen der Sternwarte Heidelberg Bd. 6, Nr. 4; Bd. 7, Nr. 6, 8 enthalten.

10. Sternkarten. Der den Katalogisierungsarbeiten zugrunde liegende Zweck einer vollständigen Aufnahme aller Objekte des Himmels bis zu einer bestimmten Grenze hat meistens auch zur Anfertigung von Karten geführt, die das Bild des Himmels wiedergeben. Aus älterer Zeit ist für uns der *Bayer*sche Himmelsatlas wichtig[54]), weil die Bezeichnungen der helleren Sterne nach Sternbild und Buchstabenzeichen dieses Atlas beibehalten sind. Im 18. Jahrhundert war der von *Flamsteed* herausgegebene Himmelsatlas[55]), in dem die einzelnen Sterne der Sternbilder nach der Reihenfolge der Rektaszension numeriert waren, maßgebend. Die *Flamsteed*schen Nummern der helleren Sterne sind neben den *Bayer*schen Buchstaben in Gebrauch geblieben. In selteneren Fällen sind die Sternbezeichnungen den Himmelsatlanten von *Hevel*[56]) und *Bode*[57]) entnommen. Für den Südhimmel sind die von *Lacaille*[58]) eingeführten Sternbezeichnungen, soweit sie bei *Bayer* zweifelhaft geblieben waren, nach der in der Uranometria Argentina[44]) von *Gould* vorgenommenen gründlichen Neubearbeitung beibehalten. Für die stellarastronomischen Forschungen der neueren Zeit waren Karten erforderlich, die auch hinsichtlich der Helligkeitswiedergabe bei den Sternen größere Genauigkeit erreichten. Dieser Forderung entsprechen die Karten zu *Argelander*s Uranometria Nova, zu *Heis'* Atlas Novus Coelestis, zu *Behrmanns* Atlas des südlichen gestirnten Himmels und *Goulds* Uranometria Argentina.

Die Entdeckung der kleinen Planeten rief Bestrebungen wach, die Beobachter mit Himmelskarten auszurüsten, die auch die telesko-

53) London Astr. Soc. Mem. 49 (1888).

54) *J. Bayer,* Uranometria, omnium asterismorum continens schemata nova methodo delineata, Ulm 1603.

55) *J. Flamsteed,* Atlas Coelestis, London 1753.

56) *J. Hevel,* Firmamentum Sobiescianum, sive Uranographia totum coelum stellatum exhibens, Danzig 1690.

57) *J. Bode,* Uranographia sive astrorum descriptio, Berlin 1801.

58) *N. L. de Lacaille,* Coelum Australe Stelliferum, Paris 1763.

pischen Sterne bis zu einer bestimmten Grenzgröße enthielten. So entstand der *Harding*sche Sternatlas und die auf *Bessel*s Veranlassung von der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Akademischen Sternkarten des Himmelsgürtels zwischen + 15° und — 15° Deklination, die bis zur Größe 9^m—10^m reichen und deren letztere den Anspruch auf Vollständigkeit bis zu dieser Grenze erheben. Dem genannten Zweck besonders angepaßt sind die Ekliptikalkarten, die von *Hind*, von *C. H. F. Peters*, von *Chacornac* und den Gebrüdern *Henry* und von *Palisa* hergestellt sind. Keine von diesen Unternehmungen ist vollständig durchgeführt, weil die Fortschritte der Astrophotographie auch für die Herstellung von Karten schneller zum Ziele führende Wege wiesen. In der Tat sind nach Heidelberger Aufnahmen die für die Verfolgung der kleinen Planeten besonders geeigneten *Wolf-Palisa*-Karten des Ekliptikalgürtels hergestellt.

Die Durchmusterungsarbeiten in Bonn, Cordoba und auf der Kap-Sternwarte haben auch zur Herstellung von Himmelskarten gedient. In *Argelander*s Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des Jahres 1855 (Bonn 1863, zweite berichtigte Ausgabe von *Küstner*, Bonn 1899) und *Schönfeld*s Bonner Sternkarten, Zweite Serie, Atlas der Himmelszone zwischen 1° und 23° südlicher Deklination für den Anfang des Jahres 1855 (Bonn 1887) ist die Bonner Durchmusterung niedergelegt. Für die Cordobaer Durchmusterung sind nur die Karten der Zone — 21° bis — 43° (im Jahre 1894) erschienen. *Ristenpart* hat die *Gill*sche photographische Durchmusterung des Südhimmels benutzt zur Herstellung der Santiaginer Karten des Südhimmels, die alle Sterne bis zur 10. Größe jener Durchmusterung enthalten. Erschienen sind (1911) die vom Südpol bis — 51° reichenden Karten.

Von den an der Ausführung des Unternehmens der photographischen Himmelskarte teilnehmenden Sternwarten führt nur ein Teil auch die Reproduktion der 40 Minuten belichteten Platten aus, die die Sterne bis etwa 14. photographischer Größe zeigen. Die Sternwarte Greenwich hat sämtliche Karten für das ihr zugeteilte Gebiet von + 64° bis + 90° veröffentlicht. Teilweise liegen die Karten vor von der Zone + 54° bis + 65° (Rom Vatikan), + 31° bis + 40° (Brüssel), — 3° bis + 25° (vier französische Sternwarten), — 2° bis — 10° (San Fernando), — 11° bis — 17° (Tacubaya).

Vollständige photographische Aufnahmen des gestirnten Himmels liegen vor in der Harvard Map und in den *Franklin-Adams*-Sternkarten. Die Harvard-Karte besteht aus zwei Serien von 55 bzw. 60 Glaskopien nach Aufnahmen, die eine Fläche von 30° im Quadrat bedecken. Die Zentren der einen Serie liegen bei 0°, $\pm 30°$, $\pm 60°$, $\pm 90°$, die der andern bei $\pm$ 15°, $\pm$ 45°, $\pm$ 75° Deklination. Die Aufnahmen sind teils in Cambridge, teils in Arequipa gemacht. Sie reichen bis zur 11., in einzelnen Fällen bis zur 12. Größe.[59]) Der Maßstab der Karte ist 1° etwa gleich 5 mm.[60]) Die *Franklin-Adams*-Karte besteht aus 206 Aufnahmen, die aufeinander übergreifend den ganzen Himmel bedecken. Die Zentren der Platten liegen auf den Parallelkreisen 0°, 15°, 30° usw. Der Maßstab der Karten ist der der Durchmusterungskarten, etwa 1° = 20 mm. Sie reichen bis zur 16. oder 17. Größe.[61])

Die *Franklin-Adams*-Aufnahmen werden nach Vergrößerung von der Sternwarte Johannesburg verwandt zur Anfertigung einer Karte des Südhimmels. Jede Karte bedeckt ein Areal von 20^m in Rektaszension und 6° in Deklination.

Besondere Bedeutung für stellarastronomische Untersuchungen werden noch die *Kapteyn*schen Auswahlfelder erlangen.[62]) Es sind 206 gleichmäßig über den ganzen Himmel verteilte Felder, die zusammen 400 Quadratgrade am Himmel bedecken und für die aus geeigneten Aufnahmen die Zahl, die visuelle und photographische Helligkeit, die sphärische und die Radialbewegung sowie die Parallaxe der in ihnen enthaltenen Sterne und schließlich die Flächenhelligkeit ermittelt werden soll. Hinzu treten noch 46 Sonderfelder, die in erster Linie bestimmt sind, der Erforschung der Struktur der Milchstraße zu dienen.

11. Eigenbewegungsverzeichnisse. Die Entdeckung, daß die relative Lage der Fixsterne keine unveränderliche, sondern mit der Zeit Änderungen unterworfen sei, verdanken wir *Halley*. Er wies solche Eigenbewegungen [Definition der EB. vgl. Encykl. VI 2, 1 (*Anding*), Nr. 2] an vier der hellsten Sterne des Himmels nach.[63]) Trotz der ihm zur Verfügung stehenden großen Zwischenzeit von 2000 Jahren zwischen seiner Zeit und der Zeit des *Hipparch* konnte er wegen der Ungenauigkeit der Ortsbestimmungen nur außergewöhnlich große Be-

59) Die Grenzgröße für die einzelnen Aufnahmen wird ermittelt durch Vergleichung mit Karten engbegrenzter Felder, meist der Umgebung veränderlicher Sterne, für die genaue photometrische Messungen der in ihnen vorkommenden Sterne vorliegen. Dabei muß die Abhängigkeit der Grenzgröße vom Abstand vom Plattenmittelpunkte berücksichtigt werden.

60) Koordinaten der Plattenmittelpunkte und weitere Einzelheiten über die Platten in Astr. Nachr. 162 (1903), p. 281 und 200 (1915), p. 413.

61) Bericht über die Arbeit in London Astr. Soc. Mem. 60 III (1913).

62) Vgl. *J. C. Kapteyn*, Plan of selected areas, Groningen Lab. Publ. 1906.

63) *E. Halley*, On the change of the latitudes of some of the principal fixed stars, London Phil. Trans. 6 (1718).

wegungen erkennen und den Anstoß geben zu weiterer Erforschung. Sicher begründete Eigenbewegungen gab erst *Tobias Mayer.*[64]) Seitdem bildet die Angabe der Eigenbewegung einen zur Vollständigkeit unerläßlichen Teil genauerer Sternkataloge. In größerer Menge leitete *Bessel* Eigenbewegungen der *Bradley*-Sterne durch Vergleich mit dem *Piazzi*schen Katalog für 1800 ab, und *Argelander*s Catalogus Aboensis (1835) setzte sich als Hauptaufgabe die Ermittelung zuverlässiger Werte der Eigenbewegungen. So bot schon der British Association Catalogue[41]) ein umfangreiches Material an Bewegungen. Die *Bradley*schen Sterne wurden noch einmal durch *Mädler* zum Gegenstand eines besonderen Studiums ihrer Bewegungen gemacht[65]), und ihre Bewegungen bildeten in der Neureduktion durch *Auwers,* abgeleitet aus der Vergleichung der *Bradley*schen Örter mit neueren Greenwicher Beobachtungen um die Epoche 1863 aus einem Zwischenraum von durchschnittlich 110 Jahren einen wesentlichen Bestandteil der Festlegung der Fundamentalsysteme.[66]) In den Fundamentalkatalogen, am ausgiebigsten und am besten verarbeitet zur Zeit wohl im *Boss*schen P.G.C.[42]), findet man das zuverlässigste Material an Eigenbewegungen. Die durch Vergleichung mit älteren Beobachtungen bei der Zusammenstellung neuerer Kataloge abgeleiteten Eigenbewegungen sind in der Regel in den Katalogen mit angeführt. Zwei größere, aus der Vergleichung aller in den verschiedenen vorhandenen Katalogen angegebenen Positionen jedes einzelnen Sternes hervorgegangene Kataloge von Eigenbewegungssternen gab *J. Bossert*[67]) heraus. In den Bänden der Geschichte des Fixsternhimmels[43]) wird das bis zum Ende des 19. Jahrhunderts angehäufte Material für solche Eigenbewegungsbestimmungen in übersichtlicher Form geordnet dargeboten werden. Eine Zusammenstellung aller Sterne der Durchmusterungen, für die bislang Eigenbewegungen abgeleitet wurden, ist enthalten in dem Eigenbewegungslexikon von *Schorr* (Hamburg 1923). Es enthält

---

64) *T. Mayer,* De motu fixarum proprio commentatio [1760]. Op. inedita, Göttingen (1775).

65) Dorpat Beob. 14 (1856).

66) Die *Auwers*schen Eigenbewegungen der *Bradley*-Sterne sind zusammengestellt und bearbeitet von *H. Kobold,* Halle Nova acta 64, Nr. 5 (1895). In ihre Komponenten in bezug auf die Richtung der Sonnenbewegung zerlegt sind sie von *Kapteyn* in Groningen Lab. Publ. 7 (1900) und nach Reduktion auf die *Newcomb*sche Präzessionskonstante und Befreiung von den systematischen Fehlern der Sternörter der beiden verglichenen Kataloge in Groningen Lab. Publ. 9 (1902) angegeben.

67) Paris Obs. ann., observ. 1888 (1896) und Paris Obs. ann., mém. 29 (1920); letzterer Katalog nach *Bosserts* Tode von *L. Schulhof* herausgegeben und erweitert.

21455 Sterne; doch sind die Zonen $+90^0$ bis $+64^0$, $+32^0$ bis $+24^0$, -40^0 bis -52^0 in dieser Zusammenstellung nicht berücksichtigt, weil für sie vollständige Verzeichnisse der Eigenbewegungen vorliegen.[68]) Zieht man diese drei Kataloge hinzu, so verfügt man über alle verläßlich bestimmten Eigenbewegungen.

Eine Liste der Sterne, deren Eigenbewegung mindestens 0,5″ ist, stellte *Bossert* 1890 auf.[69]) Sie enthält 269 Sterne. Eine ähnliche Zusammenstellung von *Kobold* 1906[70]) umfaßt 307 Sterne, *Van Maanen*[71]) zählt 1916 schon 531 und *Luyten*[72]) 1922 749 Sterne mit Eigenbewegung über 0,5″. Das Cincinnati-Observatorium hat sich die Ableitung der Eigenbewegungen und die Beobachtung von Sternen mit merklicher Eigenbewegung zur besonderen Aufgabe gewählt und mehrere Verzeichnisse solcher Sterne veröffentlicht.[73]) Eine Zusammenfassung dieser Beobachtungen und die Ableitung der aus der Verbindung mit den vorhandenen älteren Beobachtungen sich ergebenden Eigenbewegung ist im 18. Bande der Publ. of the Cincinnati Obs. (Cincinnati 1915—1922) gegeben. Der aufgestellte Katalog enthält 3164 Sterne. Berücksichtigt sind nur Sterne, die nicht schon im *Boss*schen P.G.C. vorkommen, und nur solche, deren Bewegung 10″ im Jahrhundert beträgt, und für die eine Zwischenzeit von wenigstens 50 Jahren zur Verfügung steht. Das Eigenbewegungsmaterial des *Boss*schen Katalogs ist von *C. V. L. Charlier* in Lund Meddelanden (2) Nr. 9 (1913) zu einer in vielen Fällen sehr nützlichen Übersicht verarbeitet. Die Sphäre ist in 48 inhaltsgleiche Felder symmetrisch zum Äquator geteilt, und für jedes der Felder werden die mittleren Bewegungen in RA. und Deklination sowie die Charakteristiken der Verteilung, die Dispersion und die Korrelationskoeffizienten gegeben, und zwar getrennt für die Sterne heller als 4^m, für die Sterne der 4., die der 5. Größe und für alle Sterne bis $6{,}0^m$.

Durch eine systematische Neubeobachtung der älteren Kataloge, soweit ihnen eine genügende Sicherheit der Örter beigelegt werden darf, ist eine besonders große Ausbeute an Eigenbewegungen zu er-

68) Astrographic Catalogue 1900.0, Greenwich section $+64^0$ to $+90^0$, Vol. 4, London (1921). Greenwich Catalogue of stars for 1910.0, P. II Zone $+24^0$ to $+32^0$, London (1920). A Catalogue of 8560 Astrographic standard stars betw. decl. -40^0 and -52^0 for 1900, London 1906.

69) *J. Bossert,* Paris Bull. astr. VII (1890), p. 98.

70) *H. Kobold,* Bau des Fixsternsystems, Braunschweig 1906.

71) Astroph. Journ. 41 (1915), p. 187 nebst Verbesserungen und Zusätzen, ebenda 43 (1916), p. 248.

72) Lick Obs. Bull. 11 (1922), p. 1.

73) Cincinnati Obs. Publ. 13 (1895); 14 (1898); 15 (1905); 19 (1922).

warten. Solche Neubeobachtungen sind durchgeführt für die *Bradley*-schen Sterne außer in Greenwich auch in Pulkowa, für die *Tobias Mayer*-Sterne in Gotha, für die *Piazzi*-Sterne in Cincinnati und auf dem Lick-Observatorium, für die *Lalande*-Sterne zu Paris, für die *Groombridge*-Sterne in Greenwich. Alle Sterne bis zur 9. Größe und schwächere, wenn ältere Beobachtungen vorlagen, sind in die Zonen der Astronomischen Gesellschaft aufgenommen, so daß bis zu dieser Grenze eine gewisse Vollständigkeit unserer Kenntnis der Eigenbewegungen für den Nordhimmel erreicht ist. Für den Südhimmel wird durch die Neubeobachtung der *Lacaille*-Sterne am Kap-Observatorium wegen der Unsicherheit der Ausgangsörter das Gleiche noch nicht erreicht werden können.

Die Bestimmung der Bewegung der Sterne, die unterhalb der den Meridiankreisen erreichbaren Helligkeitsgrenze liegen, kann nur auf mittelbarem Wege erfolgen. Nach *W. Struve*s Vorgang werden schwache Sterne in der Nähe hellerer Sterne an diese angeschlossen und aus der relativen Bewegung durch Abzug der bekannten Bewegung des hellen Sternes die Bewegung des schwachen abgeleitet.[74]) Statt der mikrometrischen Vergleichung am Fernrohr kann man aber auch eine photographische setzen. Man mißt zwei zu verschiedenen Zeiten aufgenommene Platten der gleichen Gegend aus, oder besser man macht auf ein und derselben Platte zu zwei verschiedenen Zeiten Aufnahmen der zu untersuchenden Gegend und ermittelt durch mikrometrische Ausmessung der beiden Aufnahmen die relative Lage der einzelnen Sterne. Zweckmäßig erzeugt man in jeder der beiden Epochen zwei oder drei Bilder der Sterne nebeneinander auf der Platte zur Erzielung größerer Sicherheit des Resultats. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß man gleichzeitig für die Gesamtheit der Sterne der Platten deren Bewegungen erhält und daraus die Bewegungen der schwachen Sterne relativ zum Mittel der Bewegungen aller auf der Platte vorkommenden Sterne bekannter Bewegung ermitteln kann. Auf diesem Wege sind besonders von *Kapteyn* und seinen Mitarbeitern[75]) Eigenbewegungsbestimmungen ausgeführt. Für die Sterne der *Kapteyn*schen Auswahlfelder kommt diese Methode auch zur Verwendung.

74) Eine 166 Sterne umfassende Liste nach Messungen von *W.* und *O. Struve* in Poulkova Obs. 10 (1893). Weitere Beobachtungsreihen dieser Art in: *Engelhardt* Observ. 2 (1890), p. 34; 3 (1895), p. 171; Washburn Obs. Publ. 12, 14 von *Comstock;* Straßburg Ann. 4 (1911), p. 177 von *Wirtz;* Astr. Nachr. 185 (1910), p. 213 von *Lau;* Washington Carnegie Inst. Publ. 168 (1913) von *Burnham.*

75) *Kapteyn* und *de Sitter* Groningen Lab. Publ. 19 (1908) (3300 Sterne); *Kapteyn* und *Weersma* ebenda 25 (1914) (3714 Sterne); *Kapteyn* und *van Rhijn* ebenda 28 (1918) (2380 Sterne).

Die Vergleichung zweier zu verschiedenen Zeiten mit dem gleichen Instrument aufgenommenen Platten eines Sternfeldes kann auch mit dem Stereokomparator erfolgen. Dabei erkennt man die bewegten Sterne durch das räumliche Vortreten ihrer Bilder und mißt die Bewegung relativ zu benachbarten unbewegten Sternen. Solche Messungsreihen sind von *Wolf*[76]), *Innes*[77]), *Furuhjelm*[77a]) und von *Turner* und *Bellamy*[78]) ausgeführt.

Für die Erforschung der Bewegungen der Sterngruppen, Sternhaufen und Nebelflecke sind Beobachtungen am Meridiankreise oder unmittelbare mikrometrische Vermessung nur in beschränktem Maße anwendbar. Die Eigenbewegung der hellen Sterne der Plejadengruppe ist aus Meridianbeobachtungen zuverlässig bekannt. Schon von *Bessel* ist aber eine Vermessung der sämtlichen seinem Heliometer zugänglichen Sterne des Haufens ausgeführt[79]), und durch die Wiederholung und Erweiterung dieser Vermessung in späterer Zeit[80]) sind die Bewegungen dieser Gruppe sehr sicher bestimmt. Das Hauptaugenmerk bei diesen Messungen ist aber gerichtet auf die relativen Bewegungen innerhalb der Gruppe und weniger auf die Bewegung der Gruppe als Ganzes.

Die Bestimmung der Eigenbewegung der Sternhaufen und Nebelflecken muß sich jetzt noch fast ausschließlich stützen auf die Vergleichung der aus älteren mikrometrischen Anschlußbeobachtungen mit den aus neueren gleichartigen Messungen oder Ausmessungen photographischer Platten gewonnenen Positionen. Die früheste Reihe genauer Nebelörter ist die von *Schultz*[81]) für die Epoche 1865.0. Sie ist von *Wirtz* in einer mit verbesserten Sternörtern ausgeführten Neubearbeitung mit neueren photographischen und mikrometrischen Positionen für die Epoche 1900.0 verglichen[82]), und aus den der Zwischenzeit von etwa 40 Jahren entsprechenden Differenzen sind die Bewe-

76) Heidelberg Sternw. Veröff. 7 (1919), Nr. 10, 1053 Sterne. Weitere Listen in den Astr. Nachr.

77) Johannesburg Union Obs. Circ. 28, 35, 37, 39, 43, 46—49, 53—56, 58, 59 (1915—1923).

77a) Acta Soc. Fenn. 48, Nr. 1 (1916).

78) London Astr. Soc. Month. Not. 69 (1909), p. 57, 491; 71 (1910), p. 45, 582; 72 (1911), p. 65; 74 (1913), p. 26, 27; 75 (1915), p. 425; 76 (1916), p. 102, 428, 538, 657; 78 (1918), p. 471, 591.

79) *F. W. Bessel*, Astr. Untersuch. I, Nr. 5, Königsberg 1841.

80) Über das vorhandene Beobachtungsmaterial vgl. *F. Hayn*, Die Plejaden, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 38, Nr. 6 (1921); auch Astr. Nachr. 209 (1919), p. 355; 211 (1920), p. 233.

81) Upsala Nova acta (3) 9 (1874), H. 2.

82) Astr. Nachr. 203 (1917), p. 197, 293.

gungen abgeleitet. Wegen des Einflusses der systematischen Beobachtungsfehler und der Eigenbewegung der Vergleichsterne[83]) sind diese Bewegungen mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet, die erst behoben werden wird, wenn photographische Aufnahmen mit größerer Epochendifferenz verglichen werden können. In der Tat besteht ein erheblicher Widerspruch zwischen den aus dieser Vergleichung abgeleiteten Bewegungen und den für ein paar der Nebel von *van Maanen*[84]) aus zur Parallaxenbestimmung benutzten photographischen Aufnahmen gewonnenen.

Systematische Fehler der Eigenbewegungen üben, wie schon *Gauß* (Brief an *Olbers* 5. April 1838) hervorhebt, einen sehr bedeutenden Einfluß auf die Bestimmung der Bewegung der Sonne im Raume aus, weil beide Bewegungen Größen gleicher Ordnung sind. Es bieten deshalb die Resultate für die Richtung der Sonnenbewegung, die sich bei einer Teilung der Sterne nach der Größe der Eigenbewegung aus den verschiedenen Klassen ergeben, ein Kriterium für die Freiheit der Eigenbewegungen von systematischen Fehlern. Bis in die neuere Zeit ist man aber von falschen Voraussetzungen ausgegangen bezüglich des Charakters der Eigenbewegungen, so daß eine Vermischung der beiden Fehlerquellen eintrat. In Frage kommen nur systematische Fehler der Deklinationen und der Eigenbewegungen in Deklination. Eine Untersuchung des *Boss*schen P.G.C. durch *J. C. Kapteyn*[85]) führte zur Ableitung einer Korrektion der jährlichen Bewegungen in Deklination im Betrage von $+ 0{,}0130''$ und dieses Resultat ward von *H. van den Bos*[86]) durch Vergleichung der *Boss*schen δ-Bewegungen mit den von *S. Burnham* auf mikrometrischem Wege bestimmten, also von den die systematischen Fehler der Deklinationen erzeugenden Fehlerquellen unabhängigen Bewegungen bestätigt. *W. B. Varnum*[87]) findet auf gleichem Wege, indem er in die Bewegungen ein von t abhängiges Glied einführt, das aber kein wirklicher Bestandteil derselben sein, sondern nur der allmählichen Anpassung des Fundamentalsystems an die wahren Verhältnisse Rechnung tragen soll, eine Korrektion der jährlichen δ-Bewegungen von $+ 0{,}0046''$. Ein anderer Weg führt nach *P. J. van Rhijn*[88]) zur Bestimmung der systematischen Korrektion der δ-Bewegungen aus den relativen Eigenbewegungen

83) Astr. Nachr. 203 (1917), p. 299, 305.
84) Mt. Wilson Obs. Contrib. Nr. 237 (1922), p. 12.
85) Bull. Astr. Inst. Netherl. 1 (1922), p. 69.
86) Bull. Astr. Inst. Netherl. 1 (1922), p. 155.
87) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 241.
88) Bull. Astr. Inst. Netherl. 1 (1923), p. 209.

der helleren Sterne bezüglich der Sterne zweier höherer Größenklassen, etwa 10^m und 13^m.

12. Radialbewegungen. Die ersten Versuche auf Grund des *Doppler-Fizeau*schen Prinzips, die Bewegungen der Sterne in der Richtung der Gesichtslinie ($\Delta\varrho$) zu ermitteln, wurden von *Secchi*[89]) und *Huggins*[90]) 1867 unternommen, waren aber erfolglos. Die Widersprüche in den Einzelwerten *Huggins'* waren so groß, daß sie den Zweifeln mancher Physiker an der Anwendbarkeit des Prinzips auf Lichtwellen selbst neue Nahrung gaben. Weitere 20 Jahre lang blieben alle Bemühungen in England und Deutschland, auf visuellem Wege zuverlässige Resultate zu erlangen, vergeblich. In Greenwich gelang es nicht, den mittleren Fehler einer Beobachtung unter $\pm$ 15 englische Meilen, also $\pm$ 23 km[91]) herabzudrücken, ganz abgesehen von großen, unbekannten systematischen Fehlern. Die Hilfsmittel waren der Aufgabe nicht gewachsen, da einer Bewegung von 10 km/sec nur eine Verschiebung der Natriumlinie D im Betrage von $0{,}02\ \mu\mu = 0{,}000\,000\,02$ mm entspricht. Erst 1890 vermochte *Keeler* mit dem 36″-Refraktor und den sonstigen Hilfsmitteln des Lick-Observatoriums auf visuellem Wege an drei Sternen Werte zu erhalten, die Vertrauen verdienten. Er fand für α Bootis $\Delta\varrho = -6{,}8$, α Tauri $\Delta\varrho = +55{,}2$, α Orionis $\Delta\varrho = +15{,}8$ km/sec. Gleichzeitig dehnte er die Beobachtungen auch aus auf die Nebelflecken. Für den Orionnebel ergab sich $\Delta\varrho = +17{,}7$ km/sec, und für 13 planetarische Nebel folgten Werte zwischen $+48$ und -65 km/sec.[92]) Die weitere Verfolgung dieser Arbeiten unterblieb aber, da inzwischen *H. C. Vogel*, unterstützt durch *J. Scheiner*, mit Hilfe des von ihm erbauten Spektrographen unter Ausnutzung der großen Fortschritte, die die Astrophotographie seit der Erfindung der Trockenplatten (1875) gemacht hatte, die große Überlegenheit der photographischen Methode für die Bestimmung der $\Delta\varrho$ praktisch nachgewiesen hatte.

Die 1892 veröffentlichten mit dem 12″-Refraktor des Potsdamer Observatoriums erlangten Werte der Radialgeschwindigkeiten von 52 Sternen[93]) beruhten auf Messungen, bei denen der w. F. einer Messung nur noch $\pm$ 2,6 km/sec betrug, und es war klar, daß die Methode eine noch größere Sicherheit zu erlangen gestattete, wenn

89) *A. Secchi*, Die Sterne, Leipzig 1878, p. 199.

90) London Astr. Soc. Month. Not. 41 (1880), p. 119.

91) Vgl. *H. Homann*, Beiträge zur Untersuchung der Sternbewegungen, Diss., Berlin 1885.

92) Lick Obs. Publ. 3 (1894), p. 195, 217.

93) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 7, T. 1 (1892).

ein entsprechend großes Instrument benutzt werden konnte. So ging die weitere Ausnutzung des großen Erfolges zunächst auf die über größere optische Hilfsmittel verfügenden Institute über. Mitte der 90er Jahre wandte *A. Belopolsky* den 30″-Pulkowaer Refraktor mit schönem Erfolge zur Messung veränderlicher Radialgeschwindigkeiten an, und bei dem von *Campbell* besonders für die Bestimmung der Radialgeschwindigkeiten konstruierten, die Einflüsse der Biegung und der Temperaturänderung möglichst unschädlich machenden Spektrographen in Verbindung mit dem 36″ Refraktor der Lickssternwarte ging der w. F. einer Bestimmung auf $\pm$ 0,5 km/sec unter günstigen Verhältnissen zurück. Durch die spektrographische Bestimmung bekannter Geschwindigkeiten, wie der Rotationsgeschwindigkeit der Sonne, der Bewegung der Planeten und besonders durch den Nachweis, daß der mit der Stellung der Erde gegen den Stern sich ändernde Einfluß der Bewegung der Erde in ihrer Bahn, der in günstigen Fällen auf $\pm$ 30 km/sec sich beläuft, in den gemessenen relativen Bewegungen seinem wirklichen genauen Betrage nach zutage tritt, wurde die Richtigkeit des Prinzips der Methode und die Freiheit der Resultate von erheblichen systematischen Fehlern überzeugend dargetan. Die Hauptschwierigkeit, auf die man stieß, war die ganz unerwartete Feststellung der großen Häufigkeit von Doppel- und mehrfachen Sternsystemen, die so eng sind, daß eine Trennung der Komponenten die auflösende Kraft der zur Verfügung stehenden optischen Hilfsmittel übersteigt, oder deren eine Komponente nichtleuchtend oder so schwach leuchtend ist, daß sie sich weder dem Auge noch der photographischen Platte verrät, während ihr Einfluß in der Veränderlichkeit der Bewegung des sichtbaren Sternes sich bemerkbar macht. Bei den helleren Sternen ist der Prozentsatz an spektroskopischen Doppelsternen zu etwa 30 % zu veranschlagen. Es können daher immer erst mehrere Beobachtungen entscheiden, ob veränderliche Radialgeschwindigkeit anzunehmen ist. Den w. F. einer einzelnen Radialgeschwindigkeitsbestimmung bei einem günstigen Stern vom zweiten Typus gibt *Plaskett*[94]) zu $\pm$ 0,5 km/sec an bei Anwendung eines 3-Prismen-Spektrographen. Der Fehler steigt aber bei den Sternen der früheren Typen und Anwendung nur eines Prismas auf $\pm$ 2 km und kann bei starker Verwaschenheit der Linien bis $\pm$ 11 km/sec anwachsen. Neben den Messungsfehlern sind offenbar noch physikalische Fehlerquellen in den Sternatmosphären vorhanden, die zur Vorsicht in der Interpretation der Linienverschiebung als Ausdruck der wirk-

94) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 230.

lichen Bewegung des Sterns im Raume zwingen. *Frost*[95]) hebt persönliche Messungsfehler selbst bei einwandfreien Aufnahmen hervor, die bei den gleichen Aufnahmen Differenzen von $\pm$ 1 km/sec erzeugen können und bei Anwendung verschiedener Instrumente noch größere Beträge annehmen. Im einzelnen wurden die systematischen Differenzen zwischen den Resultaten der vorzüglichsten Quellen für Radialbewegungen der Sterne von *Ludendorff*[96]) und *Adams*[97]) untersucht.

Die Verwendung des Objektivprismas zur Bestimmung von Radialgeschwindigkeiten kommt in erster Linie für statistische Zwecke in Frage. *Pickering*[98]) schlug für die Messung von Radialgeschwindigkeiten auf solchen Aufnahmen eine Reversion des Prismas und Benutzung von Sternen der Platte mit bekannter Radialbewegung zur Bestimmung der normalen Lage einer bestimmten Linie in den beiden Bildern des Spektrums der einzelnen Sterne vor. Die Theorie dieser Methode wurde von *Schwarzschild*[99]) entwickelt. *Hamy*[100]) beschreibt ein Verfahren zum Aufkopieren eines Vergleichsspektrums auf die Platte. Nach einem Vorschlage von *Wood*[101]) verwendet man zur Erzeugung einer künstlichen Vergleichsabsorptionslinie bekannter Wellenlänge ein Neodymchloridfilter vor dem Objektiv. Diese Methode gestattet die Bestimmung von Radialgeschwindigkeiten bei Sternen 9. Größe bis auf etwa $\pm$ 10 km/sec genau.[102])

Das in den Veröffentlichungen der Sternwarten, die an der Arbeit der Bestimmung der Radialbewegungen der Sterne beteiligt sind, zerstreute Beobachtungsmaterial[103]) ist von *Voûte* in einem Gesamtkataloge zusammengetragen.[104]) Dieser Katalog enthält die Radialgeschwindigkeiten von 2071 Objekten, unter denen sich 148 Nebel und Sternhaufen befinden. *W. Gyllenberg* hat für die 48 *Charlier*schen Felder

95) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 377.

96) Astr. Nachr. 197 (1914), p. 1.

97) Astroph. Journ. 42 (1915), p. 185.

98) Astr. Nachr. 142 (1897), p. 105; 171 (1906), p. 137.

99) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 23, Nr. 69 (1913).

100) Paris C. R. 158 (1914), p. 81.

101) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 376.

102) Astr. Nachr. 184 (1910), p. 201.

103) Größere Zusammenstellungen sind gegeben vom Lick Observatory in Lick Obs. Bull. 6 (1911), p. 101; 7 (1912), p. 19, 113; von *Küstner* in Astroph. Journ. 27 (1908), p. 301; vom Mt. Wilson Obs., ebenda 42 (1915), p. 172; vom Cape Observ. in Cape Obs. Ann. 10, P. 1 (1911), P. 5 (1921); Astroph. Journ. 48 (1918), p. 261; 50 (1919), p. 161; vom Dominion Obs. Ottawa in Publ. 4 (1919), p. 331; vom Victoria Observ. Vict. Publ. 2, Nr. 1 (1921).

104) *J. Voûte*, First Catalogue of Radial Velocities; Natuurkundig Tijdschrift voor Ned.-Indië 80, Nr. 2, Weltevreden 1920.

des Himmels unter Benutzung von 1640 Sternen, deren Eigenbewegung und Radialbewegung bekannt ist, mittlere Werte dieser Bewegungen zusammengestellt in Lund Meddelanden (2) Nr. 13 (1915).

Über die Radialbewegungen der Gasnebel liegt eine erschöpfende Bearbeitung von *Campbell* und *Moore* im Teil IV des der Erforschung der Nebel gewidmeten 13. Bandes der Publications of the Lick Observatory (1918) vor. Die Untersuchungen erstrecken sich auf 125 ein Spektrum von hellen Linien besitzende Nebel, von denen 17 der Großen, 1 der Kleinen Magellanischen Wolke angehören.

Mit der Bestimmung der Radialbewegung der Spiralnebel hat sich besonders *Slipher* auf dem Lowell Observatory zu Flagstaff Ariz. beschäftigt. Die bis 1914 erzielten Resultate sind in Publ. III der American Astr. Society (1918), p. 100, zusammengestellt.[105]) Die gefundenen außerordentlich großen Linienverschiebungen sind durch weitere Beobachtungen an derselben Sternwarte sowie am Lick und Mount Wilson Observatory bestätigt worden und können zur Zeit nicht anders erklärt werden als durch die Annahme, daß sie auf Grund des *Doppler-Fizeau*schen Prinzips der Ausdruck einer Bewegung seien. Auch für 16 Kugelsternhaufen sind die Radialbewegungen durch *Slipher* bekannt geworden.[106])

13. Parallaxen. Trigonometrische Methoden. Die Entwicklung der Methode der trigonometrischen Parallaxenbestimmung ist schon in Encykl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. **9c** dargestellt mit Nachweis der Quellen für die Resultate. Der um die Zeit dieses Berichtes (1905) vorliegende Stand der Frage der Fixsternentfernungen wurde auch durch *Kostinsky*[107]) einer historisch-kritischen Besprechung unterzogen. An hinreichend zuverlässigem Material aus der Zeit, seit durch *Halleys* Entdeckung der Eigenbewegungen die Endlichkeit der Entfernungen der Fixsterne erwiesen und seit im Jahre 1838 gleichzeitig für drei Sterne von *Bessel, Struve* und *Henderson* die Aufgabe der Entfernungsbestimmung auf drei verschiedenen Wegen gelöst war, lagen neben einigen Einzelwerten nur die Heliometerreihen vom Kap[108]), von New Haven[109]) und Leipzig[110]) vor mit völlig gesicherten Werten

105) Weitere Werte von Radialgeschwindigkeiten von Spiralnebeln finden sich London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 766.

106) Die Werte sind angegeben London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 752.

107) Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. (2) 17 II (1905).

108) Cape Obs. Ann. 8, Part 2 (1900).

109) Yale Univ. Obs. Trans. 1, Part 6 (1902).

110) Leipzig Ges. d. Wiss., Abhandl. 22, Nr. 4; 24, Nr. 3; 27, Nr. 6 (1895—1902).

der Parallaxen der hellsten Sterne und der Sterne mit größter Eigenbewegung des Himmels und außerdem eine Anzahl mit größerer Unsicherheit behafteter, aber doch innerhalb dieser Grenzen noch zuverlässiger Bestimmungen nach der zuerst von *Auwers* angewandten, später von *Kapteyn*[111]) ausgebildeten und von *Flint*[112]) ausgiebig angewandten Methode der Rektaszensionsdifferenzen.

Seit der Zeit jenes Berichtes ist nun aber die photographische Methode der Einzelbestimmung von Parallaxen soweit entwickelt, daß sie jetzt als die erfolgreichste Methode anzusehen ist. Die bei den ersten Anwendungen der Methode durch *Rutherford*[113]) und in einer großen Beobachtungsreihe von *Pritchard*[114]) erhaltenen Parallaxenwerte hatten sich als mit sehr erheblichen systematischen Fehlern behaftet herausgestellt.[115]) Besonders auffällig traten solche Fehler in die Erscheinung bei einer Untersuchung *Wilsings*[116]) über die Parallaxe von 61 Cygni mit Hilfe von 116 Aufnahmen. *Kapteyn*[117]) erkannte als Ursachen dieser Fehler 1. den Einfluß ungleicher Helligkeit des zu untersuchenden Sterns und der Vergleichsterne und 2. den einer Verschiedenheit der Fernrohrlage. Das Zusammenwirken dieser beiden Fehlerquellen mit der Dispersion in der Atmosphäre und den Unvollkommenheiten in der Nachführung des Fernrohrs erzeugt die als „Führungsfehler" und als „Stundenwinkelfehler" bezeichneten Quellen systematischer Fehler. Der Stundenwinkelfehler ließ sich durch Beobachtung in der gleichen Lage des Instruments in der Nähe des Meridians leicht beseitigen, zur Unschädlichmachung des Führungsfehlers führte die Abschwächung des helleren Sternes. *Russell*[118]) erzielte die Abschwächung durch eine vor der photographischen Platte angebrachte Glasplatte, die einen gelb gefärbten Gelatinefleck trug, durch den das Licht des helleren Sternes passieren mußte. *Schlesinger*[119]) verwandte mit noch größerem Erfolge ein vor der photographischen Platte befindliches rotierendes Scheibchen mit einem Sektor-Ausschnitt von verstellbarer Größe, der das Licht des helleren Sternes nur für einen bestimmten Teil der Gesamtbelichtungsdauer auf die Platte wir-

111) Leiden Sternw. Ann. 7 (1897).

112) Washburn Obs. Publ. 11, Madison (1902).

113) Columbia Coll. Obs. Contr. 5, 6 (New York 1893, 1895); Astron. Journ. 13 (1893), p. 37.

114) Oxford Univ. Obs., Observ. Fasc. 3, 4 (1889, 1892).

115) Astr. Ges. Vjs. 28 (1893), p. 117.

116) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 11, Nr. 36 (1897).

117) Groningen Lab. Publ. 1 (1900).

118) Astron. Journ. 26 (1910), p. 147.

119) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 384.

ken ließ. Durch Verwendung geeigneter nur für Strahlen einer bestimmten Wellenlänge empfindlicher Platten bei nicht speziell für photographische Zwecke berechneten Objektiven oder auch von Farbfiltern wurden scharfe und so sicher zu messende Bilder gewonnen, daß es gelang, Resultate zu erzielen, bei denen der zufällige Fehler einer Einzelparallaxe nur noch $\pm 0{,}017''$[120]) beträgt. Durch den Zusammenschluß einer Reihe von Sternwarten zu gemeinsamer Arbeit ist seitdem schon ein sehr umfangreiches Material[121]) an photographisch bestimmten Parallaxen von großer Zuverlässigkeit für mehr als 1000 Sterne angesammelt.

Die Heliometermessungen wurden ebenfalls in Leipzig[122]) und in New Haven[123]) fortgeführt und ergaben durch die Aufnahme schwächerer, stark bewegter Sterne in das Programm wertvolles Vergleichsmaterial. Der am Schluß des zweiten Bandes der Yale Observations gegebene Gesamtkatalog umfaßt 243 Sterne.

Für die Bestimmung von Parallaxen durch Rektaszensionsdifferenzen am Meridiankreise schien durch die Einführung des *Repsold*schen selbstregistrierenden Mikrometers ein Mittel gegeben zu sein, die Beobachtungsgenauigkeit wesentlich zu vergrößern und systematische Fehler zu vermeiden. Das führte in der Tat zu einer Fortführung der Beobachtungsreihe von *Flint*[124]) sowie zur Aufnahme gleichartiger Beobachtungen von mehreren anderen Seiten.[125]) *Grossmann* schlug vor, diese Methode zu einer Parallaxen-Durchmusterung des Himmels zu verwenden, und bestimmte die relativen Parallaxen von 231 Sternen bis $6{,}5^m$ der Zone $+ 15^0$ bis $+ 20^0$ durch Anschluß an 534 schwache Sterne aus der gleichen Zone.[126]) Die er-

120) Vgl. *G. Schnauder,* Astr. Nachr. 217 (1923), p. 5.

121) Zusammenstellungen der Resultate: Allegh. Obs. Publ. 4 (1919), 5 (1920); Astron. Journ. 33 (1921), p. 136, 171; Dearborn Obs., Paris C. R. 168 (1919), p. 1095; 172 (1921), p. 1016; Greenwich Obs., London Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 592; 81 (1920), p. 32; 82 (1921), p. 34; 83 (1922), p. 64; Leander Mc Cormick Obs. Publ. 3 (1922); Mt. Wilson Obs. Contr. 6 (1915), p. 131; 7 (1917), p. 189; 8 (1918), p. 235; 9 (1919), p. 175; 10 (1921), p. 93; Sproul Obs. Publ. 4, 5, 6 (1919—1922); Yerkes Obs. Publ. 4, Part 1 (1917); Part 3 (1920); Astron. Journ. 33 (1920), p. 92. Weitere Zusammenstellungen von Resultaten der amerikanischen Sternwarten im Astron. Journ. 34, 35.

122) Leipzig Ges. d. Wiss. 30, Nr. 4 (1908); 38, Nr. 1 (1920).

123) Yale Univ. Obs. Trans. 2 (1912); am Schluß Zusammenstellung aller am Yale Univ. Obs. bestimmten Parallaxen.

124) Washburn Obs. Publ. Vol. 13, P. 1, Madison (1919).

125) Heidelberg Veröff. 4 (1906), Beob. *Jost*; Rom Osserv. Coll. Rom. (3) 5, Part. 2 (1912), Beob. *Abetti*; Charkow Obs. Ann. 3 (1912), Beob. *Jewdokimov;* Königsberg Beob. 43, Nr. 4 (1919), Beob. *Jost.*

126) München Sternw. Neue Ann. 5, Heft 1 (1917).

haltenen Parallaxen sind mit einem aus der inneren Übereinstimmung abgeleiteten m. F. von $\pm$ 0,043″ behaftet, und in ihrer Gesamtheit sind die Resultate der Beobachtungsreihe als reell anzusehen und lassen die Methode als für eine parallaktische Durchmusterung und zur Bestimmung von Durchschnittswerten der Parallaxe geeignet erscheinen, während die erhaltenen Einzelwerte der Parallaxe nicht verbürgbar sind und das Ziel auf photographischem Wege sehr viel schneller und auch sicherer erreichbar ist. Daß aber auch bei Anwendung des Registriermikrometers und von Abblendung noch kein ausreichender Schutz gegen Auftreten erheblicher systematischer Fehler gegeben ist, bewies eine Beobachtungsreihe von *Courvoisier*[127]), die für die Sterne γ, δ, ε Ursae maj. zu ganz unzulässig großen Werten führte.

Auch auf photographischem Wege wurde die Bestimmung der relativen Parallaxe von Sterngruppen oder ganzer Sternfelder mehrfach ausgeführt. Nach Aufnahmen von *Küstner* in Bonn leiteten *Kapteyn* und *de Sitter*[128]) auf diese Weise für die mittlere Parallaxe der Hyadengruppe den Wert 0,023″ $\pm$ 0,0038″ ab. Aber bei der Massenbestimmung[129]) der Parallaxen von 10 ausgewählten Sternfeldern nach von *Donner* in Helsingfors aufgenommenen Platten ergab sich, daß bei einem m. F. von $\pm$ 0,035″ der einzelnen Parallaxe unter den 3650 Einzelwerten größere positive, unmittelbar als Parallaxe verbürgbare Werte nicht vorkamen; es konnte nur als erwiesen gelten, daß in der Darstellung der Beobachtungen ein einem w. F. von $\pm$ 0,017″ entsprechender Einfluß einer durchschnittlichen Parallaxe zum Vorschein kommt. Von den Feldern der nach dem *Kapteyn*schen Plan der selected areas gemachten Aufnahmen wurden mehrere vermessen[130]), und es zeigte sich auch hierbei, daß die durch den Einfluß der Parallaxe bewirkte Abweichung der Kurve der übrigbleibenden Fehler von der reinen Fehlerkurve durch den störenden Einfluß anderer den Aufnahmen noch innewohnender systematischer Fehler überdeckt wurde und daß den errechneten Einzelparallaxen eine reelle Bedeutung nicht beigelegt werden könne. Als Grenze der mit den jetzigen Hilfsmitteln noch bestimmbaren trigonometrischen Parallaxen dürfen wir 0,05″ betrachten, unsere Kenntnis der wirklichen Größenverhältnisse und Entfernungen wäre demnach auf einen Bereich von 20 Sternweiten beschränkt und über diesen Bereich hinaus wären nur die indirekten

127) Berlin-Babelsberg Sternw. Veröff. 1, H. 4 (1915).

128) Groningen Lab. Publ. 23 (1909).

129) Groningen Lab. Publ. 20 (1908).

130) Astr. Nachr. 201 (1915), p. 15; 202 (1916), p. 203; 210 (1920), p. 329.

Methoden noch anwendbar. Wenn wir aber aus der Beobachtung einen Wert $\pi = 0{,}05''$ finden, so berechtigt uns das nur zu sagen, daß die Parallaxe des betreffenden Gestirns zwischen den Grenzen $0{,}03''$ und $0{,}07''$ liegt, und sie kann so uns nur zu einer rohen Abschätzung der linearen Bewegung, der absoluten Größe und der Leuchtkraft dienen.

14. Parallaxen. Spektroskopische Methoden. Weiter hinaus in den Raum tragen uns die neueren spektroskopischen Methoden. Die *Kohlschütter-Adams*sche Methode, die die absolute Helligkeit in Beziehung zu der relativen Stärke bestimmter Linien des Spektrums setzt, ist beschränkt auf die Sterne der späteren Typen F bis M. Die Eichung der für jeden Typus gesondert aufzustellenden Entfernungsskala nach der relativen Linienintensität war auszuführen mit Hilfe derjenigen Sterne des gleichen Typus, deren Parallaxe trigonometrisch bestimmt war, und es zeigte sich bald, daß die erste Eichung der für fünf Gruppen[131]) $F0 - F6$; $F7 - G7$; $G8 - K4$; $K5 - K9$; M abgeleiteten Kurven[132]) verbesserungsbedürftig sei.[133]) Für die endgültige Ableitung der Parallaxen ist unter Benutzung eines reichhaltigen Materials an trigonometrischen Parallaxen und unter Hinzuziehung von dynamischen und Säkularparallaxen in Astroph. Journ. 53 (1921), p. 14 eine neue Skala aufgestellt, auf der die im Anschluß mitgeteilte Tabelle von 1646 spektroskopischen Parallaxen beruht.

Zur Erweiterung der Methode auch auf das Gebiet der A- und B-Sterne benutzt *Lindblad*[134]) als Kriterium für die absolute Helligkeit die relative Intensität bestimmter nebeneinander liegender Stellen des Spektrums sowie die Intensität der Cyanbanden und bestimmt den Korrelationskoeffizienten für die Beziehung der absoluten Größe zu dem Verhältnis der zur Erzielung gleicher Schwärzung dieser Stellen erforderlichen Expositionszeiten für die Typen A, B mit Hilfe von Sterngruppen bekannter Parallaxe und für die späteren Typen durch Sterne gegebener Entfernung. *Adams* und *Joy*[135]) benutzen zu einer strengeren Klassifizierung der A- und B-Sterne die Intensität

131) Die Klassifizierung der Spektren ist dabei vorgenommen nach dem Intensitätsverhältnis der Wasserstofflinien H_β und H_γ zu einer Reihe metallischer Linien, meist Eisenlinien, die nur geringe Änderungen der Intensität in den Spektralklassen F bis M zeigen, unter möglichst strenger Wahrung des Anschlusses an die Harvard-Klassifizierung.

132) Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 147.

133) Vgl. *L. Boss,* Astron. Journ. 33 (1920), p. 17.

134) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 85.

135) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 242; vgl. auch *D. L. Edwards,* London Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 47; 84 (1924), p. 366 und 85 (1925), p. 439.

der Linien der Metalle und der Heliumlinien 4026, 4471 und erhalten mit Hilfe von Sternen bekannter absoluter Helligkeit aus der Taurus- und Ursa maj.-Gruppe eine gut verwendbare Beziehung zwischen der absoluten Helligkeit und dem Spektrum, nach der sie die Parallaxe von 544 Sternen der Klassen A und $B8$, $B9$ bestimmen.

Auch Aufnahmen mit dem Objektivprisma sind verwendbar zur Bestimmung der absoluten Helligkeit und daraus der Parallaxe nach den Prinzipien der *Kohlschütter-Adams*schen Methode. *Shapley* und *Lindblad* wandten dieses Verfahren an zur Bestimmung der Entfernung von 50 Sternen mit den Platten des Draper-Katalogs.[136]) *Pannekoek*[137]) machte darauf aufmerksam, daß die physikalische Ursache, die der Klassifikation der Spektren bei der spektroskopischen Methode der Entfernungsbestimmung zugrunde liegt, nicht die Leuchtkraft des Sterns allein ist, sondern daß sie eine Funktion von Leuchtkraft und Masse ist, so daß das Verhältnis der mittleren Masse der zur Eichung der Skala benutzten Sterne zu der Masse des einzelnen untersuchten Sterns eingeht.

Für die Verwendung der durch die Beobachtung ermittelten Parallaxenwerte für stellarstatistische Zwecke ist im Auge zu behalten, daß einerseits die trigonometrischen Parallaxen wegen des bei der Auswahl der zu beobachtenden Sterne angewandten Prinzips und wegen der den Beobachtungen gesetzten Grenze immer die großen positiven Werte bevorzugen werden und daß andererseits die spektroskopische Methode bei den Sternen von kleiner scheinbarer Helligkeit wieder die Sterne großer Leuchtkraft bevorzugen wird. Wegen der notwendigen Eichung der Skala bei der spektroskopischen Methode mit Hilfe der trigonometrischen Parallaxen wird ferner das Verhalten dieser letzteren auch auf jene übertragen.

Von verschiedenen Autoren wurde versucht, aus dem Gesamtmaterial an Parallaxenwerten systematische Reduktionen der einzelnen Reihen abzuleiten. *Flint*[138]) leitet unter Berücksichtigung eines Einflusses des Spektrums und der Größe der Eigenbewegungen für die Heliometer-, Meridiankreis- und photographischen Reihen die Abhängigkeit von der Jahreszeit ab. Er hält die Heliometerreihen für die am besten gesicherten und das Auftreten kleiner systematischer Fehler in den photographischen Reihen für möglich. *Hertzsprung*[139]) ver-

136) Harvard Obs. Circ. 228 (1921).

137) Bull. Astr. Inst. Netherlands 1 (1922), p. 115.

138) Astron. Journ. 29 (1916), p. 189; 33 (1920), p. 95.

139) Astr. Nachr. 208 (1919), p. 89.

glich die beobachteten Parallaxen mit den nach der empirischen Formel

$$\log \pi_{\mu, \Delta\varrho} = \frac{\log \mu}{\Delta\varrho} + 0{,}44$$

für die zur Eigenbewegung μ und Radialgeschwindigkeit $\Delta\varrho$ bei gleichförmiger Verteilung der Richtungen der absoluten Bewegungen gehörenden Parallaxen und leitete daraus den bei verschwindender Eigenbewegung zu erwartenden systematischen Fehler der Parallaxe ab zu $+ 0{,}020'' \pm 0{,}008''$. *Boss*[140]) gleicht für die trigonometrischen Reihen die Abweichungen der Einzelwerte von dem Mittel mehrerer Beobachter aus nach dem sin und cos der einfachen und doppelten Rektaszension und bestimmt aus den nach Anbringung dieser Reduktion übrigbleibenden Abweichungen die Gewichte. Er findet eine Überlegenheit der spektroskopischen Methode, bei der der zufällige Beobachtungsfehler mit der Parallaxe selbst wächst, über alle andern. Nach der Beziehungsgleichung zwischen absoluter Größe, scheinbarer Größe und Parallaxe: $M = m + 5 \log \pi$ besteht zwischen der wahren Parallaxe π, der spektroskopisch gefundenen π_s und der Korrektion der ihr zugrunde liegenden absoluten Größe die Beziehung $\pi = \pi_s e^{\frac{1}{5}\Delta M}$. Ist also π_t die trigonometrisch bestimmte Parallaxe, $\Delta\pi_t$ ihre Korrektion, so ist $\pi_t + \Delta\pi_t = \pi_s e^{\frac{1}{5}\Delta M}$. Die mit Hilfe dieser Gleichung sich ergebenden Bedingungsgleichungen zwischen den systematischen Fehlern der trigonometrischen Parallaxen und den Verbesserungen der spektroskopisch bestimmten absoluten Helligkeiten verwendet *Strömberg*[141]) zur Bestimmung der systematischen Korrektionen, wobei die Verläßlichkeit der spektroskopischen Parallaxen zum Ausdruck kommt.

Die mittlere Parallaxe als Funktion von Größe und Eigenbewegung stellt *Kapteyn* dar durch den Ausdruck

$$\bar{\pi} = ab^m \mu^c, \quad \text{oder} \quad \log \bar{\pi} = \log a + m \log b + c \log \mu,$$

wo a, b, c Konstante sind. *Van Maanen* und *Wolfe*[142]) verglichen die beobachteten Parallaxen π_0 mit den nach dieser Formel mit den *Kapteyn*schen Werten der Konstanten berechneten Werten $\bar{\pi}_c$ und bestimmen sodann aus Bedingungsgleichungen der Form

$$d \log a + m\, d \log b + \log \mu\, dc = \frac{(\pi_0 - \bar{\pi}_c)}{\bar{\pi}_c}$$

verbesserte Werte von a, b, c. Die Mittel der für die einzelnen Reihen übrigbleibenden Fehler sind die systematischen Fehler dieser Reihen. Für die großen photographischen Reihen werden kleine konstante

140) Astron. Journ. 33 (1920), p. 17.

141) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 11.

142) Mt. Wilson Obs. Contr. Nr. 189 (1920).

Werte gefunden, während für die Meridiankreis- und die Yale-Heliometerreihen und zwei photographische Reihen eine Abhängigkeit von der Größe auftritt. In einer Bearbeitung von *G. Schnauder*[143]) werden die fünf großen photographischen Reihen untereinander ausgeglichen und dann die Abweichungen der anderen Reihen gegen dieses System erster Ordnung bestimmt.

Verzeichnisse der beobachteten Werte der Parallaxen verlieren bei dem jetzigen schnellen Anwachsen unserer Kenntnis der Fixsternentfernungen sehr schnell an Wert. Solche Zusammenstellungen aller jeweils bekannten Parallaxen wurden gegeben von *Oudemans* 1889[144]), *Kapteyn* 1901[145]), *Bigourdan* 1909[146]) (vollständigste Sammlung der Beobachtungen), *Kapteyn* und *Weersma* 1910.[147]) Eine Liste der 20 der Sonne nächsten Sterne nach unserer Kenntnis zu Anfang 1922 teilt *E. Hertzsprung* in Bull. Astr. Inst. of the Netherlands I, Nr. 5 mit. *J. Haas* stellt in Veröff. Sternw. Berlin-Babelsberg, Bd. 3, Heft 3 (1923) die Sterne innerhalb eines Bereichs von 15 Sternweiten um die Sonne zusammen mit allen Angaben über Entfernung, Größe, Spektrum, Bewegung.

Die Bestimmung der Parallaxen der Nebelflecken durch unmittelbare Messungen ist nur ausführbar beim Vorhandensein einer sternartigen Verdichtung oder eines Zentralsternes. Solche sind bei der größeren Mehrzahl der planetarischen Nebel vorhanden. Die Parallaxe des Ringnebels in der Leier wurde mehrfach durch *Newkirk*[148]) zu bestimmen gesucht. Seinen letzten aus Aufnahmen auf der Lick-Sternwarte abgeleiteten Wert $\pi = 0{,}015''$ betrachtet er selbst nur mit Einschränkung als Ausdruck einer Parallaxe. *Van Maanens* Bestimmungen der Parallaxen von 16 planetarischen Nebeln[149]) geben für den Lyra-Nebel den Wert $\pi = 0{,}001'' \pm 0{,}008''$. Das Mittel der 16 Werte *van Maanens* ist für die relative Parallaxe der planetarischen Nebel $\pi = 0{,}012''$. Diesem Werte würde eine wahrscheinliche absolute Parallaxe von $0{,}014''$ entsprechen.

Bei den Spiralnebeln fehlt es fast ausnahmslos ganz an einem Anhaltspunkte für die Entfernungsbestimmung durch Messung. Für

143) Astr. Nachr. 217 (1923), p. 1.

144) Astr. Nachr. 122 (1889), p. 193.

145) Groningen Lab. Publ. 8 (1901).

146) Paris Bull. Astr. 26 (1909).

147) Groningen Lab. Publ. 24 (1910) [ergänzt durch *Walkey* in J. Brit. Astr. Assoc. 27 (1917)].

148) Diss. München 1902; London Astr. Soc. Month. Not. 66 (1906), p. 444; Lick Obs. Bull. 9 (1917), p. 100.

149) Mt. Wilson Obs. Contrib. 237 (1922).

den großen Andromedanebel führten Heliometermessungen von *Franz*[150]) unter Benutzung des Neuen Sterns im Nebel, Mikrometermessungen von *Barnard*[151]) und photographische Aufnahmen von *Bohlin*[152]) zu ganz widersprechenden Resultaten. *Van Maanen*[149]) findet für diesen Nebel eine relative Parallaxe von $0{,}006'' \pm 0{,}008''$. Die noch an zwei anderen Spiralnebeln ausgeführten Messungen gestatten nur als obere Grenze der Parallaxe den Wert $0{,}001''$ festzusetzen.

Man hat auch versucht, beim Fehlen anderer Anhaltspunkte durch Zuhilfenahme der stellarstatistischen Gesetze zu einer Vorstellung der Entfernungsverhältnisse zu gelangen. Setzt man die Kenntnis der Zahl der Sterne als Funktion der absoluten Helligkeit voraus, so kann man zu der an einer bestimmten Stelle des Himmels durch direkte Abzählung ermittelten Zahl der Sterne einer bestimmten scheinbaren Helligkeit, wenn man annehmen darf, daß die Entfernung dieser Sterne im wesentlichen gleich ist, die ihnen zukommende absolute Helligkeit auf Grund jener Beziehung zwischen der Sternzahl und der absoluten Helligkeit bestimmen und durch den Vergleich der scheinbaren und der absoluten Helligkeit die Entfernung ermitteln. Die Voraussetzungen dürften am ehesten bei den Sternhaufen erfüllt sein und sind auch in der Tat zur Bestimmung der Entfernung derselben benutzt.

A. Pannekoek[153]) hat den gleichen Weg eingeschlagen, um auch in die Struktur der Milchstraße einzudringen. Das Verfahren muß aber zu Trugschlüssen führen, wenn die Voraussetzung, daß in dem speziellen Gebiete und bis zu den Entfernungen des untersuchten Raumteils hin die gleichen Verhältnisse gelten wie in dem Raume, auf dessen Auszählung das allgemeine statistische Gesetz der absoluten Helligkeiten beruht, nicht völlig gesichert ist, worauf *A. Kopff*[154]) und *C. Easton*[155]) hinweisen.

15. Photometrische Kataloge. Änderungen in der scheinbaren Helligkeit der Sterne wären eine notwendige Folge der Bewegungen, die wir festgestellt haben, wenn unsere Beobachtungen einen ausreichenden Zeitraum überspannen. Helligkeitsangaben für die dem freien Auge sichtbaren Sterne besitzen wir schon in dem ältesten Fixsternkataloge, dem des *Ptolemäus*. Die Sterne sind dort in nahe

150) Astr. Nachr. 118 (1888), p. 123.
151) Astroph. Journ. 9 (1899), p. 184.
152) Astr. Nachr. 176 (1907), p. 205.
153) London Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 500.
154) Astr. Nachr. 216 (1922), p. 325.
155) London Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 215.

richtiger Weise nach dem Verhältnis ihrer scheinbaren Helligkeit in die sechs gebräuchlichen Größenklassen eingeteilt. Die Helligkeitsangaben sind im allgemeinen nur nach vollen Größenklassen gemacht; für einen Teil der Sterne ist aber durch den Zusatz „heller" bzw. „schwächer" eine größere Genauigkeit erstrebt, die für uns sehr wertvoll wäre, wenn nicht viele Zweifel an der Zuverlässigkeit der überlieferten Angaben beständen. Eine wesentlich zuverlässigere Quelle für die Helligkeit der helleren Sterne besitzen wir erst in der Revision der Größenangaben des *Ptolemäus* durch *Al-Sûfi* (964), der gerade in der Helligkeitsschätzung seine Hauptaufgabe erblickte.

Für ein tieferes Eindringen in die Struktur des Fixsternsystems geeignete Grundlagen wurden erst durch *Argelanders* Arbeiten geschaffen. Die schon früher erwähnten Werke: *Argelander*, Neue Uranometrie, *Gould*, Uranometria Argentina sind die wichtigsten Urkunden über die Helligkeit der dem freien Auge sichtbaren Sterne für die Zeit der Mitte des vorigen Jahrhunderts, und in den gleichfalls schon angeführten großen Durchmusterungskatalogen von Bonn und Cordoba ist die Katalogisierung der visuellen Helligkeiten der Sterne erweitert bis zu den mit kleinen Fernrohren und bei direkter Beobachtung am Instrument erreichbaren Grenzen. Eine Verfeinerung und Sicherung dieses großen Materials im einzelnen wird durch die Bearbeitung der Zonen der Astronomischen Gesellschaft und ihrer südlichen Fortsetzung dargeboten.

Von denjenigen Katalogen, deren Helligkeitsangaben auf genauen photometrischen Messungen beruhen, kommen für stellarastronomische Zwecke besonders die Potsdamer photometrische Durchmusterung[156]) in Betracht, die alle Sterne des nördlichen Himmels bis zur Größe $7{,}5^m$ enthält, und die Revised Harvard Photometry[157]) mit 9110 Sternen des ganzen Himmels, hauptsächlich bis $6{,}5^m$. Ein weiterer vom Harvard College Observatory herausgegebener Katalog[158]) enthält die photometrischen Größen von 36682 Sternen schwächer als $6{,}5^m$ bis 10^m, und in einem dritten Katalog werden die photometrischen Größen aller Sterne der Bonner Durchmusterung aus $10'$ breiten und um 5^0 voneinander abstehenden Zonen zwischen 0^0 und $+85^0$ Deklination aufgeführt.[159])

Photographische Helligkeitsverzeichnisse größeren Umfangs liegen

156) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 17 (1907).
157) Harvard Obs. Ann. 50 (1908).
158) Harvard Obs. Ann. 54 (1908).
159) Harvard Obs. Ann. 70 (1909).

vor in der schon angeführten Cape Photographic Durchmusterung[160]) und in den Katalogen der Zonen der photographischen Himmelskarte, die nach ihrer Vollendung alle Sterne bis zur photographischen Größe 11^m verzeichnen werden. Größeren Ansprüchen an die Genauigkeit der Angaben der photographischen Größe entsprechen die Göttinger[161]) und die Yerkes-Aktinometrie.[162]) Erstere enthält die photographischen Helligkeiten der Sterne bis $7{,}5^m$ zwischen dem Äquator und dem Parallel von $+ 20^0$. Die Yerkes-Aktinometrie hat den gleichen Inhalt für die Sterne zwischen $+ 73^0$ Deklination und dem Nordpol. In beiden Katalogen wird auch der Farbenindex für die Sterne angegeben: im Göttinger Katalog nach Vergleichung mit den Größenangaben der Potsdamer photometrischen Durchmusterung, im Yerkes-Katalog als Differenz der photographischen und der gleichzeitig mit einem geeigneten Filter photographisch bestimmten photo-visuellen Größen.[163])

16. Kataloge der Spektraltypen und der Farben der Sterne. Als Hauptquellen für die Angaben des Spektraltypus der Sterne sind unter Beschränkung auf die jetzt allgemein zur Anwendung kommende *Cannon*sche Klassifikation die vorhin schon aufgeführten photometrischen Kataloge des Harvard College Observatory zu nennen. Außerdem kommen in Betracht der grundlegende Draper-Katalog in Harvard Annals 27 (1890) und die strengere Klassifikation von 3165 Sternen durch Miss *Cannon* in Harvard Annals 56 (1912). Das ganze auf der Harvard-Sternwarte vorhandene Material an Sternspektren-Photogrammen mit dem Objektivprisma ist schließlich in dem großen die neun Bände 91—99 der Harvard Annals füllenden *Henry Draper*-Katalog gesammelt, der neben der in einheitlicher Weise durchgeführten Klassifikation der Spektren von 225300 Sternen auch die photometrische und die photographische Größe nach den besten vorhandenen Angaben enthält. Weiteres Material über die Spektren besonders schwacher Sterne enthalten die nach im wesentlichen gleichen Grundsätzen ausgeführten zur spektroskopischen Parallaxenbestimmung benutzten Spektralklassifizierungs-Arbeiten am Mt. Wilson-Observatorium.

160) Die Größen der C.P.D. sind durch Anschluß an die bekannten visuellen Helligkeiten von Sternen bei jeder einzelnen Platte festgesetzt, wodurch eine Ungleichförmigkeit der Angaben entstanden ist. Vgl. eine Kritik von *S. Newcomb* in Astron. Journ. 21 (1901), p. 153.

161) Göttingen Ges. d. Wiss. Abhdl. N. F. 6, Nr. 6 (1910); 8, Nr. 4 (1912).

162) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 169.

163) Ein ausführliches Literaturverzeichnis über Sterngrößen gibt *H. Nort* in Utrecht Obs. Recherches 7, App. II B (1917).

Über die Farben der Sterne gibt Aufschluß die vorhin angeführte Potsdamer photometrische Durchmusterung.[164]) Von der Specola Astronomica Vaticana in Rom sind in den Bänden 3, 7, 8, 15 ihrer Veröffentlichungen besondere Kataloge der Farben der Sterne herausgegeben nach Beobachtungen von *Sestini* (1844—1846), *Krüger*, *Osthoff* und *Franks*. Das ganze Material ist vereinigt in dem als neunter Band der Veröffentlichungen der Vatikan-Sternwarte erschienenen Indexkatalog von *Krüger*, der die Farben von mehr als 6000 Sternen nördlich von — 30° enthält. Der Katalog ist vollständig bis $6{,}5^{m}$, während die Sterne zwischen $6{,}5^{m}$ und $7{,}5^{m}$ nur zum Teil beobachtet sind.

III. Ergebnisse der Bearbeitung des Beobachtungsmaterials.

A. Scheinbare Verteilung der Sterne. Die Milchstraße.

17. Allgemeine Verhältnisse. Der Gouldsche Gürtel. Aus dem Bilde des Fixsternsystems, in dem es uns im gestirnten Himmel entgegentritt, müssen die Gesetze seines Baues abzulesen sein.

Eine erste Anwendung der Lehren der Statistik auf die Sternzahlen machte *Michell*[165]), indem er die Wahrscheinlichkeit berechnete, daß bei regelloser Verteilung der Sterne irgendwo am Himmel eine Anordnung von hellen Sternen vorkäme, wie wir sie im Sternbild der Plejaden erblicken. Die Anwendbarkeit bloßer Sternzählungen als eines Hilfsmittels zur Erforschung des Baues des Sternsystems zeigte zuerst *W. Herschel*[166]) durch seine Sterneichungen, Zählung der an verschiedenen Stellen des Himmels in gleich großen Flächen sichtbaren Sterne.[167]) Aus diesen Zahlen ging die ziemlich regelmäßige Zunahme der scheinbaren Sterndichte von dem nördlichen Pole der Milch-

164) Die alten Überlieferungen können nur mit großer Vorsicht benutzt werden, wie das Beispiel des Sirius lehrt, dem man im Altertum eine rote Farbe beigelegt haben soll, während er jetzt rein weiß ist. Es liegt hier vermutlich eine irrtümliche Auslegung der Angaben der alten Schriftsteller vor. Vgl. *G. Schiaparelli*, Acad. d. Agiati Atti 2, 3 (1896, 1897) sowie die 2 Abh. von *J. Holetschek* im astron. Kalender der Sternwarte in Wien (Jahrg. 1918): Über 2 Sternfragen aus alter Zeit, die Farbe des Sirius und das Gestirn der Magier und (Jahrg. 1920): Über Sternfarben und Verzeichnisse von farbigen Sternen.

165) London Phil. Trans. 57 (1767), p. 243.

166) London Phil. Trans. 75 (1785), p. 221.

167) Die 683 Eichungen *W. Herschels* sind von *E. S. Holden* in Washburn Obs. Publ. 2, Nr. 10 (1883) erneut publiziert. Anschließend teilt *Holden* in Nr. 11 die Resultate von 405 früher nicht publizierten Eichungen nach den *Herschel*schen Manuskripten mit und fügt noch über 2000 Zählungen auf neueren Karten hinzu. Vgl. auch: Stargauges by W. and J. Herschel, edited by *C. V. L. Charlier*, Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 30 (1923).

straße gegen die Mitte dieser Zone des Himmels hin hervor. *J. Herschel*[168]) führte die Arbeit für den Südhimmel weiter mit entsprechendem Ergebnis. Das so in den Gesamtzügen festgestellte Bild wurde in den Einzelheiten genauer ausgefüllt durch die Arbeiten *W. Struves*[169]), der die *Bessel*sche Zone zwischen $+15^0$ und -15^0 benutzte und die Sterne jeder Größenklasse in den einzelnen Rektaszensionsstunden abzählte. Unter Hinzuziehung der Eichungen *Herschels* erkennt er, daß die Zunahme der Dichte gegen die Milchstraße um so stärker hervortritt, je schwächer die Sterne sind. Daß auch für die helleren, dem freien Auge sichtbaren Sterne diese Anhäufung gegen die Milchstraße noch vorhanden ist, wies *Houzeau* an den in seiner Uranométrie générale[45]) vorkommenden Sternen nach. Eine Bemerkung *J. Herschels* über eine Anordnung der hellsten Sterne des Südhimmels in einem gegen die Milchstraße geneigten Kreise verfolgend, bestimmte *Gould*[170]) als Mittellinie des Gürtels der stärksten Anhäufung der Sterne bis 4^m einen gegen die Milchstraße um 17^0 geneigten Kreis, „Gouldscher Gürtel". *Schiaparelli*[171]) ging voran mit einer seitdem häufig angewandten bildlichen Darstellung der scheinbaren Sternverteilung, indem er in einer durch Stunden- und Parallelkreise in Trapeze geteilten Himmelskarte in die einzelnen Trapeze die für sie gefundene Dichte der Sterne bis 6^m eintrug und diese Dichte dann durch Kolorierung in verschiedener Tiefe hervortreten ließ. In ausgedehnterem Maße verwandte dieselbe Darstellungsweise unter Ausdehnung auf alle Sterne der Durchmusterungen *Stratonoff*[172]) in zwei Atlanten, die die Anhäufung der Sterne in Wolken hervortreten lassen, deren größte auf der Nordhalbkugel mit dem Zentrum im Cygnus liegt. In der Milchstraße sind die Wolken am dichtesten gedrängt und greifen ineinander über. Die anderen Wolken sind bogenförmig um die Hauptverdichtung angeordnet. Die Sonne gehört der größten Wolke an.

Das Mischungsverhältnis der Sterne bis zur Grenzgröße $6{,}75^m$ nach ihrer scheinbaren Helligkeit fand *Pickering*[173]) für den ganzen Himmel auch innerhalb der Milchstraße gleich, und zwar ist der Prozentsatz der einzelnen halben Größenklassen

heller als 4^m	4^m	$4{,}5^m$	5^m	$5{,}5^m$	6^m	$6{,}5^m$
3,0	2,3	4,3	8,2	14,5	24,8	42,9%.

168) Cape Results of astr. obs. made 1834—1838, London 1847.

169) *W. Struve*, Études d'astronomie stellaire, St. Petersburg 1847.

170) Amer. Journ. of science (3) 8 (1874), p. 325; Cordoba Resultados 1 (1879), p. 355.

171) Milano Osserv. di Brera Pubbl. 34 (1889).

172) Taschkent Publ. de l'Obs. 2, 3 (1900, 1901).

173) Harvard Coll. Obs. Ann. 48, Nr. 5 (1903).

18. Die galaktische Kondensation. Durch die Arbeiten *Seeligers*, der auf *Schiaparellis* Grundlagen weiterbaute, wurde die Erforschung der Anordnung der Sterne in neue Bahnen gelenkt. Das diesen Arbeiten zugrunde liegende Material umfaßte 1. die Durchmusterungen[174]), 2. eine von *Celoria*[175]) ausgeführte Abzählung der Sterne bis $11{,}5^m$ zwischen dem Äquator und $+6^0$ Deklination und 3. die *Herschel*schen Eichungen. *Seeliger* machte dieses Material durch Ausgleichung der aus der Verschiedenartigkeit seiner Entstehungsweise folgenden Ungleichheiten möglichst homogen und zeigte dann, daß die Zunahme der Sternzahl mit der Größenklasse um so stärker hervortritt, je mehr man sich der Milchstraße nähert. Für die helleren Sterne bis 6^m schien das Gesetz nicht zu gelten.[176]) Eine strengere Untersuchung durch *Seeliger*[177]) an der Hand photometrischer Kataloge bestätigte es indes auch für diese Sterne. Einen Versuch zu noch schwächeren Sternen vorzudringen, als die *Herschel*schen Eichungen enthalten, machte *Kapteyn*[178]), indem er für 184 Felder die Zahl der Sterne bis 16^m aus den zur Verfügung stehenden Blättern der photographischen Himmelskarte und anderem Material entnahm. Er stellt die mittlere Anzahl der Sterne auf einen Quadratgrad von den hellsten bis zur Größe m dar durch die empirische Formel

$$\log \mathfrak{A}_0^{90} = 28{,}69\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{0{,}0323\,m} e^{-x^2}\,dx - 0{,}6407\right\}. \tag{5}$$

Zur Bestimmung der mittleren Sternzahl auf 1 Quadratgrad in der galaktischen Breite b dient der gleiche Ausdruck mit Werten der numerischen Konstanten, die empirisch als Funktionen von b festgelegt sind. Ein sehr auffälliges Ergebnis dieser Untersuchung war der Wert, den sie ergab für das Verhältnis der Sterndichte in der galaktischen Zone zwischen $+20^0$ und -20^0 gal. Breite zu der Sterndichte in

---

174) Die Resultate der *Seeliger*schen Abzählungen der Durchmusterungssterne für 5^0 breite und 40^m in *AR.* umfassende Zonen sind mitgeteilt für die Bonner Durchmusterung des Nordhimmels in München Sitz.-Ber. 14 (1884), p. 521—548; für die *Schönfeld*sche südliche Fortsetzung in München Sitz.-Ber. 16 (1886), p. 220—251. Die unmittelbaren Abzählungsergebnisse beider Durchmusterungen sind veröffentlicht in München Sternw. Ann. 2 (1891). Die Reduktion auf ein festes photometrisches System ist ausgeführt in München Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 147—180.

175) Milano Osserv. di Brera Pubbl. 13 (1877).

176) Vgl. Astr. Ges. Vjs. 34 (1899), p. 212 und München Sitz.-Ber. 29, (1900), p. 364.

177) München Sitz.-Ber. 1912, p. 489.

178) Groningen Lab. Publ. 18 (1908).

der die Pole umgebenden Zone $\pm 40^0$ bis $\pm 90^0$ gal. Breite, von *Kapteyn* „Galaktische Kondensation“ genannt. Sie ergibt sich nach p. 51, l. c.

Galakt. Kondens. für die Sterne bis	$9{,}5^m$	$14{,}5^m$	$18{,}5^m$
	2,4	6,7	23,8.

Mit einigen anderen Untersuchungen der Sternverteilung in einzelnen Zonen der photographischen Himmelskarte[179]) schien diese außerordentlich starke Zunahme des Wertes der galaktischen Kondensation mit der Sterngröße schwer vereinbar. So ergeben sich aus einer Arbeit *Stroobants*[180]) über die Verteilung der Sterne in dem zwischen den Deklinationen $+24^0$ und -9^0 liegenden Gürtel nach den Aufnahmen auf den Sternwarten Paris, Bordeaux, Toulouse, Algier, San Fernando:

Gal. Kond. für die Sterne bis $11{,}5^m$ nach dem Katal. $= 3{,}7$
$13{,}5^m$ nach den Karten $= 5{,}5$.

Die von *Kapteyn* gefundenen Zahlen der Sterne der einzelnen Größenklassen kann man wie *Schwarzschild*[181]) zeigte, völlig ausreichend darstellen durch einen Ausdruck der Form

$$\log A_m = \log(\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{A}_m) = \alpha + \beta m - \gamma m^2 \tag{6}$$

mit den numerischen Werten $\alpha = 0{,}596$, $\beta = 0{,}5612$, $\gamma = 0{,}0055$. Wenn diese Formel auch über den Bereich der beobachteten Werte hinaus bis zu beliebig großen Werten von m gilt, so zeigt sie, daß die Zahl der Sterne der scheinbaren Helligkeit m mit wachsendem m einen Maximalwert annimmt und dann wieder abnimmt bis zum Werte 0, mit dem wir zu der endlichen Zahl $\mathfrak{A}_\infty$ der Gesamtheit aller Sterne gelangen. Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{A}_\infty$ wird ausgedrückt durch

$$\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{k(m-m^*)} e^{-x^2} dx, \tag{7}$$

wo die Konstante $k = \sqrt{\frac{c}{\log e}}$ die Streuung der scheinbaren Größen und $m^* = \frac{b}{2c}$ der Zentralwert der Sterngrößen, d. h. diejenige scheinbare Größe bedeutet, bis zu der man zählen muß, um die Hälfte aller Sterne zu umfassen, so daß also $\mathfrak{A}_{m^*} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}_\infty$ wird.

179) *Christie* behandelte in The Observatory 22 (1899), p. 268, die Greenwicher, *Bellamy* in London Astr. Soc. Month. Not. 60 (1899), p. 12, die Oxforder und Pariser Zone.

180) Bruxelles Obs. Ann. N. S. 11, 2 (1908).

181) Astr. Nachr. 185 (1910), p. 85.

Diesen Gedankengang verfolgte auch *Charlier.*[182]) Er teilte den Himmel in 48 inhaltsgleiche durch Stunden- und Parallelkreise begrenzte Areale ein und entnahm für sie der B.D. die Sternzahlen für die Grenzgrößen 5,9 vis. = 5,87 phot. und 9,2 vis. = 9,62 phot. und den Blättern der photogr. Himmelskarte die Sternzahlen für die Grenzgröße 13,89 phot. Die Anwendung der Formel auf ein in der Milchstraße gelegenes Areal ergibt:

Anzahl aller Sterne im Areal = 30 Millionen, Zentralgröße = $20{,}1^{m}$

und für ein zweites den Pol der Milchstraße enthaltendes Areal

Anzahl aller Sterne im Areal = 630000, Zentralgröße = $17{,}6^{m}$.

Die Behandlung weiterer sieben Areale des Gürtels zwischen $\delta = 0^{0}$ und $\delta = +30^{0}$ gibt für die Sternzahl Werte zwischen 600000 und 5 Millionen, für die Zentralgröße Werte zwischen $16{,}9^{m}$ und $19{,}9^{m}$ Die Streuung der scheinbaren Größen ist nahe übereinstimmend etwa $3{,}0^{m}$.

Ein einheitliches Bild der Sternverteilung bis zu den Sternen der photographischen Größe 11^{m} gewann *Henie*[183]) durch Verwendung der p. 258 erwähnten Harvard Map of the Sky, indem er je 100 Felder von 1 □cm Größe, entsprechend $2\frac{1}{2}$ bis 3 □°, auf jeder der 55 Platten abzählte. Die graphische Darstellung der erhaltenen Sternzahlen auf den Quadratgrad, die den Verlauf der Grenzlinien der Zonen gleicher Sterndichte wiedergibt, läßt den ganz unregelmäßigen Charakter dieser Zonen und die wolkenförmige Art der Sternanhäufungen gut erkennen. Eine weitere Verwendung fand dieses Material nach Prüfung seiner Zuverlässigkeit durch *H. Nort.*[184]) Die Sterndichte wird dargestellt durch $d = 14{,}6 + 31{,}0 \cos^{10} b$ oder $\log d = 1{,}096 + 0{,}522 \cos^{4} b$. Weiter findet *Nort*

Galakt. Kond. für die Sterne bis $11^{m} = 2{,}6$.

Die Anwendung der Formeln 5, 6 ergibt als scheinbare Zentralgröße $18{,}32^{m}$.

Das bis zu den Sternen 17^{m} reichende Material der *Franklin-Adams*-Karte des Gesamthimmels (s. p. 259) verwerteten *Chapman* und *Melotte*, indem sie für 750 über den Nordhimmel verteilte Felder die Sterne von 12^{m} bis $17{,}5^{m}$ abzählten und zur Ergänzung für die helleren Sterne anderes schon vorhandenes Material benutzten. Die in der Originalarbeit[185]) abgeleiteten Resultate sind durch eine fehlerhafte Anordnung der Zählmethode systematisch verfälscht. Nach Berichti-

182) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 8 (1912).
183) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 10 (1913).
184) Utrecht Obs. Recherches 7 (1917).
185) London Astr. Soc. Mem. 60, Part 4 (1914).

gung derselben[186]) ergeben die Zählungen für die galaktische Kondensation die Werte

Galakt. Kondens. für die Sterne bis	5^m	16^m	$17{,}6^m$
	2,1	6,3	11,0.

Aus Zählungen auf 88 auf dem Mt. Wilson Observatory aufgenommenen *Kapteyn*schen Auswahlfeldern leitete *F. H. Seares*[187]) die Sternzahlen bis $17{,}5^m$ (photogr.) auf den Quadratgrad ab. Diesen Zahlen entspricht nach *van Rhijn* der Wert

$$\text{Galakt. Kond. für die Sterne bis } 17{,}6^m = 10{,}2.$$

65 Aufnahmen der *Kapteyn*schen Auswahlfelder vom Harvard Coll. Obs. bilden auch für die Sterne von 10^m bis 15^m die Grundlage einer Bearbeitung der Sternverteilung in ihrer Abhängigkeit von der galaktischen Breite durch *P. J. van Rhijn*[188]), die für die Sterne von $6{,}5^m$ bis $8{,}5^m$ durch schon vorhandene Zählungen in der Greenwicher Zone $+64^0$ bis $+90^0$ des Astrographischen Katalogs, für die Sterne $5{,}5^m$ bis 7^m durch solche in der Göttinger Aktinometrie ergänzt wird, während für die Sterne bis $5{,}5^m$ die Harvard Photometry nach Reduktion ihrer Größenangaben auf die photographische Skala benutzt wurde. Als Darstellung der Sternzahlen gemäß Formel (6) findet *van Rhijn*

$$\log A_m = -0{,}007 + 0{,}6686m - 0{,}01311m^2. \tag{8}$$

Analytisch ist diese Darstellung gleichwertig mit dem Ausdruck

$$A_m = C\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-h^2(m-m_0)^2} \quad C = 336\cdot 10^7 \quad h = 0{,}1737 \quad m_0 = 25{,}50. \tag{9}$$

Die Diskussion in bezug auf die Galakt. Kond. ergibt

Galakt. Kond. für die Sterne bis	10^m	16^m
	2,5	5,5.

Es wird auch gezeigt, daß die von *Kapteyn* bei der ersten Bearbeitung (Gron. Publ. 18) gefundenen Werte nach Übergang von der visuellen Größenskala, für die sie gelten, auf die photographische Skala und unter Berücksichtigung der bekannten größeren aktinischen Wirksamkeit der Milchstraßensterne sich den neueren Werten völlig anschließen.

Während man sich bei den Versuchen zur Darstellung der Sternzahlen in der Regel darauf beschränkte, sie als Funktion der galaktischen Breite aufzufassen, und die Abhängigkeit von der galaktischen

186) London Astr. Soc. Month. Not. 78 (1917), p. 66.
187) Washington Nat. Acad. Proc. 3 (1917), p. 217.
188) Groningen Lab. Publ., Nr. 27 (1917).

Länge als gesetzlos betrachtete, versuchte *H. C. Plummer*[189]) eine Darstellung der *Henie*schen Sternzahlen nach der Harvard Map of the Sky durch Kugelfunktionen der galaktischen Länge und Breite und wurde dadurch zu einem Gradienten der Sterndichte mit einem Minimum in $\alpha = 113^0$, $\delta = + 55^0$ und einem Maximum im gegenüberliegenden Punkte der Sphäre mit einer Amplitude von 20 Sternen auf den Quadratgrad, sowie zu Andeutungen eines Zusammenhangs der Sternverteilung mit der Zweischwarmtheorie der Sternbewegungen, die auch *Nort*[184]) schon bemerkt hatte, geführt.

Mit einer Darstellung der *Seeliger*schen Sternzahlen der B.D. bis $9{,}5^m$ durch Kugelfunktionen in Æ. und Deklination hatte sich schon *A. Prey*[190]) zur Ermittelung eines mathematischen Ausdrucks der Gesetze der Sternverteilung beschäftigt.

Versuche, wie sie schon von *Dunér*[191]) unternommen sind, den Aufbau des Gesamtsystems auch in seinen einzelnen Teilen, den Spektralklassen, zu verfolgen, konnten nicht zum Ziele führen, bevor ein ausreichendes Material zu Gebote stand. Dies ward aber erst durch den ersten Draper-Katalog (Harv. Ann., Vol. 27) zugänglich, und bei der Diskussion und der Zerlegung und Ordnung der Angaben dieses Katalogs über die Spektren der Sterne[192]) durch *Pickering* traten auch sofort die wesentlichen Züge der Gliederung des Systems in der Verteilung der Spektralklassen zutage, und es verblieb der weiteren Forschung nur noch die Aufgabe der Klärung und Vertiefung. *Pickering*s Schlußfolgerung, daß die Sterne, deren Spektrum dem der Sonne ähnlich ist, gleichförmig über den Himmel verteilt sind, die Milchstraße aber eine Anhäufung von Sternen des ersten Typus darstellt, wurde durch *J. M. Boraston*[193]) graphisch illustriert und, allerdings ohne gesicherte Ergebnisse, zu einer Zusammenfassung der Sterne zu zusammengehörigen Gruppen zu verwerten gesucht. In gleicher Weise wie die allgemeine Sternverteilung stellte *Stratonoff*[194]) auch die Verteilung der Sterne des ersten und zweiten Spektraltypus bildlich dar durch Karten, in denen die Zonen gleicher Dichtigkeit in verschieden tiefer Färbung zur Anschauung gebracht werden. Dabei trat nun besonders bei den Siriussternen ein dem Draper-Katalog anhaftender Mangel hervor, der in einer verschieden langen Belichtungszeit der

189) London Astr. Soc. Month. Not. 78 (1918), p. 668.
190) Wien Denkschr. 63 (1896).
191) Stockholm Akad. Handlingar 21, Nr. 2 (1884), p. 126.
192) Harvard Obs. Ann. 26 (1891), p. 145.
193) Astr. und Astroph. 12 (1893), p. 57.
194) Taschkent Obs. Publ. 2 (1900).

äquatorialen und der polaren Himmelszonen besteht und zu einer systematischen Verfälschung der berechneten Dichte Anlaß geben kann. *Mc Clean* stand bei einer Untersuchung[195]) der Verteilung der Spektralklassen ein einheitliches mit dem gleichen Objektivprisma erlangtes Material des nördlichen und des südlichen Himmels zur Verfügung, das allerdings nur die 276 Sterne bis $3{,}5^m$ umfaßt. Geordnet nach den fünf *Pickering*schen Typen läßt es die starke galaktische Kondensation der Heliumsterne und die nahe gleichförmige Verteilung der anderen Typen erkennen. Ein reichhaltigeres Material benutzte *Kobold*[196]) zur Feststellung der Verteilung bei Ordnung nach den *Vogel*schen Spektralklassen mit dem Ergebnis, daß die stärkste Verdichtung auftritt bei den Wolf-Rayet-Sternen, die bis auf einen weniger als 9° galaktische Breite haben, dann folgen die Sterne des Typus IIIb (*Secchi*s-Typus IV, Klasse *N*) und darauf die Heliumsterne. Eine merkliche Verdichtung ist noch beim Typus IIIa (Klasse *M*) vorhanden. Die Sterne der Typen Ia (Siriussterne) und IIa (Sonnensterne) sind gleichförmig über den Himmel verteilt. Die Revised Harvard Photometry (Harvard Annals, Vol. 50) gibt für die Sterne bis $6{,}5^m$ des ganzen Himmels auch die Spektralklasse in der jetzt üblichen Einteilung, und im Anschluß an dieselbe ist die Verteilung der Spektralklassen von *Pickering*[197]) untersucht. Eine zweite Arbeit *Pickering*s benutzt das ganze in Cambridge und Arequipa gesammelte Material an Sternspektren[198]), aus dem bei Teilung der Sphäre in zwei gleiche Teile, einen galaktischen Gürtel von 60° Breite und zwei Polarkalotten, folgende Zahlen für die Sterne der einzelnen Klassen sich ergeben:

	B	*A*	*F*	*G*	*K*	*M*
+ 30° bis — 30°	370	13190	2851	1358	3883	215
± 30° bis ± 90°	25	3617	2396	919	3090	165.

T. E. Espin[199]) vervollständigte das Material noch durch die Hinzunahme der Sterne mit besonderen Spektren (*P*), der Wolf-Rayet-Sterne (*O*) und der Sterne mit hellen Wasserstofflinien *H* und fand dann als Prozentsatz der in den Gürtel von + 30° bis — 30° gal. Breite fallenden Sterne der betreffenden Klasse

Gal. Breite	*O*	*B*	*H*	*P*	*A*	*M*	*K*	*F*	*G*
+ 30° bis — 30°	100,0	93,8	91,6	86,3	78,5	56,6	55,6	54,3	59,7 %
0° bis — 90°	70,9	66,3	71,2	68,2	50,9	56,8	57,9	57,8	51,7 %.

195) Astroph. Journ. 7 (1898), p. 367.
196) Bau des Fixsternhimmels, Braunschweig 1906.
197) Astr. Nachr. 180 (1909), p. 147, Harvard Obs. Circ. 147.
198) Harvard Obs. Ann. 56, Nr. 1 (1912).
199) Journ. Astr. Soc. Canada 7 (1913), p. 79.

Er findet weiter, daß bei allen Klassen ein überwiegender Prozentsatz der Sterne auf der Südseite der Milchstraße sich befindet, und zwar in um so stärkerem Maße, je stärker die Kondensation der Klasse ist. Aus den von *Kapteyn* und *van Rhijn*[200]) gegebenen Sternzahlen der Spektralklassen erhält man für die Galaktische Kondensation bei den einzelnen Klassen der Sterne bis 8^m die Werte

	B	*A*	*F*	*G*	*K*	*M*
Gal. Kondens.	18,7	4,4	1,3	1,1	1,6	1,0.

Die Gesamtzahl aller Sterne wird angegeben:

Sterne bis	$6{,}75^m$	nach	*Pickering*	= 11004 strenge Auszählung
„ „	11^m	„	*Henie*	= 1013328 nach Teilzählungen auf der Harvard Map
„ „	11	„	*Nort*	= 1075200 nach Teilzählungen auf der Harvard Map
„ „	11,5	„	*Stroobant*	= 2676000 nach Teilzählungen im Astrograph. Katalog
„ „	13,5	„	*Stroobant*	= 9854000 nach Teilzählungen auf der Astrograph. Himmelskarte
„ „	Grenze der *Herschel*schen Teleskope			= 20 Million. nach *Herschels* Schätzung
„ „	Grenze der *Herschel*schen Teleskope			= 27 Million. nach *Seeligers* Diskussion der *Herschel*schen Eichungen
„ „	16^m	nach	*van Rhijn*	= 32 Million. nach Ausgleichung der Zählungen
„ „	17	„	*Chapman* u. *Melotte*	= 54,9 Million. nach Teilzählungen auf der *Franklin-Adams*-Karte
„ „	17—18	„	*Gore*	= 64 Million. nach Zählungen auf Aufnahmen von *Roberts*
„ „	$H = \infty$	„	*Seeliger*	= 10 Milliarden nach Ausgleichung der Zählungen
„ „	$H = \infty$	„	*van Rhijn*	= 3,36 Milliarden nach Ausgleichung der Zählungen
„ „	$H = \infty$	„	*Chapman* u. *Melotte*	= 1—2 Milliarden nach Ausgleichung der Zählungen
„ „	$H = \infty$	„	*Hertzsprung*	= 7 Milliarden nach Ausgleichung der Zählungen.

19. Die äußere Erscheinung der Milchstraße. Diese haben verschiedene Beobachter in bildlichen Darstellungen festzuhalten versucht.

200) Groningen Lab. Publ. 30 (1920).

Einen Überblick über die älteren hierher gehörigen Arbeiten gibt *Easton* in seiner sogleich anzuführenden Monographie. Im Atlas Coelestis Novus von *Heis* und der Uranometria Argentina von *Gould* ist gegenüber sonstigen Himmelskarten, die sich mit einer rohen Andeutung des Laufes der Milchstraße begnügen, eine treue Wiedergabe des Bildes der Milchstraße angestrebt. *Houzeaus* Zeichnung in der Uranométrie générale sucht den Verlauf der Linien gleicher Helligkeit, Isophoten, festzuhalten. Der Milchstraße allein, der Darstellung der Lichtabstufungen, der Verästelungen und Durchbrechungen in ihr sind die Arbeiten von *Boeddicker*[201]) und *Easton*[202]) gewidmet. Die Milchstraße des südlichen Himmels in photographischen Aufnahmen von großer Schönheit ist in den Harvard Annals 72, Nr. 3 von *S. I. Bailey* wiedergegeben. Dem Auge nie erreichbare Wunder in dem Sternenmeer der Milchstraße enthüllten durch die Photographie *Wolf*[203]) und *Barnard.*[204]) In einheitlicher, sich in der Wiedergabe den Originalen möglichst treu anschließender Darstellung vereinigte in Umzeichnungen zu bequemer Gegenüberstellung und Vergleichung der Auffassungen *F. Goos*[205]) die Arbeiten von *Heis, Gould, Easton, Boeddicker, Houzeau* und *Wolf* in einem Atlas der Milchstraße.

Isophotenkarten der Milchstraße wurden außer dem schon erwähnten ersten Versuch von *Houzeau* noch hergestellt von *Pannekoek*[206]) auf Grund umfassender langjähriger Stufenschätzungen, von *Graff*[207]) und *Hopmann*[208]) nach genauen Photometermessungen und an sie sich anschließende Stufenschätzungen. *Hopmanns* Arbeit berücksichtigt den ganzen Umfang der Milchstraße, während *Pannekoek* und *Graff* nur die nördliche Milchstraße erforschten.

Schiaparelli und *Stratonoff*[209]) waren durch ihre bildlichen Darstellungen der Verteilung der dem freien Auge sichtbaren, beziehungsweise der Durchmusterungssterne zu dem Schlusse gekommen, daß die Hauptzüge des Milchstraßenbildes sich schon in der Verteilung dieser

---

201) *O. Boeddicker,* The milky way from the north pole to 10° of S. Declination, London 1892.

202) *C. Easton,* La voie lactée dans l'hémisphère boréal, Dordrecht, Paris 1893.

203) *M. Wolf,* Die Milchstraße, Leipzig 1908.

204) *E. E. Barnard,* Photographs of the milky way and of comets, Lick Obs. Publ. 11, Sacramento 1913. Ein Atlas of the Milky way mit Reproduktionen von 50 Aufnahmen aus der Milchstraße soll demnächst erscheinen

205) *F. Goos,* Die Milchstraße, Hamburg 1921.

206) Leiden Sternw. Ann. 11, 3. Stück (1920).

207) Hamburg. Sternw. in Bergedorf, Abh. 2, Nr. 5 (1920).

208) Astr. Nachr. 219 (1923), p. 188.

209) Vgl. Note 171, 172.

helleren Sterne erkennen ließen. *Plassmann* und *Arncke*[210]) stellten durch Summation des Lichtes der einzelnen Sterne bis 9^m in den Trapezen der *Seeliger*schen Abzählungen der Durchmusterungssterne eine Karte der Verteilung des Gesamtlichtes dieser Sterne her und folgerten aus dem Vergleich mit Milchstraßenzeichnungen gleichfalls, daß schon die Anordnung der helleren teleskopischen Sterne durch die das Phänomen der Milchstraße erzeugenden Ursachen bedingt sei. Auf gleichem Wege, aber unter Trennung der Sterne nach vier Helligkeitsgruppen: heller als $6{,}5^m$, $6{,}6^m$—$8{,}0^m$, $8{,}1^m$—$9{,}0^m$ und $9{,}1^m$—$9{,}5^m$, schließt *Easton*[211]), daß eine Korrelation zwischen der Intensitätsverteilung in der Milchstraße und der Sterndichte von den Sternen unter $6{,}5^m$ ab bestehe. Andererseits berechnete *Seeliger*[212]) aus seinen Sternzählungen die Sterndichte in den durch die galaktischen Breitenkreise $\pm 10^0$, $\pm 30^0$, $\pm 50^0$, $\pm 70^0$, $\pm 90^0$ begrenzten Zonen relativ zu der mittleren Zone 5, die die Milchstraße selbst enthält und deren Sterndichte $= 1$ gesetzt wird. Die Differenz der Sterndichte der galaktischen Zone und des Mittels der Sterndichten der außergalaktischen Zonen nennt er den Gradienten und er findet für diesen Gradienten Werte, die zwar mit abnehmender Helligkeit langsam wachsen, aber doch so klein bleiben, daß sie eine Erklärung der Erscheinung der Milchstraße als einer durch die Verteilung der Durchmusterungssterne hervorgerufenen optischen Erscheinung nicht zulassen. Um tiefer in die Einzelheiten einzudringen, zählte *Easton*[213]) für einzelne Stellen der Milchstraße, wo helle und schwache Partien derselben dicht beieinander liegen, die Sternzahlen nach der Durchmusterung, nach den Eichungen *Herschels*, *Epsteins* und *Celorias* und nach Blättern der photographischen Himmelskarte ab. Er findet, daß im allgemeinen keine engere Beziehung zwischen der Verteilung der Sterne bis $8{,}5^m$ und der Milchstraße besteht und daß erst die Sterne schwächer als $8{,}5^m$ anfangen, zu dem Lichte der Milchstraße beizutragen. An einzelnen Stellen, namentlich in der Cygnusgegend, scheinen allerdings auch die helleren Sterne eine deutliche Verknüpfung mit der Milchstraße zu besitzen, indem die Sternzahlen für alle Helligkeitsstufen von den hellsten bis zu den Sternen 14^m mit der Helligkeit der Milchstraße gleichlaufend wachsen. Daß diese Erscheinung aber nur lokale Bedeutung haben könne, geht nach *Seeliger*[214]) hervor aus einer

210) Mitt. d. Verein. v. Freund. d. Astr. u. kosm. Phys. 3 (1893), p. 102.
211) Amsterdam Akad. Verhandl. 8, Nr. 3 (1903).
212) München Sitz.-Ber. 14 (1884), p. 521 und 16 (1886), p. 220.
213) Astr. Nachr. 137 (1895), p. 81.
214) München Akad. Abh. 19, 3 (1898), p. 619.

Gegenüberstellung der Sternzahlen der Durchmusterungssterne und derjenigen der Eichungen der beiden *Herschel* für zwölf Stellen der Milchstraße, an denen die Eichungen große Unterschiede aufweisen. Diese kommen in den Sternzahlen der Durchmusterungen nicht zum Vorschein. *Nort*[215]) diskutiert die *Henie*schen Sternzahlen der Harvard Map auch nach dieser Richtung. Er stellt eine der *Easton*schen Isophotenkarte der nördlichen Milchstraße entsprechende Karte auch für die südliche Milchstraße her und vergleicht nun eine Karte der Sterndichten bis 11^m in der in 216 Felder geteilten Zone zwischen den galaktischen Breitenkreisen $+ 18^0$ und $- 18^0$ mit diesen Karten. Er kann dann bei der nördlichen Milchstraße eine ziemlich gute Übereinstimmung in dem zwischen den Längen 135^0 und 180^0 liegenden Teile feststellen; im übrigen Verlauf ist die Ähnlichkeit der beiden Darstellungen geringer und fehlt teilweise gänzlich. Auf der Südhalbkugel entsprechen sich die beiden Darstellungen noch weniger. Trennt man die Sterne $9{,}0^m$ bis 11^m ab, so zeigt sich, daß diese sich ebenso verhalten wie die Gesamtheit der Sterne bis 11^m, daß also auch die Verteilung der Sterne $9{,}0^m$ bis 11^m nicht in engerer Beziehung zur Intensitätsverteilung in der Milchstraße steht.

Die teilweise sich widersprechenden Resultate der verschiedenen Bearbeiter bezüglich der Stellung der helleren Sterne zur Erscheinung der Milchstraße veranlaßten neuerdings *J. C. van de Linde*[216]) zu einer nochmaligen Erörterung der Frage unter völliger Loslösung der dem freien Auge sichtbaren Sterne von den schwächeren teleskopischen, was besonders deshalb nötig erscheint, weil den absolut hellen Sternen eine durch besondere ihnen innewohnende Eigenschaften charakterisierte abgesonderte Stellung zuzuweisen sein dürfte. Es wird die nach der Prüfung als bis zur Größe $6{,}5^m$ für den Nordhimmel und bis $6{,}4^m$ für den Südhimmel als vollständig anzusehende Revised Harvard Photometry zugrunde gelegt und die Verdichtung der dem freien Auge sichtbaren Sterne in der Milchstraße als Verhältnis der durch graphische Ausgleichung der Abzählung von 10^0 breiten galaktischen Zonen gewonnenen maximalen Sterndichte zu der minimalen im galaktischen Pol auftretenden zu 2,73 gefunden. Aus *van Rhijns* Sternzahlentafel wird in gleicher Weise der Wert 3,18 abgeleitet. Für die einzelnen Typen ergeben sich die Zahlen: $B\,\frac{1{,}000}{0{,}003}$, $A\,2{,}65$, $F\,1{,}85$, $G\,1{,}93$, $K\,1{,}52$, $M\,1{,}17$. Die Zone größter Dichtigkeit der Sterne bis $6{,}5^m$ wird bestimmt durch Aufsuchen der Maxima der

215) Vgl. Note 184.

216) De Verdeeling der heldere Sterren, Rotterdam 1921.

Sterndichte in 36 Zonen, die zwischen 10^0 voneinander abstehenden Längengraden enthalten sind, und Ausgleichung durch eine Sinuskurve. Es wird ein gegen den galaktischen Äquator unter 7^0 geneigter Kreis mit dem Pol $\alpha = 182^0$, $\delta = +28^0$ und dem sphärischen Radius $92{,}4^0$ gefunden.

In der galaktischen Kondensation kommt das Licht der Sterne der Milchstraße nur in verkleinertem Maße zur Geltung. Das überaus starke Anschwellen des Wertes dieser Größe bei den allerschwächsten Sternen, etwa von 16^m ab, zeigt indes, daß diese Sterne im wesentlichen zum Bau der Milchstraße beitragen.

20. Der Spektralcharakter der Milchstraßensterne. *Kapteyn*[217]) machte bei der Diskussion der südlichen photographischen Durchmusterung die Wahrnehmung, daß die Sternzahl der photographischen Durchmusterung in und in der Nähe der Milchstraße diejenige der Bonner südlichen Durchmusterung und die der Cordobaer Durchmusterung im gleichen Areale überträfe und daß sie gegenüber den beiden visuellen Durchmusterungen eine fortschreitend um so kleinere Zahl liefere, je näher die betrachteten Flächen dem galaktischen Pole liegen. Hierfür konnten zwei Erklärungen gegeben werden: Die Sterne gleicher optischer Helligkeit sind in der Milchstraße blauer, also reicher an aktinischen Strahlen, als außerhalb der Milchstraße (*Kapteyn*sches Phänomen) oder: Die Größen der Bonner Durchmusterung und der Cordobaer Durchmusterung sind abhängig von der Sternfülle. Ähnliche Verhältnisse fand auch *Scheiner* bei einer Vergleichung der Bonner Durchmusterung mit den Platten der Potsdamer Zone der photogr. Himmelskarte. Er bemerkte[218]) ein Wachsen des Dichteverhältnisses in der Karte und in der B.D. proportional mit der Dichte selbst und eine um so größere Anzahl von Sternen unter $9{,}5^m$ in der B.D., je kleiner die Sternzahl der betreffenden Fläche ist. Ein dem *Kapteyn*schen Phänomen entsprechendes Verhalten der Sternzahlen bei sternarmen und sternreichen Gegenden der B.D. und der Himmelskarte tritt auch nach *Scheiner*[219]) außerhalb der Milchstraße auf, und er hält deshalb die Sternfülle für die direkte Ursache der Erscheinung, während die galaktische Breite nur indirekt eingeht durch die Abhängigkeit der Sterndichte von derselben. Außerdem kommt das Purkinje-Phänomen zur Geltung, nach dem die Empfindlichkeit des Auges für die roten Strahlen zunimmt mit abnehmender Helligkeit der Lichtquelle. Für die erste Erklärung des *Kapteyn*schen Phä-

217) Bull. de la carte du ciel 2, p. 131, Paris 1895.

218) Astr. Nachr. 147 (1898), p. 1.

219) Astr. Nachr. 149 (1899), p. 165.

nomens sprach dagegen eine von *Tucker*[220]) ausgeführte Vergleichung mit der Cordobaer Durchmusterung, die ergab, daß die Sterne in der Kap-Durchmusterung in der Milchstraße zu hell, außerhalb der Milchstraße zu schwach geschätzt seien, und weiter die Feststellung *Pickerings*[221]), daß von den im Draper-Katalog vorkommenden Milchstraßensternen etwa $\frac{2}{3}$ zum Spektraltypus *A* gehören. Trotzdem fand *A. Fath*[222]) bei einigen hellen Wolken der Milchstraße ein dem Sonnentypus entsprechendes, also *G*-Spektrum, und man muß also annehmen, daß das *Pickering*sche Phänomen nur für die näheren Sterne in der Milchstraße gilt, daß aber die ferneren, schwachen Sterne, die im wesentlichen den Lichtschimmer erzeugen, wieder den späteren Typen angehören. Dies wurde von *Fath* auf Aufnahmen mit rotempfindlichen Platten und mit Farbfiltern auch bestätigt gefunden. Ein Überwiegen der weißen Sterne in der Milchstraßenzone und nahe gleichförmige Verteilung der gelben und roten Sterne über den Himmel wurde auch von *Müller* und *Kempf* durch eine Diskussion der Farbenschätzungen der Potsdamer photometrischen Durchmusterung festgestellt.[223])

21. Ebenen der scheinbaren Sternverteilung. Für die Bestimmung der Lage der Ebene der Milchstraße und der Hauptebenen der Sternverteilung kann man ein von einer genäherten Annahme der Koordinaten des Poles der gesuchten Ebene ausgehendes Verfahren benutzen, wie es *Houzeau*[224]) beschrieben hat. Eine strenge mathematische Behandlung der Aufgabe wurde von *Newcomb*[225]) gegeben. Auch das Verfahren der Entwicklung nach Kugelfunktionen und Bestimmung der Lage der Hauptebenen aus den Koeffizienten der Entwicklung durch Aufstellung der Maximumbedingung ist mehrfach angewandt.

---

220) Astroph. Journ. 7 (1898), p. 330.

221) Vgl. Note 198.

222) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 362.

223) Astr. Nachr. 180 (1909), p. 249.

224) Bruxelles Obs. Ann., Nouv. Sér. 1 (1878), p. 18. *Houzeau* geht aus von Näherungswerten der Koordinaten des Poles der Milchstraße und verbessert sie durch ein Näherungsverfahren mit der Bedingung, daß die Abstände von 33 Punkten maximaler Helligkeit der Milchstraße von dem gesuchten Punkte möglichst nahe $= 90^0$ werden. Bezüglich der Lösung der Aufgabe vgl. auch die Ausführungen über die Bestimmung des Zielpunktes der Sonnenbewegung nach der *Bessel-Kobold*schen Methode in Nr. **33**.

225) *S. Newcomb,* On the position of the galactic and other principal planes towards which the stars crowd, Washington 1904. *N.* stellt die Gleichung dritten Grades auf, deren drei Wurzeln die Hauptebenen einer räumlichen Verteilungsfunktion bestimmen.

Die hauptsächlichsten Bestimmungen der Koordinaten des nördlichen Poles und ihres von diesem Pole aus gerechneten sphärischen Radius für die Milchstraße und für einige andere Hauptebenen der scheinbaren Verteilung der Sterne sind:

	Pol AR.	Pol D.	Radius	Äquin.	
	Milchstraße.				
Heis[226])	190°	+ 27°	90°	1855	
Houzeau[227])	192,3°	+ 27,5°	90,3°	1880	
Gould[228])	190,3°	+ 27,3°	90°	1875	
Newcomb[229])	192,8°	+ 27,2°	91,74°	1900	
Kobold[230])	191,2°	+ 28,0°	91,24°	1880	
Graff[231])	192,6°	+ 26,7°	90,0°	1925	
	Hauptebene des Sternsystems.				
Ristenpart[232])	196,6°	+ 18,7°	95,5°	1855	Sterne bis 6^m
			91,9°		6^m bis 8^m
			92,1°		8^m bis $9{,}5^m$
Prey[233])	199,3°	+ 17,9°	91,3°	1855	6^m bis 9^m
Nort[234])	191°	+ 27°	91,6°		Sterne bis 11^m
	Gouldscher Gürtel.				
Gould[228])	171,2°	+ 30°	—	1875	
Newcomb[225])	179,6°	+ 26,4°	—	1900	36 hellste Sterne
	181,2°	+ 17,4°	—	1900	alle Sterne bis $2{,}5^m$
	180,0°	+ 21,5°	—	1900	alle Sterne bis $3{,}5^m$
Kobold[230])	191,9°	+ 41,2°	83,8°	1900	40 hellste Sterne
van de Linde[216])	182°	+ 28°	92,4°	1900	alle Sterne bis $6{,}5^m$

226) Atlas coelestis novus, p. VIII.
227) Vgl. Note 224, p. 21.
228) Uranometria Argentina, p. 371.
229) Vgl. Note 225, p. 17.
230) Vgl. Note 196, p. 184.
231) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 27.
232) Untersuchungen über die Konstante der Präzession und die Bewegung der Sonne im Fixsternsystem, Straßburg Diss., Karlsruhe 1892.
233) Vgl. Note 190.
234) Vgl. Note 184.

Andere Symmetrieebenen.

Hertzsprung[235])	182,1°	+ 27,9°	—	1900	1402 Heliumsterne
	189,1°	+ 26,3°	—	1900	98 *c*- und *ac*-Sterne
	190,7°	+ 26,9°	—	1900	87 Typus V-Sterne
	194,2°	+ 27,4°	—	1900	228 Typus IV-Sterne
	192,7°	+ 28,1°	—	1900	130 Gasnebel
Wolf[236])	193,4°	+ 28,7°	—	1875	Dichtemax. d. Nebelflecke.

B. Die räumliche Verteilung der Sterne, Extinktion.

22. Ältere Theorien. Bei der Unzulänglichkeit des zur Verfügung stehenden Materials hinreichend sicher gemessener Sternentfernungen können wir eine Vorstellung über die räumliche Anordnung der Sterne nur erlangen auf Grund ausreichender, die Beobachtungen verbindender und in Beziehung setzender Hypothesen. Die scheinbare Verteilung der Sterne über die Sphäre wird hervorgerufen durch die Anzahl und die scheinbare Helligkeit der in einer bestimmten Richtung erscheinenden Sterne. Abgesehen von der Helligkeit wäre sie nur bestimmt durch die Funktion

$D(\varrho) =$ Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit in der Entfernung ϱ.

Der Einfluß der absoluten Helligkeit der Sterne auf das Bild wird bestimmt durch die Funktion

$\varphi(H)\,dH =$ Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit, deren Leuchtkraft zwischen den Grenzen H und $H + dH$ liegt, ausgedrückt in Teilen von $D(\varrho)$.

Danach ist $D(\varrho)\cdot\varphi(H)\,dH$ die Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit, deren Leuchtkraft zwischen den Grenzen H und $H + dH$ liegt, und die Zahl der im Areal ω an der Sphäre erscheinenden in der Entfernung ϱ befindlichen Sterne der absoluten Helligkeit H wird

$$\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho} = \omega\varrho^4 d\varrho\, D(\varrho)\,\varphi(H)\,dH. \tag{10}$$

W. Herschel, der Begründer der modernen Stellarastronomie, ging aus von den einfachsten Vorstellungen gleicher absoluter Leuchtkraft aller Sterne und gleichförmiger Verteilung der Sterne im Raume entsprechend der Annahme $D(\varrho)\cdot\varphi(H)\,dH =$ Konst. Mit Hilfe einfachster geometrischer Vorstellungen entsprechend einer gleichförmigen Verteilung der Sterne in äquidistanten Ebenen berechnet er die

235) Astr. Nachr. 192 (1912), p. 263.

236) Königstuhl-Heidelberg Publ. 1 (1902), p. 174.

Anzahl der in einem Kegel vom Öffnungswinkel φ, dessen Grundebene um das $(n-1)$fache des Abstandes zweier Sterne vom Auge entfernt ist, zu $n^3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi$, woraus seine Grundformel für die Entfernung der Grenzschicht, wenn man alle im Gesichtsfelde mit dem Radius φ sichtbaren Sterne $= \nu$ zählt, folgt:

$$s = \sqrt[3]{\nu \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varphi} - 1. \tag{11}$$

Die dieser Formel zugrunde liegende Annahme *Herschels*, daß das Sternsystem ein begrenztes sei und daß er mit seinen Instrumenten bis zu dieser Grenze in den Raum einzudringen vermöge, war mit seinen späteren Erfahrungen unvereinbar und führte ihn auf einen anderen Weg zur Bestimmung der Entfernungen der Sterne. Er ermittelte durch Versuche an irdischen Gegenständen für seine Fernrohre deren „raumdurchdringende Kraft", d. i. das Verhältnis der Entfernungen, in welchen einerseits das betreffende Instrument und andererseits das freie Auge den gleichen Gegenstand zu unterscheiden vermögen, und bestimmte dann mit Hilfe zweier Instrumente, deren raumdurchdringende Kraft in einem bestimmten Verhältnis steht, unter der Annahme, daß die durchschnittliche Leuchtkraft der Sterne konstant sei, die mittleren Entfernungen der Sterne 2^{ter}, 3^{ter} usw. Größe im Verhältnis zur Entfernung der Sterne erster Größe. Er setzte danach die schwächsten dem freien Auge sichtbaren Sterne in die 12fache Entfernung der Sterne erster Größe und glaubte mit seinem größten Instrument bis zu einer Entfernung gleich dem 2300fachen der Entfernung der Sterne erster Größe in den Raum eindringen zu können. Bezüglich der räumlichen Anordnung der Sterne gewann *Herschel* aus seinen Forschungen schließlich die Vorstellung einer längs der Ebene der Milchstraße bis in unermeßliche Entfernungen sich erstreckenden dünnen Schicht in lockerem Zusammenhang stehender Haufen von Sternen, deren einem unsere Sonne angehört.

Diese Vorstellung bildet auch die Grundlage der Arbeiten *W. Struves*, der in der Richtung der Milchstraße eine konstante Dichte annimmt, in der Richtung senkrecht zur Milchstraße aber eine abnehmende Dichte. Er stützt sich bei seinen Arbeiten[237]) auf die *Bessel*schen Zonenbeobachtungen zwischen -15^0 und $+15^0$ Deklination, die einen zur Hauptebene der Milchstraße schrägen Schnitt durch den mit Sternen erfüllten Raum darstellen. Das Verhalten der Sternzahlen in den einzelnen Rektaszensionsstunden dient ihm als

237) Vorrede zu *M. Weisse*, Positiones med. stell. fix. in zonis Regiomontanis a *Bessel*io inter -15^0 et $+15^0$ decl. obs., St. Petersburg 1846, und erweitert in *F. W. G. Struve*, Études d'astronomie stellaire, St. Petersburg 1847.

Rechtfertigung seiner Hypothese. Er berechnet dann unter Hinzunahme der *Herschel*schen Eichungen die Sternzahlen als abhängig von der galaktischen Breite b, stellt dieselben dar durch einen Ausdruck der Form

$$z = \frac{A + B \cos 2b + C \cos 4b}{1 + \beta \cos 2b + \gamma \cos 4b}$$

und entnimmt diesem Ausdruck für die Dichte ϱ der Sternverteilung als Funktion des Abstandes x von der Grundebene der Milchstraße den Wert

$$\varrho = \frac{1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8}{(1 + a_1 x^2 + b_1 x^4)^2}.$$

Aus der Zahl der in der Richtung der Milchstraße in einem bestimmten Areal erscheinenden Sterne der einzelnen Größenklassen folgen vermöge der angenommenen gleichförmigen Verteilung in dieser Richtung die relativen Sternentfernungen aus den Kubikwurzeln der Zahlen. *Struve*s Schlußfolgerungen gehen weit über den wirklichen Inhalt der zugrunde gelegten Beobachtungsdaten hinaus. *Gauß* nennt in seinen Briefen an *Schumacher Struve*s Schrift eine Phantasiespielerei. Kritisch beleuchtet und ablehnend beurteilt sie auch *Encke*[238]) und neuerdings wieder *E. Anding.*[239]) Das Verdienst, durch vielseitige Verwendung statistischen Materials der Forschung einen neuen Weg erschlossen zu haben, kann aber *Struve* nicht bestritten werden.

*Argelander*s Durchmusterungsarbeiten wurden für die Kenntnis der räumlichen Verteilung der Sterne bald von fundamentaler Bedeutung. *K. v. Littrow*[240]) stellte nach den Bonner Sternverzeichnissen die erste Zählung der Sterne des nördlichen Himmels nach Größenklassen und nach Zonen der Deklination her und benutzte die erlangten Zahlen zur Prüfung der grundlegenden Anschauungen. Mit der photometrischen Konstante, dem Verhältnis der scheinbaren Helligkeiten zweier aufeinanderfolgender Größenklassen, die nach Gleichung (1) definiert ist durch

$$\log p^2 = 0{,}4 \tag{12}$$

würden bei gleichförmiger Verteilung und gleicher Leuchtkraft der Sterne die Sternzahlen in der Beziehung stehen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m : \mathfrak{A}_{m-1} &= p^3 & \log(\mathfrak{A}_m : \mathfrak{A}_{m-1}) &= 0{,}6 \\ \mathfrak{A}_m &= c \cdot h_m^{-\frac{3}{2}} & \log \mathfrak{A}_m &= c' + 0{,}6m. \end{aligned} \tag{13}$$

238) Astr. Nachr. 26 (1847), p. 337.

239) Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum, 2. Abschnitt, Kap. II, Leipzig 1910.

240) Wien Sitz.-Ber. 59 (1869), p. 569; 61 (1870), p. 263. Die Sternzahlen finden sich auch Astr. Nachr. 62 (1864), p. 357, und in endgültiger Form 73 (1869), p. 201.

Littrow findet eine ausreichende Darstellung der Zahl der Sterne des Nordhimmels bis zur scheinbaren Größe m durch den Ausdruck

$$\mathfrak{A}_m = 1{,}3039\,(3{,}5295)^{\mathrm{m}}.$$

Das Verhältnis der Entfernungen der Sternklassen wäre unter den gleichen Voraussetzungen

$$(14) \qquad \varrho_m : \varrho_{m-1} = p = \sqrt{2{,}512} \qquad \log(\varrho_m : \varrho_{m-1}) = 0{,}2,$$

während *Littrow* findet

$$\varrho_m = 0{,}657\,(1{,}523)^{\mathrm{m}},$$

ausgedrückt in Einheiten der die Sterne bis zur ersten Größe umschließenden Sphäre.

Den *Littrow*schen Zahlen entspricht der Wert 0,3651 der photometrischen Konstante.

Eine strengere Darstellung dieser Verhältnisse war erst möglich, als man photometrische Größen der Sterne einführen konnte. Der Draper-Katalog gab *E. C. Pickering* Gelegenheit dazu. Er findet, indem er von halber zu halber Größenklasse abzählt und zur Größe m die Sterne zwischen $m - \frac{1}{4}$ und $m + \frac{1}{4}$ rechnet, aus den Sternen bis zur Größe $6{,}75^{\mathrm{m}}$ den Ausdruck[241])

$$\mathfrak{A}_m = 4{,}15\,(3{,}24)^{\mathrm{m}}.$$

Durch Hinzuziehung weiteren bis etwa zur 13. Größe reichenden Materials schließt *Pickering* auf eine Abnahme des theoretisch zu 3,98 anzunehmenden Verhältnisses $\mathfrak{A}_m : \mathfrak{A}_{m-1}$ von 3,34 für $m = 0$ auf 2,86 für $m = 9{,}0$ und 2,05 für $m = 13{,}0$, und *R. H. Tucker*[242]) fand durch Sternzählungen mittels des 36″-Refraktors der Lick-Sternwarte bei den Sternen zwischen 16^{m} und 17^{m} den noch kleineren Wert 1,49. Das Nichterfülltsein der Gleichung (13) zeigt, daß es nicht erlaubt ist, $D(\varrho) \cdot \varphi(H)\,d(H) =$ Konst. zu setzen.

Schon *C. A. F. Peters* hatte aber die Unvereinbarkeit der Annahme auch nur durchschnittlich gleicher Leuchtkraft der Sterne mit der Erfahrung erkannt[243]) und hatte den theoretischen Ausdruck der Sternzahlen aufgestellt unter der Annahme, daß die Leuchtkraft der Sterne liege zwischen den Grenzen 0 und einem Maximalwert H und daß für jeden einzelnen Stern jede zwischen diesen Grenzen liegende Leuchtkraft gleich wahrscheinlich sei. Da dann die größte Entfernung, in der ein Stern noch die scheinbare Helligkeit h_m haben kann, $= \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}$ ist,

---

241) Harvard Coll. Obs. Ann. 48, Nr. 5 (1903).

242) Astroph. Journ. 7 (1898), p. 330.

243) Astr. Nachr. 28 (1849), p. 228.

so erhält er die Grundformeln für die Zahl der Sterne $\mathfrak{A}_m$ von den hellsten bis zur scheinbaren Helligkeit h_m und für die mittlere Entfernung $\bar{\varrho}_m$ der Sterne der scheinbaren Helligkeit h_m

$$\mathfrak{A}_m = \frac{4\pi D}{H}\int\limits_{h_m}^{\infty}\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}}\varrho^4 d\varrho\, dh = \frac{8}{15}\cdot\pi\cdot D\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\bar{\varrho}_m = \frac{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}}\varrho^5 d\varrho}{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}}\varrho^4 d\varrho} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{H}{h_m}} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{\frac{15}{8\pi D}}\sqrt[3]{\mathfrak{A}_m}.$$

D ist die Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit.

Die Grundformel *Herschels* und *Struves*, nach der die Entfernungen der Helligkeitsklassen wachsen mit der Kubikwurzel aus den Sternzahlen, blieb also auch bei dieser Annahme bestehen.

Daß die Proportionalität der mittleren Entfernungen der Größenklassen mit dem reziproken Wert der Quadratwurzel aus der scheinbaren Helligkeit, $\bar{\varrho}_m = \frac{\text{konst.}}{\sqrt{h_m}}$ auch noch gilt bei willkürlicher aber homogener Mischung der absoluten Helligkeiten zeigte *Schiaparelli*[244]) in anschaulicher Weise.

H. Gyldén[245]) ließ auch die von *Peters* noch vorausgesetzte gleiche Wahrscheinlichkeit aller Leuchtkräfte fallen und stellte zuerst die bezüglich der Leuchtkraft allgemeine Formel auf

$$\mathfrak{A}_m = \omega D\int\limits_{h_m}^{\infty} dh \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}}\varphi(h\varrho^2)\varrho^4 d\varrho.$$

$h\varrho^2$ als Unabhängige einführend, zeigt *Gyldén*, weil wegen der Konstanz von H der Wert des nach $h\varrho^2$ genommenen Integrals von h unabhängig ist, daß wieder die Gleichungen bestehen

$$\mathfrak{A}_m = F h_m^{-\frac{3}{2}} \qquad \bar{\varrho}_m : \bar{\varrho}_{m-1} = \sqrt[3]{\mathfrak{A}_m : \mathfrak{A}_{m-1}}.$$

23. Seeligers Untersuchungen. Die weitergehende Verallgemeinerung auch in bezug auf die Verteilung nimmt *Seeliger* vor, gleichzeitig die mathematische Behandlung des Problems auf die breiteste Grundlage stellend.

244) Milano Osserv. di Brera Pubbl., Nr. 34 (1889).

245) Stockholm Akad. Förhandl. 1872, Nr. 7.

Die den Beobachtungen zu entnehmenden gegebenen Daten sind die scheinbare Verteilung der Sterne und ihre mittlere Entfernung. Sie sollen dienen zur Bestimmung von drei unbekannten Funktionen: der räumlichen Anordnung der Sterne nach ihrer Anzahl und absoluten Helligkeit, also der Dichtefunktion und der Leuchtkraftfunktion, und dann der Beziehung zwischen scheinbarer Helligkeit und Leuchtkraft mit Rücksicht auf eine etwaige Absorption des Lichtes. Die Beobachtungsdaten und die gesuchten Funktionen sind miteinander verbunden durch die beiden Integralgleichungen für die Sternzahl und für die mittlere Parallaxe.

Bezüglich der Leuchtkräfte wird von vornherein die Annahme gemacht, daß eine bestimmte obere Grenze H der Leuchtkräfte bestehe. Während bei gleichförmiger Verteilung, gleicher Leuchtkraft aller Sterne und einer dem photometrischen Gesetz entsprechenden Abnahme der scheinbaren Helligkeit mit dem Quadrat der Entfernung die Beziehungen gelten

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_m = c\cdot h_m^{-\frac{3}{2}}, \ \log \mathfrak{A}_m = c' + 0{,}6\,m, \ \log \alpha_m = \log\left(\mathfrak{A}_m : \mathfrak{A}_{m-\frac{1}{2}}\right) = 0{,}3, \\ \pi_m = \Gamma \sqrt{h_m}, \ \log \pi_m = \gamma - 0{,}2\,m, \ \log p_m = \log\left(\pi_m : \pi_{m-\frac{1}{2}}\right) = 0{,}1, \end{cases}$$

findet *Seeliger* aus den tatsächlichen Sternzahlen der Durchmusterungen[246])

$$(16)\qquad \log \alpha = \frac{3-\lambda}{10}.$$

Dabei ist λ eine von der scheinbaren Helligkeit unabhängige, mit der galaktischen Breite sich langsam vom Werte 0,535 in der galaktischen Zone bis 0,775[247]) in der Polzone ändernde Größe.

Im *schematischen* Sternsystem ist λ konstant $= 0{,}655$, im *typischen* System ist es dagegen abhängig von der galaktischen Breite, nicht aber von der Länge, indem die in letzterer Hinsicht auftretenden Änderungen als nicht gesetzmäßig angesehen werden. Bei der ersten grundlegenden Untersuchung war der Gang folgender. Nach der *Celoria*schen[248]) Abzählung der Zone 0^0 bis $+6^0$ verhalten sich die Sterne bis $11{,}2^m$ so wie die Durchmusterungssterne, die aus den *Herschel*schen Eichungen folgenden Zahlen $\mathfrak{A}_{13,9}$ befolgen aber ein anderes Gesetz. In der galaktischen Zone verhalten auch die schwachen Sterne sich nahezu wie die helleren, außerhalb der Milchstraße dagegen nimmt

246) München Akad. Abh. 19, Nr. 3 (1898) und mit den endgültig angenommenen Sternzahlen, München Sitz.-Ber. 42 (1912), p. 451—509.

247) Die Angaben sind der letzten Bearbeitung München Sitz.-Ber. 1920, p. 87, entnommen.

248) Milano Osserv. di Brera Pubbl., Nr. 13 (1877).

ihre Zahl sehr viel langsamer zu als die der helleren. Eine Bestätigung dieser letzteren Folgerung fand *Seeliger* später[249]) in den Sternzahlen $\mathfrak{A}_{11,16}$ und $\mathfrak{A}_{14,84}$, die er aus dem *Kapteyn*schen Material in Groningen Publ. 18 ableitete. In seiner letzten sich auf die Abzählungsresultate *van Rhijns* in Groningen Publ. 27 stützenden Bearbeitung betrachtet *Seeliger* das Gesetz der scheinbaren Sternverteilung als gegeben durch

$$(17)\begin{cases} \mathfrak{A}_m = c h^{-\frac{\lambda-3}{2}}, \qquad \log \mathfrak{A}_m = c' - \frac{\lambda-3}{5} m, \\ \log \mathfrak{A}_m = 0{,}764 + 0{,}4700(m-9{,}5) - 0{,}0048(m-9{,}5)^2 \\ \hfill \text{gültig bis } 9{,}5^{\mathrm{m}}, \\ \log \mathfrak{A}_m = 0{,}764 + 0{,}4700(m-9{,}5) - 0{,}01734(m-9{,}5)^2 \\ \hfill \text{für Werte } m > 9{,}5. \end{cases}$$

($\mathfrak{A}_m$ bezieht sich auf die Fläche eines Quadratgrades.)

Der theoretische Ausdruck für die Sternzahl in größter Allgemeinheit wird erhalten, wenn man einführt: Die Dichte als Funktion der Entfernung $D(\varrho)$, die Helligkeitsverteilung als Funktion der Leuchtkraft und der Entfernung $\varphi(H, \varrho)$, die maximale Leuchtkraft als Funktion der Entfernung $\mathsf{H}(\varrho)$ und den Absorptionsfaktor $\psi(\varrho)$. Außer Ansatz bleibt ein Einfluß der Zeit auf den funktionalen Zusammenhang der Größen, ebenso die Abhängigkeit vom scheinbaren Ort im schematischen Sternsystem. Dagegen wird die Möglichkeit ins Auge gefaßt, daß das Sternsystem ein begrenztes ist. Liegt die Grenze in der Entfernung P und ist h_n die scheinbare Helligkeit der absolut hellsten Sterne an der Grenze

$$h_n = \frac{\mathsf{H}(\mathsf{P})\,\psi(\mathsf{P})}{\mathsf{P}^2},$$

so ist die Sternzahl bis zur scheinbaren Größe m im scheinbaren Areal ω für

$$(18)\begin{cases} m < n \qquad \mathfrak{A}_m = \omega \displaystyle\int_0^{\sigma} D(\varrho)\varrho^2 d\varrho \int_{\frac{h_m \varrho^2}{\psi(\varrho)}}^{\mathsf{H}(\varrho)} \varphi(H, \varrho)\, dH \qquad \sigma < \mathsf{P} \\ \text{und für} \\ m > n \qquad \mathfrak{A}_m = \omega \displaystyle\int_0^{\mathsf{P}} D(\varrho)\varrho^2 d\varrho \int_{\frac{h_m \varrho^2}{\psi(\varrho)}}^{\mathsf{H}(\varrho)} \varphi(H, \varrho)\, dH. \end{cases}$$

Die Entfernung σ, in der die absolut hellsten Sterne die scheinbare Helligkeit h_m haben, ergibt sich aus

$$\frac{\mathsf{H}(\sigma)\,\psi(\sigma)}{\sigma^2} = h_m.$$

249) München Abh. 25, Nr. 3 (1909) und Astr. Nachr. 182 (1909), p. 229.

Die mittlere Parallaxe der Sterne der scheinbaren Größe m ist nach den gleichen allgemeinsten Annahmen für

$$(19) \qquad m < n \qquad \bar{\pi}_m = \frac{\int\limits_0^\sigma D(\varrho)\cdot\frac{\varrho^3}{\psi(\varrho)}\cdot\varphi\left(\frac{h_m\varrho^2}{\psi(\varrho)},\varrho\right)d\varrho}{\int\limits_0^\sigma D(\varrho)\cdot\frac{\varrho^4}{\psi(\varrho)}\cdot\varphi\left(\frac{h_m\varrho^2}{\psi(\varrho)},\varrho\right)d\varrho}.$$

Wenn $m > n$, so ist als obere Grenze statt σ zu setzen P.

Da das vorhandene Material zur Lösung der Aufgabe in dieser Allgemeinheit nicht ausreicht, müssen Beschränkungen eintreten. Setzt man die Helligkeitsverteilung als unabhängig von der Entfernung, also überall im Raume dasselbe Mischungsverhältnis der Leuchtkräfte voraus, und betrachtet dementsprechend auch H als unabhängig vom Orte, so ergibt sich mit

$$\varrho'^2 = \frac{\varrho^2}{\psi(\varrho)} \quad \text{und} \quad \Delta(\varrho') = D(\varrho)\frac{\psi(\varrho)^{\frac{5}{2}}}{\psi(\varrho) - \frac{1}{2}\varrho\,\psi'(\varrho)},$$

so daß $\Delta(\varrho')$ die scheinbare, noch den Einfluß der Absorption enthaltende Dichte ist

$$(20) \qquad \mathfrak{A}_m = \omega\int\limits_0^{\sigma'}\Delta(\varrho')\,\varrho'^2\,d\varrho'\int\limits_{h_m\varrho'^2}^{\mathsf{H}}\varphi(H)\,dH, \qquad \sigma' = \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}}.$$

Mit der den Beobachtungen entnommenen innerhalb der Unsicherheit der Beobachtungen bis etwa 10^m geltenden Beziehung (17)

$$\mathfrak{A}_m = c\cdot h^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

ist dieser Ansatz, Stetigkeit vorausgesetzt, nur zu vereinigen, wenn

$$(21) \qquad \Delta(\varrho') = \gamma\cdot\varrho'^{-\lambda}, \qquad D(\varrho) = \gamma\varrho^{-\lambda}\frac{\psi(\varrho) - \frac{1}{2}\varrho\,\psi'(\varrho)}{\psi(\varrho)^{\frac{5-\lambda}{2}}}$$

gesetzt wird. Läßt man schließlich auch die Absorption außer Betracht, so vereinfachen sich die Formeln weiter in

$$22) \quad \left\{\begin{aligned} & && D(\varrho) = \gamma\varrho^{-\lambda} \\ & && \mathfrak{A}_m = \omega\int\limits_0^{\sigma'} D(\varrho)\,\varrho^2 d\varrho\int\limits_{h_m\varrho^2}^{\mathsf{H}}\varphi(H)\,dH \\ & m < n && \phantom{\mathfrak{A}_m} = \omega\int\limits_0^{\sigma'} D(\varrho)\,\varrho^4 d\varrho\int\limits_{h_m}^{\frac{\mathsf{H}}{\varrho^2}}\varphi(h\varrho^2)\,dh, \qquad \sigma' = \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_m}} \\ & && \bar{\pi}_m = \frac{\int\limits_0^{\sigma'} D(\varrho)\,\varrho^3\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho}{\int\limits_0^{\sigma'} D(\varrho)\,\varrho^4\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho}, \end{aligned}\right.$$

für $m > n$ ist als obere Grenze des Integrals nach ϱ einzuführen $\sigma'' = \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{h_n}}$.

Soweit die Relation $\mathfrak{A}_m = c \cdot h^{\frac{\lambda - 3}{2}}$ gilt, wird

$$\bar{\pi}_m = \Gamma \sqrt{h_m}, \tag{23}$$

wobei Γ unabhängig von h_m, aber Funktion von $\varphi(H)$ und λ ist. Die so erhaltenen Parallaxen nennt *Seeliger normale* Parallaxen. Die Vergleichung der normalen Parallaxen mit den mittleren Parallaxen hätte zu entscheiden, ob die drei Voraussetzungen der Formeln: $\varphi(H)$ unabhängig von ϱ, $\psi(\varrho) = 1$ und $\mathfrak{A}_m = c \cdot h^{\frac{\lambda - 3}{2}}$ erfüllt sind.

Da die Parallaxen zu wenig bekannt sind, kommen für die Untersuchung der Konstitution des Fixsternsystems nur die Gleichungen für $\mathfrak{A}_m$ in Betracht und die Gleichung für $\bar{\pi}_m$ kann nur zur Kontrolle dienen.

Aus einer von *G. C. Comstock*[250]) zusammengestellten Liste von 235 sicher bestimmten Fixsternparallaxen leitet *Seeliger*[251]) den bis $M = 6$ den Beobachtungen sich genügend anschließenden Ausdruck

$$\varphi(m_0) = 15{,}55\,(1 + 0{,}266\,m_0 - 0{,}002\,m_0^2)$$

ab, worin m_0 die zu $\pi = 0{,}2''$ gehörende absolute Helligkeit ist. Daraus folgt für die zu H gehörige größte absolute Helligkeit $-3{,}62$ oder für die Sternweite als Entfernungseinheit mit $m = M + 3{,}495$

$$M_0 = -7{,}12.$$

Comstock hatte aus der Diskussion des Parallaxenmaterials weiter geschlossen, daß $\varphi(H)$ sehr genähert dargestellt werden kann durch

$$\varphi(H) = \Gamma \cdot \frac{\mathsf{H}}{H} \cdot \log\left(\frac{\mathsf{H}}{H}\right). \tag{24}$$

Bei Einführung dieses Ausdrucks für die Leuchtkraftfunktion in die Integralgleichung für $\mathfrak{A}_m$ erhält man für die Grenzgröße den Wert $n = 11{,}91^{\mathrm{m}}$ und damit eine genügende Darstellung der beobachteten Sternzahlen, und zwar auch der Werte $\mathfrak{A}_{13,90}$ und $\mathfrak{A}_{14,84}$. Dagegen lassen sich die mit diesen Annahmen berechneten normalen Parallaxen mit der *Kapteyn*schen empirischen Formel nur bei Annahme einer gänzlich unzulässig großen Absorption in Einklang bringen, aus der eine außerordentlich starke Zunahme der Sterndichte gegen die Grenze des Sternsystems folgen würde. Der zur Bestimmung der Dichtefunktion benutzte Ausdruck $\mathfrak{A}_m = c \cdot h^{\frac{\lambda - 3}{2}}$ schließt sich den beobachteten Stern-

250) Astron. Journ. 25 (1907), p. 172.

251) München Abh. 25, Nr. 3 (1909), p. 21.

zahlen mit $\lambda = 0{,}43$ nur bis $m = 11{,}2$ genügend an, während die Werte $\mathfrak{A}_{13,90}$ und $\mathfrak{A}_{14,84}$ nicht mehr dargestellt werden, sondern das in der zweiten Gleichung (17) auftretende Zusatzglied erfordern. Es kann daher der für $m > n$ geltende Ausdruck für $\mathfrak{A}_m$ nach den Gleichungen (18) zu einer Bestimmung von $\varphi(H)$ herangezogen werden.

Die Darstellung der beobachteten mittleren Parallaxen kann nur erzielt werden durch eine Erweiterung des Ausdrucks für $D(\varrho)$, die jedoch nur für kleine Werte von ϱ zu merklichen Änderungen der Dichteverhältnisse führen wird. Mit dem erweiterten Ausdruck von $D(\varrho)$ wird sich der Ausgangswert von $\varphi(H)$, für das der Ansatz gilt

$$(25)\quad \varphi(H) = e^{-a\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right) - b\left(\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)\right)^2}\left[1 - c\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right) - d\left(\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)\right)^2\right]$$

ändern. Damit ist ein Weg sukzessiver Näherung gegeben, der *Seeliger*[251a]) zu einer genügenden Darstellung sowohl der Sternzahlen, wie auch der mittleren Parallaxen durch die Ansätze

$$(26)\quad D(\varrho) = \gamma\varrho^{-0{,}49}\left(1 - 0{,}58\,\varrho^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$(27)\quad \varphi(H) = e^{-0{,}2301\left(\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)\right)^2 - 5{,}3844\log\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)} — \frac{H}{\mathsf{H}} = \left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)^{-2{,}3384 + 0{,}04(M - M_0)} — \frac{H}{\mathsf{H}}$$

führte. Das zweite Glied des Ausdrucks von $\varphi(H)$ kommt dem ersten gegenüber nur bei M_0 sehr naheliegenden Werten von M in Betracht.

Aus dem nach *Kapteyn* angenommenen Werte $\bar{\pi}_{2,7\mathrm{m}} = 0{,}0383''$ bestimmt sich dann aus der Integralgleichung für $\bar{\pi}_m$, deren Integration für die „normale Parallaxe" auf den Ausdruck führt

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \pi_m &= 5{,}57''\sqrt{\frac{h_m}{\mathsf{H}}},\\ \log\pi_m &= 0{,}7460 + 0{,}2\,(M_0 - m),\end{aligned}\right.$$

die absolute Maximalgröße zu $M_0 = -\,8{,}11$, die in der endgültigen Rechnung zu $M_0 = -\,7{,}8$ angenommen wird.

Die aus der Formel (28) sich ergebenden Parallaxen schließen sich den mittleren Parallaxen, die *J. C. Kapteyn* [Astr. Nachr. 146 (1898), p. 107] abgeleitet hatte und die dargestellt werden durch die Formel

$$\log\bar{\pi}_m = -\,0{,}975 - m\cdot 0{,}1505$$

nicht an. Dieser Anschluß wird aber[252]) erreicht durch Einführung des geänderten Dichtegesetzes nach den Ausdrücken (26), (27) in die Integralgleichung für $\bar{\pi}_m$. In der folgenden Tabelle sind die den ver-

---

251a) München Sitz.-Ber. 41 (1911), p. 413—461.

252) München Sitz.-Ber. 50 (1920), p. 87—144.

schiedenen Annahmen entsprechenden mittleren Parallaxen für einige Größenklassen zusammengestellt:

		2^m	4^m	6^m	8^m	10^m
Formel (28)	$\bar{\pi}_m =$	0,0611″	0,0243″	0,0097″	0,0033″	0,0015″
Seeligers Endwerte		0,0482	0,0264	0,0136	0,0065	0,0029
Kapteyn		0,0530	0,0265	0,0133	0,0066	0,0033

Die Grenzgröße, unter der die absolut hellsten Sterne an der Grenze des schematischen Sternsystems erscheinen, wird bei der Anwendung auf das neuere Zahlenmaterial zu $9{,}5^m$ angenommen. Der Abschwächung von $-7{,}8^m$ auf $9{,}5^m$ entspricht nach Formel (3) eine Parallaxe von 0,00035″ oder eine Entfernung von 2884 Sternweiten. Der numerische Ausdruck der Dichte im schematischen Sternsystem ist nach *Seeligers* letzter Bearbeitung (bei Einführung der Sternweite als lineare Entfernungseinheit)

$$\log D(\varrho) = 1{,}212 - 0{,}655 \log \varrho + \log\left(1 - \frac{1{,}686}{\sqrt{\varrho}}\right). \tag{29}$$

Die Bestimmung des typischen Sternsystems[253]) erfolgt in der Weise, daß die den einzelnen galaktischen Zonen entsprechenden Werte von $\mathfrak{A}_m$ mit $m < n$ zur Bestimmung der Konstanten der Dichtefunktion unter Beibehaltung des Zusatzfaktors $-0{,}58\varrho^{-\frac{1}{2}}$ benutzt werden und daß dann die Grenzgröße den Werten $\mathfrak{A}_m$ mit $m > n$ angepaßt wird. Das sich bei Verwendung des neueren Materials ergebende stark abgeplattete Ellipsoid, dessen Grenze in der Ebene der Milchstraße in etwa viermal größerer Entfernung liegt als in der Richtung nach den Polen der Milchstraße, ist durch folgende Werte charakterisiert

$$(30)\quad \begin{cases} b & 0^0 - \pm 10^0 & \pm 30^0 - \pm 50^0 & \pm 70^0 - \pm 90^0 \\ \lambda & 0{,}535 & 0{,}715 & 0{,}775 \\ n & 10{,}0 & 8{,}5 & 7{,}0 \\ \mathsf{P} & 3625 & 1800 & 900 \end{cases}$$

Die der ganzen Darstellung noch anhaftende Unwahrscheinlichkeit einer bevorzugten Stellung der Sonne, derart, daß die Verteilung der Sterne in bezug auf die Sonne als Nullpunkt nach allen Richtungen symmetrisch sei, behebt *Seeliger*[254]) durch eine Darstellung der Grundzahlen, die auf der Annahme beruht, daß die Sonne in einem bis zu der Entfernung $a = 25$ Sternweiten sich erstreckenden Raume mit der gleichförmigen Dichte $\Delta = \gamma$ stehe und daß erst über die Grenze die-

253) München Sitz.-Ber. 42 (1912), p. 451—509.

254) Astr. Nachr. 201 (1915), p. 3.

ses Bereichs hinaus die Dichte dem Gesetze $\Delta = \gamma\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{-\lambda}$ folge. Mit $\lambda = 0{,}45$ wird eine ausreichende Darstellung der Sternzahlen und mittleren Parallaxen erhalten. Weiter ergibt sich, daß im typischen Sternsystem die für die einzelnen galaktischen Zonen gefundenen Werte der Konstanten der Dichtefunktion in der Tat zu nahe konstanten Werten der Dichte bis $\varrho = 25$ führen, so daß die Annahme, die Sonne stehe im Mittelpunkt des Systems, bedeutungslos wird.

24. Folgerungen aus der Seeligerschen Theorie. Eine charakteristische Eigenschaft des Sternsystems ist die für die verschiedenen Spektraltypen festgestellte verschiedenartige Verteilung in bezug auf die Milchstraße. Eine Erklärung dieser Tatsache ergibt sich nun, wenn man voraussetzt, daß den einzelnen Spektralklassen zwischen bestimmten Grenzen H_0, H_1 liegende absolute Leuchtkräfte der Sterne entsprechen, und wenn man im typischen Sternsystem mit den Ausdrücken (26), (27), also einer überall gleichen Häufigkeitsfunktion der Leuchtkräfte und einer mit dem Orte sich ändernden Dichte — [die Rechnung wurde auch mit dem *Schwarzschild*schen Ansatz

$$D(\varrho) = \gamma\,\varrho^{\alpha - \beta \log \varrho}$$

(vgl. p. 313 Gl. (39)) durchgeführt] — und den λ-Werten der einzelnen galaktischen Zonen die Anzahl der Sterne bis zur scheinbaren Größe 6,25 berechnet, die zwischen den Grenzwerten H_0 und H_1 der Leuchtkraft liegen. *Seeliger* erhält[255]) für die verschiedenen Spektralklassen eine Verteilung, die der von *Pickering* aus dem Draper-Katalog[256]) abgeleiteten Verteilung der Sterne bis 6^m der verschiedenen Typen nahe entspricht, wenn er für die absoluten Helligkeiten die Grenzen wählt:

Typus	B	A	FG	K	M
m_0	$-4{,}3$	$-3{,}52$	$-2{,}0$	$+0{,}0$	$+2{,}0$
m_1	$-3{,}52$	$-2{,}0$	$+0{,}0$	$+2{,}0$	$+\infty$.

Seeliger hält sich durch das Ergebnis dieser Rechnung zu dem Schluß berechtigt, daß mit den für das typische Sternsystem gemachten Annahmen die Verteilung der einzelnen Sterntypen in bezug auf die Milchstraße sehr nahe dargestellt werden könne. Eine mit der Annäherung an die Milchstraße stark zunehmende prozentuale Häufigkeit der großen Leuchtkräfte würde demnach als ein Hauptmoment bei der Sternverteilung wirken.

Auch die durch die Beobachtung festgestellte Beziehung zwischen

255) Astr. Nachr. 193 (1912), p. 161; 194 (1913), p. 137.

256) Harvard Coll. Obs. ann. 64, Nr. 4 (1912).

den Radialgeschwindigkeiten oder den daraus folgenden totalen Geschwindigkeiten der Sterne mit der scheinbaren Helligkeit findet sich durch die Theorie bestätigt, wenn man die nachgewiesene Zunahme der Geschwindigkeiten mit dem Spektralcharakter von 9,0 km/sec für Typus B bis 16,7 km/sec für Typus M hinzuzieht. Ordnet man den Spektraltypen wieder eine mit der Reihenfolge B bis M abnehmende mittlere Leuchtkraft H zu, die absoluten Helligkeiten von $-1{,}8^{\mathrm{m}}$ für B bis $+6{,}0^{\mathrm{m}}$ für M entspricht, so lassen sich die beobachteten Geschwindigkeiten darstellen durch

$$V(H) = 6{,}92\left(\frac{H}{\mathsf{H}}\right)^{-0{,}1}$$

und die Auswertung der Integralgleichung

$$\overline{V}_m = \frac{(\mathfrak{A}_m \cdot V(H))}{\mathfrak{A}_m}$$

führt zu Werten der mittleren Totalbewegungen, die mit abnehmender scheinbarer Helligkeit zunehmen, wie es die Beobachtung verlangt.

Eine dritte notwendige Folge der theoretischen Ausdrücke der Dichte- und Leuchtkraftfunktion ist eine Abhängigkeit der mittleren Parallaxen von der galaktischen Breite. Nach Gleichung (23) ist $\bar{\pi}_m$ ein Produkt aus $\sqrt{\bar{h}_m}$ in einen Faktor, der abhängt von $\varphi(H)$ und λ. Wird $\varphi(H)$ als unabhängig vom Orte angenommen, so bleibt die Abhängigkeit von $\bar{\pi}_m$ von λ, also von der galaktischen Breite bestehen, derart, daß die mittleren Parallaxen der Sterne einer bestimmten scheinbaren Helligkeit in der Milchstraße kleiner sind als am Pol derselben. Die numerische Auswertung mit den Konstanten der Ausdrücke (28) ergibt[257]) für das Verhältnis $\pi_{\mathrm{Pol}} : \pi_{\mathrm{Milchstraße}} = q$ die Wertereihe

$m = 3{,}0^{\mathrm{m}}$	$5{,}0^{\mathrm{m}}$	$7{,}0^{\mathrm{m}}$	$8{,}5^{\mathrm{m}}$	$10{,}0^{\mathrm{m}}$
$q = 1{,}6$	1,9	2,2	2,3	2,5.

Bei Gleichheit der linearen Eigenbewegungen der Sterne würden die scheinbaren Eigenbewegungen in der Milchstraße nur etwa halb so groß sein wie am Pol derselben. Die von *Boss*[258]) für die Sterne von der Größe $5{,}9^{\mathrm{m}}$ und die von *Comstock*[259]) für Sterne der Größe $9{,}5^{\mathrm{m}}$ abgeleiteten Bewegungen zeigen in der Tat ein entsprechendes Verhalten.

Die Hauptstützen der *Seeliger*schen Theorie bestehen hiernach darin, daß die Sternzahlen $\mathfrak{A}_m$ bis etwa $9{,}2^{\mathrm{m}}$ eine geometrische Reihe

---

257) Astr. Nachr. 193 (1912), p. 175.

258) Astron. Journ. 26 (1910), p. 122.

259) Washburn Obs. Publ. 12 (1908), p. 22.

bilden, was bis zur Größe $7{,}0^m$ am sichersten durch die Potsdamer photometrische Durchmusterung erwiesen erscheint[260]), und daß in der Reihe der $\mathfrak{A}_m$ etwa bei 10^m eine Diskontinuität auftritt. Ein wichtiger Punkt ist weiter die Annahme einer endlichen maximalen Leuchtkraft H. Aus dem Verhalten der $\mathfrak{A}_m$ folgt dann unmittelbar das Dichtegesetz unabhängig vom Verlauf der Verteilungsfunktion $\varphi(H)$ und die Endlichkeit des Sternsystems. Die Beweiskraft des Zahlenmaterials *Seeligers* sowohl hinsichtlich der Abzählungsresultate als auch besonders hinsichtlich der Größenangaben wird durch *W. J. A. Schouten* bestritten.[261]) Nach letzterem nimmt der Quotient α_m zweier aufeinanderfolgender Werte der $\mathfrak{A}_m$-Reihe nach der Bearbeitung *van Rhijns*[262]) regelmäßig in allen galaktischen Zonen ab, allerdings in der Milchstraße langsamer als in höheren galaktischen Breiten. In *van Rhijns* Tafel der Sternzahlen bleibt aber in Wirklichkeit trotz einer Verbesserung derselben durch den Autor[263]) die Unstetigkeit doch bestehen.[264]) Die ursprünglichen Zahlen *van Rhijns* lassen sich nach *G. Deutschland*[265]) nicht durch eine einzige quadratische Interpolationsformel darstellen [vgl. auch die *Seeliger*schen Formeln (17) selbst], sondern verlangen zu einer hinreichenden Darstellung zwei solcher Formeln, die in dem Gebiete zwischen $6{,}5^m$ und $9{,}5^m$ ineinander übergehen, indem die erste für die Sterne unter $9{,}5^m$, die zweite für die Sterne heller als $6{,}5^m$ unzulässige Abweichungen ergibt.

Die Frage der Zulässigkeit unendlich großer Leuchtkräfte und der Unbegrenztheit des Systems hatte *Seeliger* selbst schon eingehend geprüft[266]) und war zu dem Schlusse gelangt, daß bei Annahme beliebig großer Helligkeiten eine eindeutige Lösung des Problems der Bestimmung der räumlichen Verteilung der Sterne nicht vorhanden sei und daß, wenn die Entfernung der Grenze des Sternsystems ins Unendliche rückt, in den mittleren Parallaxen kaum zulässige Verhältnisse auftreten.

In dem in Groningen zusammengestellten, die Forschungen der letzten Jahre voll ausnützenden Zahlenmaterial findet *Seeliger*[267]) seine früheren Schlußfolgerungen dem Inhalte nach durchaus bestätigt, wenn

260) München Sitz.-Ber. 1920, p. 89.

261) *W. J. A. Schouten,* On the determination of the principal laws of statistical astronomy, Diss. Groningen, Amsterdam 1918.

262) Groningen Lab. Publ. Nr. 27 (1917).

263) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 45.

264) Astr. Nachr. 214 (1921), p. 145.

265) Astr. Ges. Vjs. 54 (1919), p. 117.

266) München Sitz.-Ber. 42 (1912), p. 455.

267) München Sitz.-Ber. 1920, p. 87.

auch die numerischen Werte der Konstanten teilweise nicht unerhebliche Änderungen erfahren. Insbesondere entspricht das Dichtegesetz $D(\varrho) = \gamma\varrho^{-\lambda}$ im großen und ganzen den wahren Verhältnissen in hinreichender Annäherung, und die Unstetigkeit im Gange der $\mathfrak{A}_m$-Zahlen tritt trotz weitgehender Ausgleichung der den Beobachtungen unmittelbar entnommenen Zahlen und trotz einer gerade in der Nähe der Unstetigkeitsstelle vorhandenen Störung anderer Art mit großer Bestimmtheit auf. Aus einem bei der Größe n auftretenden Sprunge Δ in $d \log \pi$ und $d^2 \log \mathfrak{A}_m$ kann man, wenn nur die Leuchtkraft H beim Werte H einen starken Abfall oder direkt eine Unstetigkeit zeigt, die Entfernung der Grenze eindeutig finden nach der Gleichung (a. a. O. p. 101)

$$\frac{1}{\sigma} = \pi_n \left[1 + \frac{\Delta\left(\frac{d \log \pi}{dn} \cdot \frac{d \log \mathfrak{A}_n}{dn}\right)}{\Delta\left(\frac{d^2 \log \mathfrak{A}_n}{dn^2}\right)} \right]$$

und man wird auf diesem vollkommen unabhängigen Wege bei der Annahme eines Sprunges von 0,068, 0,048 und 0,028 in $\left(\frac{d^2 \log \mathfrak{A}_n}{dn^2}\right)$, der nach dem vorliegenden Material durchaus annehmbar erscheint, auf Entfernungen der Grenzschicht von 3000, 2300 und 1800 Sternweiten geführt (a. a. O. p. 133).

25. Beziehung zwischen Eigenbewegung, Parallaxe und Leuchtkraft. Die Erkenntnis, daß für die Beurteilung der Entfernungen der Sterne die Größe der Eigenbewegung ein der scheinbaren Helligkeit an Bedeutung wenigstens gleichkommender Faktor ist, verwertete zuerst *Gyldén*.[268]) Er schloß 16 gemessenen Parallaxenwerten die Formel an

$$\pi_{m,\mu} = \alpha \pi_m \cdot \frac{\mu}{\bar{\mu}_m},$$

worin π_m die aus der scheinbaren Helligkeit allein folgende Parallaxe, relativ zur Parallaxe der Sterne 1. Größe, und $\bar{\mu}_m$ die mittlere Eigenbewegung der Sterne der scheinbaren Größe m ist. Die Konstante α wird etwa 0,08. Das weitere Material machte bald Versuche zur Verbesserung dieser Formel notwendig, und diese führten *Gyldén*[269]) zunächst auf den Ausdruck

$$\pi = 0{,}204'' e^{-0{,}215\, m} e^{0{,}2\sqrt{m} \cdot \mu},$$

$$\log \pi = -0{,}690 - 0{,}0934 m + 0{,}0870 \sqrt{m} \cdot \mu,$$

der aber auch noch nicht zu einer genügenden Darstellung ausreichte.

268) Astr. Ges. Vjs. 12 (1877), p. 299.

269) Astr. Nachr. 136 (1894), p. 289.

Kapteyn ging bei seinen Versuchen, dem Beobachtungsmaterial eine mathematische Formel anzuschließen, aus von dem Ansatz $\pi_m = \pi_0 k^m$, dessen Konstanten er zuerst aus den bei der Diskussion der Eigenbewegungen der Sterne des *Bradley*-Katalogs gefundenen Säkularparallaxen ermittelte.[270]) Bei einer zweiten eingehenderen Behandlung[271]) zieht *Kapteyn* auch die unmittelbar gemessenen trigonometrischen Parallaxen in die Diskussion ein, fügt denselben den aus der Gesamtheit der *Bradley*-Sterne mit EB. $< 0{,}30''$ durch die Säkularparallaxe sich ergebenden Wert $= 0{,}0135''$, geltend für $m = 5{,}5$ und $\mu = 0{,}0656''$, hinzu und bestimmt nun in doppelter Annäherung die Konstanten des Ausdrucks $\pi = \pi_0 k^m \mu^\varkappa$, der die mittlere Parallaxe abhängig macht einerseits von der Größe der Eigenbewegung μ, andrerseits von der scheinbaren Helligkeit m. Er erhält für die mittlere Parallaxe der Sterne der scheinbaren Größe m

$$(31) \qquad \bar{\pi}_m = 0{,}0158'' \cdot 0{,}78^{m-5{,}5}, \qquad \log \bar{\pi}_m = -1{,}208 - 0{,}108\,m$$

und für die mittlere Parallaxe der Sterne der scheinbaren Größe m und der Eigenbewegung μ

$$(32) \qquad \begin{cases} \bar{\pi}_{m,\mu} = (0{,}0387\,\mu)^{0{,}712}\, 0{,}905^{m-5{,}5}, \\ \log \bar{\pi}_{m,\mu} = -0{,}766 - 0{,}0434\,m + 0{,}712 \log \mu. \end{cases}$$

Bei seinen weiteren Rechnungen wandte *Kapteyn* die verbesserten Formeln (Groningen Publ. 11, p. 18) an

$$(33) \qquad \begin{cases} \bar{\pi}_{m,\mu} = (0{,}0419\,\mu)^{0{,}738}\, 0{,}87^{m-5{,}5}, \\ \log \bar{\pi}_{m,\mu} = -0{,}684 - 0{,}0605\,m + 0{,}738 \log \mu. \end{cases}$$

Beim Versuch der Hinzuziehung des durch die spektroskopischen Parallaxenbestimmungen gewonnenen Materials zur Bestimmung der Konstanten der *Kapteyn*schen Formel fand *G. Strömberg*[272]), daß man, um eine genügende Darstellung zu erzielen, die Eigenbewegungen um einen konstanten Betrag vermehren, also setzen müsse $\pi = \pi_0 k^m (\mu + c)^\varkappa$, weil bei den Sternen mit kleiner Eigenbewegung sich die Parallaxe nahezu unabhängig von der Größe der Bewegung zeigt. Für c ergab sich ein Wert von etwa $0{,}1''$ für die außergalaktischen und von $0{,}1''$ bis $0{,}2''$ für die galaktischen Sterne. Ob diese erweiterte Formel Anspruch auf allgemeinere Bedeutung erheben kann, muß zunächst noch unentschieden bleiben, weil das für die spektroskopischen Parallaxenbestimmungen benutzte Material nach besonderen Gesichtspunkten ausgewählt ist.

---

270) Astr. Nachr. 146 (1898), p. 107.

271) Groningen Lab. Publ. Nr. 8 (1901).

272) Astroph. Journ. 47 (1918), p. 7.

Die Anpassung einer mathematischen Formel an die Beobachtungen kann nur zu einem mittleren Werte der Parallaxe der Sterne bestimmter scheinbarer Größe und bestimmter Größe der Eigenbewegung führen. Die individuellen Werte der Parallaxe werden um diesen mittleren Wert gesetzmäßig verteilt sein. *Kapteyn*[273]) macht bezüglich dieser Verteilung zunächst die Annahme, daß die Logarithmen der wahren Parallaxen der Sterne bestimmter Helligkeit gegen einen Wert $\log \pi_0$ verteilt seien gemäß dem *Gauß*schen Fehlergesetz, eine Annahme, deren theoretische Berechtigung er später zu begründen vermochte. Aus einer Anwendung der Hypothese auf das vorhandene Material an zuverlässig bestimmten Parallaxen schloß *Kapteyn* dann, daß die Art der Verteilung einem wahrscheinlichen Fehler von 0,19 entspreche und daß zwischen dem als „wahrscheinlichste Parallaxe" bezeichneten Werte π_0 und der empirisch ermittelten mittleren Parallaxe $\bar{\pi}$ die Relation bestehe

$$\pi_0 = 0{,}810\,\bar{\pi}. \tag{34}$$

E. Hertzsprung[274]) stellt den Zusammenhang zwischen den 3 Größen: Entfernung, Eigenbewegung und scheinbare Helligkeit dar mit Hilfe der auf einen festen Wert der Eigenbewegung reduzierten scheinbaren Größen. Die auf $\mu = 1''$ reduzierte scheinbare Größe eines Sterns ist

$$m_{\mu=1''} = m + 5 \log \mu.$$

Andrerseits ist nach (3)

$$M = m_{\pi=1''} = m - 5 \log \varrho = m + 5 \log \pi,$$

also wird

$$M = m_{\pi=1''} = m_{\mu=1''} - 5 \log \varrho\mu. \tag{35}$$

Wäre die mittlere relative Bewegung der Sterne in bezug auf die Sonne unabhängig von der Entfernung, so wäre das Produkt $\varrho\mu$ konstant. Dieser Annahme entspricht der Ansatz

$$\bar{m}_{\pi=1''} = \alpha \bar{m}_{\mu=1''} + \beta,$$
$$\log \bar{\pi}_{m,\mu} = \tfrac{1}{5}\beta - \tfrac{1}{5}(1-\alpha)m + \alpha \log \mu.$$

Aus dem in Groningen Publ. 24 zusammengetragenen Material von Sternen bekannter Parallaxe und Eigenbewegung leitete *Hertzsprung* die Ausdrücke ab

$$\begin{cases} \bar{m}_{\pi=1''} = 0{,}75\, m_{\mu=1''} - 5{,}00, \\ \log \bar{\pi}_{m,\mu} = -1{,}000 - 0{,}05\, m + 0{,}75 \log \mu. \end{cases} \tag{36}$$

---

273) Groningen Lab. Publ. Nr. 8 (1901), p. 21.

274) Astr. Nachr. 208 (1915), p. 91.

W. J. Luyten[275]) erweiterte diese Untersuchungen durch Hinzuziehung auch der auf spektroskopischem Wege bestimmten Parallaxen. Er erhielt den Ausdruck

$$\overline{m}_{\pi=0{,}1''} = -0{,}69 + 0{,}54 m_{\mu=0{,}1''} \text{ oder } \overline{m}_{\pi=1''} = +0{,}54 m_{\mu=1''} - 2{,}99,$$

woraus folgt

$$\log \bar{\pi}_{m,\mu} = -0{,}598 - 0{,}092 m + 0{,}54 \log \mu .$$

Für die *F*- und *G*-Sterne herrscht ausreichende Übereinstimmung der aus den trigonometrischen und der aus den spektroskopischen Parallaxen berechneten Werte der Konstanten der Formel, während bei den *K*- und *M*-Sternen systematische Unterschiede auftreten, die dem spektroskopischen Parallaxenmaterial zur Last zu legen wären. Eine Behandlung seines Katalogs[276]) von 749 Sternen mit Eigenbewegungen über 0,5″ führte *Luyten* zu den Ausdrücken

$$m_{\pi=0{,}1''} = 6{,}62 + 0{,}858\,(m_{\mu=0{,}1''} - 12{,}18)$$

oder

$$M = m_{\pi=1''} = 0{,}858 m_{\mu=1''} - 4{,}54,$$

also

$$\log \bar{\pi}_{m,\mu} = -0{,}908 - 0{,}028 m + 0{,}858 \log \mu .$$

Dem Material wird aber auch genügend entsprochen bei symmetrischer Verteilung der Abweichungen durch die einfache Formel

$$M = m_{\mu=1''} - 5{,}6 .$$

Nach (35) wäre dann $\log \varrho \mu = 1{,}12$ oder nach Formel (2) die mittlere lineare Tangentialbewegung der Sterne relativ zur Sonne 62 km/sec.

Die Kenntnis des Gesetzes der $\pi_{m,\mu}$ ermöglicht nun eine empirische Auswertung der die Verteilung der Sterne nach ihrer Leuchtkraft bestimmenden Funktion $\varphi(H)dH$ und der Dichtefunktion $D(\varrho)$. *Kapteyn*[277]) ordnet die Sterne des *Auwers-Bradley*-Katalogs nach Klassen der scheinbaren Helligkeit und innerhalb dieser Klassen nach der Größe der Eigenbewegung, bestimmt für jede dieser Gruppen mit den ihr entsprechenden Werten von m und μ die mittlere Parallaxe $\pi_{m,\mu}$ und verteilt nun nach den über den Verlauf der Parallaxen gemachten Annahmen die Sterne jeder Gruppe dem Mittelwert der Parallaxe und dem Fehlergesetz gemäß auf Entfernungsgruppen. Die Grenzen dieser Entfernungsgruppen wählt er gemäß der Beziehung $\varrho_{m+1} : \varrho_m = \sqrt{2{,}512}$, so daß sie um je eine Größenklasse wachsende Stufen der absoluten Helligkeit bestimmen. Durch Zusammenfassen der aus den einzelnen Gruppen der scheinbaren Helligkeit in jede

275) Lick Obs. Bull. 10 (1922), p. 135.
276) Lick Obs. Bull. 11 (1923), p. 22.
277) Groningen Lab. Publ. Nr. 11 (1902).

der Entfernungsgruppen entfallenden Sterne erhält er die Zahl der Sterne, die aus der Gesamtzahl der *Bradley*-Sterne in die durch die einzelnen bestimmten Entfernungsgrenzen begrenzten Kugelschalen fallen, und durch Zusammenfassen der aus den einzelnen Entfernungszonen in jede der Klassen der absoluten Helligkeit fallenden Sterne die Verteilung der Sterne nach ihrer absoluten Helligkeit unter der Voraussetzung, daß diese Verteilung für alle Entfernungen die gleiche ist. Die erstere Reihe von Werten bestimmt nach Division mit dem Rauminhalte der Kugelschalen die Dichtefunktion $D(\varrho)$, die zweite Reihe unmittelbar die Leuchtkraftfunktion.

Kapteyn versuchte dann die so empirisch gefundene Verteilung der Sterne in der Volumeneinheit nach Stufen von 1^m der absoluten Helligkeit durch einen analytischen Ausdruck wiederzugeben und erlangte eine ausreichende Darstellung[278]) durch die Annahme

$$\Delta(0)\varphi(M)\,dM = \frac{\alpha^2 \text{ mod.}}{\sqrt{\pi}\cdot H}\, e^{-\alpha^2(\log H - 1{,}400)^2},$$

wo $\Delta(0)$ die Dichte in der Umgebung der Sonne $=0{,}111$ für die Kubiksternweite und $\alpha^2 = 0{,}385$ ist. Numerisch wird:

$$\log[\Delta(0)\,\varphi(M)\,dM] = 0{,}692 - 0{,}532\log H - 0{,}167\,(\log H)^2.$$

Da die für die Stufen von 1^m gefundene Beziehung auch für die unendlich kleinen Intervalle gelten muß, hat man als Ausdruck der Häufigkeitsfunktion der absoluten Helligkeiten

$$(37)\qquad \varphi(M) = \frac{C}{H}\, e^{-\alpha^2(\log H - 1{,}400)^2},$$

wofür man, wenn man H durch M ausdrückt, auch schreiben kann:

$$\varphi(M) = C_1\, e^{-\alpha_1^2(M-M_0)^2}.$$

26. Schwarzschilds Entwicklungen. Die Begründung der von *Kapteyn* auf empirischem Wege gefundenen Darstellung der Sternverteilung und der Häufigkeit der absoluten Helligkeiten aus den allgemeinen Integralgleichungen der Stellarstatistik wurde von *K. Schwarzschild*[279]) gegeben. Durch Transformation der Gleichungen für die Sternzahl gegebener scheinbarer Größe und für die mittlere Parallaxe der Sterne gegebener scheinbarer Größe

$$(38)\quad A_m = 4\pi\int_0^\infty D(\varrho)\varrho^4\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho,\quad A_m\bar{\pi}_m = 4\pi\int_0^\infty D(\varrho)\varrho^3\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho$$

und Anwendung des *Fourier*schen Integralsatzes in komplexer Form gelingt ihm unter Voraussetzung eines unendlichen Sternsystems die

278) Astron. Journ. 24 (1904), p. 115; vgl. auch Astr. Nachr. 183 (1910), p. 313.
279) Astr. Nachr. 185 (1910), p. 81.

allgemeine mathematische Lösung der Aufgabe, die zu analytischen Ausdrücken führt, die bei gegebenem $\varphi(H)$ die Dichtefunktion $D(\varrho)$ ergeben aus der Gleichung für A_m, und die Dichte- und Leuchtkraftfunktionen $D(\varrho)$ und $\varphi(H)$ gleichzeitig aus den beiden Gleichungen für A_m und $\bar{\pi}_m$. Durch Einführung der in den Gleichungen (6) und (37) gefundenen Darstellung von A_m und $\varphi(M)$ entsteht der numerische Ausdruck

$$(39) \qquad \log D(\varrho) = -0{,}674 - 0{,}174\,(\log\varrho - 0{,}75)^2,$$

nach dem die Sterndichte für $\log\varrho = 0{,}75$, $\varrho = 5{,}6$, also $\pi = 0{,}18''$ ein Maximum erreichte. Bei der kleinen Zahl von Sternen mit $\pi > 0{,}18''$ ist es aber, ohne den Sternzählungen Zwang anzutun, gestattet, $D(\varrho)$ bis $\varrho = 5{,}6$ als konstant zu betrachten. Numerisch wird

ϱ	5,6	20	100	300	1000	10000
π	0,18″	0,05″	0,01″	0,0033″	0,0010″	0,0001″
D	0,212	0,187	0,113	0,064	0,028	0,003.

In der Entfernung 5,6 wären in einem kubischen Raum von 10 Sternweiten Seitenlänge 212 Sterne enthalten. Für $\log\bar{\pi}_m$ geben *Schwarzschilds* Entwicklungen aus $D(\varrho)$ und $\varphi(M)$

$$(40) \qquad \log\bar{\pi}_m = -1{,}009 - 0{,}159\,m.$$

Die Vergleichung dieses aus der Verteilung der Sterne nach Zahl und Leuchtkraft theoretisch abgeleiteten Ausdrucks der mittleren Parallaxe mit dem aus den Beobachtungen abgeleiteten Ausdruck (31) zeigt einen systematischen Gang der Unterschiede; bei $m = 3{,}9$ fallen beide Reihen zusammen, für die schwachen Sterne sind die beobachteten Parallaxen erheblich zu groß.

Nach dem so theoretisch begründeten Ansatz (39) und nach dem von *Kapteyn* empirisch gefundenen Ausdruck (37) kann man $D(\varrho)$ und $\varphi(H)$ ausdrücken als reine Exponentialfunktionen und gewinnt dadurch die Möglichkeit, die Integration in einfachster Weise zu bewerkstelligen. *Schwarzschild* fügt diesen beiden Funktionen noch als dritte die in ähnlicher Weise wie $\varphi(H)$ definierte Häufigkeitsfunktion der Geschwindigkeiten hinzu, indem er mit $\psi(V)\,dV$ den Prozentsatz der Sterne jeder Leuchtkraft in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeit zwischen den Grenzen V und $V + dV$ liegt, bezeichnet, und ermittelt dann[280]) die Abhängigkeit der für die Stellarstatistik wichtigsten Beziehungen, die die Anzahl, die Entfernung und die absolute Helligkeit mittels dieser drei Funktionen verbinden mit der schein-

280) Astr. Nachr. 190 (1912), p. 361.

baren Helligkeit und der scheinbaren Bewegung, bzw. beiden Eigenschaften zugleich. Durch Einführung der Ansätze

$$D(\varrho) = 10^{a_0 - a_1 R - a_2 R^2}, \quad \varphi(H) = 10^{b_0 - b_1 M - b_2 M^2}, \quad \psi(V) = 10^{c_0 - c_1 G - c_2 G^2},$$

wobei

$$R = -5{,}0 \log \varrho, \qquad M = -2{,}5 \log H, \qquad G = -5{,}0 \log V$$

gehen die Integralgleichungen über in das bekannte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 10^{A_0 - A_1 x - A_2 x^2} dx = \left(\frac{\pi \log e}{A_2}\right)^{\frac{1}{2}} 10^{A_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{A_1^2}{A_2}\right)}$$

und man erhält für die zu bestimmenden Größen quadratische Ausdrücke, die abhängen von m und $g = -5 \log \mu$ und deren Koeffizienten ausgedrückt sind durch die Koeffizienten der drei Funktionen $D(\varrho)$, $\varphi(H)$ und $\psi(V)$. Für die drei so entstehenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \log A_m &= \alpha_0 - \alpha_1 m - \alpha_2 m^2, \\ \log \bar{\pi}_m &= P_0 - P_1 m, \\ \log \bar{\pi}_{m,\mu} &= R_0 - R_1 m - R_2 g \end{aligned}$$

betrachtet *Schwarzschild* die Werte der Koeffizienten als gegeben durch die Beobachtungen mit Ausnahme des die Abhängigkeit der mittleren Parallaxe von der scheinbaren Helligkeit ausdrückenden, durch das Beobachtungsmaterial nicht zuverlässig bestimmten Koeffizienten R_1 und berechnet dann unter Zugrundelegung der beobachteten Werte von α_0, α_1, α_2, P_0, P_1, R_0, R_2 die Koeffizienten der Entwicklung der drei Verteilungsfunktionen:

$$(41) \quad \begin{cases} \log D(\varrho) = 0{,}488 + 0{,}485 \log \varrho - 0{,}22 (\log \varrho)^2, \\ \log \varphi(H) = -2{,}879 + 0{,}737 M - 0{,}0147 M^2, \\ \log \psi(V) = -0{,}922 + 0{,}825 \log V - 1{,}452 (\log V)^2. \end{cases}$$

Ergebnisse neuerer Forschungen lassen eine Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Sterne von ihrer Leuchtkraft vermuten, wodurch eine Ergänzung der Ansätze erforderlich werden würde. *Schwarzschild* führt zu dem Zwecke an Stelle der beiden Funktionen $\varphi(H)$ und $\psi(V)$ eine Funktion $\Phi(H, V)$ ein durch den Ansatz

$$\Phi(H, V) = 10^{b_0 - b_1 M - b_2 M^2 - c_1 G - c_2 G^2 - c_3 M G},$$

deren letztes Glied, $10^{-c_3 MG}$, die Korrelation zwischen der mittleren Geschwindigkeit und der Leuchtkraft zur Geltung bringt. Wenn man nun wieder die Integralgleichungen für A_m, $\bar{\pi}_m$, $\bar{\pi}_{m,\mu}$ auflöst, so erhält man die Koeffizienten der Entwicklungen dieser Größen als Funktion der Koeffizienten der Ausdrücke von $D(\varrho)$ und $\Phi(H, V)$ und kann dann in der gleichen Weise wie vorhin diese letzteren Koeffizienten bestimmen. *Schwarzschild* benutzt diesen Weg, um eine Erklärung zu suchen für den Widerspruch, daß die Beobachtungen eine Abhängigkeit des Quotienten $\frac{\bar{\mu}_m}{\bar{\pi}_m}$ von der scheinbaren Helligkeit ergeben, während er als Ausdruck der mittleren Geschwindigkeit der Sterne konstant sein müßte, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Sterne unabhängig vom Orte und von der Leuchtkraft wäre.

27. Charliers Behandlung der Aufgabe. Als Ausgangspunkt seiner Arbeiten über die räumliche Verteilung der Sterne diente *C. V. L. Charlier*[281]) die durch die Arbeiten *Kapteyns* als gegeben zu betrachtende Tatsache, daß die Funktionen A_m und $\varphi(H)$ durch gewöhnliche Fehlerfunktionen dargestellt werden können. *Charlier* stellt sich nun die Aufgabe, die den Beobachtungen sich am besten anschließenden Werte der Parameter dieser Funktionen zu ermitteln. Für $\bar{\pi}_m$ gilt der Ausdruck $\bar{\pi}_m = K_3 e^{-\lambda m}$. K_3 und λ sind Konstanten. K_3 soll bestimmt werden durch Anschluß der Formel an die unmittelbar gemessenen Parallaxen, $\lambda = \frac{\lambda_1 \cdot 0,2}{\text{mod.}}$ aus den Eigenbewegungen. Das Verteilungsgesetz der letzteren wird bei einer Einteilung des Himmels in 48 Felder für die Sterne heller als 4^m, 4^m bis 5^m, 5^m bis 6^m und für alle Sterne bis 6^m ermittelt. Die für die Sterne 4. Größe und 5. Größe erhaltenen Werte der Momente der ersten Ordnung der Verteilungsfunktion benutzt *Charlier* zur Bestimmung der Sonnenbewegung, wobei er für die aus der mittleren Entfernung dieser Sterne senkrecht gesehene Sonnenbewegung bei den Sternen 4. Größe 0,05236″ und denen 5. Größe 0,04768″ findet. Daraus folgt $\log\left(\frac{\bar{\pi}_4}{\bar{\pi}_5}\right) = 0{,}2\,\lambda_1 = 0{,}0406$, also $\lambda_1 = 0{,}2030$. Mit dem Werte $\sigma = 20$ km/sec für die lineare Sonnenbewegung folgt dann die mittlere Entfernung der Sterne 5. Gr. $= 29{,}53$ Siriometer und $\pi_{5,5} = 0{,}01126''$ und weiter für die Konstante K_3 der Wert $\log K_3 = -1{,}725$ und damit

$$\log \bar{\pi}_m = -1{,}725 - 0{,}0406\,m. \tag{42}$$

Zwischen $\bar{\pi}_m$ und $\bar{\varrho}_m$ besteht die Beziehung $\bar{\pi}_m = \frac{1{,}6115}{\bar{\varrho}_m}$. Die Bestimmung der Konstanten K_3 und λ_1 ist sehr unsicher. Die *Kapteyn*schen Parallaxenwerte würden $\lambda_1 = 0{,}65$ ergeben.

Um die Dichtefunktion D in völliger Allgemeinheit als abhängig von der Entfernung ϱ und den galaktischen Koordinaten λ und β, also als Funktion des Ortes im Raume zu bestimmen, schlug *Charlier*[282])

281) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 8, 9 (1912, 1913).

282) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 14 (1916).

folgenden Weg ein. Er verwendet die Relation

$$\log \varrho = 0{,}2m + \log \sqrt{H}.$$

Setzt man $\sqrt{H} = R$, so ist R die Entfernung, in der der betreffende Stern die scheinbare Größe $0{,}0^m$ haben würde. Für Sterne auf gleicher Entwicklungsstufe, d. h. vom gleichen Typus, kann man H als konstant ansehen. Bestimmt man es aus Sternen des betreffenden Typus, für die ϱ bekannt ist, oder auf anderem Wege, so werden die individuellen ϱ aller Sterne dieses Typus bekannt, und man lernt unmittelbar die räumliche Anordnung des Systems der Sterne des betreffenden Typus kennen. So konstruierte *Charlier* selbst das System der *B*-Sterne, das die Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids hat, dessen Äquatorebene nahe mit der Ebene der Milchstraße zusammenfällt. Der äquatoriale Halbmesser mißt 970, der polare 290 Sternweiten. Das Sonnensystem steht in einer Entfernung von 88 Sternweiten vom Zentrum des Haufens in der Richtung auf den Punkt $19{,}7^h + 55{,}6^0$ im Sternbild des Cygnus.

Nach gleichen Gesichtspunkten bearbeitete *W. Gyllenberg*[283]) das System der *O*-Sterne, *K. G. Malmquist*[284]) dasjenige der *A*-Sterne und *C. F. Lundahl*[285]) das der *F*-Sterne.

28. Neuere empirische und theoretische Forschungen. Das in den letzten Jahren gesammelte umfangreiche neue Material veranlaßte *Kapteyn* zu einer Revision seiner ersten Bestimmung der Leuchtkraftfunktion. Die schon p. 284 angeführte Arbeit *van Rhijns* gab durch die Formel (8) einen zuverlässigen Ausdruck für die Sternzahlen in Abhängigkeit von der scheinbaren Größe reichend bis 15^m. Die Säkularparallaxen lagen vor[286]) für die Sterne bis 11^m, und es konnte ihre Abhängigkeit von der galaktischen Breite wie auch vom Spektralcharakter der Sterne berücksichtigt werden. Sie werden im Mittel ohne Berücksichtigung des Spektrums dargestellt durch

$$\text{(43)}\qquad \begin{cases} \log\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right) = -\,0{,}428 - 0{,}096\cos 2b - 0{,}1373m, \\ \log \bar{\pi}_m \;= -\,1{,}042 - 0{,}096\cos 2b - 0{,}1373m. \end{cases}$$

Für die Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes der Parallaxe aus der mittleren Parallaxe der Sterne gleicher scheinbarer Helligkeit wurden die Beziehungen gefunden: Wahrscheinlicher Fehler der Ver-

283) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 28 (1916—1917).

284) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 29 (1916—1917).

285) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 30 (1916—1917).

286) *J. C. Kapteyn, P. J. van Rhijn, H. A. Weersma,* The secular parallax of the stars of different magnitude, galactic latitude and spectrum. Groningen Lab. Publ. Nr. 29 (1918).

teilung der $\log \pi = 0{,}32$

(44) $$\pi_0 = 0{,}551\,\bar{\pi}\,.$$

Die Kenntnis der Eigenbewegungen war durch die Sicherung der fundamentalen Grundlagen und durch Neubestimmungen besonders für die schwächeren Sterne sehr erweitert. Dies gestattete die Herstellung einer Tafel[287]), die für jeden Spektraltypus getrennt nach galaktischen Zonen die wahre Zahl der Sterne auf den Quadratgrad für die einzelnen Größenklassen bis 9^m (bis 12^m, wenn alle Spektren zusammengefaßt werden) und für von $0{,}02''$ zu $0{,}02''$ oder bei den größeren Werten schneller fortschreitende Stufen der jährlichen Eigenbewegung angibt. Bei der Aufsuchung des Zusammenhangs zwischen der mittleren Parallaxe und der Eigenbewegung stützten *Kapteyn* und *van Rhijn*[288]) sich allein auf die unmittelbar gemessenen Parallaxen. Sie erhalten für den Koeffizienten aus 146 Sternen von $3{,}5^m$ bis $6{,}5^m$ den Wert 0,630 und aus 123 Sternen unter $6{,}5^m$ den Wert 0,659. Die Konstante des Ausdrucks von $\bar{\pi}_{m,\mu}$ und den Koeffizienten des Helligkeitsgliedes leiten sie aus den Säkularparallaxen ab. Der schließlich gefundene Ausdruck ist

(45) $$\log \bar{\pi}_{m,\mu} = -\,0{,}691 - 0{,}0682\,m + 0{,}645 \log \mu\,.$$

Mit Hilfe dieser Formel führt nun der früher beschriebene rein empirische Weg zur Kenntnis einerseits der Anzahl der Sterne der einzelnen Stufen der absoluten Helligkeit und andrerseits der Zahl der Sterne in der Raumeinheit. Die so bestimmte Leuchtkraftfunktion lautet numerisch

(46) $$\log \varphi(M) = -\,2{,}394 + 0{,}1858\,M - 0{,}03450\,M^2.$$

Sie schließt sich mit sehr großer Annäherung einer Fehlerkurve mit dem mittleren Werte $M_0 = +\,2{,}7$ an und ist durch die Beobachtungen festgelegt für Werte von M von $-\,12^m$ bis $+\,9^m$. Die Sterndichte nimmt vom Werte 1 in der Umgebung der Sonne ab bis auf 0,089 bei $\pi = 0{,}00118''$. Für größere Entfernungen wird die Dichte durch Einführung des gefundenen Ausdrucks von $\varphi(M)$ in die Integralgleichung für $\mathfrak{A}_m$ ermittelt. Da die $\mathfrak{A}_m$ Funktionen der galaktischen Breite sind, ist das gleiche bei $\Delta(\varrho)$ der Fall:

(47) $$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Gal. Br.} & 0^0 & \log\Delta(\varrho) = -\,2{,}532 & +\,2{,}478 \log\varrho & -\,0{,}593\,(\log\varrho)^2 \\ & 30^0 & -\,2{,}256 & +\,2{,}381 & -\,0{,}655 \\ & 60^0 & -\,4{,}005 & +\,4{,}048 & -\,1{,}060 \\ & 90^0 & -\,6{,}219 & +\,6{,}120 & -\,1{,}538 \\ & 40^0\text{—}90^0 & -\,3{,}425 & +\,3{,}526 & -\,0{,}943\,. \end{array}\right.$$

287) Groningen Lab. Publ. Nr. 30 (1920).

288) Astroph. Journ. 52 (1920), p. 23.

Die Gültigkeit der Leuchtkraftfunktion ist zunächst nur für den Bereich zwischen dem Pol der Milchstraße und 40^0 galaktischer Breite erwiesen. Die Ausdrücke für 0^0 und 30^0 würden sich ändern, wenn in der Nähe der Milchstraße die Verhältnisse der absoluten Helligkeit der Sterne andere wären. Die Linien gleicher Dichte im Sternsystem wären hiernach in der Richtung der Milchstraße langgestreckte, flache Ellipsen um die Sonne als Mittelpunkt.

Der Verlauf der Dichtefunktion nach der Bestimmung von *Seeliger* (29), von *Kapteyn* (47) und von *Schwarzschild* (41) wird durch die folgende kleine Tabelle veranschaulicht, die die Zahl der Sterne in der Kubiksternweite in verschiedenen Entfernungen angibt.

Entfernung =	10	50	100	500	1000	5000	10000
Seeliger	1,71	0,90	0,66	0,26	0,17	0,06	0,04
Kapteyn $b = 0^0$	0,23	0,92	1,13	0,68	0,37	0,03	0,01
$b = 40^0 - 90^0$.	0,14	0,69	0,71	0,17	0,05	0,00	0,00
Schwarzschild	5,7	4,8	3,8	1,6	0,9	0,2	0,1

In der Entfernung von 3000 Sternweiten, wo nach *Seeliger* die Grenze des Systems liegt, geben auch die beiden andern Formeln, die das System als unbegrenzt annehmen, eine verschwindend kleine Dichtigkeit.[289])

Eine Darstellung des durch die Sternzahlen *Seeligers* (nach München Abh. 25, Nr. 3) und die mittleren Parallaxen *Kapteyns* (nach Astron. Journ. 24, p. 115) gegebenen Beobachtungsmaterials durch möglichst einfache Annahmen versuchte auch *E. Hertzsprung*.[290]) Er erreicht ein völlig befriedigendes Resultat bezüglich der Parallaxen und die Wiedergabe der Hauptzüge bei den Sternzahlen durch die Ausdrücke

$$(48)\quad \left\{ \begin{array}{l} \log\left(\frac{D_\pi}{D_\infty}\right) = -\left(\frac{0{,}00135''}{\pi}\right)^2, \quad \varphi(i) = 14{,}86\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\log i - 4{,}52}{1{,}2}\right]^2}, \\ \mathfrak{A}_{10^m} = 570000. \end{array} \right.$$

289) Ein Überblick über die Methoden und die Forschungsergebnisse von *Seeliger, Kapteyn* und *Schwarzschild* über die Struktur des Fixsternsystems und die sie bestimmenden Gesetze ist in der Groninger Dissertation von *W. J. A. Schouten,* On the determination of the principal laws of statistical astronomy, Amsterdam 1918, gegeben. Die Arbeit enthält außerdem eine Anwendung der *Schwarzschild*schen und der *Kapteyn*schen Methode auf ein nach galaktischen Zonen getrenntes Material unter Verwendung der neuen in Groningen zusammengetragenen Daten. Die gegen die Grundlagen und die Resultate der *Seeliger*schen Untersuchungen vorgetragenen Bedenken weist dieser in München Sitz.-Ber. 1920, p. 94 ff., zurück.

290) Astr. Nachr. 185 (1910), p. 89.

Die Verteilung der absoluten Größen der Sterne entspricht hiernach einer Gaußschen Fehlerkurve mit dem Zentralwert $+7{,}7^{\mathrm{m}}$ und einer mittleren Abweichung von $\pm 3{,}0^{\mathrm{m}}$. Die scheinbar schwachen Sterne ergeben eine erheblich kleinere Streuung um den Zentralwert der absoluten Größe als die scheinbar hellen.

Den Verlauf der Häufigkeitsfunktion für die auf einen bestimmten Betrag der scheinbaren Eigenbewegung reduzierten Helligkeiten ermittelte *W. J. Luyten* für die Sterne mit großer Eigenbewegung, $\mu > 0{,}5''$. Er findet[291])

$$\log \varphi(m_{\mu = 0{,}1''}) = 2{,}143 - 0{,}0244\,(m_{\mu = 0{,}1''} - 13{,}20)^2,$$

woraus folgt

$$\log \varphi(m_{\pi = 0{,}1''}) = 2{,}160 - 0{,}153\,(m_{\pi = 0{,}1''} - 7{,}64)^2.$$

Die absoluten Helligkeiten der Sterne wären um den mittleren Wert $+7{,}64^{\mathrm{m}}$ mit einer Streuung von $2{,}98^{\mathrm{m}}$ verteilt.

Die Verteilung der scheinbaren Eigenbewegungen der Sterne ist bedingt durch die Verteilung der Sterne im Raume und die Verteilung der linearen absoluten Bewegungen. Ist letztere bekannt, so kann man aus der beobachteten Bewegung die Funktion $D(\varrho)$ bestimmen. Diesen Weg betraten unabhängig voneinander *F. W. Dyson*[292]) und *A. S. Eddington.*[293]) Die Häufigkeitsfunktion der absoluten Bewegungen kann für die im gleichen Entwicklungsstadium stehenden Sterne vorausgesetzt werden in der Form $\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-h^2(v-V)^2}$, wo V der allen Sternen gemeinsame Teil der Bewegung ist, und das Verteilungsgesetz der Sterne im Raume wird angenommen in der Form $f(r) = 2h^2k^2 r e^{-h^2k^2r^2}$. Dann wird die Zahl der Bewegungen zwischen den Grenzen $-nk$ und $+nk$: $R(n) = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} e^{-\frac{\tau^2}{1+n^2}}$, wo $\tau = hV$ ist, und aus der beobachteten Verteilung der Bewegungen lassen sich die Konstanten h und k bestimmen.

Eddington bearbeitete nach dieser Methode die den Typen A und K angehörenden Sterne des *Boss*schen Katalogs und fand bei den K-Sternen die zu erwartende schnellere Dichtigkeitsabnahme in höheren galaktischen Breiten bestätigt, während bei den A-Sternen ein Überwiegen der Sternzahlen in den mittleren Entfernungen zutage tritt. *Dyson* findet aus den Eigenbewegungen der Sterne des *Carrington*-

291) Lick Obs. Bull. 11 (1923), p. 23.

292) London Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 334, 402.

293) London Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 346.

Katalogs eine Anhäufung dieser Sterne in den Entfernungen von 200—650 Sternweiten.

Weitere Anwendungen dieser Methode wurden gemacht von *R. J. Pocock*[294]) auf die Oxford-Zone des astrographischen Katalogs und von *H. W. Unthank*[295]) auf die helleren der zwischen den Parallelkreisen $+38^0$ und $+65^0$ liegenden Sterne.

Die Annahme einer regelmäßigen Struktur des Sternsystems kann, wie der Anblick des gestirnten Himmels unmittelbar lehrt, der Wirklichkeit nur in großen Zügen entsprechen. Einen Versuch zur Beantwortung der Frage, ob sich an der Hand des verfügbaren Materials Widersprüche gegen die Annahme einer regelmäßigen Abnahme der Dichte vom Mittelpunkt des Systems nach außen hin feststellen lassen, machte *A. Pannekoek.*[296]) Er benutzte die Sternzahlen der Durchmusterungen und der Auswahlfelder *Kapteyns* und konstruierte damit für einen mit der Ebene der Milchstraße zusammenfallenden Schnitt durch das Sternsystem die Kurven gleicher Dichtigkeit. Wegen der Unzulänglichkeit des Materials für die Südhalbkugel ist nur eine lückenhafte Feststellung des Verlaufs der Kurven möglich. Die stärkste Verdichtung erscheint in der Richtung nach dem Sternbild Scorpio um einen Punkt in etwa 150 Sternweiten Entfernung gelagert, und in der Richtung nach dem Cygnus prägt sich in allen Entfernungen eine Häufung der Sterne aus.

Die innige Verknüpfung der Gesetzmäßigkeiten der Sternzahlen mit der Erscheinung der Milchstraße scheint unmittelbar zu beweisen, daß diese letztere ein mit dem Bau des Sternsystems innig verbundenes Gebilde ist. *Pannekoek*[297]) erhält für *Kapteyns* Sternzahlen in Gron. Publ. 18 die Darstellung

$$\log \mathfrak{A}_0^{20} = -0{,}30 + 0{,}49\,(m-7).$$

In *Seeligers* Formel (17) wäre also $\lambda = 0{,}55$ und nach (21) das Dichtegesetz ohne Rücksicht auf Absorption $D(\varrho) = \gamma\varrho^{-0{,}55}$. In der Milchstraße nähme die Dichte etwa proportional mit $\sqrt{\varrho}$ ab. Für die außergalaktischen Zonen findet *Pannekoek*

$$\log \mathfrak{A}_{20}^{40} = -0{,}52 + 0{,}49\,(m-7) - 0{,}007\,(m-7)^2,$$
$$\log \mathfrak{A}_{40}^{90} = -0{,}60 + 0{,}47\,(m-7) - 0{,}009\,(m-7)^2.$$

Die Sternzahl nimmt außerhalb der Milchstraße noch langsamer zu, die Dichte nimmt also in noch stärkerem Maße ab als in der

294) London Astr. Soc. Month. Not. 76 (1916), p. 421.

295) London Astr. Soc. Month. Not. 76 (1916), p. 529.

296) Amsterdam Akad. Proc. 24 (1921), p. 56.

297) Amsterdam Akad. Proc. 13 (1910), p. 239.

Milchstraße. Die Erscheinung der Milchstraße widerspricht aber der Annahme einer regelmäßigen Abnahme der Dichte. Aus den Sternzahlen für $m = 6{,}5$, 8, 9, 11,73 (*Epsteins* Eichungen), 12,5 und 13,2 (Carte du ciel), 13,9 (*Herschels* Eichungen) leitet *Pannekoek* den numerischen Wert von $\frac{d \log \mathfrak{A}_m}{d m}$ ab. In besonders glänzenden Stellen der Milchstraße tritt ein schnelleres Anwachsen der Sternzahlen als im Durchschnitt der galaktischen Zone bis zur 9. Größe, dann eine langsame Abnahme des Gradienten und über 12^m hinaus eine sehr starke Zunahme auf. Daraus wäre zu schließen, daß es sich um durch einen weniger dicht gefüllten Zwischenraum von der Hauptmasse getrennte Sternanhäufungen handelt, die erst bei den Sternen unter 12^m hervortreten.

29. Extinktion des Lichtes im Weltraum. Die Wahrnehmung, daß die Zahl der Sterne nicht dem Gesetze folgt, das dem einfachen photometrischen Gesetze unter der Annahme gleichförmiger Verteilung der Sterne und gleichen Mischungsverhältnisses der absoluten Helligkeiten überall im Raume entspricht, kann an sich mit gleichem Recht wie durch eine abnehmende Dichte auch durch eine Extinktion des Lichtes im Weltenraume erklärt werden. Hingewiesen wurde auf die Möglichkeit des Vorhandenseins einer solchen Extinktion durch einen Weltäther zuerst von *J. P. Loys de Chéseaux.*[298]) Die Bedeutung der Hypothese für die Stellarastronomie wurde zuerst erkannt durch *W. Olbers*[299]), welcher zeigte, daß, wenn das Licht beim Durchlaufen einer Siriusweite $\frac{1}{800}$ seiner Intensität durch Absorption einbüße, Sterne von der absoluten Helligkeit des Sirius, die in einer Entfernung von mehr als 30000 Siriusweiten sich befinden, keinen Lichteindruck auf unser Auge mehr machen könnten.

Nach *F. G. W. Struve*[300]) wäre die tatsächlich beobachtete Sternzahl mit der Annahme gleichförmiger Verteilung und gleicher Leuchtkraft der Sterne zu vereinigen bei Voraussetzung des Wertes 0,8724 für den Durchlässigkeitskoeffizienten λ des Weltraumes in dem Ausdruck der unter dem Einfluß der Extinktion stattfindenden scheinbaren Helligkeit

$$(49) \qquad h_m = \frac{H^0}{\varrho^2} \cdot \lambda^\varrho, \quad m = M^0 + 5 \log \varrho - 2{,}5 \varrho \log \lambda,$$

298) *J. P. Loys de Chéseaux,* Traité de la comète, qui a paru 1743—44, Lausanne 1744, p. 223 ff.

299) *W. Olbers,* Über die Durchsichtigkeit des Weltraums, Berl. Jahrb. für 1826, p. 110, Berlin 1823.

300) *W. Struve,* Stellarum dupl. et multipl. mensurae micr., Petersburg 1837, p. XCII.

wenn H^0 die absolute Helligkeit, M^0 die absolute Größe bezeichnet, die der Stern in der Entfernung 1 haben würde, wenn keine Extinktion vorhanden wäre. Später berechnete *Struve* durch Vergleich derjenigen Entfernungen, die aus der scheinbaren Helligkeit der Sterne mit Hilfe der raumdurchdringenden Kraft der Fernrohre *Herschels* folgen, mit jenen, die den beiden eben erwähnten Annahmen entsprechen, den Durchlässigkeitskoeffizienten des Raumes zu 0,98669 [301]) und an anderer Stelle[302]) zu 0,99065. Als Entfernungseinheit diente dabei die mittlere Entfernung der Sterne erster Größe. *G. V. Schiaparelli*[303]) bestimmte mit denselben beiden Annahmen aus der Vergleichung der photometrischen Konstante, wie sie aus den Sternzahlen der Harvard Photometry folgt, mit dem theoretischen Werte den Durchlässigkeitskoeffizienten zu 0,9190 bezogen auf die mittlere Entfernung der Sterne erster Größe. *G. C. Comstock*[304]) konnte den Widerspruch zwischen den aus den Eigenbewegungen sehr schwacher Sterne folgenden Entfernungen dieser Sterne und den aus der *Kapteyn*schen empirischen Formel (31) folgenden, wenn er nicht eine sehr viel geringere absolute Leuchtkraft der scheinbar schwachen Sterne zulassen wollte, nur erklären durch die Annahme eines Extinktionskoeffizienten von $8 \cdot 10^{-8}$ für die mittlere Entfernung Erde-Sonne, was einem Transmissionskoeffizienten von 0,9837 für die Sternweite entspricht. Auch *E. C. Pickering* sieht zunächst die plausibelste Erklärung seines Ergebnisses[305]), daß aus den Sternzahlen bis $6{,}75^m$ für die photometrische Konstante statt des theoretischen Wertes 0,40 der erheblich kleinere 0,34 folgt, in der Annahme einer beträchtlichen Extinktion des Lichtes, hält diese Erklärung aber nicht mehr für zulässig, als er später[306]) fand, daß die Spektralklassen sich in dieser Hinsicht verschieden verhielten, indem die photometrische Konstante für Typus A und F auch aus den Sternzahlen zu 0,40, für die Typen G, K, M hingegen zu 0,34 folgte. Im Anschluß an diese Untersuchungen von *Comstock* und *Pickering* zeigte *Kapteyn*[307]), daß das statistische Material eine Entscheidung nicht gestatte, ob die Erklärung des Verhaltens der Sternzahlen in einer Extinktionswirkung oder in einer Änderung der Sterndichte zu suchen sei, daß aber jedenfalls so große Extinktionswerte, wie *Comstock* sie annehmen wolle, auf physikalisch unmögliche Folgerungen führe.

301) *M. Weisse,* Pos. med. stell. fix. ex zonis Reg., Petersburg 1846, p. XLVII.
302) *W. Struve,* Études d'astr. stell., Petersburg 1847, p. 88.
303) Milano Osserv. Pubbl. 34 (1889), p. 25.
304) Astron. Journ. 24 (1904), p. 47.
305) Harvard Coll. Obs. Ann. 48, Nr. 5 (1903).
306) Harvard Coll. Obs. Circ. 147 (1909).
307) Astron. Journ. 24 (1904), p. 115.

Seeliger betrachtet zwei Möglichkeiten: Einmal eine Schwächung des Lichtes durch im Raume verteilte Materie, deren Dichte der Dichtigkeit der Sternverteilung selbst proportional ist, und zweitens eine allgemeine Absorption des Lichtes im interstellaren Raume und entwickelt[308]) den theoretischen Zusammenhang der scheinbaren Dichte $\Delta(\varrho)$, wie ihn die mit Absorption behafteten Beobachtungen ergeben, mit der wahren Dichte $D(\varrho)$. Es ergibt sich dann, daß unter der Voraussetzung, daß eine Zunahme der wahren Dichte in großen Raumteilen nicht eintreten soll, die Annahme vorgelagerter Massen eine Lichtschwächung an der Grenze des Systems um $0{,}34^m$ und eine Verkleinerung des Systems um $\frac{1}{7}$ bewirkt, während die Annahme einer allgemeinen Absorption zu einer Lichtschwächung um $0{,}27^m$ an der Grenze und zu einer Verkleinerung um $\frac{1}{9}$ führt. Der Absorptionskoeffizient wäre 0,0003086, der Durchlässigkeitskoeffizient also 0,9996914 für die Siriusweite oder 0,9999383 für die Sternweite.

Die Ursache einer Absorption des Lichtes im Weltraum wäre in fein verteilter Materie, dem kosmischen Staube, zu suchen, dessen Vorhandensein die Millionen teleskopischer Sternschnuppen bezeugen, die im Laufe eines Tages die Erde treffen. Weiter muß das Vorhandensein solcher Materie als sehr wahrscheinlich gelten als Folge der Wirkung des Lichtdrucks auf die Teilchen der Atmosphären selbstleuchtender Körper und auf die Ausströmungen der Kometen. Eine auswählende Absorption, wie sie dann auftreten müßte, würde sich durch direkte Beobachtungen feststellen lassen, und da mit der Absorption eine Zerstreuung des Lichtes notwendigerweise verknüpft sein wird, so ergeben sich noch weitere Prüfungsmöglichkeiten. *G. A. Tikhoff* schlug zunächst[309]) eine Vergleichung der Kurven der visuellen Lichtänderung und der Kurven der Radialgeschwindigkeiten bei spektroskopischen Doppelsternen, die zugleich Veränderliche sind, vor und glaubte in den Phasenunterschieden eine Wirkung der Dispersion erblicken zu können. Dieser Weg konnte nicht zum Ziele führen, dagegen war eine zweite Methode, die in der Vergleichung der mit Filtern für Licht verschiedener Wellenlängen aufgenommenen Kurven der Radialgeschwindigkeiten bei Doppelsternen bestand, geeignet, die vermutete Wirkung, die nach dem *Rayleigh*schen Gesetz umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge sein muß,

308) München Abh. 25, Nr. 3 (1909), p. 45; München Sitz.-Ber. 1911, p. 453. — Die Theorie der Extinktion ist von *E. Anding* ausführlich entwickelt in Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum II, Kap. III, Leipzig 1910.

309) Mem. Spett. Ital. 27 (1898), p. 41.

nachzuweisen, indem eine Dispersion des Lichtes im Weltenraume bei Strahlen verschiedener Wellenlänge verschiedene Geschwindigkeiten im gleichen Augenblicke hervorrufen muß. Die Anwendung dieser Methode von *A. Belopolsky* und *Tikhoff*[310]) ergab in der Tat den zu erwartenden Effekt. Einen andern Weg schlug *Ch. Nordmann* und unabhängig nahe gleichzeitig auch *Tikhoff*[311]) ein. Er besteht in der Festlegung der Lichtkurve kurzperiodischer Veränderlicher im Licht verschiedener Wellenlänge auf visuellem Wege (*Nordmann* mit heterochromem Photometer) oder durch photographische Aufnahme mit Filtern oder auf Platten, die für Licht verschiedener Wellenlänge empfindlich gemacht sind (*Tikhoff*) oder auch durch photographische Aufnahme des Spektrums.[312]) Auch hier entsprachen die Resultate dem Sinne nach der zu erwartenden Wirkung. Das Hineinspielen unbekannter physikalischer Vorgänge in den Sternsystemen und die Möglichkeit einer Absorption in den Atmosphären der Sterne macht aber strenge Schlüsse aus den Beobachtungen unmöglich, wie im einzelnen *P. Lebedew*[313]) nachwies. Als wahrscheinliche Folge einer auswählenden Absorption im Weltenraume wäre weiter eine Verschiedenheit des Exponenten p im Schwärzungsgesetz photographischer Sternbilder $S = JT^p$ für Licht verschiedener Wellenlänge zu erwarten, die in der Tat auch von *Tikhoff*[314]) nachgewiesen wurde. Allein auch hier wird das Resultat zweifelhaft gemacht durch die Möglichkeit eines verschiedenen Verhaltens der verschiedenen Plattensorten. Außerdem würden Verschiedenheiten im Typus der Sterne gleiche Wirkungen erzeugen.[315]) Eine auswählende Absorption müßte aber auch zum Ausdruck kommen in einer Abhängigkeit der Farbentönung von der Entfernung bei Sternen des gleichen Typus, und dieser Weg hat bei den neueren Untersuchungen zu ziemlich zuverlässigen Aufschlüssen geführt. *Kapteyn* stellte bei seinen nach dieser Methode ausgeführten Untersuchungen[316]) die Farbentönung (Color index) dar als Funktion der scheinbaren Größe m, der absoluten Helligkeit M und der Entfernung als Maß der Stärke der Absorptionswirkung. Die Entfernung wird nach scheinbarer Größe und Größe der E. B. gemäß Formel (32) angesetzt. Das benutzte Material gestattet nicht den Einfluß der absoluten Helligkeit

310) Pulkowa Obs. Mitteil. 3 (1909), p. 101.

311) Paris Bull. Astr. 26 (1909), p. 5; Pulkowa Obs. Mitteil. 2 (1908), p. 141.

312) *A. Hnatek,* Astr. Nachr. 184 (1910), p. 305.

313) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 101.

314) Pulkowa Obs. Mitteil. 3 (1909), p. 31, 75.

315) Vgl. *H. E. Ives,* Astroph. Journ. 31 (1910), p. 157.

316) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 46; 30 (1909), p. 284, 398.

und den der Entfernung genügend zu trennen. Ist c die Änderung der Farbentönung für eine Stufe der absoluten Helligkeit, d die Änderung für die Einheit der Entfernung (10 Sternweiten), so ist *Kapteyns* Endresultat $d = 0{,}0031^{\mathrm{m}} + 0{,}25\,c$. Mit Hilfe des *Rayleigh*schen Gesetzes ergibt sich dann für die visuellen Strahlen ein Verlust von 0,0028 der Gesamtintensität bei Durchlaufen eines Weges von 10 Sternweiten, für die photographischen Strahlen ein Verlust von 0,0056. Der Durchlässigkeitskoeffizient für die Sternweite als Einheit wäre hiernach 0,99972 für visuelles, 0,99944 für photographisches Licht. Zu ähnlichen Zahlen gelangt *H. S. Jones.*[317]) Sein Resultat ist $d = 0{,}00473^{\mathrm{m}} \pm 0{,}00035$; $c = +\,0{,}0336 \pm 0{,}0053$. c muß hiernach als verbürgt gelten, also muß bei den absolut helleren, d. h. heißeren Sternen bei gleichem Spektrum und gleicher Entfernung das Maximum der Lichtemission gegenüber den schwächeren Sternen gegen Violett verschoben sein. *P. J. van Rhijn*[318]) dagegen gelangt zu einem wesentlich kleineren Betrage der Absorption; er findet für die Sternweite als Einheit $d = 0{,}00015^{\mathrm{m}} \pm 0{,}00003$, entsprechend dem Durchlässigkeitskoeffizienten 0,999862.

Das gesamte unter diesen Gesichtspunkten zusammengetragene und von *Kapteyn*[319]) diskutierte Material schien als durch die Beobachtung festgestellte Tatsachen zu erweisen, daß die scheinbar schwächeren Sterne im Durchschnitt röter seien als die helleren und daß bei gleichem Spektrum und gleicher scheinbarer Helligkeit die Sterne im Durchschnitt um so röter seien, je ferner sie sind. Daraus war auf eine zwar sehr geringe, aber doch merkliche Absorption zu schließen, und zwar der Größe nach unabhängig von der Richtung in bezug auf die galaktische Ebene. Dagegen hatte *F. G. Brown*[320]) aus der Vergleichung der Flächenhelligkeiten kleiner und ausgedehnter Nebel und aus Sternzählungen in den verschiedenen Richtungen auf das Vorhandensein eines absorbierenden Mediums schließen zu können geglaubt, das in Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoids angeordnet wäre, dessen große Achse zusammenfiele mit der kleinen Achse des Sternsystems. *H. Shapleys*[321]) Untersuchungen über die Farbentönung der Sterne in einer größeren Zahl von Sternhaufen verglichen mit derjenigen, die bei den e i n z e l n e n Sternen im allgemeinen vorhanden ist, sind indessen

317) London Astr. Soc. Month. Not. 75 (1914), p. 4.

318) Groningen Diss., Derivation of the change of colour with distance and apparent magnitude 1915.

319) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 187.

320) London Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 195, 718.

321) Astroph. Journ. 45 (1917), p. 128; Washington Nat. Acad. Proceed. 3 (1917), p. 267.

nur mit einer vollkommenen Durchlässigkeit des Raumes für Lichtstrahlen vereinbar. Die Farbentönung ergab sich dem absoluten Betrage nach, wie auch nach der Verteilung auf die einzelnen Farbenklassen für die Sternhaufen gleich derjenigen bei den isolierten Sternen, obwohl die Entfernung jener ein Vielfaches der Entfernung dieser letzteren sein muß. Vor allem kommen auch unter den Sternen der Sternhaufen Sterne mit großem negativen Wert des Farbenindex in gleicher Häufigkeit wie bei den isolierten Sternen vor.

Von größter Tragweite für die Frage der Extinktion des Lichtes im Weltraume und für die von ihr abhängenden Schlüsse über die Entfernung und die Verteilung der Sterne müßte das Vorhandensein ausgedehnter, nicht leuchtender Nebelmassen sein, die nach *J. G. Hagens* Beobachtungen den Raum rings um das Milchstraßensystem wie ein Netzwerk, am dichtesten an den Polen der Milchstraße und von da gegen die Milchstraße hin immer weniger auffällig werdend, einhüllen. Einzelne solcher Nebelwolken waren schon *W. Herschel* und *E. E. Barnard* bekannt. Auch *M. Wolf* schließt aus Sternzählungen in der Umgebung von ξ Cygni, beim sogenannten Amerikanebel, auf die Existenz ausgedehnter, lichtabsorbierender Materie, deren Wirkung schon in der mittleren Entfernung der Sterne 9. Größe merklich wird und dann bei den Sternen 12. Größe in verstärktem Maße einsetzt [Astr. Nachr. 223 (1924), p. 89].

C. Eigenbewegung der Sterne und der Sonne.

30. Erste Versuche. Als in der Mitte des 18. Jahrhunderts die Erkenntnis gewonnen war, daß das Auftreten von Bewegungen bei den Fixsternen nicht eine vereinzelte Erscheinung sei, sondern eine allgemeine Eigenschaft der Fixsterne, begannen auch bald die Bemühungen, Gesetze in diesen Bewegungen aufzudecken. Das Vorhandensein einer fortschreitenden Bewegung der Sonne im Weltenraum forderte *J. de Lalande*[322]) als notwendig verbunden mit der Rotation und *P. Prevost*[323]) als Folge gegenseitiger Attraktion der Massen im Universum. Mit der Aufgabe der Bestimmung der Bewegung des Sonnensystems aus den beobachteten Eigenbewegungen der Fixsterne beschäftigte sich zuerst *J. H. Lambert* in seinen „Kosmologischen Briefen" (1761). *T. Mayer*[324]), der den ersten Eigenbewegungskatalog, beruhend auf der Vergleichung seiner eigenen Be-

322) Paris Mém. de l'Acad. 1776.

323) Berlin Mém. de l'Acad. 1781, p. 418 (in der Akademie vorgelesen am 3. Juli 1783).

324) *T. Mayer,* De motu fixarum, Op. inedita, Göttingen 1775.

obachtungen mit denen von *Roemer* und *Lacaille*, aufstellte, erkannte, daß wenigstens bei den größeren Bewegungen die parallaktische Bewegung zurücktritt gegenüber den Spezialbewegungen. Auf Grundlage der *T. Mayer*schen Eigenbewegungen bestimmte *P. Prevost*[325]) den Zielpunkt der Sonnenbewegung, indem er eine dieser Hypothese entsprechende Verteilung der Richtung der Bewegungen in Rektaszension und Deklination zu erzielen suchte. Einige Monate früher schon war die erste der Arbeiten *W. Herschels*[326]) erschienen, die in sicherer Begründung die Theorie der Bewegung der Sonne und der Sterne zu einem dauernden Bestandteil astronomischer Forschung gemacht haben.

Wenn auch diese ersten Versuche das Vorhandensein einer Bewegung des Sonnensystems im Raume außer Zweifel zu stellen geeignet waren, so schien die Bestimmung der Richtung dieser Bewegung, zu der sie führten, doch von sehr zweifelhaftem Werte und wurde vielfach gänzlich abgelehnt.

Die in der Folge bei der Behandlung des Problems angewandten Methoden zerfallen in solche, bei denen nur die beobachtete Richtung der Bewegung benutzt wird, und in solche, die auch die Größe der Bewegung berücksichtigen. Die Hauptschwierigkeiten bei der mathematischen Behandlung bestehen in unserer völlig unzureichenden Kenntnis der Entfernungen der Sterne und in dem hohen Prozentsatz von Sternen, deren Bewegung der parallaktischen Hypothese völlig widerspricht (retrograde Bewegungen).

Es mögen folgende Bezeichnungen gelten:

$180^0 + A$, $-D$ Koordinaten des dem Zielpunkt der Sonnenbewegung (Apex) gegenüberliegenden Punktes, des Antiapex; $q =$ lineare Größe der Sonnenbewegung und $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ihre rechtwinkligen Koordinaten.

α, δ, ϱ Koordinaten und Entfernung des Sterns.

ξ, η, ζ rechtwinklige Koordinaten, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ rechtwinklige Geschwindigkeiten des Sterns relativ zur Sonne.

$k\varrho \cos\delta\, d\alpha$, $k\varrho\, d\delta$, $d\varrho$ Komponenten der Eigenbewegung des Sternes (in linearem Maß) nach der Richtung des Parallels, des Deklinationskreises und des Visionsradius.

u, v, w Komponenten der dem Sterne selbst anhaftenden Spezialbe-

---

325) Berlin Mém. de l'Acad. 1781, p. 440 (vorgelesen am 11. Sept. 1783) und unter Benutzung verbesserter Bewegungen, ebenda 1801, p. 118 = Berl. astr. Jahrb. 1805, p. 113.

326) London Phil. Trans. 1783, p. 247; 1805, p. 233; 1806, p. 205.

wegung (in linearem Maß) nach der Richtung des Parallels, des Deklinationskreises und des Visionsradius.

Θ sphärischer Abstand des Antiapex vom größten Kreise der EB. des Sternes.

χ Länge, ψ Positionswinkel des sphärischen Bogens Stern-Antiapex, so daß $\sin\Theta = \sin\chi\sin(\varphi - \psi)$.

a, d Koordinaten des Poles des größten Kreises der EB. des Sterns.

σ, τ Komponenten der EB. des Sterns in der Richtung nach dem Antiapex (parallaktische Bewegung) und senkrecht zu dieser Richtung (Querbewegung); $\sigma = \mu\cos(\varphi - \psi)$, $\tau = \mu\sin(\varphi - \psi)$.

Herschels Bestimmung der Sonnenbewegung sucht auf graphischem Wege für die benutzten Sterne des *T. Mayer*schen Verzeichnisses die Abstände Θ in ihrer Gesamtheit möglichst klein zu machen, also mathematisch ausgedrückt der Forderung zu genügen

$$\sum\{\arc\sin[\sin\chi\sin(\varphi - \psi)]\}^2 = \text{Minimum}. \tag{50}$$

Herschel findet (Phil. Trans. 1806) graphisch als wahrscheinlichsten Ort des Apex $A = 245{,}9^\circ$, $D = +40{,}4^\circ$. Als wahrscheinlichste Größe der Sonnenbewegung betrachtet *Herschel* einen Wert, der in der Mitte der mit seiner Annahme aus den beobachteten EB. folgenden motus peculiares liegt, wenn die Entfernungen umgekehrt proportional den scheinbaren Helligkeiten gesetzt werden. *Herschel* findet $q = 0{,}75''$ gesehen aus der Entfernung der Sterne erster Größe.

31. Neuere Methoden. *F. W. Argelanders* Bestimmung der Sonnenbewegung aus 390 Eigenbewegungen über 0,2″ seines Aboer Katalogs[327]) verfolgt den gleichen Weg. Unter der Voraussetzung, daß die motus peculiares der Sterne den Charakter zufälliger Fehler haben, also regellos erfolgen, werden Verbesserungen angenommener Näherungswerte für die Koordinaten des Antiapex gesucht, die die Bedingung erfüllen

$$\sum(\sin^2\chi \cdot (\varphi - \psi)^2) = \text{Minimum}. \tag{51}$$

Die *Argelander*sche Bedingung macht also neben der Voraussetzung über den Charakter der motus peculiares die weitere, daß die $(\varphi - \psi)$ und damit die Θ kleine Winkel sind, so daß ihr sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf. Die ausgedehnteste Anwendung dieser *Argelander*schen Methode machte *H. Mädler*, indem er nach ihr 2163 Sterne des *Bradley*-Katalogs behandelte.[328]) Er fand

$$A = 261{,}6^\circ,\quad D = +39{,}9^\circ.$$

327) St. Petersburg Mém. 3 (1837), p. 561 auch Astr. Nachr. 16 (1839), p. 43; 17 (1840), p 209.

328) Dorpat Sternw. Beob. 14 (1856), p. 227.

F. W. Bessel[329]) wählte als einfachen Ausdruck der Richtung der Eigenbewegung den Pol des größten Kreises, in dem sie erfolgt, und zwar denjenigen der beiden Pole, von dem aus gesehen die Bewegung von der Rechten zur Linken vor sich geht. Die Pole paralleler Eigenbewegungen liegen auf einem größten Kreise, und der Zielpunkt ist der Pol dieses Kreises, der der Gleichung (50) streng Genüge leistet.[330]) Bei der Anwendung dieser Methode auf 71 Sterne mit EB. $> 0{,}5''$ findet *Bessel* die *Herschel*sche Folgerung nicht bestätigt. Es treten mehrere Punkte auf, auf welche die Bewegungen einer größeren Zahl von Sternen gerichtet sind, aber es bleiben, welchen Punkt man auch wählen mag, immer allzu viele retrograde Bewegungen übrig. *Gauß'* Arbeiten über diese Frage sind bislang nur soweit bekannt, als sie im Briefwechsel mit *Olbers*[331]) erwähnt werden. Bei einer ersten Rechnung bedient er sich der Bedingungsgleichung $\sum \sin^2 \Theta =$ Minimum und wird mit den 71 *Bessel*schen Sternen auf einen Zielpunkt $A = 259{,}7^0$, $D = -3{,}8^0$ geführt. Dieser Punkt kann aber nicht als wirklicher Zielpunkt betrachtet werden, da nach *Gauß* die Sterne mit retrograder Bewegung für die Bestimmung überhaupt nicht mitsprechen dürfen. Sie müssen fortgelassen werden, und man kann nur durch wiederholte Näherungen, indem man bei jeder Näherung immer diejenigen Sterne fortläßt, die sich bei der letzten Näherung als retrograd ergeben hatten, zum Ziele gelangen. Der Forderung, daß der wahre Zielpunkt der Sonnenbewegung die beobachteten Eigenbewegungen so darstellen müsse, daß die übrigbleibenden motus peculiares möglichst klein seien, entspricht[332]) für die direkten Bewegungen die Forderung $\sum \sin^2 \Theta =$ Minimum, für die retrograden aber $\sum \sin^2 \chi =$ Minimum, und der Zielpunkt wäre zu bestimmen durch die Bedingung $\sum \sin^2 \Theta + \sum \sin^2 \chi =$ Minimum, wobei die erste Teilsumme nur die direkten, die zweite nur die retrograden Bewegungen umfaßt. Auf Grundlage der Zielpunkte der Eigenbewegungen der Sterne wäre nach einer anderen Formulierung der Aufgabe durch *Gauß* der Zielpunkt der Sonnenbewegung zu bestimmen als Pol eines größten Kreises, der die Sphäre in zwei eine möglichst ungleiche Anzahl von EB.-Zielpunkten enthaltende Halbkugeln teilt. *Gauß* bestimmt[333]) diesen Punkt als Zielpunkt der

329) *F. W. Bessel,* Fundamenta Astronomiae, Königsberg 1818, p. 309.

330) Vgl. Astr. Nachr. 132 (1893), p. 323.

331) *C. Schilling,* Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke, Bd. 2 (1909), p. 148, 154, 157, 161, 676, 680.

332) Ebenda p. 161.

333) Ebenda p. 158.

Richtung nach dem im Inneren der Kugel gelegenen Schwerpunkt der auf den größten Kreisen der Eigenbewegung der Sterne 90° vom Sternort entfernt liegenden Punkte $A^* D^*$ und erhält so

$$A = 266{,}3^{\circ},\ D = +\ 34{,}8^{\circ}.$$

Eine von *W. Olbers*[334]) benutzte Methode läßt sich ableiten aus den allgemeinen Ausdrücken für die Komponenten der EB., nämlich

$$(52)\quad \begin{cases} k\varrho\mu \sin\varphi = k\varrho \cos\delta\, d\alpha = u + q\cos D \sin(\alpha - A) \\ k\varrho\mu\cos\varphi = k\varrho\, d\delta = v - q\,[\cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(\alpha - A)] \\ \qquad\qquad d\varrho = w - q\,[\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)]. \end{cases}$$

Durch Elimination von q aus den ersten beiden Gleichungen folgt die *Olber*sche Bedingungsgleichung

$$(53)\quad \begin{cases} \quad k\varrho\cos\delta\, d\alpha\,[\cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(\alpha - A)] \\ + k\varrho\, d\delta\cos D\sin(\alpha - A) = -u\sin\chi\cos\psi + v\sin\chi\sin\psi\,. \end{cases}$$

Wird gemäß der Methode der kleinsten Quadrate die Summe der Quadrate der rechten Seite zum Minimum gemacht, so folgt aus 82 Sternen $A = 269{,}4^{\circ}$, $D = +\ 68{,}7^{\circ}$, während eine andere Auflösung der Gleichungen, die die einfache Summe der Glieder auf der rechten Seite für die 36 Sterne mit positivem Werte von $d\alpha$ einerseits und diejenige für die 46 Sterne mit negativem Werte von $d\alpha$ andererseits zu null macht, auf $A = 276{,}4^{\circ}$, $D = +\ 15{,}2^{\circ}$ führt.

Auf der unmittelbaren Verwendung der ersten beiden Gleichungen (52) beruht die von *G. B. Airy*[335]) angewandte Methode. Die Auflösung der Bedingungsgleichungen führt *Airy* einmal aus unter der Annahme, daß die u, v den Charakter zufälliger Fehler haben, also die Summe ihrer Quadrate zum Minimum zu machen sei, und ein anderes Mal unter der Voraussetzung, daß überhaupt keine motus peculiares auftreten, vielmehr die $\cos\delta\, d\alpha$ und $d\delta$ nur hervorgehen aus der Bewegung der Sonne und Beobachtungsfehlern. Diese Beobachtungsfehler setzen sich zusammen aus zufälligen Fehlern und konstanten Fehlern. Auf den großen Einfluß eines konstanten Fehlers der Deklinationen in den zur Bestimmung der Eigenbewegungen verglichenen Katalogen war schon *Gauß*[336]) aufmerksam geworden durch den Umstand, daß bei einer Trennung der Sterne nach der Größe der Bewegung die kleinen Bewegungen zu einem erheblich südlicher ge-

---

334) Ebenda p. 140, 151; auch Briefwechsel Olbers-Bessel von *A. Erman* 2 (1852), p. 220.

335) London Astr. Soc. Mem. 28 (1860), p. 143 = London Astr. Soc. Month. Not. 19 (1859), p. 175.

336) In dem in Fußnote [331]) zitierten Buche p. 678.

legenen Zielpunkte führten als die großen. An die Stelle der Größen u und v in (52) treten also Größen, die zusammengesetzt sind aus den zufälligen Fehlern der beobachteten Werte von $\cos\delta d\alpha$ und $d\delta$, aus den aus dem Fehler der angenommenen Präzessionskonstante hervorgehenden Einfluß auf die berechneten Werte dieser Größen und aus dem Fehler des angenommenen Äquinoktialpunktes bzw. des Deklinationssystems, und bei der Ausgleichung ist die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler zum Minimum zu machen.

Die *Airy*sche Methode wurde in der Folge sehr häufig angewandt. Sie liegt auch der Verwertung des umfangreichen und durch große Zuverlässigkeit ausgezeichneten, im P. G. C. gesammelten Eigenbewegungsmaterials zugrunde, die wir *L. Boss*[337]) verdanken. Die Lage des Zielpunktes der Sonnenbewegung ist nach dieser auch eine Verbesserung der Konstanten der Präzession berücksichtigenden Bearbeitung, die als der Schlußstein der durch *Herschels* Arbeiten eingeleiteten Periode zu betrachten ist, gegeben durch

nach 5413 Sternen mit EB. $\leqq 0{,}2''$, $A = 270{,}52^0$, $D = +34{,}28^0$
„ 559 „ „ „ $> 0{,}2''$, $272{,}03^0$, $+34{,}53^0$.

Weil aber, wenn man den Sternen Bewegungen zuschreibt, das Bestehen der Milchstraße, wenigstens als eine nicht bloß vorübergehende Erscheinung, nur möglich erscheint, wenn man in diesen Bewegungen eine mit der Milchstraße eng verbundene Gesetzmäßigkeit voraussetzt, schien es naheliegend, in die Bedingungsgleichungen zur Darstellung der beobachteten Eigenbewegungen noch weitere, einer solchen Hypothese[338]) Rechnung tragende Glieder aufzunehmen. *E. Schönfeld*[339]) ging dabei von der Annahme aus, daß die Bewegungen der Sterne in parallelen Ebenen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen gemeinsamen Mittelpunkt erfolgen. Die Bedingungsgleichungen, zu denen man geführt wird, gestatten nicht die Bestimmung sämtlicher 11 Unbekannten des Problems, da diese Unbekannten zum Teil in unlösbaren Verbindungen auftreten. Selbst wenn man die Ebene der Rotation als gegeben, nämlich als zusammen-

337) Astron. Journ. 26 (1910), p. 95, 111.

338) Als Anzeichen einer allgemeinen Rotation des Sternsystems um eine zur Ebene der Milchstraße senkrechte Achse in rückläufigem Sinne führt *C. D. Perrine* [Washington Acad. Proc. 2 (1916), p. 292] die systematische Verschiedenheit der Eigenbewegungen in den beiden um 90^0 von der Apexrichtung abstehenden Punkten der Milchstraße bei den *B*-Sternen und die Verschiedenheit des Resultates für die Größe der Sonnenbewegung, je nachdem ob man sie aus nördlichen oder aus südlichen Sternen berechnet, an.

339) Astr. Ges. Vjs. 17 (1882), p. 255.

fallend mit der Ebene der Milchstraße betrachtet, kann man Richtung und Größe der Winkelgeschwindigkeit der Sonne nicht trennen von der allgemeinen Rotationsbewegung des Gesamtsystems. Die mit hypothetischen Sternentfernungen ausgeführten Rechnungen nach den *Schönfeld*schen Formeln haben zu wenig übereinstimmenden Werten für die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Sternsystems geführt. Es fanden für den auf das Jahr bezogenen Wert der Konstante dl

F. Rancken[340]) . . .	$dl = + 0{,}0422''$
W. Bolte[341])	$- 0{,}0050''$
L. Struve[342])	$- 0{,}0041''$
F. Ristenpart[343]) . .	$- 0{,}0128''$
O. Stumpe[344]) . . .	$+ 0{,}0191''$.

Die Hypothese ist deshalb als ungeeignet für eine genügende Darstellung der beobachteten Eigenbewegungen zu betrachten. Als Resultat der nach Fallenlassen der Hypothese übrigbleibenden einfachen Gleichungen ist dann etwa das von *L. Struve* aus den EB. von 2509 Sternen des *Bradley*-Katalogs abgeleitete zu betrachten: $A = 273{,}4^0$, $D = + 27{,}3^0$, $q = 0{,}0436''$ gesehen aus der mittleren Entfernung der Sterne 6. Größe.

Die dritte der Gleichungen (52) wurde zuerst von *H. Homann*[345]) angewandt auf die in der Zeit von 1875 bis 1884 in Greenwich auf visuellem Wege bestimmten Radialbewegungen. Ein brauchbares Resultat konnte auf diesem Wege erst erzielt werden, als durch die Einführung der photographischen Methode durch *H. C. Vogel*[346]) zuverlässige Werte der Radialbewegungen zu erlangen waren. Das von *W. W. Campbell*[347]) aus 1193 Radialbewegungen von 1180 Sternen und 13 Nebeln, die über den ganzen Himmel verteilt sind, abgeleitete Resultat $A = 268{,}5^0$, $D = + 25{,}3^0$, $q = 19{,}5$ km/sec. durfte eine große Zuverlässigkeit beanspruchen. Neuere Bestimmungen nach

340) *F. Rancken,* Astr. Nachr. 104 (1882), p. 149.

341) *W. Bolte,* Untersuchungen üb. die Präzessionskonstante, Diss. Bonn 1883.

342) *L. Struve,* Petersburg Akad. Mém. (7) 35, Nr. 3 (1887).

343) *F. Ristenpart,* Untersuchungen über die Konstante der Präzession, Diss. Straßburg (Karlsruhe 1892).

344) Astr. Nachr. 140 (1896), p. 177.

345) *H. Homann,* Beiträge zur Untersuchung der Sternbewegungen, Diss. Berlin 1885. *R. Kövesligethy* hatte schon früher einen ähnlichen Versuch gemacht, Astr. Nachr. 114 (1886), p. 327.

346) Ein Versuch *P. Kempfs*, Astr. Nachr. 132 (1893), p. 81, schon den *Vogel*schen 51 Bewegungen $\Delta\varrho$ ein Resultat abzugewinnen, scheiterte an der Dürftigkeit des Materials.

347) Lick Obs. Bull. 6 (1911), p. 125.

dieser Methode führten in der Tat zu wenig geänderten Werten. *G. Forbes*[348]) leitete mit 1922 sich nur auf isolierte Sterne beziehenden Radialbewegungen die Werte $A = 270^{0}$, $D = +27^{0}$, $q = 22{,}00$ km/sec ab, und *J. S. Paraskevopoulos*[349]) bestimmte die Sonnenbewegung aus den Radialbewegungen von 537 Sternen des Nordhimmels und 743 Sternen des Südhimmels zu $A = 271{,}6^{0}$, $D = +30{,}3^{0}$, $q = 23{,}33$ km/sec. Die nördliche Hemisphäre allein gibt $q = 20{,}7$ km/sec, die südliche allein $q = 25{,}4$ km/sec.

Mit der Forderung, daß die auf die Sonne zu und die sich von ihr wegbewegende Gesamtmasse gleich sein solle, glichen *B. Fessenkoff* und *C. Ogrodnikoff*[350]) die Radialbewegungen der B-Sterne des *Voûte*schen Katalogs aus. Die Sternmassen sollten nach der kinetischen Energie abgeschätzt werden, so daß $mv^2 =$ konst. ist, und wurden umgekehrt proportional dem Quadrat der vom Einfluß der Sonnenbewegung mit einem Näherungswert befreiten Radialbewegung gesetzt. Der Einfluß der großen Bewegungen auf das Resultat ist durch diese Gewichtsbestimmung sehr eingeschränkt. Aus 237 Sternen der galaktischen Zone folgte $A = 267{,}2^{0}$, $D = +35{,}4^{0}$, $q = 20{,}93$ km/sec.

32. Berücksichtigung der Massen der Sterne. Die grundlegende Vorstellung für alle bisher besprochenen Versuche, die Sonnenbewegung zu bestimmen, war die der Regellosigkeit der den Sternen selbst innewohnenden Bewegungen. Von dieser Voraussetzung frei ist ein auch in dieser ersten Periode der Bearbeitung der Frage schon betretener Weg, der die Bewegungen auf den Schwerpunkt des ganzen Systems der sichtbaren Sterne zu beziehen sucht. Wenn m die Masse eines Sternes in Einheiten der Sonnenmasse ist, so lauten die Grundgleichungen der Methode

$$(54) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (1 + \Sigma m)\, q \cos D \cos A & + \Sigma(m \Delta \xi) = 0, \\ (1 + \Sigma m)\, q \cos D \sin A & + \Sigma(m \Delta \eta) = 0, \\ (1 + \Sigma m)\, q \sin D & + \Sigma(m \Delta \zeta) = 0. \end{array} \right.$$

Der erste Versuch der Anwendung dieser Gleichungen von *A. Bravais*[351]) mußte, den nur die lateralen Bewegungen umfassenden Kenntnissen der damaligen Zeit entsprechend, auf sehr unvollkommenen Grundlagen, nämlich auf den Annahmen der Gleichheit aller Massen und aller Entfernungen ausgeführt werden. Auf ein besser

348) London Astr. Soc. Month. Not. 82 (1922), p. 174.

349) Astron. Journ. 34 (1922), p. 181.

350) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 113.

351) Journ. de Math. 8 (1843), p. 435.

geeignetes, sehr umfangreiches Material wandte *H. A. Weersma*[352]) die *Bravais*sche Methode an. Er fand unter der Annahme, daß die Resultante der $\Delta\varrho$, soweit sie hervorgehen aus den den Sternen selbst innewohnenden Bewegungen, verschwinde, mit empirisch als Funktion der scheinbaren Eigenbewegungen angenommenen Entfernungen und als gleich vorausgesetzten Massen, was der Ersetzung des dynamischen durch den geometrischen Schwerpunkt entspricht, als Resultat $A = 267{,}7^0$, $D = +31{,}4^0$. Eine Aufteilung des Materials nach Deklinationszonen führte zu erheblich verschiedenen Werten für die Deklination des Apex als Folge systematischer Fehler der Eigenbewegungen. Die Reduktion derselben auf *Auwers* bewirkte eine bessere Übereinstimmung.

Mit auf Beobachtungen beruhenden Werten der Radialbewegungen und Parallaxen rechnete zuerst *H. Kobold*[353]), indem er die totalen rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten von 29 Sternen relativ zur Sonne ableitete und die Formeln anwandte

$$(55)\quad \Delta X = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\xi,\quad \Delta Y = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\eta,\quad \Delta Z = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\zeta.$$

Die beobachteten Parallaxen erwiesen sich aber nur für 11 Sterne als zuverlässig, so daß sich nur die Bewegung der Sonne relativ zu dem geometrischen Schwerpunkt dieser 11 Sterne in der Nähe der Sonne bestimmen ließ. Das schon hierbei bemerkte Überwiegen mit der Sonnenbewegung paralleler, teils gleich gerichteter, teils entgegengesetzt gerichteter Sternbewegungen tritt auch bei dem jetzt zur Verfügung stehenden, unvergleichlich reichhaltigeren Material zutage. *G. Strömberg*[354]) standen für eine Berechnung der relativen Totalbewegungen etwa 1300 Sterne zu Gebote. Er findet ohne Berücksichtigung der Massen für 800 Riesensterne $A = 272{,}7^0$, $D = +36{,}9^0$, $q = 18{,}8$ km/sec und für 415 Zwergsterne $A = 280{,}8^0$, $D = +29{,}5^0$, $q = 31{,}7$ km/sec und folgert, daß die großen Bewegungen in der Regel durch Summation der Sonnenbewegung und entgegengesetzt gerichteter Sternbewegungen entstehen. Auch *W. Dziewulski* und *K. Iwaszkiewicz*[355]) bearbeiteten in dieser Weise das Problem. Ersterer benutzte 394 Sterne mit trigonometrisch bestimmten Parallaxen, und letzterer fügte noch 761 Sterne hinzu, für welche spektroskopische Parallaxen gegeben waren. Um den Einfluß der stark bewegten

352) Groningen Lab. Publ. 21 (1908).

353) Halle Nova Acta 64 (1895), p. 269; *Valentiner,* Handwörterbuch 3 II (1899), p. 102.

354) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 265.

355) Wilna Obs. Bull. Nr. 2 (1922).

Sterne auf das erlaubte Maß zurückzuführen, wurden durch ein graphisches Verfahren die mittleren Werte der 3 Geschwindigkeitskomponenten für die einzelnen Gruppen des in 91 solche Gruppen zusammengefaßten Materials gebildet. Es ergab sich aus den Sternen mit trigonometrischen Parallaxenwerten $A = 274{,}1^0$, $D = + 30{,}6^0$, $q = 21{,}2$ km/sec und aus den Sternen mit spektroskopischen Parallaxenwerten $A = 274{,}4^0$, $D = + 30{,}2^0$, $q = 16{,}7$ km/sec.

Nachdem durch die Forschungen der jüngsten Zeit uns auch die Sternmassen als Funktion des Spektraltypus und der absoluten Helligkeit bekannt geworden sind, war eine von jeder Hypothese freie Anwendung der *Bravais*schen Methode möglich. Da zwischen der Masse und der Geschwindigkeit eine Korrelation besteht, derart, daß je kleiner die Masse um so größer die Geschwindigkeit ist, so äußert sich die Einführung der Massen in die Bedingungsgleichungen besonders in einer Verminderung des Einflusses der großen Bewegungen. *I. Balanowsky* und *N. Samoilova*[356]) verwenden zu einer Untersuchung auf dieser Grundlage 911 Sterne und finden als Zielpunkt der Sonnenbewegung $A = 265{,}7^0$, $D = + 30{,}4^0$, $q = 15{,}5$ km/sec. Scheidet man mit Rücksicht auf die bekannte Tatsache, daß die stark bewegten Sterne eine besondere Gruppe mit einer gemeinsamen Bewegung zu bilden scheinen, die Sterne mit Geschwindigkeiten über 80 km aus, so tritt auch eine weitere Verkleinerung des Wertes der Sonnengeschwindigkeit ein. Die Verfasser betrachten die Werte $A = 270^0$, $D = + 30^0$, $q = 15$ km/sec als die plausibelste Annahme für die Bewegung der Sonne in bezug auf den Schwerpunkt der hellen Sterne vom Spektraltypus F—M. Etwa das gleiche Material behandelte auch *F. K. Nevermann*[357]) nach denselben Prinzipien. Die Gesamtheit der nach Ausscheidung der Sterne mit Geschwindigkeiten über 100 km/sec. verbleibenden, bis auf vereinzelte A- und M-Sterne ausschließlich den Klassen F bis K angehörenden 730 Sterne ergibt $A = 276{,}2^0$, $D = + 33{,}9^0$, $q = 18{,}78$ km/sec. Trennt man nach Größe der Masse und nach Entfernung — es sind nur spektroskopische Parallaxen verwertet — so tritt ein systematischer Gang auf, der auf eine verschiedene Bewegung der Schwerpunkte dieser Teile des Gesamtmaterials deutet.

33. Kobolds Kritik der Hypothese der Regellosigkeit der EB. Der gemeinsame Ausgangspunkt aller Bestimmungen der Sonnenbewegung in der ersten, von *Herschels* Zeit bis in die 90er Jahre des

356) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 289.

357) Astr. Nachr. 223 (1924), p. 1.

vorigen Jahrhunderts reichenden Periode, war die Annahme, daß die Sonnenbewegung die alleinige Quelle von den beobachteten Eigenbewegungen selbst anhaftenden Gesetzmäßigkeiten sei. Als notwendigste Bedingung der damit vorausgesetzten regellosen Verteilung der motus peculiares muß gleiche Wahrscheinlichkeit positiver und negativer Abweichungen der Richtungen der Eigenbewegungen von der Richtung der parallaktischen Bewegung gelten. Daß diese Bedingung aber nicht erfüllt ist, ergab sich als unabweisbare Folgerung aus Untersuchungen von *H. Kobold*[358]) unter Verwendung der Polmethode. Die bei Benutzung der *Auwers*schen Eigenbewegungen des *Bradley*-Katalogs mit großer Deutlichkeit auftretende Zone größter Dichtigkeit der Pole verlangt die Annahme von Vorzugsrichtungen der scheinbaren Bewegungen auf den Punkt $A = 268^0$, $D = -3^0$ und in entgegengesetzter Richtung; sie ist völlig unvereinbar mit den bis dahin geltenden grundlegenden Voraussetzungen, entspricht vielmehr einer gemeinsamen Bewegung der Sonne und der Sterne ihrer Umgebung in gleicher Richtung aber mit verschiedener Geschwindigkeit, derart, daß die Sonne hinter der Mehrzahl der Sterne zurückbleibt, eine große Zahl aber auch überholt. So entstehen die direkten auf den Antiapex, und die retrograden auf den Apex gerichteten Bewegungen. An den Bewegungen von 893 über den ganzen Himmel verteilten Sternen ließ sich überzeugend nachweisen[359]), daß die Annahme des Vorherrschens zweier einander entgegengesetzter Richtungen der motus peculiares eine sehr viel befriedigendere Darstellung der Richtungen der EB. bewirke als die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit aller Richtungen in diesen Bewegungen.

Die Bestimmung der beiden Zielpunkte der Vorzugsrichtung der Bewegungen[360]), d. i. der Pole der Mittellinie der Zone größter Dichtigkeit der Pole der Eigenbewegungen, des parallaktischen Äquators, erfordert, wenn x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der Pole der Eigenbewegungen auf der Sphäre vom Radius 1, Ξ, Υ, Z die gleichen Größen für den Apex oder Antiapex sind, die Auflösung der Gleichungen

$$(56)\qquad \begin{cases} [xx]\,\Xi + [xy]\,\Upsilon + [xz]\,Z = \lambda\Xi \\ [yx]\,\Xi + [yy]\,\Upsilon + [yz]\,Z = \lambda\Upsilon \\ [zx]\,\Xi + [zy]\,\Upsilon + [zz]\,Z = \lambda Z, \end{cases}$$

welche zunächst auf die kubische Gleichung in λ

$$(57)\qquad -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

358) Astr. Nachr. 125 (1890), p. 65; Halle Nova Acta 64 (1895), Nr. 5.

359) Astr. Nachr. 153 (1900), p. 282.

360) Vgl. *P. Harzer*, Astr. Nachr. 133 (1893), p. 79.

führen. Mathematisch ist, wie schon *Gauß* (Brief an *Olbers* vom 15. Januar 1822) bemerkte, die Aufgabe gleichbedeutend mit der Bestimmung der 3 Hauptachsen eines Ellipsoids.[361]) Ein Material von 1579 Sternen mit sicher bestimmten Eigenbewegungen wurde dadurch vom Einfluß der ungleichen Sternverteilung befreit, daß die Sphäre in 122 inhaltsgleiche Stücke geteilt und den n Sternen aus jedem dieser Stücke ein Gewicht $=\sqrt{\frac{1}{n}}$ erteilt wurde, so daß das System der Normalgleichungen aus 122 Gleichungen vom Gewicht 1 bestand. In dieser Weise behandelt[362]) ergab es die dreifache Lösung

$$A_0' = 269^\circ 40{,}7', \; D_0' = -0^\circ 1{,}4'; \quad A_0'' = 179^\circ 39{,}1', \; D_0'' = -50^\circ 45{,}6';$$
$$A_0''' = 179^\circ 41{,}9', \; D_0''' = +39^\circ 14{,}6'.$$

Der erste Punkt gehört zu dem kleinsten Werte λ, er bestimmt das Minimum der Summe der Quadrate der Abweichungen der Richtungen der Eigenbewegungen. Der dritte Punkt dagegen gehört zum größten Werte λ. Die Punkte 1 und 2 liegen in der Milchstraße, der Punkt 3 in der Nähe des Pols der Milchstraße. Einer zweiten Bearbeitung[363]) wurden 905 Sterne mit Eigenbewegungen über 0,02″ zugrunde gelegt, es wurde aber bei gleicher Einteilung des Himmels wie vorhin für jedes der 122 Gebiete eine mittlere Bedingungsgleichung aufgestellt, dann folgen die drei Richtungen

$$A_0' = 270^\circ 8{,}7', \; D_0' = +17^\circ 46{,}1'; \quad A_0'' = 218^\circ 39{,}8', \; D_0'' = -62^\circ 46{,}4';$$
$$A_0''' = 173^\circ 28{,}3', \; D_0''' = +19^\circ 56{,}0'.$$

Die Grundgleichungen der Polmethode werden von *W. T. Carrigan*[364]) in anderer Weise abgeleitet als Ausdruck der Bedingung, daß die Richtung der Sonnenbewegung gleichzeitig allen Ebenen angehören muß, in denen die beobachteten Bewegungen der Sterne erfolgen.

Gesetzmäßige den Sternen selbst innewohnende Bewegungen müßten zum Ausdruck kommen in merklichen Beträgen der höheren Glieder bei einer Entwicklung der scheinbaren Bewegungen in Reihen nach Vielfachen der Rektaszension und Deklination oder nach Funktionen dieser Koordinaten. *H. Gyldén*[365]) zeigte auf diesem Wege,

---

361) Vgl. Fußnote 331). Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß p. 155. Die Aufgabe tritt auch auf in der Theorie der quadratischen Massenmomente: Vgl. *G. Jung,* Geometrie der Massen, Encykl. IV 4, Nr. **17** (1903).

362) Astr. Nachr. 144 (1897), p. 40; am angegebenen Orte ist nur die der kleinsten Wurzel entsprechende Lösung angeführt.

363) Astr. Nachr. 150 (1899), p. 271.

364) Astron. Journ. 24 (1904), p. 107.

365) Stockholm Öfvers. 1871, Nr. 8; Astr. Ges. Vjs. 9 (1874), p. 173 (Referat von *H. Schultz*).

daß wenigstens Andeutungen gesetzmäßigen Verhaltens der eigentümlichen Bewegungen bestehen, und wies auf die Beziehungen des Problems der Bestimmung der Sonnenbewegung aus den Eigenbewegungen mit dem der Ableitung der Bewegung der Erde aus beobachteten Bewegungen anderer Körper des Sonnensystems hin. Gleichartige Untersuchungen in größerem Maßstabe führte *O. Hecker*[366]) aus und wies durch dieselben noch bestimmter nach, daß neben den die Sonnenbewegung enthaltenden Gliedern andere mit der Annahme der Regellosigkeit der Sternbewegungen unvereinbare Glieder in den Entwicklungen auftreten. Eine Deutung derselben konnte auf diesem Wege nicht erzielt werden. Den Punkt des Verschwindens der Eigenbewegung in beiden Koordinaten legte *Hecker* nach $A = 270^{0}$, $D = + 9{,}9^{0}$.

34. Kapteyns Zweischwarm-Hypothese. Das eingehende Studium der Richtungen der Eigenbewegungen in den einzelnen Gebieten der in 28 Teile geteilten Sphäre, nachdem die Bewegungen jedesmal auf den Mittelpunkt des betreffenden Gebietes übertragen waren, ließ *J. C. Kapteyn*[367]) das Auftreten von zwei Vorzugsrichtungen in allen Gebieten erkennen, die zwei Punkte am Himmel als gemeinsame Schnittpunkte der beiden Bewegungsarten bestimmen. Diese beiden scheinbaren Zielpunkte der Sternströme, gelegen der eine 7^{0} südlich von α Orionis, der andere 2^{0} südlich von η Sagittarii, nennt *Kapteyn* die „scheinbaren Vertizes". Bezüglich des Schwerpunktes des ganzen Sternsystems können die beiden Vorzugsbewegungen nur genau entgegengesetzte Richtungen haben, und die beobachteten scheinbaren Richtungen sind die Komponenten der Sonnenbewegung und der wahren Sternbewegungen. Der wahre Zielpunkt der Bewegung, der wahre Vertex, wird bekannt, wenn wir die Verteilung der Sterne auf die beiden Bewegungsrichtungen oder den mittleren Betrag der beiden Bewegungen kennen. *Kapteyn* legte den wahren Vertex nach $A' = 92^{0}$, $D' = + 13{,}5^{0}$.

Die mathematische Theorie dieser Zweischwarm-Hypothese entwickelte *A. S. Eddington*[368]), indem er das einfache *Maxwell*sche Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten durch ein zweigliedriges für die Sternströme ersetzt in der Form

$$dZ = \frac{N_1 h^2}{\pi} e^{-h^2(u_1^2 + v_1^2)} du_1\, dv_1 + \frac{N_2 h^2}{\pi} e^{-h^2(u_2^2 + v_2^2)} du_2\, dv_2.$$

366) Über die Darstellung der EB. der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems, Diss. München 1891.

367) Brit. Astr. Ass. Rep. 1905, p. 257.

368) London Astr. Soc. Month. Not. 67 (1906), p. 34. Eine analytische Lösung gibt *Eddington,* Month. Not. 68 (1908), p. 588. Die mathematischen Grundlagen der *Kapteyn*schen Theorie finden sich Month. Not. 72 (1912), p. 743.

Die Annahme von $u^2 + v^2 = \Delta\varrho^2 + 2\Delta\varrho V\cos\Theta + V^2$ und Integration bezüglich $\Delta\varrho$ von $-\infty$ bis $+\infty$ führt für jedes der zwei Glieder auf den Ausdruck

$$(58) \qquad dZ = \frac{N}{\pi}\cdot d\Theta\, e^{-h^2V^2}\left(\frac{1}{2} + hV\cos\Theta\, e^{h^2V^2\cos^2\Theta}\int\limits_{-hV\cos\Theta}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)$$

als Häufigkeitsfunktion der Sterne von der Geschwindigkeit V und der Bewegungsrichtung Θ. Die Konstante h hängt mit der mittleren Geschwindigkeit ω der Sterne zusammen nach der Formel $\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{h}$. Da zwei Vorzugsbewegungen vorausgesetzt werden, so hat man mit zwei angenommenen Wertepaaren N_1, hV_1, Θ_1 und N_2, hV_2, Θ_2, wo $N_1 + N_2 = N =$ der Gesamtzahl der betrachteten Sterne ist, die Verteilungsfunktion zu berechnen und diese fünf Konstanten zu variieren, bis man eine der beobachteten entsprechende Verteilung erhält.

Die Anwendungen der Theorie, besonders durch *Eddington* und *F. W. Dyson* erwiesen die Hypothese als geeignet, eine durchaus befriedigende Darstellung der beobachteten Bewegungsverhältnisse zu erzielen. Bezüglich eines einzelnen Sternes läßt sich, da die beiden Ströme einander völlig durchdringen und wesentliche Unterschiede der beiden Ströme bezüglich der Helligkeit, des Spektrums und der Entfernung nicht bestehen, nicht sagen, welchem der beiden Ströme er angehört. Es läßt sich nur die Verteilung der Sterne in einer bestimmten Gegend auf die beiden Ströme ermitteln. Nach *Eddingtons* Untersuchung[369]) der Sterne des *Boss*schen P. G. C. gehören 60% der Sterne dem Strome I mit dem scheinbaren Vertex in $A' = 90{,}8^0$, $D' = -14{,}6^0$ und 40% dem Strome II mit dem scheinbaren Vertex in $A' = 287{,}8$, $D' = -64{,}1^0$ an. Die mittlere Geschwindigkeit der Sterne des Stromes I ist $1{,}52\frac{1}{h}$, die der Sterne des Stromes II $0{,}86\frac{1}{h}$.

Eine Ausnahmestellung scheinen die Orionsterne, d. h. die Sterne vom Typus *B*, einzunehmen. Sie sind durch sehr kleine Bewegungen ausgezeichnet und zeigen, wie schon *E. B. Frost* und *J. C. Kapteyn*[370]) nachgewiesen haben, ein besonderes Verhalten, darin bestehend, daß sie in der Umgebung des Apex die Sonnenbewegung 10 km/sec. kleiner ergeben als beim Antiapex. *S. S. Hough* und *J. Halm*[371]), die die Zweischwarm-Theorie auf die Radialbewegungen übertrugen, fanden neben Anzeichen von Ungleichheiten der Verteilung der Sterne

369) London Astr. Soc. Month. Not. 71 (1910), p. 4.

370) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 83.

371) London Astr. Soc. Month. Not. 70 (1909), p. 85.

auf die beiden Ströme in einzelnen Regionen der Sphäre und einer Zusammendrängung der Sterne des II. Stromes auf der auf der Südseite der Milchstraße gelegenen Hälfte der Sphäre[372]), auch das besondere Verhalten der Orionsterne deutlich ausgesprochen, und *Halm*[373]) nahm zur Erklärung desselben das Vorhandensein eines dritten Stromes O an, dessen Sternen eine sehr geringe Bewegung sowohl gegenseitig als auch bezüglich der Gesamtheit aller Sterne innewohnt. Teilt man die Sterne in Gruppen nach der Rektaszension, so zeigt sich nach Elimination der Sonnenbewegung sowohl bei den Radialbewegungen wie auch bei den Eigenbewegungen eine doppelte Periodizität, die zugunsten der Theorie zweier in ungleichem Verhältnis untermischter Sternströme spricht. Die Verteilung der Sterne nach der Richtung der Eigenbewegung läßt sich am besten darstellen durch die Dreischwarm-Hypothese, allerdings bleiben, besonders bei der Trift II, starke Unregelmäßigkeiten übrig.

Eine besondere Untersuchung der Sterne mit großer Eigenbewegung durch *F. W. Dyson*[374]) ließ die Teilung in zwei Schwärme bei diesen Sternen in besonders ausgesprochener Weise hervortreten. Andrerseits zeigte *J. C. Kapteyn*[375]), daß das Phänomen keineswegs auf diese vermutlich nächsten Sterne beschränkt ist, sondern auch nachweisbar ist für Nicht-Helium-Sterne mit sehr kleiner Bewegung, also Sterne in durchschnittlich der gleichen Entfernung wie die *B*-Sterne. Dagegen findet wieder *C. D. Perrine*[376]), daß das Auftreten der Vorzugsbewegung beschränkt sei auf die Sterne heller als $3{,}0^m$ mit Eigenbewegungen über $0{,}05''$.

Bei der Untersuchung der Eigenbewegungen der Sterne des Greenwich Catalogue for 1910 fanden *F. W. Dyson* und *W. G. Thackeray*[377]) eine starke Verschiedenheit der Deklination des Zielpunktes der Sonnenbewegung, $+36^0$ für Typus B und A, $+50^0$ für Typus $F\,5-K\,0$, $+68^0$ für Typus $K\,2-M$, und suchen die Erklärung für diese Erscheinung in ungleicher Verteilung der Sterne der einzelnen Typen auf die beiden Schwärme.

35. Schwarzschilds Ellipsoidhypothese. Mit dem Anblick des gestirnten Himmels, insbesondere mit der Erscheinung der Milchstraße, ist eine strenge Scheidung der Fixsternwelt in zwei besondere

372) London Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910), p. 568.
373) Ebenda 71 (1911), p. 610.
374) Edinburg Roy. Soc. Proc. 28 (1908), p. 231.
375) Amsterdam Proc. 14 (1911), p. 524.
376) Astroph. Journ. 46 (1917), p. 266.
377) London Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 201.

Schwärme schwer zu vereinigen, und wenn man nun auch die Zweischwarm-Theorie nicht so streng aufzufassen hat, daß sie ein Zerfallen des Gesamtsystems in 2 verschieden bewegte Teile bedeute, sondern nur das Vorherrschen zweier Bewegungsrichtungen in der Gesamtheit der Sterne, so wird man trotz der guten Darstellung, die man durch diese Theorie erzielt, doch einer einfacheren und natürlicheren Vorstellung, die die Einheitlichkeit des Systems unbedingt gewährleistet, den Vorzug zu geben geneigt sein. Daß man dieses Ziel mit der Annahme nur einer gemeinsamen Bewegung der Sterne neben der Sonnenbewegung erreichen kann, hat *K. Schwarzschild*[378]) gezeigt. An Stelle der *Maxwell*schen Verteilung der Geschwindigkeiten setzt er eine Verteilung voraus, die geometrisch zu veranschaulichen wäre durch ein Ellipsoid in der Form:

$$dZ = Ce^{-h^2(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)}\,du\,dv\,dw\,.$$

Doch ergibt sich schon eine den tatsächlichen Verhältnissen genügende Darstellung bei Annahme eines Rotationsellipsoids, $b = c$, entsprechend der Voraussetzung, daß die Bewegungen in der Richtung der Rotationsachse vorherrschen, in der dazu senkrechten Richtung aber von gleicher Wahrscheinlichkeit sind. Das Ellipsoid projiziert sich auf die Sphäre als Ellipse.[379]) Sind ξ, η die Komponenten der den Sternen eigenen Bewegungen, μ, ν die Komponenten der Sonnenbewegung nach der Richtung zweier konjugierter Durchmesser der Geschwindigkeitsellipse, $h = q \sin\chi$ die Projektion der Sonnenbewegung auf die Sphäre am Orte eines Komplexes von N Sternen, dann ist die Zahl der Bewegungen ξ, η gegeben durch

$$dz = \frac{1}{\pi}\cdot Ne^{-(\xi+\mu)^2}e^{-(\eta+\nu)^2}\,d\xi\,d\eta\,. \tag{59}$$

Durch Integration erhält man für die Zahl der Bewegungen in den vier Winkelräumen zwischen den konjugierten Durchmessern mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt$$

die Ausdrücke

$$\left.\begin{cases} z_1 = \frac{1}{4}N[1-\varphi(\mu)][1-\varphi(\nu)], & z_3 = \frac{1}{4}N[1+\varphi(\mu)][1+\varphi(\nu)],\\ z_2 = \frac{1}{4}N[1+\varphi(\mu)][1-\varphi(\nu)], & z_4 = \frac{1}{4}N[1-\varphi(\mu)][1+\varphi(\nu)]. \end{cases}\right. \tag{60}$$

378) Göttingen Nachr. 1907, p. 614; 1908, p. 191.

379) *J. Lense* zeigte später, Astr. Nachr. 210 (1919), p. 59, daß die Achsen der Geschwindigkeitsellipsen verschiedener Stellen der Sphäre sich nur dann in einem Punkte der Sphäre schneiden, wenn das Verteilungsellipsoid der Sterngeschwindigkeiten Rotationssymmetrie hat. Der gemeinsame Schnittpunkt ist der Zielpunkt der Rotationsachse.

In der hieraus folgenden Beziehung $z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_4$ und in Verbindung mit der Eigenschaft der Hauptachsen der Ellipse, daß sie das einzige Paar konjugierter und zueinander senkrechter Durchmesser sind, hatte *Schwarzschild* ein einfaches Mittel zur Bestimmung der Richtung ϑ_1, ϑ_2 dieser Achsen gefunden. Man zählt, von einer beliebigen Anfangsrichtung ϑ beginnend, die in die Winkelräume ϑ bis $\vartheta + 90^0$, $\vartheta + 90^0$ bis $\vartheta + 180^0$, $\vartheta + 180^0$ bis $\vartheta + 270^0$, $\vartheta + 270^0$ bis ϑ fallenden Bewegungen ab und führt nun die Anfangsrichtung ϑ über den Kreisumfang weg. Derjenige Wert ϑ_V, der zur Erfüllung der Bedingung $z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_4$ führt, bestimmt die Richtung der großen Achse der Ellipse, also die Richtung nach dem Vertex. Andrerseits ist derjenige Wert ϑ_A, der $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ macht, die Richtung zum Apex, wenn daneben $z_1 + z_4 < z_2 + z_3$ ist. Bestimmt man dann μ und ν aus

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\mu e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{N} \cdot (z_2 + z_3 - z_1 - z_4), \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\nu e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{N}(z_3 + z_4 - z_1 - z_2),$$

so ist

$$(61) \qquad \frac{h}{\alpha} = \mu \sec(\vartheta_A - \vartheta_V), \quad \frac{h}{\beta} = \nu \operatorname{cosec}(\vartheta_A - \vartheta_V).$$

Ist das Geschwindigkeitsellipsoid überall im Raume das gleiche und sind seine Achsen überall gleichgerichtet, so müssen zwischen seinen Achsen a, $b = c$ und den Achsen der Ellipse, in der es sich auf die Sphäre projiziert, wenn χ_V der Abstand des Mittelpunktes der Ellipse vom Vertex ist, die Beziehungen bestehen

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \chi_V \qquad \beta = b$$

und a und b sind die mit $\sqrt{2}$ multiplizierten mittleren Sterngeschwindigkeiten in der Richtung zum Vertex bzw. senkrecht dazu, während die Sonnengeschwindigkeit durch

$$q \sin \chi = \frac{h}{\beta}$$

gegeben ist.

Die Anwendung dieser Theorie durch *Schwarzschild*[380]) auf die Eigenbewegungen des *Groombridge*-Katalogs, durch *K. Rudolph*[381]) auf den *Bradley*-Katalog, durch *S. Beljawsky*[382]) auf den *Porter*schen Katalog und durch *H. Raymond*[383]) auf den *Boss*schen P. G. C. führten zu

380) Göttingen Nachr. 1907, p. 624.
381) Astr. Nachr. 183 (1910), p. 1.
382) Astr. Nachr. 179 (1909), p. 293.
383) Astron. Journ. 29 (1915), p. 25.

einer völlig befriedigenden Darstellung der beobachteten Verteilung der Eigenbewegungen. Das Achsenverhältnis des Geschwindigkeitsellipsoids ergab sich zu 1:2 bis 3:5. Das reiche und sichere Material des P. G. C. ermöglichte es *Raymond* auch nach Gesetzmäßigkeiten im Verhalten bestimmter Klassen von Sternen zu forschen. Bezüglich des Spektraltypus ergab sich eine ziemlich regelmäßige Anordnung der Vertizes der Klassen längs der Milchstraße von $\lambda = 173{,}0^0$, $\beta = -1{,}3^0$ für Typus F bis $\lambda = 148{,}9^0$, $\beta = +10{,}3^0$ für Typus M. Nur die G-Sterne mit dem Vertex in $\lambda = 148{,}9^0$, $\beta = -3{,}4^0$ fallen heraus. Auch mit der Größe der Eigenbewegung ändert sich die Lage des Vertex von $\lambda = 169{,}5^0$, $\beta = +0{,}9^0$ für die schwach bewegten Sterne bis $\lambda = 158{,}4^0$, $\beta = 0{,}0^0$ für die stark bewegten Sterne. Teilt man die Sphäre durch den galaktischen Äquator oder auch durch die galaktischen Längenkreise 0^0-180^0, oder 90^0-270^0 in zwei Hälften, so verhalten diese sich gleich. Teilt man die Sterne durch die Breitenkreise $\pm 30^0$ in galaktische und außergalaktische, so ergibt sich, daß die Verschiedenheit der Vertizes durch die außergalaktischen Sterne bedingt ist, während die galaktischen Sterne aller Typen sich gleich verhalten. Das Geschwindigkeitsellipsoid ist für die früheren Typen und für die stark bewegten Sterne bei den außergalaktischen Sternen stärker verlängert als bei den galaktischen Sternen.

Die *Schwarzschild*sche Theorie ist durch Einführung eines dreiachsigen Geschwindigkeitsellipsoids von *J. Lense* verallgemeinert[384]); sie führte dann bei einer Anwendung auf die Bewegungen des *Groombridge*-Katalogs, die also nur in ihren Richtungen zur Verwendung kommen, auf ein Ellipsoid, dessen mittlere Achse nach dem Pol der Milchstraße weist, während die beiden anderen in die Milchstraße fallenden Achsen eine sichere Deutung und Beziehung auf die Resultate anderer Theorien vorläufig nicht zulassen.

36. Charliers Behandlung des Problems nach den Methoden der Kollektivmaßlehre. Während die *Schwarzschild*sche Theorie allein Abzählungen der Sterne nach den Richtungen der lateralen Bewegungen zur Lösung heranzieht, entwickelte *C. V. L. Charlier*[385]) eine Theorie des Geschwindigkeitsellipsoids, die sowohl Richtung wie auch Größe der lateralen Bewegungen darzustellen sucht. Er leitet, wie schon p. 315 angedeutet wurde, nach statistischen Rechenmethoden aus der Verteilung der beobachteten scheinbaren Bewegungen die-

384) Astr. Nachr. 210 (1920), p. 249.

385) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 9 (1913).

jenige der linearen Bewegungen ab. Die Momente erster Ordnung bestimmen den Apex, die Momente der zweiten Ordnung (oder die Streuungen nach *Bruns*) das Geschwindigkeitsellipsoid nach Gestalt und Orientierung. Unter Benutzung der Eigenbewegungen des P. G. C. berechnet *Charlier* den Apex aus den Sternen 4^m zu $267{,}2^0 + 34{,}6^0$ und aus denen 5^m zu $273{,}2^0 + 31{,}2^0$. Die große Achse des verlängerten Rotationsellipsoids der Sterngeschwindigkeiten zielt auf $282{,}8^0 - 19{,}4^0$, das Achsenverhältnis ist $1 : 0{,}51$. Die Momente höherer Ordnung im Ausdruck der Verteilungsfunktion der linearen Geschwindigkeiten haben aber merkliche Werte, so daß die Zweischwarm-Hypothese zu einer vollständigen Erklärung nicht ausreicht. Während *Charlier* bei seinen Rechnungen als Geschwindigkeitsellipsoid der Sterne ein Rotationsellipsoid voraussetzte, verallgemeinerte *S. D. Wicksell*[386]) die Theorie durch Einführung eines dreiachsigen Ellipsoids. In den Entwicklungen tritt noch eine Konstante q aus dem Ausdruck der Dichte der Sternverteilung auf, die zur Zeit noch nicht sicher bekannt ist, da sie abhängt von der Größe λ_1 (vgl. p. 315), für die sich Werte zwischen 0,2 und 0,6 ergeben haben. Mit einem empirisch bestimmten Werte derselben, der so gewählt ist, daß für die Momente höheren Grades der Verteilung der Geschwindigkeiten kleine Werte folgen, wie es andere Ergebnisse verlangen, nämlich $q' = q^{-2} = 0{,}75$, werden für die Sterne bis 6^m des P. G. C. als Zielpunkte der drei Achsen des Geschwindigkeitsellipsoides gefunden:

Geschwindigkeitsellipsoid der lateralen Bewegungen

$$273{,}9^0 - 18{,}2^0, \qquad 158{,}8^0 - 53{,}6^0, \qquad 194{,}8^0 + 31{,}0^0,$$

und als Halbachsen mit 19,4 km/sec als Sonnengeschwindigkeit

27,8 18,6 16,7 km/sec.

Die kleinste Achse steht also senkrecht zur Ebene der Milchstraße.

Auf die Radialbewegungen wurde *Charlier*s Theorie durch *W. Gyllenberg*[387]) übertragen, wobei mit 1640 Radialbewegungen unter Ausschluß von 44 mit $\Delta\varrho > 66{,}3$ km/sec als Lage des Apex $A = 270{,}5^0$, $D = + 28{,}6^0$ mit einer Sonnenbewegung von 19,8 km/sec erhalten wurde. Das gesamte Material ergibt weiter mit $q' = 0{,}75$:

Geschwindigkeitsellipsoid der radialen Bewegungen

$$264{,}1^0 - 5{,}2^0 \qquad 156{,}5^0 - 59{,}5^0 \qquad 157{,}1^0 + 29{,}9^0$$

20,1 14,5 17,8 km/sec.

386) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 12 (1915).
387) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 13 (1915).

Bei Trennung nach Spektralklassen treten keine wesentliche Unterschiede zutage. Die Hauptachsen sind wenig verschieden, die Exzentrizität ist am größten bei den *F*- und *G*-Sternen, am kleinsten bei den *K*- und *M*-Sternen. Nur die *B*-Sterne verhalten sich abweichend. Bei diesen entspricht die Verteilung der Radialgeschwindigkeiten einem zur Ebene der Milchstraße abgeplatteten Rotationsellipsoid, während bei den anderen Klassen sich dreiachsige Geschwindigkeitsellipsoide ergeben, deren größte und kleinste Achse in der Ebene der Milchstraße liegt. Bei den *B*-Sternen ist also in den Radialbewegungen eine Vorzugsrichtung nicht vorhanden; diese ist am stärksten ausgeprägt bei den *A*-Sternen. *Charlier* und *Gyllenberg* haben das Geschwindigkeitsellipsoid mit Trennung nach dem Spektraltypus auch für die lateralen Bewegungen ausgerechnet. Sie erhalten[387a]) mit $q' = 0{,}75$ Ellipsoide mit ähnlicher Orientierung der Achsen wie bei den Radialbewegungen, die aber bei allen Spektraltypen merklich abgeplattet sind gegen die Milchstraßenebene und die Vorzugsrichtung der Bewegungen klar hervortreten lassen. *W. Gyllenberg*[388]) hat dann auch noch in gleicher Weise das Geschwindigkeitsellipsoid der totalen Bewegungen aus einem Material von 144 solcher Bewegungen als Rotationsellipsoid mit zur Ebene der Milchstraße senkrecht stehender kleiner Achse und einem Achsenverhältnis von 5,9 : 8,6 berechnet.

Man kann das Geschwindigkeitsellipsoid auch mit Hilfe der von *S. Newcomb*[389]) für die Untersuchung der Sternverteilung angewandten Formeln berechnen, wenn man die große Achse definiert als die Richtung, die die Summe der Quadrate der in sie fallenden Komponenten der Sternbewegungen zum Maximum macht, während für die kleinste Achse die Summe ein Minimum ist. So behandelt *H. Raymond*[390]) die Bewegungen des P. G. C. und erhält für die Sterne mit einer EB. $\leqq 0{,}2''$ ein Ellipsoid, dessen große Achse auf $93^0 + 4^0$ gerichtet ist, während die kleine Achse auf den Pol der Milchstraße zielt. Die mittlere Achse zeigt eine größere Unsicherheit in der Orientierung. Das Achsenverhältnis ist ziemlich stark verschieden bei den verschiedenen Typen. Aus dem Gesamtmaterial kommt es etwa zu 2 : 3 : 4 heraus, während die kleinen Bewegungen allein etwa auf 4 : 5 : 7 und die großen auf 5 : 6 : 10 führen. Der Apex ergibt sich aus dem Gesamtmaterial zu $A = 269^0$, $D = +32^0$. In bezug auf die Bewegung relativ zur Sonne kann man die Sterne in zwei Gruppen teilen. Die

387a) Ark. Mat. Astr. Fys. 14. Nr. 18 (1919).

388) Ark. Mat. Astr. Fys. 10, Nr. 18 (1914).

389) Vgl. Note 225.

390) Astron. Journ. 30 (1917), p. 191.

A- und *F*-Sterne geben $A = 265^0$, $D = +27^0$; die *K*- und *M*-Sterne $A = 272^0$, $D = +42^0$ und nahe ebenso die *B*-Sterne: $A = 274^0$, $D = +39^0$. Die *G*-Sterne weichen erheblich ab: $A = 256^0$, $D = +46^0$.

Die all diesen Berechnungen zugrunde liegende Annahme, daß sich die Verteilung der Eigenbewegungen überall durch ein und dasselbe Geschwindigkeitsellipsoid wiedergeben lasse, benutzt *E. von der Pahlen*[391]), indem er für zwölf gleichförmig und symmetrisch zur Milchstraße über die Sphäre verteilte Punkte aus der beobachteten scheinbaren Verteilung der Richtungen der Eigenbewegungen die räumliche Verteilung der Sterngeschwindigkeiten bestimmt, was genähert möglich ist, um auf empirischem Wege durch Verbindung dieser zwölf Einzelwerte der Funktion den Ausdruck für die Gestalt des Geschwindigkeitskörpers ohne jede weitere Voraussetzung zu ermitteln.

37. Die Exzentrizitätshypothese Oppenheims. Die Erklärung des systematischen Teiles in den Eigenbewegungen der Fixsterne suchte *S. Oppenheim* in der Wirkung, die auf die Bewegungen im Fixsternsystem durch eine exzentrische, aber noch innerhalb des Systems gelegene Stellung des Beobachters ausgeübt werden muß. Die auf Grund dieser Hypothese sich ergebende Auffassung vom Bau des Fixsternsystems ist weiter unten (Nr. 49) zu besprechen. Den analytischen Ausdruck für die Verteilung der Sternbewegungen leitet *Oppenheim*[391a]) ab unter der Annahme, daß die baryzentrischen Bewegungen dem *Maxwell*schen Gesetze streng folgen und daß man den Unterschied der vom Mittelpunkt der Bewegungen aus gesehenen baryzentrischen gegen die vom Standort des Beobachters aus gesehenen heliozentrischen Bewegungen vernachlässigen dürfe. Es ergibt sich dann der Ausdruck

$$dN = Ne^{-h^2(u^2+v^2)}du\,dv \cdot F \tag{62}$$

wo F der von der exzentrischen Stellung der Sonne abhängige Faktor ist, der den Übergang von der auf den Bewegungsmittelpunkt bezogenen Verteilung auf die heliozentrische vermittelt und dessen geometrische Bedeutung aus der nachstehenden Fig. 1 hervorgeht. Dieser Faktor F ist gegeben durch

$$F = \left\{\left[1 - \left(\frac{R}{\varrho}\right)\cos\varepsilon\right]^2 + \left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \sin^2\varepsilon \sin^2(\vartheta - \varphi)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ε ist der Winkel zwischen den Richtungen vom Zentrum der Bewegungen nach der Sonne und nach dem betrachteten Punkte der Sphäre

$$\cos\varepsilon = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(A - \alpha).$$

---

391) Astr. Nachr. 197 (1914), p. 337.

391a) Wien Denkschriften 97, Nr. 7 (1919).

R ist der Abstand der Sonne, ϱ der der Grenzfläche des Sternsystems vom Zentrum, $(\vartheta - \varphi)$ der Positionswinkel der Bewegungen gegen die Richtung nach dem Sonnenort auf der Sphäre. Da ϱ, α, δ unbekannt sind, ist die weitere Annahme zu machen, daß man diese Größen näherungsweise ersetzen dürfe durch die entsprechenden heliozentrischen Größen. Bei der Berechnung des ersten die baryzentrische Bewegung darstellenden Faktors des Ausdruckes (62) folgt *Oppenheim* ganz dem Vorgange *Eddingtons*. Die Anwendung der Formeln auf die Bewegungen des P. G. C. ergibt eine Darstellung, die der durch die Zweischwarm- oder die Ellipsoidhypothese erzielten gleichwertig ist.

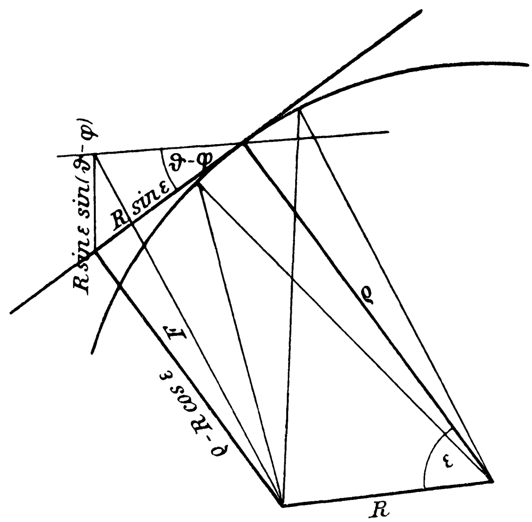

Fig. 1.

Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der Eigenbewegungen, die zur Stütze dieser Auffassung dienen könnten, wies schon *H. Kobold*[391b]) nach. Die Sterne mit direkter Bewegung sind über die Sphäre ziemlich gleichmäßig verteilt, überwiegen aber stark in einer vom Nord- zum Südpol über den Herbstpunkt gehenden Zone. Die retrograden Bewegungen sind besonders häufig in der Gegend des Frühlingspunktes, wo sie ebenso zahlreich sind wie die direkten Bewegungen.

38. Allgemeine kritische Untersuchungen. Die Grundlagen und die Voraussetzungen des Problems der Apexbestimmung erörtern *E. Anding*[392]), der damit eine kritische Gegenüberstellung der durch die älteren sphärischen Methoden gewonnenen Resultate verbindet, und *C. V. L. Charlier*[393]), der die verschiedenen Theorien anwendet zur Bestimmung der Parameter der Verteilungsfunktion der Bewegungen in einem ausgewählten Felde, um in den Resultaten die wesentlichen Gesichtspunkte der Theorien zum Ausdruck zu bringen. Der Gegensatz zwischen der Polmethode und den andern in der ersten Periode der Erforschung der Sonnenbewegung angewandten Methoden, der in

391b) Astr. Nachr. 150 (1899), p. 261.

392) *E. Anding*, Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum, München 1901.

393) Ark. Mat. Astr. Fys. 12, Nr. 10 (1917).

dem Streit um die Berechtigung der Annahme der Regellosigkeit der Sonderbewegungen der Sterne von ausschlaggebender Bedeutung war, wurde eingehend erörtert von *H. G. van de Sande Bakhuyzen*[394]), *H. Kobold*[395]) und *E. Anding.*[396]) Die Häufigkeit retrograder Bewegungen, die bei dieser Diskussion im Mittelpunkt steht, hatte schon *Gauß* in Betracht gezogen[397]) und unter Voraussetzung regelloser Sonderbewegungen gedeutet als Folge einer der Größe nach unter dem Mittelwerte der Sternbewegungen liegenden Sonnenbewegung.

39. Systematische Bewegungen. Die neuen Theorien setzen an die Stelle der Annahme regelloser Sternbewegungen die Vorstellung eines gesetzmäßigen Charakters dieser Bewegungen. Die Gesetzmäßigkeit betrifft aber nicht nur das Sternsystem als Ganzes, sie greift tief ein in den Aufbau des Systems und führt eine Gliederung desselben herbei, die sich in Gemeinsamkeit der Bewegung zu erkennen gibt. So wies *H. Kobold*[398]) unter den Sternen mit großer Eigenbewegung eine besondere Gruppe nach mit einer auf den Punkt $\alpha = 159{,}6^0$, $\delta = -54{,}7^0$, d. h. auf den Zielpunkt der mittleren Achse des Geschwindigkeitsellipsoids gerichteten Bewegung. Ein tieferes Eindringen in die in den Bewegungen herrschenden Gesetzmäßigkeiten ist nur möglich, wenn man im Besitz der Kenntnis der Totalbewegungen ist. Die ersten Resultate in dieser Richtung erzielte *H. Kobold*[399]), ein umfangreicheres Material behandelten *R. Klumak*[400]) und *H. Wilson.*[401]) Bei diesen Untersuchungen trat deutlich das Überwiegen der der Ebene der Milchstraße parallelen Komponenten bei den großen Bewegungen zutage, eine Eigenschaft, die auch für die Sterne mit großen Radialbewegungen durch *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[402]) nachgewiesen wurde. *G. Strömberg*[403]) findet aus dem jetzt zur Verfügung stehenden umfangreichen Material, daß die Sterne mit Bewegungen bis 60 km/sec die Sonnenbewegung nach der gewöhnlichen Annahme des Zielpunktes

---

394) Paris Bull. Astr. 12 (1895), p. 97.

395) Astr. Nachr. 132 (1893), p. 315; 137 (1895), p. 389.

396) *E. Anding,* Beziehungen zwischen den Methoden von *Bessel* und *Argelander* zur Bestimmung des Sonnenapex, München 1895.

397) Brief an *Argelander* vgl. Astr. Nachr. 183 (1910), p. 185. Den von *Gauß* ohne Beweis angeführten Ausdruck leitet *H. C. Plummer* ab in Astr. Nachr. 193 (1912) 261.

398) Astr. Nachr. 166 (1904), p. 8.

399) Astr. Nachr. 138 (1895), p. 243.

400) Astr. Nachr. 200 (1915), p. 89.

401) Lick Obs. Bull. 7 (1912), p. 48.

402) Astroph. Journ. 49 (1919), p. 179.

403) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 265.

$A = 270^0$, $D = +30^0$ zeigen, daß bei den stärker bewegten Sternen aber eine systematische Bewegung in einer der Sonnenbewegung entgegengesetzten Richtung vorhanden ist. Der Zielpunkt dieser Bewegung liegt nach *G. Merton*[404]) in $\alpha = 135^0$, $\delta = -49^0$. *J. H. Oort*[405]) findet eine ausgesprochene Trennung bei einer Radialbewegung von 62 km/sec. Die kleineren Bewegungen sind gleichförmig verteilt, die Zielpunkte der größeren liegen auf einer Hälfte der Sphäre mit dem Mittelpunkt $\alpha = 125^0$, $\delta = -44^0$ (31^0 vom Antiapex entfernt) vereint. *W. J. Luyten*[406]) untersucht die Bewegung von 749 Sternen mit EB. $> 0{,}50''$ nach der *Airy*schen Methode, indem er die Entfernungen, soweit nicht bekannt, nach Helligkeit und Spektrum annimmt. Sie geben als Ort des Apex $A = 289{,}3^0$, $D = +40{,}6^0$ und als Ort des Vertex $A' = 104{,}6^0$, $D' = +12{,}0^0$. Die Sonnengeschwindigkeit wird 29,3 km/sec. Der Zielpunkt des Systems der stark bewegten Sterne liegt in $\alpha = 163^0$, $\delta = -43^0$ (Autor gibt $+43^0$ an). Aus diesen Verhältnissen ergibt sich eine Abhängigkeit der Lage des Apex vom Prozentsatz der zur Berechnung hinzugezogenen schnell bewegten Sterne, und da dieser bei den schwachen Sternen größer ist als bei den hellen, muß der Apex verschieden gefunden werden. Die Verschiedenheit ist besonders auffällig bei den Sonnensternen, Klasse *F* und *G*. *C. D. Perrine*[407]) schließt auf eine Verschiedenheit in der Größe der parallaktischen Verschiebung bei den Sternen der Nord- und der Südhemisphäre, und zwar erscheint sie geringer bei den Nordsternen. Nach *A. von Flotow*[408]) ist in den Totalbewegungen von 116 Sternen eine Teilung in zwei Gruppen ausgesprochen. Bei der einen sind die Bewegungen parallel zur Ebene der Milchstraße und auf den Antiapex gerichtet, bei der anderen sind sie parallel zu einer zur Milchstraße senkrechten Ebene und zielen auf den Vertex.

Auch für diese systematischen Bewegungen ganzer Sterngruppen hat demnach die Milchstraße die Bedeutung einer Fundamentalebene. Es trat das auch schon darin zutage, daß die Bestimmungen des Zielpunktes der Sonnenbewegung als einer sich den verschiedenen Bewegungen möglichst anpassenden mittleren Bewegung immer auf Punkte führten, die, wie *Kobold*[409]) zeigte, längs des Nordrandes der sichtbaren Milchstraße verteilt sind.

---

404) Observatory 46 (1923), p. 20.

405) Bull. Astr. Inst. of Netherlands 1 (1922), p. 133.

406) Lick Obs. Bull. 11 (1923), p. 1.

407) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 286; 44 (1916), p. 103; 45 (1917), p. 103.

408) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 97.

409) Astr. Nachr. 137 (1895), p. 393; vgl. auch *G. C. Comstock*, Science N. S. 25 (1907), p. 567.

Die Erforschung der Eigenbewegungen der schwächeren Sterne ist zur Zeit noch nicht soweit fortgeschritten, daß eine sichere Bestimmung der Sonnenbewegung relativ zu dem System der schwachen Sterne möglich wäre. *G. C. Comstock*[410]) hat das von ihm durch Anschluß schwacher Sterne an benachbarte helle, ihrer Bewegung nach bekannte Sterne gewonnene Material zu einer Bestimmung des Zielpunktes nach der *Airy*schen Methode unter Verwendung von der *Kapteyn*schen Formel entsprechenden Entfernungen verwandt. Das Material ist aber, wie *W. Keil*[411]) nachgewiesen hat, für diesen Zweck nicht geeignet, es kann nicht als typisch für die Gesamtheit der schwächeren teleskopischen Sterne gelten. Die *Wolf*schen Eigenbewegungssterne, die im wesentlichen nahe, schwache Sterne, also Sterne von kleiner Masse umfassen dürften, führen nach *C. Wirtz* und *P. Hügeler*[412]) auf einen Apex in $A = 294{,}5^0$, $D = +32^0$, einen Vertex in $A' = 97^0$, $D' = +15^0$, mittlere Geschwindigkeit in der Vertexrichtung 15,9, senkrecht dazu 5,2 km/sec. Ein anderer Versuch von *C. Wirtz*[413]) beruht auf 539 Sternen unter 8^m, deren Eigenbewegungen aus am Kap aufgenommenen Platten in Groningen Publ. 28 angegeben sind. Das Resultat ist $A = 283^0$, $D = +28^0$; $A' = 80^0$, $D' = +13{,}5^0$; mittlere Geschwindigkeiten 26,3 : 11,6 km/sec.

Offenbar sind auch von den physikalischen Eigenschaften der Sterne, die in dem Spektralcharakter zum Ausdruck kommen und die auch bei der räumlichen Verteilung der Sterne eine Rolle spielen, abhängige Sonderbewegungen vorhanden, die zu einer Verschiedenheit der relativen Bewegung der Sonne führen. In den Eigenbewegungen des P. G. C. wies *B. Boss*[414]) dieses Verhalten nach. Die Sterne der Typen A, F ergeben als galaktische Koordinaten des Apex $22{,}2^0 + 22{,}1^0$, die der Typen K, M dagegen $34{,}8^0 + 21{,}7^0$. Für dieselben beiden Sterngruppen folgt aus den Radialgeschwindigkeiten als Apex $12{,}6^0 + 26{,}2^0$ bzw. $21{,}5 + 20{,}9^0$. Es ist also der Zielpunkt längs der Milchstraße bei den beiden Spektralgruppen sowohl, wie auch bei den beiden Bewegungsarten um etwa 10^0 verschoben. Bei den B-Sternen herrscht dagegen Übereinstimmung wohl als Folge kleiner Sonderbewegungen. Eine ähnliche Verlagerung des Apex finden auch *F. W. Dyson* und *W. G. Thackeray*[415]) aus den Eigenbewegungen der

410) Astron. Journ. 25 (1907), p. 119; 28 (1913), p. 49.
411) *W. Keil*, Die Bewegung der Sterne von der 10. Größe, Diss., München 1918.
412) Heidelberg Sitz.-Ber. 1918, Nr. 9.
413) Astr. Nachr. 211 (1920), p. 373.
414) Astron. Journ. 28 (1914), p. 163.
415) Greenwich Cat. of Stars for 1910,0. London 1920, p. B XXVI.

Zone $+24^0$ bis $+32^0$. Die galaktischen Koordinaten des Apex sind für die Spektralklassen B und A $28{,}5^0 + 27{,}9^0$, $F5$ bis $K0$ $45{,}0^0 + 28{,}1^0$, $K5$ bis M $65{,}3^0 + 26{,}2^0$. Die Erklärung wird in dem Wachsen des prozentualen Anteils von Sternen des Stromes II an der Gesamtzahl der Sterne beim Fortschreiten zu den späteren Typen gesucht.

Die Auswahl der Sterne muß wegen der Ungleichheiten im Sternsystem für die Bestimmung des Apex von Einfluß sein. Dieser Einfluß ist aber, wenn nur an sich das aufgestellte System von Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Größen geeignet ist, im allgemeinen von untergeordneter Bedeutung. Man befreit das Resultat von einem aus ungleicher Sternverteilung zu befürchtenden Einflusse am einfachsten empirisch[416]) dadurch, daß man bei einer planmäßigen Einteilung der Sphäre in gleich große Felder, die den einzelnen Feldern entsprechenden Gleichungen in geeigneter Weise zusammenfaßt. Diesem Zweck sollen auch die *Kapteyn*schen Auswahlfelder dienen.

D. Besonderheiten des Bewegungszustandes.

40. Allgemeine Beziehungen. Die Hypothese der Sonnenbewegung reicht zur Darstellung der beobachteten Bewegungen der Fixsterne nur als erste Näherung aus. Eine zweite Näherung ergibt die Darstellung durch Sonnenbewegung und Strom- oder Vorzugsbewegung oder auch exzentrische Lage der Sonne. Auch diese zweite Näherung führt noch nicht zu einer genügenden Darstellung, sondern es bleiben noch Gesetzmäßigkeiten in den Bewegungen übrig, die den einzelnen Sternen selbst anhaften müssen und an den Ort im Raume oder an andere Eigenschaften der Sterne geknüpft sein müssen. Sie äußern sich in einer Korrelation zwischen Bewegung und den anderen charakteristischen Eigenschaften der Sterne. Unter der Voraussetzung, daß die eigentümlichen Bewegungen der Sterne gesetzlos sind, bestehen zwischen den absoluten Werten der verschiedenen Bewegungsarten nach einem von *J. Kleiber*[417]) begründeten Theorem die Beziehungen

$$(63) \qquad \overline{k\varrho\Delta\alpha\cos\delta} = \overline{k\varrho\Delta\delta} = \overline{\Delta\varrho} = \tfrac{1}{2}\bar{v}, \qquad \bar{v} = \frac{4}{\pi}\cdot\bar{\mu} = 1{,}273\cdot\bar{\mu},$$

die uns gestatten von den der Beobachtung zugänglichen Werten von μ und $\Delta\varrho$ auf die wahren Bewegungen v zu schließen.

---

416) Mathematisch behandelt den Einfluß der Sternverteilung bei den sphärischen Methoden *E. Anding* in der unter 392 angeführten Schrift und in Astr. Nachr. 140 (1896), p. 1; vgl. auch Astr. Nachr. 139 (1895), p. 65.

417) Astr. Nachr. 127 (1891), p. 209.

41. Abhängigkeit der Eigenbewegungen. Bei den ersten Versuchen zum Eindringen in die Bewegungsverhältnisse standen der Forschung nur die Werte der scheinbaren Helligkeit und der Eigenbewegung zu Gebote. Eine Gegenüberstellung beider[418]) schien eine einfache gegenseitige Abhängigkeit zu verraten in dem Sinne, daß mit abnehmender Helligkeit auch die Eigenbewegungen abnehmen würden, so daß das Produkt $m\mu$ nahe konstant bliebe. Eine besonders eingehende Diskussion über die Gültigkeit des Gesetzes $m\mu =$ konst. findet sich bei *A. Auwers* in der Einleitung zum Katalog der A. G. 11. Stück Zone $+ 15^0$ bis $+ 20^0$, p. (140)—(143). *Auwers* findet eine langsame Zunahme des Produktes $m\mu$ mit abnehmender Helligkeit. Es wurde aber bald klar, daß die Erklärung dieser Tatsache durch die gemeinsame Abhängigkeit beider Eigenschaften von der Entfernung nicht ausreiche. Die spätere Erkenntnis, daß für die scheinbare Helligkeit die im Spektrum zum Ausdruck kommende physische Natur der Sterne eine wesentliche Rolle spiele, stellte die Forschung auf eine neue Grundlage, die zu den Ausdrücken für die Entfernung als abhängig von scheinbarer Größe, von der Größe der Eigenbewegung und vom Spektralcharakter führten, auf die in Nr. 25 hingewiesen ist.

Auf eine Abhängigkeit der Größe der Eigenbewegung vom Spektralcharakter wurde zuerst *W. H. S. Monck* aufmerksam. Er fand bei den Sternen des *Auwers-Bradley*-Katalogs eine sehr kleine durchschnittliche Eigenbewegung bei den Sternen des I. Typus, eine sehr viel größere bei den Sternen des II. Typus. Die genauere Klassifizierung mit Hilfe des Draper-Katalogs bestätigte diese Bemerkung[419]), indem sie zeigte, daß größere Eigenbewegungen bei den B-Sternen sehr selten sind, während, wenn die Bewegungen der Sterne ihrer scheinbaren Helligkeit gemäß auf die photometrische Helligkeit 0^m reduziert werden, mehr als die Hälfte der Sterne des Sonnentypus eine Eigenbewegung $> 0{,}5''$ zeigt. *J. C. Kapteyn*[420]) wurde nahe gleichzeitig zu dem gleichen Ergebnis geführt. Die prozentuale Verteilung der Sterne verschiedener Größe der Eigenbewegung auf die Klassen A bis D (Typus I) und E bis L (Typus II) folgt aus dem *Bradley*-Katalog für $\mu < 0{,}03''$ zu $1 : 0{,}6$, für $\mu = 0{,}08''$ etwa zu $1 : 1$ und steigt dann bis zu $1 : 19$ für $\mu > 0{,}5''$. *Monck* und *Kapteyn* schließen daraus, daß unter den helleren Sternen die Sterne des Typus II in der Umgebung der Sonne überwiegen, während in größeren Entfernungen Sterne des Typus II zu schwach sind, um wahrgenommen zu werden. *Kapteyn*

418) Vgl. z. B. *Mädler,* Dorpat Beob. 14, p. 216.

419) Astr. and Astroph. 11 (1892), p. 874; 12 (1893), p. 8, 513.

420) Amsterdam Verslag. 1 (1893), p. 133.

wies an dem angegebenen Ort auch eine Abhängigkeit der Größe der Eigenbewegung von der Lage der Sterne zur Ebene der Milchstraße für die helleren Sterne nach. Die Sterne mit $\mu > 0{,}055''$ sind gleichmäßig über die Sphäre verteilt. Bei den kleineren Eigenbewegungen zeigt sich eine Konzentration gegen die Ebene der Milchstraße, die um so stärker ist, je kleiner die Eigenbewegung ist, und die auch beim Typus I mehr hervortritt als beim Typus II. Um die Frage auch für schwächere Sterne zu prüfen, diskutierte *S. Newcomb*[421]) die von *Auwers* und *Boss* abgeleiteten Eigenbewegungen der Sterne der Zonen $+1^0$ bis $+5^0$ und $+15^0$ bis $+20^0$, also ein Material, das Vollständigkeit für alle meßbaren Eigenbewegungen der Sterne bis 9^m anstrebt. *Newcomb* fand dabei auch bei den schwach bewegten Sternen eine gleichförmige Verteilung über die Sphäre. *G. C. Comstock* und *C. Wirtz* verwerteten nach dieser Richtung auch das von ihnen (vgl. p. 350) zur Bestimmung der Sonnenbewegung benutzte Material[422]) von Eigenbewegungen für schwache teleskopische Sterne und finden eine starke Zunahme der Häufigkeit der bewegten Sterne in höheren galaktischen Breiten, entsprechend der Annahme, daß die Sterne uns dort näher sind als in der Milchstraße.

42. Abhängigkeit der Radialbewegungen. Einfachere Verhältnisse finden wir bei den Radialbewegungen, weil bei ihnen der Einfluß der Entfernung fortfällt. Bei den 51 *Vogel*schen Bewegungen konnte *Monck*[423]) einen Unterschied für die beiden Typen nicht nachweisen. *W. W. Campbells* erste sich auf 280 Radialbewegungen von Sternen bis 4^m stützende Untersuchungen[424]) ließen bei einer rohen Trennung der Sterne nach dem Typus mit Hilfe des Farbenindex ebenfalls einen deutlichen Unterschied der Typen nicht hervortreten. Bei 136 weißen Siriussternen ist die durchschnittliche Radialbewegung 18,04 km/sec, bei 144 Sternen des Sonnentypus ist sie 16,12 km/sec. *E. B. Frost* und *W. S. Adams* wurden dann bei der Bestimmung der Radialbewegungen von 20 Sternen des Oriontypus[425]) auf Werte geführt, die erkennen ließen, daß die nach Abzug der Sonnenbewegung übrigbleibenden eigentümlichen Bewegungen dieser Sterne sehr klein sein mußten. Eine tiefere Einsicht in diese Verhältnisse wurde indes erst möglich, als *W. W. Campbells* Bestimmung der Radialbewegungen von mehr als 1000 Sternen des ganzen Him-

421) *S. Newcomb*, The stars, 1902, p. 252.

422) Washburn Obs. Publ. 14 (1922), p. 18 und Astr. Nachr. 211 (1920), p. 381.

423) Astr. and Astroph. 11 (1892), p. 700.

424) Astroph. Journ. 13 (1901), p. 84.

425) Yerkes Obs. Publ. 2 (1904), p. 247.

mels vorlagen.[426]) Zwar gelangte auch *J. C. Kapteyn*[427]) unter Verwendung eines Materials von 210 aus verschiedenen Quellen entnommenen Radialbewegungen nahe gleichzeitig mit *Campbell* zu wesentlich den gleichen Resultaten, aber das nicht nur reichhaltigere sondern auch völlig gleichartige Material *Campbells* wirkte doch mehr überzeugend. Bei den radialen Spezialbewegungen trat mit großer Entschiedenheit beim Typus I eine erheblich geringere Streuung um den Mittelwert hervor als beim Typus II. Große Geschwindigkeiten treten nur beim Typus II in größerer Zahl auf. Der Mittelwert der Spezialbewegungen ist für Typus II nahe 0, bei Typus I aber durch starkes Überwiegen der Zahl der positiven Bewegungen erheblich nach der positiven Seite verschoben, entsprechend einer scheinbar vorherrschenden Bewegung der Sterne nach außen. Besonders auffällig ist diese Erscheinung bei den *B*-Sternen, sie würde hier eine Expansion des Systems dieser Sterne im Betrage von fast 5 km in der Sekunde bedeuten. Will man diese unwahrscheinliche Annahme nicht gelten lassen, so muß man die Erklärung der Erscheinung in systematischen Fehlern der Messung oder in Fehlern der zur Reduktion der Messungen verwandten Wellenlängen der Spektrallinien als Folge von Druckwirkungen in den Sternatmosphären suchen. Näheres darüber ist im Kapitel Astrophysik nachzusehen.

Die Verschiedenheit in der Streuung um den Mittelwert kommt auch deutlich zum Ausdruck in einer Zusammenstellung der extremen Werte der relativen Radialbewegungen in *J. Voûtes* Katalog[428]) von 2071 um 1920 bekannten Radialbewegungen:

Extremwerte der $\Delta\varrho$

Klasse *B*	$+102$	-38
A	$+96$	-170
F	$+339$	-325
G	$+301$	-242
K	$+177$	-132
M	$+98$	-185.

Bei Gruppierung der Sterne nach der Harvard Klassifikation der Spektren erhielt *Campbell*[429]) schließlich die in der nachstehenden Tabelle gegebene Übersicht über die durchschnittlichen absoluten

426) Lick Obs. Bull. 6 (1911), p. 125; *W. W. Campbell,* Stellar motions (1913), p. 198.

427) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 259.

428) Vgl. Note 104.

429) Stellar motions, p. 209.

radialen Spezialbewegungen der Sterntypen. Unter K ist der Mittelwert der Bewegungen angegeben. Hinzugefügt sind noch die von *W. Gyllenberg*[430]) aus einem noch etwas reichhaltigeren Material abgeleiteten Werte

Klasse	K km/sec	*Campbell* $\Delta\varrho$ abs. km/sec	Zahl	*Gyllenberg* $\Delta\varrho$ abs. km/sec	Zahl
B	+ 4,07	6,52	225	7,01	247
A	+ 0,95	10,95	177	11,73	263
F	+ 0,06	14,37	185	14,43	237
G	— 0,20	14,97	128	15,78	208
K	+ 2,82	16,8	382	15,88	486
M	+ 3,93	17,14	73	17,19	85
Planetar. Nebel		25,3	12		

Bei den Sternen mit sehr kleinen Eigenbewegungen, die also in großer Entfernung sich befinden, beobachtete *W. S. Adams*[431]) ein wesentlich langsameres Anwachsen der Geschwindigkeit mit dem Typus. Weder *Campbell* noch *Gyllenberg* fanden bei einer Ordnung der Sterne nach der Helligkeit ohne Trennung nach den Spektralklassen eine Abhängigkeit der Größe der Bewegung von der scheinbaren Helligkeit deutlich ausgesprochen.

43. Abhängigkeit der Bewegung von der absoluten Helligkeit. Nun stellten aber *J. C. Kapteyn* und *W. S. Adams*[432]) eine Abhängigkeit der absoluten Radialgeschwindigkeiten von der Eigenbewegung bei gleicher scheinbarer Helligkeit fest, derart, daß einer Zunahme der Eigenbewegung auch ein Wachsen der absoluten Radialgeschwindigkeiten entspricht. Durch Berechnung der der *Kapteyn*schen empirischen Formel (45) entsprechenden Entfernungen ließ diese Beziehung eine Abhängigkeit der absoluten Radialgeschwindigkeit von der absoluten Helligkeit bei den Sternen vom Typus F, G, K, M erkennen. Einer Abnahme der absoluten Leuchtkraft um 1^m würde eine Zunahme der Radialgeschwindigkeit um 1,1 km/sec entsprechen. Das von *C. D. Perrine*[433]) bemerkte Anwachsen der wahren Geschwindigkeiten mit abnehmender scheinbarer Größe liegt in demselben Sinne, wenn man die Entfernungen der Gruppen als annähernd gleich annimmt.

Mit Hilfe der spektroskopischen Parallaxen wurde die Frage von

430) Lund Obs. Meddel (2), Nr. 13 (1915).
431) Washington Proc. Nat. Acad. 1 (1915), p. 417.
432) Washington Proc. Nat. Acad. 1 (1915), p. 14.
433) Astroph. Journ. 41 (1915), p. 315, 395.

W. S. Adams und *G. Strömberg*[434]) und später, auf noch erweitertes Material gestützt, von den gleichen Forschern mit *A. H. Joy* verbunden behandelt.[435]) Bei 1350 Sternen der Spektraltypen *F, G, K* und *M* werden die kleinsten Geschwindigkeiten, und zwar sowohl hinsichtlich der totalen räumlichen Geschwindigkeit, als auch hinsichtlich der Querbewegungen und der Radialgeschwindigkeiten, bei den absolut hellsten Sternen festgestellt. Bei den Sternen der absoluten Größe -7^m ist die mittlere räumliche Geschwindigkeit im Durchschnitt für die vier Spektralklassen 22 km/sec, und dieser Wert steigt auf 75 km/sec für die Sterne der absoluten Größe $+5^m$. Im Mittel entspricht einer Abnahme der absoluten Helligkeit um 1^m eine Zunahme der räumlichen Geschwindigkeit um 3 km/sec und der radialen Geschwindigkeit um 1,2 km/sec. Bei den helleren Sternen ist eine geringe Zunahme der Geschwindigkeit mit dem Spektrum beim Übergang von *F* zu *M* vorhanden. Bei den schwächsten Sternen, den Zwergsternen der Klassen *K* und *M*, ist die Geschwindigkeit sehr wenig verschieden. Die Verteilung der stellaren Geschwindigkeiten entspricht nicht dem *Maxwell*schen Gesetze, indem die Zahl der großen Geschwindigkeiten viel zu groß ist. Die Logarithmen der Geschwindigkeiten lassen sich indessen durch eine normale *Gauß*sche Fehlerhäufigkeitskurve empirisch darstellen.

Den Unterschied der tatsächlichen Verteilung der stellaren Geschwindigkeiten von der dem *Maxwell*schen Gesetz entsprechenden hatte schon *K. Schwarzschild*[436]) aus seinem theoretischen Ausdruck für die Häufigkeitsfunktion der scheinbaren Eigenbewegungen bei einer Darstellung der *Kapteyn*schen empirischen Ausdrücke für die Zahl der Sterne einer bestimmten scheinbaren Helligkeit bzw. der Sterne bestimmter scheinbarer Helligkeit und Eigenbewegung festgestellt.

Die Beziehung zwischen dem Spektraltypus und der Geschwindigkeit unter Benutzung der scheinbaren Eigenbewegungen wurde an dem Material des P. G. C. von *L. Boss*[437]) untersucht. Unter der Voraussetzung regelloser Verteilung der Richtungen und symmetrischer Anordnung in bezug auf die Größe der Spezialbewegungen ergibt das Verhältnis der mittleren scheinbaren Querbewegung τ zur mittleren parallaktischen Bewegung σ für Sterne eines bestimmten nicht zu ausgedehnten Areals am Himmel das Verhältnis der mittleren Quer-

434) Astroph. Journ. 45 (1917), p. 293; 47 (1918), p. 7.

435) Astroph. Journ. 54 (1921), p. 9.

436) Astr. Nachr. 190 (1912), p. 361.

437) Astronom. Journ. 26 (1911), p. 187.

bewegung in linearem Maß zur Sonnenbewegung. Unter Annahme einer Sonnenbewegung von 20 km/sec findet *Boss*

Typus	σ	τ
B	2,73″	0,86″ = 6,3 km/sec
A	4,08″	2,07″ = 10,2 km/sec
F	4,99″	4,03″ = 16,2 km/sec
G	3,12″	2,89″ = 18,6 km/sec
K	4,03″	3,04″ = 15,1 km/sec
M	3,29″	2,82″ = 17,1 km/sec.

Zur Ermittelung der die Abhängigkeit der Sterngeschwindigkeiten vom Spektraltypus erzeugenden inneren Ursachen kann eine gesonderte Behandlung der Bewegungen der Sterne jedes Typus dienen. So stellte *B. Boss*[438]) bei den *B*-Sternen das fast ausnahmslose Fehlen größerer Eigenbewegungen fest. Die systematische Bewegung dieser Sterne ist als reine Wirkung der Sonnenbewegung zu erklären. Vorzugsbewegungen treten nach *L. Boss*[439]) erst bei den *A*-Sternen auf und sind im wesentlichen auf diese beschränkt. Bei den späteren Typen überwiegen mehr und mehr die regellosen Bewegungen. Es lassen sich vier Strömungsrichtungen unterscheiden: 1., 2. Richtung auf Vertex und Antivertex; 3. sehr kleine Bewegung auf den Apex; die hierhergehörigen Sterne sind besser als Ruhesterne zu charakterisieren; 4. Richtung auf den Antiapex; diese Strömung ist ausgeprägt bei gewissen besonderen Sterngruppen, die noch näher zu behandeln sind.

44. Die Bewegungen in Beziehung zum Bau des Sternsystems. Die Kenntnis der wahren Spezialbewegungen der Sterne erfordert eine Befreiung der beobachteten Bewegungen sowohl von der parallaktischen Bewegung als auch von den Strombewegungen. Nach *A. S. Eddington*[440]) muß man für Typus *A* die mittleren Bewegungen, die man aus den Resten der nur von der Sonnenbewegung befreiten Bewegungen berechnet, im Verhältnis 1 : 1,30 verkleinern, um die wahren mittleren Spezialbewegungen zu erhalten. Bei den anderen Typen ist die Reduktion kleiner, da das Geschwindigkeitsellipsoid weniger stark verlängert ist. Beim Typus *B* ist eine Reduktion nicht nötig.

Empirisch untersuchten den Einfluß der Strombewegung *J. C. Kapteyn* und *W. S. Adams*[441]) an den $\Delta\varrho$ von Sternen mit sehr verschiedener Eigenbewegung der Typen *F*, *G*, *K*, *M*, indem sie die Sterne

438) Astronom. Journ. 26 (1911), p. 163.

439) Astronom. Journ. 27 (1912), p. 83.

440) Stellar mouvements, p. 157.

441) Washington Proc. Nat. Acad. 1 (1915), p. 14.

nach dem Abstand vom Vertex in zwei Gruppen (Abstand $< 50^0$, Abstand 50^0—90^0) teilten. Die nur von der Sonnenbewegung befreiten Geschwindigkeiten verhalten sich in den beiden Gruppen sowohl bei den Sternen mit großer wie auch bei denen mit kleiner Eigenbewegung wie 1,4 : 1. Der Einfluß der Strombewegung erstreckt sich also bis zu den kleinsten Eigenbewegungen, also bis in die größten uns zugänglichen Entfernungen.

Die Ebene der Milchstraße gibt sich deutlich als Vorzugsebene der Spezialbewegungen der Sterne des Typus *A* zu erkennen durch das entgegengesetzte Verhalten der Querbewegungen und der Radialbewegungen in der galaktischen und außergalaktischen Zone. Bei den späteren Typen ist der Unterschied nicht so ausgesprochen. Die *B*-Sterne stehen weit überwiegend in der galaktischen Zone. Nach *L. Boss*[442]) und *W. W. Campbell*[443]) sind die mittleren Bewegungen

	τ		$\Delta\varrho$	
Typen	0^0 bis $\pm 30^0$	$\pm 30^0$ bis $\pm 90^0$	0^0 bis $\pm 30^0$	$\pm 30^0$ bis $\pm 90^0$
B	0,86″	—	7,1	5,6 km/sec
A	1,76″	2,60″	13,0	8,4 km/sec
F—M	2,86″	3,68″	16,3	15,3 km/sec.

Beim *Schwarzschild*schen Geschwindigkeitsellipsoid kommt die Vorzugsebene der Spezialbewegungen in der Lage der kleinen Achse zum Ausdruck. Nach *A. S. Eddington* und *W. E. Hartley*[444]), die die Radialbewegungen mit der Bedingung $\Sigma|V| =$ Min. bzw. Max. statt $\Sigma V^2 =$ Min. bez. Max. ausglichen, um den entstellenden Einfluß einzelner großer Werte abzuschwächen, fällt der Zielpunkt der kleinen Achse des Geschwindigkeitsellipsoids der *A*-Sterne mit dem Pole der Milchstraße zusammen, während bei den anderen Typen eine mehr oder weniger große Verschiedenheit auftritt. Die *A*-Sterne bewegen sich also parallel zur Ebene der Milchstraße, die *A*0-Sterne, deren Geschwindigkeitsellipsoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit zur Ebene der Milchstraße normaler Rotationsachse ist, bevorzugen in der Ebene der Milchstraße keine besondere Richtung. Bei den *G*-Sternen ist der Einfluß der Spezialbewegungen gegenüber der Strombewegung zu groß, so daß die Vorzugsrichtung nicht zum Ausdruck gelangt. Sehr große Bewegungen sind den *G*-Zwergen eigen.

45. Erklärung der Bewegungen. Die Entstehung der Spezialbewegungen der Sterne hat man auf Grund dieser Ergebnisse der For-

442) Astronom. Journ. 26 (1911), p. 193.

443) Lick Obs. Bull. 6 (1911), p. 130.

444) London Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 521.

schung in zwei Richtungen gesucht. Da der Spektralcharakter als Bild des Entwicklungszustandes angesehen wird, so war die nächstliegende Annahme die, daß die Bewegungen mit dem Entwicklungszustande fortschreiten. Im Zeitpunkte des Entstehens sind die Sterne im Zustande der Ruhe, allmählich nehmen sie Bewegung an, die mit zunehmendem Alter immer mehr anwächst. Die Kraft, die die Bewegung erstmalig erzeugt und weiter vergrößert, wäre in der Gravitationswirkung entweder der Gesamtmasse des Sternsystems oder der einzelnen Sterne bei gegenseitigen Annäherungen zu erblicken. Gegen diese auf den Parallelismus zwischen Bewegung und Spektralcharakter sich stützende Auffassung ist besonders eingewandt, daß die Entfernungen im Fixsternsystem für die Entstehung von Bewegungen der beobachteten Größe Zeiträume von schwer verständlichem Ausmaße erfordern würden. Weiter steht die Erklärung im Widerspruch mit dem Vorkommen von Sterngruppen, die sich mit gleicher und, soweit wir wissen, unveränderlicher Geschwindigkeit in parallelen Bahnen innerhalb des Gesamtsystems und mitten zwischen anderen in keiner Beziehung zu ihnen stehenden Sternen hindurch bewegen. Auch das Auftreten der größten Geschwindigkeiten bei den Nebeln, das diese an das Ende der Entwicklung stellen würde, scheint unvereinbar mit der Erklärung. Weil nun der Entwicklungsgang eines Sternes abhängt von seiner Masse, das B-Stadium nur von Sternen großer Masse erreicht werden kann, so will *J. Halm*[445]) die Beziehung zwischen Spektralcharakter und Geschwindigkeit ersetzen durch eine Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Masse, derart, daß die Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Quadrat der Masse, also das Produkt Mv^2 konstant ist.

Die weiteren Ausführungen über diese Frage sind im Abschnitt Astrophysik nachzusehen.

Auf mechanischer Grundlage könnte man eine Erklärung der Beziehung zwischen mittlerer absoluter Geschwindigkeit und Leuchtkraft, weil für die Sterne bis zu einer bestimmten scheinbaren Helligkeit die mittlere Entfernung der Leuchtkraftklassen zunehmen muß mit abnehmender Leuchtkraft, suchen in der Lage der Sterne zum Mittelpunkt des Sternsystems. Dann müßte die Geschwindigkeit Funktion der Entfernung sein. *A. S. Eddington*, der diesen Gedanken aussprach, verwarf ihn wieder[446]), da die Ordnung der A-Sterne nach der Größe der Eigenbewegung eine Beziehung zwischen mittlerer Eigenbewegung und Radialgeschwindigkeit nicht erkennen läßt.

---

445) London Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 610.

446) Stellar mouvements, p. 161.

E. Bewegte Sterngruppen.

46. Einzelne Sterngruppen. Schon *Bessel*[447]) hatte bei mehreren am Himmel weiter voneinander abstehenden Sternen Gemeinsamkeit der Eigenbewegung bemerkt und daraus auf einen physischen Zusammenhang der betreffenden Sterne geschlossen. *Mädler*[448]) wies hin auf die nahe Gleichheit der Bewegungen der helleren Plejadensterne, wodurch die Zusammengehörigkeit zu einer besonderen Sterngruppe bezeugt würde. Daß auch über einen größeren Teil des Himmels zerstreute Gruppen von Sternen durch die gleichen charakteristischen Merkmale als zusammengehörend sich zu erkennen gäben, bemerkte zuerst *R. A. Proctor*[449]), der besonders auf das System β, γ, δ, ε, ζ Ursae maj. und auf eine Sterngruppe im Taurus aufmerksam machte. Größere Bedeutung für die Erkenntnis der Struktur des Sternsystems erlangten diese Sterngruppen, als *W. Klinkerfues*[450]) den in solchen Systemen bestehenden Zusammenhang zwischen den Bewegungen und Parallaxen hervorhob. Ist Q der scheinbare Winkelabstand eines der Sterne des Stromes vom Radiationspunkt der Konvergenz der Eigenbewegungen der Gruppe, V die gemeinsame totale lineare Bewegung der Gruppe relativ zur Sonne, so bestehen die Beziehungen

$$(64) \qquad V \sin Q = k\mu \cdot \varrho, \qquad V \cos Q = \Delta\varrho, \qquad \pi = \frac{k\mu}{\Delta\varrho} \cdot \operatorname{cotg} Q.$$

Die Kenntnis nur eines Wertes von $\Delta\varrho$ oder π genügt, um die Berechnung der räumlichen Bewegung, der Entfernungen und der Leuchtkräfte aller Glieder der Gruppe zu ermöglichen. *Klinkerfues* erweitert an dem angegebenen Orte auch den Inhalt der bis dahin geltenden Auffassung solcher Sternsysteme, indem er die räumliche Abgeschlossenheit derselben, die Beschränkung auf einen begrenzten Raum im allgemeinen System fallen läßt und die Vorstellung einander durchdringender Sternströme in Analogie zu den Meteorströmen an ihre Stelle setzt. Das ganze Sternsystem würde man sich aus einer Schar solcher Sternströme gebildet denken können.

Die Parallelität der Bewegungen erkennt man daran, daß die scheinbaren Eigenbewegungen sich in einem Punkte der Sphäre schneiden, oder daß die Pole der Eigenbewegungen auf einem größten Kreise

447) Fundamenta Astronomiae p. 310.

448) Astr. Nachr. 24 (1846), p. 221.

449) London Proc. Roy. Soc. 18 (1870), p. 169.

450) *W. Klinkerfues,* Über Fixstern-Systeme, Parallaxen und Bewegungen, Göttingen 1873.

liegen.[450a]) Diese Bedingung allein reicht aber nicht aus, um die Zusammengehörigkeit der Sterne zu erweisen. Vielmehr muß neben der Parallelität noch die Gleichheit der Bewegungen in linearem Maß gefordert werden, oder es müssen die Eigenbewegungen in RA. und Dekl. und die Radialbewegung bei allen Sternen des Systems sich darstellen lassen als Komponenten der gleichen räumlichen Bewegung relativ zur Sonne. Die mathematische Aufgabe ist die gleiche wie die der Bestimmung der Sonnenbewegung, wenn an die Stelle der Größe und Richtung der Sonnenbewegung die für den Sternstrom geltenden Werte gesetzt werden.

Die Ergebnisse der Erforschung der einzelnen bewegten Sterngruppen sind übersichtlich zusammengestellt in einer Monographie von *N. H. Rasmuson*, A research on moving clusters. *Lund*, Meddelanden (2), Nr. 26 (1921). Es sind vorzugsweise Sterne der Typen *B* und *A*, die sich in solchen Gruppen vereinigt finden. Die absoluten Bewegungen erfolgen in der Regel näherungsweise parallel zur Ebene der Milchstraße. Die scheinbare Bewegung ist bei der großen, auch die Hyaden umfassenden Sterngruppe im Stier, die aus *A*-Sternen besteht, auf den Vertex gerichtet, während sie bei den aus Sternen vom Typus *B* bestehenden Gruppen nahe mit der Richtung auf den Antiapex der Sonnenbewegung zusammenfällt.

Aus dem Aufbau und der Dichte der Haufen scheint zu folgen, daß sie sich in einem sehr verschiedenen Zustande der Entwicklung befinden. Hinsichtlich der Gestalt wurde bei mehreren Haufen eine Abplattung parallel zur Ebene der Milchstraße festgestellt, während andere Haufen sich in der Bewegungsrichtung abgeplattet zeigen. *J. H. Jeans*[451]) hat den Einfluß des beim Zusammentreffen und Sichdurchdringen zweier Sternhaufen aus der Wirkung der Anziehung der übrigen Sterne des Haufens, der Sterne außerhalb des Haufens und drittens der bei einem Zusammenstoß entstehenden Kräfte auf den Bewegungszustand der Haufensterne untersucht und folgert daraus, daß nach einer großen Zahl von Zusammenstößen sich eine sphärische Geschwindigkeitsverteilung in den schließlich völlig aufgelösten Haufen ausbilden müsse.

450a) *S. Oppenheim*, Astr. Nachr. 204 (1917), p. 427 vermutet auf Grund der Wahrnehmung, daß sich die Pole der Eigenbewegung für die einzelnen Sterngruppen (Bärenschwarm, Taurusgruppe) nicht über den ganzen Himmel verteilen, sondern Häufungsstellen um gewisse Punkte aufweisen, das Vorliegen von Verhältnissen derart, daß die Sterne nicht bloß parallele, sondern sogar identische Bahnen am Himmel beschreiben.

451) London Astr. Soc. Month. Not. 76 (1916), p. 552; 82 (1922), p. 132.

47. Partialsysteme. *W. W. Campbell* stellte bei den *A*-Sternen eine Abhängigkeit der mittleren absoluten Radialgeschwindigkeiten von der galaktischen Breite fest:

Gal. Breite	0^0 bis $\pm 30^0$	$\pm 30^0$ bis $\pm 60^0$	$\pm 60^0$ bis $\pm 90^0$
$\Delta\varrho$ abs.	13,0	9,2	5,6 km/sec.

Diese Abhängigkeit findet eine Erklärung durch die Annahme, daß die Bewegungen dieser Sterne parallel zur Ebene der Milchstraße vor sich gehen. *H. C. Plummer*[452]) benutzte die als Ausdruck dieser Hypothese sich ergebende Bedingung, daß die zur Ebene der Milchstraße senkrechte Komponente der absoluten Bewegung verschwinden solle, zur Bestimmung der Entfernung bei den *A*-Sternen bekannter Eigenbewegung und Radialgeschwindigkeit und bei den nach Art ihrer Bewegung zu den *A*-Sternen zu rechnenden Sternen vom Typus *B*8 und *B*9. Die Resultate der Rechnung zeigen, daß viele der Sterne sich der einfachen zugrundeliegenden Hypothese nicht fügen, daß diese Hypothese im allgemeinen sich aber doch bewährt. Die Gesamtheit der *A*-Sterne scheint in eine Reihe von Teilschwärmen aufgelöst, unter denen auffälligerweise kein dem *Kapteyn*schen Strome II entsprechender vorkommt. Da die *B*-Sterne an der Bewegung der großen Sternströme nicht teilnehmen, sondern eine dritte Strömung für sich zu bilden scheinen, darf man sie vielleicht als zu einem mit kleiner Geschwindigkeit sich bewegenden Sternhaufen zusammengefügt betrachten und, da die Anordnung der *B*-Sterne in so ausgesprochener Weise die Milchstraße bevorzugt, annehmen, daß das Gleiche auch bei ihren Bewegungen der Fall ist, was eine Anwendung der *Plummer*schen Hypothese auf dieselben rechtfertigen würde. Bei der Ausführung[453]) findet *Plummer* für die mittleren Parallaxen und die absoluten Größen die Werte

Klasse	$B - B2$	$B3 - B5$	$B8 - B9$	$A - A8$
π	0,0094″	0,0127″	0,0185″	0,0217″
M	$-7,3^m$	$-5,8^m$	$-5,6^m$	$-3,9^m$.

Die $B - B5$ Sterne erscheinen in der Nachbarschaft der Sonne ziemlich gleichförmig in der Ebene der Milchstraße verteilt, während für größere Entfernungen ($\pi < 0,01''$) das Material offenbar unzureichend ist. Da man bei den *B*-Sternen verschwindend kleine eigentümliche Bewegungen voraussetzen, also die beobachteten scheinbaren Be-

452) Lick Obs. Bull. 7 (1912), p. 30; London Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 170, 555.

453) London Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 174.

wegungen als die Projektion der Sonnenbewegung auf die Sphäre betrachten kann, so hat man in dieser Bewegung ein einfaches Mittel zur Bestimmung der Entfernung der einzelnen Sterne dieser Gruppe, das von *Kapteyn*[454]) benutzt wurde und zur Vorstellung eines deutlich begrenzten Haufens der B-Sterne führte.

Auf einem anderen Wege suchte *C. V. L. Charlier* in die räumliche Anordnung der Einzel-Sternsysteme einzudringen. Die scheinbare Helligkeit eines Sternes wird bestimmt durch den seine Temperatur wiedergebenden Spektraltypus, seinen Durchmesser und seine Entfernung. Bei den Sternen vom Typus B variiert der Durchmesser nur innerhalb sehr enger Grenzen, so daß man für ihre Entfernung setzen kann

$$\varrho = R \cdot 10^{0{,}2\,m}, \tag{65}$$

wo R den Abstand bezeichnet, in welchem der Stern die scheinbare Größe $0{,}0^{\mathrm{m}}$ haben würde. Durch Einführung von ϱ in den Ausdruck der Eigenbewegung erhält man die lineare Eigenbewegung als Funktion von R und kann durch Vergleichung mit der in die Richtung des Visionsradius fallenden Projektion der Sterngeschwindigkeit schließlich R bestimmen. Das System der B-Sterne wird nach *Charlier*[455]) aus zwei Gruppen gebildet, den $B1$- und $B2$-Sternen mit $R = 36$ Sternweiten und den $B0$-, $B3$- und $B5$-Sternen mit $R = 16$ Sternweiten. Die B-Sterne bilden einen Haufen, dessen Dichte nach außen langsam abnimmt. Das Zentrum liegt in der Richtung $\alpha = 115^0$, $\delta = -56^0$ in einer Entfernung von 88 Sternweiten. Die Ausdehnung des Haufens ist in der Ebene der Milchstraße dreimal so groß wie senkrecht dazu. Die Sonne steht 19,4 Sternweiten oberhalb der Milchstraßenebene, von ihr aus gesehen erscheint das Zentrum in $\alpha = 311^0$, $\delta = +47{,}5^0$ im Sternbilde Cygnus.

Unter den gleichen Gesichtspunkten wurde von *W. Gyllenberg*[456]) das System der O-Sterne, von *K. G. Malmquist*[457]) das System der A-Sterne und von *C. F. Lundahl*[458]) das System der F-Sterne behandelt. Zur Bestimmung der Konstante R mußte dabei teilweise auf andere Methoden zurückgegriffen werden, weil das Eigenbewegungs- und Radialbewegungs-Material nicht ausreicht. Es wird dazu die Größe

454) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 43.

455) Upsala Nova acta (4) 4, Nr. 7 (1916); Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 14 (1916).

456) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 28 (1916).

457) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 29 (1916).

458) Ark. Mat. Astr. Fys. 11, Nr. 30 (1916).

der Sonnenbewegung, die Lage der Sonne zum Mittelpunkt des Systems und zur Ebene der Milchstraße herangezogen. Das mittlere Ergebnis für R ist bei den O-Sternen $R = 17{,}4$, bei den A-Sternen $R = 8{,}5$, bei den F-Sternen $R = 3{,}3$ Sternweiten. Aus dem benutzten nur die helleren Sterne umfassenden Material kann die räumliche Anordnung der A- und F-Sterne nicht erschlossen werden. Bei den G-Sternen, mit denen sich *B. Fänge*[459]) beschäftigt, muß eine besondere Methode zur Berechnung von R angewandt werden, weil wegen des Auftretens zahlreicher großer Eigenbewegungen die Bestimmung auf dem gewöhnlichen Wege zu unsicher ist. Der wahrscheinlichste Wert der Entfernungen der Sterne wird bestimmt unter der Bedingung, daß die einer gegebenen Lage des Apex entsprechende Verteilung der linearen Querbewegungen möglichst derjenigen entspreche, die ein Geschwindigkeitsellipsoid der absoluten Bewegungen bei gegebenem Vertex erfordert.

Auch *G. Strömberg*[460]) behandelt das System der A-Sterne, dem er die Sterne vom Typus $B7 - F2$ zurechnet, auf Grund der absoluten Bewegungen und spektroskopischen Parallaxen von 332 Sternen. Es zerfällt in drei Gruppen. Die Zentralgruppe, *Halms* O-Sterne, *Eddingtons* Antiapex-Strom, umfaßt 69 % aller Sterne. Zu ihr gehört die Mehrzahl der scheinbar helleren Sterne. Das Zentrum der Gruppe liegt in der Richtung $\alpha = 92^\circ$, $\delta = -31^\circ$. Die zweite Gruppe, deren Zentrum in der Richtung $\alpha = 306^\circ$, $\delta = -26^\circ$ liegt, wird von der Ursa major-Gruppe gebildet; sie umfaßt 23 % der Sterne. Zur dritten Gruppe, die mit der Taurus-Gruppe zu identifizieren ist und deren Zentrum in der Richtung $\alpha = 110^\circ$, $\delta = +6^\circ$ liegt, gehören 8 % der Sterne. Innerhalb des Systems der A-Sterne entspricht die Ursa major-Gruppe *Kapteyns* Strom II, die Taurus-Gruppe *Kapteyns* Strom I. Bei den späteren Typen ist die Taurus-Gruppe viel weiter ausgebreitet als bei den A-Sternen. Die größte Achse des Geschwindigkeitsellipsoids der ersten Gruppe ist nach der Vertex-Richtung, die der zweiten Gruppe nach der Normalen zur Ebene der Milchstraße orientiert.

F. Bau des Sternsystems.

48. **Erste Versuche.** Der induktive Weg für die Erforschung des Baues des Fixsternsystems wurde erst erschlossen durch die Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen, er mußte aber in die Irre führen, solange falsche Vorstellungen über den

459) Lund Obs. Meddel. (2), Nr. 25 (1921).

460) Astroph. Journ. 57 (1923), p. 77.

Charakter der Bewegungen die Forschung beherrschten; erst als der Sonnenbewegung der ihr gebührende Platz als der eines untergeordneten Gliedes im großen System angewiesen wurde, war das Ziel erreichbar.

Über die äußere Gestalt des Systems gelangte schon *W. Herschel* durch seine Eichungen zu der im wesentlichen richtigen Vorstellung eines linsenförmigen Körpers, dessen größte Erstreckung in der Ebene der Milchstraße erfolgt. Aufgebaut dachte *Herschel* sich das System aus einer eine verhältnismäßig dünne Schicht bildenden Zahl von Sternhaufen, von teils lockerem, teils dichtem Gefüge, die sich in der Richtung der Milchstraße in unermeßlich große Entfernungen erstreckt. Die Dynamik des Sternsystems konnte erst nach dem sichern Nachweis der Sonnenbewegung durch *Argelander* in den Bereich mathematisch-naturwissenschaftlicher Forschung eintreten. Einen im Mittelpunkt der Bewegung stehenden, möglicherweise dunklen Zentralkörper suchte *Argelander*[461]) in einer zur Richtung der Sonnenbewegung senkrechten, in der Ebene der Milchstraße liegenden Richtung, die auf das Sternbild Perseus zielt. *J. H. Mädler*[462]) nahm eine Zentralsonne in den Plejaden an, weil er glaubte nachweisen zu können, daß die Größe der Eigenbewegung mit dem scheinbaren Abstande von der keine Bewegung zeigenden Gruppe der Plejadensterne gesetzmäßig anwachse. Von *C. A. F. Peters*[463]) und *W. Kowalski*[464]) ward dieser Hypothese der Boden entzogen.

49. Neuere Theorien. Das durch die stellarstatistischen Forschungen der Neuzeit wohl endgültig festgestellte Bild des Sternsystems ist in erster Näherung in dem früher ausführlich besprochenen, die durchschnittliche Verteilung der Sterne im Raume wiedergebenden schematischen Sternsystem *Seeliger*s gezeichnet. Einen Schritt weiter geht das typische System *Seeliger*s, das dem den Bau des Sternsystems beherrschenden Einfluß der Milchstraße Rechnung trägt. *C. V. L. Charlier*s (vgl. p. 315) die Sternverteilung an das Wahrscheinlichkeitsgesetz knüpfende Untersuchungen stehen im gleichen Range und führten im wesentlichen zu dem gleichen Ergebnis. In zweiter Näherung wird der Inhalt unserer jetzigen Kenntnis über die räumliche Anordnung und die Bewegungen der Sterne in vollständigster

461) St. Petersburg Mém. prés. 3 (1837).

462) *J. H. Mädler*, Die Centralsonne, Dorpat 1846 (2. Aufl. Mitau 1847); auch Astr. Nachr. 24 (1846), p. 213.

463) Astr. Nachr. 28 (1849), p. 193.

464) Kasan Obs. Recherches 1859, p. 59.

Weise in der von *J. C. Kapteyn*[465]) entworfenen dynamischen Theorie des ganzen Systems niedergelegt. Um die Bedingungen des Gleichgewichts zu ermitteln, denkt er sich das System aus zehn konzentrischen Schalen, deren Oberflächen von Rotationsellipsoidflächen gebildet werden, zusammengesetzt. Die Polarachsen der Ellipsoide sind 5,1 mal kleiner als die Äquatorachsen. Der Gleichgewichtszustand in diesen Schalen erfordert eine Rotation um die Polarachsen. In der Richtung dieser Achsen stehen die Sterne nur unter dem Einfluß der Anziehung aller Massen des Systems, in allen andern Teilen des Systems dagegen unter dem Einfluß der Resultante aus Anziehung und Rotation. Nimmt man an, daß das System sich im dynamischen Gleichgewichtszustand befindet und daß in ihm das *Maxwell*sche Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten in einer im isothermischen Gleichgewicht befindlichen Gasmasse gilt, so kann man für eine angenommene mittlere Masse der Sterne die Anziehung in jedem Punkte berechnen. Die Dichtigkeitsverteilung in der Richtung der Polarachse führt zu einem durchaus plausiblen Wert der mittleren Masse: 1,4 Sonnenmassen in der äußersten, 2,2 Sonnenmassen in der zweiten Schale. Für die Rotationsgeschwindigkeit führen die Gleichgewichtsbedingungen auf eine langsame Zunahme mit der Entfernung von der Rotationsachse bis etwa 2000 Sternweiten, dann bleibt die Geschwindigkeit nahe konstant, und zwar etwa gleich 19,5 km/sec. Die Beobachtungen lassen eine einfache Rotationsbewegung des Systems nicht erkennen (vgl. p. 332), wohl aber die beiden Strombewegungen parallel zur Ebene der Milchstraße mit einer relativen Geschwindigkeit von 40 km/sec, und diese würden eine ungezwungene Erklärung finden, wenn wir sie als Rotationsbewegungen in entgegengesetzten Richtungen auffaßten. *Kapteyn* setzt hiernach das Zentrum des Sternsystems in eine Entfernung von 650 Sternweiten in der Richtung der galaktischen Länge 77° auf das Sternbild Cassiopeia zu. Die von *Kapteyn* selbst als nicht einwandfrei betrachtete Annahme des *Maxwell*schen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten für die Sternenwelt ist nach *J. H. Jeans*[466]) nicht erforderlich für die Erklärung der Sternbewegungen. Er erlangt unter alleiniger Voraussetzung eines dynamischen Gleichgewichtszustandes im System bei gegebener Kenntnis der Verteilung der Sterne eine der *Kapteyn*schen Lösung ähnliche Lösung der Aufgabe. Die Entfernung des Zentrums des Systems würde 700 Sternweiten sein, die mittlere Sternmasse wäre gleich 2,4 Sonnenmassen und man müßte, wenn die mittlere Masse eines ein-

465) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 302.

466) London Astr. Soc. Month. Not. 82 (1922), p. 122.

zelnen Sternes zu 0,8 Sonnenmassen angenommen wird, jedem leuchtenden Stern zwei dunkle Sterne zuordnen.

Eine dritte Näherung an die tatsächlichen Verhältnisse im Sternsystem hätte auch den mit der galaktischen Länge, also der exzentrischen Lage der Sonne verknüpften Ungleichheiten Rechnung zu tragen. Die Analyse wird hier noch erschwert durch die vermuteten Wolken dunkler das Licht der Sterne absorbierender Materie im Taurus und auf der anderen Seite im Ophiuchus, Scorpius und Sagittarius. *H. Shapley*[467]) betrachtet die Sonne als ein Glied eines besonderen im Sternenheer des großen Milchstraßensystems eingebetteten und sich durch dasselbe hindurchbewegenden Haufens. Die helleren Sterne vom Typus B und A gehören diesem Haufen an. Im Haufen stehen auch Sterne aller übrigen Typen; es ist aber schwer zu entscheiden, ob sie dem Haufen direkt angehören oder dem großen Gesamtsystem. In noch weiter reichender Weise hat *A. Pannekoek*[468]) die nähere Umgebung der Sonne aufzulösen versucht. Er nimmt in dem die Sonne bis zu einer Entfernung von 600 bis 1000 Sternweiten umgebenden Raume mehrere kleine und größere Kondensationen von Sternen an. Der größte der Haufen ist der Cygnus-Haufen, der bis in die unmittelbare Umgebung der Sonne reicht. Den Cygnus-Haufen betrachtete schon *C. Easton*[469]) als den Kern einer großen das Milchstraßensystem bildenden mehrarmigen Spirale, deren einer Zweig die Sonne fast umschließt.

Auf einem andern Wege wird ein Verstehen der scheinbaren Bewegungen im Fixsternsystem von *S. Oppenheim* versucht. Geht man aus von der Vorstellung eines mechanischen Systems, in dem eine Zentralkraft die Bewegungen bestimmt, so ist man berechtigt, in den scheinbaren von der Sonne aus gesehenen Bewegungen der Sterne ähnliche Verhältnisse anzunehmen wie in den geozentrischen Bewegungen der Planeten. Der mit Hilfe von Entwicklungen der scheinbaren Eigenbewegungen und der Radialbewegungen nach Kugelfunktionen durchgeführte Vergleich[470]), für den sich besonders die B-Sterne eignen wegen ihrer den Verhältnissen bei den Planeten analogen Verteilung über einen Gürtel parallel zur Milchstraße, fordert einen in der Richtung $\alpha = 20^{\circ}$, $\delta = + 34^{\circ}$, im Sternbild Andromeda, liegenden Bewegungsmittelpunkt. Der Pol der Bahnebene der Sternbe-

467) Nature 110 (1922), p. 545, 578.

468) Amsterdam Astr. Inst. Publ. 1 (1924).

469) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 136; 37 (1913), p. 105 (mit erläuternder Karte).

470) Wien Denkschr. 87 (1911), p. 297; 92 (1915), p. 227; 93 (1916), p. 307; 97 (1919), p. 269.

wegungen liegt in $\alpha = 145^0, \delta = +38^0$, also etwa 40^0 vom Pole der Milchstraße entfernt. Die Bewegung der Sonne ist gerichtet auf den Punkt $\alpha = 266^0$, $\delta = +32^0$. Die Gleichung dritten Grades, auf die man bei der Bestimmung der Vorzugsrichtungen der Sternbewegungen geführt wird, bestimmt ein Ellipsoid, dessen Hauptachse auf den Apex der Sonnenbewegung zielt, in völliger Analogie mit dem Resultate der gleichen Rechnung, angewandt auf die scheinbaren Bewegungen der Planeten. Hinsichtlich der beiden andern Achsen aber kommt eine Zweiteilung des Materials zum Ausdruck. Bei den galaktischen Sternen kann die kleinste Achse, bei den außergalaktischen dagegen die mittlere Achse als die zur Bahnebene der Bewegungen senkrechte Richtung gedeutet werden. Berechnet man im Sinne der zugrunde liegenden Hypothese der gleichartigen Deutung der Sternbewegungen und der Planetenbewegungen die den mittleren Bewegungen entsprechenden Entfernungen bei den Sternen mit positiver und denen mit negativer Bewegung in Rektaszension, so entspricht das Resultat nur bei den galaktischen Sternen der als Folge der Stellung in Konjunktion und in Opposition zu erwartenden Differenz. Die Zweiteilung des Sternsystems kommt auch zum Vorschein, wenn man das die Verteilung der Sternbewegungen darstellende Ellipsoid berechnet. Bei ihm zielt die kleinste Achse sowohl bei den galaktischen wie auch bei den außergalaktischen Sternen auf den Vertex. In die Richtung nach dem Pole der Milchstraße aber fällt bei den galaktischen Sternen die größte, bei den außergalaktischen die mittlere Achse. Auch aus der Sternverteilung selbst folgen zwei um 90^0 um die kleinste, auf den Pol der Milchstraße zielende Achse gedrehte Ellipsoide. Diese Verhältnisse werden vielleicht verständlich dadurch, daß die Sternverteilung, für die die Milchstraße Hauptebene ist, und die gesetzmäßige Bewegung in einer *anderen* Bahnebene in die Rechnung als bestimmend eingehen. Von diesem Gesichtspunkte aus würde die Vertexrichtung als die Projektion der Richtung nach dem Zentrum des Ellipsoids aus den Bewegungen zu deuten sein. Zu einer klaren, eindeutigen Antwort hat der Versuch noch nicht geführt.

50. Kinematik des Sternsystems. Eine Anwendung der klassischen Methoden der Himmelsmechanik auf das Problem der Bewegungen im Fixsternsystem ist unausführbar wegen Mangels der notwendigen Grundlagen. Man hat aber versucht durch die Methoden der statistischen Mechanik zum Verständnis der Gesetze der Sternbewegungen vorzudringen. Da die kinetische Theorie der Gase von andern Grundgesetzen ausgeht als dem *Newton*schen Gravitationsgesetze, muß sie für eine Übertragung der grundlegenden Anschauungen der *Maxwell*-

schen Theorie auf das Sternsystem entsprechend umgestaltet werden. Die fundamentale Gleichung des Problems, die die Abhängigkeit der Sternzahl von den im System vor sich gehenden Zustandsänderungen und Bewegungen ausdrückt, lautet

$$\frac{dF}{dt} = \nabla(f_1) + \square(f_1), \tag{66}$$

wobei F eine Funktion der Zeit, der Koordinaten und der Geschwindigkeiten ist, ∇ die die Häufigkeit des Eintritts von nahen Vorübergängen bestimmende Funktion bezeichnet und $\square$ die gleiche Bedeutung für Zusammenstöße hat. *C. V. L. Charlier*[471]) behandelt die Aufgabe unter der Annahme, daß F eine normale Häufigkeitsfunktion sei. Die Bahnen, die die Sterne beschreiben, werden bedingt durch die Anziehung der Gesamtmasse des Systems. Eine Reihe von Vorgängen im System erfolgt dagegen nach den einfachen Gesetzen der dynamischen Theorie der Gase, oder es gelten für sie diese Gesetze doch in erster Annäherung. Um sie zahlenmäßig auszudrücken, legen *Charlier*[472]) und *J. Lense*[473]) eine von *H. Poincaré*[474]) entwickelte Vorstellung über die Verteilung der Massen im Sternsystem zugrunde. Ausgehend von der Annahme durchschnittlicher Gleichheit der Sternmassen mit der Masse der Sonne denkt er sich diese über den Raum einer Kugel, deren Radius dem kleinsten Abstande zweier Sterne 10^6 astronomische Einheiten (A. E.) $= 4{,}85$ Sternweiten gleich ist, verteilt und setzt die Zahl der Sterne gleich 10^9, den Radius des sphärisch vorausgesetzten Weltalls gleich 10^9 A. E. Man erhält dann bei Zugrundelegung der von *W. Gyllenberg*[475]) aus den Radialbewegungen abgeleiteten mittleren totalen Sterngeschwindigkeit von 27,39 km/sec:

Mittlerer Abstand zweier Sterne: 1611 000 A. E.	
	$= 7{,}81$ Sternweiten.
Sterndichte: 0,00210 Sterne in der Kubiksternweite.	
Zahl der Zusammenstöße eines einzelnen Sterns	$= 5{,}32 \cdot 10^{-22}$ im Jahr.
Mittlere freie Weglänge	$= 5{,}27 \cdot 10^{16}$ Sternweiten.
Mittlere Wegzeit	$= 1{,}88 \cdot 10^{21}$ Jahre.
Umlaufszeit in der Bahn	$= 10^9$ Jahre.

471) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 16 (1917).

472) Ark. Mat. Astr. Fys. 10, Nr. 29 (1915).

473) Astr. Nachr. 207 (1918), p. 161.

474) *H. Poincaré*, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Paris 1913, p. 259.

475) Lund Obs. Meddel. (2) Nr. 13 (1915), p. 30.

Zahl der Zusammenstöße im ganzen System	$= 5{,}32 \cdot 10^{-13}$ im Jahr.
Mittlere freie Weglänge allgemein	$= 44{,}0$ Sternweiten.
Mittlere Wegzeit allgemein	$= 1{,}57 \cdot 10^{6}$ Jahre.

Mit einem Radius der Wirkungssphäre gleich $\frac{1}{5}$ des mittleren Sternabstandes nach *Lense*, findet sich noch

Zahl der Durchgänge durch die Wirkungssphäre eines Sternes	$= 6{,}38 \cdot 10^{-7}$ im Jahr.

Es sind das Zahlen und Größen, die gegenüber den für das Gesamtsternsystem anzunehmenden klein genug sind, um die Anwendbarkeit der statistischen Gesetze für berechtigt halten zu dürfen. Für die zur Erreichung des inneren Ausgleichs im System, der die gleiche mittlere Geschwindigkeit aller Sterne bedingt, erforderliche Zeit, die Relaxationszeit nach *Maxwell*, findet *Charlier* $3{,}583 \cdot 10^{16}$ Jahre. *J. H. Jeans*[476]) war auf einem die gleichen Gesichtspunkte verfolgenden, aber von etwas anderen Annahmen über die Sterndistanzen und Sterngeschwindigkeiten ausgehenden Wege, zu einer Relaxationszeit von der Ordnung von 10^{14} Jahren gelangt.

Läßt man die Zusammenstöße beiseite, so ist die Sternzahl nur abhängig von der Sternverteilung und den Geschwindigkeiten. Die fundamentale Gleichung wird also:

$$\frac{dF}{dt} = 0. \tag{67}$$

Befindet das System sich im Gleichgewicht, so erfolgen die Bewegungen unter dem alleinigen Einfluß der Gesamtanziehung des Systems und es ist auch

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{68}$$

Die Integration der Bewegungsgleichungen in einem Systeme, in dem die Sterne symmetrisch um eine Achse angeordnet sind, führt in diesem Falle nach *Charlier*[477]) zu der Folgerung, daß die Geschwindigkeitsfläche ein Rotationsellipsoid sein muß, dessen Achse senkrecht zur Richtung nach dem Zentrum des Systems steht. Da die nach der *Schwarzschild*schen Theorie aus den Beobachtungen abgeleitete Geschwindigkeitsfläche in der Tat dieser Folgerung entspricht, wäre das Zentrum des Sternsystems in einer vom Vertex um 90° abstehenden Richtung in der Milchstraße zu suchen. Zu dem gleichen, für die dynamische Theorie des Sternsystems wichtigen Resultat gelangt auch

476) London Astr. Soc. Month. Not. 74 (1913), p. 109.

477) Ark. Mat. Astr. Fys. 12, Nr. 21 (1917).

J. H. Jeans[478]), indem er die Bedingungen sucht, denen das Gravitationspotential Ω genügen muß, wenn bei einem gegebenen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung die Gleichung (67) erfüllt sein, also ein stabiler Zustand des Systems erreicht sein soll. Wenn nur das Energieintegral

$$(69) \qquad \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \Omega = \text{const.}$$

existiert, so muß die Funktion F die Form haben

$$F = \varphi[\tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - 2\Omega)].$$

Das würde aber eine sphärische Geschwindigkeitsverteilung fordern, die unserm Sternsystem bestimmt nicht innewohnt. Sternströme oder eine elliptische Geschwindigkeitsverteilung können nur auftreten, wenn neben dem Energieintegral noch andere von der Zeit unabhängige Integrale existieren. Setzt man die Geschwindigkeitsverteilung als gegeben durch einen Ausdruck zweiten Grades voraus, so treten in demselben 15 Konstanten auf, über die man verfügen kann. Macht man keine speziellen Annahmen über die Form von Ω, so kann man nur durch eine sphärische Geschwindigkeitsverteilung die Bedingungsgleichung erfüllen. Reduziert sich dagegen das Gravitationspotential auf eine Funktion zweiten Grades, so ist ein dreiachsiges Geschwindigkeitsellipsoid nur möglich, wenn die Flächen gleichen Potentials Kugeloberflächen sind. Bei einer sphäroidischen Gestalt des Sternsystems, die allein mit den Beobachtungen vereinbar ist, muß die Geschwindigkeitsfläche ein Rotationsellipsoid sein, dessen Äquatorebene eine Meridianebene des Universums ist.

Diese Forderung widerspricht einer zuerst von *O. Stumpe*[479]) in Betracht gezogenen, später von *H. H. Turner*[480]) eingehender behandelten, von *A. S. Eddington*[481]) zum Aufbau einer Theorie eines Sternsystems verwandten Hypothese, nach der die Bewegungen der Sterne in Schwingungen in langgestreckten fast geradlinigen durch den Schwerpunkt des Sternsystems hindurchgehenden Bahnen bestehen sollten, die also das Zentrum in der Vorzugsrichtung der Bewegungen voraussetzt. Diese Hypothese erscheint demnach als unvereinbar mit den in unserm Sternsystem beobachteten Verhältnissen.

Unter Voraussetzung eines ellipsoidischen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten leitet *Eddington*[482]) aus den drei Bedingungsglei-

---

478) London Astr. Soc. Month. Not. 76 (1915), p. 70.

479) Astr. Nachr. 140 (1896), p. 188.

480) London Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 387.

481) London Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 366.

482) London Astr. Soc. Month. Not. 76 (1915), p. 37.

chungen der Bewegung in einem Gravitationsfelde mit Hilfe der Gleichung (67) zwölf Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten, den Geschwindigkeiten, den Achsen des Geschwindigkeitsellipsoids und der Sterndichte ab. Neun der Gleichungen enthalten weder die Dichte noch auch die das Gravitationsfeld bestimmende Funktion und sie bestimmen die Geschwindigkeitsflächen im stabilen Zustande des Systems als konfokale Flächen zweiten Grades. Eine Achse der Geschwindigkeitsellipsoide muß, wenn das System eine Symmetrieebene hat, zu dieser Ebene senkrecht stehen. Finden die Bewegungen nur statt unter der Wirkung der Massen des Systems selbst, so ist, auch wenn eine Rotation des Systems hinzukommt, nur eine sphärische Dichtigkeitsverteilung möglich. Eine ellipsoidische Verteilung der Dichte ergibt sich aber, wenn man annimmt, daß die Bewegungen in dem System erfolgen unter dem Einflusse einer kugelförmig angeordneten Masse von gleichförmiger Dichte, eine Annahme, die in unserm Sternsysteme etwa erfüllt wäre, wenn das abgeplattete System der Sterne der früheren Typen beherrscht würde durch das nahe kugelförmige System der späteren Typen. Die Verbindung verlängerter Rotationsellipsoide, deren größte Achse in der Milchstraßenebene liegt, als Geschwindigkeitsflächen mit einer Rotation des Systems gibt theoretisch die beste Grundlage für ein den beobachteten Verhältnissen entsprechendes System.

(Abgeschlossen im Juli 1924.)

VI 2, 24. THERMODYNAMIK DER HIMMELSKÖRPER.

VON

R. EMDEN

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

Vorwort.

Die Tatsache, daß die Temperatur in den Problemen der Astrophysik eine so hervorragende Rolle spielt, daß die Thermodynamik zur Aufschließung weiter Forschungsgebiete erforderlich ist, verbunden mit dem Umstande, daß der Umfang der einzelnen Beiträge zu dieser Encyklopädie nach Tunlichkeit eingeschränkt werden soll, erforderte eine sorgfältige Begrenzung und Behandlungsweise des zu besprechenden Stoffes. Ich habe mich deshalb entschlossen, nur die theoretischen Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten einer Thermodynamik der Himmelskörper darzustellen, die Anwendung selbst den weiteren in Betracht kommenden Spezialartikeln wie der Photometrie, Spektralanalyse und Kosmogonie zu überlassen. Werden trotzdem an einigen Stellen die Forschungsergebnisse selbst besprochen, so geschieht es, um die theoretischen Unterlagen klarer hervortreten zu lassen. Aus diesem Grunde wurde auch auf eine Wiedergabe berechneter Zahlentabellen und von Diagrammen verzichtet.

Literatur.

An Schriften, welche größere Forschungsgebiete zusammenhängend behandeln, seien angeführt:

A. Ritter, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme: 6 Abhandlungen, enthaltend Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper, Leipzig 1882.

— Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper: 14 Abhandlungen.

— Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper: 5 Abhandlungen.

Die 19 Abhandlungen in bunter Reihenfolge erschienen in Wiedemanns Ann. Phys. Chem. V (1878) bis XXXVI (1889).

R. Emden, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme, Leipzig 1907.

H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Paris 1911.

J. H. Jeans, Problems of Cosmogony and Stellar-Dynamics, Cambridge 1919.

M. Milankovich, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire, Paris 1920.

J. Bosler, L'Évolution des étoiles, Paris 1923.

C. H. Payne, Stellar atmospheres. A Contribution to the observational study of high Temperature in the reversing Layers of Stars, Cambridge U.S.A. 1925.

A. S. Eddington, The internal Constitution of Stars (Unter der Presse), Cambridge 1926.

Außerdem seien noch erwähnt:

R. Mayer, Sur la production de la lumière et la chaleur du soleil, Paris C. R. 23 (1846), p. 544.

— Beiträge zur Dynamik des Himmels, in populärer Darstellung, Heilbronn 1848.

— Kleinere Schriften und Briefe, herausgegeben von J. J. Weyrauch, Stuttgart 1893.

H. v. Helmholtz, Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittlungen der Physik. Ein populär-wissenschaftlicher Vortrag gehalten am 7. Feber 1854 in Königsberg in Preußen. — Wieder abgedruckt in Vorträge und Reden, I u. II, Braunschweig 1884.

W. Thomson (Lord *Kelvin*), Baltimore Lectures. Deutsche Übersetzung von *B. Weinstein,* Leipzig 1909.

Einleitung.

Die Forschungsergebnisse auf dem Gebiete der Thermodynamik haben zur Aufstellung dreier Sätze umfassenden Inhaltes geführt.

1. Der 1. Hauptsatz (Energieprinzip). Die Erkenntnis, daß eine bestimmte Wärmemenge stets einer bestimmten Menge mechanischer Energie gleichwertig ist, gestattet, das auf den übrigen Gebieten der Physik geltende Energieprinzip auch auf thermodynamische Prozesse auszudehnen. Wird einem Körper (oder Körpersystem) bei einer kleinen Zustandsänderung eine Energiemenge dU, die auch Wärmeenergie enthalten kann, zugeführt, und durchläuft der Körper einen Kreisprozeß, so ist folglich stets $\sum dU = 0$. Geht der Körper aus einem Zustande 1 in einen Zustand 2 über, so ist $\int_1^2 dU$ unabhängig vom Wege und gilt die Beziehung

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1 .$$

Die auf diese Weise festgelegte Funktion U der den Zustand fixierenden Variabeln nennt man nach Lord *Kelvin* die „Energie" des Körpers (oder Körpersystemes). Bei der üblichen, im Laboratorium geltenden Behandlungsweise der Thermodynamik wird, von seltenen Ausnahmen abgesehen, von kinetischer Energie nicht molekularer Bewegung und von potentieller Energie der Gravitationskräfte abgesehen, so daß die Energie U eines Körpers durch molekulare Kräfte geliefert wird. Sie wird deshalb vielfach auch als „innere" Energie bezeichnet. (Für vollkommene Gase z. B. ist $U = c_v T$.) Werden n Körper, von denen jeder die Energie U enthält, zu einem Körper vereinigt, so wird dessen Energie zu $n \cdot U$ angesetzt. Diese Schlußweise ist auf weiten Gebieten der Astrophysik nicht zulässig. Denn Massenanhäufungen, wie sie in den Sternen vorliegen, repräsentieren einen Vorrat Gravitationsenergie, der von gleicher Größenordnung wie die innere Energie sein kann, und dessen Änderung bei Volum- und Gestaltsänderung mit berücksichtigt werden muß. Es ist deshalb erforderlich, den Energievorrat eines Körpers oder Körpersystems in zwei Teile zu zerlegen; in einen Teil Ω, den Betrag potentieller Energie der Gravitationskräfte, welcher anderen Anwendungsgebieten der Thermodynamik fremd ist, und in einen 2. Teil U, herrührend von den Molekularkräften. Um Irrtümern vorzubeugen, werden wir diesen Teil U stets als „thermische" Energie bezeichnen. Für Körper von der Größenordnung, wie sie bei Laboratoriumsversuchen vorliegen, kann der Teil Ω vernachlässigt werden. Auf welche Weise und in welchem Maße die Berücksichtigung der Gravitationsenergie Ω die Ergebnisse des Laboratoriumsexperimentes abzuändern vermag, wird aus dem in Nr. 4 besprochenen Abkühlungsproblem der Erde besonders deutlich hervorgehen.

2. Der 2. Hauptsatz (Entropieprinzip). Wird einem Körper oder Körpersysteme eine Wärmemenge dQ zugeführt und durchläuft derselbe einen umkehrbaren Kreisprozeß, so ist stets $\sum \frac{dQ}{T} = 0$. Geht ein Körper auf einem umkehrbaren Wege aus einem Zustande 1 in einen Zustand 2 über, so ist $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ unabhängig vom Wege und

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1.$$

Die auf diese Weise festgelegte Funktion S der den Körperzustand fixierenden Variabeln nennt man nach *R. Clausius* die Entropie. Der Entropiesatz sagt aus, daß in einem abgeschlossenen Systeme, also $U + \Omega =$ const., Veränderungen, welche mit einer *Abnahme* der Entropie verbunden wären, ausgeschlossen sind. Führt aus dem Zustande 2 kein Weg in Zustand 1 zurück, so kann das Entropieprinzip keine sinngemäße Anwendung finden. Durch das Entropieprinzip wird die Entwicklungsrichtung der Himmelskörper eingeschränkt.

Geht im Laboratoriumsversuch, in Übereinstimmung mit dem Entropiesatz, Wärme von einem heißeren zu einem kälteren Körper über, so wird deren Temperaturdifferenz verkleinert. In mehr oder minder unklarer Verallgemeinerung dieses Vorganges hat sich die Sage von einem Wärmetod des Universums in die Literatur eingeschlichen. Allein eine Ausdehnung dieser Verhältnisse auf Massen, wie sie in den Fixsternen vorliegen, ist wegen der dann hinzutretenden Energiegröße Ω unstatthaft. Gibt, in Übereinstimmung mit dem Entropiesatz, eine hinreichend massige Gaskugel durch Strahlung Wärme an eine niedriger temperierte, hinreichend massige Gaskugel ab, so werden (Nr. 8, 9), falls ein- oder zweiatomige Gase vorliegen, die heißere Kugel durch den Schrumpfungsprozeß geheizt, die kältere Kugel durch Expansion abgekühlt. Der Übergang von Wärme von warm nach kalt *steigert* hier, im Gegensatz zum Laboratoriumsexperiment, den Temperaturunterschied. Der gegenseitige Strahlungsprozeß der Sterne führt also nicht zu Temperaturausgleich und Wärmetod, sondern schafft Temperaturgegensätze, deren schließliche Folgen sich jeder Beurteilung entziehen.

3. Der 3. Hauptsatz. Der von *W. Nernst* im Jahre 1906 aufgestellte Satz lautet in einer von *M. Planck* erweiterten Fassung: Beim

Nullpunkt der absoluten Temperatur besitzt die Entropie eines jeden chemisch homogenen festen oder flüssigen Körpers den Wert Null. Damit kann die additive Konstante der Entropie und ihr absoluter Wert bestimmt werden. Für die Astrophysik gewinnt der Satz Bedeutung durch die im 4. Abschnitte besprochenen Probleme.

Die drei Sätze können sinngemäße Anwendung nur in endlichen, eindeutig abgegrenzten Gebieten finden, weitergehende Verallgemeinerung ist, wie namentlich *H. Poincaré* in seiner Thermodynamique dargelegt, unstatthaft. Die bekannten Sätze: 1. Die Energie der Welt ist konstant. 2. Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu, sind die Schlußwendung eines Vortrages von *R. Clausius*, gehalten 1865 in der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Sie finden sich nicht mehr in der 2., umgearbeiteten Auflage (1876) seiner mechanischen Wärmetheorie und sollten auch aus der übrigen Literatur verschwinden. Man hüte sich anderseits vor Anwendung der Sätze auf allzu künstlich stilisierte Probleme. Betrachtet man z. B. das Verhalten einer isoliert im Weltenraum schwebend gedachten, ausstrahlenden Kugel, so versagt das Entropieprinzip, denn es führt kein Weg von einem späteren Zustande in den Ausgangszustand zurück. Die Naturgesetze gelten eben für die Natur, wie sie ist, und nicht wie sie sein könnte. Beachtet man ferner, daß die Strahlung eines Himmelskörpers von den übrigen Himmelskörpern nicht vollständig abgefangen wird, sondern weiter nach außen entweichen kann, so folgt, daß die Gesamtheit der strahlenden Körper des Fixsternsystems Strahlung nach außen abgibt. Hier versagen die drei Hauptsätze; vielleicht kann die allgemeine Relativitätstheorie Klarheit schaffen. Für die im folgenden zu besprechende Anwendung der Thermodynamik auf die Himmelskörper genügt es, daß die drei Hauptsätze, angewendet auf endliche, eindeutig abgegrenzte Gebiete stets klaren Sinn behalten und zu unzweideutigen Ergebnissen führen.

I. Einfachste Umsätze thermischer und mechanischer Energie.

1. Mechanische Energiequellen der Sternstrahlung. a) *Meteoritentheorie.* Aufgestellt von *R. Mayer.*[1]) Liegt die Masse m auf einer Kugel von der Masse $\mathfrak{M}$ und dem Radius $\mathfrak{R}$, so enthält dieses System potentielle Energie im absoluten Betrage von

$$\frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}\, m \text{ Erg.}$$

1) *R. Mayer,* Beiträge zur Dynamik des Himmels, Heilbronn 1848.

Bei Fall der Masse m aus sehr großer Entfernung mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 wird deshalb eine Wärmemenge von

$$\frac{G\mathfrak{M}}{4{,}19 \cdot 10^7 \mathfrak{R}} m \text{ cal}$$

verfügbar, bei Fall auf die Sonne $4{,}44 \cdot 10^7 \cdot m$ cal. Da bei einer Solarkonstanten 2 cal/cm²min die Sonne jährlich $2{,}95 \cdot 10^{33}$ cal ausstrahlt, müssen im stationären Zustande jährlich

$$6{,}64 \cdot 10^{25}\text{ g} = 3{,}43 \cdot 10^{-8} \text{ Sonnenmassen}$$

meteoritische Massen einstürzen. Massen in diesem Betrage stehen aber nicht zur Verfügung. a) Kommen sie in gleichmäßiger Verteilung von außerhalb der Erdbahn, so wird ein Teil derselben von der Erde aufgefangen. Wie die Rechnung zeigt, ist die hierbei entwickelte Wärme 213 mal kleiner als wie die beim Sturze auf die Sonne erzeugte. Da die von der Erde aufgefangenen Mengen Sonnenstrahlung und meteoritischer Massen aber gleiche Bruchteile sind der gesamten Ausstrahlung und der gesamten einstürzenden Massen, müßte die Erde durch Meteoritenfall eine Wärmemenge $= \frac{1}{213}$ der Sonnenstrahlung erhalten, ein Betrag, der sicher um viele Zehnerpotenzen zu hoch ist. b) Die in den Bereich der Erdbahn eintretenden Massen würden ferner die Dauer des derzeitigen Jahres um 2,2 sec vergrößern. Da auch Änderungen der Umlaufszeiten der inneren Planeten um ähnliche Beträge ausgeschlossen sind, müßte der Meteoritensturz dauernd aus innerhalb der Merkurbahn vorhandenen Mengen gespeist werden.

Die Bedeutung des Meteoritenfalls auf andere Fixsterne entzieht sich der Beurteilung.

b) *Kontraktionstheorie.* Aufgestellt von *H. Helmholtz.*[2]) Sammelt sich die Masse $\mathfrak{M}$ aus hinreichender Verdünnung zu einer konzentrisch geschichteten Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, so würde durch Abnahme der potentiellen Energie bekanntlich eine Energiemenge

$$a \cdot \frac{G\mathfrak{M}^2}{4{,}19 \cdot 10^7 \mathfrak{R}} \text{ cal}$$

verfügbar. a ist ein Zahlenfaktor, der durch die schließliche Dichteverteilung längs des Radius bestimmt ist. Er ist bei konstanter Dichte $= \frac{3}{5}$ und steigt für eine Gaskugel im Strahlungsgleichgewicht auf $\frac{3}{2}$ (vgl. Nr. **61**). Auch andere annehmbare Dichtekonzentrationen nach dem Mittelpunkt zu ändern seine Größenordnung nicht. Durch Aufbau der Sonne zu einer Kugel konstanter Dichte bzw. einer Kugel im Strahlungsgleichgewicht werden folglich Energiemengen im Betrag von

$$5{,}17 \cdot 10^{40} \text{ cal} \quad \text{resp.} \quad 1{,}29 \cdot 10^{41} \text{ cal}$$

2) *H. v. Helmholtz*, Vorträge und Reden, Bd. I (1884), p. 415.

verfügbar, hinreichend, um die gegenwärtige Sonnenstrahlung für

$$1{,}75 \cdot 10^7 \quad \text{resp.} \quad 4{,}37 \cdot 10^7 \text{ Jahre}$$

zu decken. Da aber die Geologie für die Entwicklung der Erdkruste in den drei letzten großen Zeitaltern allein Zeiten von der Größenordnung 10^8 Jahre erfordert, kann die Zusammenballung der Sonne nur einen kleinen Betrag der erforderlichen Wärmemenge geliefert haben.

Kontrahiert sich die Kugel um den Betrag $\Delta\mathfrak{R}$, so wird eine Energiemenge

$$a\,\frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}} \text{ Erg}$$

verfügbar. Für die Ausstrahlung ist aber nur ein Bruchteil, der bei einem dreiatomigen vollkommenen Gase bis auf 0 abnimmt, verfügbar, während der Rest zur Heizung der Kugel verwendet werden muß (vgl. Nr. **9**).

Zur Speisung der Sonnenstrahlung können Gravitationskräfte nur in verschwindend geringem Maße beitragen. (Die Verbrennung einer Sonnenkugel aus Steinkohle könnte die gegenwärtige Sonnenstrahlung nur für rund 5000 Jahre decken, daher sind auch Quellen chemischen Ursprungs ausgeschlossen.) Da die Sonne unter den Fixsternen keine gesonderte Stellung einnimmt, dürfte auch in der Energiebilanz der letzteren die Kontraktion nicht merklich zur Geltung kommen. Nur mit der Möglichkeit mechanischer Energiequellen rechnend, kam Lord *Kelvin*[3]) zu dem verhängnisvollen Schluß: „Nun besitzen wir aber unwiderlegliche Hinweise dafür, daß die gesamte Lebensdauer unserer Sonne als Selbstleuchter nur eine mäßige Anzahl Millionen Jahre, wahrscheinlich weniger als 50 Millionen, möglicherweise zwischen 50 und 100 Millionen beträgt.“ Das Rätsel nach dem Ursprung der Sternstrahlung wird unter Nr. **46** nochmals berührt.[4])

2. Sternschnuppen. Wird eine in die Erdatmosphäre mit der Geschwindigkeit v eindringende Masse m durch Luftwiderstand auf die Endgeschwindigkeit v_0 abgebremst, so ist eine Wärmemenge

$$\frac{1}{2}\,\frac{m(v - v_0)^2}{4{,}19 \cdot 10^7} \text{ cal}$$

3) Lord *Kelvin*, Baltimore Lectures, Chapt. XVI, § 14, oder in der deutschen Übersetzung, p. 225.

4) Der Solarkonstanten $\frac{2 \text{ g cal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$ entspricht eine Energiedichte der Sonnenstrahlung in Erdentfernung von $4{,}65 \cdot 10^{-5}$ Erg/cm^3 und somit ein Druck der Strahlung auf eine vollkommen spiegelnde oder vollkommen schwarze Fläche im Strahlungsgleichgewicht von $9{,}3 \cdot 10^{-5}$ Dyn/cm^2.

verfügbar. Setzt man zwecks Überschlagsrechnung $v = 40$ km/sec, $v_0 = \mp 30$ km/sec, so ist die pro Gramm verfügbare Wärmemenge

$$5{,}85 \cdot 10^5 \text{ cal} \quad \text{resp.} \quad 1{,}19 \cdot 10^4 \text{ cal.}$$

Unbestimmt bleibt ihre Verteilung auf die einzelnen Schichten des Meteoriten und die atmosphärischen Massen, so daß sich Temperaturen nicht angeben lassen. Die Bewegung einer Kugel in einem widerstehenden Medium variabler Dichte (Atmosphäre) hat *Schiaparelli*[5]) theoretisch behandelt. Da aber veraltete und namentlich für die in Betracht kommenden hohen Geschwindigkeiten gänzlich unsichere Luftwiderstandsgesetze benutzt werden, sind die ermittelten quantitativen Beziehungen wahrscheinlich bedeutungslos. Auf Grund dieses Luftwiderstandsgesetzes wurde auch die Maximaltemperatur der adiabatisch komprimierten Luftmassen an der Stirnseite des Meteoriten abgeschätzt. Die Temperaturen der höchsten Schichten der Atmosphäre im ungestörten Zustande zu -150^0, also wahrscheinlich viel zu tief angesetzt, ergeben sich Temperaturen bis zu $42\,500^0$, die aber aus den angeführten Gründen außerordentlich zweifelhaft sind.

In seiner 16. Abhandlung hat *A. Ritter* sich ebenfalls mit dem Sternschnuppenproblem befaßt, doch erregt seine Behandlung ebenfalls Mißtrauen und dürfte mit den Untersuchungen *Riemanns*[6]) „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Amplitude“ schwerlich vereinbar sein, so daß die von ihm berechneten Lufttemperaturen von $3{,}7 \cdot 10^{6\,0}$ höchst zweifelhaft sind. Das Sternschnuppenproblem dürfte somit kaum über die allerersten thermodynamischen Ansätze hinausgekommen sein.

3. Eindringen eines Weltkörpers in eine kosmische Staubwolke. Die Begegnung eines großen Weltkörpers mit einer Gas- oder Staubmasse ist ein ungleich verwickelterer Vorgang als das eben behandelte Sternschnuppenproblem, da ein Zweikörperproblem angesetzt und der Formänderung der Staubmasse Rechnung getragen werden muß. Dies Problem ist von *H. v. Seeliger*[7]) eingehend behandelt worden unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Teilchen der Staubmasse sich unabhängig voneinander und in sehr großer anfänglicher Entfernung mit gleicher und gleichgerichteter Relativgeschwindigkeit V_0 bewegen. In bezug auf den konzentrisch geschichteten Weltkörper

5) *J. V. Schiaparelli,* Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Deutsch von *S. Boguslawski,* Stettin 1871, Note I u. II.

6) Vgl. *H. Weber,* Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1901, Bd. 2, Abschn. 22.

7) *H. v. Seeliger,* Über das Eindringen eines Weltkörpers in eine kosmische Staubwolke, Astr. Nachr. 181 (1909), p. 81.

von der Masse $\mathfrak{M}$ und dem Radius $\mathfrak{R}$ beschreiben dann diese Teilchen Hyperbeln von der großen Halbachse $a = G\mathfrak{M}/V_0^2$ mit parallelen Asymptoten, aber verschiedener Exzentrizität. Die Teilchen, deren Anfangsgeschwindigkeit nach dessen Mittelpunkt gerichtet sind, erlangen die größte Geschwindigkeit, und nach dieser Richtung von beiden Seiten herandrängend werden die Teilchen die Staubmasse in Richtung des ankommenden Weltkörpers zapfenförmig ausbuchten. Der eindringende Weltkörper wird infolgedessen nicht nur die Teilchen treffen, die in einem Zylinder vom Querschnitt $\pi\mathfrak{R}^2$ liegen, sondern, wie die Rechnung zeigt, in stationärem Zustand alle Teilchen, die in großer Entfernung den Querschnitt

$$\text{(a)} \qquad \pi\mathfrak{R}^2\left(\frac{2a}{\mathfrak{R}} + 1\right)$$

ausfüllen.

Für $V_0 = 30$ km/sec, $\mathfrak{M} =$ Sonnenmasse, $\mathfrak{R} = \frac{1}{200}$ Entfernung Sonne—Erde ist der Vergrößerungsfaktor $\frac{2a}{\mathfrak{R}} + 1 = 401$. Bezeichnet δ_0 die konstant angenommene Dichte der Staubwolke in großer Entfernung, so wird im stationären Zustand sekundlich eine kinetische Energie der Teilchen im Betrag

$$\text{(b)} \qquad L = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^2\pi\delta_0 V_0^3\left(\frac{2a}{\mathfrak{R}} + 1\right)^2 \text{ Erg}$$

vernichtet. (Nichtberücksichtigung des Vergrößerungsfaktors $\frac{2a}{\mathfrak{R}} + 1$, wie von anderer Seite geschehen, wirkt also verhängnisvoll.) Um zu Temperaturen überzugehen, sind weitere Annahmen notwendig. Setzt man $\mathfrak{R} = 695\,000$ km, $\mathfrak{M} =$ Sonnenmasse, $V_0 = 28{,}3$ km/sec, $\delta_0 = \frac{D}{420}10^{-6}$, D Dichte des Himmelskörpers, γ die spezifische Wärme seines Materiales und nimmt man an, daß sich die entwickelte Wärme gleichmäßig auf den Bruchteil f seiner Masse verteilt, so resultiert eine Temperaturerhöhung der äußersten Schichten im Betrage von

$$\frac{134^0}{f\cdot\gamma}.$$

Dringt die Wärme 700 km tief ein und setzt man $\gamma = 1$, so ist $f\cdot\gamma$ rund $= \frac{1}{300}$. Wegen der nach dem *Stefan*schen Gesetz vor sich gehenden Ausstrahlung wird diese Temperatur nicht erreicht Setzt man $D = 1{,}4$, $\delta = \frac{1}{42}\cdot 10^{-6}$, so wäre die maximale Temperatur von $148\,000^0$ erreichbar. Mit Rücksicht auf die Ausstrahlung wird sie auf $119\,000^0$ herabgesetzt, welche Temperatur von einer Anfangstemperatur 2200^0 ausgehend in 11 Stunden erreicht wird. Der eindringende Himmelskörper, bolometrisch von der Größenklasse 17,3, würde somit in 11 Stunden zur Größenklasse — 2,3 aufsteigen. Ist in der Wahl der der Berechnung zugrunde liegenden Zahlenwerte immerhin ein weiter Spielraum vorhanden, so dürfte doch die Thermodynamik der *Seeliger*schen Annahme, die das Auftreten neuer Sterne auf das Eindringen eines großen Weltkörpers in eine Gas- oder Staubmasse zurückführt, keinerlei Schwierigkeiten begegnen. Diese Annahme läßt auch die Erklärung, daß Sterne in jedem Entwicklungsstadium sich zu Novas entwickeln können, zu.

4. Die Abkühlung der Erde. Die Zeit, die von der Erstarrung der Erde bis zur Erreichung der derzeitigen Oberflächentemperatur verstrichen ist, wurde als reines Wärmeleitungsproblem vielfach behandelt, zuerst wohl von Lord *Kelvin.* Näheres darüber bei *H. Poincaré*[8]) und namentlich bei *O. Heaviside.*[9]) Die Zeiten verschiedener Bearbeiter schwanken zwischen 20 Millionen und 65000 Millionen Jahren! Diese Behandlungsweise als reines Wärmeleitungsproblem ist aber nach *R. Emden*[10]) unzulässig, da durch einen mit der Ausstrahlung verbundenen Schrumpfungsprozeß der Erde durch Arbeit der Gravitationskräfte (vgl. Nr. **1** b) Wärmemengen erzeugt würden, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Wird einer kleinen Eisenkugel (Dichte 7,7, Wärmekapazität $c = 0{,}114$) 0,114 cal/g entzogen, so kühlt sie sich um 1^0 ab und der Radius verkürzt sich um $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ seiner Länge. Die geleistete Gravitationsarbeit ist zu vernachlässigen. Übertragen auf eine Eisenkugel vom Radius der Erde würde eine Wärmeabgabe von 0,114 cal/g $= 9{,}51 \cdot 10^{26}$ cal eine Verkürzung des Radius um $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ seines Wertes $= 7{,}64 \cdot 10^3$ cm zur Folge haben. Durch Arbeit der Gravitationskräfte würden dann aber $1{,}25 \cdot 10^{27}$ cal verfügbar, also das 1,3fache der entzogenen Wärmemenge. Für eine Eisenkugel vom Radius der Sonne würde dieses Verhältnis auf den Wert 15 700 ansteigen, für eine Kugel mit der Wärmekapazität c und dem Ausdehnungskoeffizienten α auf den Wert $\frac{3}{5}\frac{G\mathfrak{M}\alpha}{4{,}19 \cdot 10^7 \cdot c \cdot \dot{\mathfrak{R}}}$. Solange das Verhalten der Erdsubstanz thermodynamisch nicht faßbar ist, kann nicht entschieden werden, ob Wärmeentzug Abkühlung oder, wie bei den Gaskugeln, Erwärmung der Erde zur Folge hat. Der wahrscheinlichere Fall der Abkühlung darf deshalb nicht als reines Wärmeleitungsproblem behandelt werden.

8) *H. Poincaré,* Leçons, p. 209.

9) *O. Heaviside,* Mathematics and Physics of the Earth. Electromagnetic Theory. London 1899, II, Chapt. 5.

10) *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. XVII, § 21.

II. Aufbau der Himmelskörper unter Berücksichtigung von thermischer Energie und Gravitationsenergie.

Soll eine hinreichend plastische Masse, kurz gesagt eine Flüssigkeit, unter der Wirkung von Kräften, die durch ein Potential Ω ausgezeichnet sind, im Gleichgewichte sein, so muß bekanntlich an jeder Stelle die Bedingung
$$\frac{dp}{\varrho} = - d\Omega$$
erfüllt sein. Bedingen als Materialeigenschaften der Druck p und die Dichte ϱ sich gegenseitig eindeutig, so ist bei gegebenen Grenzbedingungen die Anordnung eindeutig bestimmt, derart, daß Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichte Flächen gleichen Potentiales sind. Tritt aber in der Zustandsgleichung der Flüssigkeit noch die Temperatur auf, wie bei Gasen, so ist der Aufbau unbestimmt. In einer konzentrisch geschichteten Gaskugel lassen sich z. B. bei beliebiger Dichteanordnung längs des Radius durch geeignete Temperaturverteilung die Drucke so bestimmen, daß jede Schicht das Gewicht der äußeren Massen äquilibriert. Für diesen Fall, ja unter noch allgemeineren Verhältnissen, ergeben sich bereits einige allgemeine Sätze über Gas- und kosmische Staubmassen. Sie folgen in Nr. **5** u. **6**. Zum Aufbau von Gaskugeln oder Atmosphären werde in erster Linie vollkommenes Gas verwendet (über Verhalten nach der *van der Waals*schen Zustandsgleichung siehe Nr. **29**) und der Aufbau eindeutig gemacht durch Festsetzung der Gaszustände, die längs des Radius vorhanden sein sollen; oder anders ausgedrückt: Verschiebt sich ein Gasteilchen längs des Radius derart, daß es in bezug auf Temperatur, Druck und Dichte mit dem jeweils verdrängten Gasteilchen übereinstimmt, so sollen seine Zustände einer vorgeschrieben thermodynamischen Weggleichung gehorchen. Als solche kommen in erster Linie und fast ausschließlich die überaus anpassungsfähigen *polytropen* Zustandsänderungen in Betracht. (Ein Aufbau unter ganz anderer Voraussetzung wird in Nr. **31** besprochen.) Die sich so ergebenden polytropen Gaskugeln und ihre Beziehungen zu den kosmischen Staubmassen und zur Sternstatistik sollen in den Nrn. **17—45** besprochen werden. Das Auftreten des Strahlungsdruckes als mittragendes Prinzip, sowie die sich daraus ergebenden Folgerungen folgen im Abschnitt III.

A. Allgemeinste Sätze über Gas- und Staubmassen.[11])

5. Der Virialsatz. Bezeichnet m die Masse eines Teilchens, x, y, z seine Koordinaten und X, Y, Z die Komponenten der auf das-

11) *H. Poincaré,* Leçons, § 74 ff.; *J. H. Jeans,* Problems, Chapt. VIII, § 188—189.

selbe wirkenden Kräfte, so ist

(a) $$\frac{1}{2}\frac{d^2(mx^2)}{dt^2} = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + xX$$

und wird über die drei Achsen und alle Teilchen summiert, so folgt

(b) $$\frac{1}{2}\frac{d^2\Theta}{dt^2} = 2L + \sum(xX + yY + zZ) = 2L + V_i.$$

Hier bedeuten Θ das Trägheitsmoment, L die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung und $\sum(xX + yY + zZ) = V_i$ das Virial des ganzen Systems. Ist das System in Gleichgewicht, $\Theta = \text{const.}$, oder verändert es sich so, daß $\frac{d\Theta}{dt} = \text{const.}$, so ist in jedem Moment

(1) $$2L + V_i = 0.$$

Schwankt das System um einen mittleren Zustand, so gilt dieselbe Beziehung für die zeitlichen Mittelwerte von L und V_i. Das Virial berechnet sich aus den zwischen den einzelnen Teilchen wirkenden Kräften und aus den Oberflächendrucken. Wir nehmen an, daß kein fester Kern und keine feste Oberfläche vorhanden sind, so daß der zweite Anteil verschwindet. Wir nehmen weiter an, daß die einzelnen Staubteilchen oder Massenelemente vollkommener Gase mit *Newton*schen Gravitationskräften aufeinander wirken. Dann ergibt sich

(c) $$V_i = \sum(xX + yY + zZ) = -\sum\sum\frac{m_i m_k}{r_{ik}} = \Omega.$$

Ω, die aufgespeicherte potentielle Energie (das Eigenpotential des Systems) und der in Betracht kommende Virialsatz lautet sohin:

(2) $$2L + \Omega = 0.$$

6. Anwendung des Virialsatzes. a) *Kosmische Staubmassen.* Zur Virialgleichung tritt hinzu die Energiegleichung

(3) $$L + \Omega = E,$$

wo E die gesamte mechanische Energie ist, mit der Folge

(a) $$L = -E, \qquad \Omega = 2E. \qquad \text{(b)}$$

Erfolgen die Zusammenstöße vollkommen elastisch, so bleibt $L = -E$ und infolgedessen auch Ω konstant. Es kann also niemals zu Zusammendrängung der Teilchen, zu Kondensation kommen. Erfolgen die Zusammenstöße nicht vollkommen elastisch, so geht mechanische Energie verloren, E nimmt *ab*, also nimmt auch Ω ab und Kondensationserscheinungen müssen eintreten. Gleichzeitig aber nimmt L, die kinetische Energie des neuen Zustandes, *zu*. Es ergibt sich so der scheinbar paradoxe Satz (der entsprechend auch bei Gaskugeln auftreten wird), daß Verlust an kinetischer Energie zur Steigerung der kinetischen Energie führt, ein Seitenstück zu dem Satze, daß ein widerstehendes Mittel die kinetische Energie eines Planeten vergrößert.

b) *Vollkommene Gase.* Für einatomige Gase gelten diese Betrachtungen unverändert. Bei mehratomigen Gasen aber ist zu beachten, daß auch kinetische Energie der intramolekularen Bewegung in einem zur kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung konstanten Verhältnis vorhanden ist. Bekanntlich ist pro Masseneinheit eines vollkommenen Gases die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung $l = \frac{3}{2} pv = \frac{3}{2} \frac{R}{m} T = \frac{3}{2}(c_p - c_v) T$ und die thermische Energie $u = c_v T$, so daß $l = \frac{3}{2}(\varkappa - 1) u$ wird, für $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$. Bezeichnet U die gesamte thermische Energie der Gasmasse, so ergibt der Virialsatz

$$(2') \qquad 3(\varkappa - 1) U + \Omega = 0$$

und die gesamte aufgespeicherte Energie E ist

$$(3') \qquad U + \Omega = E$$

mit der Folge

$$(a') \qquad E = -(3\varkappa - 4) U, \qquad\qquad E = \frac{3\varkappa - 4}{3(\varkappa - 1)} \Omega \qquad (b')$$

[für einatomige Gase mit $\varkappa = \frac{5}{3}$ in die Formel unter (3a) übergehend]. Aus diesen Beziehungen ergeben sich die fundamentalen Folgerungen:

I. Für dreiatomige Gase, $\varkappa = \frac{4}{3}$, ist E unabhängig von Ω, und die Dauer der Radialschwingung einer solchen Gaskugel wird deshalb unendlich (Nr. **45**). Bilden wir eine lineare Serie von Gaskugeln mit $\varkappa$ als variablem Parameter, so tritt bei $\varkappa = \frac{4}{3}$ ein Wechsel von Stabilität und Instabilität ein. Da der Virialsatz $\Omega = 0$ für $\varkappa = 1$ ergibt, also keine stabile Anordnung zuläßt, folgt: *Stabile Gaskugeln lassen sich nur aus Gasen mit* $\varkappa \gtreqless \frac{4}{3}$, *also nur aus ein-, zwei- und dreiatomigen Gasen aufbauen.* (Dieser Beweis dieses wichtigen Satzes ist von *Jeans* gegeben.)

II. Nimmt Ω durch Kontraktion um $\Delta\Omega$ *ab*, so muß nach (b′) die gesamte aufgespeicherte Energie um ΔE abnehmen. Diese Energiemenge wird durch Strahlung abgegeben und nach (a′) nimmt dabei U *zu*. *Ausstrahlung* hat demnach *Erhöhung* der thermischen Energie U, also der Temperatur zur Folge. Denn von der Kontraktionsarbeit wird nur der Bruchteil $\Delta E = \frac{3\varkappa - 4}{3(\varkappa - 1)} \Delta\Omega$ ausgestrahlt, und der Rest $\left(1 - \frac{3\varkappa - 4}{3(\varkappa - 1)}\right) \Delta\Omega = \frac{1}{3(\varkappa - 1)} \Delta\Omega$ dient zur Temperatursteigerung der Gasmassen.

III. Werden in einer Gasmasse alle linearen Abmessungen im Verhältniss λ *verkleinert*, so *steigen* die thermische Energie und damit die Mitteltemperatur (bei Staubmassen die kinetische Energie) im gleichen Verhältnisse.

Für Atmosphären gelten diese Sätze nicht mehr. Bei ihrer Behandlung muß bei Berechnung des Virials der Druck auf die Unterlage mit berücksichtigt werden. Solche Untersuchungen scheinen nicht vorzuliegen. (Ist ein Gas in einem Gefäß vom Volumen V eingeschlossen und wird von äußeren und inneren Gravitationskräften abgesehen, so nimmt das Virial den Wert $3pV$ an und daraus folgt die bekannte fundamentale Beziehung $L = \frac{3}{2}pV$.)

B. Die polytropen Kurven.

Die für den Techniker unentbehrlichen polytropen Zustandsänderungen dürften zuerst von *G. Zeuner*[12] (1872) eingehend behandelt worden sein. In Problemen der kosmischen Physik scheint sie zuerst *A. Ritter* ausgiebig verwendet zu haben; doch treten sie hier als verallgemeinerte Adiabaten auf, indem formell der Exponent k als stetig variabler Parameter behandelt wird. Spezialisierung von $k = \varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ liefert dann adiabatische Kugeln. Auch in der neuen Literatur wird öfters nicht zwischen polytrop und adiabatisch aufgebauten Gasmassen unterschieden. Zu eigentlicher Wirksamkeit gelangen die Polytropen aber erst, wenn sie nicht formal durch die Beziehung $pv^k =$ const. eingeführt, sondern als durch physikalische Beziehungen ausgezeichnete, thermodynamische Wege definiert werden. Der fundamentale Unterschied zwischen ihrem Exponent k und der Größe $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ tritt dann klar hervor, und scheinbar überraschende Eigenschaften polytroper Gaskugeln erweisen sich schon durch diese Definition begründet. Polytrope Gaskugeln von beliebigem k können aus Gasen von beliebigem $\varkappa$ aufgebaut werden.

7. Definition der polytropen Zustandsänderung. *Eine Polytrope ist ein umkehrbarer Weg konstanter Wärmekapazität.* Bezeichnen wir die Wärmekapazität mit γ, $-\infty \gtreqless \gamma \leqq +\infty$, so folgen auf jedem Wegelement für die pro Gramm zugeführte Wärmemenge dQ und zugeführte Entropie dS

$$dQ = \gamma dT; \quad dS = \gamma \frac{dT}{T}. \tag{4}$$

Die Entropie steigt oder sinkt mit der Temperatur, je nachdem $\gamma >$ oder < 0.

12) *G. Zeuner*, Technische Thermodynamik I (Leipzig 1887), p. 142, sowie *M. Schröter* und *L. Prandtl*, Technische Wärmetheorie, Encykl. V 1, Nr. 5, p. 248.

Aus der Grundgleichung des 1. Hauptsatzes der Wärmelehre

$$dU = dQ + dW$$

folgt für vollkommene Gase, $dU = c_v dT$, $c_v = \text{const.}$, bei polytroper Änderung

$$c_v dT = \gamma dT + dW;$$

also gilt

$$Q = \gamma (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{c_v}(U_2 - U_1) \tag{5}$$

$$Q = \frac{\gamma}{c_v - \gamma} W; \quad U_2 - U_1 = \frac{c_v}{c_v - \gamma} W. \tag{6}$$

Auf jeder Polytropen ist die zuzuführende Wärme proportional der thermischen Energie und proportional der zuzuführenden Arbeit, die die Zunahme der thermischen Energie proportional der zugeführten Arbeit.

Die Wege $p = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $S = \text{const.}$ (Isentrope), $U = \text{const.}$ (Isotherme) ergeben sich als Spezialfälle der Polytropen mit $\gamma = c_p, = c_v, = 0$ resp. $= \pm \infty$.

Schreibt man die obenstehende Grundgleichung in der Form

$$dQ = c_v dT + A p dv,$$

so läßt sie sich bei vollkommenen Gasen, $pv = \frac{R}{m} T$, für $dQ = \gamma dT$ sofort integrieren und liefert je nach der Wahl der Veränderlichen die *Gleichung der Polytropen*

$$p\varrho^{-k} = pv^k = \text{const.}; \quad T^k p^{1-k} = \text{const.}, \quad Tv^{k-1} = T\varrho^{1-k} = \text{const.} \tag{7}$$

$$k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}, \quad \gamma = c_v \frac{k - \varkappa}{k - 1}. \tag{8}$$

Für $k = \varkappa$ folgt selbstverständlich die Gleichung der Adiabate (Isentrope). (Der Exponent k der Polytropen ist scharf von $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ zu unterscheiden.) Die pv Ebene ist von ∞^1 Polytropen mit gleichem k bedeckt, die sich durch Werte dieser Konstanten unterscheiden. Sie können nach *R. Emden* (Gaskugeln p. 26) vorteilhaft unterschieden werden durch die Temperatur, welche der Stelle $\varrho = 1$ g/cm³ zukommt. Diese werde polytrope Temperatur genannt und mit Θ_k bezeichnet. (Weiterhin mit Θ_n.) Dann gilt offenbar

$$T\varrho^{1-k} = \Theta_k \cdot 1 = \Theta_k. \tag{9}$$

Als Spezialfälle ergeben sich die adiabatische Temperatur für $k = \varkappa$ und weiterhin die *kosmogenetische* Temperatur für $k = \frac{4}{3}$.

[In seiner Arbeit über atmosphärische Bewegungen unterscheidet *Helmholtz*[13]) die verschiedenen Adiabaten durch die Temperatur, die

13) *H. v. Helmholtz,* Berl. Ber. 1888, p. 647 = Gesamm. Abh., Leipzig 1895, Bd. III.

sie bei einem Normaldruck angeben, und bezeichnet diese Temperatur als „bleibenden Wärmegehalt“. Auf Anregung von *Bezold*[14]) wurde statt dessen die Bezeichnung „potentielle Temperatur“ eingeführt, die sich in der Meteorologie eingebürgert hat. Hier, wo in erster Linie Druck beobachtet wird, ist diese Einführung angezeigt. Bei allgemeineren Untersuchungen erweist sich die Zurückführung auf die Dichte 1 bei gleichzeitiger Verallgemeinerung auf Polytrope ungleich zweckmäßiger.]

Setzen wir

$$\varrho = u^n, \quad n = \frac{1}{k-1}, \tag{10}$$

so ergibt sich nach *R. Emden* die für weitere Anwendungen zweckmäßigste *Gleichung der Polytropen in Parameterdarstellung*

$$p = u^{n+1}\frac{R}{m}\Theta_n, \quad \varrho = u^n, \quad T = u\Theta_n. \tag{11}$$

n wird Klasse der Polytropen genannt. Es gibt deshalb für jedes Gas ∞^2 Polytropen, unterschieden durch die Klasse n und die polytrope Temperatur Θ_n. Die Zweckmäßigkeit der Parameterdarstellung erweist sich u. a., daß sich der in hydrodynamischen Untersuchungen stets auftretende Ausdruck $\frac{dp}{\varrho}$ übersichtlich $=(n+1)\frac{R}{m}\Theta_n du$ $=(n+1)\frac{R}{m}dT$ schreiben läßt, und die Bedingung mechanischen Gleichgewichts $\frac{dp}{\varrho\, dr} = -g = -\frac{GM_r}{r^2}$ wird

$$\Theta_n \frac{du}{dr} = \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{(n+1)}\frac{m}{R}\cdot\frac{GM_r}{r^2}. \tag{12}$$

Weiterhin gelten auch für Polytropen die wichtigen *linearen* Energiebeziehungen

$$\frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{\gamma}{c_v} = \frac{k-\varkappa}{k-1}; \quad \frac{\Delta U}{\Delta W} = \frac{c_v}{c_v-\gamma} = \frac{k-1}{\varkappa-1}; \quad \frac{\Delta Q}{\Delta W} = \frac{k-\varkappa}{\varkappa-1}. \tag{13}$$

Berechnen wir mit Hilfe der Gleichung der Polytropen die zur Änderung von Θ_k erforderliche Wärmemenge, so folgt

$$dQ = c_v dT + Apdv = c_v T(\Theta_k^{-1} d\Theta_k + (k-\varkappa)\varrho^{-1}d\varrho)$$

und daraus durch Integration als Beziehung zwischen Entropie und polytroper Temperatur

$$S = c_v \lg\Theta_k + (k-\varkappa)\lg\varrho + \text{const.} \tag{14}$$

Für adiabatische Änderung, $k=\varkappa$, ergibt sich $S = c_v\lg\Theta_k + \text{const.}$ Wärmeentzug hat stets ein Sinken, Wärmezufuhr ein Steigen der

14) *W. v. Bezold,* Zur Thermodynamik der Atmosphäre, Berl. Ber. 1888, p. 1189 = Gesamm. Abh., Braunschweig 1906.

adiabatischen Temperatur zur Folge. Für polytrope Temperatur gilt dies nicht allgemein. Sie sinkt oder steigt, je nachdem das durch den Wärmeaustausch bedrängte Wegelement steiler oder geneigter verläuft wie die Tangente an die Polytrope k.

Für kosmogenetische Zustandsänderung $k = \frac{4}{3}$ wird, wichtig durch den Vorzeichenwechsel bei $\varkappa = \frac{4}{3}$,

$$S = c_v \lg \Theta_{\frac{4}{3}} - \left(\frac{4 - 3\varkappa}{3}\right) \lg \varrho + \text{const.} \tag{15}$$

Da nur Polytropen $k > 1$ sich von physikalischem Interesse erweisen, beschränkt sich die Untersuchung auf die Klassen[15] $0 \leqq n \leqq \infty$.

8. Kosmogenetische Zustandsänderung. Kosmogenide. Definition: *Die Kontraktion einer konzentrisch geschichteten Kugel werde gleichförmig genannt, wenn bei Änderung ihres Radius durch keine in ihr gelegte Kugelfläche* $\lambda \mathfrak{R}$ (λ = einer Konstanten) *ein Transport von Masse stattfindet*, oder anders ausgedrückt: *der gegenseitige Abstand je zweier Teilchen ändere sich wie der Radius der Kugel.* Daraus folgt unmittelbar: die Dichte an jeder Stelle ändert sich umgekehrt wie die 3. Potenz des Radius.

$$\varrho \cdot \mathfrak{R}^3 = \varrho_1 \cdot \mathfrak{R}_1{}^3 = \text{const.} \tag{15a}$$

Diese Kugel werde durch gleichförmige Kontraktion aus einem beliebigen Gleichgewichtszustand in einen neuen Gleichgewichtszustand übergeführt. Da die Oberfläche jeder Kugelschale quadratisch mit dem Radius *ab-*, das Gewicht eines jeden weiter außen liegenden Teilchens aber in demselben Verhältnis *zu*nimmt, folgt für einen neuen Gleichgewichtszustand: *Der Druck an jeder Stelle ändert sich umgekehrt wie die 4. Potenz des Radius.*

$$p \mathfrak{R}^4 = p_1 \mathfrak{R}_1{}^4 = \text{const.} \tag{15b}$$

Aus beiden Gleichungen folgt unmittelbar für vollkommenes Gas

$$T \mathfrak{R} = T_1 \mathfrak{R}_1 = \text{const.} \tag{15c}$$

Wir haben also den Satz: *Geht eine konzentrisch geschichtete Kugel eines vollkommenen Gases aus einem beliebigen Gleichgewichtszustand durch homogene Kontraktion in einen neuen Gleichgewichtszustand über, so ändern sich an jeder Stelle, also auch im Mittelpunkt, Dichte, Druck und Temperatur umgekehrt wie die 3., 4. resp. 1. Potenz des Radius.* In dieser allgemeinsten Form ist der Satz zuerst (1902) von *P. Rudzki*[16]) ausgesprochen worden, für adiabatische Kugeln (1869) von *Homer Lane*

---

15) Weiteres über Polytropen siehe bei *R. Emden*, Gaskugeln, Kap. II.

16) *P. Rudzki*, Note sur la loi de la température dans un corps céleste gazeux, Bull. astr. 19 (1902), p. 134.

(vgl. Fußn. 33), sodann (1878) von *A. Ritter* in seiner zweiten Abhandlung. Unmittelbar folgt: *Der Gehalt an thermischer Energie innerhalb einer Kugelschale ändert sich umgekehrt wie deren Radius.* Aus den 3 angegebenen Beziehungen folgt ferner:

$$(16)\qquad pv^{\frac{4}{3}} = \frac{p}{\varrho^{\frac{4}{3}}} = \text{const.};\quad \frac{T}{\varrho^{\frac{1}{3}}} = \text{const.},\quad \frac{T}{p^{\frac{1}{4}}} = \text{const.}$$

d. h., *in jeder Gaskugel, die sich durch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen hindurch gleichförmig kontrahiert oder expandiert, machen alle Teilchen eine polytrope Zustandsänderung vom Exponenten* $k = \frac{4}{3}$ *also der Klasse* $n = 3$ *durch.* Diese Zustandsänderung wird nach *Ritter*, der sie zuerst aufgedeckt, kosmogonische (kosmogenetische) Zustandsänderung, der Weg kurz eine Kosmogenide genannt. Beachten wir weiter die Definitionsgleichung der polytropen Temperatur, so folgt für Bewegung auf der Kosmogeniden

$$(17)\qquad \Theta_k \mathfrak{R}^{4-3k} = \text{const.};\quad \Theta_n \mathfrak{R}^{\frac{n-3}{n}} = \text{const.}$$

$$(17\text{a})\qquad \frac{d\Theta_n}{\Theta_n} = -\frac{n-3}{n}\,\frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}},$$

und sinngemäß interpretiert der für Strahlungsprobleme wichtige Satz: Bei gleichförmiger Kontraktion steigen an allen Stellen gleichbleibender Dichte die Temperatur und der Druck, je nachdem n größer oder kleiner 3 ist. Bei Strahlungsgleichgewicht wird sich ein Aufbau durch eine Polytrope der Klasse $n = 3$ ergeben; hier fallen also aufbauende Polytrope und alle Kosmogeniden zusammen, kommen also bei Kontraktion stets Stücke derselben Polytropen zur Abbildung. An Stellen des sich verlängernden oder sich verkürzenden Radius, die durch dieselbe Dichte ausgezeichnet sind, finden sich unveränderte Werte von Druck und Temperatur.

Da die Entropie der Polytropen bestimmt ist durch $dS = \frac{dQ}{T} = \gamma \frac{dT}{T} = c_v \frac{k-\varkappa}{k-1}\frac{dT}{T}$, ergibt sich für Bewegung auf der Kosmogeniden

$$(18)\qquad dS = -c_v(4-3\varkappa)\frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$$

gleich für alle Teilchen. Sie enthält den für die Sternentwicklung fundamentalen Satz:

Die durch den 2. Hauptsatz der Wärmelehre vorgeschriebene Zunahme oder Konstanz der Entropie tritt bei gleichförmiger Kontraktion nur ein, falls für das aufbauende Gas das Verhältnis der Wärmekapazität $\varkappa$ *größer oder gleich* $\frac{4}{3}$ *ist.*

Wegen

$$(18\text{a})\qquad dQ = TdS = -c_v T(4-3\varkappa)\frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$$

folgt ferner der Satz: *Bei Bewegung auf der Kosmogeniden beteiligt sich jedes Teilchen an der Wärmebilanz proportional seiner augenblicklichen Temperatur. Bei gleichförmiger Kontraktion und Zunahme der Entropie muß Wärme abgegeben werden.*

9. Energieumsatz bei gleichförmiger Kontraktion. Wird in den in Nr. 7 abgeleiteten Beziehungen $k = \frac{4}{3}$ gesetzt, so ergibt sich bei *gleichförmiger* Kontraktion aus *beliebigem* Gleichgewichtszustand

$$\frac{\Delta U}{\Delta W} = \frac{1}{3(\varkappa - 1)}; \quad \frac{\Delta Q}{\Delta W} = \frac{4 - 3\varkappa}{3(\varkappa - 1)}. \tag{19}$$

Damit sind die in Nr. **6** aus dem Virialsatz abgeleiteten Beziehungen wiedergefunden mit dem Unterschied, daß sie dort nur integral, hier aber auch für jedes einzelne Massenelement Geltung haben. Für adiabatische Kugeln sind sie zuerst von *A. Ritter* in seiner 3. Abhandlung aufgestellt und auf den Kontraktionsprozeß der Sonne, bestehend aus zweiatomigen Gasen, angewendet worden. Schreiben wir die Gleichung für zwei- und dreiatomige Gase an, so ergeben sich

$$\begin{array}{cccc}
 & \varkappa = \frac{5}{3} & \frac{7}{5} & \frac{4}{3} \\[4pt]
\frac{\Delta Q}{\Delta W} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\[4pt]
\frac{\Delta U}{\Delta W} & +\frac{1}{2} & +\frac{5}{6} & 1.
\end{array}$$

Von der geleisteten Kontraktionsarbeit kann also im günstigsten Falle die Hälfte ausgestrahlt werden. Bei einem dreiatomigen Gas muß sie vollständig zur Temperatursteigerung verwendet werden, ohne daß ein Bruchteil zur Ausstrahlung zur Verfügung steht. Bei noch höherer Atomzahl ist Kontraktion nur bei Zustrahlung möglich, andernfalls stürzt die Kugel bei Ausstrahlung zusammen. Daraus ergibt sich wieder (vgl. oben Nr. **6**): Gaskugeln können nur aus ein- und zweiatomigen, an der Grenze dreiatomigen Gasen aufgebaut werden. In der *Helmholtz*schen Theorie der Erhaltung der Sonnenstrahlung (Nr. **1**) ist deshalb die Atomzahl des aufbauenden Gases zu berücksichtigen. Läßt das Spektrum eines kosmischen Gebildes auf höhere zusammengesetzte Moleküle schließen, so kann dieses, falls keine anderen Energiequellen vorhanden sind, nicht im Gleichgewichte sein. Der physikalische Grund dieser Verhältnisse liegt darin, daß von der dem einzelnen Moleküle zuzuführenden Energie ein mit wachsender Atomzahl zunehmender Bruchteil intramolekular verbraucht wird, so daß schließlich ein nicht mehr genügender Teil zur erforderlichen Druck-(Temperatur-)steigerung und eventueller Ausstrahlung übrigbleibt.

10. Homogene Kontraktion und Strahlung. Aus der Beziehung (18a) $\Delta Q = - c_v T(4 - 3\varkappa)\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$ folgt, falls $\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$ die Kontraktion pro Sekunde beträgt, für die von der Teilkugel vom Radius r und der Masse M_r für die in der Sekunde abgegebene Wärmemenge

$$(19\text{a})\quad \Delta Q_r = -(4 - 3\varkappa)\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}\int_0^r c_v T dM = -(4 - 3\varkappa)\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}\cdot U_r$$

und daraus für die sekundlich abgegebenen Wärmemengen

$$(20)\qquad \frac{\Delta Q_r}{\Delta Q_{\mathfrak{R}}} = \frac{U_r}{U_{\mathfrak{R}}},$$

wenn $\mathfrak{R}$ den Gesamtradius, U_r die in der Teilkugel am Radius r aufgespeicherte thermische Energie bedeuten.

Da für Wärmetransport in Gaskugeln lediglich Strahlung in Betracht kommen wird und die dann pro Sekunde und cm² beförderte Wärmemenge $\mathfrak{S} = \frac{2s}{\mathfrak{k}\varrho}\cdot\frac{\partial T^4}{\partial r}$ beträgt (Nr. **47**), wird

$$(\text{b})\qquad \Delta Q_r = \frac{8\pi s}{\mathfrak{k}\varrho} r^2 \frac{dT^4}{dr^2} = \frac{32\cdot\pi\cdot s}{\mathfrak{k}}\frac{T^3}{\varrho}\cdot r^2\frac{dT}{dr}\ \text{cal/cm}^2\text{sec}$$

und somit

$$(21)\qquad \frac{U_r}{U_{\mathfrak{R}}} = \left(\frac{T^3}{\varrho}r^2\frac{dT}{\partial r}\right)\left(\frac{T^3}{\varrho}\cdot r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)^{-1}_{r=\mathfrak{R}}.$$

Für jeden polytropen Aufbau ist (Nr. **19**) $r^2\frac{dT}{dr}$ ein Maß der bis zum Radius r eingeschlossenen Masse M_r und da bei homogener Kontraktion für jedes Teilchen $\frac{T^3}{\varrho}$ konstant bleibt $= \Theta^3_{k=\frac{4}{3}}$, so folgt:

Bei homogener Kontraktion einer Gaskugel bleibt die von jeder Teilkugel vom Radius r als auch die von der Gesamtkugel durch Strahlung abgegebene Wärme konstant.[17])

Bei homogener Kontraktion bleibt also auch $\frac{Ur}{U_{\mathfrak{R}}}$ konstant. Zu beachten ist, daß in Gleichung (21) der für jedes Teilchen konstant bleibende Ausdruck $\frac{T^3}{\varrho}$ längs des Radius sich ändert, bedingt durch den Aufbau nach der Klasse n. Nur für $n = 3$, welcher Aufbau sich bei Strahlungsgleichgewicht ergeben wird, ist auch $\frac{T^3}{\varrho}$ längs des Radius konstant und folgt

$$(20\text{a})\qquad \frac{\Delta Q_r}{\Delta Q_{\mathfrak{R}}} = \frac{U_r}{U_{\mathfrak{R}}} = \frac{M_r}{M_{\mathfrak{R}}}.$$

---

17) *J. H. Jeans,* The evolution and radiation of gaseous stars, London Astr. Soc. Month. Not. 78 (1918), p. 36 sowie Problems, § 193—199.

Die wichtigsten, die Entwicklung polytroper Gaskugeln bei homogener Kontraktion regelnden Gesetze ergeben sich somit unmittelbar aus den Begriffen der Polytropen und der homogenen Kontraktion.

Der Beweis, daß jede Gaskugel, die je nach derselben Polytropenklasse aufgebaut bleibt, gleichförmig kontrahiert oder expandiert, wird in Nr. **19** geliefert.

C. Polytrope Atmosphären.

11. Begriff der polytropen Atmosphären. Die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes in konzentrisch geschichteten Medien

$$\frac{dp}{\varrho\, dr} = -g, \quad g = \frac{G M_r}{r^2}$$

lautet für polytropen Aufbau nach der Klasse n

$$(n+1)\frac{R}{m}\Theta_n \frac{du}{dr} = (n+1)\frac{R}{m}\frac{dT}{dr} = -g. \tag{22}$$

Es ist üblich, von einer die Kugel vom Radius $\mathfrak{R}_0$ umgebenden Atmosphäre zu sprechen, wenn von ihrer inneren Gravitation abgesehen und sie nur durch die Anziehung der innerhalb $\mathfrak{R}_0$ liegenden Masse zusammengehalten betrachtet wird. Dann folgt der Satz: *In jeder polytropen Atmosphäre ist der Temperaturgradient proportional dem Werte g einer konstanten Masse und proportional dem Molekulargewicht.* Für vielerlei Zwecke der Anwendung kann von der Krümmung der Schichten abgesehen werden. Dann folgt: *In einer eben geschichteten polytropen Atmosphäre herrscht konstantes Temperaturgefälle.* Dadurch kann umgekehrt jeder Vorgang, der sich längs der Vertikalen mit konstantem Temperaturgefälle abspielt, als in einer ebenen, polytropen Atmosphäre vor sich gehend behandelt werden, wodurch sofort die zugehörigen Druck- und Dichteänderungen gegeben sind. Beliebiger Temperaturgang kann durch einen Sehnenzug geradliniger Temperaturgefälle geeigneter n ersetzt werden.

12. Stabilität polytroper Atmosphären. Die Stabilität ist bedingt durch den Aufbau und die Art der Störung. Der Aufbau ist stabil, wenn bei der Störung Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet werden muß. Von Wichtigkeit sind in erster Linie die folgenden beiden Spezialfälle.

a) Die Atmosphäre sei aufgebaut nach einer Polytropen n. Bei Verschiebung seien die Gasmassen gezwungen, einer Polytropen n_1 zu folgen. Herrschen im Ausgangsniveau die Werte ϱ_0 und p_0, so gelten in einem höheren Niveau für p und ϱ die Beziehung

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \tag{a}$$

Wird von dem Ausgangsniveau eine Gasmasse bis zu diesem Druck p emporgehoben, so gilt für diese Verschiebung

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n_1}{n_1+1}} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}. \tag{b}$$

Soll Stabilität herrschen, so muß offenbar, damit die verschobenen Teilchen wieder in die Ausgangslage zurückdrängen, $\varrho_1 > \varrho$ sein, also muß sein

$$n > n_1, \quad \frac{dT_1}{dr} > \frac{dT}{dr}, \tag{23}$$

d. h. *der der Verschiebung zukommende Temperaturgradient muß größer sein als der ursprünglich vorhandene.* Erfolgt die Verschiebung adiabatisch, so ist $n_1 = \frac{1}{\varkappa - 1}$ und Stabilität ist vorhanden für

einatomige Gase, wenn $n > 1{,}5$,
zweiatomige Gase, wenn $n > 2{,}5$,
dreiatomige Gase, wenn $n > 3$.

Eine Atmosphäre $n = \frac{1}{\varkappa - 1}$ *befindet sich gegenüber Verschiebung, die adiabatisch vor sich geht, im indifferenten Gleichgewicht, auch konvektives Gleichgewicht genannt.* Den Begriff des konvektiven Gleichgewichtes verdankt man Lord *Kelvin.*[18])

Der Temperaturgradient der Erdatmosphäre bei konvektivem Gleichgewicht, $n = 2{,}5$, beträgt somit $\frac{dT}{dr} = 9{,}77 \cdot 10^{-5}\ {}^0/\mathrm{cm}$.

Da für Atmosphären der Begriff der homogenen Kontraktion wegfällt, können auch mehr als dreiatomige Gase stabile Atmosphären aufbauen.

b) Eine Atmosphäre (oder auch eine Gaskugel) sei durchweg nach derselben Polytropenklasse n, aber in Schichten verschiedener polytroper Temperaturen Θ_n aufgebaut. An der Grenze kann Θ_n Funktion der Höhe (des Radius) sein. Für Aufbau aus inkompressibler Flüssigkeit muß die Schicht geringerer Dichtigkeit stets höher liegen. Für kompressible Flüssigkeiten ist, wie leicht ersichtlich, der Satz so zu fassen, daß von 2 Schichten, die nach ihrer Polytropen auf denselben Druck gebracht sind, die leichtere Schicht höher liegt, oder mit Rücksicht auf die Definition der polytropen Temperatur: *Bei stabilem Gleichgewicht muß die polytrope Temperatur nach oben zunehmen.* Dieser Satz erweist sich von fundamentaler Wichtigkeit für die Dynamik

18) *W. Thomson* (Lord *Kelvin*), On the convective equilibrium of temperature in the atmosphere, Manchester Phil. Soc. Mem. Serie 3, Vol. 2 (1865), auch Papers, Tome III, App. E., p. 255.

der Erdatmosphäre, doch ist er hier in Anbetracht der Erdrotation dahin zu modifizieren, daß die Richtung „nach oben“ ersetzt wird durch Richtung „nach dem Himmelspol“.

13. Die fundamentalen Gleichungen polytroper Atmosphären.[19]) Für die wichtigsten Anwendungszwecke genügt es, g als konstant anzusetzen, dann ergibt die Gleichgewichtsbedingung den Temperaturgradienten

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{gm}{(n+1)R} \tag{24}$$

speziell $= -\frac{3{,}42 \cdot 10^{-4}}{n+1}$ °/cm für die Erdatmosphäre; und für konvektives Gleichgewicht $\left(n = \frac{1}{\varkappa - 1} = 2{,}5\right) = -9{,}77 \cdot 10^{-5}$ °/cm, und bei konstanter Dichte $(n = 0) = -3{,}42 \cdot 10^{-4}$ °/cm.

Integriert wird

$$T = T_0 - \frac{gmh}{(n+1)R}.$$

Als bequemes Rechensymbol erweist sich die *Höhe der polytropen Atmosphäre* $\mathfrak{H}_n$, als die Höhe, in welcher die Atmosphäre endigt, indem T und p gleichzeitig auf Null herabgehen. Es ergibt sich unmittelbar

$$\mathfrak{H}_n = \frac{(n+1)RT_0}{mg} = (n+1)\,\mathfrak{H}\,(1 + \alpha t_0), \tag{25}$$

wenn mit $\mathfrak{H}$ die Höhe der *homogenen* Atmosphäre $n = 0$, $\varrho = \text{const.}$ für die Ausgangstemperatur $t = 0^0$ eingeführt wird. Für die Erdatmosphäre beträgt die Höhe der homogenen Atmosphäre $7992(1 + \alpha t_0)$ m, die Höhe bei konvektivem Gleichgewicht ist $(2{,}5 + 1)$ mal größer, also $27970(1 + \alpha t_0)$ m. Nach Einführung der Größe $\mathfrak{H}$ ergeben sich unmittelbar die *Fundamentalgleichungen der polytropen Atmosphäre*

$$\left\{\begin{aligned} T &= T_0\left(1 - \frac{h}{\mathfrak{H}_n(1+\alpha t_0)}\right) \\ \varrho &= \varrho_0\left(1 - \frac{h}{\mathfrak{H}_n(1+\alpha t_0)}\right)^n \\ p &= p_0\left(1 - \frac{h}{\mathfrak{H}_n(1+\alpha t_0)}\right)^{n+1} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

und als Grenzfall für Isothermie, d. i. $n = \infty$, folgt durch Grenzübergang

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{\mathfrak{H}(1+\alpha t_0)}}, \quad p = p_0 e^{-\frac{h}{\mathfrak{H}(1+\alpha t_0)}}, \tag{26a}$$

19) *R. Emden,* Beiträge zur Thermodynamik der Atmosphäre, 1. Mitt. Meteor. Ztschr. 33 (1916), p. 251.

welche Beziehung auch aus der bei Isothermie geltenden Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dp}{\varrho\, dh} = \frac{RT}{mp}\frac{dp}{dh} = -g$$

gewonnen werden kann. Die Grenze dieser Atmosphäre liegt selbstverständlich im Unendlichen. Die Werte mit dem Index 0 beziehen sich auf das Ausgangsniveau $h = 0$. Die polytropen Beziehungen gestatten Druck und Dichte explizit in jeder Höhe anzugeben, falls die Ausgangswerte und der Temperaturgradient (Polytropenklasse) vorliegen.

Die Umkehr von (26) liefert die *polytrope Höhenformel*

$$(27)\qquad h = \mathfrak{H}_n(1 + \alpha t_0)\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right],$$

während die bisher allein gebräuchliche (isotherme) Höhenformel

$$(27\text{a})\qquad h = \mathfrak{H}(1 + \alpha \bar{t})\lg\frac{p}{p_0}$$

sich durch Umkehr von (26a) ergibt. Sie ist zuerst von *Halley*[20]) angegeben. Verfeinerungen derselben, namentlich mit Rücksicht auf die Variabilität von g, Wasserdampfgehalt, Krümmung der Schichten werden praktisch illusorisch, da es meistens nicht möglich ist, die Mitteltemperatur $\bar{t}$ genau genug zu ermitteln. Selbst wenn bei streng linearem Temperaturgefälle diese Mitteltemperatur als arithmetisches Mittel angesetzt wird, ergeben sich Werte von ϱ und p, die von den richtigen Werten, wie sie durch die polytrope Beziehung geliefert werden, abweichen. Die Anwendbarkeit der polytropen Höhenformel hat *H. Cramer*[21]) behandelt.

Nimmt die absolute Temperatur im gleichen Verhältnis zu wie der Wert von g, so bleiben die Höhe der homogenen Atmosphäre und damit die Beziehungen (26) unverändert. Auf der Sonne ist $g = 27{,}2$ größer als auf der Erde. In einer Sonnenatmosphäre, die über einer Schicht von $27{,}2 \cdot 273 = 7425^0$ liegt, gelten quantitativ dieselben Beziehungen, wie in einer Erdatmosphäre von $t = 0^0$ Bodentemperatur.

Durch Integration über $\varrho\, dh$ findet sich die Masse der Atmosphäre *unabhängig von n* zu

$$(28)\qquad \mathfrak{M} = \varrho_0(1 + \alpha t_0)\mathfrak{H}\ \text{g/cm}^2$$

20) *E. Halley,* London Roy. Phil. Soc. Trans. (1686).

21) *H. Cramer,* Zur Anwendung der polytropen Höhenformel, Meteor. Ztschr. 34 (1917), p. 87.

und die Höhe des Schwerpunktes zu

$$H_s = \frac{n+1}{n+2}\mathfrak{H}(1+\alpha t_0)\ \text{cm}. \tag{28a}$$

Für eine *beliebig aufgebaute* Atmosphäre, die in einer Höhe H endigt, ergeben sich die thermische Energie

$$U = \int_0^H c_v T\,dm = \frac{1}{\varkappa - 1}\int_0^H p\,dh\ \text{Erg/cm}^2 \tag{29}$$

und die aufgespeicherte potentielle Energie

$$\Omega = \int_0^H gh\,dm = -\int_0^H h\,dp = \int_0^H p\,dh\ \text{Erg/cm}^2, \tag{30}$$

so daß hier als Seitenstück zu der Gleichung (3') die Beziehung gilt

$$U = \frac{1}{\varkappa - 1}\Omega. \tag{31}$$

Für polytropen Aufbau lassen sich die Integrale sofort angeben

$$U = \frac{1}{\varkappa - 1}\cdot\frac{n+1}{n+2} g\mathfrak{M}\mathfrak{H}(1+\alpha t_0) = \frac{1}{\varkappa - 1} g\mathfrak{M} H_s\ \text{Erg/cm}^2 \tag{29a}$$

$$\Omega = \frac{n+1}{n+2} g\mathfrak{M}\mathfrak{H}(1+\alpha t_0) = g\mathfrak{M} H_s\ \text{Erg/cm}^2 \tag{30a}$$

und für die gesamte vorhandene Energie folgt

$$E = U + \Omega = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} g\mathfrak{M} H_s\ \text{Erg/cm}^2. \tag{31a}$$ [22])

14. Periodisch wiederkehrende Irrtümer. a) Der Temperaturgradient einer Atmospäre im konvektiven Gleichgewicht ergibt sich einfach wie folgt: In der Beziehung

$$dQ = c_v dT + Ap\,dv = c_p dT - A\frac{1}{\varrho}dp \tag{a}$$

wird adiabatisch $dQ = 0$ gesetzt; da die Gleichgewichtsbedingung stets $\varrho^{-1}dp = -g\,dh$ lautet, folgt

$$c_p T + Agh = \text{const.} = c_p T_0 + Agh_v. \tag{b}$$

Dies gibt, da $A = (c_p - c_v)\frac{m}{R}$, den oben angegebenen Temperaturgradienten. Es ist aus dieser Ableitung unmittelbar klar, daß die Abkühlung das Äquivalent der Expansionsarbeit der aufsteigenden Gasmassen darstellt. Doch gelangten *Guldberg* und *Mohn*[23]) irrtüm-

22) Diese wichtigen noch wenig beachteten Beziehungen sind zuerst von *A. Ritter* in seiner 4. und 5. Abhandlung aufgestellt, auf allgemeinere und übersichtlichere Weise von *R. Emden* abgeleitet worden.

23) *Guldberg* und *Mohn*, Über die Temperaturänderung in vertikaler Richtung der Atmosphäre, Meteor. Ztschr. 13 (1878), p. 113.

lich zu einer anderen Interpretation des Vorganges. Nach ihnen wird die dem Glied $c_p T$ entsprechende Abkühlung nicht zur Expansionsarbeit, sondern zur Vermehrung der potentiellen Energie Agh, also zur „Hebearbeit" verwendet. Dieser Irrtum hat leider Wurzel gefaßt und die Gleichung (b) wird infolgedessen unmittelbar gemäß dieser Überlegungen angeschrieben (obwohl unbestimmt bleibt, welches c anzusetzen ist), statt aus (a) abgeleitet. Auch die Arbeiten *Ritter*s sind von diesem Irrtum nicht frei. Es wird übersehen, daß im luftleeren Raum ein durch eine gewichtslose Hülle abgegrenztes Quantum *von selbst* nicht aufsteigt, in einer Atmosphäre aber nur dann, wenn das verdrängte Luftquantum schwerer ist, so daß gegen die Schwerkraft überhaupt keine Arbeit geleistet, sondern von dieser gewonnen wird. In einer vertikal durchgerührten Quecksilbermasse müßte sich wegen der Kleinheit der Wärmekapazität ein gewaltiger Temperaturgradient ausbilden, während sie infolge der Inkompressibilität isotherm bleibt. In eindringlicher Weise hat *Bezold*[24]) diesen Irrtum dargelegt.

b) Da die absteigenden Gasmoleküle kinetische Energie gewinnen, die aufsteigenden einbüßen, bildete sich die Anschauung aus, als müßte sich in einer anfangs isothermen Atmosphäre durch Wirkung des Schwerefeldes ein Temperaturgradient ausbilden und sich schließlich konvektives Gleichgewicht einstellen. Trotzdem bereits *J. C. Maxwell*[25]) nachwies, daß diese Auffassung in Widerspruch mit dem 2. Hauptsatz steht, hat sich über dieses Problem eine lebhafte Diskussion entwickelt. Eine endgültige Lösung wurde durch *L. Boltzmann*[26]) gegeben, der aus dem H-Theorem nachwies, daß äußere Kräfte das *Maxwell*sche Verteilungsgesetz und damit die Temperatur nicht beeinflussen. Unter ihrem Einfluß ändern sich in jedem Volumelemente wohl Druck und Dichte, aber so, daß der Quotient, also die Temperatur, konstant bleibt. Auch neuerdings ist die irrtümliche Auffassung wieder aufgetaucht.[27])

In einer durch Gravitationskräfte zusammengehaltenen Gasmasse können diese allein niemals Temperaturdifferenzen schaffen oder vorhandene Temperaturdifferenzen aufrecht erhalten. Zur Erzeugung und Unterhaltung von Temperaturdifferenzen ist stets ein besonderer Mecha-

---

24) *W. Bezold,* Über die Temperaturveränderung auf- und absteigender Ströme, Meteor. Ztschr. 33 (1898), p. 441.

25) *J. C. Maxwell,* Theory of heat, London 1896, p. 320.

26) *L. Boltzmann,* Vorlesungen über kinetische Gastheorie I., Leipzig 1896, Absch. 2, § 19, sowie *L. Boltzmann* und *T. Nabl,* Kinetische Theorie der Materie, Encykl. VI, Nr. 8 und 12.

27) Vgl. die Referate von *W. Conrad* in Phys. Ber. 1924, p. 1240.

nismus notwendig, seien es Quell- oder Sinkpunkte für Wärmemengen, Strahlungsvorgänge oder Konvektionsströmungen. Erfolgen letztere andauernd adiabatisch, so ist konvektives Gleichgewicht die Folge, polytropes Gleichgewicht, falls sie mit Wärmezufuhr ΔQ proportional ΔT begleitet sind.

c) Da die *isotherme* Atmosphäre sich bis unendlich erstreckt, suchte man ihren Aufbau genauer darzustellen, indem man nicht, wie oben, g konstant setzt. Die einfachste Annahme scheint zu sein, die Masse der Atmosphäre gegenüber der Masse des Kerns zu vernachlässigen und g quadratisch mit der Entfernung abnehmen zu lassen. Dann folgt die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{(a)} \qquad \frac{dp}{\varrho} = \frac{R\,T}{m}\frac{d\varrho}{\varrho} = -\,g\,dr = -\,\frac{g_0 \mathfrak{R}_0^2}{r^2}\,dr,$$

wobei sich der Index 0 auf die Kernoberfläche bezieht. Die Integration liefert

$$\text{(b)} \qquad \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{m g_0 \mathfrak{R}_0}{R T}\frac{r-\mathfrak{R}_0}{r}} = \varrho_0 e^{-\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{r-\mathfrak{R}_0}{r}}.$$

Geht man zu immer größeren Entfernungen, so ergibt sich

$$\text{(c)} \qquad \lim \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{H}}}$$

und speziell für die Erdatmosphäre $\lim \varrho = \varrho_0 10^{-346}$.

Dieselbe Beziehung folgt selbstverständlich für den Druck.

Die Masse der Atmosphäre wird also unendlich, und Druck und Dichte nähern sich mit abnehmender Entfernung nicht dem Werte Null, sondern endlichen Grenzwerten. Dieses Resultat wurde zuerst von *E. Zöllner*[28]) gefunden und seither wiederholt neu abgeleitet. An dem Umstand, daß danach im Weltenraum Druck und Dichte nicht gleich Null werden, sondern unter der Einwirkung der Atmosphären der Himmelskörper von endlicher Größe bleiben, wurden die kühnsten Hypothesen geknüpft. Daß diese ganze Betrachtungsweise unrichtig ist, hat zuerst *M. Thiesen*[29]) gezeigt. Denn geht man auf diese Weise immer weiter nach außen, so nimmt, da ϱ einem endlichen Werte zustrebt, die innen liegende Masse, die zum Werte von g beiträgt, im Verhältnis zur Kernmasse immer mehr zu, so daß nicht mit einem Werte von g gerechnet werden darf, der bloß quadratisch mit der Entfernung abnimmt. Die Gleichung gilt daher nur solange, als von der inneren Gravitation der Atmosphäre abgesehen werden darf.

28) *E. Zöllner,* Über die Stabilität kosmischer Massen, Leipzig Ber. 1871, p. 173.

29) *M. Thiesen,* Über die Verbreitung der Atmosphäre, Berlin 1878.

d) Das *Dalton*sche Gesetz sagt kurz gefaßt aus, daß in einem Gemisch von Gasen kein Gas sich um die Anwesenheit des anderen kümmert; dem zuzusetzen ist „bei Isothermie". Eine Wasserstoff- und eine Stickstoffatmosphäre, beide von gleicher Temperatur isotherm können ineinander geschoben werden. Liegen aber polytrope Atmosphären, etwa eine Wasserstoff- und eine Stickstoffatmosphäre in konvektivem Gleichgewicht vor, die beide mit 0^0 Temperatur endigen, die erste aber in rund 14mal größerer Höhe, so läßt sich das Resultat des Ineinanderschiebens nicht ohne weiteres überblicken. Eine sich selbst überlassene Gasmasse stellt sich eben auf Isothermie ein; jede Abweichung muß durch äußere Einwirkung erzwungen werden. (Vgl. oben b.)

15. Dispersionstemperatur. Bildet man unter der Voraussetzung, daß die Masse der Atmosphäre klein ist gegenüber der Masse des Kerns, die Gleichgewichtsbedingung für ein g, das quadratisch mit der Entfernung abnimmt, so ist anzusetzen

$$\text{(a)} \qquad dT = -\frac{m g\, dr}{(n+1)R} = -\frac{m}{(n+1)R}\frac{g_0 \mathfrak{R}_0^2}{r^2}\, dr,$$

wobei sich der Index 0 auf die Kernoberfläche bezieht, und daraus ergibt sich

$$\text{(b)} \qquad T = T_0\left[1 - \frac{\mathfrak{R}_0^2}{\mathfrak{H}_n}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_0} - \frac{1}{r}\right)\right],$$

wo $\mathfrak{H}_n = \frac{m g_0}{(n+1)R T_0}$ die Höhe der polytropen Atmosphäre bedeutet. Die Grenze der Atmosphäre $T = 0$ ist somit gegeben durch

$$(32) \qquad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_0}{1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{\mathfrak{R}_0}}; \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0 = \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{\mathfrak{R}_0}}\mathfrak{H}_n,$$

d. h.: Ist die Masse eines Himmelskörpers groß gegen die Masse seiner Atmosphäre und ist seine Oberflächentemperatur so hoch, daß die Höhe $\mathfrak{H}_n$ einer polytropen Atmosphäre von der Klasse n bei konstantem Werte von g_0 berechnet gleich seinem Radius wird, so erstreckt sich letztere in Wirklichkeit bis in die entfernteste Region. Ein Überschreiten dieser Oberflächentemperatur würde eine Zerstreuung dieser Atmosphäre zur Folge haben. *Für jeden Weltkörper gibt es eine Oberflächentemperatur, bei deren Überschreitung seine Anziehungskraft nicht mehr hinreicht, eine Atmosphäre von nicht zu großer Masse von bestimmter Gasart und Polytropenklasse um sich zu halten.* Diesen Satz hat zuerst *Ritter* in seiner 7. Abhandlung für Atmosphären in konvektivem Gleichgewicht aufgestellt. Für die homogene Atmosphäre

$\mathfrak{H} = \frac{R T_0}{m g_0}$ und Wasserstoff ergeben sich z. B. folgende Werte für

$$\begin{array}{lll} \text{Erde} & T_0 = 1{,}5 & \cdot 10^4 \\ \text{Jupiter} & = 4{,}08 & \cdot 10^5 \\ \text{Sonne} & = 4{,}47 & \cdot 10^7 \\ \text{Mond} & = 693^0. & \end{array}$$

Für Polytropen der Klasse n sind diese Zahlen durch $n + 1$ zu dividieren, für andere Gase im Verhältnis zu dem Molekulargewicht zu vergrößern. Diese Grenztemperaturen sind für eine Wasserstoffatmosphäre im konvektiven Gleichgewicht für den Mond — 75° C, für den Mars 590° C und für die Erde 4560° C.

Diese Zahlen gewinnen an Bedeutung bei Erörterung der Temperatur, die ein abkühlender Weltkörper erreicht haben muß, ehe eine Scheidung in Kern und Atmosphäre möglich ist.

16. Einfluß der Kondensierbarkeit der Gase. Die fundamentalen Gleichungen der polytropen Atmosphären (Nr. **13**) sind abgeleitet unter Voraussetzung vollkommener Gase für das ganze Temperaturintervall von T bis 0. Praktische Gültigkeit haben sie nur, solange diese Voraussetzung noch erfüllt ist, wobei die Höhen der polytropen Atmosphäre als bloße Rechensymbole aufzufassen sind. Ob den so berechneten Höhen als wirkliche Grenzhöhen der Atmosphäre tatsächliche Bedeutung zukommt, hängt davon ab, ob bei den zu erwartenden tiefen Temperaturen sich die Kondensierbarkeit der Gase geltend macht. (Strahlungseinflüsse, welche das Zustandekommen dieser tiefen Temperaturen möglicherweise ändern können, sollen bei dieser Betrachtung selbstverständlich ausgeschaltet bleiben.) Der Aufbau einer Erdatmosphäre aus Stickstoff im konvektiven Gleichgewicht unter Berücksichtigung seiner Kondensierbarkeit ist von *Goldammer*[30]) untersucht worden. Die Genauigkeit der Rechnung dürfte die in Betracht kommende Größenordnung richtig ergeben. Als Bodenwerte sind angenommen $p_0 = 760$ mm, $T_0 = 290 = 17^\circ$ C. Als wichtigstes Resultat ergibt sich, daß die Adiabate des vollkommenen Gases die Dampfspannungskurve des flüssigen Stickstoffes nicht schneidet. Die Phase des vollkommenen Gases geht also unmittelbar in die Phase des festen Stickstoffes über, bei einer Temperatur $T = 50{,}4$ und einem Drucke von $p = 1{,}9$ mm. Die Atmosphäre endigt in einer Höhe von 62 km. Die Höhe einer entsprechenden Sauerstoffatmosphäre schätzt *Goldammer* auf 70—75 km. Dieser theoretische Nachweis

30) *D. A. Goldammer,* Über die Natur der flüssigen Luft, Festschr. für L. Boltzmann, Leipzig 1904, p. 410

der Möglichkeit festen Stickstoffs und Sauerstoffs in den höchsten Schichten der Atmosphäre erlangt Bedeutung für neuere Ansichten über die Entstehung des Nordlichtes, immer vorausgesetzt, daß sich trotz Einfluß der Sonnenstrahlung diese tiefen Temperaturen einstellen.

Überlegungen über die Höhe einer Wasserdampfatmosphäre finden sich bei *A. Ritter* in seiner 7. Abhandlung.

Von großer Bedeutung für die Meteorologie ist das Verhalten aufsteigender feuchter Luft. Diese Untersuchungen dürften abgeschlossen sein durch Arbeiten von *H. Hertz*[31]) und *O. Neuhoff*[32]) mit reichen Literaturangaben.

D. Gaskugeln.

17. Aufstellung der Differentialgleichung. Der Wert von g im Abstand von r ist bestimmt durch die tiefer liegenden Massen. Infolgedessen schreibt sich die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes im Innern einer Gaskugel mit Hilfe der Gleichung (11)

$$(33)\qquad \frac{dp}{\varrho\, dr} = (n+1)\frac{R}{m}\,\Theta_n \frac{du}{dr} = -g_r = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r r^2 \varrho\, dr; \quad \varrho = u^n,$$

und daraus folgt durch nochmalige Differentiation als *Differentialgleichung der polytropen Gaskugeln*

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0; \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G m}{(n+1) R\,\Theta_n}\,\mathrm{cm}^{-2}; \quad u^n = \varrho.$$

Diese Gleichung ist zuerst von *A. Ritter* veröffentlicht in seiner 3. Abhandlung (1878), doch ist die mathematische Fassung des Problems bereits gegeben durch *Homer Lane*[33]) durch zwei Gleichungen, welche die Gleichung (I) ersetzen (1869). Auch hat bereits *Laplace*[34]) sich mit Problemen ähnlicher Art beschäftigt, und scheint diese Differentialgleichung gekannt zu haben (Nr. 18). *Lord Kelvin*[35]) ersetzt den

31) *H. Hertz,* Graphische Methoden zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft, Meteor. Ztschr. I (1884), p. 421 = Gesamm. Werke I, Leipzig 1895.

32) *O. Neuhoff*, Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung, Berlin, Meteor. Inst. Abh. I (1909), Nr. 6.

33) *Homer Lane,* On the theoretical temperature of the sun, Amer. Journ. of sc. 4 (1887), p. 57.

34) *Thomson and Tait*, Natural Philosophy II, Cambridge 1908, § 824.

35) *Lord Kelvin*, The Problem of a spherical gaseous nebula, ergänzt durch G. Green, Phil. mag. 15 (1908), p. 687, sowie 16 (1908), p. 1.

Radius durch den reziproken Wert $x = \frac{1}{r}$, wodurch sich die scheinbar einfachere Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\alpha^2 u^n}{x^4} = 0$$

ergibt. Ist die Gasart (m) gegeben, so kann die Polytropenklasse n und die polytrope Temperatur Θ_n beliebig gewählt werden, und da die Differentialgleichung zwei Integrationskonstante zur Verfügung stellt, scheinen ∞^4 Kugeln möglich. Da aber im Mittelpunkt g und somit $\frac{du}{dr} = 0$ sein müssen, reduziert sich die Anzahl auf ∞^3. Für den Mittelpunkt ergibt sich

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)_0 = -\frac{1}{3}\alpha^2 u_0^n$$

gleich dem reziproken Werte des Krümmungsradius.

Soll die Kugel im Endlichen endigen, so muß selbstverständlich die Temperatur für endliches r auf 0 abnehmen.

Die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel ergibt sich, wenn man $r\sqrt{n}$ an Stelle von r und $\varrho^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\varrho}$ ansetzt und den Grenzübergang für $n = \infty$ ausführt, oder bequemer durch besondere Behandlung. Bei Isothermie lautet nämlich die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes

$$(33') \qquad \frac{dp}{\varrho\, dr} = \frac{RT}{m}\frac{d\varrho}{\varrho\, dr} = -g = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_g^r r^2 \varrho\, dr,$$

und hieraus folgt die gesuchte *Differentialgleichuug der isothermen Gaskugel*

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} + \beta^2 \cdot e^v = 0, \quad \beta^2 = \frac{4\pi G m}{RT}\,\mathrm{cm}^{-2}, \quad v = \log\varrho.$$

Die Anzahl der möglichen Kugeln bei gegebener Gasart ist ∞^2. Der Radius ist selbstverständlich unendlich, da eine Gasmasse im Endlichen nicht mit endlicher Temperatur endigen kann.

Für den Mittelpunkt muß wiederum $\frac{dv}{dr} = 0$ sein und damit ergibt sich $\left(\frac{d^2v}{dr^2}\right)_0 = -\frac{1}{3}\beta^2 e^{v_0}$ als reziproken Wert des Krümmungsradius. Die weitere Untersuchung muß für $n < \infty$ und $n = \infty$ getrennt geführt werden.

18. Lösungen der Differentialgleichung, die sich in geschlossener Form angeben lassen.

1. $n = 0$, Dichte ϱ konstant. Der Druck ist proportional der Temperatur. Dann ergibt sich unmittelbar die Lösung

$$u = C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6}; \quad (C_2 = 0). \tag{34}$$

Druck und Temperatur nehmen mit wachsendem Radius ab und bestimmen durch Null den Grenzradius, bei gegebener Gasart bestimmt durch den Wert von Druck oder Temperatur im Mittelpunkt. Die Dichte springt beim Durchschreiten der Oberfläche von ihrem konstanten Wert auf Null. Der Temperaturgradient $\frac{dT}{dr} = -\frac{4}{3}\frac{\pi G m}{R} r$ erzwingt konstante Dichte, ein Seitenstück zu dem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} = -\frac{g_0 m}{R}$, der konstante Dichte einer Atmosphäre erzeugt.

2. $n = 1; \quad p = \varrho^2 \frac{R}{m} \Theta_2, \quad T = u\Theta_2 = \varrho\Theta_2.$

Die Lösung ist

$$u = \varrho = C_1 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} + C_2 \frac{\cos \alpha r}{\alpha r}, \quad (C_2 = 0). \tag{35}$$

Die Annahme von Proportionalität des Druckes mit dem Quadrat der Dichte wird auch als *Laplace*sche Hypothese über den Aufbau des Erdinnern bezeichnet. Die Folgerungen sind ausführlich bei *Thomson* und *Tait*[34]) entwickelt. Zu seiner Annahme wurde *Laplace* nicht durch physikalische Betrachtungen, sondern durch den Umstand geführt, daß sich die Differentialgleichung (I) in geschlossener Form integrieren läßt. Aus diesem rein formalen Grund ist auch der Aufbau von Gasmassen und Staubwolken nach diesem Gesetz mehrfach untersucht worden.[36])

Der Grenzradius $\mathfrak{R} = \frac{\pi}{\alpha}$ ist unabhängig von den Verhältnissen im Mittelpunkt, einzig durch Θ_2, das ist die Temperatur für die Dichte 1 bestimmt.

3. $n = 5; \quad p = \varrho^{\frac{6}{5}} \frac{R}{m} \Theta_5, \quad T = \varrho^{\frac{1}{5}} \Theta_5.$

Für eine vollständige Gaskugel ohne Singularität im Mittelpunkt, also unter der Beschränkung $\frac{du}{dr} = 0$ für $r = 0$, ist das Integral

$$u = u_0 \sqrt{\frac{3u_0}{3u_0 + \alpha^2 u_0^5 r^2}} \tag{36}$$

36) Am eingehendsten von *J. T. See*, Astr. Nachr. 167 (1905), p. 113.

wohl zuerst von *A. Schuster*[37]) angegeben. Der Radius der Kugel ist unendlich. Die Gaskugeln werden sich weiterhin von endlichem oder unendlichem Radius ergeben, je nachdem $n < 5$ oder $n \gtreqless 5$. Die Masse dieser Kugel ergibt sich zu

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi u_0^6 \sqrt{3u_0}}{\sqrt{(u_0^5 \alpha_2^2)^3}} \, \mathrm{g}, \tag{36a}$$

also endlich. Wächst n von seinem Minimalwerte 0 an, so werden für $n = 5$ die Radien vollständiger Gaskugeln (ohne Singularität im Mittelpunkte) unendlich, während ihre Masse erst für $n > 5$ unendlich wird. Die Gaskugel $n = 5$ ist ausgezeichnet dadurch, daß sie mit endlicher Masse sich ins Unendliche erstreckt.

Verzichtet man auf die Mittelpunktsbedingung $\frac{du}{dr} = 0$, so wird man für $n = 5$ (siehe unter Nr. **39**) auf elliptische Funktionen geführt. Dieser Fall wird bei Behandlung der kugelförmigen Sternhaufen Bedeutung erlangen.

In seiner 8. Abhandlung gibt *Ritter* an, daß die Gaskugel $n = 5$ nur aus einer unendlich dichten, punktförmigen Masse besteht. Der Irrtum ist dadurch entstanden, daß *Ritter* als unabhängige Variable nicht den Radius r, sondern das Verhältnis $\frac{r}{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R}$ der Grenzradius, der hier unendlich wird, benutzt. Seine weitere Folgerung „wenn die Größe k zwischen den Grenzwerten $\frac{6}{5}$ und 1, $(n > 5)$ liegt, gibt es weder einen adiabatischen noch einen indifferenten Gleichgewichtszustand", ist in seiner zweiten Hälfte nur richtig, wenn k als Verhältnis der Wärmekapität $\varkappa$ angesehen wird. Als Polytropen aufgefaßt, ist jeder Wert $\frac{6}{5} \lesseqgtr k \lesseqgtr 1$ zulässig zu einem stabilen Gleichgewichtszustand, falls nur $\varkappa > \frac{4}{3}$.

4. Die Differentialgleichung (I) besitzt ferner die singuläre Lösung

$$u = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1^2)} \frac{1}{\alpha^2 r^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \tag{37}$$

die namentlich für Gaskugeln mit ∞ Radius, $n \gtreqless 5$, Bedeutung erlangen wird. Aus ihr geht bereits eine ausgezeichnete Eigenschaft der Klasse $n = 3$ hervor.

Entsprechend besitzt die Differentialgleichung (II) die wichtige singuläre Lösung

$$\varrho = e^v = \frac{2}{\beta^2 r^2}. \tag{37a}$$

---

37) *A. Schuster*, On the internal constitution of the sun., Brit. Ass. Rep. 1883, p. 427.

19. Über die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel. Da die Gleichung (I) sich nur in den wenigen angegebenen Fällen durch bekannte Funktionen integrieren läßt, ist man größtenteils, so auch in dem Falle $n = 3$, der sich von hervorragender Bedeutung erweisen wird, zur Auswertung durch mechanische Quadratur gezwungen. Um den nötigen Überblick zu gewinnen, hat man das rein mathematische Problem vor sich, Einblick in die Lösungssysteme dieser nichtlinearen Differentialgleichung zu erhalten. Die folgenden Andeutungen dieser subtilen Untersuchungen müssen hier genügen; eingehende Behandlung ist gegeben bei *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. IV, IX, X, XI, XIII und in gedrängter Darstellungsweise in der Besprechung dieses Buches durch *K. Schwarzschild* in der Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft 43 (1908), p. 26.

1. Setzt man $u = U u_1$, U der Wert von u für $r = 0$ und $r = \frac{1}{\alpha U^{\frac{n-1}{2}}} \mathfrak{r}_1$, so ergibt sich an Stelle von (I) die von α befreite Gleichung

$$\frac{d^2 u_1}{d\mathfrak{r}_1^2} + \frac{2}{\mathfrak{r}_1}\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1} + u_1{}^n = 0, \tag{38}$$

die nur für $u_1 = 1$ für $\mathfrak{r}_1 = 0$ zu behandeln ist. Aus deren Lösungskurve $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ folgen die gesuchten Lösungskurven in der Form

$$u = U \cdot f(\alpha U^{\frac{n-1}{2}} \cdot r). \tag{39}$$

Im Abstand $r = \frac{1}{\alpha U^{\frac{1}{n-1}}} \mathfrak{r}_1$ finden sich die Werte

$$\varrho = U^n u_1{}^n, \quad T = U u_1 \Theta_n, \quad p = U^{n+1} u_1{}^{n+1} \frac{R}{m} \Theta_n, \tag{40}$$

und mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung ergeben sich leicht

(41) a)
$$g_r = -\frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}$$

b)
$$M_r = -\frac{4\pi}{\alpha^3} U^{\frac{3-n}{2}} \mathfrak{r}_1{}^2 \frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}$$

c)
$$\bar{\varrho}_r = -3 U^n \frac{1}{\mathfrak{r}_1}\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1},$$

$\bar{\varrho}_r$ die mittlere Dichte bis zum Abstande r.

Aus der letzten Beziehung folgt weiter

d)
$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_0} = -\frac{3}{\mathfrak{r}_1}\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1},$$

also *unabhängig von den Verhältnissen im Mittelpunkte* nur bedingt durch die Polytropenklasse Daraus folgt unmittelbar der schon wiederholt benutzte Satz: *Die Kontraktion einer Gaskugel, die nach derselben Polytropenklasse aufgebaut bleibt, erfolgt gleichförmig.*

2. Nach einem bekannten Satz von *Sophus Lie* kann die Ordnung der Gleichung (38) erniedrigt werden. Setzt man

$$\mathfrak{r}_1 = e^{-\int \frac{dz}{y}} = e^{-\vartheta}; \qquad u_1 \cdot \mathfrak{r}_1^{\frac{2}{n-1}} = z,$$

so folgt die Gleichung 1. Ordnung

$$y\frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1}y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}z + z^n = 0, \tag{42}$$

für $n = 0$ ist sie leicht integrierbar. Die Spezialfälle $n = 3$ und $n = 5$ treten deutlich hervor.

Der vor allem wichtige Fall $n = 3$ (Nr. 59) liefert die einfache Gleichung

$$y\frac{dy}{dz} + y + z^3 = 0,$$

die direkter Lösung sich bis jetzt unzugänglich erwiesen hat.

[Setzt man $n = 3$ in der *Thomson*schen Form der Gleichung (I), so folgt die homogene Gleichung

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha^2\left(\frac{u}{x}\right)^3 = 0,$$

die auf die Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\alpha^2 t^3}{p-t}$$

reduziert werden kann, aber weiteren direkten Lösungsversuchen ebenfalls unzugänglich scheint.]

3. Der Fall $n = 5$ läßt sich sofort integrieren und liefert

$$y^2 - \tfrac{1}{4}z^2 + \tfrac{1}{3}z^6 = \text{const.} = -\varepsilon.$$

Setzt man $\varepsilon = 0$, so wird man auf die oben angegebene Lösung mit $\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1} = 0$ im Mittelpunkt geführt. Mit Zulassung der Singularität im Mittelpunkt ist die Lösung von *H. v. Zeipel*[38]) gegeben. Durch die Substitution

$$\text{a)} \qquad z^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{12} - p}$$

ergibt sich für p die Beziehung

$$\text{b)} \qquad \left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)^2 = 4p^3 - ap + b$$

38) *H. v. Zeipel,* Recherches sur la constitution des amas globulaires, Stockholm Ak. Handl. 51 (1913), Nr. 5.

der elliptischen Funktionen und weiterhin die Lösung

$$(43) \qquad u_1^5 = \left[\frac{\mathfrak{r}_1}{s}\left\{\frac{1}{12} - p\right\}\right]^{-\frac{5}{2}},$$

die bei Behandlung der kugelförmigen Sternhaufen (Nr. **39**) von Wichtigkeit sein wird.

4. In allen anderen Fällen ist man auf die qualitative Diskussion der Lösungskurven $y = f(z)$ angewiesen. Indem man die Kurven gleicher Fortschreitungsrichtungen $\frac{dy}{dz} = \text{const.}$ entwirft, lassen sich von irgendeinem Punkt der y, z-Ebene ausgehend die Lösungskurven zeichnen. Es ergibt sich so ein ausgezeichnetes Beispiel zu *Poincarés* topographischer Untersuchung von Lösungskurven.

Die singulären Punkte sind gegeben durch die Bedingungen

$$(\mathrm{a}) \qquad y = 0; \qquad \frac{5-n}{n-1} y + 2\frac{3-n}{(n-1)^2} z + z^n = 0,$$

die für $n < 3$ nur den einen reellen Punkt O

$$(\mathrm{a}') \qquad y = 0, \quad z = 0,$$

für $n > 3$ noch einen zweiten Punkt O_1

$$(\mathrm{a}'') \qquad y = 0, \quad z = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}} = Z$$

ergeben. Aus diesen beiden singulären Punkten ergeben sich sofort die singulären Lösungen (37)

$$u_1 = 0, \qquad u_1 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2}\,\frac{1}{\mathfrak{r}_1^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Die Untersuchung des Verhaltens der Lösungskurven in den singulären Punkten bietet keine Schwierigkeit. Zeigt die Kurve $u_1 = f(\mathfrak{r})$ für $\mathfrak{r}_1 = 0$ keine Singularität, so verlassen die y-Kurven den Punkt 0 in Richtung der Geraden $y + \frac{3-n}{n-1} z = 0$. Aus dem Verhalten der übrigen Kurven läßt sich umgekehrt der wichtige Satz folgern: Für $\mathfrak{r}_1 = 0$ ist u_1 allgemein von der Form

$$(\mathrm{b}) \qquad u_1 = \frac{C_1}{\mathfrak{r}_1} + C_2.$$

Bei dieser Untersuchung tritt ein neuer kritischer Wert von n auf als Wurzel der Gleichung

$$(\mathrm{c}) \qquad 7n^2 - 22n - 1 = 0; \quad n = 3{,}18763,$$

der aber für Gaskugeln ohne Singularität im Mittelpunkt keine Bedeutung erlangt.

Die für Gaskugeln ohne Singularität im Mittelpunkt (vollständige Gaskugeln) in Betracht kommenden Lösungskurven verlassen den singulären Punkt O in Richtung des 4. Quadranten, wenden sich dann nach links, um bei $z > Z$ die z-Achse senkrecht zu durchsetzen. Weiterhin tritt der kritische Wert $n = 5$ in Erscheinung. Für $n < 5$ geht die Kurve zu kleineren z, um in den positiven Teil der y-Achse einzumünden bei Ordinaten, die mit n abnehmen. Für $n = 5$ mündet die y-Kurve, eine symmetrische Schleife bildend, wieder in den Ausgangspunkt O ein. Für $n > 5$ werden die Kurven durch den 2. singulären Punkt O_1 ($y = 0$, $z = Z$) abgefangen, den sie in immer enger werdenden, links gewundenen Spiralen umschlingen. (Daraus ergibt sich unendlich oft der Wert der Abszisse $z = Z$.)

Ist die Differentialgleichung erster Ordnung hiermit erledigt, so ist aus den Lösungskurven $y = f(z)$ zurückzuschließen auf die Lösungskurven $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ der Differentialgleichung (38).

Aus der Beziehung $\mathfrak{r}_1 = e^{-\int \frac{dz}{y}}$ und der Form der y-Kurven ergibt sich sofort, daß längs einer y-Kurve $\mathfrak{r}_1$ beständig zunimmt. Ein Schnitt der y-Kurve mit der Ordinatenachse hat (abgesehen von dem Falle $\mathfrak{r}_1 = 0$) immer einen Schnitt der u_1-Kurve mit der $\mathfrak{r}_1$-Achse zur Folge. Da aber mit u_1 auch Temperatur, Druck und Dichte gleich Null werden, ist durch diesen Schnitt die Oberfläche der Kugel bestimmt.

Das Einmünden der y-Kurve in die y-Achse hat stets endliches, das Einrücken in die z-Achse bei endlichem z stets unendliches $\mathfrak{r}_1$ zur Folge. Daraus folgt für vollständige Gaskugeln: $n < 5$ die Gaskugeln endigen mit endlicher Masse im Endlichen; $n > 5$ die Gaskugel endigt im Unendlichen. Da die Spirale der y-Kurve die Z-Achse unendlich oft bei dem Werte $z = Z$ schneidet, folgt, daß die u_1-Kurve sich der singulären Lösung $u_1 = \left[\frac{z(n-3)}{(n-1)} \frac{1}{\mathfrak{r}_1^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}$, diese unendlich oft schneidend, als asymptotischer Lösung immer mehr anschließt. Daraus läßt sich leicht folgern, daß diese Kugeln mit $T, p, \varrho = 0$ im Unendlichen endigen. Während aber die Kugeln $n < 5$ mit endlichen Werten von $\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}$, also auch von $\frac{dT}{d\mathfrak{r}}$ endigen, laufen die Kugeln $n > 5$ in bezug auf $\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}$ asymptotisch aus. Die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes ergibt dann: *Der Wert von g an der Oberfläche einer Gaskugel ist für $n < 5$ endlich, für $n > 5$ gleich Null.* Für $n < 5$ haben die Kugeln eine scharf ausgeprägte Oberfläche; in der geringsten endlichen Tiefe sind $T, p, \varrho > 0$; für $n > 5$ laufen sie asymptotisch aus.

Da die Masse $\sim \mathrm{gr}^2 = r^2 \frac{du}{dr}$ ist, folgt: *Die Masse der Gaskugeln ist für $n < 5$ endlich, für $n > 5$ unendlich. Die Gaskugel $n = 5$ vermittelt den Übergang*; ihre Masse ist noch endlich [wie ihre direkte Berechnung Gl. (36a) zeigt].

20. Numerische Auswertung der Differentialgleichung. Hat man in der Differentialgleichung (I) die Gleichung

$$\frac{d^2 u_1}{\partial \mathfrak{r}_1^{\,2}} + \frac{2}{\mathfrak{r}_1}\frac{d u_1}{d \mathfrak{r}_1} + u_1^{\,n} = 0 \tag{38}$$

reduziert, so ist deren Lösung für $u_1 = 1$ und $\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1} = 0$ bei $\mathfrak{r}_1 = 0$ numerisch festzulegen. Auswertungen durch mechanische Quadratur liegen für einzelne n mit mehr oder minder großer Genauigkeit vor von *Homer Lane*[33]), *W. Thomson*[35]), *Ritter* und *W. Voigt.*[39]) Für die Werte $n = 0$, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 4,5, 4,9, 5 und 6 hat *R. Emden*[40]) nach einem Verfahren von *Kutta*, das den üblichen Methoden der mechanischen Quadratur hier weit überlegen ist, die Lösung mit fünfstelliger Genauigkeit ausgewertet. Weitere Werte für $n =$ 6,5, 7, 7,5 und 8 sind von *H. v. Zeipel*[38]) angegeben. Werte mit vierstelliger Genauigkeit berechnet, finden sich in einer unvollendeten, durch *G. Green* ergänzten Arbeit von *Lord Kelvin.*[35])

a) Gaskugeln von endlichem Radius.

21. Thermische Energie und Eigenpotential einer polytropen Gaskugel. In Nr. 6 ergab sich bereits zwischen thermischer Energie und Eigenpotential einer Gasmasse $\frac{U}{\Omega} = -\frac{1}{3(\varkappa - 1)}$, wobei in einer konzentrisch geschichteten Kugel $\Omega = -G\int\limits_0^{\mathfrak{R}} \frac{M_r\, dM_r}{r}$ zu setzen ist. Da zuerst *E. Betti*[41]), dann auf einfachere Weise *A. Ritter* (in der 8. Abhandlung) für adiabatische, und weiterhin *W. Voigt*[39]) für polytrope Gaskugeln eine zweite Beziehung zwischen U und Ω abgeleitet haben, gelingt es, diese Größen einzeln zu berechnen. Diese zweite Beziehung ergibt sich wohl am einfachsten wie folgt. Da allgemein

$$U = \frac{c_v}{A}\int\limits_0^{\mathfrak{R}} T\, dM_r = \frac{C_v}{A}\Big(M_r T - \int M_r\, dT\Big)_0^{\mathfrak{R}} = -\frac{c_v}{A}\int\limits_0 M_r\, dT \text{ Erg}, \tag{a}$$

39) *W. Voigt,* Thermodynamik I, Leipzig 1903, § 86.

40) *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. V.

41) *E. Betti,* Sopra l'equilibrio di una massa di gas perfetto isolata nello spazio, Nuovo Cim. 7 (1880) p. 26.

und speziell für polytropen Aufbau die Gleichgewichtsbedingung $(n+1)\frac{R}{m}\,dT = -g\,dr$ erfüllt sein muß, folgt weiter

$$(\mathrm{b})\qquad \begin{aligned} U &= \frac{c_v}{(n+1)\frac{R}{m}A}\int_0^{\mathfrak{R}} M g\,dr = \frac{G}{(n+1)(\varkappa-1)}\left(-\frac{M^2}{r}+2\int\frac{M\,dM}{r}\right)_0^{\mathfrak{R}} \\ &= \frac{1}{(n+1)(\varkappa-1)}\left(-\frac{GM^2}{\mathfrak{R}}-2\Omega\right). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für polytrope Gaskugeln mit endlichem Radius

$$(44)\qquad U = \frac{1}{(5-n)(\varkappa-1)}\frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}};\quad \Omega = -\frac{3}{(5-n)}\frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}\ \mathrm{Erg.}$$

und speziell für konvektives Gleichgewicht

$$(44\mathrm{a})\qquad U = \frac{1}{5\varkappa-6}\frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}};\quad \Omega = -\frac{3(\varkappa-1)}{5\varkappa-6}\frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}\ \mathrm{Erg.}$$

Das Eigenpotential der polytropen Kugel ist (selbstverständlich) unabhängig von der Natur des aufbauenden Gases. Wandelt sich eine polytrope Kugel bei konstantem Energieinhalt um in eine Kugel von anderer Polytropenklasse, so kann aus (44) der neue Radius abgeleitet werden.

Für $n = 5$ wird der Radius unendlich. Da sich aber in diesem Falle die Differentialgleichung I in geschlossener Form integrieren läßt, erhält man durch direkte Ausrechnung des Integrales

$$U = \frac{3\pi}{16}\frac{1}{\varkappa-1}\frac{R}{m}T_0\mathfrak{M};\quad \Omega = -\frac{9\pi}{16}\frac{R}{m}T_0\mathfrak{M},$$

wo T_0 die Mittelpunktstemperatur bedeutet.

22. Kosmogenetische Flächen. Liegt für ein bestimmtes n die Lösungskurve $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ vor, also für die Mittelpunktsdichte 1 und $\alpha^2 = 1$, so sind, wenn die Mittelpunktsdichte U^n und α^2 gegeben, zu setzen

$$u = U\mathfrak{r}_1,\quad r = \frac{\mathfrak{r}_1}{U^{\frac{n-1}{2}}\alpha},$$

und der Aufbau der Kugel ist somit eindeutig bestimmt. Es gibt daher bei gegebener Gasart und Polytropenklasse ∞^2 Gaskugeln. Eine dieser Gaskugeln ist demnach durch zwei unabhängige Daten völlig bestimmt. Aus diesen zwei Daten läßt sich jede gewünschte dritte Angabe über die Gaskugel ableiten. Die so entstehende Beziehung zwischen je drei Bestimmungsstücken einer Gaskugel wird von *R. Emden* als kosmogenetische Flächengleichungen bezeichnet. Sie erleichtern ungemein die Anwendung der Theorie auf einen gegebenen Fall. Sind für eine Gaskugel und bei gegebener Gasart von bestimmter Polytropenklasse zwei der Größen Masse $\mathfrak{M}$, Radius $\mathfrak{R}$, Mittelpunktstemperatur T_0, Mittelpunktsdichte ϱ_0, Mittelpunktsdruck p_0, polytrope Temperatur Θ_n, thermische Energie U oder Selbstpotential Ω gegeben, so lassen sich die übrigen sechs Größen sofort angeben. Zwei dieser Beziehungen sind in den Gleichungen (44) bereits angegeben. Als weitere Flächengleichungen ergeben sich

$$(45) \qquad \frac{\varrho_0 \mathfrak{R}^3}{\mathfrak{M}} = C_1, \quad \frac{T_0 \mathfrak{R}}{\mathfrak{M}} = C_2, \quad \frac{p_0 \mathfrak{R}^4}{\mathfrak{M}^2} = C_3.$$

Damit sind die Mittelpunktswerte, Druck, Temperatur und Dichte aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ bestimmt, und damit auch das Übersetzungsverhältnis der Kurven $f(\mathfrak{r}_1)$ in die Kurven $f(r)$, wodurch der Aufbau der Kugel in absolutem Maße gegeben erscheint. Die Konstanten der kosmogenetischen Flächengleichungen sind von *R. Emden* mit fünfstelliger Genauigkeit angegeben in Gaskugeln, Kap. VII.

Von Wichtigkeit ist die Flächengleichung

$$(46) \qquad \frac{\Theta_n}{\mathfrak{M}^{\frac{n-1}{n}} \mathfrak{R}^{\frac{3-n}{n}}} = C$$

mit der Folge: Zieht sich eine Kugel konstanter Masse zusammen, so werden an Stellen gleicher Dichte für $n > 3$ höhere, für $n < 3$ niedrigere Temperaturen (Drucke) angetroffen. (Damit ist eine von *W. Thomson*[42]) besonders betonte Ausführung richtigzustellen.)

Für $n = 3$, welcher Fall sich weiterhin bei Einführung des Strahlungdruckes von Bedeutung ergeben wird, bleibt Θ_3, also Temperatur und Druck an Stellen gleicher Dichte, unabhängig vom Radius $\mathfrak{R}$. Für gegebene polytrope Temperatur und gegebene Masse lassen sich dann Kugeln von beliebigem Radius aufbauen. Kosmogenide und aufbauende Polytropen fallen zusammen, und es kommen beim Kontraktionsprozeß lediglich verschiedene Stücke der aufbauenden Polytropen $n = 3$ auf dem Radius zur Abbildung.

b) Gaskugeln von unendlichem Radius.

23. Die isotherme Gaskugel. Obwohl von geringerem Interesse, denn ihre Masse ist unendlich, wurde die isotherme Gaskugel mehrfach untersucht. Die Gewohnheit, die Erdatmosphäre mit Rücksicht auf die barometrischen Höhenmessungen isotherm anzusetzen, legte es nahe, den Aufbau isothermer Gasgebilde auch mit Berücksichtigung

---

42) *W. Thomson* (*Lord Kelvin*), Über die Wärme der Sonne. Populäre Vorträge, deutsche Übersetzung, Berlin 1881, p. 281. Es betrifft den in der Anmerkung, Paradoxon, geschilderten Tatbestand.

innerer Gravitation zu behandeln. Die sich ergebende Differentialgleichung ist in Nr. **17** und **18** angeführt, ebenso die singuläre Lösung, $\varrho = e^{v} = \frac{2}{\beta^2 r^2}$.

Bei geeigneter Wahl der Einheiten ergibt sich

(47) $$\frac{d^2 \mathfrak{v}_1}{d\mathfrak{r}_1^{\,2}} + \frac{2}{\mathfrak{r}_1}\frac{d\mathfrak{v}_1}{d\mathfrak{r}_1} + e^{\mathfrak{v}_1} = 0.$$

Ihre Ordnung läßt sich auf verschiedene Weise erniedrigen. Setzt man

a) $$\mathfrak{r}_1 = e^{-\int \frac{dz}{y}}, \quad \mathfrak{v}_1 = \log \varrho_1 = -2\log \mathfrak{r}_1 + z,$$

so ergibt sich die Gleichung 1. Ordnung als Seitenstück zur Gleichung (42)

(48a) $$y\frac{dy}{dz} - y - 2 + e^{z} = 0 \quad [\textit{Emden}].$$

Andere Substitutionen ergeben

b) $$2xy\frac{dy}{dx} - (x + y + 1) = 0 \quad [\textit{Thiesen}].^{29)}$$

c) $$yx\frac{dy}{dx} + x + y - 2 = 0 \quad [\textit{Hill}].^{43)}$$

d) $$y\frac{dy}{dx} - (x^2 - xy - 1) = 0 \quad [\textit{v. Seeliger}].^{44)}$$

Die Gleichungen von der Form a) und b) wurden mit Hilfe der topographischen Methode von *Emden* und *Thiesen*[29]) untersucht. In der Darstellung a) tritt nur ein singulärer Punkt auf

$$y = 0, \quad e^{z} = 2;$$

in ihm laufen alle Lösungskurven zusammen. Er liefert die singuläre Lösung

(49) $$\varrho_1 = e^{\mathfrak{v}_1} = \frac{2}{\mathfrak{r}_1^2}.$$

Die der Mittelpunktsbedingung $\mathfrak{r}_1 = 0$, $\mathfrak{v}_1 = \log \varrho_1 = 0$ entsprechenden y-Kurven entspringen bei $z = -\infty$, $y = 2$ mit $\frac{dy}{dz} = 0$, umkreisen den singulären Punkt in links gewundenen, enger werdenden Spiralen, um nach unendlich vielen Umläufen in denselben einzumünden. Dabei kommt es zu unendlich vielen Schnitten mit der Ordinate im singulären Punkt, Schnittpunkten der Hauptlösung und singulärer Lösung entsprechend. Außer dieser ausgezeichneten Lösung gibt es noch einen zweiten Typus von Lösungskurven; sie entspringen sämtlich bei

43) *G. W. Hill,* On the interior constitution of the Earth, Ann. of Math. II (1888), p. 19.

44) *H. v. Seeliger,* Vorlesungen über die Figur der Himmelskörper.

$z = -\infty$, $y = -\infty$. Diese gewinnen Bedeutung bei Gaskugeln mit starrem Kern (Nr. 27). Aus der ausgezeichneten Lösung $y = f(z)$ kann auf das Verhalten der gesuchten Lösung $\varrho_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ geschlossen werden. Es ergeben sich folgende Resultate:

Druck und Dichte einer isothermen Gaskugel werden erst für unendlich große Werte des Radius gleich Null. Für immer größer werdende $\mathfrak{r}_1$ *schmiegt sich die Hauptlösung der singulären Lösung, die sie an unendlich vielen Stellen durchsetzt, immer enger an. Je größer* $\mathfrak{r}_1$, *desto genauer kann* ϱ_1 *durch* $\frac{2}{\mathfrak{r}_1^2}$ *dargestellt werden. Für* $\mathfrak{r}_1 = \infty$ *ist die Übereinstimmung vollständig.*

Die Masse einer isothermen Gaskugel von endlicher Mittelpunktsdichte ist unendlich.

Der Wert von g, ebenso die mittlere Dichte nähern sich mit wachsendem $\mathfrak{r}_1$ asymptotisch dem Werte Null.[45])

24. **Energetik der isothermen Kugel.** Von homogener Kontraktion und ihren Konsequenzen kann hier selbstverständlich nicht mehr die Rede sein. Auch ist die innere Energie U der ganzen Gasmasse, $c_v\int T\,dM$ unendlich. Doch ergibt eine einfache Rechnung das Verhältnis zum Selbstpotential,

$$\frac{U}{\Omega} = -\frac{1}{2(\varkappa - 1)} \tag{50}$$

an Stelle von $-\frac{1}{3(\varkappa-1)}$ bei polytropen Kugeln mit endlichem Radius. Da wir stets $dQ = dU - dW = dU + d\Omega$ haben, folgen die den Gleichungen (19) entsprechenden Beziehungen

$$\frac{dQ}{d\Omega} = -\frac{3 - 2\varkappa}{2(\varkappa - 1)}; \quad \frac{dQ}{dU} = 3 - 2\varkappa. \tag{51}$$

Ändert sich durch Temperatursteigerung der Energiegehalt und das Selbstpotential, so kann eine Wärmeabgabe nur eintreten, solange $\varkappa > \frac{3}{2}$. Dies ist nur möglich für 1-atomige Gase, während für polytrope Kugeln vom endlichen Radius auch 2-, an der Grenze noch

45) Mit fünfstelliger Genauigkeit ist die Lösungskurve $\mathfrak{v}_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ ausgewertet von *R. Emden* (Gaskugel, Kap. 9). In guter Übereinstimmung damit steht eine numerische Auswertung von *G. Green*[35]); Zahlenwerte sind auch angegeben von *A. Ritter* (13. Abh.). Ist die Mittelpunktsdichte $\varrho = \mathsf{P}$ und die Temperatur T gegeben, so sind die berechneten ϱ_1 im Verhältnis P zu erhöhen und an Stellen $\mathfrak{r}_1$ die Abszisse

$$r = \frac{\mathfrak{r}_1}{\beta\sqrt{\mathsf{P}}} = \frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\mathsf{P}}}\sqrt{\frac{RT}{4\pi m G}}$$

zu setzen. Über eine weitere numerische Auswertung siehe *G. W. Hill.*[48])

3-atomige Gase dazu befähigt sind. Die Steigerung der Temperatur bei Massenumlagerung verzehrt hier den $\frac{1}{2(\varkappa-1)}$ Teil, bei polytropen Kugeln den $\frac{1}{3(\varkappa-1)}$ Teil der geleisteten Arbeit.

25. Polytrope Kugeln $n > 5$. Ihre charakteristischen Eigenschaften sind bereits in Nr. 18 angegeben. Da ihr Radius unendlich, kann von homogener Kontraktion nicht gesprochen werden. Bei Energieabgabe verschieben sich nur die Massen auf dem Radius. Wie die Masse ist auch der Gehalt an innerer Energie unendlich, doch läßt sich auch hier das Verhältnis U zum Selbstpotential Ω (das ebenfalls ∞ ist) berechnen. Es wird

$$\frac{U}{\Omega} = -\frac{n-1}{n+1}\,\frac{1}{2(\varkappa-1)}, \quad 5 \lesseqgtr n \leqq \infty \tag{52}$$

für $n = 5$ in den auch für $n < 5$ geltenden Wert $-\frac{1}{3(\varkappa-1)}$ und für $n = \infty$ in den für isotherme Kugel berechneten Wert $-\frac{1}{2(\varkappa-1)}$ übergehend. Da stets $dQ = dU - dW = dU + d\Omega$ gibt, folgt

$$\frac{dQ}{dW} = -\frac{dQ}{d\Omega} = \frac{(n-1)-(n+1)\,2(\varkappa-1)}{(n+1)\,2(\varkappa-1)}, \tag{53a}$$

$$\frac{dQ}{dU} = \frac{(n-1)-(n+1)\,2(\varkappa-1)}{n-1}. \tag{53b}$$

Während für $n < 5$ und $n = \infty$ der Energieumsatz nur durch das Verhältnis $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ bedingt ist, kommt für $5 < n < \infty$ auch die Polytropenklasse in Betracht. Damit bei zugeführter Arbeit Wärme abgegeben werden kann, muß $\varkappa > \frac{3n+1}{2(n+1)}$ sein.

c) Gemischte Systeme.

26. Gaskugeln in starrer Hülle. Nimmt man von einer Gaskugel, die außerhalb des Radius r liegenden Gasmassen weg und ersetzt sie durch eine starre Hülle, so bleibt der Kern unverändert im Gleichgewicht, da die Hülle, ohne Kraftlinien ins Innere zu senden, den Gasdruck äquilibriert. Wir können deshalb die Aufgabe stellen einen kugelförmigen Hohlraum in starrer Hülle derart mit Gas zu füllen, daß dasselbe unter Einfluß innerer Gravitation im Gleichgewicht bleibt. Das Studium von Weltkörpern, deren Oberfläche erstarrt, deren Inneres mit einem Medium erfüllt ist, in welchem der Druck einer beliebigen Potenz der Dichte proportional ist, führt zu diesem Problem.

Aus jeder vollkommenen Gaskugel lassen sich durch Wahl des Schnittradius ∞ viele unvollständige Gaskugeln herstellen. Um diese unvollständige Gaskugel zu bestimmen, sind demnach nicht mehr zwei, sondern drei Bestimmungsstücke erforderlich, für welche man am besten Masse $\mathfrak{M}$, Radius $\mathfrak{R}$ und polytrope Temperatur Θ wählt. Während nun Gaskugeln mit Polytropen $n < 5$ nichts Besonderes bieten, indem es nur darauf ankommt, ein geeignetes Teilstück $\mathfrak{r}_1$ auf dem Radius $\mathfrak{R}$ abzubilden, kommen für $n > 5$ die Oszillationseigenschaften zur Geltung, die sich aus der spiraligen Umkreisung des singulären Punktes O_1 durch die Lösungskurve $y = f(z)$ (Nr. **19**) ergeben. Es zeigt sich, daß die drei angeführten Bestimmungsstücke den Aufbau nicht mehr eindeutig bestimmen. Diese Verhältnisse sind zuerst untersucht von *A. Ritter* (13 Abh. Nr. 53). Die vollständige Lösung ist gegeben von *R. Emden* (Gaskugeln).

Die wichtigsten Ergebnisse sind: Mittelpunktsdichte, Oberflächendichte und mittlere Dichte werden mit ϱ_0, ϱ und $\bar{\varrho}$ bezeichnet; bequem erweist sich die Einführung der Höhe, der an der Oberfläche errichtet gedachten homogenen Atmosphäre,

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}} = \frac{R}{m}\frac{T}{g}, \quad g = \frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}.$$

a) *Isotherme Kugel.* Eine gegebene Gasmasse $\mathfrak{M}$ kann als isotherme Gaskugel in starrer Hülle vom Radius $\mathfrak{R}$ bei ∞ vielen Temperaturen und dadurch bedingten unendlich vielen verschiedenen Anordnungen der Masse im Gleichgewicht sein.

Eine isotherme Gaskugel von gegebener Masse und Radius in starrer Hülle kann auf unendlich viele verschiedene Arten so aufgebaut werden, daß die Höhe der homogenen Atmosphäre $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}}$ gleich dem halben Radius wird.

Die tiefste Temperatur, bei welcher eine isotherme Gaskugel in starrer Hülle bestehen kann, ist dadurch bedingt, daß die Höhe der homogenen Atmosphäre $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}} = 0{,}39688\ \mathfrak{R}$ ist.

Die Temperatur kann also nie kleiner werden als

$$(54\text{a}) \quad 0{,}39688\ \frac{m}{R}\frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}, \quad \text{dabei ist } \frac{\varrho_0}{\bar{\varrho}} = 10{,}697; \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = 32{,}090.$$

Die Oberflächendichte kann nie kleiner werden als

$$(54\text{b}) \quad 0{,}26250\ \frac{3\mathfrak{M}}{4\pi\mathfrak{R}^3}, \quad \text{wobei } \frac{\varrho_0}{\bar{\varrho}} = 78{,}914, \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = 300{,}66,$$

ebenso der Oberflächendruck nie kleiner als

$$(54\text{c}) \quad 0{,}34476\ \frac{G\mathfrak{M}^2}{4\pi\mathfrak{R}^4}, \quad \text{wo } \frac{\varrho_0}{\bar{\varrho}} = 35{,}766, \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = 131{,}44.$$

Dieser letzte Satz erlaubt eine wichtige Folgerung. Die starre Hülle kann ersetzt werden durch das Gewicht einer aufgelagerten Kugelschale von der Masse $\mathfrak{M}_a$, deren Druck mit abnehmender Dicke selbstverständlich zunimmt und schließlich durch den berechneten Minimaldruck getragen werden muß. Daraus läßt sich folgern:

Bezitzt eine Gaskugel einen isothermen Kern, so kann die Masse derselben nicht mehr betragen als 76,933% der Masse der ganzen Kugel. Der Energieinhalt U einer isothermen Gaskugel in starrer Hülle kann nie kleiner werden als

$$U = \frac{0{,}39688}{\varkappa - 1} \cdot \frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}. \tag{55a}$$

Für das Selbstpotential folgt

$$\Omega = 4\pi\mathfrak{R}^3 p - 3(\varkappa - 1)U. \tag{55b}$$

Die Beziehung der vollständigen Kugel $\frac{U}{\Omega} = -\frac{1}{2(\varkappa - 1)}$ gilt also nicht mehr.

b) *Die polytrope Kugel.* $n > 5$, Masse $\mathfrak{M}$ und Radius $\mathfrak{R}$ sind gegeben. Dann sind unendlich viele Werte der polytropen Temperatur Θ_n möglich, die stetig angeordnet, vom Werte unendlich ausgehend, einen Kurvenzug bilden, der mit unendlich vielen (abnehmenden) Maxima und (zunehmenden) Minima einem endlichen Werte zustrebt derart, daß die Maxima stets größer, die Minima stets kleiner sind wie dieser. Die kleinste polytrope Temperatur wird bedingt durch die Stelle, in welcher in Gl. (38) die Bedingung $u_1^n = \frac{3-n}{n-1}\frac{u_{\mathfrak{r}}'}{\mathfrak{r}_1}$ erfüllt ist. Wird einer dieser Sattelwerte gewählt, so gilt stets $\varrho = \frac{\bar{\varrho}}{3}\frac{n-3}{n-1}$, so daß für $n = \infty$ sich die oben angegebene Beziehung für die Kugel niederster Temperatur wiederfindet. Der Ausdruck $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ pendelt mit unendlich vielen Maxima und Minima immer enger diesem Grenzwerte zu. Die Stelle des ersten Minimums $\left(\text{absolut kleinster möglicher Wert von } \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\right)$ muß den numerisch berechneten Tafeln durch Interpolation entnommen werden. Ebenso pendeln Oberflächendruck und Oberflächentemperatur Grenzwerten zu, gegeben durch die Bedingungen

für den Druck: $\quad \frac{1}{2}\frac{n-3}{n+1}\frac{G\mathfrak{M}^2}{4\pi\mathfrak{R}^4}$,

für die Temperatur: $\quad \frac{1}{2}\frac{n-1}{n+1}\frac{m}{R}\frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}$.

Für $n = \infty$ folgen wieder die Beziehungen der isothermen Kugel. Die Stellen minimalster p- und T-Werte müssen durch Interpolation der Lösungskurve $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ entnommen werden.

c) *Anwendung auf das Erdinnere.* 1. Für den *Laplace*schen Ansatz $p \sim \varrho^2$ (Nr. **18**) fand sich die Lösung in geschlossener Form $\varrho = \varrho_0 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r}$. Setzt man in Anwendung auf die Erde die Oberflächendichte $= 2{,}55$, die mittlere Dichte gleich 5,50 g/cm², so ergeben sich $\varrho_0 = 11{,}215$, $\alpha R = 2{,}529 = 144^0 54'$ und für den Druck im Mittelpunkt $3{,}33 \cdot 10^{12}$ Dyn/cm² $= 3{,}29 \cdot 10^6$ Atm. Druck und Dichte sind für jedes r gegeben. Dadurch ist, falls ein vollkommenes Gas als aufbauendes Material verwendet wird, auch dessen Temperatur an jeder Stelle bestimmt.

2. Macht man andererseits die Annahme, daß im Erdinnern der Druck der Dichte direkt proportional ist, so ergibt sich für Gase Isothermie und die Dichteverteilung ist durch die Differentialgleichung II gegeben. Die in Nr. **23** erwähnte numerische Auswertung derselben kann den jeweiligen Grenzbedingungen angepaßt werden. Im Gegensatz hierzu hat *G. W. Hill*[43]) diese Differentialgleichung unmittelbar numerisch ausgewertet, lediglich mit Rücksicht auf das vorliegende Problem, indem die Lösung dadurch eindeutig gemacht wurde, daß für die Erdoberfläche der vorgeschriebene Wert $\varrho = 2{,}70$ g/cm³ angenommen wird. Das Rechenverfahren ist nicht angegeben. Für den Erdmittelpunkt erhält *Hill* $\varrho = 21{,}69$ g/cm³ für das Verhältnis der Oberflächendichte zur mittleren Dichte der Wert von 0,48. Der Druck im Mittelpunkt wird $6{,}03 \cdot 10^{12}$ Dyn/cm² $= 6 \cdot 10^6$ Atm. Wird gasförmiges Erdinneres angenommen, so ist dessen Temperatur gegeben durch $\frac{R}{m} T = 2{,}78 \cdot 10^{11}$ cm²/sec².

27. Gaskugeln mit starrem Kern. Die Behandlung dieses Problems gestaltet sich ungleich schwieriger wie dasjenige der vollständigen Gaskugel oder der Gaskugeln in starrer Hülle. In diesen letzten Fällen darf für den Mittelpunkt die Lösungskurve keine Singularität aufweisen. Dies hat zur Folge, daß für jede Polytropenklasse nur eine Lösungskurve $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ durch mechanische Quadratur ermittelt werden muß, aus welcher sich alle übrigen durch Ähnlichkeitstransformation ableiten lassen. Ist hingegen ein fester Kern vorhanden, so ist durch die Temperatur seiner Oberfläche eine Ordinate der $u = f(r)$-Kurve, durch die Anziehungsbeschleunigung an seiner Oberfläche der zugehörige Wert $\frac{du}{dr}$ bestimmt, wodurch die Lösungskurve festgelegt ist. Diese Lösungskurve rückwärts bis $r = 0$ verlängert, braucht hier nicht mit $\frac{du}{dr} = 0$, also ohne Singularität, einzuschneiden und ist dann unter den früher ermittelten Lösungskurven nicht enthalten. Aus ihr können, wie sich zeigen läßt, immer noch ∞^1 Lösungskurven durch Ähnlichkeitstransformation abgeleitet werden; da aber ∞^2 Lösungskurven möglich sind, müßten für jede Polytropenklasse ∞^1 Lösungskurven durch mechanische Quadratur gewonnen werden, um die Lösung der Aufgabe vollständig wiederzugeben. Dieser Weg ist nicht gangbar und man ist darauf angewiesen, durch Studium der Topographie der Lösungskurven (Nr. **19**) Einblick in die neu auftretenden Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen.[46])

Von Wichtigkeit sind in erster Linie folgende Ergebnisse:

Der Kern sei bestimmt durch Masse $\mathfrak{M}_i$, Radius $\mathfrak{R}_i$ und Oberflächentemperatur T_i.

a) Gegeben sei nur die polytrope Temperatur der Atmosphäre und die Klasse n. Dann folgt: Für $n < 5$ liegt die Oberfläche der Atmosphäre wie bei der vollständigen Gaskugel stets im Endlichen. Während aber bei dieser für $n > 5$ die Oberfläche im Unendlichen liegt, ergibt sich, daß auch hier die Oberfläche der Atmosphäre für $n > 5$ stets im Endlichen liegt, solange

$$T_i < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{m}{R} \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i}. \tag{56}$$

Die an der Oberfläche des starren Kerns errichtete Höhe $\mathfrak{H}_i$ der homogenen Atmosphäre ist $\mathfrak{H}_i = \frac{R}{m}\frac{T_i}{g_i}$, $g_i = \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i^2}$, so daß die gefundene Bedingung eleganter geschrieben werden kann

$$\mathfrak{R}_i > (n+1)\mathfrak{H}_i. \tag{56a}$$

Der Wert der polytropen Temperatur Θ_n der Amosphäre kommt hier nicht zur Geltung. Ist die Bedingung (56) nicht erfüllt, so liegt die Oberfläche immer noch im Endlichen, solange Θ_n einen durch T_i und $\mathfrak{R}_i$ bedingten kritischen Wert nicht übersteigt. Wird dieser überschritten, so kann Endlichkeit auch nicht durch Massenzunahme des Kerns erzwungen werden. Andrerseits endigt bei richtiger Wahl von Θ_n jede Atmosphäre $n < \infty$ auch über einer starren Hohlkugel im Endlichen. Die Gaskugel $n = 5$ über einer starren Hohlkugel endigt stets im Endlichen, während die vollständige Kugel sich stets bis unendlich erstreckt. Für $n = \infty$ liegt die Oberfläche stets im Unendlichen.

b) Gegeben sei die Masse des gesamten Systens, Kern plus Atmosphäre, sowie Radius uud Masse des Kerns; der naheliegende Schluß,

46) In bezug auf diese subtilen Untersuchungen muß auf die Originalarbeit von *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. 13 verwiesen werden. Ansätze zu diesen Untersuchungen finden sich auch bei *A. Ritter* in seiner 9. Abhandlung.

daß der Gesamtradius $\mathfrak{R}$ mit T_i wächst, ist unrichtig. Vielmehr strebt die Temperatur T_i mit wachsendem $\mathfrak{R}$ einem endlichen Grenzwerte zu, wobei sie einen Maximalwert, möglicherweise mehrere überschreitet. Daraus läßt sich folgern: Besteht ein Weltkörper aus Atmosphäre und festem Kern, so existiert für letzteren eine maximale Oberflächentemperatur, nach deren Überschreitung sich die Atmosphäre nicht mehr im Gleichgewicht halten kann. Diese maximale Temperatur braucht nicht mit dem maximalen Gesamtradius $\mathfrak{R}$ zusammenzufallen; für eine Reihe von Temperaturen kann die Atmosphäre auf zwei verschiedene Arten in Gleichgewicht sein. Wir kommen somit auch bei Berücksichtigung der inneren Gravitation der Atmosphäre zu einer Zerstreuungstemperatur des festen Kerns. In Nr. **15** wurde dargelegt, daß bei Vernachlässigung der inneren Gravitation die Atmosphärenhöhe mit steigender Oberflächentemperatur stets zunimmt, wodurch sich ebenfalls eine Zerstreuungstemperatur ergab. Diese Vernachlässigung wird um so weniger fehlerhaft, als die Masse des Kerns die der Atmosphäre übertrifft; damit die beiden oben erwähnten Gleichgewichtszustände möglich sind, darf das Verhältnis Kernmasse zur Gesamtmasse eine gewisse Grenze nicht überschreiten.

In numerischer Auswertung wurde der Einfluß innerer Gravitation auf der Erdatmosphäre von *R. Emden*[47]) dargelegt. Sind nur die Werte p, ϱ und T an der Erdoberfläche gegeben, so bleibt nicht nur die Masse der Atmosphäre, sondern auch die Entscheidung, ob sie endlich oder unendlich ist, unbestimmt. Zur Festlegung der Verhältnisse muß der Wert der Polytropenklasse längs der ganzen Erstreckung der Atmosphäre gegeben sein.

28. Zusammengesetzte Gaskugeln. Gasförmige Weltkörper werden in Wirklichkeit nicht oder doch nicht einheitlich nach einer Polytropen aufgebaut sein. Da aber bei polytropem Bau der Temperaturgradient stets dem Werte von g proportional ist, kann man den Verhältnissen wirklicher Gaskugeln gerecht werden, indem man nach verschiedenen Polytropenklassen geschichteten Aufbau annimmt. Man hat dann Stücke für Lösungskurven der Differentialgleichung I und II, mit verschiedenen n und α zusammenzufügen. Da für jedes neue Lösungsstück nur die Oberflächentemperatur und die Oberflächenbeschleunigung der innerhalb liegenden, sowie der Druck der außerhalb liegenden Massen in Betracht kommt, reduziert sich die Aufgabe im wesentlichen auf die kombinierte Anwendnng der bei starrer Hülle und starrem Kern auftretenden Überlagerungen. Annäherung an die

47) *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. 17, Nr. 7—10.

Wirklichkeit erreicht man unter Umständen schon dadurch, daß man eine Atmosphäre bestimmter Polytropenklasse einem isothermen Kern auflagert. Gibt man diesem die niedrigste mögliche Temperatur, so kann seine Masse nie mehr betragen wie 9,76953 der Gesamtmasse.[48])

E. Abweichung von den Gasgesetzen.

29. Einführung der Zustandsgleichung von van der Waals. Behandelt man die Zwergsterne als Kugeln vollkommener Gase, so wird man auf Mittelpunktswerte von Druck und Temperatur geführt von gänzlich anderer Größenordnung als unseren Laboratoriumserfahrungen entspricht, und zu Werten der Dichte, die mit unserer Vorstellung eines vollkommenen Gases unvereinbar scheinen. (Über die prinzipielle Seite dieser Frage wird in folgender Nr. **30** die Rede sein.) Es lag deshalb der Gedanke nahe, die Zustandsgleichung vollkommener Gase aufzugeben und die *van der Waals*sche Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \frac{R}{m} T$$

einzuführen. In dieser Form erweist sie sich zu unhandlich. Sie wird modifiziert, indem nur die beim Zusammenstoß auftretenden Kräfte, die im Koeffizienten b zum Ausdruck kommen, beibehalten, die Kräfte aber mit welchen die stark genäherten Moleküle sich beeinflussen, gegenüber den großen Drucken vernachlässigt werden. Mit Hilfe der so vereinfachten Gleichung

$$\text{(b)} \qquad p(v - b) = \frac{R}{m} T$$

hat *Nils Ekholm*[49]) den Bau der Sonne nach der Adiabate eines zweiatomigen Gases behandelt. Durch Masse und Radius ist der Bau, vollkommene Gase vorausgesetzt, eindeutig bestimmt; daran kann auch das Auftreten einer Konstanten b in der Zustandsgleichung nichts ändern. Daß die Einführung der neuen Zustandsgleichung von zweifelhafter Güte ist, zeigt sich daran, daß die Einsetzung eines Wertes für b, wie er durch Laboratoriumsexperimente ermittelt ist, (für die Druckeinheit 1 Megadyne meistens größer als 1 $g^{-1} \cdot cm^3$, für Wasserstoff 9,3 $g^{-1} \cdot cm^3$ nicht angängig ist. Vielmehr muß der Anschluß durch ein weiteres Beobachtungselement, das zur rechnerischen Bestimmung von b ausreicht, gewonnen werden. *Ekholm* setzt deshalb

---

48) Nähere Ausführungen in *R. Emden*, Gaskugeln, Kap. 13.

49) *N. Ekholm*, Über den Energievorrat, die Temperatur und Strahlung der Weltkörper, Stockholm Ak. Handl. Bih. 26 (1909), Nr. 1.

notgedrungen schätzungsweise den Radius der Photosphäre

$$r = 6{,}920 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm},\ p = 0{,}1 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Dyn/cm^2},\ \varrho = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g/cm^3},\ T = 6825^0.$$

Dann ergibt sich $\frac{1}{b} = 1{,}5156\ \mathrm{g/cm^3}$, also außerordentlich groß und für den Mittelpunkt

$$\varrho_0 = 1{,}486\ \mathrm{g/cm^3},\quad p_0 = 1{,}3948 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Dyn/cm^2},\quad T_0 = 5\,402\,000^0,$$

während sich für den Aufbau aus dissoziiertem Wasserstoffgas als vollkommenes Gas

$$\varrho_0 = 8{,}271\ \mathrm{g/cm^3},\quad p_0 = 8{,}2313 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Dyn/cm^2},\quad T_0 = 12\,069\,000^0$$

ergibt. *Ekholm* benutzte ein Gas von der ungefähren Dichte des Stickstoffes; wird ein vollkommenes einatomiges Gas von dieser Dichte angenommen, so bleiben die Druck- und Dichtewerte unverändert, die Temperatur sinkt im Verhältnis der Dichten. Die Größenordnung der Mittelpunktsdichten hat sich durch Einführung der *van der Waals*schen Zustandsgleichung nicht geändert; sie sind außerdem bedingt durch die lediglich geschätzten Werte an der Photosphäre, von denen ausgehend sie durch mühsame Integration gewonnen wurden.

30. Über die Bedeutung der Ergebnisse der Nr. 5—29. Die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel ist unter Annahme der Zustandsgleichung vollkommener Gase abgeleitet. Wird ihre numerische Auswertung benützt, um den Aufbau von Gaskugeln von Sternmasse und Sternradius darzustellen, so ergeben sich Dichten, welche die des Platins weit übertreffen können. Schon für die mittlere Dichte der Sonne, die > 1, schien die Annahme dieser Zustandsgleichung unzulässig, und eine zugehörige Mittelpunktsdichte, für $n = 3$ z. B. > 54, unmöglich. Man war gezwungen, diese für das Sterninnere berechneten Werte lediglich als Hilfsgrößen zu betrachten, um die äußern der Beobachtung zugänglichen Schichten einfacher behandeln zu können. Versuche mit der *van der Waals*schen Zustandsgleichung erweitern den Gültigkeitsbereich nur unwesentlich in Anbetracht der zu den Sterndichten geringen, durch das Volumen der Moleküle bedingten Grenzdichten.

Die Forschungsergebnisse der letzten Jahre haben dies Problem auf eine völlig veränderte Basis gestellt. In dem Abschnitt III E. wird sich zeigen, daß Sterndichten auftreten können, die die des Platins um das 1000fache übersteigen. Die Atomphysik kann sie in Anbetracht der hohen Temperaturen fast einwandfrei begründen, und beweist, daß trotzdem die Zustandsgleichung vollkommener Gase selbst da noch zu Ergebnissen führt, die durch die Beobachtung bestätigt werden. Bis zu diesen Dichten kann also die Differentialgleichung und ihre numerische Auswertung unbedenklich benützt werden, falls nur, was in der praktischen Anwendung stets der Fall sein wird, die sich ergebenden hohen Dichten von entsprechend hohen Temperaturen begleitet sind.

Verzichtet man auf den Begriff Temperatur, so gelten die ermittelten Beziehungen so lange, als Druck und Dichte des aufbauenden Materials in der Beziehung $p \sim \varrho^k \sim \varrho^{\frac{n+1}{n}}$ stehen. Als Beispiel diene der in Nr. **20**c besprochene Aufbau der Erde nach dem *Laplace*schen Ansatze $p \sim \varrho^2$.[50]) Mit $p \sim \varrho$ ist dann auch jede Funktion $T = f(p, \varrho)$ bestimmt, also auch die Funktion $T = \frac{m}{R}\frac{p}{\varrho}$; das ist die Zustandsgleichung vollkommener Gase. Den Anschluß an die Thermodynamik liefert dann die Beziehung für die thermische Energie $dU = c_v dT$, $c_v = \text{const.}$

31. Eine Gaskugel anderer Bauart. Gelegentlich einer Untersuchung, über welche in Nr. **33** berichtet wird, behandelt *Milne*[51]), um die Grenzwerte auftretender Oberflächenintegrale zu ermitteln, den Aufbau einer Kugel vollkommener Gase, deren Bau durch das Gesetz

$$\text{(a)} \qquad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu$$

bestimmt sein soll. Diese Kugel unterscheidet sich von den bisher behandelten Kugeln prinzipiell dadurch, daß ihr Bau durch die Temperaturverteilung bestimmt wird. Sie erstreckt sich selbstverständlich bis unendlich. Es ergibt sich ferner, daß die Druckverteilung und dadurch auch die Dichte durch die Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2 \lg p}{dr^2} + \frac{2-\nu}{r}\frac{d \lg p}{dr} + 4\pi G \left(\frac{m}{R T_0}\right)^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\nu} p = 0$$

geregelt wird, welche für $\nu = 0$ in die Differentialgleichung II der isothermen Kugel übergeht. Sie läßt sich auf eine Gleichung ersten Grades $y\left[\frac{dy}{dz} - (\nu - 1)\right] - e^{-z} - (\nu - 1)(2\nu + 2) = 0$ reduzieren, die nach topographischer Methode untersucht werden kann. Zahlenwerte wurden nicht ermittelt. Als gesuchtes Resultat ergab sich, daß die Masse für $\nu > 1$ endlich, für $\nu < 1$ unendlich wird.

50) Es steht nichts im Wege, auch den Einfluß der Rotation mit ihren Folgeerscheinungen zu untersuchen; siehe die Behandlung des *Laplace*schen Problems in *Thomson* and *Tait,* loc. cit. Fußn. 34.

51) *E. A. Milne,* The escape of molecules from an atmosphere with special reference to the boundary of a gaseous star, Cambridge Phil. Soc. Trans. 23 (1927), Nr. 26.

E. Eingreifen der kinetischen Gastheorie und statistischen Mechanik.

Die hydrodynamische Behandlung eines Gases als Kontinuum, das der Zustandsgleichung vollkommener Gase bis zu beliebig kleiner Dichte (Druck und Temperatur) gehorcht, liefert eine mathematisch völlig definierte Oberfläche einer Gaskugel. Den physikalischen Bedingungen mehr Rechnung tragend verwischt die kinetische Gastheorie diese scharfe Begrenzung und läßt auch außerhalb derselben in dem Maße, wie die Zusammenstöße seltener werden, Moleküle auftreten, die freie Kegelschnitte beschreiben, die sich bis unendlich erstrecken können. Der so auftretende Massenverlust der Kugel wird in den Nr. **32** u. **33** erörtert werden Es sei speziell darauf aufmerksam gemacht, daß die erforderliche hyperbolische Geschwindigkeit nicht durch den Wert der Schwerkraft, sondern durch den des Schwerpotentiales bestimmt ist; sie ändert sich also beim Übergang vom Riesen- zum Zwergstern nur linear, nicht quadratisch mit dem Radius. Stehen hinreichende Massen, Raum und Zeiten zur Verfügung, so können die Gasmoleküle von Meteoritengröße angenommen werden und es resultiert eine kosmische Staubmasse, die in Nr. **36** eingehender behandelt wird; schließlich können diese Betrachtungen auf ganze Fixsternsysteme (kugelige Sternhaufen) übertragen werden (Nr. **39**) und damit ergibt sich umgekehrt die Möglichkeit, Staubmassen und Fixsternsysteme hydrodynamisch als Kontinua zu behandeln.

32. Massenverlust einer Gaskugel. Ist vom Radius r die Masse M_r eingeschlossen, so ist diesem Abstand eine hyperbolische Geschwindigkeit q

$$\frac{1}{2} q^2 = \frac{G M_r}{r} \tag{57}$$

zugeordnet. Die Erreichung dieser Geschwindigkeit gibt einem Gasmoleküle die Möglichkeit, sich dauernd von der Gaskugel oder Atmosphäre loszulösen. Da aber nach dem *Maxwell*schen Verteilungsgesetz bereits bei den geringsten Temperaturen Moleküle mit dieser Geschwindigkeit auftreten, ist Massenverlust unvermeidlich, und die Problemstellung präzisiert sich dahin, dessen Größe oder wenigstens Größenordnung festzustellen. Auf diesen Massenverlust scheint zuerst *Stoney*[52]) (1898) hingewiesen zu haben. Seine unzulängliche Behandlungsweise, die auf das *Maxwell*sche Verteilungsgesetz keine Rücksicht nimmt, wurde von *Cook*[53]) richtiggestellt. Einblick in die tatsächlichen Ver-

52) *G. Johnstone Stoney,* On atmospheres upon planets and satellites, Astroph. Journ. 7 (1898), p. 25, sowie 9 (1898), p. 316.

53) *S. R. Cook,* On the escape of gases from planetary atmospheres, Astroph. Journ. 11 (1900), p. 36.

hältnisse geben Untersuchungen von *Jeans*[54]) und *Milne.*[51]) Die entsprechende Untersuchung an kosmischen Staubmassen von *R. Emden*, welche die *Jeans*sche Lösung schon in verallgemeinerter Form enthält, wird in Nr. **37** besprochen.

Werden die Moleküle gezählt, welche die Kugelschale im Abstand r mit Geschwindigkeiten gleich oder größer dieser hyperbolischen Geschwindigkeit nach außen durchsetzen, so bestimmt sich ihre Masse zu[55])

$$(58)\qquad \Delta M = \frac{4\pi}{3} r^2 q \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, \bar{q} \left(1 + \frac{3\,G M_{(r)}}{r \bar{q}^2}\right) e^{-\frac{3\,G M_{(r)}}{r \bar{q}^2}} \text{ g/sec}$$

mit $\bar{q}^2$ als dem durch die Temperatur bestimmten mittleren Geschwindigkeitsquadrat. Mit Annäherung an die Oberfläche gehen ϱ und $\bar{q}$ nach Null und wird, namentlich infolge der Exponentialgröße, diese Masse ebenfalls Null. Allein in dem Maße, wie die Zusammenstöße seltener und die freie Weglänge groß gegen den mittleren Abstand werden, erlischt die Gültigkeit dieses Ausdruckes. Erstreckt sich der Bereich strenger Gültigkeit bis zum Abstande r und würden außerhalb r die Zusammenstöße vollständig fehlen, so wäre der Massenverlust durch diese Gleichung bestimmt.

Im Anschluß an diese Gleichung hat *Jeans*[54]) den Massenverlust einer Atmosphäre, insbesondere der Erdatmosphäre, näher untersucht. Bezeichnen wir den Radius, mit welchem die Stratosphäre beginnt, mit r_0, die zugehörige Dichte mit ϱ_0 und wird oberhalb r_0 mit genügender Genauigkeit Isothermie angenommen, so ist die Dichte im Abstande r (Nr. **14**c), ($g \sim \frac{1}{r^2}$ angesetzt)

$$\varrho = \varrho_0 e^{\frac{m}{R}\frac{GM}{T}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = \varrho_0 e^{+\frac{3GM}{\bar{q}^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)},$$

so daß die durch die Kugelschale $r (r > r_0)$ mit hyperbolischer Geschwindigkeit hindurchtretende Masse von Molekülen durch

$$(59)\qquad \Delta M = \frac{4\pi}{3} r^2 \varrho \cdot \bar{q} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{-\frac{3GM}{\bar{q}^2 r_0}} \left(1 + \frac{3GM}{r\bar{q}^2}\right) \text{ g/sec}$$

bestimmt wird. Diese Masse ist noch abhängig von r; allein die Größenordnung ist gegeben durch die Exponentialgröße, also nur bedingt durch r_0. Zur Beurteilung der Größenordnung kann deshalb $r = r_0$ gesetzt werden und es ergibt sich für die Zeit t_0 die notwendig ist, damit eine Schicht von der Dicke 1 cm und der Dichte ϱ_0

54) *J. H. Jeans,* Dynamical theory of gases, 2. edition, London 1916, chapt. 15.

55) *R. Emden,* Gaskugeln, Gleichung 254.

durch die Kugelschale r hindurchtritt, unabhängig von r, zu

$$(60) \qquad t_0 = \sqrt{6\pi} \cdot \frac{1}{\bar{q}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3GM}{r_0 \bar{q}^2}} e^{\frac{3GM}{r_0 \bar{q}^2}} \text{ sec} = \frac{4{,}34}{\bar{q}\left(1 + \frac{3 g_0 r_0}{\bar{q}^2}\right)} e^{\frac{3 g_0 r_0}{\bar{q}^2}} \text{ sec.}$$

Diese Schicht geht der Atmosphäre in der Zeit t_0 verloren, falls außerhalb der Kugelschale keine Zusammenstöße stattfinden. Nun ist die im Abstande r erreichte Höhe der homogenen Atmosphäre $\mathfrak{H} = \frac{p}{g\varrho} = \frac{p_0}{g_0 \varrho_0} = \frac{\bar{q}^2}{3 g_0}$, und die Zeit, die nötig ist, damit die ganze oberhalb der Troposphäre liegende Masse verlorengeht, beträgt deshalb, falls der Massenverlust mit unveränderter Geschwindigkeit andauert,

$$(61) \qquad t_1 = \frac{1{,}45 \cdot \bar{q}}{g_0\left(1 + \frac{3 g_0 r_0}{\bar{q}^2}\right)} e^{\frac{3 g_0 r_0}{\bar{q}^2}} \text{ sec.}$$

Setzt man die Temperatur der Stratosphäre konstant — $53{,}5^0$, so ist für Wasserstoff $\bar{q} = 1{,}65 \cdot 10^5$ cm/sec, $\frac{3 g_0 \cdot r_0}{\bar{q}^2} = 70$ und daraus $t_0 = 9{,}4 \cdot 10^{23}$ sec $= 3 \cdot 10^{16}$ Jahre; $t_1 = 2{,}8 \cdot 10^{25}$ Jahre also groß *gegen* die für die Entwicklungsgeschichte der Erde in Betracht kommenden Zeiten. Für Sauerstoff ist $\bar{q}^2$ 16 mal kleiner, dadurch ergeben sich für t_1 Zeiten von der Größenordnung 10^{480} Jahre, und es wäre nach *Jeans* die Möglichkeit gegeben, die Armut der Atmosphäre an Wasserstoff (und Helium) zu erklären. Dieses Rechnungsverfahren leidet an dem Übelstande, daß die Exponentialgröße außerordentlich temperaturempfindlich ist. Die für Wasserstoff und für — $53{,}5^0$ berechneten Zeiten t_1 stellen sich für 0^0, resp. — 100^0 auf 10^{17} und 10^{30} Jahre. In bezug auf die Ausdehnung dieser Betrachtung auf die atmosphärischen Verhältnisse anderer Glieder des Sonnensystems kann auf die zitierte Quelle bei *Jeans* verwiesen werden.

33. Behandlungsweise von Milne. Auch *Milne*[51]) geht aus von Gleichung (58), doch wird den Zusammenstößen durch die folgende Überlegung Rechnung getragen. Wenn ein Beobachter in einer Atmosphäre aufsteigt und es wären ihm die einzelnen Moleküle als Scheibchen wahrnehmbar, so würde ihm in tieferen Schichten der Ausblick auf den freien Himmel durch diese Scheibchen, oft in Überdeckung, abgeschirmt. Er wird allmählich ein Niveau erreichen, in welchem sie den Himmel ohne Überdeckung gerade noch vollständig abdecken. Bei weiterem Aufstieg wird sich im Zenit der Himmel klären, außerhalb einer gewissen Zenitdistanz aber vollständig bedeckt bleiben. In dem Maße, wie diese Zenitdistanz der Bedeckung, der „molekulare Horizont" sich erweitert und der freie Himmel sich öffnet, steigt für

Moleküle hyperbolischer Geschwindigkeit die Wahrscheinlichkeit, ohne Zusammenstöße davon zu kommen. Da aber ihre Zahl mit der Höhe abnimmt, stellt sich die Maximums- und Minimumsaufgabe, Radius, Dichte und Temperatur derjenigen Schicht zu bestimmen, welche den größten Massenverlust erleidet. Sie wird von *Milne* eingehend behandelt für eine Gaskugel, die nach den in Nr. **31** dargelegten Gesetz aufgebaut ist; doch darf der Aufwand an rechnerischer Analyse im Hinblick auf die mannigfachen Vereinfachungen nicht darüber täuschen, daß es sich nur um eine „rohe Approximation“ handelt. Numerische Rechnungen werden ausgeführt für Riesensterne, die nach Eddington im Strahlungsgleichgewicht sind. Als Gas wird einatomiger Wasserstoff angenommen, als Moleküldurchmesser der Durchmesser des zweiten *Bohr*schen Kreises. Es ergibt sich, daß von allen Sternen, deren effektive Temperatur 3000° und darüber ist, der Riesenstern von 0,855 Sonnenmasse und 3000° effektiver Temperatur das Wasserstoffgas rascher abgibt als ein anderer Stern Wasserstoff oder ein anderes Gas. Der Massenverlust ergibt sich von der Größenordnung

$$2 \cdot 10^{-87} \varrho_0 \text{ g/sec} = 6 \cdot 10^{-74} \varrho_0 \text{ g}/10^6 \text{ Jahre}$$

wobei das ϱ_0 der in Betracht kommenden Schichten von der Größenordnung 10^{-7} anzusetzen ist; d. h. ein Massenverlust durch zu rasche Gasmoleküle kann für alle Sterne vollkommen außer Betracht bleiben.

Diese Untersuchungen von *Milne* und *Jeans* ergeben in Übereinstimmung, daß von einem Massenverlust von Gaskugeln und Atmosphären durch Moleküle mit hyperbolischer Geschwindigkeit abgesehen werden kann. Die Frage nach Beobachtungsmaterial zur Prüfung dieses Satzes in der Entwicklungsgeschichte dieser Erde scheint noch nicht angeschnitten zu sein. Weitere Untersuchungen dieser Verhältnisse erscheinen äußerst wünschenswert angesichts eines vermuteten Zusammenhangs zwischen Alter und Masse der Sterne (Nr. **69**)

Da der Verlust an Wasserstoff zu vernachlässigen ist, kann von einem Verlust schwerer Moleküle erst recht abgesehen werden. Allein in einer heißen Atmosphäre ist mit Ionisierung zu rechnen und der Verlust an ungleich leichteren Elektronen kann beträchtlich werden. Er wird vermindert dadurch, daß so die Atmosphäre positive Ladung annimmt. *Milne* dehnt seine Betrachtungsweise auch auf diese Verhältnisse aus. Es ergibt sich, daß im stationären Zustand das Potential der Sonne positiv sein muß und zwar kleiner als 1900 und größer als 30 Volt, da sonst der Verlust an positiven Wasserstoffkernen oder negativen Elektronen den 1. resp. 2. Wert reduzieren würde. Das Potential eines Riesensterns wird zwischen + 15 und + 44 Volt abgeschätzt.

a) Kosmische Staubmassen.

Angeregt durch Bemerkungen von *Lockyer* hat *G. H. Darwin*[56]) zuerst die Frage erörtert, ob nicht unter Umständen Gasmassen, insbesondere der Gasball der *Kant-Laplace*schen Nebularhypothese, durch Ansammlungen kosmischen Staubes ersetzt werden könnten, ohne zu unwahrscheinlichen Vorstellungen zu führen. In mühsamer mechanischer Quadratur wurde der Aufbau einer Kugel kosmischen Staubes als isotherm-adiabatisches System (Nr. **36**) ausgewertet. Ist diese Zulässigkeit aber nachgewiesen, so kann durch einfache Ähnlichkeitstransformation eine jede Kugel 1-atomigen Gases durch eine entsprechende Kugel kosmischen Staubes ersetzt werden. Polytrope Kugeln von der Klasse n entsprechen qualitativ Kugeln kosmischen Staubes von der Klasse n. Die in den Nr. **17—20** angeführten Sätze und numerischen Auswertungen lassen sich sinngemäß auf kosmische Staubmassen übertragen. Die einzelnen Teilchen einer kosmischen Staubmasse sollen im folgenden stets als Steine bezeichnet werden. Über die zulässige Masse und Größe derselben wird in Nr. **35** zu sprechen sein. Von Steinen, deren Masse nach Grammen sich bemißt, geben die auf die Erde niederfallenden Meteoriten Kunde; andererseits können ganze Fixsternsysteme als kosmische Staubmassen, die einzelnen Sterne als Steine aufgefaßt, behandelt werden (Nr. **40**).

34. Über die Notwendigkeit von Geschwindigkeiten im interstellaren Raum. Es ist klar, daß eine kosmische Staubmasse, deren Steine sich in gegenseitiger Ruhe befinden, keine Beständigkeit haben kann. Die Wolke bestehe aus N gleich großen Steinen von der Masse m, und sei als Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$ so aufgebaut, daß die Steine sich an den Ecken gleich großer Würfel von der Kantenlänge λ befinden. Die Zahl N sei genügend groß, so daß wir mit einer Raumdichte ϱ dieser Ansammlung rechnen können. Ein Stein im Abstand r vom Zentrum erleidet eine zentrale Beschleunigung $\frac{4\pi G r \varrho}{3}$. Der Weg ist zentral gerichtet und seine Länge pro Sekunde proportional dem Abstand r. Die Zusammenziehung erfolgt also gleichförmig, wie die einer polytropen Gaskugel, und niemals kommt es zu einem Zusammenstoß zweier Steine, wenn wir von ihren Dimen-

56) *G. H. Darwin*, On the mechanical condition of a swarm of meteorites London Royal. Soc. Trans. 180 (1889), p. 1.

57) Die Untersuchungen Darwins, sowie die im folgenden zu besprechenden Ausführungen sind teils gekürzt, teils erweitert dargestellt in *R. Emden*, Gaskugeln, Kap. XIV.

sionen absehen, außer im Zentrum. *Lord Kelvin*[58]) hat die zum Zusammensturze notwendige Zeit berechnet. Befindet sich der Stein in der Ruhe (Ausgangslage) im Abstand r_0, so liefert das Energieprinzip seine Geschwindigkeit q im Abstand r

$$\text{(a)} \qquad q = \sqrt{\frac{8\pi G r_0^{\,3} \varrho}{3}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)},$$

woraus die Differentialgleichung folgt

$$\text{(b)} \qquad dt = dr \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Integration liefert die Zeit bis zur Ankunft im Mittelpunkt, also die zum Zusammensturze notwendige Zeit:

$$\text{(63)} \qquad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^{\,3}}{2GM}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2G\varrho}} \text{ sec.}$$

Sie ist gleich für alle Steine und nur bedingt durch die anfängliche Dichte der Ansammlung.

Wir nehmen den *Kant-Laplace*schen Gasball an, an Masse gleich der Sonne, an Radius $= 50$ Erdbahnradien $= \frac{5}{3}$ Neptunbahnradien und $\varrho = 1{,}11 \cdot 10^{-12}$ g/cm³; so folgt für die Steinmasse 1 g $\lambda = 9{,}06 \cdot 10^3$ cm und $t = 1{,}99 \cdot 10^9$ sec $= 63{,}4$ Jahre. Also eine Zeit von einer Größenordnung, daß wir unmöglich von einer Ansammlung ruhender Steine ausgehen können.

Wir machen noch mit *Lord Kelvin* eine Anwendung auf den ganzen Fixsternkomplex, den wir annehmen als Kugel, aufgebaut aus 1000 Millionen Sonnen und einem Radius entsprechend einer Parallaxe von $0{,}001'' = 3000$ Lichtjahren. Dann folgt $\varrho = 1{,}57 \cdot 10^{-23}$ g/cm³, $\lambda = 4{,}98 \cdot 10^{15}$ cm, einer Parallaxe von rund $1''$ entsprechend, und wird:

$$t = 5{,}31 \cdot 10^{14} \text{ sec} = 16{,}8 \cdot 10^6 \text{ Jahre.}$$

Berechnen wir noch die Geschwindigkeiten. Die Kugel sei bis 20,7 Erdbahndurchmesser zusammengeschrumpft (Uranusbahn), $\varrho = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$ g/cm³, so daß der ganze Fixsternkomplex noch hinreichend Platz findet. In diesem Moment ist an der Begrenzung die Geschwindigkeit $q = 2{,}89 \cdot 10^{10}$ cm/sec erreicht und die Zeit $t = 5{,}31 \cdot 10^{14} - 7{,}11 \cdot 10^3$ sec verflossen. Die Begrenzung der Kugel hat also Lichtgeschwindigkeit erlangt, der Kontraktionsprozeß hat 16,8 Millionen Jahre weniger $7{,}11 \cdot 10^3$ sec gedauert; nach rund 2 Stunden ist der Zusammensturz erfolgt. *Lord Kelvin* benutzt diese Zahlen, um die bei Fixsternen

58) *Lord Kelvin,* On the clustering of gravitational matter in any part of the universum, Baltimore Lectures, App. D. p. 532.

beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären, doch dürfte die Lebensdauer von 16,8 Millionen Jahren von unmöglicher Größenordnung sein.

Lassen wir die Kugel rotieren, so daß die Dauer einer Umdrehung

$$\tau' = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}} = 96 \text{ Millionen Jahre}$$

beträgt, so wäre für jeden Stein in der Äquatorebene die zentrale Beschleunigung aufgehoben; in der Richtung der Achse blieben aber unmögliche Lebensdauern bestehen.

Der Widerspruch dieser Lebensdauer mit unseren Anschauungen ist schwerlich darin begründet, daß wir die Anzahl der Massen und Distanzen von falscher Größenordnung angesetzt haben, sondern dadurch bedingt, daß wir von einer ursprünglichen Eigenbewegung der Fixsterne, allgemein der Steine, abgesehen haben. Verteilungen nach dem *Maxwell*schen Gesetz können, wie in folgenden Nr. **36**, **37** dargetan wird, unter Umständen stabile Verhältnisse schaffen.

35. Über die zulässige Steingröße. Die kinetische Gastheorie setzt voraus, daß die geradlinigen Bahnen zweier Teilchen sich erst dann krümmen, wenn die beiden Teilchen sich auf eine durch die Wirkungssphäre gegebene Minimaldistanz nähern, d. h. ein „Zusammenstoß" stattfindet. Bei Übergang zu Staubmassen setzen wir fest, daß die Wirkungssphäre der kugelförmig angenommenen Steine mit ihrer geometrischen Oberfläche zusammenfällt, und folglich die Krümmung ihrer Relativbahnen auch dann noch unmerklich sein soll, falls sie noch mit streifender Inzidenz aneinander vorbeigleiten. Dadurch ist bei gegebener Dichte δ der einzelnen Teilchen die noch zulässige Größe des Durchmessers σ und deren Masse μ bestimmt. Beschreibt ein Teilchen um das andere eine Hyperbel von der Exzentrizität ε und der Halbachse a, so ist im Augenblick der Berührung $\sigma = a(\varepsilon - 1)$ und, ist die Geschwindigkeit der Steine also ihre relative Geschwindigkeit im großen Abstand $\bar{q}$, so liefert das Gesetz der Zentralbewegung $a = G(\mu + \mu')\cdot \bar{q}^{-2}$, so daß wir haben $\varepsilon = \frac{\sigma \bar{q}^2}{2G\mu} + 1$. Ist die Hyperbel sehr flach, ε sehr groß, so ist der zwischen der Asymptote und y-Achse gelegene Winkel $\frac{1}{\varepsilon}$ oder die in Graden gemessene Halbablenkung $= \frac{180}{\pi}\frac{4G\mu}{\sigma\bar{q}^2} = \Delta^0$. Daraus folgt

$$(64) \qquad \sigma = \bar{q}\sqrt{\frac{\Delta^0}{120\, G\delta}} = 3{,}5\cdot 10^2 \sqrt{\frac{\Delta^0}{\delta}}\, \bar{q} \text{ cm}; \quad \mu = \frac{1}{6}\pi\delta\sigma^3 \text{ g}.$$

Nimmt man eine Ablenkung von 10^0 noch als hinreichend klein an und setzt die Dichte der Steine rund = Erddichte = 5 g/cm³, so

folgt
$$\sigma = 5 \cdot 10^2 \cdot \bar{q} \text{ cm}.$$
Unter annehmbaren Verhältnissen (Nr. **36**) berechnet sich $\bar{q}$ zu rund $5\frac{1}{2}$ km/sec und damit
$$\sigma = 2{,}75 \cdot 10^8 \text{ cm}, \quad \mu = 2 \cdot 10^{25} \text{ g} = \tfrac{1}{25} \text{ Erdmasse}.$$
Da wir in den in Betracht kommenden Staubmassen kaum mit Steinen von dieser Größenordnung zu tun haben, können wir unbedenklich den Aktionsradius gleich ihrem wirklichen Radius setzen und sie weiterhin als Gasmoleküle behandeln.

Es liegt nahe dieselbe Betrachtung auf Fixsternsysteme auszudehnen. Rechnen wir in Ermangelung anderer Kenntnisse mit Fixsterngeschwindigkeiten, wie sie in unserer Milchstraße auftreten, setzen also $\bar{q}$ rund 55 km/sec, so folgt
$$\sigma = \frac{6{,}1 \cdot 10^9}{\sqrt{\delta}} \text{ cm}, \quad \mu = \frac{1{,}2 \cdot 10^{29}}{\sqrt{\delta}} \text{ g}.$$

Da die Sonne mit $\delta = 1{,}4$ zu den dichteren Sternen gehört, wird man durchschnittlich mit kleinen δ rechnen können und kommt so zu dem Ergebnis, *daß in diesen Staubmassen Fixsterne von der Masse der Sonne noch als Gasmoleküle behandelt werden dürfen.*

In allen Fällen besteht aber ein wichtiger Unterschied zwischen Gas- und Staubmassen. Die kinetische Gastheorie kennt nur vollkommen elastische Zusammenstöße, während in Staubmassen bei Zusammenstößen im gewöhnlichen Sinn des Wortes durch unvollkommene Elastizität und etwaige Zertrümmerung derselben ein Verlust an kinetischer Energie eintritt. Doch treten Zusammenstöße dieser Art, wie sich zeigen wird, äußerst selten auf, vgl. unten Nr. **36**.

36. Bau kosmischer Staubmassen. Die kinetische Gastheorie liefert hierzu die folgende Beziehungen. Aus Gasdruck p und Gasdichte ϱ berechnet sich das mittlere Geschwindigkeitsquadrat

(a) $$\bar{q}^2 = 3\frac{p}{\varrho} \text{ sec}^2/\text{cm}^2.$$

Der mittlere Abstand je zweier Moleküle von der Masse μ wird

(b) $$\lambda = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\varrho}} \text{ cm}$$

und ist σ der Durchmesser der Wirkungssphäre, so ist die mittlere freie Weglänge

(c) $$\mathfrak{L} = \frac{\mu}{\varrho\sigma^2\pi\sqrt{2}} = \frac{\lambda^3}{\sigma^2\pi\sqrt{2}} \text{ cm}$$

und die zugehörige freie Zeit

(d) $$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{L}}{\bar{q}}\sqrt{\frac{3\pi}{8}} \text{ sec}.$$

Ist eine polytrope Kugel vollkommenen Gases gegeben, so ist an jeder Stelle p und ϱ bestimmt und damit auch das Verhalten der einzelnen Moleküle nach diesen Beziehungen. In einer kosmischen Staubmasse ergibt die entsprechende Behandlung an jeder Stelle p und ϱ. Ein Molekulargewicht und der Begriff der Temperatur kommt nicht in Frage (sondern nur die Beziehung $p \sim \varrho^{\frac{n+1}{n}}$, vgl. Nr. **30**), und durch die vier angegebenen Beziehungen ist das Verhalten der einzelnen Steine bestimmt. Dabei ist der Durchmesser der Wirkungssphäre durch den Steindurchmesser zu ersetzen. Haben die einzelnen Steine eine Dichte δ und setzt man, für Überschlagsrechnung zweckmäßig, $\delta = 5{,}9683$ also etwas geringer als die Dichte des Eisens an, so wird

$$\mu = \tfrac{25}{8}\sigma^3 = 3^1/_8\,\sigma^3\ \text{g}.$$

Für $\sigma = 1$, 10, 100 cm wird $\mu = 3^1/_8$ g, kg, t usw. Die Größe σ ist gemäß Nr. **35** nach oben begrenzt. Zweckmäßig wird $\sigma = 1$ cm angesetzt, die Umrechnung für andere Dimensionen vollzieht sich mühelos.

Die allgemein übliche Betrachtungsweise der kinetischen Gastheorie oder allgemein gesprochen, die statistische Behandlungsweise beruht auf drei Voraussetzungen. 1. Die Anzahl der Teilchen ist sehr groß oder anders ausgedrückt, die Gesamtmasse ist sehr groß gegenüber der Masse der einzelnen Teilchen. 2. Die Dimensionen des Systems sind hinreichend groß gegenüber der freien Weglänge. 3. Die in Betracht kommenden Zeiten sind hinreichend groß gegenüber der freien Wegzeit. (Dazu kommen die in Nr. **33** erörterten Verhältnisse über die gegenseitige Einwirkung der Teilchen.) Voraussetzung 1 bedarf keiner näheren Besprechung. Allein die Behandlung der Kugel als Kontinuum liefert für die Oberfläche $\varrho = 0$, mit Annäherung an sie wachsen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ bis ∞ und die statistische Behandlungsweise versagt. Für die Grenzen ihres Anwendungsbereichs stellt *Darwin* zwei Kriterien auf.

1. Die Zeit $\mathfrak{T}$ muß klein sein gegenüber einer Zeit, die durch das System selbst näher definiert ist. Als diese Zeit wählt *Darwin* die Zeit einer Grundschwingung der Kugel (Nr. **44**)

$$\mathfrak{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{R}^3}{G\mathfrak{M}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{g}}$$

und erhält so sein erstes Kriterium

$$\text{(a)}\qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_0} = \frac{\mu}{8\pi\sqrt{\pi}\,\sigma^2\varrho}\sqrt{\frac{\varrho}{p}\cdot\frac{g}{\mathfrak{R}}}\qquad \text{klein gegen 1.}$$

2. In der Zeit $\mathfrak{T}$ fällt ein Stein gegen das Zentrum um die Strecke $D = \frac{1}{2}g\mathfrak{T}^2$, die, da die Bahn geradlinig sein soll, klein gegen

$\mathfrak{L}$ bleiben muß. Dies liefert sein zweites Kriterium

$$\text{(b)} \qquad \frac{D}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{g}{p} \quad \text{klein gegen 1.}$$

Mit Annäherung an die Oberfläche werden die Kriterien nicht mehr erfüllt und muß die statistische Behandlungsweise aufgegeben werden. Die weiter außen auftretenden Verhältnisse sind in Nr. **37** näher dargelegt.

Sucht man an Hand von Spezialfällen besseren Einblick zu erhalten in die numerischen Verhältnisse, so geht man mit *Darwin* zweckmäßig näher ein auf die kosmischen Staubmassen, die den Gasball der *Kant-Laplace*schen Hypothese ersetzen können. Ihre Masse wird gleich der Sonnenmasse $= 1{,}94 \cdot 10^{33}$ g gesetzt und ihr Radius zu 44,563 Erdbahnradien (Neptunbahn = 30) angenommen. Die mittlere Dichte beträgt dann $\bar{\varrho} = 1{,}5687 \cdot 10^{-12}$ g/cm³. Bei *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. XIV, finden sich die Fälle $n = 0$ und $= 1{,}5$ (Adiabate einatomigen Gases), sowie der von *Darwin* behandelte Fall eingehend ausgeführt. Für $n = 0$ ist die Staubmasse überall von gleicher Dichte $\bar{\varrho}$ und für Steine von 1 cm Durchmesser, Gewicht $3^1/_8$ g wird durchgehend der mittlere Abstand $\lambda = 1{,}258 \cdot 10^4$ cm und die mittlere freie Weglänge $\mathfrak{L} = 4{,}484 \cdot 10^{11}$ cm = dem zwölffachen Abstand (Mond—Erde) $= \frac{1}{1500}$ Gesamtradius. Im Zentrum, an der Stelle lebhaftester Bewegung, beträgt die mittlere freie Zeit $9{,}018 \cdot 10^5$ sec und erleidet also ein Stein etwa alle 10 Tage einen Zusammenstoß, bei einer Fluggeschwindigkeit von 5,397 km/sec. Bei einem Steingewicht von $3^1/_8$ kg würde die freie Weglänge um das zehnfache zunehmen und die Zusammenstöße zehnmal seltener eintreten. Die kritischen Werte sind noch im Abstand 0,9 $\mathfrak{R}$ von der Größenordnung 10^{-5} bzw. 10^{-4}; nimmt man 10^{-2} als größten zulässigen Wert an, so können auch Steine im Gewicht von $3^1/_8$ kg zugelassen werden. Bei $3^1/_8$ t Gewicht hingegen würde die statistische Behandlungsweise schon von $r = 0{,}4\,\mathfrak{R}$ an versagen. Für die adiabatische Staubmasse betragen im Mittelpunkt: die Dichte $9{,}413 \cdot 10^{-12}$ g/cm³, die mittlere Geschwindigkeit $5{,}60 \cdot 10^5$ cm/sec, die freie Weglänge $7{,}473 \cdot 10^{10}$ cm und die freie Zeit $1{,}448 \cdot 10^5$ sec. *Darwin* nimmt isotherm adiabatischen Aufbau (vgl. oben Nr. **28**) an. Äußere störende Ursachen, welche die Steine in radialer Richtung durcheinander wirbeln, schaffen hier konvektives Gleichgewicht; mit zunehmender Tiefe erlischt ihre Wirkung und muß sich Ausgleich der Geschwindigkeit (Isothermie) einstellen. Der Übergang wird so rasch angenommen, daß eine mathematisch faßbare Grenze eintritt. Hier treten die in Nr. **26** dargelegten periodischen Verhältnisse besonders auffallend in Erscheinung. Nimmt man eine hinreichend große Zahl vollkommener elastischer Bälle in starrer Hülle an, die unter innerer Gravitation stehen, und kann die statistische Behandlungsweise Platz greifen, so gibt es eine mittlere Geschwindigkeit, die mehrfache Anordnung in konzentrischer Schichtung, und eine Geschwindigkeit, die unendlich viele Arten konzentrischer Schichtung zuläßt. *Darwin* benutzt den Minimalwert der „Temperatur", welche noch eine Lösung zuläßt (Nr. **26**). Er ist gegeben durch die Beziehung

$$\overline{q}^2 = 3\frac{R}{m}T = 3 \cdot 0{,}39688\frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i} = 1{,}19064 \cdot g_i\mathfrak{R}_i \text{ cm}^2/\text{sec}^2.$$

$\mathfrak{M}_i$ sowie $\mathfrak{R}_i$ Masse und Radius des isothermen Kerns. Dadurch ist das ganze System eindeutig bestimmt und es betragen für den isothermen Kern

$$\mathfrak{M}_i = \frac{1{,}943 \cdot 10^{33}}{2{,}1744} = 8{,}942 \cdot 10^{32}\text{ g}$$

$$\mathfrak{R}_i = \frac{6{,}6625 \cdot 10^{14}}{2{,}7854} = 2{,}392 \cdot 10^{14}\text{ cm} = 16{,}000 \text{ Radien der Erdbahn}$$

$$\overline{q}^2 = 1{,}1906\frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i} = 2{,}9631 \cdot 10^{11}\text{ cm}^2/\text{sec}^2$$

$$\varrho_0 = 10{,}697\frac{3\mathfrak{M}_i}{4\pi\mathfrak{R}_i^3} = 1{,}669 \cdot 10^{-10}\text{ g/cm}^3.$$

Im isothermen Teil beträgt die mittlere Geschwindigkeit rund $5^1/_2$ km/sec, um im adiabatischen Teil bis auf Null abzunehmen. Die mittlere freie Weglänge wächst von 42000 km im Zentrum bis auf $1 \cdot 10^6$ km im Abstand von 16 Erdbahnradien und auf $62 \cdot 10^6$ km im Abstand von 42 Erdbahnradien. Die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen beträgt im Zentrum $2^1/_4$ Stunden, im Abstand 16 Erdbahnradien 13 Tage und steigt im Abstand 40 Erdbahnradien auf 1,35 Jahre an. Die hydrodynamische Behandlung scheint bis 0,9 Radien zulässig.

Die Energetik einer kosmischen Staubmasse entspricht der Energetik einer Ansammlung einatomigen Gases. Für eine Gaskugel ist (Nr. **21**) $\frac{U}{\Omega} = -\frac{1}{3(\varkappa - 1)}$ und für einatomiges Gas $= -\frac{1}{2}$. Der Energie U entspricht bei der Staubmasse der Gesamtinhalt an kinetischer Energie L der als Massenpunkte behandelten Steine, so daß die Beziehung besteht $\frac{L}{\Omega} = -\frac{1}{2}$. Geht durch Zusammenstöße keine kinetische Energie verloren, so bleibt auch Ω konstant und es findet keine Kontraktion statt. Andernfalls erfolgt gleichförmige Kontraktion und wird die Hälfte der Arbeit verwendet zur Erhöhung der kinetischen Energie der Steine. Die andere Hälfte, die bei Gasmassen in Form von Strahlung abgegeben wird, dient hier zur Erwärmung und zur Zertrümmerung der Steine. Dabei können lokal sehr hohe Temperaturen auftreten, so daß es, wie bei den Sternschnuppen, zu Verdämpfungs- und Leuchterscheinungen kommt. Auf diese Weise können auch Staubmassen als selbstleuchtende Gebilde in Erscheinung treten.

37. Grenzverhältnisse und Massenverlust kosmischer Staubmassen. In der Nähe der Oberfläche versagen selbstverständlich die beiden *Darwin*schen Kriterien und damit auch die statistische Behandlungsweise. In jeder kugelförmigen Staubmasse existiert ein Grenzradius A, außerhalb dessen das *Maxwell*sche Verteilungsgesetz nicht mehr angewendet werden darf. Um diese Verhältnisse zu untersuchen, wird mit *Darwin* der Grenzfall angenommen, daß außerhalb A überhaupt keine Zusammenstöße mehr sich ereignen, so daß die Steine freie Kegelschnitte beschreiben. Die Schwerkraft an jeder Stelle der Bahn ist bestimmt durch die Masse, die sich innerhalb einer Kugel befindet, deren Radius gleich ist dem Abstand des Steines vom Kugelzentrum; und diese Masse hängt von der Dichteverteilung des Schwarmes ab. Dieses allzu schwierige Problem wird auf Grenzfälle vereinfacht. Im ersten Fall wird angenommen, daß die außerhalb A liegenden Massen nicht mehr anziehend wirken. Im zweiten Fall wird außerhalb A anziehende Masse angenommen, deren Dichte wie $\left(\frac{A}{r}\right)^2$, also sicher langsamer wie in Wirklichkeit, abnimmt. Beide Annahmen führen praktisch zu gleichen Resultaten: Die Kugel erstreckt sich theoretisch bis unendlich, allein außerhalb A nimmt die Dichte rascher ab wie $\left(\frac{A}{r}\right)^2$, so daß bald praktisch zu vernachlässigende Dichten angetroffen werden. Das Aufhören der Gasgesetze hat also nur zur Folge, daß die scharfe Begrenzung der Masse verwischt und weiter hinausgerückt wird. An Stelle der Dichte $\varrho = 0$ der isotherm adiabatischen Staubmasse findet sich jetzt Dichte von der Größenordnung 10^{-13} g/cm^3.

Um die mit Abnahme der Zusammenstöße verbundenen Massenverluste zu bestimmen, geht man aus von Gleichung (58), welche die Mengen Steine bestimmt, die mit hyperbolischer Geschwindigkeit die Kugelschale A durchsetzen. Fehlen außerhalb die Zusammenstöße vollständig, so ist diese Menge gleich dem Massenverlust und ist damit die obere Grenze des möglichen Massenverlustes bestimmt. Die Größenordnung ist bestimmt durch die Exponentialgröße $e^{-\frac{3GM(r)}{r\overline{q}^2}}$. Nun ist $\frac{3GM(r)}{r\overline{q}^2} = \frac{GM(r)\varrho}{rp}$ dimensionslos, in den Variablen u_1, $\mathfrak{r}_1$

(Nr. **19**) ausgedrückt $= - \frac{\mathfrak{r}_1 \frac{d u_1}{d \mathfrak{r}_1}}{u_1}$ und kann die numerische Auswertung $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ für jede Klasse n und für jede Stelle r_1 entnommen werden, die in Wirklichkeit auf die Strecke r gestreckt wird. Dabei darf aber nur bis zu solchen Werten r und damit $\mathfrak{r}_1$ fortgeschritten werden, als mit hydrodynamischer Behandlungsweise verträglich ist. Legt man in der betrachteten isotherm-adiabatischen Staubmasse diese Kugelschale um 4,32 Erdbahnradien tiefer wie die theoretische Oberfläche (es ist dies der äußerste, durch mechanische Quadratur errechnete Punkt), so beträgt der höchstmögliche Massenverlust $4 \cdot 10^{12}$ g/sec, also im Lauf einer Million Jahre 10^{26} g bei einer Gesamtmasse von 10^{33} g. Bei weiterem Hinausrücken nimmt die Exponentialgröße und damit der Massenverlust rapid ab. Damit werden die oben (Nr. **32**) erhaltenen Resultate, daß von einem Massenverlust der Gaskugel abgesehen werden kann, durch die entsprechenden Verhältnisse bei Staubmassen bestätigt. In Wirklichkeit wird aber noch ein weiterer Umstand beachtet werden müssen. Die Erde empfängt sekundlich durch niederfallende Meteore einen Massenzuwachs von niedrig gerechnet 10^{-16} g/cm²; der oben berechnete Massenverlust der Staubmasse beträgt aber sekundlich 10^{-19} g/cm². *Würden sich in der Umgebung der Staubmasse Meteoriten in gleicher Dichte herumtreiben wie in der Umgebung der Erde, so wäre der Massenzuwachs größer als der Massenverlust.*

38. Zähigkeit kosmischer Staubmassen.[59]) Der Ausgleich der Geschwindigkeiten bei lamellarer Bewegung einer reibenden Flüssigkeit ist geregelt durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

ν^2 ein durch die Zähigkeit (Viskosität) der Flüssigkeit bestimmter Koeffizient. Durch dieselbe Differentialgleichung wird auch der Temperaturgang geregelt, wobei ν^2 durch das Temperaturleitungsvermögen bestimmt ist. In Gasen stehen bekanntlich beide Koeffizienten in der Beziehung

$$\text{(a)} \qquad \nu^2_{\text{Temperaturleitung}} = 1{,}6027\, \nu^2_{\text{Reibung}}$$

und dabei ist

$$\text{(b)} \qquad \nu^2_{\text{Reibung}} = \frac{1}{\pi} \mathfrak{L}\, \bar{q} \sqrt{\frac{3\pi}{8}}\ \text{cm}^2/\text{sec}.$$

In Staubmassen, als vergröberte Gase aufgefaßt, gelten dieselben Be-

59) *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. 14, § 12.

ziehungen, $\nu^2_{\text{Temperaturleitung}}$ regelt den Ausgleich des mittleren Geschwindigkeitsquadrates der Steine, ν^2_{Reibung} den Ausgleich ihrer Momente. Ist der Bau der Staubmasse ermittelt, so sind $\mathfrak{L}$ und $\bar{q}$ und dadurch die beiden ν^2 bestimmt. In der mehrfach betrachteten Staubmasse, diese aufgefaßt als Kugel in konvektivem Gleichgewicht, erreichen die ν^2 enorme Beträge. Sie sind von der Größenordnung 10^{16} und 10^{17} (während für Luft von Normaldichte $\nu^2_{\text{Reibung}} = 0{,}13\ \text{cm}^2/\text{sec}$ beträgt). Dieses auf den ersten Blick überraschende Ergebnis wird sofort verständlich durch die Größe der freien Weglänge und Fluggeschwindigkeit der Steine, wodurch ein Stein seine Wirkung in kurzer Zeit an weit entfernten Stellen zur Geltung bringen kann.

Die Wirkung von Zähigkeit und Wärmeleitung läßt sich durch folgende Betrachtung abschätzen: Zwei genügend ausgedehnte Staubmassen grenzen in der Ebene $x = 0$ zusammen; zur Zeit $t = 0$ soll im Reibungsproblem die eine Masse ruhen, die andere sich mit konstanter Geschwindigkeit q_0 parallel der Grenzfläche verschieben; im Temperaturproblem seien die Massen von konstanter Temperatur 0^0 und $T_0{}^0$. Der Ausgleich wird geregelt durch die Beziehung

$$q = \frac{q_0}{2}\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\nu\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta\right). \tag{65}$$

Nach unendlich langer Zeit hat sich durchweg die Geschwindigkeit $\frac{q_0}{2}$ bzw. Temperatur $\frac{T_0{}^0}{2}$ eingestellt. Die Abweichung von diesem Endzustand ist durch das Integral bestimmt. Setzen wir

$$\frac{x}{2\nu\sqrt{t}} = 0{,}09 \quad \text{bzw.} \quad 0{,}01,$$

so erhalten wir eine Abweichung vom Endzustand im Betrage von $10{,}13\,^0/_0$ bzw. $1{,}13\,^0/_0$. Soll der Ausgleich im Abstand x bis auf rund $10\,^0/_0$ erfolgen, so haben wir zu setzen

$$t = \frac{x^2}{0{,}18^2 \cdot \nu^2}\ \text{sec}$$

(Ausgleich auf $1\,^0/_0$ würde die Zeit um das 81fache vergrößern). Setzen wir $x = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ gleich dem Radius der Erdbahn und ν^2, wie oben angegeben, von der Größenordnung 10^{17}, so ergibt sich für t eine Zeit in der Größenordnung von Jahrtausenden. In solchen Zeiten, die für die Entwicklung der Weltkörper überhaupt keine Rolle spielen, würde sich in diesen und ähnlichen Staubmassen etwa vorhandene Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenzen bis auf Entfernungen $= 1$ Erdbahnradius bereits bis auf $10\,^0/_0$ ausgeglichen haben. Daraus folgt, daß in kosmischen Staubmassen weder mit Geschwindigkeitsdifferenzen (Winkelgeschwindigkeitsdifferenzen) noch mit Temperaturdifferenzen zu rechnen ist, *es sei denn, daß diese immer wieder neu erzeugt werden.* Isotherme kosmische Staubmassen aber sind an Masse unendlich. Reibungen und Wärmeleitung würden deshalb jede kosmische Staubmasse zerstreuen. Würden Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenzen unterhalten durch äußere Einwirkung, die nach der Tiefe zu erlischt, so resultiert ein isothermer Kern in einer Hülle, deren Polytropenklasse durch die Besonderheit dieser Einwirkung bestimmt ist. Sollen die noch möglichen Temperaturdifferenzen ein Minimum sein, so resultiert der isotherme Kern kleinster Temperatur, also ein System, wie es oben nach *Darwin* behandelt wurde.

Diese Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf Gaskugeln übertragen. Reibung und Wärmeleitung wirken dissipativ, sie lösen jede Gasmasse auf. *Eine Gaskugel von endlichem Radius ist nur möglich unter Einwirkungen, die Temperaturdifferenzen schaffen oder aufrechterhalten.* Diese Rolle übernimmt die in Abschnitt III behandelte Strahlung.

39. Kugelförmige Sternhaufen. Nachdem die Methoden entwickelt waren, aus der beobachteten Flächenverteilung die räumliche Verteilung der Sterne eines kugelförmigen Sternhaufens unter Voraussetzung konzentrischer Schichtung zu berechnen, stellte sich die Aufgabe, die Sterndichten als Funktion des Radius festzustellen. Aus naheliegenden Gründen sucht man Anschluß an die Gesetzmäßigkeit, die sich für das Dichtegesetz polytroper Gaskugeln ergab. Die Sternhaufen ω Centauri und M_3 wurden von *H. v. Zeipel*[38]) mit isothermen Gaskugeln verglichen. In den inneren Partien konnte so die Sternverteilung genügend genau dargestellt werden, für die äußeren Partien ergab sich die beobachtete Sterndichte zu groß. Hingegen fand *Plummer*[60]), daß sich für ω Centauri die Dichte sehr gut durch die Beziehung

$$f(r) \sim \left(\sqrt{\frac{1}{1+r^2}}\right)^5$$

darstellen ließ, also durch das Dichtegesetz der polytropen Gaskugeln $n = 5$ (Nr. **18**); für M_3 hingegen versagte diese Art der Darstellung. In sorgfältiger Untersuchung hat *v. Zeipel*[38]) den Aufbau der Sternhaufen M_2, M_3, M_{13} und M_{15} behandelt. Da die Lösungskurve $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ der vollständigen Gaskugel, also die Lösungskurven der

60) *W. C. Plummer,* London Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 810.

Differentialgleichung I (Nr. **17**) ohne Singularität im Mittelpunkt $\left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathfrak{r}_1} = 0 \text{ für } \mathfrak{r}_1 = 0\right)$ nur bis zum Maximalwerte $n = 6$ vorlagen (Nr. **20**), wurden durch mechanische Quadratur noch die Lösungskurven für $n = 7, 8, 9$ ermittelt. Mit vollständigen Gaskugeln verglichen, ergaben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, die Polytropenklassen

$$\begin{array}{ll} M_2 & n = 5{,}010 \pm 0{,}048 \\ M_3 & \phantom{n = {}} 6{,}396 \pm 0{,}122 \\ M_{13} & \phantom{n = {}} 5{,}480 \pm 0{,}044 \\ M_{15} & \phantom{n = {}} 5{,}601 \pm 0{,}096 \end{array}$$

Werte $n = \frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ und 3 sind, wie ein Vergleich der beobachteten Dichtigkeitsverteilung in den Kurven $u_1^n = f(\mathfrak{r}_1)$ unmittelbar zeigt, vollkommen ausgeschlossen. Die Differenz Rechnung—Beobachtung ist bei M_2, M_3 und M_{15} klein und vom Charakter zufälliger Fehler. Diese können mit genügender Genauigkeit vollständigen Gaskugeln mit entsprechenden n gleichgesetzt werden. Hingegen sind die Differenzen bei M_{13} beträchtlich und zeigte sich in ihnen ein systematischer Gang, so daß der Vergleich mit einer vollständigen Gaskugel bedenklich erscheint, ganz abgesehen davon, daß sich für $n > 5$ unendlich große Masse ergibt. Nun zeigt aber die Verteilung der Sterne verschiedene Helligkeit, daß diese Sternhaufen nahe dem Zentrum auf besondere Weise aufgebaut sind. Es erscheint deshalb angezeigt, diese zentralsten Partien auszuschließen und nur den Bau außerhalb einer kleinen Kugel zu untersuchen. Es wird damit der Vergleich mit einer vollständigen Gaskugel aufgegeben, mathematisch gesprochen, es wird eine Singularität im Mittelpunkt zugelassen. Dann tritt in der Lösungskurve $u = f(r)$ der Differentialgleichung I eine zweite Integrationskonstante auf, die mit Beseitigung der Singularität bei $r = 0$ verschwindet. *H. v. Zeipel* behandelt nun die Aufgabe, auch diese zweite Integrationskonstante, von ihm mit α bezeichnet, und gleichzeitig den Exponenten n unter Anwendung der Methode kleinster Quadrate neu zu berechnen. Setzt man $k = \frac{n+1}{n}$, so muß sich $k = \frac{6}{5} = 1{,}2$ für $n = 5$ ergeben. Es ergaben sich für

$$\begin{array}{ll} M_2 & k = 1{,}194 \pm 0{,}014 \\ M_3 & \phantom{k = {}} 1{,}198 \pm 0{,}011 \\ M_{13} & \phantom{k = {}} 1{,}203 \pm 0{,}010 \\ M_{15} & \phantom{k = {}} 1{,}197 \pm 0{,}022. \end{array}$$

Und im Mittel (mit entsprechenden Gewichten)

$$k = 1{,}198 \pm 0{,}007,$$

also mit außerordentlicher Genauigkeit (Zuverlässigkeit des behandelten Beobachtungsmaterials vorausgesetzt) $k = 1{,}2$, $n = 5$. *Ergebnis dieser Untersuchung ist somit Aufbau dieser vier kugelförmigen Sternhaufen nach einer Polytropen $n = 5$, wozu mit gleichem Resultat noch ω Centauri anzufügen ist.* In Abschnitt II B. haben wir darauf hingewiesen, daß eine Polytrope k aus Gasen von beliebigem $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ aufgebaut werden kann, und in dem Spezialfall $k = \varkappa$ die Polytrope in eine Isentrope übergeht. *H. v. Zeipel* (er spricht durchweg nur von adiabatischen Gasmassen) hat nur letztere Möglichkeit im Auge und sieht in diesen Sternhaufen Massen eines „Gases" mit einem $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{6}{5}$ im konvektiven Gleichgewicht, die physikalische Seite dieser Frage nicht weiter berührend. Hierzu ist folgendes zu ergänzen. Die Elemente eines Gases mit $\varkappa = \frac{6}{5}$ müssen offenbar zehn Freiheitsgrade besitzen[61]); ein Doppelstern besitzt als Ganzes $3 + 3 = 6$ Freiheitsgrade; dazu kommen weitere zwei, wenn seine Komponenten in parallelen Achsen senkrecht zur Verbindungslinie rotieren und nochmals zwei für deren Zentralbewegung; zusammen die erforderlichen zehn Freiheitsgrade. Läßt man solche oder andere geeignete Bausteine gelten, so hätte man sich noch immer mit dem Satz abzufinden, daß Gase mit $\varkappa = \frac{6}{5}$, also $< \frac{4}{3}$, kein stationäres Gebilde liefern können. Nimmt man andererseits als Bausteine einfach Sterne, denen je nach dem Verhältnis der Energie der Rotation zu der der Translationsbewegung ein $\varkappa = \frac{5}{3}$ oder $\frac{4}{3}$ beizulegen ist, so ist (wegen des negativen $\gamma = c_v \frac{k - \varkappa}{k - 1} = c_v(6 - 5\varkappa)$) nach der Wärmequelle zu suchen, welche aus der Isentrope die Polytrope $k = \frac{6}{5}$ herstellen und unterhalten. Spekulationen dieser Art liegen weit außerhalb des Rahmens dieses Berichtes, der lediglich das ermittelte Gesetz des Aufbaus feststellen soll.

40. Das Fixsternsystem als kosmische Staubmasse. In Nr. 34 wurde das Fixsternsystem stilisiert als Ansammlung von 10^9 Fixsternen von Sonnenmasse, welche eine Kugel von $3{,}1 \cdot 10^2$ cm $= 2 \cdot 10^8$ astronomische Einheiten $= 0{,}001$ Parallaxe in gleichmäßiger Anordnung erfüllt. Die Fixsterne stehen in den Ecken von Würfeln von der Kantenlänge $\lambda = 4{,}98 \cdot 10^{18}$ cm $=$ rund $3 \cdot 10^5$ astronomische Ein-

---

61) Siehe *L. Boltzmann* und *J. Nabl,* Kinetische Theorie der Materie, Encykl. V 1, 8, Nr. 28.

heiten, entsprechend einer Parallaxe von rund $1''$; die mittlere Dichte dieser Massenanordnung beträgt $1{,}47 \cdot 10^{-23}$ g/cm². Wie in Nr. **35** gezeigt, können Steine von Sonnenmasse noch als Gasmoleküle angesehen werden und als Seitenstück dieser Ansammlung ergibt sich die polytrope Gaskugel $n = 0$. Die mittlere freie Weglänge berechnet sich aus der Beziehung $\mathfrak{L} = \frac{\lambda^3}{\sigma^2 \pi \sqrt{2}}$, und setzen wir den Durchmesser der Sterne gleich dem Sonnendurchmesser, so folgt $\mathfrak{L} = 1{,}5 \cdot 10^{33}$ cm. Selbst wenn wir die Sterne auftreiben zu Kugeln vom Radius der Neptunbahn, bleibt $\mathfrak{L}$ noch von der Größenordnung 10^{26} cm, also außerordentlich groß gegen die Dimensionen des Gesamtvolumens. Damit ist aber eine der Grundlagen der herkömmlichen kinetischen Gastheorie verletzt. Das Fixsternsystem ist zu vergleichen mit dem Inhalte einer so hoch evakuierten Röntgenröhre, daß die freie Weglänge der Gasmoleküle außerordentlich groß gegen die Dimensionen der Röhre geworden ist. Zusammenstöße und deren Folgen fehlen beinahe vollständig, so daß das betrachtete Fixsternsystem nicht mehr ohne weiteres als vergröberte Gasmasse behandelt werden kann. Da anfängliche Ruhe der Steine zu Zusammenstürzen des Systems in kürzester Zeit führen muß (Nr. **35**) bleibt nichts anderes übrig als die Annahme, daß sie freie Kegelschnitte, speziell Ellipsen beschreiben. Zur Abschätzung der Größenordnung dürfte folgende vereinfachte Betrachtungsweise genügen.[62])

Im Innern einer Kugel homogener Dichte erleidet ein materieller Punkt eine Anziehung proportional seinem Abstand vom Zentrum. Er beschreibt eine Ellipse und das Integral der kinetischen Energie ergibt sich zu

(a) $$v^2 + \beta^2 r^2 = \text{const.}; \quad \beta = \tfrac{4}{3}\pi G \varrho.$$

Ist r_0 der maximale Abstand, und entspricht diesem die Geschwindigkeit $v = 0$, so folgt

(b) $$v^2 = \beta^2 (r_0^2 - r^2)$$

und für die Geschwindigkeit beim Passieren des Zentrums $v = \beta r_0$. Setzt man r_0 gleich dem Radius des betrachteten Fixsternsystems und ϱ gleich dessen Dichte, so wird $v = 65$ km/sec. Unser Sonnensystem liegt angenähert im Zentrum unseres Milchstraßensystems, und die berechneten Geschwindigkeiten sind von der Größenordnung der Geschwindigkeiten der nächsten Sterne.

Mit dem Fehlen der Zusammenstöße erlischt der Begriff der Temperatur und liegen Erörterungen dieser Verhältnisse nicht mehr im

---

62) *H. Poincaré*, Leçons, chap. 12, sowie *H. Kobold,* Stellarastronomie, Encykl. VI 2, B, 23, Nr. **50**, Kinematik des Sternsystems.

Rahmen dieses Berichtes. Über eine kinetische Gastheorie ohne Zusammenstöße, das zugehörige Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und den Aufbau von Sternsystemen unter dieser neuen Bedingung sei auf die Untersuchungen von *Eddington*[63]) und *Jeans*[64]) verwiesen. Schwierigkeiten, wie sie sich hier darbieten, würden naturgemäß auch dann auftreten, wenn eine hinreichend kurze Momentaufnahme der Moleküle eines wirklichen Gases zu interpretieren wäre.

G. Über säkulare Stabilität der Gaskugeln.[65])

Dieser Gegenstand, der mehr in die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper[66]) gehört, berührt seiner Auswirkung nach auch das kosmologische Problem und sei hier nur insoweit behandelt, als der prinzipielle Unterschied einer inkompressiblen Flüssigkeit und eines Gases als aufbauendes Material hervortritt.

Während die Theorie der Gleichgewichtsfigur inkompressibler Flüssigkeit durch zahlreiche Arbeiten in Etappen, die etwa durch die Namen *Maclaurin, Jacobi, Poincaré, Darwin, Lichtenstein* charakterisiert werden können, zu einem gewissen Abschluß gelangt ist, sind die Probleme für gasförmige Himmelskörper (im weitesten Sinn des Wortes), von einzelnen Vorläufern abgesehen, erst durch *Jeans*[67]) in Angriff genommen worden. Wir halten uns im folgenden an dessen Ausführung.

41. Problemstellung. Die Störungen, die ein sich entwickelnder Himmelskörper erleiden kann, lassen sich im wesentlichen in drei Gruppen teilen, die als

1. Rotationsproblem, 2. Gezeitenproblem und 3. Doppelsternsystem für vorliegende Zwecke hinreichend charakterisiert sind. Bezeichnet V_i das Potential der Masse des zu behandelten Gebildes, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, und V_a das Potential der von außen wirkenden Kräfte, so handelt es sich bekanntlich um Untersuchung der Flächenschar

$$\Phi = V_i + V_a + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}, \tag{66}$$

speziell um Bestimmung der Fläche, welche gerade die gegebene

63) *A. S. Eddington*, Stellar movements and the structure of the universe, Cambridge 1914, chap. XII.

64) *J. H. Jeans*, Problems, chap. 10.

65) Über den Begriff der säkularen Stabilität vgl. *W. Thomson* und *Tait*, Treatise of natural philosophy I, § 345 sowie *H. Lamb*, Hydrodynamik, deutsche Übersetzung, Leipzig 1907, § 204 und 352.

66) *S. Oppenheim*, Theorie der Gleichgewichtsfiguren, Encykl. VI 2, B, 21.

67) *J. H. Jeans*, Problems, chap. 7.

Masse $\mathfrak{M}$ des Gebildes umschließt, also der freien Oberfläche. Es ist klar, daß im Falle der Kompressibilität die Bestimmung von V_i ungleich schwieriger ist wie im Falle $\varrho = \text{const.}$ Die Bedingung hydrostatischen Gleichgewichtes ist $dp = -\varrho d\Phi$ mit der Folge, daß die Flächen gleichen Potentials stets Flächen gleichen Drucks und gleicher Dichte sind. Ist die Dichte variabel, so ist, um den Aufbau eindeutig zu machen, eine Beziehung zwischen p und ϱ, also ein thermodynamischer Weg anzugeben. Auch hier erweist sich die elastische polytrope Beziehung $p \sim \varrho^{\frac{n+1}{n}}$ überaus zweckmäßig. Sie liefert (Nr. 7)

$$\frac{dp}{\varrho} = (n+1)\frac{R}{m}\Theta u; \quad \varrho = u^n; \quad p = \frac{R}{m}\Theta u^{n+1}.$$

Die Flächen $\Phi = \text{const.}$ bestimmen Flächen $u = \text{const.}$ und es ergibt (entsprechend Nr. **17**) sich für den Aufbau die Differentialgleichung

$$(n+1)\frac{R}{m}\Theta \Delta u + 4\pi G\varrho = 2\omega^2, \tag{67}$$

d. i. für $\omega = 0$ die Differentialgleichung I (Nr. **17**); für $n = 0$ und $n = \infty$ die Spezialfälle $\varrho = \text{const.}$ und $T = \text{const.}$ enthaltend.

Ist der Himmelskörper aus inkompressibler Flüssigkeit aufgebaut und wachsen die störenden Ursachen, V_a und ω, vom Werte Null an, so durchläuft er, von Kugelgestalt ausgehend, eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren, bis mehr oder minder plötzliche Instabilität eintritt. Sie wird eingeleitet, indem sich im Rotationsproblem und Doppelsternproblem nur eine, im Gezeitenproblem unter Umständen mehrere Einschnürungen bilden. Von diesem Augenblick an hört die rechnerische Behandlung auf und der weitere Verlauf der eintretenden Katastrophe läßt sich nur nach allgemeineren Gesichtspunkten beurteilen. Wir schließen, daß ein aus inkompressibler Flüssigkeit aufgebauter Himmelskörper sich schließlich stets durch Spaltung in einen oder mehrere Körper von gleicher Größenordnung teilt.

42. Ein Grenzfall. Wegen der Schwierigkeiten, die sich im Falle kompressibler Flüssigkeit bei der Berechnung von V_i ergeben, konstruiert man einen Grenzfall. Es sei die Masse einer Atmosphäre so klein gegenüber der Masse eines Zentralkörpers, daß die von ihr ausgehenden Gravitationskräfte vernachlässigt werden können. Setzt man den Zentralkörper als Kugel von der Masse M an, so ist zu untersuchen die Form der Flächen

$$\Phi = \frac{GM}{r} + V_a + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.} \tag{68}$$

Diese Anordnung ist bekannt als Modell von *Roche.* Ist V_a und ω gegeben, so ist Φ als Funktion der Koordinaten x, y, z eindeutig bestimmt, und zwei verschiedene Äquipotentialflächen können sich niemals schneiden. Als freie Oberfläche muß aus der Schar dieser Flächen diejenige herausgesucht werden, welche die gegebene atmosphärische Masse gerade umschließen kann. Diese Eindeutigkeit von Φ hat zur Folge, daß es hier *niemals*, wie im Falle inkompressibler Flüssigkeit *stets*, zu einem Teilungsprozeß kommen kann. Denn Bedingung für einen Teilungsprozeß ist, daß sich zwei verschiedene Gleichgewichtskonfigurationen berühren. Lassen wir die Störungen V_a und ω von Null an wachsen, so werden dadurch Äquipotentialflächen bestimmt, die immer mehr ihre Kugelgestalt verlieren und schließlich von geschlossenen zu offenen Formen übergehen. Ist ein kritischer Punkt überschritten, so existiert keine geschlossene Fläche mehr, welche die ganze Masse enthalten kann, und in der Weiterentwicklung des Gebildes tritt eine Katastrophe ein. Von welcher Art sie ist, läßt sich beurteilen, wenn auch von der Störung V_a abgesehen und das reine Rotationsproblem

$$\Phi = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = C \tag{68a}$$

untersucht wird.[64])[66]) Überschreitet C den kritischen Wert $\frac{3}{2}(M\omega)^{\frac{2}{3}}$, so sind keine geschlossenen Äquipotentialflächen mehr vorhanden und keine Gleichgewichtsfigur mehr möglich. Die Meridiankurve der kritischen Fläche hat symmetrisch zur Rotationsachse zwei Doppelpunkte, die Fläche selbst in der Äquatorebene eine scharfe Kante. Ihr Äquatorialradius ist $r_0 = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, und es ist leicht ersichtlich, daß außerhalb einer Kugel von diesem Radius keine Masse mehr liegen kann, da die Zentrifugalkraft die Anziehungskraft überwiegt. Die Abplattung der kritischen Fläche beträgt ein Drittel. Zieht sich das Gebilde durch Ausstrahlung zusammen, so muß ω zunehmen; der Radius r_0 nimmt ab, die freie Oberfläche zieht sich zusammen, und da alle linearen Dimensionen im gleichen Verhältnis abnehmen, nimmt auch ihr Volumen ab. Die überschüssigen Gasmassen gleiten auf diesen Flächen von den polaren nach den äquatorialen Gegenden ab und werden hier durch die sich öffnenden Φ-Flächen gleichsam abgeblasen, gleichmäßig längs des ganzen Umfangs, oder im Gezeitenproblem in bestimmten ausgezeichneten Punkten.

43. Anwendung auf gasförmige Gebilde. Wir sehen, daß die Katastrophe auf zwei verschiedene Weisen eintreten kann: bei Himmelskörpern inkompressibler Flüssigkeit durch Teilung, bei Bauart nach *Roche*schem Modell durch Auswurf von Materie längs des Äquators. Und dieser fundamentale Unterschied tritt nicht nur beim Rotationsproblem, sondern auch beim Gezeiten- und Doppelsternproblem in Erscheinung. Je nach diesem Verhalten unterscheiden wir Bautypen A und B, A also aus inkompressibler Flüssigkeit gleicher Dichte, B bestehend aus punktförmigem Kern unendlich großer Dichte, umgeben von einer Atmosphäre verschwindend geringer Dichte. Wir suchen nach einer allgemeinen Bauart, welche die Modelle A und B als Grenzfälle enthält, also nach Modellen, die in stetiger Änderung der Bauart den Übergang von A nach B vermitteln. Dieses kann auf zwei verschiedene Weisen geschehen, einmal durch Modell C, bestehend aus einem homogenen Kern inkompressibler Flüssigkeit, endlichem Volumen und endlicher Dichte, umgeben von einer Atmosphäre vernachlässigbarer Dichte. Bezeichnen wir das Verhältnis Volumen der Atmosphäre : Volumen des Kerns mit s (also $s = 0$ für A, $s = \infty$ für B), so ergibt die *Jean*sche Rechnung die kritischen Werte $s = \frac{1}{3}$ beim Rotationsproblem und $s = \frac{1}{10}$ beim Gezeitenproblem; je nachdem s kleiner oder größer ist, verhält sich das Modell C wie Modell A oder B. Thermodynamisch von Interesse ist die weitere Möglichkeit, die in einem Modell D zum Ausdruck kommt:

Der Himmelskörper sei aufgebaut aus Gas im polytropen Gleichgewicht. An jeder Stelle stehen Druck und Dichte in der Beziehung $p \sim \varrho^k$, $n = \frac{1}{k-1}$ die Klasse der Polytropen. Der Spezialfall $n = 0$ liefert konstante Dichte, also Verhalten nach dem Modell A. Bauen wir Gaskugeln mit zunehmendem n, so konzentriert sich ihre Masse immer mehr nach dem Mittelpunkt.[68]) Das Wachsen von n ist aber durch den Wert $n = 5$, $k = \frac{6}{5}$ begrenzt, da die Masse für $n > 5$ unendlich wird. Allein $n = 5$ gibt schon außerordentliche Massenkonzentrationen nach dem Mittelpunkt. Denn die Funktion u_1 (Nr. 8) ist $u_1 = u_0 \sqrt{\frac{3}{3 + \mathfrak{r}_1^2}}$ und da die Dichte $\sim u_1^5$, gilt für große r die Abnahme $u_1 \sim \frac{1}{r_1^5}\cdot$ Wir folgern, daß polytrop aufgebaute Gebilde für $n = 0$ sich wie Modell A, für $n = 5$ sich wie Modell B verhalten. Wächst n bis 5, so muß ein kritischer Wert auftreten. *Jeans* hat ihn nur für das Rotationsproblem bestimmt. Er ist $n = \frac{5}{6}$, $k = 2{,}2$, also folgt: *Gaskugeln, die durch Schrumpfung ihre Rotationsgeschwindigkeit steigern, zerfallen schließlich für* $0 < n < \frac{5}{6}$ in zwei Teile von annähernd gleicher Größenordnung, während für $\frac{5}{6} < n < 5$

68) Vgl. die Tafel III in *R. Emden*, Gaskugeln, Kap. 5, p. 89.

das überschüssige Gas am Äquator abgeblasen wird. Für das Gezeiten- und Doppelsternproblem wurde dieser kritische Wert von n nicht näher bestimmt. Der Formelmechanismus läßt aber schließen, daß sich auch hier ein kritischer Wert n ergeben wird, der die Katastrophen der zwei Modelle A und B trennt. Für kosmische Staubmassen, polytrop gebaut, gelten dieselben Gesetze.

Gaskugeln im Strahlungsgleichgewicht befolgen die Bauart $n = 3$. *Sie endigen also nicht durch Teilung, sondern durch Abblasen des Gases längs des Äquators* (*Ringbildung*) *oder an einzelnen ausgezeichneten Stellen* (*Spiralnebel*).

Für adiabatischen Aufbau, $k = \varkappa$, kommen nur ein- oder zweiatomige, an der Grenze nur dreiatomige Gase in Betracht, $n = 1{,}5$, 2,5 bzw. 3, *so daß für konvektives Gleichgewicht die säkulare Stabilität nicht durch Teilung, sondern durch Entweichung vom Gas endigt.*

Das Vorhandensein zahlreicher Doppelsterne stellt die Frage, wie ein Aufbau von Gasmassen $n < \frac{5}{6}$, an der Grenze konstante Dichte, physikalisch zustande kommt.

H. Freie Schwingungen einer Gaskugel.

Die Schwingungen einer *Atmosphäre* haben für die Astronomie noch keine Bedeutung erlangt und fallen deshalb außerhalb des Rahmens dieses Berichtes. Der Geophysiker findet hinreichend Orientierung bei *Lamb.*[69]) Die Schwingungsmöglichkeiten einer *Gaskugel* sind ungleich mannigfaltiger als diejenige einer Kugel inkompressibler Flüssigkeit; sie sind nicht an die Bedingung konstanten Volumens gebunden, und gerade die so neu hinzukommenden radialen Schwingungsmöglichkeiten sind in erster Linie für die Astrophysik von Interesse, da die mit den Dichte- und Druckänderungen verbundenen Temperaturänderungen in einem periodischen Lichtwechsel in Erscheinung treten können.

44. Schwingungen bei konstantem Volumen. Die freien Schwingungen einer Kugel inkompressibler Flüssigkeit durch Wirkung innerer Gravitation, unter Voraussetzung bleibender Rotationssymmetrie, sind zuerst von *W. Thomson*[70]) (1862) behandelt worden. Die Kugeloberfläche $r = \mathfrak{R}$ verwandelt sich in die Sphäroidfläche $r = \mathfrak{R} + h$

(a) $$h = h_0 P_0 + h_1 P_1 + h_2 P_2 + \cdots = \sum h_i P_i.$$

69) *Lamb*, Hydrodynamik, Kap. 10, § 302—304.

70) *W. Thomson,* Dynamical problems regarding elastic and spheroidal shells and spheroids of incompressible liquide (oscillations of a liquide sphere), London Roy. Soc. Trans. (1863) = Papers III, p. 384.

P_i die zonale Oberflächen-Kugelfunktion von der Ordnung i und h_i so kleine Längen, daß ihre Produkte vernachlässigt werden können. (Deformation der Kugeloberfläche nach sektoriellen Kugelfunktionen dürfte stets zur Instabilität führen; *Poincaré*.[71]) Die Schwingungen gehorchen einem Geschwindigkeitspotential φ, das durch eine Reihe räumlicher Kugelfunktionen

(b) $$\varphi = \sum \left(\frac{r}{\Re}\right)^i S_i$$

darstellbar ist. Da die Radialbewegung eines Teilchens sowohl als $\frac{dh}{dt}$ als durch $-\frac{d\varphi}{dr}$ für $r = \Re$ darstellbar ist, folgt

(c) $$h_i \frac{dP_i}{dt} = -\frac{i}{\Re} S_i .$$

Das Potential dieser so deformierten Kugel für $r = \Re + h$ ist bekanntlich

(d) $$\Omega = -3g\left(\frac{\Re}{3} + \sum \frac{h_i P_i}{2i+1}\right), \quad g = \tfrac{4}{3}\pi \varrho G \Re .$$

Wird weiter in der bekannten, aus der *Euler*schen Gleichung folgenden Bedingung

(e) $$p = \varrho\left(\frac{d\varphi}{dt} - \Omega\right) + \text{const.}$$

p an der Kugelfläche $r = \Re$ durch seinen Wert

(f) $$p = \varrho g h = \varrho g \sum h_i P_i$$

ersetzt, so folgt unmittelbar

(g) $$g h_i P_i \frac{2(i-1)}{2i+1} = \frac{dS_i}{dt},$$

und daraus in Verbindung mit (c) die Schwingungsgleichung

(69) $$\frac{d^2 S_i}{dt^2} = -\frac{g}{\Re} \frac{2i(i-1)}{2i+1} S_i$$

und für die Schwingung von der Ordnungszahl i die Periode

(70) $$\tau_i = 2\pi \sqrt{\frac{\Re}{g} \frac{2i+1}{2i(i-1)}} = 11\,897 \sqrt{\frac{2i+1}{2i(i-1)} \frac{1}{\varrho}} \text{ sec.}$$

Dieselbe Schwingungsdauer würde sich für eine polytrope Gaskugel von der Klasse $n = 0$ ergeben. Für $n > 0$ muß die Polytropenklasse in die Schwingungsdauer eingehen und die exakte Lösung würde große Schwierigkeiten bereiten. Allein es zeigt sich[72]), daß für n größer als 0, und die praktisch allein in Betracht kommenden Kugeln haben $n > 1{,}5$, sich das Problem außerordentlich vereinfacht.

71) *H. Poincaré,* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'une mouvement de rotation, Acta math. 7 (1885), p. 259.

72) *R. Emden,* Gaskugeln, Kap. 18, § 42, 43.

Denn diese Kugeln endigen mit der Dichte $\varrho = 0$ und der Dichtegradient nach innen nimmt mit wachsendem n ab. Die zwischen der ursprünglichen Kugelfläche $r = \mathfrak{R}$ und der Sphäroidfläche $\mathfrak{R} + h$ verschobenen Massen sind deshalb von außerordentlich geringer Dichte, so daß ihr Beitrag zum Potential Ω in (d) vernachlässigt werden und dieses $= g\mathfrak{R}$ angesetzt werden kann. An Stelle der Gleichungen (e) bis (g) treten die einfacheren

$$\text{(e')} \qquad \int \frac{dp}{\varrho} = \frac{d\varphi}{dt} + g\mathfrak{R},$$

$$\text{(f')} \qquad \int \frac{dp}{\varrho} = gh = g\sum h_i P_i,$$

$$\text{(g')} \qquad g h_i P_i = \frac{dS_i}{dt}.$$

Die Schwingungsgleichung vereinfacht sich zu

$$\text{(69a)} \qquad \frac{d^2 S_i}{dt^2} = -\frac{gi}{\mathfrak{R}} S_i,$$

die Schwingungsdauer wird, *unabhängig von der Polytropenklasse,*

$$\text{(70a)} \qquad \tau_i = 2\pi \sqrt{\frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{R}}{g}} = 11\,897 \sqrt{\frac{1}{i\varrho}} \text{ sec.}$$

Die Periode $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{g}}$ ist gleich der Umlaufszeit eines Trabanten, der an der Oberfläche dahingleitet. Der Fall $i = 1$ liefert kein brauchbares Resultat; es resultiert bekanntlich eine gleich große, lediglich verschobene Kugel. Bei gleicher Ordnungszahl i erweist sich die Schwingungsdauer bei Inkompressibilität größer, da die Anziehungskräfte der über $\mathfrak{R}$ hinausgehobenen Teilchen nicht vernachlässigt werden dürfen, und diese somit ein Feld geringeren Potentialgefälles durchlaufen. Für wachsende i gehen beide Schwingungsdauern (wie erforderlich) ineinander über. Das Verhältnis beider Schwingungsdauern beträgt im Maximum (für die Grundschwingung $i = 2$) 1,58. *In beiden Fällen ergibt sich die Schwingungsdauer gleicher Ordnungszahl, unabhängig von Masse und Radius, umgekehrt proportional der Wurzel aus der mittleren Dichte.* Für eine polytrope Gaskugel von der mittleren Dichte 1 wird

$$\tau_i = 11\,897 \sqrt{\frac{1}{i}} \text{ sec} = 3^{\mathrm{h}}18^{\mathrm{m}}17^{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{1}{i}}$$

und für die Grundschwingung $i = 2$ wird

$$\tau = 8412'' = 2^{\mathrm{h}}20^{\mathrm{m}}12^{\mathrm{s}}.$$

Es seien noch einige Werte der Grundschwingung angegeben:

Dichte $\bar{\varrho} = 1{,}3784\,g/cm^3$ (Sonnendichte)	$\tau = 7166$ sec $=$	$1^h 59^m 26^s$
0,01	84120 „ $=$	$23^h 22^m$
0,001	266020 „ $=$	$3^d\ 1^h 54^m$
0,0001	841200 „ $=$	$9^d 17^h 40^m$.

Bei annehmbaren Dichten ergeben sich Perioden von gleicher Größenordnung, wie sie im Lichtwechsel der Cepheiden-Sterne beobachtet werden. Da aber diese Schwingungen lediglich in einer Formänderung bei konstanter mittlerer Dichte bestehen, dürften sie direkt schwerlich in Erscheinung treten.

45. Schwingungen bei konstanter Form (Pulsationen). Die radialen Schwingungen einer Gaskugel sind zuerst von *A. Ritter* in seiner 5. Abhandlung im Jahre 1879 untersucht worden. Sein Versuch, zur Erklärung des Lichtwechsels veränderlicher Sterne die mit den Dichteänderungen einer pulsierenden Gaskugel verbundenen Temperaturschwankungen beizuziehen, muß angesichts der damaligen Entwicklung der Stellarphysik als kühne Hypothese bewundert werden. In neuester Zeit sind diese Untersuchungen mit gleichem Endzwecke von *A. Eddington*, allerdings in ungleich strengerer mathematischer Behandlung, wieder aufgenommen worden.[73])

1. *Die Untersuchungen Ritters.* Seine erste Untersuchung beschränkte sich auf die Behandlung hinreichend kleiner Schwingungen einer Kugel konstanter Dichte, unter der Voraussetzung

a) daß die pulsierende Kugel von räumlich konstanter Dichte bleibt,

b) daß die Teilchen während der Schwingung der *Poisson*schen Gleichung $p \sim \varrho^{\varkappa}$ gehorchen.

Diese beiden Sätze widersprechen sich, da anfängliche räumliche Konstanz der Dichte nur bei Bewegung längs einer Kosmogenide erhalten bleiben kann. Bei hinreichend kleinen Schwingungen dürfte diese Ungenauigkeit kaum in Betracht kommen. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

---

73) Betrachtungen dieser Art finden sich ferner in einer Arbeit von *F. R. Moulton*, doch ist das von ihm berechnete Ergebnis, daß eine radiale Schwingung der Sonne, die ihren Radius nur um 0,1″ ändert, die Strahlung zur Zeit des Maximums das 2,56fache zur Zeit des Minimums sein läßt, auffallend und mit Beobachtungen von Cepheiden-Sternen und den nachfolgenden Resultaten *Eddington*scher Untersuchungen schwerlich vereinbar. *F. R. Moulton*, On certain implications of possible changes in the form and dimensions of the sun and some suggestions towards explaining certain phenomena of variable stars, Astroph. Journ. 29 (1909), p. 257.

Größen, die sich auf den Ruhezustand beziehen, tragen den Index 0. Das im Abstand r_0 gegebene Teilchen hat verschoben den Abstand

(a) $$r = r_0 + \xi = r_0(1 + \omega),$$

und da die Kugel von konstanter Dichteanordnung bleibt, also gleichförmig kontrahieren soll, wird im Abstand r

(b) $$g = g_0(1 + \omega)^{-2}, \quad \varrho = \varrho_0(1 + \omega)^{-3}, \quad r = r_0(1 + \omega),$$

und nach der *Poisson*schen Gleichung

(c) $$p = p_0\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} = p_0(1 + \omega)^{-3\varkappa}.$$

Die Schwingungsgleichung lautet

(d) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g - \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr},$$

und da

(e) $$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{\varrho_0}\frac{dp_0}{dr_0}(1 + \omega)^{2-3\varkappa} = -g_0(1 + \omega)^{2-3\varkappa}$$

wird die Schwingungsgleichung

(70) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g_0[(1 + \omega)^{-2} - (1 + \omega)^{2-3\varkappa}].$$

Für kleine Schwingungen sind höhere Potenzen von ω zu vernachlässigen, und wegen

$$g_0\omega = \frac{g_0}{r_0}\xi = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{R}_0}\xi,$$

wo $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{R}_0$ sich auf die Oberfläche beziehen, wird

(70a) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{R}_0}\xi(3\varkappa - 4)$$

und somit die Schwingungsdauer

(71) $$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{1}{(3\varkappa - 4)}\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{g}_0}} = 11\,897\sqrt{\frac{1}{(3\varkappa - 4)}\frac{1}{\bar{\varrho}}}\ \text{sec.}$$

Für $\varkappa = \frac{4}{3}$ wird die Schwingungsdauer selbstverständlich unendlich, da dreiatomige Gase keine stabilen Gaskugeln aufbauen. Für ein- und zweiatomige Gase ergeben sich Zeiten, die der Größenordnung nach mit den in Nr. **44** behandelten Grundschwingungen übereinstimmen. Für den Lichtwechsel der periodisch Veränderlichen ergibt sich somit nach *Ritter* der Satz:

Die Dichtigkeit der Fixsterne verhält sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Lichtwechselperioden.

In seiner elften Abhandlung erweitert *Ritter* diese Betrachtungen auf Schwingungen von endlicher Amplitude. Setzen wir $1 + \omega = \varphi$, so wird die Schwingungsgleichung

(72) $$\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{g}_0}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left[\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^{3\varkappa-2}}\right]$$

und deren 1. Integral

$$(73)\qquad \varepsilon = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{g}_0}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\varphi} - \frac{2}{3(\varkappa - 1)}\frac{1}{\varphi^{3(\varkappa-1)}} + \text{const.}$$

Die Konstante bestimmt sich durch den Wert ε beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage, also wird

$$(73\text{a})\qquad \varepsilon = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{g}_0}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\varphi} - \frac{2}{3(\varkappa - 1)}\frac{1}{\varphi^{3(\varkappa-1)}} + \varepsilon_0 - 2\frac{3\varkappa - 4}{3(\varkappa - 1)}.$$

Damit ergeben sich zwei verschiedene Arten von Bewegung, je nachdem ε_0 größer oder kleiner $2\frac{3\varkappa - 4}{3(\varkappa - 1)}$. Nur im zweiten Fall kommt die nach außen gerichtete Bewegung zum Stillstand. Ist ε_0 und damit die kinetische Energie, mit welcher die Massen die Gleichgewichtslage nach außen passieren, zu groß, so stiebt die Kugel auseinander. Darauf gründet *Ritter* seine Aufsehen erregende Einteilung der Himmelskörper in zentrifugale und zentripetale Gebilde.[74])

Diese Theorie *Ritter*s dürfte sich aber nicht halten lassen. Die oben mitgeteilten grundlegenden Formeln sind, wie bereits bemerkt, abgeleitet unter den beiden Annahmen, daß die Teilchen einer pulsierenden Kugel der *Poisson*schen Zustandsgleichung folgen, die Kugel aber von räumlich konstanter Dichte bleibt. Diese zweite Annahme (ω unabhängig von r_0) ist aber nicht nur gänzlich willkürlich, sondern wie aus der strengen Behandlung von *Eddington* (siehe unten) hervorgeht, mit der angenommenen adiabatischen Zustandsänderung unvereinbar. Durchläuft die Kugel mit räumlich konstant bleibender Dichte eine Reihe von Gleichgewichtszuständen, so müssen die Teilchen kosmogenetische Zustandsänderung $p \cdot v^k = \text{const.}$, $k = \frac{4}{3}$ zurücklegen; es ist gänzlich willkürlich, die Teilchen unter der Annahme $p \cdot v^\varkappa = \text{const.}$ dieselbe Dichte erreichen zu lassen und die veränderten Druckwerte als die den Schwingungsprozeß treibenden Kräfte anzusehen.

2. *Die Untersuchungen A. Eddingtons.*[75]) Die Werte in der Gleichgewichtslage seien wieder durch den Index 0 ausgezeichnet. Bei der Verschiebung gehen Druck, Dichte und Abstand vom Zentrum über in:

$$p = p_0(1 + p_1),\quad \varrho = \varrho_0(1 + \varrho_1),\quad r = r_0(1 + \xi),$$

mit p_1, ϱ_1 und ξ als so kleinen Größen, daß deren Produkte und höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Der Aufbau der Kugel

74) Vgl. auch den Art. Kosmogonie in Valentiners astronomischem Wörterbuch, Breslau 1897—1902.

75) *A. S. Eddington,* On the pulsations of a gaseous star and the problem of the cepheid variables, London Astr. Soc. Month. Not. 79 (1918), Part I, p. 2; II, p. 177.

in der Gleichgewichtslage bleibt vorderhand willkürlich, die schwingenden Teilchen aber sollen adiabatische Zustandsänderung $pv^\gamma = \text{const.}$ befolgen, so daß die Beziehung gilt $p_1 = \gamma \varrho_1$. Während aber bei *Ritter* über die Größe ξ willkürliche Annahmen [ξ unabhängig von r_0] gemacht werden, um auf eine Schwingungsgleichung, die ξ als Funktion der Zeit liefert, zu erhalten, wird bei *Eddington* das Problem umgekehrt. Die Kugel soll Schwingungen ausführen von einer Periode τ, $N = \frac{2\pi}{\tau}$, *und gesucht wird die Funktion, die dann ξ in der Abhängigkeit von r_0 darstellt.* An der Oberfläche der Kugel muß ξ selbstverständlich gewissen Bedingungen genügen; und durch Erfüllung dieser Randwerte wird die bis dahin unbestimmt gelassene Periode τ berechnet. In Durchführung der Rechnung ergibt sich für die Beziehung zwischen ξ und r_0 die Differentialgleichung zweiten Ordnung

$$\frac{d^2\xi}{dr_0^2} + \frac{4-\mu}{r_0}\frac{d\xi}{dr_0} + \left[\frac{N^2\varrho_0}{\gamma p_0} - \left(3 - \frac{4}{\gamma}\right)\frac{\mu}{r_0^2}\right]\xi = 0 \tag{74}$$

mit $\mu = \frac{g_0 r_0 \varrho_0}{p_0}$ als einer reinen Zahl. (Setzt man mit *Ritter* ξ unabhängig von r_0, so ergibt sich sofort seine Periode $P = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3\gamma-4}\cdot\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{g}_0}}$.) Der Aufbau der Kugel im Gleichgewichtszustand kommt in dem Faktor μ zum Ausdruck. Aufbau der Kugel nach einer polytropen n ergibt (Nr. 7) $\mu = (n+1)\frac{\mathfrak{r}_1}{u_1}\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}$, der Betrag kann den Zahlentabellen von *R. Emden* entnommen werden. Die Gleichung selbst kann nur durch mechanische Quadratur numerisch behandelt werden. *Eddington* behandelt speziell den Aufbau nach der Polytropen $n = 3$, die sich für Strahlungsgleichgewicht ergibt. Zu diesem Zwecke wird an die Stelle von r die unabhängige $\mathfrak{r}_1$ eingeführt, die für $\mathfrak{r}_1 = 6{,}9$ die Oberfläche der Kugel bestimmt (Nr. **19**). Dann ergibt sich

$$\frac{d^2\xi}{d\mathfrak{r}_1^2} + \frac{4-\mu}{\mathfrak{r}_1}\frac{d\xi}{d\mathfrak{r}_1} + \left[\frac{\omega^2}{u_1} - \frac{a\mu}{\mathfrak{r}_1^2}\right]\xi = 0, \tag{74a}$$

$$\omega^2 = \frac{N^2}{\gamma}\left(\frac{\varrho_0}{p_0}\right)_c \cdot \left(\frac{\mathfrak{R}}{6{,}9}\right)^2, \quad a = 3 - \frac{4}{\gamma},$$

wobei $\left(\frac{\varrho_0}{p_0}\right)_c$ sich auf das Zentrum der Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$ bezieht. Unbestimmt ist der Wert von γ. Er wird (siehe unten) in der Nähe von $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ liegen, so daß für ein-, zwei- bzw. dreiatomige Gase a in der Nähe von 0 bis $\frac{3}{5}$ variiert. Zu einer Reihe von γ-Werten werden durch numerisches Abtasten die zugehörigen ω-Werte gesucht, welche die Differentialgleichung derart erfüllen, daß der erste Schwingungsbauch, gekennzeichnet durch die Bedingung $p_0 p_1 = 0$, an die Oberfläche der Kugel zu liegen kommt. Es ergibt sich so mit hinreichender Genauigkeit die Beziehung $\omega^2 = \frac{10}{3} a$, so daß sich für die Schwingungsdauer τ die Lösung ergibt

$$\tau \sqrt{\varrho_c} = \frac{C}{\sqrt{\gamma a}}, \quad C = \frac{2\pi \varrho_c \Re}{6{,}9} \sqrt{\frac{10}{3 p_c}}. \tag{75}$$

Für den typischen Riesenstern *Eddingtons* (vgl. unten Nr. **62**) wird

$$C = 25\,080 \text{ C.G.S.}; \quad \tau \sqrt{\varrho_c} = \frac{0{,}290}{\sqrt{\gamma a}} \text{ Tage.}$$

Die einfache Theorie *Ritters* liefert das gleiche formale Gesetz, doch hat die Konstante den Einheitswert 11 897 sec. [Die Behandlung solcher Schwingungsprobleme führt stets auf die Wertbestimmung eines Ausdruckes $\tau^2 \varrho_c$, welcher dem Ausdruck $\frac{\omega^2}{2\pi \varrho G}$ entspricht, auf den Rotationsprobleme führen.] Damit ist die mathematische Seite des Problems erledigt. τ kann unmittelbar beobachtet werden; ϱ_c ist für $n = 3$ (Strahlungsgleichgewicht) $= 54 \cdot \bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}$ die mittlere Dichte die durch Masse und Radius, welche Größen aus Größenklasse und effektiver Temperatur abgeschätzt werden können, bestimmt ist. Unbestimmt bleibt aber der Exponent γ in der adiabatischen Beziehung $p v^\gamma = \text{const.}$ Da hier p die Summe von Gasdruck und Strahlungsdruck bedeutet, ist γ nicht gleich $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$. Wie *Eddington* zeigt [l. c. Gleichung (24)] läßt sich γ aus $\varkappa$ und der Masse der Kugel bestimmen. Unbestimmt bleibt noch der Wert $\varkappa$ der hoch dissoziierten und ionisierten Masse. Der Maximalwert ist höchst wahrscheinlich auch hier $\frac{5}{3}$, der Minimalwert größer als $\frac{4}{3}$. Läßt man $\varkappa$ von $\frac{4}{3} + \frac{1}{30}$ bis $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}$ variieren und berechnet den Mittelwert von ϱ_c für neun typische Cepheiden-Sterne, so berechnet sich

$$2{,}88\, d < \tau < 7{,}22\, d,$$

während im Mittel für diese neun Sterne 5,37 d beobachtet wurde. Für diese schwankt das Produkt $\tau \sqrt{\varrho_c}$ innerhalb der Grenzen 0,70 bis 1,12 um den Mittelwert 0,88, so daß der oben angeführte Satz *Ritters* $\tau \sqrt{\varrho_c} = \text{const.}$ für Riesensterne im Strahlungsgleichgewicht hinreichende Genauigkeit erlangt.

Berücksichtigt man bei Aufstellung der Differentialgleichung noch die Glieder zweiter Ordnung, so läßt sich zeigen, daß der Schwingungsvorgang nicht mehr rein harmonisch, sondern von Typus

$$a_1 \cos nt - 2 a_2 \cos 2nt$$

verläuft, wodurch die bekannte Assymmetrie der Lichtwechselkurve der Cepheiden-Sterne qualitativ wiedergegeben wird.

Die Amplitude $\delta\mathfrak{R}$ der Schwingung kann der Beobachtung entnommen werden, denn sie ist gleich dem Elemente $a \sin i$ einer hypothetischen Kreisbewegung. Für die untersuchten Cepheiden-Sterne schwankt $\frac{\delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$ zwischen 5% und 11%. Der Betrag des Lichtwechsels ist angenähert gleich dieser relativen Änderung des Radius.

Es sei noch daran erinnert, daß man es bei dieser Betrachtung stets mit *freien* Schwingungen zu tun hat, die einmal erregt, abklingen. Bei den unter Formänderung vor sich gehenden Sphäroidalschwingungen existiert ein durch die Zähigkeit bedingtes logarithmisches Dekrement. Nach *H. Lamb*[76]) berechnet sich die Zeit, in welcher das Geschwindigkeitspotential auf den Wert $\frac{1}{e}$ sinkt, für die Teilschwingung i zu

$$\tau = \frac{1}{(i-1)(2i+1)} \frac{\mathfrak{R}^2}{\nu} \text{ sec.} \tag{76}$$

Für eine Kugel von der Größe der Erde ($\mathfrak{R} = 6{,}7 \cdot 10^8$ cm) und der Zähigkeit des Wassers ($\nu = 0{,}0178$) folgt $\tau = 1{,}44 \cdot 10^{11}$ Jahre. Selbst wenn man mit *Darwin* für ν die Zähigkeit des Harzes, $\nu = 1{,}3 \cdot 10^8$ g, g $= 980$ setzt, ergeben sich noch 180 Stunden. Im Gegensatz hierzu erlöschen die radialen Pulsationen der Gaskugel durch Ausstrahlung der Schwingungsenergie. Für Cepheiden-Sterne erlöschen die Schwingungen nach *Eddingtons* Abschätzung in Zeiträumen von der Größenordnung 1500 Jahre. Unbestimmt bleiben die Ursachen des ersten Anstoßes und namentlich der Umstand, daß nicht alle Sterne, sondern nur gewisse, einstweilen noch nicht faßbare Sterne, im Laufe ihrer Entwicklung, wenn auch nur vorübergehend, Cepheiden-Charakter annehmen.

III. Aufbau der Himmelskörper unter Berücksichtigung von thermischer Energie, Gravitationsenergie und Strahlungsenergie.

In dem vorangehenden Abschnitte wurde das Verhalten der Himmelskörper behandelt, ohne auf den Strahlungsprozeß Rücksicht zu nehmen. Daß deren Aufbau und die Strahlung in Wechselwirkung stehen müssen, hat (1894) *R. A. Sampson*[77]) betont, ohne aber diese Beziehungen quantitativ fassen zu können; und bereits früher hat *A. Ritter* diese Verhältnisse wiederholt gestreift, ohne zu nennenswerten Resultaten zu gelangen. Dies ganze Gebiet wurde 1906 in

76) *H. Lamb,* Hydrodynamik, Kap. 11, § 338.

77) *R. A. Sampson,* Rotation and mechanical state of the sun, London Astr. Soc. Mem. 51 (1904), p. 62.

einer kurzen, aber grundlegenden Arbeit von *K. Schwarzschild*[78]) aufgeschlossen. Während bisher der Aufbau eindeutig gemacht wurde durch eine vorgeschriebene Bedingung zwischen Druck und Dichte, und, falls eine Zustandsgleichung des aufbauenden Materiales vorlag, sich die Temperatur gleichsam als Nebenprodukt ergab, tritt sie nun, da die Strahlung mit der 4. Potenz verknüpft ist, mit den mechanischen Größen gleichberechtigt auf. Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht in dem Nachweis, daß der Aufbau ebenfalls eindeutig gemacht werden kann durch die Bedingung, daß in Folge der Strahlungsbilanz kein Teilchen seine Temperatur ändert, welcher Zustand seither nach *Schwarzschild* mit „Strahlungsgleichgewicht“ bezeichnet wird. Der Strahlungsdruck wird weder erwähnt noch berücksichtigt; da aber nur der Aufbau von Sternatmosphären behandelt wurde, ist diese Unterlassung, wie sich zeigen wird, ohne wesentliche Bedeutung und kann nachträglich leicht ausgeglichen werden. In Anwendung ergab sich eine mit den Messungen vorzüglich stimmende Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe. Dies Problem wurde von anderen Autoren eingehender behandelt, namentlich mit Rücksicht auf das Verhalten in den einzelnen Wellenlängen und mit Rücksicht auf die Streuung des Lichtes. Über diesen Fragenkomplex wird in den Nrn. **52**—**56** berichtet. Den Strahlungsdruck, erstmals von *J. C. Maxwell* auf Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie erschlossen und durch die Relativitätstheorie, welche der Strahlung Bewegungsgröße beilegt, der Anschauung leichter zugänglich gemacht, zuerst als tragendes Prinzip mitberücksichtigt zu haben, ist das Verdienst von *T. Bialobjewski*[79]), dessen Arbeit (Nr. **48**) merkwürdigerweise keine Beachtung gefunden zu haben scheint. Seine Behandlungsweise steht gewissermaßen in direktem Gegensatze zu *Schwarzschild*: Es wird wohl der Strahlungsdruck berücksichtigt, hingegen ist von Strahlungsgleichgewicht nicht die Rede. Der Aufbau geschieht nach einer Polytropen von der Klasse n, der tragende Druck aber setzt sich aus Gasdruck und Lichtdruck zusammen. *Bialobjewski* zeigt die außerordentliche Vereinfachung, die sich ergibt, wenn $n = 3$ gesetzt wird, welcher Spezialfall ausgearbeitet wird, und kommt hierdurch, obwohl unbewußt, auf Strahlungsgleichgewicht, welches, wie sich zeigen wird, für die Hauptmasse mit der Polytropen $n = 3$ sich deckt. Daß der Spezialfall $n = 3$ diese ausgezeichnete Rolle spielt rührt daher, daß die Temperatur nach dem

78) *K. Schwarzschild,* Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, Göttingen Ges. Nachr. **1906**, p. 1.

79) *T. Bialobjewski,* Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre, Cracowie Acad. Bull. **1913**, p. 64.

*Stefan*schen Gesetze in der Potenz $n + 1 = 4$ auftritt. Das vorliegende Problem durch Zusammenfassung von Strahlungsgleichgewicht und Strahlungsdruck im Prinzip endgültig gelöst zu haben, ist das Verdienst von *A. S. Eddington.*[80]) Die Bedeutung dieser Untersuchungen für die gesamte Fixsternphysik wird erhöht durch den Umstand, daß Rücksicht genommen wird auf Energiequellen, weiterhin mit ε bezeichnet, die notwendigerweise vorhanden sein müssen, um die Strahlung zu decken; deren Natur uns zwar vorderhand unbekannt ist deren Auswirkung sich aber trotzdem mathematisch fassen läßt. In der Nr. **67** wird sich zeigen, daß sich die endgültige Lösung dieses Problems zuzuspitzen scheint auf die Erkenntnis des Absorptionskoeffizienten k, oder anders ausgedrückt, der Art und Weise, wie die ausgetriebenen Lichtquanten das Sterninnere durchsetzen. Ein tieferes Eindringen in die Physik der Fixsterne wird nur dadurch ermöglicht, daß in ihnen in Folge der außerordentlich hohen Temperaturen die Materie in Atomreste und Elektronen aufgespalten vorliegt, so daß neuere Anschauungen über Atombau zur Auswirkung gelangen können. Der Weg zum Fixstern führt über das Atom.

A. Exkurs über Strahlung.

46. Wärmetransport und Wärmequellen. Es läßt sich leicht überschlagen, daß die von den Sternen, speziell der Sonne, ausgestahlten Energiemengen nicht durch Wärmeleitung gemäß dem *Fourier*schen Gesetze $\Delta Q = \eta \frac{\Delta T}{\Delta x}$ aus dem Sterninnern nach der Oberfläche transportiert werden können. Für die Sonnenoberfläche, die Solarkonstante $= 2$ cal/cm² min angenommen, wird $\Delta Q = 1{,}5 \cdot 10^3$ cal/cm² sec; für Wasserstoff von Atmosphärendruck und 0° ist $\eta = 0{,}00032$ cal/cm sec und bei Anstieg proportional der Temperatur $= 32$ für $T = 10^5$, so daß unter dieser Bedingung $\frac{\Delta T}{\Delta x} = 47\,^0/\mathrm{cm}$ erforderlich wäre. Für das Sonneninnere eine Temperatur von $7 \cdot 10^6$ und lineares Temperaturgefälle angenommen, ergibt sich, für die äußeren Schichten vielfach zu hoch, $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{7 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{10}} = 10^{-4}\,^0/\mathrm{cm}$. Für die äußeren Schichten des *Eddington*schen Riesensternes (Nr. **62**) wird sich $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ von der

80) *A. S. Eddington,* On the radiative equilibrium of the stars, London Astr. Soc. Month. Not. 77 (1916), p. 16, sowie: further notes, ebenda p. 597. — In abgerundeter Darstellung: Das Strahlungsgleichgewicht der Sterne, Ztschr. f. Phys. 7 (1921), p. 351, und in kürzerer Wiedergabe: On the condition in the interior of a star, Astroph. Journ. 48 (1918), p. 205.

Größenordnung 10^{-6} erweisen. Da die erforderlichen und vorhandenen Temperaturgradienten von gänzlich unvereinbarer Größenordnung sind, ist Wärmetransport durch Leitung ausgeschlossen. Auch Konvektionsströme dürften infolge der großen Zähigkeit des die Sterne aufbauenden Materials (vgl. Nr. **38**) zum Wärmetransport wenig beitragen. Diese für die Sonne geltenden Verhältnisse können auf die überwältigende Masse der Fixsterne übertragen und so geschlossen werden, daß die Wärme auch im Sterneninnern lediglich durch Strahlung transportiert wird.

In Nr. **1** wurde gezeigt, daß die von der Sonne und deshalb höchstwahrscheinlich auch von den übrigen Sternen ausgesandten Energiemengen nicht aus Quelle mechanischen oder chemischen Ursprungs gedeckt werden können. Diesem Umstande Rechnung tragend, hat *A. S. Eddington*[80]) die vielfach bewährte Annahme eingeführt, daß die gesamte ausgesandte Strahlung gedeckt wird durch Energiequellen vorderhand unbekannten, wahrscheinlich atomaren Ursprungs von einer Ergiebigkeit $4\pi\varepsilon$ Erg/g sec $= 4\pi\varepsilon\varrho$ Erg/cm³ sec. Die gesamte ausgesandte Strahlung L eines Sterns von der Masse M wird gesetzt

$$L = 4\pi\bar{\varepsilon}M, \tag{77}$$

wo $\bar{\varepsilon}$ ein Mittelwert von ε ist; und diese Energiequellen sichern die Konstanz der Temperatur der strahlenden Teilchen. Für die Riesensterne hat *R. Emden*[81]) $4\pi\bar{\varepsilon}$ zu rund $8{,}5 \cdot 10^{-7}$ cal/g sec $= 35$ Erg/g sec, also $\bar{\varepsilon}$ zu rund 3 Erg/g sec abgeschätzt.[82]) *E. A. Milne*[83]) gibt $\bar{\varepsilon}$ zu rund 200 Erg/g sec an, eine in Anbetracht der Unsicherheit des der Schätzung zugrunde liegenden Beobachtungsmaterials genügende Übereinstimmung. Diese Energiemengen sind verschwindend klein gegen die Energiemengen, welche die isolierte Masseneinheit Sternmaterie auf Grund des *Kirchhoff*schen Gesetzes ausstrahlt. Da die Masseneinheit von der Temperatur T bekanntlich $4ksT^4$ cal/sec aussendet (k als Absorptionskoeffizient), ergibt sich dies Verhältnis $\frac{4\pi\varepsilon}{4ksT^4}$ für k nur $= 1$ und $T = 10^6$ von der Größenordnung 10^{-18}. Trotzdem ist die Konstanz der Temperatur gesichert.

Über die Art und Weise, wie diese Energiequellen im einzelnen arbeiten, sind vorderhand zwei verschiedene Auffassungen möglich.

---

81) *R. Emden*, Über Strahlungsgleichgewicht, Ztschr. f. Phys. 22 (1924), p. 176.

82) Für die Capella wird sich (Nr. **66**) genauer $\bar{\varepsilon} = 4{,}77$, $4\pi\bar{\varepsilon} = 59{,}9$ Erg/sec g ergeben.

83) *E. A. Milne*, On the equation of transfer of radiation and their application to the interior of a star, Cambridge Phil. Soc. Proceed. 21 (1923), p. 701.

In der Behandlungsweise von *Eddington*[80]) liefert jedes Volumenelement 1. thermische Strahlung von der Temperatur T, 2. Strahlung der Energiequelle ε, beide von verschiedener sehr kurzer Wellenlänge, die beide auf der Wanderung von benachbarten Volumelementen bald absorbiert und in thermische Energie umgesetzt werden. Die Temperatur berechnet sich unabhängig von der Existenz der Energiequellen ε gemäß dem *Kirchhoff*schen Gesetze aus der absorbierten Strahlung. Im Gegensatz vertritt *E. A. Milne*[83]) die Ansicht, daß die Energiemengen ε bereits in dem aussendenden Volumelement absorbiert und in thermische Energie umgesetzt werden, also von höherer Temperatur als der absorbierten Zustrahlung entspricht. Die Energiequellen ε würden z. B. bei radioaktivem Ursprung im Sinne *Eddington*s, hingegen durch Kontraktionsenergie geliefert im Sinne *Milne*s wirken. Die Verschiedenheit des mathematischen Ansatzes wird sich in der folgenden Nr. 47 ergeben. Da, wie gezeigt, die Energiequellen ε im Verhältnis zur *Kirchhoff*schen Strahlung außerordentlich klein sind, führen beide Ansätze praktisch zu gleichem Ergebnis.

Als Energiequellen ε dürften ausschließlich atomare Prozesse in Betracht kommen.[84]) In radioaktiven Vorgängen stehen nach Laboratoriumsphysik ungeheure Energiemengen zur Verfügung, allein nach Astrophysik müssen diese anders eingeschätzt werden. 1 g Radium liefert bei seinem Zerfall wohl 10^9 cal., aber um die verhältnismäßig geringe Sonnenstrahlung zu decken, müssen jährlich 10^{24} g Radium $= 10^{-9}$ Sonnenmassen zum Zerfall kommen. 1 g Uran im Gleichgewicht mit seinen Zerfallprodukten liefert stündlich rund 10^{-4} cal.; eine Sonne aus Uran würde ihren Strahlungsbedarf also beinahe decken. Da eine Steigerung der radioaktiven Tätigkeit bis Temperaturen von 10^6 wahrscheinlich ausgeschlossen ist, dürften sich diese Zahlen auch bei vielfach höherer Fixsterntemperatur nur unwesentlich ändern. Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten würde z. B. die Annahme liefern, auf den Sternen ungleich radioaktivere Stoffe anzunehmen, die in der stark gealterten Erdkruste bereits verschwunden sind.[84]) Gewaltige Energiemengen stehen ferner zur Verfügung, falls sich ein Atomgewicht ändert. Bei der Bildung von Helium aus Wasserstoff sinkt das Atomgewicht des letzteren von 1,0077 auf 1, so daß bei der Umwandlung von 1 g Wasserstoff $0{,}0077 \cdot 9 \cdot 10^{20}$ Erg $= 1{,}7 \cdot 10^4$ cal

84) Auf die Bedeutung radioaktiver Prozesse für die Energiebilanz der Sonne hat bereits *H. Poincaré* (Leçons § 162—163) hingewiesen; die Hypothese uns unbekannter Elemente stärkster Radioaktivität wird von *W. Nernst*, Das Weltgebäude im Lichte neuerer Forschung, Berlin 1921, vertreten.

zur Verfügung stehen. Zur Bestreitung der Sonnenstrahlung müßten also jährlich 10^{22} g $= 10^{-11}$ Sonnenmassen zur Umwandlung kommen. Noch gewaltigere Energiemengen würde die sehr hypothetische Annahme liefern, daß Elektronen vollständig mit den Atomkernen zur Vereinigung kommen würden. Eine Deckung der Strahlung auf Kosten der Sternmasse wird in Nr. **69** besprochen. Die Frage nach der Natur dieser Energiequellen ε, die notwendigerweise vorhanden sein müssen, bleibt, namentlich in Rücksicht auf unsere Unkenntnis der absoluten Zeitskala kosmogonischer Vorgänge, offen.

47a. Größenordnung des Lichtdruckes an der Sonnenoberfläche. Es ist für die folgenden Betrachtungen von Nutzen, Größe und Wirkung des Strahlungsdruckes in einem anschaulichen Bilde beurteilen zu können. Dazu dient ein von *A. S. Eddington*[85]) gegebener Spezialfall. Ein Strahlungsstrom, der $\mathfrak{S}$ Erg/sec cm^2 befördert, entwickelt (Nr. **47**) bei vollständiger Bremsung (Absorption) einen Lichtdruck von $\frac{\mathfrak{S}}{c}$ Dyn/cm^2. In diesem Sinne entspricht einer Solarkonstante von 1,93 cal/cm^2 min an der Sonnenoberfläche ein Lichtdruck von rund 2 Dyn/cm^2. Dieser Solarkonstanten entspricht eine effektive Temperatur von rnnd 6000^0. Nimmt man an, daß aus einer Sonnenschicht von der Temperatur rund 11000^0 bereits schwarze Strahlung ausbricht, so entspricht dieser ein Lichtdruck von rund 30 Dyn/cm^2. Da die Masse 1 g an der Sonnenoberfläche 26700 Dyn. wiegt, kann also hier durch die Strahlung eine Gasmasse, welche sie vollständig absorbiert, in der Mächtigkeit von nur 1 mg/cm^2 schwebend erhalten werden. Betrachtet man eine Protuberanz von 10000 km Erstreckung, so darf, falls sie durch Lichtdruck getragen werden soll, ihre Mächtigkeit nicht mehr als 1 mg/cm^2, ihre Dichte also nicht mehr wie 10^{-12} g/cm^3 betragen. (Über die Absorption eines Gases von dieser Verdünnung vgl. Nr. **75**.) Soll die Korona vollständig durch Lichtdruck getragen werden, so kann ihre Dichte zu $< 10^{-15}$ g/cm^3 abgeschätzt werden. Dichten gleicher Größenordnung ergeben sich für einen Kometen, falls die Repulsion vollständig durch Lichtdruck erfolgt. Seine Entfernung von der Sonne spielt dabei keine Rolle, da Lichtdruck und Anziehung beide quadratisch mit der Entfernung abnehmen.

Der Lichtdruck an der Sonnenoberfläche erweist sich so äußerst klein, und verschwindend klein, gegen die hier vorhandene Schwerkraft; da aber bei seiner Berechnung die Temperatur in vierter Potenz eingeht, kann er im Sterninnern doch zu gewaltigen Beträgen ansteigen.

---

85) *A. S. Eddington*, Radiation pressure in solar phenomena, London Astr. Soc. Month. Not. 80 (1920), p. 723.

47. Exkurs über Strahlung und Strahlungsgleichgewicht. Die Untersuchung des Energiestroms, der durch das ungleich temperierte Sterninnere hindurch durch Strahlung transportiert wird, ist enthalten in dem allgemeinen Strahlungsproblem: Gegeben sei ein Körper, der ganz oder teilweise von schwarzen, auf verschiedener Temperatur gehaltenen Flächen begrenzt ist oder auf vorgeschriebene Weise bestrahlt wird; es soll der Strahlungszustand in jedem Punkte desselben festgelegt werden. Obwohl der Prozeß durch die allgemeinen Strahlungsgesetze und nur zwei Materialkonstanten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes c und den Absorptionskoeffizienten k, vollständig bestimmt ist, stellen sich der Lösung, selbst wenn nicht auf die Verhältnisse in den einzelnen Wellenlängen näher eingegangen wird, außerordentliche Schwierigkeiten entgegen, die sich nur in den Grenzfällen sehr starker oder sehr schwacher Absorption bewältigen lassen. Bezüglich der Erörterung dieser Verhältnisse sei auf die Untersuchungen von *Hilbert*[86]) und *Jaffé*[87]) hingewiesen. Den stationären Zustand bei starker Absorption und bei konzentrischer Schichtung hat *A. S. Eddington*[80]) behandelt. Zur Klärung der Verhältnisse genügt die folgende Behandlung der Strahlung bei ebener Schichtung. Auf das Verhalten in den einzelnen Wellenlängen soll erst später eingegangen werden. Untersucht wird lediglich der *stationäre* Zustand, kurz als *Strahlungsgleichgewicht* bezeichnet, definiert durch die Bestimmung, daß infolge der Energiebilanz kein Teilchen ungeachtet des Energietransportes seinen Zustand ändert. Sind keine Energiequellen ε vorhanden, so müssen für jedes Teilchen absorbierte und emittierte Energiemengen gleich sein; im allgemeinen Fall müssen sie in die Energiebilanz einbezogen werden.

Das Medium sei senkrecht zur x-Achse eben geschichtet, eine Richtung s sei durch den Winkel ϑ mit der positiven x-Richtung gegeben. Es bezeichne $J(\vartheta)\,d\omega$ den Betrag an Energie, die in Richtung ϑ in den Winkelraum $d\omega$ fließt. Die Strahlung $J(\vartheta)$ wird (gleichbedeutend mit der Entwicklung nach Kugelfunktion von einem Argumente bei *Eddington*[80])) in die Reihe entwickelt gedacht

$$\text{(a)} \qquad J(\vartheta) = A + B\cos\vartheta + C\cos^2\vartheta + D\cos^3\vartheta + \cdots$$

Die Koeffizienten sind Funktionen von x. Dann wird in Richtung

86) *D. Hilbert*, Begründung der allgemeinen Strahlungstheorie, Physik. Ztschr. 13 (1912), p. 1056.

87) *G. Jaffé*, Grundriß einer Theorie der anisotropen Strahlungsfelder, Ann. Phys. Chem. 68 (1922), p. 583.

$+x$, $0 \lesseqgtr \vartheta \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ die Flächeneinheit durchsetzt von der Energiemenge

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{S}^+ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J(\vartheta) \cos\vartheta \, d\omega = 2\pi\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4} + \frac{D}{5} + \cdots\right)$$

und in Richtung $-x$, $\frac{\pi}{2} \lesseqgtr \vartheta \lesseqgtr \pi$ von der Energiemenge

$$\text{(c)} \ \mathfrak{S}^- = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} J(\vartheta) \cos\vartheta \, d\omega = 2\pi\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{3} + \frac{C}{4} - \frac{D}{5} + \cdots\right).$$

Jede Schicht wird also durchsetzt von der Gesamtstrahlung

$$\text{(d)} \qquad \mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^- = 2\pi\left(A + \frac{C}{2} + \cdots\right)$$

und der Nettostrom $\mathfrak{S}$, der die Flächeneinheit durchsetzt, ist gegeben durch

$$(78) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^- = \int_0^{\pi} J(\vartheta) \cos\vartheta \, d\omega = 4\pi\left(\frac{B}{3} + \frac{D}{5} + \cdots\right).$$

Die Strahlungsdichte ergibt sich zu

$$(79) \qquad u = \frac{1}{c}\int_0^{\pi} J(\vartheta) \, d\omega = \frac{4\pi}{c}\left\{A + \frac{1}{3} C + \cdots\right).$$

Obwohl ein lineares Problem vorliegt, darf die Nettoströmung nicht als *parallele* Strahlung aufgefaßt werden; sie ist diffus nach einem Gesetz, das durch die Koeffizienten A, B, C . . . bestimmt ist. (Für vollkommen schwarze Strahlung würde sich die Reihe auf das erste Glied reduzieren.) Es soll die Schwächung der Nettostrahlung auf der Strecke dx bestimmt werden. Ist k_p der Absorptionskoeffizient für *parallele* Strahlung, so ist

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{S}^+ &= -k_p \varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} J(\vartheta) \cos\vartheta \frac{dx}{\cos\vartheta} \, d\omega \\
&= -2\pi k_p \varrho \, dx \left(A + \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{3} C + \tfrac{1}{4} D \ldots\right), \\
d\mathfrak{S}^- &= -k_p \varrho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} J(\vartheta) \cos\vartheta \frac{dx}{\cos\vartheta} \, d\omega \\
&= -2\pi k_p \varrho \, dx \left(A - \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{3} C - \tfrac{1}{4} D + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich

$$(80)\quad \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}} = \frac{d(\mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^-)}{\mathfrak{S}} = -\frac{k_p}{2}\varrho\, dx \frac{B + \frac{1}{2}D + \cdots}{\frac{1}{3}B + \frac{1}{5}D +} = -k\varrho\, dx$$

sowie der *Absorptionskoeffizient* k *der Nettostrahlung* zu

$$(81)\qquad k = -\frac{k_p}{2}\frac{B + \frac{1}{2}D - \cdots}{\frac{1}{3}B + \frac{1}{5}D + \cdots}.$$

Er hängt also ganz von dem Gesetze ab, nach welchem diese diffus ist; für vollkommen schwarze Strahlung ist $\mathfrak{S} = 0$ und damit wird der Koeffizient für schwarze Strahlung[88])

$$(82)\qquad k_{\text{schwarz}} = 2k_p.$$

Die Schwächung der Strahlung hat das Auftreten eines Strahlungsdruckes zur Folge, der sich nach dem Momentensatze, wie folgt, ergibt:

Die Strahlung $J(\vartheta)\cos\vartheta\, d\omega$ wird um den Bruchteil $k_p\varrho\frac{dx}{\cos\vartheta}$ geschwächt. Um die in Richtung x wirkende Kraft zu finden, ist mit $\frac{\cos\vartheta}{nc}$ zu multiplizieren und somit wird die Druckdifferenz

$$-dp_s = \frac{k_p\varrho\, dx}{nc}\int_0^\pi J(\vartheta)\cos\vartheta\, d\omega = \frac{k_p\varrho\, dx}{nc}\mathfrak{S}.$$

Hierbei ist n der Brechungsexponent. Er soll für das folgende $= 1$ gesetzt werden. Dann folgt

$$(83)\qquad \mathfrak{S} = -\frac{c}{k_p\varrho}\frac{dp_s}{dx} = 4\pi\left\{\frac{1}{3}B + \frac{1}{5}D + \cdots\right\}.$$

(Obwohl die Strahlung $\mathfrak{S}$ diffus ist, tritt in der Gl. 83 der Absorptionskoeffizient k_p für parallele Strahlung auf. Der größeren Schwächung in schiefer Richtung entspricht wohl eine $\sec\vartheta$ mal größere Kraft, von der aber nur die x-Komponente in Wirksamkeit tritt.) Und schließlich ergibt die Kontinuitätsgleichung, die bei Strahlungsgleichgewicht selbstverständlich erfüllt sein muß,

$$(84)\qquad \frac{d\mathfrak{S}}{dx} = 4\pi\varepsilon\varrho = 4\pi\left(\frac{1}{3}\frac{dB}{dx} + \frac{1}{5}\frac{dD}{dx} + \cdots\right).$$

Die Bedeutung von ε ist in Nr. 46 gegeben.

Um die dem Strahlungsgleichgewicht entsprechende Temperatur zu finden, suchen wir die Bedingung stationären Zustandes. In dem Zylinder von der Länge ds in Richtung ϑ wird die Strahlung $k_p\varrho\, ds\, J(\vartheta)\, d\omega$ absorbiert. Da die Volumeinheit die Energiemenge

88) Auf andere Weise bereits von *K. Schwarzschild*[78]) und *R. Emden*[81]) abgeleitet.

$4k_p\varrho E$, $E = sT^4$ emittiert, sendet sie in den Winkelraum $d\omega$ die Energiemenge $\frac{k_p\varrho E}{\pi}\,d\omega$. Gemäß der Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes muß dieses Element eine Temperatur annehmen (in der Auffassung von *A. Eddington*, siehe Nr. 46), daß die emittierten und absorbierten Energiemengen gleich werden. Die Energiequellen $4\pi\varepsilon\varrho\,ds$ liefern in den Winkelraum $d\omega$ eine Energiemenge $\varepsilon\varrho\,ds\,d\omega$. Da aber $ds = \frac{dx}{\cos\vartheta}$, ergibt sich bei Strahlungsgleichgewicht in jeder Richtung ϑ die Energiebilanz

$$\text{(a)}\quad \left|\begin{aligned} \cos\vartheta\frac{dJ(\vartheta)}{dx} &= \cos\vartheta\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}\cos\vartheta + \frac{dC}{dx}\cos^2\vartheta + \cdots\right) \\ &= -k_p\varrho\left(A + B\cos\vartheta + C\cos^2\vartheta + \cdots - \frac{E}{\pi}\right) + \varepsilon\varrho. \end{aligned}\right.$$

woraus zwischen dem Koeffizienten die Beziehungen folgen

$$\text{(b)}\qquad A - \frac{E}{\pi} - \frac{\varepsilon}{k_p} = 0,$$

$$\text{(c)}\quad B = -\frac{dA}{k_p\varrho\,dx} = -\frac{dA}{k_p dm};\quad C = -\frac{dB}{k_p dm};\quad D = -\frac{dC}{k_p dm};\ \cdots$$

und weiter

$$\text{(85)}\qquad E = \pi\left(A - \frac{1}{3}\frac{dB}{k_p\varrho\,dx} - \frac{1}{5}\frac{dD}{k_p\varrho\,dx} - \cdots\right),$$

$$\text{(86)}\qquad u = \frac{4E}{c},$$

$$\text{(87)}\qquad \frac{c}{k_p\varrho}\frac{dp_s}{dx} = 4\pi\left(\frac{1}{3}\frac{dA}{k_p\varrho\,dx} + \frac{1}{5}\frac{d^3A}{k_p^3\,dm^3} + \cdots\right),$$

$$\text{(88)}\qquad \begin{aligned} 4\pi\varepsilon\varrho &= 4\pi\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}B + \frac{1}{5}D + \cdots\right) \\ &= -4\pi\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\frac{dA}{k_p\varrho\,dx} + \frac{1}{5}\frac{d^3A}{k_p^3\,dm^3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Ist ε eine Materialkonstante oder, wie in allen in Betracht kommenden Fällen, wie oben gezeigt, klein gegen E, so daß $A = \frac{E}{\pi}$ gesetzt werden kann, so können alle Koeffizienten durch E und dessen Ableitungen ausgedrückt werden.

Die Absorption werde als stark angenommen, wenn jeder der Koeffizienten $A, B, C, D, \ldots$ klein gegen den vorangehenden ist. Zur Schätzung von $\frac{B}{A} = -\frac{dE}{k_p\varrho\,dx\,E}$ sei daran erinnert, daß $k_p\varrho\Delta x = 1$ ist für eine Strecke, in welcher der Wert der Strahlung auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ herabgeht. Da die Strahlung infolge der hohen Innentemperatur der Sterne sehr kurzwellig ist, wird sich Δx für Gasschichten von normaler Dichte kaum von der Größenordnung 1 m ergeben. Die Änderung dE auf dieser Strecke ist selbstverständlich außerordentlich klein gegenüber dem Werte von E im Sterninnern, der längs des Radius auf kleine Werte herabsinkt. Dasselbe ergibt sich für die Quotienten der aufeinanderfolgenden Koeffizienten.

Physikalisch betrachtet liegen die Verhältnisse so, daß die in eine Schicht eindringenden Lichtquanten im Falle starker Absorption schon auf sehr kurzer Strecke absorbiert und durch neue, gleichmäßig nach allen Seiten ausgeworfene ersetzt werden. Selbst parallel einfallende Strahlung wird dann rasch in gleichmäßig diffuse, in schwarze Strahlung umgewandelt. Nur in diesem Falle gelten die Gl. (89)—(91), welche Strahlungsdruck und Temperatur verknüpfen; sie werden offenbar sinnlos in einem Strahlenbündel, welches sich ohne Absorption ausbreitet. Der Grenzfall schwacher Absorption möge in den angeführten Arbeiten von *Hilbert* und *Jaffé* nachgesehen werden. Ein anderes, zweckmäßigeres Verfahren, wie die höchsten, äußerst verdünnten Schichten der Sternatmosphären behandelt werden müssen, wird in Nr. 75 angewendet werden.

Also folgt, da für den Fall starker Absorption, der allein für den Sternenaufbau, abgesehen von den äußersten Schichten, in Betracht kommt, nur die beiden Koeffizienten A und B beibehalten werden müssen:

$$J(\vartheta) = A + B\cos\vartheta, \qquad A = \frac{E}{\pi}, \tag{89a, 89b}$$

$$\mathfrak{S}^+ = E - \frac{2}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx}, \qquad \mathfrak{S}^- = E + \frac{2}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx}, \tag{89c, 89d}$$

$$\mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^- = 2\pi A = 2E, \tag{89e}$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^- = -\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx} = -\frac{c}{k_p\varrho}\frac{dp_s}{dx}, \tag{89f}$$

$$k = \tfrac{3}{2}k_p, \tag{89g}$$

woraus die *Differentialgleichung* des *Strahlungsgleichgewichtes* folgt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx}\right) + 4\pi\varepsilon\varrho = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{k\varrho}\frac{dE}{dx}\right) + 4\pi\varepsilon\varrho = 0 \tag{90}$$

oder E durch p_s ersetzt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{k_p\varrho}\frac{dp_s}{dx}\right) + 4\pi\varepsilon\varrho = 0. \tag{91}$$

Da in den Gl. 89 und damit in der Differentialgleichung tatsächlich erst der vierte Koeffizient D und die folgenden vernachlässigt sind, ist dem Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen großer Spielraum gegeben.

Grenzbedingungen. Die beiden auftretenden Integrationskonstanten sind durch die Grenzbedingungen bestimmt. Die x-Achse sei von der Oberfläche einwärts gerichtet, die durch den Wert $x = 0$ ausgezeichnet ist. Findet keine Zustrahlung von außen statt, so ist $\mathfrak{S}^+ = 0$ und $\mathfrak{S}^-$ bedeutet die austretende Strahlung, welcher eine bestimmte Solarkonstante entspricht. Als effektive Temperatur T_e sei definiert die Temperatur eines schwarzen Strahlers, welcher eine austretende Strahlung $\mathfrak{S}_0^- = E_e$ liefert. So ergibt sich schließlich *die Grenzbedingung*

$$\mathfrak{S}_0^- = E_e = 2E_0 = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx}\right)_{x=0}; \tag{92}$$

$$T_0^4 = \tfrac{1}{2}T_e^4. \tag{93}$$

Im Gegensatze zu T_0 bedeutet somit T_e keine bestimmte Gastemperatur, sondern lediglich eine Eigenschaft der ausgesandten Strahlung.

Da an der Grenze stets $A - \frac{2B}{3} = \frac{E_e}{\pi}$, *wird für die austretende Strahlung*

$$J(\vartheta) = A - B\cos\vartheta = \frac{E_e}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right), \tag{94}$$

wo ϑ auch den Winkel mit der Austrittsnormalen bedeutet. Die Grenzbedingungen sind von *K. Schwarzschild*[78]) aufgestellt; über Gl. (94) wird in Nr. 52 ausführlicher die Rede sein.

Im allgemeinen Fall, d. i. wenn alle drei Koordinaten berücksichtigt werden, folgt nach *Milne*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{k_p\varrho}\frac{dE}{dz}\right) + 4\pi\varepsilon\varrho = 0 \tag{95}$$

und für konzentrische Schichtung die Gleichung (erstmalig angegeben durch *Eddington*[80]))

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{4r^2}{3k_p\varrho}\frac{dE}{dr}\right) + 4\pi r^2\varepsilon\varrho = 0. \tag{96}$$

Die Lösung der Differentialgleichung wird für den größten Teil der Sternmasse genügend genauen Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$ liefern.

Da Strahlungsgleichgewicht gleichbedeutend ist mit stationärem Zustand, wird man bei Aufbau von Gasmassen mit Berücksichtigung des Strahlungsdruckes diejenige thermodynamische Weggleichung zugrunde legen, die sich im Anschluß an die Differentialgleichung für E ergibt.

In obiger Entwicklung sind die Energiequellen ε gemäß der Auffassungsweise von *A. Eddington*[80]) angesetzt; im Sinne von *A. Milne*[82]) behalten die entwickelten Gleichungen ihre Gültigkeit, falls E durch $E - \frac{\pi\varepsilon}{k_p}$ ersetzt wird.

Wir notieren nochmals

$$E = sT^4 = \frac{ac}{4}T^4, \quad s = 5{,}245 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Erg/cm^2\,sec}$$

und bei starker Absorption

$$u = aT^4, \quad p_s = \frac{a}{3}T^4 = \frac{4s}{3c}T^4.$$

48. Berücksichtigung des Strahlungsdruckes nach T. Bialobjewski.[73]) Das Gewicht einer äußeren Schicht wird getragen durch einen Druck $P = p + p_s$, p der Gasdruck, p_s der Strahlungsdruck gemäß der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d(p+p_s)}{dr} = -\frac{4\pi G\varrho}{r^2}\int_0^r \varrho r^2 dr, \quad p = \frac{R}{m}\varrho T. \tag{97}$$

Als thermodynamische Weggleichung zwischen p, ϱ und T wählt *Bialobjewski* polytropen Zusammenhang nach einer Klasse n. Dann folgt mit Hilfe der Parameterdarstellung (Nr. 7)

$$\frac{p_s}{p} = \frac{m}{R}\frac{a}{3}\cdot\frac{T^3}{\varrho} = \frac{m}{R}\frac{a}{3}u^{3-n}\Theta^3, \tag{98}$$

variabel durch das Sterninnere hindurch und es ergibt sich leicht als Seitenstück zur Differentialgleichung I der polytropen Gaskugel (Nr 17)

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\left\{(n+1)\frac{R}{m}\Theta + \frac{4a}{3}u^{3-n}\Theta^4\right\}\frac{du}{dr}\right] = -4\pi G u^n r^2, \tag{99}$$

welche Gleichung sich weiterer Behandlung zu spröde erweist. *Bialobjewski* entdeckt die große, von *Eddington* später wiedergefundene Vereinfachung, die sich für den Fall $n = 3$ ergibt. Dadurch wird (98) zu

$$\frac{p_s}{p} = \frac{m}{R}\frac{a}{3}\Theta^3 \tag{98a}$$

konstant durch das Sterninnere hindurch und die Gl. (99) geht über in die Differentialgleichung (I) der polytropen Gaskugel $n = 3$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \alpha'^2 u^3 = 0 \tag{I}$$

$$\alpha'^2 = \frac{\pi G}{\frac{R}{m}\Theta + \frac{a}{3}\Theta^4} = \alpha^2\frac{1}{1+\frac{p_s}{p}} = \beta\alpha^2.$$

Damit ist das Problem vollständig gelöst. Wie eine einfache Überlegung zeigt, gelten alle für eine Gaskugel von der Klasse $n = 3$ und dem Molekulargewicht m für p, ϱ, T gefundenen Beziehungen unverändert für $P = p + p_s$, ϱ, T so, als ob das Molekulargewicht βm wäre.

Aus dem Übersetzungsverhältnis (Nr. **19**) $r = \frac{1}{U\alpha'}\mathfrak{r}_1 = \frac{1}{\varrho_0^{1/3}\alpha'}\mathfrak{r}_1$ folgt, da der Grenzradius der Kugel $n = 3$ durch $\mathfrak{r}_1 = 6{,}9$ bestimmt ist und die Mittelpunktsdichte $\varrho_0 = 54{,}36\,\bar{\varrho}$ ist

$$\alpha' = \frac{\pi G}{\frac{R}{m}\Theta + \frac{a}{3}\Theta^4} = \frac{1}{\varrho_0^{1/3}}\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{R}}\right)^2 = \frac{1}{54^{1/3}\bar{\varrho}^{1/3}}\left(\frac{6{,}9}{\mathfrak{R}}\right)^2.$$

Diese Gleichung vierten Grades für Θ ersetzt die *Eddington*sche Gleichung vierten Grades für β (Nr. **60**). Im Gegensatz zu *Eddington* ist aber zu achten, daß keine Energiequellen ε vorhanden sind, also die ganze augenblickliche Strahlung vollständig durch thermische Energie bestritten werden soll. Aus einigen durchgerechneten Beispielen sei angeführt, daß in der Sonne für Aufbau aus atmosphärischer Luft $\frac{p_s}{p} = 5{,}8$, für Aufbau aus dissoziiertem Wasserstoff $\frac{p_s}{p} = 2{,}65 \cdot 10^{-3}$ wird. Das Molekulargewicht geht wie später bei *Eddington* in die Bestimmung von β in vierter Potenz ein. Die auf den ersten Augenblick fragliche Beziehung, den Strahlungsdruck der transportierten Strahlung durch $p_s = \frac{a}{3}T^4$ wiederzugeben, die in aller Strenge nur für schwarze Strahlung gilt, wird bei stärkerer Absorption durch die Ausführungen der vorigen Nr. **47** gerechtfertigt.

Trotzdem hier von Energiequelle ε und Strahlungsgleichgewicht nicht die Rede ist, und letzteres tatsächlich auch nicht vorhanden ist, da infolge der Ausstrahlung die Temperatur eines jeden Teilchens steigt, ergeben sich bereits die wichtigsten Beziehungen der *Eddington*schen Theorie (Nr. **58**, **59**), Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$ und $\frac{p_s}{p} = \text{const.}$ Während aber bei *Eddington* dies Verhältnis durch die Energiequellen ε und den Absorptionskoeffizienten k gegeben ist, wird es hier, wo beide Größen nicht auftreten, durch die polytrope Temperatur Θ bestimmt. Die Polytrope $n = 3$ tritt dadurch in Erscheinung, daß $p_s \sim T^{n+1}$ und $n + 1 = 4$ ist.

B. Atmosphären im Strahlungsgleichgewicht.

Entsprechend den Festsetzungen in Nr. **19** sei eine Atmosphäre definiert als die äußere Schicht eines großen Gasballes von so geringer Mächtigkeit, daß die Gravitationswirkung ihrer Masse gegenüber der Anziehung der innenliegenden Massen vernachlässigt werden kann. Angesichts der Sterngrößen kann von einer Krümmung dieser Schichten abgesehen und ein ebenes Problem angesetzt werden, in dem naturgemäß mit einem konstanten Wert der Anziehungsbeschleunigung g zu rechnen ist Ebenso können die der Atmosphärenmasse proportionalen Energiequellen ε gegenüber den aus tieferen Schichten zugestrahlten Energiemengen vernachlässigt und in der Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichts $\varepsilon = 0$ gesetzt werden. Doch soll hier aus theoretischen Erwägungen die Berücksichtigung von ε kurz gestreift werden. Das ermittelte Gesetz der Temperaturschichtung wird gestatten, außer dem Aufbau der Masse auch die Helligkeitsverteilung der Stern- speziell der Sonnenscheibe abzuleiten. Diese Untersuchung wird erweitert dahin, daß neben der Absorption auch die Zerstreuung der Strahlung in der Atmosphäre, diese als trübes Medium aufgefaßt, in die Strahlungsbilanz einbezogen wird. Im Anschluß an diese Untersuchung wird auch auf die Aufstellung der Energiebilanz mit Berücksichtigung des Verhaltens in den einzelnen Wellenlängen eingegangen werden.

49. Temperaturverteilung bei Strahlungsgleichgewicht. Die Atmosphäre sei horizontal geschichtet, die x-Achse von der äußeren Begrenzung $x = 0$ senkrecht nach abwärts gerichtet. Sieht man, wie festgesetzt, von den Energiequellen ε ab, so ergibt sich durch Lösung der Differentialgleichung sofort das Temperaturgesetz

$$E = am + b, \quad m = \int_0^x \varrho\, dx, \tag{100}$$

wo die Konstante $b = E_0 = \frac{1}{2} E_e$ ist. Zur Bestimmung von a dient die Beziehung für die aufsteigende Strahlung

$$\mathfrak{S}_0 = E_e = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{k_p \varrho}\frac{dE}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4}{3}\frac{a}{k_p},$$

so daß schließlich wird

$$E = \tfrac{3}{4} k_p E_e m + \tfrac{1}{2} E_e = \tfrac{1}{2} k E_e m + \tfrac{1}{2} E_e; \quad k = \tfrac{3}{2} k_p. \tag{101}$$

Diese Gleichung ist zuerst von *K. Schwarzschild*[78]) in seiner grundlegenden Arbeit über Strahlungsgleichgewicht aufgestellt worden. Seine Ableitung ist überaus instruktiv, leidet aber an einer Ungenauigkeit, die weiterhin Verwirrung gestiftet hat. Bezeichnet k einen Absorptionskoeffizienten schlechthin, so gelten nach *Schwarzschild* für die ab- und aufsteigenden Strahlungsströme die Beziehungen

$$\frac{d\mathfrak{S}^+}{dm} = -k\mathfrak{S}^+ + kE, \qquad \frac{d\mathfrak{S}^-}{dm} = +k\mathfrak{S}^- - kE$$

mit den Folgerungen

$$\frac{d(\mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^-)}{dm} = -k(\mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^-), \quad \frac{d(\mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^-)}{dm} = -k(\mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^-) + 2kE.$$

Im stationären Zustand muß

$$\frac{d(\mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^-)}{dm} = 0; \quad 2kE = k(\mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^-)$$

sein. Also folgt, da von außen keine Strahlung auffällt, $\mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^- = -E_e$ und damit die *Schwarzschild*sche Lösung

$$(102) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}^+ = \frac{1}{2} k E_e m \\ \mathfrak{S}^- = \frac{1}{2} k E_e m + E_e \end{cases} \qquad E = \tfrac{1}{2} k E_e m + \tfrac{1}{2} E_e .$$

Trotz ihrer überzeugenden Einfachheit ist diese Behandlungsweise ungenau, da die Natur des Absorptionskoeffizienten k vollständig unbestimmt bleibt. Streng genommen müßten für die beiden Strahlungen, die nach verschiedenen Gesetzen von der parallelen Strahlung abweichen, verschiedene Koeffizienten k angesetzt werden. *Schwarzschild* setzt weiterhin in ungenauer Motivierung für k den Absorptionskoeffizienten für schwarze Strahlung $k = 2k_p$ an. Die strengere Behandlungsweise zeigt, daß der Absorptionskoeffizient k des Nettostroms bei starker Absorption, die für astrophysikalische Probleme allein in Betracht kommt, $k = \frac{3}{2} k_p$ anzusetzen ist. Der *Schwarzschild*sche Irrtum wird sich bei Behandlung der Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe (Nr. 52) verhängnisvoll zeigen.

Sucht man die durch die effektive Temperatur T_e ausgezeichnete Schicht, indem man in Gl. (102) $E = E_e$ setzt und bezeichnet mit m_e die darüberliegende Masse, so ergibt sich

$$(103) \qquad k m_e = 1,$$

d. h. über der durch die effektive Temperatur ausgezeichneten Schicht liegt die absorbierende Masse 1. Die von dieser Schicht ausgehende Strahlung E_e wird durch die Absorptionswirkung der äußeren Schichten auf den Wert $E_e e^{-1}$ herabgedrückt und durch deren Ausstrahlung wieder auf den Wert E_e gehoben. *Die durch die effektive Temperatur T_e ausgezeichnete Schicht darf also nicht als Ausgangspunkt der Strahlung betrachtet werden.*

50. Aufbau der Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht ohne Berücksichtigung des Strahlungsdruckes. Da $p = + gm$, ergeben sich aus (100) und (101) und der Zustandsgleichung vollkommener Gase

$$(104) \qquad p = \frac{2g}{k}\left(\frac{T^4 - T_0^4}{T_e^4}\right); \qquad \varrho = \frac{m}{R}\,\frac{2g}{kT_e^4}\,\frac{T^4 - T_0^4}{T}.$$

Die durch die effektive Temperatur T_e bestimmte Schicht ist also durch die Werte

$$(105) \qquad p_e = \frac{g}{k}, \qquad \varrho_e = \frac{m}{R} \cdot \frac{g}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

ausgezeichnet, deren numerische Bestimmung an der Unkenntnis des

Wertes von $k = \frac{3}{2} k_p$ scheitert. Für die Sonne ist

$$\frac{g}{k} = \frac{2{,}7 \cdot 10^4}{k} \mathrm{Dyn/cm^2} = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-2}}{k} \mathrm{Atm.}$$

Da (Nr. **66**) sich für k ein Wert von der Größenordnung $10 - 10^2$ ergibt, sind p_e und ϱ_e sehr klein. Für die mechanische Gleichgewichtsbedingung ergibt sich

$$(106) \qquad \frac{dp}{\varrho} = g\,dx = -g\,dh = \frac{R}{m} \frac{4\,T^4\,dT}{T^4 - T_0^4}.$$

Setzt man (in Widerspruch mit Strahlungsgleichgewicht), $T_0 = 0$, so zeigt sich eine polytrope Atmosphäre $n = 3$ und ihre Höhe zu

$$\mathfrak{H}_n = (n+1) \frac{R}{m} \frac{T}{g}, \quad n = 3,$$

also endlich, T als Temperatur der Grundschicht. Auf der Sonne, $g = 27{,}2 \cdot 980$ g, endigt sie bei der Ausgangstemperatur von $T = 27{,}2 \cdot 273 = 7400^0$, falls eine Atmosphäre vom Molekulargewicht $m = 2$ angenommen wird, in einer Höhe von 463 km, derselben Höhe, die sich auf der Erde bei einer Ausgangstemperatur von 0^0 ergibt.

Setzt man aber Strahlungsgleichgewicht entsprechend $T_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} T_e$, so wird

$$(107) \quad \frac{m}{R} g x = T_0 \left[4 \frac{T_0}{T} + \log \frac{T - T_0}{T + T_0} - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{T}{T_0} \right] + \text{const.}$$

und die Atmosphäre erstreckt sich bis ∞. In Tiefen, bei denen die Temperatur T gegenüber der Temperatur T_0 genügend groß wird, stimmt ihr Aufbau mit der endlichen polytropen Atmosphäre $n = 3$ genügend genau überein. Mit Hilfe der Gl. (106) läßt sich der Aufbau der Atmosphäre in der Nähe der durch die Werte T_e, p_e und ϱ_e ausgezeichneten Schicht überblicken. Geht man von dieser einwärts, bis eine Temperatur $T = 6\,T_e$ angetroffen wird, so ist der Druck auf den Wert $2591\,p_e$ und die Dichte auf den Wert $\varrho = 432\,\varrho_e$ angestiegen. Dadurch ist auf der Sonne für $m = 2$ eine Strecke von rund $3{,}10^8$ cm zurückzulegen, während einem Winkel von $1''$ von der Erde aus gesehen eine Strecke von $7{,}2 \cdot 10^7$ cm entspricht. Vergleicht man den Temperaturgradienten mit dem für polytropen Aufbau von der Klasse n, so findet man (Nr. **12**), daß für die Stabilität gegenüber entsprechender Störung $\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^4\right] < \frac{4}{n+1}$ sein muß, also folgt, daß gegenüber adiabatischer Störung Atmosphären im Strahlungsgleichgewicht stabil sind, falls sie aus ein-, zwei-, an der Grenze dreiatomigen Gasen aufgebaut werden.[89])

89) Für die Sonnenatmosphäre gibt Gl. (107) nach *D. Brunt* [Anomalous dispersion in solar phenomena, London Astr. Soc. Monthl. Not. 73 (1913), p. 568]

51. Aufbau der Atmosphäre mit Berücksichtigung des Strahlungsdruckes. Setzen wir den gesamten wirkenden Druck $P = p + p_s$, so lautet die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes $dP = d(p + p_s) = g\,dm$ und integriert

$$P = p + p_s = gm + \text{const.}; \quad \text{const.} = p_{s0}.$$

Die Druckverhältnisse gleichen denen in einer Flüssigkeit, auf welcher ein Oberflächendruck p_{s0} lastet An der Grenze $m = 0$ verschwindet wohl der Gasdruck p, nicht aber der Strahlungsdruck p_s, der durch die Temperatur T_0 bestimmt ist. Daraus folgt in Verbindung mit Gl. (101) für Strahlungsgleichgewicht

$$(108\text{a}) \qquad p_s = \frac{2}{3}\frac{kE_e}{cg}(P - p_{s0}) + p_{s0} = (1-\beta)P + \beta p_{s0};$$

$$1 - \beta = \frac{2}{3}\frac{kE_e}{cg}.$$

$$(108\text{b}) \qquad p = \beta(P - p_{s0}).$$

$$(108\text{c}) \qquad p = \frac{\beta}{1-\beta}(p_s - p_{s0}).$$

Ebenso findet sich leicht die *Weggleichung bei Strahlungsgleichgewicht*

$$(109\text{a}) \qquad P = \frac{1}{1-\beta}\frac{4s}{3c}[T^4 - \beta T_0^4],$$

$$(109\text{b}) \qquad \varrho = \frac{m}{R}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{4s}{3c}\frac{T^4 - T_0^4}{T}$$

und daraus die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes

$$(110) \qquad \frac{dP}{\varrho} = g\,dx = -g\,dh = \frac{R}{m}\frac{1}{\beta}\frac{4T^4\,dT}{T^4 - T_0^4}.$$

---

folgenden Aufbau. Dabei ist für k der Absorptionskoeffizient der Erdatmosphäre 0,6 angenommen.

h (km)	h (Winkel von der Erde gesehen)	T	ϱ
∞	∞	5 050	0
210 000	5′	„	10^{-1636}
42 000	1′	„	10^{-333}
3 500	5″	„	10^{-34}
397	0,5′	5 051	$3 \cdot 10^{-6}$
275	0,4″	5 060	$3 \cdot 10^{-5}$
0	0	6 000	$3 \cdot 10^{-3}$
— 4 085	— 5,9″	101 000	$3 \cdot 10$

Die Dichte im Ausgangsniveau ist älteren Anschauungen entsprechend um einige Zehnerpotenzen zu hoch angesetzt; doch ergibt sich eine so außerordentliche Dichteabnahme nach oben, die mit dem Aussehen der Korona nicht vereinbar sein dürfte. Dies läßt vermuten, daß eine hebende Kraft, welche der Massenansammlung nach der Tiefe entgegenwirkt, der Strahlungsdruck, nicht mit in Ansatz gebracht wurde. Darüber wird die nächste Nr. Aufschluß geben.

Für den Temperaturgang folgen dieselben Gleichungen wie Nr. **50** mit dem einzigen Unterschiede, daß an Stelle des Molekulargewichtes m das Molekulargewicht βm anzusetzen ist; d. h. für $T_0 = 0$ wiederum Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$, falls der Gasdruck durch den Druck P ersetzt wird. Für $\beta = 1$ bleibt der Strahlungsdruck konstant $= p_{s0}$, so daß unter allen Umständen $1 - \beta < 1$ sein muß, da sonst negativer Gasdruck wirksam sein müßte. Also muß sein: $\frac{2}{3} k E_\varepsilon = k_p E_e < cg$ und für die Sonne, für die $E_e = 6{,}18 \cdot 10^{10}$ Erg/cm² sec wird, $k_p = 13\,000$ cm²/g, welche Bedingung leicht zu erfüllen ist. Da für die Sonne $\beta = 1 - k_p/13\,000$ wird, so kann, falls unwahrscheinlich hohe Werte für k_p auszuschließen sind, β nahezu gleich 1 gesetzt werden. Es bleibt daher auch mit Berücksichtigung des Strahlungsdruckes die Fußnote 89 angegebene Tabelle gültig. Ihre Unstimmigkeit ist darin begründet, daß in den äußerst verdünnten Schichten der Fall starker Absorption, der den Zusammenhang zwischen p_s und T lieferte, nicht mehr vorliegt. In Nr. **63** und **75** wird gezeigt werden, wie diese Schichten zu behandeln sind. Mit Berücksichtigung der Strahlungsquellen gibt Gl. (101)

$$E = -\pi k \varepsilon m^2 + \tfrac{1}{2} k E_e m + \tfrac{1}{2} E_e .$$

Das Glied in m^2 macht es unmöglich, durch Vernachlässigung der Oberflächentemperatur selbst in tieferen Schichten zu einem Aufbau nach der Polytropen $n = 3$ zu gelangen.

C. Die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe.

In seiner ersten grundlegenden Arbeit hat *K. Schwarzschild*[78]) nachgewiesen, wie bei bekannter Temperaturzunahme nach der Tiefe die bolometrische Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe berechnet werden kann, und in einer zweiten ebenso grundlegenden[90]) den Weg der Untersuchung erschlossen, falls nicht nur auf das Verhalten in den einzelnen Wellenlängen eingegangen, sondern auch die Streuung der Strahlung, die Atmosphäre als trübes Medium aufgefaßt, berücksichtigt wird.

52. Über die bolometrische Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Für die in Richtung ϑ mit der Vertikalen aufsteigende, (also im Sinne $-x$) sich bewegende Strahlung $J(\vartheta)\,d\omega$ gilt (Gleichung (89a) in Nr. **47**) die Beziehung

$$\cos\vartheta \frac{dJ(\vartheta)}{dm} = -k_p\left(\frac{E}{\pi} - J(\vartheta)\right)$$

90) *K. Schwarzschild,* Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre, Berlin Ber. **47** (1914), p. 118.

und damit für die aus der Atmosphäre austretende Strahlung

$$J(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E e^{-k_p m \sec\vartheta} k_p \sec\vartheta\, dm. \tag{110}$$

Also folgt für den Fall des Strahlungsgleichgewichtes, da

$$E = \tfrac{1}{2} E_e(1 + km) \text{ (Gl. 101) und } k = \tfrac{3}{2} k_p$$

ist,

$$J(\vartheta) = \frac{E_e}{2\pi}\left(1 + \frac{k}{k_p}\cos\vartheta\right) = \frac{E_e}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right). \tag{111}$$

Damit ist, *selbstverständlich!* nur die Gleichung (94) der Nr. **47** wiedergefunden. Die zugehörige Helligkeitsverteilung

$$H = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right) \cdot H_0 \tag{111a}$$

angegeben von *R. Emden*[91]), stimmt überraschend genau mit den von *Müller* (Photometrie der Sterne) angegebenen Messungen überein. An Stelle von Gleichung (111) hat *Schwarzschild* die Beziehung $J(\vartheta) = \frac{E_e}{2\pi}(1 + 2\cos\vartheta)$ gegeben, mit der Beobachtung immer noch genügend übereinstimmend, aber mit dem Übelstande behaftet, daß sie die pro Flächeneinheit austretende Strahlung an Stelle von E_e zu $\frac{7}{6} E_e$ liefert. Der Fehler liegt darin, daß *Schwarzschild* die Nettostrahlung als schwarze Strahlung behandelt und mit dem Absorptionskoeffizienten $k = 2k_p$ ansetzt, während ihr der Wert $k = \frac{3}{2} k_p$ (Nr. 47) zukommt. In der Form $J(\vartheta) = \frac{3}{8}\frac{E_e}{\pi}(1 + 2\cos\vartheta)$ erscheint Gleichung (111) bei *Jeans*[92]), für die austretende Strahlung den unrichtigen Wert $\frac{7}{8} E_e$ liefernd. Vergleiche dazu die Ausführungen bei *E. A. Milne.*[93]) Die Unstimmigkeiten verschwinden, wenn beobachtet wird, daß stets mit einem durch die Diffusität der Strahlung bedingten Absorptionskoeffizienten k zu operieren ist. Setzt man $J \sim E = \sum_1^q J_q (k_q m)^q$ so erhält man nach *Emden*[94]) für die Nettostrahlung einen Absorptionskoeffizienten $k = k_p \dfrac{\sum J_q \frac{q!}{q+1}}{\sum J_q \frac{q!}{q+2}}$. Ist speziell $J = J_q k_p m$, so kann q

---

91) *R. Emden,* Über Strahlungsgleichgewicht und Helligkeitsverteilung in der Sonnenatmosphäre. Festschr. für *v. Seeliger*. Berlin (1924), p. 347.

92) *J. Jeans,* The equation of radiative transfer of energy, London Astr. Soc. Month. Not. 78 (1917), p. 28.

93) *E. A. Milne,* Radiation-equilibrium in the outer layers of a star, London Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 361.

94) *R. Emden,* Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung, München Ber. (1913), p. 55.

durch eine Polytropenklasse ausgedrückt werden; die Annahme $m \sim p \sim T^{n+1} \sim E^{\frac{n+1}{4}}$ liefert $q = \frac{4}{n+1}$ und folgt $k = \frac{2n+6}{n+5}$; für schwarze Strahlung ($n = \infty$) wird $k = 2k_p$ und für Strahlungsgleichgewicht ($n = 3$) $k = \frac{3}{2}k_p$. Für den Aufbau nach einer Polytropen wird $(J \sim E \sim p^{\frac{4}{n+1}} = Cm^{\frac{4}{n+1}})$

$$J(\vartheta) = C\Gamma\left(\frac{4}{n+2}\right)(\cos\vartheta)^{\frac{4}{n+1}}$$

mit der Helligkeitsverteilung

$$H = H_0(\cos\vartheta)^{\frac{4}{n+1}}.$$

Diese Helligkeitsverteilung, die sich für die Polytrope $n = 3$ ergibt, (die sich nur in den tieferen Schichten mit Strahlungsgleichgewicht deckt), ist ausgeschlossen. Die äußersten lichtspendenden Schichten können also nicht nach einer Polytropen $n = 3$ aufgebaut sein. Weitere Untersuchungen über die durch Gleichung (110) gelieferte Helligkeitsverteilung finden sich bei *R. Dietzius.*[95])

53. Die Helligkeitsverteilung in den einzelnen Wellenlängen. Es liegen vor in erster Linie zwei Arbeiten: von *Milne*[96]) und *Lindblad.*[97]) Ausgangspunkt beider Untersuchungen sind die bei Strahlungsgleichgewicht für die austretende Strahlung geltenden Gleichungen

$$(110) \qquad J(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E_{(k_p m)} e^{-k_p m \sec\vartheta} \cdot k_p m \sec\vartheta \, dm$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E_{(m'\cos\vartheta)} e^{-m'} \, dm'$$

$$(111) \qquad E = \frac{E_e}{2}\left(1 + \frac{3}{2}k_p m\right) = \frac{E_e}{2}\left(1 + \frac{3}{2}m'\right).$$

Diese Beziehung wird auf das Verhalten in den einzelnen Wellenlängen ausgedehnt, d. h. *es wird Strahlungsgleichgewicht auch in den einzelnen Wellenlängen angenommen. Bei schwarzer Strahlung (Isothermie) ist dies selbstverständlich, in dem vorliegenden Problem aber, wo die Strahlung ungleich temperierte Schichten durchläuft, nach neueren Ansichten*

95) *R. Dietzius,* Die Verteilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe und die Temperaturschichtung in der Sonnenatmosphäre, Wien Ber. 131 (1922), p. 15.

96) *E. A. Milne,* Radiative Equilibrium, London Royal. Soc. Proceed. 223 (1922), p. 201.

97) *B. Lindblad,* On the distribution of intensity in the continous spectra of the sun and the fixed stars, Upsala Univ. Arsskrift 1920.

über den Emissions- und Absorptionsprozeß zum mindesten zweifelhaft. Untersuchungen, mit welcher Genauigkeit diese Ausdehnung selbst im Falle starker Absorption zulässig ist, scheinen vollständig zu fehlen. Da bekanntlich

$$E = sT^4; \quad E_\lambda = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda \varkappa T}} - 1},$$

so ergibt sich für die austretende Strahlung

$$J_\lambda(\vartheta) = K T_0^5 \alpha^5 \int_0^\infty \frac{e^{-m'} dm'}{e^{\alpha\left(1+\frac{3}{2}m'\cos\vartheta\right)^{-\frac{1}{4}}} - 1} \tag{112}$$

$$K = 2hc^2\left(\frac{\varkappa}{hc}\right)^5 \quad \alpha = \frac{hc}{\lambda \varkappa T_0}.$$

Die Funktion

$$f(\alpha, p) = \alpha^5 \int_0^\infty \frac{e^{-m'} dm'}{e^{\alpha(1+pm')^{-\frac{1}{4}}} - 1}$$

ist von *Milne* untersucht. Sie steigt mit p und ihr Maximum verschiebt sich in Richtung wachsender α, also abnehmender Wellenlänge. Die Helligkeitsverteilung ist, falls $J_\lambda(0)$ die Strahlung im Mittelpunkt mißt, gegeben durch das Gesetz

$$\frac{J_\lambda(\vartheta)}{J_\lambda(0)} = \frac{f\left(\frac{hc}{\lambda\varkappa T_0}, \frac{3}{2}\cos\vartheta\right)}{f\left(\frac{hc}{\lambda\varkappa T_0}, \frac{3}{2}\right)}. \tag{113}$$

Die Helligkeitsverteilung hängt also nicht von λ und T_0 einzeln ab, sondern nur vom Produkt λT_0. Ist das Gesetz für alle Wellenlängen in einer bestimmten Temperatur ermittelt, so ist es allgemein bekannt. Da $\frac{f(\alpha, \frac{3}{2}\cos\vartheta)}{f(\alpha, \frac{3}{2})}$ mit wachsendem α abnimmt, wird der Kontrast von Scheibenrand gegen Scheibenmitte um so ausgeprägter, je kleiner λT_0. Für eine gegebene effektive Temperatur T_e steigt der Kontrast mit abnehmender Wellenlänge, und für ein bestimmtes λ mit abnehmender Temperatur. Mit wachsendem λT_0 erreicht der Kontrast den Grenzwert 0,817. Dies ist zugleich der Kontrast in allen Wellenlängen, für welche $\frac{\lambda}{\lambda_{\max}}$ hinreichend groß ist.

Für die integrale Strahlung ergab sich die Helligkeitsverteilung unabhängig von der Temperatur. Mit steigender Temperatur wird deshalb der mit steigender Wellenlänge abnehmende Kontrast genau kompensiert durch den steigenden Kontrast in abnehmender Wellenlänge. Vergleiche von roten und blauen Sternen müssen in allen

Wellenlängen abnehmenden Kontrast zeigen, während integral sich derselbe Wert ergibt.

Die so errechnete Helligkeitsverteilung in den einzelnen Wellenlängen wurde verglichen mit den bekannten Messungen von *Abbot, Fowle* und *Aldrich* an der Sonnenphotosphäre. Der Rechnung liegt ein Wert der Solarkonstanten 1,932 cal/cm² min und der *Stephan*schen Konstanten der von *Coblentz* ermittelte Wert $s = 5{,}70 \cdot 10^{-5}$ erg/cm² sec zugrunde, wodurch sich die effektive Sonnentemperatur $T_e = 5740^0$ und die Grenztemperatur $T_0 = 4830^0$ ergibt; der zugehörige Wert von $\frac{hc}{\varkappa}$ ist 1,4325 cm. Der Beobachtungsbereich λ erstreckt sich von 3230 Å—12250 Å und $\cos\vartheta$ von 0—0,312; letzterer entspricht einem Austrittswinkel des Strahls von 72⁰ im Abstand von 0,95 des Radius der Photosphäre. Beobachtung und Rechnung zeigen in ihrem Gang gute Übereinstimmung. Doch sind mit Ausnahme der Wellenlänge 4330 Å die berechneten Werte systematisch zu klein, so daß sich fast durchwegs ein etwas zu großer Helligkeitsabfall ergibt.

B. Lindblad[97]) benutzt im Prinzip dieselbe Methode, doch leiden seine Zahlen an dem Übelstande, daß er von dem *Schwarzschild*schen Ansatze $E = \frac{E_e}{2}(1 + 2k_p m)$ mit der Folge $J(\vartheta) = \frac{E_e}{2\pi}(1 + 2\cos\vartheta)$ ausgeht, die wie oben bemerkt (Nr. **52**), eine unrichtige Energiebilanz liefert. Es wird in jeder Wellenlänge die Temperatur T_0 der Grenzschichten gesucht, welche die beste Übereinstimmung mit den Messungen von *Abbot, Fowle* und *Aldrich* liefert. Im Mittel ergab sich $T_0 = 5430$. Infolge der unrichtigen Energiebilanz führt dies zu effektiver Temperatur $T_e = 6720$, welche beinahe den doppelten Wert der beobachteten Solarkonstante liefert.

In bezug auf weitere Einzelheiten muß auf die beiden Originalarbeiten verwiesen werden. Doch ist zu beachten, daß die Ergebnisse vielfach modifiziert werden, wenn neben Absorption auch die Zerstreuung des Lichtes in die Energiebilanz einbezogen wird. Davon handelt die nächste Nr.

54. Einfluß der Streuung des Lichtes auf die Helligkeitsverteilung. Die Streuung des Lichtes ist nicht thermodynamischen Ursprungs und soll deshalb hier nur so weit behandelt werden, als sie die Helligkeitsverteilung thermodynamischen Ursprungs beeinflußt. Der Einfluß der Streuung auf die Helligkeitsverteilung einer Sternatmosphäre wurde unter vereinfachten Annahmen zuerst von *A. Schuster*[98])

98) *A. Schuster,* Radiation through a foggy atmosphere, Astroph. Journ. 2 1905), p. 1.

untersucht; die exakte mathematische Fassung des Problems hat *K. Schwarzschild*[90]) gegeben. Während in einer Reihe von Arbeiten[99]) die Helligkeitsverteilung in erster Linie auf Absorption zurückgeführt wird, wie in voriger Nr. dargelegt wurde, werden in anderen Untersuchungen[100]) die optischen Erscheinungen der Sonnenatmosphäre in erster Linie auf Streuung des Lichtes zurückgeführt. Durch zwei neuere Arbeiten von *E. A. Milne*[101]) und *R. Lindblad*[102]) dürfte das Problem die nötige Klärung gefunden haben. Er ergibt sich genügend Übersicht, wenn die zuerst von *Schwarzschild* gegebene Integralgleichung aufgestellt und dann hauptsächlich nach *Lindblad* diskutiert wird. Diese letztere Behandlungsweise ist dadurch charakteristisch, daß sie nicht von einem speziellen Aufbau (Strahlungsgleichgewicht) ausgehend die Helligkeitsverteilung berechnet, sondern umgekehrt aus der beobachteten Helligkeitsverteilung zwei Funktionen, die „Emissivity“ (Ergiebigkeit nach *Schwarzschild*) und die „Collustrivity“ berechnet, welche den Aufbau bestimmen.

Der Betrag zerstreuten Lichtes ist bekanntlich Funktion der Wellenlänge $\left(\sim \frac{1}{\lambda^4}\right)$, multipliziert mit einem rein trigonometrischen Faktor $1 + \cos^2 \vartheta$; ϑ der Winkel mit der Richtung des einfallenden Lichtes. Ist das Streuvermögen der Atmosphäre so groß, daß die Helligkeitsverteilung der Unterlage in allen Wellenlängen hinreichend unterdrückt wird, so ergibt sich für das austretende Licht für alle Wellenlängen dieselbe Helligkeitsverteilung der Scheibe. Die Intensität der austretenden Strahlung ist kleiner in kurzen wie in langen Wellenlängen, während das Verhältnis der Intensitäten in zwei gegebenen Richtungen unverändert bleibt. Dadurch kann Streuung prinzipiell von Absorption unterschieden werden. Erstere ergibt dieselbe Helligkeitsverteilung in allen Wellenlängen, letztere steigert den Kontrast von rot nach violett. An diesen Verhältnissen ändert sich offenbar nichts, wenn der trigonometrische Faktor unterdrückt wird, was im Interesse der Durchführbarkeit der mathematischen Analyse er-

99) *E. Öpik,* Zur Theorie der Sonnenstrahlung, Astr. Nachr. 198 (1914), p. 48.

100) *A. Defant,* Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre, Wien. Ber. 125 (1916), p. 125, ferner *J. J. Spijkerboer,* Lichtstreuung und Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe, Dissert. Utrecht 1917; sowie *H. van Groot,* Strahlungsdruck in Verbindung mit dem Sonnenspektrum, Physica I (1921), p. 7 und 49 (die beiden letzten Abhandl. in holländischer Sprache).

101) *E. A. Milne,* Radiative equilibrium and spectral distribution, London Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 375.

102) *R. Lindblad,* On the radiation and temperature of the external photospheric layers, Astroph. Journ. 58 (1923), p. 113.

forderlich ist. Diese Schwächung im Verhältnis 1:2 für verschiedene Richtungen macht aber wenig aus, solange die Strahlung wenigstens aus einer Hälfte der ein Teilchen umgebenden Kugel einigermaßen gleichförmig erfolgt, was in dem zu behandelnden Problem, solange wir der Oberfläche nicht zu nahe kommen, in der Hauptsache zutrifft.

Eine horizontal geschichtete Atmosphäre sei zwischen den Ebenen $x = 0$ (obere Begrenzung) und $x = H$ eingeschlossen. Wir fassen Strahlung einer bestimmten Wellenlänge λ und einer bestimmten Richtung i ins Auge und unterscheiden absteigende Strahlung a und aufsteigende Strahlung b, indem wir i nur von 0—90° zählen. Die Strahlung des senkrecht zum Strahle stehenden Flächenelementes ds bei der Koordinate x sei in Richtung i innerhalb des Raumwinkels $d\omega$

(a) $a(x, i)\, d\omega\, ds$ für die absteigende Strahlung,

(b) $b(x, i)\, d\omega\, ds$ „ „ aufsteigende „

Auf der Strecke 1 soll durch Absorption der Bruchteil $\varkappa a$ resp. $\varkappa b$, durch Streuung der Bruchteil σa resp. σb verloren gehen, wo $\varkappa$ der Absorptionskoeffizient und σ der Diffusionskoeffizient ist. Wird $\cos i$ mit ξ bezeichnet, so geht zwischen den Ebenen x und $x + dx$ von der absteigenden Strahlung der Bruchteil

$$(c) \qquad [\varkappa a(x, i) + \sigma a(x, i)] \frac{dx}{\xi}$$

verloren. Die thermische Emission der Volumeinheit beträgt $4\varkappa E$ und in den Winkelraum $d\omega$ hinein $\frac{\varkappa E}{\pi} d\omega$. Die von dem Volumelement dv gestreute Strahlung ergibt sich[103]) zu

$$(d) \qquad \sigma \cdot 2\pi\, dv \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(x, i) \sin i\, di + \int_0^{\frac{\pi}{2}} b(xi) \sin i\, di\right] = \sigma \cdot 2\pi dv\, A.$$

In den Winkelraum $d\omega$ wird also gestreut $dv \cdot d\omega \cdot \frac{\sigma A}{2} \cdot$ (Die Funktion $\frac{A}{2}$ wird von *Lindblad* mit G bezeichnet und „Collustrivity“ genannt.) Die gesamte von dem Volumelement in den Kegelraum $d\omega$ ausgesandte Strahlung beträgt somit

$$(114) \qquad d\omega\, dv \left[\sigma \frac{A}{2} + \varkappa \frac{E}{\pi}\right] = d\omega\, dv\, J.$$

$4\pi J$ wird von *Schwarzschild* als „Ergiebigkeit“ bezeichnet (von *Lindblad*

103) Vgl. *M. Plank,* Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig (1913), § 22.

Emmisivity genannt). Somit ergibt sich

(115) $\cos i \frac{da}{dx} = -(\varkappa + \sigma)\, a + J, \quad \cos i \frac{db}{dx} = (\varkappa + \sigma)\, b - J,$

(a und b abhängig von x und i, J nur von x).

Zu dieser Differentialgleichung des Problems kommen die Grenzbedingungen: Für $x = 0$ ist $a = 0$, für $x = H$ ist $b = B$ der Strahlung eines schwarzen Körpers. (Dieselbe Gleichung ergibt sich, wenn man unter x nicht die Entfernung von der oberen Grenze, sondern die über x liegende Atmosphärenmasse versteht). Somit wird

$$a(x, i) = \int_0^x J(\xi)\, e^{(\varkappa+\sigma)(\xi - x)\sec i}\, d\xi \cdot \sec i. \tag{116a}$$

$$b(x, i) = B e^{(\varkappa+\sigma)(x-\xi)\sec i} + \int_x^H J(\xi)\, e^{(\varkappa+\sigma)(x-\xi)\sec i}\, d\xi \cdot \sec i. \tag{116b}$$

Daraus kann die Streuung A gerechnet werden. Es ergibt sich, $\sec i = \eta$ gesetzt

$$A = B\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^2}\, e^{(\varkappa+\sigma)(x-H)\eta} + \int_0^H J(\xi)\, d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta}\, e^{-(\varkappa+\sigma)|\xi - x|\eta}, \tag{117}$$

und folgt schließlich die zur Berechnung von J dienende Integralgleichung

$$J(x) - \frac{\sigma}{2}\int_0^H J(\xi)\, d\xi \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta}\, e^{-(\varkappa+\sigma)|\xi-x|\eta} = \frac{\varkappa E}{\pi} + \frac{\sigma}{2} B \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^2}\, e^{(\varkappa+\sigma)(x-H)\eta}. \tag{118}$$

Für den Grenzfall reiner Absorption ist $\sigma = 0$ zu setzen, woraus die in der vorigen Nr. untersuchte Lösung $J(x) = \frac{\varkappa E}{\pi}$ folgt. *Für den Grenzfall reiner Streuung* ist $\varkappa = 0$ zu setzen und daher die austretende Strahlung

$$b(0i) = e^{-\varkappa H \sec i} + \int_0^H J(\xi)\, e^{-\xi \sec i}\, d\xi \sec i. \tag{119}$$

55. Die Näherung von A. Schuster.[98]) *A. Schuster hat davon abgesehen, die Strahlung verschiedener Richtungen zu trennen, die in dem Koeffizienten* $\cos i$ *der linken Seite der Gleichungen* (115) *zum Ausdruck kommt*; die gesamte Strahlung wird durch einen mittleren Absorptionskoeffizienten und Streuungskoeffizienten ausgezeichnet. (Dies ist streng genommen unstatthaft, da die auf- und absteigende Strahlung nach verschiedenen Gesetzen diffus ist.) Die Ausrechnung ergibt für den Fall reiner Streuung mit den Grenzbedingungen $a = 0$ für $x = 0$

und $b = 1$ für $x = H$

$$b(0,\,i) = \frac{0{,}5 + \cos i}{\sigma H + 1} + e^{-\sigma H \sec i}\,\frac{0{,}5 - \cos i}{\sigma H + 1}. \tag{119}$$

Dies ist die *Schuster*sche Näherung. *Die Helligkeitsverteilung ist gleich in allen Wellenlängen.* In mühsamer Analyse bestimmt *Schwarzschild* die Korrektur, die an dieser *Schuster*schen Näherungsformel anzubringen ist, um die strenge Lösung zu erhalten. *Es zeigt sich aber, daß dieses Korrekturglied einen so kleinen numerischen Wert erhält, daß die tatsächliche Helligkeitsverteilung durch die Näherungsformel hinreichend streng dargestellt wird.* Ist $\sigma H > 2$, so genügt schon der einfache Ansatz

$$b(0i) = \frac{0{,}5 + \cos i}{\sigma H + 1}. \tag{119'}$$

Für den Fall reiner Absorption gilt (Nr. **52, 53**) die Helligkeitsverteilung

$$b(0\,i) = a + \frac{b}{\varkappa}\cos i$$

wenn dem Strahlungsgleichgewicht entsprechend $E = a + bx$ gesetzt wird, *abhängig von der Wellenlänge.*

Schwarzschild wendet diese Formeln auch an auf das Verhalten von Spektrallinien. Außerhalb einer Spektrallinie hat $\varkappa$ den Wert $\varkappa_0$ um bis zur Mitte der Linie auf $\varkappa_1$ zuzunehmen. Dann ist die Intensität

(120)

	in der Mitte $i = 0^0$	am Rande $i = 90^0$
außerhalb der Linie	$a + \frac{b}{\varkappa_0}$	a
innerhalb der Linie	$a + \frac{b}{\varkappa_1}$	$a.$

Im Falle der Absorption verschwinden also alle Linien am Rande

Im Fall der Streuung sei innerhalb der Linie $\sigma = \sigma_1$, außerhalb $\sigma = \sigma_0$, und ergibt sich somit die Intensität

(120')

	in der Mitte $i = 0^0$	am Rande $i = 90^0$
außerhalb der Linie	$\frac{1{,}5}{1 + \sigma_0 H}$	$\frac{0{,}5}{1 + \sigma_0 H}$
innerhalb der Linie	$\frac{1{,}5}{1 + \sigma_1 H}$	$\frac{0{,}5}{1 + \sigma_1 H}.$

Das Aussehen des Spektrums ändert sich im Falle reiner Streuung von der Mitte bis zum Rande hin nicht. Die Gesamthelligkeit des ganzen Spektrums sinkt dabei auf den Wert $\frac{1}{3}$. Messungen von *C. F. Bottlinger*[90]) ergaben für die *H*- und *K*-Linien für Streuung bessere Annäherung an das wirkliche Verhalten im Sonnenspektrum.

56. Streuung und Absorption. Hier kommt außer der bereits zitierten Arbeit von *Milne*[98]) die Untersuchung von *R. Lindblad*[102]) in Betracht. Der gegebene Ansatz von *Schwarzschild* wird mit geringer Modifikation beibehalten.[104]) Die Strahlung wird nicht mehr je nachdem $i \lesseqgtr 90^0$ in ab- und aufsteigende Strahlung a und b zerlegt, sondern nur eine Strahlung $J(x, i)$ in Richtung i, $0 < i < \pi$, eingeführt. Wird weiterhin $\cos i = \xi$ gesetzt, so gehen die Gleichungen (115) der *Schwarzschild*schen Untersuchung über in die Grundgleichung I von *Lindblad*.

$$(120) \quad \begin{cases} dJ_\lambda(x, \xi) = -[\varkappa_\lambda(x) + \sigma_\lambda(x)]\, J_\lambda(x, \xi)\, \frac{dx}{\xi} \\ \qquad\qquad + [\varkappa_\lambda(x) E_\lambda(x) + \sigma_\lambda(x)\, G_\lambda(x)]\, \frac{dx}{\xi} \end{cases}$$

$$(120\text{a}) \qquad G_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi J_\lambda(x, \cos i)\sin i\, di = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} J_\lambda(x, \xi)\, d\xi.$$

G, die „Collustrivity" ist die von *Schwarzschild* eingeführte Funktion $\frac{A}{2}$. Ersetzt man x durch die optische Masse

$$m_\lambda = \int_0^H [\varkappa_\lambda(x) + \sigma_\lambda(x)]\, dx,$$

so folgt die Differentialgleichung

$$(121) \qquad \xi \frac{dJ}{dm} - J = -H; \qquad H_\lambda(m) = \frac{\varkappa_\lambda E_\lambda + \sigma_\lambda G_\lambda}{\varkappa_\lambda + \sigma_\lambda}$$

Die Funktion $H_\lambda(m)$ die „Emmisivity" entspricht der von *Schwarzschild* eingeführten Ergiebigkeit der Schicht m. Nimmt man die Mächtigkeit der Atmosphäre genügend groß an, so ergeben sich die Integralgleichungen

$$(121\text{a}) \quad J(m, \xi) = e^{\frac{m}{\xi}} \int_m^\infty \frac{H(m)}{\xi} e^{-\frac{m}{\xi}}\, dm; \qquad \text{Strahlung auswärts } \xi > 0,$$

$$(121\text{b}) \quad J(m, \xi) = -\, e^{\frac{m}{\xi}} \int_0^m \frac{H(m)}{\xi} e^{-\frac{m}{\xi}}\, dm; \quad \text{Strahlung einwärts } \xi < 0.$$

Die austretende Strahlung ist durch die Messungen von *Abbot, Fowle* und *Aldrich* gegeben. Für die Untersuchungsmethode von *Lindblad* ist charakteristisch, daß nicht durch Annahmen über den Aufbau der Atmosphäre ein $H(m)$ gebildet wird, das die Beobachtungen be-

104) In den Arbeiten von *Schwarzschild* und *Lindblad* ist versehentlich die von der Volumeinheit sekundlich gelieferte Strahlung zu $4\pi k E$ an Stelle von $4kE$ angesetzt; $E = sT^4$, s die *Stefan*sche Konstante. Die Formeln *Schwarzschilds* der Nr. 52, 53 sind daraufhin korrigiert. Am Endergebnisse wird dadurch nichts geändert. Wie der Faktor π die numerischen Rechnungen *Lindblads* beeinflußt, läßt sich nicht übersehen.

friedigt, sondern umgekehrt aus diesen durch rein mathematische Methode das zugehörige $H(m)$ bestimmt wird. Die Lösung ist durch den Satz ermöglicht: Wird die beobachtete Funktion $J(0, \xi)$ und die gesuchte Funktion $H(m)$ in Potenzreihen entwickelt

$$J(0, \xi) = \sum_{i=0}^{N} b_i \xi^i, \quad H(m) = \sum_{i=0}^{N} a_i m^i,$$

so besteht zwischen den Koeffizienten die Beziehung

$$a_i = \frac{b_i}{i!}.$$

Die vorliegenden Messungen von $J_\lambda(0, \xi)$ werden für jedes λ durch eine Reihe bis zum Gliede ξ^4 dargestellt und mit Hilfe dieses Koeffizienten-Satzes die Ergiebigkeit $H_\lambda(m)$ durch eine Reihe bis zum Gliede m^4 dargestellt. Dann kann mit Hilfe der Integralgleichung $J_\lambda(m, \xi)$ und endlich die Funktion $G_\lambda(m)$ aus ihrer Definitionsgleichung ebenfalls berechnet werden. Messungen liegen vor für die Wellenlängen $0{,}323\,\mu$ — $2{,}097\,\mu$; sie gestatten Tabellen für $J_\lambda(0, \xi)$ zu berechnen, welche einen Einblick in die tatsächlich vorliegenden Verhältnisse gestatten. Die Analyse zeigt:

a) Liegt nur Streuung vor, so ist $\varkappa = 0$ zu setzen und wird infolgedessen $H_\lambda(m) = G_\lambda(m)$. Dabei zeigt die weitere Untersuchung, daß beide Funktionen unabhängig von der Wellenlänge sein müssen. Die tabellarisch berechneten Werte zeigen, daß dies nicht der Fall ist. *Reine Streuung kommt also nicht in Betracht.*

Es liegt die Möglichkeit vor, daß wenigstens eine obere Schicht $0 < m < m'$ rein streut. Dann müssen nur innerhalb dieser $H_\lambda(m)$ und $G_\lambda(m)$ übereinstimmen. Wenn das streuende Medium der Sonne in seinen optischen Eigenschaften mit der Erdatmosphäre übereinstimmt, ist das fragliche Intervall $= 0{,}15$ im sichtbaren Spektrum und $= 1{,}25$ im äußersten Ultraviolett zu setzen. Die tabellarischen Werte zeigen so beträchtliche Unterschiede, namentlich im Ultraviolett, daß auch diese Annahme nicht in Betracht kommt.

b) Liegt reine Absorption vor, so ist $\sigma = 0$ zu setzen und folgt $H_\lambda(m) = E_\lambda(m)$ und kann, da $H_\lambda(0)$ vorliegt, $E_\lambda(0)$ berechnet werden. Da die *Planck*sche Formel in absoluten Einheiten

$$E_\lambda = \frac{1{,}77 \cdot 10^{-5}}{\lambda^5 \left(e^{\frac{1{,}43}{\lambda T}} - 1\right)}$$

liefert, kann aus $E_\lambda(0)$ die Temperatur T_0 der äußersten Schichten bestimmt werden und muß sich selbstverständlich unabhängig von der Wellenlänge ergeben. Die numerische Rechnung zeigt, daß das nicht der Fall ist. Für $0{,}380\,\mu > \lambda > 2{,}097\,\mu$ variiert die berechnete

Oberflächentemperatur unregelmäßig zwischen 4580 und 5040°. Entsprechende Verhältnisse folgten aus der Behandlung von *Milne* (Nr. **53**). Für $\lambda = 0{,}323\ \mu$ folgt der besonders niedrige Wert 4300°. *Lindblad* führt diese Unstimmigkeit auf Ungenauigkeit des experimentellen Beobachtungsmaterials zurück, demgegenüber dürfte nach Meinung des Ref. auch die Ausdehnung der thermodynamischen Wärmebilanz auf jede einzelne Wellenlänge einer eingehenden Prüfung bedürftig sein, die nicht nach thermodynamischen Prinzipien, sondern auf Grund neuerer Anschauung über Lichtemission und Absorption zu führen ist. Als wahrscheinlichen Wert der Grenztemperatur setzt *Lindblad* weiterhin 4500° an, bei Gültigkeit von Strahlungsgleichgewicht zu niedrig, da es $T_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\, T_e$ liefert, also $T_0 = 5160°$ resp. 4890°, für $T_e = 6130°$ resp. 5820°.

c) Nimmt man Streuung neben Absorption an, so ist zu beachten, daß $E = H\left(1 - \frac{\sigma}{\varkappa}\frac{G-H}{H}\right)$ niemals < 0 werden kann. Also ist stets $\sigma \leqq \varkappa \frac{H}{G-H}$ speziell $\sigma \gtreqless 0{,}867\, k$ für $\lambda = 0{,}323\ \mu$, und weiterhin $\sigma_\lambda = \sigma_{0,323}\left(\frac{0{,}323}{\lambda}\right)^4$. Also folgt, die Extinktion an der Sonne ist entweder durch reine Absorption oder durch Verbindung dieser mit Streuung innerhalb der gegebenen Grenzen verursacht. *In jedem Falle kann die Streuung nach rot immer mehr vernachlässigt werden.*

In § 6 seiner Abhandlung gelingt es *Lindblad* Extinktions-Koeffizienten abzuleiten. Der größte angegebene Wert findet sich für $\lambda = 0{,}323\ \mu$ in einer durch 6100° ausgezeichneten Schicht. Ist Streuung ausgeschlossen, so ist dies der Absorptionskoeffizient $\varkappa_\lambda$, andernfalls ist er aus $\varkappa_\lambda$ und σ_λ zusammengesetzt. So ist es möglich, für $\varkappa_\lambda$ einen Minimalwert 1,87, für σ_λ einen Maximalwert 1,63 festzustellen.

Ist Strahlungsgleichgewicht vorhanden, so muß der Energiegewinn durch Absorption gleich dem Energieverlust durch Emission sein, also

$$\text{(a)} \qquad \int_0^\infty \varkappa_\lambda G_\lambda\, d\lambda = \int_0^\infty \varkappa_\lambda E_\lambda\, d\lambda .$$

Das Verhältnis

$$\text{(b)} \qquad q = \int_0^\infty \varkappa_\lambda (G_\lambda - E_\lambda)\, d\lambda : \int_0^\infty \varkappa_\lambda E_\lambda\, d\lambda$$

ist ein Index für die Abweichung vom Strahlungsgleichgewicht. In den Schichten von 5300° bis 6500° ergeben sich durch graphische

Integration für q die Werte $-0{,}019$ bis $-0{,}034$, also so kleine Werte, daß der Ausgangspunkt der ganzen Betrachtung, Strahlungsgleichgewicht, wiedergefunden wird.

Wegen weiterer Einzelheiten muß auf die Originalarbeiten von *Lindblad* und *Milne* hingewiesen werden. Es scheint, daß solange nicht atomtheoretische Behandlungsweise der Strahlung ergriffen wird, auf diesem Wege kaum weiter zu kommen sein dürfte.[105])

D. Über das Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre.

57. Das Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre ist in das Kapitel Geophysik einzureihen und für den Astronomen von unwesentlichem Interesse; es soll deshalb hier nur in aller Kürze gestreift werden. Ein erster Versuch, die Temperatur der Stratosphäre zu berechnen, von *Humphrey*[106]) führt zu richtigen Zahlenwerten -54^0, legt der Betrachtung aber eine unrichtige Energiebilanz zugrunde. Eine erste strenge Lösung ist gegeben von *R. Emden.*[94]) Sie beruht im Prinzip darauf, daß das hauptsächlich durch den Gehalt an Wasserdampf bestimmte Absorptionsvermögen der Atmosphäre für auf- und absteigende Strahlung verschieden angesetzt wird. Es ergibt sich dann eine Zweiteilung der Atmosphäre in eine instabile Schicht (Troposphäre) und eine darüberliegende, beinahe isotherme Schicht von rund -54^0 (Stratosphäre), deren Temperatur nach oben zu ansteigt bis zu einem Grenzwerte, der in der Nähe von -19^0 liegen dürfte. Eine Behandlungsweise von *E. A. Milne*[107]) unterscheidet sich dadurch, daß die Sonnenstrahlung nicht gleichmäßig über die Erde verteilt angenommen, sondern die Erde innerhalb des von der Sonne eintreffenden parallelen Strahlenbündels rotierend angenommen wird. Von weiteren Untersuchungen kommen in erster Linie in Betracht Arbeiten von *E. Gold*[108]), *K. Schwarzschild*[109]), *H. Hergesell*[110]) und

105) In einer Reihe von Arbeiten haben *W. H. Julius* und seine Schüler den Einfluß anomaler Brechung und Streuung auf die Sonnenstrahlung behandelt. Da diese Untersuchungen durch rein qualitative Betrachtungen Anschluß an die Beobachtungen suchen und in keinerlei Beziehung zur Thermodynamik stehen, fallen sie außerhalb des Rahmens dieses Berichtes.

106) *W. J. Humphrey,* Vertical temperaturegradient of the atmosphere, especially in the region of the upper inversion, Astroph. Journ. 29 (1909), p. 14.

107) *E. A. Milne,* Radiative equilibrium, the insolation of an atmosphere, Phil. mag. 45 (1922), p. 872.

108) *E. Gold,* The isothermal layer of the atmosphere and atmospheric radiation, London Roy. Soc. Proceed. 82 (1909), p. 43.

109) *K. Schwarzschild,* Bemerkungen zur Berechnung des Strahlungsgleichgewichtes der Atmosphäre, Meteor. Ztschr. 48 (1913), p. 454.

110) *H. Hergesell,* Lindenberg, Observ. Abh. XIII (1919).

M. Milankowitch.[111]) Anwendungen auf den Wärmehaushalt der Erde, den täglichen Temperaturgang und die Bestimmung des Strahlungsvermögens der Atmosphäre liegen außerhalb des Rahmens dieses Berichtes. Angesichts der gänzlich veränderten Bedingungen ist der Wert der letzteren für das Strahlungsvermögen der Sternatmosphären bedeutungslos.

E. Gaskugeln im Strahlungsgleichgewicht.

58. Weggleichung bei Strahlungsgleichgewicht. Bei konzentrischer Schichtung lautet die Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes (Nr. 47)

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{4r^2}{3k_p\varrho}\frac{dE}{dr}\right)+4\pi\varepsilon r^2\varrho=0$$

und ihr erstes Integral wird

$$\frac{dE}{dr}=-\frac{3}{4}\frac{k_p\bar{\varepsilon}_r\varrho M_r}{r^2}$$

worin $\bar{\varepsilon}_r$ den über die Masse M_r gemittelten Wert von ε bedeutet. Aus dem Atominnern stammend, wird ε vermutlich wenig durch die Temperatur beeinflußt; aber selbst wenn ε der Temperatur direkt proportional sein sollte, könnte $\bar{\varepsilon}_r$ angenähert konstant angesetzt werden, da die Mittelpunktstemperatur sich nur 1,7 mal größer ergeben wird als die mittlere Temperatur der ganzen Kugel. Auch k_p wird sich längs des Radius variabel ergeben, *doch wird weiterhin nach Eddington*[80])

(122) $$k_p\cdot\bar{\varepsilon}_r=\text{const.}$$

angenommen. (In den Arbeiten von *Eddington* wird $\frac{\bar{\varepsilon}_r}{\varepsilon_{\mathfrak{R}}}=\eta$ gesetzt.) Es besteht selbstverständlich die Möglichkeit, mit Hilfe mechanischer Quadraturen Lösungen abzuleiten, in welchen $\bar{\varepsilon}_r$ und k_p nach irgendeinem Gesetz variabel angenommen werden. *Die Rechtfertigung des gewählten einfachen Ansatzes besteht einzig und allein in der guten Anpassungsfähigkeit der so errechneten Resultate an die Beobachtung.* Dann folgt weiter die Lösung

(123) $$E=\frac{3}{4}k_p\bar{\varepsilon}_r\int\limits_r^\infty\frac{\varrho M_r}{r^2}dr+E_\infty;\quad E_\infty=\frac{1}{2}E_e.$$

Eine Gaskugel von endlicher Oberflächentemperatur erstreckt sich (selbstverständlich) bis ∞. Aus der Bedingung mechanischen Gleichgewichtes

$$dP=d(p+p_s)=-\frac{GM_r}{r^2}\varrho\,dr$$

111) *M. Milankowitch*, Théorie, Paris 1920, chap. IV

folgt, da im unendlichen nur p nicht aber p_s verschwindet[112]),

$$P = G\int_r^\infty \frac{\varrho M_r}{r^2} dr + p_{s\infty} \tag{124}$$

und damit

$$E = \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{G}(P - p_{s\infty}) + E_\infty \tag{125}$$

und da

$$p_s = \frac{4}{3}\frac{E}{c} = \frac{4}{3}\frac{sT^4}{c} = \frac{a}{3}T^4, \quad a = \frac{4s}{c}.$$

$$p_s = (1-\beta)P + \beta p_{s\infty} \tag{126}$$

$$p = \beta(P - p_{s\infty}) \tag{127}$$

$$1 - \beta = \frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{cG} = \text{const.} \tag{128}$$

längs des Radius. Somit ergibt sich die *Weggleichung bei Strahlungsgleichgewicht*

$$P = \frac{1}{1-\beta}\frac{a}{3}(T^4 - \beta T_\infty^4). \tag{129}$$

Diese Gleichungen gelten sämtlich ohne Rücksicht auf die Zustandsgleichung des aufbauenden Materials. Für $\varrho = \text{const.}$ lassen sie sich leicht weiter behandeln.[85]) Folgt das aufbauende Material der Zustandsgleichung vollkommener Gase, so ergeben sich weiter

$$\varrho = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{m}{R}\frac{a}{3}\frac{T^4 - T_\infty^4}{T} \tag{130}$$

und die Gleichung mechanischen Gleichgewichtes

$$\frac{dP}{\varrho} = -\frac{GM_r}{r^2}dr = \frac{R}{m\beta}\frac{4T^4 dT}{T^4 - T_\infty^4}. \tag{131}$$

Durch diese Gleichungen ist der Aufbau der Kugel eindeutig bestimmt. Numerische Werte müssen durch mechanische Quadraturen gewonnen werden. Für die ausgestrahlte Lichtmenge aber ergibt sich unabhängig von der Zustandsgleichung des aufbauenden Materials (Gl. (77))

$$L = 4\pi\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{M} = \frac{4\pi Gc(1-\beta)}{k_p}\mathfrak{M}. \tag{132}$$

Die Beziehung (128) $\bar{\varepsilon}_r k_p = \text{const.} = cG(1-\beta)$ erweist sich weiterhin von fundamentalster Bedeutung; die unbekannten Energiequellen ε können so durch den leichter zugänglichen Absorptionskoeffizienten k_p ausgedrückt werden.

---

112) Diese Annahme, daß der Gasdruck der in den äußersten, außerordentlich verdünnten Schichten spärlich vorhandenen Moleküle gegenüber dem Drucke der ausfliegenden Luftquanten vernachlässigt werden kann, wird in Nr. 75 näher begründet werden.

59. Ersatz der Weggleichung bei Strahlungsgleichgewicht durch eine Polytrope. *Abstrahiert man mit Eddington*[89]) *von dem Einfluß der äußersten Schichten, indem man nur Massen betrachtet, für welche* $T^4 \gg T_\infty^4$, *indem man* T_∞ *und* $p_{s\infty} = 0$ *setzt*, so gehen die Gleichungen (126), (130) und (133) in die Weggleichung der Polytropen $n = 3$ über:

(133)
$$P = \frac{1}{1-\beta} \frac{a}{3} T^4,$$

(134)
$$\varrho = \frac{1}{1-\beta} \frac{\beta m}{R} \frac{a}{3} T^3$$

und

(135)
$$\frac{dP}{\varrho} = -g\,dr = \frac{4R}{\beta m} dT$$

mit der Folge:

Alle für die Gaskugel vom Molekulargewicht m geltenden Beziehungen in p, ϱ, T bei Aufbau nach einer Polytropen n = 3 gelten unverändert in P, ϱ, T für die Hauptmasse einer Gaskugel vom Molekulargewicht βm in Strahlungsgleichgewicht. Die für die polytrope Kugel $n = 3$ vorliegenden Zahlenwerte können so unmittelbar benutzt werden. Der so berechnete Druck P ist im Verhältnis $\beta : 1 - \beta$ in Gasdruck und Strahlungsdruck zu zerlegen und wird

(135)
$$\frac{p_s}{p} = \frac{1-\beta}{\beta} = \text{const.}$$

längs des Radius. Für die polytrope Kugel $n = 3$ sind Mittelpunktsdichte 54,36 mal größer als die mittlere Dichte und die Mittelpunktstemperatur 1,7 mal höher als die mittlere Temperatur der ganzen Masse. Für die wichtige potentielle Temperatur dieser Gaskugel ergibt sich

(136)
$$\Theta = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \frac{R}{m} \frac{3}{a}\right)^{\frac{1}{3}}. \text{[113]})$$

---

113) Instruktiv ist folgende, von *Eddington* gegebene Ableitung der Gl. (132) bis (135). Die Bedingung mechanischen Gleichgewichts gibt

(a)
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d(p+p_s)}{dr} = \varrho \frac{GM_r}{r^2}$$

und da die Kugel M_r die Strahlung $4\pi \bar{\varepsilon}_r M_r$ aussendet, ist bei starker Absorption

(b)
$$\frac{dp_s}{dr} = -\frac{k_p \varrho}{c} \cdot \frac{4\pi \bar{\varepsilon}_r M_r}{4\pi r^2}$$

und damit wird

(c)
$$\frac{d(p+p_s)}{dp_s} = \frac{Gc}{k_p \bar{\varepsilon}_r}.$$

Setzt man $\frac{Gc}{k_p \bar{\varepsilon}_r} = \text{const.} = \frac{1}{1-\beta}$, so wird

(d)
$$p = \frac{\beta}{1-\beta} p_s + p_{s\infty}$$

da für $r = \infty$ wohl p, nicht aber T und damit $p_{s\infty} = 0$ wird. — Da aber bei

60. Der Faktor $1-\beta$ und seine Berechnung. Definitionsgemäß gilt

$$(128)\qquad 1-\beta=\frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{cG}$$

und die Integration der Differentialgleichung beruht auf der Voraussetzung $\bar{\varepsilon}_r k_p = \text{const.}$ innerhalb des ganzen Sterns (soweit die Absorption der Bedingung „stark“ genügt), wobei die Konstante von Stern zu Stern wechseln kann. Stets aber muß sein

$$(137)\qquad \bar{\varepsilon}_r k_p = Gc(1-\beta) = 2000(1-\beta)\,\text{cm}^4/\text{g sec}^3$$

$$(\bar{\varepsilon}_r k_p)_{\max} < 2000.$$

Dürften ε_r und k_p als Materialkonstante behandelt werden, was in erster Annäherung wohl zutrifft, so besitzt $1-\beta$ für alle Sterne im Strahlungsgleichgewicht denselben Wert. Für (Nr. **46**) $\varepsilon = 3$ Erg/g sec würde k_p im Maximum $= 666$ sein. Es sei daran erinnert, daß die Strahlung auf den Wert $\frac{1}{e}$ sinkt bei Durchsetzen einer Gassäule von $k_p \varrho \Delta r = 1$, für $k = 100$ bei Durchsetzen einer Luftsäule bei normaler Dichte von 7,7 cm Länge. Schwarze Strahlung von der Temperatur 10^6 hat ihr $\lambda_{\max}$ bei 29 Å. Die Unkenntnis des physikalischen Verhaltens des Sternmaterials, also der Größen ε und k_p zwingt zur Berechnung von β den umgekehrten Weg einzuschlagen. Dazu wird der Stern betrachtet als Gaskugel von der Masse $\mathfrak{M}$ und dem Radius $\mathfrak{R}$, aufgebaut nach der Polytropen n. Dann besteht zwischen Θ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$ die kosmogenetische Flächengleichung (Nr. 22)

$$\frac{\Theta_n}{\mathfrak{M}^{\frac{n-1}{n}}\mathfrak{R}^{\frac{3-n}{n}}} = \frac{m}{R}\,C_n.$$

Die Konstante kann den von *R. Emden* berechneten Tabellen entnommen werden. Für $n=3$ ist Θ_3 unabhängig vom Radius eindeutig durch die Masse bestimmt, Kosmogenide und aufbauende Poly-

---

vollkommenen Gasen und starker Absorption *stets*

$$(\text{e})\qquad p=\frac{3R}{am}\cdot\frac{\varrho}{T^3}\cdot p_s$$

folgt in Verbindung mit (d): kann von $p_{s\infty}$ abgesehen werden, so ist $\frac{p}{p_s} \sim \frac{\varrho}{T^3}$ konstant und damit eine Polytrope $n=3$ gegeben; andernfalls ist $\frac{\varrho}{T^3} + \text{const.}$ und eine Polytrope $n=3$ ausgeschlossen. Ist $\frac{dp_s}{dr}$ unabhängig von der Zeit, so ist der Aufbau stationär und herrscht Strahlungsgleichgewicht. In den Arbeiten von *Eddington* wird durchwegs $p_{s\infty}=0$ gesetzt und damit auf die Behandlung der äußeren Schichten verzichtet.

trope fallen zusammen. Zusammen mit Gl. (136) und mit Rücksicht darauf, daß m durch βm zu ersetzen ist, folgt

$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = 0{,}00267 \cdot \left(\frac{m}{R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\text{Sonne}}}\right)^2. \tag{138}$$

$\mathfrak{M}$ *und* β *bestimmen sich gegenseitig eindeutig.* (*Eddington* setzt neuerdings, modernere Werte für die Gaskonstante (8,29.. statt $8{,}2962 \cdot 10^7$) und die Sonnenmasse (1,991 statt $1{,}94 \cdot 10^{33}$) benutzend, den Zahlenfaktor $= 0{,}00308$. Der Unterschied ist für die weitere Rechnung bedeutungslos.) Daraus folgt: Wären ε und k_p Materialkonstante, so wäre die Sternmasse nicht mehr willkürlich: alle Sterne im Strahlungsgleichgewicht und mit gleich aufbauendem Material müßten an Masse gleich sein. Dadurch würde sich erklären, daß die Massen aller Sterne von gleicher Größenordnung sind. Diese Konstanz der Sternmasse würde auch folgen, falls nur das Produkt $\bar{\varepsilon}_r k_p$ von Stern zu Stern konstanten Wert besitzt. *Eddington* erweitert diese Verhältnisse. Mit der Masse ist $\frac{1-\beta}{\beta} = \frac{p_s}{p}$ eindeutig bestimmt, mit der Masse steigt $1-\beta$ und damit das Verhältnis Lichtdruck zu Gasdruck. Da ein Überwiegen des Lichtdruckes, der bei Störungen mit T^4 variiert, höchstwahrscheinlich unsolide Bauverhältnisse schaffen würde, ist die Sternmasse nach oben begrenzt. Für $m = 2{,}8$, $\mathfrak{M} = 9$ Sonnenmassen wird bereits $(1-\beta)/\beta > 1$. Die Sterne können also der Masse nach nicht von höherer Größenordnung sein wie die Sonne.

61. Energetik bei Strahlungsgleichgewicht. Das Potential der Gravitationskräfte $\Omega = -G\int \frac{M_r\,dM_r}{r}$ und die thermische Energie U der polytropen Gaskugel $n = 3$ lassen sich nach Nr. **21** berechnen, ihre Summe stellte bisher die ganze vorhandene Energie dar. Bei Einführung des Strahlungsdruckes ist aber nach *Eddington* zu berücksichtigen, daß in dem von der Kugel eingenommenen Raum Strahlungsenergie H vorhanden ist im Betrage von aT^4 Erg/cm^3, die mit steigender Temperatur gegenüber der Molekularenergie U, die $c_v \varrho T$ Erg/cm^3 beträgt, immer mehr zur Geltung kommt. Ω und U lassen sich nach Nr. 59 aus den früheren Werten ableiten, indem der Gasdruck p durch den gesamten Druck P und das Molekulargewicht m durch βm ersetzt wird. Somit ergeben sich für $n = 3$

$$\Omega = -G\int_0^{\mathfrak{R}} \frac{M_r\,dM_r}{r} = -3\int_0^{\mathfrak{R}} P\,dV; \quad \Omega = -\frac{3}{2}G\frac{\mathfrak{M}^2}{R} \tag{139}$$

$$U = \int_0^{\mathfrak{R}} c_v T \varrho\,dv = \frac{\beta}{\varkappa-1}\int_0^{\mathfrak{R}} P\,dV = -\frac{\beta}{3(\varkappa-1)}\Omega \tag{140}$$

$$(141)\qquad H = \int_0^{\Re} a T^4 dv = 3(1-\beta)\int_0^{\Re} P dV = -(1-\beta)\Omega$$

und daraus das Verhältnis

$$(142)\qquad \frac{H}{U} = 3(\varkappa - 1)\frac{1-\beta}{\beta} = 3(\varkappa - 1)\frac{p_s}{p}$$

mit steigender Masse ansteigend, für irdische Massen verschwindend klein, für Fixsternmassen von der Größenordnung 1. Die gesamte Energie E wird

$$(143)\qquad E = \Omega + U + H = -\beta\frac{4-3\varkappa}{3(\varkappa-1)}\Omega$$

$$(143\,\mathrm{a})\qquad U + H = -\left(1 + \beta\frac{4-3\varkappa}{3(\varkappa-1)}\right)\Omega.$$

Zur vollständigen Aufstellung von E müßten noch die Energiequellen ε in Ansatz gebracht werden. Da diese aber von Temperaturänderungen außerordentlich wenig beeinflußt werden, können sie in erster Annäherung konstant gesetzt werden. Dann zeigt sich, daß die einer Arbeitsleistung $-d\Omega$ entsprechende Zunahme der Energiemenge $U + H$ zu groß ausfällt, falls $\varkappa < \frac{4}{3}$. Daraus folgt, daß auch bei Berücksichtigung des Strahlungsdruckes stabile Gaskugeln nur aus einem Gase aufgebaut werden können, dessen $\varkappa \geqq \frac{4}{3}$.

62. **Typischer Riesenstern.** *Eddington*[80]) führt als Typus eines Riesensterns einen Stern von 1,5 Sonnenmassen ein. Für ein Molekulargewicht 2,8 (darüber Nr. 65) wird $1 - \beta = 0{,}174$ und $\frac{p_s}{p} = 0{,}211$. Der Radius kann noch willkürlich festgesetzt werden. Für $\bar{\varrho} = 0{,}002\ \mathrm{g/cm^3}$ wird $\Re = 7 \cdot 10^{11}$ cm. Dadurch ist der Aufbau nach der Polytropen $n = 3$ eindeutig bestimmt. Unbestimmt bleibt die ausgesandte Lichtmenge, die nicht durch das Produkt $\bar{\varepsilon}_r k_p$, sondern durch $\bar{\varepsilon}_r$ einzeln bestimmt wird. Setzt man den Stern mit *Eddington* von der Größenklasse $m = -0{,}3$ an (Sonne $m = 5{,}1$), so emittiert er sekundlich $5{,}5 \cdot 10^{35}$ Erg und seine effektive Temperatur wird 6500^0. Setzt man anderseits $\bar{\varepsilon}_{\Re} = 3$ Erg/sec, so wird die ausgesandte Strahlung $1{,}09 \cdot 10^{35}$ Erg/sec, die Größenklasse $+1{,}5$ und $T_e = 4280^0$. Für $\bar{\varepsilon}_{\Re} = 3$ Erg/g sec wird $k = \frac{2000 \cdot 0{,}174}{3} = 116$; für die nach *Eddington* ausgesandte Strahlungsmenge wird $\bar{\varepsilon}_{\Re} = 15{,}1$ Erg/g sec und $k_p = 23$. *Ist aber k besonderen, etwa durch ϱ und T bestimmten Bedingungen unterworfen, so ist $\bar{\varepsilon}_{\Re}$, und damit L, mitbestimmt.* (Siehe Nr. 67.)

Für $\bar{\varepsilon}_{\Re} = 3$ Erg/g sec ergeben sich für die durch die effektive Temperatur T_e ausgezeichnete Schicht

$$T_e = 4280^0, \quad P_e = 2{,}672 \text{ Dyn/cm}^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ Atm.},$$
$$p_{se} = 0{,}792 \text{ Dyn/cm}^2 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ Atm.},$$
$$p_e = 1{,}880 \text{ Dyn/cm}^2 = 1{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ Atm.},$$
$$\varrho_e = 1{,}483 \cdot 10^{-11} \text{ g/cm}^3.$$

Für die effektive Temperatur *Eddingtons* sind die Drucke mit 5,32 und die Dichte mit 3,50 zu multiplizieren. Die außerordentlich geringe Dichte zeigt an, daß die ausgesandte Strahlung nicht von dieser Schicht ausgeht.[114]) (Vgl. Nr. **49**.)

63. Behandung der äußeren Schichten. Für diese kann Strahlungsgleichgewicht nicht mehr nach der Polytropen $n = 3$ ersetzt werden und gilt hier nicht mehr die Beziehung $\frac{p}{p_s} = \text{const.}$ Will man nicht ein ebenes Problem ansetzen, wobei sich zeigt, daß über der durch die effektive Temperatur ausgezeichneten Schicht die optische Masse 1 liegt, so kann man nach *R. Emden*[5]) wie folgt verfahren. Die Ergebnisse der Nr. **58**—**60** gelten für den Fall starker Absorption; d. i. wenn (Nr. **47**) jeder der Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ klein gegen den vorangehenden ist. In den äußersten, außerordentlich dünnen Schichten trifft dies nicht zu. Bildet man aber für die durch die effektive Temperatur T_e ausgezeichnete Schicht das Verhältnis $\frac{B}{A}$, so

---

114) *Es sei an dieser Stelle vor der irrigen Anschauung gewarnt, es würde der Aufbau der Hauptmasse der polytropen Kugel $n = 3$ von Fixsterndimensionen durch Einführung des Strahlungsdruckes wesentlich geändert.* Sind Masse und Radius gegeben, so ist die Anordnung der Hauptmasse mit und ohne Strahlungsdruck dieselbe. Durch Einführung des Strahlungsdruckes werden nur die Temperaturen im Verhältnis β, für den typischen Riesenstern $\beta = 0{,}826$, geändert. Ohne Berücksichtigung der Strahlung ergibt sich dessen Mittelpunktstemperatur $= 8{,}005 \cdot 10^6$; Strahlungsdruck drückt dieselbe nur auf $6{,}61 \cdot 10^6$ herab. Der Unterschied ist praktisch belanglos. Im Mittelpunkt herrscht stets ein „Druck" $= 2{,}61 \cdot 10^{13}$ Dyn/cm², während er im ersten Falle reiner Gasdruck ist, teilt er sich im andern Falle im Verhältnis $1 - \beta : \beta$ in Strahlungsdruck $(0{,}45 \cdot 10^{13})$ und Gasdruck $(2{,}16 \cdot 10^{13})$ auf. Auch beliebig gesteigerte, durch die Energiequelle ε gedeckte Ausstrahlung ist auf diesen Aufbau ohne Einfluß; nur wird jeweils die Temperatur einer anders gelegenen Schicht gleich der zugehörigen effektiven Temperatur. *Durch diese Verhältnisse wird weder die theoretische noch praktische Bedeutung der Eddingtonschen Theorie im geringsten herabgesetzt.* Sie zeigt, daß von ∞ vielen möglichen Bauarten lediglich die Polytrope $n = 3$ in Betracht kommt. Und durch die Einführung der Energiequellen ε und des Absorptionskoeffizienten k wird, wie aus den folgenden Nummern hervorgehen wird, die gesamte Fixsternphysik auf eine neue Basis gestellt.

Durch Einführung des Strahlungsdruckes werden lediglich die Verhältnisse in den äußersten Schichten von relativ sehr geringer Masse, allerdings vollkommen, geändert, indem sich der Radius bis ∞ erstreckt und die Kugel isotherm ausläuft.

ergibt sich hierfür, da über dieser (Nr. **49**) die optische Masse $k_p \varrho \Delta x = 1$ liegt, ein Wert von der Größenordnung $\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{6}$. Da aber in den maßgebenden Gleichungen der Koeffizient C nicht auftrat und erst der Koeffizient D vernachlässigt wurde, folgt, daß auch Schichten in dieser Gegend der Bedingung starker Absorption noch entsprechen. Setzt man die Gleichungen der Nr. **58** für die weit außen liegende durch die Temperatur $T = qT_e$ ausgezeichnete Schicht an, so ergeben sich die Beziehungen

$$p_s = q^4 \frac{a}{3} T_e^4, \tag{144a}$$

$$p = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{2q^4-1}{2} \cdot \frac{a}{3} T_e^4, \tag{144b}$$

$$P = \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{2q^4-1}{2} \cdot \frac{a}{3} T_e^4 + \frac{1}{2}\frac{a}{3} T_e^4, \tag{144c}$$

$$\varrho = \frac{m}{R} \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \frac{2q^4-1}{2q} \frac{a}{3} T_e^3, \tag{144d}$$

$$\left(\frac{dP}{\varrho}\right) = -g\,dr = \frac{R}{m}\frac{4}{\beta} \cdot \frac{2q^4}{2q^4-1} dT, \tag{144e}$$

$$\frac{p_s}{p} = \frac{1-\beta}{\beta} \frac{2q^4}{2q^4-1}. \tag{144f}$$

Das Verhältnis $\frac{p_s}{p}$ ist nicht mehr const. $= \frac{1-\beta}{\beta}$ wie im Falle der polytropen Darstellung, sondern hat für die durch die effektive Temperatur T_e ausgezeichnete Schicht bereits den doppelten Wert erreicht. Von dieser Schicht ausgehend läßt sich der Aufbau entwickeln; dabei kann mit genügender Genauigkeit der für die Hauptmasse des Sterns ermittelte Wert von β angesetzt werden. Die Lage dieser Schicht als Funktion von r läßt sich nicht bestimmen; einen wichtigen Anhaltspunkt liefert aber der Umstand, daß über ihr die optische Masse $\int k \varrho\, dr = 1\ \mathrm{g/cm^2}$ liegt. Setzt man $T_e = 6000^0$ (effektive Sonnentemperatur), so werden

$$p_{se} = 3{,}05\ \mathrm{Dyn/cm^3} = 3{,}01 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Atm},$$

$$p_e = \frac{\beta}{1-\beta} 1{,}52\ \mathrm{Dyn/cm^2} = \frac{\beta}{1-\beta} 1{,}51 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Atm},$$

$$\varrho_e = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{m}{R} \frac{1{,}52}{6000} = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot m \cdot 3{,}07 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Die äußersten, außerordentlich verdünnten Schichten werden fast ausschließlich durch den Druck p_s der ausfliegenden Lichtquanten getragen; mit zunehmender Tiefe (Dichte) steigt der Gasdruck p, bis sich das Verhältnis $\frac{p_s}{p} = \frac{1-\beta}{\beta} =$ const. einstellt. Für $q = 3$ ist dies bereits mit einer Genauigkeit von $6\%_0$ erreicht. In Nr. **74** wird sich zeigen, daß in den Schichten, in welchen die Absorptionslinien der Spektren ausgebildet werden, ein Gasdruck von der Größenordnung 10^{-4} Atm herrscht. Sie liegen also tiefer und sind höher temperiert als die durch T_e ausgezeichnete Schicht.

64. Einführung der van der Waalsschen Zustandsgleichung. In den Zwergsternen sind bekanntlich Dichten vorhanden, in welchen nach Laboratoriumsverhältnissen die Zustandsgleichung vollkommener Gase gänzlich ausgeschlossen ist. An ihrer Stelle haben *Eddington*[80]) und *A. Kohlschütter*[115]) die *van der Waals*sche Zustandsgleichung angesetzt in der vereinfachten Form (vgl. Nr. **29**). In bezug auf die Durchrechnung kann um so unbedenklicher auf die Originalarbeiten verwiesen werden, als sich (Nr. **67**) zeigen wird, daß sich die Sternmaterie angesichts der hohen Temperatur in einem Zustand befindet, für welchen diese Zustandsgleichung illusorisch wird. Die neuesten, unten zu besprechenden Untersuchungen von *Eddington*[116]) lassen vielmehr schließen, daß auch in den Zwergsternen die Zustandsgleichung vollkommener Gase angesetzt werden darf.

Durch die Zustandsgleichung tritt neben dem Absorptionskoeffizienten k_p neu das sog. Covolumen, bedingt durch den Maximalwert ϱ_0 der Dichte auf. Durch Laboratoriumsversuche ermittelte Werte müssen außer Betracht bleiben, da sie unterhalb der mittleren Dichte der Sonne liegen. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung wird bei *Eddington* in zwei Punkten erzwungen, nämlich für den typischen Riesenstern (indem man den Wert für k bestimmt) und für die Sonne (indem man ϱ_0 bestimmt). Als Ergebnis dieser Rechnung wird für $m = 2{,}8$ der Zusammenhang zwischen Masse, effektiver Temperatur und mittlerer Dichte in einem Diagramm graphisch dargestellt. Für das Molekulargewicht $2\sqrt{2} = 2{,}8$ resp. 4 ergibt sich $\varrho_0 = 4$ bzw. $3{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$. Weiter zeigt sich, daß *maximale* effektive Temperaturen für mittlere Dichten erreicht werden, die nach der Masse des Sterns zwischen 0,1 und 0,6 liegen. Die maximale effektive Temperatur ist angenähert der Quadratwurzel aus der Masse proportional. Die absolute Helligkeit bleibt im aufsteigenden Ast der Entwicklung konstant. Die effektive Temperatur der Sonne z. B. könnte niemals mehr als 9000^0 betragen, ihre Entwicklung niemals den Spek-

115) *A. Kohlschütter,* Über das Strahlungsgleichgewicht der Sterne, Potsdam astrophys. Observ. Publ. 25 (1922), Nr. 78.

116) *A. S. Eddington,* On the relation between the masses and luminosities of the stars, London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 300.

traltypus A erreicht haben. In einer weiteren Arbeit hat *Eddington*[117]) diese Untersuchungen wieder aufgenommen, indem für k_p ein mit der Dichte und Temperatur variabler Ausdruck (Nr. **66**) eingeführt wurde. Dadurch steigt ϱ_0 angenähert auf den Wert 12,8 und sinkt bei der Sonne die maximale effektive Temperatur auf den Wert 6600°.

Die Untersuchung *Kohlschütter*s weicht von derjenigen *Eddington*s in fundamentaler Weise dadurch ab, daß hier ε, die pro Masseneinheit freiwerdende Energie, nicht konstant gesetzt wird, sondern proportional der Temperatur, entsprechend dem Energiegewinn durch Kontraktion (Nr. **9**). Wesentlich für die Ableitung der Beziehung zwischen T_e, $\mathfrak{M}$ und $\bar{\varrho}$ ist, daß der Anschluß an die Beobachtung nicht wie bei *Eddington* in zwei Punkten, sondern nur in einem Punkt gewonnen wurde, indem für die Sonnenmasse $= 1$ und die mittlere Dichte $= 1{,}38$ die effektive Temperatur 6000° angesetzt, dafür aber durch verschiedene Skalenbezifferung den verschiedenen Werten von ϱ_0 Rechnung getragen wurde. Für einen typischen Zwergstern vom Molekulargewicht 18 ergab sich $\varrho_0 = 1{,}5$ g/cm³ und der Absorptionskoeffizient $k_p = 251$. Dieser zeigt außerordentlich starke Abhängigkeit von dem Molekulargewicht und auch von dem Werte ϱ_0. Variiert bei der Sonne das Molekulargewicht von 1 bis 54 und die Konstante ϱ_0 von 1,41 bis 2,11, so variiert k_p von $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ bis $2{,}1 \cdot 10^3$.

65. Das Molekulargewicht der Sternmaterie. Der Aufbau eines Sternes im Strahlungsgleichgewicht wird in erster Linie durch die Größe β bestimmt, bei deren Berechnung (Gl. (138)) das Molekulargewicht in der 4. Potenz eingeht. Variiert die Sternmasse von 0,5 bis 50 Sonnenmassen, so variiert $1-\beta$ für $m = 2{,}8$, 4 resp. 54 von 0,036 bis 0,791; 0,106 bis 0,850 resp. 0,920 bis 1. Da aber (Nr. **60**) Werte von $\frac{1-\beta}{\beta} > 1$ mit größter Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen sind, können nur kleine Werte des Molekulargewichtes in Betracht kommen. Dieses kleine Molekulargewicht steht scheinbar in Widerspruch mit der Gleichartigkeit der alle Himmelskörper aufbauenden Materie; es erklärt sich aber dadurch, daß bei hohen Temperaturen starke Ionisation eintritt und die abgesprengten Elektronen als unabhängige Moleküle von einem mittleren Atomgewicht in Rechnung zu setzen sind.

Ist A das Atomgewicht und N die Ordnungszahl des Elementes, und werden alle Elektronen abgesprengt, so verteilt sich die Masse A auf $N+1$ voneinander unabhängige, frei bewegliche Teilchen, so daß

117) *A. S. Eddington*, Applications of the stellar-absorptions-coëffizient, London Astr. Soc. Month. Not. 83 (1922), p. 98.

der Mittelwert des Molekulargewichtes $m = \frac{A}{N+1}$ wird. Setzt man angenähert $A = 2N$, so ergibt sich mit Ausnahme des Wasserstoffes ein mittleres Molekulargewicht von nahezu $= 2$. Sind nicht alle Elektronen abgesprengt, so daß die Anzahl der freien Elektronen pro Atom $\frac{1}{f}$ beträgt, so wird $m = \frac{2Nf}{1+f}$.

Es ist das Verdienst von *J. Eggert*[118]), in einer grundlegenden Arbeit die Gesetze über Dissoziationsgleichgewicht auf Ionisationsvorgänge übertragen und dadurch der Astrophysik ein ungemein fruchtbares, namentlich von *Megh Nad Saha* mit größtem Erfolge weiter ausgebautes Forschungsgebiet aufgeschlossen zu haben. (Darüber wird im 4. Abschnitte eingehender zu sprechen sein.) *Eggert* behandelt speziell die Ionisation des 26 Elektronen tragenden Eisenatoms. Die Abspaltung der äußersten 8 Elektronen des N-Niveaus tritt unter einem Drucke von 10^7 Atm bei einer Temperatur von 10^5—10^6 ein. Damit auch die 8 Elektronen des M-Niveaus abgetrennt werden, muß die Temperatur um eine 10. Potenz steigen und stimmt dann der Größenordnung nach mit den in Riesensternen anzutreffenden Temperaturen überein. Der Faktor $\frac{1}{f}$ wird $= 16$ und das zugehörige Molekulargewicht $\frac{2 \cdot 26}{17} = 3{,}1$. Trotzdem nur 16 Elektronen abgespalten sind, sinkt das Molekulargewicht von 54 auf 3,1. In seinen ersten Arbeiten nimmt *Eddington* an, daß der Wert $m = 4$ den tatsächlichen Verhältnissen am besten entsprechen dürfte. Nun ist aber zu beachten, daß *Eggert* über keinen experimentell ermittelten Wert der in Betracht kommenden Ionisationsspannung verfügte, sondern diese aus der potentiellen Energie des Atomaufbaues berechnen mußte, wobei damaliger Anschauungen entsprechend die K-, L-, M-, N-Elektronen auf zugehörigen Kugelschalen unter sich gleichwertig angenommen wurden. In folgender Nummer wird sich zeigen, daß das Molekulargewicht mit dem leichter faßbaren Absorptionskoeffizienten eng verknüpft ist. Auf diese Weise berechnet *Eddington*[119]) für 12 Elemente, deren Ordnungszahlen von 3—63 ansteigen, die Molekulargewichte, die den zu erwartenden Verhältnissen im Innern der Capella ($T_0 = 9{,}56 \cdot 10^6$, $\varrho_0 = 0{,}1414$) entsprechen. Sie steigen von 1,6 auf 2,8, woraus als wahrscheinlichster Mittelwert $m = 2{,}2$

118) *J. Eggert,* Über den Dissoziationsgrad der Fixsterngase, Physik. Ztschr. 20 (1919), p. 570.

119) *A. S. Eddington,* The absorption of radiation inside a star. Second paper. London Astr. Soc Month. Not. 84 (1924), p. 103.

abgeleitet wurde. Nimmt man schließlich an, daß in Folge zunehmender Temperatur die Ionisation nach innen zunimmt, so wird nach *Eddington* der Mittelwert von m etwas herabgedrückt, so daß sich für das Molekulargewicht der weiterhin benutzte Wert $m = 2{,}11$ ergibt. Dann sind außer dem K-Ring alle Elektronen abgeschält. Eine Ausnahme bildet ionisierter Wasserstoff. Dieser ist mit einem Molekulargewicht $= \frac{1}{2}$ anzusetzen. Gaskugeln, überwiegend aus Wasserstoff aufgebaut, erfordern besondere Durchrechnung.

Den zu erwartenden Ionisationszuständen nach Methoden der statistischen Mechanik Rechnung tragend, haben *R. H. Fowler* und *E. A. Guggenheimer*[120]) gezeigt, daß innerhalb weiter Temperatur- und Dichtigkeitsintervalle das mittlere Atomgewicht der Sternmaterie, bei unveränderter Zusammensetzung nahezu konstant bleibt. So schwankt z. B. innerhalb des Temperaturintervalles 10^6—10^8 und des Dichtigkeitsintervalles $\varrho = 0{,}005$—400 die Zahl der vom Eisenatom abgegebenen Elektronen nur zwischen 21 und 25. Würde die Hauptmasse der Sterne aus O bestehen, so ergäbe sich ein mittleres Atomgewicht 1,9—2,0, für Ag 2,4—2,9, für Fe 2,2—2,4. Beimischung von sehr viel H würde diese Werte auf rund 2,0 herabdrücken, Beimischung in annehmbaren Grenzen aber nur unwesentlich beeinflussen. Für Capella ergibt sich ein mittleres Molekulargewicht 2,33; es könnte nicht gut auf 2,1 oder nur auf 2,2 herabgehen, außer bei einer Zusammensetzung aus Elementen im Mittel leichter als Eisen.

Die Berechnung von $1 - \beta$ enthält so keine astronomische Konstante, alle benötigten Daten werden durch Laboratoriumsversuche gewonnen. „Ein Physiker in einem von undurchdringlichen Wolken eingeschlossenen Planeten würde in der Lage sein vorauszuzehen, daß etwas Ungewöhnliches zu erwarten ist für Gaskugeln, deren Massen zwischen 10^{33} und 10^{34} liegen" (*Eddington*).

66. Der Absorptionskoeffizient k. Der in den Nr. **58** behandelte Aufbau der Sterne im Strahlungsgleichgewicht beruht auf der Annahme, daß das Produkt $\bar{\varepsilon}_r k_p$ durch die ganze Kugel einen konstanten Wert besitzt. Diese Annahme läßt sich nicht begründen, sie wird hauptsächlich gestützt durch die Ergebnisse, zu denen sie führt. Unter dieser Voraussetzung ergab sich auch $1 - \beta = \frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{c G}$ konstant durch die Hauptmasse hindurch und für die gesamte ausgestrahlte

120) *R. H. Fowler* and *E. A. Guggenheimer,* Application of statistical Mechanics to determine the properties of matter in stellar interiors, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 897.

Energiemenge folgte, unabhängig von der Natur des aufbauenden Materiales

$$(132) \qquad L = 4\pi \bar{\varepsilon}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} = \frac{4\pi c G(1-\beta)\mathfrak{M}}{k_p};$$

k_p, definiert durch $d\mathfrak{S} = - k_p \varrho\, dr \cdot \mathfrak{S}$, anzusetzen für die äußersten Schichten. Wäre herkömmlicher Anschauung entsprechend k_p eine Materialkonstante, die durch Laboratoriumsversuche bestimmt werden kann, so würde auch schließlich L und damit die Energiequellen ε, Gleichartigkeit des Sternmaterials und ein vollkommenes Gas vorausgesetzt, durch Masse und Molekulargewicht bestimmt sein. Unter dieser Annahme wäre bei konstant bleibendem Molekulargewicht die Gesamtstrahlung eines Riesensterns ausschließlich Funktion seiner Masse und unbeeinflußt durch Änderung der Dichte im Laufe der Entwicklung. Dieses Resultat entspricht der wohl bekannten Tatsache, daß die Riesensterne in allen Spektralklassen in erster Annäherung die gleiche absolute Helligkeit zeigen. Die Schwankung von k_p von Stern zu Stern wird wahrscheinlich bedeutend geringer als 1 : 4 bleiben, was dafür spricht, daß auch innerhalb eines Sterns k_p und damit $\bar{\varepsilon}_r$ nur wenig variieren. Setzt man in erster Annäherung in Übereinstimmung mit Laboratoriumsexperimenten k_p als Materialkonstante an, so wird man auf annehmbare Ergebnisse geführt. Der anzusetzende Wert von k_p beträgt nach *Eddington* 20—40 absolute Einheiten. Dies Ergebnis darf nicht darüber täuschen, daß der Absorptionsprozeß im Sterninnern und in Laboratoriumsexperimenten vollständig verschiedene Vorgänge sind. In Laboratoriumsexperimenten trifft die einfallende Strahlung intakte Atome und Moleküle, und die ganze absorbierte Strahlung ist deshalb der Dichte direkt proportional, und k_p konstant anzusetzen. Im Sterninnern aber trifft die Strahlung auf außerordentlich stark ionisierte Atome, deren Absorptionsvermögen dem Ionisationsgrad entsprechend herabgesetzt ist. Die Behandlung dieses äußerst verwickelten Prozesses wird dadurch ermöglicht, daß ein stationärer Zustand vorliegt, indem jedes eingefangene Lichtquant durch ein ausgesandtes Lichtquant kompensiert wird, so daß für die Strahlungsbilanz der Absorptionsvorgang durch den leichter zu behandelnden Emissionsvorgang ersetzt werden kann. Da das Emissionsvermögen des einzelnen, stark ionisierten Atoms mit der Zahl der vorhandenen freien Elektronen, also mit der Dichte linear steigt, die Schwierigkeit des Einfangens mit ihrer Geschwindigkeit, also mit der Temperatur ebenfalls steigt, folgt, daß das Absorptionsvermögen der Dichte proportional ist und mit der Temperatur nach einem vorhandenen unbekannten Gesetze abnimmt.

Da aber der Ansatz k_p = konstant zu höchst annehmbaren Folgerungen führte, liegt die Annahme nahe mit *Eddigton*[80]) anzusetzen

$$k_p \sim \frac{\varrho}{m\,T^3} \sim \frac{1}{m\,\Theta_3^3}, \tag{145}$$

wodurch für Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$ (Strahlungsgleichgewicht) k_p wiederum durch das Sterninnere hindurch konstanten Wert annimmt. Da hier stets $\frac{p}{p_s} = \frac{3\,R}{a} \cdot \frac{\varrho}{m\,T^3}$, wird $k_p \sim \frac{p}{p_s} \sim \frac{\beta}{1-\beta}$, und ergibt sich

$$L \sim \frac{\mathfrak{M}(1-\beta)^2}{\beta}. \tag{146}$$

Die Helligkeit variiert infolgedessen viel schneller als nach Gl. (132), wodurch sich bei gleicher Streuung von L die Sternmassen noch gleichförmiger ergeben. Im Laufe der Entwicklung eines Sternes aber muß $\mathfrak{R}^2 T_e^4$ konstant bleiben.

Der Ansatz $k \sim \frac{\varrho}{T^3}$ entbehrt jedoch der theoretischen Begründung. Angesichts der fundamentalen Wichtigkeit dieses Problems hat sich *Eddington* weiter mit der Untersuchung des Absorptionskoeffizienten k_p befaßt.[117])[119])[121]) An Stelle des Absorptionsvorganges wird der leichter zu behandelnde Emissionsvorgang betrachtet und der Untersuchung die Hypothese zugrunde gelegt: Wenn ein Elektron einem ionisierten Atom begegnet, wird es eingefangen und nur dann eingefangen, wenn es wirklich den Atomkern trifft. Die Ausarbeitung ergab

$$k_p = \text{const.}\,\frac{\varrho}{m\,T^{\frac{7}{2}}}, \quad \text{const.} = \frac{2\,N}{A} \cdot \frac{d}{[40{,}994]}, \tag{147}$$

wo m das mittlere Molekulargewicht des Atoms und der freien Elektronen, A das Gewicht eines Atoms und N die Ordnungszahl im periodischen System bedeutet, die eingeklammerte Zahl der Log. des Koeffizienten und d der effektive Kerndurchmesser $= 8{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm ist. Längs des Radius ändern sich im Sterninnern also $k \sim T^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{\varepsilon}_r \sim T^{\frac{1}{2}}$. In der Gaskugel $n = 3$ nimmt die Temperatur bis zu einem Radius, der rund 98% der Gesamtmasse umschließt, nur im Verhältnis $1:0{,}16$ ab; k_p und $\bar{\varepsilon}_r$ variieren folglich wie $2{,}5:1$.

Für die Capella bestimmen sich mit großer Sicherheit die Masse $= 4{,}2$ Sonnenmassen, die Helligkeit $= -\,0{,}3$ Größenklassen und die effektive Temperatur $= 5500^0$; das Molekulargewicht wurde zu $2{,}2$ angesetzt. Dadurch erhält man $1 - \beta = \frac{\bar{\varepsilon}_r k}{c\,G} = 0{,}2833$, sowie für die

121) *A. S. Eddington,* On the absorption of radiation inside a star, London Astr. Soc. Month. Not. 83 (1922), p. 33.

äußeren Schichten $k = 118{,}6$. Der Mittelwert $\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{R}}$ wird $= 4{,}77$. Die Energieerzeugung pro Gramm Sternmaterie beträgt $4\pi\,\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{R}} = 59{,}9$ Erg/sec. Für den Mittelpunkt zeigt sich der „astronomische" Wert

$$k_a = 118{,}6 \cdot 0{,}4 = 47{,}4.$$

Für die Capella, aufgebaut nach der Polytropen $n = 3$, aber würden sich die Mittelpunktswerte $T_0 = 9{,}56 \cdot 10^6$, $\varrho_0 = 0{,}1414$ ergeben; diese eingesetzt in Gl. (147) geben

$$k_n = 78{,}4.$$

Trotz dieser guten Übereinstimmung, die in einer 2. Arbeit weiter verfolgt wird, hat *Eddington* diese Theorie mit Rücksicht auf die zweifelhafte Ausgangshypothese preisgegeben und die Behandlung von k auf anderer Grundlage durchgeführt.[119])

Sie erfolgte in engstem Anschlusse an die theoretischen Untersuchungen von *H. Kramers*[122]) über die Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum und die Austreibung von K- und L-Elektronen. Ein näheres Eingehen auf diese Theorie, in bezug auf deren numerische Genauigkeit Bedenken laut geworden sind, liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieses Berichtes. Die Absorption erfolgt teils in Linien, entsprechend den Seriengrenzen, und daran anschließend kontinuierlich. (In Emission entsprechend dem Einfangen von Elektronen resp. dem Übergange frei bleibender Elektronen in minderwertige Hyperbelbahnen.) *Für die Absorptionskoeffizienten beider Gebiete ergibt sich wiederum* Gl. (147) *nur mit verschiedenen Werten der Konstanten.* Für Eisen im Mittelpunkte der Capella wird

im kontinuierlichen Spektrum $k_x = 0{,}65 = 0{,}014\,k_a$,

im Linienspektrum $k_c = 7{,}51\,k_x = 4{,}91 = 0{,}104\,k_a$,

und folglich

$$k = k_x + k_c = 5{,}66 = 0{,}12\,k_a,$$

also rund $\frac{1}{8}$ des astronomisch bestimmten Wertes. Als Grenze des kontinuierlichen Spektrums läßt sich $\lambda = 2{,}03$ Å überschlagen. Da bei Eisen sich die Seriengrenzen zu $\lambda_K = 1{,}74$ Å, $L_L =$ rund 12 Å bestimmen lassen, folgt im Gegensatze zu *Eggert*[118]), daß die L-Elektronen praktisch vollständig abgespalten sind. Mit Hilfe des *Kramers*schen Wertes $CN^4\lambda^3A$ für den Absorptionskoeffizienten pro g und cm^2, N die Ordnungszahl, A das Gewicht eines Atomes, läßt sich die Rechnung noch etwa exakter durchführen. Es ergeben sich 99,9% aller L-Elektronen und 29% aller K-Elektronen abgespalten. Der

122) *H. A. Kramers*, On the theory of X-ray-absorption and of the continous X-ray-spectrum, Phil. mag. 46 (1923), p. 836.

Wert des Absorptionskoeffizienten steigt auf 8,4, beträgt aber doch nur $\frac{1}{6}k_a$; das Molekulargewicht bleibt 2,2. Nach diesem Verfahren hat *Eddington* für weitere neun Elemente der Ordnungszahlen 13—68 die Werte von k und m berechnet. k steigt von 1,5 bei Er (68) bis 17,3 bei Cs (55), beträgt also höchstens $\frac{1}{3}k_a$. Das Molekulargewicht steigt von 1,7 bei C (6) bis 2,8 bei Er, so daß ein mittleres Molekulargewicht 2,2 ziemlich korrekt sein dürfte. Alle diese Werte beziehen sich auf den Mittelpunkt der Capella. Stets, mit Ausnahme der leichtesten Elemente, sind deshalb alle L-Elektronen abgespalten. Man beachte, daß sich für jonisierten Wasserstoff $m = \frac{1}{2}$ ergibt; *Sterne, aus Wasserstoff aufgebaut, müssen deshalb eine Sonderstellung einnehmen.*

Der funktionale Inhalt der Gl. (147) läßt sich nach *Eddington* wie folgt begründen. Die Emission ist proportional der Anzahl freier Elektronen, die zu Energieabgabe zur Verfügung stehen, also $\sim \frac{\varrho}{m}$, die Zahl derselben, die in den Anziehungsbereich eines Kernes kommen, ist proportional der Geschwindigkeit $\sim v \sim T^{\frac{1}{2}}$, und die dann frei werdende Energie $\sim v^2 \sim T$. Die Schwierigkeit des Einfangens steigt mit einer unbekannten Potenz x der Geschwindigkeit und kann deshalb $\sim T^{\frac{x}{2}}$ gesetzt werden. Da im stationären Zustande Emission = Absorption, ergibt sich k, indem durch die Intensität der Strahlung $\sim T^4$ dividiert wird. So folgt damit $T^{\frac{1}{2}+1-\frac{x}{2}-4}$ und

$$k \sim \frac{\varrho}{m} T^{-\frac{5+x}{2}}.$$

Treffen n Elektronen eine dünne Schicht, welche s Atome pro cm^2 enthält, so kann die Intensität des ausgesandten Lichtes durch den vielfach bewährten Ausdruck $\sim ns\frac{N^2}{v^2}$ wiedergegeben werden, woraus $x = 2$ folgt, so daß $k \sim \frac{\varrho}{m} T^{-\frac{7}{2}}$ wird.

In einer polytropen Gaskugel $n = 3{,}5$ würde dieser Wert längs des Radius konstant bleiben; in der in Betracht kommenden Kugel $n = 3$ variiert er $\sim T^{-\frac{1}{2}}$. Abstrahiert man von den äußersten Schichten, welche 5 % der Gesamtmasse enthalten, so ändert sich k im Verhältnis 2,2 : 1, kann also für vielfache Zwecke der Anwendung konstant angenommen werden.

Mit Untersuchungen des Absorptionskoeffizienten befassen sich zwei neuere Arbeiten von *E. A. Milne.*[123]) Der Ausgangspunkt ist der

123) *E. A. Milne,* The stellar absorptions-coeffizient, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 715, sowie p. 768.

gleiche, die Behandlungsweise ähnlich wie bei *Eddington*; doch wird in strengerer Durchführung den Anregungs- und Ionisationsverhältnissen der einzelnen Atome Rechnung getragen. Im kontinuierlichen Teile des Spektrums ergibt sich für k derselbe Ausdruck wie bei *Eddington* mit gleichem numerischen Werte der Konstanten; für die Linienabsorption aber tritt noch ein Faktor hinzu, welcher den verschiedenen Atomzuständen Rechnung trägt. So ergeben sich schließlich für das Innere der Capella folgende Absorptionskoeffizienten, wobei zum Vergleiche die *Eddington*schen Werte beigefügt sind:

		Fe	Ti	Ca	Ag
Milne	$k =$	8,8	18,6	21	25
Eddington	$k =$	8,4	10,0	—	14,3.

Ausführungen von *Rosseland*[124]) Rechnung tragend erfordern diese *Milne*schen Werte noch eine kleine, numerisch schwer ermittelbare Korrektur, welche ihren Wert etwas erniedrigt. Mit Ausnahme des Eisens ergeben sich so Werte, welche dem astronomisch bestimmten bis auf den Faktor $^1/_2$—$^1/_3$ nahe kommen. Für Fe beträgt der Faktor $^1/_6$, doch ist zu berücksichtigen, daß hier die anzusetzenden Ionisationspotentiale sehr ungünstig liegen.

Um den Einwande zu begegnen, es könnten diese Differenzen darauf zurückzuführen sein, daß die Energiequellen ε in gleichmäßiger Verteilung durch die Sternmasse hindurch angesetzt wurden, behandelt *A. S. Eddington*[125]) den Grenzfall, daß die die Strahlung speisende Energiequelle im Mittelpunkt konzentriert ist. Die erforderliche numerische Quadratur wurde durchgeführt für einen Stern von 5,02 Sonnenmassen, $\mathfrak{R} = 11{,}35 \cdot 10^{11}$ km und $\log kL = 63{,}0467$. Es zeigt sich, daß für typische Sterne dieser Masse die Unsicherheit, die aus der Unbestimmtheit der Verteilung der Energiequellen stammt, $\pm$ 0,4 Größenklassen nicht überschreitet.

Die für die Kugel im Strahlungsgleichgewicht ermittelte Beziehung $1 - \beta = \frac{\bar{\varepsilon}_r k}{cG} =$ const. gilt so weit hinaus, als die Absorption noch als „stark" angesetzt werden kann. So weit hinaus diese Kugel nach der Polytropen $n = 3$ aufgebaut angenommen werden kann, gilt $\frac{\varrho}{T^3} \sim \frac{p_s}{p} = \frac{1-\beta}{\beta} =$ const. und folglich $k \sim T^{-\frac{1}{2}}$. Die äußeren Schichten verlangen gesonderte Behandlung. Wird für ϱ sein genauer Wert

124) *S. Rosseland,* Note on the absorption of radiation within a star, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1924), p. 525.

125) *A. S. Eddington,* A Limiting case in the theory of radiative equilibrium, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 408.

Gl. (130) angesetzt, so ergibt sich (*R. Emden*)

$$k \sim \frac{1}{R}\,\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{a}{3}\,\frac{T^4 - T_\infty^4}{T^{\frac{9}{2}}}. \tag{148}$$

In den äußersten Schichten ist die Absorption gleich Null (da $\varrho = 0$); sie erreicht ihr Maximum bei

$$T^4 = 9\,T_\infty^4; \quad T = \sqrt[4]{4{,}5}\,T_e = 1{,}46\,T_e.$$

In dieser Schicht ist $\frac{p_s}{p}$ auf den Wert $\frac{9}{8}\,\frac{1-\beta}{\beta}$ angestiegen und es ist $k_{\max} \sim \frac{1}{R}\,\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{a}{3}\,\frac{4}{4{,}5^{9/8}}\,T_e^{-\frac{1}{2}}$. Bezeichnet k_0 den Wert im Mittelpunkte, so ist

$$\frac{k_{\max}}{k_0} = 0{,}74\left(\frac{T_0}{T_e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für die durch die effektive Temperatur ausgezeichnete Schicht, in welcher $\frac{p_s}{p}$ auf $2\,\frac{1-\beta}{\beta}$ angestiegen ist, wird $\frac{k_e}{k_0} = 0{,}5\left(\frac{T_0}{T_e}\right)^{\frac{1}{2}}$. Für die Capella wird $k_{\max} = 31 \cdot k_0 = 31 \cdot 47{,}4 = 1470$; $k_e = 21 \cdot 47{,}4 = 995$, während die Beobachtung interpretiert wurde: $k = 118{,}6 = 2{,}5 \cdot 47{,}4$. Dies k entspricht dann einer Schicht von der Temperatur $278\,T_e$; sie gehört also dem Teile der Kugel an, der polytrop aufgebaut angenommen werden kann. Die unbekannten Energiequellen, in diesem Teile der Kugel proportional $T^{\frac{1}{2}}$, sinken bis auf $\frac{1}{31}$ des Wertes im Mittelpunkte, um dann wieder anzusteigen. Diese Betrachtungsweise wird aber ungültig, sobald die Absorption nicht mehr als „stark" behandelt werden kann.

Dieser Unterschied in dem Verhalten der äußeren und inneren Schichten ist einerseits dadurch bedingt, daß in den äußeren, kühleren, weniger hoch ionisierten Schichten die Zahl der freien Elektronen pro Atom bedeutend geringer ist wie im Innern, wodurch die Absorption (Emission) herabgedrückt wird, während anderseits deren geringere Geschwindigkeit die Leichtigkeit des Einfangens und damit die Absorption steigert. Dazu kommt, daß im heißeren Innern ungleich höhere Ionisationspotentiale angetroffen werden wie außen.

In bezug auf eine andere, sehr eingehende Behandlung der äußeren Schichten muß auf die Arbeit von *Milne*[123]) verwiesen werden. Ferner haben *Russell* und *Stewart*[126]) versucht, die Absorption der äußeren Schichten durch Rechnung auf Grundlage der klassischen elektro-

---

126) *H. N. Russell* and *J. A. Stewart,* Pressures of the suns surface, Astroph. Journ. 59 (1924), p. 199, sowie *J. A. Stewart*, The opacity of a jonised gas, Physical Rev. 22 (1923), p. 224.

magnetischen Theorie auf Streuung und Absorption der Strahlung an freien und gebundenen Elektronen zurückzuführen. Allein wie *Pauli*[126a]) in anderem Zusammenhange gezeigt hat, ist es unmöglich, auf diese Weise das *Planck*sche Verteilungsgesetz zu erhalten, vielmehr wird die Energie in den kurzen Wellenlängen zusammengedrückt. Tatsächlich betragen die von *Russell* und *Stewart* berechneten Koeffizienten nur rund $\frac{1}{1000}$ der in Größenordnung mit der Beobachtung stimmenden Werten von *Milne.*

Die außerordentliche Bedeutung eines richtigen Ansatzes für k wird aus den Erörterungen der nächsten Nummer hervorgehen.[127])

67. Beziehungen zwischen Leuchtkraft und Masse. Für die ausgesandte Strahlung ergab sich (Gl. (132))

$$L = 4\pi\,\mathfrak{R}^2 s\, T_e^4 = 4\pi\,\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{M} = \frac{4\pi c G\,\mathfrak{M}(1-\beta)}{k_p}\ \text{Erg/sec},$$

unabhängig von der Zustandsgleichung des aufbauenden Materiales; unter der einzigen Bedingung, daß $1-\beta = \frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{cG}$ konstant ist längs des Radius. k_p ist anzusetzen für die äußeren Schichten. Gehorcht das aufbauende Material der Zustandsgleichung vollkommener Gase, so ist bei Strahlungsgleichgewicht $\bar{\varepsilon}_r k_p$ für verschiedene Sterne gleichen Molekulargewichts eindeutig durch die Masse bestimmt und es ergab sich (unter Benutzung der Polytropen $n=3$)

$$1-\beta = 0{,}00308\,\mathfrak{M}^2 m^4 \beta^4. \tag{138}$$

Da die Schichten, die durch das k_p ausgezeichnet sind, noch dem polytropen Teile der Kugel angehören, ist $k_p \sim \frac{\varrho}{m T^{\frac{7}{2}}}$ und kann mit genügender Genauigkeit durch die Mittelpunktswerte $\varrho_0 \sim \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^3}$ und $T_0 \sim \beta m \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}$ berechnet werden. Dann ergibt sich in Verbindung mit

126a) *W. Pauli jr.*, Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen, Ztschr. f. Phys. 18 (1923), p. 272.

127) Die Betrachtungen dieser Nummer gelten selbstverständlich nur für einen „mittleren" Absorptionskoeffizienten; die „monochromatische" Absorption, wie sie z. B. bei dem Zustandekommen der Absorptionslinien wirksam wird, ist von gänzlich anderer Größenordnung. Nach bekannten Messungen von *Wood* ist der Massenabsorptionskoeffizient für die Resonanzlinie $\lambda = 2537$ Å von der Größenordnung 10^9, so daß bei einem Druck 0,001 mm bereits Schichten von 0,5 mm Dicke die Intensität dieser einfallenden Strahlung auf $^1/_3$ herabsetzen. In den weiterhin zu besprechenden Arbeiten von *R. H. Fowler* und *E. A. Milne* ergibt sich für die H- und K-Linie des Ca^+ ein Absorptionskoeffizient $0{,}4 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ Die Bedeutung dieser Absorptionskoeffizienten liegt auf einem anderen Gebiet (vgl. Nr. 75).

Gl. (132) und (138) die *fundamentale Beziehung Eddingtons*

$$(149) \qquad L \sim \mathfrak{M}^{\frac{7}{5}} (1-\beta)^{\frac{3}{2}} m^{\frac{4}{5}} T_e^{\frac{4}{5}}.$$

Der Unterschied gegen Gl. (146) ist lediglich dadurch bedingt, daß k_p dort $\sim T^{-3}$, hier $\sim T^{-\frac{7}{2}}$ angesetzt ist. Der Wert der Konstanten könnte den Untersuchungen der Nr. **66** entnommen werden. Zweckmäßiger wird er dem Verhalten der Capella (unter der Annahme $m = 2{,}11$) entsprechend bestimmt. Ebenso wird L in Größenklassen m ausgedrückt. Eine Änderung von $T_e = 3000^0$ (Spektralklasse M) $T = 12\,000^0$ (Spektralklasse A) ändert m um $-1{,}2$ Größenklassen. Wird deshalb zu m noch ein Temperaturterm $-2\log\left(\frac{T_e}{5500}\right)$ addiert ($T_e = 5500^0$ für Kapella), so ergibt sich als Ausdruck der Gl. (149) ein einfacher Kurvenzug $m = f(\mathfrak{M})$. *Eddington* hat diese Beziehung an 45 Sternen, für deren Masse hinreichend exakte Werte vorliegen, mit großer Genauigkeit bestätigt gefunden. *Dabei ergab sich das überraschende Resultat, daß auch bei den Zwergsternen,* und das war die Mehrzahl dieser Sterne, *diese Beziehung, die unter Ansatz der Zustandsgleichung vollkommener Gase abgeleitet wurde, mit der gleichen Genauigkeit gilt, wie bei den Riesensternen.* Die Sonne liegt genau auf diesem Kurvenzuge. Auch hat neuerdings *H. N. Russell*[128]) in das nach ihm benannte Diagramm Kurvenzüge eingetragen, den Inhalt der Gl. (149) darstellend. Es zeigt sich, daß sich so die Zwergsterne bekannter Masse in einen schmalen, wohldefinierten Streifen anordnen, ein Beweis nicht nur für die Gültigkeit der Gl. (149), sondern, was weit wichtiger, für die Anwendbarkeit der ihrer Ableitung zugrundeliegenden Zustandsgleichung vollkommener Gase. Für die polytrope Gaskugel $n = 3$ ergibt sich die Mittelpunktsdichte 54 mal größer wie die mittlere Dichte. Nimmt man an, daß das Molekulargewicht in Folge zunehmender Ionisation nach Innen zunimmt, so sinkt dies Verhältnis und kann (nach der zuletzt angeführten Arbeit von *Eddington*) zu etwa 20 abgeschätzt werden. Für die überwiegende Masse der Sonne und anderer Zwergsterne ergeben sich so Dichten, die die des Platins weit übersteigen. Wie trotzdem die Zustandsgleichung vollkommener Gase, die bei Laboratoriumsexperimenten schon bei Dichten unterhalb des Wasser vollkommen illusorisch wird, noch gelten kann, soll in folgender Nummer erörtert werden.

Über hohe Sterndichten. Bestimmungen von Sterndurchmessern[129]), aus der Beziehung $L = 4\pi\mathfrak{R}_s^2 T_e^4$, schwarze Strahlung vorausgesetzt,

128) *H. N. Russell,* The Problem of stellar evolution, Nature 116 (1925), p. 208.

129) *K. F. Bottlinger,* Lichtelektrische Farbenindizes von 459 Sternen, Berlin-Neubabelsberg Sternw. Veröff. III (1923), Heft 4.

führen zu Dichten, die bis zu Beträgen von 10^3 und 10^4 g/cm^3 ansteigen und unseren Vorstellungen über den Atombau der Materie zu widersprechen scheinen. (Vgl. die folgende Nr.) Die mittlere Dichte von B-Sirius wird von *Bottlinger* zu 28000, von *Eddington* zu 58000 g/cm^3 angegeben; letztere entsprechen einer Masse $= 0{,}85$ Sonnenmassen und einem Durchmesser von 19600 km, bestimmt durch eine absolute Größe $m = 11{,}3$ und $T_e = 8000^0$.

Diese unerwartet hohen Sterndichten werden durch Beobachtungen anderer Art bestätigt. Die *Einstein*sche Rotverschiebung der Spektrallinien ist proportional dem Schwerepotentiale an der Oberfläche, welches bei vorliegender Masse umgekehrt mit dem Radius zunimmt. Für B-Sirius, dessen Masse zu 0,80 resp. 0,90 Sonnenmassen angesetzt, ergibt sich je nach dem Spektraltypus F_0 und A_5

	F_0	A_5
Oberflächenhelligkeit	$-0{,}88$	$-1{,}45$
Radius (km)	24000	18000
Dichte (g/cm^3)	30000	64000
Rotverschiebung (Å)	$+0{,}23$	$+0{,}32$

Messungen von *W. S. Adams*[130]) geben für H_β, H_γ und einige andere Linien im Mittel eine Rotverschiebung entsprechend einer Radialgegeschwindigkeit von 23 km/sec. Korrigiert um die Bahngeschwindigkeit von $-1{,}7$ km/sec ergeben sich 21 km/sec entsprechend 0,32 Å, mit den aus gänzlich verschiedenem Ausgangspunkte berechnetem Werte vorzüglich stimmend.

68. Verhalten hoch ionisierter Gase. Die Zustandsgleichung vollkommener Gase versagt in dem Maße, als bei zunehmender Kompression das sogenannte Kovolumen der Moleküle in Wirksamkeit tritt, welches auch die Maximaldichte der Materie unter irdischen Verhältnissen bedingt. Der Radius desselben kann zu rund 10^{-8} cm angesetzt werden. Allein in den Sternen haben wir es, da einige Elektronenlagen abgeschält sind, mit ungleich kleineren Atomen zu tun, und die Gasgesetze können folglich bis zu entsprechend höheren Dichten gelten. Atome mittleren Gewichtes dürften beinahe bis zum K-Niveau abgeschält sein, wodurch sich deren Radius schon für das Atom $N = 10$ von der Größenordnung 10^{-10} cm ergibt; leichtere Elemente wie Kohlenstoff und Sauerstoff sind vielleicht nur als nackte Kerne vorhanden. Die erreichbare Maximaldichte kann so rund auf

130) *W. S. Adams,* The relativity-displacement of the spectral lines in the companion of Sirius, Washington Nation. acad. of sc. Proceed. 11 (1925), p. 382.

den 10^6fachen Betrag ansteigen, so daß die Materie sich bis zu Dichten von der Größenordnung 10^6 mal höher wie ein Gas verhalten kann. Soviel über die Bedeutung des Kovolumens.

Nun treten aber zwischen den Ionisationsprodukten elektrische Kräfte auf, die der kinetischen Theorie der Gase bisher fremd sind. Ihr Einfluß läßt sich schwer berechnen, doch hat *Eddington*[131]) durch einfache Dimensionsbetrachtung gezeigt, daß, falls sie quadratisch mit der Entfernung sich ändern, und der Stern sich stets in der Polytropen $n = 3$ fortentwickelt, ihr Verhältnis zu Gas- und Lichtdruck ungeändert bleibt. Ob Riesen- oder Zwergstern, der ganze tragende Druck ist stets prozentisch gleich in Gasdruck, Lichtdruck und elektrischem Druck (über dessen Vorzeichen ist nichts ausgesagt) aufgeteilt.

Diese elektrischen Kräfte sind von *S. Rosseland*[132]) näher untersucht worden. Ein jedes Teilchen umgibt sich mit einer Wolke ungleich geladener Teilchen; bei überall gleicher Dichte herrscht in dieser radiale Symmetrie und dies Teilchen bleibt in Ruhe. Bei vorhandenem Dichtegradienten aber werden in Folge der Unsymmetrie + und — Teilchen gleichsinnig in Richtung wachsender Dichte gezogen. So kommt ein elektrischer Druck zustande, der dem Gas- und Lichtdruck entgegenwirkt. Er läßt sich durch ein Potential behandeln, dessen Betrag einer Arbeit von *P. Debye* und *E. Hückel*[133]) entnommen werden kann. Bezeichnet nun x das Verhältnis elektrischer Druck/Lichtdruck, so ergibt die weitere Durchführung, daß an Stelle der Gl. (138) die neue

$$\text{(a)} \qquad \frac{1-\beta}{[\beta + x(1-\beta)]^4} = 0{,}00\,308\, m^4\, \mathfrak{M}^4$$

tritt mit der weiteren Beziehung

$$\text{(b)} \qquad x^2 q_1 - \left(x + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^3 = 0, \quad q_1 = \frac{27 k^4}{\pi a e^6 Z^3},$$

k die *Boltzmann*sche Konstante, Z die Anzahl freier Ladungen des + Ions, a die Konstante der Strahlungsdichte. Die *Eddington*sche Folgerung aus Gl. (149), daß die Helligkeit eines Sternes während seiner Weiterentwicklung konstant bleibt, gilt also nur so lange, als der Ionisationsgrad konstant bleibt. Dies ist aber bedeutungslos, da in allen in Wirklichkeit vorliegenden Fällen der elektrische Druck vernachlässigt werden kann. Wir finden ein Maß für seinen Einfluß,

---

131) Siehe *A. S. Eddington* die in Fußn. 119) zitierte Arbeit, § 9.

132) *S. Rosseland,* Electrical state of a star, London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 308.

133) *P. Debye* und *E. Hückel,* Zur Theorie der Elektrolyte, Physik. Ztschr. 24 (1924), p. 185.

wenn wir die Zahl Z bestimmen, welche $x = 1$ macht. Für einen Stern von 1,5 Sonnenmassen und einem mittleren Molekulargewicht 2,8 ergibt sich $Z = 65$. Der Stern müßte also aus sehr schweren Atomen aufgebaut sein. Für Gase von kleinem und mittlerem Atomgewicht kann der elektrische Druck vernachlässigt werden.

Die Frage nach der Zustandsgleichung hoch ionisierter Gase ist auch von *R. A. Fowler* und *E. A. Guggenheimer*[134]) gestreift worden. Es scheint, daß der Einfluß der Kovolumen der Atomreste bis zu Dichten von 5000 g/cm^3 vernachlässigt werden kann und erst bei Dichten von 50000 in Erscheinung tritt. Die elektrischen Kräfte bewirken bereits bei Dichten von 400 Abweichungen von der Zustandsgleichung vollkommener Gase, unerwarteter (nach *Rosseland,* wie erwähnt, erwarteter) Weise in Richtung vermehrter Kompressibilität; doch scheint bei Dichten von 15000—20000 der entgegengesetzte Effekt aufzutreten.

Aus diesen wenigen Untersuchungen dürfte hervorgehen, daß sich weder Kovolumen noch elektrische Kräfte in bezug auf die Kompressibilität praktisch bemerkbar machen. Anders steht es mit ihrem Einfluß auf das optische Verhalten. B-Sirius z. B. gehorcht nicht der Gl. (149). Bei diesen hohen Dichten gibt es unfreie Elektronen, die gleichzeitig in die Wirkungssphäre zweier Kerne fallen. Dann werden die Überlegungen, welche der Berechnung des Absorptionskoeffizienten k, dessen Ausdruck sich in Gl. (149) auswirkt, zugrunde liegen, hinfällig (*Eddington*).

69. Veränderlichkeit der Sternmasse. In herkömmlicher Weise aufgefaßt, spiegelt das *Russell*sche Diagramm die Entwicklungsgeschichte eines Sternes ab. Sich kontrahierend durchläuft er das Riesenstadium in der Richtung höherer effektiver Temperatur, um nach Erreichung einer gewissen Dichte das Zwergstadium in umgekehrter Richtung zu durchlaufen. Die in der vorhergehenden Nummer nachgewiesene, andauernde Gültigkeit der Zustandsgleichung vollkommener Gase und der Zusammenhang zwischen Helligkeit und Masse entzieht dieser Anschauung den Boden und das Diagramm gibt lediglich ein statistisches Bild der Zustände, in welchen die Sterne im Laufe ihrer Entwicklung angekommen sind. Denn im Laufe seiner Entwicklung durchläuft jeder Stern langsam [die Gl. (149) ist unter Voraussetzung eines stationären Zustandes abgeleitet] eine Kurve, die bestimmt wird durch die Änderung der effektiven Temperatur T_e unter Zusammenwirkung der Energiequellen ε und der durch Kontraktion zur Verfügung gestellten Energie-

134) *R. A. Fowler* and *E. A. Guggenheimer,* siehe Fußn. 120).

mengen. Die ursprüngliche Interpretation des Diagramms läßt sich offenbar nur halten unter der Annahme, daß ein Stern dauernd an Masse verliert. Ein solcher Massenverlust dürfte auch tatsächlich unvermeidlich sein. So zeigen die Nordlichterscheinungen, daß die Sonne Elektronen auswirft, deren Masse im Laufe der Zeit sich addieren muß. Ferner ist jede Aussendung von Strahlung mit Massenverlust begleitet. Die von der Sonne jährlich ausgestrahlte Energiemenge von $3 \cdot 10^{33}$ cal $= 1{,}25 \cdot 10^{41}$ Erg repräsentiert einen Massenverlust von $\frac{1{,}25 \cdot 10^{41}}{9 \cdot 10^{20}} = 1{,}40 \cdot 10^{20}$ g $= 7 \cdot 10^{-14}$ Sonnenmassen. Dabei beträgt die absolute Helligkeit der Sonne nur $+ 4{,}9$ Größenklassen. Die Bedeutung dieses Massenverlustes können wir nicht beurteilen, da jeder sichere Anhaltspunkt fehlt, eine absolute Zeitskala für kosmogonische Veränderungen festzustellen. Ein Kriterium zur Feststellung eines Massenverlustes könnten die Doppelsterne bieten; die stärkere Strahlung der größeren Komponente M bedingt für diese einen stärkeren Massenverlust wie bei der kleineren Komponente m, so daß das bei der Bildung eines Doppelsterns kleine Massenverhältnis $\frac{m}{M}$ sich beim Durchlaufen des *Russell*schen Diagramms immer mehr dem Werte 1 nähern muß. Dieser Tatbestand ist von *H. Vogt*[135]) an 85, von *G. Shajin*[136]) an 342 Doppelsternen geprüft worden mit dem übereinstimmenden Ergebnis, daß die fragliche Zunahme vorhanden ist. Während aber *Vogt* dadurch die fragliche Massenabnahme tatsächlich als bewiesen ansieht, liegt nach *Shajin* nur ein Zusammenwirken mehrerer statistischer Umstände vor, die damit nichts zu tun haben. Neuere Untersuchungen von *P. ten Bruggencate*[137]) an Sternhaufen machen jedoch Massenverlust wahrscheinlich.

70. Zusätze zur Eddingtonschen Theorie. 1. Die Annahme $\bar{\varepsilon}_r \cdot k_p$ konstant längs des Radius lieferte für die Hauptmasse Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$, der schließliche Ansatz $k_p \sim \frac{\varrho}{m T^{\frac{7}{2}}}$ ergab auch $\bar{\varepsilon}_r$ hinreichend konstant. Im Gegensatze hierzu untersuchte *A. Kohlschütter*[115]) den Aufbau, falls k_p konstant, ε hingegen proportional einer Potenz der Temperatur $\sim T^\nu$ gesetzt wird. Es ergab sich (auf etwas einfachere Weise hat dies später *R. Emden* nachge-

135) *H. Vogt,* Die Massenabnahme von Sternen infolge von Strahlung, Ztschr. f. Phys. 26 (1925), p. 139.

136) *G. Shajin,* On the mass-ratio in double stars, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 245.

137) *P. ten Bruggencate,* Die Entwicklung stellarer Materie, Naturw. 13 (1925), p. 261.

wiesen) für die Hauptmasse ebenfalls Aufbau nach einer Polytropen, deren Klasse n durch

$$n = 3 - \nu$$

bestimmt ist. $\nu = 0$ führt wieder auf $n = 3$ zurück; $\nu = 3$ liefert Aufbau von konstanter Dichte und $\nu = -\infty$ (selbstverständlich) Isothermie. Außerdem lassen sich noch die Fälle $\nu = \pm 2$ in geschlossener Form integrieren. Werden die Energiequellen ε durch Kontraktionsarbeit geliefert, so ist (Nr. **9**) $\nu = 1$ zu setzen, welches Problem von *Kohlschütter* unter Annahme der *van der Waals*schen Gleichung ausgearbeitet wurde (Nr. **64**).

2. Die Annahme $\frac{\bar{\varepsilon}_r k_p}{G c} = \text{const.} = 1 - \beta$ und der damit mögliche Aufbau nach der Polytropen $n = 3$ lieferte $\frac{p}{p_0} = \text{const.} = \frac{\beta}{1-\beta}$, β durch Masse und Molekulargewicht gegeben. Setzt man schließlich in annehmbarer theoretischer Begründung $k_p \sim \frac{m}{\varrho T_e^3} T^{-\frac{1}{2}}$, so ergab sich die überraschende Beziehung

$$L = \text{const.}\, \mathfrak{M}^{\frac{7}{5}} (1-\beta)^{\frac{3}{2}} m^{\frac{4}{5}} T_e^{\frac{4}{5}}. \tag{149}$$

In der $L\mathfrak{M}$-Ebene liegen die Sterne gleichen Molekulargewichts in einem Streifen, dessen Breite durch T_e bedingt wird. Liegt anderseits nur eine Gaskugel $n = 3$ vor, so ist durch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ wohl die Massenanordnung eindeutig bestimmt, während die ausgesandte Strahlung L noch beliebig angesetzt werden kann. Diese Sterne könnten die $L\mathfrak{M}$-Ebene vollständig überdecken; erst Feststellungen über k_p resp. $\bar{\varepsilon}_r$ liefern Seitenstücke zur Gl. (149) und schränken das Verteilungsgebiet ein. Diese Verhältnisse werden von *J. H. Jeans*[138]) unter speziellen Annahmen eingehender behandelt; Ausgangspunkt ist der Ansatz

$$\text{(a)} \quad k_p = \frac{k^{\varkappa} \varrho}{m T^3} T^{-\nu_1}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_0 T^{\nu_2}, \quad \varkappa \text{ und } \varepsilon_0 \text{ Konstanten}, \quad \frac{\varrho}{m} \sim \varrho^{\Phi}.$$

Dann brauchen polytroper Aufbau und die Beziehung $\frac{p}{p_s} = \text{const.}$ nicht mehr zu gelten; vielmehr wird $\lambda = \frac{p}{p_s}$ abhängig von p_s und es ergibt sich

$$\text{(b)} \qquad p_s \frac{d\lambda}{dp_s} = K \frac{p_s{}^{\sigma}}{\lambda} - (\lambda + 1), \quad \sigma = \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}, \quad K = \text{const.}$$

K ist durch bekannte Konstante ausdrückbar. Die allgemeine

---

138) *J. H. Jeans,* On the masses, luminosities and surfaces temperature of the stars, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 195.

Lösung ist in Reihenentwicklung möglich, aber für die weitere Anwendung zu unhandlich. *Jeans* behandelt deshalb weiterhin lediglich die beiden Grenzfälle $\lambda = \frac{p}{p_s}$ sehr groß und sehr klein. (Die Masse ist sehr klein resp. sehr groß.) In beiden Fällen ergibt sich p gleich einer durch σ bedingten Potenz von p_s (der *Eddington*sche Spezialwert $\sigma = 0$ führt stets auf $\lambda =$ const. zurück). Da aber p_s durch T und T für vollkommene Gase durch p und ϱ ausdrückbar ist, folgen p und p_s proportional Potenzen von ϱ. Somit zeigt sich wiederum Aufbau nach einer Polytropen, deren Klasse durch σ bestimmt ist. Setzt man noch, um einer Änderung des Molekulargewichts Rechnung tragen zu können, $\frac{\varrho}{m} = \varrho^{\Phi}$, so wird in beiden Grenzfällen der Aufbau derselbe wie in einer *adiabatischen* Kugel eines Gases, für welche das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_v} = \frac{2\sigma + 4}{2\sigma + 3}\Phi$ resp. $\frac{4\sigma + 4}{3\sigma + 3}\Phi$ zu setzen ist. Die Polytropenklasse ist $n = \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1}$. Da außerdem der Parameter α^2 der Gl. (I) in Nr. **17** sich durch gegebene konstante Größen ausdrücken läßt, ist der Aufbau eindeutig gegeben und das Verhalten der Kugel läßt sich nach gegebenem Muster durchrechnen. Es folgt als Seitenstück zu Gl. (149) eine Beziehung

$$L \sim T_e^{c_1} \mathfrak{M}^{c_2}.$$

Die Exponenten sucht *Jeans* aus dem Verhalten von sechs sorgfältig ausgewählten Fixsternen zu berechnen; dabei ergaben sich $\Phi = 0{,}95$ und $\sigma = -0{,}35$, also unmögliche Werte, da $\Phi > 1$ und $\sigma > 0$ sein muß. Als wahrscheinlichste Werte setzt *Jeans schätzungsweise* $\Phi = 1{,}025$, $\sigma = +0{,}35$. Damit wird

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{ll} \text{für } \frac{p}{p_s} \text{ sehr klein, } \mathfrak{M} \text{ groß,} & L \sim \mathfrak{M}^{1,3} T_e^{1,6}, \\ \text{,, } \quad \text{,, sehr groß, } \mathfrak{M} \text{ klein,} & L \sim \mathfrak{M}^{4,77} T_e^{0,8}, \end{array}$$

während nach *Eddington*

$$\text{(d)} \quad \begin{array}{ll} \text{für } \frac{p}{p_s} \text{ sehr klein, } \mathfrak{M} \text{ groß, } (1-\beta = 1), & L \sim \mathfrak{M}^{1,4} m^{0,8} T_e^{0,8}, \\ \text{,, } \frac{p_0}{p_s} \text{ sehr groß, } \mathfrak{M} \text{ klein, } (1-\beta = m^4 \mathfrak{M}^3), & L \sim \mathfrak{M}^{4,4} m^{6,8} T_e^{0,8} \end{array}$$

ist. (Die Abhängigkeit vom Molekulargewicht ist bei *Jeans* nur scheinbar verschwunden.) Der (im Prinzip unwesentlich) erweiterte Ansatz macht sich also nur in einer (praktisch unwesentlichen) Änderung der Exponenten von $\mathfrak{M}$ und T_e geltend. Wenn aber *Jeans* als Hauptergebnis seiner Untersuchung ausführt: „Our wider theorie has shown, that as soon as σ differs ever infinitesinally from zero, there is not one such curve in the LM-plane but an infinite number", so ist zu betonen, daß dasselbe auch bei *Eddington* zutrifft, falls nicht aus Gründen übersichtlicher Darstellung auf gleiches T_e reduziert wird. Daß die *Jeans*sche Erweiterung nicht wesentlicher Natur ist, haben auch *Eddington*[139]) und namentlich *Russell*[140]) nachgewiesen. Das Hauptergebnis der *Eddington*schen Untersuchung liegt auch nicht in der Aufstellung der Gl. (149), sondern in dem unerwarteten Ergebnisse, daß sie, obwohl unter Voraussetzung vollkommener Gase abgeleitet, auch das Verhalten der ungleich dichteren Zwergsterne mit gleicher Genauigkeit wiedergibt.

3. Nach *Eddington* ist $\frac{k\bar{\varepsilon}_r}{cG} = 1 - \beta$ längs des Sternradius konstant, aber von Stern zu Stern mit deren Masse veränderlich. Neuerdings hat *A. Brill*[141]) darauf aufmerksam gemacht, daß erfahrungsgemäß $k\sqrt{\varepsilon_r}$ für alle untersuchten Sterne gleich einer Konstanten A, gesetzt werden kann. Somit könnten $k_p \sim \bar{\varepsilon}_r$ einzeln berechnet werden. Setzt man aber nach *Eddington* mit Erfolg $k_p \sim \frac{K\varrho}{mT^3} T^{-\frac{1}{2}}$, worin K ein universelle Konstante ist, so folgt

$$k\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{cGaK}{3R}}\,\beta^{\frac{1}{2}}\,T_0^{-\frac{1}{4}},$$

also in Widerspruch mit der Voraussetzung abhängig von β, und somit von der Sternmasse. Beachtet man aber, daß für $\mathfrak{M} = 0{,}13$; $= 1{,}00$; $= 11{,}5$ Sonnenmassen sich $\sqrt{\beta} = 0{,}99$; $= 0{,}975$, $= 0{,}71$ ergibt[142]), während T_0 rund im Verhältnis der effektiven Temperaturen variiert, so ist ersichtlich, daß die *Brill*sche Beziehung innerhalb weiter Grenzen praktisch mit hinreichender Genauigkeit gilt. Als wahrscheinlichsten Wert gibt *Brill* $K = 4{,}27 \cdot 10^{27}\ \mathrm{m^5/cm^2}$, während *Eddington* für Capella $K = 2{,}0 \cdot 10^{27}$ erhält.

---

139) *A. S. Eddington,* On the stars-luminosity-relation, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 403.

140) *H. N. Russell,* Note on the relation between the mass, luminosity and temperature of gaseous stars, ebenda p. 935.

141) *A. Brill,* Der physikalische Zustand der Sterne, Ztschr. f. Phys. 30 (1925), p. 715.

142) Entnommen der Tabelle I der unter Fußnote 116) zitierten Arbeit *Eddingtons.*

71. Rotierende Massen im Strahlungsgleichgewicht. Über das Gleichgewicht rotierender Gasmassen bei Berücksichtigung des Strahlungsdruckes liegt eine Untersuchung von *E. A. Milne*[143]) vor. Bei der Schwierigkeit der mathematischen Behandlung erweisen sich selbst angenäherte Lösungen nur in zwei Fällen als möglich. Sie sind von geringer praktischer Bedeutung

a) wenn die Winkelgeschwindigkeit ω klein ist,

b) wenn die Masse so groß ist, daß der Lichtdruck den Gasdruck bedeutend überwiegt.

Im letzteren Falle ergab sich bereits für den nicht rotierenden Stern eine Bauart, deren Stabilität sehr gering ist.

Der Einfluß der Rotation äußert sich in erster Linie darin, daß die Kugel nicht länger nach einer Polytropen $n = 3$ gebaut ist, und $\frac{\varrho}{T^3}$ und das Verhältnis des Lichtdruckes zum Gasdruck nicht mehr konstant sind. Bei gleicher Masse und gleicher Mittelpunktstemperatur nehmen bei langsamer Rotation der mittlere Radius zu, die Leuchtkraft und effektive Temperatur ab. Letztere ergibt sich an den Polen höher als am Äquator. Die totale Strahlung des Sternes nimmt im Laufe seiner Entwicklung ab. Die Rotation macht sich in zwei Gliedern geltend: das eine ist die Kugelfunktion $P_2(\cos\vartheta)$ mit dem Koeffizienten $\frac{\omega^2}{\varrho}$, das andere mit dem Koeffizienten $\frac{\omega^2}{\beta m}$ ist unabhängig von ϑ. Letzteres zeigt, daß der Einfluß der Rotation mit zunehmender Masse zunimmt.

Für große Massen kann der Gasdruck gegenüber dem Lichtdruck vernachlässigt werden. Das Verhalten der rotierenden Masse hängt dann ganz ab von der Verteilung der Energieproduktion im Innern; die Dichte an jeder Stelle wird lineare Funktion von $k\varepsilon$. Ist ε (oder $k\varepsilon$) konstant, so ist *bei hinreichend großer Masse* die Dichte konstant, solang $\omega \neq 0$, und die Form der Oberfläche ist dieselbe, wie bei einer rotierenden Flüssigkeitskugel konstanter Dichte.

Von sehr allgemeinen Voraussetzungen ausgehend, versucht *H. v. Zeipel*[144]) den unerwarteten Satz zu beweisen, daß, falls das Molekulargewicht und der Absorptionskoeffizient in einer Niveaufläche konstant sind und die Zustandsgleichung vollkommener Gase gilt, die

143) *E. A. Milne,* The equilibrium of a rotating star, London Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 118.

144) *H v. Zeipel,* Über das Strahlungsgleichgewicht der Sterne, Seeliger-Festschrift, Berlin 1924, p. 144, sowie drei weitere Abhandlungen in London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 665, 684 und 702.

Energiequellen ε nur dann innerhalb der ganzen Sternmassen konstant sein können, falls entweder $\omega^2 = 0$ oder die Dichte ϱ konstant st. Die Energieproduktion steigt oder sinkt nach dem Zentrum zu, je nachdem $\varrho >$ oder $< \frac{\omega^2}{2\pi G}\cdot$ Letzteres Gebiet erstreckt sich tatsächlich weit nach außen, auch bei nahezu sphärischen Sternen.

IV. Eingreifen von Atomphysik und Quantentheorie.

A. Jonisation und Strahlung.

In den Untersuchungen der früheren Abschnitte wurde, von wenigen Ausnahmen abgesehen, die die Himmelskörper aufbauende Materie als Kontinuum behandelt und analog mit einem mittleren, einer schwarzen Strahlung entsprechenden Absorptionskoeffizienten gerechnet. Nun sind die in den einzelnen Emissionslinien und Absorptionslinien umgesetzten Energiemengen zwar so klein, daß sie in der allgemeinen Energiebilanz nicht in Betracht kommen, ihre fundamentale Bedeutung für die astrophysikalische Forschung bleibt bei dieser Behandlungsweise aber verschlossen. Dazu muß die Physik der Kontinua durch die Physik des einzelnen Atomes ersetzt werden. Es ist das Verdienst von *J. Eggert*[118]) zum ersten Male die Gleichung des Dissoziationsgleichgewichtes auf Ionisationsvorgänge angewandt und so den Ionisationsgrad und damit das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie berechnet zu haben (Nr. **65**). Es ist Verdienst von *Megh Nad Saha*[145]), diese Beziehung auf das optische Gebiet angewandt und so den fundamentalen Zusammenhang zwischen Linienspektrum, Temperatur, Druck und aufbauender Materie hergestellt zu haben. Im folgenden kann nur über die theoretischen Grundlagen dieser Arbeiten referiert werden, ein näheres Eingehen auf die Beobachtungsergebnisse muß dem Berichte über Spektralanalyse vorbehalten bleiben. Weiter zeigt sich, daß durch die Behandlung von Strahlung und Gas als Kontinua die weite Erstreckung der Sternatmosphären in äußerst verdünntem Zustande, wie sie in der Chromosphäre in Erscheinung tritt, nicht zu erklären vermag. Eine Erklärungsmöglichkeit bietet sich, wenn der Druck monochromatischer Strahlung auf Atome in geeigneten Anregungszuständen in Rechnung gestellt wird.

---

145) *Megh-Nad-Saha,* Ionisation in the solar Chromosphere, Phil. Mag. 40 (1920) p. 472; Elements in the sun, ebd. p. 809; On the problems of temperature radiation of gases, ebd. 41 (1921), p. 267. Eine gedrängte Übersicht ist gegeben in: Versuch einer Theorie der physikalischen Erscheinungen bei hohen Temperaturen und Anwendung auf die Astrophysik, Ztschr. f. Phys. 6 (1921), p. 640.

Zum Schluß habe ich mir nicht den Hinweis versagen können, daß trotz einer Fülle von Erscheinungen, welche Quantentheorie und Atomphysik aufzuklären vermögen, einige wichtige, scheinbar einfacher gelegene Probleme in Dunkel gehüllt bleiben.

72. **Ionisationsgleichgewicht.** Das Ionisations- (Dissoziations-) Gleichgewicht zwischen Elektron e, positivem Jon $+$, und neutralem Atom a, kann man als chemisches Gleichgewicht zwischen idealen Gasen auffassen, wenn die Temperatur hoch genug ist, daß man an die durch die elektrischen Kräfte bedingte Abweichung vom idealen Gaszustande vernachlässigen kann[146]) (Nr. **68**). Dann gilt das Massenwirkungsgesetz[147])

$$\text{(a)} \qquad \frac{C_e \cdot C_+}{C_a} = K_c \quad \text{oder} \quad \frac{p_e \cdot p_+}{p_a} = K_p = R \cdot T \cdot K_c$$

C die Konzentrationen in Mol (also für $N = 6{,}062.10^{22}$ Teilchen), p die Partialdrucke in Atmosphären gemessen, $p = R \cdot T \cdot C$ die Gasgleichung. Für die Gleichgewichtskonstante liefert der zweite Hauptsatz die Gleichung der „Reaktionsisichore"

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial \log K_p}{\partial T} = \frac{Q}{RT^2}$$

Q (erg) die Wärmemenge, die bei der Temperatur T frei wird, wenn sich ein Mol Elektronen und ein Mol positiver Ionen unter konstantem Drucke zu einem Mol neutraler Atome vereinigen. Weiter gilt die Beziehung[148])

$$\text{(c)} \qquad Q = Q_0 + \frac{5}{2} RT + \frac{5}{2} RT - \frac{5}{2} RT$$

Q_0 der Betrag von Q bei $T = 0$, der sich aus der Ionisationspannung I_a des neutralen Atoms und der Ladung F von 1 Mol (*Faraday*sches Äquivalent, $Q_0 = I_a \cdot F$ berechnet, und $\frac{5}{2} R$ die Wärmekapazität der drei Reaktionsteilnehmer ($+$ für Elektron und Ion, — für das neutrale Atom). Dabei ist die „innere spezifische Wärme", vgl. Nr. **74**, nicht in Betracht gezogen. Die Integration ergibt

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} \log k_p &= -\frac{Q_0}{RT} + \frac{5}{2} \log T + j_e' + j_+' - j_a' \\ \log k_p &= -\frac{Q_0}{2{,}3 \cdot RT} + \frac{5}{2} \log T + j_e + j_+ - j_a. \end{aligned}$$

146) *W. Wessel*, Über das Massenwirkungsgesetz in ionisierten Systemen, Physikal. Ztschr. 25 (1924), p. 270.

147) *K. Herzfeld*, Physikalische und Elektrochemie, Encykl. V I. 11, Nr. 8, p. 984.

148) *K. Herzfeld*, ebenda Nr. 1, p. 952.

Die Größen j, die „chemischen Konstanten" der drei Stoffe, vermag die reine Thermodynamik nicht zu liefern; doch sagt der dritte Hauptsatz aus, daß sie nur von der Natur des betreffenden Gases, nicht von der Beschaffenheit des betreffenden physikalischen oder chemischen Gleichgewichtes abhängen. So werden sie der Berechnung durch die Quantenstatistik zugänglich[149]), mit dem Ergebnisse

$$\text{(e)} \qquad j = \log \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{N^{\frac{3}{2}} h^3} = -1{,}587 + \frac{3}{2} \log m$$

m das Molekulargewicht, k die *Boltzmann*sche Konstante $= 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ Erg, h das Wirkungsquantum $= 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ Erg · sec (p stets in Atm gemessen). So wird

$$j_e = -1{,}587 + \frac{3}{2} \log \frac{1}{1847} = -6{,}487$$

$$\text{(f)} \qquad j_+ - j_a = \frac{3}{2} \log \frac{m_+}{m_a} = \frac{3}{2} \log \frac{m - \frac{1}{1847}}{m} = \frac{3}{2} \log \left(1 - \frac{1}{1847 \cdot m}\right)$$

kann man meist durch 0 ersetzen.[149a])

Bedeutet x den Bruchteil ionisierter Atome, also auch die Menge gebildeter Elektronen und Ionen, P den Gesamtdruck, $P = p_a + p_e + p_+$, so ist

$$\text{(g)} \qquad \frac{p_e \cdot p_+}{p_a} = \frac{x^2}{1 - x^2} P$$

und es ergibt sich schließlich

$$\text{(150)} \qquad \log \left(\frac{x^2}{1 - x^2} P\right) = -\frac{Q_0}{2{,}3\, R T} + \frac{5}{2} \log T - 6{,}487$$

$$\frac{Q_0 \text{ Erg}}{2{,}3\, R} = \frac{U \text{ cal}}{4{,}571}; \text{ 1 Volt äquivalent } 2{,}302 \cdot 10^4 \text{ cal.}$$

Für die weitere Ionisation des einfach geladenen zum doppelt geladenen Ion gilt diese Gleichung unverändert, wenn man den Index $+$ durch $++$ und den Index a mit $+$ vertauscht. Die Wärmetönung ist dann $Q_0 = J_2 \cdot 2F$.

Diese Gleichung, die *M. N. Saha* seinen Untersuchungen zugrunde legt, gilt für rein thermische Anregung. Nun werden aber die

149) *A. Smekal,* Allgemeine Grundlagen der Quantenstatistik und Quantentheorie, Encykl. V 3, 28, Nr. 25.

149a) Es befremdet auf den ersten Anblick, daß nach Gl. (150) bei konstanter Temperatur die Ionisation mit abnehmendem Drucke steigen soll. Denn dann nimmt die Zahl der ionisierenden Zusammenstöße (Atom-Elektronen) in gleichem Maße ab wie die Zahl der rekombinierenden Zusammenstöße (Ion-Elektronen); die beiden wachsen $\sim P^2$. Dies sollte Unabhängigkeit vom Drucke ergeben. Allein die Rekombinationsmöglichkeit hängt noch ab von „Dreikörper-Zusammenstößen" (Atom-, Ion-, Elektronen), deren Zahl $\sim P^3$ steigt.

Gase der Sternatmosphäre durch Strahlung getroffen, die ebenfalls ionisierend wirkt. Fällt Strahlung ein von der Frequenz ν und der Dichte $u_\nu d\nu$, so geht nach *Saha*[150]) Gl. (150) über in

$$\log\left(\frac{x^2}{1-x^2}P\right) = -\frac{Q_0 - Nh\nu}{2{,}3\,RT} + \log\frac{u_\nu}{8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}+u_\nu} + \frac{5}{2}\log T - 6{,}487. \tag{151}$$

Ist aber diese ionisierende Strahlung schwarze Strahlung von der gleichen Temperatur T, also $u_\nu = 8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, was in den in Betracht kommenden Problemen mit genügender Annäherung zutrifft, so geht Gl. (151) wieder in Gl. (150) über.

Liegt eine ionisierte Mischung verschiedener Elemente vor, so darf in Anwendung auf den einzelnen Bestandteil P nicht als dessen Partialdruck angesetzt werden; denn ein Reaktionsprodukt, die freien Elektronen, ist allen Bestandteilen gemeinsam. Sind die Atomarten in den Mengen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ vorhanden und in den Bruchteilen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ionisiert, so ergibt sich eine mittlere Ionisation

$$\bar{x} = \frac{\sum a_i\cdot x_i}{\sum a_i}$$

und in einfacher Überlegung zeigt *H. N. Russell*[151]), daß Gl. (150) für jeden einzelnen Bestandteil in der Form anzusetzen ist

$$\frac{x_i}{1-x_i}\cdot\frac{\bar{x}}{1+\bar{x}} = \frac{\varkappa_i}{P},\quad P \text{ der Gesamtdruck,}$$
$$\log\varkappa_i = -\frac{5036\,I_i\,(\text{Volt})}{T} + \frac{5}{2}\log T - 6{,}5. \tag{152}$$

Daraus folgt

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\,\frac{x_2}{1-x_2};\quad \log\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = 5036\,\frac{I_2-I_1}{T}, \tag{153}$$

d. h. das Verhältnis der Anzahl ionisierter Atome zu der Anzahl nichtionisierter Atome ist für zwei beliebige Bestandteile nur durch die Temperatur bestimmt, unabhängig vom Drucke, den relativen Mengen und der Anwesenheit anderer Elemente. Das Element mit kleinerem

150) *Megh Nad Saha* and *R. K. Swe,* Influence of radiation on ionisations equilibrium, Nature 115 (1925), p. 377.

151) *H. N. Russell,* The theorie of ionisation and the sun spot-spectrum, Astroph. Journ. 55 (1922), p. 115.

Ionisationspotential ist stets stärker ionisiert und das Ionisationsverhältnis ist nur durch die Differenz der Potentiale, unabhängig von Druck und relativer Konzentration, bestimmt.

73. Die Untersuchungen Megh Nad Saha's.[145]) Die Gl. (150) hat sich in den Händen dieses Forschers zu einem der wertvollsten Hilfsmittel auf dem Gesamtgebiete der Astrophysik entwickelt. Ist für eine Kerngattung die zur Ionisation erforderliche Energiezufuhr, in der Regel ausgedrückt durch das Ionisationspotential, bekannt, so gestattet sie für gegebene Werte von Druck und Temperatur den Ionisationsgrad x zu berechnen. Er steigt bei konstantem Drucke mit steigender Temperatur, ist also ceteris paribus bestimmt durch die Spektralklasse und steigt bei konstanter Temperatur mit abnehmendem Drucke, also bei Erhebung in den äußeren, bei Strahlungsgleichgewicht hinreichend isothermen Schichten der Sternatmosphären. Ist der Ionisationsgrad bekannt, so können für eine große Anzahl Atome, namentlich der drei ersten Vertikalreihen des periodischen Systems, die zu erwartenden Absorptions-(Emissons-)linien mit aller Genauigkeit angegeben, für andere in ihrer weiteren Entwicklung wenigstens abgeschätzt werden. Doch ist zu beachten, daß der Nachweis dieser Linien durch die experimentellen Hilfsmittel bedingt und für sehr kurzwellige Strahlung durch das Zwischentreten der Erdatmosphäre vereitelt wird. Sind bei tieferen Temperaturen und höheren Drucken Moleküle vorhanden, z. B. (O, $T_i O^2$, $Z_r O^2$, $Mg H^2$), so kann ihr Zerfall in Atome ebenfalls durch sinngemäße Anwendung der Gl. (150) dargestellt und durch Beobachtung das Erlöschen des Viellinienspektrums verfolgt werden. Sind nur neutrale Atome vorhanden (x hinreichend klein), so ist nur das Bogenspektrum, bestehend aus der Resonanzserie und den zugehörigen Serien, zu beobachten. Bei steigender Anregung ($\Delta T \geqq 0$, $\Delta P \lesseqgtr 0$) steigt x, nimmt die Zahl neutraler Atome ab, und mit abnehmender Intensität des Bogenspektrums bildet sich das Funkenspektrum, bestehend aus der Resonanzserie und den zugehörigen Serien des einfach ionisierten Atomes, aus, um bei weiterer Anregung zu erlöschen und der Resonanzserie und den zugehörigen Serien des zweifach ionisierten Atomes zu weichen. Dieser Vorgang kann sich theoretisch in jeweils angebbarer Zahl wiederholen, doch sind höher wie dreifach ionisierte Atome in Sternatmosphären (Si^{+++}) bisher nicht nachgewiesen.

In praktischer Anwendung dieser theoretischen Ergebnisse sucht *Saha* in der bekannten Spektrenfolge des Draper-Kataloges Grenzen aus, in welchen eine charakteristische Linienserie eben auftaucht oder erlöscht. (x hinreichend klein, resp. $= 1$.) Dadurch ist offenbar wenig gewonnen; denn, mathematisch gesprochen, steht nur eine Gleichung mit drei Unbekannten, x, T, P, zur Verfügung. Ein Verfahren zu ihrer graphischen Behandlung ist von *A. Pannekoek*[152]) angegeben. Versuche einen durch Strahlungsgleichgewicht bedingten Zusammenhang zwischen T und P einzuführen, scheinen nicht vorzuliegen. *Saha* greift zur nächstliegenden Hypothese für die Sternschichten, in welchen die Linien sich ausbilden, denselben Druck anzunehmen, wie in der sogenannten umkehrenden Schicht der Sonne. Ältere Ansichten setzen ihn zu 1—10 Atm an. Diesen folgend, berücksichtigt *Saha* in erster Linie Drucke von 1 Atm, wodurch eine eindeutige Beziehung zwischen x und T hergestellt ist. Auf diese Weise gelingt es für jede Spektralklasse Grenztemperaturen zu finden und so eine Mitteltemperatur zu bestimmen. Unterstützt wird das Verfahren durch Zurückgreifen auf Beobachtungen, in welchen die an- und abschwellende Intensität dieser Linien im Verhältnis zu andern Linien festgestellt wird. So ergibt sich, daß jeder Spektralklasse eine Temperatur zugeordnet werden kann als Temperatur der Schicht, in welcher die Absorptionslinien sich bilden (ein Druck von rund 1 Atm vorausgesetzt) im Gegensatze zur effektiven Temperatur, welche eine Eigenschaft der ausgesandten Strahlung ist.

Wird anderseits eine eindeutige Beziehung zwischen x und P dadurch hergestellt, daß T ein nahezu konstanter Wert beigelegt wird, so ergibt sich ein klarer Einblick, wie die verschiedenen Atomgattungen in verschiedenen Höhen der Sonnenatmosphäre in Erscheinung treten. Leicht ionisierbare Elemente wie Ca, Ba, Sr können in den höheren Schichten nur als Ca^+, Ba^+, Sr^+ vorhanden sein, während umgekehrt die Temperatur nicht hinreicht, um die H_e^+-Linien auftreten und die H-Linien verschwinden zu lassen.

Ein näheres Eingehen auf die theoretische Zergliederung des vorhandenen Beobachtungsmateriales mit seiner Fülle von überraschenden und überzeugenden Einzelheiten liegt außerhalb des Rahmens dieses Berichtes.

Diese grundlegenden Untersuchungen *Sahas* sind in drei Punkten zu verbessern. 1. *Saha* rechnet im Anschluß an ältere Sonnentheorien mit Drucken von rund 1 atm; diese dürften, siehe unten, um die Größenordnung 10^4 zu hoch sein. 2. Die Feststellung des Erscheinens und Verschwindens der Linien ist mit Unsicherheit und Schwierigkeit verknüpft. In je größerer relativer Menge eine Atomgattung vorhanden

152) *A. Pannekoek,* Ionisation in stellar atmospheres, Netherlands Astr. Inst. Bull. Nr. 19 (1822), p. 107.

ist, desto geringer kann der Ionisationsgrad sein, der die zur Beobachtung erforderliche, an sich unbekannte Menge Ionisationsprodukt liefert. 3. und ferner wird die Beobachtung der ersten und letzten, schwachen Linien beeinflußt durch die Beschaffenheit des kontinuierlichen Spektrums und durch das Vorhandensein stärkerer Linien anderer Elemente.

74. Verfeinerung der Methode durch R. H. Fowler und E. A. Milne.[153]) Ausgangspunkt ist wieder Gl. (150), die aber von *R. H. Fowler*[154]) in verfeinerter, rein statistischer Betrachtungsweise abgeleitet wurde. Während *Saha* das Atom lediglich in zwei Zuständen, dem jeweils neutralen und dem ionisierten, betrachtet, die zwischenliegenden, angeregten Zustände aber ausschließen muß, wodurch z. B. die Ca- und Ca^+-Linien, nicht aber die *Balmer*linien behandelt werden können, werden jetzt auch diese Zwischenzustände berücksichtigt. Diesen nur angeregten Zuständen (der „inneren spezifischen Wärme") wird Rechnung getragen, indem in Gl. (150) ein Glied $\log b(T)$ beigefügt wird, $b(T)$ die „Partition-Funktion"

$$(154) \qquad b(T) = q_1 + q_2 e^{\frac{(\chi_1 - \chi_2)}{kT}} + q_3 e^{\frac{(\chi_1 - \chi_3)}{kT}} + \cdots$$

worin 1, 2, 3, ... die möglichen angeregten Zustände, geordnet nach abnehmender negativer Energie, $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots$ die entsprechenden Energieniveaus bezeichnen, so daß χ_1 das Ionisationspotential, $\chi_1 - \chi_2$ das Resonanzpotential usw. angeben, $q_1, q_2, q_3 \ldots$ sind die Gewichte dieser Zustände; dabei ist zu setzen

für H und H_e^+:

$$q_1 = 1 \cdot 2, \quad q_2 = 2 \cdot 3 \ldots, \quad q_r = r(r+1),$$

für andere einwertige Elemente:

$$q_1 = q_2 = \cdots q_r = 1$$

für zweiwertige Elemente (alkal. Erden):

$$q_1 = q_2 = \cdots q_r = 2$$

Der für die praktische Anwendung nicht in Betracht kommende Schönheitsfehler, daß diese Reihe divergiert, kann nach *H. C. Urey*[155])

---

153) *R. H. Fowler* and *F. A Milne,* The intensities of absorption lines in stellar spectra and the temperatures and pressures in the reversing layers of stars, London Roy. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 403; The Maxima of absorption lines in stellar spectra (second paper), ebenda 84 (1924), p. 499.

154) *R. H. Fowler,* Dissociations-Equilibrium by the methode of partitions, Phil. Mag. 45 (1923), p. 1.

155) *H. C. Urey,* The distribution of electrons in the various orbits of the Hydrogen-atom, Astroph. Journ. 59 (1924), p. 1.

beseitigt werden. Da weiterhin Maximalwerte von x gesucht werden, ist es zweckmäßig, den Gesamtdruck P durch den Partialdruck p_e der Elektronen $p_e = \frac{1}{1+x} P$ zu ersetzen. So tritt an Stelle der Gl. (150) die verfeinerte Gleichung

$$(155)\ \log\left(\frac{x}{1-x}\, p_e\right) = -\frac{\chi_1}{RT} + \frac{5}{2}\log T + \log\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \cdot k^{\frac{5}{2}} \cdot \sigma}{h^3} - \log b(T).$$

Man beachte, daß jetzt m die Masse des Elektrons bedeutet und die Logarithmen natürliche sind. Hinzugetreten ist der Faktor σ, der die Zahl der in der höchstwertigen Bahn umlaufenden (Valenz-) Elektronen angibt, in der Anwendung $= 1$ oder 2 (Maximalwert vermutlich $= 4$). Werden die χ in Volt gemessen, so ist die *Boltzmann*sche Konstante $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ Erg durch den äquivalenten Wert $8{,}60 \cdot 10^{-5}$ Volt zu ersetzen.

Im Gegensatze zu *Saha* wird jetzt nicht mehr das Auftauchen und Erlöschen bestimmter Liniengruppen verfolgt, sondern der Moment ihrer maximalen Intensität. Dieser hängt nicht ab von der relativen Menge des betreffenden Elementes, noch von der Abschätzung einer bestimmten erforderlichen Minimalmenge. Statt ein Temperaturintervall durch Randwerte abzugrenzen, wird weit vorteilhafter ein Maximum beobachtet. Diesem Verfahren liegt die Annahme zugrunde: „Die Intensität einer Absorptionslinie ist proportional der Konzentration von Atomen in der Sternatmosphäre, die zu ihrer Absorption befähigt sind.“ Bei Berechnung des Maximums wird auch hier nicht versucht eine Beziehung $p_e = f(T)$ einzuführen, sondern wird der zu einem Temperaturmaximum gehörige Druck bestimmt und für diesen dann ein Einheitswert festgesetzt. Folgende wichtige Beziehungen mögen das Verfahren erläutern. Für den Bruchteil $1 - x$ unionisierter Atome liefert Gl. (155)

$$(156)\quad 1 - x = \frac{b(T)}{b(T) + \alpha T^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi_1}{kT}}}; \quad \alpha = \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3 \cdot p_e} = \frac{0{,}322 \cdot \sigma}{p_e}.$$

Er sinkt mit steigender Temperatur erst langsam, um dann von einer durch das Ionisationspotential bestimmten Temperatur an sehr rasch abzunehmen. Der angeführten Arbeit von *Fowler* ist der Bruchteil $f(r)$ neutraler Atome zu entnehmen, die sich in dem r^{ten} Quantenzustande befinden.

$$(157)\qquad f(r) = q_r \frac{e^{-\frac{(\chi_1 - \chi_r)}{kT}}}{(bT)}.$$

Somit ergibt sich der Bruchteil ionisierter Atome, die sich in dem

r^{ten} Quantenzustande befinden (und die zugehörige Linienserie aussenden) zu

$$n_r = (1 - x)\, f_{(r)} = q_r \frac{e^{-\frac{(\chi_1 - \chi_r)}{k\,T}}}{b(T) + \alpha\, T^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi_1}{k\,T}}}. \tag{158}$$

Er steigt mit der Temperatur, um nach Überschreitung eines Maximums wieder abzunehmen.

Bei Erreichung dieses Maximums kann die Ionisation, wie z. B. für *H*, schon weit fortgeschritten sein.

Läßt man die geringe Änderung von $b(T)$ außer acht, so ergibt sich ohne Variation von p_e die Bedingung für dies Maximum

$$p_e = \frac{0{,}332 \cdot \sigma}{b(T)} \cdot \frac{\chi_r + \frac{5}{2} k T}{\chi_1 - \chi_r} \cdot T^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi_1}{k T}} \tag{159}$$

und aus dieser die zugehörige Ionisation

$$x = \frac{\chi_1 - \chi_r}{\chi_1 + \frac{5}{2} k\, T_{\max}}; \quad 1 - x = \frac{\chi_r + \frac{5}{2} k\, T_{\max}}{\chi_1 + \frac{5}{2} k\, T_{\max}}. \tag{160}$$

Der Unterschied zwischen Resonanzserie $\chi_1 = \chi_1$ und den zugehörigen Serien $\chi_r \neq \chi_1$ tritt klar hervor. Dieser Partialdruck p_e der Elektronen wird sich von dem Gesamtdruck P durch einen Faktor unterscheiden, dessen Größe zu 1—$^1/_3$ abgeschätzt werden kann; jedenfalls sind beide von gleicher Größenordnung. Wird die Zahl neutraler Atome hinreichend klein, so kann dies Verfahren auf die ionisierten, und weiterhin auf die mehrfach ionisierten Atome angewandt werden.

Die numerische Rechnung findet sich ausgedehnt auf alle Linien, für welche die notwendigen Sterndaten vorhanden sind. Um Aufschluß zu erhalten über die fundamentale Größe p_e sei angeführt, daß sich für die *Balmer*linien, welche die Sternklasse $A\,0$ charakterisieren, die zusammengehörigen Werte $T_{\max} = 10000^0$, 11000^0 bzw. 12000^0 und $p_e = 1{,}3 \cdot 110^{-4}$, $7{,}20 \cdot 10^{-4}$ bzw. $3{,}03 \cdot 10^{-4}$ Atm, für Ca^+ $T_{\max} = 5000^0$ und 6000^0 und $p_e = 9{,}89 \cdot 10^{-7}$ und $5{,}02 \cdot 10^{-5}$, und für H_e^+ (*Pickering*-serie) $T_{\max} = 30000^0$, 33000^0, 36000^0 und $p_e = 3{,}80 \cdot 10^{-6}$, $3{,}22 \cdot 10^{-5}$, $1{,}18 \cdot 10^{-4}$ Atm ergeben. Auf diese Weise folgt übereinstimmend für p_e die Größenordnung 10^{-4} Atm. Auch Betrachtungen über die Linienschärfe und die Dissoziationserscheinungen der Moleküle (Viellinienspektrum), sowie Schlüsse über den Aufbau der Sonnenatmosphäre[156]) ergaben für p_e die gleiche Größenordnung, so daß sich *Fowler* und *Milne* entschließen, durchweg $p_e = \text{const.} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Atm anzusetzen, welcher Wert der Größenordnung nach wohl richtig sein dürfte.

---

156) *H. N. Russell* and *J. A. Stewart*, Pressures of the suns surface, Astroph. Journ. 59 (1924), p. 197.

Die Temperatur der Klasse $A0$ (Maximalintensität der *Balmer*serie) wird so $= 10000$ festgesetzt. So ergeben sich für die Reihe der Spektralklassen Temperaturen, die von 3900 (Klasse $K5$) bis 16100 (Klasse $B2$) ansteigen und etwas tiefer liegen wie die *Saha*schen Werte. Für die Maximalintensität der Linie 4486 und der *Pickering*serie des H_e^+ ergaben sich 35200^0.

Überraschend gering ergibt sich der Bruchteil angeregter Atome, welche das starke Auftreten starker Linien zugeordneter Serien bewirken können. So ergibt sich, daß für die Maximalintensität der ersten und zweiten Nebenserie das Na nur 1 Atom auf $10^{2,9}$ Atome ($\log n_r = -2{,}9$) wirksam ist, für das Maximum der Linie 4481 des Mg^+ 1 Atom auf $10^{4,7}$ für die *Balmer*serie 1 auf $10^{5,1}$ und für die Bogenlinien des H_e und die Funkenlinien des H_e^+ 1 Atom auf 10^7 Atome. Zum Verschwinden einer Resonanzserie durch vollkommene Ionisation muß der Bruchteil neutraler Atome unter den Wert 10^{-8} heruntergehen. In diesen Zahlen kommt der außerordentlich große Wert des Absorptionskoeffizienten für monochromatische Strahlung zum Ausdruck.[157])

Auf den Unterschied zwischen Riesen und Zwerge (erstere ergeben sich durchschnittlich 10—20% kälter wie die Zwerge gleicher Klasse) wird nicht näher eingegangen. (Darüber folgen in Nr. 77a einige Bemerkungen.)

B. Ionisation und Lichtdruck.

75. Aufbau der äußersten Schichten einer Sternatmosphäre. In diesem Berichte ist wiederholt (vgl. z. B. Nr. **63**) darauf hingewiesen worden, daß die Einführung des Lichtdruckes nach *Eddington* in den äußersten Schichten versagen muß. Für die Hauptmasse des Sternes ergibt sich wohl Aufbau nach einer Polytropen $n = 3$; wie die anschließenden Schichten behandelt werden können, wurde in Nr. **63** erläutert, allein die größten Höhen verlangen besondere Behandlung. Denn den bisherigen Entwicklungen liegt die Annahme starker Absorption (Nr. **47**) zugrunde, d. h. die Vorstellung, daß die von tieferen Schichten ausgeworfenen Lichtquanten auf *relativ kurzer* Strecke absorbiert und durch andere, den absorbierenden Schichten entstammende, ersetzt werden. Die außerordentliche Verdünnung der äußersten Schichten aber bringt es mit sich, daß hier keine *relativ kurze* Strecken mehr vorhanden sind. Bei fortschreitender Erkenntnis des Vorganges der Lichtemission und -absorption konnte der Gedanke nicht aus-

157) Vgl. Anmerkung, Fußnote 127).

bleiben, die mechanische Wirkung der ausfliegenden Lichtquanten $h\nu$ auf die einzelnen Atome, deren freie Weglänge nach oben zunimmt, in den in Betracht kommenden Anregungszuständen direkt zu bestimmen. Ein erster Versuch in dieser Richtung dürfte auch hier von *Megh Nad Saha*[158]) ausgegangen sein. Eine Lösung, freilich in stark stilisierter Form, ist von *E. A. Milne*[159]) gegeben; sie gewährt trotzdem einen guten Einblick in die in Wirklichkeit vorliegenden Verhältnisse und muß deshalb etwas eingehender besprochen werden.

Angenommen wird eine Atmosphäre, die nur aus einem einzigen Grundstoffe besteht, und weiter soll angenommen werden, daß dieser nur in zwei verschiedenen Quantenzuständen vorhanden ist. Die erforderlichen Gleichungen lassen sich wohl für n beliebige Quantenzustände aufstellen, aber die Lösung bietet bereits für $n = 3$ unüberwindliche Schwierigkeiten. Da wir am besten orientiert sind über das Vorkommen von Calcium in den hohen Schichten der Sonnenchromosphäre, wird eine Ca^+-Atmosphäre angenommen. Ca- und Ca^{++}-Atome dürften hier auszuschließen sein. Von diesen Ca^+-Atomen sollen n_1 in unangeregtem Zustande, die übrigen n_2 pro cm^3 in dem Zustande sich vorfinden, der sie zur Aussendung der H- und K-Linien befähigt. Der Gang der Untersuchung läßt sich, wie folgt, skizzieren.

Durch Zwischentreten der Ca^+-Atmosphäre werde das kontinuierliche Spektrum des Untergrundes von einer Absorptionslinie von der scharfen Breite $\Delta\nu$ und der durchwegs gleichen Helligkeit $(J_\nu)_0$ durchkreuzt. Die Atmosphäre werde im Sinne *Schwarzschilds* (Nr. **49**) von unten nach oben und entgegengesetzt von Energieströmen der Intensität J_ν und J'_ν durchsetzt, so daß sich von unten nach oben ein Nettostrom im Betrage $\pi F_\nu \Delta\nu = \pi(J_\nu - J'_\nu)\Delta\nu$ ergibt und in stationärem Zustande (Strahlungsgleichgewicht)

$$\text{(a)} \qquad F_{(\nu)} = J_\nu - J'_\nu = \text{const.} = (J_\nu)_0$$

sein muß. Die Anzahl der Absorptionen ist $\sim n_1$, die Anzahl der Emissionen, die Intensität der Strahlung, $\sim n_2$, und im stationären Zustande gilt

$$\text{(b)} \qquad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{1}{2}(J + J'_\nu)}{\sigma}; \qquad \sigma = \frac{2h\nu^3}{c^2}.$$

Da $J_\nu - J'_\nu$ konstant, $J_\nu + J'_\nu$, wie ersichtlich, mit der Höhe ab-

158) *Megh Nad Saha,* On selective radiation pressure and radiative equilibrium of the solar atmosphere, Calcutta, Journ. of sc. (1920), p. 51.

159) *E. A. Milne,* The equilibrium of the Calcium chromosphere, London Roy. Soc. Month. Not. 85 (1924), p. 111; sowie second paper, ebenda 86 (1925), p. 8.

nimmt, wird $\frac{n_2}{n_1}$ ebenfalls mit der Höhe abnehmen und es folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{n_2}{n_1} = \frac{2F_\nu}{\sigma}, \quad \text{also klein gegen } 1. \tag{c}$$

Ist α der Absorptionskoeffizient eines einzelnen Atomes im Zustande 1, so erhält 1 cm^3 durch Absorption ein Bewegungsmoment nach oben im Betrage von

$$\frac{\pi(J_\nu - J'_\nu)\cdot\Delta\nu\cdot\alpha n_1}{c} = \frac{\pi F_\nu \Delta\nu\cdot\alpha n_1}{c}, \tag{d}$$

während die nach allen Seiten gleichmäßig verteilte Emission keinen Beitrag liefert. Zerlegt man wieder den gesamten tragenden Druck P in Gasdruck p und Lichtdruck p_s, so liefert die Gleichgewichtsbedingung $\frac{dP}{dx} = -g(n_1+n_2)m$

$$\frac{dp}{dx} = -mg(n_1+n_2) + \frac{\alpha\pi F_\nu\Delta\nu\cdot n_1}{c}. \tag{e}$$

Das Verhältnis des Lichtdruckes zum Gesamtdrucke wird so

$$\frac{p_s}{P} = \frac{\alpha\pi F_\nu\Delta\nu}{mgc}\cdot\frac{n_1}{n_1+n_2}. \tag{f}$$

Der erste Faktor ist konstant. Im Gegensatze zu *Eddington,* der für die Hauptmasse (Nr. **59**) $\frac{p_s}{P} = 1 - \beta = \text{const.}$ setzt, ergibt sich nun, daß $\frac{p_s}{P}$ nach außen zunimmt (vgl. Nr. **63**). Gl. (e) führt zu einem Grenzwerte von F_ν; die Atmosphäre wird dann ausschließlich durch Strahlungsdruck getragen. Wird im allgemeineren Falle in großen Höhen nur der Bruchteil $(1-\mu)$ des Gewichtes durch Strahlung getragen, so liefert (e)

$$mg(1-\mu) = \frac{\alpha\pi F_\nu\Delta\nu}{c}\lim\frac{n_1}{n_1+n_2}. \tag{g}$$

(Bei strengerer Durchführung ist zu beachten, daß die Lichtemission, Übergang von 2 nach 1, nicht nur freiwillig vor sich geht, sondern auch durch einfallende Strahlung erzwungen werden kann; dann ist in einigen Gleichungen n_1 durch $n_1 - n_2$ zu ersetzen.) Die Theorie der Strahlung gestattet, den Absorptionskoeffizienten des Atoms durch dessen mittlere Lebensdauer τ im angeregten Zustande durch die Beziehung

$$\alpha\Delta\nu = \frac{h\nu}{4\pi\sigma\tau} \tag{161}$$

auszudrücken, so daß schließlich

$$F_\nu = \frac{8\nu^2\tau mg(1-\mu)}{c}, \tag{162}$$ $$\lim_{x=\infty}\frac{n_2}{n_1} = \frac{2\tau cmg(1-\mu)}{h\nu} \tag{163}$$

wird. Unter der Annahme, daß lediglich der Lichtdruck trägt $(\mu = 0)$

hat *Milne*[160]) in einer früheren, weniger durchgeführten Arbeit auf gleicher Grundlage diese Lebensdauer der Ca^+-Atome aus der Intensität der H- und K-Linien berechnet. Es ergab sich in vorzüglicher Übereinstimmung mit bekannten Laboratoriumsversuchen $\tau = 0{,}6 \cdot 10^{-8}$ sec. Wir notieren, daß in die Gl. (162) und (163) die Breite $\Delta\nu$ der Linie nicht eingeht; sie sind ferner unabhängig von der effektiven Temperatur der Sonne, auch unabhängig von der Anzahl der Atome über der Flächeneinheit. Es zeigt sich, daß F_ν nicht durch diese Zahl bedingt wird, sondern umgekehrt ν, τ, m und F_ν hängen ausschließlich von der betreffenden Atomart ab und sind nur durch g mit dem Sterne verbunden.

Für eine Atmosphäre, die ausschließlich durch Strahlung getragen wird, $\mu = 0$, folgt der Zusammenhang zwischen Dichte ϱ und der Höhe x

$$\varrho = \frac{2\pi k T_0 \sigma \Delta\nu}{m g^2 c (x + x_0)^2}, \tag{164}$$

wobei T_0 die mit genügender Genauigkeit konstant angenommene Temperatur, x_0 eine Konstante bedeutet, die für die Sonne 3660 km beträgt. Die Höhe x wird von einer Schicht aus gerechnet, in welcher die Strahlung von gleichem Betrag ist wie in der Sonnenphotosphäre.

Für eine Atmosphäre, die nur teilweise durch Strahlung getragen wird, ergibt sich (äußerst kleine Werte von μ ausgeschlossen)

$$\varrho = \text{const.}\, e^{-\frac{\mu m g x}{2 k T_0}}. \tag{165}$$

Es läßt sich nunmehr eine Reihe wichtigster Folgerungen ziehen. Herrscht nur Strahlungsdruck, so nimmt die Dichte bei Erhebung um 14000 km (bis zu dieser Erstreckung wurden bei der Finsternis 1905 von *Mitchell* die H- und K-Linien beobachtet), von der Erde aus einem Gesichtswinkel von 20″ entsprechend, um $^1/_{23}$ ab; andernfalls für $\mu = 0{,}01$ um 10^{-8}, für $\mu = 0{,}1$ um 10^{-80}. Die beobachtete Erstreckung der Atmosphäre ist nicht vereinbar mit dem Exponentialgesetz, ein Beweis, daß sie ausschließlich ($\mu < 0{,}01$) durch Strahlungsdruck getragen wird.

Für $\Delta\nu$, entsprechend $\Delta\lambda = 1$ Å, sind bei $x = 0$ der Druck rund $\frac{1}{2} \cdot 10^{-12}$ Atm, die Dichte rund $3 \cdot 10^{-17}$ g/cm³ und die Zahl der Atome beträgt $4 \cdot 10^5$ pro cm³. Ihre Gesamtzahl in einer Säule von 1 cm² Querschnitt beträgt $1{,}5 \cdot 10^{14}$.

160) *E. A. Milne*, An astrophysical determination of the average life of an excited Calcium atom, London Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 354.

Eine Atmosphäre, die teilweise noch durch Gasdruck getragen wird, ist so nach ihrer Basis zusammengedrängt, daß sie weder theoretisch, noch durch Beobachtung von der umkehrenden Schicht zu unterscheiden ist. Es ergibt sich folgender Einblick. Die umkehrende Schicht gibt Anlaß zu einer Absorptionslinie von der Stärke $F'_{(\nu)}$; so lange $F'_{(\nu)} < \frac{8\nu^2\tau m g}{c}$ ist keine „Chromosphäre" möglich. Übersteigt $F'_{(\nu)}$ diesen Betrag, so werden Atome ausgeworfen und es bildet sich eine Atomschicht, welche $F'_{(\nu)}$ auf den Betrag F_ν herabdrückt; diese bildet die Chromosphäre.

Ein Stern von gleichem g wie die Sonne ist unfähig, eine Ca^+-Chromosphäre zu tragen, so lange $T_0 < 4400^0$. Für einen Riesenstern mit 100 mal kleinerem g erniedrigt sich T_0 auf 2820^0; sind diese Temperaturen die Grenztemperaturen des Strahlungsgleichgewichtes, so sind die zugehörigen effektiven Temperaturen (Nr. 47) $\sqrt[4]{2}$ mal höher und betragen 5230^0 bzw. 3360^0.

In der zweiten der angeführten Arbeiten werden einige einschränkende Bedingungen fallen gelassen; das Endergebnis bleibt im wesentlichen dasselbe. Doch sei erwähnt, daß, wenn den beiden Atomzuständen verschiedene Gewichte q_1 und q_2 beigelegt werden, Gl. (162) übergeht in

$$F_\nu = \frac{q_1}{q_2}\frac{8\nu^2\tau m g}{c} \tag{170}$$

und die Lebensdauer des Ca-Atomes von $0{,}6\cdot 10^{-8}$ auf $1{,}8\cdot 10^{-8}$ steigt.

Diese Folgerungen stehen in völligem Widerspruche zu Ergebnissen einer Untersuchung von *J. Q. Stewart*[161]), die auf Grund der klassischen Strahlungstheorie durchgeführt ist. Das Zustandekommen einer Absorptionslinie wird auf Streuung, ihre Breite auf Dopplereffekt zurückgeführt. So wird die Zahl der Na-Atome, die zur Erzeugung der D-Linien nötig sind, zu $3\cdot 10^{16}$ pro cm^3, und die Masse dieser Säule zu $1{,}1\cdot 10^{-6}$ g und ihr Gewicht auf der Sonne zu $2{,}9\cdot 10^{-2}$ Dyn. abgeschätzt. Es erweist sich 500 fach zu groß, um durch den Lichtdruck getragen werden zu können, was *Stewart* zu dem Schlusse führt, daß hier der Lichtdruck überhaupt keine Rolle spielt. Der Ausgangspunkt bei *Milne* ist, wie dargelegt, ein völlig anderer. Die Quantenbetrachtung gestattet eine Beziehung herzustellen zwischen Absorptionskraft und Lebensdauer τ eines Atomes, und letztere wird ebenso bestimmt, daß der Lichtdruck als tragende Kraft völlig ausreicht. Die völlige Übereinstimmung der so berechneten Werte τ mit

---

161) *J. Q. Stewart,* The width of absorption lines in a rarefied gas, Astroph. Journ. 59 (1924), p. 30.

bekannten Laboratoriumsergebnissen dürfte unzweideutig zugunsten der Quantenbetrachtung entscheiden.

76. Anwendung auf planetarische Nebel. Das Aussehen mancher planetarischer Nebel legt die Frage nahe: Ist es möglich, daß eine frei schwebende, einen zentral gelegenen Stern umgebende, gasförmige Kugelschale durch dessen Strahlung getragen werden kann? Nach *J. H. Jeans*[162]) ergibt sich diese Möglichkeit für den Fall, daß die Strahlung die Schwerkraft hinreichend übertrifft. In ihrer eben besprochenen Untersuchung beweisen *Fowler* und *Milne* das Gegenteil. In der frei schwebenden Schale muß der Gasdruck an den beiden Grenzflächen $= 0$ sein, um von beiden Seiten her gegen die Mitte anzusteigen; beim Durchschreiten derselben muß folglich $\frac{dp}{dx}$ das Vorzeichen wechseln. Dies ist nach Gl. (e) unmöglich, denn der Nettostrom F_ν ist konstant und $\frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{\frac{1}{2}(J_\nu + J_\nu')}{h\sigma}$ muß offenbar nach außen zu stets abnehmen. Der Gegensatz beruht darauf, daß *Jeans* lediglich das Bewegungsmoment der aufsteigenden Strahlung J, nicht aber den der Nettostrahlung $J - J'$ ansetzt. So tritt an Stelle der Gl. (e) eine Gleichung von der Form

$$\frac{dp}{dx} = (n_1 + n_2)\left(- mg + \frac{\alpha\pi J_\nu \Delta\nu}{c} e^{-\int\alpha(n_1+n_2)\,dx}\right),$$

welche einen Vorzeichenwechsel von $\frac{dp}{dx}$ zuläßt. Ohne diesen Vorzeichenwechsel muß an der inneren Begrenzung p einen endlichen Wert besitzen, d. h. die Schale muß einem Kern als Atmosphäre aufliegen. Rotation der Schale würde diesen Gegensatz noch schärfer hervortreten lassen.

77. Fühlbare Lücken der Erkenntnis. Der Gedanke *Sahas*, Ergebnisse der Atomphysik und Probleme der Astrophysik mit Hilfe des Ionisationsgleichgewichtes zu verknüpfen, hat sich in seinen und den Händen seiner Nachfolger zu einem der wertvollsten Hilfsmittel neuerer Forschung erwiesen. Es ist nun merkwürdig und bedauerlich, daß wichtige und scheinbar einfache Probleme sich bisher seiner auflösenden Kraft entzogen haben.

a) Spektroskopische Parallaxen. Durch *Adams* und *Kohlschütter*[163]) ist bekanntlich ein empirischer Zusammenhang zwischen absoluter Helligkeit und relativer Intensität einiger Funken- und Bogenlinien

162) *J. H. Jeans*, The mechanism and structure of a planetary nebula, London Roy. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 481.

163) *A. Kohlschütter*, Mount Wilson Contr. 89 (1914), sowie Astroph. Journ. 40 (1914), p. 385.

(Absorptionslinien) in erster Linie von Sr^+, Ti^+ und Zr^+ einerseits und Fe und Ca anderseits aufgedeckt worden, der die Bestimmung der Parallaxe ermöglicht. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß Temperatur- und Druckeffekte vorliegen; einer nur einigermaßen befriedigenden Fassung haben sie sich bisher entzogen. Die nächstliegenden Betrachtungen scheinen dem Drucke überwiegenden Einfluß geben zu müssen. Die Gleichgewichtsbedingung $dP = -g\varrho dr$ liefert, falls man k und g in den in Betracht kommenden Schichten konstant annimmt und eine optische Masse $d\tau = k\varrho dr$ einführt,

$$P = \frac{g}{k}\tau. \tag{a}$$

Da die Sternmassen annähernd von gleicher Größe sind, die Radien der Riesen- und Zwergsterne sich aber um Zehnerpotenzen unterscheiden können, folgt, daß in gleicher optischer Tiefe die Drucke außerodentlich verschieden sein können. *Pannekoek* in seiner bereits erwähnten Arbeit[152]) scheint der erste gewesen zu sein, der auf Grund dieser Beziehung weiter gearbeitet hat. Über vergebliche Versuche, so weiter zu kommen, möge bei *C. H. Payne*[164]) nachgelesen werden, wo auch auf ein besonderes Verhalten gerade der Sr^+-Linien aufmerksam gemacht wird. Ersetzt man den Sternradius durch die Beziehung $L = 4\pi R^2 \cdot sT_{\text{eff.}}^4$, L die ausgesandte Lichtmenge, so folgt

$$P = \frac{4\pi GM}{kL} sT_{\text{eff.}}^4 \cdot \tau. \tag{b}$$

Wird, wie die Masse, innerhalb einer Sternklasse auch $T_{\text{eff.}}$ konstant gehalten, so ergibt sich, daß in gleicher optischer Tiefe P durch die absolute Helligkeit bedingt ist (*Pannekoek*). In strengerer Betrachtung aber ist zu beachten, daß P nicht den Gasdruck p bedeutet, welchem der für die Ionisation maßgebende Elektronendruck p_e proportional ist, sondern den gesamten tragenden Druck, der sich in einem durch die Masse bedingten Verhältnis in Gasdruck p und Strahlungsdruck p_s aufteilt. Setzt man mit *Eddington* $L = 4\pi\varepsilon M$ und $\frac{\varepsilon k}{cG} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon k_p}{cG} = \frac{3}{2}(1-\beta)$ und berücksichtigt die Beziehung $p = \beta P$, so folgt unmittelbar

$$p = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{2s}{3c} T_{\text{eff.}}^4 \cdot \tau. \tag{c}$$

Beachtet man weiter, daß über der durch den effektiven Wert von p ausgezeichneten Schicht die optische Masse 1 liegt, so ergibt sich wieder die Gl. (144b) der Nr. **63**

$$p_{\text{eff.}} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{2s}{3c} T_{\text{eff.}}^4 \tag{d}$$

164) *C. H. Payne,* Stellar Atmospheres, Cambridge 1925, Chap. 10.

Würden die Absorptionslinien in der Gegend dieser Schicht erzeugt werden, so sind die für die Ionisation maßgebenden Drucke und Temperaturen durch β bestimmt und an die Masse geknüpft, die durch die *Eddington*sche Beziehung (149) die absolute Helligkeit bedingt.

Versuche, auf diesem Wege weiter zu kommen, scheinen nicht vorzuliegen. Auf andere, wahrscheinlich rationellere Weise haben *Fowler* und *Milne* in ihren in Nr. 74 besprochenen Untersuchungen[154]) das Problem Riese—Zwerg gestreift. Für zwei Sterne gleicher Spektralklasse, also gleicher maximaler Ionisation, ergibt sich in Annäherung

$$\text{(e)} \qquad \frac{T_1^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT_1}}}{p_1} = \frac{T_2^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT_2}}}{p_2}.$$

In der optischen Tiefe 1 sind T die effektiven Temperaturen. Setzt man für den Zwergstern, die Sonne, $T_2 = 6000^0$, so ergibt sich für den Riesen, die Capella, da $\frac{p_2}{p_1} = \frac{g_2}{g_1} = 40{,}7$, unter Annahme eines Ionisationspotentiales $\chi = 8$ Volt, die effektive Temperatur $T_1 = 5000^0$. Nach *Eddington* ist $T_1 = 5200^0$, der Farbenindex liefert $T_2 - T_1 = 470^0$ für Klasse $G\,0$. Obwohl diese Übereinstimmung durch ein geeignetes χ bedingt ist, folgt doch stets, den Beobachtungen entsprechend, daß die Riesen kälter sind wie die Zwerge gleicher Klasse. Die gleiche Folgerung läßt sich aus Gl. (d) ablesen.

b) *Kontinuierliches Spektrum.* Die Atomphysik liefert die Erklärung für ein kontinuierliches Spektrum, welches sich an das Linienspektrum anschließt. Die Sterne in ihrer überwiegenden Mehrzahl aber liefern ein Spektrum, das sich, abgesehen von den Absorptionslinien, nicht nur über alle Wellenlängen erstreckt, sondern mit außerordentlicher Genauigkeit die Intensitätsverteilung schwarzer Strahlung aufweist. Kleinere Abweichungen dürften auf sekundäre Ursachen zurückzuführen sein. Der Umstand, daß schwarze Hohlraumstrahlung an Isothermie gebunden ist, in Sternen aber Temperaturgradienten auftreten, dürfte nicht schwer ins Gewicht fallen bei der starken Absorption, welche die einfallenden Lichtquanten auf verhältnismäßig kurzer Strecke absorbieren und durch neue ersetzen läßt. Versuche, in mehr oder minder unklarer Weise mit dem *Kirchhoff*schen Gesetze zu operieren, können nicht befriedigen angesichts unseres klaren Einblickes in den Absorptions- und Strahlungsmechanismus angeregter Gase. Erklärungsversuche auf dieser Unterlage scheinen nicht vorzuliegen; sie dürften auch außerordentliche Schwierigkeiten bieten, da alle in Betracht kommenden Quantenzustände doch nur eine diskontinuierliche Reihe bilden, so daß mit einem Hin- und Herwerfen von Lichtquanten nicht durchzukommen ist. Angesichts dieser Sachlage muß schon das Zustandekommen des kontinuierlichen Sonnenspektrums als ungelöstes Rätsel registriert werden.

c) Emissionslinien. Das Auftreten heller Linien in manchen Nebelspektren, sowie in dem *Flash*spektrum der Sonne bedarf keiner näheren Erklärung. Allein das Zustandekommen heller Linien auf kontinuierlichem Untergrunde ist bisher unerklärt, wie das Zustandekommen des Untergrundes selbst. Ein Erklärungsversuch ist von *A. Schuster*[165]) gegeben. Von einem Stern mit Absorptionslinien kommt das Licht des kontinuierlichen Untergrundes mit Ausnahme in diesen Linien beinahe ungeschwächt zu uns, so daß das Licht der Chromosphäre nicht wahrgenommen werden kann. Umgekehrt wird in Sternen mit Emissionslinien die Strahlung der Photosphäre durch Streuung so stark abgeschwächt, daß sie durch diese Abschwächung in der umkehrenden Schicht nicht gegen die Strahlung der Chromosphäre aufkommen kann. Doch hat *M. C. Johnson*[166]) gezeigt, daß das Verhältnis der anzusetzenden Werte von Streuung und Absorption nicht hinreicht, um das *Schuster*sche Kriterium zu erfüllen. Solche und andere Deutungsversuche werden dadurch erschwert, daß die Selbstumkehr der Wasserstofflinien und die doppelte Selbstumkehr der H- und K-Linien des Ca^+ auf der Sonne vermutlich in die gleiche Klasse von Erscheinungen gehören. Dabei ist zu beachten, daß Linienumkehr hauptsächlich die späteren Stadien der Zwergsterne, einfache helle Linien aber Sterne auszeichnen, die am anderen Ende der Reihe stehen.

In diese, sowie andere Rätsel der Fixsternphysik dürfte die fortschreitende Entwicklung der Atomphysik Klarheit bringen. Doch ist stets zu beachten, daß wir im Laboratorium bei verhältnismäßig tiefen Temperaturen in endlichem Gesichtswinkel dicht gedrängte Atome vor uns haben, bei Betrachtung der ungleich höher temperierten Sterne in Anbetracht ihrer riesigen Abmessungen und Entfernungen sich trotz außerordentlicher Verdünnung eine ungeheure Zahl große, freie Wegstrecken zurücklegender Atome auf kleinsten Gesichtswinkel zusammendrängen.

---

165) *A. Schuster,* Radiation through a foggy atmosphere, Astroph. Journ. 21 (1905), p. 1.

166) *M. C. Johnson,* Scattering and absorption in the atmospheres of emissions line-stars, London Astr. Soc. Month. Not. 85 (1924), p. 56.

(Abgeschlossen Ende 1925.)

VI 2, 25. DIE SPEKTRALANALYSE DER GESTIRNE.

VON

ADOLF HNATEK

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

H. Ludendorff, G. Eberhard und *A. Kohlschütter,* Handbuch der Astrophysik. 6 Bände, ab 1928 im Erscheinen begriffen bei J. Springer, Berlin.

K. Graff, Grundriß der Astrophysik. Leipzig 1928, B. G. Teubner.

C. H. Payne, Stellar atmospheres. A contribution to the observational study of high temperature in the reversing layer of stars. Published by the observatory Cambridge, Mass. 1925.

A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 3. Aufl. 1922, 4. Aufl. 1924.

O. D. Chwolson, Die Physik 1914—1926. Braunschweig 1927, Fr. Vieweg & Sohn.

H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. 6 Bände, Leipzig 1900—1912, S. Hirzel.

Zeitschriften:

Astronomische Nachrichten, Kiel.

Zeitschrift für Physik, Braunschweig.

Physikalische Zeitschrift, Leipzig.

Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie, Leipzig.

Monthly notices of the Royal astronomical Society London.

The Astrophysikal Journal, University of Chicago Press.

Publications of the astronomical Society of the Pacific San Francisco (Cal.).

Popular Astronomy, published by Goodsell observatory of Carleton College, Northfield (Minn.).

I. Einleitung.

1. Geschichtlicher Überblick. Wenn auch *J. Fraunhofer* die nach ihm benannten Absorptionslinien des Sonnenspektrums schon zu Beginn des vorigen Jahrhunderts genauer studiert hat, so gab es doch damals noch keine Spektralanalyse im späteren Sinn, da man ja zu dieser Zeit von der Bedeutung dieser Linien und ihrem Ursprung noch nichts wußte. Erst im Jahre 1859 fand *G. Kirchhoff* die Erklärung, als er beobachtete, wie im Spektrum einer mit Natrium beschickten Bunsenflamme an derselben Stelle zwei helle gelbe Linien auftraten, wo sich im Sonnenspektrum das Paar dunkler Linien D_1 und D_2 zeigt. *Kirchhoff* konnte so den Satz aussprechen, daß glühende Gase für sich allein ein aus hellen Linien bestehendes Spektrum aussenden, aus dem durch sie hindurchgehenden kontinuierlichen Licht eines glühenden festen Körpers aber an den gleichen Wellenlängen alles Licht absorbieren und dadurch dunkle Absorptionslinien erscheinen lassen. *Kirchhoffs* damalige Vorstellungen über den Aufbau des Sonnenkörpers illustrieren klar dieses Anfangsstudium spektralanalytischer Forschung: Die Sonne sei offenbar ein glühender fester oder flüssiger Körper, der für sich helles kontinuierliches Licht ausstrahlt, gleichzeitig aber von einer Atmosphäre glühender Gase und Dämpfe umgeben ist, deren Bestandteile in das kontinuierliche Spektrum des Kern die dunklen *Fraunhofer*schen Linien einzeichnen und durch diese nachgewiesen werden können. Schon zwei Jahre später konnte *Kirchhoff* eine Anzahl chemischer Elemente angeben, deren Linien er im Sonnenspektrum hatte identifizieren können. Mancherlei Wandlungen haben diese ersten Vorstellungen, insbesondere über die Entstehung des kontinuierlichen Spektrums bei Sonne und Fixsternen, im Laufe der Zeit erfahren, der Grundgedanke jedoch, wie er von *Kirchhoff* bezüglich des Zusammenhanges von Emission und Absorption ausgesprochen worden ist, blieb unverändert.

Bis zu *Kirchhoffs* Zeit war die Astronomie fast ausschließlich Astrometrie. Ortsbestimmungen der Gestirne und deren Verwertung zur Ermittlung der Bahnen der Himmelskörper im Weltraum bildeten die Hauptaufgaben der Sternwarten. Lediglich die Helligkeiten der Sterne und das Studium der Sonnenflecken und der Oberflächengestaltung der Planeten hatten die Astronomen bis dahin noch nebenher beschäftigt. *Kirchhoffs* Entdeckung gab ihnen nun das Spektroskop in die Hand und lehrte sie zunächst, aus den Spektren der Sterne deren chemische Zusammensetzung herauszulesen. Damit hatte die Astrophysik als ein neuer Teil der Astronomie ihren Anfang genommen, und sie trat nun der Astrometrie als gleichberechtigte Schwester zur Seite. Das in Verbindung mit den Refraktoren der Sternwarten benutzte Spektroskop, das nach Entdeckung der Trockenplatte durch den noch weit leistungsfähigeren Spektrographen ersetzt werden konnte, führte bald zu einer Fülle von Entdeckungen, die, in der Folgezeit bis heute immer weiter ausgebaut und ergänzt, schließlich in Verbindung mit photometrischen Studien und gestützt durch die gegen Ende des vorigen Jahrhunderts aufgefundenen Gesetze der Strahlung unsere Vorstellungen über den Aufbau und über die Entstehung und Entwicklung der Sterne ganz wesentlich vertieft haben. Ein Riesenmaterial an Beobachtungstatsachen sowie an theoretischen Untersuchungen ist seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts zusammengetragen worden, und wenn hier nur nebenbei erwähnt wird, daß in den letzten dreißig Jahren allein weit über zweitausend Arbeiten publiziert worden sind, die sich mit spektralanalytischen Untersuchungen an Gestirnen befassen, so wird selbstverständlich, daß im Rahmen des vorliegenden Artikels so manches übergangen werden mußte, was im Gesamtbild vorläufig noch nicht zu erhöhter Bedeutung gelangt ist.

2. Die Aufnahme zur Vermessung geeigneter Spektren. Mit Rücksicht darauf, daß die Beobachtungen der stellaren Spektren zuerst visuell, dann aber nach Einführung der Trockenplatte fast ausschließlich photographisch erfolgten, haben Form und Einrichtung der solchen Beobachtungen dienenden Apparate im Laufe der Zeit starke Veränderungen erlitten.

Wegen der geringen Helligkeit des Lichtes der Sterne kommen für astrophysikalische Zwecke fast durchweg nur Prismenapparate mit 1—3 Prismen zur Verwendung. Der Apparat wird dabei am Okularende des Refraktors oder Spiegelteleskops in der Weise befestigt, daß das fokale Bild des Sterns auf dem Spalt des Spektralapparates entworfen wird. Trotz der starken lichtsammelnden Kraft großer Fernrohre sind bei schwächeren Objekten aber doch nicht selten Expositionszeiten von mehreren Stunden Dauer nötig, um brauchbare Spektrogramme zu erhalten. Da die Prismen an der Basis des größeren Glasweges immer ziemlich viel Licht absorbieren, soll es nach *J. Hartmann*[1]) vorteilhaft sein, das Prisma oder die Prismen mit der Basis etwas aus dem Strahlengang herauszuziehen. Eine kleine Kürzung der Expositionszeit soll dadurch selbst dann noch ermöglicht werden, wenn dabei auch ein kleiner Teil des Strahlenbündels an der brechenden Kante ungenützt vorüberstreicht. Infolge der langen

1) Ztschr. f. Instr. 20 (1900), p. 17 u. 47.

Expositionszeiten verändert der mit dem Fernrohr dem Stern nachzuführende Spektrograph während der Aufnahme seine Stellung gegenüber dem Horizont oft recht beträchtlich. Zur Vermeidung schädlicher Biegungen muß der Apparat also stets möglichst massiv gehalten und tunlichst in einem Gußstück ausgeführt werden. Temperaturänderungen auch nur geringfügiger Art verändern nicht nur Brechung und Dispersion der Prismen und damit Lage und Ausdehnung des Spektrums auf der Platte, sondern wegen ungleichmäßiger Ausdehnung der einzelnen Teile des Apparates auch noch die Plattenstellung selbst. Jeder Apparat muß also mit einer, am besten elektrischen Heizvorrichtung ausgestattet sein, die es ermöglicht, seine Temperatur, die des Abends ja in der Regel abfallen will, während der Aufnahme bis auf einige Hundertstel eines Grades auf gleicher Höhe zu erhalten. Einrichtungen hierzu, bei denen die Heizung von Hand aus oder automatisch reguliert wird, sind von *J. Hartmann*[2]) und *M. Hamy*[3]) genauer beschrieben worden. Mit Rücksicht auf die bei Aufnahmen mit Prismen immer nur geringe Ausdehnung des Spektrums ist der Wahl der Optik für Kamera und Kollimator behufs Erzielung bester Bildschärfe besonderes Augenmerk zuzuwenden. Die Krümmung der spektralen Bildfläche, die sich übrigens, wie *K. Schwarzschild*[4]) und wieder *J. Hartmann*[5]) theoretisch gezeigt haben, durch Verwendung besonderer Typen für das Kameraobjektiv ganz bedeutend verflachen läßt, gestattet natürlich nie, das Spektrum über einen größeren Wellenlängenbereich oder gar über seine ganze Ausdehnung hin gleichzeitig scharf zu erhalten. Filmstreifen, deren Verwendung *J. N. Lockyer*[6]) angeraten hat, da sie sich der Krümmung der Bildfläche anschmiegen lassen, sind wegen der Unsicherheit der Vermessung nur selten benutzt worden.

Die Spaltbreite darf keineswegs zu groß gewählt werden und soll stets kleiner sein als der Durchmesser des fokalen Sternscheibchens. *J. S. Plaskett*[7]) fand, daß zu große Spaltbreiten, insbesondere bei kürzeren Expositionszeiten, leicht Verfälschungen der Wellenlängen eintreten lassen können, wenn der Stern einmal längere Zeit an einer Spaltbacke hängen bleibt. Da jede Spektrallinie nichts anderes ist als ein durch Kollimator- und Kameraobjektiv erzeugtes monochromatisches

2) Ztschr. f. Instr. 21 (1901), p. 213; Astroph. Journ. 15 (1901), p. 172; Sirius 35 (1902), p. 183.

3) Paris C. R. 154 (1912), p. 1128.

4) Berlin Ber. 1912, p. 1220.

5) Ztschr. f. Instr. 24 (1904), p. 257.

6) The Observatory 22 (1899), p. 244.

7) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 259.

Bild des Spaltes, hat eine Vergrößerung der Spaltbreite durch gleichzeitige Vergrößerung der Linienbreite auch eine Beeinträchtigung der Meßgenauigkeit zur Folge. Haben die Objektive von Kollimator und Kamera ungefähr gleiche Brennweite, so sind Spaltbreiten von 0,03 mm bis 0,05 mm astrophysikalisch am vorteilhaftesten. Noch geringere Spaltbreiten bringen keinen weiteren Gewinn an Linienschärfe, und bei Breiten unter 0,015 mm treten nach *J. H. Moore*[8]) Beugungserscheinungen auf, die eine unverhältnismäßige Steigerung der Expositionszeit zur Folge haben.

Das auf dem Spalt stehende punktförmige Sternbildchen gibt natürlich nur ein fadenförmiges Spektrum, in dem Linien nur schwer erkennbar und meßbar wären. Man pflegt daher das Spektrum bei der Aufnahme stets etwas zu verbreitern. Zumeist korrigiert man zu diesem Zweck das Triebwerk des Fernrohrs so, daß es gegen Sternzeit ein wenig vor- oder nachgeht. Der Stern bewegt sich dann langsam längs des Spaltes weiter und sein Licht bestreicht, wenn er nach kürzerer oder längerer Zeit in seine Ausgangsstellung zurückgebracht wird, dann auf dem Spalt immer wieder dieselbe kürzere oder längere Spaltstrecke. Auch ein leichtes Hin- und Herführen des ganzen Spektrographen in der Richtung des Spaltes vor dem ruhig stehenden Sternbildchen, wie es beim Wiener Coudéspektrographen bei der eigenartigen Konstruktion dieses Instrumentes möglich geworden ist, hat sich bewährt.[9])

Um die Wellenlängen der Linien des Sternspektrums ermitteln zu können, muß auf jeder Aufnahme eines stellaren Spektrums auch ein Vergleichsspektrum aus bekannten Linien vorhanden sein. Bei der Aufnahme des letzteren, die mit Rücksicht auf mögliche Temperaturänderungen während der Exposition des Sternspektrums am besten in zwei Teilaufnahmen vor und nach der Beobachtung zerlegt wird, muß der Spalt durch eine Blende so abgedeckt werden, daß die Linien des Vergleichsspektrums nicht durch das Sternspektrum hindurchlaufen können, das letztere also nur beiderseits von den Vergleichslinien flankiert wird. Der Krümmung des Spaltbildes wegen erscheinen aber diese beiderseitigen Vergleichslinien gegenüber den Linien des Sternspektrums stets ein wenig gegen Violett verschoben, worauf bei der Auswertung der Messungen entsprechend Rücksicht zu nehmen ist.

---

8) Astroph. Journ. 20 (1904), p. 285.

9) *A. Hnatek*, Untersuchungen über das Rothschild-Coudé und den Coudéspektrographen der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, Ann. d. Univ.-Sternw. in Wien Bd. 25 (1913), Nr. 1 und *A. Hnatek,* Der Wiener Coudéspektrograph, Ztschr. f. Instr. 34 (1914), p. 65.

3. Die Ausmessung der Sternspektren und die Ermittlung der Wellenlängen. *H. C. Vogel*[10]) nahm die Ausmessung der Spektren nach der Koinzidenzmethode vor, bei der ein mit demselben Apparat aufgenommenes Sonnenspektrum unter dem Mikroskop mit dem Sternspektrum zusammengelegt und gleichzeitig mit gemessen wurde. Die Ermittlung der Wellenlängen der Sternlinien konnte dann durch Anschluß an die Linien des Sonnenspektrums erfolgen unter Verwendung des Vergleichsspektrums als Zwischenglied. Für Messungen nach dieser Methode ist der von *J. Hartmann*[11]) konstruierte Spektrokomparator von Vorteil, in dem die beiden Spektren von Sonne und Stern durch zwei Mikroskope mit gemeinsamem Okular gleichzeitig beobachtet und vermessen werden können. Später kam man von der Koinzidenzmethode ab und zog es vor, in jedem Spektrum die Linien des Sterns und der Vergleichslichtquelle der Reihe nach, und zwar zur Ausschaltung persönlicher Einstellfehler immer zweimal in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen der Platte, durchzumessen, und dann zunächst die Messungen am Vergleichsspektrum zur Ermittlung der Konstanten irgendeiner Dispersionsformel zu benutzen, mit der dann aus den Schraubenablesungen für die Linien des Sternspektrums deren Wellenlängen berechnet werden konnten. Der Rechnungsvorgang kann natürlich, wie z. B. *F. Henroteau*[12]) gezeigt hat, auch durch graphische Verfahren ersetzt werden. Für die rechnerische Auswertung empfiehlt sich besonders die Verwendung einer von *A. Cornu*[13]) gegebenen und von *J. Hartmann*[14]) erweiterten Dispersionsformel

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{c}{s - s_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man zunächst $\alpha = 1$, so geben schon die Schraubenablesungen s für nur drei Linien provisorische Werte für die Formelkonstanten λ_0, s_0, c. Reduziert man die Formel auf s, so gibt die Differentiation

$$ds = ds_0 + \frac{dc}{\lambda - \lambda_0} + \frac{c\,d\lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^2}.$$

Faßt man ds als den Fehler in der Darstellung einer Linie durch die provisorische Formel auf, so sind die ds_0, $d\lambda_0$ und dc die an die provisorischen Werte anzubringenden Korrektionen, die aus Messungen

10) Astr. Nachr. 121 (1889), p. 241.

11) Publ. d. astroph. Obs. Potsdam 18 (1906), Nr. 53; Astroph. Journ. 24 (1906), p. 285; Ztschr. f. Instr. 26 (1906), p. 205.

12) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 77 (1916), p. 77.

13) II. Ann. Éc. Norm. (2. Ser.) 9 (1880), p. 21.

14) Potsdam Publ. astroph. Obs. 12 (1898), Anhang.

an vielen Linien nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.[15]) Die Ermittlung von α nimmt man aber am besten versuchsweise vor, indem man die mit verschiedenen α-Werten erzielbaren Darstellungen miteinander vergleicht.

Da die λ_0, s_0, c vom Anfangspunkt der Zählung der s im Spektrum abhängen, orientiert man die Platte bei der Messung stets so, daß eine bestimmte Linie des Vergleichspektrums eine bestimmte s-Lesung an der Meßschraube ergibt. Man kann dann mit der einmal berechneten Formel alle weiteren Spektren auswerten. Die Parameter s_0, λ_0, c und α variieren übrigens in geringem Maße mit der Temperatur, die während der Aufnahme im Spektrographen geherrscht hat. Daher müssen stets mehrere für verschiedene Temperaturen gültige Formeln aufgestellt werden. Nach *F. Schlesinger*[16]) ist der Gang mit der Temperatur ziemlich linear.

Einen einfachen und übersichtlichen Arbeitsvorgang haben sich *G. Eberhard* und *H. Ludendorff*[17]) zurechtgelegt. Sie ermitteln die Formelkonstanten für eine Reihe ziemlich äquidistanter Temperaturen, tabulieren die λ für die einzelnen Formeln nach s und stellen dazu noch die s-Werte für markante Linien des Vergleichspektrums für die einzelnen Temperaturen als „Referenzspektren" zusammen. Für Zwischentemperaturen können dann die Differenzen der Schraubenlesungen, die gegen das in der Temperatur am nächsten kommende Referenzspektrum auftreten, leicht graphisch ausgeglichen und zur Ermittlung von Korrektionen benutzt werden, die an die Messungen der Sternlinien angebracht werden müssen, um sie auf die für die untergelegte Temperatur geltende Wellenlängentabelle zurück zu beziehen.

Die von *F. Exner* und *E. Haschek*[18]) zur Vermessung von Gitterspektren verwendete „Projektionsmethode" — das Spektrum wird dabei mit Hilfe eines Projektionsapparates auf eine an der Wand befindliche Meßskala projiziert — wurde später von *E. Haschek* und *K. Kostersitz*[19]) auch zur Ausmessung von Sternspektrogrammen verwendet, hat aber weiterhin keine Nachahmer gefunden. Nach *A. Hnatek*[20]) ist die bei dieser Methode erzielbare Genauigkeit bei Spektren mit zahlreichen kräftigen Linien etwa von derselben Ordnung wie bei

15) Siehe *F. J. M. Stratton,* London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 663.

16) Publ. Allegheny-Obs. 1 (1907), Nr. 2, p. 9.

17) Astr. Nachr. 182 (1908), p. 361.

18) Wien Sitzber. 1895, p. 913.

19) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 262; Ludw. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, p. 497.

20) Astr. Nachr. 197 (1914), p. 303.

der Messung unter dem Mikroskop, sie versagt jedoch, wenn es sich, wie bei den Spektren der Sterne früheren Typs, um feine und zarte Linien handelt.

Aufnahmen mit dem Objektivprisma sind wegen des durch den Wegfall des Spaltes bewirkten Gewinns an Licht wohl überall dort angebracht, wo es sich nur um das Studium des Aussehens und Verhaltens der Linien oder des Chemismus handelt, für exakte Bestimmungen von Wellenlängen eignen sie sich nicht. Versuche von *E. C. Pickering*[21]), die Schwierigkeiten in der Beibringung eines Vergleichspektrums zur stellaren Aufnahme dadurch zu umgehen, daß die Sternspektren durch Vorschaltung eines Neodymchloridfilters mit den allerdings ziemlich schmalen Absorptionsstreifen des Neodyms versehen wurden, haben sich in der Praxis ebensowenig bewährt wie eine andere von *E. C. Pickering*[22]), *K. Schwarzschild*[23]) und *F. Schlesinger*[24]) vorgeschlagene Methode, bei der zwecks Wellenlängenbestimmung auf derselben Platte und mit dem gleichen Instrument zwei Aufnahmen des Spektrums unter um 180° verschiedenen Stellungen des Objektivprismas kombiniert werden.

Die genaue Kenntnis der Wellenlängen der Linien des Vergleichspektrums — man benutzt hierzu jetzt zumeist den Fe- oder Ti-Bogen — ist von wesentlicher Bedeutung für die Genauigkeit der Wellenlängen im Sternspektrum. Die älteren Messungen an den Funken- und Bogenspektren der Elemente finden sich vollständig zusammengestellt in *H. Kaysers* Handbuch der Spektroskopie, kranken aber durchweg an dem Fehler, daß ihnen kein einheitliches System von Wellenlängennormalen zugrunde liegt. Man beschloß daher zunächst[25]), als Grundlage für die Wellenlängenbestimmung in Sternspektren die Messungen am Sonnenspektrum zu verwenden, die von *H. Rowland* gemeinsam mit *Jewell* im Sonnenspektrum ausgeführt und in der „Preliminary table of solar spectrum wave lengths“[26]) publiziert worden sind. Dieser „Preliminary table“ wurden von *H. Rowland*[27]) Wellenlängenstandards untergelegt, die er aus Messungen der D_1-Linie des Na von *Ångström* und *Thalén*, *Müller* und *Kempf*, *Kurlbaum*, *Peirce*,

21) Harvard Obs. Circ. 154 (1910); Astroph. Journ. 31 (1910), p. 372.

22) Astroph. Journ. 23 (1905), p. 255.

23) Potsdam Publ. astroph. Obs. 23 (1913), Nr. 69; Astr. Nachr. 194 (1913), p. 241.

24) Publ. Astr. Soc. Pac. 25 (1913), p. 295.

25) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 1.

26) Astroph. Journ. 1—5 (1895—1897).

27) Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 36, 49, Astronomy and Astrophysics 12 (1893), p. 321.

Bell gebildet hatte. Spätere Kontrollmessungen von *A. Perot* und *C. Fabry*[28]) und Untersuchungen von *J. Hartmann*[29]) zeigten aber, daß auch das Wellenlängensystem der „Preliminary table" nicht einheitlich und stellenweise mit systematischen Fehlern bis zu $\pm$ 0,02 Å.E. behaftet sei. *H. Kayser*[30]) forderte daher schon im Jahre 1904 eine Neuvermessung des Sonnenspektrums und die Aufstellung internationaler Wellenlängenstandards, und schon im nächsten Jahre wurde auf der Versammlung der „Union for cooperation in solar research" zu Meudon beschlossen, den von *Benoit, Fabry* und *Perot* aus Interferometermessungen folgenden Wellenlängenwert von 6438,4696 Å.E.[31]) für die rote Cd-Linie als Hauptstandard anzunehmen.[32]) Weiteres sollten durch interoferometrische Messungen in Abständen von etwa 50 Å.E. Normalen 2. Ordnung aus dem Bogenspektrum des Eisens bestimmt werden, an die dann durch Gittermessungen Normalen 3. Ordnung anzuschließen waren. Solche Fe-Standards 2. Ordnung im internationalen System als Grundlage für weitere Bestimmungen sind u. a. von *H. Kayser*, *Ch. Fabry* und *J. S. Ames*[33]) publiziert worden, die bei zahlreichen Arbeiten über Normalen 3. Ordnung und bei Vermessungen der Spektren anderer Elemente, die in der Ztschr. f. wiss. Phot., im Astroph. Journ. und in anderen physikalischen Zeitschriften veröffentlicht worden sind, als Grundlage gedient haben. Gelegentlich solcher Messungen am Fe-Bogen bemerkte *F. Goos*[34]), daß die vom Wellenlängenkomitee der „Union" erlassene Vorschrift, der Bogen müsse unter 5—10 Amp. brennen, auch noch nicht ausreiche, da sich systematische Unterschiede zeigten, die von der Länge des Bogens abhängig waren. Er empfahl, nur die Mitte eines zwischen 6 mm starken Eisenstäben bei 5 mm Kuppendistanz der Elektroden und 4 Amp. Stromstärke gebildeten Bogens zur Erzeugung des Spektrums zu verwenden. Mit den gegebenen internationalen Wellenlängenstandards lassen sich natürlich auch die systematischen Fehler des *Rowland*schen Systems in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge genauer untersuchen. Korrektionstafeln, mit Hilfe derer die *Rowland*schen Angaben in der „Preliminary table" wenigstens im Mittel auf das internationale System redu-

---

28) Paris C. R. 133 (1901), p. 153.

29) Phys. Ztschr. 10 (1901), p. 121; Ztschr. f. wiss. Phot. 1 (1903), p. 215.

30) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 157; Astroph. Journ. 20 (1904), p. 327.

31) Dieser Wert stimmt mit dem von *M. Michelson* im Bureau des poids et mesures in Paris abgeleiteten Betrag von 6438,4700 Å.E. vorzüglich überein.

32) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 119.

33) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 215 und 33 (1910), p. 85.

34) Ztschr. f. wiss. Phot. 12 (1913), p. 259.

ziert werden können, sind von *H. Kayser*[35]) und *J. Hartmann*[36]) gegeben worden.[37]) Die Neuvermessungen des Sonnenspektrums sollen in Nr. **10**: „Das mittlere Sonnenspektrum", besprochen werden.

II. Die theoretischen Grundlagen.

4. Die Strahlungsgesetze. a) *Der Kirchhoffsche Satz.* Die Wandungen eines Hohlraumes sollen überall die absolute Temperatur T besitzen und in diesen Hohlraum nach allen Richtungen pro Flächenelement schwarze Strahlung im Betrage E aussenden. Irgendein Flächenelement der Hohlraumwandung werde nun durch eine ebenso große Fläche von gleicher Temperatur T ersetzt, die derart spiegelt, daß ihr das Emissionsvermögen e und das Absorptionsvermögen a zukommen. Von der aus irgendeiner Richtung auf dieses Flächenelement auftreffenden schwarzen Strahlung E wird also der Betrag $E - aE$ reflektiert werden. Da das spiegelnde Flächenelement aber für sich selbst mit dem Betrag e nach allen Richtungen strahlt, so wird von ihr in der Richtung der reflektierten Energie der Gesamtbetrag $e + E - aE$ abwandern. Herrscht nun im Inneren des Hohlraumes Strahlungsgleichgewicht, so muß dieser in der Richtung der reflektierten Strahlung abgehende Energiebetrag aber gleich sein dem in entgegengesetzter Richtung auftreffenden Betrag E. Es folgt somit $e + E - aE = E$, oder mit

$$\frac{e}{a} = E \tag{1}$$

der *Kirchhoff*sche Satz[38]): *Das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen eines Körpers und seinem Absorptionsvermögen ist für alle Körper konstant und gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers.*

b) *Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz.* Im Jahre 1879 fand *J. Stefan*[39]) auf experimentellem Wege, daß zwischen absoluter Temperatur und Gesamtstrahlung die Beziehung

$$E = \sigma(T^4 - T_0^4) \tag{2}$$

bestehe, in der T und T_0 die absoluten Temperaturen des strahlenden

---

35) Handbuch der Spektroskopie Bd. 6 (1912), p. 890.

36) Göttingen, Mitt. sächs. Ges. d. Wiss. 19 (1916).

37) Nach Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 256, Nat. acad. Washington Proc. 13 (1927), p. 678 und Mt. Wilson Solar Obs. Communications 101 (1927) ist eine Revision der „Prelim. table" in letzter Zeit neuerlich von *Ch. E. St. John* durchgeführt worden.

38) *G. Kirchhoff,* Ges. Abh. 1882, p. 574. Die hier gegebene Darstellung rührt von *E. Pringsheim,* Verh. deutsch. phys. Ges. 1901, p. 81, her.

39) Wien Sitzber. 79B (1879), 2. Abt., p. 391.

bzw. absorbierenden Körpers bedeuten und E den Betrag an Strahlungsenergie vorstellt, der vom ersteren auf den letzteren übergeht. Auf Grund der Betrachtung eines *Carnot*schen Kreisprozesses gelang *L. Boltzmann*[40]) bald danach folgender Beweis des *Stefan*schen Satzes:

Man denke sich einen innen vollkommen spiegelnden Hohlzylinder vom Querschnitt 1 und der Höhe h, der auf der einen Seite durch einen verschiebbaren Stempel abgeschlossen und gleichmäßig mit Energie von der Dichte u erfüllt ist. Der gesamte Energieinhalt des Hohlraumes beträgt also hu. Wir führen nun eine kleine Wärmemenge dQ zu, so daß sich dabei der Energieinhalt um den Betrag $d(hu)$ vergrößert. Tritt dabei auch eine Verschiebung des Stempels ein, so wird auch äußere Arbeit geleistet, und nach dem 1. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie besteht die Beziehung

$$dQ = d(hu) + p\,dh, \tag{3}$$

in der der Druck der Hohlraumstrahlung p nach der *Maxwell*schen Theorie gegeben ist durch $p = \frac{u}{3}$. Führt man durch $u = \varphi(T)$ u als Funktion der absoluten Temperatur ein, so erhält man aus (3)

$$dQ = h\,du + \tfrac{4}{3}u\,dh = h\varphi'(T)\,dT + \tfrac{4}{3}\varphi(T)\,dh. \tag{4}$$

Setzen wir aus isothermen und adiabatischen Zustandsänderungen nun einen geschlossenen Kreisprozeß zusammen, so folgt mit (4) nach dem Entropiesatz

$$\frac{dQ}{T} = \frac{h\varphi'(T)}{T}\,dT + \frac{4}{3}\,\frac{\varphi(T)}{T}\,dh = 0. \tag{5}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung (5) ist aber nur dann ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{h\varphi'(T)}{T}\right) = \frac{4}{3}\,\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\varphi(T)}{T}\right),$$

oder

$$\frac{\varphi'(T)}{T} = \frac{4}{3}\,\frac{\varphi'(T)}{T} - \frac{4}{3}\,\frac{\varphi(T)}{T^2}$$

ist. Daraus folgt aber sofort

$$l\varphi(T) = 4lT + la \qquad \text{oder}$$

$$\varphi(T) = u = aT^4, \tag{6}$$

eine Gleichung, die deswegen, weil das Emissionsvermögen E der Energiedichte u proportional ist, mit dem *Stefan*schen Gesetz identisch ist. *Also ist das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional.*

40) Wied. Ann. 22 (1884), p. 291.

c) *Die spektral zerlegte Strahlung.* Auf einen in einem Hohlraum befindlichen Spiegel S_1 (siehe Fig. 1), der sich mit der Geschwindigkeit v pro Sekunde nach S_2 bewegt, treffe am Anfang der ersten Sekunde eine monochromatische Welle $P_1 P_2$ von zwischen ν und $\nu + d\nu$ gelegenen Schwingungszahlen in O_1 auf. Am Ende der ersten Sekunde erreichen den nun bei S_2 befindlichen Spiegel in O_2 Wellen, die vor einer Sekunde noch um die Lichtgeschwindigkeit $c = O_2 P_2$ entfernt waren, und es ist

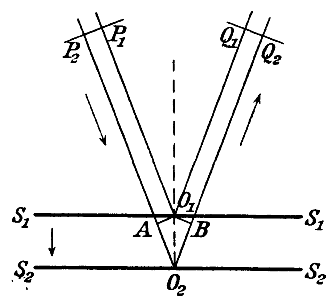

Fig. 1.

$$O_1 P_1 = O_2 P_2 - A O_2 = c - v \cos i,$$

wenn i den Einfallswinkel bezeichnet. Der bewegte Spiegel empfängt nun pro Sekunde nicht die auf $O_2 P_2 = c$ liegenden ν Wellen, sondern lediglich die Zahl ν_0 der auf $O_1 P_1$ befindlichen Wellenzüge. Da aber auf $A O_2 = v \cos i$ eine Anzahl von $\nu \frac{v}{c} \cos i$ Wellen vorhanden ist, so besteht die weitere Beziehung

$$\nu_0 = \nu - \nu \frac{v}{c} \cos i, \tag{7}$$

aus der sich sofort ergibt

$$\nu = \frac{\nu_0 c}{c - v \cos i}. \tag{8}$$

Dieser auf den Spiegel fallende Wellenzug von der Schwingungszahl ν_0 wird nun gegen Q reflektiert und erreicht mit seiner ersten Welle am Ende der ersten Sekunde die Wellenfläche $Q_1 Q_2$, während gleichzeitig die letzte der ν_0 Wellen O_2 eben verläßt. Man hat wieder

$$O_2 Q_2 = O_1 Q_1 + O_2 B = c + v \cos i',$$

wenn i' den Reflexionswinkel bedeutet.

Zwischen der Zahl ν_0 der Wellen auf $O_2 Q_2$ und der Zahl ν' der Wellen auf $O_1 Q_1 = c$ sowie der Zahl $\nu' \frac{v}{c} \cos i'$ der Wellen auf $O_2 B = v \cos i'$ besteht demnach die Relation

$$\nu_0 = \nu' + \nu' \frac{v}{c} \cos i', \tag{9}$$

oder es ist
$$\nu' = \frac{\nu_0 c}{c + v \cos i'}.$$

Somit hat man in Verbindung mit (8)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{c - v \cos i}{c + v \cos i'} \tag{10}$$

und daraus unmittelbar durch Differentiation

$$\frac{d\nu'}{d\nu} = \frac{c - v\cos i}{c + v\cos i'} \tag{11}$$

oder auch mit $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c - v\cos i}{c + v\cos i'} \tag{12}$$

und

$$\frac{d\lambda}{d\lambda'} = \frac{c - v\cos i}{c + v\cos i'}. \tag{13}$$

Bei Bewegung des Spiegels ändern sich also sowohl Schwingungszahl als auch Schwingungsbreite des Wellenzuges, und nach den Gleichungen (10) bis (13) bestehen dafür die Beziehungen

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{d\nu'}{d\nu} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{d\lambda}{d\lambda'}. \tag{14}$$

Gehen durch den einfallenden und durch den reflektierten Wellenzug in der Sekunde die Gesamtenergien U und U', so ist der Strahlungsdruck auf den Spiegel $U\cos i + U'\cos i'$, und die vom Spiegel pro Sekunde und Flächeneinheit ($1\,\mathrm{cm}^2$) geleistete Arbeit $(U\cos i + U'\cos i')v$. Die Arbeit muß aber auch gleich sein der Differenz $cU - cU'$ der in der Sekunde auf den Spiegel auftreffenden bzw. von ihm reflektierten Energiemengen. Somit gilt die Beziehung

$$vU\cos i + vU'\cos i' = cU - cU',$$

oder

$$\frac{U'}{U} = \frac{c - v\cos i}{c + v\cos i'} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{d\nu'}{d\nu}. \tag{15}$$

Wir denken uns nun einen im Innern überall spiegelnden Hohlraum vom Volumen V, der von im Gleichgewicht befindlicher Strahlung von der Dichte u erfüllt ist, so daß $U = uV$. Bei langsamer Ausdehnung oder Zusammenziehung des Hohlraumes ohne Zufuhr oder Entzug von Wärme gilt natürlich die obige Beziehung (15). Geht die adiabatische Volumenänderung sehr langsam vor sich, so wird die Strahlung der vielen Reflexionen wegen stets im Gleichgewicht verbleiben, jedes Lichtbündel wird den gleichen Änderungen unterliegen und der Druck der monochromatischen Hohlraumstrahlung auf die Wände des Hohlraums kann für einen Moment als konstant angesehen werden, so daß $p = \frac{u}{3}$. Nach dem 1. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie gilt aber für den adiabatischen Vorgang wieder die Beziehung

$$d(uV) + pdV = 0 \tag{16}$$

oder

$$udV + Vdu + pdV = 0. \tag{17}$$

Setzt man darin $u = \frac{p}{3}$, so erhält man sofort

$$4p^{\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{3}{4}}dV + \frac{3}{4}\frac{V}{p^{\frac{1}{4}}}dp\right) = 4p^{\frac{1}{4}}[d(p^{\frac{3}{4}}V)] = 0,$$

oder, da p nicht gleich Null sein kann,

$$p^{\frac{3}{4}}V = \text{const.}$$

Mit der Beziehung zwischen p und u folgt nun noch

$$u^{\frac{3}{4}}V = \text{const.}$$

und mit dem *Stefan-Boltzmann*schen Gesetz (6)

$$u^{\frac{1}{4}}V^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}}TV^{\frac{1}{3}} = \text{const.}$$

Für zwei Volumina V und V', denen die Strahlungsdichten u und u' entsprechen, gilt somit

$$\frac{u'^{\frac{1}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{V'^{\frac{1}{3}}} = \frac{T'}{T}. \tag{18}$$

Nun ist aber die bei der Volumenänderung dV geleistete Arbeit

$$p\,dV = \frac{u}{3}dV = \frac{U}{3V}dV;$$

substituiert man dies in die Gleichung (17) und außerdem

$$u = \frac{U}{V}, \quad du = \frac{dU}{V} - \frac{U}{V^2}dV,$$

so folgt aus (17) neuerlich noch

$$dU = -\frac{U}{3V}dV,$$

und nach Integration $\qquad U = V^{-\frac{1}{3}}.$

Es ist somit auch

$$\frac{U'}{U} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{V'^{\frac{1}{3}}}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (15), (18) und (19) ergeben nun zusammengenommen

$$\frac{U'}{U} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{T'}{T} = \frac{d\nu'}{d\nu}, \tag{20}$$

eine Gleichung, die in der Gestalt

$$\frac{\nu}{T} = \text{const} = C_1 \tag{21}$$

oder bei Übergang auf λ und spezieller Betrachtung der hellsten Stelle im Spektrum, des sogenannten Energiemaximums bei $\lambda_{\max}$ in der Form

$$\lambda_{\max}\cdot T = \text{const} = b \tag{22}$$

als *Verschiebungsgesetz von W. Wien*[41]) bekannt ist.

41) Berlin Ber. vom 9. Februar 1893.

Ist nun u die Dichte der monochromatischen Gesamtstrahlung von der Breite $d\nu$, die also alle möglichen Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$ enthält, so ist die Dichte $u(\nu)$ der Strahlung von der Schwingungszahl ν allein

$$u(\nu) = \frac{u}{d\nu},$$

und mit den Gleichungen (6) und (20) hat man noch

$$\frac{u'(\nu)}{u(\nu)} = \frac{u'}{u}\frac{d\nu}{d\nu'} = \frac{T'^4}{T^4}\cdot\frac{T}{T'} = \frac{T'^3}{T^3} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{u(\nu)}{T^3} = \text{const} = C_2. \tag{23}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 der Gleichungen (21) und (23) können natürlich nur von konstanten Größen abhängen; die betreffenden Gleichungen enthalten aber als Konstante nur $\frac{\nu}{T}$ und $\frac{u(\nu)}{T^3}$. Somit muß schließlich noch eine Beziehung

$$\frac{u(\nu)}{T^3} = f\left(\frac{\nu}{T}\right), \qquad \text{oder}$$

$$u(\nu, T) = \nu^3 \frac{T^3}{\nu^3} f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{24}$$

bestehen, die ebenfalls von *W. Wien*[42]) gegeben worden ist und später auf die sogenannte *Wien*sche Strahlungsformel in ihrer bekannten Gestalt führen wird.

Durch relativ sehr einfache quantentheoretische Überlegungen gelangt *A. Einstein*[43]) von Gleichung (24) zu der von *M. Planck*[44]) gefundenen verbesserten Strahlungsformel.[45])

Es seien n_1 Atome von der inneren Energie E_1 und n_2 Atome von der Energie E_2 vorhanden und $E_2 > E_1$. Weiter sei $u(\nu_{12})$ die Energiedichte der Strahlung von der beim Übergang aus dem einen Energiezustand in den anderen nach der Beziehung

$$E_2 - E_1 = h\nu_{12}$$

entstehenden Schwingungszahl ν_{12}. Der Übergang von E_1 zu E_2 entspreche einer Absorption von Strahlung. Ist keine Strahlung vorhanden, so ist natürlich Absorption unmöglich. Die Zahl der wirklich

42) a. a. O.

43) Verh. deutsch. phys. Ges. 1916, p. 318; Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 121. Siehe auch *A. S. Eddington,* Der innere Aufbau der Sterne, deutsch von *E. v. der Pahlen,* Berlin 1928, J. Springer, p. 56.

44) Verh. deutsch. phys. Ges. 2 (1900), p. 202, 237.

45) Bei der hier gegebenen Ableitung nach *Einstein* sind einige erst im Nr. 6 näher zu besprechende quantentheoretische Relationen vorweg genommen worden.

stattfindenden Übergänge wird daher nicht nur der Zahl der übergangsbereiten Atome, sondern auch der Größe der vorhandenen Energiedichte $u(\nu_{12})$ proportional sein. Ist a_{12} eine Proportionalitätskonstante, so erfolgen daher in der Zeit dt

$$a_{12} n_1 u(\nu_{12}) dt$$

Übergänge in der Richtung $E_1 \to E_2$. Der Übergang $E_2 \to E_1$ dagegen, also Emission kann wegen $E_2 > E_1$ aber auch ohne Vorhandensein äußerer Strahlungseinwirkung stattfinden, und die Zahl dieser nur von atomaren Verhältnissen abhängigen Übergänge in der Zeit dt wird daher gleich sein

$$b_{21} n_2 dt,$$

wo b_{21} einen anderen Proportionalitätsfaktor vorstellt. Ist noch äußere Strahlung von der Energiedichte $u(\nu_{12})$ vorhanden, so wird sie also zwar nicht auslösend, aber doch fördernd oder hemmend einwirken, so daß sie in der Zeit dt (a_{21} ist wieder ein Proportionalitätsfaktor) weitere

$$a_{21} n_2 u(\nu_{12}) dt$$

Übergänge hervorrufen wird. Herrscht nun bei irgendeiner Temperatur T thermodynamisches Gleichgewicht, so müssen sich die Übergänge in beiden Richtungen kompensieren, und es besteht dann die Relation

$$a_{12} n_1 u(\nu_{12}, T) = b_{21} n_2 + a_{21} n_2 u(\nu_{12}, T),$$

aus der ohne weiteres folgt

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{a_{21}}{a_{12}} \left(1 + \frac{b_{21}}{a_{21} u(\nu_{12}, T)}\right).$$

Ist noch ein dritter Zustand E_3 vorhanden und $E_3 > E_2$, so gilt also, weil

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_1}{n_3}$$

ist, noch weiter

$$(25) \quad \frac{a_{21}}{a_{12}} \left(1 + \frac{b_{21}}{a_{21} u(\nu_{12}, T)}\right) \cdot \frac{a_{32}}{a_{23}} \left(1 + \frac{b_{32}}{a_{32} u(\nu_{23}, T)}\right) = \frac{a_{31}}{a_{13}} \left(1 + \frac{b_{31}}{a_{31} u(\nu_{13}, T)}\right).$$

Da u mit T wächst, werden aber die zweiten Glieder in den Klammerausdrücken mit steigender Temperatur immer kleiner. Vernachlässigt man sie also für $T = \infty$, was offenbar gestattet ist, so folgt aus (25) zunächst

$$\frac{a_{21}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{32}}{a_{23}} = \frac{a_{31}}{a_{13}}$$

und weiter

$$(26) \quad \left(1 + \frac{b_{21}}{a_{21} u(\nu_{12}, T)}\right) \left(1 + \frac{b_{32}}{a_{32} u(\nu_{23}, T)}\right) = 1 + \frac{b_{31}}{a_{31} u(\nu_{13}, T)}.$$

Führt man hier für u die *Wien*sche Form (24) ein und beachtet man, daß wegen der quantenmäßigen Beziehungen $E_2 - E_1 = h\nu_{12}$, $E_3 - E_2 = h\nu_{23}$ und $E_3 - E_1 = h\nu_{12}$ immer $\nu_{13} = \nu_{12} + \nu_{23}$, also auch

$$F\left(\frac{\nu_{13}}{T}\right) = F\left(\frac{\nu_{12}}{T} + \frac{\nu_{23}}{T}\right)$$

sein muß, so ergibt die Reduktion von (26)

$$\frac{1}{C_{23} F\left(\frac{\nu_{12}}{T}\right)} + \frac{1}{C_{12} F\left(\frac{\nu_{23}}{T}\right)} + \frac{1}{F\left(\frac{\nu_{12}}{T}\right) \cdot F\left(\frac{\nu_{23}}{T}\right)} = \frac{C_{13}}{C_{12} \cdot C_{23}} \cdot \frac{1}{F\left(\frac{\nu_{12}}{T} + \frac{\nu_{23}}{T}\right)}, \tag{27}$$

wo die C-Faktoren die Form

$$C_{r,s} = \frac{b_{s,r}}{a_{s,r} \cdot \nu_{r,s}^3}$$

haben. Schreibt man drei Gleichungen von der Form (27) für die Temperaturen T_1, T_2, T_3 an, so lassen sich die C als Funktionen der

$$\frac{\nu_{12}}{T_1},\ \frac{\nu_{12}}{T_2},\ \frac{\nu_{12}}{T_3},\ \frac{\nu_{23}}{T_1},\ \frac{\nu_{23}}{T_2},\ \frac{\nu_{23}}{T_3}$$

oder, da sich die letzten drei dieser Größen aus den ersten drei durch Multiplikation mit $\frac{\nu_{23}}{\nu_{12}}$ ergeben, auch als Funktionen der

$$\frac{\nu_{12}}{T_1},\ \frac{\nu_{12}}{T_2},\ \frac{\nu_{12}}{T_3},\ \frac{\nu_{23}}{\nu_{12}}$$

darstellen. C_{23} kann nun von den ersten drei Größen nicht abhängen, da diese ja ν_{23} nicht enthalten, aber auch nicht von der letzten $\frac{\nu_{23}}{\nu_{12}}$, da diese das von ν_{23} unabhängige ν_{12} mit enthält. Hängt aber C_{23} nicht von seinen $\frac{\nu_{23}}{T}$-Werten ab, so hängen auch die anderen gleichartigen C_{12} und C_{13} nicht von ihren $\frac{\nu_{12}}{T}$ und $\frac{\nu_{13}}{T}$ ab, und der gleichen Form aller C-Größen wegen muß gelten

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = C = \text{const.}$$

Damit läßt sich nun (26) auf die Form

$$\left(1 + \frac{C}{F\left(\frac{\nu_{12}}{T}\right)}\right)\left(1 + \frac{C}{F\left(\frac{\nu_{23}}{T}\right)}\right) = 1 + \frac{C}{F\left(\frac{\nu_{12}}{T} + \frac{\nu_{23}}{T}\right)}$$

bringen, die nur bestehen kann, wenn

$$1 + \frac{C}{F\left(\frac{\nu}{T}\right)} = e^{k\frac{\nu}{T}} \qquad \text{oder}$$

$$u(\nu, T) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{C\nu^3}{e^{k\frac{\nu}{T}} - 1} \quad \text{ist.} \tag{28}$$

Der Übergang von den $u(\nu, T)$ in den Gleichungen (24) und (28) auf die $u(\lambda, T)$ wird in folgender Weise bewerkstelligt. Entspricht an einer bestimmten Stelle des Spektrums dem Wert $d\nu$ der Wert $d\lambda$, so ist

$$u(\nu)d\nu = u(\lambda)d\lambda,$$

wo $u(\nu)$ und $u(\lambda)$ die Strahlungsdichten für die Einheit der Schwingungs- bzw. Wellenlängendifferenz bedeuten. Ist c die Lichtgeschwindigkeit, also $\lambda = \frac{c}{\nu}$, so folgt

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c} \quad \text{und}$$

$$(29) \qquad \begin{cases} u(\nu) = u(\lambda)\frac{d\lambda}{d\nu} = -u(\lambda)\frac{\lambda^2}{c} \\ u(\lambda) = -u(\nu)\frac{\nu^2}{c}. \end{cases}$$

Das negative Zeichen bedeutet hier lediglich, daß die ν und λ indirekt proportional sind, braucht also weiter nicht berücksichtigt zu werden. Mit der zweiten Gleichung (24) wird nun aus (29)

$$u(\lambda, T) = \frac{\nu^5}{c} F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5}\varphi(\lambda T)$$

und aus (28)

$$(30) \qquad u(\lambda, T) = \frac{C\nu^5}{c\left(e^{k\frac{\nu}{T}} - 1\right)} = \frac{1}{\lambda^5}\frac{c_1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}.$$

Gleichung (30) ist die von *M. Planck*[46]) entwickelte Strahlungsformel, die bei Vernachlässigung der Eins im Nenner in eine schon früher von *W. Wien*[47]) gegebene Strahlungsformel

$$(31) \qquad u(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5}\frac{c_1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}$$

übergeht. Die letztere kann zur Darstellung der Strahlung innerhalb kleinerer Wellenlängenbereiche mit Vorteil benutzt werden.

d) *Die numerischen Werte der Konstanten der Strahlungsformeln.*[48]) Es ist zunächst im *Stefan*schen Gesetz (Gleichung (2)) die Energiemenge

$$E = \sigma T^4,$$

die von 1 cm^2 schwarzer Oberfläche eines Körpers von der Temperatur T in einer Sekunde ausgestrahlt wird und

$$\begin{aligned}\sigma &= 5{,}75 \cdot 10^{-12}\,\text{int. watt}\,\text{cm}^{-2}\,\text{grad}^{-4} \\ &= 1{,}374 \cdot 10^{-12}\,\text{cal}\,\text{cm}^{-2}\,\text{sec}^{-1}\,\text{grad}^{-4}.\end{aligned}$$

46) a. a. O.

47) Wied. Ann. 58 (1896), p. 662.

48) Die hier gegebenen Zahlenwerte sind dem bei J. Springer, Berlin, erscheinenden Handbuch der Physik von *H. Geiger* und *K. Scheel* entnommen.

Im *Wien*schen Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\max} \cdot T = b$$

hat man, wenn λ in cm ausgedrückt wird,

$$b = 0{,}2880 \text{ cm grad},$$

oder für λ in μ

$$b = 2880 \, \mu \text{ grad}.$$

Die Konstante c_1 der Strahlungsgesetze von *Wien* und *Planck* ist astrophysikalisch ohne Bedeutung, da sie bei Verhältnismessungen herausfällt. Dagegen ergibt sich c_2 auf folgende Weise.

Sucht man mit der *Planck*schen Formel das Energiemaximum mit Hilfe der Differentialquotienten $\frac{du}{d\lambda} = 0$, so erhält man nach einfacher Reduktion die Gleichung

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \quad \beta = 4{,}9651,$$

in der $\frac{c_2}{\lambda T} = \beta$ gesetzt wurde. Es ist also an dieser Stelle des Spektrums auch

$$\frac{c_2}{\lambda_{\max} T} = \frac{c_2}{b} = \beta,$$

und daher

$$c_2 = 4{,}9651 \cdot b = 14\,300 \text{ cm grad} = 1{,}43 \, \mu \text{ grad}.$$

5. **Das Dopplersche Prinzip.** Die in Gleichung (7) (p. 545) des vorigen Kapitels ausgedrückten, durch die Bewegung des Beobachters bewirkten Änderungen der Schwingungszahl wurden bereits von *C. Doppler*[49]) erkannt, allerdings in ihren Konsequenzen aber falsch gedeutet. Dieses sogenannte „*Doppler*sche Prinzip" liegt den Bestimmungen der relativen Geschwindigkeiten der Sterne in der Gesichtslinie oder der Radialgeschwindigkeiten zugrunde. Setzt man in der erwähnten Gleichung

$$\nu_0 = \nu - \nu \frac{v}{c} \cos i$$

$i = 0$, und geht man mit $\nu = \frac{c}{\lambda}$ (c = Lichtgeschwindigkeit) sowie mit $\nu_0 = \nu + d\nu$ oder $\lambda_0 = \lambda + d\lambda$ auf die Wellenlänge und ihre Änderung über, so folgt leicht

$$d\lambda = \frac{\lambda}{c - v} \cdot v$$

oder, da ja v gegenüber c stets sehr klein ist, mit für die Praxis genügender Genauigkeit

$$v = \frac{c}{\lambda} d\lambda. \tag{32}$$

49) Abh. kgl. böhm. Ges. d. Wiss. 5. Folge, Bd. 2 (1842).

Ist der Beobachter also mit der Geschwindigkeit v gegen den Stern in Bewegung, so läßt sich v mit (32) aus der beobachteten Wellenlängenänderung $d\lambda$ ermitteln. v und $d\lambda$ sind gleichbezeichnet, und einer Entfernung des Beobachters vom Stern (positives v) entspricht also eine Vergrößerung von λ, einer Verringerung der Distanz dagegen eine Verkleinerung der Wellenlänge.

Gleichung (9) des vorigen Kapitels (p. 545) enthält den Fall der bewegten Lichtquelle und des ruhenden Beobachters, wenn man sich nun den von S_1 nach S_2 bewegten Spiegel als Lichtquelle vorstellt, die ν_0 Schwingungen pro Sekunde in der Richtung gegen den bei $Q_1 Q_2$ befindlichen unbewegten Beobachter aussendet. Setzt man wieder $i' = 0$, so erhält man zunächst

$$\nu_0 = \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Hier ist $\frac{c}{\nu_0} = \lambda$ und $\frac{c}{\nu'} = \lambda + d\lambda$, und es folgt damit streng wieder die frühere Gleichung (32).

Den weiteren Fall, daß das Licht von einem bewegten Körper reflektiert wird (Beobachtung der Ränder der Scheiben der rotierenden Planeten) schließt endlich die allgemeine Gleichung (10) des vorigen Kapitels (p. 545) ein, die mit $i = i' = 0$ zunächst

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{c - v}{c + v}$$

oder

$$d\lambda = \frac{2v}{c - v}\lambda,$$

also gegen die früheren Fälle den doppelten Betrag der Linienverschiebung $d\lambda$ und für v unter Vernachlässigung von v gegen c im Nenner den Wert

$$v = \frac{c}{\lambda}\frac{d\lambda}{2} \tag{33}$$ liefert.[50])

Die an den Sternen beobachteten Radialgeschwindigkeiten kombinieren sich stets aus der dem Sterne eigenen Geschwindigkeit und aus der Geschwindigkeit des auf der Erde befindlichen Beobachters infolge der Bahnbewegung und Rotation des Erdkörpers. Die beobachteten Radialgeschwindigkeiten müssen von diesen Einflüssen befreit und dadurch auf den Mittelpunkt der Sonne bezogen werden.

50) Die Ableitung obiger Formeln für v ist hier unter den Voraussetzungen erfolgt, daß die Schwingungszahl der Lichtquelle von ihrer Geschwindigkeit unabhängig und daß das Medium zwischen Lichtquelle und Beobachter homogen und unbewegt sei. Über den Einfluß von Dichteänderungen in diesem Medium siehe *W. Michelson*, Zur Frage über die richtige Anwendung des Dopplerschen Prinzips, Journ. d. russ. phys. Ges. 31 (1900), p. 119, oder *W. Michelson*, On Dopplers principle, Astroph. Journ. 13 (1901), p. 192.

Die Korrektion wegen Bahnbewegung der Erde erhält man mit *F. Schlesinger*[51]) in einfacher Weise dadurch, daß man die negativ genommenen, pro Tag geltenden Differenzen X', Y', Z' der in den Jahrbüchern gegebenen äquatorialen Sonnenkoordinaten als Geschwindigkeiten der Erde pro Tag und in Einheiten der Distanz Erde—Sonne bildet und die Summe der Projektionen dieser Werte auf die durch Rektaszension α und Deklination δ des Sterns gegebene Richtung der Gesichtslinie durch Multiplikation mit $149{,}5 \cdot 10^6$ km : 86400 auf Kilometer und Sekunden reduziert. Die Korrektion lautet dann (Koeffizient logarithmisch)

$$\text{Korr.} = [3{,}238\,072](X' \cos\alpha \cos\delta + Y' \sin\alpha \cos\delta + Z' \sin\delta).$$

Eine andere, besonders bequeme Form dieser Korrektion ist ebenfalls von *F. Schlesinger*[52]) gegeben worden. Nennt man den Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente an die Erdbahn $90 - i$, so ist

$$\operatorname{tg}(90 - i) = \frac{r}{r'}$$

und, wenn r' aus der Polargleichung der Kegelschnitte entwickelt wird,

$$\operatorname{tg} i = \frac{e \sin(\odot - \Gamma)}{1 + e \cos(\odot - \Gamma)},$$

wo $\odot$ und Γ die mittlere Länge der Sonne im Moment der Beobachtung und die mittlere Länge des Perigäums bezeichnen. Ist T die in Einheiten von dt gegebene Umlaufszeit der Erde und $F = a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi$ die ganze Bahnfläche, so ist die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{r^2}{2}\frac{dv}{dt} = \frac{F}{T},$$

und da die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Radiusvektor $r\dfrac{dv}{dt}$ ist, wird die wahre Geschwindigkeit in der Tangente

$$V_1 = r\frac{dv}{dt} \sec i = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi}{T} \cdot \frac{1 + e\cos(\odot - \Gamma)}{a(1 - e^2)} \sec i$$

oder

$$V_1 = V[1 + e\cos(\odot - \Gamma)] \sec i,$$

wo nun der von periodischen Größen freie Faktor $V = \dfrac{2a\pi}{T\sqrt{1-e^2}}$ die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vorstellt. Da die Richtung des Apex in ekliptikalen Koordinaten (L = Länge, B = Breite) gegeben ist durch

$$L = \odot - 90 - i, \quad B = 0,$$

so gibt die Projektion auf die durch λ (Länge) und β (Breite) ge-

51) Astroph. Journ. 9 (1899), p. 159.

52) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 1.

gebene Richtung zum Stern zunächst

$$V_1 = -V[1 + e\cos(\odot - \Gamma)] \sec i \cos\beta \sin(\lambda - \odot + i),$$

und dann nach Auflösung des Winkels $\lambda - \odot + i$ und Substitution für $\operatorname{tg} i$

$$V_1 = b\sin(\odot - \lambda) + c$$
$$b = V\cos\beta$$
$$c = Ve\cos\beta\sin(\Gamma - \lambda).$$

Die für einen bestimmten Stern nahe konstanten Werte von b und c hat *F. Schlesinger*[53]) zusammen mit den λ und β für eine Anzahl hellerer Sterne tabuliert.

Andere einfache Verfahren zur Ermittlung der Reduktion auf die Sonne, bei denen die Winkeldistanz Apex—Stern auf Himmelsgloben gemessen wird oder graphische Methoden anderer Art verwendet werden, sind u. a. von *J. Hartmann*[54]) und von *F. Henroteau*[55]) angegeben worden.

Bei schwächeren spektroskopischen Doppelsternen, bei denen die Aufnahme eines Spektrums oft ziemlich lange Expositionszeiten erfordert, wird die beobachtete Radialgeschwindigkeit durch die Änderung der Geschwindigkeit während der Aufnahme beeinflußt. Inwieweit hierdurch die aus den Beobachtungen abgeleiteten Bahnelemente eine Verfälschung erleiden, ist ebenfalls von *F. Schlesinger*[56]) erörtert worden.

Eine Korrektion wegen Erdrotation wird nur in den wenigen Fällen, also z. B. bei Rotationsbestimmungen an der Sonne, nötig, wo die große Helligkeit eine Verwendung starker Dispersionen (Gitterspektrographen) und damit eine Genauigkeit in der Bestimmung der Geschwindigkeiten gestattet, die bis in Bruchteile eines Kilometers pro Sekunde geht. Ist ϱ die Distanz des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt und φ' seine geozentrische Polhöhe, so ist die lineare Geschwindigkeit des Beobachtungsortes infolge der Erdrotation

$$0{,}464\,\varrho\cos\varphi' \text{ km/sec}$$

gegen einen Punkt des Äquators von der Rektaszension $90 + \Theta$ (Θ = Sternzeit der Beobachtung) gerichtet. Bei Projektion dieser Geschwindigkeit auf die Richtung α, δ des Sternes folgt als Korrektion wegen Erdrotation

$$\text{Korr.} = 0{,}464\,\varrho\cos\varphi'\cos\delta\sin(\alpha - \Theta).$$

53) a. a. O.

54) Astr. Nachr. 173 (1906), p. 97.

55) Pop. Astr 33 (1925), p. 248.

56) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 167.

Die Korrektion hat das Zeichen von $\sin(\alpha - \Theta)$, ist also positiv oder negativ, je nachdem im östlichen oder westlichen Stundenwinkel beobachtet worden ist.

Systematische und anderweitige Fehler sowie Verminderungen der Genauigkeit überhaupt können durch verschiedene persönliche Auffassung der Linienmitte bei der Ausmessung der Spektren, durch Fehler in den zur Reduktion verwendeten Wellenlängen für die Linien des Vergleichsspektrums, durch Abhängigkeit der Wellenlängen der Sternlinien vom Typus des Sterns[57]), durch bei Beobachtung in großen Stundenwinkeln im Apparat auftretende Biegungen sowie durch Übergang auf andere Dispersionen[58]) und durch Verwendung zu großer Spaltbreiten.[59]) Die bei der Ausmessung möglichen Fehlerquellen können durch die in Nr. **3** besprochenen Vorsichtsmaßregeln tunlichst unschädlich gemacht werden. Den Nachweis anderweitiger systematischer Fehler gelingt am besten durch gelegentliche Mitbeobachtung von Objekten mit bekannter und konstanter Radialgeschwindigkeit. Geschwindigkeiten solcher „Standard velocity stars" sind von verschiedenen Beobachtern genau ermittelt worden, z. B. von *A. Belopolsky*[60]) und von *V. M. Slipher.*[61]) *W. W. Campbell*[62]) hat erst vor etwa zehn Jahren neuerlich gefordert, daß die Radialgeschwindigkeiten einer Anzahl hellerer Sterne mit möglichst hoher Dispersion als Standardwerte festgelegt werden sollen. Auch die Geschwindigkeit des Mondes relativ zur Erde, die bis auf rund 1,5 km/sec anwachsen kann, ist als Testwert verwendbar und kann für einen gegebenen Zeitmoment aus den in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Daten nach Formeln, die *W. W. Campbell*[63]) und *K. Laves*[64]) entwickelt haben, berechnet werden.

Aufnahmen mit Objektivprisma[65]) sind, wie schon früher er-

57) Siehe hierzu: *E. B. Frost,* Astroph. Journ. 31 (1910), p. 430; *W. S. Albrecht*, Cordoba Boletin Nr. 1, 1914; Astroph. Journ. 33 (1911), p. 130; Astroph. Journ. 50 (1919), p. 277; Pop. Astr. 29 (1921), p. 144; *J. Voûte,* Astroph. Journ. 47 (1918), p. 137.

58) *J. S. Plaskett,* Astroph. Journ. 32 (1910), p. 230 und *E. B. Frost,* Astroph. Journ. 31 (1910), p. 377.

59) *J. S. Plaskett*, Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 4 (1910), p. 333.

60) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 85; Mitt. d. Nicolai-Hauptsternw. Pulkowo 1 (1905), Nr. 3 und 3 (1910), Nr. 35.

61) Lowell obs. Bull. Nr. 23, 1905.

62) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 190.

63) Astroph. Journ. 11 (1900), p. 141.

64) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 17.

65) Man vgl. hierzu noch: *Delisle Stewart,* Astroph. Journ. 23 (1906), p. 396 und *M. Hamy,* Paris C. R. 158 (1914), p. 81; 161 (1915), p. 661; 167 (1917), p. 9.

wähnt worden ist, mehrfach zur Ermittlung von Wellenlängen und damit auch von Radialgeschwindigkeiten herangezogen worden, die bezüglichen Versuche hatten aber wenig praktischen Erfolg.

6. Der Atombau und die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren. a) *Allgemeines.* Nach den Vorstellungen von *E. Rutherford*[66]) und *N. Bohr*[67]) besteht jedes Atom aus einem positiv geladenen Kern von der Gesamtladung E und einer Anzahl Z negativ geladener, den Kern wie Planeten umkreisender Elektronen von den Einzelladungen e, so daß die Beziehung

$$E = Ze$$

besteht. In seinem ursprünglichen Zustand ist das Atom also nach außen hin elektrisch indifferent oder neutral. Die großen Halbachsen der unter dem Einfluß der *Coulomb*schen Anziehung beschriebenen Elektronenbahnen sollen dabei ihrer Größe nach an die Bedingung gebunden sein, daß die kinetische Energie jedes Elektrons bei einem vollen Umlauf ein ganzzahliges Vielfaches des *Planck*schen Wirkungsquantums $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ ergsec^{-1} sein muß. Springt ein Elektron aus einer Bahn in eine andere, so geht seine Energie von w_a in die Energie w_e über, und es besteht die Beziehung

$$w_a - w_e = h\nu, \tag{34}$$

und je nachdem $w_a \gtrless w_e$, entsteht bei diesem Vorgang unter Emission oder Absorption von Energie eine spektrale Emissions- oder Absorptionslinie von der Schwingungszahl $\nu = \frac{c}{\lambda}\cdot$

Der normale Zustand des neutralen Atoms ist dadurch charakterisiert, daß alle Elektronen in den ihnen eigenen Bahnen schwingen. Zufuhr von Energie kann bewirken, daß ein Elektron aus seiner eigenen Bahn in eine andere überspringt, die entweder selbst wieder für den Bahnenkomplex des Atoms charakteristisch ist oder diesen durch eine neue Bahnform nach außen hin erweitert. Bei Nachlassen oder Aufhören der Energiezufuhr erfolgt wieder der Rücksprung in die ursprüngliche Bahn. In beiden Fällen (Absorption bzw. Emission) entstehen nach Gleichung (34) Absorptions- bzw. Emissionslinien, die man, da sie aus dem Grundzustand des Atoms heraus entstehen, als zuletzt noch mögliche Linien (ultimate lines)[68]) bezeichnet.[69]) Sie

66) Phil. Mag. 21 (1911), p. 669.

67) Phil. Mag. 26 (1913), p. 1, 476, 857.

68) Siehe *C. H. Payne,* Stellar atmospheres, p. 11 und *H. N. Russell* und *F. A. Saunders,* Astroph. Journ. 61 (1925), p. 42.

69) In von dieser Definition etwas abweichender Weise nennt *De Gramont,* Paris C. R. 171 (1920), p. 1106 „raies ultimes" solche Linien, die bei fortwährender Verringerung der Menge des Stoffes zuletzt verschwinden.

bilden die sogenannte Hauptserie. Die erste Linie dieser Hauptserie rührt also von Elektronensprüngen zwischen Grundbahn und nächst höherer Bahn her und heißt *Resonanzlinie*, da das Elektron bei der Emission den ganzen Energiebetrag abgibt, den es bei der Absorption aufgenommen hat. Wächst die zugeführte Energie, so kann das bereits in eine höhere Bahn gelangte Elektron neuerlich in eine noch höhere überspringen. Bei diesem Vorgang entstehen wieder weitere Linien, die in ihrer Gesamtheit dann „Nebenserien“ oder „subordinate series“ bilden. Ist die Energiezufuhr genügend stark, so kann zunächst ein Elektron gänzlich aus dem Atomverband gerissen werden. Das Atom A hat dann nicht mehr Z, sondern $Z - 1$ Elektronen, es ist somit mit einer Ladungseinheit positiv wirksam geworden, und wir bezeichnen es nun mit A^+ als einfach ionisiert. Durch Verlust eines weiteren Elektrons kann natürlich aus dem einfach ionisierten Atom A^+ das zweifach ionisierte A^{++} entstehen usw.

Daß das Spektrum somit abhängig ist von der Größe der Energiezufuhr oder der „Erregung“, hat schon *J. N. Lockyer* aus seinen Beobachtungen der Spektren coelestischer Objekte gefolgert. In der Flamme (Na im Bunsenbrenner) ist die Anregung am geringsten, im elektrischen Bogen stärker, im Funken am kräftigsten. Daher werden also beim Übergang Flamme—Bogen—Funken immer neue Linien auftreten, die dem höheren Erregungsniveau oder gar dem ionisierten Atom zukommen, und die typischen Bogenlinien werden im Bogen kräftig, im Funken schwächer erscheinen, während das umgekehrte bei den Funkenlinien der Fall sein wird. *J. N. Lockyer*[70]) nennt das die typischen Funkenlinien liefernde Atom „Protoelement“ und dessen Linien, da sie im Funken kräftiger erscheinen, „enhanced lines“, und er versuchte sie durch Verwendung besonders kräftiger Funken tunlichst zu separieren.[71]) Im Sinne der obigen Vorstellungen wären die Bogenlinien im allgemeinen als Linien des neutralen Atoms zu bezeichnen, die „enhanced lines“ würden dem einfach ionisierten, die bei Verwendung besonders stark kondensierter Funken auftretenden „Überfunkenlinien“ dagegen dem doppelt oder noch höher ionisierten Atom angehören.

Aus im physikalischen Laboratorium angestellten Beobachtungen über die Ablenkung, die ein α-Teilchen (doppelt positiv geladener He-Kern) beim Vorüberfliegen an einem Atomkern infolge der abstoßen-

---

70) Inorganic evolution, London bei Macmillan & Co. 1900, p. 32.

71) Eine Tabelle solcher „enhanced lines“ ist von *J. N. Lockyer* in Proc. Roy. Soc. London 65 (1900), p. 452 gegeben.

den Kraft des letzteren erfährt[72]), hat sich ergeben, daß die positive Ladung eines Atomkernes immer aus so viel positiven Elektrizitätseinheiten besteht, als die Ordnungszahl des Elementes im periodischen System, d. i. die sogenannte „Atomnummer", angibt. Man erhält dieses periodische System, wenn man die Elemente, nach ihrem Atomgewicht geordnet, der Reihe nach in ein Schema aus acht Kolonnen und sieben Zeilen so einsetzt, daß Elemente mit ähnlichen chemischen Eigenschaften, z. B. Alkalien, Halogene, Edelgase, untereinander in derselben Kolonne zu stehen kommen. In der Tafel des periodischen Systems der Elemente auf p. 560 gibt die Zahl vor dem Atomzeichen die Atomnummer, die Zahl darunter das Atomgewicht.

Geht man von H und He aus, in deren Atomen ein Elektron bzw. deren zwei in einquantigen Bahnen um den Atomkern laufen, so entspricht jeder Schritt um eine Zeile nach abwärts dem Hinzutreten einer neuen Bahnform, die um ein Quant höher liegt als die äußerste Bahn in den Atomen der vorhergehenden Zeile. In den neutralen Atomen sind also im unerregten Zustand nur ein- bis siebenquantige Bahnen möglich. Es ist klar, daß mit wachsender Atomnummer immer mehr Elektronen in Bahnen von gleicher Quantenzahl laufen müssen. Das wird dadurch ermöglicht, daß Kreisbahnen und Ellipsenbahnen von verschiedener Exzentrizität und gegenseitiger Neigung, aber gleicher Quantenzahl nebeneinander existieren können. Bezeichnet man also allgemein das Energieniveau der Bahn durch die Quantenzahl (z. B. 6, sechsquantige Bahn), so muß durch einen beigefügten Index, der übrigens bei der Kreisbahn ebenso groß ist wie die Quantenzahl und damit seinen Maximalwert erreicht, auch noch die Bahnform, ob Kreis oder Ellipse von größerer oder kleinerer Exzentrizität charakterisiert werden. Demnach würden $6_6, 6_5, 6_4, \ldots, 6_1$ der Reihe nach eine sechsquantige Kreisbahn oder sechsquantige Ellipsen von wachsender Exzentrizität bedeuten. Man pflegt den Index „Nebenquantenzahl" (*N. Bohr*) oder „azimutale Quantenzahl" (*A. Sommerfeld*) zu nennen. Wie bereits oben betont, sind für den Kreis Quantenzahl und Nebenquantenzahl gleich. Die in der äußersten Bahn kreisenden Elektronen werden bei Zufuhr von Energie zuerst beeinflußt, und die Zahl dieser sogenannten „Valenzelektronen" hängt mit der chemischen Valenz des betreffenden Elementes zusammen. Verliert das Atom eines seiner Valenzelektronen durch Ionisation, so wird sein Bau dem Atom des im periodischen System vorhergehenden Elementes ähnlich, und

72) Man sehe dazu die Versuche von *Wilson*, Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik 10 (1913), p. 34; *Rutherford*, Phil. Mag. 21 (1911), p. 669; *Geiger* u. *Marsden*, Phil. Mag. 25 (1913), p. 604; *Chadwick*, Phil. Mag. 40 (1920), p. 734.

Das periodische System der Elemente.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	1. H 1,0078							2. He 4,00
2.	3. Li 6,9	4. Be 9,0	5. B 10,8	6. C 12,0	7. N 14,0	8. O 16,0	9. F 19,0	10. Ne 20,2
3.	11. Na 23,0	12. Mg 24,3	13. Al 27,0	14. Si 28,1	15. P 31,0	16. S 32,1	17. Cl 35,5	18. A 39,9
4.	19. K 39,1 29. Cu 63,6	20. Ca 40,1 30. Zn 65,4	21. Sc 45,1 31. Ga 69.7	22. Ti 47,9 32. Ge 72,6	23. V 51,0 33. As 75,0	24. Cr 52,0 34. Se 79,2	25. Mn 54,9 35. Br 79,9	26. Fe, 55,8 27. Co, 59,0 28. Ni 58,7 36. Kr 82,9
5.	37. Rb 85,5 47. Ag 107,9	38. Sr 87,6 48. Cd 112,4	39. Y 88,9 49. In 114,8	40. Zr 91,3 50. Sn 118,7	41. Nb 93,5 51. Sb 121,8	42. Mo 96,0 52. Te 127,5	43. Ma — 53. J 126,9	44. Ru, 101,7 45. Rh, 102,9 46. Pd 106,7 54. X 130,2
6.	55. Cs 132,8 79. Au 197,2	56. Ba 137,4 80. Hg 200,6	57. La, 138,9 58—72 Seltene Erden 140,2—173,8 81. Tl 204,4	82. Pb 207.2	73. Ta 181,5 83. Bi 209,0	74. W 184,0 84. Po (210,0)	75. Re — 85. —	76. Os, 190,9 77. Ir, 193,1 78. Pt 195,2 86. Em 222,0
7.	87. —	88. Ra 226,0	89. Ac (226)	90. Th 232,1	91. Pa (230)	92. U 238,2		

es ist nahezu $A_Z^+ = A_{Z-1}$. Lediglich die Kernladung ist bei A_Z^+ um eine positive Elektrizitätseinheit höher als bei A_{Z-1}. Da das Spektrum immer eine Folgeerscheinung der Elektronensprünge und der dabei absorbierten oder emittierten Energiequanten ist, so folgt aus der Ähnlichkeit des Baues von A_Z^+ und A_{Z-1} auch eine Ähnlichkeit ihrer Spektren. Das von *W. Kossell* und *A. Sommerfeld*[73]) ausgesprochene sogenannte „Verschiebungsgesetz" besagt daher, daß das Spektrum eines ionisierten Atoms A_Z^+ immer dem Spektrum des neutralen Atoms von um Eins niedrigerer Atomnummer ähnlich ist und daß begreiflicherweise ebensolche Ähnlichkeiten zwischen den höher ionisierten und den ähnlich gebauten niedriger ionisierten oder neutralen Atomen A_Z^{+++}, A_{Z-1}^{++}, A_{Z-2}^+, A_{Z-3} bestehen. Zum Schluß seien in der nebenstehenden Tabelle die Atommodelle (Zahl und Bahnform der Elektronen) für die ersten 11 Elemente des periodischen Systems gegeben.[74])

Bahnform		1_1	2_1	2_2	3_1
Nr. 1	H	1			
2	He	2			
3	Li	2	1		
4	Be	2	2		
5	B	2	2	(1)	
6	C	2	2	2	
7	N	2	4	1	
8	O	2	4	2	
9	F	2	4	3	
10	Ne	2	4	4	
11	Na	2	4	4	1

b) *Die Linienserien von* H *und* He$^+$. Die mathematische Verfolgung der Elektronenbewegung in den Atomen von H und He$^+$, die beide nur aus einem Atomkern und einem Elektron bestehen, ist in ebenso exakter Weise möglich wie die Bewegung zweier Körper im Zweikörperproblem. Aber schon das Hinzutreten eines weiteren Elektrons bewirkt durch die auftretenden Elektronenstörungen ähnliche Verhältnisse, wie sie im astronomischen Dreikörperproblem auftreten, so daß die wirklichen von den Elektronen beschriebenen Bahnen noch nicht einmal für das neutrale He-Atom, geschweige denn für die immer komplizierter gebauten weiteren Atome haben ermittelt werden können.

Wir betrachten zunächst das H-Atom, dessen von einem Elektron umkreister Kern eine positive Ladung von einer Elektrizitätseinheit besitzt, so daß also $E = e$. Für die Bahnbewegung des Elektrons gilt die klassische Bedingung, daß die Zentrifugalkraft gleich sein muß der *Coloumb*schen Anziehung zwischen Elektron und Kern. Zieht man der Einfachheit halber zunächst eine Kreisbahn vom Ra-

73) Verh. d. deutsch. phys. Ges. 21 (1919) und *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. 1924, p. 602.

74) Eine ausführliche Tafel ist z. B. von *C. H. Payne* gegeben in Stellar atmospheres 1925, p. 9.

dius a in Erwägung, so besteht, wenn m = Masse und ω = Winkelgeschwindigkeit des Elektrons, die Beziehung

(35) $$m a \omega^2 = \frac{Ee}{a^2}$$ oder

(36) $$Ee = m a^3 \omega^2.$$

Zur Einführung der Quantelung der Bahnen bemerken wir, daß sich beim Übergang von einer Bahn zur anderen nicht nur ω ändert, sondern auch die momentane kinetische Energie $w_{\text{kin}} = \frac{m}{2} a^2 \omega^2$, und zwar die letztere bei einer Änderung von ω in $\omega + d\omega$ um den Betrag $\frac{\partial w}{\partial \omega} = m a^2 \omega$, denn a kann deswegen als konstant angesehen werden, da ja die Änderung der Winkelgeschwindigkeit auch durch Deformation der Kreisbahn zur Ellipse erfolgen kann. Bezeichnet man mit φ die mittlere Anomalie des Elektrons in seiner Bahn, so wird die gesamte kinetische Energie während eines ganzen Umlaufs gegeben sein durch

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \omega} d\varphi = 2\pi m a^2 \omega.$$

Handelt es sich um die n^{te} Quantenbahn, so muß die Energie derselben W_n gleich sein

$$W_n = nh,$$

also $$2\pi m a^2 \omega = nh$$ oder

(37) $$m a^2 \omega = \frac{nh}{2\pi}.$$

Da $a^2 \omega$ gleich ist der doppelten Flächengeschwindigkeit, ist Gleichung (37) gleichbedeutend mit dem Flächensatz der klassischen Mechanik.

Aus (36) und (37) folgt nun aber durch Division

$$a\omega = \frac{2\pi Ee}{nh} = \text{lineare Geschwindigkeit},$$

und damit läßt sich wieder (37) auf die Form

(38) $$a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e E}$$

bringen, in der rechts nur die Quantenzahl n der Bahnen variabel ist und die besagt, daß sich *die Radien der Elektronenbahnen verhalten wie die Quadrate der Quantenzahlen.*

Setzt man diesen Wert von a nun wieder in (37) ein, so folgt für ω

(39) $$\omega = \frac{8\pi^3 m e^2 E^2}{n^3 h^3}.$$

$\frac{1}{\omega}$ oder die Umlaufszeit ist sonach proportional n^3. In Verbindung mit

(38) besagt das aber, daß sich *die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten wie die dritten Potenzen der Bahnradien* (3. *Kepler*sches Gesetz).

Die potentielle Energie der *Coloumb*schen Anziehung ist

$$w_{\mathrm{pot}} = -\frac{eE}{a},$$

oder mit (36) $$w_{\mathrm{pot}} = -m a^2 \omega^2.$$

Da gleichzeitig $w_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} a^2 \omega^2$, so folgt sofort der von *N. Bohr*[75]) für das *Coulomb*sche Feld gegebene Zusammenhang

$$w_{\mathrm{kin}} = -\tfrac{1}{2} w_{\mathrm{pot}}.$$

Also ist die Gesamtenergie w

$$(40) \quad w = w_{\mathrm{kin}} + w_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} w_{\mathrm{pot}} = -\frac{eE}{2} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Springt nun das Elektron aus einer k-quantigen Bahn in eine n-quantige, so folgt aus (34) und (40)

$$(41) \qquad \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \cdot \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right] = h\nu,$$

und wenn man darin schreibt

$$\frac{E}{e} = Z = \text{Atomnummer},$$

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} = R_\infty$$

und $$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \nu' = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{also} \quad \nu = c\nu,$$

so folgt unmittelbar die Formel

$$(42) \qquad \nu' = R_\infty \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

in der die *Wellenzahl* $\nu' = \frac{1}{\lambda}$ die Zahl der Wellen pro cm für jene Linie angibt, die beim Atom von der Atomnummer Z entsteht, wenn das Elektron aus einer k-quantigen in eine n-quantige Bahn springt. Ist $k > n$, so wird dabei nach (41) ein positiver Energiebetrag frei und es erfolgt Emission. Nimmt man die n-quantige Bahn als Grundbahn, und variiert man k mit $k = n + 1, n + 2, n + 3, \ldots$, so erhält man eine Serie zusammengehöriger Spektrallinien, die durchweg bei Sprüngen in den Grundzustand n (Emission) oder aus demselben heraus (Absorption) entstehen. Die „Seriengrenze" folgt mit $k = \infty$; dort hat ν' sein Maximum erreicht.

Die Serie setzt sich also mit $k = n + 1$ beginnend gegen die größeren ν', also kleineren λ fort bis zur Seriengrenze.

---

75) Phil. Mag. 26 (1913), p. 24.

Die sogenannte *Rydberg*konstante R_∞ ergibt sich mit den bekannten numerischen Werten

$$m = 9{,}03 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g},$$

$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm},$$

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg\,sec}^{-1}$$

zu

$$R_\infty = 1{,}097\,371 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}^{-1},$$

sie ist also ebenso wie ν' eine reziproke Länge.

Die obige Formel (42) wurde unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Bewegung des Elektrons um einen ruhenden Atomkern erfolgt, daß also die Kernmasse gegenüber der Elektronenmasse unendlich groß ist, was bekanntlich aber nicht der Fall ist. Nennt man A und a sowie M und m die Distanzen vom Schwerpunkt des Systems bzw. die Massen für Atomkern und Elektron, so folgt zunächst

$$AM = am,$$

und an Stelle der Bewegungsgleichung (35) tritt die Beziehung

$$ma\omega^2 = MA\omega^2 = \frac{eE}{(A+a)^2}.$$

Setzt man

$$\mu = \frac{mM}{m+M},$$

so erhält man daraus leicht

$$\mu(a+A)^3\omega^2 = eE, \tag{43}$$

welche Gleichung nunmehr an Stelle von (36) tritt. Zur Aufstellung einer Quantenbedingung ist zu bedenken, daß sich die beiden Impulsmomente addieren, daß also

$$ma^2\omega + MA^2\omega = \mu(a+A)^2\omega$$

gequantelt werden muß. Das gibt nun statt Gleichung (37)

$$\mu(a+A)^2\omega = \frac{nh}{2\pi}. \tag{44}$$

Führt man die weiteren Rechnungen ebenso durch wie früher, so erhält man schließlich wieder die Serienformel

$$\nu' = RZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{45}$$

in der nun aber

$$R = \frac{2\pi^2\mu e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \cdot \frac{M}{M+m} = R_\infty \cdot \frac{1}{1+\frac{m}{M}} \tag{46}$$

vom Verhältnis der Massen von Kern und Elektron abhängig geworden ist.

Bei Betrachtung elliptischer Elektronenbahnen gehen wir aus vom Bogenelement in der Ellipse (r = Radiusvektor, φ = wahre Anomalie)

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2,$$

mit dem sich die momentane kinetische Energie zu

$$(47) \qquad w_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}r'^2 + \frac{mr^2}{2}\omega^2$$

ergibt. Somit folgt nun, ähnlich wie früher,

$$(48) \quad W = W_r + W_\omega = \int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial r'}\,dr + \int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial \omega}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} mr'\,dr + \int_0^{2\pi} mr^2\omega\,d\varphi,$$

und es sind nun beide Integrale entsprechend zu quanteln. Für das zweite Integral ergibt sich der gleiche Wert wie früher, also ist wieder wie bei (37)

$$(49) \qquad W_\omega = 2\pi m r^2 \omega, \quad p = mr^2\omega = \frac{nh}{2\pi}.$$

Wir bezeichnen n als azimutale Quantenzahl.

Im ersten Integral ist r' von φ abhängig, nach dem dann über den ganzen Umlauf zu integrieren ist. Durch logarithmische Differentiation der Kegelschnittsgleichung folgt zunächst

$$(50) \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon \sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi};$$

weiter ist

$$(51) \qquad p_r = mr' = m\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = m\omega\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

und

$$mr'\,dr = \frac{p}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}\,d\varphi = p\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 d\varphi.$$

Bei Quantelung des nun leicht umzuformenden Integrals erhält man also

$$p\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = n'h,$$

oder mit (49)

$$(52) \qquad \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{n'}{n},$$

woraus nach Durchführung der Integration [76]) folgt

$$(53) \qquad 1-\varepsilon^2 = \frac{n^2}{(n+n')^2}.$$

n' nennt man die „radiale Quantenzahl". Wächst n' bei gleichbleibendem n, so wird ε größer, die Bahn dringt also tiefer ins Atominnere ein.

76) Über die Durchführung der Integration siehe *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. 1924, p. 772.

Gleichung (38) läßt sich auf die Form

$$w_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{p}{mp^2}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}\right)$$

bringen, aus der mit (51) und (50) schließlich folgt

$$(54)\quad w_{\text{kin}} = \frac{p}{2mr^2}\left[\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + 1\right] = \frac{p^2}{ma^2(1-\varepsilon^2)^2}\left[\frac{1+\varepsilon}{2} + \varepsilon\cos\varphi\right]$$

Außerdem ist noch

$$(55)\qquad w_{\text{pot}} = -\frac{eE}{p^2} = -\frac{eE}{a(1-\varepsilon^2)}(1+\varepsilon\cos\varphi).$$

Da nun $w = w_{\text{kin}} + w_{\text{pot}} = \text{const}$, also von φ unabhängig sein muß, so müssen die von φ abhängigen Glieder in w verschwinden. Das gibt

$$(56)\qquad \frac{p^2}{ma^2(1-\varepsilon^2)^2}\,\varepsilon\cos\varphi - \frac{eE}{a(1-\varepsilon^2)}\,\varepsilon\cos\varphi = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(57)\qquad \frac{p^2}{ma(1-\varepsilon^2)} = eE.$$

Man hat nun der Reihe nach für a die Werte

$$(58)\quad a = \frac{p^2}{meE(1-\varepsilon^2)} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{meE}\cdot\frac{(n+n')^2}{n^2} = \frac{h^2}{4\pi^2 meE}(n+n')^2.$$

Bei elliptischen Bahnen sind also die großen Halbachsen dem Quadrat der Summe der beiden Quantenzahlen proportional.

Mit der Bedingung (56) geben nun aber (54) und (55)

$$w = w_{\text{kin}} + w_{\text{pot}} = \frac{p^2}{ma^2(1-\varepsilon^2)^2}\,\frac{1+\varepsilon^2}{2} - \frac{eE}{a(1-\varepsilon^2)},$$

oder mit (57) $\qquad w = -\dfrac{eE}{2a},$

also einen Wert, der dem bei Kreisbahnen gefundenen gleich ist und auch aus der Energiegleichung im astronomischen Zweikörperproblem folgen würde. Setzt man noch den Wert von a aus (58) ein, so wird

$$w = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\frac{1}{(n+n')^2} = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}Z^2\frac{1}{(n+n')^2}.$$

Charakterisiert man einen Anfangszustand wieder durch die Quantenzahlen $k+k'$, einen Endzustand durch $n+n'$, so ergibt sich mit Gleichung (34) sofort

$$(59)\qquad \nu' = R_\infty Z^2\left[\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(k+k')^2}\right] = R_\infty Z^2\left[\frac{1}{N^2} - \frac{1}{K^2}\right]$$

als Serienformel, die neben elliptischen Bahnen auch den Fall der Kreisbahnen einschließt. Nennt man $N = n + n'$, $K = k + k'$, die „totalen Quantenzahlen“, die in den Gleichungen (42) und (45) aufgetreten sind, so hat man zwischen der Bahnexzentrizität, die durch (53) gegeben ist, und den N, n' oder den K, k' folgenden mit den

Vorbemerkungen im Unterabschnitt a) dieser Nr. (p. 557) übereinstimmenden Zusammenhang:

$$n' = 0, \quad N = n, \quad \varepsilon = 0 \qquad \text{Fall der Kreisbahn,}$$

$$n' = 1, 2, 3 \ldots, \qquad 1 > \varepsilon > 0 \quad \text{Fall der Ellipsenbahnen.}$$

Für $n = 0$ würde $\varepsilon = 0$, d. i. eine Ellipse mit der kleinen Achse $b = 0$, also eine zu einer durch den Atomkern gehenden Geraden entartete Bahn folgen, die deswegen unmöglich ist, weil das Elektron in diesem Fall in den Atomkern stürzen müßte. Die Variation von $N = 1, 2, 3, \ldots$ gibt die Quantenzahlen der aufeinanderfolgenden Elektronenbahnen, und die Zerlegung $N = n + n'$ unter gleichzeitiger Ausschaltung des unmöglichen Falles $n = 0$ gibt dann dazu die bei einer bestimmten Quantenzahl überhaupt möglichen Bahnformen. Die bezüglichen Verhältnisse sind für $N = 1, 2, 3$ im hier beigegebenen Täfelchen ersichtlich gemacht.

$N = n + n'$	n	n'	Bahnform	Zahl der möglichen Bahnen
1	1	0	Kreis	1
2	1	1	Ellipse, $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	2
	2	0	Kreis	
3	1	2	Ellipse, $\varepsilon = \frac{2}{3}\sqrt{2}$	3
	2	1	„ $\varepsilon = \frac{1}{3}\sqrt{5}$	
	3	0	Kreis	

Setzt man z. B. in (59) $N = n + n' = 2$, $K = k + k' = 3$, so kann die durch (59) definierte Spektrallinie nun durch Sprung aus zweierlei Bahnformen bei N in dreierlei Bahnformen bei K, im ganzen also auf sechs verschiedene Arten entstanden sein.

Nimmt man in den Formeln (42), (45) und (59) nacheinander

$$n = N = 1, \quad k = K = 2, 3, 4, \ldots$$
$$n = N = 2, \quad k = K = 3, 4, 5, \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so erhält man Linienserien, die der Reihe nach von einquantigen, zweiquantigen usw. Bahnen ihren Ausgang nehmen. Man bezeichnet die von $n = N = 1$ ausgehende Serie als die Hauptserie (H.S.), die weiteren als Nebenserien (N.S.). Schreibt man die obigen Serienformeln in der gemeinsamen Form an:

$$\nu' = \frac{RZ^2}{n^2} - \frac{RZ^2}{m^2},$$

so bestehen sie durchweg aus einem für die betreffende Linienserie unveränderlichen oder „stabilen“ Term $\frac{RZ^2}{n^2}$, der für sich allein die Seriengrenze gibt, und aus dem veränderlichen „Laufterm“ $\frac{RZ^2}{m^2}$. Bezeichnet man den stabilen Term der Hauptserie $\frac{RZ^2}{1^2}$ mit dem Symbol $1\,S$, die Laufterme $\frac{RZ^2}{2^2}, \frac{RZ^2}{3^2}, \ldots, \frac{RZ^2}{m^2}$ dieser Serie aber mit $2\,P$, $3\,P, \ldots$ (P = Laufterm der Prinzipalserie!), so erhält man für die Linien der H.S. die in der Spektroskopie übliche symbolisierende Bezeichnungsweise

$$\text{H.S.:}\quad 1\,S - mP \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots).$$

Bei den hier zunächst zu behandelnden einfachsten Atomen von H und He ist der erste Laufterm $2\,P$ wieder gleich dem stabilen Term $\frac{RZ^2}{2^2}$ der nächsten Serie, der sogenannten ersten Nebenserie (I. N.S.), die nach dem meist diffusen Aussehen der Linien auch gern „diffuse Serie“ (D.S.) genannt wird. Bezeichnet man die Laufterme dieser Serie mit dem Symbol D, so hat man die Bezeichnungsweise

$$\text{I. N.S.:}\quad 2\,P - mD \qquad (m = 3, 4, 5, \ldots).$$

Die von $n = 3$ ausgehende nächste Serie, die sogenannte *Paschen*- oder *Bergmann*serie (B.S.) hat wieder $3\,D$ als stabilen Term, und die Laufterme seien mit F bezeichnet. Das Liniensymbol ist also

$$\text{B.S.:}\quad 3\,D - mF \qquad (m = 4, 5, 6, \ldots).$$

Das Schema dieser Symbole ist durch weitere Zeichen $G, H, \ldots$ natürlich beliebig zu erweitern. Bei komplizierter gebauten Atomen sind die ersten Laufterme einer Serie aber nicht völlig gleich den stabilen Termen der nächsten Serie. Dann werden auch Kombinationen, wie z. B.

$$2\,P - mS \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

möglich. Speziell diese beispielsweise gegebene Kombination führt auf die Linien der sogenannten zweiten Nebenserie (II. N.S.), die bereits beim Atom des neutralen Heliums, also schon bei Anwesenheit zweier Elektronen auftritt.

Es sei nun versucht, an der Hand der bisherigen Untersuchungen die Spektren von H ($Z = 1$) und He^+ ($Z = 2$) zu entwickeln. Wir benötigen dazu zunächst gemäß Gleichung (45) die *Rydberg*konstanten R_H und R_{He}. Schreibt man in Gleichung (46) $1 + \frac{\frac{e}{M}}{\frac{e}{m}}$ statt $1 + \frac{m}{M}$, so ist $\frac{e}{m}$ gegeben, nämlich

$$\frac{e}{m} = 1{,}769 \cdot 10^7,$$

und $\frac{e}{M}$ ist die spezifische Ionenladung oder elektrochemische Äquivalentladung, die für ein Element vom Atomgewicht g gleich ist

$$\frac{e}{M_g} = \frac{1}{g}\, 96\,494 \text{ Coulomb.}$$

Für Wasserstoff ($g = 1{,}008$) erhält man mit diesen Zahlen

$$R_{\mathrm{H}} = 1{,}096\,54 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1},$$

also einen Wert, der mit dem von *J. J. Balmer*[77]) im Jahre 1885 aus den Wellenlängen der Wasserstofflinien empirisch abgeleiteten Wert $1{,}096\,7769 \cdot 10^5$ fast völlig übereinstimmt. Für Helium dagegen erhält man

$$R_{\mathrm{He}} = 1{,}097\,2214 \cdot 10^5.$$

Man hat nunmehr für *Wasserstoff:*

1. *Hauptserie:* $n = 1$, $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\begin{array}{lll} 1S - 2P: & \lambda = 1215{,}7 & \text{Å.E.} \\ 1S - 3P: & 1025{,}8 & " \\ 1S - 4P: & 972{,}0 & " \end{array}$$

Diese im äußersten Ultraviolett liegenden Linien sind von *Th. Lyman*[78]) im Wasserstoffspektrum aufgefunden worden. Man nennt diese Serie daher auch *Lymanserie.*

2. *Erste Nebenserie:* $n = 2$, $m = 3, 4, 5, \ldots$

$$\begin{array}{llll} 2P - 3D: & \lambda = 6562{,}8 & \text{Å.E.} \ldots\ldots & H_\alpha \\ 2P - 4D: & 4861{,}3 & " \ \ldots\ldots & H_\beta \\ 2P - 5D: & 4340{,}5 & " \ \ldots\ldots & H_\gamma \\ 2P - 6D: & 4101{,}7 & " \ \ldots\ldots & H_\delta \\ 2P - 7D: & 3970{,}1 & " \ \ldots\ldots & H_\varepsilon \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2P = 2P - \infty D: & 3645{,}6 & " \ \ldots\ldots & \text{Seriengrenze.} \end{array}$$

Diese I. N.S. liegt gänzlich im sichtbaren oder doch photographisch leicht zugänglichen Spektralbereich. An ihr zeigt sich deutlich die übrigens aus den Serienformeln folgende Eigentümlichkeit, daß sich die Distanzen der einzelnen Linien voneinander immer mehr verringern, je mehr man sich der Seriengrenze nähert. *J. J. Balmer*[79]) gelang es, an diesen Linien zum erstenmal zu einer Darstellung der Wellen-

77) Ann. Phys. 25 (1885), p. 80.

78) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 263; Astroph. Journ. 23 (1906), p. 181 und Washington Nat. Acad. Proc. 1 (1915), p. 369.

79) Ann. Phys. 25 (1885), p. 80.

längen durch die von ihm empirisch gefundene Formel

$$\lambda = h \cdot \frac{k^2}{m^2 - 2^2}$$

zu gelangen. Diese *Balmer*sche Formel geht übrigens mit $h = \frac{1}{R}$ und $k = 2m$ sofort in die Form der obigen theoretisch gefundenen Serienformeln über. Man nennt diese insbesondere astrophysikalisch wichtige Linienserie des Wasserstoffs zumeist „*Balmerserie*".

3. *Bergmannserie* (bei H auch *Paschen*serie): $n = 3$, $m = 4, 5, 6, \ldots$ Die im Infrarot gelegenen Linien dieser Serie

$$3D - 4F\colon\ \lambda = 18\,751{,}3 \text{ Å.E.}$$
$$3D - 5F\colon\ \quad 12\,817{,}6 \text{ „}$$

wurden von *F. Paschen*[80]) gefunden. Auch für die von $n = 4$ und $n = 5$ ausgehenden, ebenfalls tief im Infrarot liegenden Serien sollen nach *A. H. Pfund*[81]) Andeutungen vorhanden sein.

Die H-Molekel sendet als Ganzes ein kompliziertes Spektrum. das sogenannte Viellinienspektrum aus, das sich über die *Balmer*serie lagert, wenn das *Geißler*rohr nur schwachen Entladungen ausgesetzt oder von Gleichstrom durchflossen wird. Dieses Spektrum sowie weitere Spektren des Wasserstoffs[82]) sind Bandenspektren.

Von den Spektren des ionisierten He (He^+) sind bekannt geworden:

1. *Die Bergmannserie:* $n = 3$. Die Linie

$$3D - 4F\colon\ \lambda = 4686 \text{ Å.E.}$$

spielt in den Spektren heißer Sterne eine Rolle. Sie wurde von *A. Fowler*[83]) und von *E. J. Evans*[84]) im Laboratorium ebenfalls gefunden, ebenso wie die weiteren Linien

$$3D - 5F\colon\ \lambda = 3203 \text{ Å.E.}$$

und

$$3D - 6F\colon\ \lambda = 2733 \text{ „}$$

2. Die von $n = 4$ ausgehende Serie des He^+ ist spektralanalytisch besonders interessant. Man kann die Serienformel für diesen Fall leicht in folgender Weise umformen:

$$\nu' = \frac{R_{He} Z^2}{4^2} - \frac{R_{He} Z^2}{m^2} = \frac{R_{He}\left(\frac{Z}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{R_{He}\left(\frac{Z}{2}\right)^2}{m'^2},$$

80) Ann. Phys. (4) 27 (1908), p. 537.

81) Journ. opt. Soc. Amerika 9 (1924), p. 196.

82) Siehe bei *H. Kayser,* Handb. d. Spektroskopie V (1910), p. 492.

83) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1912), p. 66.

84) Nature 92 (1913).

wo $m' = 2m$ und $Z = 2$. Setzt man in der neuen Formel

$$\nu' = \frac{R_{\mathrm{He}}}{2^2} - \frac{R_{\mathrm{He}}}{m'^2},$$

$m' = 3, 4, 5, \ldots$, so erhält man nur jedes zweite Glied dieser Serie, und da die Serienformel für diese Linien der *Balmer*formel völlig gleicht und R_{He} und R_{H} nicht viel voneinander verschieden sind, so müssen die Wellenlängen speziell dieser Glieder den Wellenlängen der *Balmer*linie nahezu gleich sein.

Die ganze Serie hat folgende Linien:

$4F - 5G$:	im Infrarot			
$4F - 6G$:	6560,2 Å.E.	. . .	$H_\alpha = 6562{,}8$ Å.E.	
$4F - 7G$:	5411,6 „	$(H_{\alpha'})$		
$4F - 8G$:	4859,4 „	. .	$H_\beta = 4861{,}3$ „	
$4F - 9G$:	4541,6 „	$(H_{\beta'})$		
$4F - 10G$:	4338,7 „	. . .	$H_\gamma = 4340{,}5$ „	
$4F - 11G$:	4199,9 „	$(H_{\gamma'})$		
$4F - 12G$:	4100,1 „	. . .	$H_\delta = 4101{,}7$ „	
. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . . .	

Es ist klar, daß in den Sternspektren die *Balmer*-ähnlichen Linien dieser Serie durch die breiten *Balmer*linien selbst verdeckt werden. Tatsächlich hat *E. C. Pickering*[85]) zuerst im Spektrum des Sterns ζ Puppis nur die zwischen den *Balmer*linien liegenden Linien entdeckt, die er wegen der Ähnlichkeit der Anordnung mit den *Balmer*linien und wegen ihrer Darstellbarkeit durch den der *Balmer*formel ähnlichen Ausdruck

$$\lambda = 3646{,}1 \frac{m^2}{m^2 - 16}$$

für Linien einer neuen, nur in den Sternen beobachtbaren Wasserstoffserie hielt und daher mit den Symbolen $H_{\alpha'}$, $H_{\beta'}$, $H_{\gamma'}, \ldots$ bezeichnete. Erst viel später, und nachdem die ganze Serie durch die *Bohr*schen Untersuchungen bereits als He^+-Serie erkannt worden war, gelang es *H. H. Plaskett*[86]), in den Spektren einiger O-Sterne auch die *Balmer*-ähnlichen Glieder von den *Balmer*linien zu separieren.[87]) Experimen-

85) Astroph. Journ. 5 (1897), p. 92.

86) Publ. Dominion. obs. Victoria, Canada 1 (1922), Nr. 30, p. 336.

87) Vgl. dazu die theoretischen Erörterungen von *N. Bohr* in Phil. Mag. (6) 26 (1913), p. 1.

tell ist diese Linienserie als Serie des Heliums von *A. Fowler*[88]) und *F. Paschen*[89]) nachgewiesen worden.[90])

c) *Die Linienserien der anderen Elemente.* Ist die Zahl der vorhandenen Elektronen nicht groß, so kann man bei der Vorstellung bleiben, daß die Elektronenbahnen in einer Ebene liegen, und es genügt die Teilung der totalen Quantenzahl N in einen azimutalen Anteil n und einen radialen Anteil n'. Wächst aber die Zahl der Elektronen, so wird, um für sie Bahnmöglichkeiten zu schaffen, nötig, auch Bahnen gleicher Art, aber verschiedener Neigung gegeneinander zuzulassen. Legt man im Atom eine Richtung als bevorzugt fest, z. B. die Richtung des inneratomaren Feldes oder die Richtung des äußeren Kraftfeldes, so kann der Räumlichkeit der Bahn durch Berücksichtigung von r (Radiusvektor), ψ (Länge in der Bahn) und ϑ (Breite) entsprochen werden. Man hat dann für die Gesamtenergie bei einem Umlauf

$$W = W_r + W_\psi + W_\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial r'} dr + \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \psi'} d\psi + \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \vartheta'} d\vartheta$$

und durch Vergleich mit (48)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \omega} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \psi'} d\psi + \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \vartheta'} d\vartheta.$$

Quantelt man also nun nicht nach φ azimutal allein, sondern nach ψ (Quantenzahl n_1) und nach ϑ (n_2), so folgt wie früher

$$n = n_1 + n_2,$$

die azimutale Quantenzahl n ist also in eine äquatoreale Quantenzahl n_1 und in eine Breitenquantenzahl n_2 zerfallen. Ist i die Neigung der Bahn gegen die Grundebene, so besteht zwischen W_ω und den Komponenten W_ψ und W_ϑ die Beziehung

$$W_\psi = W_\omega \cos i,$$

also gilt auch

$$n_1 = n \cos i$$

oder

$$\cos i = \frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Bei dieser Quantelung im Raum muß aber $n_1 > 0$ sein, denn für $n_1 = 0$ hätte man $i = 90^0$, und bei dieser Bahnlage würde die Bahn durch die Wirkung der äußeren Kraft nach und nach so deformiert, daß das Elektron endlich in den Atomkern stürzen müßte.

88) London Roy. Soc. Proc. 90 (1914), p. 426.

89) Ann. Phys. 50 (1916), p. 901.

90) Linien des Li^{++}, das einen ähnlichen Bau hat wie H und He^+, sind im Laboratorium noch nicht beobachtet worden.

Soll es zur Entstehung einer Spektrallinie kommen, so muß immer ein äußeres Elektron aus einer stabilen Lage gebracht werden. Dieses sogenannte „Aufelektron" unterliegt aber nicht der anziehenden Wirkung des Kerns allein, sondern auch den abstoßenden Kräften der übrigen $Z - 1$ Elektronen. Ist die Distanz des Aufelektrons vom Kern groß geworden, so können alle Kraftwirkungen als im Kern vereinigt gedacht werden, und der einfache Term $\frac{RZ^2}{m^2}$ wird eine genügend sichere Darstellung ergeben können. Bei großer Distanz des Elektrons vom Kern tritt also sogenannte „Wasserstoffähnlichkeit" ein. Bei kleiner Distanz des Elektrons aber wird nötig, in den Termnenner Korrektionsglieder aufzunehmen, die für das betreffende Element und eine bestimmte Linienserie bestimmte typische Werte annehmen. Daraus wird die von *W. Ritz*[91]) für komplizierter gebaute Atome benützte Termform

$$\frac{R}{[m + m' + k + \varkappa(m, k, \varkappa)]^2}$$

verständlich, in der m und m' die azimutale bzw. radiale Quantenzahl bedeuten und k und $\varkappa$ Korrektionsglieder vorstellen, die von der Größe von $m + m'$ abhängen und in der Regel bei wachsendem $m + m'$ kleiner werden.

Je komplizierter das Atom gebaut ist, desto komplizierter und linienreicher wird sein Spektrum. In den Bogenspektren der Alkalimetalle treten z. B. Doppellinien auf (D_1 und D_2 bei Natrium), die serienmäßig aufeinanderfolgen. Dem *Ritz*schen Term kommen bei diesen Elementen also zwei etwas verschiedene Werte zu. In den Spektren der Erdalkalien dagegen, die die nächste Kolonne des periodischen Systems einnehmen, treten Dubletserien nur im Funken, aber Einfachserien und Tripletserien im Bogen auf. Das Spektrum der Erdalkalien wird also bei stärkerer Anregung im Funken (Eintreten der Ionisation) ähnlich dem Spektrum der im periodischen System um eine Kolonne vorher stehenden Elemente (*Kossell-Sommerfeld*s Verschiebungsgesetz). Nach *J. R. Rydberg*[92]) hängt das Auftreten von gerad- oder ungeradzahligen Liniengruppen — gleichzeitig können überhaupt entweder nur gerade oder nur ungerade „Multiplizitäten" nebeneinander vorkommen — davon ab, ob die Zahl der im neutralen oder ionisierten Atom vorhandenen Valenzelektronen ungerade ist oder gerade. *A. Landé*[93]) fand, daß bis zu acht Multiplizitäten des *Ritz*schen

91) Ann. Phys. 12 (1903), p. 264.

92) Ann. Phys. 60 (1919), p. 405 und 63 (1920), p. 201.

93) Ztschr. f. Phys. 15 (1923), p. 189.

Terms vorkommen können, der dann seine acht verschiedenen Werte bei konstanter azimutaler Quantenzahl m durch Variation der m', k und $\varkappa$ annimmt. Ordnet man die einzelnen Terme nach ihrer Größe und drückt man die Termzahl durch einen Index links oben aus, so hätte man z. B. für eine Quadrupletserie mit dem Laufterm D

$$^4D_1 < {}^4D_2 < {}^4D_3 < {}^4D_4.$$

Jedem dieser Terme entspricht ein bestimmter regulärer Energiebetrag, so daß diese Reihe also eine Reihe abfallender Energieniveaus im Atom darstellt, denen verschiedene, sogenannte „innere Quantenzahlen" n_2 zukommen. Da dem kleinsten Term das höchste Niveau entspricht, ordnen wir der obigen Termreihe also die Reihe der inneren Quantenzahlen zu:

$$n_i = 4, 3, 2, 1.$$

A. Landé[94]) hat in der folgenden Tafel den Zusammenhang dargestellt, der bei Einfach- bis zu Siebenfachtermen ($r = 1, 2, \ldots, 7$) zwischen den Serientermen, den azimutalen und den inneren Quantenzahlen besteht.

m	Serien-term	n_i						
		$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
1	S	0	1	1	2	2	3	3
2	P	1	1, 2	0, 1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3	2, 3, 4	2, 3, 4
3	D	2	2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5
4	F	3	3, 4	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
5	G	4	4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5, 6	2, 3, 4, 5, 6	2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Bei der Kombination der Terme zu Serienformeln gilt übrigens für die inneren Quantenzahlen nach Beobachtungen im physikalischen Laboratorium das Auswahlprinzip, daß irgendeine Verbindung zweier Terme mit den inneren Quantenzahlen i und j, z. B. $^2P_i - {}^3D_j$, nur dann auf Linien führt, wenn

$$j \geqq i,$$

Kombinationen, bei denen $j < i$, sind nicht beobachtet worden.

Ebenso wie früher werden auch die multiplen Terme zu Haupt- und Nebenserien kombiniert, doch herrscht in der Art der Bezeichnung der Multiplizität noch keine Einheitlichkeit. Zumeist verwendet man die großen lateinischen Buchstaben für Einfachserien, die kleinen lateinischen Zeichen für Tripletserien und griechische Buchstaben für Dubletterme. *F. A. Saunders* und *H. N. Russell*[95]) haben vorgeschlagen,

94) Ztschr. f. Phys. 15 (1923), p. 189.
95) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 64.

die Terme durchwegs mit großen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen und die Multiplizität durch einen Index links oben vor dem Termzeichen, die Termnummer (innere Quantenzahl) aber durch ein Suffix rechts unten auszudrücken. Hier soll im weiteren diese klare Bezeichnungsweise beibehalten werden.

Aus der obigen Tabelle ist zu ersehen, daß der stabile S-Term der Hauptserie immer einfach ist.[96]) Die Wellenzahldifferenzen zwischen den bei Kombinationen desselben mit einem Mehrfachterm auftretenden Gruppengliedern nehmen daher von Gruppe zu Gruppe ab und nähern sich an der Seriengrenze der Null. In den Nebenserien dagegen sind die stabilen Terme von derselben Multiplizität wie die Laufterme. Die Wellenzahldifferenzen zwischen den Gruppengliedern bleiben dabei in der zweiten Nebenserie stets konstant, während sie in der ersten Nebenserie gegen einen bestimmten, von der Null verschiedenen Betrag konvergieren.[97]) Überdies gilt das sogenannte „*Ritzsche Kombinationsprinzip*“[98]), welches besagt, daß man durch Addition und Subtraktion ganzer Serienformeln oder einzelner Terme derselben wieder neue Linien erhalten kann. *W. Ritz*[99]) konnte sogar multiple Serien bemerken, die sich als Kombinationsserien einer im Spektrum vorhandenen Linienserie mit einer solchen, die nicht nachweisbar war, erwiesen. Solche „anomale“ Liniengruppen sind erst kürzlich wieder von *H. N. Russell* und *F. A. Saunders*[100]) in den Spektren von Ca, Sr und Ba gefunden worden. Nach neueren Erfahrungen im Laboratorium sind jedoch nur Termkombinationen gestattet, bei denen sich die azimutalen Quantenzahlen gerade um eine Einheit unterscheiden (Auswahlprinzip)[101]) und außerdem können nur Terme von geraden Multiplizitäten oder Terme ungerader Multiplizität unter sich kombiniert werden.[102]) Von besonderem Interesse ist im letzteren Sinn das neutrale He-Atom, das im Gegensatz zur früheren Behauptung, daß nur geradzahlige oder ungerade Vielfachserien gleichzeitig vorhanden sein können, ein aus Einzellinien bestehendes Spektrum gleichzeitig neben Dubletserien auftreten läßt. Dabei sind die Einfach- und Zweifachterme im Atom verschiedenen Energieniveaus zuzuteilen, zwischen

96) Siehe *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. 1924, p. 485.

97) Siehe *A. Sommerfeld,* a. a. O. p. 579.

98) *W. Ritz,* Ges. Werke, herausg. v. d. Schweiz. phys. Ges., Paris 1911, Gauthier-Villars, p. 162.

99) Ann. Phys. 52 (1894), p. 119.

100) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 42.

101) Siehe *A. Sommerfeld,* a. a. O. p. 410.

102) Siehe *O. D. Chwolson,* Die Physik 1914—1926, Braunschweig 1927, Vieweg & Sohn, p. 156.

denen „*Metastabilität*" herrscht, d. h. zwischen denen keine Elektronenübergänge stattfinden, so daß ein Atom, das ein Spektrum aus Einfachlinien ergibt — man nennt diesen Zustand „Parhelium" —, niemals in den anderen Zustand des „Orthoheliums" übergehen kann, das Liniendublets aussendet. Sprünge zwischen metastabilen Zuständen sind immer „verboten", da die Kombination solcher Terme immer Linien ergibt, die noch niemals — wenigstens nicht im physikalischen Laboratorium — haben beobachtet werden können. In letzter Zeit ist allerdings wahrscheinlich geworden, daß solche „verbotene" Sprünge unter den besonderen im Weltraum waltenden Verhältnissen doch vorkommen (siehe Nr. 32, Die Spektren der Nebelflecken).

d) *Das kontinuierliche Spektrum an der Seriengrenze.* Von *R. W. Wood*[103]) wurde zuerst bei Natrium bemerkt, daß an der Grenze der Hauptserie $1S - mP$ ein kontinuierliches Spektrum beginnt, das später von *J. Holtzmark*[104]) neuerlich beobachtet und auch bei Kalium festgestellt worden ist. Eine ähnliche kontinuierliche Absorption, die an der Grenze der *Balmer*serie des Wasserstoffs ansetzt, wurde in den Spektren der Sterne vom Typus A gefunden und von *J. Hartmann*[105]) näher beschrieben. Nach *N. Bohr*[106]) stellt man sich vor, daß dieses kontinuierliche Spektrum dadurch zustande kommt, daß entweder der Anfangs- oder der Endzustand der Elektronensprünge nicht gequantelt ist. Wenn das Elektron aus dem Atomverband ins Unendliche abfliegt oder von dorther wieder in den Atomverband zurückkehrt, so ist es zur Aufnahme bzw. Abgabe beliebiger, also nicht gequantelter Energiebeträge befähigt. Betrachten wir nun den Fall der Emission, so gelangt es also mit einer beliebigen kinetischen Anfangsenergie

$$W_a = E_{\text{kin}}$$

in den Atomverband und springt dabei in die gequantelte Grundbahn von der Endenergie

$$W_e = -hG$$

der Seriengrenze G. Man hat nun die Beziehung

$$W_a - W_e = E_{\text{kin}} + hG = h\nu$$

oder

$$\nu = G + \frac{E_{\text{kin}}}{h},$$

in der nun E_{kin} alle möglichen Werte annehmen kann, so daß auch

103) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 211.

104) Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 88.

105) Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 429.

106) Abhandlungen über Atombau aus den Jahren 1913—1916, deutsch von *H. Stintzing*, Braunschweig 1921, Vieweg & Sohn, 1. Abh. p. 17.

ν beliebiger Werte

$$\nu \gtreqless G$$

fähig ist. Demnach muß die Emission eines Gases an der Seriengrenze G kontinuierlich werden.

e) *Die Bandenspektren.* Nicht in ihre Atome dissoziierte Gase oder chemische Verbindungen ergeben als Spektrum ihrer Molekeln ein Bandenspektrum. Der Name „Bandenspektrum“ ist auf den bei geringer Dispersion hervorgerufenen Eindruck zurückzuführen, als wären scheinbar kontinuierliche, breite, entweder nach Violett oder nach Rot abschattierte Bänder vorhanden. Bei stärkerer Dispersion zeigt sich jedoch, daß solche Banden immer aus zahlreichen Linien bestehen, die sich von der abschattierten Seite her gegen die Stelle größter Intensität der Bande hin serienmäßig anhäufen und dadurch den sogenannten „*Bandenkopf*“ oder die „*Bandenkante*“ bilden. Denselben Bandenkopf können eine oder mehrere solcher Linienfolgen *(Serien oder Zweige)* zugeordnet sein, die sich überlagern und eine „*Teilbande*“ bilden. Treten solche Teilbanden so nahe zusammen, daß sie sich gegenseitig überdecken, so entsteht eine „*Bandengruppe*“, deren Teilbandenköpfe wieder serienmäßige Lagerung erkennen lassen. Alle im Spektrum auftretenden Bandengruppen bilden dann das ganze „*Bandensystem*“.[107])

Die im scheinbaren Chaos der Bandenlinien vorhandenen Gesetzmäßigkeiten aufzudecken, ist zuerst *H. Deslandres*[108]) gelungen, der im Jahre 1891 über seine diesbezüglichen in den Jahren 1885—1890 vorgenommenen Untersuchungen berichtet hat.

Nach dem *ersten* der sogenannten *Deslandresschen Gesetze* lassen sich die einzelnen Serien einer Teilbande dadurch aufeinander reduzieren, daß man die Schwingungszahlen einer Serie um konstante Größen verändert.

Das *zweite Deslandressche Gesetz* besagt, daß die Linien einer Serie durch die Formel

$$\nu = A + Cm^2 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{60}$$

dargestellt werden können und daß die Wellenzahldifferenzen der aufeinanderfolgenden Linien eine arithmetische Reihe bilden. Letzteres folgt übrigens unmittelbar aus (60), da man für zwei benachbarte Linien von den Schwingungszahlen erhält

$$\nu_2 - \nu_1 = (2m + 1)C.$$

107) Man vgl. hierzu den Art. von *A. Kratzer,* Die Gesetzmäßigkeiten in den Bandenspektren, diese Encykl. V 3, Nr. 27.

108) Journ. de phys. (2) 10 (1891), p. 276.

K. Schwarzschild[109]) ist es gelungen, die *Deslandres*sche Formel (60) theoretisch abzuleiten, indem er von der Vorstellung von *N. Bjerrum*[110]) ausging, nach der die Bandenlinien durch Rotationszustände der ganzen Molekel zustande kommen. Zwischen dem Trägheitsmoment $J = ma^2$ der als starrer Körper gedachten Molekel und ihrem Impulsmoment $M = a \cdot mv = ma^2\omega$ besteht der Zusammenhang

(61) $$M = J\omega \quad (\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit}).$$

Also wird die kinetische Energie w

$$w = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{(J\omega)^2}{2J}.$$

Setzt man analog den früheren Quantenbedingungen

$$2\pi M = mh,$$

also $$J\omega = \frac{mh}{2\pi},$$

so hat man $$w = \frac{h^2m^2}{8\pi^2 J},$$

und aus Gleichung (34) $w_a - w_e = h\nu$ folgt damit

(62) $$\nu = \frac{hm'^2}{8\pi^2 J'} - \frac{hm^2}{8\pi^2 J}.$$

Läßt man für m' nur die Werte $m' = m \pm 1$ zu, so daß also nur Übergänge in angrenzende Rotationszustände zulässig erscheinen, so erhält man

$$\nu = \frac{hm^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) \pm \frac{2hm}{8\pi^2 J'} + \frac{h}{8\pi^2 J'}$$

oder eine Serienformel von der Gestalt

(63) $$\nu = A \pm 2Bm + Cm^2,$$

auf die auch *H. Deslandres*[111]) im Jahre 1919 seine frühere Formel (60) erweiterte. In diesem „*Rotationsglied*" bedeuten A, B und C Konstante, die durch Anfangs- und Endzustand bestimmt sind, und m ist die Laufzahl. Die durch Gleichung (63) gegebene Parabel stellt *R. Fortrat*[112]) in der Weise dar, wie die nebenstehende Fig. 2 zeigt. Der Scheitel der Parabel ist in dem aus den ν als Abszissen und den m als Ordinaten gebildeten Koordinatensystem durch $\frac{d\nu}{dm} = 0$

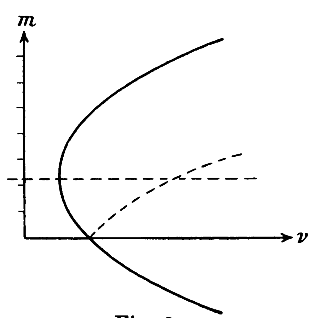

Fig. 2.

109) Berlin Sitzber. 1916, April.
110) Nernst-Festschr. 1912, p. 90.
111) Paris C. R. 168 (1919), p. 1179.
112) Thèses, Paris 1914, p. 109.

gegeben, er liegt also bei

$$\pm 2B + 2mC = 0$$

oder bei der Ordinate $\qquad m = \mp \frac{B}{C}.$

$\frac{B}{C} =$ const ist also Parabelachse. Die Abszissenachse $m = 0$ teilt die Parabel in zwei unsymmetrische Zweige. Der unter der Abszissenachse gelegene Ast führt auf die unbedingt größeren ν, entspricht also dem positiven Vorzeichen des B-Gliedes in Gleichung (63) oder dem $m' = m + 1$, wir nennen ihn daher den *positiven Zweig*. Bei der graphischen Darstellung pflegt man ihn in der Regel um die Abszissenachse in sein Spiegelbild umzuklappen. Der über der Abszissenachse gelegene Parabelteil kommt dann folgerichtig den Werten $m' = m - 1$ zu, entspricht also dem negativen Zeichen im B-Glied und heißt *negativer Zweig*.[113]) Projiziert man die Schnittpunkte der den aufeinanderfolgenden $m = 1, 2, 3, \ldots$ entsprechenden Abszissen mit der Parabel als Spektrallinien auf die ν-Skala, so ergibt sich gegen den Parabelscheitel zu eine Anhäufung von Linien, die Bandenkante. Da der Parabelscheitel auf dem negativen Zweig, also bei $m = + \frac{B}{C}$ liegt, tritt der Bandenkopf in der Nähe von

$$\nu = A - 2Bm + Cm^2 = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C}$$

auf. Er ist lediglich eine durch die Form der ν-Funktion gegebene Anhäufung. Differenziert man (63) zweimal nach ν und m, so folgt

$$\frac{d^2\nu}{dm^2} = 2C.$$

Bei positivem C ist also die Parabel nach der Seite der wachsenden ν geöffnet, die Bande daher nach Violett abschattiert. Umgekehrt folgt bei negativem C Abschattierung der Bande gegen Rot. Erwähnt sei noch, daß der Schnitt der Abszisse $m = 0$ mit der Parabel auf keine Linie führt. Jede Bande zeigt an dieser Nullstelle eine Lücke in der Linienfolge.

Für den Fall $m' = m$ würde aus (62) folgen

$$\nu = Cm^2.$$

Auch dieser sogenannte *Nullzweig* (Q-Reihe bei *Heurlinger*[114])) ist

---

113) *T. Heurlinger,* Untersuchungen über die Struktur der Bandenspektren, Diss. Lund 1919, spricht statt von einem positiven oder negativen Zweig von einer R- bzw. P-Reihe.

114) a. a. O.

durch Linien vertreten. Man nimmt an, daß er nicht eigentlich durch Rotationen, sondern durch Kreiselbewegungen der Molekel entsteht.[115])

Nach dem dritten *Deslandres*schen Gesetz bilden die Schwingungszahlen der aufeinanderfolgenden Kanten einer Bandengruppe wieder eine Folge, die durch die Relation

$$\nu = D + En^2$$

dargestellt werden kann. Dieses dritte Gesetz wird verständlich, wenn man neben der Rotation der Molekel noch eine Schwingung der Atomkerne gegeneinander, also eine sogenannte *Oszillation* zuläßt. Zu dem durch (63) gegebenen reinen Rotationsspektrum tritt dann noch das Oszillations- oder Schwingungsspektrum hinzu. Quantelt man die Oszillationen nach $h\nu_0$, so besteht für den Energiesprung beim Übergang von einem Quantenzustand n' zu einem anderen n die Relation

$$w_a - w_e = h(n' - n)\nu_0, \tag{64}$$

und der Beitrag zur Wellenzahl ν durch die Oszillation beträgt

$$(n' - n)\nu_0,$$

so daß für das aus Rotation und Oszillation zusammen entstehende Spektrum nunmehr die Beziehung

$$\nu = (n' - n)\nu_0 + A \pm 2Bm + Cm \tag{65}$$

besteht. Rotation und Oszillation sind aber voneinander nicht unabhängig, da sich ja bei der Oszillation das Trägheitsmoment der Molekel ändert. Man kann dieser gegenseitigen Abhängigkeit dadurch gerecht werden, daß man statt Gleichung (63) einen Ansatz von der Form

$$w_a - w_e = hn'\nu_0'(1 - x'n' + x'^2n'^2 - \cdots) - hn\nu_0(1 - xn + \cdots)$$

aufstellt, in dem die x und x' kleine von den jeweiligen Beziehungen zwischen Rotation und Schwingung abhängige Konstante vorstellen. Bleibt man bei den ersten Potenzen der Entwicklung stehen, so geht (65) in die Form

$$\nu = A \pm 2Bm + Cm^2 - Dn - En^2 + Fn' + Gn'^2 \tag{66}$$

über, die das ganze Rotations-Schwingungsspektrum umfaßt und mit einer Formel identisch ist, die ebenfalls von *H. Deslandres*[116]) gegeben worden ist. Den Term A, der in dieser Formel die Lage der Bande im Spektrum in gleicher Weise bestimmt wie die durch die Elektronenkonfiguration gegebene Seriengrenze bei den Linienspektren,

115) Siehe *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl. 1922, p. 545.

116) Paris C. R. 168 (1919), p. 1179.

nennt man *Elektronenterm*, die von m bzw. von n abhängigen Glieder bilden den *Rotations-* bzw. *Oszillationsterm.* Hält man den Quantensprung $n' - n$ fest, während man gleichzeitig n' und n entsprechend variiert, so erhält man eine Folge von Oszillationsbanden, also eine Bandengruppe, und die Schwingungszahlen der Linien ergeben sich für jede Bande aus der Variation von m. Als Beispiel seien einige Bandengruppen des Cyans angeführt, die nach der untenstehenden Tafel in folgender Weise zu analysieren sind.

Darstellung der Kanten der Bandengruppen des Cyans in Wellenlängen.

Bandengruppe	$n' - n$	Wellenlängen der Teilbandenkanten in Å.E.							
		$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
3883	0	3883	3871	3862	3855	3851			
4216	-1		4216	4197	4181	4168	4158		
4606	-2			4606	4578	4553	4532	4515	4502

Für diese Bandengruppen des Cyans hat *H. Kayser*[117]) folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

Cy I: 7273—4691 Å.E. . . bestehend aus zahlreichen schmalen linienartigen Banden, deren Zugehörigkeit zum Cyanspektrum von *A. Fowler* und *R. J. Strutt*[118]) und von *A. Fowler* und *H. Shaw*[119]) nachgewiesen worden ist.

Cy II: 4606—4502 Å.E. . . 6 Kanten.

Cy III: 4216—4158 „ . . 5 „

Cy IV: 3883—3851 „ . . 5 „

Cy V: 3590—3584 „ . . 3 „

Cy VI: 3360 „ . . 1 „

Neben dem Cyanspektrum sind astrophysikalisch noch folgende Bandenspektren wichtig geworden:

Das Swanspektrum. Dieses Spektrum, das aus mehreren nach Violett abschattierten Bandengruppen und Teilbanden besteht und beim Durchgang des Funkens durch ölbildende Kohlenwasserstoffe auftritt, wurde zuerst von *W. Swan*[120]) beobachtet und dem Kohlenwasser-

117) Handb. d. Spektroskopie V (1910), p. 224.

118) London Roy. Soc. Proc. A 86 (1912), p. 105.

119) London Roy. Soc. Proc. A 86 (1912), p. 118.

120) Trans. Roy. Soc. Edinburgh 21, III (1857), p. 411; Pogg. Ann. 100 (1857), p. 306.

stoff zugeschrieben. Nach neueren Untersuchungen von *A. Fowler*[121]) gehört dieses Spektrum, das auch vom blauen Teil der Flamme des Bunsenbrenners gegeben wird, aber dem Kohlenmonoxyd (CO) an. Es erscheint bei hohem Druck an der positiven Elektrode und wird von *Deslandres* daher auch *1. positive Gruppe des Kohlenstoffs* genannt. Die Bezeichnung und Lage der Bandkanten ist nach *H. Kayser*[122]):

Swanspektrum:	C I:	6191—5958 A.E. . .	5	Kanten
	C II:	5635—5470 „ . .	5	„
	C III:	5165—5082 „ . .	4	„
	C IV:	4737—4680 „ . .	5	„
	C V:	4381—4364 „ . .	3	„

Ein anderes Spektrum des Kohlenmonoxyds, das nach *A. Fowler*[123]) in einem Gemisch aus CO und H bei besonders niedrigem Druck unter 0,01 mm auftritt, ist

die 3. negative Gruppe des Kohlenstoffs, deren hier benutzte Benennung von *F. Baldet*[124]) vorgeschlagen worden ist. Seine von *Fowler* (l. c.) gefundene Zugehörigkeit zum Kohlenmonoxyd wurde später neuerlich von *T. R. Merton* und *R. G. Johnson*[125]), dann von *H. B. Lemon*[126]) an einem Gemisch von CO und He und schließlich von *F. Baldet*[127]) unter Benutzung der Erregung durch Elektronenstoß bestätigt. Der letztere fand, daß das Spektrum bei einem Druck von 10^{-2} bis 10^{-3} mm besonders gut entwickelt sei. Dieses Spektrum des CO, das übrigens vielleicht dem CO^+ zuzuschreiben ist, besteht aus etwa 37 im Bereich von 6412—3081 Å.E. liegenden, in Paaren angeordneten Bandengruppen, die von je vier nach Rot abschattierten Teilbanden gebildet werden.[128]) Das Spektrum der

Kohlenwasserstoffe (C + H) ist von *J. M. Eder*[129]) besonders genau untersucht worden, der für die Banden folgende Bezeichnung vorschlägt:

---

121) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1909), p. 176.

122) Handb. d. Spektroskopie V (1910), p. 224.

123) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1909), p. 176.

124) Journ. de Phys. et le Radium (6) 6 (1925), p. 70.

125) London Roy. Soc. Proc. A 103 (1923), p. 386.

126) Washington Nat. Acad. Proc. 11 (1925), p. 41.

127) Paris-Meudon obs. Ann. 7 (1926), p. 73.

128) Wegen genauerer Details siehe *F. Baldet*, a. a. O. p. 82. Nach *H. B. Lemon*, a. a. O., soll diese dritte negative Gruppe mit einer anderen von *H. Deslandres* gefundenen ersten negativen Gruppe des CO in Zusammenhang stehen.

129) Wien Denkschr. 57 (1890), p. 549.

ε: 4395—4324 Å.E. . . . nach beiden Seiten abschattierte Gruppe,
ζ: 4314—4160 „ . . . nach Violett abschattiert,
η: 4037—3871 „ }. . nach Rot abschattiert.
ϑ: 3687—3628 „

R. Fortrat[130]) hat noch eine weitere, ebenfalls nach Rot abschattierte Gruppe bei 3207—3095 Å.E. beobachten können. Schließlich ist noch zu erwähnen die sogenannte

negative Gruppe des Stickstoffs, die an der Kathode auftritt und deren nach Violett abschattierte Doppelbanden nach *B. Hasselberg*[131]) und *H. Deslandres*[132]) zwischen den Wellenlängen

β: 4709—4515 Å.E.
γ: 4278—4166 „
δ: 3914—3857 „
ε: 3582—3548 „
ζ: 3298—3296 „ liegen.

7. Die Ionisation. a) *Die elektrische Erregung. Erregungspotential und Ionisationspotential.* Legt man an das Gas eine elektrische Spannung E[133]), so nimmt ein Aufelektron die Energie eE auf, und durch den dabei aus der Grundbahn erfolgenden Elektronensprung entsteht nach der *Planck*schen Energiegleichung

$$eE = h\nu \tag{67}$$

eine Spektrallinie von der Schwingungszahl $\nu = \frac{c}{\lambda}$ pro Sekunde. Daher besteht die Beziehung

$$E\lambda = \frac{hc}{e},$$

in der λ in cm anzusetzen ist. Geht man bei λ auf $\mu\mu$ über ($1\,\mu\mu = 10^{-7}$ cm) und mißt man E in Volt V ($V = 10^8\,E$ elektromagnetische C.G.S.-Einheiten), so erhält man

$$\lambda_{\mu\mu} \cdot V = \frac{hc}{10\,e}$$

und mit den numerischen Werten $h = 6{,}547 \cdot 10^{-27}$, $e = 1{,}592 \cdot 10^{-20}$ sowie $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm

$$\lambda_{\mu\mu} \cdot V = 1234. \tag{68}$$

130) Paris C. R. 178 (1924), p. 1272.

131) Mem. acad. St. Petersbourg 7 (1885), p. 33.

132) Ann. chem. et phys. (6) 15 (1888), p. 5.

133) Über die physikalischen Arbeitsmethoden dazu siehe *O. D. Chwolson*, Die Physik 1914—1926, Kap. 6, § 6 und Kap. 9.

Mit Gleichung (68) ist ein einfacher Zusammenhang gefunden, der aus der Wellenlänge einer von der Grundbahn des Aufelektrons ausgehenden Linie die zur Erregung nötige Potentialdifferenz V oder das sogenannte *Erregungspotential* E.P. berechnen läßt. Für die gelbe Natriumlinie bei 5890 Å.E. würde z. B. damit ein E.P. von $V = 2{,}1$ Volt folgen. Springt das Aufelektron aus seiner Grundbahn in die nächst höhere Bahn, so entsteht dabei, wie bereits früher (p. 558) erwähnt, die sogenannte Resonanzlinie $1\,S - 2\,P$ als erste Linie der Hauptserie. Das für das Auftreten dieser Linie erforderliche E.P. nennt man daher auch *Resonanzpotential* R.P. Der Seriengrenze entspricht die letzte im Atomverband noch mögliche Elektronenbahn. Jede noch so geringe Steigerung der Energiezufuhr bewirkt, daß das Elektron aus dem Atomverband geschleudert wird. Führt man also das $\lambda_{\mu\mu}$ der Seriengrenze in Formel (68) ein, so erhält man diejenige Voltspannung, die nötig ist, das Atom zu ionisieren. Dieses sogenannte *Ionisationspotential* I.P. wäre also mit der bei $\lambda_{\mu\mu} = 241{,}2$ liegenden Seriengrenze für Natrium 5,11 Volt.

Als weiteres Beispiel dafür, wie Gleichung (68) verwendet werden soll, diene hier der Wasserstoff. An der Grenze der *Lyman*serie $\nu' = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{1^2} = \frac{1}{m^2}\right)$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ folgt für $m = \infty$ und mit $\nu' = \frac{10^7}{\lambda_{\mu\mu}}$, da $R_{\mathrm{H}} = 109\,677{,}7$,

$$\text{I.P.} = 1234 \cdot 109\,677{,}7 \cdot 10^{-7} = 13{,}53 \text{ Volt.}$$

Ebenso hätte man für die *erste Lymanlinie* mit $m = 2$

$$\nu = \tfrac{3}{4} R \quad \text{oder} \quad \text{E.P.} = \tfrac{3}{4}\,\text{I.P.} = 10{,}15 \text{ Volt,}$$

und mit $m = 3$ für die *zweite Lymanlinie*

$$\nu = \tfrac{8}{9} R \quad \text{oder} \quad \text{E.P.} = \tfrac{8}{9}\,\text{I.P.} = 12{,}03 \text{ Volt}$$

usw. Bei Ermittlung der E.P. der Linien der *Balmer*serie ist zu bedenken, daß die obige Gleichung (68) nur für Elektronensprünge aus der einquantigen Grundbahn gilt und daher nur auf die Linien der Hauptserie $1\,S - m\,P$ angewendet werden darf, während die *Balmer*linien aber bereits von der zweiquantigen Bahn ihren Ausgang nehmen. Da die erste *Balmer*linie H_α $(2\,P - 3\,D)$ durch Elektronensprünge zwischen der zwei- und dreiquantigen Bahn zustande kommt, war das Elektron also zunächst aus der Grundbahn in die zweiquantige und dann noch weiter in die dreiquantige zu heben und somit die gleiche Energie zuzuführen, die zur Erregung der zweiten *Lyman*linie nötig war. Das E.P. von H_α ist also gleich dem Erregungspotential der zweiten *Lyman*linie. Durch ähnliche Überlegungen folgt, daß das E.P.

von H_β gleich ist dem E.P. der dritten *Lyman*linie usf.[134]) Erwägt man noch, daß nicht das Atom, sondern die Molekel der ursprünglich gegebene Anfangszustand ist, so wären eigentlich alle eben berechneten Zahlen noch um die sogenannte *Dissoziationsspannung* zu vergrößern, durch die die Dissoziation der Molekel in die Atome bewirkt wird.

b) *Die thermische Ionisation.* Tritt eine chemische Verbindung aus den beiden Elementen M_1 und M_2, die in der Molkonzentration pro Liter Lösung c_1 und c_2 vorhanden sind, mit einer anderen Verbindung aus M_1' und M_2' mit den Konzentrationen c_1' und c_2' derart in Reaktion, daß immer der Reihe nach m_1, m_2, m_1', m_2' Mole miteinander zur Reagenz kommen, so tritt Reaktionsgleichgewicht ein, wenn die Gleichung

$$K = \frac{c_1'^{m_1'} \cdot c_2'^{m_2'}}{c_1^{m_1} \cdot c_2^{m_2}} \tag{69}$$

erfüllt ist, in der K eine für die betreffende Reaktion typische Konstante bedeutet. Faßt man die Ionisation eines Gases (z. B. des Ca-Dampfes) als einen ebensolchen umkehrbaren Reaktionsvorgang auf, für den die chemische Reaktionsgleichung

$$\mathrm{Ca} \rightleftarrows \mathrm{Ca}^+ + e$$

angesetzt werden darf, so treten an Stelle der Molkonzentrationen die Partialdrucke p, p^+ und p_e der vorhandenen Anteile an Ca, Ca^+ und e, und Gleichung (69) geht über in die Form

$$K = \frac{p^+ p_e}{p}. \tag{70}$$

Nennen wir x den Bruchteil der in der ganzen Atommenge bereits ionisierten Atome oder den Ionisationsgrad, so ist $1 - x$ die Zahl der neutralen Atome und $1 + x$ die Zahl aller Atome plus den vorhandenen freien Elektronen. Ist noch P der herrschende Gasdruck, so hat man

$$p^+ = p_e = \frac{x}{1+x} P \quad \text{und} \quad p = \frac{1-x}{1+x} P,$$

also statt (70)

$$K = \frac{x^2}{1-x^2} P. \tag{71}$$

Daß in den Fixsternatmosphären aber Gasgemische vorliegen aus verschiedenen Elementen von den Teilkonzentrationen a_1, a_2, a_3, … und

134) Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, daß die von *H. N. Russell* im Astroph. Journ. 61 (1925), p. 231 gegebenen E.P. nicht eigentlich E.P. der ersten Linien der angeführten Serien sind, sondern die Energien darstellen, die nötig sind, das Elektron in die Ausgangsbahn der betreffenden Serie zu heben.

den Ionisationsgraden $x_1, x_2, x_3, \ldots$, läßt sich nach *H. N. Russell*[135]) noch in folgender Weise berücksichtigen. Da die Summe aller i Bestandteile des Gemisches (Atome + Elektronen) gegeben ist durch

$$\sum_i a_i(1 + x_i),$$

hat man für p_i^+ und p_i für ein Element

$$p_i^+ = \frac{a_i x_i}{\sum\limits_i a_i(1 + x_i)} \quad \text{und} \quad p_i = \frac{a_i(1 - x_i)}{\sum\limits_i a_i(1 + x_i)},$$

während, da ja im ganzen $\sum a_i x_i$ freie Elektronen vorhanden sind, für den partialen Elektronendruck $p_e = P_e$ folgt

$$P_e = \frac{\sum\limits_i a_i x_i}{\sum\limits_i a_i(1 + x_i)},$$

oder, wenn man einen mittleren Ionisationsgrad $x_m = \frac{\sum\limits_i a_i x_i}{\sum a_i}$ einführt,

$$P_e = \frac{x_m}{1 + x_m} P.$$

Statt (71) ergibt sich nun

$$K = \frac{x_i}{1 - x_i} \cdot P_e. \tag{72}$$

Für K hat *W. Nernst*[136]) die Gleichung gegeben

$$\log K = -\frac{U_0}{4{,}571\, T} + \frac{\sum m C_p}{R} \log T + \sum m C, \tag{73}$$

in der U_0 die bei einer absoluten Temperatur von 0^0 zur Auslösung der Reaktion nötige Reaktionswärme pro Mol in Grammkalorien, C_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und R die Gaskonstante pro Mol ($0{,}831\,29 \cdot 10^8$ erg grad^{-1}) bedeuten und unter C die sogenannte chemische Konstante zu verstehen ist, die nach *O. Sackur*[137]), *H. Tetrode*[138]) und *O. Stern*[139]) mit dem Molekulargewicht M durch die sogenannte *Sackur-Tetrodesche Gleichung*

$$C = -1{,}602 + \tfrac{3}{2} \log M \tag{74}$$

---

135) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 120.

136) *W. Nernst,* Der neue Wärmesatz, Halle 1918, Kap. 11. Eine zusammenhängende Darstellung des *Nernst*schen Wärmesatzes ist auch von *V. Eucken* in „Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften“ 1 (1922), Berlin, J. Springer, gegeben worden.

137) Ann. Phys. (4) 40 (1913), p. 47.

138) Ann. Phys. (4) 38 (1912), p. 434.

139) Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 20 (1918), p. 206.

verbunden ist. Wendet man Gleichung (73) auf die Gleichungen (71) bzw. (72) an, so ist U_0 in folgender Weise zu bestimmen. Gleichung (67) läßt sich schreiben

$$eV \cdot 10^8 = h\nu = h\nu' c$$

oder

$$\frac{eV}{300} = h\nu' \text{ Erg.}$$

Da in einem Mol eines Gases $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ (*Avogadro*sche Zahl) Atome vorhanden sind und außerdem eine Grammkalorie durch $4{,}1863 \cdot 10^7$ Erg ersetzt werden kann, so ist das zur Durchführung der Ionisation nötige U_0

$$U_0 = \frac{eVN}{300 \cdot 4{,}1863 \cdot 10^7} \text{ g Cal} = 2{,}302 \cdot 10^4\, V \text{ g Cal}, \tag{75}$$

wenn für V das I.P. eingesetzt wird. Man hat danach z. B. für folgende Elemente aus den I.P. die beigefügten U_0-Werte

Na	I.P. = 5,112 Volt	$U_0 = 1{,}177 \cdot 10^5$ Cal
Ba	5,12 „	$1{,}178 \cdot 10^5$ „
Sr	5,7 „	$1{,}313 \cdot 10^5$ „
Ca	6,12 „	$1{,}409 \cdot 10^5$ „
Mg	7,65 „	$1{,}761 \cdot 10^5$ „

Mit Rücksicht darauf, daß zur Ionisation die Wärme U nötig ist, kann die Relation

$$Ca^+ + e \rightleftarrows Ca + U$$

aufgestellt werden, aus der bei Übergang auf die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck sofort folgt

$$\sum m C_p = (C_p)_{Ca^+} + (C_p)_e - (C_p)_{Ca} = (C_p)_e,$$

da die Molzahlen m beim Ionisationsvorgang der Einheit gleichzusetzen sind und da ja außerdem wegen der nahe gleichen Elektronenkonfiguration noch $(C_p)_{Ca^+} = (C_p)_{Ca}$ angenommen werden kann. Faßt man das „Elektronengas" als einatomiges Gas auf, so ist also $\sum m C_p$ aus

$$\sum m C_p = (C_p)_e = \tfrac{5}{2} R \tag{76}$$

berechenbar.

Setzt man die Masse des Elektrons mit $\frac{1}{1845}$ der Masse des H-Atoms als Molekulargewicht in Gleichung (73) ein, so hat man schließlich noch

$$\sum C = C_e = -6{,}5. \tag{77}$$

Mit den durch (75) bis (77) gegebenen Zahlenwerten folgt aber aus (73) die von *Meg Nad Saha*[140]) zuerst auf den Ionisationsvorgang an-

140) Phil. Mag. (6) 40 (1920), p. 114; London Roy. Soc. Proc. 99 A (1921), p. 136.

gewendete Gleichung

$$(78)\quad \log \frac{x^2}{1-x^2} P = -\frac{U_0}{4{,}571\,T} + \frac{5}{2}\log T - 6{,}5 \quad \left(= \log \frac{x}{1-x} P_e\right),$$

die mit der Beziehung 1 Volt = 23020 Cal auch noch auf die von *H. N. Russell*[141]) gegebene Form

$$(79)\qquad \log \frac{x}{1-x} P_e = -5036 \frac{\text{I.P.}}{T} + 2{,}5 \log T - 6{,}5$$

gebracht werden kann.

Schreibt man die Gleichung (79) für zwei Elemente E_1 und E_2 an und subtrahiert, so erhält man

$$(80)\qquad \log \frac{x_1}{1-x_1} \cdot \frac{1-x_2}{x_2} = 5036 \frac{J_2 - J_1}{T},$$

was besagt, *daß das Verhältnis der Quotienten* $\frac{x}{1-x}$ *zweier Elemente nur von der Temperatur und den Ionisationspotentialen, nicht aber vom Partialdruck oder der relativen Häufigkeit der beiden Elemente abhängig ist.*

Die *Saha*sche Gleichung (78) ist von *R. H. Fowler*[142]) und *E. A. Milne*[143]) in teilweise gemeinsamen Arbeiten durch statistische Betrachtungen neuerlich abgeleitet und verbessert worden.[144]) Führt man in die früher in Nr. 4 c) auf p. 549 gegebene Formel

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{a_{21}}{a_{12}}\left(1 + \frac{b_{21}}{a_{21}\, u(\nu_{12}, T)}\right)$$

den ebendort abgeleiteten Wert $C_{12} = \frac{b_{21}}{a_{21}\,\nu_{12}^3} = C$ und dann für $u(\nu, T)$ die *Planck*sche Formel durch Gleichung (28) (p. 550) ein, so erhält man

$$\frac{n_1}{n_1} = \frac{a_{21}}{a_{12}}\left(1 + \frac{C}{F\left(\frac{\nu_{12}}{T}\right)}\right) = \frac{a_{21}}{a_{12}} e^{\frac{k\nu_{12}}{T}},$$

oder, da ja die mit den Erregungspotentialen χ_2 und χ_1 zu identifizierenden Anfangs- und Endenergien durch die *Planck*sche Energiegleichung $\chi_2 - \chi_1 = h\nu_{12}$ verbunden sind,

$$(81)\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{a_{21}}{a_{12}} e^{\frac{k}{h}\cdot\frac{E_2 - E_1}{T}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} e^{-\frac{\chi_1 - \chi_2}{RT}}.$$

141) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 120.

142) *R. H. Fowler,* Phil. Mag. 45 (1923), p. 1.

143) *R. H. Fowler* und *E. A. Milne,* London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 403 und 84 (1924), p. 99.

144) Vgl. hierzu auch den Artikel von *R. Emden*, Thermodynamik der Himmelskörper, diese Encykl. VI 2, 24, p. 521.

Hier bedeutet $R = \frac{h}{k}$ die *Boltzmann*sche Konstante, in der k durch Vergleichen der e-Potenz $\frac{k\nu}{T}$ der obigen Formel mit der e-Potenz $\frac{c_2}{\lambda T}$ der *Planck*schen Strahlungsformel (30) errechnet werden kann. Man hat sonach wegen $\nu = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\lambda_{cm}}$ sofort $k = 4{,}77 \cdot 10^{-11}$ und mit dem bekannten h-Wert dann auch $R = 1{,}371 \cdot 10^{-16}$ erg grad^{-1}.

Nennt man nun $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die relativen Häufigkeiten der bei unendlich hoher Temperatur in den Zuständen $1, 2, 3, \ldots$ befindlichen Atome oder auch die Gewichte dieser Zustände, so folgt mit $T = \infty$ aus (81)

$$\frac{n_r}{n_s} = \frac{a_{sr}}{a_{rs}} = \frac{q_r}{q_s},$$

und wenn q_1 den unerregten Zustand bedeutet, so wird die Summe aller Zustände im Verhältnis zum Zustand q_s, der die Linien der s^{ten} Nebenserie ergibt,

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots}{n_s} = \frac{1}{q_s}\left(q_1 + q_2 e^{-\frac{\chi_1 - \chi_2}{RT}} + q_3 e^{-\frac{\chi_1 - \chi_3}{RT}} + \cdots\right) = \frac{b(T)}{q_s},$$

wo der gleich $b(T)$ gesetzte Klammerausdruck nach *Planck* die *Zustandssumme* genannt wird. Für den Bruchteil an neutralen Atomen im Zustand r (r^{te} Nebenserie) ergibt sich nun

$$(82) \qquad f(r) = \frac{\frac{n_r}{n_s}}{\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots}{n_s}} = \frac{q_r e^{-\frac{\chi_1 - \chi_r}{RT}}}{b(T)},$$

wo statt $\frac{x}{1-x}$ in die *Saha*sche Gleichung zu substituieren ist. Diese *Saha*sche Gleichung hat *R. H. Fowler*[145]) auf die Form

$$(83) \quad \operatorname{lognat} \frac{x}{1-x} P_e = -\frac{\chi_1}{RT} + \frac{5}{2} \operatorname{lognat} T + \operatorname{lognat} \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \sigma R^{\frac{5}{2}}}{h^3} - \operatorname{lognat} b(T)$$

gebracht, in der σ die Zahl der Valenzelektronen und m die Masse des Elektrons bedeuten. Faßt man den Teil

$$a = \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \sigma R^{\frac{5}{2}}}{h^3 P_e} = \frac{0{,}332}{P_e} \sigma$$

zusammen, so ergibt sich aus (83) für den Ionisationsgrad $1 - x$ leicht

$$(84) \qquad 1 - x = \frac{b(T)}{b(T) + a T^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi_1}{RT}}},$$

145) Phil. Mag. 45 (1923), p. 1. Wegen der Umständlichkeit der Entwicklung muß hier auf die Originalarbeiten verwiesen werden.

und für $n_r = f(r) \cdot (1 - x)$ folgt mit (82)

$$(85) \qquad n_r = \frac{q_r e^{-\frac{\chi_1 - \chi_r}{RT}}}{b(T) + a T^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi_1}{RT}}} = \frac{q_r e^{\frac{\chi_r}{RT}}}{b(T) e^{\frac{\chi_1}{RT}} + a T^{\frac{5}{2}}}.$$

Die beiden Gleichungen (84) und (85) lassen auf die Intensität der bei einem durch q gegebenen Zustand erscheinenden Linien schließen. Durch den Bau der Atome wird dabei nach *Fowler* bedingt, daß bei H und He⁺ für q sukzessive die Werte $q_1 = 1 \cdot 2$, $q_2 = 2 \cdot 3, \ldots$, $q_r = r(r + 1)$ auftreten, während bei anderen einwertigen Elementen $q_1 = q_2 = \cdots = q_r = 1$ und bei den zweiwertigen Elementen (He und alkalische Erden) $q_1 = 1$, $q_2 = 2, \ldots, q_r = r$ gesetzt werden soll.

Die vom r^{ten} Zustand ausgehenden Linien werden ein Maximum, wenn n_r ein Maximum wird, somit ist bei bekanntem P_e die Temperatur T eines Sterns mit (85) berechenbar, wenn in seinem Spektrum die bezüglichen Linien in maximaler Intensität erscheinen. Differenziert man (85) nach T, wobei $b(T)$ konstant zu halten ist, so ergibt sich, daß die maximale Intensität bei einem partialen Elektronendruck von

$$(86) \qquad P_e = \frac{0{,}332\,\sigma}{b(T)} \cdot \frac{\chi_r + \frac{5}{2} RT}{\chi_1 - \chi_2} T^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi_1}{RT}}$$

auftritt, der wieder umgekehrt bei bekanntem T ermittelt werden kann. Für die Linien der Hauptserie hat man natürlich überall $\chi_r = \chi_1$ einzuführen.

Eine Bemerkung von *E. A. Milne*[146]), daß eigentlich, und zwar insbesonders dann, wenn die Erregungspotentiale zweier aufeinanderfolgender Zustände nicht stark voneinander verschieden sind, zwei Verteilungsfunktionen b_1 und b_2 einzuführen wären, von denen b_1 dem vorhergehenden Zustand entspricht, wurde von *R. H. Fowler*[147]) aufgegriffen. Danach wäre die *Saha*sche Formel in der Form

$$(87) \quad \log \frac{x_2}{x_1} = - \frac{5040\,\text{I.P.}}{T} + \frac{5}{2} \log T - \log P_e - 6{,}5 + \log \frac{b_2}{b_1}$$

anzusetzen, in der nun x_1 und x_2 die Zahlen der Atome im weniger bzw. mehr erregtem Zustand bedeuten.

Über die Schlüsse, die aus der Anwendung der hier gegebenen Formeln über die Temperaturen von Sonne und Fixsternen und über die Verhältnisse in deren Atmosphären gezogen werden können, wird in den betreffenden Kapiteln berichtet werden.

---

146) Phil. Mag. 50 (1925), p. 547.

147) London Roy. Astr. Soc. 85 (1925), p. 970. Vgl. dazu auch *H. N. Russell*, Harvard Coll. Obs. Circ. 291 (1926).

Es sei schließlich noch erwähnt, daß in neuester Zeit auch über Struktur und Breite der Linien von *A. Unsöld*[148]) und *E. A. Milne*[149]) theoretische Untersuchungen angestellt worden sind, deren Ergebnisse nach und nach astrophysikalische Bedeutung erlangen. Bedeuten H die Höhe der homogenen Atmosphäre und σ einen die Zahl aller an der Entstehung der Linie beteiligten Atome definierenden Faktor, der von Ladung und Masse des Elektrons, von der *Loschmidt*schen Zahl N, sowie von der Wellenlänge λ_0 der Mitte der Resonanzlinie und der Differenz $\lambda - \lambda_0$ der betrachteten Linienstelle λ gegen die Linienmitte abhängig ist, bezeichnet ferner noch i den Einfallswinkel in die Photosphäre, so gibt *Unsölds* Formel für das Verhältnis zwischen der Strahlung $b(0, i)$ an der Stelle λ der Linie und der Strahlung B der linienfreien Photosphäre den Betrag

$$(88) \qquad \frac{b(0,i)}{B} = \frac{0{,}5 + \cos i}{1 + \sigma H} + \frac{0{,}5 - \cos i}{1 + \sigma H} e^{-\sigma H \sec i}.$$

Durch Vergleich der sich aus dieser Formel für verschiedene NH (Zahl der wirksamen Atome) ergebenden theoretischen Linienstrukturen mit dem Bau der Linien in Sternspektren hat erst kürzlich Miß *C. H. Payne*[150]) festgestellt, daß keine stellare Linie durch die Gesamtwirkung von mehr als 10^{20} Atomen erzeugt werden dürfte und daß schon ein Abfall auf 10^{15} Atome genügen würde, um die betreffende Linie im Sternspektrum zum Verschwinden zu bringen.

c) *Die Messung der Linienintensitäten.* Eine exakte Messung der Intensitäten der Linien in den Sternspektren ist durch die eben besprochenen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Linienintensität vom Ionisationszustand besonders erwünscht geworden, doch hat auch schon das Verhalten der Linien in den Spektren von Sternen verschiedener Typen frühzeitig Anregung zu diesbezüglichen Versuchen gegeben. Bereits im Jahre 1903 versuchte *E. C. Pickering*[151]) eine sichere Basis für die Schätzung des Intensitätsverhältnisses gewisser Linien in den Spektren verschiedener Sterne dadurch zu schaffen, daß er zum Vergleich eine Skala aus künstlichen Linien heranzog, die er durch Kopieren eines durch verschieden zahlreiche Papierzwischenlagen verschieden hell und verwaschen gemachten Spaltes hergestellt

148) Ztschr. f. Phys. 44 (1927), p. 793 und 46 (1928), p. 765.

149) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 89 (1928), p. 3 und 157. Vgl. dazu noch *C. H. Payne,* Harvad Coll. Obs. Bull. 867 (1929).

150) Washington Nat. Acad. Proc. 14 (1928), p. 399. Vgl. hierzu noch Harvard Coll. Obs. Circ. 334 (1928).

151) Harvard Coll. Obs. Circ. 72 (1903).

hatte. Später haben *K. F. Bottlinger*[152]) und *A. Hnatek*[153]) Intensitäten und Strukturen einzelner Linien in Sternspektren mit dem *Hartmann*schen Mikrophotometer untersucht, wobei der erstere zur Herstellung einer Relation zwischen Schwärzung und Intensität entsprechende Variationen der Expositionszeit benutzte. Schon bei allen diesen Anfangsversuchen hat sich herausgestellt, daß das Intensitätsverhältnis zwischen der tiefsten Linienstelle und dem der Linie angrenzenden kontinuierlichen Spektrum auch bei den kräftigsten Linien kaum viel über eine Größenklasse hinauszugehen pflegt. Die Umständlichkeit dieser Methoden, die Platte mußte ja dabei unter dem Mikrophotometer schrittweise und gut meßbar stets um wenige Hundertel Millimeter über die ganze Breite der Linie hinweg verschoben werden, hatten wohl zur Folge, daß noch *W. S. Adams* und *A. Kohlschütter*[154]) bei ihrer grundlegenden Arbeit über die Ermittlung der absoluten Größe eines Sterns aus dem Intensitätsverhältnis gewisser ausgewählter Linien die Schätzung nach einem der in der Photometrie viel verwendeten *Argelander*schen Stufenschätzungsmethode ähnlichen Verfahren benutzten und in ihren weiteren, umfangreichen Arbeiten beibehielten (s. Nr. 28). Erst die Einführung der sogenannten selbstregistrierenden Mikrophotometer, bei denen durch lichtempfindliche Zellen die aufeinanderfolgenden Schwärzungswerte eines vor der Zelle langsam vorbeigeführten Spektrums gemessen und automatisch registriert werden, konnte weniger durch die Mühelosigkeit, als vielmehr durch die Raschheit und Exaktheit der Untersuchung Wandel schaffen. Um die Umwertung der gemessenen Schwärzungen in die Helligkeiten auf eine sichere Grundlage zu stellen, deckte *H. H. Plaskett*[155]) nach einem Vorschlag von *R. T. Merton* und *J. W. Nicholson*[156]) den Spektrographenspalt seiner Länge nach mit einem neutralen Keil ab, so daß Intensität und Schwärzung des Spektrums in zur Ausdehnung desselben senkrechter Richtung meßbar abnahmen. Ähnlich diesem Vorgang ist eine von *Th. Dunham jr.*[157]) eingeführte Methode, bei der eine spektrale Schwärzungsskala auf der Platte durch Aufnahme der Spektren einer Serie kleiner Öffnungen von verschiedener Helligkeit erzeugt wird. Speziell bei Aufnahmen mit dem Objektivprisma können, wie *H. Shapley*[158]) und bald danach neuerlich *C. H. Payne* und

152) Astr. Nachr. 195 (1913), p. 117.
153) Astr. Nachr. 200 (1915), p. 189.
154) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 385.
155) Publ. of the Dominion astroph. obs. Victoria (Canada) 2 (1923), Nr. 12.
156) London Roy. Soc. Phil. Trans. A 217 (1917), p. 237.
157) Harvard Coll. Obs. Bull. 853 (1927).
158) Harvard Coll. Obs. Bull. 805 (1924).

F. S. Hogg[159]) gezeigt haben, auch mehrere nacheinander unter sukzessiver Abblendung des Objektivs erfolgte Aufnahmen desselben stellaren Objektes mit Erfolg zum gleichen Zweck kombiniert werden. Das theoretisch errechenbare Helligkeitsverhältnis zwischen dem Zentralbild und den Bildern (Spektren) erster Ordnung bei Aufnahmen mit Objektivgitter, das in der Stellarphotometrie vielfach zu Helligkeitsbestimmungen verwendet wird, benutzte *G. Eberhard*[160]) zuerst bei Aufnahmen des Spektrums der Nova Geminorum 2 vom Jahre 1912 zu spektralphotometrischen Zwecken, indem er das Objektivprisma mit dem Objektivgitter kreuzte. In gleicher Weise ist später wieder *A. Kohlschütter*[161]) vorgegangen. Schließlich kann eine Kalibrierung der Schwärzungen bei Spektralaufnahmen mit dem Objektivprisma auch dadurch erfolgen, daß auf derselben Platte noch eine weitere Aufnahme einer Gruppe von Sternen vom gleichen Typus und verschiedenen bekannten Helligkeiten mit derselben Expositionszeit durchgeführt wird. Eine Bearbeitung der helleren Plejadensterne durch *C. H. Payne* und *F. S. Hogg*[162]) bietet hierzu wertvolle Grundlagen. Weniger empfehlenswert erscheint die Kombination mehrerer Aufnahmen von verschiedener Expositionszeit, da ja Expositionszeit und Schwärzung nach dem bekannten *Schwarzschild*schen Schwärzungsgesetz einander nicht völlig proportional gehen. Immerhin haben *C. H. Payne* und *F. S. Hogg*[163]) aus Aufnahmen, die an der Yerkessternwarte unter Variation der Expositionszeit vorgenommen worden sind, beachtenswerte Resultate ziehen können.

Schwierigkeiten bereitet die bei verschiedenen Plattensorten mehr oder minder große Abhängigkeit der Plattengradation von der Wellenlänge, wenn es sich darum handelt, die Intensitäten von Linien miteinander zu vergleichen, die im Spektrum weiter voneinander abstehen. Daß *C. H. Payne* und *F. S. Hogg*[164]) die für verschiedene Wellenlängen gewonnenen Schwärzungskurven durch Ineinanderschieben ziemlich gut zur Deckung bringen konnten, mag darauf zurückzuführen sein, daß es sich dabei eben um Plattensorten handelte, bei denen kein starker Gang der Gradation mit der Wellenlänge vorhanden war, und ein gleiches dürfte bei den Laboratoriumsarbeiten von *Dorgelo*[165]) und

159) Harvard Coll. Obs. Circ. 301 (1927).
160) Siehe bei *A. Brill,* Publ. astroph. Obs. Potsdam 23/2 (1915), Nr. 70.
161) Astr. Nachr. 220 (1924), Nr. 325.
162) Harvard Coll. Obs. Circ. 303 (1927).
163) Harvard Coll. Obs. Circ. 304 (1927).
164) Harvard Coll. Obs. Circ. 301 (1927).
165) Phys. Ztschr. 26 (1925), p. 756.

van Milaan[166]) der Fall gewesen sein, die im Laboratorium ähnliche Erfahrungen machten wie die erstgenannten.

Die hier angeführten Methoden sind bei photometrischen Arbeiten über die Intensitäten einzelner *Fraunhofer*scher Linien im Sonnenspektrum von *H. v. Klüber*[167]) und *M. Minnaert*[168]) und bei Untersuchungen an Sternspektren u. a. von *D. H. Menzel*[169]), *C. H. Payne*[170]) sowie von *C. H. Payne* und *F. S. Hogg*[171]) mit Erfolg benutzt worden.

8. Der Einfluß von Druck und Dichte. Menge des Stoffes, also seine Dichte, verursachen in der Regel Linienverbreiterung, so daß die Spektren verschiedener Gase schon bei einer dem Druck einer Atmosphäre entsprechenden Dichte sogar kontinuierlich werden. *A. J. Ångström*[172]) beispielsweise hat das Funkenspektrum des Wasserstoffs bei Atmosphärendruck als nahezu kontinuierlich beobachtet. Da Druck und Dichte nicht immer leicht voneinander zu trennen sind, war die Frage, ob die beobachteten Linienverbreiterungen auf Steigerung der Dichte oder Erhöhung des Druckes zurückgeführt werden sollen, zunächst einige Zeit strittig. Gestützt auf eine Beobachtung von *E. Frankland*[173]), der von der Knallgasflamme bei 10 Atmosphären Druck ein völlig kontinuierliches Spektrum erhielt, glaubte noch *J. N. Lockyer*[174]), aus der bei zunehmender Höhe in der Chromosphäre der Sonne abnehmenden Linienbreite einen Schluß ziehen zu dürfen auf die entsprechenden Druckverhältnisse. Bald aber mußte er seine frühere Ansicht richtigstellen, als er bei Natrium, das er in einer beiderseits offenen Röhre und somit unter gleichbleibendem Atmosphärendruck erhitzte, bei Temperaturänderungen, also bei Variation der Menge oder Dichte des Na-Dampfes, entsprechende Veränderungen der Linienbreite beobachtete.[175]) Nicht viel später wiesen auch *G. D. Liveing* und *J. Dewar*[176]) sicher nach, daß nicht der Druck, sondern die Menge des in der Flamme vorhandenen Materiales für die Linienbreite bestimmend ist, und sie versuchten sogar, eine Art

166) Ztschr. f. Phys. 38 (1926), p. 427.

167) Ztschr. f. Phys. 44 (1927), Nr. 6, 7.

168) Ztschr. f. Phys. 45 (1927), p. 610.

169) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

170) Harvard Coll. Obs. Circ. 305 und 307 (1927).

171) Harvard Coll. Obs. Circ. 308 (1927).

172) Pogg. Ann. 94 (1855), p. 141.

173) London Roy. Soc. Proc. 16 (1868), p. 419.

174) London Roy. Soc. Proc. 17 (1869), p. 453.

175) London Roy. Soc. Phil. Trans. 163 (1873), p. 253 und Phil. Mag. (5) 6 (1879), p. 161.

176) London Roy. Soc. Proc. 27 (1878), p. 132, 28 (1879), p. 367 und 29 (1879), p. 482.

quantitativer Analyse auf der Beobachtung der Linienbreite aufzubauen. Da sich die Linien aber, wie *J. N. Lockyer*[177]) gefunden hatte, nicht immer nach beiden Seiten symmetrisch verbreitern, entstand die neue Frage, ob neben der Verbreiterung nicht auch gleichzeitig eine Verschiebung der Linienmitte auftrete. Von besonderer Bedeutung wurde diese Frage dann im Jahre 1896 für die Astrophysik, als *E. E. Jewell*[178]) beim Vergleich der Wellenlängen der *Rowland*schen „Preliminary table of the Solar spectrum wave lengths"[179]) mit Laboratoriumsmessungen vielfach Verschiebungen der Linien des Sonnenspektrums gegen die Linien des Bogenspektrums, und zwar nach der Seite der größeren Wellenlänge hin bemerkte. Eine endgültige Antwort fand diese Frage durch die Untersuchungen von *W. J. Humphreys* und *J. F. Mohler*[180]), die den Bogen in einer Stahlflasche unter Drucken von zunächst bis 15 Atmosphären brennen ließen, und durch die weiteren Arbeiten *W. J. Humphreys*[181]), der 37 und endlich sogar 110 Atmosphären benutzte. Eine Diskussion der an zahlreichen Elementen gesammelten Erfahrungen durch *W. J. Humphreys*[182]) ergab, daß Verschiebungen durch Druck tatsächlich erfolgen, daß sie aber keineswegs groß sind — die Fe-Linien zwischen 4000 und 4400 Å.E. ergaben pro 10 Atmosphären Drucksteigerung eine Rotverschiebung von nur etwa 0,03 Å.E., die dem Druck proportional ging —, und außerdem, daß sie nicht für alle Elemente und nicht einmal für alle Linien desselben Elementes gleich sind. *J. S. Ames* und *W. J. Humphreys*[183]) bemerkten eine Abhängkeit von der Serienanordnung der Linien, was später an Fe, Cr und Ti durch den Nachweis eines offenbaren Zusammenhanges zwischen Druckeffekt und *Zeeman*effekt von *A. S. King*[184]) neuerlich bestätigt werden konnte. Beim Vergleich ihrer Messungen an Funken- und Bogenspektren bemerkten auch *F. Exner* und *E. Haschek*[185]) Differenzen in den Wellenlängen, allerdings von einem im Vergleich mit den oben erwähnten Beobachtungen von *Humphreys* und *Mohler* jedenfalls zu hohen Betrag, die sie durch die Annahme einer infolge der disruptiven Funkenentladung auftretenden Stoffzufuhr und Drucksteigerung zu erklären versuchten.

177) London Roy. Soc. Proc. 28 (1879), p. 428.
178) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 89.
179) Astroph. Journ. 1 (1895) bis 6 (1898).
180) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 114.
181) Astroph. Journ. 4 (1896), p. 249, 22 (1905), p. 217 und 26 (1907), p. 18.
182) Astroph Journ. 6 (1897), p. 169.
183) Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 119.
184) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 433.
185) Wien Sitzber. 106 II^a (1897), p. 1127.

Umgekehrt ist also zu erwarten, daß Druckverminderung Violettverschiebung zur Folge hat, und das bestätigte sich vollinhaltlich bei Versuchen von *J. F. Mohler*[186]) sowie in weiteren Untersuchungen z. B. von *E. E. Brooks*[187]) am Magnesiumfunken und von *H. G. Gale* und *W. S. Adams*[188]) an Eisen und Titan. Die bezüglichen Resultate sind für die Beantwortung der Frage nach dem Druck in den umkehrenden Schichten von Sonne und Sternen wichtig und wurden vor einigen Jahren von *Ch. E. St. John* und *H. D. Babcock*[189]) in dieser Hinsicht verwendet.

Im Zusammenhang mit dem Gegenstand wären noch Versuche von *J. Wilsing* zu erwähnen, der den Funken im Wasser[190]) oder zwischen befeuchteten Elektoden[191]) überspringen ließ und dabei zum Teil sehr starke Verschiebungen beobachtete, die er aus dem sehr hohen Druck des sich bildenden Wasserdampfes zu erklären versuchte. Reine Druckverschiebungen dürften hier aber kaum vorgelegen haben, da mit den Druckverschiebungswerten von *Humphreys* und *Mohler* dabei auf ungewöhnlich hohe Drucke geschlossen werden müßte.

9. Zeemaneffekt, Starkeffekt. *P. Zeeman*[192]) fand im Jahre 1896, daß im Spektrum einer in einem magnetischen Kraftfeld befindlichen Lichtquelle eine Aufspaltung der Spektrallinien eintritt, so zwar, daß sich bei Beobachtung senkrecht zu den Kraftlinien ein Linientriplet, bei Beobachtung parallel zu den Kraftlinien ein Dublet zeigt. Im Triplet nimmt die mittlere Linie die Lage der normalen Spektrallinie ein, sie ist parallel zu den Kraftlinien polarisiert (π-Komponente) und wird beiderseits flankiert von den senkrecht zu den Kraftlinien polarisierten Begleitern (σ-Komponenten). Im Dublet entspricht die Lage der beiden Linien der der σ-Komponenten des Triplets, aber beide Linien sind zirkular, und zwar entgegengesetzt polarisiert. Bei Beobachtung schräg gegen die Kraftlinien tritt, wie ebenfalls schon von *P. Zeeman*[193]) erörtert worden ist, Kombination der beiden Polarisationszustände ein. Geht man dabei langsam aus der Richtung senkrecht zu den Kraftlinien heraus, so tritt zunächst elliptische Polarisation der σ-Komponenten auf, während gleichzeitig

186) Astroph. Journ. 4 (1896), p. 175.
187) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 177.
188) Astroph. Journ. 35 (1912), p. 10 und 37 (1913), p. 391.
189) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 32.
190) Berlin Ber. 1899, p. 426.
191) Berlin Ber. 1899, p. 750.
192) Phil. Mag. (5) 43 (1897), p. 226.
193) Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 86.

die π-Komponente schwächer wird. Nach *J. Larmor*[194]) bleiben Form und Neigung der Elektronenbahnen im magnetischen Kraftfeld unverändert, und es tritt lediglich Präzessionsbewegung auf.

Die durch ein magnetisches Kraftfeld bewirkte Veränderung einer einfachen Elektronenschwingung kann mathematisch in folgender Weise erfaßt werden. Bezeichnen a die Amplitude, T die Periode einer Schwingung und $\gamma_0 = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeschwindigkeit pro Sekunde, so lautet die Gleichung der schwingenden Bewegung in der x-Koordinate

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) = a \cos(\gamma_0 t + \alpha),$$

die durch zweimalige Differentiation die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\gamma_0^2 \cos(\gamma_0 t + \alpha) = -\gamma_0^2 x \tag{89}$$

ergibt. In der gleichen Weise folgt für die beiden anderen Koordinaten

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma_0^2 y \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\gamma_0^2 z. \tag{89a}$$

Hat das magnetische Kraftfeld die Richtung der z-Achse und die Feldstärke H in Gauß[195]), so treten die Zusatzbeschleunigungen auf[196])

$$\text{in der} \left\{\begin{array}{ll} x\text{-Achse} \cdots & + \frac{e}{cm} H \frac{dy}{dt}, \\ y\text{-Achse} \cdots & - \frac{e}{cm} H \frac{dx}{dt}, \\ z\text{-Achse} \cdots & \quad 0, \end{array}\right\} e \text{ in elektrostat. Einh.}$$

und die Gleichungen (89) und (89a) gehen über in

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma_0^2 x + \frac{e}{cm} H \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma_0^2 y - \frac{e}{cm} H \frac{dx}{dt}. \end{array}\right. \tag{90}$$

Da in der z-Achse keine Kraft auftritt, die Periode der Schwingungen also ungeändert bleibt, fällt die dritte Gleichung weg.

Die Lösung der Differentialgleichungen (90) ist bekanntlich eine e-Funktion. Setzt man also

$$x = Ae^{i\gamma t}, \quad y = Be^{i\gamma t},$$

194) Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 503.

195) 1 Gauß $= 1 \frac{\mathrm{mg}^{1/2}}{\mathrm{mm}^{1/2}\,\mathrm{sec}}$ Einh. der Feldintensität.

196) Siehe *O. D. Chwolson*, Lehrbuch der Physik, Bd. IV/2, p. 663, Braunschweig 1924, Vieweg.

so erhält man durch Substitution in (90) leicht

$$(91)\qquad \begin{cases} A(\gamma^2-\gamma_0^2) = -B\dfrac{e}{c}\dfrac{H}{m}i\gamma \\ B(\gamma^2-\gamma_0^2) = \quad A\dfrac{e}{c}\dfrac{H}{m}i\gamma. \end{cases}$$

Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit ist erfahrungsgemäß immer nur klein, also kann man annehmen: $\gamma^2-\gamma_0^2 = d\gamma^2 = 2\gamma d\gamma$. Damit folgt aus der zweiten Gleichung (91)

$$B = A\frac{eH}{2cm}\frac{i}{d\gamma},$$

und dann weiter aus der ersten schließlich

$$(92)\qquad d\gamma = \pm\frac{eH}{2cm}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird also um $\pm\frac{eH}{2cm}$ geändert, oder die Änderung der Schwingungszahl ist wegen $\nu = \frac{\gamma}{2\pi}$

$$(93)\qquad d\nu = \pm\frac{eH}{4\pi cm}.$$

Wegen $d\nu' = \frac{d\nu}{c}$ (ν' = Wellenzahl pro cm) und $\frac{e_{\text{el. stat.}}}{e_{\text{el. mag.}}} = c$ wäre noch

$$d\nu' = \frac{H}{4\pi c}\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{el. mag.}},$$

oder mit $\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{el. mag.}} = 1{,}77\cdot 10^7$

$$(94)\qquad d\nu' = \pm 4{,}70\cdot 10^{-5}H,$$

was wegen $\nu' = \frac{1}{\lambda}$ sofort in

$$(95)\qquad d\lambda = \mp 4{,}70\cdot 10^{-5}\lambda^2 H$$

übergeht. Dieser Ausdruck beinhaltet die sogenannte „*Preston*sche Regel“[197])

$$(96)\qquad \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \text{const},$$

nach der die Aufspaltung im Magnetfeld proportional dem Quadrat der Wellenlänge erfolgt. Da die Konstante der Gleichung (96) aber mit der Linienserie wechselt, bildet diese *Preston*sche Regel ein willkommenes Mittel, um die Serienzusammengehörigkeit von Linien nachweisen zu können.

Diese hier behandelte *normale* oder *Lorentzsche Aufspaltung* tritt bei Linien auf, die sich serienmäßig durch Einfachterme darstellen lassen. Bei Mehrfachtermen zeigen sich anomale Erscheinungen deswegen, weil durch das Magnetfeld nicht die Termdifferenzen, sondern

197) *Th. Preston,* Nature 59 (1899), p. 224, 248.

die einzelnen Terme selbst beeinflußt werden. Bei den Dublettserien des Na und einiger anderer Elemente entstehen beispielsweise bei der einen Linie (D_1) Quartette, bei der anderen (D_2) aber Sextette, und schon bei dem relativ einfach gebauten Heliumatom hat *W. Lohmann*[198]) bis zu acht Komponenten beobachten können. Die *Preston*sche Regel gilt aber auch für solche Mehrfachserien insofern, als für Linien, die sich aus Termen von gleicher Multiplizität und gleicher azimutaler Quantenzahl zusammensetzen, die durch Gleichung (94) bestimmten Wellenzahldifferenzen der Komponenten konstant bleiben. Nach *C. Runge*[199]) gilt dabei weiterhin der Satz, daß die beim anomalen *Zeeman*effekt auftretenden Aufspaltungen, gemessen in Wellenzahlen, immer rationale Vielfache der normalen *Lorentz*aufspaltung sind. Auch diese *Rungesche Regel* gibt die Möglichkeit, die Zugehörigkeit einer Mehrfachlinie zu einer bestimmten Serie wahrscheinlich zu machen.

Wird die Feldstärke H sehr groß, so können sich die Komponenten von benachbarten Linien der Vielfachserie einander so weit nähern, daß sie sich gegenseitig in ihrer Lage beeinflussen (*Paschen-Back-Effekt*[200]), und bei weiterer Steigerung der Feldstärke kann schließlich ein Zustand eintreten, bei dem die ganze multiple Liniengruppe als Einheit für sich genommen im normalen *Zeeman*effekt aufgespalten erscheint. Ein solcher Fall wird sich schon bei mäßiger Feldstärke bei Liniengruppen beobachten lassen, deren Einzelglieder einander sehr nahe stehen, nach *N. A. Kent*[201]) z. B. am Lithiumdublet bei 6708 Å.E., dessen Kompenenten nur 0,13 Å.E. voneinander entfernt sind.

So wie bei Linienspektren die Gleichheit der Aufspaltung an die Zugehörigkeit der Linien zur gleichen Serie gebunden erscheint, tritt anscheinend bei Bandenspektren in ähnlicher Weise gleiche Beeinflussung bei Linien desselben Zweiges auf.[202]) *H. Deslandres* und *V. Burson*[203]) fanden z. B. an der Bande des Leuchtgases bei 3898 Å.E., daß die zu einem bestimmten Zweig gehörenden Linien, wenn schon nicht im gleichen Betrag, so doch wenigstens stets im gleichen Sinn verschoben erscheinen, und ähnliches konnten *H. Deslandres* und *L. D'Azumbuja*[204]) auch an den ultravioletten Banden des Wasserdampfes bemerken.

198) Phys. Ztschr. 9 (1908), p. 145.
199) Phys. Ztschr. 8 (1907), p. 232.
200) Ann. Phys. 39 (1912), p. 897 und 40 (1913), p. 960.
201) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 343.
202) Siehe *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. (1924), p. 747.
203) Paris C. R. 157 (1913), p. 1105.
204) Paris C. R. 157 (1913), p. 814.

Wegen der Kompliziertheit der Erscheinungen wird es sich bei astrophysikalischen Untersuchungen übrigens kaum empfehlen, Mehrfachlinien oder Bandenlinien zu verwenden, deren Verhalten im magnetischen Feld im physikalischen Laboratorium noch nicht genügend sicher festgestellt worden ist. In dieser Hinsicht wichtige Untersuchungen sind im letzten Jahrzehnt an den Elementen Ba, Ca, Cr, Fe, Na, Sr, Ti, V, Y, Zr von *B. E. Moore, H. D. Babcock, P. Zeeman* und *B. Winawer, A. S. King, A. E. Becker* angestellt worden[205]), und im Anschluß an die Arbeiten von *G. E. Hale*[206]) über das Magnetfeld der Sonne hat *A. S. King*[207]) verschiedene in den Sonnenfleckenspektren vorkommende Mehrfachlinien des Fe und Ti noch einer besonderen Prüfung auf ihre *Zeeman*struktur unterzogen.

Was die Aufspaltung der Spektrallinien im elektrischen Feld oder den von *J. Stark*[208]) entdeckten „*Stark*effekt" betrifft, dessen theoretische Begründung von *K. Schwarzschild*[209]) und von *P. S. Epstein*[210]) gegeben worden ist, so hat derselbe vorläufig für astrophysikalische Probleme noch keine Bedeutung gewonnen, wenigstens haben Versuche von *G. E. Hale*[211]), ihn im Spektrum der Sonnenflecken nachzuweisen, noch kein sicheres Resultat gezeitigt. Der *Stark*effekt, der hauptsächlich an Linien von H, He und Li studiert worden ist, sei daher hier nur kurz behandelt. Nach *J. Stark*[212]) und *Lo Surdo*[213]) gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Jede *Balmer*linie wird in mehrere Komponenten aufgespalten.
2. Die Zahl der Komponenten wächst mit der Seriennummer der Linie.
3. Bei transversaler Beobachtung (Quereffekt) sind die Linien linear polarisiert, und zwar teils parallel zu den Kraftlinien (π-Komponenten), teils senkrecht zu diesen (σ-Komponenten).
4. Bei longitudinaler Beobachtung (Längseffekt) sind die π-Komponenten unsichtbar, und die σ-Komponenten erscheinen unpolarisiert.
5. In der Regel liegen die kräftigen π-Komponenten außen, die kräftigen σ-Komponenten innen.

---

205) Astroph. Journ. 28, 30, 31, 33, 34, 44 (1908—1916).

206) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 315.

207) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 76.

208) Berlin Sitzber. November 1913, Ann. Phys. 43 (1914), p. 965, 983.

209) Berlin Sitzber. April 1916.

210) Ann. Phys. 50 (1916), p. 489.

211) Pop. Astr. 29 (1921), p. 625.

212) a. a. O.

213) Rendiconti Ac. dei Lyncei 23 (1914), p. 83, 117, 143, 252, 326.

6. Bei H ist die Aufspaltung symmetrisch, bei anderen Atomen vielfach unsymmetrisch.
7. In den Wellenzahlen gemessen sind die Abstände der Komponenten von der Mitte bei H ganze Vielfache eines kleinsten Linienabstandes.
8. Die Aufspaltung, insbesondere dieser kleinste Abstand wächst proportional der Feldstärke.

III. Die Sonne.

10. Das mittlere Sonnenspektrum. Der erste, der im Spektrum des Sonnenlichtes *Fraunhofer*sche Linien gesehen hat, scheint *W. H. Brewster*[214]) gewesen zu sein, und zwar dürfte es sich dabei nach *D. Brewster*[215]) um die Linien *A, D, b, F, G, H* gehandelt haben. Schon in den Jahren 1814 und 1815 zählte aber *J. Fraunhofer*[216]) im prismatischen Spektrum des Sonnenlichtes 754 Linien, und kurz danach[217]) begann er unter Verwendung mehrerer Beugungsspalten Wellenlängen derselben abzuleiten. Etwa zwanzig Jahre später gelang es dann *E. Bequerel*[218]) und *J. W. Draper*[219]), das Sonnenspektrum mit Hilfe der Daguerrotypie photographisch festzuhalten, wobei der erstere ziemlich weit ins Ultraviolett, der letztere dagegen bis ins Infrarot vordringen konnte. Auch der Begründer der Spektralanalyse *G. Kirchhoff*[220]) beschäftigte sich eingehend mit dem Spektrum des mittleren Sonnenlichtes, indem er die *Fraunhofer*schen Linien mit Linien irdischer Elemente identifizierte und eine Tafel des Sonnenspektrums gab, die bereits mehrere tausend Linien verzeichnete, allerdings nicht in Wellenlängen, sondern in einer willkürlichen Meßskala, deren Zusammenhang mit der Wellenlängenskala übrigens später von *J. Hartmann*[221]) mit Hilfe der *Cornu*schen Formel abgeleitet worden ist. Genauere Wellenlängenbestimmungen und eine Tafel des Gitterspektrums des Sonnenlichtes rühren von *J. A. Ångström*[222]) her, und schließlich entstand der große Atlas des mittleren Sonnenspektrums von *H. A. Row-*

214) London Roy. Soc. Phil. Trans. 1802, p. 365.
215) Rep. Brit. Assoc. 1832, p. 308.
216) München Akad. Denkschr. 5 (1817), p. 193.
217) München Akad. Denkschr. 8 (1821), p. 1.
218) Bibl. Univ. de Génève 40 (1842), p. 341.
219) Phil. Mag. (3) 12 (1842), p. 348.
220) Berlin Akad. Abh. 1861, p. 63; 1862, p. 227; 1863, p. 225.
221) Astroph. Journ. 9 (1899), p. 69.
222) Recherches sur le spectre normal du Soleil, Upsala 1868, W. Schultz.

land[223]) sowie die *Rowland*sche „Preliminary table of the Solar Spectrum Wave Lengths“[224]) (P.T.), die auf Grund der Ausmessung der für den *Rowland*schen Atlas aufgenommenen Platten durch *L. E. Jewell* und unter Verwendung einer größeren Zahl (etwa 1100) von *Rowland* ausgearbeiteter Wellenlängenstandards[225]), Wellenlängen für rund 20000 Sonnenlinien zwischen 2976—7331 Å.E. nebst zahlreichen Idendifikationen mit bekannten Linien gibt. In der letzten Zeit wird das Sonnenspektrum neuerlich im internationalen Wellenlängensystem vom äußersten Ultraviolett bis ins Infrarot bei etwa 9900 Å.E. photographisch vermessen. Den bezüglichen Arbeiten von *F. S. Braskett*[226]), *K. Burns*[227]), *K. Burns* und *C. C. Kieß*[227a]) und *W. F. Meggers*[228]) schließen sich dann weiter die bolometrischen Messungen von *S. P. Langley*[229]) bis 5,3 μ und von *Knut Ångström*[230]) bis 9,7 μ an. Noch größere Wellenlängen sind nach *H. Rubens* und *E. Aschkinass*[231]), die zunächst bis 20 μ und dann mit den Reststrahlen des Flußspats bis 24 μ gelangten, sowie nach *E. F. Nichols*[232]), der mit den Reststrahlen des Steinsalzes noch bis 51 μ vordringen konnte, nicht mehr vorhanden, da die Kohlensäure und der Wasserdampf unserer Atmosphäre alle Strahlen dieses Wellenlängengebietes absorbieren.

Beim Durchgang des Sonnenlichtes durch unsere Atmosphäre werden überhaupt zahlreiche *atmosphärische oder tellurische Linien* in das Sonnenspektrum eingezeichnet. Solche Linien atmosphärischen Ursprungs lassen sich daran erkennen, daß sie bei hohem Sonnenstande oder bei Beobachtung auf hohen Bergen schwächer erscheinen und daß sie bei Beobachtung des Sonnenrandes den von der Sonnenrotation herrührenden *Doppler*effekt nicht zeigen. Die letztere Methode zur Erkennung tellurischer Linien ist von *A. Cornu*[233]) vorgeschlagen

---

223) Photographie map of the normal Solar spectrum, Chicago 1887—1888, John Hopkins Press.

224) Astroph. Journ. 1—6 (1895—1898).

225) Astron. and Astroph. 12 (1893), p. 321.

226) Astroph. Journ. 53 (1921), p. 121; Contrib. Mt. Wilson Obs. 197 (1921).

227) Lick Obs. Bull. 10 (1920), Nr. 327; Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 37; Publ. Allegh. Obs. 6 (1927), Nr. 9.

227a) Publ. Allegh. Obs. 6 (1927), Nr. 8.

228) Astroph. Journ. 47 (1918), p. 1.

229) Annals astroph. Obs. Smithson. Inst. 1 (1900).

230) Arkiv Math. Astr. Fys. 1 (1904), p. 395.

231) Wied. Ann. 64 (1897), p. 564.

232) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 231.

233) Paris C. R. 98 (1884), p. 169.

worden, den ersteren Weg sind *D. Brewster*[234]), *J. A. Ångström*[235]), *H. C. Vogel*[236]) und *J. Janssen*[237]) gegangen. Die hauptsächlichsten tellurischen Linien und ihr Ursprung sind in der *Fraunhofer*schen bzw. *Langley*schen Bezeichnungsweise:

X	2,6 μ	Wasserdampf
Ω	1,8 „	
Ψ	1,4 „	
	0,915 μ	nach *M. Stefanik*[238]) ebenfalls auf Wasserdampf zurückzuführen
	0,90 „	
	0,82 „	
	0,795 „	
A	0,7594 μ	Sauerstoff
a	0,7184 „	Wasserdampf
B	0,6867 „	Sauerstoff.[239])

Von besonderem Interesse sind zahlreiche, zwischen 5670—6100 Å.E. liegende Linien des Wasserdampfes, unter ihnen die in der Gegend der D-Linie liegenden und bei wachsender Luftfeuchtigkeit rasch auffällig werdenden Regenlinien (*Brewster*sches Regenband δ bei 5760 Å.E.). Diese schon in der *Rowland*schen P.T. mit A (atmosphärisch) bezeichneten Linien sind später von *E. C. Pickering*[240]) (H_2O-Linien) und von *O. C. Lester*[241]) (O-Linien der Gruppen A, B, a) neuerlich studiert worden, wobei insbesondere die Intensitätsangaben der P.T. mancherlei Korrekturen erfahren haben. Ob sich an solchen tellurischen Linien die schwachen, durch die Rotation unserer Atmosphäre hervorgerufenen *Doppler*schen Verschiebungen erkennen lassen, wie *A. Perot*[242]) meinte, ist nach *Ch. E. St. John* und *H. D. Babcock*[243]) nicht sicher zu entscheiden. Etwa 330 weitere tellurische Linien fand *H. D. Babcock*[244]) bei Interferometermessungen im Infrarot zwischen 6868—8980 Å.E.

Den Luftweg, der nötig ist, um im kontinuierlichen Spektrum

234) Phil. Mag. (3) 8 (1850), p. 384; Paris C. R. 30 (1850), p. 578; London Roy. Soc. Proc. 10 (1850), p. 399.

235) Recherches sur le spectre normal du Soleil, Upsala 1868.

236) Untersuchungen über die Spectra der Planeten, Leipzig 1874.

237) Paris C. R. 111 (1890), p. 431.

238) Paris C. R. 143 (1906), p. 734.

239) In der P.T. sind Linien atmosphärischen Ursprungs mit A (atmosphärisch) bezeichnet.

240) Ann. Harvard Coll. Obs. 48 (1904), p. 207.

241) Astroph. Journ. 20 (1904), p. 81.

242) Paris C. R. 160 (1915), p. 549.

243) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 178.

244) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 140; Contr. Mt. Wilson Obs. 328 (1927).

einer Lichtquelle die *A*- und *B*-Absorption merkbar zu machen, fand *N. Egoroff*[245]) zu etwa 80 m für Luft von Atmosphärendruck. In einem Rohr von 18 m Länge hatten *G. D. Liveing* und *J. Dewar*[246]) bei Luftfüllung für die *A*-Gruppe hierzu 7 Atmosphären Druck nötig, für die *B*-Gruppe sogar 18 Atm., bei Sauerstoffüllung genügten schon 1 bzw. 2 Atm. Nach *A. S. King*[247]) werden *A* und *B* aber photographisch bereits nachweisbar, wenn das Licht eine Luftstrecke von nur 7 bzw. 40 m (bei Atmosphärendruck) durchläuft. Auch das H_2O-Band *a* bei 7200 Å.E. trat, noch dazu bei ziemlich trockener Luft, schon bei einem Luftweg von nur 9,5 m Länge auf.

Auch das plötzliche Abschneiden des Sonnenspektrums bei etwa 2900 Å.E. ist auf eine Wirkung unserer Atmosphäre zurückzuführen. Nach Beobachtungen von *A. Miethe* und *E. Lehmann*[248]) zu Berlin, Assuan und in den Alpen liegt die Grenze des sichtbaren Sonnenspektrums etwa zwischen 2911—2915,5 Å.E.; sie scheint außerdem von der Höhe des Beobachtungsortes unabhängig zu sein. Das letztere wird auch durch Messungen von *A. Wiegand*[249]), der in Halle a. d. S. 2897,3 Å.E. und in 9000 m Höhe (Ballonfahrt) 2896 Å.E. fand, bestätigt. Dieses plötzliche Abschneiden des Sonnenspektrums ist durch die Absorption der Ozonbande 2900—2300 A.E. bewirkt, und es müßte nach *P. Salet*[250]) daher eigentlich möglich sein, noch ein Stückchen Sonnenspektrum unter 2300 Å.E. sichtbar zu machen, da eine dann anschließende Ammoniakbande nach *J. Duglaux* und *P. Jeantet*[251]) erst bei etwa 2100 Å.E. beginnt. Versuche von *P. Lambert, G. Déjardin* und *D. Chalonge*[252]) in dieser Hinsicht auf dem Gipfel des Mt. Blanc hatten aber keinen Erfolg. Daß die ultraviolette Grenze des Sonnenspektrums noch bis zu den der Beobachtung zugänglichen Höhen von etwa 10000 m völlig unabhängig von der Höhe bleibt, beweist, daß die absorbierende Ozonschicht sehr hoch liegt, und *Ch. Fabry* und *H. Buisson*[253]) sowie *P. Lambert, G. Déjardin* und *D. Chalonge*[254]) verlegen sie daher in eine Höhe von 40 bzw. 45 km über die Erdoberfläche, wo die Ozonbildung unter dem Einfluß der dort wirksamen ultravioletten

245) Paris C. R. 101 (1885), p. 1143.
246) London Roy. Soc. Proc. 46 (1889), p. 222.
247) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 411.
248) Berlin Ber. 1909, p. 85.
249) Ber. deutsch. Phys. Ges. 11 (1913), p. 1090.
250) Bull. Soc. astr. France 23 (1909), p. 379.
251) Journ. de Phys. et le Radium (6) 4 (1923), p. 115.
252) Journ. de Phys. et le Radium (6) 4 (1923), p. 270.
253) Astroph. Journ. 54 (1921), p. 297.
254) Paris C. R. 183 (1926), p. 800; Bull. obs. de Lyon 9 (1927), p. 45.

Sonnenstrahlung unter 2100 Å.E. vor sich gehen soll. Nach *R. Dietzius*[255]) kann übrigens schon eine nur 3,25 mm dicke Ozonschicht von Atmosphärendruck die beobachtete Wirkung hervorrufen. Wie von *A. Fowler* und *R. J. Strutt*[256]) gezeigt worden ist, sind auch in dem der Beobachtung noch zugänglichen ultravioletten Teil der Spektren von Sonne und Sternen Serien enger Absorptionsbänder, die atmospärischen Ursprungs sind, nachweisbar.

Was die auf der Sonne durch Linien vertretenen Elemente betrifft, so hat *H. A. Rowland*[257]) nach seinen eigenen statistischen Untersuchungen nicht gefunden: Sb, As, Bi, B, N, Cs, Au, In, Hg, P, Rb, Se, S, Te, Pr. Zweifelhaft blieb ihm das Vorhandensein von Ir, Os, Pt, Ru, Ta, Th, Wo, Ur, und nicht untersucht hatte er J, F, O, Te, Ga, Tm, Tb. Seither sind aber doch mehrere der von *Rowland* als zweifelhaft oder nicht vorhanden bezeichneten Elemente nachgewiesen worden, und auch Linien inzwischen neu entdeckter Elemente konnten im Sonnenspektrum ebenfalls gefunden werden. Nach dem jetzigen Stand unserer Kenntnis können Linien folgender Elemente und Verbindungen als im Sonnenspektrum vorhanden bzw. nicht vorhanden bezeichnet werden.

a) *Metalloide.*

Vorhanden: H, O, Si.

Bemerkungen. Das Sauerstofftriplet ($S-P$) 7775,68, 7774,01, 7771,97 ist von *C. Runge* und *F. Paschen*[258]) sowie von *L. E. Jewell*[259]) im Sonnenspektrum aufgefunden und als solar bezeichnet worden. Später wies *R. A. Sampson*[260]) neuerlich darauf hin, daß das Triplet solaren Ursprungs sein müsse, da es die *Doppler*sche Rotationsverschiebung am Sonnenrand zeige, und seine Beobachtung wurde von *Ch. E. St. John*[261]), *C. Runge* und *F. Paschen*[262]) und von *K. W. Meißner*[263]) bestätigt. Der letztere fand dabei auch das Oxygendublet ($S-P$) bei 8446 im Sonnenspektrum vor.

Nicht vorhanden: B, C, N, S, P, Sb, As, die Halogene (Cl, Br, J, F) und die Edelgase He, Ne, A, Kr, Xe.

Bemerkungen: Für das Vorhandensein von Linien des N-Atoms

255) Met. Ztschr. 40 (1923), p. 297.
256) London Roy. Soc. Proc. 93 A (1917), p. 577.
257) Amer. Journ. of Science (3) 41 (1891), p. 243.
258) Astroph. Journ. 4 (1896), p. 317.
259) Astroph. Journ. 6 (1897), p. 456.
260) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1912), p. 31.
261) Annual Rep. Mt. Wilson Solar Obs. for 1911.
262) Phys. Ztschr. 14 (1915), p. 1267.
263) Phys. Ztschr. 15 (1916), p. 668.

hat eine Prüfung der Messungen des infraroten Teils des Sonnenspektrums von *W. F. Meggers*[264]) mit Hilfe der von *C. C. Kieß*[265]) für das neutrale Atom gegebenen Serienbeziehungen keinen sicheren Anhalt gegeben.

b) *Metalle.* Über das Vorhandensein bzw. Nichtvorhandensein von Linien derselben im mittleren Sonnenspektrum gibt die folgende Tabelle Aufschluß:

Kolonne des period. Systems	Linien vorhanden	Linien nicht vorhanden
I	Na, K, Rb^+, Cu, Ag	Li, Cs
II	Be, Mg, Ca, Ca^+, Sr, Sr^+, Ba, Ba^+, Zn, Cd	Ra, Hg
III	Al, Sc, Sc^+, Y, Y^+, Ga, In(?)	Ac, Tl
IV	Ti, Ti^+, Zr, Ge, Sn, Pb	Th
V	V, V^+, Nb, Ta(?)	
VI	Cr, Cr^+, Mo, W(?), U(?)	Se, Te, Po
VII	Mn, Mn^+	
VIII	Fe, Fe^+, Co, Ni, Ru, Rh, Pd, Os(?), Ir(?), Pt(?)	
Seltene Erden	Siehe Bemerkungen	

Bemerkungen.

Kolonne I: Das Fehlen der Li-Linien bei 6708 Å.E. entspricht, wie *H. N. Russell*[266]) bemerkt, nicht der relativen Häufigkeit des Elementes auf der Erde, die von *F. W. Clarke* und *H. S. Washington*[267]) mit 0,0129 % angegeben wird. *H. N. Russell* und *K. T. Compton*[268]) meinen, daß die Linien durch eine infolge des geringen Atomgewichtes besonders starke thermische Bewegung stark verbreitert (*Dopplereffekt!*) und dadurch bis zur Unsichtbarkeit geschwächt werden. Damit wäre auch der Widerspruch erklärlich, daß die Na-Linien trotz des fast ebenso großen Ionisationspotentials des Na so kräftig erscheinen.

Dem Rb^+ gehören nach *H. N. Russell*[269]) die Linien 4104,459, 4244,500, 4294,077 der P.T. an.

Kolonne II: Ba^+ ist durch die Serien $1^2S - 1^2P$ (4934, 4554) und $1^2P - 2^2P$ (4166, 4131, 3892) vertreten. Die in der P.T. vorkommenden Linien 3071,662 und 3965,769 gehören nach *H. N. Russell*[270]) dem neutralen Ba-Atom an. Daß von Natrium nur die Linien

264) Publ. Allegheny Obs. 6 (1919), p. 13.
265) Journ. Opt. Soc. Am. 11 (1925), p. 1.
266) Contr. Mt. Wilson Obs. 236 (1922).
267) Washington Nat. Acad. Proc. 8 (1922), p. 108.
268) Contr. Mt. Wilson Obs. 236 (1922), p. 160.
269) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 254.
270) a. a. O.

des Na, von Barium dagegen trotz des mit Na fast gleichen Ionisationspotentials Linien des Ba und Ba^+ vorkommen, erklärt *H. N. Russell* (a. a. O.) daraus, daß die Na^+-Linien weit im Ultraviolett liegen, wo die thermische Ionisation wegen der starken Abnahme der Sonnenstrahlen in den kurzen Wellen zu schwach geworden ist.

Es ist auffällig, daß im Sonnenspektrum viele Linien schwerer Elemente vorkommen. *A. Pannekock*[271]) weist hierzu darauf hin, daß die ionisierten Atome im elektrischen Feld einen scheinbaren Gewichtsverlust erleiden, daß die Erregung und Ionisation in den tieferen Schichten der höheren Temperatur wegen größer ist und daher ein eigentlicher Gleichgewichtszustand zwischen schweren und leichten Atomen nicht vorhanden sein kann.

Eine Tabelle der im Sonnenspektrum vorkommenden Kadmiumlinien ist von *Ch. E. St. John* und *Ch. E. Moore*[272]) gegeben worden.

Kolonne III: Neben den von *Rowland* in der P.T. als Scandiumlinien bezeichneten sind noch zahlreiche weitere Linien des Sc von *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[273]) identifiziert worden.

Kolonne IV: Von Ge, Sn, Pb gibt *Rowland* in der P.T. nur je eine Linie.

Seltene Erden: La, Ce, Nd, Er sind schon in der P.T. durch Linien nachgewiesen. Nach einer eingehenden Untersuchung von *G. Hofbauer*[274]) weist die P.T. überhaupt alle seltenen Erden durch Linien nach, am sichersten neben La, Ce, Nd auch noch Tb, Dy, Ho. Wie erst kürzlich *A. S. King* und *Ch. E. Moore*[275]) zeigen konnten, gehören diese Linien teilweise sogar den ionisierten Atomen, und zwar insbesondere Nd^+, Sm^+, Pr^+, Ce^+ und Ce^{++} an.

c) *Verbindungen.*

1. *Cyan:* Zwischen 3584—3591, 3730—3883 und 4207—4215 Å.E. sind schon in der P.T. zahlreiche Linien dem Kohlenstoff zugeschrieben, und insbesondere in der zweiten Gruppe zeigt sich starke Anhäufung der Linien bei 3883 Å.E. Alle Linien dieser Gruppen gehören den Cyanbanden Cy V, Cy IV und Cy III an, deren Kanten bis 3584, 3883 und 4216 Å.E. liegen. Der solare Ursprung dieser Bandenlinien ist aus der Beobachtung der weiter unten zu besprechenden generellen Rotverschiebung der Linien des Sonnenspektrums am Sonnenrand be-

271) Bull. Astr. Inst. Netherl. **1** (1922), p. 19.
272) Publ. Astr. Soc. Pac. **39** (1927), p. 314.
273) London Roy. Soc. Proc. **74** (1905), p. 538.
274) Wien Akad. Sitzber. **116** IIa (1907), p. 267.
275) Publ. Astr. Soc. Pac. **39** (1927), p. 47, 240.

reits von *H. F. Newall*[276]) nachgewiesen, und in einer neueren Untersuchung, die eigentlich der Prüfung der *Einstein*schen Linienverschiebung im Gravitationsfeld gewidmet war, hat *R. T. Birge*[277]) wieder an 188 Linien der Cy IV-Gruppe eine gemeinsame Verschiebung und dadurch ihre Zusammengehörigkeit aufdecken können.

2. *Kohlenwasserstoff:* Eine größere Anzahl von Linien in der Nähe der G-Gruppe, die übrigens in der P.T. nicht als C-Linien identifiziert erscheinen, gehören nach *H. F. Newall* und *F. E. Baxandall*[278]) dem Kohlenwasserstoffband ζ an, dem *F. Lowater*[279]) noch weitere in der Nähe der G-Gruppe befindliche Linien zuschreibt.

3. *Wasserdampf:* Nach *A. Fowler*[280]) gehören etwa 150 Linien im Ultraviolett dem Wasserdampfband bei 3064 Å.E. an.

4. *Ammoniak:* Zahlreiche Linien identifizierte *A. Fowler*[281]) als Linien des Ammoniakbandes bei 3360 Å.E. Diesem Band fällt danach der Hauptanteil zu an der Bildung der ultravioletten P-Gruppe des Sonnenspektrums. Spätere Arbeiten von *A. Fowler* und *C. C. L. Gregory*[282]) haben die früheren Resultate bestätigt.

Daß im mittleren Sonnenspektrum zahlreiche Linien auftreten, die mit Linien bekannter Elemente nicht identifiziert werden können und daß andererseits wieder von einer nicht unbeträchtlichen Anzahl von Elementen Linien nicht aufgefunden werden können, erklärt sich daraus, daß die auf der Sonne herrschenden Erregungszustände von den im irdischen Laboratorium herstellbaren verschieden sind und daß einzelne Linienserien soweit im Ultraviolett liegen, daß sie dort in der allgemeinen Ultraviolettabsorption des atmosphärischen Ozons unsichtbar werden. Gerade das letztere trifft für C zu, dessen „ultimate line“ nach *De Gramont*[283]) bei 2478 Å.E. liegt, also infolge der Ozonabsorption nicht beobachtet werden kann, obwohl sie, da die Verdampfungstemperatur des C nach *Kohn* und *Guckel*[284]) schon bei etwa 4000° liegt, im Sonnenspektrum vorhanden sein muß. Mit dem oben erwähnten, gegenüber Na merkwürdigen Verhalten von Li und Ba

276) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 68 (1907), p. 2.

277) Phys. Rev. (2) 21 (1923), p. 712; Astroph. Journ. 59 (1924), p. 45.

278) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 76 (1916), p. 640.

279) Pop. Astr. 25 (1917), p. 179.

280) London Roy. Soc. 1918, Jan. 24.

281) a. a. O.

282) London Roy. Soc. Phil. Trans. 218 (1919), p. 351; The Observ. 42 (1919), p. 381.

283) Paris C. R. 171 (1920), p. 1106.

284) Die Naturwiss. 12 (1924), p. 139.

sowie Ba^+ haben sich *Meg Nad Saha*[285]), *H. H. Plaskett*[286]) und *M. C. Johnson*[287]) eingehender beschäftigt. Nach Gleichung (85) (p. 590) ist n_r die Partialkonzentration desjenigen Erregungszustandes eines bestimmten Atoms, der bei einer bestimmten Temperatur eine bestimmte Linie ergibt, und somit gibt $\frac{\partial u_r}{\partial T} = 0$ die bei dieser bestimmten Temperatur möglichen maximalen Werte von n_r. Miß *C.H. Payne*[288]) hat diese $\log (n_r)_{\max}$ für die Elemente Ca, Fe, Cr, Ti unter Verwendung der den einzelnen Serien zukommenden Erregungspotentiale berechnet und mit den Intensitätsangaben I der *Rowland*schen P.T. für die betreffenden Linien verglichen. Die folgende Zusammenstellung gibt ihre Resultate für das Element Ti:

E.P.	$\log n_r$	I	E.P.	$\log n_r$	I
E.P. = 0,00,	$\log n_r = \bar{1},89$,	$I = 5$	E.P. = 2,08,	$\log n_r = \bar{3},04$,	$I = 0$
0,82	$\bar{2},14$	4	2,16	$\bar{4},95$	1
0,90	$\bar{2},08$	3	2,24	$\bar{4},89$	2
1,05	$\bar{3},95$	3	2,26	$\bar{4},85$	0
1,44	$\bar{3},81$	3	2,28	$\bar{4}.83$	0
1,50	$\bar{3},54$	2	2,33	$\bar{4},80$	0
1,87	$\bar{3},21$	1	2,39	$\bar{4},75$	0
1,98	$\bar{3},21$	1	2,56	$\bar{4},60$	000

Man erkennt aus diesen Zahlen deutlich, daß Linienintensität und n_r in gleichem Maße abnehmen, wie das Erregungspotential wächst, so daß die Wahrscheinlichkeit, Linien höheren Erregungspotentials nachweisen zu können, immer geringer wird. Bei Titan treten nun allerdings gleichzeitig die dabei immer kräftiger werdenden Ti^+-Linien in die Bresche. Würde jedoch das niederste E.P. einer Ti-Serie bei etwa 2,5 Volt liegen, und die Serien des Ti^+ entweder im äußersten Ultraviolett liegen oder ebenfalls hohe E.P. erfordern, so wäre dann Ti im Gegensatz zu seinem wirklichen Verhalten nur durch ganz schwache Linien vertreten und somit nur sehr schwer oder überhaupt nicht nachweisbar. Es ist übrigens klar, daß die Linienintensität auch von der relativen Häufigkeit des betreffenden Elementes in der umkehrenden Schicht, in der ja die *Fraunhofer*schen Linien entstehen, abhängig ist, und es sei hier weiter vorgreifend bemerkt, daß in den Spektren der Sonnenflecken und der Sonnenchromosphäre Elemente haben aufgefunden werden können, die im mittleren Sonnenspektrum scheinbar nicht nachweisbar sind. Eine Liste kräftigerer, in den Spektren der

285) Phil. Mag. 40 (1920), p. 472.

286) Domin. astroph. Obs. Publ. Victoria 1 (1922), p. 325.

287) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 516.

288) Washington Nat. Acad. Proc. 11 (1925), p. 197.

Sonne und der Fixsterne vorkommender Linien unbekannten Ursprungs ist von *F. E. Baxandall*[289]) zusammengestellt worden.

Schon *L. E. Jewell*[290]) hat Differenzen zwischen den Wellenlängen der Sonnenlinien und den Messungen im Laboratorium bemerkt, die eine einheitliche Erklärung nicht zuließen. Auf die Wahrscheinlichkeit einer Verfälschung der Messungen im Sonnenspektrum durch einen bei Benutzung verschiedener Stellen des Vergleichslichtbogens auftretenden Poleffekt haben *T. Royds*[291]) und *Ch. E. St. John* und *H. D. Babcock*[292]) hingewiesen, und schon früher hatte, wie oben (p. 542) erwähnt, *F. Goos* die Verwendung eines unter bestimmten Bedingungen erzeugten Fe-Bogens gefordert. Daß die Sonnenlinien aber trotz aller späteren Vorsichtsmaßregeln fast durchweg eine geringe Rotverschiebung gegenüber den Messungen im Laboratorium zeigen, ist durch eingehende Untersuchungen von *Chr. Fabry* und *H. Buisson*[293]), *J. Evershed*[294]) und *T. Royds*[295]) erwiesen und wird von den letzteren beiden auf eine allgemeine und mit der Tiefe abnehmende, absteigende Bewegung in der Sonnenatmosphäre zurückgeführt. Daß es neben rotverschobenen Linien aber auch solche gibt, die Violettverschiebung aufweisen, wie z. B. an Fe-Linien von *T. Royds*[296]) und *J. Evershed* und *A. An. Ayyar*[297]) gefunden haben, bedeutet natürlich eine ganz wesentliche Komplikation der obwaltenden Umstände. Doch konnten *Ch. E. St. John* und *H. D. Babcock*[298]) immerhin noch eine so gute Konstanz der Wellenlängenwerte für die einzelnen Linien nachweisen, daß wenigstens auf angenäherte Gleichmäßigkeit und Konstanz der wirkenden Ursachen geschlossen werden darf. Da die *Fraunhofer*schen Linien in verschiedenen Tiefen der umkehrenden Schicht, also unter verschiedenen Drucken entstehen, sind geringe Wellenlängenunterschiede übrigens immer zu erwarten, und durch die verschiedene Höhe der über diesen Ursprungsschichten lagernden Atmosphärenteile wird auch das Aussehen der Linien verschieden beeinflußt sein. Insbesondere zwischen Sonnenmitte und Sonnenrand wird sich das letztere wegen der bei Beobachtung am Sonnenrand größeren Weglänge in

---

289) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 166.
290) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 89.
291) Kodaikanal obs. Bull. 38 (1914); 54 (1916).
292) Astroph. Journ. 45 (1917), p. 112.
293) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 97.
294) Kodaikanal obs. Bull. 36 (1914).
295) Kodaikanal obs. Bull. 53 (1916).
296) Kodaikanal obs. Bull. 38 (1914).
297) Kodaikanal obs. Bull. 46 (1915).
298) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 36

der Sonnenatmosphäre fühlbar machen. Auf die bezüglichen Unterschiede im Aussehen der Linien ist bereits von *Hastings*[299]) hingewiesen worden, und *G. E. Hale* und *W. S. Adams*[300]) bemerken, daß das Spektrum des Sonnenrandes bis zu einem gewissen Grade dem der Sonnenflecken ähnlich werde. Nicht selten zeigen sich die Wasserstofflinien am Sonnenrand durch eine feine Emission gespalten, also einfach umgekehrt.[301])

Merkwürdigerweise zeigen sich aber zwischen Sonnenmitte und Sonnenrand auch deutliche Wellenlängenunterschiede im Sinn einer allgemeinen Rotverschiebung am Sonnenrand, die zuerst von *J. Halm*[302]) gelegentlich einer zur spektroskopischen Bestimmung der Sonnenrotation vorgenommenen Beobachtungsreihe bemerkt und von demselben für mit etwa dreijähriger Periode variabel angesehen worden sind. Diese Rotverschiebung der Linien am Sonnenrand wurde dann von *Chr. Fabry* und *H. Buisson*[303]) sowie von *W. S. Adams*[304]) im allgemeinen — die einzelnen Linien verhalten sich verschieden — bestätigt. *Adams* bemerkte an den Linien der ionisierten Atome die größten Verschiebungen und dachte an Verschiedenartigkeit der Druckverhältnisse. *J. Evershed* und *T. Royds*[305]) dagegen meinen, daß hier lediglich aus irgendeinem unbekannten Grund eine Verstärkung der oben erwähnten allgemeinen Rotverschiebung gegen den Rand hin vorliege. Wenn übrigens in den Poren der Sonnenoberfläche ähnliche Bewegungen stattfinden wie die von *Evershed* in den Sonnenflecken beobachteten (siehe Sonnenflecken, *Evershed*effekt), so könnte die Rotverschiebung am Sonnenrand, wie von *R. E. De Lury*[306]) ausgeführt wurde, auch auf die bei schrägem Austritt des Lichtes aus den zahlreichen Randporen merkbar werdende Wirkung dieser Bewegungen zurückgeführt werden.

W. H. Julius[307]) hat versucht, zahlreiche an der Sonne beobachtete Erscheinungen, darunter auch das eben besprochene abnormale Ver-

---

299) Amer. Journ. of Science 5 (1873), p. 369; 21 (1881), p. 35.

300) Astroph. 25 (1907), p. 300.

301) Siehe *A. Belopolsky*, Mitt. Nicolai-Hauptsternw. Pulkowo 1 (1905), Nr. 1—3. Erst kürzlich wurde von *J. Evershed* (London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 [1927], p. 350) im Spektrum des Sonnenrandes in der Nähe von *K* eine weitere schwache Emissionslinie beobachtet.

302) Astr. Nachr. 173 (1907), p. 273.

303) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 97; Paris C. R. 148 (1909), p. 1741.

304) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 30; Contr. Mt. Wilson Solar Obs. 43 (1910).

305) Kodaikanal obs. Bull. 49 (1916).

306) Pop. Astr. 29 (1921), p. 155.

307) Astr. Nachr. 153 (1900), p. 433.

halten der Linien im Sonnenspektrum durch die von *Sellmaier* auf Grund theoretischer Erwägungen über die Einwirkung der Moleküle auf den in der materiellen Substanz schwingenden Äther vorausgesagte und später insbesondere von *Kundt* genauer untersuchte *anomale Dispersion* zu erklären. Bekanntlich besteht diese anomale Dispersion darin, daß in einer selektiv absorbierenden Substanz der normale Verlauf des Brechungsquotienten mit der Wellenlänge in der Nähe des Absorptionsgebietes gestört erscheint. In der Regel wachsen die Brechungsquotienten bei Annäherung an den Absorptionsstreifen oder die Absorptionslinie von der roten Seite her abnorm rasch an und fallen umgekehrt bei Herankommen von der violetten Seite her ungewöhnlich rasch ab. Besitzt also eine prismatische Gasschicht in der Nähe einer beliebigen Spektrallinie anomale Dispersion, so kann dadurch eine Verschiebung der betreffenden Linie bewirkt werden, da ja die Lage derselben im prismatischen durch die Gasschicht gegebenen Spektrum von dem für die Wellenlänge der Linie geltenden Brechungsquotienten der Gasschicht abhängt. Auf diese spezielle Verschiebungswirkung der anomalen Dispersion, die von *J. Larmor*[308]) später auch theoretisch begründet worden ist, hat ebenfalls bereits *W. H. Julius*[309]) hingewiesen und sie für die im Sonnenspektrum beobachteten Rotverschiebungen verantwortlich gemacht. Wenn auch *Ch. E. St. John*[310]) in einer breit angelegten Untersuchung weiterhin hatte zeigen können, daß auch die im Gefolge der anomalen Dispersion zu erwartenden gegenseitigen Störungen der Linien enger Paare im Sonnenspektrum nicht beobachtet werden können, so hat doch *W. H. Julius*[311]) trotz mancher Gegnerschaft immer wieder auf die hohe Bedeutung der anomalen Dispersion hingewiesen.

Was den partialen Elektronendruck betrifft, durch den natürlich auch die Partialkonzentration n_r beeinflußt wird, so hängt derselbe wieder vom Gesamtdruck ab, der in der umkehrenden Schicht herrscht, also in der Schicht oder in dem Schichtenkomplex, in dem das aus dem Sonneninneren kommende kontinuierliche Licht in die *Fraunhofer*schen Linien umgekehrt wird. Das Spektrum dieser umkehrenden Schicht für sich allein, also ein Gasspektrum aus hellen Emissionslinien, läßt sich bei totalen Sonnenfinsternissen in dem Moment

---

308) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 265.

309) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 1.

310) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 311; Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 458; Mt. Wilson Obs. Commun. 30 (1916).

311) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 419; 54 (1921), p. 92; Ann. Phys. 71 (1922); Amsterdam Koningl. Akad. Proc. 26 (1923), Nr. 5, 6.

beobachten, wo der Mond die unter der umkehrenden Schicht liegende, das kontinuierliche Spektrum ergebende Protosphäre völlig verdeckt hat, so daß nur mehr die umgekehrte Schicht und die über ihr lagernde Chromosphäre über den Mondrand hervorragen. Die *Fraunhofer*schen Linien leuchten dann hell auf, und zwar blitzartig (Flashspektrum), da ja der Mond bei seiner Weiterbewegung auch die umkehrende Schicht bald verdeckt. Die Höhe der umkehrenden Schicht ergibt sich aus der Dauer des Aufleuchtens der Linien zu etwa 1″ bis 2″ oder rund 1000 km. Bedenkt man, daß nach *M. Gouy*[312]) eine Natriumflamme von 1000 km Dicke pro km nur 2 mg Na enthalten müßte, um die *D*-Linien in gleicher Stärke zu ergeben, wie sie im Sonnenspektrum beobachtet werden, so folgt, daß die Stoffmenge und daher auch der Druck in der umkehrenden Schicht äußerst gering sein dürfte. Dieser in der umkehrenden Schicht herrschende Druck kann nach einer Zusammenstellung von *H. N. Russell* und *J. Q. Stewart*[313]) nach folgenden Methoden abgeschätzt werden:

1. *Druckverschiebung der Linien.* Aus den Unterschieden der Wellenlängen in Sonne und Bogen haben der Reihe nach gefunden:

L. E. Jewell, J. F. Mohler und *W. J. Humphreys*[314])	2—7 Atm.
Chr. Fabry und *H. Buisson*[315])	4,5 „
J. Evershed[316])	0,13 „
A. Perot[317])	0,4 „
Ch. E. St. John und *H. D. Babcock*[318]) . . .	0,13 $\pm$ 0,06 „

Die ersten Werte sind wohl infolge der Wirkung des oben erwähnten Poleffektes des Vergleichslichtbogens viel zu groß ausgefallen, aber auch die neueren Bestimmungen erscheinen im Vergleich zu den aus anderen Erwägungen gefolgerten Drucken jedenfalls infolge der Schwierigkeit der Trennung von Druckeffekt und allgemeiner Rotverschiebung noch immer zu hoch.

2. *Schärfe der druckempfindlichen Linien.* Mit Rücksicht darauf, daß die Linien im *Geißler*rohrspektrum bei zunehmendem Druck rasch verwaschen werden, schloß schon *A. Secchi*[319]) aus Breite und Schärfe

312) Paris C. R. 154 (1912), p. 1764.
313) Astroph. Journ. 59 (1924), p. 197.
314) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 138.
315) Paris C. R. 148 (1909), p. 688.
316) Kodaikanal obs. Bull. 18 (1909), p. 131.
317) Paris C. R. 1922, Apr. 3; Bull. Soc. astr. de France 36 (1922), p. 297.
318) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 32; Contrib. Mt. Wilson Obs. 278 (1924).
319) Die Sonne, deutsch von *A. Schellen,* Braunschweig 1872, Westermann, p. 266.

der *Fraunhofer*schen Linien auf einen Druck in der umkehrenden Schicht von höchstens $\frac{1}{2}$ Atm. Neuere Untersuchungen von *A. S. King*[320]) im elektrischen Ofen an den Cr-Linien 4111, 4097, 3912 und weiter an mehreren Ba-Linien[321]), sowie von *F. A. Saunders*[322]) an den Linien 4355, 4108, 3972 des Ca, die durchweg bei Atmosphärendruck verwaschen, bei niederem Druck aber scharf erscheinen, ergaben einen Druck von weniger als 0,1 Atm., und zu dem gleichen Ergebnis gelangte *J. Evershed*[323]) aus dem Verhalten des *Balmer*linien des Wasserstoffs.

3. *Undurchsichtigkeit der Photosphäre und Reflexionsfähigkeit der umkehrenden Schicht.* Wegen der Diffusion der aus den tieferen Schichten kommenden Strahlung durch Streuung an den freien und gebundenen Elektronen wird die Photosphäre in einer bestimmten Tiefe undurchsichtig, und in gleichem Sinn wirkt die thermische Absorption der freien Elektronen. Auf Grund theoretischer Betrachtungen hierzu von *J. Q. Stewart*[324]) fanden *H. N. Russell* und *J. Q. Stewart*[325]) unter Zugrundelegung der Vorstellungen von *Meg Nad Saha* über die thermische Ionisation (siehe dort!) für eine Temperatur von 5000° vollständige Undurchsichtigkeit der Photosphäre in einer Tiefe, wo der Druck höchstens etwa 0,01 Atm. beträgt. Da das Flashspektrum keinen kontinuierlichen Untergrund zeigt, die umkehrende Schicht also fast kein Licht reflektiert und daher fast völlig durchsichtig sein muß, so folgt unter der Annahme, daß ein eventueller kontinuierlicher Untergrund des Flash sicher nicht $\frac{1}{100}$ der Helligkeit des kontinuierlichen Photosphärenspektrums erreicht, und unter der weiteren Voraussetzung einer Proportionalität zwischen Reflexionsfähigkeit und Druck für die umkehrende Schicht ein Höchstdruck von 10^{-4} Atm.

4. *Breite der Fraunhoferschen Linien.* Die Breite der Spektrallinien wächst mit der Zahl der absorbierenden Atome und der stattfindenden Kollisionen, weiter durch Auftreten eines *Stark*effektes, der durch die Felder der Ionen und freien Elektronen erzeugt wird, und daher mit der Zahl dieser letzteren, also überhaupt mit der Dichte, und endlich auch noch wegen des thermischen *Doppler*effektes mit der Temperatur. Auf Grund der Untersuchungen von *J. Q. Stewart*[326]) über

---

320) Astroph. Journ. 41 (1915), p. 86.
321) Astroph. Journ. 48 (1918), p. 13.
322) Astroph. Journ. 59 (1924), p. 198 (Brief an *H. N. Russell*).
323) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 82 (1922), p. 394.
324) Nature 111 (1923), p. 186; Phys. Rev. 22 (1923), p. 324.
325) Astroph. Journ. 59 (1924), p. 197.
326) Astroph. Journ. 59 (1924), p. 30.

den Einfluß des thermischen *Doppler*effektes und der Zahl der absorbierenden Moleküle, von *H. A. Lorentz*[327]) über die Wirkung von Kollisionen und von *R. d'E. Atkinson*[328]) über den *Stark*effekt fanden *H. N. Russell* und *J. Q. Stewart*[329]) mit den *D*-Linien für den Partialdruck aller Na-Atome ca. 10^{-7} Atm. Nimmt man nun an, daß Na etwa $\frac{1}{10}$ der ganzen Materie der umkehrenden Schicht ausmacht, so wäre der Gesamtdruck 10^{-6} Atm. Auf dem gleichen Wege ergab sich für Wasserstoff der etwas höhere Wert von 10^{-5} Atm. Möglicherweise ist der Unterschied durch das abnorme Verhalten der Wasserstofflinien verursacht, die ähnlich wie die Linien ionisierter Atome in den Spektren der weniger dichten Riesensterne kräftiger erscheinen als in den Spektren der dichteren Zwerge.[330])

5. *Gravitationsgleichgewicht der oberen Schichten.* Aus den nicht auf spektralanalytischer Basis beruhenden Beziehungen, die von *A. S. Eddington*[331]) und *Meg Nad Saha*[332]) entwickelt worden sind, schlossen *Russell* und *Stewart* (a. a. O.) ebenfalls auf einen Druck in der umkehrenden Schicht von ungefähr 10^{-4} Atm.

6. *Ionisation von* Ca *und Dissoziation von* TiO_2. Die Linien *H* und *K* des ionisierten Ca sind auch im Spektrum der Sonnenflecken noch viel kräftiger als die Linie 4226 des neutralen Ca. Nimmt man für die Sonnenfleckentemperatur etwa 4200° an, so dürfte die darüberliegende umkehrende Schicht eine Temperatur von etwa 3600° (85%) besitzen. Mit dieser Temperatur und dem Ionisationspotential von 6,09 Volt des Ca folgt aber aus der *Saha*schen Formel (Gleichung (79) auf p. 588)

$$\log \frac{x}{1-x} + \log P_e = -\frac{5036\,J}{T} + 2{,}5 \log T - 6{,}5$$

für P_e $$P_e = 7{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1-x}{x}\ ^{333}),$$

und da $\frac{1-x}{x} < 1$ ist, muß P_e von der Größenordnung 10^{-7} Atm. sein. Berücksichtigt man, daß die Ionisation durch Absorption photo-

327) Amsterdam Koningl. Akad. Proc. 18 (1914), p. 134.

328) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 82 (1922), p. 396. Siehe auch *E. O. Hulburt,* Astroph. Journ. 59 (1924), p. 177.

329) a. a. O.

330) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

331) Siehe *Emden,* Thermodynamik der Himmelskörper, diese Encykl. VI 2, p. 487 ff.

332) Astroph. Journ. 50 (1919), p. 220.

333) Der bei *Russell* (a. a. O.) gegebene Zahlenwert von $8{,}10^{-7}$ wurde hier in $7{,}5 \cdot 10^{-7}$ richtiggestellt.

sphärischer heißerer Strahlung begünstigt wird, so könnte man P_e zunächst auf 10^{-6} Atmosphären und dann bei Bedachtnahme, daß auch noch andere ebenso leicht ionisierbare Elemente (Na, K, Al, ...) vorhanden sind, noch weiter auf 10^{-5} Atm. erhöhen.

TiO_2 ist im mittleren Sonnenspektrum als Verbindung nicht nachweisbar, also völlig dissoziiert. *W. d'E. Atkinson*[334]) nimmt an, daß auch O_2 vollständig dissoziiert ist, daß also die Reaktionsgleichung

$$TiO_2 \leftrightarrows Ti + O_2 \leftrightarrows Ti + 2\,O$$

besteht und die Reaktionswärme somit durch die Dissoziation von O_2 noch verstärkt wird. Mit einer Gesamtreaktionswärme von $U = 285\,000$ cal für den ganzen Prozeß folgt dann aus der *Saha*schen Gleichung

$$\log \frac{p_{Ti} \cdot p_{2\,O}}{p_{Ti\,O_2}} = \frac{x^3 P^3}{(1-x)(1-2x)^2}$$
$$= -\frac{62\,300}{T} + 3{,}75 \log T - 2{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot T - 2{,}0$$

wieder, daß P zwischen 10^{-5} und 10^{-6} Atm. liegen dürfte. Zu ähnlichen Resultaten gelangten *R. H. Fowler* und *E. A. Milne*[335]) bei Betrachtung der Bedingungen, unter denen die Linienserien ihr Intensitätsmaximum erreichen, und dann später noch *C. H. Payne*[336]) und *H. D. Menzel.*[337])

7. *Grenzlinien der Serien. Meg Nad Saha*[338]) bemerkt, daß von dem Moment an, wo die Elektronenbahnen von der Dimension des mittleren Atomabstandes werden, weitere Serienglieder bis zur Seriengrenze nicht mehr auftreten können. Aus der Tatsache, daß in Sternspektren nur bis zu 24 Linien der *Balmer*serie beobachtet worden sind, und dem mit den Dimensionen der Elektronenbahn der letzten Serienlinie gleichzeitig gegebenen mittleren Atomabstand folgt dann ein Druck von 10^{-3} bis 10^{-4} Atm., ein Resultat, zu dem auch *J. W. Nicholson*[339]) gelangte.

Stellt man alle diese Bestimmungen zusammen, so hat man

1. Druckverschiebung	$P < 10^{-1}$	Atm.
2. Linienschärfe	$< 10^{-1}$	„
3. Durchsichtigkeit des Flash . . .	$\sim 10^{-5}$	„
4. Linienbreite	$\sim 10^{-6}$	„

334) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 82 (1922), p. 396.
335) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 403; 84 (1924), p. 499.
336) Harvard Coll. Obs. Circ. 256 (1924).
337) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).
338) Nature 114 (1924), p. 155.
339) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 253.

5. Strahlungsgleichgewicht . .	$\sim 10^{-4}$	Atm.
6. Ionisation	$\sim 10^{-5}$—10^{-6}	„
7. Grenze der *Balmer*serie . .	$\sim 10^{-3}$—10^{-4}	„

Man wird also für die umkehrende Schicht einen Druck von etwa 10^{-4} Atm. anzunehmen haben.

11. Das Spektrum der Sonnenflecken. Von den im mittleren Sonnenspektrum nicht durch Linien vertretenen Elementen sind in den Spektren der Sonnenflecken noch weiter aufgefunden worden:

He durch die Heliumlinie D^3 (Orthoheliumdublet $1\,^2P - 2\,^2D$ bei 5875,96 und 5875,61 Å.E.), die zwar selten in den Flecken selbst, aber häufig in den einen Fleck umgebenden Photosphärenteilen beobachtet worden ist. Dort dürfte sie als dunkle Linie zuerst von *C. A. Young* am 2. Sept. 1870 bemerkt worden sein. Später wurde sie von *H. Kreusler*[340]) wieder einmal als dunkle Linie gesehen, und seither ist sie im Fleckenspektrum oft aufgefunden worden, z. B. von *C. Michie Smith*[341]), von *A. A. Buß*[342]), der sie über Fackelgebieten ohne Vorhandensein eines Flecken bemerkte, von *G. Nagaraja*[343]), der besonders darauf hinwies, daß D_3 meistens dann auftritt, wenn über demselben Gebiet auch H_α und H_β umgekehrt erscheinen und der die Linie auch einige Male über den Flecken selbst als ganz feine helle Linie beobachtete, und von *R. A. C. Daunt*[344]), der sie einmal auf einer Lichtbrücke zwischen zwei Flecken sogar deutlich doppelt umgekehrt sah.

Li ist nach *A. S. King*[345]) durch die „ultimate line“ der Hauptdubletserie $1\,^2S - 2\,^2P$ bei 6707,8 Å.E. nachweisbar, und von

Rb ist nach *H. N. Russell*[346]) ebenfalls das Linienpaar 7800,3 und 7947,6 der Hauptdubletserie $1\,^2S - 2\,^2P$ vorhanden. (Im mittleren Sonnenspektrum kommt nach dem früheren nur Rb^+ vor.)

Das im mittleren Sonnenspektrum vorkommende O-Triplet bei 7773 fehlt im Fleckenspektrum nach *P. W. Merrill*[347]), dagegen ließen sich von *G. E. Hale* und *W. S. Adams*[348]) von der O-Verbindung

TiO_2 zwischen 5598—7126 Å.E. 152 Bandenlinien identifizieren.

---

340) Verh. deutsch. phys. Ges. 1904, p. 197.
341) Kodaikanal obs. Bull. 3 (1905), p. 65; The Observat. 28 (1905), p. 358.
342) The Observat. 30 (1907), p. 62.
343) The Observat. 30 (1907), p. 214.
344) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 69 (1909), p. 605.
345) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 169; Contr. Mt. Wilson Obs. 122 (1916).
346) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 202.
347) Astroph. Journ. 51 (1920), p. 247; Contr. Mt. Wilson Obs. 183 (1920).
348) Astroph. Journ. 25 (1907), p. 75.

Die nach Rot abschattierten Banden des TiO_2 haben ihre Bandenköpfe nach *F. E. Baxandall*[349]) bei den Wellenlängen 6275,5, 6651,2, 6680,8, 6781,2, 6814,8, 7054,5, 7087,8, 7092,9 und 7125,6 Å.E.

Magnesiumhydrid (MgH_2). Auf Grund der Untersuchungen von *E. E. Brooks*[350]) über das Bandenspektrum des MgH_2 fand *A. Fowler*[351]) auf *G. E. Hales* Aufnahmen des Fleckenspektrums zahlreiche Linien, die den beiden nach Violett abschattierten Banden mit den Kanten bei 5211 und 5620 Å.E. angehören.

Kalziumhydrid (CaH_2). Die beiden nach Violett verlaufenden Bänder des CaH_2, deren Bandenkanten bei 6382 und 6389 Å.E. liegen und die leicht beobachtet werden können, wenn der Ca-Bogen in einer Wasserstoffatmosphäre brennt, wurden im Fleckenspektrum zuerst von *Ch. M. Olmstedt*[352]) aufgefunden. Außerdem liegen schwache Bänder des CaH_2 noch bei 6393, 6398 und 6407 Å.E. *J. Barnes*[353]) beobachtete später die beiden zuerst genannten Banden des CaH_2 auch in einem unter niedrigem Druck in Luft brennenden Ca-Bogen und meinte daher, daß die im Fleckenspektrum beobachteten Banden möglicherweise auch rein metallischen Ursprungs sein könnten.

Wasserdampf. Die Frage, ob im Fleckenspektrum Wasserdampflinien vorkommen, wurde von *A. L. Cortie*[354]) erörtert, dem es gelang, auf einer Aufnahme von *W. M. Mitchell* zu Princeton vom 31. Juli 1906 bei 64 zwischen 5900 und 5950 Å.E. liegenden H_2O-Dampflinien ein Verstärkung im Fleckenspektrum zu beobachten. Trotzdem wurde von *J. Evershed*[355]) und *W. M. Mitchell*[356]) auf Grund eigener Untersuchungen bezweifelt, daß die Sonnenflecken Wasserdampf enthalten.

Eine Anzahl von im Fleckenspektrum beobachteten Banden, deren Identifikation vorläufig noch aussteht, ist in einer Liste on *F. E. Baxandall*[357]) zusammengestellt worden.

Beim Vergleiche des Fleckenspektrums mit dem mittleren Sonnenspektrum zeigt sich, daß die Linien im ersteren vielfach Veränderungen gegenüber dem letzteren aufweisen. Im Fleckenspektrum erscheinen manche Linien dunkler und dabei oft beträchtlich verbreitert,

349) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 568.
350) London Roy. Soc. Proc. 80 A (1907), p. 218.
351) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 67 (1907), p. 530.
352) Astroph. Journ. 27 (1908), p. 66.
353) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 175.
354) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 379.
355) The Observat. 32 (1909), p. 101.
356) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 40.
357) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 568.

andere erscheinen hell statt dunkel und wieder andere schmäler und schwächer. Aber alle diese Unterschiede treten fast ausschließlich nur im Bereich der langen Wellen auf, nicht aber oder wenigstens nicht im gleichen Ausmaß im photographischen Teil. Nicht selten zeigen sich einzelne Linien im Fleckenspektrum durch eine aufgelagerte feine Emission gespalten, gleichsam als wären sie einfach umgekehrt, oder sie erscheinen nicht gerade, wie es für sie als optische Bilder des geraden Spektrographenspaltes sein sollte, sondern verkrümmt, verästelt, als würden in der vom Spalt aus der Sonnenoberfläche herausgeschnittenen Zone nebeneinander Gasströme mit Geschwindigkeiten von bis zu 500 km/sec und mehr auf- und absteigen und dadurch in einzelnen Teilen der Linien starke *Doppler*sche Verschiebungen hervorrufen. Alle diese Veränderungen sind schon frühzeitig, z. B. von *S. J. Perry*[358]), *H. C. Vogel*[359]) oder *J. N. Lockyer*[360]) beschrieben worden, und später haben sich u. a. *G. E. Hale* und *W. S. Adams*[361]), *W. M. Mitchell*[362]), *J. Evershed*[363]), *A. Fowler*[364]), *H. F. Newall*[365]), *A. Belopolsky*[366]) und *A. L. Cortie*[367]) um die Identifikation und Tabulierung der Linien von im Fleckenspektrum verändertem Aussehen bemüht. Für das Studium solcher Linien sind die „Photographic maps" des Sonnenfleckenspektrums zu empfehlen, die von *F. Ellermann* nach Aufnahmen des Mt. Wilson-Solar-Observatory zusammengestellt und von *G. E. Hale*[368]) besprochen worden sind.

Bevor wir die im Fleckenspektrum beobachteten Eigentümlichkeiten auf Grund der neueren Vorstellungen über den Atombau und die Ionisation zu erklären versuchen, seien die älteren Ansichten über diesen Gegenstand kurz gestreift. Infolge ungenauer, mit zu geringer Dispersion ausgeführter Wellenlängenmessungen hielt *Lockyer* Linien, die verschiedenen Elementen angehören und nur wenig verschiedene

---

358) Ebendort 44 (1884), p. 244.

359) Bothkamper Beobachtungen Bd. 1 u. 2.

360) London Roy. Soc. Proc. 31 (1880), p. 72, 348.

361) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 211; 23 (1906), p. 11; 27 (1908), p. 45; 30 (1909), p. 86.

362) Astroph. Journ. 22 (1905), p. 4; 24 (1906), p. 78.

363) Kodaikanal obs. Bull. Nr. 1, 4, 6, 8 (1905—1907).

364) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p, 205.

365) Ebendort 67 (1906), p. 158.

366) Mitt. Nicolai-Hauptsternw. Pulkowo 2 (1907), p. 32.

367) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 62 (1902), p. 516; 63 (1903), p. 468; Astroph. Journ. 20 (1904), p. 253.

368) Publ. Astr. Soc. Pac. 19 (1907), p. 240. Eine zweite Tafelsammlung in größerem Maßstab wird in Pop. Astr. 28 (1920), p. 600 besprochen.

Wellenlänge besitzen, für völlig identisch, und er meinte, daß die verschiedenen Elemente gemeinsame Linien besitzen und daher Kombinationen einfacherer Urelemente seien und daß das Spektrum eines irdischen Elementes daher nichts anderes sei, als die Summe der Spektren der in ihm enthaltenen Urelemente. Seine Vorstellungen schienen durch eine Beobachtung von *W. Huggins*[369]) eine Stütze zu erhalten, der in den Spektren weißer Sterne öfters von den beiden Linien des Ca^+ H und K nur die erstere zu sehen glaubte, die letztere aber nicht, denn das Fehlen der K-Linie schien auf eine Dissoziation der das Ca bildenden Urelemente hinzuweisen. Trotzdem sich aber bald danach herausstellte, daß die von *Huggins* beobachtete Einzellinie gar nicht dem Ca angehöre, sondern eigentlich die Wasserstofflinie H_ε sei, fielen *Lockyers* Vorstellungen aber doch erst in dem Moment, wo durch genauere Messungen erwiesen worden war, daß die den verschiedenen Elementen scheinbar gemeinsamen Linien doch verschiedene Wellenlängen besitzen, also keineswegs identisch sind. Nach *Lockyers* Ideen wären die im Fleckenspektrum beobachteten Eigentümlichkeiten etwa dadurch zu erklären gewesen, daß in den Flecken infolge der dort stürmischen Wirbelbewegung eine Störung in der Verteilung der Urelemente eintrete. Später hat *J. N. Lockyer*[370]) seine ursprünglichen Vorstellungen in Vorausahnung der modernen Ansichten über den Atombau dahin modifiziert, daß er dem das Bogenspektrum ergebenden Element ein Protoelement zur Seite stellte, dem das Funkenspektrum zuzuschreiben wäre.

G. E. Hale, W. S. Adams und *H. G. Gale*[371]) fanden, daß in einem ganz schwachen, bei einer Stromstärke von nur 2 Amp. brennenden Bogen alle die Linien verstärkt oder geschwächt erscheinen, die ein gleiches Verhalten im Fleckenspektrum zeigen, und daß die im letzteren geschwächten Linien durchwegs Funkenlinien seien, und zu einem völlig gleichen Resultat gelangte auch *A. Fowler*[372]) durch genaues Studium der Bogen- und Flammenspektren von Fe, Ti, V, Sc. Daraus kann aber nun geschlossen werden, daß es lediglich der durch die niedrigere Temperatur in den Sonnenflecken bewirkte geringere Ionisationsgrad ist, der die erwähnten spektralen Veränderungen hervorruft. Auf Grund seiner Theorie der thermischen Ionisation war schließlich *Meg Nad Saha*[373]) in der Lage, das mutmaßliche Verhalten

369) London Roy. Soc. Proc. 30 (1879), p. 20; Phil. Trans. 171 (1880), p. 669.
370) London Roy. Soc. Proc. 60 (1897), p. 475; 61 (1897), p. 148.
371) Astroph. Journ. 24 (1906), p. 185; 25 (1907), p. 75.
372) Trans. Intern. Union Coop. in Solar research 1, p. 201.
373) Phil. Mag. (6) 40 (1920), p. 472, 809.

der Linien einzelner Elemente, und zwar hauptsächlich der Alkalimetalle in den Fleckenspektren rechnerisch zu ermitteln. *H. N. Russell*[374]) hat daraufhin nach Gleichung (78) bzw. (79) (p. 588) die Prozentsätze an wirksamen Atomen der Alkalimetalle und Erdalkalien unter Annahme verschiedener Werte für den Druck P_e in der umkehrenden Schicht berechnet und dabei für den nach den Ausführungen der vorigen Nr. wahrscheinlich gewordenen Druck von 10^{-4} Atm. die folgenden Zahlen erhalten:

Element	Ion.Pot.	Wirksame Atome in %		Verhalten im Fleckenspektrum
		6000°	4000°	
Rb	4,16	0,02	0,83	nur in Flecken
K	4,32	0,02	1,3	verstärkt
Na	5,11	0,11	10,6	verstärkt
Ba	5,12	0,10	11,8	weder im mittleren Sonnenspektrum noch im Fleckenspektr.
Li	5,37	0,19	21,8	nur in Flecken
Sr	5,67	0,3	40,0	verstärkt
Ca	6,08	0,7	68,5	verstärkt
Mg	7,65	13,2	99,52	nur eine Linie etwas verstärkt
Zn	9,4	75,6	99,995	geschwächt
Ba^+	9,86	91,3	88,2	nahe unverändert
Sr^+	10,70	97,9	60,0	λ 4162 merklich geschwächt
Ca^+	11,86	99,1	31,5	unverändert

Die beigefügten Angaben über das Verhalten in den Fleckenspektren beruhen teilweise auf eigenen Beobachtungen *Russells*, teilweise sind sie Untersuchungen von *W. S. Adams*[375]) und *A. S. King*[376]) entnommen. Sieht man von Zn und Mg ab, so folgt aus den obigen Zahlen für die Temperaturen von 6000° bzw. 4000° für die fleckenfreie Photosphäre bzw. die Flecken gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung. Sogar für Mg konnte *Russell* (a. a. O.) feststellen, daß die Linie λ 4571 ($1S - 2^2P$), die im Laboratorium bei steigender Temperatur immer zuerst sichtbar wird, als Linie niederer Temperatur im Fleckenspektrum folgerichtig verstärkt erscheint. Was noch Ca^+ betrifft, bei dem aus den Zahlenangaben vielleicht eine Abschwächung im Fleckenspektrum gefolgert werden sollte, so muß erwogen werden, daß Ca in der ganzen umkehrenden Schicht nahezu völlig ionisiert ist, so daß die Ca^+-Linien bei der großen Menge des Stoffes übersättigt sein müssen. Eine Abschwächung im Fleckenspektrum wird daher kaum zu bemerken sein, um so mehr als die Menge

374) Astroph. Journ. 55 (1924), p. 117.
375) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 108; Mt. Wilson Obs. Contr. 40 (1909).
376) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 169; Mt. Wilson Obs. Contr. 122 (1916).

ionisierten Stoffes ja auch in den Flecken noch eine recht beträchtliche ist. In zahlreichen Arbeiten hat *A. S. King*[377]) das Verhalten der Linien verschiedener Elemente im Ofen, Bogen und Funken untersucht und die Linien nach Temperaturklassen klassifiziert. Danach zeigen auch die Linien des Sc, Ti, V, Cr, Fe, Mn, wie *Russell* (a. a. O.) betont, gegenüber dem Bogen im Ofen Verstärkung, im Funken Schwächung, also ein Verhalten, das mit den Unterschieden zwischen mittlerem Sonnenspektrum und Fleckenspektrum übereinstimmt. Daher besitzt das Sonnenfleckenspektrum, wie von *G. E. Hale* und *W. S. Adams*[378]), *W. M. Mitchell*[379]) und *W. S. Adams*[380]) gelegentlich bemerkt worden ist, besonders bei Aufnahmen mit geringer Dispersion große Ähnlichkeit mit den Spektren kühlerer Sterne, ein Umstand, aus dem schon *J. N. Lockyer*[381]) für die Flecken auf eine Temperatur ähnlich etwa der des Arkturus geschlossen hat.

Wenn also die niedrigere Fleckentemperatur und daher geringere Ionisation im allgemeinen im Verhalten der Linien ihre Bestätigung findet, so steht zu erwarten, daß an Stellen höherer Temperatur, also offenbar in den hellen Fackelgebieten das Umgekehrte der Fall sein wird. Tatsächlich hat *Ch. E. St. John*[382]) über Fackelgebieten zwar an den Bogenlinien des Titan bei 4306, 4527, 4548 Å.E. keine merkbare Veränderung, an den Funkenlinien λ 4444, 4469, 4501, 4572 desselben Elementes dagegen Verstärkung beobachten können.

Daß die Sonnenflecken eigentlich Wirbelgebiete sind, ist aus der strahligen Struktur der Penumbra zu erkennen. Versuche von *W. H. Julius*[383]) und theoretische Untersuchungen von *S. Rosseland*[384]) haben gezeigt, daß solche Gaswirbel im durchgehenden Licht dunkel erscheinen. Wirklich drehende Bewegungen von Sonnenflecken sind zuerst von *Silberschlag*[385]), dann von *W. Dawes*[386]) und *W. Birt*[387]) beobachtet und später von *P. Kempf*[388]) eingehend untersucht worden.

377) Astroph. Journ. 21 (1904), p. 250; 37 (1913), p. 239; 39 (1914), p. 139; 41 (1915), p. 86; 42 (1915), p. 344; 53 (1921), p. 133; 54 (1921), p. 28.

378) Astroph. Journ. 23 (1906), p. 400.

379) Astroph. Journ. 23 (1906), p. 211.

380) Astroph. Journ. 24 (1906), p. 69.

381) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. App. 1904.

382) Pop. Astr. 30 (1922), p. 228.

383) Phys. Ztschr. 15 (1916), p. 45.

384) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 342.

385) Siehe bei *Jean Bernoulli,* Lettres astronomiques, Berlin 1771, p. 6.

386) London Roy. Astr. Soc. Mem. 21 (1852), p. 159.

387) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 19 (1859), p. 182.

388) Astr. Nachr. 195 (1910), p. 197.

Der spektroskopische Nachweis des bei Wirbeln erfolgenden Ein- und Ausströmens der Gase ist an seitwärts von der Sonnenmitte gelegenen, also mit der Wirbelachse schräg gegen die Erde stehenden Sonnenflecken von *J. Evershed*[389]) erbracht worden, der unter Verwendung der Linien H_2 und K_2 bzw. H_3 und K_3 des Ca für die mittleren und oberen Schichten der Chromosphäre (siehe Nr. **13**, Monochromatische Aufnahmen der Sonne. Spektroheliograph) in den tieferen Schichten über den Flecken ein parallel zur Sonnenoberfläche erfolgendes Ausströmen der Ca-Dämpfe aus den Flecken, in den obersten Chromosphärenschichten dagegen ein Einströmen in die Flecken nachweisen konnte. Dieser „*Evershed*effekt" wurde durch weitere Beobachtungen von *Ch. E. St. John*[390]), der dabei auch die Bewegung des Ca-Dampfes in sehr verschiedenen Höhen der Chromosphäre bis herab zur Photosphäre untersuchte[391]), sowie von *J. Evershed*[392]) und von *R. E. de Lury* und *J. L. O'Connor*[393]) bestätigt. In Verbindung mit einer Untersuchung über die Höhe in der Chromosphäre, in der die Linien einzelner Elemente ihren Ursprung nehmen, haben *Ch. E. St. John* und *H. D. Babcock*[394]) folgende mittlere Geschwindigkeiten des Ein- und Ausströmens ermittelt:

Höhe in der Chromosphäre	v	
14000	3,8	Einströmen
12800	3,0	
8000	2,1	
6000	1,0	
5500	0,4	
5000	0,1	
1500	0,0	
1000	0,2	Ausströmen
400	1,0	
275	2,0	

Infolge des *Evershed*effektes zeigt sich an den dem Sonnenrand naheliegenden Penumbrateilen eines Flecken Rotverschiebung, an der der Sonnenmitte zugewendeten Fleckenseite dagegen Blauverschiebung der im Fleckenniveau entstehenden Fleckenlinien. *De Lury* und *O'Connor* (a. a. O.) fanden, daß die Rotverschiebung meistens größer ist als die

389) Kodaikanal obs. Bull. 15 (1909); London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910), p. 217.

390) Astroph. Journ. 37 (1913), p. 322; 38 (1913), p. 341.

391) Ebendort 32 (1910), p. 36; 34 (1911), p. 57, 131.

392) Ebendort 40 (1914), p. 156; Kodaikanal obs. Bull. 51 (1916).

393) Pop. Astr. 29 (1921), p. 156.

394) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 32.

Blauverschiebung. Sie glaubten darin die Ursache der allgemeinen Rotverschiebung der Linien am Sonnenrand erblicken zu können.

W. H. Julius[395]) hat versucht, den *Evershed*effekt auf die Wirkung anomaler Dispersion zurückzuführen.

Die Wirbelnatur der Sonnenflecken fand weitere Beweise in Aufnahmen mit dem Spektroheliographen (s. Nr. **13**) und in der Entdeckung des in den Fleckengebieten vorhandenen magnetischen Feldes. Auf den Aufnahmen mit dem Spektroheliographen im Lichte der H_α-Linie, die von *G. E. Hale* und *F. Ellermann*[396]) begonnen worden sind, zeigten sich stets an vielen Stellen der Sonnenoberfläche Wasserstoffwirbel, deren Zentrum zumeist ein Sonnenfleck bildete und in einer Serie von H_α-Spektroheliogrammen, die vom 29. Mai bis 4. Juni 1908 läuft, konnte *G. E. Hale*[397]) einmal einen großen Wasserstofflocculus beobachten, der im Verlauf dieser Zeit nach und nach gänzlich in den Sonnenfleck eingesogen wurde.

Was das magnetische Feld der Sonnenflecken betrifft, so brachte seine Entdeckung gleichzeitig die Erklärung für die so häufig im Fleckenspektrum beobachteten Spaltungen einzelner Linien. Bis vor etwa zwanzig Jahren hat man diese Trennung einer scheinbar verbreiterten Linie durch eine aufgelagerte schmale Emission in zwei Teile für eine durch starke Schichtung der Gase hervorgerufene einfache Umkehrung gehalten. Gelegentlich der Beobachtung, daß die Wasserstoffwirbel, wie oben erwähnt, häufig einen Flecken zum Zentrum hatten, kam *G. E. Hale*[398]) auf die Vermutung, daß die in diesen Wirbeln kreisenden freien Elektronen ein Magnetfeld hervorrufen und daß die im Fleckenspektrum bemerkten Linienverdoppelungen nicht einfach Umkehrungen, sondern wirkliche Aufspaltungen im Magnetfeld durch den *Zeeman*effekt seien. Danach müßten also die beiden Komponenten eines solchen Dublets entgegengesetzt zirkular polarisiert sein. Bald danach gelang es *G. E. Hale*[399]) tatsächlich, diesen Polarisationszustand bei zwei Flecken nachzuweisen, indem er zunächst die zirkulare Polarisation der beiden Linienkomponenten durch Vorschalten eines *Fresnel*schen Prismas in lineare Polarisation von bei den beiden Komponenten senkrecht zueinander stehenden Polarisationsebenen verwandelte und darauf durch Drehen eines Nicols einmal die eine, dann die andere Linie des Dublets zum Verschwinden brachte.

395) Bull. Astr. Instr. Netherlands 2 (1925), p. 219.
396) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 41.
897) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 100.
398) Ebendort.
399) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 315; Publ. Astr. Soc. Pacif. 20 (1908), p. 220.

Die Aufspaltung der Linien befolgte dabei deutlich die *Preston*sche Regel, und die Feldstärke ergab sich zu etwa 2900 Gauß. *Hale*s Entdeckung wurde bald danach von *J. Evershed*[400]) bestätigt. Auf Grund einer Statistik an 970 Flecken fanden dann *G. E. Hale, F. Ellermann, S. B. Nicholson* und *A. H. Joy*[401]), daß die Flecken auf den beiden Hemisphären der Sonne verschiedene Polarität zeigen und daß die Polarität nach dem letzten Fleckenminimum im Jahre 1913 gewechselt habe. Der Wechsel der Polarität nach einem Minimum wurde an einem umfangreicheren in den Jahren 1908—1923 gewonnenen Material von 2136 Flecken von *G. E. Hale*[402]) als Regel nachgewiesen. Demnach beträgt die Polaritätsperiode mit $22{,}2^a$ im Durchschnitt das Doppelte der normalen Fleckenperiode.[403]) Daß die Komponenten von anscheinend in physischem Konnex stehenden Fleckenpaaren in der Regel entgegengesetzte Polarität zeigen, hat *G. E. Hale*[404]) mit Erfolg veranlaßt, bei scheinbar unipolar auftretenden Einzelflecken in der Nachbarschaft des Fleckens auf der fleckenlosen Photosphäre nach dem Auftreten eines die Störung durch die unmittelbare Komponente anzeigenden *Zeeman*effektes nachzusuchen.

Auf die Möglichkeit der Existenz eines allgemeinen magnetischen Feldes der Sonne, das durch die Rotation der elektrisch geladenen Sonnenoberfläche hervorgerufen wird, hat bereits *P. Salet*[405]) hingewiesen. *G. E. Hale*[406]) gelang es im Jahre 1913 unter Verwenduug besonders starker Dispersion auch dieses allgemeine Feld in derselben Weise nachzuweisen, wie früher den magnetischen Zustand der Flecken. Dieses allgemeine Feld zeigte eine Stärke von 50 Gauß, und der negativ geladene magnetische Nordpol der Sonne schien mit dem Rotationspol zusammenzufallen. Nach *F. H. Seares, A. van Maanen* und *F. Ellermann*[407]) zeigt aber die äquatoreale Zone andere Feldkonstanten wie die Halbkugeln, so daß sich der Sonnenkörper keineswegs wie eine magnetische Kugel verhält.

Nach Versuchen von *G. E. Hale*[408]) hat sich ein *Stark*effekt in

---

400) Kodaikanal obs. Bull. 22 (1910), p. 265.

401) Astroph. Journ. 49 (1919), p. 153.

402) Washington Nat. Acad. Proc. 10 (1924), p. 53; Mt. Wilson Obs. Contr. 86 (1924).

403) Siehe *G. E. Hale* und *S. B. Nicholson*, Astroph. Journ. 62 (1925), p. 270; Mt. Wilson Obs. Contr. 300 (1925).

404) Publ. Astr. Soc. Pac. 22 (1910), p. 63.

405) Bull. astronomique 26 (1909), p. 115.

406) Astroph. Journ. 38 (1910), p. 27; Mt. Wilson Obs. Contr. 71 (1910).

407) Washington Nat. Acad. Proc. 5 (1919), p. 242.

408) Pop. Astr. 29 (1921), p. 625.

den Sonnenflecken bisher nicht nachweisen lassen. Am Sonnenrand dagegen scheint der von *Stark* beschriebene Polarisationszustand des Quereffektes nach Beobachtungen von *G. E. Hale* und *H. D. Babcock*[409]) an der H_α-Linie bemerkbar zu sein. Die elektrische Feldstärke in der Sonnenatmosphäre wäre damit vielleicht 100—150 Volt cm^{-1}.

12. Flash- und Chromosphärenspektrum. Wie bereits in voriger Nummer erwähnt, zeigt sich bei totalen Sonnenfinsternissen in dem Moment, wo der Mond die ein kontinuierliches Spektrum ergebende Sonnenphotosphäre bereits oder noch gänzlich verdeckt, für einen kurzen Zeitmoment das Spektrum der umkehrenden Schicht allein als reines Gasspektrum aus hellen Linien. Man nennt dieses Spektrum nach dem blitzartigen Aufleuchten der in der umkehrenden Schicht entstehenden *Fraunhofer*schen Linien „Flashspektrum". Dieses Flashspektrum ist zuerst von *Ch. A. Young*[410]) bei der totalen Sonnenfinsternis vom 22. Dez. 1870 bemerkt worden und wurde zunächst nur visuell verfolgt. Aus der höchstens 1—2 Sek. betragenden Sichtbarkeitsdauer des Flash, wie sie aus Beobachtungen von *Young* (a. a. O.), *N. R. Pogson*[411]) u. a. hervorgeht, folgt in Verbindung mit der Winkelgeschwindigkeit des Mondes für die scheinbare Höhe der umkehrenden Schicht ein Betrag von etwa 1″, was ungefähr 700—1000 km wirklicher Höhe entspricht.

Photographisch wurde das Flashspektrum zuerst von *N. J. Lockyer*[412]) im Jahre 1897 beobachtet. Die von ihm verwendete „Prismatic camera", die übrigens zur Flashphotographie seither stets verwendet wird, ist nichts anderes als eine photographische Kamera von geeigneter Brennweite mit vorgesetztem Objektivprisma, in der der im Unendlichen liegende, schmale, sichelförmige Sonnenrand in seine monochromatischen Bilder zerlegt wird. Diese sichelförmig gekrümmten Flashlinien zeigen stets verschiedene Sichellängen, was einerseits auf die verschiedene Intensität der Flashlinien, andererseits auf die verschiedene Höhe in der Sonnenatmosphäre zurückzuführen ist, in der die einzelnen Linien noch ihre Entstehnng nehmen können. Aus diesem Grunde kann man vom Flashspektrum nicht eigentlich als vom Spektrum einer ganz bestimmten Schicht sprechen; es setzt sich zusammen aus den Spektren der verschiedenen unteren Chromosphärenschichten.

Schon bei der totalen Sonnenfinsternis vom 22. Januar 1898

---

409) Washington Nat. Acad. Proc. 1 (1915). p. 123.

410) Sillimans American. Journ. 2 (1871).

411) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 32 (1872), p. 330,

412) London Roy. Soc. Phil. Trans. 1897, p. 189.

konnte *J. N. Lockyer*[413]) zwischen der *D*-Linie und λ 3663,856 Flashlinien vermessen, und *J. Evershed*[414]) war in der Lage, bei dieser Gelegenheit das Vorhandensein von 15 Elementen, und zwar außer von H, He, C und möglicherweise auch Si noch von Metallen zumeist niederen Atomgewichtes nachzuweisen. Die *Balmer*serie des Wasserstoffes ließ sich bis zum 28. Glied, auf Aufnahmen von *E. W. Maunder*[415]) sogar bis zum 30. Glied verfolgen. Bei der totalen Sonnenfinsternis vom 28. Mai 1900 verwendete *E. B. Frost*[416]) statt des Prismas bereits ein Konkavgitter, was die Identifikation zahlreicher weiterer Linien ermöglichte. Die Linien bei 4181,67, 4189,77 und 4193,90 Å.E. schrieb *Frost* bei dieser Gelegenheit dem C zu. Bei der gleichen Finsternis gelang es *H. Deslandres*[417]), weit ins Ultraviolett bis 3066,4 Å.E. vorzudringen. Auffallend hell waren die Linien des Ti, V, Cr, Sc. Weitere Verzeichnisse von bei totalen Finsternissen beobachteten Flashlinien sind u. a. noch von *L. E. Jewell*[418]), *F. W. Dyson*[419]), *S. A. Mitchell*[420]) gegeben worden. Der letztere hat bei der totalen Sonnenfinsternis vom 30. August 1905 2841 Flash- und Chromosphärenlinien vermessen und für jede derselben die Intensität und die Höhe des Ursprungs in der Chromosphäre, wie sie sich aus der Sichellänge ergab, angegeben. Er kommt dabei zu dem Ergebnis, daß das Flashspektrum zwar eine Umkehrung des *Fraunhofer*spektrums sei, daß aber nicht alle Chromosphärenlinien gleichzeitig hell aufleuchten, sondern nach und nach, je nach der Höhe ihres Entstehens in der umkehrenden Schicht bzw. in der sich darüber ausbreitenden Chromosphäre. Schon im Jahre 1900 hatten übrigens *H. Grübl*, *A. A. Rambaut* und *W. E. Wilson*[421]) bei Plazencia in Spanien kinematographische Aufnahmen des Flashspektrums ausgeführt, die das Nacheinanderaufleuchten der Linien deutlich hatten erkennen lassen. *Mitchell* (a. a. O.) fand weiter, daß die Intensitäten der Chromosphärenlinien je nach der Höhe des über den Mondrand hervorragenden Chromosphärenteiles wechseln und daß die Intensitäten auch vielfach verschieden sind von

---

413) London Roy. Soc. Proc. 68 (1901), p. 6.

414) Astroph. Journ. 13 (1901), p. 223; London Roy. Astr. Soc. Mem. 54 (1902), App. II.

415) The Observatory 22 (1899), p. 315.

416) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 307.

417) Paris C. R. 141 (1905), p. 409.

418) Publ. U. S. Naval Obs. 4, App. II, p. 299.

419) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 62 (1902), App. I; London Roy. Soc. Phil. Trans. A 206 (1906), p. 403.

420) London Roy. astr. Soc. Month. Not. 66 (1906), p. 326.

421) Roy. Irish Acad. Trans. 32 (1904), p. 271.

den im mittleren Sonnenspektrum beobachteten. Im ganzen unterscheidet er drei Gruppen von Elementen: eine erste (Ca, Mg, Al), bei der die Linien in Sonne und Chromosphäre kräftig sind, eine zweite (H, He, Ti, Cr, C, V, Zr, Sc, La, Y, Sr, Ba, Nd), deren Glieder in der Chromosphäre kräftigere Linien aufweisen, und eine dritte (Fe, Ni, Co, Mn, Na, Nb, Mo, Pd) von gegenteiligem Verhalten. *Mitchells* Resultate decken sich mit den Beobachtungen, die er bereits früher bei der Finsternis vom 18. Mai 1901[422]) hatte erzielen können. Wegen weiterer Beobachtungen des Flashspektrums muß auf die verschiedenen Jahrgänge des Astrophysical Journal und der Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London, verwiesen werden. Erwähnt sei noch, daß von *H. D. Curtis* und *K. Burns*[423]) bei der totalen Finsternis vom 24. Januar 1925 auch der rote und infrarote Teil des Flash zwischen 5876—8806 Å.E. untersucht worden ist, und daß *H. Kienle*[424]) neuerlich zur Erzielung einer erhöhten Meßgenauigkeit versucht hat, Flashaufnahmen mit dem Spaltspektrographen auszuführen. Letzterer empfahl auch die Verwendung biegsamer Filmstreifen, um die Fokusdifferenzen an verschiedenen Stellen des Spektrums berücksichtigen zu können.

Bringt man den Spalt eines Spektrographen am Fernrohr tangential an den Rand des Sonnenbildes, so empfängt er nicht nur Licht von der den Sonnenrand überragenden Chromosphäre, sondern auch von dem diffus leuchtenden Tageshimmel. Verstärkt man die Dispersion, so wird das Spektrum des diffusen Tageslichtes wegen der größeren Ausdehnung schwächer, während gleichzeitig die hellen Chromosphärenlinien als monochromatische Spaltbilder in ihrer Intensität nur wenig beeinflußt werden, so daß sie schließlich auf schwach kontinuierlichem Grund hell sichtbar werden. Die Beobachtungen des Chromospärenspektrums auf diesem Wege außerhalb einer Finsternis werden natürlich um so besser gelingen, je dunkler der Himmelsgrund schon an sich erscheint, also z. B. auf hohen Bergen. Schon im Jahre 1872 war es so *Ch. A. Young*[425]) gelungen, das Chromosphärenspektrum auf dem 2800 m hohen Mt. Sherman außerhalb einer Finsternis visuell zu beobachten[426]), und etwa 20 Jahre

422) Astroph. Journ. 15 (1902), p. 97; Publ. U. S. Naval Obs. 4 (1902), App. I, p. 290.

423) Publ. Allegh. Obs. 6 (1925), Nr. 6.

424) Astr. Ges. V. J. S. 61 (1926), p. 213.

425) Sillimans Amer. Journ. (3) 4 (1872), p. 356.

426) Eine Tabelle dieser nach *Rowlands* Messungen im Sonnenspektrum in der Wellenlänge verbesserten Linien ist bei *E. Pringsheim,* Physik der Sonne, Leipzig 1910, B. G. Teubner, p. 164 gegeben.

später hatten auch Versuche von *G. E. Hale*[427]) und *H. Deslandres*[428]), das Spektrum von Chromosphäre und Protuberanzen außerhalb einer Finsternis photographisch festzuhalten, vollen Erfolg. Bei Weiterführung der bezüglichen Arbeiten durch *G. E. Hale* und *W. S. Adams*[429]) unter den günstigen Beobachtungsbedingungen auf dem Mt. Wilson Solar Observatory mit dem dortigen ein Sonnenbild von 170 mm Durchmesser gebenden Turmteleskop konnten wieder zahlreiche Chromosphärenlinien photographiert und dabei ca. 30 Linien der grünen *C*-Bande identifiziert werden. Bald ergaben die Photogramme z. B. von *W. S. Adams* und *C. G. Burwell*[430]) sogar mehr Linien als die früheren Flashaufnahmen von *Mitchell*, und es gelang sogar, die Beobachtungen auch auf den weniger brechbaren Teil des Spektrums bis λ 6600 auszudehnen.[431]) Darauf, daß bei tangential an die Sichelhörner gestelltem Spalt, insbesondere auch bei partiellen Finsternissen, wertvolle Studien der unteren Chromosphärenschichten ermöglicht werden, haben *H. F. Newall*[432]) und *A. L. Cortie* und *J. Rowland*[433]) vor nicht langer Zeit besonders aufmerksam gemacht. Vor etwa 25 Jahren hat *M. N. Donitch*[434]) schließlich noch versucht, das ganze Sonnenbild durch einen kreisförmigen Spalt einzuschließen, der Erfolg war jedoch nur gering.

Im Flash- bzw. Chromosphärenspektrum sind noch folgende im mittleren Sonnenspektrum nicht durch Linien nachweisbare Elemente vorgefunden worden:

He. Die Anwesenheit der D_3-Linie wurde bereits von *C. A. Young* (a. a. O.) visuell festgestellt. Er beobachtete auch die offenbar dem He zuzuschreibenden Linien 7065,5 $(1^2P - 2^2S)$ und 6678,3 $(1P - 2D)$, so daß also offenbar sowohl Orthohelium (Dublets) als auch Parhelium (Einfachserien) vertreten sind.

C. *Young* schreibt die Linie 5165,2 dem C zu. Später fand *G. E. Hale*[435]) am Yerkesrefraktor visuell zahlreiche helle Linien zwischen 5198—5363, die dem C angehören, und im Jahre 1899 konnte er[436]) auch die Anwesenheit der drei Swanbänder C II bis C IV bei 5635, 5165 und 4737 feststellen.

427) Astron. and Astroph. 2 (1891), p. 50; Astroph. Journ. 6 (1897), p. 319, 412.
428) Paris C. R. 114 (1892), p. 276; 115 (1892), p. 222.
429) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 222; Mt. Wilson Obs. Contr. 41 (1909).
430) Pop. Astr. 22 (1914), p. 555.
431) Astroph. Journ. 41 (1915), p. 116; Mt. Wilson Obs. Contr. 95 (1915).
432) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 482.
433) Ebendort 81 (1921), p. 485.
434) Bull. de l'Akad. St. Petersbourg 19 (1904), p. 171, 195.
435) Astroph. Journ. 6 (1897), p. 412.
436) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 287.

Dy. Die aus Flashaufnahmen von *Dyson* und *Evershed* vorhandenen Linien 3394,7, 3531,8, 3535,1, 3542,6, 3550,4, 4000,5, 4295,2 werden von *A. D. Roß*[437]) unter Bezugnahme auf die Vermessung des Dysprosiumspektrums von *G. Eberhard*[438]) für Dysprosiumlinien gehalten.

Ra. Unter Verwendung der Wellenlängentabellen für Ra von *C. Runge* und *J. Precht*[439]) identifizierte *F. W. Dyson*[440]) auf eigenen und Aufnahmen von *Lockyer* aus den Jahren 1898—1905 die Flashlinien 3649,7, 3814,7, 4336,6, 4682,2 und 4826,0 als Ra-Linien und noch einige andere Linien als Linien von RaEm. *S. A. Mitchell*[441]) und *J. Evershed*[442]) konnten jedoch zeigen, daß auch andere Identifikationen ebensogut möglich sind. Die Anwesenheit von Ra und RaEm ist also nicht verbürgt. Dagegen sollen nach *S. A. Mitchell*[443]) von den Edelgasen

Ne durch die Linien 4097, 4398, 4422, 4431, 4540, 4844 und
A durch die Linien 4180, 4201, 4259, 4267, 4430
nachweisbar sein.
Ba scheint in *Mitchells* Liste der Flashlinien zu fehlen, dagegen ist
Ba^+ vertreten.[443a])

Stets vorhanden und zumeist kräftig sind im Chromosphärenspektrum folgende Hauptlinien:

—	7065,5	He	F	4861,3	H_β		3970,1	H_ε
C	6562,8	H_α	—	4471,6	He	H	3968,5	Ca^+
D_3	5875,8	He		4340,5	H_γ	K	3933,7	Ca^+
—	5316,8			4101,7	H_δ			

Der Ursprung der grünen Chromosphärenlinie bei 5316,8 ist unbekannt. Sie wurde lange Zeit für identisch mit der grünen Koronalinie bei 5303 gehalten (s. Nr. **15**).

Daß im Chromosphärenspektrum die Funkenlinien meist kräftig sind, während die Bogenlinien vielfach zurücktreten, wurde bereits

437) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 673. Über das Auftreten seltener Erden überhaupt vgl. noch *H. D. Menzel,* Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 359.

438) Publ. Astroph. Obs. Potsdam 20 (1909), Nr. 60.

439) Astroph. Journ. 17 (1903), p. 147.

440) Astr. Nachr. 192 (1912), p. 81; The Observatory 35 (1912), p. 402.

441) Astr. Nachr. 192 (1912), p. 265; Pop. Astr. 21 (1913), p. 321.

442) The Observatory 35 (1912), p. 360.

443) Astroph. Journ. 17 (1903), p. 224; Columb. Contr. 1903, Nr. 20.

443a) Nach *C. R. Davidson* und *F. J. M. Stratton* kommen auch Ni und Co-Linien vor. London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1927), p. 739.

von *Lockyer* behauptet und dann von *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[444]), *A. Fowler*[445]) und *J. Evershed*[446]) bestätigt. Auch *S. A. Mitchell*[447]) kam zum gleichen Resultat und bemerkte dazu, daß die „enhanced lines“ ihren Ursprung in der Regel in größeren Höhen in der Chromosphäre nehmen. Jedenfalls ist das daraus erklärlich, daß bei dem dort herrschenden niedrigeren Druck die Möglichkeit der Rekombination erleichtert wird. Gleichzeitig fand *Mitchell* (a. a. O.), daß die durchschnittliche Höhe des Ursprunges einer Linie von der Intensität 1 der *Rowland*schen Skala in der Chromosphäre etwa 350 km sei, und daß einem Zuwachs der Intensität um eine Einheit ein Höhenzuwachs von ungefähr 80 km entspreche. *Ch. E. St. John*[448]) bemerkt, daß die Zahl der am Ende einer totalen Finsternis sichtbar werdenden Chromosphärenlinien immer größer ausfällt, je näher man bei Bemessung der Expositionszeit an den Rand der Photosphäre herangekommen ist, und er fand dabei ebenfalls, daß schwächere Linien in tieferen Schichten der Sonnenatmosphäre ihre Entstehung nehmen. Aus *Mitchells* Tabelle ergab sich für die mittlere Höhe der Linien einer bestimmten Intensität getrennt nach Elementen folgender Zusammenhang:

Element	Intensität								
	0000	000	00	0	1	2	3	4	5
Fe	—	—	275	279	288	344	369	397	425
Ti	—	271	290	353	347	389	429	494	487
Sc, Y	—	290	295	360	385	483	433	—	—
Seltene Erden	250	329	354	382	406	395	550	—	—
C	342	342	335	443	479	738	—	—	—

Ein ähnlicher Zusammenhang zeigt sich nach *St. John* (a. a. O.) zwischen Intensität und Druckverschiebung, wie folgende Zahlen zeigen:

Intensität	Druckverschiebung in Å.E.	Intensität	Druckverschiebung in Å.E.
00	+ 0,034	3	+ 0,023
0	+ 0,030	4	+ 0,021
1	+ 0,028	5	+ 0,019
2	+ 0,025	6	+ 0,016

Der größeren Intensität, also größeren Höhe, entspricht richtig wieder der geringere Druck bzw. die geringere Druckverschiebung.

444) London Roy. Soc. Proc. 68 (1901), p. 178.
445) The Observatory 25 (1902), p. 233.
446) Ebendort 25 (1902), p. 272.
447) Astroph. Journ. 39 (1914), p. 166.
448) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 356.

Die Sichellängen sind nicht nur von *Mitchell*, sondern auch von *J. N. Lockyer*[449]) und *L. E. Jewell*[450]) zu umfangreichen Höhenmessungen verwendet worden. *Ch. E. St. John*[451]) hat zunächst die Bestimmungen von *Jewell*, dann später auch die Messungen von *Mitchell*, und zwar einmal allein[452]) und ein zweites Mal in Verbindung mit *H. D. Babcock*[453]) benutzt, um ein einheitliches Bild über die vertikale Verteilung einer Anzahl von Elementen in der Sonnenchromosphäre zu entwickeln. In der folgenden Tabelle sind diese Ermittlungen von *St. John* und *Babcock* zugleich mit älteren Bestimmungen von *Lockyer* und *Jewell* zusammengestellt, und in der letzten Kolumne sind auch noch die Höhenwerte beigefügt, die in *Mitchells* Tafel des Chromospärenspektrums bei den einzelnen Linien angesetzt sind:

Linien oder Element	Höhe des Ursprungs der Chromosphärenlinien in km			
	St. John-Babcock	*Lockyer*	*Jewell*	*Mitchell*
Ca^+ (H, K)	14000	9600	24000	—
H_α	12500	7200	12800	—
$H_{\beta,\gamma,\delta}$	8000			
He 4471	—	6300	12000	7500
Mg 3838	—	—	8000	7000
Ti^+ 3685	6000	—	5600	—
Sc 4247	6000	—	2800	—
Sr 4216	6000	4300	5600	—
Na (D)	5500	—	1600	—
Ca 4227	5000	3200	2400	—
Al ($J = 15 - 20$)	1500	—	2800	—
Fe (15 — 40)	1500	2300	1600	—
Fe (10)	1000			
Fe (4)	400			
Fe (00)	275			

Dazu kommen noch Bestimmungen an den Linienteilen H_2, K_2 und H_3, K_3 der beiden Ca^+-Linien H und K (siehe Nr. **13**) von *Ch. E. St. John*[454]) aus der Linienlänge bei radial zum Sonnenrand gestelltem Spalt, die ergeben haben:

mittlere Höhe von H_2, K_2: 3400 km

" " " H_3, K_3: 1380 "

449) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 58 (1899), App.; Mem. 54 (1902), App. III.

450) Publ. U. S. Naval obs. 4 (1906), App. I.

451) Astroph. Journ. 38 (1913), p. 341.

452) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 356.

453) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 32.

454) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 64.

Die mittlere Höhe der Hochschichtenteile H_1, K_1 wäre danach nur etwa 5000 km. Die Resultate stimmen also keineswegs besonders vorzüglich überein und sind lediglich geeignet, eine ungefähre Vorstellung zu vermitteln.

Ph. Fox[455]) hat eine Methode angegeben, bei der die Höhe des Ursprungs einer Linie in der Chromosphäre durch den Vergleich der Chromosphärenspektren zweier diametral zur Sonnenscheibe gelegener Punkte visuell direkt gemessen werden kann. Durch die kreisrunde Scheibe AB wird das Sonnenbild fast völlig abgedeckt, so daß auf die beiden Prismen P_1 und P_2 nur Licht des Sonnenrandes von zwei gegenüberliegenden Stellen auffallen kann. Durch die Prismen P_1' und P_2' werden die Strahlen von beiden Rändern optisch so zusammengebracht, daß ihre Spektren gleichzeitig die obere bzw. untere Partie des bei Sp befindlichen Spektroskopspalts beleuchten.

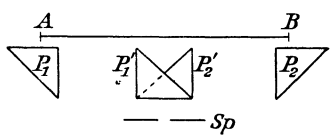

Fig. 3.

Bestimmt man einmal die kürzeste Distanz der beiden Prismen, bei der das Chromosphärenspektrum eben in das Sonnenspektrum übergeht, und entfernt man dann wieder diese beiden Prismen so weit voneinander, daß eine bestimmte Linie des Chromosphärenspektrums gerade an beiden Rändern gleichzeitig verschwindet, so ist die größte Höhe in der Chromosphäre, in der die Linie eben noch sichtbar ist, durch die Größe der Verschiebung der Prismen P_1 und P_2 meßbar. *Fox* fand so aus Messungen im Jahre 1922 für die Höhen von H_α und D_3 die anscheinend variablen Werte

$$H_\alpha \quad \text{Höhe} = 8{,}5''—10{,}8'' = 6100—7800 \text{ km}$$

$$D_3 \text{ (He)} \quad „ \quad = 5{,}2''—8{,}5'' = 3600—8500 \text{ km.}$$ [456])

Die Meinung von *G. Abetti*[457]), daß die Höhe, in die einzelne Elemente in der Chromosphäre hinaufreichen, veränderlich sei, scheint demnach viel für sich zu haben.

W. H. Julius[458]) hat, später insbesondere gestützt auf Linienverdoppelungen, die bei der totalen Sonnenfinsternis vom Jahre 1901 beobachtet worden sind, die anomale Dispersion sowie eine Refraktion des Photosphärenlichtes in der Sonnenatmosphäre zur Erklärung des Auftretens von Flash- und Chromosphärenspektrum heranziehen wollen. Nach einer Diskussion dieses Gegenstandes durch *A. Schmidt*[459]) und

455) Astroph. Journ. 57 (1923), p. 234.

456) Vgl. hierzu auch Mikrometermessungen von *Perepelkin*, Astr. Nachr. 229 (1927), p. 213.

457) The Observatory 49 (1926), p. 89.

458) Amsterdam Koningl. Acad. Proceedings 12 (1909), p. 446.

459) Phys. Ztschr. 3 (1902), p. 259.

W. H. Julius[460]) konnte aber *J. Hartmann*[461]) wahrscheinlich machen, daß die beobachteten Linienverdoppelungen jedenfalls durch nicht ganz genaue Fokussierung bewirkt waren.

13. Monochromatische Aufnahmen der Sonne. Spektroheliograph. Projiziert man das Bild irgendeines leuchtenden Objektes auf den Spalt eines Spektroskops, so ist jede Spektrallinie ein monochromatisches durch das telezentrische System Kollimator — Kamera entworfenes Bild derjenigen Zone des leuchtenden Objektes, die vom Spalt des Spektralapparates aus seinem Bild herausgeschnitten wird. Der Gedanke, im Spektrum des Objektes irgendeine Spektrallinie durch einen zweiten Spalt herauszublenden und dann das ganze Bild des Objektes im monochromatischen Licht dieser einen Linie dadurch aufzubauen, daß man den ganzen Spektralapparat mit seinem ersten Hauptspalt nach und nach über alle Teile des Bildes des Objektes hinwegführt, scheint zuerst von *J. Janssen*[462]) ausgesprochen worden zu sein, der vorschlug, die Protuberanzen mit Hilfe eines um eine durch die beiden Spaltmitten gehende Achse rasch rotierenden Spektroskops à vision directe sichtbar zu machen. Ein ringförmiger, das Sonnenbild umschließender Spalt wurde von *J. N. Lockyer* und *G. M. Seabrocke*[463]) empfohlen und eine andere Einrichtung, bei der der zweite Spalt durch eine weitere mit dem Fernrohr fix verbundene Kamera auf eine Platte abgebildet wurde, ist von *C. Braun*[464]) beschrieben worden. Der Spektrograph selbst war dabei derart um eine Achse schwenkbar, daß der erste Spalt vor dem Bild des Objekts, der zweite vor der Kamera vorbeigeführt werden konnte. Auch *O. Lohse*[465]) war mit Versuchen zur Herstellung monochromatischer Protuberanzenbilder beschäftigt. Die endgültige Lösung brachten aber erst die Konstruktionen von *H. Deslandres*[466]) und *G. E. Hale.*[467]) In beiden Fällen blieb die ohne die *Braun*sche Zwischenkamera direkt an den zweiten Spalt gelegte photographische Platte in fester Verbindung mit dem Fernrohr, während das ganze Spektrographensystem zwischen den beiden Spalten und zugleich mit diesen vor dem Sonnenbild und der Platte vorübergeführt wurde. Dabei war selbstverständlich nötig, die

460) Astr. Nachr. 160 (1902), p. 139.

461) Astr. Nachr. 174 (1907), p. 353.

462) Paris C. R. 68 (1869), p. 93. Der Apparat wurde von *G. Millochau* und *M. Stefanik* in Astroph. Journ. 24 (1906), p. 42 neuerlich beschrieben.

463) London Roy. Soc. Proc. (5) 21 (1872), p. 105.

464) Astr. Nachr. 80 (1873), p. 33.

465) Ztschr. f. Instr. 1 (1881), p. 22.

466) Paris C. R. 113 (1891), p. 307.

467) Astron. and Astroph. 11 (1892), p. 407; 12 (1893), p. 241.

Achsen von Kollimator und Kamera durch eine Spiegelung einander parallel zu stellen. Bei *Deslandres* war die Bewegung des Spektrographen intermittierend, so daß das monochromatische Sonnenbild durch sukzessives Aneinanderreihen der einzelnen Zonen aufgebaut wurde, *G. E. Hale* ließ gleich anfangs die Bewegung des Spektrographenteiles kontinuierlich erfolgen und schuf damit den jetzt allgemein gebräuchlichen Spektroheliographentypus. Konstruktionsdetails von Spektroheliographen sind u. a. von *P. Kempf*[468]), *G. E. Hale* und *F. Ellermann*[469]), *W. S. Lockyer*[470]), *H. Deslandres*[471]) *A. Riccò*[472]) und *J. Evershed*[473]) beschrieben worden. Das Spektrum kann natürlich ebensowohl durch ein Gitter wie auch durch ein Prismensystem erzeugt werden. Im letzteren Fall tritt wegen der durch die Prismen bewirkten Linienkrümmung stets eine Verzerrung des Sonnenbildes auf, da ja der zweite Spalt dann der Linienkrümmung entsprechend gekrümmt sein muß, während der erste Spalt gerade ist.[474]) Da die Krümmung der Spektrallinien von der Wellenlänge abhängig ist, müssen bei Prismen-Spektroheliographen mehrere Spalte verschiedener Krümmung zur Verfügung stehen. *H. Deslandres*[475]) hat noch versucht, die bei Prismenapparaten infolge der Linienkrümmung auftretende Bildverzerrung dadurch zu beheben, daß er den zweiten gekrümmten Spalt durch ein zweites aus Kollimator, Prisma und Kamera bestehendes System abbildete, dessen verkehrt gestelltes Prismensystem die Linienkrümmung wieder aufhob.

Die eingangs erwähnte, im Jahre 1869 von *Janssen* erdachte Apparatur war für die visuelle Beobachtung der Protuberanzen bestimmt, die ja nunmehr (siehe Nr. **14**) auf einfacherem Wege möglich ist. Andere Konstruktionen von *A. Sauve*[476]) und *S. Pokrowsky*[477]) haben in die Praxis wohl ebenfalls kaum Eingang gefunden. Dagegen dürfte das von *G. E. Hale*[478]) angegebene Spektrohelioskop, bei

468) Ztschr. f. Instr. 24 (1904), p. 317.

469) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 41; 23 (1906), 54.

470) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 473.

471) Bull. astron. 22 (1905), p. 305; Paris C. R. 141 (1905), p. 477; 144 (1907), p. 541; 148 (1909), p. 968.

472) Memorie Spettroscop. Ital. 38 (1909), p. 125.

473) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 719.

474) Über die Linienkrümmung siehe *J. Hepperger,* Wien Sitzber. 92 (1885), p. 109; *H. C. Lord,* Astroph. Journ. 5 (1897), p. 349 und *W. S. Adams,* Astroph. Journ. 11 (1900), p. 309.

475) Paris C. R. 138 (1904), p. 1375.

476) Mem. Spettr. Ital. 31 (1903), p. 259; 33 (1904), p. 54.

477) Astr. Nachr. 189 (1911), p. 369.

478) Washington Nat. Acad. Proc. 10 (1924), p. 361.

dem die beiden Spalte während der Beobachtung in rasche zwangsläufige Oszillationen versetzt werden, so daß ein größeres Stückchen der Sonnenoberfläche stetig überstrichen und beobachtet werden kann, nach von *G. E. Hale*[479]) selbst gemachten Erfahrungen ein einfaches und wertvolles Hilfsmittel für die visuelle Beobachtung darstellen.

Stellt man den zweiten Spalt des Spektroheliographen auf irgendeine der *Fraunhofer*schen Linien des Sonnenspektrums und führt man den Apparat mit seinem ersten Spalt über das fokale Sonnenbild hinweg, so entsteht auf der Platte ein Bild, das die Verteilung desjenigen Gases oder Dampfes auf der Sonnenoberfläche aufzeichnet, dem die betreffende Linie ihre Entstehung verdankt. Daß eine Photographie mit den dunklen *Fraunhofer*schen Absorptionslinien überhaupt möglich wird, ist darauf zurückzuführen, daß ja auch die Absorptionslinien keineswegs wirklich absolut dunkel sind, sondern nur durch den Kontrast mit dem angrenzenden helleren kontinuierlichen Spektrum dunkel erscheinen. Aus dem die Spektralanalyse begründenden Versuch von *G. Kirchhoff*[480]) mit der zwischen Sonne und Spalt gebrachten Natriumflamme geht ja bereits hervor, daß jede Absorptionslinie aus einer in der Ursprungsschicht eintretenden völligen Absorption und aus der Eigenemission dieser Schicht kombiniert ist. Von der Stärke dieser Eigenemission hängt es dann ab, ob die betreffende Linie mehr oder weniger dunkel, oder gar nicht, oder als helle Linie erscheint. Für Aufnahmen mit dem Spektroheliographen besonders wichtig ist die feinere Struktur der beiden im äußersten violetten Teil des Sonnenspektrums stehenden, breiten Linien H und K des Ca^+. Die breiten Absorptionen dieser Linien erscheinen stets durch eine aufgelagerte Emission in zwei Teile gespalten, und nicht selten trägt auch diese Emission in ihrer Mitte wieder eine feine Absorptionslinie. Eine solche Linienstruktur entsteht dann, wenn das kontinuierliche Licht durch eine stark geschichtete Dampfatmosphäre hindurchgegangen ist. In unserem Falle entsteht die breite verwaschene Hauptabsorption in den untersten, dichtesten Schichten der Sonnenatmosphäre, die aufgelagerte helle Linie stellt die Eigenemission der über diesen tiefsten Schichten lagernden mittleren Chromosphärenschichten dar, und sie ist der geringeren Dichte dieser Schichten wegen also schmäler als die ursprüngliche Absorption. Wie erwähnt, zeigt sich eine solche „einfache Umkehrung" an den Linien H und K immer. Man pflegt die beiden dunklen Flügel der ursprünglichen Absorption mit H_1, K_1, die umkehrende Emission mit H_2, K_2 zu bezeichnen. Die zumeist auf

479) Ebendort 12 (1925), p. 286.

480) Berlin Sitzber. 1859, p. 662; Pogg. Ann. 109 (1860), p. 148.

der Emission noch auflagernde schmale Absorption H_3, K_3 ist dann nichts anderes als eine neuerliche Absorption durch die obersten dünnsten Chromosphärenteile. Sind H_3, K_3 auch sichtbar, so nennen wir die Linien „doppelt umgekehrt". Man wird aber überhaupt ganz allgemein sagen können, daß bei Schichtung des absorbierenden Mediums immer die Linienränder den unteren dichtesten Teilen desselben entsprechen werden, die Linienmitte dagegen den dünneren oberen.[481]) Stellt man den zweiten Spalt des Spektroheliographen also der Reihe nach auf, z. B. H_1, H_2, H_3, oder bei einer nicht umgekehrten Linie auf Rand, Seitenteile und Mitte, so gibt das Spektroheliogramm die Verteilung des Ca oder des betreffenden anderen Dampfes in den untersten, mittleren bzw. obersten Chromosphärenschichten wieder.

Für Spektroheliogramme werden zumeist die Linien H und K sowie die Wasserstofflinien verwendet. *G. E. Hale*[482]) hat auch die knapp über der Photosphäre entstehende Fe-Linie 4045 benutzt und *S. B. Nicholson* und *L. H. Humason*[483]) haben auch Aufnahmen mit den ultravioletten Fe-Linien 3720, 3735 und 3860 ausgeführt. Andere Eisenlinien, Linien des Al und Linien der Cyanbande Cy IV (3883) sind von *H. Deslandres*[484]) gelegentlich mitverwendet worden.

Ganz allgemein zeigen die Aufnahmen mit dem Spektroheliographen, daß die Verteilung der einzelnen Elemente in der Sonnenatmosphäre keineswegs gleichförmig ist, sondern wolkenförmig, flockenförmig. Nach *G. E. Hales*[485]) Vorschlag spricht man daher von Ca-Flocken oder von Ca-flocculi usw.

Was speziell die Ca-Flocken betrifft, so erscheinen sie in der Nähe von Sonnenflecken stets besonders gehäuft. Nach *C. P. Butler*[486]) existiert überhaupt kein Fleck, der nicht von mächtigen Wolkenbänken aus Ca-Dampf umgeben wäre, während aber umgekehrt aus dem verstärkten Auftreten von Ca-Flocken noch durchaus nicht auf die Anwesenheit eines Flecken geschlossen werden darf. Bei Verwendung der Linienteile H_1 oder K_1 (unterste Schichten) sind die Ca-Spektroheliogramme den direkten Aufnahmen der Sonnenoberfläche mit ihren Fackeln meist sehr ähnlich, so daß *G. E. Hale*[487]) speziell die in der Nähe von Flecken gehäuften Ca-Flocken sogar längere Zeit direkt für

481) Siehe bei *G. E. Hale* und *F. Ellermann*, Publ. Yerkes Obs. 3 (1903), Part 1.

482) Astroph. Journ. 23 (1906), p. 1.

483) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 263.

484) Siehe bei *E. Pringsheim*, Physik der Sonne, p. 354.

485) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 41.

486) London Roy. Astr. Soc. Month. Not 84 (1924), p. 134.

487) Astron. and Astroph. 2 (1893), p. 450; 3 (1894), p. 113.

Fackelgebilde gehalten hat. Die Aufnahmen mit H_2 und K_2 zeigen aber bereits wesentliche Unterschiede gegenüber direkten Aufnahmen des Sonnė. Erst sie zeigen die ganze Mächtigkeit der Ca-Flocken in der Nähe von Flecken. Nicht selten überlagern diese Ca-flocculi den Flecken derart, daß er unter ihnen fast gänzlich verschwindet. Besonders schön zeigt sich das Anwachsen der Flockenmächtigkeit mit der Höhe in der Chromosphäre in einer Serie von fünf Bildern, die *Ph. Fox*[488]) in der Weise erhielt, daß er den zweiten Spektroheliographenspalt nach und nach vom Rand der *H*-Linie bei 3965,0 bis zur Mitte bei 3968,6 hin verschob. Ähnliche Beobachtungen hat auch *H. Deslandres*[489]) ausgeführt. Auf der übrigen Sonnenoberfläche zeigen sich die Ca-Flocken meist so feinflockig verteilt[490]), daß eine gewisse Ähnlichkeit mit der Granulation der Sonnenoberfläche auftritt. Alle Ca-Flocken sind übrigens stark veränderlich.

Aufnahmen von *H. Deslandres*[491]), bei denen das Spektroheliogramm noch nach der alten Methode durch sukzessive Aneinanderreihung der Zonen entstanden war, lassen erkennen, daß die aufgelagerten feinen Absorptionen der obersten Chromosphärenschichten H_3, K_3 nicht überall auf der Sonnenoberfläche auftreten, und daß sie sowie auch H_2 und K_2 häufig Verbiegungen und Verzerrungen aufweisen, die große Geschwindigkeiten der Ca-Dämpfe in den betreffenden Schichten anzeigen. *H. Deslandres*[492]) nennt daher diese Art der Herstellung von Spektroheliogrammen auch „enregistrement de vitesses". Es sei hier darauf hingewiesen, daß das beobachtete Fehlen von H_3 und K_3 an einzelnen Stellen der Sonnenoberfläche durchaus im Einklang steht mit der in Nr. **12** ausgesprochenen Vermutung, daß die Höhe in der Chromosphäre, in der die Linien verschiedener Elemente entstehen, veränderlich sei.

Häufig zeigen die H_2- und K_2-Bilder mitten unter den hellen Ca-Flocken dunkle, mehr oder weniger breite Streifen von verschiedener Länge und Gestalt. *Hale* führt diese „dunklen Flocken" (filaments bei *H. Deslandres*[493])) auf verstärkte Mitwirkung von H_3 und K_3 zurück, und tatsächlich zeigen allein mit H_3 und K_3 gewonnene Aufnahmen meistens besonders zahlreiche Gebilde dieser Art.[494])

488) Astroph. Journ. 21 (1905), p. 351.

489) Paris C. R. 147 (1908), p. 1016.

490) Siehe die Aufnahmen von *G. E. Hale,* Astroph. Journ. 19 (1904), p. 41, Tafel IV.

491) Ann. de l'Obs. Paris-Meudon 4 (1910).

492) Paris C. R. 141 (1905), p. 477.

493) Paris C. R. 147 (1908), p. 334.

494) S. die Aufnahmen von *H. Deslandres,* Ann. de l'Obs. Paris-Meudon 4 (1910).

Für Aufnahmen mit den Wasserstofflinien wurde zuerst nur die photographisch wirksame H_δ-Linie verwendet, und erst seit 1908 benutzte *G. E. Hale*[495]) auch die anderen Wasserstofflinien und sogar die rote H_α-Linie. Da die einzelnen H-Linien nicht in gleichen Höhen in der Chromosphäre entstehen, sind auch die mit den verschiedenen Wasserstofflinien erhaltenen Wasserstoffbilder einander meist recht unähnlich. Im Zusammenhang damit sei hervorgehoben, daß *G. E. Hale*[496]) einmal in der Nähe eines Sonnenfleckens eine auffallende Verzerrung der H_α-Linie bemerkt hat, die an der in einer anderen Schicht entstehenden H_β-Linie nicht zu beobachten war. Die Stellen der Sonnenoberfläche in der Nähe von Flecken, die auf Ca-Bildern mächtige Ca-Flocken zeigen, erscheinen auf Wasserstoffbildern fast stets relativ dunkel. Dabei tritt insbesondere auf H_α-Bildern in der Umgebung der Flecken immer eine deutliche Wirbelstruktur auf, die anzeigt, daß der Wasserstoff an der wirbelnden Bewegung der Sonnenflecken teilnimmt.[497]) Daß es sich dabei nicht nur um Wirbelstruktur, sondern wirklich um Wirbelbewegung handelt, beweist der stereoskopische Effekt, den *G. E. Hale*[498]) an zwei Hydrogenbildern vom 7. Aug. 1915, die mit 7^m Zwischenzeit aufgenommen worden waren, beobachten konnte. Die Bewegungsgeschwindigkeit erreicht dabei, wie *G. Abetti*[499]) durch Messung hat feststellen können, bis zu 100 km und mehr.

Auch auf den Wasserstoffbildern, insbesondere auf solchen, die mit der Mitte der H_α-Linie (oberste Schichten) aufgenommen wurden[500]), treten wieder oft dunkle Flocken auf, die dann die gleiche Gestalt zeigen wie auf Aufnahmen mit den Kalziumlinien H_3 und K_3. Offenbar stehen diese dunklen Flocken mit den Protuberanzen im Zusammenhang und wir haben in ihnen, wie *H. Deslandres*[501]) wahrscheinlich machen konnte, die Projektionen von Protuberanzen auf die Sonnenoberfläche zu erblicken. Beispielsweise hat *J. Evershed*[502]) eine von *F. Slocum*[503]) im März 1910 längere Zeit hindurch beobachtete Protuberanz auf seinen K_2-Aufnahmen als dunklen Flocculus vor

495) Mem. Spettr. Ital. 37 (1908), p. 99.

496) Siehe bei *E. Pringsheim,* Physik der Sonne, p. 224.

497) Siehe z. B. bei *G. E. Hale,* Astroph. Journ. 28 (1908), p. 100.

498) Nature 97 (1916), p. 249.

499) Mem. Spettr. Ital. 39 (1910), p. 10.

500) Daß verschiedene Teile der Wasserstofflinien ebenfalls in verschiedenen Höhen der Chromosphäre entstehen, haben *G. E. Hale* und *F. Ellermann* gezeigt London Roy. Soc. Proc. A 83 (1910), p. 177.

501) Paris C. R. 155 (1912), p. 531, 753.

502) Astroph. Journ. 33 (1911), p. 1.

503) Ebendort 32 (1910), p. 125.

der Sonnenscheibe wiedererkennen können und *A. Riccò*[504]) aus italienischen Protuberanzenbeobachtungen die in Meudon beobachteten „filaments" zu rekonstruieren vermocht. Eine weitere Bestätigung der Identität von Wasserstoffprotuberanzen und dunklen H_α-Flocken liegt in der von *T. Royds*[505]) gefundenen engen Beziehung zwischen den Häufigkeiten des Auftretens beider Objekte. Derselbe[506]) fand auch, daß die dunklen Flocken in den äquatorialen Gegenden der Sonne meistens parallel zu den Meridianen liegen, sich aber mit zunehmender Breite immer mehr gegen diese neigen, um schließlich bei 35° Breite die Richtung der Parallelkreise einzunehmen. Daß diese wohl unter dem Einfluß der Sonnenrotation vor sich gehende Drehung gerade an den Grenzen der Fleckenzonen den Betrag von 90° erreicht, deutet wieder auf einen Zusammenhang mit den Flecken und damit auch mit den Protuberanzen hin.

Spektroheliographische Aufnahmen mit Linien anderer Elemente wie Fe, C zeigen im allgemeinen eine Anhäufung der betreffenden Stoffe an den Stellen, wo die Ca-Flocken gehäuft auftreten, aber nur selten in gleicher Stärke wie die letzteren. Sonst erscheinen die betreffenden Bilder aber ziemlich gleichförmig.

W. H. Julius[507]) hat versucht, die Erscheinung der Flocken auf anomale Dispersion in der Sonnenphotospäre zurückzuführen, und in ähnlichem Sinn hat sich auch *P. V. Bevan*[508]) geäußert. Dagegen konnte aber *G. E. Hale*[509]) zeigen, daß Aufnahmen mit der roten und der violetten Kante von H_α genau die gleichen Flocken aufwiesen, was wegen der an den beiden Linienrändern gerade entgegengesetzten anomalen Brechungsverhältnisse nicht leicht möglich gewesen wäre, wenn die Flocken wirklich durch anomale Dispersion vorgetäuscht werden würden.

14. Das Spektrum der Protuberanzen. Wie *Mädler* in seiner „Geschichte der Astronomie" erwähnt, scheinen die Protuberanzen zuerst von *Stannyau* im Jahre 1706 bei einer totalen Sonnenfinsternis als rötliche Wölkchen in der Sonnenkorona beobachtet worden zu sein und ebenso werden sie im Jahre 1733 in den „Philosoph. Transactions" von *Vassenius* beschrieben. Aber erst im Jahre 1842 fielen

---

504) Mem. Spettr. Ital. (2) 1 (1912), p. 158.

505) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1912), p. 72.

506) Kodaikanal obs. Bull. 63 (1920).

507) Arch. Néerl. (2) 14 (1909), p. 466; Amsterdam Koningl. Acad. Proc. 13 (1911), p. 881, 1263; Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 329, 674.

508) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 72 (1911), p. 84.

509) London Roy. Soc. Proc. 1909, Juni 17.

sie allgemeiner auf. Man hielt sie zuerst für Gebilde des Mondes, jedoch schon 1851 konnte man ihren solaren Ursprung dadurch feststellen, daß man beobachtete, wie der Mond auch sie nach und nach verdeckte. Zunächst blieb die Möglichkeit einer Beobachtung dieser Gebilde auf die kurzen Momente der totalen Verfinsterungen der Sonne beschränkt.

Schon im Jahre 1866 hatte *J. N. Lockyer* die Meinung ausgesprochen, daß die Protuberanzen leuchtende Gasmassen seien und daher ein Linienspektrum besitzen müssen. Die Beobachtungen während der totalen Sonnenfinsternis vom Jahre 1868 brachten die Bestätigung, und es war damals bereits möglich, die Linien des Wasserstoffs und noch einige andere Linien, darunter D_3, zu beobachten. Die letztere hielt man allerdings noch ziemlich allgemein für die gelbe D-Linie des Na.[510]) Aber bei derselben Finsternis bemerkte *J. N. Lockyer*[511]) doch bereits, daß diese Linie wohl etwas brechbarer sei als die gelbe Na-Linie. Schließlich wurde die Linie, nachdem *E. Frankland* und *J. N. Lockyer*[512]) auch die Vermutung, daß sie vielleicht eine noch unbekannte Linie des Wasserstoffs sei, widerlegt hatten, einem neuen, nur auf der Sonne vorkommenden Element „Helium" zugeschrieben, das dann bekanntlich von *W. Ramsay*[513]) auch auf der Erde entdeckt werden konnte. Eben bei dieser Finsternis gelang es auch *J. N. Lockyer*[514]) und *J. Janssen*[515]), die Protuberanzenlinien auch noch außerhalb der Totalität weiter zu beobachten und aus der Linienlänge bei verschiedenen Stellungen des Spaltes das Bild der Protuberanz aufzubauen. *J. Janssen* kam dadurch zur Konstruktion des bereits in Nr. **13** erwähnten Spektrohelioskops, und in ähnlicher Weise suchte auch *F. Zöllner*[516]) das Bild der Protuberanz bei vollem Sonnenlicht zunächst dadurch sichtbar zu machen, daß er das ganze Spektroskop sich rasch vor der Protuberanz hin und her bewegen ließ. Kurz danach konnten aber *W. Huggins*[517]) und *F. Zöllner*[518]) feststellen, daß man das ganze Bild einer Protuberanz im Lichte einer Linie überblicken kann, wenn man bei Verwendung möglichst starker Dispersion zur Abschwächung der Helligkeit des Spektrums des Himmelsgrundes neben der Sonnen-

---

510) Siehe z. B. bei *G. Rayet,* Paris C. R. 67 (1868), p. 757 und 68 (1869), p. 62.
511) London Roy. Soc. Proc. 17 (1868), p. 17; Phil. Mag. (4) 37 (1869), p. 143.
512) London Roy. Soc. Proc. 17 (1869), p. 288; Phil. Mag. (4) 38 (1869), p. 66.
513) Nature 51 (1895), p. 512, 543.
514) Siehe *H. Faye*, Paris C. R. 67 (1868), p. 840.
515) Paris C. R. 67 (1868), p. 638.
516) Pogg. Ann. 138 (1869), p. 32.
517) London Roy. Soc. Proc. 17 (1869), p. 302.
518) Astr. Nachr. 74 (1869), p. 305.

scheibe den Spalt so weit öffnet, daß er das ganze Protuberanzenbild faßt. Zahlreiche visuelle Beobachtungen und statistische Untersuchungen wurden daraufhin unternommen, sie finden sich u. a. in den Bulletins des Kodaikanal-Observatory und in den Memorie degli Spettroscopisti Italiani.[519]) Im Band 35 der letzteren ist eine von 1877—1879 reichende Beobachtungsreihe von *P. Zacchini* publiziert. Die Erfindung des Spektroheliographen hat schließlich die Möglichkeit geschaffen, Protuberanzen bei vollem Sonnenlicht im Lichte von H oder K oder von H_α usw. zu photographieren.

Das Spektrum der Protuberanzen läßt sich auf den mit der Prismenkamera hergestellten Flashaufnahmen gleichzeitig mitbeobachten, da ja jede auf solchen Aufnahmen sichtbare Flashlinie ein Bild des sichelförmigen Sonnenrandes mitsamt den auf ihm sitzenden Protuberanzen darstellt. Die u. a. von *G. E. Hale*[520]), *H. Deslandres*[521]) und *J. Evershed*[522]) sowie von *J. N. Lockyer*[523]) gegebenen Tabellen von Protuberanzenlinien sind durch Vermessung von solchen Flashaufnahmen entstanden. Danach zeigt das Protuberanzenspektrum in der Regel entweder vornehmlich nur die Linien des H, He, Ca und die grüne Chromosphärenlinie bei λ 5317, oder es treten noch zahlreiche Linien meist von Fe, Ti, Sc, Sr, Mg und Al auf, die ihren Ursprung in den untersten Chromosphärenschichten nehmen. *J. N. Lockyer*[524]) dürfte der erste gewesen sein, der im Spektrum einer Protuberanz weit über 100 solcher Metallinien erblickt hat. Von der *Balmer*serie des Wasserstoffs sind stets zahlreiche Glieder vorhanden; *J. Evershed* (a. a. O.) hat sie einmal bis zum 21. Glied verfolgen und dabei gleichzeitig finden können, daß an der Seriengrenze des Wasserstoffs das kontinuierliche Spektrum ansetzte.[525]) In neuester Zeit wurde von *K. Burns*[526]) mit dem 36 zölligen Refraktor der Licksternwarte auch der infrarote des Protuberanzenspektrums untersucht, ohne daß sich dabei wesentlich Neues ergeben hätte. Es fand sich dort die Linie 7065 des He, das Ca-Triplet bei 8498 und eine Mg-Linie bei 8807.

Bei totalen Sonnenfinsternissen zeigen sich die Protuberanzen

---

519) Jetzt werden die täglichen Beobachtungen in Catania, Zurigo, Zô-Sè usw. in Arcetri gesammelt und von der Unione astronomica internazionale unter dem Titel „Immagini spectroscopiche del bordo solare“ publiziert.

520) Astron. and Astroph. 1 (1891), p. 50, 602, 821.

521) Paris C. R. 114 (1891), p. 276; 115 (1892), p. 222.

522) London Roy. Astr. Soc. Mem. 54 (1901), App. II.

523) Ebendort App. III.

524) Paris C. R. 70 (1870), p. 1268.

525) Siehe hierzu *W. H. Wright,* Nature 109 (1922), p. 810.

526) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 317; Lick obs. Bull. 327 (1920).

wegen der starken Strahlung der H_α-Linie zumeist in rötlicher Farbe, aber bei Überwiegen der Strahlung der blauen und violetten Linien kann sie auch ins bläuliche oder violette spielen. Gelegentlich sind aber auch ausgesprochen weiße Protuberanzen beobachtet worden, zuerst vielleicht von *P. Tacchini*[527]) im Jahre 1883. Die weiße Farbe kann natürlich durch gleichzeitiges Auftreten von ihrer Farbe nach komplementären Spektrallinien hervorgerufen sein und das durch Dunkeladaption eingeleitete Stäbchensehen des Auges kann ebenfalls mitspielen, immerhin tritt die Frage auf, ob es wirklich Protuberanzen gibt, die ein kontinuierliches Spektrum aussenden. Kontinuierliche Protuberanzenspektra sind nun tatsächlich von *W. H. Pickering*[528]), *A. Riccò*[529]) und von *H. Deslandres* und *G. Blum*[530]) beobachtet worden. Die letzten beiden untersuchten diese weißen Protuberanzen photographisch mit einem Farbenfilter, das nach ihrer Angabe nur die Strahlung zwischen λ 5000 — λ 5800 durchließ, also alle Linien des Protuberanzenspektrums absorbierte. Sie erhielten im Lichte dieser linienfreien Strahlung auffallend detailreiche Protuberanzenbilder. *H. Deslandres*[531]) bezweifelt allerdings selbst, daß mit diesen Aufnahmen ein vollgültiger Beweis für das Vorhandensein kontinuierlicher Protuberanzenspektra erbracht sei, betont dabei aber den Umstand als auffällig, daß die mit dem Filter aufgenommenen Bilder eine geringere Höhe der Protuberanzen ergeben als die Aufnahmen ohne Filter, so daß anscheinend nur die unteren Protuberanzenteile Teilchen enthalten, die die vom Filter durchgelassene Strahlung aussenden.

Diejenigen Protuberanzen, die nur die Hauptlinien des Chromosphärenspektrums zeigen, verändern ihre Gestalt stets nur sehr langsam und sind oft durch mehrere Sonnenrotationen hindurch immer wieder am Sonnenrand zu beobachten. Man nennt sie daher „ruhende Protuberanzen". Als typisches Beispiel einer solchen Protuberanz mag die schon in Nr. **13** erwähnte, von *F. Slocum*[532]) am 17. März 1910 aufgefundene und nach einer vollen Rotation der Sonne Mitte April wieder beobachtete Protuberanz angeführt werden.

Die Protuberanzen dagegen, deren Spektrum noch andere Linien, insbesondere der Metalle, zeigt, sind immer rasch veränderlich. Sie bauen sich in wenigen Stunden in oft bedeutende Höhen über der

527) Siehe *E. Pringsheim,* Physik der Sonne, p. 194.
528) Harvard Coll. Obs. Ann. 18 (1888), p. 85.
529) Paris C. R. 143 (1906), p. 441.
530) Paris C. R. 142 (1905), p. 817.
531) Paris C. R. 142 (1906), p. 741, 1009.
532) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 155.

Sonnenoberfläche auf, um dann ebenso rasch wieder zusammenzustürzen. Typisch für die großen Geschwindigkeiten, mit denen sich die Gase in solchen „eruptiven Protuberanzen" nach aufwärts bewegen, und für die Höhen, in die sie dabei gelangen, sind die Protuberanzen vom 25. Mai 1895, 25. Dez. 1906 und 21. Mai 1907, bei denen *G. E. Hale*[533]), *A. A. Buß*[534]) und *P. Fox*[535]) Maximalhöhen von 452000 bzw. 450000 und 311000 km feststellen konnten. Die zuerst genannte Protuberanz hatte sich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 180 km sec^{-1} in die Höhe aufgebaut. Solche große Geschwindigkeiten — auch *H. Deslandres*[536]) konnte einmal eine Steiggeschwindigkeit von über 100 km sec^{-1} beobachten — sollen nach *R. K. Sur*[537]) aus dem Strahlungsdruck erklärlich sein.

So wie im Spektrum der Sonnenflecken zeigen auch im Spektrum der eruptiven Protuberanzen die Linien, wie wohl zuerst von *J. N. Lockyer*[538]) beobachtet worden ist, Krümmungen und Verzerrungen, die nach dem *Doppler*schen Prinzip wieder auf innere Bewegungen führen, die mit Geschwindigkeiten von oft mehr als 100 km sec^{-1} und nach einer Beobachtung von *H. C. Vogel* vom 2. Juni 1871 auch wirbelartig vor sich gehen. In der Regel nehmen aber nicht alle Linien an dieser Erscheinung teil und meistens zeigen sogar die verschiedenen Linien eines Elementes verschiedenes Verhalten. Die die Protuberanz bildenden Stoffe sind in derselben also ebensowenig gleichmäßig verteilt, wie das in der Sonnenatmosphäre der Fall ist. Das zeigt sich übrigens auch darin, daß spektroheliographische Aufnahmen von Protuberanzen im Lichte der H_α-Linie zumeist nur wenig Ähnlichkeit mit gleichzeitigen Aufnahmen mit den Ca-Linien H oder K besitzen. Beispielsweise liegen von einer am 21. Mai 1907 von *P. Fox*[539]) mit dem Spektroheliographen mehrmals aufgenommenen eruptiven Protuberanz gleichzeitige Zeichnungen im Lichte der H_α-Linie nach visuellen Beobachtungen von *J. Fenyi*[540]) vor, die keinerlei Formähnlichkeit mit den Aufnahmen von *Fox* erkennen lassen. Noch deutlicher konnte *A. Riccò*[541]) die Nichtübereinstimmung der Protuberanzenform im Lichte verschiedener Linien an einer Flashaufnahme

533) Astroph. Journ. 1 (1895), p. 433.
534) Engl. Mech. 84 (1907), p. 523.
535) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 155.
536) Paris C. R. 171 (1920), p. 572.
537) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 111.
538) London Roy. Soc. Proc. 17 (1869), p. 350.
539) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 155.
540) Ebendort 27 (1908), p. 78.
541) Paris C. R. 143 (1906), p. 441.

vom 30. Aug. 1905 dartun. Die Unterschiede sind natürlich aus den an verschiedenen Stellen der Protuberanz herrschenden verschiedenen Dichten und Temperaturen und den dadurch bedingten Ionisationsunterschieden erklärlich.

Die Form der Protuberanzen wird durch in der Chromosphäre vorhandene Strömungen beeinflußt. *F. Slocum*[542]), dem 3323 Protuberanzenaufnahmen aus den Jahren 1904—1910 für eine statistische Untersuchung dieses Einflusses zur Verfügung standen, kommt zu dem Ergebnis, daß in der Sonnenatmosphäre zwischen 15° und 55° nördlicher und 25° und 55° südlicher heliographischer Breite allgemein parallel zur Sonnenoberfläche und polwärts gerichtete Strömungen vorhanden sein dürften.

Physikalisch ist eigentlich nicht recht erklärlich, wie bei der verhältnismäßig nur geringen Höhe der Chromosphäre Gasmengen in so beträchtliche Höhen über der Sonnenoberfläche, also in einen praktisch fast leeren Raum, hinaufgelangen und sich dort oft stundenlang und länger erhalten können, ohne sich zu zerstreuen. Schon *J. Fenyi*[543]) hat auf diese Schwierigkeit hingewiesen. Will man nicht wieder mit *W. Julius*[544]) annehmen, daß die Protuberanzen als Ganzes und ebenso die beobachteten Linienverzerrungen in ihrem Spektrum nur durch anomale Dispersion vorgetäuscht werden, so könnte vielleicht eine erst vor kurzem von *W. Anderson*[545]) publizierte Ansicht eine Erklärung für die auffällige „Haltbarkeit" dieser Gebilde liefern. Danach wären die die Protuberanz bildenden Gase derart verdünnt, daß die Atome wie Geschosse aus dem Sonneninneren in parallelen Bahnen emporgeschleudert werden. Die Gase hätten demnach weder Wärme noch Temperatur und die Atome würden, wie auch schon *J. Evershed*[546]) für möglich gehalten hat, lediglich durch die Sonnenstrahlung zur Emission angeregt. Dadurch aber, daß die Steiggeschwindigkeit mit der Höhe abnimmt, muß sich der Gasstrom in seinen höheren Teilen verdichten, so daß schließlich infolge dieser Dichtezunahme mit der Höhe, die noch durch zurückstürzende Atome gesteigert wird, irgendwo über der Sonnenoberfläche jene Dichte eintreten kann, die nötig ist, um die Emission genügend stark und damit sichtbar zu machen. Das Auftreten von über dem Sonnenrand frei schwebenden Protuberanzen wäre in dieser Weise erklärbar. Wird dazu noch mit

542) Astroph. Journ. 33 (1911), p. 108.

543) Astr. Nachr. 189 (1911), p. 49; Mem. Spettr. Ital. 1 (1912), p. 21.

544) Pop. Astr. 10 (1902), p. 501.

545) Astr. Nachr. 216 (1922), p. 85.

546) The Observatory 39 (1916), p. 392.

W. Anderson[547]) angenommen, daß die Ausströmungsgeschwindigkeit nicht konstant sei, so können in die Höhe wandernde Verdichtungszentren auftreten, die in ihrer Bewegung für uns das Bild einer sich aufbauenden Protuberanz hervorrufen. *Andersons* Überlegungen ebenso wie *A. Bresters*[548]) Ausführungen, denen zufolge in ganz ähnlicher Weise anzunehmen wäre, daß lediglich die Leuchtbedingungen in einer an sich ruhenden Chromosphäre stark veränderlich sind, könnten die merkwürdige Beobachtung von *E. Pettit*[549]) an einer eruptiven Protuberanz vom 29. Mai 1919 erklären, die sich in $4^1/_2$ Stunden von 10000 bis 400000 km Höhe aufbaute, während gleichzeitig die Aufbaugeschwindigkeit mit der Höhe nicht abnahm, sondern dem Gravitationsgesetz entgegen von anfänglich nur 4,4 km bis auf 113 km zur Zeit der größten Höhe anstieg. Jedenfalls harren die an den Protuberanzen beobachteten Merkwürdigkeiten noch einer einwandfreien Interpretation.

15. Das Spektrum der Sonnenkorona. Wenn der Mond bei einer totalen Sonnenfinsternis die Sonnenscheibe nahezu gänzlich verdeckt hat, leuchtet rund um die dunkle Mondscheibe ein strahliges Gebilde von eigentümlichem, durchsichtigem Glanze auf, die sogenannte „Sonnenkorona", die dann während der ganzen Dauer der Totalität sichtbar bleibt.

Das Spektrum dieser Sonnenkorona besteht aus hellen Linien auf kontinuierlichem Grund. Die Frage, ob das kontinuierliche Spektrum *Fraunhofer*sche Linien zeigt, ob es also von reflektiertem Sonnenlicht herrührt, blieb ziemlich lange ungeklärt, da man bei einigen totalen Finsternissen, so beispielsweise in den Jahren 1871, 1882 und 1893 *Fraunhofer*sche Linien gesehen haben will, während sie bei anderen Finsternissen, z. B. 1898 und 1900, wieder nicht bemerkt werden konnten.[550]) *A. Fowler*[551]) meinte, daß man sie mit geringerer Dispersion wohl immer auffinden würde, daß die Linien aber zu schwach und unbestimmt seien, um bei Verwendung stärkerer Dispersionen bemerkt werden zu können. Nach den bei der totalen Finsternis vom 17. Mai 1901 gesammelten Beobachtungen scheinen die *Fraunhofer*schen Linien auch nur in den äußeren Teilen der Korona aufzutreten,

547) Astr. Nachr. 216 (1922), p. 369.

548) Le soleil; ses phénomènes les plus importants, leur litterature et leur explication. La Haye 1924, W. P. van Stockum & fils.

549) Astroph. Journ. 50 (1919), p. 206.

550) Siehe bei *A. de la Baume-Pluvinel,* Paris C. R. 130 (1900), p. 1523; 132 (1901), p. 1259.

551) Nature 63 (1901), p. 394.

während die sogenannte innere Korona in der Regel keinerlei Absorptionslinien erkennen läßt.[552]) Offenbar liegt also eine Überlagerung zweier Spektren vor, deren eines, das *Fraunhofer*spektrum des reflektierten Sonnenlichtes, durch ein anderes rein kontinuierliches und gegen den Sonnenrand kräftiger werdendes Spektrum geschwächt wird. Daß die Korona wenigstens teilweise auch im reflektierten Sonnenlicht leuchtet, also ein *Fraunhofer*sches Spektrum zeigen muß, folgt noch daraus, daß ihr Licht teilweise polarisiert ist, wie u. a. *A. Prazmowsky*[553]), *H. H. Turner* und *H. F. Newall*[554]), *R. W. Wood*[555]) und *J. J. Landerer*[556]) nachgewiesen haben. Dabei ließ sich in Übereinstimmung damit, daß das *Fraunhofer*spektrum meistens nur in der äußeren Korona sichtbar wird, bei den Finsternissen von 1870[557]) und 1901[558]) sogar zeigen, daß auch der Polarisationgrad in der äußeren Korona größer war als in der inneren.

Das Emissionsspektrum der Korona ist vielfach untersucht worden. Ziemlich ausführliche Tabellen der beobachteten Linien sind von *F. W. Dyson*[559]), *W. Christie*[560]), *A. L. Cortie*[561]) und von *W. W. Campbell* und *J. H. Moore*[562]) gegeben worden. Nach den letzten beiden treten folgende Linien auf, von denen die mit einem Asterisk bezeichneten sicher der Korona selbst angehören (s. Tabelle nächste Seite).

Am kräftigsten erscheint zumeist die „grüne Koronalinie" bei λ 5303, die zuerst von *J. N. Lockyer*[563]) und *C. A. Young*[564]) aufgefunden worden ist und die man lange Zeit für mit der Chromosphärenlinie bei 5317 identisch hielt. Erst 30 Jahre später stellten fast gleichzeitig *W. W. Campbell*[565]), *C. A. Young*[566]) und *J. N. Lockyer*[567]) auf

552) Siehe bei *W. Foerster*, Mitt. Ver. Freunde d. Astr. u. kosm. Phys. 11 (1901), p. 129.

553) Paris C. R. 51 (1860), p. 195.

554) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 60 (1900), App. I.

555) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 281.

556) Paris C. R. 141 (1905), p. 589.

557) Siehe bei *P. Blaserna*, Arch. des Sciences phys. et nat. (2) 41 (1871), p. 423.

558) Siehe bei *W. H. Julius*, Totale eclipse of the Sun May 18, 1901, Dutch observations III, und bei *C. D. Perrine*, Astroph. Journ. 14 (1901), p. 349.

559) London Roy. Soc. Phil. Trans. 206 (1906), p. 451.

560) London Roy. Soc. Proc. 77 A (1906), p. 28.

561) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 78 (1918), p. 665.

562) Lick obs. Bull. 318 (1918); Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 349.

563) Nature 1 (1869), p. 14.

564) Ebendort p. 172.

565) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 186.

566) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 306.

567) London Roy. Soc. Proc. 64 (1899), p. 168.

λ	Intensität	*Nicholson*	*Pannekoek*	λ	Intensität	*Nicholson*	*Pannekoek*	λ	Intensität	*Nicholson*	*Pannekoek*
3288?		Pf		3651?	1	—		4533	2	—	883
3328		Pf	847	3801*	1	Pf		4567*	1	C	841
3357		—		3865		Pf		4586		Pf	
3388*		Pf	898	3891		Pf		4722?		Pf	
3455*		Pf	827	3987*	1	Pf		4725?		Pf	
3461		—		4086*	1	Pf		4779	1	—	880
3505?		Pf		4130		—	870	5073		Pf	
3534		C		4231*	3	Pf	841	5118		Pf	
3601*	5	Pf		4241	1	—	895	5303*	10	C	855
3626		Pf		4245	1	—		5536		Pf	
3641	2	—		4311		Pf		6374*		C	
3643*	2	C	847	4359*		C					
3648	2	Pf	885	4398?	1	Pf	896,842				

Grund genauerer Messungen fest, daß eine solche Identität nicht besteht. An genaueren Wellenlängenbestimmungen liegen für diese Linie vor:

J. N. Lockyer 1896 u. 1898, loc. cit.	5303,7 Å.E.
W. W. Campbell 1898, loc. cit.	5303,26 „
T. de Azcarate 1905, Ann. Obs. San Fernando 1, p. 45 .	5303,52 „
F. W. Dyson 1905, London Roy. Astr. Soc. Mem. 57, App.	5303,1 „
W. Christie 1906, London Roy. Soc. Proc. 77 A, p. 28 .	5303,10 „
A. Perot 1912, Paris C. R. 154, p. 1331	5303,7 „
R. Furuhjelm 1914, Anders Donner Festschr. Helsingfors 1915	5303,36 „
Ch. E. St. John 1918, Publ. Astr. Soc. Pac. 30, p. 250 .	5303,16 „

Die grüne Koronalinie ist übrigens nicht immer gleich kräftig, sondern scheint, ebenso wie dies bei Ausdehnung und Helligkeit der Korona der Fall ist, mit dem Ansteigen der Fleckentätigkeit der Sonne an Intensität zuzunehmen. Im Jahre 1900 wurde sie von *C. A. Young*[568]) und *M. Hamy*[569]) sogar überhaupt nicht gesehen; sie war damals, wie *A. de la Baume-Pluvinel*[570]) bemerkte, nur in den innersten Teilen der Korona knapp am Sonnenrand nachweisbar. Am 17. April 1912 fand sie *H. Deslandres*[571]) nur am Westrand, nicht aber am Ostrand der Sonne.

568) Astroph. Journ. 11 (1900), p. 79.
569) Paris C. R. 130 (1900), p. 1516.
570) Paris C. R. 132 (1901), p. 1259.
571) Paris C. R. 154 (1912), p. 1019.

Den Ursprung der grünen Koronalinie aufzufinden, ist bisher nicht gelungen und man schrieb sie einem vorläufig noch unbekannten Element „Coronium" zu. *M. B. Snyder*[572]) meinte zwar, sie sei vielleicht mit der Linie des Viellinienspektrums der Wasserstoffmolekel[573]) bei λ 5303,35 identisch und schlug bei dieser Gelegenheit für das Coroniumgas sogar den Namen „Coroniumhydrogen" vor, doch bliebe dann wohl die Frage unbeantwortet, warum von den zahlreichen Linien dieses Viellinienspektrums gerade nur diese eine einzige im Koronaspektrum auftreten sollte. Sehr eingehend beschäftigte sich *J. W. Nicholson*[574]) in mehreren Arbeiten mit den gesetzmäßigen Beziehungen der Koronalinien untereinander, und er schrieb dann eine Anzahl von Linien (in der obigen Tabelle ist Pf beigesetzt) einem hypothetischen Element Protofluorine zu, dessen Atom die Kernladung $5e$ besitzen und 2—7 Elektronen enthalten soll, so daß das Element in den verschiedenen Zuständen zwischen Pf^{+++} und Pf^{---} auftreten würde. Ganz abgesehen, daß ein Atom dieses Baus in die modernen Vorstellungen vom Atombau nicht hineinpaßt, fügen sich aber gerade die grüne Koronalinie, dann eine Linie bei 3534 sowie die von *H. Deslandres* und *P. Carasco*[575]) am 21. August 1914 neu aufgefundene Linie bei λ 6375 nicht in *Nicholson*s Protofluorineschema. Nach *J. W. Nicholson*[576]) gehören diese Linien dem eigentlichen Coronium an, dessen Atom dann aber eine Kernladung von $7e$ und 8 Elektronen besitzen müßte, um diese Linien emittieren zu können. Ein Zusammenhang zwischen den Linien 3534 und 6375 soll aber nach *P. Carasco*[576]) trotzdem wahrscheinlich sein.

Da Ca^{+} noch in den äußersten Chromosphärenschichten stark vertreten ist, vermutete *A. Pannekoek*[577]) später, daß Linien des Koronaspektrums vielleicht dem Ca^{++} angehören. Nach einer Bemerkung von *P. Zeeman* und *H. W. J. Dik*[578]), daß einige Argonlinien (Atomnummer 18) in Übereinstimmung mit dem *Kossel-Sommerfeld*schen Verschiebungsgesetz konstante Wellenzahldifferenz gegen Linien des ionisierten Kaliums (Atomnummer 19) aufweisen, suchte er ebensolche

572) Pop. Astr. 19 (1911), p. 170.

573) Nach *E. Gehrke,* Tätigkeitsber. d. phys. techn. Reichsanst. Nr. 21, gehört dieses Spektrum nicht dem H-Atom, sondern der H-Molekel an.

574) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 139, 627, 729. Die bezüglichen Untersuchungen sind also von *Nicholson* vor Erscheinen der Arbeiten von *N. Bohr* ausgeführt worden.

575) Paris C. R. 160 (1914), p. 669, 740.

576) Paris C. R. 161 (1915), p. 631.

577) Bull. Astron. Inst. Netherl. Nr. 19, 1 (1922), p. 115

578) Amsterdam koningl. Acad. Proc. April 1922.

konstante ν'-Differenzen zwischen Koronalinien und Linien des Ca^+. Die bezüglichen in der obigen Tabelle bei einigen Linien beigesetzten Zahlen könnten darauf hindeuten, daß zwei Serien von Koronalinien vorhanden sind, deren eine eine Schwingungsdifferenz von etwa $\Delta\nu' = 850$, deren andere eine solche von rund $\Delta\nu' = 885$ gegen entsprechende Linien des Ca^+ zukommt. Bei der relativ geringen Genauigkeit, mit der die Wellenlängen der Koronalinien bekannt sind, ist ein genauer Beweis natürlich nicht leicht zu führen. In neuester Zeit hat noch *J. M. Freeman*[579]) behauptet, daß 32 Linien des Koronaspektrums aus verbotenen Sprüngen zwischen metastabilen Zuständen des Argonatoms darstellbar seien. Gegen seine Ansicht wendeten sich *H. N. Russell* und *J. S. Bowen*[580]) sowie *W. Grotrian*[581]), welch letzerer hierzu bemerkte, daß dann die Korona wohl im wesentlichen lediglich aus Argon bestehen müßte, was sicher nicht anzunehmen sei.

Was das rein kontinuierliche Spektrum der Korona angeht, so haben es *W. Huggins*[582]) und *J. Scheiner*[583]) auf das Vorhandensein fester Teilchen zurückgeführt, die sich unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung im Glühzustand befinden. Nach dem letzteren wäre die Temperatur solcher kugelförmig gedachter Körperchen höchstens bei etwa 4000^0 zu suchen und somit müßte das Intensitätsmaximum im kontinuierlichen Spektrum der Korona gegenüber dem Sonnenspektrum gegen Rot verschoben erscheinen. Bolometrische Messungen, die am 28. Mai 1900 von *C. G. Abbot*[584]) und *S. P. Langley*[585]) angestellt worden sind, haben aber das unerwartete Resultat ergeben, daß die Sonnenkorona nur sehr wenig mehr Wärme ausstrahlt als die dunkle Mondscheibe während der Finsternis. *S. P. Langley*[586]) schließt daraus, daß die Korona eine vorwiegend elektrische Erscheinung sein müsse, eine Ansicht, zu der fast gleichzeitig *F. Fitz Gerald*[587]) und *E. Spée*[588]) mit Rücksicht auf das Nichtauftreten der grünen Koronalinie als Absorptionslinie im Sonnenspektrum gelangten. *Abbot*s und *Langley*s Beobachtungen haben in neuester Zeit eine Bestätigung erfahren durch

579) Astroph. Journ. 68 (1928), p. 177.
580) Astroph. Journ. 69 (1929), p. 196.
581) Die Naturwiss. 17 (1928), p. 415.
582) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 279.
583) Astr. Nachr. 152 (1900), p. 370.
584) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 69.
585) Ebendort p. 370.
586) a. a. O. und Astroph. Journ. 21 (1905), p. 194.
587) Nature 62 (1900), p. 7.
588) Bull. Soc. Belge d. Astron. 6 (1901), p. 65.

spektralphotometrische Untersuchungen von *H. Ludendorff*[589]) bei der totalen Sonnenfinsternis vom 23. Sept. 1923. Ein Vergleich des Koronaspektrums mit dem Spektrum des an Kreide reflektierten Sonnenlichtes hatte da im Spektralbereich zwischen 3820—4840 Å.E. völlige Übereinstimmung der Intensitätsverteilung in beiden Spektren ergeben. Zum gleichen Resultat kamen *P. Pettit* und *S. B. Nicholson*[590]) am 24. Jan. 1925 bei Untersuchung der spektralen Energieverteilung im Infrarot mit Hilfe eines Wasserfilters, während *H. T. Stetson* und *W. W. Coblentz*[591]) bei derselben Finsternis durch Messungen mit Glyzerinzelle und Thermosäule zum gerade entgegengesetzten Ergebnis gelangten und auf eine ziemlich niedere Koronatemperatur von nur etwa 3000° schlossen. Die Frage, ob die kontinuierliche Strahlung der Korona Temperaturstrahlung sei oder nicht, harrt somit noch der sicheren Lösung.

Unter der Voraussetzung, daß Temperaturstrahlung vorliege, hält *W. Anderson*[592]) für möglich, daß ein nur aus freien Elektronen oder auch aus Atomkernen und Elektronen bestehendes Elektronengas von so niedriger Dichte, daß Kerne und Elektronen voneinander unabhängig werden, das kontinuierliche Koronaspektrum infolge thermischer Bewegung der Partikelchen aussende. In Weiterverfolgung[593]) des Gegenstandes kam er zu dem Schluß, daß unter den vermutlich in der Korona obwaltenden Druck- und Temperaturverhältnissen ein gewöhnliches Gas unmöglich ein kontinuierliches Spektrum aussenden könnte.

R. W. Wood[594]) hat versucht, die Korona künstlich nachzuahmen, indem er ein elektrisches Glühlämpchen, das durch eine kreisrunde Scheibe abgedeckt war, in ein parallelepipedisches, mit einer Mischung aus Wasser und alkoholischer Mastixlösung gefülltes Glasgefäß einbrachte. Durch die Glaswand hindurch erschien die dunkle, runde Scheibe wegen der Zerstreuung des Lichtes an den Mastixteilchen von einer koronaähnlichen Lichthülle umgeben. *J. Woltjer jun.*[595]) konnte nun theoretisch zeigen, daß bei Zurückführung des kontinuierlichen Koronaspektrums auf Zerstreuung des Sonnenlichtes in einem Elektronengas im visuellen Bereich eine spektrale Energieverteilung folgen

589) Berlin Sitzber. 1925, p. 83.

590) Astroph. Journ. 64 (1926), p. 136.

591) Astroph. Journ. 62 (1925), p. 128.

592) Astr. Nachr. 218 (1923), p. 251.

593) Ztschr. f. Phys. 33 (1925), p. 273; 34 (1925), p. 453; 35 (1926), p. 757; 37 (1926), p. 342; 38 (1926), p. 530; 41 (1927), p. 51; Phys. Ber. 8 (1927), p. 693.

594) Astroph. Journ. 13 (1901), p. 68; Nature 1901, p. 250.

595) Bull. Astron. Inst. Netherl. 3 (1926), Nr. 94, p. 103.

würde, die mit der im Sonnenspektrum beobachteten nahezu völlig übereinstimmen würde. Somit läßt sich nicht entscheiden, ob Zerstreuung an den Partikeln eines solchen Elektronengases oder an anderen festen Teilchen vorliegt, da ja die Frage nach dem Vorhandensein von Wärmestrahlung, wie oben gezeigt wurde, noch nicht sicher gelöst werden konnte.

Über die während verschiedener früherer totaler Sonnenfinsternisse insbesondere an der Korona gesammelten Beobachtungen hat *A. C. Ranyard* in den Memoirs of the Royal Astronomical Society 41 (1879) eingehend berichtet.

16. Die Temperatur der Sonnenoberfläche. Die Temperatur der Sonnenoberfläche, die sogenannte effektive Sonnentemperatur, läßt sich ermitteln a) aus der Wärmestrahlung der Sonne, b) aus ihrer Gesamthelligkeit und c) aus der Energieverteilung im mittleren Sonnenspektrum.

a) *Wärmestrahlung.* Die Wärmestrahlung der Sonne läßt sich mit Hilfe der verschiedenen Aktinometer[596]) messen, und man bezeichnet als „Solarkonstante" diejenige in Grammkalorien ausgedrückte Wärmemenge, die von der Sonne pro Minute auf 1 cm^2 schwarzer, zur Strahlung senkrecht stehender Oberfläche in der Einheitsdistanz Erde—Sonne ausgestrahlt wird. Seit etwa hundert Jahren hat man vielfach versucht, die Temperatur der Sonnenoberfläche aus Messungen der Solarkonstante zu ermitteln, wobei für den Zusammenhang zwischen absoluter Temperatur und Strahlung die von den Physikern zur Darstellung ihrer Laboratoriumsmessungen benutzten Gesetze in Anwendung kamen.

Pouillet[597]), der mit seinem „Pyrheliometer" für die nach der *Lambert*schen Extinktionsformel von der absorbierenden Wirkung der Erdatmosphäre befreite Solarkonstante den Betrag 1,793 $\mathrm{cal\,min}^{-1}$ fand, benutzte zur Ermittlung der Sonnentemperatur das Strahlungsgesetz von *Dulong* und *Petit*

$$Q = m a^T,$$

in dem $a = 1{,}0077$ und m von der Oberflächenbeschaffenheit des strahlenden Körpers abhängig sein sollen, und fand $T_\odot = 1461^0$, also einen viel zu geringen Wert.

A. Secchi[598]) benutzte zur Darstellung seiner Messungen dagegen

596) Eine Beschreibung der gebräuchlichen Aktinometer findet sich u. a. bei *O. D. Chwolson,* Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von *H. Pflaum,* Bd. 2 (1904), p. 621.

597) Paris C. R. 7 (1839), p. 24.

598) Le Soleil, Paris 1870, p. 265.

das *Newton*sche Strahlungsgesetz, dem zufolge die zugestrahlte Wärmemenge Q der absoluten Temperatur proportional laufen soll, und erhielt als anderes Extrem $T_{\odot} = 4$—10 Millionen Grad.

Wieder mit dem Strahlungsgesetz von *Dulong* und *Petit* erhielt *Violle*[599]) unter der Annahme, daß die Sonnenphotosphäre ähnlich strahle und absorbiere wie Ruß, nur $T_{\odot} = 1550^0$ und mit einem Strahlungsgesetz von der Form

$$Q = (aT^2 + b)(T - \Theta),$$

in dem T und Θ die Temperaturen des strahlenden und absorbierenden Körpers vorstellen und $a = 3{,}351 \cdot 10^{-6}$, $b = 0{,}0637$ zu setzen sind und das Laboratoriumsmessungen mit der Thermosäule bis etwa 300^0 ziemlich gut darstellte, erhielt *Rosetti*[600]) $T_{\odot} = 9965^0$.

Abney und *Festings*[601]) nahmen wieder an, daß Q mit T^2 proportional gehe und erhielten $T_{\odot} = 12\,700^0$. Es ist klar, daß die Form des verwendeten Strahlungsgesetzes den berechneten T-Wert ganz wesentlich beeinflußt. Als treffendes Beispiel für die Differenzen, die so entstehen können, sei erwähnt, daß *M. E. Vicaire*[602]) aus *Secchis* Bestimmungen der Solarkonstante, aus denen dieser mit dem Gesetz von *Newton* mehrere Millionen Grade ableitete, $T_{\odot} = 1398^0$ erhielt, als er das *Dulong-Petit*sche Gesetz unterlegte.

Legt man das richtige *Stefan-Boltzmann*sche Strahlungsgesetz (Gleichung (2) auf p. 543)

$$E = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 1{,}374 \cdot 10^{-12}\,\text{cal}\,\text{sec}^{-1})$$

zugrunde, so hat man zunächst die Beziehung zwischen E und der Solarkonstante S herzustellen. Da E die Strahlung eines Quadratzentimeters pro Sekunde auf die Halbkugel bedeutet, S aber die Strahlung der ganzen uns zugewendeten Sonnenhalbkugel auf 1 cm² pro Minute, ist

$$E = \frac{S}{60} \cdot \frac{R^2}{r^2} = \frac{S}{60 \sin^2 \frac{\psi}{2}},$$

wenn r = Sonnenhalbmesser, R = Distanz Erde—Sonne und ψ = scheinbarer Durchmesser der Sonne. Damit wird aber, wenn man den Wert von σ einsetzt,

$$T_{\odot}^4 = \frac{10^{12} S}{82{,}44 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \quad \text{oder} \quad T_{\odot} = 331{,}865 \sqrt[4]{\frac{S}{\sin^2 \frac{\psi}{2}}}.$$

Würde man die bei den obigen Temperaturbestimmungen benutzten

599) Paris C. R. 78 (1874), p. 1425, 1816; 79 (1874), p. 746.

600) Atti Reale Acad. dei Lynci (3) 2 (1878), p. 174.

601) London Roy. Soc. Proc. 35 (1882), p. 328.

602) Paris C. R. 74 (1872), p. 31; 78 (1874), p. 1012.

Aktinometermessungen nach dieser Formel auswerten, so würde man in guter Übereinstimmung

$$\begin{array}{lr} \textit{Pouillet} & T_\odot \doteq 5600^0, \\ \textit{Secchi} & 5400^0, \\ \textit{Violle} & 6200^0 \end{array}$$

erhalten.

Eine genauere Formel, in der auch die gleichzeitige Strahlung des Himmels und die Temperatur der schwarzen Auffangfläche mitberücksichtigt werden, hat *E. Warburg*[603]) angegeben. Es sei angenommen, daß die Strahlungen von Himmel- und Auffangfläche eine Temperatur von 0^0 C oder 273^0 abs. entsprechen, und zwischen beiden Strahlungen herrsche Gleichgewicht. Da die Sonne nun aber nur den Bruchteil $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ der Himmelshalbkugel bedeckt und die Auffangfläche gegen die Sonne den gleichen Bruchteil ihrer Gesamtstrahlung aussendet, so hat man mit Rücksicht auf das gegen die übrige Himmelsfläche bestehende Strahlungsgleichgewicht die Beziehung

$$S = (Q_\odot - Q_{273}) \sin_2 \frac{\psi}{2},$$

wenn die Q die betreffenden Strahlungen voller Halbkugeln von den Temperaturen $T_\odot$ und $T = 273^0$ auf eine im Kugelzentrum liegende Auffangfläche pro Minute vorstellen. Ist die aus dem *Stefan-Boltzmann*schen Gesetz berechenbare und im Laboratorium meßbare Strahlungsdifferenz

$$Q_{373} - Q_{273} = h \qquad (h = 1{,}138 \text{ cal min}^{-1}),$$

so hat man

$$\frac{S}{h} = \frac{Q_\odot - Q_{273}}{Q_{373} - Q_{273}} \sin^2 \frac{\psi}{2} \sim \frac{Q_\odot}{Q_{273}} \left(\frac{Q_{373}}{Q_{273}} - 1\right)^{-1} \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

Nun ist aber wieder nach dem *Stefan-Bolzmann*schen Gesetz

$$\frac{Q_\odot}{Q_{273}} = \left(\frac{T_\odot}{273}\right)^4 \quad \text{und} \quad \frac{Q_{373}}{Q_{273}} = 3{,}485,$$

also schließlich

$$T_\odot = 273 \sqrt[4]{\frac{2{,}485\, S}{h \sin^2 \frac{\psi}{2}}} = 331{,}860 \sqrt[4]{\frac{S}{\sin^2 \frac{\psi}{2}}}.$$

Messungen der Solarkonstante sind seit Konstruktion des Pyrheliometer durch *Pouillet* im Jahre 1837 fortgesetzt ausgeführt worden, und zwar mit immer mehr verbesserten Aktinometern. Während die früheren Messungen oft noch recht differente Werte ergaben — Extremwerte wurden von *Vallot* im Jahre 1896 ($S = 1{,}7$) und *Crova* und

603) Verh. deutsch. Phys. Ges. 1 (1899), Nr. 2.

Hansky im Jahre 1897 ($S = 3{,}4$) gefunden — zeigten die neueren Bestimmungen stets größere Übereinstimmung. Aus längeren Beobachtungsreihen sind u. a. folgende Mittelwerte der Solarkonstante abgeleitet worden:

J. Y. Buchanan [Nature 64 (1901), p. 456] . . .	$S = 1{,}8$
P. S. Langley [Astroph. Journ. 17 (1903), p. 89] aus Beob. auf dem Allegheny-Obs. und auf dem Mt. Whitney	2,54
G. B. Rizzo [Atti Acad. Torino 38 (1903), p. 612] .	2,6
A. Hansky [Paris C. R. 40 (1905), p. 1008] auf dem Mt. Blanc	3,23
H. H. Kimball [Fortschr. d. Phys. 1910, p. 104] . .	1,934—2,131
L. Gorczynski [Mem. Spettr. Ital. 39 (1910), p. 59] .	2,05
J. Maurer [Met. Ztschr. 29 (1912), p. 561] . . .	2,38

Als sicherste Werte können wohl die von *C. G. Abbot* und seinen Mitarbeitern auf Mt. Wilson und Mt. Whitney erhaltenen bezeichnet werden. In einer Verarbeitung des ganzen von 1902—1920 laufenden Beobachtungsmateriales fanden *C. G. Abbot, F. E. Fowle* und *L. B. Aldrich*[604]) schließlich

$$\left.\begin{array}{l}1902\text{—}1912,\ S = 1{,}933\\ 1912\text{—}1920,\ S = 1{,}946\end{array}\right\}\ \text{Mittelwert}\ \mathbf{S = 1{,}939.}$$

Natürlich liefert jeder S-Wert auch einen entsprechenden $T_{\odot}$-Wert, und Bestimmungen der Sonnentemperatur aus der Solarkonstante liegen daher ebenfalls in großer Zahl vor. Es seien nur angeführt:

Poynting [London Roy. astr. Soc. Month. Not. 64 (1903), App. 1]	$T_{\odot} = 6200^0$
A. Schuster [Astroph. Journ. 21 (1905), p. 258]. .	5500^0—6700^0
W. Wundt [Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 384] . . .	6000^0—7000^0
G. Millochau [Journ. de Phys. (4) 6 (1907), p. 389]	5600^0
J. Scheiner [Potsdam Publ. 1908, Nr. 55] . . .	6196^0—6252^0
C. Fery und *G. Millochau* [Paris C. R. 146 (1908), p. 252]	5653^0
C. G. Abbot und *F. E. Fowle* [Ann. Smithson. Inst. Obs. 2 (1908), p. 106]	5962^0
F. Kurlbaum [Berlin Sitzber. 1911, p. 25] . . .	6387^0
C. G. Abbot [Astroph. Journ. 34 (1911), p. 197 und Ann. Smithson. Inst. Obs. 3 (1913)]	5830^0

Führt man den besten von *Abbot, Fowle* und *Aldrich* gegebenen Mittel-

604) Smithson. Inst. Obs. Annals 4 (1922).

wert $S = 1{,}939$ in die *Warburg*sche Formel ein, so folgt als wahrscheinlichster aus der Solarkonstante folgender Wert für die effektive Sonnentemperatur

$$T_{\odot} = 5740^{\circ}.$$

Aus dem Verhalten der in den Sonnenfleckenspektren verbreiterten Linien hatten schon *J. N. Lockyer* und *W. J. S. Lockyer*[605]) gefolgert, daß die Temperatur der Sonne im Fleckenmaximum etwas höher sei als im Minimum, und auch *G. Müller*[606]) hielt es auf Grund seiner Helligkeitsmessungen an den Planeten nicht für ausgeschlossen, daß die Sonne im Fleckenmaximum etwas heller strahle. Demnach mußte auch der Wert der Solarkonstante einigermaßen von der Fleckentätigkeit der Sonne abhängig sein. Nach *A. Ångström*[607]) scheint nun tatsächlich zwischen der Relativzahl der Fleckentätigkeit und der Größe von S eine schwache Korrelation ($r = 0{,}6$ bis $0{,}7$) zu bestehen, und auch *C. G. Abbot* und seine Mitarbeiter[608]) fanden kürzlich aus der Diskussion ihrer Beobachtungsreihen, daß die Solarkonstante zwischen Fleckenminimum und Fleckenmaximum von 1,92 auf 1,96 anwachse.[609]) Möglicherweise spielt hier die ultraviolette Strahlung der Sonne mit, auf deren Einfluß *G. M. B. Dobson*[610]) hingewiesen hatte. Ob die von *G. M. B. Dobson* und *E. Pettit*[611]) gefundenen Schwankungen dieser Ultraviolettstrahlung aber wirklich die beobachtete außerordentliche Höhe erreichen, erscheint noch fraglich.

Eingehend ist auch untersucht worden, ob noch andere kurz- oder längerperiodische Schwankungen der Solarkonstante nachgewiesen werden können. *P. Müller*[612]) glaubt, daß die Strahlung im Winter (Dezember) etwa um 0,2 cal kleiner sei als im Frühjahr (März—April). Dieser geringe Unterschied dürfte aber doch wohl eher auf den niederen Sonnenstand im Winter und die Schwierigkeit einer Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption als auf solare Verhältnisse zurückzuführen sein. Eine kleine reelle Änderung von S scheint nach *S. P. Langley*[613]) im Frühjahr 1903 eingetreten zu sein,

605) London Roy. Soc. Proc. 67 (1900), p. 409.

606) Astr. Nachr. 197 (1914), p. 385.

607) Met. Ztschr. 38 (1920), p. 250.

608) Smithson. Misc. Collections 77 (1925), p. 3.

609) Siehe hierzu auch *C. G. Abbot* und *F. E. Fowle,* Astroph. Journ. 33 (1911), p. 191 und *H. Arctowski,* Paris C. R. 163 (1916), p. 665; Mem. Spettr. Ital. (2) 6 (1917), p. 30.

610) London Roy. Soc. Proc. 104 (1923), p. 252.

611) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 21; Pop. Astr. 34 (1926), p. 241.

612) St. Petersburg Bull. de l'Acad. 11 (1900), p. 61.

613) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 305.

da sie auch von anderen, z. B. von *H. Dufour*[614]) bemerkt worden ist. Aus Messungen zu Pawlowsk im Zeitraum 1912—1919 hat *N. N. Kalitin*[615]) gefolgert, daß S von der Deklination der Erde über dem Sonnenäquator abhängig sei in einem Sinn, als würde die Strahlung der Sonnenoberfläche gegen die Sonnenpole hin zunehmen. Während nun aber *W. Anderson*[616]) diese Beobachtungen für eine glänzende Bestätigung der *Emden*schen Sonnentheorie hält, gelang es gleichzeitig *E. Steng*[617]) zu zeigen, daß ein ähnlicher Zusammenhang in den Beobachtungen zu Calama und auf Mt. Wilson nicht auftrete. Eine kurze Periode von etwa 27^d, die somit in Zusammenhang mit der Sonnenrotation stünde, könnte nach *C. G. Abbot*[618]) vorhanden sein. *P. Linke*[619]) glaubt allerdings, daß sie auch durch Schwankungen der atmosphärischen Verhältnisse hervorgerufen sein könne. Hält man sich jedoch die schöne Übereinstimmung der neueren Messungen der Solarkonstante vor Augen, so erscheint es kaum mehr tunlich, beobachtete Schwankungen der Solarkonstante lediglich aus Wirkungen der Erdatmosphäre zu erklären. Sicher ist natürlich auch ein so übertriebener Einfluß unserer Atmosphäre, wie ihn *F. W. Very*[620]) in mehreren Publikationen einführt, um dann für die Solarkonstante außerhalb der Lufthülle Werte von sogar 3—4 cal min^{-1} zu erhalten, nicht vorhanden. Immerhin ist die Berücksichtigung des veränderlichen Trübungsfaktors und des Wasserdampfgehaltes unserer Atmosphäre bei solchen absoluten Messungen nicht gerade leicht, und *W. Wundt*[621]) hält daher auch die Anwendung eines für das ganze Spektrum gültigen mittleren Transmissionskoeffizienten bei Bestimmung der atmosphärischen Absorption für unzulässig. Doch hat bereits *H. Seeliger*[622]) gezeigt, daß bei diesem Vorgang Fehler von nur wenigen Prozenten entstehen können, so daß durch deren Beseitigung die aus der Solarkonstante ermittelte Sonnentemperatur nur eine geringe Änderung erfahren würde.[623])

614) Paris C. R. 136 (1903), p. 713.

615) Astr. Nachr. 215 (1921), p. 17.

616) Ebendort 216 (1922), p. 323.

617) Krakau Circ. 15 (1923).

618) Smithson. Misc. Coll. 69 (1918), p. 6

619) Astr. Nachr. 221 (1924), p. 181.

620) Astroph. Journ. 34 (1911), p. 371; 37 (1913), p. 25; Bull astron. 30 (1913), p. 5.

621) Met. Ztschr. 24 (1907), p. 261.

622) München Sitzber. 21 (1891), p. 25.

623) Ein Referat über die vermutlichen Schwankungen von S ist von *E. Freundlich,* Die Naturwiss. 3 (1916), p. 606 gegeben worden.

Da über der Sonnenphotosphäre die gasige Chromosphäre liegt, so muß auch die Absorptionswirkung dieser letzteren berücksichtigt werden, wenn man die Temperatur der Photosphäre selbst erhalten will. *W. Wundt*[624]) meint zwar, daß in der Chromosphäre eine Verschiebung der spektralen Energieverteilung eintrete, und daß daher eine Berücksichtigung der Absorption derselben mit einem mittleren Transmissionskoeffizienten wieder nicht statthaft sei, doch beweist der Abfall der Helligkeit auf der Sonnenscheibe von der Mitte zum Rand, daß eine allgemeine Absorption vorhanden ist, die den Wert der Gesamtstrahlung der Photosphäre herabmindert. Die Transmissionskoeffizienten der Sonnenatmosphäre sind aus diesem Intensitätsabfall von *H. C. Vogel*[625]), *A. Schuster*[626]), *H. Seeliger*[627]), *H. Biscoe*[628]) und *S. Hirayama*[629]) für einzelne Wellenlängen ermittelt worden. *J. Scheiner*[630]) bestimmte sich den für die Gesamtstrahlung zu verwendenden Wert p des Transmissionskoeffizienten aus dem Verhältnis der Flächen der unkorrigierten und der mit den *Seeliger*schen p_λ-Werten verbesserten Energiekurve zu $p = 0{,}70$ und erhielt aus einer Solarkonstante $S = 2{,}29$ schließlich für die reine Photosphärenstrahlung $S' = 3{,}89$ und $T_{\text{Phot.}} = 7065^0$. (Die Zahlen sind durch einen Rechenfehler verfälscht und sollten richtig heißen: $S' = 3{,}27$, $T_{\text{Phot.}} = 6540^0$!) Legt man den oben angegebenen wahrscheinlichsten Wert der Solarkonstante $S = 1{,}939$ unter, so würde mit $p = 0{,}70$ folgen: $S' = 2{,}77$ und $T_{\text{Phot.}} = 6280^0$.

Aus Messungen der Intensitätsverteilung auf der Sonne leitete *F. W. Very*[631]) das überraschende Resultat ab, daß sowohl die p_λ selbst als auch ihre Mittelwerte verschieden herauskommen, wenn man in verschiedener Distanz von der Mitte der Sonnenscheibe befindliche Stellen der Sonnenoberfläche zu ihrer Bestimmung heranzieht. Er fand z. B. in den Abständen vom Zentrum von 0,5, 0,75 und 0,95 (in Teilen des Sonnenradius)

$$p_{0,5} = 0{,}696,$$
$$p_{0,75} = 0{,}781,$$
$$p_{0,95} = 0{,}867.$$

Demnach liegt kein einheitlicher Absorptionsvorgang vor, und man

624) Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 384.
625) Pogg. Ann. 148 (1873), p. 161.
626) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 320.
627) München Sitzber. 21 (1891), p. 25.
628) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 202.
629) Tokyo Obs. Ann. 1918, App. III.
630) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 18 (1908), Nr. 55.
631) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 73.

wird also wirklich kaum mit einem einheitlichen mittleren Transmissionskoeffizienten rechnen dürfen. Vermutlich wird eine Überlagerung der reinen Absorption durch die Eigenemission der über der Photosphäre liegenden Schichten anzunehmen sein. Unter dieser letzteren Voraussetzung kam *A. Schuster*[632]) zu dem Ergebnis, daß offenbar über der auf einer Temperatur von etwa 6700° befindlichen Photosphäre eine absorbierende Schicht von einer Eigentemperatur von ca. 5500° liege, und unter ähnlichen Annahmen erhielt *S. Hirayama*[633]) für die Temperaturen von Photosphäre und absorbierender Schicht die Werte 7040° bzw. 5210°. Gelegentlich einer Diskussion der von *Seeliger*, *Very* und *Schuster* angegebenen p_λ-Werte hatte auch *F. Biske*[634]) geschlossen, daß die Photosphärentemperatur zwischen 7100° und 9100° zu suchen sein dürfte. Man wird also kaum viel fehlgehen, wenn man die Temperatur der Photosphäre mit rund 7000° veranschlagt.

b) *Gesamthelligkeit.* Nach einer von *E. Rasch*[635]) experimentell gefundenen Beziehung zwischen der Flächenhelligkeit H des schwarzen Körpers (in *Hefner*kerzen pro mm²) und der absoluten Temperatur von der Form

$$\log \text{nat.}\, H = C - \frac{K}{T},$$

in der C und K Konstante sind, für die *R. Lucas*[636]) aus Messungen von *Lummer* und *Pringsheim* am schwarzen Körper die Werte $C = 12{,}384$, $K = 26131$ ableitete, berechnete ebenderselbe, indem er nach *Ch. Fabry*[637]) für die Helligkeit eines mm² der Sonnenoberfläche $H = 2034$ HK ansetzte, die Temperatur der Sonnenoberfläche zu 5023°. Würde man in der *Rasch*schen Formel $H = 3190$ HK setzen, welchen Wert von *Holborn* und *Henning* auch *Ch. Nordmann*[638]) benutzt hat, so erhielte man mit $T = 6050$ fast genau den Wert, den man mit der Solarkonstante findet.

c) *Energieverteilung im Sonnenspektrum.* Zur Ermittlung der effektiven Sonnentemperatur aus der Energieverteilung im Sonnenspektrum kann entweder das *Wien*sche Verschiebungsgesetz in der *Planck*schen Form $\lambda_{\max} T = 2880$ (λ in μ) verwendet werden, oder man kann die an den einzelnen Wellenlängen beobachteten Intensitäten mit

---

632) Ebendort 16 (1902), p. 320; 21 (1905), p. 258.
633) Tokyo Obs. Ann. 1918, App. III.
634) Astr. Nachr. 183 (1909), p. 259.
635) Ann. Phys. 14 (1904), p. 194.
636) Astr. Nachr. 168 (1905), p. 58.
637) Paris C. R. 137 (1903), p. 973.
638) Paris C. R. 150 (1910), p. 448.

Hilfe der *Planck*schen oder der *Wien*schen Strahlungsformel ausgleichen und dadurch zu einer Temperaturbestimmung gelangen. Die Messung der Intensitäten erfolgt am besten durch Vergleich mit dem Spektrum des schwarzen Körpers unter eventueller Zwischenschaltung einer Standardlichtquelle als Verbindungsglied zur Überbrückung des großen Helligkeitsunterschiedes. Aus Messungen der spektralen Helligkeiten ist die Energiekurve des Sonnenspektrums ermittelt worden von *G. Müller* und *E. Kron*[639]) gelegentlich ihrer Untersuchungen über die atmosphärische Extinktion auf Teneriffa, weiter von *F. Kurlbaum*[640]) und photographisch von *J. Wilsing.*[641]) Derartige Untersuchungen werden durch die verschiedene Färbung der zum Vergleich kommenden Stellen des Spektrums und bei Verwendung einer Zwischenlichtquelle durch die Farbe des letzteren stark erschwert. *D. W. Murphy*[642]) hat versucht, diese Schwierigkeiten dadurch zu umgehen, daß er das ganze Spektrum in lauter schmale Streifen teilte und immer das Intensitätsverhältnis zwischen je zwei benachbarten und daher ziemlich gleich gefärbten Streifen ermittelte. Das Produkt der Intensitätsverhältnisse $\frac{i_1}{i_2}, \frac{i_2}{i_3}, \cdots, \frac{i_{n-1}}{i_n}$ ergab dann mit $\frac{i_1}{i_n}$ das Intensitätsverhältnis zweier beliebig weit voneinander entfernter und daher beliebig verschieden gefärbter Spektralteile. Daß die von ihm so gefundene Sonnentemperatur (5650^0) offenbar zu niedrig ist, hat seinen Grund wohl darin, daß die Beobachtungsfehler bei dieser Methode wegen Multiplikation mit den Intensitätsverhältnissen großen Einfluß auf den Schlußwert gewinnen können. Die genauesten Resultate ergeben die Messungen mit dem Bolometer oder Bolographen. Solche Messungen wurden zuerst von *S. P. Langley*[643]) vorgenommen und später auch von *C. G. Abbot* und seinen Mitarbeitern[644]), von *A. Amerio*[645]) und von *J. Wilsing*[646]) ausgeführt. Es sei noch erwähnt, daß auch ein Versuch von *Ch. Fabry* und *H. Buisson*[647]), die Spektren der Sonne und einer Bogenlampe (angenommene Temperatur 3750^0) miteinander zu vergleichen, einen mit den anderen Bestimmungen gut zusammen-

639) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 22 (1913), Nr. 64.

640) Berlin Sitzber. 1911, p. 541.

641) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 22 (1913), Nr. 66.

642) Astroph. Journ. 11 (1911), p. 220.

643) Wied. Ann. 19 (1883), p. 226, 384; 22 (1884), p. 598; Smithson. Inst. Obs. Ann. 1 (1900); Phil. Mag. (6) 2 (1901), p. 119.

644) Smith. Inst. Obs. Ann. 2 (1908).

645) Mem. Ac. dei Lyncei (5) 10 (1914), p. 321.

646) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 23 (1917), Nr. 72.

647) Paris C. R. 175 (1922), p. 156.

passenden Wert der Sonnentemperatur geliefert hat. Die einzelnen Resultate sind die folgenden:

C. G. Abbot und *F. E. Fowle* (bolometrisch), Astroph. Journ. 29 (1909), p. 281; 34 (1911), p. 197 . .	$T = 6000^0$–6200^0
F. Kurlbaum (visuell), $\lambda_{max} = 0{,}452\,\mu$	6370^0
G. Müller und *E. Kron* (visuell) mit *Plancks* Formel	6330^0
G. Müller und *E. Kron* (visuell) mit $\lambda_{max} = 0{,}468\,\mu$	6150^0
J. Wilsing (photographisch), $\lambda_{max} = 0{,}482\,\mu$ . .	5980^0
A. Amerio (bolometrisch)	6000^0
J. Wilsing (bolometrisch)	5900^0
Ch. Fabry und *H. Buisson*	6000^0
Mittelwert:	6100^0

Gelegentlich dieser Untersuchungen hat sich gezeigt, daß das Energiespektrum der Sonne durch die *Planck*sche Formel keineswegs glatt darstellbar ist, daß also merkliche Abweichungen der Sonnenstrahlung von der schwarzen Strahlung vorhanden sind. In einer Diskussion der von *Abbot* in den Jahren 1905—1912 ausgeführten bolometrischen Messungen zeigte *A. Defant*[648]), daß die zwischen 3500—7500 Å.E. gelegene Sonnenstrahlung bei Rücksichtnahme auf die Extinktionswirkungen von Erd- und Sonnenatmosphäre stärker ist, als einem schwarzen Körper von der Temperatur $T = 7000^0$ entsprechen würde[649]), und erst vor wenigen Jahren fanden neuerlich *C. G. Abbot*, *F. E. Fowle* und *L. B. Aldrich*[650]) in naher Übereinstimmung damit, daß die wahre Energiekurve der Sonnenstrahlung im sichtbaren Teil des Spektrums über, im Ultraviolett dagegen unter der Energiekurve eines schwarzen Strahlers von $T = 6000^0$ liege. Demnach zeigt das Sonnenspektrum im Ultraviolett eine ähnliche Depression der Strahlung, wie sie von *A. Brill*[651]) auch in den Fixsternspektren gefunden worden ist. *J. Wilsing*[652]), der diese Abweichungen in seinen Messungen am Sonnenspektrum ebenfalls bemerkte, folgert in ähnlicher Weise, wie dies bereits aus der Diskussion der Extinktionsverhältnisse in der Sonnenatmosphäre geschehen ist (s. oben p. 658), daß Mischstrahlung verschieden heißer Schichten vorliege und daß den obersten Schichten eine Temperatur von nur etwa 5400^0 zukommen dürfte, während die Temperatur der untersten an der Strahlung noch beteiligten Photo-

648) Wien Sitzber. 112 (1914), p. 1135.

649) Vgl. hierzu auch *H. Groot*, Amsterdam Koningl. Acad. Proc. 22 (1919), p. 89.

650) Smithson. Miscell. Coll. 74 (1923).

651) Astr. Nachr. 218 (1923), p. 209; 219 (1923), p. 21, 353; 223 (1924), p. 105; 225 (1925), p. 161.

652) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 23 (1917), Nr. 72.

sphärenschichten mit über 7000° zu bemessen wäre. *Ch. Gallissot*[653]) wies außerdem darauf hin, daß die Strahlen vom Sonnenrand aus höheren, also kühleren Schichten stammen als die Strahlen von der Mitte der Sonnenscheibe, so daß nicht nur Schichtung nach der Tiefe, sondern auch im Sinne Mitte—Rand zur Wirkung komme. Schließlich meint *R. Lundblad*[654]), daß auch noch Strahlen verschiedener Wellenlängen in verschiedenen Tiefen ihren Ursprung nehmen und daß insbesondere grüne und blaue Strahlen aus tieferen Schichten stammen als das violette und infrarote Licht.[655]) Selbst dann, wenn bei allen einzelnen Strahlenarten rein schwarze Strahlung vorliegen würde, wäre demnach die Gesamtstrahlung doch so komplexer Natur, daß eine genaue Darstellnng derselben durch die *Planck*sche Formel kaum erwartet werden darf. Eine Hauptrolle spielt aber nach *H. H. Plaskett*[656]) die störende Wirkung der Absorptionslinien. Derselbe konnte zeigen, daß sich bei sorgfältiger Auswahl tunlichst linienfreier Stellen des Spektrums der ganze Wellenlängenbereich 4000—6700 Å.E. doch noch relativ gut an die *Planck*sche Formel anschließen läßt. Er weist auch darauf hin, daß aus dem gleichen Grund auch die mit der Solarkonstante ermittelten Temperaturwerte zu niedrig ausfallen müssen, da ja das *Stefan-Boltzmann*sche Gesetz für einen kontinuierlichen Strahler gilt, nicht aber für einen Strahler, der ein *Fraunhofer*spektrum aussendet. Ähnliche Erfahrungen machte übrigens auch *A. Brill* bei seiner Untersuchung der Energieverteilung in Sternspektren. Aus Messungen von *H. Rosenberg*[657]) folgerte er, daß die „Farbtemperatur" der Sonne, also die Temperatur eines schwarzen Strahlers, der im sichtbaren Bereich des Spektrums die gleiche Energieverteilung ergibt, bei

$$T_{\odot} = 6650^{0}$$

zu suchen sei.[658]) Ob sich Granulation und reine Photosphäre bei photometrischen Messungen im Sonnenspektrum jemals werden voneinander trennen lassen, wie dies *W. Anderson*[659]) neuerlich für auch noch wünschenswert hält, erscheint zweifelhaft.

Die von der absorbierenden Wirkung der Erdatmosphäre befreite spektrale Energiekurve des Sonnenspektrums bedarf natürlich noch

653) Journ. de Phys. et le Radium 4 (1923), p. 176.

654) Astroph. Journ. 58 (1923), p. 113.

655) Vgl. dazu auch die Bemerkungen von *H. Faxén*, Astr. Nachr. 224 (1925), p. 241.

656) Domin. Obs. Publ. II (1923), Nr. 12, p. 213.

657) Acad. Leop. Car. Abh. 101, Nr. 2.

658) Astr. Nachr. 219 (1923), p. 358.

659) Astr. Nachr. 215 (1922), p. 277.

einer weiteren Korrektion wegen der in der Sonnenatmosphäre stattfindenden Extinktion, wenn die Temperatur der Photosphäre ermittelt werden soll. Bleibt man bei der Vorstellung, daß die beobachtete Strahlung wenigstens größtenteils von der Photosphäre allein herrührt, so geben die visuellen Messungen von *H. C. Vogel*[660]) sowie die spektralbolometrischen Messungen von *F. W. Very*[661]) und *C. G. Abbot*[662]) über die Abnahme der Helligkeit nach dem Sonnenrande, die bereits oben zur Rückbeziehung des Wertes der Solarkonstante auf die Sonnenphotosphäre benutzt worden sind, eine Möglichkeit, die Transmissionskoeffizienten p_λ zu ermitteln. Die von *H. Seeliger*[663]) aus *Vogels* Messungen, von *Very* aus seinen eigenen Daten und von *H. Biscoe*[664]) aus den *Abbot*schen Beobachtungen gewonnenen Werte gibt die folgende Tafel:

	Seeliger	*Very*	*Biscoe*
$\lambda = 0{,}3\,\mu$	$p_\lambda = 0{,}44$	—	—
0,4	0,53	0,185	0,413
0,5	0,62	0,295	0,542
0,6	0,70	0,390	0,635
0,7	0,79	0,425	0,683
0,8	0,88	0,458	0,718
0,9	0,97	—	0,744
1,0	—	0,540	0,769
1,2	—	0,579	0,795
1,6	—	—	0,840

Die Einzelreihen stimmen untereinander keineswegs derart überein, daß man erwarten könnte, mit ihrer Hilfe einen sicheren Schluß auf die Photosphärentemperatur ziehen zu dürfen. Wie stark sich aber alle p_λ-Werte noch weiter ändern können, wenn man die Eigenstrahlung der absorbierenden Schichten mitberücksichtigt, zeigt eine Bearbeitung der *Very*schen Beobachtungen durch *A. Schuster*[665]), der unter dieser Voraussetzung statt der obigen von *Very* gegebenen Zahlen die Werte

$\lambda =$	$0{,}416\,\mu$,	$0{,}468\,\mu$,	$0{,}550\,\mu$,	$0{,}615\,\mu$,	$0{,}781\,\mu$,	$1{,}010\,\mu$	$1{,}500\,\mu$
$p_\lambda =$	0,315	0,360	0,442	0,312	0,355	0,366	0,581

660) Berlin Sitzber. 1877, p. 104.

661) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 73.

662) Astroph. Obs. Smithson. Inst. Ann. 3 (1913), p. 159.

663) München Sitzber. 21 (1892).

664) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 202.

665) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 322.

ermittelt. Sicher ist danach nur, daß bei Berücksichtigung der Extinktion in der Sonnenatmosphäre für die Temperatur $T_{\text{Phot.}}$ der Photosphäre ein wesentlich höherer Betrag folgen wird, als oben für die effektive Sonnentemperatur gefunden worden ist. Nach *A. Amerio*[666]) dürfte etwa anzusetzen sein: $T_{\text{Phot.}} = 6830^0$, während ein von *N. Kosirev* und *V. Ambazumian*[667]) mit 6390^0 gegebener Wert wohl zu niedrig sein dürfte.

Die spektrale Energiekurve des Sonnenspektrums läßt sich übrigens in eine Beziehung zur Solarkonstante bringen, die es gestattet, auch die Solarkonstante, und zwar unter Berücksichtigung der p_λ-Werte mit der *Planck*schen Gleichung auszuwerten. Nennt man die Strahlung der Sonne pro Sekunde und Flächeneinheit J, so bestehen die Beziehungen

$$S = 60\,\pi J \sin^2\frac{\psi}{2} \quad \text{oder} \quad J = \frac{S}{60\,\pi \sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

Konstruiert man über λ als Abszisse und den $J_{\lambda, T}$ als Ordinate die beobachtete und eventuell für Absorption in der Sonnenatmosphäre korrigierte Energiekurve, so ist die gesamte über der Abszissenachse liegende Fläche F der Solarkonstante proportional, und wenn man die zwischen den Ordinaten λ und $\lambda + d\lambda$ liegende Kurvenfläche mit f bezeichnet, so ist die Strahlung S_λ an dieser Stelle

$$S_\lambda = S\frac{f}{F}$$

aus der Solarkonstante in Kalorien berechenbar. Es ist dann

$$J_\lambda = \frac{fS}{60\,\pi F \sin^2\frac{\psi}{2}} = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1},$$

wobei $C = 0{,}282 \cdot 10^{-12}\,\text{cal}\,\text{sec}^{-1}\,\text{cm}^{-2}$.

Auf diesem Wege erhält *F. Biske*[668]) mit dem allerdings etwas zu großen Wert $S = 2{,}22$ unter Benutzung der verschiedenen Reihen für p_λ Werte für die Temperatur der Photosphäre, die zwischen 7100^0 und 9100^0 liegen, während *H. Biscoe*[669]) mit den Werten von *Abbot* für p_λ findet: $T_{\text{Phot.}} = 7300^0 \pm 100^0$.

Nach der gleichen Methode hat übrigens schon *D. A. Goldhammer*[670]) allerdings ohne Berücksichtigung der Extinktion in der

666) Mem. Acad. dei Lyncei (5) 10 (1914), p. 321.
667) Astr. Nachr. 230 (1927), p. 89.
668) Astr. Nachr. 183 (1909), p. 202.
669) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 202.
670) Ann. Phys. (4) 25 (1908), p. 905.

Sonnenatmosphäre mit $S = 2{,}20$ die *Langley*sche Energiekurve des Sonnenspektrums aus dem Jahre 1881 ausgewertet und Temperaturen zwischen 5900° und 6155° gefunden. Da aber die für schwarze Strahlung geltenden Formeln bei Anwendung auf graue Strahler immer zu niedere T-Werte ergeben, schließt er dann in weiterer Rücksichtnahme auf die im infraroten Teil aufretenden starken Abweichungen, daß die Sonnentemperatur um etwa 50% höher und mit mindestens 10000° zu veranschlagen sei.

d) *Sonstige Bestimmungen. J. M. Schöberle*[671]) verwendete noch einmal das *Newton*sche Strahlungsgesetz und erhielt aus der im Fokus eines Hohlspiegels eintretenden Erhitzung natürlich wieder zu hohe Werte von 20000° bis 66000°. *F. W. Very*[672]) wendete auf *Schoeberles* Messungen dann das *Stefan-Stolzmann*sche Gesetz an und fand 6776°.

W. E. Wilson[673]) verglich die Sonnenstrahlung mit Hilfe des *Bois*schen Radiometers einmal mit der Strahlung eines glühenden Platindrahtes, dann später[674]) mit der aus einem erhitzten Porzellan- oder Eisenrohr (schwarzer Körper) austretenden Strahlung und erhielt 8700° bis 10000° bzw. 6590°.

Ch. Féry und *G. Millochau*[675]) maßen die Strahlung eines elektrischen Ofens von 1673° und des positiven Kraters einer Bogenlampe von 3773° auf elektrischem Wege und fanden zwischen Temperatur T und Galvanometerausschlag δ die Beziehung $T = 0{,}705 \sqrt[4]{\delta}$. Diese letztere, auf ähnliche Messungen am fokalen Sonnenbild zu Chamounix, Meudon und auf dem Mont Blanc angewendet, ergab unter Mitberücksichtigung der Wirkung der Sonnenatmosphäre $T_{\odot} = 6100°$.

G. A. Shook[676]) versuchte die Helligkeit der Sonnenoberfläche unter Vorschaltung von Farbenfiltern dadurch zu messen, daß er die Helligkeit des fokalen Sonnenbildes so lange meßbar abschwächte, bis der Faden einer Glühlampe bekannter Temperatur vor dem Sonnenbild verschwand. Er fand aber so stark differente Werte, daß er auf starke Abweichungen von der schwarzen Strahlung schloß, während *Ch. Nordmann*[677]) einige Jahre vorher ebenfalls bei Messungen mit Farbenfiltern zum gegenteiligen Resultat gelangt war. *R. T. Birge*[578]) fand,

671) Science N. S. 26 (1907), p. 718, 877.
672) Ebendort 27 (1908), p. 267.
673) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 80.
674) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 62 (1902), App. 2.
675) Paris C. R. 143 (1906), p. 550.
676) Astroph. Journ. 39 (1914), p. 277.
677) Paris C. R. 150 (1910), p. 448.
678) Phys. Rev. (2) 19 (1922), p. 439.

daß die Intensitätsverteilung in den Banden chemischer Verbindungen von der Temperatur abhängig sei. Aus der Intensitätsverteilung in den Cyanbanden des Sonnenspektrums ergab sich ihm aber für die Temperatur der umkehrenden Schicht der zu niedrige Betrag von 4700°.

17. Die spektroskopische Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. Bei Ermittlung der Rotationselemente der Sonne mit Hilfe der Sonnenflecken hat sich ergeben, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne vom Äquator gegen höhere Breiten zu stetig abnimmt. Da nun mit den Sonnenflecken nur die in der Fleckenzone gelegenen Gebiete bis etwa 35° nördlicher und südlicher heliographischer Breite untersucht werden können, war man schon frühzeitig bestrebt, die Sonnenrotation auch spektroskopisch aus den Verschiebungen der Spektrallinien am Sonnenrand nachzuweisen und bis in höhere Breiten hinauf zu erforschen. Von früheren Beobachtern wären zu erwähnen: *H. C. Vogel*[679]), *C. A. Young*[680]), der für die Rotationsgeschwindigkeit am Sonnenäquator bereits den nur um 0,3 km zu großen Wert von 2,29 km $\sec^{-1}$ erhielt, weiter *S. P. Langley*[681]), *H. Crew*[682]) und *A. Cornu.*[683]) Letzterer bemerkte bei dieser Gelegenheit, daß die Eisenlinie 5882 Å.E. teilweise durch eine an den Linienverschiebungen nicht teilnehmende tellurische Linie verdeckt werde. Später sind mit einem Gitterspektrographen umfangreiche Messungen von *N. C. Dunér*[684]) ausgeführt worden, der auf p. 47 seiner ersten Publikation auch die Korrektionen angab, die an die beobachteten Geschwindigkeitswerte angebracht werden müssen, um sie vom Einfluß der Bewegung des Erdortes und der Neigung der Rotationsachse der Sonne zu befreien. Die Bearbeitung dieser von 15° zu 15° bis 75° heliographischer Breite durchgeführten Beobachtungen durch *Dunér* und *Bergstrand* hat die Formeln geliefert:

$$\textit{Dunér} \qquad \xi = 14{,}81^0 - 4{,}21^0 \sin^2\varphi,$$
$$\textit{Bergstrand} \qquad \xi = 14{,}57^0 - 5{,}35^0 \sin^2\varphi;$$

in denen ξ die Winkelgeschwindigkeit der Sonne pro Tag und φ die heliographische Breite bedeuten. Fast gleichzeitig sprach *J. Halm*[685])

679) Astr. Nachr. 78 (1871), p. 250.

680) Amer. Journ. (3) 12 (1876), p. 323; Paris C. R. 84 (1877), p. 1145.

681) Amer. Journ. (3) 14 (1877), p. 140.

682) Haverford Coll. obs. Publ. 1889; Brit. Assoc. Rep. 1887; Amer. Journ. (3) 35 (1888), p. 151.

683) Bulletin astronomique 1 (1884), p. 74.

684) Nova acta acad. Upsaliensis (3) 4 (1891), Nr. 2; (4) 1 (1907), Nr. 6; Astr. Nachr. 167 (1905), p. 167.

685) Edinburg Trans. Roy. Soc. 41 (1904), Part 1, Nr. 5; Edinburg Roy. Soc. Proc. 26 (1906), p. 76; Astr. Nachr. 173 (1907), p. 287.

bereits die Vermutung aus, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne Schwankungen aufweise. Um eine möglichst sichere Messung zu verbürgen, hatte er bei seinen Beobachtungen die beiden gegenüberliegenden Sonnenränder im Heliometer nebeneinandergebracht. Schließlich bestimmte damals auch noch *A. Belopolsky*[686]) die lineare Rotationsgeschwindigkeit am Sonnenäquator zu 2,064 km $\pm$ 0,052, indem er zur Vermeidung systematischer Fehler Sonnenäquator und Sonnenpole miteinander verglich.

Bedeutungsvoll sind die Beobachtungen von *W. S. Adams*[687]) aus den Jahren 1906—1908 geworden, bei denen die beiden Sonnenränder durch totalreflektierende Prismen nebeneinandergebracht waren und auch darauf Rücksicht genommen wurde, daß ja eigentlich nie die Ränder selbst, sondern immer nur Punkte beobachtet werden, die innerhalb der Sonnenscheibe, ein wenig vom Rande gegen die Mitte zu verschoben, liegen. *Adams* hatte neben Linien der *G*-Gruppe und der violetten Cyanbande auch noch eine größere Anzahl mittelstarker Linien der *Rowland*schen „Preliminary table" im Wellenlängenbereich 4200—4300 Å.E. benutzt und bemerkt[688]), daß die verschiedenen Linien schwach verschiedene Werte ergaben, und daß auch in der Nähe von Randflecken Störungen auftraten, die offenbar durch Bewegungen der Fleckengase hervorgerufen werden. Kurz danach wurden diese Eigentümlichkeiten auch von *J. Evershed* und *T. Royds*[689]) bestätigt. Es existiert also offenbar auch ein Höheneffekt, demzufolge Linien aus höheren Schichten im allgemeinen größere Geschwindigkeiten ergeben als Linien, deren Ursprung tiefer liegt.[690]) Außerdem aber zeigten sich Unstimmigkeiten, wie z. B. an der Titanlinie 4290, die nach Flashaufnahmen in etwa 1300 km Höhe entsteht und nach *W. S. Adams*[691]) einen auffallend niederen Geschwindigkeitswert liefert. Für die verschiedenen Schichten der Sonnenatmosphäre haben *W. S. Adams* und *J. B. Lasby*[692]) folgende Geschwindigkeitsformeln berechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{umkehr. Schicht} & \xi = 11{,}04^0 + 3{,}50^0 \sin^2\varphi, \\ \text{Ca (4227)} & \xi = 12{,}5^0 + 2{,}4^0 \sin^2\varphi, \\ H_a & \xi = 13{,}6^0 + 1{,}4^0 \sin^2\varphi. \end{array}$$

686) Pulkowa, Mitt. Nicolai-Hauptsternw. 1 (1906), Nr. 7.

687) Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 138 (1911).

688) Astr. Journ. 29 (1908), p. 110.

689) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 554.

690) Vgl. hierzu auch *J. Evershed,* ebendort 85 (1925), p. 607.

691) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 203.

692) Astroph. Journ. 27 (1908), p. 213; Mt. Wilson Solar Obs. Papers 1 (1911), Part 1.

Übrigens sind ähnliche bei verschiedenen Linien auftretende Unterschiede auch noch von *A. Perot*[693]) bei Interferometermessungen und von *H. Deslandres*[694]) konstatiert worden, welch letzterer mit den den höchsten Schichten angehörenden Linien H_3 und K_3 des Ca^+ ebenfalls zu niedere Geschwindigkeiten erhielt. Nach *F. Schlesinger*[695]) ergeben sich auch bei den verschiedenen Elementen typische Unterschiede.

Zur Klärung dieser Widersprüche und um gleichzeitig eine durchgreifende Untersuchung der Sonnenrotation auf spektroskopischem Wege zu ermöglichen, wurden auf der vierten Versammlung der internationalen Union für Sonnenforschung Richtlinien für die Behandlung des Problems ausgearbeitet[696]), in denen auch die Verwendung des ganzen Spektralgebietes 3800—6350 Å.E. verlangt wurde. Die Durchführung des Programms wurde von verschiedenen Beobachtern, deren jeder bestimmte Zonen des Spektrums zugewiesen erhielt, übernommen, und da sich auch noch andere Beobachter mit beteiligten, stand bald ein reichhaltiges Beobachtungsmaterial zur Verfügung, das bei Einbeziehung der eingehenderen früheren Arbeiten von 1900 bis etwa zum Jahre 1917 reichte und somit fast zwei volle Fleckenperioden umspannte. Die von den einzelnen Beobachtern gefundenen Werte für die lineare Geschwindigkeit v am Sonnenäquator nebst Angaben über Spektralgebiet und Jahr der Beobachtung sind in der folgenden Tabelle (p. 669) zusammengestellt, die teilweise einem Artikel von *G. Abetti* über denselben Gegenstand im „Handbuch der Astrophysik", Bd. 4 (1929), p. 159, entnommen worden ist.

Aus der Zusammenstellung scheint sich zu ergeben, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne im Fleckenmaximum im Jahre 1906 einen Maximalwert angenommen hatte, um dann abzufallen und den erreichten niedrigeren Wert noch im nächsten Fleckenmaximum im Jahre 1917 unverändert beizubehalten. Spätere Beobachtungen von *Ch. E. St. John*[697]) im Jahre 1924 scheinen sogar auf eine noch weitere Abnahme hinzudeuten. In allen Bestimmungen stecken sicher aber auch systematische Fehler, deren Vorhandensein bereits *J. S. Plaskett* und *R. E. De Lury*[698]), dann nochmals *J. S. Plaskett*[699]) und schließlich *Ch. E. St. John*[700]) aus dem Studium der von mehreren Beobachtern

693) Paris C. R. 147 (1908), p. 340.

694) Paris C. R. 146 (1908), p. 1235.

695) Astron. and Astroph. Soc. of America 11th meeting, 1910.

696) Transactions of Int. Union for Coop. in Solar Research 3 (1911), p. 83.

697) Pop. Astr. 33 (1925), p. 592.

698) Astroph. Journ. 37 (1913), p. 73.

699) Ebendort 42 (1915), p. 373.

700) Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 319.

Beobachter	Zeit	v_{km}	Spektral-bezirk	Quelle
Dunér	1900	2,08	6301—6302	Nova acta acad. Ups. (4) 1 (1907), Nr. 6
Halm	1904	2,04	6301—6302	Edinburg Roy. Soc. Trans. 41 (1905), Nr. 1; Astroph. Journ. 21 (1905), p. 385
Belopolsky . . .	1905	2,06		Pulkowa, Mitt. 1 (1906), Nr. 7
Adams.	1907—1908	2,06	4196—4294	Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 138 (1911)
Storey-Wilson .	1909	2,08	6280—6318	London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 674
J. S. Plaskett. .	1911	2,01	5506—5688	Astroph. Journ. 37 (1913), p. 73
„ . .	1911	2,02	4196—4291	Ebendort
De Lury. . . .	1911	1,97	5506—5688	Ebendort
Hubrecht. . . .	1911	1,86	4299—4400	London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1912), p. 5
J. S. Plaskett . .	1911—1913	2,01	4250—5600	Astroph. Journ. 42 (1915), p. 373
Schlesinger . . .	1912	2,00	4058—4276	Publ. Allegh.-Obs. 3 (1914), Nr. 13, p. 99
Evershed-Royds.	1913	1,95	3906—5624	London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 554
H. H. Plaskett .	1913	1,98	5574—5628	
Ware-St John .	1914	1,94	4123—4338	Pop. Astr. 27 (1919), p. 98
H. H. Plaskett .	1915	1,95	5900	Astroph. Journ. 43 (1916), p. 145
Ware-St. John .	1914—1918	1,94	5018—5316	Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 319
„ „ .	1916—1917	1,95	6265—6337	Publ. Am. Astron. Soc. 34th meeting 1925, p. 290

gleichzeitig benutzten Kontrollzonen des Spektrums nachgewiesen haben, und außerdem scheinen die von *S. Chevalier*[701]) aus Fackelbeobachtungen nachgewiesenen Unterschiede zwischen Nord- und Südhemisphäre der Sonne auch in den spektroskopischen Beobachtungen erkennbar zu sein, wie *J. B. Hubrecht*[702]), *F. Henroteau*[703]) und *R. E. De Lury* und *J. L. O'Connor*[704]) wahrscheinlich gemacht haben.

Kurzperiodische Schwankungen von nur etwa 0,15 km Amplitude und von etwa einem Monat Periode haben nach den Beobachtungen von *H. H. Plaskett*[705]) im Sommer 1915 stattgefunden. *R. E. De Lury*[706])

701) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 388.

702) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 611; Nature 93 (1914), p. 77.

703) Mem. Spettr. Ital. (2) 5 (1916), p. 193.

704) Pop. Astr. 27 (1919), p. 562.

705) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 145.

706) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 177, 178; 48 (1918), p. 195; Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 11 (1916), p. 23; 12 (1918), p. 437; Pop. Astr. 26 (1918), p. 691; siehe auch noch *E. R. De Lury* und *J. E. Bélanger*; Pop. Astr. 29 (1921), p. 652.

hat in mehreren Arbeiten auf die Möglichkeit störender Einwirkungen durch das diffuse Himmelslicht und besonders durch atmosphärischen Dunst hingewiesen und versucht, speziell die Wirkung des letzteren durch Korrelation der Geschwindigkeitsmessungen mit gleichzeitigen Messungen der Sonnenstrahlung nachzuweisen[707]) und durch Kombination von Messungen am Sonnenrand mit Beobachtungen auf der Mitte der Sonnenscheibe zu beseitigen[708]). *H. H. Plaskett*[709]), *C. G. Abbot*[710]) sowie *Ch. E. St. John* und *W. S. Adams*[711]) haben aber die Möglichkeit solcher Störungen durch die Erdatmosphäre teilweise aus der Diskussion ihrer eigenen Beobachtungen, teilweise durch die Überlegung abgelehnt, daß die beobachteten Differenzen ihrer Größe wegen kaum auf einen Einfluß der Erdatmosphäre allein zurückgeführt werden dürfen. Auch kleinere unregelmäßige Schwankungen, wie sie von *Ch. E. St. John* und *L. W. Ware*[712]) beobachtet worden sind, dürften eher auf Störungen in der umkehrenden Schicht selbst beruhen.

Ordnet man alle verwendeten Linien nach der Höhe ihres Entstehens in der Sonnenatmosphäre, so zeigen gleichzeitige Beobachtungen den schon früher erwähnten Höheneffekt, und zwar, wie von *G. Abetti*[713]) näher ausgeführt wird, im Sinne eines Ansteigens der Rotationsgeschwindigkeit und gleichzeitigen Abnehmens der äquatorialen Beschleunigung in der Höhenfolge: Umkehrende Schicht — Fackeln — Ca-Flocken — Flecken — λ 4227 (Ca) — H_α — K_3. Da die Flecken tiefer liegen als die umkehrende Schicht, bedeutet ihre Stellung in dieser Reihe also eine Störung im sonstigen normalen Verlauf des Höheneffektes. Nach *G. Abetti* (a. a. O.) könnte eine Erklärung hierfür in der Vorstellung von *J. Wilsing*[714]) gefunden werden, derzufolge die äquatoriale Beschleunigung der Sonnenrotation durch das Vorhandensein zweier mit verschiedener Geschwindigkeit rotierender Schichten zustande kommen soll, deren Trennungsfläche die umstehende Schicht bildet. Über und unter dieser Trennungsfläche müßte die gegenseitige Beeinflussung der beiden Schichten mit wachsender Distanz immer kleiner werden, und in gleichen Entfernungen von der umkehrenden Schicht würden somit oberhalb und unterhalb gleiche Effekte auftreten.

707) Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 12 (1918), p. 437; Pop. Astr. 26 (1918), p. 691
708) Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 12 (1918), p. 442; Pop. Astr. 26 (1918), p. 693.
709) Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 13 (1919), p. 391; Astroph. Journ. 45 (1917), p. 144.
710) Astroph. Journ. 45 (1917), p. 65.
711) Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 10 (1916), p. 553.
712) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 186; Pop. Astr. 27 (1919), p. 98.
713) Handbuch der Astrophysik Bd. IV (1929), p. 170.
714) Astroph. Journ. 3 (1896), p. 247.

Es sei hier nur nebenbei bemerkt, daß *R. E. De Lury* und *J. L. O'Connor*[715]) vor einigen Jahren versucht haben, durch Vergleichen von Beobachtungen, die im März und etwa ein halbes Jahr später, im Oktober angestellt worden sind, die in die Richtung zur Sonne fallende Komponente der Erdgeschwindigkeit im Kilometermaß zu ermitteln und daraus die Distanz Erde—Sonne zu bestimmen.

Daß die außerhalb der Sonnenchromosphäre befindliche Sonnenkorona an der Sonnenrotation teilnimmt und vermutlich eine noch größere lineare Rotationsgeschwindigkeit besitzt, ist schon von *H. Deslandres*[716]) und *W. W. Campbell*[717]) an Verschiebungen der grünen Koronalinie 5303 Å.E. (3,1 km) bemerkt worden. In einer Distanz von einer Bogenminute vom Sonnenrand weg fand später *J. Bosler*[718]) mit einer roten Linie bei 6374 Å.E. die Rotationsgeschwindigkeit der Korona zu 3,9 km $\sec^{-1}$. Radiale, also von der Sonne weg gerichtete Bewegungen in der Sonnenkorona im Betrag von ca. 30 km $\sec^{-1}$ sind an ungefähr 20′ vom Ost- und Westrand der Sonne entfernten Stellen während der totalen Sonnenfinsternis vom 21. Sept. 1922 von *J. H. Moore*[719]) beobachtet worden.

IV. Die Körper des Sonnensystems.

18. Der Mond. Da der Mond keine Atmosphäre besitzt, zeigen auch die *Fraunhofer*schen Linien im Spektrum des von der Mondoberfläche reflektierten Sonnenlichtes keinerlei Veränderungen gegenüber ihrem Aussehen im mittleren Sonnenspektrum. Dagegen haben *J. Wilsing* und *J. Scheiner*[720]) mit Hilfe von Bestimmungen der Albedo verschiedener Stellen im mare imbrium und mare tranquillitatis für einzelne Spektralbezirke gezeigt, daß die Reflexionsfähigkeit der Mondoberfläche nicht für alle Wellenlängen gleich ist und etwa der Reflexionsfähigkeit von Vesuvasche oder Flußsand entspricht. Die Energieverteilung im Spektrum des Mondlichtes ist also nicht gleich der Energieverteilung im mittleren Sonnenspektrum. *J. Wilsing*[721]) fand bei einer weiteren Untersuchung, daß der Energieverlauf im Spektrum des von hellen und dunklen Stellen der Mondoberfläche kommenden Lichtes ziemlich gut darstellbar ist durch die Energiekurve eines

715) Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 16 (1922), p. 102.
716) Paris Bureau d. long. Ann. 7 (1896).
717) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 189.
718) Paris C. R. 160 (1915), p. 434.
719) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 333.
720) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 20 (1909), Nr. 61.
721) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 24 (1921), Nr. 77.

schwarzen Körpers von der absoluten Temperatur von 4300° bzw. 4700°. Demnach ist das Mondlicht im ganzen röter als das Sonnenlicht und die dunklen Stellen sind weniger intensiv gefärbt, also weißer als die hellen Partien. Da *Wilsing* auf dem gleichen Wege für das Jupiterspektrum $T = 4800^{\circ}$—5000° und für Mars $T = 2800$—2900° findet, hat das Mondlicht nahezu die Farbe des Jupiterlichtes, während Mars bedeutend röter leuchtet als der Mond. Ähnliche Messungen der Albedo verschiedener Stellen der Mondoberfläche und Vergleiche derselben mit *Wilsings* Resultaten an irdischen Substanzen sind von *N. Barabascheff*[722]) erst kürzlich wieder vorgenommen worden.

Aufschlüsse über die mineralische Beschaffenheit der Oberfläche des Mondes können auch aus Aufnahmen mit Farbenfiltern gewonnen werden. Mit einem nur für Ultraviolett durchlässigen Silberfilm auf Quarzplatte fand z. B. *R. W. Wood*[723]) in der Nähe des Kraters Aristarch ein dunkles Fleckchen, das bei visueller Beobachtung nicht gesehen werden kann. Bei späteren Versuchen, die er mit vulkanischen Tuffen vornahm[724]), bemerkte er, daß ähnliche Erscheinungen durch einen ganz schwachen, visuell überhaupt noch nicht nachweisbaren Belag von Schwefel hervorgerufen werden. Bald danach konnten *A. Miethe* und *B. Seegert*[725]) die Beobachtung *Woods* verifizieren und außerdem zeigen, daß auch die sogenannten Mondmeere merklich wenig Ultraviolett reflektieren.

Es ist klar, daß das Licht des total verfinsterten Mondes, das von in der Erdatmosphäre abgelenkten Sonnenstrahlen herrührt, infolge des langen Weges derselben in unserer Atmosphäre durch die absorbierende Wirkung der letzteren stark verändert erscheint. Aufnahmen mit Filtern von *C. D. Shane*[726]) und Aufnahmen des Spektrums von *J. H. Moore* und *L. A. Brigham*[727]) haben in Übereinstimmung mit den bekannten absorbierenden Eigenschaften der Erdatmosphäre eine starke Schwächung im Blau und Verbreiterung und Verstärkung der tellurischen Linien erkennen lassen.[727a])

19. Die Planeten. Die spektroskopischen Beobachtungen der Planeten dienen hauptsächlich dem Zweck, das Vorhandensein einer At-

722) Russian Astron. Journ. 1 (1925), p. 3; Astr. Nachr. 229 (1925), p. 289.

723) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910), p. 226; Pop. Astr. 18 (1910), p. 67.

724) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 75.

725) Astr. Nachr. 188 (1911), p. 9, 239, 371.

726) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 226.

727) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 223.

727a) Siehe auch bei *J. Hopmann,* Colorimetrie der Gestirne, Nr. 30, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

mosphäre des betreffenden Planeten nachzuweisen und eventuell auf deren Zusammensetzung zu schließen. Die Ergebnisse der bezüglichen Beobachtungen an den einzelnen Planeten seien getrennt behandelt.[727b]

Merkur. Das Spektrum des Merkur wurde von *H. C. Vogel*[728] in Bothkamp untersucht. Es gleicht danach völlig dem Sonnenspektrum, nur zeigte sich eine schwache Verstärkung der sogenannten tellurischen Linien. Da aber die Albedo des Merkur fast völlig gleich ist der des Mondes (Merkur: 0,069, Mond: 0,073) und somit angenommen werden muß, daß die Merkuroberfläche ähnlich geartet ist wie die unseres Mondes und daß also Merkur ebenso wie unser Mond keinerlei Lufthülle besitzt, ist die beobachtete Verstärkung der tellurischen Linien im Merkurspektrum wohl lediglich auf den bei dem tiefen Stand des Planeten am Horizont verstärkten Einfluß unserer eigenen Atmosphäre zurückzuführen. Für die Gleichheit der Oberflächengestaltung von Mond und Merkur spricht auch noch der Umstand, daß *P. Salet*[729] bei Merkur keinerlei Polarisation des Lichtes fand, wie dies bei einer von Gebirgen durchzogenen Oberfläche eben nicht anders zu erwarten war.

Venus. Ob im Venusspektrum eigene Venuslinien auftreten oder sonst eine Verstärkung der tellurischen Linien zu bemerken ist, wurde vielfach untersucht. *W. Huggins*[730] fand die *B*-Gruppe kräftiger, *A. Secchi*[731] und *H. C. Vogel*[732] glaubten auch eine Verstärkung anderer tellurischer Linien bemerkt zu haben, so daß *J. Scheiner*[733] zum Schluß kam, die Venusatmosphäre übe eine ähnliche absorbierende Wirkung aus wie die unsere. Bei einer eingehenden Untersuchung haben aber neuerlich *Ch. E. St. John* und *S. B. Nicholson*[734] nicht nur keine Spur von Venuslinien finden, sondern weiter[735] auch noch zeigen können, daß auch die in unserer Atmosphäre entstehenden Linien des Sauerstoffs und Wasserdampfes keinerlei Verstärkung aufweisen. Zum gleichen Ergebnis kam auch *V. M. Slipher*[736], der daraus schloß, daß die Reflexion des Sonnenlichtes an der Venusatmosphäre bereits in den obersten Schichten erfolge, während sich der Wasserdampf eventuell

727b) Siehe auch bei *J. Hopmann*, a. a. O. Nr. 31.

728) Untersuchungen über die Spektra der Planeten. Leipzig 1874.

729) Paris C. R. 143 (1906), p. 1125.

730) London Roy. Soc. Phil. Trans. 1864, p. 423.

731) Memoril della Soc. degli Spett. Ital. 1 (1867), p. 38; 2 (1876), p. 25.

732) a. a. O.

733) Die Spektralanalyse der Gestirne, Leipzig 1890, W. Engelmann, p. 212.

734) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 208.

735) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 38; Pop. Astr. 30 (1922), p. 229.

736) Lowell Obs. Bull. 3 (1922), Nr. 84, p. 85.

in den unteren, an der Reflexion nicht mehr beteiligten Schichten befinden könnte. Da *E. Pettit* und *S. B. Nicholson*[737]) dazu noch fanden, daß auch die infrarote Venusstrahlung keine Unterschiede gegen die infrarote Strahlung des Mondes zeigt, folgt neuerlich, daß die die Venusoberfläche einhüllende Wolkendecke offenbar so hoch liegen muß, daß sich darüber nur mehr wenig Atmosphäre befinden kann. Ob diese Wolkendecke anders geartet ist wie unsere Wolken, also z. B. nur aus Dunstschichten besteht, wie *J. Evershed*[738]) daraus folgert, daß der blauviolette Teil im Venusspektrum verhältnismäßig weniger kräftig ist als im Spektrum unserer von der Sonne hell beleuchteten Kumulusränder, läßt sich wohl schwer entscheiden, da ja das Sonnenlicht die Venusatmosphäre zweimal durchlaufen muß. *A W. Clayden*[739]) glaubt, daß wegen der stärkeren Sonnenstrahlung in der Venusatmosphäre überhaupt stärkere Ionisation und erhöhte Allgemeinabsorption stattfinde, und da *W. H. Wright*[740]) bemerkte, daß auf Aufnahmen mit Ultraviolettfiltern Einzelheiten an der Wolkenhülle der Venus zu sehen sind, die sich in infrarotem Licht nicht zeigen, würde vielleicht noch dazu folgen, daß der Ionisationsgrad in den ultravioletten Strahlen etwas kräftiger ist als im visuellen Spektralbereich.

Mars. Da *W. Huggins*[741]), *H. C. Vogel*[742]), *J. Janssen*[743]) und *E. W. Maunder*[744]) fanden, daß im Marsspektrum eine stärkere Absorption im Violett sowie eine Verstärkung der tellurischen Linien zu beobachten seien, schien das Vorhandensein von Wasserdampf in der Marsatmosphäre zunächst sichergestellt zu sein. Später bemerkte aber wieder *W. W. Campbell*[745]) überhaupt keinerlei Andeutungen einer verstärkten tellurischen Absorption im Spektrum des Mars, und zum gleichen Ergebnis gelangte er außerdem noch beim Vergleich von Marslicht und Mondlicht auf dem 4420 m hohen Mt. Witney, wo sich das tellurische *a*-Band in beiden Spektren in ganz gleicher Stärke zeigte. Da sich die Eigenlinien des Mars und die tellurischen Linien bei gleicher Konstitution der Atmosphären von Erde und Mars auf-

737) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 194.

738) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 257; 80 (1919), p. 7.

739) Ebendort 79 (1919), p. 507.

740) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 220.

741) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 27 (1867), März.

742) a. a. O.

743) Paris C. R. 64 (1867). p. 1304.

744) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 38 (1877), Nov.

745) Publ. Astr. Soc. Pac. 6 (1894), p. 229; Science N. S. 29 (1909), p. 500; 30 (1909), p. 474; Lick Obs. Bull. (1909), Nr. 169.

einanderlagern müssen, versuchten *P. Lowell* und *V. M. Slipher*[746]) sowie *W. W. Campbell* und *S. Albrecht*[747]) eine Trennung eventueller Marslinien von den Erdlinien dadurch herbeizuführen, daß sie die Beobachtungen zu Zeiten anstellten, wo die Geschwindigkeit des Mars relativ zur Erde besonders groß war, also die Marslinien stark verschoben erscheinen mußten. Ein sicheres Resultat ließ sich aber trotz dieser Vorsichtsmaßregeln nicht erzielen.

Mit der Frage nach dem Vorhandensein von O und H_2O in der Marsatmosphäre haben sich dann insbesondere die Astronomen des Lowell-Observatoriums befaßt. Acht Aufnahmen von *V. M. Slipher*[748]) zeigten nun doch ganz einwandfrei eine geringfügige Verstärkung des *a*-Bandes im Marsspektrum gegenüber dem Spektrum des Mondes, und *F. W. Very*[749]) berechnete dann aus diesen Aufnahmen einen Verstärkungsfaktor für das *a*-Band von 1,224 und für die *B*-Gruppe von 1,148, und weitere Aufnahmen haben diese geringe Verstärkung bestätigt.[750]) Nach eingehenden neueren Arbeiten von *W. S. Adams* und *Ch. E. St. John*[751]), bei denen das Spektrum mit dem selbstregistrierenden Photometer untersucht wurde, sind die am Lowell-Observatorium beobachteten, ganz geringfügigen Veränderungen wirklich reeller Natur, und es wäre anzunehmen, daß in der Marsatmosphäre etwa 5% Wasserdampf und 15% Sauerstoff von den für unsere Atmosphäre geltenden Beträgen vorhanden sind. Fast die gleichen Prozentsätze haben erst kürzlich wieder *W. S. Adams* und *Ch. E. St. John*[752]) aus weiteren Aufnahmen ableiten können, und man darf somit aus dem äußerst geringen Wasserdampfgehalt der Marsatmosphäre schließen, daß auf Mars eine Art „Wüstenklima" herrscht.[753]) Jedenfalls besitzt die Marsatmosphäre überhaupt nur geringe Dichte, und sie dürfte auch eine ähnliche lichtzerstreuende Wirkung ausüben wie unsere Atmosphäre, da *G. A. Tikhoff*[754]) mit Rotfilter alle Einzelheiten der Marsscheibe bis zum Rand beobachten konnte, mit Grünfilter aber nicht mehr. Daß auch Wolken- oder eigentlich Dunstbildungen vorkommen, fol-

---

746) Lowell Obs. Bull. 17 (1905); Nature 86 (1911), p. 110.

747) Lick Obs. Bull. Nr. 180 (1910).

748) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 397; Paris C. R. 146 (1908), p. 574.

749) Lowell Obs. Bull. 36 (1909); Astr. Nachr. 180 (1909), p. 247.

750) Astr. Nachr. 199 (1914), p. 153.

751) Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1924), p. 52.

752) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 133.

753) Eine Zusammenstellung der älteren spektroskopischen Literatur über Mars ist von *S. A. Chant* im Journ. Roy. Astr. Soc. Can. 3 (1909), p. 425 gegeben worden.

754) Pulkowa Nicolai-Hauptsternw. Mitt. 4 (1911), p. 73.

gerte kürzlich *N. Barabascheff*[755]) daraus, daß er mit Violettfilter häufig Fleckchen bemerkte, die sonst nicht zu sehen waren. Ebenfalls mit Filtern hat *W. H. Wright*[756]) Aufnahmen ausgeführt und dabei ganz im Gegensatz zu den spektroskopischen Ergebnissen gefunden, daß die Ultraviolettbilder einen merkbar größeren Durchmesser aufwiesen als Bilder mit anderen Filtern. Bleibt man bei der Annahme, daß die Marsatmosphäre das Licht ähnlich zerstreut wie unsere Lufthülle, so wäre man dann zur Ansicht genötigt, daß auf den Ultraviolettbildern die Marsatmosphäre mit aufgenommen worden sei. Damit würde für sie aber eine Höhe von ca. 120 Meilen folgen! Die Unstimmigkeiten zwischen Filteraufnahmen und spektroskopischen Ergebnissen bei Mars harren noch der Aufklärung.

Jupiter. Während im brechbaren Teil des Jupiterspektrums keinerlei Veränderungen gegenüber dem mittleren Sonnenspektrum zu beobachten sind, zeigen sich im roten Teil charakteristische Bandenbildungen, die bei den Planeten Saturn, Uranus und Neptun dann der Reihe nach immer stärker hervortreten.[757]) Die hauptsächlichsten dieser Bänder, die schon von *H. C. Vogel*[758]) und *W. Huggins*[759]) beschrieben worden sind, liegen nach Angaben von *V. M. Slipher*[760]) bei den Wellenlängen 5420, 5770, 6020 und 6470 Å.E. und sind durch Verstärkung der an den gleichen Stellen befindlichen und in der „Preliminary table“ mit *A* (atmosphärisch) bezeichneten Linien des Wasserdampfes und Sauerstoffes entstanden. Zwei andere von *G. Millochau* und *J. Janssen*[761]) angegebene Bänder bei 5150 und 6070 Å.E hat *Slipher* nicht bestätigen können, dagegen dürfte nach ihm das bei 5420 befindliche Band eine rote Komponente bei 5430 besitzen, die auch planetarischen Ursprungs ist. Weiter wurde schon frühzeitig bei 6180 ein deutliches Band[762]) bemerkt, das nach *L. Becker*[763]) genauer bei 6175—6207 Å.E. liegt, ebenfalls bei den folgenden äußeren Planeten an Kraft gewinnt und auch planetarischen Ursprungs ist.

Aufnahmen mit Rotfilter, die von *W. H. Wright*[764]) ausgeführt

---

755) Astr. Nachr. 230 (1927), p. 49.

756) Publ. Astr. Soc. Pac. 36 (1924), p. 239; Lick Obs. Bull. Nr. 366 (1924) und Nr. 389 (1927).

757) Siehe bei P. Lowell Paris C. R. 147 (1908), p. 516.

758) a. a. O.

759) London Roy. Soc. Proc. (1871), Nr. 129.

760) Lowell Obs. Bull. Nr. 16 (1905).

761) Paris C. R. 138 (1904), p. 1477.

762) a. a. O.

763) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 78 (1917), p. 77.

764) Lick. Obs. Bull. 389 (1927); Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 358.

worden sind, haben insbesondere in den Äquatorialstreifen reiches, feines Detail gezeigt, und es scheint somit, daß auch in der Jupiteratmosphäre die Diffusion des Lichtes ebenso vor sich geht wie in der Erdatmosphäre.

Saturn. Wie schon erwähnt, zeigt das Saturnspektrum die bei Jupiter im gelben und roten Teil des Spektrums auftretenden Bänder kräftiger. Es wurde zuerst von *W. Huggins*[765]) und *H. C. Vogel*[766]), dann von *J. Keeler*[767]) und schließlich von *V. M. Slipher*[768]) studiert. Letzter fand auch H_α etwas verstärkt und schloß daraus auf das Vorhandensein von freiem H in der Saturnatmosphäre. *Sliphers* Aufnahmen zeigten im Spektrum des Ringes die für die äußeren Planeten typischen Bänder im Rot nicht, so daß also der Ring keine oder wenigstens nur eine sehr dünne Lufthülle hätte. Zum gleichen Ergebnis gelangte später noch *G. A. Tickhoff*[769]) bei Aufnahmen mit verschiedenen Farbenfiltern. Auf Aufnahmen mit Rotfilter von *W. H. Wright*[770]) verschwanden überhaupt einzelne Teile des Ringes, und durch den Crapering war die Saturnkugel klar sichtbar. Das könnte darauf hinweisen, daß die Ringteilchen eine Diffusionswirkung ausüben, die der der Atmosphäre nicht unähnlich ist.

Uranus, Neptun. Das Spektrum wurde zuerst von *A. Secchi*[771]), *W. Huggins*[772]) und *H. C. Vogel*[773]) beobachtet und später wieder von *P. Lowell*[774]) und *V. M. Slipher*[775]) genauer untersucht. Die typischen Bänder im roten Teil zeigen Verstärkung gegenüber dem Saturnspektrum, und zwar bei Neptun in noch größerem Betrag als bei Uranus, außerdem zeigt sich das von *Slipher* im Jupiterspektrum vermutete Band bei 5430 kräftig, und ein neues Band unbekannten Ursprungs bei 5100 ist hinzugetreten. *J. Keeler*[776]) hat diese Eigentümlichkeiten speziell bei Uranus ebenfalls bemerken können.

---

765) London Roy. Soc. Phil. Trans. 154, II (1864), p. 243.

766) a. a. O.

767) Astr. Nachr. 122 (1889), p. 401.

768) Lowell Obs. Bull. Nr. 27 (1907), p. 173.

769) Pulkowa Nicolai-Hauptsternw. Mitt. 4 (1911), p. 73.

770) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 231; vgl. hierzu auch *R. W. Wood,* Astroph. Journ. 43 (1916), p. 314 und *V. M. Slipher,* Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 149.

771) Paris C. R. 68 (1869), p. 761.

772) London Roy. Soc. Proc. 1871, Nr. 129; Paris C. R. 108 (1889), p. 1228.

773) a. a. O.; Astroph. Journ. 1 (1895), p. 280.

774) Brit. Astr. Assoc. Rep. 1902, p. 55.

775) Lowell Obs. Bull. Nr. 13 (1904).

776) Astr. Nachr. 122 (1889), p. 103.

Die in den Spektren der äußeren Planeten im roten Teil auftretenden Bänder sind, wie *K. von Lysakowski*[777]) erwähnt, von den Botanikern *Timiriaziew* und *Beyrinck* für Absorptionsbanden des Chlorophylls gehalten worden. Nach *C. P. Butler*[778]) wäre diese Identifikation keineswegs unmöglich, und *W. Arzichowsky*[779]) meint dazu, daß dann dieselben Banden wohl auch im Spektrum des aschfarbenen Mondlichtes nachzuweisen sein müßten. Dagegen hebt *O. Büry*[780]) hervor, daß die Banden des Uranusspektrums ziemlich gut mit Absorptionsbanden des Ozons zusammenstimmen. Da sich die Ozonbanden bei abnehmender Temperatur zu verstärken pflegen, wäre bei dieser Identifikation das Kräftigerwerden der Planetenbänder mit wachsender Entfernung von der Sonne erklärbar.

20. Die Versuche zur spektroskopischen Ermittlung der Rotationszeiten der Planeten. Die Oberflächen von Merkur, Venus, Uranus und Neptun zeigen so wenig deutliches Detail, daß es bisher nicht möglich war, die Rotationszeiten dieser Planeten sicher abzuleiten. Speziell bei Venus und Merkur sind die einzelnen Beobachter bei solchen Bestimmungen zu derart verschiedenen Resultaten gelangt, daß schließlich *W. H. Pickering*[781]) und später wieder *C. V. L. Charlier*[782]) auf die Möglichkeit hingewiesen haben, daß die Rotation dieser Planeten vielleicht gar um eine in der Richtung des Radiusvektors gelegene Rotationsachse erfolge, ähnlich also, wie dies schließlich für Uranus angenommen worden ist, und sie schlugen vor, das vorhandene Beobachtungsmaterial einmal in diesem Sinne zu bearbeiten. Eine Lösung dieser offenen Fragen wäre nun aber auch auf spektroskopischem Wege durch Beobachtung der an zwei gegenüberliegenden Randpunkten der Planetenscheiben auftretenden Linienverschiebungen zu erhalten, und diesbezügliche Beobachtungen sind auch an den Planeten Venus, Uranus, Neptun sowie am Saturnring versucht worden.

Venus. Zunächst hat *A. Belopolsky*[783]) im Jahre 1900 aus spektrographischen Aufnahmen, die sich über einen Zeitraum von etwa sechs Wochen erstreckten, für den Äquator dieses Planeten lineare Rotationsgeschwindigkeiten zwischen 0,6 und 0,9 km gefunden, die auf eine kurze Rotationszeit von $12{,}3^h$—$18{,}5^h$ hinweisen würden. Weitere

777) Weltall 10 (1909), p. 22.
778) Rev. scient. 1 (1909), p. 465.
779) Russ. Astr. Ges. 18 (1913), p. 227.
780) Astr. Nachr. 190 (1911), p. 3.
781) Journ. Brit. Astr. Ass. 31.
782) Publ. Astr. Soc. Pac. 36 (1924), p. 105.
783) Astr. Nachr. 152 (1900), p. 263.

Beobachtungen desselben Beobachters[784]) aus den Jahren 1903, 1908 und 1911 ergaben wieder eine Rotationszeit von $1^d\ 10{,}6^h$, wobei gleichzeitige Kontrollmessungen der Marsrotation bewiesen, daß das Ergebnis kaum mit einem größeren Beobachtungsfehler behaftet sein dürfte. Fast zur gleichen Zeit ließen aber Aufnahmen von *P. Lowell*[785]) und von *V. M. Slipher*[786]) wieder eine langsame Rotation des Planeten für wahrscheinlicher erscheinen. Da auch *Lowell* und *Slipher* Mars[787]) und Jupiter[788]) als Testobjekte benutzt haben und den Beobachtungsfehler klein fanden, scheint also die Frage nach der Rotationszeit der Venus durch die spektroskopischen Bestimmungen noch keineswegs gelöst zu sein.

Uranus. Mit Uranus liegen die Verhältnisse besser. Nach spektroskopischen Beobachtungen von *H. Deslandres*[789]) aus dem Jahre 1902 ist eine rückläufige Rotation wahrscheinlich, und zum gleichen Resultat kamen später *P. Lowell* und *V. M. Slipher*[790]), die aus der Neigung der Linien bei quer über die Planetenscheibe gestelltem Spalt ebenfalls eine retrograde Drehung mit einer Rotationszeit von rund $11^3/_4{}^h$ ableiteten.

Neptun wurde von *J. H. Moore* und *D. H. Menzel*[791]) erst kürzlich untersucht. Mit einem Neptundurchmesser von 157000 km folgte aus Beobachtungen, die in der Zeit 1928 17. Febr. bis 30. Mai angestellt worden sind, für die Rotationszeit der Wert von $15{,}8^h \pm 1^h$.

Saturnring. Beim Saturnring haben spektrographische Bestimmungen der *Doppler*schen Verschiebungen von *J. Keeler*[792]), *H. Deslandres*[793]), *A. Belopolsky*[794]) und *W. W. Campbell*[795]) Geschwindigkeiten der Einzelringe ergeben, die in Übereinstimmung mit der mechanischen Theorie des Saturnringes das dritte *Kepler*sche Gesetz befolgen.

21. Die Spektren der Kometen. Der erste Komet, der spektroskopisch untersucht worden ist, scheint der Komet 1864 II gewesen

784) Pulkowa Nicolai-Hauptsternw. Mitt. (1911).

785) Astr. Nachr. 163 (1903), p. 34.

786) Ebendort p. 35.

787) Lowell Obs. Bull. Nr. 4 (1903).

788) Pop. Astr. 11 (1903), p. 1; Astroph. Journ. 20 (1904), p. 1.

789) Paris C. R. 135 (1902), p. 228, 475; siehe auch Paris C. R. 120 (1895), p. 417, 1155 und Sirius 35 (1902), p. 385.

790) Lowell Obs. Bull. Nr. 53 (1912).

791) Publ. Astr. Soc. Pac. 40 (1928), p. 234.

792) Astroph. Journ. 1 (1895), p. 416.

793) Paris C. R. 120 (1895), p. 1155.

794) Astr. Nachr. 139 (1896), p. 1.

795) Astroph. Journ. 2 (1895), p. 127. Siehe auch *H. J. Klein,* Sirius 34 (1901).

zu sein, von dessen Spektrum *G. B. Donati*[796]) in Florenz berichtet, es habe aus hellen Bändern bestanden. Bald danach fand *W. Huggins*[797]) im Spektrum des *Tempel*schen Kometen 1866 I einen kontinuierlichen Untergrund, und schon zwei Jahre später konnte er im Spektrum des *Winnecke*schen Kometen 1868 II die Lage der beobachteten Banden vermessen (5640, 5160, 4730 Å.E.) und dieselben mit den Banden C II, C III, C IV des *Swan*spektrums identifizieren. Als nun aber *Huggins*[798]) im Spektrum des *Brorsen*schen Kometen 1868 I wieder drei Banden beobachtete, deren Wellenlängen sich stark abweichend von den Banden im Spektrum von 1868 II zu 5440, 5070 und 4650 Å.E. ergaben, entstand die Frage, ob man es also wirklich mit den *Swan*banden zu tun habe. *A. Secchi*[799]) folgerte aus der guten Übereinstimmung seiner eigenen Messungen mit denen von *Huggins*, daß die beobachteten Unterschiede reell seien, und daher keineswegs Identität mit dem *Swan*spektrum vorhanden sein könne. Da aber im Spektrum desselben *Brorsen*schen Kometen bei seiner Wiederkehr im Jahre 1879 die *Swan*banden doch wieder zweifellos identifiziert werden konnten, neigten sowohl *W. Huggins*[800]) als auch *C. A. Young*[801]), der schon früher von *H. C. Vogel*[802]) und *J. N. Lockyer*[803]) geäußerten Ansicht zu, daß das Kometenspektrum überhaupt bis zu einem gewissen Grade veränderlich sei. Erst fast dreißig Jahre später gelang, wie noch eingehender behandelt werden soll, der Nachweis, daß es sich bei den am *Brorsen*schen Kometen im Jahre 1868 beobachteten Banden um das Spektrum der 3. negativen Gruppe des Kohlenstoffs, die speziell in den Kometenschweifen auftritt, gehandelt habe, bei den im Jahre 1879 beobachteten Bändern dagegen tatsächlich um das *Swan*spektrum, das für den Kometenkopf typisch ist.

Spektralphotographische Beobachtungen sind zuerst von *W. Huggins*[804]) und *H. Draper*[805]) am großen Kometen 1881 III *(Cruls-Thebutt)* angestellt worden. Als Hauptresultate dieser Aufnahmen seien verzeichnet die Auffindung *Fraunhofer*scher Linien auf dem kontinuierlichen Grund und die Auffindung neuer heller Bänder im Violett und

796) Astr. Nachr. 62 (1864), p. 378.
797) London Roy. Soc. Proc. 15 (1866), p. 6.
798) London Roy. Soc. Proc. 16 (1868), p. 386.
799) Paris C. R. 66 (1868), p. 881, 1301.
800) Nature 19 (1879), p. 579.
801) Amer. Journ. Science and Arts 17 (1879), p. 373.
802) Pogg. Ann. 149 (1873), p. 400.
803) Nature 10 (1874), p. 180.
804) London Roy. Soc. Proc. 33 (1881), p. 1.
805) Amer. Journ. Science and Arts 22 (1881), p. 134.

Ultraviolett, die teilweise als zum Cyan gehörig erkannt wurden, teilweise nicht identifiziert werden konnten. Schon damals hatte *H. Draper*[806]) auch versucht, Spektren ohne Verwendung eines Spalts dadurch aufzunehmen, daß er zwischen Objektiv und Platte ein Prisma à vision dirécte setzte, aber erst *A. de la Baume-Pluvinel*[807]) verwendete zum gleichen Zweck die *Lockyer*sche Prismenkamera bzw. das Objektivprisma. Speziell die von da ab beginnenden Untersuchungen mit dem Objektivprisma waren es, die die spektralen Unterschiede zwischen Kopf und Schweif der Kometen entdecken ließen und dadurch Anregung gegeben haben zu den Versuchen im Laboratorium über die verschiedenen Spektren des Kohlenstoffs, die wieder letzten Endes die Erklärung gebracht haben für das spektral verschiedene Verhalten von Kometenkopf und Kometenschweif.

Sieht man von gewissen individuellen Eigentümlichkeiten ab, so zeigen so ziemlich alle Kometen bezüglich des Auftretens der hellen Banden verschiedener Bandengruppen des Kohlenstoffs nahe das gleiche Verhalten. Da erst vor kurzem *F. Baldet*[808]) eine genaue Beschreibung der Spektren fast aller in den Jahren 1864—1925 erschienenen größeren Kometen gegeben hat, so seien hier nur einige Kometen eingehender behandelt, bei denen die spektralen Untersuchungen Fortschritte gezeitigt haben. Während nun die Arbeiten von 1902 ab fünf Jahre hindurch nur immer wieder ergeben hatten, daß neben den *Swan*- und Cyanbanden mehr oder weniger zahlreiche unbekannte Banden auftreten, ließ der von *Daniel* entdeckte

Komet 1907 d (Daniel) wieder interessantes Neues beobachten. Aufnahmen des Spektrums von *W. W. Campbell*[809]), *J. Evershed*[810]), *J. Bosler*[811]), *H. Deslandres* und *A. Bernard*[812]), *H. Rosenberg*[813]) u. a. zeigten ein kräftiges kontinuierliches Spektrum mit deutlichen *Fraunhofer*schen Linien, dann die *Swan*banden sowie die blauen Cyanbanden, Cy II, Cy V und noch weitere unbekannte Banden. *V. M. Slipher* und *C. O. Lampland*[814]) fanden auch die *D*-Linie als helle Linie, und später er-

806) a. a. O.

807) Paris C. R. 136 (1903), p. 743, 744.

808) Paris-Meudon, Ann. de l'Obs. 7 (1926), p. 61. Siehe auch die Bearbeitung der Spektren der 1908—1927 erschienenen Kometen durch *N. T. Bobrovnikoff,* Astroph. Journ. 66 (1927), p. 439 und dessen zusammenfassende Studie in Publ. Astr. Soc. Pac. 40 (1928), p. 164.

809) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 229.

810) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 68 (1907), p. 16.

811) Paris C. R. 145 (1907), p. 582.

812) Paris C. R. 145 (1907), p. 445.

813) Astr. Nachr. 175 (1907), p. 401.

814) Lowell Obs. Bull. Nr. 52 (1911).

kannte *F. Baldet*[815]) auf einer französischen Aufnahme auch noch die rote Cyanbande Cy I. Insbesondere auf den Aufnahmen von *Deslandres* und *Bernard* und von *Rosenberg* schienen die damals noch unbekannten Bänder bei 4520—4580, 4230—4290 und 4000—4040 Å.E. weit in den Schweif des Kometen zu reichen, und ein gleiches Verhalten zeigten nach *J. Evershed*[816]) auch noch einige andere im Ultraviolett bei 3580, 3690, und 3780 Å.E. vorhandene Bandenbildungen. *H. Chrétien*[817]) bemerkte, daß diese Banden durchweg Doppelbanden zu sein scheinen, und spätere Untersuchungen im Laboratorium lehrten, daß sie der dritten negativen Gruppe des Kohlenstoffs angehören, die bei besonders niederem Druck aufzutreten pflegt (siehe Nr. 6e), p. 582). Diese Bänder sind für das Spektrum des Schweifes typisch. Wegen der großen Zahl der Emissionsbänder wurde von noch größerer Bedeutung der nächste

Komet 1908c (Morehouse). Im Gegensatz zu dem eben besprochenen Kometen Daniel war ein kontinuierliches Spektrum beim Kometen Morehouse überhaupt nicht zu erkennen, wie u. a. von *A. De la Baume-Pluvinel* und *F. Baldet*[818]) sowie von *E. B. Frost* und *J. A. Parkhurst*[819]) besonders hervorgehoben worden ist. Das Cy-Spektrum war sehr kräftig entwickelt und ließ sich in den nach jedem Lichtausbruch in den Schweif abwandernden Wolkenballen meist noch mehrere Grade vom Kopf weg nachweisen. Die Intensität der einzelnen Bänder scheint aber variabel gewesen zu sein, da beispielsweise *W. W. Campbell* und *S. Albrecht*[820]) einmal das Band Cy III nicht verzeichnen, während ein anderes Mal *H. Rosenberg*[821]) zwar Cy I und Cy III, nicht aber auch Cy II beobachtete. Die *Swan*bänder C II, C III und C IV wurden von den meisten Beobachtern ebenfalls bemerkt, uud später konnten *A. De la Baume-Pluvinel* und *F. Baldet*[822]) in einer zusammenfassenden Untersuchung auch noch C I und C V nachweisen.

Nur im Schweif traten die Banden der Stickstoffmolekel auf, die insbesondere auf Aufnahmen von *E. B. Frost* und *J. A. Parkhurst*[823]), *H. Deslandres* und *A. Bernard*[824]) sowie von *H. Deslandres, J. Bosler*

815) Paris C. R. 181 (1925), p. 331.
816) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 68 (1907), p. 16.
817) Paris C. R. 145 (1907), p. 549.
818) Paris C. R. 147 (1908), p. 666.
819) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 55.
820) Lick Obs. Bull. Nr. 145 (1908).
821) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 267.
822) Astroph. Journ. 34 (1911), p. 89.
823) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 55.
824) Paris C. R. 147 (1908) p. 774.

und *A. Bernard*[825]) gut nachgewiesen werden konnten. Die bereits beim Kometen Daniel zum erstenmal beobachteten Doppelbanden zeigten sich beim Kometen Morehouse in vermehrter Zahl und größerer Deutlichkeit und waren durchweg noch weit in den Schweif des Kometen hinaus gut beobachtbar.[826]) Damals wurde die Frage aufgeworfen, ob die Duplizität dieser Banden nicht vielleicht durch *Zeeman*effekt hervorgerufen oder auf einen durch Bewegungen in den Schweifmassen hervorgerufenen *Doppler*effekt zurückzuführen sei. Die erstere Möglichkeit fiel weg, als es *H. Deslandres* und *J. Bosler*[827]) gelang zu zeigen, daß die Bandenkomponenten keinerlei Polarisation aufweisen, und die zweite war deswegen unwahrscheinlich, da dabei, wie *W. W. Campbell* und *S. Albrecht*[828]) betonten, im Schweifinneren Geschwindigkeiten von rund 2000 km hätten angenommen werden müssen. Der Nachweis, daß die beobachtete Duplizität eine reine Folge der serienmäßigen Anordnung ist, gelang erst später durch weiter unten noch eingehender zu besprechende Laboratoriumsversuche.

Auch im Spektrum dieses Kometen waren zahlreiche Emissionsbanden nicht identifizierbar. *E. C. Pickering*[829]) glaubte unter diesen zunächst die Banden des C + H erkennen zu können, auch Identitäten mit den Linien H_β — H_ζ der *Balmer*serie des Wasserstoffs und mit einem in den Spektren roter Sterne auftretenden hellen Band bei 4640—4730 Å.E. hielt er für möglich.[830]) Bald darauf aber konnte *J. Hartmann*[831]) durch Aufnahmen mit Quarzoptik zeigen, daß die *Balmer*serie, die übrigens bis heute bei keinem einzigen Kometen bemerkt werden konnte, sicher vollständig fehlte. *S. V. Orlov*[832]) hielt die im Spektrum des Kometen Morehouse beobachteten Bänder wegen ihrer Darstellbarkeit durch eine der *Deslandre*schen Serienformel für CO: $\nu' = \nu_0' + an + bn^2$ ähnliche Formel für Emissionen, die ebenfalls dem Kohlenmonoxyd angehören, doch erscheint diese Art der Identifikation wohl noch fraglich.

Nach einer photometrischen Studie von *H. Rosenberg*[833]) lag die maximale Helligkeit der Emissionsbanden im Spektrum des Kometen Morehouse bei etwa 4000 Å.E., und die Emissionen schienen auf einem

825) Paris C. R. 148 (1909), p. 148.
826) Siehe bei *H. D. Curtis,* Lick Obs. Bull. Nr. 163 (1909).
827) Paris C. R. 147 (1908), p. 951.
828) Lick Obs. Bull. Nr. 147 (1909), p. 64.
829) Astr. Nachr. 179 (1908), p. 193.
830) Ebendort 179 (1908), p. 383.
831) Ebendort 181 (1909), p. 21.
832) Ebendort 226 (1924), p. 379.
833) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 276.

schwachen kontinuierlichen Grund von derselben Energieverteilung aufzuliegen. Der Komet wäre demnach der Farbe nach blau (oder etwa von der Farbe des Sterns αLyrae) gewesen. Eine Typisierung der Kometenspektren in solche vom Sonnentypus, in deren Spektrum das Energiemaximum ungefähr bei 4700 Å.E. liegt und in einen Violettypus mit dem Energiemaximum bei etwa 4000 Å.E. ist übrigens auf Grund einer eingehenden Prüfung der Spektren der in der Zeit 1908—1927 erschienenen Kometen von *N. T. Bobrovnikoff*[834]) vorgeschlagen worden. In der Regel soll danach das Spektrum bei einer Distanz des Kometen von der Sonne $< 0{,}7$ dem Sonnentypus angehören und bei Vergrößerung der Entfernung in den Violettypus übergehen.

Das Auftreten eines schwachen kontinuierlichen Untergrundes benutzte *H. Rosenberg*[835]) unter der Voraussetzung, daß derselbe wirklich auf Reflexion des Sonnenlichtes und nicht etwa nur auf Zusammenfließen der Emissionsbanden zurückzuführen sei, um aus den diffundierenden Eigenschaften der den Kometen bildenden kosmischen Staubwolke die Kometenmasse abzuleiten. Der von ihm gefundene Wert von $5{,}8 \cdot 10^{-19}$ Erdmassen steht mit anderweitigen Massenbestimmungen von *Laplace, Roche, Hepperger* und *Lindemann*[836]), die Werte zwischen $2 \cdot 10^{-4}$ und $3 \cdot 10^{-13}$ Erdmassen gefunden hatten, mit Rücksicht auf die unsicheren Grundlagen aller dieser Rechnungen wohl keineswegs in besonderem Widerspruch. Bandenbildungen, deren Ursprung bei seiner im Jahre 1911 erfolgten Wiederkehr noch unbekannt war, zeigte auch der

Komet Halley[837]), dessen Spektrum ebenfalls einen kontinuierlichen Untergrund aufwies, der aber offenbar aus einem Sonnentypus (reflektiertes Sonnenlicht) und einem Violettypus (Eigenlicht) kombiniert war.

Was die oben erwähnten bei den Kometen Daniel und Morehouse beobachteten Doppelbanden betrifft, so fand sie *A. Fowler*[838]) schon im Jahre 1909 auf einer von *H. Payn* ausgeführten Aufnahme des Spektrums des Kathodenlichtes in einer mit H und CO unter niederem Druck (0,01 mm) gefüllten Röhre wieder. Gleichzeitig gelang es ihm zu zeigen, daß bei gleichzeitigem Vorhandensein von C und

834) Ebendort 66 (1927), p. 439.

835) a. a. O.

836) Siehe bei *S. Oppenheim,* Kometen, Encykl. d. math. Wiss. VI 2, Nr. 18, p. 914.

837) Siehe z. B. bei *N. T. Bobrovnikoff,* Astroph. Journ. 66 (1927), p. 145 und bei *V. M. Slipher,* Lowell Obs. Bull. Nr. 52 (1911).

838) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1909), p. 176, 484.

N unter höherem Druck die *Swan*banden und die Banden des Cy, also der Verbindung von C und N, auftreten, während bei niederem Druck dagegen die Banden der dritten negativen Gruppe CO^+ und des Stickstoffmoleküls erscheinen, die Cy-Banden aber verschwinden. Die spektralen Unterschiede zwischen Kopf und Schweif eines Kometen sind also in Druckunterschieden begründet.

Von den anderen Banden, die wir bisher als dem Ursprung nach unbekannt bezeichnet haben und die bei verschiedenen Kometen in verschiedener Anzahl auftreten, bemerkt *F. Baldet*[839]), daß sie hauptsächlich dem Spektrum des Kometenkerns angehören, da sie in dessen Nähe in der Regel an Kraft gewinnen. Im Jahre 1916 hat nun *C. W. Raffety*[840]) im Spektrum des Meckerbrenners[841]) zwischen 4020 und 4100 Å.E. eine Reihe von Banden beobachtet, die offenbar mit den eben erwähnten Banden des Kometenkerns identisch sind. *F. Baldet*[842]), der die Beobachtung von *Raffety* durch eigene Versuche und Messungen kontrollierte, gibt folgende Zusammenstellung der in den Spektren von Meckerbrenner und Kometenkern gemessenen Wellenlängen:

Raffety	*Baldet*	Kometenkern	*Raffety*	*Baldet*	Kometenkern
4108	4110	4109	4043	4043	4043
—	—	4099	4040	4039	4040
4095	4095	—	4037	4035	—
4085	4085	4085	4031	—	4033
4074	4075	4074	4025	4026	—
4066	4067	4068	—	—	4020
4061	4059	—	—	—	4014
4054 } 4048 }	4050	4052			

Daß man es in den insbesondere im Kernspektrum auftretenden Banden mit den vermutlich dem C + H zuzuschreibenden „*Raffety*bändern“ zu tun hat, ist demnach wohl zweifellos.

Den genannten Untersuchungen zufolge sind also für das Spektrum des Kometenkopfes die *Swan*- und Cyanbänder typisch, und im Spektrum des dichtesten Teiles des Kerns treten dazu noch die *Raffety*bänder auf. Das Schweifspektrum dagegen zeigt infolge der Verdünnung der Gase die Banden der dritten negativen Gruppe des CO^+ und

839) Paris-Meudon Ann. de l'Obs. 7 (1926), p. 53.

840) Phil. Mag. 32 (1916), p. 555.

841) Ein Bunsenbrenner, bei dem das obere Rohrende mit einem Drahtnetz verschlossen ist. Die Flamme des Meckerbrenners ist heißer als die des Bunsenbrenners.

842) a. a. O. p. 103.

die Banden der Stickstoffmolekel N_2^+. Diese typischen Spektren von Kopf und Schweif können sich natürlich dort, wo der Schweif an den Kopf ansetzt, miteinander kombinieren.[843]) Ein ausgezeichnetes Beispiel für diese spektralen Verschiedenheiten von Kern, Kopf und Schweif bot der Komet 1927 c *(Pons-Winnecke)*, dessen Spektrum u. a. von *V. M. Slipher*[844]), *J. H. Moore*[845]), *N. T. Bobrovnikoff* und *A. Pogo*[846]) und von *G. Shajn*[847]) untersucht worden ist.

Das Spektrum eines Kometen ist natürlich stark abhängig von seiner Distanz von der Sonne, da ja der Erregungszustand und die Zahl der erregten Molekel mit der bei Annäherung an die Sonne steigenden Aktivität des Kometen wächst. In großer Entfernung von der Sonne wird wohl zunächst nur reflektiertes oder, wie *Ch. Fabry*[848]) ebenfalls für möglich hält, durch die dünne Kometenmaterie diffundiertes Sonnenlicht zur Geltung kommen. Daß allerdings unter Umständen auch schon in größerer Distanz von der Sonne eine gewisse Aktivität einsetzen und die typischen Emissionsbanden erscheinen lassen kann, folgt aus einer Beobachtung von *M. Wolf*[849]), der im Spektrum des *Halley*schen Kometen bereits am 13. Dez. 1909, wo der Komet noch 343 Mill. km von der Sonne entfernt war, die typischen Emissionsbänder vorfand. Auch das Emissionsspektrum ist mit der Entfernung von der Sonne veränderlich, wie *A. De la Baume-Pluvinel* und *F. Baldet*[850]) schon am Kometen 1911 c (*Brooks*) feststellen konnten. Später hat *F. Baldet*[851]) bei seiner Neubearbeitung französischer Aufnahmen bemerkt, daß die C- und Cy-Bänder sowie eine Gruppe dem Kernspektrum angehörender Banden zwischen 4050—4300 Å.E. immer kräftiger werden, wenn sich der Komet der Sonne nähert. Die Kernbanden erreichen aber schon vor dem Periheldurchgang in der Regel ihre maximale Intensität und werden von da ab wieder schwächer. Das Schweifspektrum entwickelt sich zumeist verhältnismäßig rasch, und zwar fast stets erst in der Nähe des Perihels, um nach dem Periheldurchgang noch beträchtlich an Kraft zu gewinnen. Bei größerer Sonnennähe zeigen sich im Spektrum des Kometenkopfes häufig die *D*-Linien des Natriums hell. Sie wurden zuerst im Spektrum des

843) Siehe hierzu *N. T. Bobrovnikoff,* Publ. Astr. Soc. Pac. 40 (1928), p. 164.
844) Lowell Obs. Bull. 86 (1827).
845) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 221.
846) Pop. Astr. 36 (1928), p. 4.
847) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1927), p. 747.
848) Bull. Soc. Astr. de France 32 (1918), p. 23.
849) Heidelberg Akad. Sitzber. 1910, Abhandlung 7.
850) Paris C. R. 154 (1912), p. 1286.
851) Paris-Meudon Ann. de l'Obs. 7 (1926), p. 44.

Kometen 1881b *(Cruls-Thebutt)*, dann weiter in den Spektren der Kometen 1881c *(Schoeberle)*, 1882a *(Wells)*, 1882b *(Cruls)*, 1907d *(Daniel)*, 1909c *(Halley)*, 1911c *(Brooks)*, 1913f *(Delavan)* gesehen. Das Auftreten der Na-Emission bei dem letzteren Kometen ist besonders merkwürdig zu nennen, da der Komet stets relativ weit von der Sonne entfernt blieb (Periheldistanz 1,11) und da *N. v. Konkoly*[852]) sie in einer Distanz des Kometen von der Sonne von 1,21 schon vor dem Perihel auffand. Bei großen Kometen, z. B. bei 1882a, ließen sich die Na-Linien sogar noch in dem Kopf näher gelegenen Schweifteilen nachweisen. Meistens werden die *Swan*banden schwächer, wenn die Na-Linien an Kraft zunehmen. *P. Lewis*[853]) hat übrigens das gleiche Verhalten im Spektrum einer mit Natrium beschickten Bunsenflamme beobachtet. Sieht man davon ab, daß von *O. Lohse* und *R. Copeland* im Spektrum des Kometen 1881b auch helle Eisenlinien gesehen worden sein sollen[854]) — *S. V. Orlov*[855]) hält die Identifikation für sicher, während sie von *F. Baldet*[856]) mit dem Hinweis darauf bezweifelt wird, daß es sich dabei um lauter relativ schwache Eisenlinien gehandelt hat, so wäre Na das einzige Element, das in den Kometenspektren bisher neben C und N sicher hat nachgewiesen werden können.

Über das Emissionsspektrum lagert sich bei manchen Kometen noch ein mehr oder minder kräftiges *Fraunhofer*sches Spektrum, das von reflektiertem Sonnenlicht herrührt und bei sehr hellen Kometen auch noch in kopfnahen Schweifteilen zu beobachten ist, wie beispielsweise beim hellen Kometen 1910a von *F. Baldet*[857]) festgestellt werden konnte.

22. Die Spektren der Sternschnuppen und ihrer Schweife. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hat man mehrfach versucht, das Spektrum von Sternschnuppen mit geradsichtigem Spektroskop ohne Spalt zu beobachten, wobei man naturgemäß die Zeiten (Mitte August und Mitte November) zur Beobachtung wählte, wo das Auftreten zahlreicherer periodischer Sternschnuppen eine größere Ausbeute versprach. Auf diese Weise beobachtete *J. Browning*[858]) an den Leoniden im Jahre 1866 kontinuierliche Spektren, bei deren einigen der gelbe Teil besonders kräftig war, und weiter auch Spektren, die

852) Astr. Nachr. 202 (1916), p. 143.
853) Astroph. Journ. 15 (1902), p. 122.
854) Copernikus 2 (1882), p. 235.
855) Russ. Astroph. Journ. 4 (1927), p. 1.
856) Paris-Meudon Ann. de l'Obs. 7 (1926), p. 8.
857) Ebendort p. 32.
858) London Roy. Astr. Soc. Proc. Month Not. 27 (1867), p. 77.

nur ein gelbes oder grünes Band erkennen ließen. Offenbar handelte es sich bei den kontinuierlichen Spektren um das Spektrum der Sternschnuppe selbst, bei den anderen dagegen um das Spektrum der Schweife. Auf die Meteorschweife beziehen sich jedenfalls auch die Angaben von *A. S. Herschel*[859]) über ein helles Meteor vom 18. Jan. 1864 sowie über die August- und Novembermeteore des Jahres 1868[860]) und weiter die Beobachtungen von *A. Secchi*[861]), bei denen durchweg diskontinuierliche Spektren mit hellen Bändern festgestellt worden sind. Alle Beobachter waren damals der Meinung, daß das so häufig auftretende gelbe Band mit dem Natriumdublet D identisch sei, während das grüne Band vielleicht mit den grünen Magnesiumlinien oder auch mit der grünen Thalliumlinie in Zusammenhang stehe. Mit Rücksicht darauf, daß bei den Geminiden (6.—16. Dez.) stets auffallend viele grünlich gefärbte Sternschnuppen auftreten und weil sich die Bunsenflamme durch Beimengung von Cu, Ag, Ba und Tl ähnlich grünlich färbt, regte *A. S. Herschel*[862]) die Beobachtung insbesondere dieser Meteore an. Fast um dieselbe Zeit beobachtete *N. v. Konkoly*[863]) öfter verschiedene diskontinuierliche Spektren mit Bändern im Rot, Grün und Gelb bei den Wellenlängen 6160—6200, 5050—5100 und weiter bei 4345 Å.E., die er zunächst für die Banden 5955—6188, 5084—5165 und 4324—4380 Å.E. im Spektrum des Leuchtgases hielt, dann aber wieder auf Na, Mg, Cu, Fe und möglicherweise auch Sr und Li zurückführen wollte. Eine Stütze für eine Identifikation im letzteren Sinn glaubte er in der etwas primitiven Beobachtung gefunden zu haben, daß mit Alkohol, in dem geringe Mengen von Salzen der genannten Stoffe gelöst waren, getränkte Wattebäuschchen ein ähnliches Spektrum zeigten, wenn sie im Dunklen in die Höhe geworfen wurden!

Bei den bisher besprochenen Beobachtungen darf nicht übersehen werden, daß in keinem Falle eine eigentliche Wellenlängenmessung möglich gewesen war, und daß die Identifikationen durchweg aus dem Gedächtnis durch nachträgliches Vergleichen mit Spektren verschiedener Stoffe vorgenommen wurden, wobei natürlich das Nächstliegende zuerst herhalten mußte. Ein wirkliche Wellenlängenmessung gelang

---

859) Les Mondes 7 (1864), p. 139.

860) Report Brit. Astr. Assoc. 36 (1866), p. 142; 37 (1867), p. 399.

861) Bulletino meteorologico 7 (1868), p. 91.

862) Nature 9 (1874), p. 142.

863) Astr. Nachr. 82 (1873), p. 289; 84 (1874), p. 337; 95 (1879), p. 286; London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 34 (1873), p. 82; Beob. Obs. O'Gyalla 2 (1879), p. 8; 3 (1880), p. 7; 5 (1882), p. 19.

erst *E. C. Pickering*[864]), als er am 18. Juni 1897 zu Arequipa gelegentlich einer stellaren Aufnahme mit Objektivprisma zufällig auch die Spur einer hellen Sternschnuppe auf der Platte vorfinden konnte. Später gelang es dann nochmals *S Blajko*[865]), die Spektren zweier Meteore photographisch festzuhalten, als er solche Beobachtungen mit Euryskop und Objektivprisma systematisch anstellte. In allen drei Fällen waren die Spektren diskontinuierlich, also offenbar Spektren des Meteorschweifes. Die beobachteten Linien und die von den Beobachtern vermuteten Identifikationen sind folgende:

C. E. Pickering	*S. Blajko*	
18. Juni 1897	11. Mai 1904	12. Aug. 1904
3954 (H_ε 3970)	3573,0	3774,1 (Fe 3776)
4121 (H_δ 4102)	3638,5	3790,3
4195 (Band 4200 der Sterne v. Typus *O*?)	3743,8	3802,9
	3835,5 (Mg 3830—38)	3820,1 (He 3820)
4344 (H_γ 4341)	3557,1 (Ca?)	3852,5
4636 (Band 4633 der *O*-Sterne?)	3933,5 } (Ca^+)	3890,6 (He 3889)
	3968,7 } (Ca^+)	3915,1
4857 (H_β 4861)	4042,5 (K 4044—47)	3938,5
	4134,4	3964,3 (He 3965)
	4227,2	3992,6
		4027,0 (He 4026)
		4066,5
		4120,3 (He 4121)

Erst vor kurzem gelang auch noch *A. Schwaßmann*[866]) die zufällige Aufnahme des Spektrums einer Sternschnuppe, die außer den Linien *H* und *K* des Ca^+ auch noch Fe-Linien bei den Wellenlängen 3648, 3748, 3827—3880, 4052, 4140, 4262 und 4392 als breite Emissionen zeigte. *Schwaßmann* meint bei dieser Gelegenheit, daß auch die von *Blajko* am 11. Mai 1904 beobachteten Emissionen auf Fe und Ca zurückgeführt werden können.

Es erscheint jedoch immerhin zweifelhaft, ob diese Identifikationen mit Linien des H, He, Ca, Mg, K und Fe Berechtigung haben, wenn man bedenkt, daß die betreffenden Metalldämpfe während der langen, oft bis zu 30^m und darüber gehenden Sichtbarkeitsdauer der Meteorschweife ohne jede weitere Energiezufuhr in ihrem Erregungszustand verharren müßten. Unter solchen Umständen gewinnt der

864) Harvard Obs. Circ. 20 (1897); Astr. Nachr. 145 (1897), p. 78.
865) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 341.
866) Hamburg Sternw. Mitt. 6 (1928), p. 29.

schon von *C. C. Trowbridge*[867]) geäußerte Gedanke Bedeutung, daß es sich im Nachleuchten der Meteorschweife vielleicht um eine Phosphoreszenserscheinung handle, wie sie in ähnlicher Weise bei *Geißler*röhren nach Abschalten des erregenden Stromes beobachtet werden kann. Nach Versuchen von *P. T. Lewis*[868]), *C. C. Trowbridge*[869]), *A. Fowler* und *R. J. Strutt*[870]) über die Stickstoffphosphoreszenz, bei der ein diskontinuierliches Bandenspektrum beobachtet wird, sowie nach Untersuchungen von *H. Hertz*[871]) über das Verhalten von Oxygen (kontinuierliches Spektrum) und Wasserstoff (10 Linien im Grün, Blau und Violett) und von *B. Davis*[872]) über das Nachleuchten von erregtem Helium (je eine Linie im Rot, Gelb und Grün und drei blaue Linien) erscheint es nicht unwahrscheinlich, daß die Meteorschweife durch das Nachleuchten des erregten Stickstoffs entstehen. Nach neueren Erörterungen von *C. C. Trowbridge*[873]) ließen sich von den von *Blajko* beobachteten Emissionen folgende als Stickstoffphosphoreszenzen erklären:

1. Meteor:	3573	$= N\,3584{,}7$
2. „	3803	$= N\,3789{,}3$
1 „	4042	$= N\,4028{,}7$
2. „	4066	$= N\,4042{,}8.$

Allerdings ist die Übereinstimmung der Wellenlängenwerte auch bei dieser Identifikationsweise nicht gerade hervorragend gut, doch wäre eine Erklärung hierfür vielleicht darin zu erblicken, daß bei verschiedenem Druck, also in verschiedenen Höhen in der Atmosphäre verschiedene Phosphoreszenzbänder des N zur Erscheinung kommen. *A. Wegener*[874]) meint, daß die bei großen Meteoren beobachteten Farbenänderungen im Sinne Weiß — Grün — Rot auf das Vordringen in immer tiefere Atmosphärenschichten zurückgeführt werden könne, und daß die grüne Farbe vielleicht durch Erregung der grünen Linie 4862 des Wasserstoffs, die rote Farbe dagegen durch Vordringen bis in die Stickstoffatmosphäre entstehe. Für eine endgültige Beantwortung

867) The Observatory 31 (1908), p. 402; Popular Science Monthly (New-York) 79 (1911), p. 191.

868) Astroph. Journ. 12 (1900), p. 8; 20 (1904), p. 49; Phys. Rev. 18 (1904), p. 124.

869) Phys. Rev. 23 (1906), p. 279.

870) London Roy. Soc. Proc. 85 A (1911), p. 377.

871) Wiedem. Ann. 19 (1883), p. 782; Verh. deutsch. Phys. Ges. 1883, p. 15; Nature 27 (1883), p. 403.

872) Phys. Rev. 20 (1905), p. 150.

873) Washington Nat. Akad. Proc. 10 (1924), p. 24.

874) Sirius 48 (1915), p. 145.

der hier noch offenen Fragen ist das Beobachtungsmaterial wohl noch zu spärlich.

23. Das Zodiakallicht. Nach visuellen Beobachtungen von *E. Liais*[874a]) und *M. Respighi*[875]), die ihre Untersuchungen in Rio de Janeiro bzw. am Schwarzen Meer anstellten, und von *A. Hall*[876]) ist das Spektrum des Zodiakallichtes offenbar kontinuierlich, doch war es wegen der geringen Helligkeit immer nur möglich gewesen, die das Energiemaximum im Grün umgebenden hellsten Partien zu erkennen. Auch *C. Piazzi-Smith*[877]), dessen Wahrnehmungen auch von seinen Mitarbeitern *Tacchini*, *Cacciatore* und *Ricca* bestätigt wurden, sah nur ein grünes Band bei 5000—5550 Å.E. und die grüne Nordlichtlinie bei 5571, die vom erwähnten grünen Band des Zodiakallichtes wie durch eine dunkle Absorption getrennt erschien. Diese grüne Nordlichtlinie ist jedoch nach Feststellungen von *C. Piazzi-Smith*[878]) selbst, dann von *H. C. Vogel*[879]) und von *A. W. Wright*[880]), welch letzterer übrigens im Spektrum des Zodiakallichtes auch das tellurische Regenband des Sonnenspektrums bei 5670—6100 Å.E. auffinden konnte, zumeist am ganzen Nachthimmel nachweisbar, also keineswegs für das Zodiakallicht typisch. Man schloß daher schon frühzeitig, daß das Zodiakallicht lediglich reflektiertes Sonnenlicht sei, und in Übereinstimmung damit fanden auch *E. Liais*[881]) und *A. W. Wright*[882]), daß sein Licht zu etwa 15—20% polarisiert sei.

Nach vergeblichen Versuchen von *C. Michie Smith*[883]) gelangen endlich *E. A. Fath*[884]) im Verein mit *J. C. Duncan* in den Jahren 1807 und 1809 auf der Licksternwarte und dem Solar Observatory auf dem Mt. Wilson drei photographische Aufnahmen des Zodiakallichtspektrums mit einem speziell für diesen Zweck gebauten, besonders lichtstarken Spektrographen und mit Expositionszeiten von $6^h\,1^m$, $11^h\,9^m$ und $12^h\,31^m$, auf denen, wie ein Vergleich mit dem am gleichen Apparat erhaltenen Spektrum des diffusen Tageslichtes erwies, die

874a) Paris C. R. 74 (1872), p. 262.

875) Paris C. R. 74 (1872), p. 514.

876) The Observatory 13 (1890), p. 77; Monthly Weather Review 34 (1906), p. 126.

877) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 32 (1872), p. 277.

878) Ebendort.

879) Astr. Nachr. 79 (1872), p. 327.

880) Am. Journ. of Science (3) 8 (1874), p. 39.

881) a. a. O.

882) Am. Journ. of Science (3) 7 (1874), p. 451.

883) Edinburgh Roy. Soc. Proc. 17 (1883), p. 142.

884) Lick Obs. Bull. Nr. 165 (1909).

Linien G sowie H und K des Sonnenspektrums als Absorptionsbänder auf kontinuierlichem Grund deutlich vorhanden waren. Damit war wieder bewiesen, daß das Zodiakallicht in reflektiertem Sonnenlicht leuchtet und gleichzeitig spektroskopisch die Richtigkeit der von anderer Seite ausgesprochenen Ansicht dargetan, daß das Zodiakallicht aus Staubteilchen besteht, die einen die Sonne zentrisch umgebenden linsenförmigen Raum erfüllen.

V. Das Fixsternsystem.

24. Die Klassifikation der Fixsternspektren. Bereits *J. Fraunhofer*[885]) war aufgefallen, daß es der Hauptsache nach dreierlei Arten typischer Spektren der Fixsterne gebe, nämlich Spektren der weißen Sterne, wie etwa Sirius, Spektren der gelben Sterne (Capella) und solche der roten Sterne (α Orionis), und zum gleichen Ergebnis gelangte $4^1/_2$ Dezennien später auch *A. Secchi*[886]), der bei dieser Gelegenheit auch schon das Auftreten der D-Linie des Natriums in den Spektren der roten Sterne betonte. Auf Grund weiterer Beobachtungen unterschied dann *A. Secchi*[887]) folgende drei Grundtypen:

Typus I: weiße Sterne wie Sirius, in deren Spektrum die Linie F (H_β) des Sonnenspektrums kräftig auftritt und auch noch eine Linie (H_γ) in der Nähe der G-Gruppe auffällig ist;

Typus II: rote Sterne wie α Orionis mit Bandenbildungen, die nach Rot abschattiert sind, und

Typus III: gelbe Sterne (Arkturus) mit zahlreichen kräftigen und scharfen Linien. Er erwähnte gleichzeitig, daß es aber insbesondere im Sternbild des Orion gewisse weiße Sterne gebe, deren Spektrum sich unter diese drei Hauptgruppen nicht einordnen läßt und die daher offenbar einen besonderen Typus für sich bilden. Unter Vertauschung der Bezeichnungsweise für die gelben und roten Sterne schloß *Secchi*[888]) dann schließlich dem nunmehrigen Typus III der roten Sterne noch einen Typus IV an, der ebenfalls unter den roten Sternen vorkommt und nach Violett abschattierte Bandenbildungen aufweist. Die bis zum Jahre 1898 bekannt gewordenen Sterne dieses *Secchi*schen Typus IV hat später *T. E. Espin*[889]) in einem kleinen Katalog zusammengestellt.

885) Bair. Akad. Denkschr. 5 (1817).
886) Paris C. R. 57 (1863), p. 71.
887) Paris C. R. 63 (1866), p. 621.
888) Paris C. R. 66 (1868), p. 124.
889) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 58 (1898), p. 443.

Auch bei *H. C. Vogel*, der auf Grund seiner Beobachtungen zu Bothcamp und Potsdam ebenfalls ein System von Spektraltypen aufstellte, werden die weißen und gelben Sterne zu den Typen I und II gerechnet, wie bei *Secchi*, die Spektren der roten Sterne mit nach Rot verlaufenden Banden dagegen als Typus IIIa, und Spektren roter Sterne mit nach Violett abschattierten Bändern als Typus IIIb bezeichnet. Diese in sich organische Typenfolge erfuhr aber bei *Vogel*[890]) dann durch eine weitere Unterteilung eine Störung ihrer Kontinuität. Er gliederte nun zunächst den Typus I noch in die drei Untergruppen *a*, *b* und *c*, denen er der Reihe nach die reinen Wasserstoffsterne (Sirius), die schon von *Secchi* als separate Gruppe erkannten Orionsterne oder Heliumsterne und die weißen Sterne mit hellen Linien (β Lyrae und γ Cassiopeiae, also Heliumsterne mit Emissionslinien) zuzählte, und zerfällte dann noch weiter den Typus Ia nach dem Verhalten der Wasserstofflinien in die Teilgruppen $\mathrm{I}a_1$, $\mathrm{I}a_2$ und $\mathrm{I}a_3$, die langsam zu den gelben Sternen hinüberführten, und den Typus Ic in $\mathrm{I}c_1$ und $\mathrm{I}c_2$, je nachdem nur die H-Linien oder auch Linien des He und anderer Elemente als Emissionen auftreten.[891]) Auch der Typus II hatte eine Zerlegung in IIa (Sonnensterne mit einem dem Sonnenspektrum ähnlichen Spektrum mit zahlreichen Absorptionslinien) und IIb erfahren, von denen die letztere Gruppe wieder die schon lange vorher von *Ch. Wolf* und *G. Rayet*[892]) neuentdeckten *Wolf-Rayet*-Sterne enthielt.[893]) *E. C. Pickering*[894]) hatte diese *Wolf-Rayet*-Sterne der *Secchi*schen Typenreihe einfach als Typus V angeschlossen. Eine Typeneinteilung, die der *Secchi*schen sehr ähnlich ist, hat außerdem noch *W. Huggins*[895]) auf Grund eigener Beobachtungen aus dem Verhalten der Ca^+-Linien *H* und *K* aufgebaut und schließlich noch durch Heranziehung des ultravioletten Teils des Spektrums vervollständigt.[896])

Unter dem Titel „The Draper catalogue" erschien im Jahre 1890 zu Cambridge (U. S. A.) nun ein Katalog von Sternspektren[897]), in dem ca. 10500 Sterne zumeist des nördlichen Himmels klassifiziert

890) Astr. Nachr. 84 (1874), p. 113; Potsdam Astrophys. Obs. Publ. 3 (1883), p. 127.

891) Potsdam Astrophys. Obs. Publ. 12 (1902), p. 1.

892) Paris C. R. 65 (1867), p. 292.

893) Die ersten drei von *Wolf* und *Rayet* entdeckten Vertreter dieses Typus waren die Sterne *BD* $+ 35^\circ$ 4001, $+ 35^\circ$ 4013 und $+ 36^\circ$ 3956.

894) Astr. Nachr. 127 (1891), p. 1.

895) London Roy. Soc. Proc. 30 (1879), p. 20.

896) Publ. of Sir Will. Huggins Observ. 1. An Atlas of representative stellar spectra from λ 4870—λ 3300 . . . London 1899, W. Wesley and Son.

897) Harvard Coll. Obs. Annals 27 (1890).

sind, und zwar nach einem ganz neuen System, bei dem zur Bezeichnung der aufeinanderfolgenden Typen die Buchstaben von *A* bis *O* verwendet werden. Während nun bald danach Miß *A. C. Maury*[898]) bei der Bearbeitung weiterer Spektralaufnahmen der Harvard-Sternwarte neuerlich eine andere Klassifikationsart benutzte, bei der 22 durch römische Ziffern bezeichnete Typengruppen noch durchwegs in die Untergruppen *a* (alle Linien der Metalle in normaler Schärfe, Linien des H und Ca verhältnismäßig breit), *b* (alle Linien verwaschen und wenig kräftig) und *c* (Linien des H und, wenn vorhanden, auch des He besonders scharf, schmal und kräftig) geteilt und sogar auch noch die Kombinationen *ab*, *ac*, ... eingeführt waren, blieb Miß *A. J. Cannon*[899]) bei einer Bearbeitung von 1122 Sternspektren im großen und ganzen bei der früheren Bezeichnungsweise des *Draper*katalogs. Der rohe Zusammenhang zwischen der *Secchi*schen Typenreihe und dem *Cannon*schen System ist der folgende:

Secchi	I:	*Cannon*	*A* (Wasserstoffsterne) und *B* (Heliumsterne)
„	I—II:	„	*F*
„	II:	„	*G* (Sonnentypus)
„	II—III:	„	*K*
„	III:	„	*M* (Spektren mit den Banden des TiO_2)
„	IV:	„	*N* (Spektren mit den Banden des C)
„	V:	„	*O* (*Wolf-Rayet*-Sterne).

Für Übergangstypen zwischen *A, B, F, G, K* wurde noch die Dezimalteilung verwendet, so daß z. B. *F*5 oder *F*5*G* ein Mittelspektrum zwischen *F* und *G* oder *F*0 und *G*0 bezeichnete, die *O*-Sterne enthielten noch die Untergruppen *a, b, c, d, e, e*5 und die roten *M*- und *N*-Sterne waren ebenso noch in die Abteilungen *a—d* bzw. *a—c* gegliedert.

Später fügten *C. E. Pickering*[900]) der *Cannon*schen Typenreihe noch einen Typus *R* oder *Secchi* VI und *P. W. Merrill*[901]) einen weiteren Typus *S* hinzu. Diese von *A. J. Cannon* sowie von *E. C. Pickering*[902]) in mehreren kleinen Katalogen der Spektren von einfachen und Doppelsternen beibehaltene Klassifikationsart ist nun allgemein gebräuchlich geworden und wird im neuen *Draperkatalog*[903]), in dem bereits

898) Ebendort 28 (1897), p. 1.

899) Ebendort 28 (1901), p. 129.

900) Harvard Coll. Obs. Circ. 145 (1908).

901) Publ. Astr. Soc. Pac. 28 (1916), p. 281.

902) Harvard Coll. Obs. Annals 56, part 4 (1908), part 5 (1911), part 7 (1912); Harvard Coll. Obs. Circ. 180 (1913).

903) Harvard Coll. Obs. Ann. 91—99 (1918—1924).

225300 Sternspektren behandelt sind, sowie in der „Henry Draper Extension“[904]), die der Klassifikation der Spektren schwächerer Sterne in verschiedenen Gegenden des Himmels gewidmet ist, strikte durchgeführt. Eine geringe Abänderung der *Cannon-Pickering*schen Bezeichnungsweise wurde schließlich noch auf der Versammlung der internationalen astronomischen Union zu Rom[905]) im Jahre 1922 beschlossen. Danach hat künftighin der Typus *Md* (rote Sterne mit hellen Linien) in Wegfall zu kommen und die Unterabteilungen *Ma*, *Mb*, *Mc*, *Na* und *Nb* sollen als *M* 0, *M* 3, *M* 8, *N* 0, *N* 3 bezeichnet werden, während die Einreihung der tiefroten *Nc*-Sterne in die Dezimalteilung mangels genauerer Kenntnis der Spektren vorläufig noch nicht möglich erscheint.

Schreibt man die *Cannon-Pickering*schen Spektralklassen in der Reihenfolge *O, B, A, F, G, K*, so bildet diese Reihe nach dem Auftreten und Verschwinden der Linien neutraler und ionisierter Atome im Sinne der Ionisationstheorie einen stetigen Übergang von den heißesten *O*-Sternen zu immer wenigen heißen Sternen (siehe unter Nr. **26**, Die effektiven Temperaturen der Fixsterne) oder von den weißen Sternen (*O, B, A*) über die gelblichweißen *F*- und die gelben *G*-Sterne hinweg zu den rötlichgelben *K*-Sternen. Während demnach die Typenreihe bis *K* eindeutig zu sein scheint, tritt nun ab *K* eine Spaltung in drei koordinierte, die Reihe fortsetzende Äste ein, deren einer von *K* nach dem Typus *M* weiterführt, während der zweite von *K* über *R* nach *N* und der dritte von *K* nach *S* weist. Auf allen drei Zweigen erfolgt aber das Weiterschreiten wieder im Sinne abnehmender Temperatur und zunehmender Röte. Nach *P. W. Merrills*[906]) Untersuchungen soll der Ast nach *R* und *N* sogar schon bei *G* abzweigen, so daß das Schema bestünde:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad\;\; \diagup R-N \\ B-A-F-G-K-M \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; \diagdown N \end{array}$$

Was die speziellen Merkmale der einzelnen Grundtypen und Unterabteilungen betrifft, so sei den bezüglichen Angaben von *A. J. Cannon* und *E. C. Pickering*[907]) sowie anderweitigen Untersuchungen folgendes entnommen:

904) Harvard Coll. Obs. Ann. 100, Nr. 1 (1925), Nr. 2 (1927), Nr. 3 (1927); Harvard Coll. Obs. Circ. 278 (1928).

905) Transactions intern. astron. Union 1 (1922), London; Astroph. Journ. 57 (1923), p. 65.

906) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 473.

907) Harvard Coll. Obs. Ann. 28 (1901), p. 129; 91 (1918), p. 5.

Typus O (*Wolf-Rayet*-Sterne), Sternfarbe weiß. Typisch für diese Sterne ist das Auftreten breiter heller Bänder bei den Wellenlängen 4633 und 4688 Å.E., von denen das erste unbekannten Ursprungs ist, während das zweite mit der Linie λ 4686 der *Bergmann*serie $3D - 4F$ des He^+ identisch ist. Außerdem tritt auch noch die sogenannte ζ Puppis-Serie des He^+ $4F - mG$ auf, und zwar als Emission in $Oa - Oc$, als Absorption in Od und Oe.

Oa zeigt helle Linien und Bänder auf schwach kontinuierlichem Grund, und zwar insbesondere die beiden typischen Bänder 4633 und 4688. H_γ und H_δ sind hell, ebenso die nur schwach sichtbare ζ Puppis-Serie und die Linie 4472 des neutralen Orthoheliums. In den Spektren der drei O-Sterne $BD + 36^0$ 4028, $+ 35^0$ 4013 und $+ 36^0$ 3956 hat Miß *C. H. Payne*[908]) auch noch die im gelben Teil liegenden Linien 5694 und 5812 des C^{++} als Emissionslinien aufgefunden. Auch Absorptionslinien, allerdings hochionisierter Atome, sind nach *C. H. Payne*[909]) schon im Oa-Sternen oft schwach sichtbar, und zwar die Linien 4634, 4640 des N^{++}, 4650 des C^{++} und 6578, 6583 und 4267 des C^+. *Payne* konnte diese Linien übrigens auch in den weiteren Untertypen Oc, Od, $Oe5$ nachweisen. Ein eigentümliches Verhalten zeigt der Stern γ Argus, dessen Spektrum daher als Oap ($p =$ peculiar) bezeichnet wird. Nach *C. D. Perrine*[910]) sind nämlich seine Emissionsbänder an der violetten Seite zeitweise von Absorptionslinien begleitet und außerdem[911]) schwankt die Intensität von H_β.

Ob. Nur helle Bänder und helle Linien, von den letzteren insbesondere die Linien des H und der ζ Puppis-Serie, die als schmale Emissionsbänder sichtbar sind. Das Band bei 4688 ist etwas breiter als das Band 4633 und durch eine noch hellere Emissionslinie so in zwei Teile gespalten, daß der eine Teil genau mit He^+ 4686 zusammenfällt. Die sonstigen bei Oa noch sichtbaren He-Linien treten im allgemeinen nicht auf, doch hat *C. H. Payne*[912]) die He^+-Linie 5411 in den Spektren der beiden Sterne $BD + 35^0$ 4001 und $+ 37^0$ 3821 vorgefunden. Im Spektrum des zweiten dieser beiden Sterne bemerkte *M. Wolf*[913]) eine Absorption bei 3868, also fast an der Stelle der Nebellinie 3869. *C. H. Payne*[914]) meint jedoch später wieder, daß in

908) Harvard Coll. Obs. Bull. 836 (1926).
909) Harvard Coll. Obs. Circ. 263 (1924).
910) Astroph. Journ. 52 (1920), p. 39.
911) Pop. Astr. 27 (1919), p. 30.
912) Harvard Coll. Obs. Bull. 836 (1926).
913) Heidelberg Akad. Sitz. 1913, Nr. 22.
914) Harvard Coll. Obs. Circ. 263 (1924).

den Spektren der Sterne vom Typus *Ob* Absorptionslinien überhaupt nicht vorkommen.

Oc. Der Hauptsache nach bestehen die Spektren wieder nur aus hellen Linien und Bändern auf kontinuierlichem Grund. Besonders auffällig, aber schmäler als in *Ob* sind 4633 und 4688. He 4472 ist hell, aber ziemlich schwach, und auch die Linien der ζ Puppis-Serie und des H sind noch als Emissionen vorhanden. Im Spektrum des Sterns $BD + 30^0$ 3639 (Typus *Ocp*) sollen nach *P. W. Merrill*[915]) die von *W. H. Wright*[916]) im Spektrum des planetarischen Nebels N.G.C. 7027 beobachteten Linien 6548,5 und 6583,4 als Emissionslinien vorkommen. Weiter beobachtete *J. C. Duncan*[917]) im Spektrum desselben Stern eine weitere Linie bei 4068,3. Ob diese Linie aber gerade mit einer Linie im Viellinienspektrum des Wasserstoffmoleküls identifiziert werden soll, wie *M. B. Snyder*[918]) glaubt, ist natürlich aus plausiblen Gründen mehr als fraglich. Gelegentlich kommen auch Absorptionslinien hochionisierter Atome vor, z. B. die zwischen 4633 und 4650 und die bei 4515 liegenden Linien von N^{++} und C^{++} nach nach *C. H. Payne*[919]) im Spektrum des Sterns C.P.D. -64^0 1629, bei dem übrigens auch die Emissionen des He und He^+ an der violetten Seite von schwachen Absorptionen begleitet sind.

Od. Nur die beiden Bänder bei 4633 und 4688 sind noch hell, die Linien der ζ Puppis-Serie und des H sowie die Linie 4472 des He dagegen dunkel. Auch die Ca^+-Linie *K* ist als Absorptionslinie vorhanden, und meistens sind auch noch in der Gegend von 5202 schwache, unbekannte dunkle Linien zu sehen. *O. Struve*[920]) bemerkte in den Spektren der Sterne der Typen *Od* und *Oe* an der violetten Seite der He-Linie 4472 bei 4470 noch eine schwache Absorptionslinie, die seiner Meinung nach mit Rücksicht auf das *Kossel-Sommerfeld*sche Verschiebungsgesetz vielleicht eine Linie des dem neutralen He ähnlichen Li^+ sein könnte.

Oe. Die beiden Bänder 4633 und 4688 sind noch hell, die Zahl der Absorptionslinien gegenüber *Od* größer. Neben der *Balmer*- und ζ Puppis-Serie treten bereits zahlreiche Linien des neutralen He auf und, wie *H. H. Plaskett*[921]) im Spektrum des Sterns $BD + 35^0$ 3930

915) Lick Obs. Bull. 230 (1913).
916) Ebendort 7 (1910), p. 61.
917) Ebendort 182 (1910).
918) Pop. Astr. 19 (1911), p. 233.
919) Harvard Coll. Obs. Bull. 834 (1926).
920) Astroph. Journ. 62 (1925), p. 198.
921) Dominion Obs. Publ. 1 (1922), Nr. 30, p. 354.

fand, auch noch Linien bei 4097, 4634, 4640 und 4858, die nach *A. Fowler*[922]) dem N^+ zuzuschreiben sind.

*Oe*5 (*Oe*5*B*).[923]) Die Bänder 4633 und 4688 fehlen und alle Linien, von denen insbesondere die Linien des H von H_β—H_μ, der ζ Puppis-Serie und des He auffallen, sind dunkel, meistens sind auch noch 4481 (Mg^+) und D_1 und D_2 des Na vorhanden. In den Spektren der beiden *Oe*5-Sterne 10 Lasertae und 9 Sagittae konnte *H. H. Plaskett*[924]) noch folgende Absorptionslinien hochionisierter Elemente vorfinden:

N^{++}: 4097, 4103, 4379, 4511, 4515, 4524, 4535, 4634, 4641. Die Identifikation dieser Linien als N^{++}-Linien rührt von *A. Fowler*[925]) her.

O^{++}: 3962, 5592 (nach Identifikationen von *A. Fowler* und *J. Brooksbank*[926])).

O^+: 4070, 4072, 4076, 4119, 4190, 4320, 4349, 4367, 4642, 4649.

C^{++}: 4648, 4650, 4652.

C^+: 4267. Die Linien von C^+ und C^{++} erhielt *J. S. Clark*[927]) bei starken Entladungen zwischen Kohle- oder Graphitelektronen in mit Wasserstoff gefüllten Röhren. *R. T. Merton*[928]) erhielt bei ähnlichen Versuchen auch Banden, die den *Wolf-Rayet*-Banden ähnlich waren. Die Linien des

Si^{++}: 4552, 4568 und des

Si^{+++}: 4089, 4116 waren ebenfalls vorhanden. Ihre Einteilung in Linien des Si^{++} und Si^{+++} rührt von *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[929]) her.[930])[931])

---

922) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 80 (1920), p. 692.

923) Statt der Bezeichnungsweise *Od, Oe, Oe*5 hat *H. H. Plaskett* [Dominion Obs. Publ. 2 (1924), p. 287] eine andere auf der Stärke der Absorptionslinien aufgebaute Klassifikation *Oe, O*5, *O*6—*O*9 vorgeschlagen, die aber, wie Miß *C. H. Payne* [Harvard Coll. Obs. Circ. 263 (1924)] meint, nicht so organisch verläuft, wie die sonst übliche und hier auch beibehaltene.

924) Dominion Obs. Publ. 1 (1922), Nr. 30, p. 351.

925) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 80 (1920), p. 692.

926) Ebendort 77 (1917), p. 511.

927) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 332.

928) London Roy. Soc. Proc. 91 A (1916), p. 498.

929) Comparison of the Spektra of Rigelian, Crucian and alnitamian Stars, Solar Physics Comittee 1 (1914).

930) Vgl. auch *J. Lunt*, Cape Obs. Ann. 10 (1906), p. 5.

931) *J. N. Lockyer* hatte übrigens schon längere Zeit vorher die Linien des Si in Bogenlinien und Funkenlinien und die letzteren in die Dublets 3856, 3863 und 4128, 4131, das Triplet 4552, 4568, 4575 und das Dublet 4089, 4116 eingeteilt und damit die Sonderung in Linien des neutralen Atoms, des Si^+, Si^{++} und Si^{+++} durchgeführt [London Roy. Soc. Proc 65 (1900), p. 449].

Eine weitere im Spektrum der *Oe* 5-Sterne gefundene Linie bei 4253,6 könnte nach *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[932]) vielleicht dem ionisierten Schwefel S^+ angehören, doch ist diese Identifikation wohl ebenso unsicher, wie bei der von *J. N. Lockyer*[933]) in einigen *B*-Sternen gefundenen und ebenfalls dem Schwefel zugeschriebenen Linien bei 4285. Ein Verzeichnis sonstiger bei den *O*-Sternen gefundener Absorptionslinien ist von *F. E. Baxandall*[934]) gegeben worden. Es sei schließlich noch bemerkt, daß das Vorkommen von Linien des O und N in Sternspektren bereits von *F. Mc Clean*[935]), *D. Gill*[936]) und *W. Huggins*[937]) festgestellt worden ist.

Typus B (Helium- oder Orionsterne), Sternfarbe weiß. Charakteristisch für diesen Typus sind die Linien des Parheliums und Orthoheliums, die beim Fortschreiten durch die Untergruppen zunächst kräftiger und schließlich so stark wie die Wasserstofflinien werden, um dann mit Annäherung an den nächsten Typus *A* wieder schwächer zu werden. In gleicher Weise werden die Linien hochionisierter Atome nach und nach schwächer, während gleichzeitig die Linien niedrigerer Ionisationsgrade auftreten und an Kraft gewinnen.

B 0. Die Linien des Wasserstoffs sind ziemlich kräftig und haben etwa 0,3 der Breite erreicht, die sie später in den *A*-Sternen aufweisen. Die ζ Puppis-Serie ist noch erkennbar, die Linien des neutralen He sind kräftig und außer den Linien des Si^{++} und Si^{+++} beginnen auch die Linien 4128, 4131 des Si^+ sichtbar zu werden. Außer den schon bei den *Oe* 5-Sternen erwähnten Siliziumlinien fand *J. Lunt*[938]) bei zwei Sternen noch die Linie 4575 des Si^{++}, und im Spektrum von ϱ Leonis kommen nach *W. C. Rufus, R. A. Sawyer* und *R. F. Paton*[939]) auch noch weiter vor die Linien 4813, 4820, 4829 des Si^{+++}. Meistens sind auch das schon von *J. Lunt*[940]) in den *B*-Sternen festgestellte O^+-Triplet 4070, 4072, 4076 sowie die Einfachlinie 4649 des O^+ ziemlich kräftig. Im Spektrum von ε Orionis sind von *J. N. Lockyer, F. E. Baxandall* und *C. P. Butler*[941]) noch die Linien 4097 und 4380 des N^{++} und die Linien 4648 und 4650 des C^{++} gefunden worden.

932) a. a. O. Siehe auch bei *C. H. Payne,* Harvard Coll. Obs. Circ. 256 (1924).
933) London Roy. Soc. Proc. 80 A (1907), p. 50.
934) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 166.
935) London Roy. Soc. Proc. 42 (1886), p. 418.
936) Ebendort 65 (1899), p. 196; Astroph. Journ. 10 (1899), p. 272.
937) Astr. Nachr. 149 (1899), p. 231; 150 (1899), p. 110.
938) Astroph. Journ. 11 (1900), p. 262.
939) Publ. Obs. Univ. of Michigan 3 (1923), p. 261.
940) Cape Obs. Ann. 10 (1906), 5 B.
941) London Roy. Soc. Proc. 82 A (1909), p. 532.

B 1. Die ζ Puppis-Serie ist nicht mehr vorhanden, dagegen werden die He-Linien kräftiger und die *Balmer*serie reicht weit ins Ultraviolett bis etwa H_π. Die Si^{+++}-Linien haben an Kraft verloren, doch konnte *A. Fowler*[942]) im Spektrum von β Crucis (*B* 1) noch weitere Si^{+++}-Linien bei 4814, 4820, 4829 und 5740 auffinden, und *F. Heuroteau*[943]) bemerkte auch noch andere Linienpaare desselben. Im Spektrum von β Crucis ist nach *D. Gill*[944]) auch die C^+-Linie 4267 vorhanden. Nach Miß *C. H. Payne*[945]) erreichen die Linien des O^+ und Si^{++} zwischen den Typen *B* 1 und *B* 2 ihre maximale Intensität.

B 2. Die He-Linien sind sehr kräftig. Die Linie 4116 des Si^{+++} fehlt bereits, die Linien 4089 des Si^{+++} und 4649 des O^+ sind zwar noch vorhanden, aber schon sehr schwach und nur etwa halb so stark wie bei *B* 1.

B 3. Die He-Linien haben ihre maximale Intensität erreicht, die bis etwa H_ξ reichende *Balmer*serie ist etwa halb so kräftig wie bei den *A*-Sternen. 4471 (Mg^+) ist kräftig. Während die Linien 4089 (Si^{+++}) und 4649 (O^+) und nach *C. H. Payne*[946]) auch die Linien des Si^{++} verschwinden, haben die Linien 4128, 4131 des Si^+ an Kraft zugenommen.

B 5. Die Heliumlinien nehmen an Kraft ab, die Wasserstofflinien haben etwa 0,6 der Breite im Typus *A*.

B 8. Die H-Linien sind fast so breit (0,8) wie bei den *A*-Sternen, von den He-Linien nur noch 4026 und 4472 ($1P—mD$) deutlich. Die beiden Si^+-Linien 4128 und 4131 sind kräftig und auch Metalllinien, wie Fe 4174, 4179, 4234 und 4384, die bei den *A*-Sternen vorkommen, werden sichtbar.

B 9. Der Typus gleicht völlig dem nächsten Typus *A* 0, nur die beiden Heliumlinien 4026 und 4472 sind noch vorhanden.

Typus A (Wasserstoffsterne), Sternfarbe weiß. Typisch für diese Sterne ist die Kraft der *Balmer*serie, deren Linien hier ihr Maximum an Intensität erreichen und durchweg breit und verwaschen erscheinen. Kräftig sind auch *H* und *K* des Ca^+ und 4481 (Mg^+) und die Funkenlinien (enhanced lines) der Metalle treten auf, insbesondere 4174 Fe^+, dann 4385 (Cr) und 4227 (Ca). Im visuellen Teil des Spektrums, der

942) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 76 (1916), p. 196.

943) The Observatory 39 (1916), p. 510.

944) Astroph. Journ. 10 (1899), p. 272.

945) Harvard Coll. Obs. Circ. 252 (1924).

946) Stellar Atmospheres, p. 69.

bei einigen *A*-Sternen von *E. P. Watermann*[947]) und *W. H. Wright*[948]) untersucht worden ist, sind die Linien durchweg weniger deutlich als im brechbareren Teil. Im Infrarot fand *P. W. Merrill*[949]) auch das im Sonnenspektrum nachgewiesene Sauerstofftriplet 7772, 7774, 7776 auf. Typisch für den ultravioletten Teil der Spektren der *A*-Sterne ist das Auftreten des kontinuierlichen Wasserstoffspektrums an der Seriengrenze des H, dessen Anwesenheit übrigens nach *Ch'ing Sung Yü*[950]) auch schon bei den *B*-Sternen merkbar sein soll, und das zuerst von *W. Huggins*[951]) bei Wega und einigen anderen *A*-Sternen beobachtet und später von *J. Hartmann*[952]) und *W. H. Wright*[953]) genauer beschrieben worden ist. Die kontinuierliche Absorption beginnt aber nicht an der Seriengrenze selbst, sondern schon etwas früher, etwa bei der letzten sichtbaren *Balmer*linie, wie *Ch'ing Sung Yü*[954]) feststellen konnte. Da die Zahl der sichtbaren *Balmer*linien nach *C. H. Payne* und *M. Howe*[955]) bei Sternen von größerer Leuchtkraft, also geringerer Dichte, wegen der größeren Atomabstände größer ist als bei dichteren Sternen, spielen also die Atomabstände auch bei der Verschiebung des Anfangs des kontinuierlichen Spektrums an der Seriengrenze eine Rolle. Man wird sich somit vorstellen müssen, daß die Serie praktisch mit der letzten bei den gegebenen Atomabständen noch möglichen Quantenbahn endigt und daß dann Loslösung aus dem Verband des eigenen Atoms durch Übergang in den eines anderen unter Aufnahme oder Emission nicht gequantelter Energie stattfindet.

A 0. Die Linien *H* und *K* des Ca^+ haben etwa $^1/_{10}$ der Breite von H_δ, so daß H und He noch getrennt erscheinen. Nach *C. H. Payne*[956]) erreichen die beiden Si^+-Linien 4128 und 4131 bei diesem Typus ihre maximale Intensität. *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[957]) fanden im Spektrum des Sirius das Zinktriplet 4680, 4722 und 4810. Die nächsten Untertypen bis zum Typus *F* unterscheiden sich von *A* 0 hauptsächlich durch die zunehmende Kraft der Linien *H* und *K* und durch das Hinzutreten neuer und immer kräftigerer Metallinien.

---

947) Lick Obs. Bull. 243 (1913).
948) Lick Obs. Bull. 333 (1921).
949) Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1925), p. 272.
950) Publ Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 112.
951) Atlas of representative stellar spectra, p. 85
952) Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 429.
953) Lick Obs. Bull. 10 (1921), p. 101.
954) Lick Obs. Bull. Nr. 375 (1926).
955) Harvard Coll. Obs. Circ. 287 (1925).
956) Harvard Coll. Obs. Circ. 252 (1924).
957) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 177.

A 2. *K* hat etwa 0,4 der Intensität von H_δ, auch *H* ist kräftiger, so daß sie mit H_ε verschmilzt. 4227 (Ca) ist in *A* 2 etwa dopelt so kräftig wie in *A* 0. Mg^+ 4481 erreicht nach *C. H. Payne*[958]) das Maximum der Intensität.

A 3. Nach *D. H. Menzel*[959]) befinden sich die Linien der *Balmer*serie im Intensitätsmaximum. Die Linien 4227 (Ca), 4234 Fe und 4481 Mg^+ sind nahezu gleich kräftig.

A 5. Die Breite der Wasserstofflinien ist auf etwa 0,7 der Breite bei *A* 0 zurückgegangen. Mg^+ 4481 ist schwach, dagegen sind die Linien 4299 und 4303 der Ca kräftig. Das *G*-Band wird zuerst sichtbar, es ist aber nicht kontinuierlich, obwohl die Linien 4306, 4308 und 4309 desselben bei schwächerer Dispersion nicht getrennt werden können.

Typus F. Sternfarbe gelblichweiß. Der Typus ist ein Mitteltypus zwischen den Wasserstoffsternen *A* und den Sternen vom Sonnentypus *G*. Nach *P. W. Merrill*[960]) soll H_α gelegentlich als helle Linie auftreten.

F 0. Die Wasserstofflinien sind nur noch halb so breit wie bei *A* 0, *K* ist so breit wie *H* und H_ε zusammengenommen. Das *G*-Band ist noch nicht kontinuierlich, da die Linien 4306 (Ti), 4308 (Ca, Fe), 4309 (Fe) und 4313 (Ti) mit stärkerer Dispersion noch getrennt werden können.

F 2. 4308 und 4309 sind kräftiger und breiter, so daß das *G*-Band fast kontinuierlich erscheint.

F 5. Die Wasserstofflinien sind nur noch etwa 2—3 mal so stark wie im folgenden Typus *G*. 4227 (Ca) ist fast so kräftig wie das *G*-Band, das nun in Einprismenapparaton völlig kontinuierlich erscheint. Die Spektren zeigen zahlreiche Metallinien.

F 8. Mit Ausnahme der noch etwas kräftigeren Wasserstofflinien gleicht das Spektrum völlig dem *G*-Typus.

Typus G (Sonnentypus), Sternfarbe gelb. Das Spektrum ist das typische Sonnenspektrum, die *Balmer*linien sind unauffällig geworden, *G*, *H* und *K* dagegen von außerordentlicher Breite und Kraft, so daß *K* nun etwa doppelt so breit erscheint wie H_δ in den Spektren vom Typus *A* 0. Nach *F. E. Baxandall*[961]) werden nun die Linien der Tem-

958) Stellar Atmospheres, p. 72.

959) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

960) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 263.

961) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1926), p. 524.

peraturklassen I, II, III (niedere Temperatur) von *A. S. King*[962]) auf dem Wege von G zum nächsten Typus K kräftiger, die Linien höherer Temperatur (Klassen IV und V) dagegen schwächer. Ebenso scheinen im G-Band bereits Linien des H + C aufzutreten, die von G ab immer kräftiger werden.

$G\,0$. Die *Balmer*linien haben etwa $^1/_5$ ihrer Breite im Typus $A\,0$ und das G-Band ist nur bei starker Dispersion auflösbar. Die Linien H und K zeigen sich manchmal umgekehrt, wie beispielweise *H. Deslandres* und *V. Burson*[963]) bei α Aurigae konstatierten.

$G\,5$. Wasserstofflinien noch schwächer. Im Violett zeigt sich ein Helligkeitsabfall, und möglicherweise sind die Partien 4470—4525, 4614—4648 und vielleicht auch 4070—H_δ etwas heller als der angrenzende kontinuierliche Grund.

Typus K. Sternfarbe rötlichgelb. H und K sind nach *G. Eberhard* und *K. Schwarzschild*[964]) sowie *H. Deslandres* und *V. Burson*[965]) meistens umgekehrt. Sie sind drei- bis viermal so kräftig wie die *Balmer*linien in $A\,0$ und stehen, wie *H. D. Menzel*[966]) feststellte, im Maximum der Intensität.

$K\,0$. Die Breite der *Balmer*linien beträgt etwa 0,08 ihrer Breite bei $A\,0$. Der Helligkeitsabfall bei den kürzeren Wellenlängen setzt bereits beim G-Band ein, daß noch kontinuierlich ist. Die Spektralgebiete 4470—4525, 4614—4648 sind nun deutlich heller als der kontinuierliche Grund, und ähnliches gilt von den Stellen 4078—H_δ und 4216—4227.

$K\,2$. Der Helligkeitsabfall im Blau und Violett ist noch deutlicher. Von den TiO_2-Banden, deren Kanten bei 4762 und 4954 liegen, ist noch nichts zu bemerken. Das G-Band ist noch kontinuierlich.

$K\,5$. Die TiO_2-Banden bei 4762, 4954 und 5168 sind bemerkbar. Die Intensität der *Balmer*linien ist auf 0,05 der Stärke bei $A\,0$ gesunken; am auffälligsten sind H und K (Ca^+) und 4227 (Ca), welch letztere mehr als halb (0,6) so breit ist, als H_δ im Typus $A\,0$. Das

962) *King* hat die Linien verschiedener Elemente nach ihrem ersten Auftreten bei verschiedenen Temperaturen im elektrischen Ofen in die Temperaturklassen I—V im Sinne wachsender Erregung geordnet. Siehe hierzu die Tabellen im Astroph. Journ. 37 (1913), p. 119, 239; 39 (1914), p. 139; 41 (1915), p. 86; 42 (1915), p. 344; 48 (1918), p. 13.

963) Paris C. R. 172 (1921), p. 405.

964) Preuß. Akad. Sitz. 1913, p. 308; Astroph. Journ. 38 (1913), p. 292.

965) Paris C. R. 172 (1921), p. 405.

966) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

G-Band ist nicht mehr kontinuierlich, sondern in die Einzelbänder 4299—4301, 4306—4309, 4314—4315 aufgelöst. Helle Bänder liegen bei 4470—4525, 4614—4648 und 4556—4586.

Typus M. Sternfarbe rot. Das Charakteristische dieses Typus sind die Banden des Titanoxyds, von denen *H. F. Newall* und *B. Cookson*[967]) auch die im äußersten Rot bei 7053, 7087 und 7124 gelegenen vor finden konnten. Doppelte Umkehr der *H*- und *K*-Linien wurde bei α Orionis von *H. Deslandres* und *V. Burson*[968]) festgestellt. Eine Bemerkung von *F. E. Baxandall*[969]), daß bei Sternen dieses Typus vornehmlich die Bogenlinien eine Verstärkung gegenüber den Typen *K* und *G* zeigen, wurde von *P. W. Merrill*[970]) an Linien des Mg (4571), Sr, V, Cr, Mn, Fe bestätigt.

M 0. Die TiO_2-Banden sind kräftig und an den Kanten scheinbar aufgehellt, *G* ist aufgelöst und das helle Band bei 4556—4586 auffälliger als bei *K* 5 und fast so intensiv wie das Band 4470—4525. Auch der Teil des Spektrums bei 4657—4668 erscheint aufgehellt.

M 3. Noch ein weiteres nach Rot abschattiertes Band mit der Kante bei 5445 ist vorhanden, und 4227 (Ca) ist so intensiv wie H_δ in den *A* 0-Spektren.

M 8. Das kontinuierliche Spektrum ist so schwach, daß die an den Kanten von Emissionen begleiteten Absorptionsbanden den Eindruck eines reinen Bandenspektrums hervorrufen. Was schließlich noch den Typus

Md betrifft, der von Miß *W. P. Fleming*[971]) noch in zehn Untergruppen *Md* 1—*Md* 10 geteilt worden ist, so umfaßte derselbe alle langperiodischen Veränderlichen vom Typus *M*, bei denen mindestens eine Wasserstofflinie hell erscheint. Auch Linien anderer Elemente können als Emissionen auftreten, wie z. B. Eisenlinien nach *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[972]), und, wie *P. W. Merrill*[973]) meint, vielleicht auch die Nebellinie bei 4658.

Typus R. Sternfarbe gelb. Der Typus ist charakterisiert durch das Auftreten der nach Violett abschattierten Kohlebanden, insbesondere durch das sich von 4640—4750 erstreckende *Swan*band C IV.

967) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 67 (1907), p. 482.
968) Paris C. R. 172 (1921), p. 729.
969) Solar Physics Com. Publ. London 1914.
970) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13.
971) Harvard Obs. Coll. Ann. 56 (1912), p. 197.
972) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 263; 34 (1922), p. 175.
973) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 134.

Ordnet man die Spektren nach der Intensität der C-Linien bzw. C-Bänder, so zeigt sich nach Untersuchungen von *W. C. Rufus*[974]) ein stetiges Anwachsen von den *G*-Sternen über den Typus *R* hinweg zum Typus *N*. Mit den *R*-Sternen beginnt also ein Separatzweig der Typenreihe, der bei den *G*-Sternen beginnt und bei den *N*-Sternen endigt. Zum gleichen Ergebnis gelangte auch *W. S. Adams*[975]) auf Grund einer Untersuchung des Verhaltens der C-Banden und der Funken- und Bogenlinien von Fe, Ti, V und Ca.

R 0 zeigt neben dem Band C IV noch ein anderes Band unbekannten Ursprungs bei 4395, das etwa ebenso stark ist wie das *G*-Band. 4227 (Ca) und die Eisenlinien 4234, 4236 und 4239 sind sehr kräftig und das violette Ende des Spektrums ist noch so hell, daß die Linien *H* und *K* gut sichtbar sind.

R 3. Die violette Region ab H_γ ist geschwächt, aber *H* und *K* sind noch erkennbar.

R 5. Bei kleiner Dispersion erscheint das Spektrum ab 4240 ganz schwach und dabei rein kontinuierlich. Bei 4300, 4400 und 4840 scheinen Emissionen vorhanden zu sein.

R 8. Weitere Schwächung des violetten Teils ab 4240. Die Reihe der *R*-Sterne setzt fort im

Typus N, Sternfarbe rot, in dem ebenfalls die Kohlebanden prädominieren. Auf visuellem Wege hat *N. C. Dunér*[976]) bereits die *Swan*bänder C I bis C IV beobachtet und *G. E. Hale*, *F. Ellermann* und *J. A. Parkhurst*[977]) konnten später photographisch bei acht *N*-Sternen nicht nur die *Swan*banden C II (5505—5639) mit vier Kanten, C III (5169) mit einer Kante sowie C IV (4697—4738) mit drei Bandenköpfen und die Kante 4381 von C V, sondern auch alle sechs Kanten von Cy II (4503—4609) nachweisen. Außerdem fanden sie zahlreiche kräftige Absorptionslinien neutraler Atome der Metalle und Emissionslinien, von welch letzteren später *C. D. Shane*[978]) einige als H-Linien identifizieren konnte.

N 0. Das Spektrum ist zwar noch bis *H* und *K* vorhanden, aber ab 4240 noch schwächer als in *R* 8. Das C IV-Band teilt das Spektrum in zwei Teile verschiedener Intensität; der kurzwellige Teil hat nur etwa 0,8 der Kraft der langwelligen Hälfte.

---

974) Pop. Astr. 23 (1915), p. 637.

975) Publ. Astr. Soc. Pac. 27 (1915), p. 238.

976) Svenska Vetenskaps Akad. Handlingar 21 (1884), Nr. 3.

977) Yerkes Obs. Publ. 2 (1904), Nr. 5.

978) Lick Obs. Bull. Nr. 329 (1919).

N 3. Der kurzwellige Teil ist noch schwächer geworden und hat nun etwa 0,6 der Intensität des langwelligen Teiles.

Ein dritter Ast führt vom Typus *K* weg zum

Typus S. Sternfarbe rot. Der Typus (Hauptvertreter *R* Cygni) wurde bereits von *W. H. Wright*[979]) und *T. E. Espin*[980]) beschrieben, die neben außerordentlicher Schwäche der TiO_2-Banden noch andere Eigentümlichkeiten betonten. *P. W Merrill*[981]) fand außer einem gegen die langen Wellen abschattierten Band bei 6470 noch zwischen 4630 bis 4660 charakteristische Absorptions- und Emissionslinien und weitere zwei Bänder. Derselbe[982]) konnte dann durch Vergleich mit Wellenlängenmessungen von *J. M. Eder* und *E. Valenta*[983]) mehrere zwischen 6229 und 6612 gelegene Linien und Banden als von Zr und ZrO_2 herrührend identifizieren und später auch noch zwischen 4536—4828 weitere elf kräftige Bogenlinien des Zr auffinden, die in den Spektren der *M*- und *N*-Sterne entweder fehlen oder nur sehr schwach auftreten.[984]) Von den anderen Absorptionslinien sind 4554 (Ba) und 4607 (Sr) besonders kräftig. Miß *C. H. Payne*[985]) hat auf die eigentümliche Tatsache hingewiesen, daß die bei den *M*-, *R*-, *N*- und *S*-Sternen beobachteten Banden durchweg von Oxyden herrühren, deren Grundelemente der vierten Kolonne des periodischen Systems angehören. Eine Beschreibung der Spektren von 31 Sternen vom Typus *S* hat kürzlich *P. W. Merrill*[986]) gegeben, während die Wellenlängen aller bei den Typen *G, M, R, N, S* bisher beobachteten Banden und deren eventuelle Identifikationen von *F. E. Baxandall*[987]) zusammengestellt worden sind.

Bei allen Klassifikationsarbeiten an der Harvard-Sternwarte sind Aufnahmen mit dem Objektivprisma benutzt worden. Versuche, auch Aufnahmen an Spaltspektrographen heranzuziehen, wurden mehrfach unternommen, z. B. schon von Miß *A. Cannon*[988]), die dabei fand, daß sich Aufnahmen mit dem Objektivprisma insbesondere bei Sternen

979) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 548.
980) Ebendort 72 (1912), p. 546.
981) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 457.
982) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 217.
983) Wien Sitzber. 119, IIa (1910), p. 9, 519.
984) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13.
985) Stellar Atmospheres, p. 75.
986) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 23; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 325 (1927).
987) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 166.
988) Harvard Coll. Obs. Ann. 56 (1913), part 8.

früherer Typen zur Klassifikation besser eignen. Später hat *W. S. Adams*[989]) festgestellt, daß sich auch das Intensitätsverhältnis gewisser Linien zur Klassifikation der Spektren eigne, und zwar die immer mit H_β bzw. H_γ zu vergleichenden Linien 4227 (Ca) und 4383 (Fe) für die Typen $F0$—$G5$, 4326 und 4405 (Fe) für $F3$—$M0$, 4352 (Fe + Mg) für $F0$—$M0$ und 4872, 4957 (Fe) für $G0$—$M0$. Bald aber fanden *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[990]) systematische Differenzen zwischen den Typenschätzungen an Spalt- und Objektivprismaspektrogrammen im Sinne einer Verschiebung um + 1,6 Typenunterklassen bei den ersteren. Die Bestimmungen stimmen aber besser überein für die F- und M-Sterne als bei den G- und K-Sternen, wo die Differenzen bei den Zwergsternen größer ausfallen als bei den Riesen.[991]) Bei mehreren Untersuchungen fand *S. Albrecht*[992]), daß die Wellenlängen gewisser Linien mit dem Typus zu variieren scheinen, und zu einem ähnlichen Resultat kam auch *J. Voûte.*[993]) Die beobachteten Schwankungen sind aber so klein (nur einige Hundertstel Å.E.) und von Linie zu Linie oft sogar dem Sinne nach verschieden, daß sie vorläufig kaum zu Klassifizierungszwecken verwendet werden könnten. *F. E. Baxandall*[994]) meint, daß es sich dabei nicht um eigentliche Änderungen der Wellenlänge, sondern um einen „blend effekt“ durch eng benachbarte andere Linien handle, deren Intensität sich auf dem Wege durch die Typenreihe verändert.

Schließlich sei noch in der folgenden Tabelle der Zusammenhang gegeben, der zwischen den verschiedenen Klassifikationsarten des ursprünglichen *Draper*katalogs[995]), dann von *Pickering-Cannon*[996]) nebst den auf dem Kongreß der internationalen astronomischen Union[997]) beschlossenen Änderungen, von Miß *Maury*[998]), *Secchi* und *Vogel* besteht. Des historischen Interesses wegen ist auch die Typenreihe von *Mc Clean*[999]), die eigentlich nie praktisch verwendet wurde, beigefügt.

989) Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 143; Mt. Wilson Solar Obs. Comm. 23 (1916).

990) Astroph. Journ. 46 (1917), p. 313.

991) Pop. Astr. 29 (1921), p. 143.

992) Cordoba Boletin 1 (1914); Astroph. Journ. 33 (1911), p. 130; 50 (1919), p. 277; Pop. Astr. 29 (1921), p. 144.

993) Astroph. Journ. 47 (1918), p. 137.

994) Astroph. Journ. 48 (1918), p. 59.

995) Harvard Coll. Obs. Ann. 27 (1890).

996) Ebendort 28 (1901) und 91—99 (1918—1924).

997) Transactions of the Intern. Astron. Union 1 (1922).

998) Harvard Coll. Obs. Ann. 28 (1897).

999) Phil. Trans. 191 (1898).

Draper-Kat. 1890	*Pickering-Cannon* 1901—1924	Astr. Union 1922	*Maury* 1897	*Secchi*	*Vogel*	*Mc Clean* 1898
O	*Oa*		L	V	IIb	I
	Ob—*Oe*		XXII			I
B, *C*	*Oe* 5		I	I	Ib	I
	B 0		II	I	Ib	I
	B 1, *B* 2		III, IV	I	Ib	I
	B 3		IV	I	Ib	I
	B 5		V	I	Ib	I
	B 8, *B* 9		VI	I	Ia1?	I
B, *A*	*A* 0		VII, VIII	I	Ia2	II
	A 2		VIII, IX	I	Ia2	II
	A 5		X	I	Ia2	III
E, *F*, *G*	*F*		XI	I	Ia3	III
	F 5		XII	I	Ia3	III
H, *I*, *K*, *L*	*F* 8		XIII	II	IIa	IV
	G		XIII, XIV	II	IIa	IV
	G 5		XIV	II	IIa	IV
	K 0, *K* 2		XV	II	IIa	IV
	K 5		XVI	II	IIa	V
M	*Ma*	*M* 0	XVII	III	IIIa	V
	Mb	*M* 3	XVIII	III	IIIa	V
	Mc	*M* 8	XIX	III	IIIa	V
	Md	—	XX	III	IIIa	V
N	*R* 0—*R* 8		—	IV	IIIb	VI
	Na	*N* 0	XXI	IV	IIIb	VI
	Nb	*N* 3	XXI	IV	IIIb	VI
	Nc	—	—	—	IIIb	VI
	S		—	—	—	—

Die mit dem Zeichen *Q* zu bezeichnenden „neuen Sterne“ und die eine Gruppe *P* bildenden Gasnebel werden in Nr. **30** und **32** speziell besprochen werden.

25. Besonderheiten in den Spektren der Fixsterne. Schon in den *Draper*katalogen ist auf die individuellen Unterschiede in den Spektren der einzelnen Sterne gegen den für die betreffende Spektralklasse typischen Stern durch Beifügung eines *p* (peculiar) zur Typusbezeichnung Rücksicht genommen worden (*B* 8 *p* bedeutet demnach z. B. ein Spektrum vom Typus *B* 8 mit besonderen Eigentümlichkeiten). Zur besseren Kennzeichnung der in den Spektren einzelner Sterne beobachteten Besonderheiten ist auf dem Kongreß der internationalen astronomischen Union in Rom im Jahre 1922[1000]) folgende ausführliche Bezeichnungsweise durch kleine Buchstaben beschlossen worden:

1000) Transactions Intern. Astr. Union 1 (1922); Astroph. Journ. 57 (1923), p. 65.

Präfixe:

c *Maurys* *c*-Charakter.
g Riesenstern (giant).
d Zwergstern (dwarf).
s Spektren mit besonders scharfen Linien.
n Spektren mit diffusen (nebulous) Linien.

Suffixe:

e Auftreten heller Linien, die dem Grundtypus nicht eigentümlich sind.
ep Besonderes Verhalten eines Sterns mit hellen Linien gegenüber einer Gruppe von *e*-Sternen mit gleichmäßigem Verhalten.
er Das Auftreten von Umkehrungen (Reservals) in den hellen Linien.
eq Das Auftreten von Absorptionslinien an der violetten Kante von Emissionslinien, wie dies für die neuen Sterne (Typus *Q*) typisch ist.
v Veränderlichkeit des Spektrums.
ev Veränderlichkeit (Auftauchen und Verschwinden und überhaupt Intensitätsänderungen) der hellen Linien.

Außerdem können eventuell noch die Linien in ihrer üblichen Bezeichnungsweise beigefügt werden (z. B. $B0e\ H_\alpha$), die das abnorme Verhalten zeigen.

Von Eigentümlichkeiten, die ganze Gruppen von Sternen aufweisen oder einzelnen Sternen eine Art Ausnahmestellung zu geben scheinen, sind folgende bemerkt worden:

a) *Auftreten heller Wasserstofflinien bei den B-Sternen.* In den Spektren zahlreicher *B*-Sterne erscheinen, wie schon *W. W. Campbell*[1001]) bemerkt hat, die Wasserstofflinien als Emissionslinien. Später sind diese *Be*-Sterne hauptsächlich von *R. H. Curtiss*[1002]) und von *P. W. Merrill* genauer studiert worden, und insbesondere der letztere[1003]) sowie *C. H. Payne*[1004]) haben Verzeichnisse solcher *Be*-Sterne zusammengestellt. Schon im Jahre 1913 hat *P. W. Merrill*[1005]) versucht, diese *Be*-Sterne nach dem verschiedenen Verhalten der Emissionslinien in Gruppen einzuteilen, und spätere Untersuchungen von *P. W. Merrill*,

1001) Astroph. Journ. 2 (1895), p. 177.

1002) Pop. Astr. 24 (1916), p. 658.

1003) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 336; 33 (1921), p. 112, 264; 34 (1922), p. 223, 294, 351.

1004) Harv. Coll. Obs. Bull. 846 (1927). Ein Verzeichnis von Sternen mit hellen Wasserstofflinien ist u. a. auch von Miß *W. P. Fleming* in Harvard Coll. Obs. Ann. 56 (1912), p. 181 gegeben worden.

1005) Lick Obs. Bull. 237 (1913).

M. L. Humason und *C. G. Burwell*[1006]) haben dazu ergeben, daß die Wasserstoffemissionen einfach (*S*- oder Single-Form), doppelt (*D*- oder Double-Form) und auch an der violetten Seite von einer Absorption begleitet sein können (*P*- oder *P* Cygni-Form). Da der kontinuierliche Grund neben diesen Emissionen stets etwas schwächer erscheint, handelt es sich bei den *S*- und *D*-Formen vermutlich um einfache und doppelte Umkehr schwacher, aber breiter Absorptionen.[1007]) Aus diesen Untersuchungen und aus einer Statistik von *F. Henroteau*[1008]) geht auch hervor, daß helle Wasserstofflinien fast ausschließlich nur bei den Typen $B0 - B3$, und nur ganz ausnahmsweise noch bei späteren Sternen vorkommen, z. B. bei $B8$, wie von *R. H. Curtiss*[1009]) bemerkt wurde, oder gar bei *A*-Sternen, wie *W. P. Fleming*[1010]) hat feststellen können. *B. P. Gerasimovič*[1011]) fand Andeutungen dafür, daß der *Be*-Charakter mit höherer effektiver Temperatur und etwas größerer absoluter Leuchtkraft verbunden sei.

Umwandlungen der hellen Wasserstofflinien in dunkle und umgekehrt sind von *C. D. Perrine*[1012]), *M. L. Humason* und *P. W. Merrill*[1013]), sowie von *P. Davidovich*[1014]) beobachtet worden, und *R. H. Curtiss*[1015]) hat periodische Intensitätsänderungen mit Perioden von oft mehreren Jahren ohne gleichzeitige Veränderlichkeit der Sternhelligkeit festgestellt. Eine von dem letzteren[1016]) aufgestellte merkwürdige Beziehung zwischen den Breiten der hellen Linien, derzufolge sich aus der Breite von H_β die Breiten der anderen Linien bei allen diesen Sternen durch die gleiche Formel mit den gleichen numerischen Parametern ableiten lassen sollen, ist bis jetzt physikalisch wohl völlig unerklärlich.[1017])

1006) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 389.

1007) Siehe Astroph. Journ. 61 (1925), p. 3.

1008) Ottawa Domin. Obs. Publ. 5 (1921), Nr. 5.

1009) Publ. Obs. Univ. of Michigan 3 (1923), p. 16. Der Arbeit sind vorzügliche Abbildungen beigeschlossen.

1010) Harvard Coll. Obs. Ann. 56 (1912), p. 181.

1011) Harvard Coll. Obs. Bull. 849 (1927).

1012) Pop. Astr. 27 (1919), p. 90.

1013) Harvad Coll. Obs. Bull. 779 (1922).

1014) Ebendort 846 (1927).

1015) Pop. Astr. 33 (1925), p. 537.

1016) Publ. Obs. Univ. of Michigan 3 (1923), p. 10

1017) Bemerkenswert ist, daß *P. W. Merrill*, Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1924), p. 134 eine helle Linie im Spektrum von RY Scuti bei 4658 mit einer Nebellinie identifiziert. Der Stern wird von ihm als *Bp* bezeichnet, ist aber im *Draper*katalog, Harvard Coll. Obs. Ann. 97 (1922), p. 257 nicht klassifiziert und sein Spektrum dort unter Nr. 169515 wie folgt beschrieben: The spectrum is nearly

b) *Auftreten heller Linien bei den roten Sternen.* Helle Linien, hauptsächlich des Wasserstoffs, pflegen auch bei den roten Sternen, also am Ende der Spektraltypenreihe, aufzutreten. Fast stets handelt es sich in solchen Fällen um langperiodische veränderliche Sterne, so daß aus dem Vorhandensein solcher heller Wasserstofflinien mit großer Sicherheit auf Veränderlichkeit des betreffenden Sterns geschlossen werden kann.[1018])

Alle Sterne der Untergruppen *Ma*, *Mb*, *Mc*, bei denen wenigstens eine H-Linie hell erschien, wurden bis zum Jahre 1922 als *Md*-Sterne bezeichnet, seither aber organischer als *M*0*e*, *M*3*e*, *M*8*e* klassifiziert. Auch bei Sternen der Typen *N* und *S* kommen nach *C. D. Shane*[1019]) und *P. W. Merrill*[1020]) helle Linien des H vor. Was das Auftreten anderer heller Linien bei den roten Sternen betrifft, so haben *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1021]) in den Spektren einiger *M*-Sterne auch helle Eisenlinien gefunden, und die gleichen Beobachtungen machte später *P. W. Merrill.*[1022]) Der letztere[1023]) hält es für möglich, daß eine helle Linie im Spektrum des roten *M*-Veränderlichen R. Aquarii mit der Nebellinie 4658 identisch sei. Merkwürdig wäre dann allerdings, daß dieselbe Linie dann nicht nur in den Atmosphären der kältesten, sondern, wie bereits bei Besprechung der *Be*-Sterne erwähnt, auch der heißesten Sterne als Emissionslinie zustande kommen müßte. Das Verhalten der hellen Linien bei den langperiodischen Veränderlichen wird in Nr. **31** noch näher besprochen werden.

c) *Sterne mit hellen Eisenlinien (Eisensterne).* Wie schon von *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[1024]) bei μ Centauri und γ Cassiopeiae bemerkt worden ist, kommen außer hellen Wasserstofflinien meistens auch helle Eisenlinien vor. Sie treten aber nicht nur in den Spektren der Typen *B*, *M*, *N*, *S* auf, sondern auch bei mittleren Typen *G* und *K* und bei den neuen Sternen. Ihr Erscheinen dürfte nach *P. W. Merrill*[1025]) aber an das Vorhandensein heller Wasserstoff-

---

continuous. Very faint, dark Hydrogen lines are seen and bright lines ar suspected to be present. Class and Period unknown.

1018) Siehe bei *P. W. Merrill,* Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13.

1019) Lick Obs. Bull. 329 (1919).

1020) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13.

1021) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 263; 34 (1922), p. 175.

1022) Ebendort 39 (1926), p. 363; Astroph. Journ. 65 (1927), p. 286; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 334 (1927).

1023) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 247; 34 (1924), p. 134.

1024) London Roy. Soc. Proc. 74 A (1905), p. 548.

1025) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 286; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 334 (1927).

linien gebunden sein, und sie verschwinden, wie eine Mt. Wilson-Aufnahme des Spektrums von μ Centauri aus dem Jahre 1924 zeigt, wenn die hellen H-Linien verschwinden. Bei den *Be*-Sternen kommen sie bei allen drei *Merrill*schen Formen *S*, *D* und *P* vor (Beispiele: η Carinae, XX Ophiuchi, γ Cassiopeiae und β Monocerotis). Von besonderem Interesse ist der Stern XX Ophiuchi (nach *H. Shapley* und *Ida E. Woods*[1026]) variabel), der Veranlassung gegeben hat, *Be*-Sterne mit hellen Fe-Linien „Eisensterne" zu nennen.[1027]) Derselbe zeigte in den Jahren 1921 — 1923 die hellen Funkenlinien des Eisens viel kräftiger als die Absorptionslinien des Ti^+, Ende 1925 war dann wieder das Umgekehrte der Fall. Auf weitere sieben *Be*-Sterne mit hellen Eisenlinien hat *B. P. Gerasimovič*[1028]) aufmerksam gemacht.

Was die in den Spektren der langperiodischen roten Sterne der Typen *Me* und *Se* auftretenden hellen Eisenlinien betrifft, so sind es nach einer Identifikation von *A. H. Joy*[1029]) hauptsächlich Linien des neutralen Fe und niederer *King*scher[1030]) Temperaturklasse, die in der Regel während der Lichtabnahme sichtbar werden.[1031]) Im Spektrum von *o* Ceti (*Me*) fand *A. H. Joy*[1032]) auch helle Linien des Fe^+, allerdings waren sie nur schwach, und *P. W. Merrill*[1033]) meint hierzu, daß sie vielleicht ganz allgemein beim Typus *M* undeutlich, dagegen bei den *Se*-Sternen kräftiger auftreten, da insbesondere die Fe^+-Linien 4924 und 5018 in S Cassiopeiae und R Cygni auffällig sind.[1034]) Bei den *G*- und *K*-Sternen sind es überhaupt zumeist die Linien des ionisierten Eisens, die außer den Wasserstofflinien hell erscheinen können.

Bei allen Sternen mit hellen H- und Fe-Linien erscheinen aber immer noch weitere Emissionslinien unbekannten Ursprungs. *F. E. Baxandall*, *J. A. Carrol* und *F. J. M. Stratton*[1035]) haben darauf hin-

1026) Harvard Coll. Obs. Circ. 292 (1926).

1027) Siehe *P. W. Merrill*, Publ. Astr. Soc. Pac. 36 (1924), p. 325.

1028) Harvard Coll. Obs. Bull. 851 (1927).

1029) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 281; 65 (1927), p. 23.

1030) Ebendort 56 (1922), p. 318.

1031) Nach *P. W. Merrill*, Astroph. Journ. 65 (1927), p. 286 soll es übrigens wieder zweifelhaft sein, ob die von *A. H. Joy* [Astroph. Journ. 53 (1921), p. 185; 58 (1923), p. 195 und Astroph. Journ. 63 (1926), p. 81 oder auch Mt. Wilson Solar Obs. Contrib. 200 (1921), 265 (1923) und 311 (1926)] insbesondere im Spektrum von *o* Ceti während der Lichtabnahme beobachteten hellen Linien bis 4202,03 und 4307,91 wirklich Eisenlinien sind.

1032) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 22.

1033) a. a. O.

1034) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 23; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 325 (1927).

1035) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1927), p. 470.

gewiesen, daß sich zahlreiche dieser Linien und auch Linien unbekannten Ursprungs im Sonnenspektrum nach dem Kombinationsprinzip darstellen lassen, wenn man Quantensprünge der Elektronen zuläßt, die nach den Auswahlprinzipien eigentlich verboten wären. Mit Hilfe der von *H. N. Russell*[1036]) angegebenen multiplen Terme des Fe berechnete *P. W. Merrill*[1037]) die Wellenlängen solcher bei verbotenen Sprüngen aus metastabilen Zuständen eventuell entstehender Linien und fand dabei eine auffallende Übereinstimmung mit hellen Linien unbekannten Ursprungs in η Carinae und *HD* 42474. Demnach ist nicht unwahrscheinlich, daß Elektronensprünge, die unter Laboratoriumsbedingungen nicht ausgeführt werden können, unter den veränderten Verhältnissen in den Sternatmosphären doch möglich werden.

d) *Sterne mit abnorm kräftigen Silicium- und Strontiumlinien.* Von einigen Sternen fast durchwegs früherer Typen ($A\,0 - A\,3$) ist im *Draper*katalog erwähnt, daß in ihren Spektren die beiden Linien 4077 und 4215 des Sr^+ besonders kräftig sind. Da diese Linien im allgemeinen nach *C. H. Payne*[1038]) bei den $A\,0$-Sternen aufzutreten beginnen und ihr Maximum erst im Typus $K\,2$ zu erreichen pflegen, erscheint dieses Verhalten abnorm. Neben diesen sogenannten „Strontiumsternen“ gibt es wieder andere Sterne, bei denen, wie ebenfalls bereits im *Draper*katalog vermerkt wird, wieder die Linien 4128 und 4131 des Si^+, die ebenfalls nach *Payne*[1039]) bei den $B\,0$-Sternen erscheinen und nach einem Maximum bei $A\,0$ schon beim Typus F verschwinden, unverhältnismäßig stark sind. Die Linien anderer Elemente zeigen jedoch, wie *H. Shapley*[1040]) beim Strontiumstern α Circini speziell an den beiden Ca-Linien 4435 und 4455 findet, anscheinend normales Verhalten. Eine Entscheidung darüber, ob die Verstärkung dieser Sr- und Si-Linien durch angelagerte Linien anderer Elemente oder durch Sr- und Si-Wolken im Weltraum bewirkt wird oder ob sie auf abnorme Häufigkeit des betreffenden Elementes in den Sternatmosphären zurückzuführen ist, kann nach *C. H. Payne*[1041]) derzeit schon deswegen nicht getroffen werden, da speziell die in früheren Typen sichtbaren Si^{++}- und Si^{+++}-Linien noch in keinem Fall ein ähnliches abnormes Verhalten gezeigt haben. Daß sich die Sr-Linien

1036) Astroph. Journ. 64 (1926), p. 194; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 318 (1926).

1037) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 363.

1038) Stellar Atmospheres p. 126.

1039) Harvard Coll. Obs. Circ. 252 (1924),

1040) Harvard Coll. Obs. Bull. 798 (1924).

1041) Stellar Atmospheres p. 171—172.

4077 und 4215, wie *B. Gerasimovič*[1042]) bemerkt, bei den Riesen und Zwergen ungleich verhalten, scheint aber dafür zu sprechen, daß die Ursache der beobachteten Eigentümlichkeiten in den Sternatmosphären selbst zu suchen ist.

e) *Vorkommen der seltenen Erden.* Linien des Europiums hat *F. E. Baxandall*[1043]) in dem von *A. Belopolsky*[1044]) gegebenen Verzeichnis der Linien im Spektrum von α Canum ven. ($A\,0p$) identifizieren können (bei den Wellenlängen 3931, 4130, 4205, 4436, 4523 und 4594) und auch in den Spektren von α Canis maj. ($A\,0$), α Cygni ($A\,2p$) und α Canis min. ($F\,5$) vorgefunden. In Spektren früherer Typen als A sind Eu-Linien noch nicht gefunden wörden, dagegen scheint die Eu-Linie 4436 als schwer trennbarer Begleiter der Ca-Linie 4436 nach *J. Lunt*[1045]) auch im Spektrum von α Bootis vorzukommen. Im Spektrum von α Canum ven. sind außer Europium nach *A. Belopolsky*[1046]) noch Terbium und nach *C. C. Kiess*[1047]) auch Lanthan, Gadolinium, Dysprosium und Yttrium mit einer gewissen Sicherheit nachweisbar. In dem u. a. noch von *J. N. Lockyer* und *F. E. Baxandall*[1048]) und *H. Ludendorff*[1049]) genauer untersuchten Spektrum von α Canum ven. hat übrigens *A. Belopolsky*[1050]) zwei Gruppen von Linien gefunden, deren jede besondere Intensitäten der zugehörigen Linien zeigt und verschiedene Radialgeschwindigkeiten ergibt.

26. Die effektiven Temperaturen der Fixsterne. Die Bestimmung der effektiven Temperaturen der Fixsternoberflächen ist unter der Voraussetzung, daß die Sternstrahlung der schwarzen Strahlung gleich oder wenigstens genügend ähnlich ist, durch Darstellung der spektralen Energieverteilung mit der *Planck*schen Formel möglich oder auch durch Aufsuchen des Energiemaximums durchführbar.

Die Messung der Intensitätsverteilung kann ebensowohl auf visuellem als auf photographischem Wege erfolgen. Bei visuellen Beobachtungen erfolgen die Messungen in der Regel durch Vergleich mit dem gesamten oder spektral zerlegten Licht einer Hilfslichtquelle, wobei für Konstanz der letzteren entsprechend vorgesorgt werden

1042) Harvard Coll. Obs. Bull. 843 (1927).

1043) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 74 (1913), p. 32.

1044) Bull. de l'acad. imp. des Sciences, St. Petersburg 1913, p. 689.

1045) London Roy. Soc. Proc. 79 A (1907), p. 118.

1046) a. a. O.

1047) Publ. Obs. Univ. of Michigan (Detroit) 3 (1923), p. 106; Pop. Astr. 25 (1917), p. 656.

1048) London Roy. Soc. Proc. 77 A (1906), p. 550.

1049) Astr. Nachr. 173 (1906), p. 1.

1050) Ebendort 195 (1913), p. 1.

muß und die Energieverteilung im Spektrum des Hilfslichtes wieder durch Vergleich mit dem schwarzen Körper zu ermitteln ist. Bei photographischen Arbeiten ist darauf Bedacht zu nehmen, daß die Plattengradation selbst von der Wellenlänge abhängt und die Umwandlung der Schwärzungen in Intensitäten daher streng nur mit Hilfe einer eigenen spektralen Schwärzungsskala erfolgen kann. Bei Beobachtungen mit dem Objektivprisma läßt sich eine solche Schwärzungsskala am einfachsten dadurch erlangen, daß man das Objektivprisma mit einem Objektivgitter kombiniert, dessen Stäbe senkrecht zu der brechenden Kante des Prismas liegen. Die vom Objektivgitter erzeugten Spektren der aufeinanderfolgenden Ordnungen stehen dann untereinander und zum Zentralbild in einem bestimmten Intensitätsverhältnis und gestatten dadurch eine sichere Umwertung der Schwärzungen in die zugehörigen Intensitäten.[1051]) Aufnahmen dieser Art dürften zuerst von *G. Eberhard*[1052]) ausgeführt worden sein und wurden dann neuerlich von *T. R. Merton*[1053]) und von *W. M. H. Greaves* und *C. R. Davidson*[1059]) durchgeführt. *H. Kienle*[1055]) hat vorgeschlagen, bei Aufnahmen mit Spaltspektrograph statt der Platten Filmstreifen zu verwenden, die sich der Bildkrümmung des Spektrums genau anschmiegen lassen.

Auch Aufnahmen mit Farbenfiltern geben, wie *Ch. Nordmann*[1056]) zeigen konnte, recht befriedigende Resultate. In Verbindung mit einer Thermosäule sind solche Filter auch von *W. W. Coblentz*[1057]) mit Erfolg zur Messung der Strahlung hellerer Sterne verwendet worden.

Da die Sternfarbe eine Funktion der Sterntemperatur ist — die Sterne werden mit abnehmender Temperatur röter —, läßt sich die Sterntemperatur auch dadurch ermitteln, daß man die Farbe des Vergleichslichtes mit Hilfe eines verschiebbaren Rotkeils der Farbe des Sterns gleichmacht. Die Beziehung zwischen Keilstellung und Temperatur läßt sich nach *J. Wilsing*[1058]), der dieses Verfahren angegeben hat, mit Hilfe von Sternen bekannter Temperatur leicht ermitteln.

1051) Siehe bei *E. Hertzsprung*, Astr. Nachr. 186 (1911), p. 177; 209 (1918), p. 117.

1052) Astr. Nachr. 209 (1918), p. 117.

1053) London Roy. Soc. Proc. 99 A, (1921), p. 78.

1054) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1925), p. 33.

1055) Göttingen Nachr. d. Ges. d. Wiss. 1925, p. 81.

1056) Paris C. R. 149 (1909), p. 557; siehe auch bei *J. Hopmann*, Colorimetrie der Gestirne, Nr. 7, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

1057) Scient. Papers of the Bureau of Standards Nr. 438 (1922), Washington; siehe auch *J. Hopmann*, a. a. O. Nr. 14.

1058) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 24 (1920), Nr. 76; siehe auch *J. Hopmann*, a. a. O. Nr. 5.

Temperaturbestimmungen an Fixsternen sind zuerst von *J. Wilsing* und *J. Scheiner*[1059]) (109 hellere Sterne) durchgeführt und dann von *J. Wilsing, J. Scheiner* und *W. Münch*[1060]) noch weiter ergänzt worden. An größeren photographischen Beobachtungsreihen liegen vor die Messungen von *H. Rosenberg*[1061]), *R. A. Sampson*[1062]) und von *W. M. H. Greaves, C. Davidson* und *E. Martin.*[1063]) Bei den letzten beiden Arbeiten wurde die Messung der Schwärzungen mit dem selbstregistrierenden Mikrophotometer vorgenommen. Kleinere Beobachtungsreihen und gelegentliche Bestimmungen rühren noch her von *B. Harkanyi*[1064]), der ältere Messungen von *H. C. Vogel* bearbeitet hat, von *Ch. Nordmann*[1065]), *A. Hnatek*[1066]), *J. Baillaud*[1067]), *H. H. Plaskett*[1068]) und *W. W. Coblentz.*[1069])

Bildet man aus den größeren Beobachtungsreihen von *Wilsing, Rosenberg* und *Sampson* mit den für die einzelnen Sterne gegebenen

Typus	*Wilsing*	*Rosenberg*	*Sampson*	*Brill* [1070])	*King* Farbenindex	*Payne* Ionisationstheorie
Oe 5	—	—	—	23500°	—	25000°
B 0	12300°	30000°	25000°	21000	22700°	20000
B 5	11450	18000	16600	15700	15200	15000
A 0	10250	12000	13100	11700	11600	10000
A 5	9000	9000	10900	9300	8800	8400
F 0	7950	7850	8900	7700	7900	7500
F 5	6880	6930	7500	7000	7000	7000
G 0	5980	6000	6200	6100	6040	5600
G 5	5250	5200	5100	5000	5090	5000
K 0	4570	4570	4200	4550	4570	4000
K 5	3860	3840	3500	3630	3640	3000
M 0	3550	3580	3400	3500	3430	3000

1059) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 19 (1909), Nr. 56.

1060) Ebendort 24 (1919), Nr. 74.

1061) Nova acta Acad. Leop. Car. 101 (1914), Nr. 2; Astr. Nachr. 193 (1913), p. 357.

1062) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 174; 85 (1925), p. 212.

1063) Ebendort 87 (1927), p. 352.

1064) Astr. Nachr. 158 (1902), p. 18.

1065) Bull. Astr. 27 (1910), p. 145; Paris C. R. 151 (1910), p. 794; 156 (1913), p. 664, 1355.

1066) Astr. Nachr. 187 (1911), p. 369.

1067) Bull. Astr. (2) 1 (1925), p. 4, 275.

1068) Dominion Astroph. Obs. Publ. 2 (1923), Nr. 12.

1069) Washington Nat. Acad. Proc. 8 (1922), p. 49, 330.

1070) Die Temperaturen sind mit den von *Brill* in Astr. Nachr. 223 (1924), p. 114, Tab. IX gegebenen Werten für $\frac{c_2}{T}$ ($c_2 = 14300$) gerechnet worden.

Werten Mittel für die aufeinanderfolgenden Spektraltypen, so erhält man vorstehende durch eine Neubearbeitung von *A. Brill*[1071]) und nach *C. H. Payne*[1072]) ergänzten Zahlen.

Die Unterschiede, die zwischen den den visuellen Bereich von 4510—6420 erfassenden Bestimmungen von *Wilsing* und den für den Spektralbereich 4000—5000 geltenden Werten von *Rosenberg* auftreten, haben *A. Brill*[1073]) Veranlassung zu eingehenden Untersuchungen gegeben. Danach erklären sich die Differenzen aus einer allgemeinen Depression der spektralen Intensität im kurzwelligen Teil des Spektrums und aus der Unmöglichkeit, den ganzen Bereich der visuellen und aktinischen Strahlung durch die Strahlung eines schwarzen Körpers einer einzigen bestimmten Temperatur darzustellen. Die Sternstrahlung weicht eben merklich von der schwarzen Strahlung ab. Unter Benutzung des schon von *H. H. Plaskett*[1074]) benutzten Begriffs der „Farbtemperatur" als der Temperatur eines schwarzen Körpers, der im sichtbaren (farbigen) Teil des Spektrums (4500—6500) die gleiche Energieverteilung zeigt wie der betreffende Stern, gelang es *Brill* schließlich, aus den von *Wilsing* und *Rosenberg* gefundenen Temperaturen die in der obigen Tabelle gegebenen wahrscheinlichsten Temperaturen herzuleiten.[1074a])

Bezeichnet man als „isophote Wellenlänge" diejenige Wellenlänge, bei der der Größenklassenunterschied der spektralen Helligkeiten zweier Sterne gleich ist dem Größenunterschied dieser beiden Sterne überhaupt, so läßt sich eine Beziehung zwischen den für die visuellen und photographischen Helligkeiten geltenden isophoten Wellenlängen angeben, die wieder auf die Temperatur schließen läßt. Drückt man die spektralen Intensitäten in Größenklassen aus, so läßt sich die *Planck*sche Gleichung auf die Form bringen:

$$m = 12{,}5 \log \lambda + 2{,}5 \frac{c}{T\lambda} \log e + 2{,}5 \log \left(1 - e^{-\frac{c}{\lambda T}}\right) + C,$$

aus der, wenn man mit ihr den sogenannten „Farbenindex" $m_{\text{phot.}} - m_{\text{vis.}}$ bildet, leicht eine Beziehung von der Form

$$m_{\text{phot.}} - m_{\text{vis.}} = \alpha + \beta \frac{c}{T}$$

abgeleitet werden kann. In dieser Gleichung ist α zwar von der noch

1071) Astr. Nachr. 218 (1923), p. 210; 29 (1923), p. 22. 354.

1072) Stellar atmospheres p. 30.

1073) a. a. O. und Astr. Nachr. 223 (1924), p. 105; 225 (1925), p. 161; Berlin-Babelsberg Veröff. 5 (1924), Nr. 1.

1074) Domin. Astroph. Obs. Publ. 2 (1923), p. 229.

1074a) Man sehe auch die Nr. 1 und 16 ein von *J. Hopmann*, Colorimetrie der Gestirne, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

unbekannten Temperatur abhängig, doch kann es mit einem Näherungswert für diese genügend genau erhalten werden, und außerdem sind die in α und β enthaltenen isophoten Wellenlängen der visuellen und photographischen Größen aus dem Vergleich der bezüglichen Energiekurven mit der Energiekurve eines Sterns bekannter Temperatur bestimmbar. In dieser Weise hat *A. Brill*[1075]) aus dem von *E. S. King*[1076]) gegebenen Farbenindizes die in der obigen Tabelle in der fünften Kolonne beigefügten Temperaturwerte berechnet, die mit seinen Werten in Kolonne 4 vorzüglich übereinstimmen. Eine Prüfung durch die von *E. Hertzsprung*[1077]) ermittelten und andere von *K. F. Bottlinger*[1078]) photoelektrisch bestimmte Farbenindexwerte hat die obigen Resultate bestätigt. Dagegen ergeben die von *E. Pettit* und *S. B. Nicholson*[1079]) bolometrisch erhaltenen „Wärmeindices" $m_{\text{bol.}} - m_{\text{vis.}}$ Temperaturwerte, die für die späteren Typen etwas kleiner sind als die *Brill*schen Zahlen.[1080]) Außer dem Abfall der Helligkeit bei den kurzen Wellenlängen scheinen also auch noch im visuellen Bereich Störungsquellen vorhanden zu sein, welche die bolometrischen Helligkeiten verfälscht haben.

In Nr. **24** ist bei Besprechung der typischen Sternspektren bereits angegeben worden, welche Linien bei den einzelnen Typen die maximale Intensität erreichen bzw. bei welchem Typus sie verschwinden. Macht man für den Druck in den umkehrenden Schichten der Fixsterne nun eine plausible Annahme (siehe Nr. **10**), so lassen sich mit den in Nr. 7b gegebenen Formeln bei bekanntem Ionisationspotential die betreffenden Ionisationstemperaturen, also die Temperaturen der umkehrenden Schichten solcher Typen berechnen, bei denen die Linien niedriger ionisierter Atome gerade verschwinden und nur mehr Linien höherer Ionisationsgrade auftauchen. Unter der allerdings unrichtigen Annahme eines Drucks in der umkehrenden Schicht der Fixsterne von einer Atmosphäre hat *Meg Nad Saha*[1081]) folgende

1075) Astr. Nachr. 219 (1923), p. 370.

1076) Harvard Coll. Obs. Ann. 76 (1916), p. 107.

1077) Leiden Ann. van de Sterrewacht 14 (1922), Teil 1.

1078) Berlin-Babelsberg, Veröff. 3 (1923), Nr. 4.

1079) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 181: Mt. Wilson Solar Obs. Rep. 1922, p. 238.

1080) Messungen der Gesamtstrahlung von Sternen sind auch schon von *S. F. Nicholls* [Astroph. Journ. 13 (1901), p. 101)] mit Radiometer und neuerlich wieder von *C. G. Abbot* [Astroph. Journ. 60 (1924), p. 87; Rep. of Smithsonian Astroph. Obs. 1924] ausgeführt worden.

1081) Phil. Mag. (6) 40 (1920), p. 40, 114; (6) 41 (1921), p. 267; London Roy. Soc. Proc. 99 A (1921), p. 135. Siehe auch die Referate von *W. Westphal* in „Die

Temperaturen berechnet:

Typus Oa: $T = 23\,000^0$		Typus $F0$: $T = 9000^0$	
„ $B0$:	$18\,000^0$	„ $G0$:	7000^0
„ $B5$:	$14\,000^0$	„ M	5000^0,
„ $A0$:	$12\,000^0$		

die sich den oben gegebenen, aus spektralphotometrischen Messungen von *Brill* abgeleiteten Werten trotz der falschen Annahme für den Druck in den umkehrenden Schichten deswegen relativ gut anschließen, weil *Saha* gleichzeitig voraussetzt, daß die Linien neutraler Atome bereits verschwinden, wenn nur mehr noch etwa 1 % aller Atome neutral ist, während nach *R. H. Fowler* und *E. A. Milne*[1082]) Linien sogar noch bei den geringen Relativkonzentrationen der bezüglichen Atome von 10^{-8} bis 10^{-10} sichtbar blieben.

Die Maximalintensitäten einer Anzahl von Linien verschiedener Elemente sind in der folgenden Tabelle nach dem Ionisationspotential geordnet.[1083])

I.P.	Element	Linie λ	Linie Serienbeziehung	Maximale Intensität	Quelle für die Serienanordnung
5,7	Sr	4607	H.S. 1. Linie	Rote Sterne	*Russell-Saunders,* Astroph. Journ. 61 (1925), p. 238
6,1	Ca	4227	„ „	„ „	*Russell,* ebendort 61 (1925), p. 38
6,5	Ti	—	—	$K5$	*H. H. Kieß,* Proc. Nat. Acad. 13 (1923), p. 270; Journ. opt. Soc. Amer. 8 (1924), p. 609
6,7	Cr	—	—	Rote Sterne	*P. Giebeler,* Z. f. Phys. 22 (1924), p. 228
7,4	Mn	4030 4018, 4086	H.S. 1. Linie Komb. S.	„ „ $K5$	*M. A. Catalan,* Ann. Soc. Esp. Fis. y Quim. 21 (1924), p. 84; Phil. Trans. A 223 (1922), p. 127
7,6	Mg	b-Gruppe	II. N.S.	$K2$—$K5$	

Naturw." 9 (1921), p. 863, *E. A. Milne* in „The Observatory" 44 (1921), p. 261 und den zusammenfassenden Bericht von *Meg Nad Saha* in „Zeitschr. f. Phys." 6 (1921), p. 40.

1082) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 403; 84 (1924), p. 99.

1083) Die Angaben über das Ionisationspotential sind einer Zusammenstellung von *H. N. Russell,* Astroph. Journ. 61 (1925), p. 223 entnommen. Es sei bemerkt, daß dort die Erregungspotentiale für die Wasserstoffserien unrichtig angegeben sind. 10 Volt ist das E.P. der ersten *Lyman*linie und nicht der ersten *Balmer*linie H_α, der ein E.P. von 14,9 bzw. 12,0 Volt zukommt, je nachdem man die Dissoziationsarbeit an der H-Molekel mit berücksichtigt oder nicht. Eine Zusammenstellung der Ionisationspotentiale und eine Erörterung über Zusammenhänge mit den Sterntemperaturen findet sich auch bei *C. H. Payne,* Washington Nat. Ac. Proc. 10 (1924), p. 322.

I.P.	Element	Linie λ	Linie Serienbeziehung	Maximale Intensität	Quelle für die Serienanordnung
10,6	Si	3905	?	G 5	*A. Fowler,* Bakerian lecture 1924
11,8	Ca^+	*H.* u. *K.*	H.S.	K 0	
13,5	H	—	*Balmer*-S.	A 0—A 2	
15,0	Mg^+	4481	B.S.	A 2	
24 ?	N^+	—	—	B 5	*A. Fowler,* Roy. Soc. Proc. 107 A (1925), p. 31
24,3	C^+	—	—	B 3	*A. Fowler,* ebendort 105 A (1924), p. 299
24,4	He	—	—	B 3	*T. Lymann,* Phys. Rev. 21 (1923), p. 202; Science 59 (1924), p. 422. *L. Silberstein,* Astroph. Journ. 58 (1922), p. 119
45,0	Si^{+++}	{4089, 4096, 4116}	—	Oe—B 0	*A. Fowler,* Roy. Soc. Proc. 103 A (1923), p. 413
45 ?	O^{++}	—	—	Oe, Oe 5	Das Spektrum ist von *Fowler* und *Brooksbank*, Roy. Astr. Soc. Month. Not. 77 (1917), p. 511 ohne Serienbezeichnungen gegeben

Die Zahlen der Tabelle lassen den Gang der Temperaturen mit den Ionisationspotentialen deutlich erkennen. Unter Benutzung dieser und anderweitiger, insbesondere dem *Draper*katalog entnommener Angaben über beobachtete Maximalintensitäten von Linien haben *R. H. Fowler* und *E. A. Milne*[1084]) folgende Mitteltemperaturen berechnet:

Typus	Element	Linien	Temperatur
K 5	Na	$\left\{\begin{matrix} 1^2P - m^2S \\ 1^2P - m^2D \end{matrix}\right\}$	3 900°
	Ca	$1^3P - m^3D$	4 270
		$\left\{\begin{matrix} 1P - mS \\ 1P - mD \end{matrix}\right\}$	4 420
G 5	Mg	$1^3P - m^3S$	5 250
		$1P - mD$	5 440
A 0	Mg^+	4481 $(2^2D - 3^2F)$	10 220
	H	*Balmer*serie	10 000
B 2	He	D_3 $(1^2P - m^2D)$	16 100
0	He^+	*Pickering*serie $(4F - mG)$, 4686 $(3D - 4F)$	35 200

1084) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 420.

Die hier speziell für die heißeren Sterne gegebenen Werte haben sich in späteren Arbeiten von *R. H. Fowler* und *E. A. Milne*[1085]) bei Heranziehung der Intensitäten von weiteren Linien des Si^{+++}, C^{++}, Ba^{+}, Sr^{+} und Ca^{+} bestätigt.

27. Die Trennung in Riesen- und Zwergsterne. Der innige Zusammenhang zwischen Spektraltypus und effektiver Temperatur besagt, daß die Typenreihe gleichzeitig eine Entwicklungsreihe vorstellt, und zwar pflegte man sie als Abkühlungsreihe aufzufassen, in der ein Stern nach und nach die Stadien des weißen, gelben und roten Sterns durchwandert, um schließlich seinen Lebenslauf als dunkler Körper zu beschließen. Aber auch der umgekehrte Weg, bei dem der den Stern bildende Gasball unter fortwährender Kontraktion zu höheren Temperaturen ansteigt, könnte möglich sein. Beide Lesarten lassen unbefriedigt, weil bei der ersten das Anfangsglied, bei der zweiten das Endglied fehlt und sich der Frage, woher sind die heißen weißen Sterne gekommen, für den ersten Fall einfach die Frage, was geschieht weiter, wenn der Stern die maximale Temperatur erreicht hat, im zweiten Fall gegenüberstellt. Eine wesentliche Vertiefung haben nun unsere Kenntnisse über den Werdegang eines Fixsterns und über die Bedeutung der Spektraltypenreihe durch die grundlegenden und seither vielfach wiederholten Untersuchungen von *E. Hertzsprung*[1086]) und *H. N. Russell*[1087]) erhalten, bei denen neben Typus und Temperatur auch noch die auf eine bestimmte Einheitsdistanz reduzierte Sternhelligkeit, die sogenannte „absolute Größe" herangezogen wurde. Aus der Relation $m = -2{,}5 \log J$ zwischen Größenklasse und Helligkeit J erhält man, wenn π die wirkliche Parallaxe eines Sterns, Π dagegen eine Einheitsparallaxe bezeichnen, für die aus dieser Einheitsentfernung gesehene Größenklasse M des Sterns die Beziehung

$$M = m - 5 \log \Pi + 5 \log \pi$$

und mit $\Pi = 0{,}1''$

$$M = m + 5 + 5 \log \pi.$$

Bei Reduktion der Sterngrößen auf eine solche Einheitsentfernung fand *Hertzsprung*, daß es speziell unter den gefärbten Sternen offenbar zwei kollaterale Sternserien gäbe, deren einer durchweg Sterne von großer absoluter Helligkeit, also auch großem Durchmesser, sogenannte Riesensterne angehören, während die andere wieder Sterne geringer

1085) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 499; 85 (1925), p. 970

1086) Ztschr. f. wiss. Phot. 3 (1905), p. 429.

1087) The Observ. 35 (1912), p. 378; Proc. Amer. Phil. Soc. 51 (1913), p. 569; Pop. Astr. 22 (1914), p. 275, 331.

absoluter Helligkeit und kleinen Durchmessers, also Zwergsterne, umfaßt. Auf Grund eines wesentlich reicheren Materials erkannte dann *Russell*, daß die Riesen der Spektralklassen F—M durchweg eine mittlere absolute Größe $M = 0{,}0^m$ besitzen, während sich ihm für die Zwergsterne folgende mittlere M-Werte ergaben[1088]):

Typus:	$A\,0$	$F\,1$	$F\,5$	$G\,0$	$G\,5$	$K\,0$	$K\,4$	$M\,1$
M:	$+\,1{,}4$	$+\,4{,}2$	$+\,4{,}3$	$+\,5{,}7$	$+\,5{,}7$	$+\,7{,}1$	$+\,9{,}2$	$+\,9{,}9$.

Der zwischen den roten Riesen und roten Zwergen bestehende große Unterschied in den absoluten Größen und das Zusammenlaufen und schließlich Ineinanderübergehen der M-Werte beim Übergang zu den gelben und weißen Sternen führt nun zwanglos zu folgender Vorstellung vom Entwicklungsgang eines Sterns: Ein nicht leuchtender großer Gasball wird infolge der durch Kontraktion bewirkten Temperatursteigerung schließlich leuchtend und zum roten Riesenstern von geringer Dichte. Die weitere Kontraktion, die aber wegen der dabei stetig wachsenden Dichte immer langsamer vor sich geht, bringt nach und nach die für den Übergang in das Stadium eines gelben Riesen und schließlich weißen Sterns nötige Temperatursteigerung mit sich. Da sich dabei Verkleinerung des Volumens, also Verringerung der Helligkeit und Vergrößerung der Ausstrahlung durch die steigende Temperatur ungefähr die Waage halten, bleibt die Helligkeit während des Riesenstadiums nahezu konstant, so daß die Riesensterne der Typen G—M unter Voraussetzung nahe gleicher Masse auch nahezu gleiche absolute Größe zeigen. Schließlich wird aber ein Zustand eintreten, in dem die bei immer langsamer vor sich gehender Kontraktion gleichzeitig kleiner werdende Temperaturerhöhung durch die Ausstrahlung kompensiert wird. Der Stern hat dann seine Höchsttemperatur erreicht. Da weiterhin die Ausstrahlung über den geringer werdenden Kontraktionseffekt immer mehr überwiegen wird, beginnt der Stern sich wieder abzukühlen, und er durchläuft nun als Zwergstern die Typenreihe wieder zurück zum gelben, roten und endlich dunklen Stern. Der durch die Maximaltemperatur gegebene Grenztypus, bis zu dem der Stern gelangen kann, ist nach *A. S. Eddingtons*[1089]) theoretischen Untersuchungen über das Strahlungsgleichgewicht in polytropen Gaskugeln durch die Masse des Sterns bestimmt. Sterne größerer Masse gelangen zu höherer Maximaltemperatur als Sterne kleinerer Masse. Ob aber in diesem Entwicklungsgang auch die B-Sterne eingeschlossen sind, die durchweg Riesensterne sind, oder

1088) Pop. Astr. 22 (1914), p. 290.

1089) Ztschr. f. Phys. 7 (1921), p. 351. Siehe auch *R. Emden,* Thermodynamik der Himmelskörper III E, diese Encyklopädie VI 2 (1925), Nr. 24, p. 487 ff.

ob diese mit den *O*-Sternen eine getrennte Gruppe anderer Entwicklung bilden, ist derzeit noch nicht zu entscheiden.[1090])

Es sei noch erwähnt, daß es neben diesen beiden Sternserien der Riesen und Zwerge noch Überriesen gibt, die an Helligkeit und Durchmesser die gewöhnlichen Riesen um ein Mehrfaches übertreffen, und Liliputaner, für die sich Dichten ergeben haben, die um viele Tausende mal höher sind als die des Wassers. Zu den letzteren gehören die Begleiter von Sirius, o_2 Eridani und *o* Ceti sowie ein von *van Maanen* aufgefundener Stern vom Typus *F*. Die aus der geringen absoluten Leuchtkraft in Verbindung mit dem frühen Typus *A*—*F* aller dieser Sterne von *A. S. Eddington*[1091]) gefolgerte und durch ein nach Verlust aller Elektronen erfolgtes Zusammenbacken der Atomkerne erklärte hohe Dichte, hat durch Messungen der *Einstein*schen Rotverschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld von *W. S. Adams*[1092]) eine Bestätigung gefunden.

Es ist klar, daß bei der Verschiedenheit der Dichten, die auf Riesen und Zwergen herrschen, auch Unterschiede im Spektrum solcher Sterne trotz gleicher Temperatur oder gleichem Typus auftreten müssen, die sich aus den infolge der veränderten Dichte anderen Ionisationsgraden ergeben. Auf solche kleine Unterschiede in den Spektren der Sterne ist *J. N. Lockyer* schon im Jahre 1897 aufmerksam geworden, und er hat auf Grund genauen Studiums zahlreicher Sternspektren bereits damals erkannt, daß in der Sternentwicklung offenbar ein aufsteigender und ein absteigender Ast angenommen werden muß. Das von ihm gegebene Schema, in dem die einzelnen Stadien nach den typischen Sternen benannt erscheinen, ist das folgende:

Argonian und Alnitamian stars.
(γ Argus *Oap*, ζ Puppis *Od*, ε Orionis *B* 0.)

Crucian (β Crucis *B* 1) ↗	↘ Achernian (α Eridani *B* 5)
Taurian (ζ Tauri *B* 3)	Algolian (β Persei *B* 8)
Rigelian (β Orionis *B* 8)	Markabian (α Pegasi *A* 0)
Cygnian (α Cygni *A* 2)	—
—	Sirian (Sirius *A* 0)
Polarian (Polaris *F* 8)	Procyonian (α Canis min. *F* 5)
Aldebaranian (α Tauri *K* 5)	Arcturian (α Bootis *K* 0)
Antarian (α Scorpii *Ma*)	↘ Piscian (19 Piscium *N*)

1090) Eine theoretische Behandlung der auf Zwergsternen herrschenden Verhältnisse ist von *W. Rabe,* Astron. Nachr. 225 (1925), p. 217 versucht worden. Siehe auch das Autoreferat in Sirius 1926, p. 101.

1091) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 408.

1092) Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1925), p. 158.

Wenn auch diese *Lockyer*sche Reihung in einzelnen Gliedern fehlerhaft ist — α Bootis ist beispielsweise ein typischer Riesenstern, und auch die Stellung von M an den Anfang und N an das Ende ist nach neueren Vorstellungen nicht gerechtfertigt —, so liegt ihr doch schon der gleiche Gedanke zugrunde wie den späteren Untersuchungen von *Hertzsprung* und *Russell.* Die von *Lockyer* bemerkten Unterschiede, und zwar insbesondere die größere Intensität der Funkenlinien und Schwäche der Bogenlinien im aufsteigenden Ast, entsprechen vollständig den modernen, auf der Ionisationstheorie aufgebauten Vorstellungen. Infolge der geringeren Dichte ist ja der Ionisationsgrad tatächlich etwas höher als bei den Zwergen, so daß aus den Unterschieden in der Intensität besonders empfindlicher Linien sogar ein Schluß auf die absolute Größe der betreffenden Sterne gezogen werden kann. (Siehe Nr. 28.) Vergleicht man die Spektren zweier solcher Sterne, eines Riesen und eines Zwergs von gleicher Temperatur, so reiht sich der Riesenstern in der Typenreihe durchschnittlich um einen halben Typus früher ein als der Zwerg.[1093]) Umgekehrt folgt daraus, daß die Temperatur eines Riesensterns, der den gleichen Spektraltypus zeigt wie ein Zwergstern, etwas niedriger liegt als die des Zwerges. Unter Verwendung der vorhandenen Temperaturbestimmungen haben *F. H. Seares*[1094]) und *E. Hertzsprung*[1095]) Mitteltemperaturen für Riesen und Zwerge einzelner Typen abgeleitet und die folgenden Werte gefunden[1096])[1096a]):

Typus	*Seares*		*Hertzsprung*		*Gerasimovič*	
	Riesen	Zwerge	Riesen	Zwerge	Riesen	Zwerge
$F\,5$	6080°	6080°	—	5880°	6100°	5800°
$G\,0$	5300	5770	5020°	5440	5000	5600
$G\,5$	4610	5500	4480	5300	4000	5300
$K\,0$	3860	4880	4160	4790	3500	4800
$K\,5$	3270	4120	3370	—	3200	3900
Ma	3080	3330	3250	—	—	—

1093) Siehe bei *C. H. Payne,* Stellar Atmospheres p. 195.

1094) Astroph. Journ. 55 (1922), p. 202.

1095) Leiden Sterrewacht Ann. 14 (1922), Deel 1.

1096) Siehe bei *C. H. Payne,* Stellar Atmospheres p. 31, 32. Zu gleichen Ergebnissen ist *B. P. Gerasimovič,* Harvard Coll. Obs. Circ. 311 (1927) auf Grund des Verhaltens der Sr^+-Linien gelangt. Die bezüglichen Zahlen sind ebenfalls beigefügt.

1096a) Siehe ausführlicher bei *J. Hopmann,* Colorimetrie der Gestirne, Nr. 17, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

28. Die Ermittlung der absoluten Größe der Fixsterne auf spektroskopischem Wege. Spektroskopische Parallaxen. Schon gelegentlich seiner Untersuchungen über die absolute Größe einzelner Sterne hat *E. Hertzsprung*[1097]) bemerkt, daß für Sterne größerer absoluter Helligkeit, also Riesen, der *Maury*sche *c*- und *ac*-Charakter (siehe Nr. 24, p. 694) des Spektrums typisch zu sein scheine, und daß im Spektrum solcher Sterne die Linie 4078 des Sr^+ ($1^2S - 1^2P$) in der Regel kräftiger sei als im Sonnenspektrum. Das reiche auf dem M. Wilson Solar Observatory zur Verfügung stehende Material an Spektralaufnahmen veranlaßte nun *W. S. Adams* und *A. Kohlschütter*[1098]) zu einer umfangreichen Untersuchung, bei der sie die Spektren in Zusammenhang mit der bis zu einem gewissen Grad ein Maß für die Distanz bildenden Größe der Eigenbewegung brachten. Sie fanden dabei, daß das kontinuierliche Spektrum im Blau bei rötlichen Sternen von kleiner Eigenbewegung, also in großer Distanz stehenden Riesen etwas rascher an Helligkeit abfällt als bei ebensolchen Sternen größerer Eigenbewegung. Auch die erwähnte Wahrnehmung von *Hertzsprung* über die größere Schärfe der *Balmer*serie bei Riesensternen bestätigte sich vollauf. Ein Versuch, den Helligkeitsabfall im Blau mit der bekannten absoluten Größe in zahlenmäßigen Zusammenhang zu bringen, ergab zwar die Möglichkeit eines Rückschlusses auf die Leuchtkraft aus dem Aussehen des Spektrums, doch konnte der Methode damals noch nicht die wünschenswerte Genauigkeit gegeben werden. Eine Weiterführung der Untersuchungen aber ließ eine Anzahl von Linien auffinden, deren Intensität nur wenig mit dem Fortschreiten in der Typenreihe, dagegen stark mit der absoluten Größe variiert. Außer der schon von *Hertzsprung* angegebenen Sr^+-Linie bei 4078, die in Riesen von den Typen $A\,8$—$F\,5$ kräftig, bei Zwergen der gleichen Typen aber schwach erscheint, zeigten noch, wie sich bei diesen und später von *W. S. Adams*[1099]) allein und in Gemeinschaft mit *A. H. Joy*[1100]) ausgeführten Arbeiten feststellen ließ, die Linien 4078 und 4215 des Sr^+, dann 4290 und 4395 des Ti^+, eine dem V oder Fe angehörende Linie bei 4408 und eine vermutlich auch dem Sr zuzuschreibende Linie bei 4207 wenigstens bei Beschränkung auf bestimmte Typen ein ähnliches Verhalten, während umgekehrt wieder die Linien 4456

1097) Ztschr. f. wiss. Phot. 3 (1905), p. 429.

1098) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 385; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 89 (1914).

1099) Washington Nat. Ac. Proc. 2 (1916), p. 147, 152; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. Nr. 24, 25 (1916).

1100) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 242; Wash. Nat. Ac. Proc. 8 (1922), p. 173. Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 244 (1922); Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 328.

(Ca) und 4225 (Sc) in den Spektren der Zwergsterne kräftiger erschienen. Die Schätzung der Linienintensität erfolgte nach der in der Stellarphotometrie üblichen Stufenschätzungsmethode durch Vergleich mit anderen Linien, die mit der absoluten Größe entweder überhaupt nicht oder im entgegengesetzten Sinne variieren. Nach Eichung der erhaltenen Zahlen mit Hilfe von Sternen bekannter absoluter Größe ließ sich für alle untersuchten Sterne deren absolute Größe und in Verbindung mit ihrer scheinbaren Helligkeit auch die Parallaxe ermitteln. Später gelang es *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1101]), ähnliche Kriterien auch für die Sterne der früheren Typen *Oe, B* und *A* aufzufinden, und neuerlich sind speziell für einige hundert *B*-Sterne spektroskopische Parallaxen aus dem Vergleich der Intensität der Linien 4144 und 4472 des Parhelium und 4388 des Orthohelium mit der Wasserstofflinie H_γ von *D. L. Edwards*[1102]) ermittelt worden. Speziell diese letzteren Bestimmungen bezeichnete aber *C. H. Payne*[1103]) als nicht ganz einwandfrei, da die He-Linien hauptsächlich nur den Typus bestimmen sollen. *W. J. Luyten*[1104]) fand dann, daß die gelbe Natriumlinie in den Spektren der Zwerge kräftiger sei, also ebenfalls zur Bestimmung der absoluten Größe verwendber sein dürfte, und nach *G. Abetti*[1105]) sowie *H. Shapley* und *C. H. Payne*[1106]) bildet auch die Breite der Ca- und anderer Absorptionslinien ein brauchbares Kriterium.

Der nach *Adams* und *Kohlschütter* bei Riesen etwas stärkere Helligkeitsabfall im Blau ist von *G. S. Monck*[1107]) später eingehender untersucht und doch für die Ermittlung der Leuchtkraft geeignet befunden worden. Nach *B. Lindblad*[1108]) rührt diese Eigentümlichkeit davon her, daß die Temperatur der Riesen etwas niedriger ist als die der Zwerge gleichen Typs. Setzt man vor das Objektiv ein Objektivgitter, so werden die Innenränder der Spektren erster Ordnung, die den blauen Teilen derselben entsprechen, um so weiter auseinanderrücken, je stärker der Helligkeitsabfall in Blau ist, und aus der Innendistanz dieser beiden Bilder läßt sich die kleinste photographisch noch wirksam gewesene Wellenlänge bestimmen. Diese minimalen Wellen-

1101) Astroph. Journ. 57 (1923), p. 294; Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 120; Mt. Wilson Contr. 262 (1923).

1102) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1922), p. 47.

1103) Nature 113 (1924), p. 783.

1104) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 175.

1105) Memorie Soc. Astr. Ital. (3) 1 (1920), p. 149.

1106) Proc. Am. Ac. of Arts and Sciences 61 (1926), Nr. 10, p. 459.

1107) Astroph. Journ. 49 (1919), p. 289; Upsala Univ. Åarsskrift 1920.

1108) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 45.

längen ($\lambda^{\min}$) hat *Lindblad*[1109]) zur Ermittlung spektroskopischer Parallaxen mit Erfolg benutzt.

Speziell für die früheren Typen zur Bestimmung der absoluten Größe brauchbar ist nach *B. Lindblad*[1110]) das durch die dort liegende Cyanbande beeinflußte Helligkeitsverhältnis der beiderseits von 3907 liegenden Spektralteile. Später benutzte *B. Lindblad*[1111]) neben diesem Intensitätsverhältnis der Stellen 3840—3883 und 3883—3930 (Cyanbande) auch noch die Helligkeitsunterschiede zwischen 4227 — G und G — 4383 und zwischen 4144—4184 und 4227—4272 (Cyanbande). Bei dieser Arbeit und deren Fortsetzung durch *C. Schalén*[1112]) wurde das Intensitätsverhältnis durch das Verhältnis der Expositionszeiten gemessen, bei denen die zu vergleichenden Stellen gleiche Schwärzung ergaben, wobei für die Konstante p des *Schwarzschild*schen Schwärzungsgesetzes $S = J \cdot t^p$ (S = Schwärzung, J = Intensität und t = Belichtungsdauer) der Mittelwert $p = 0{,}78$ untergelegt wurde.[1113])

Ch'ing Sung Yü[1114]) fand, daß zwischen Temperatur, absoluter Größe und Kraft der an der *Balmer*grenze bei den A-Sternen auftretenden kontinuierlichen Wasserstoffabsorption ebenfalls ein Zusammenhang bestehe, den er zur Ermittlung absoluter Größen verwendete.[1115]) *S. A. Mitchell*[1116]) hält *Yüs* Werte aber nach einer Kontrolle durch die auf dem Leander McCormick Observatory trigonometrisch bestimmten Parallaxen nicht für zuverlässig.

Nach den erörterten Methoden sind spektroskopische Parallaxen bereits für mehrere Tausend Sterne bestimmt worden und außer in den bereits erwähnten Abhandlungen noch in den folgenden Publikationen zu finden:

W. S. Adams und *A. H. Joy:* The luminosities and parallaxes of five hundred stars. Astroph. Journ. 46 (1917), p. 313.

H. Shapley und *B. Lindblad:* The distances of fifty stars determined from Objective prism spectra. Harvard Coll. Obs. Circ. 228 (1921).

W. S. Adams, H. C. Joy, G. Strömberg und *C. G. Burwell:* The parallaxes of 1646

1109) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 83 (1923), p. 503. Vgl. hierzu die Einwände von *K. Lundmark* und *W. J. Luyten,* ebendort 83 (1923), p. 470.

1110) Astroph Journ. 55 (1922), p. 85; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 228 (1922).

1111) Nova acta Acad. Upsal. (4) 6 (1925), Nr. 5.

1112) Arkiv Math. Astr. och Fys. 19 A (1926), Nr. 33; Upsala, Meddelanden, Nr. 10 (1926).

1113) Eine Zusammenstellung der Methoden für frühere Typen ist von *A. V. Douglas,* Astroph. Journ. 64 (1926), p. 262 gegeben worden.

1114) Lick Obs. Bull. Nr. 380 (1926), p. 155.

1115) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 253.

1116) Ebendort 38 (1926), p. 381.

stars derived by the spectroscopic method. Astroph. Journ. 53 (1921), p. 13, mit Berichtigung dazu in Astroph. Journ. 54 (1921), p. 80.

W. E. Rimmer: The luminosities and parallaxes of five hundred stars, types *F* 0 to *Mb.* London Roy. Astr. Soc. Mem. 62 (1923), p. 113; 64 (1925), part. 1.

W. E. Harper und *R. K. Young:* Methods and results of the absolute magnitude determinations of stars at the Dominion Observatory. Pop. Astr. 31 (1923), p. 577.

— The absolute magnitudes and parallaxes of 1105 stars. Dominion Obs. Publ. 3 (1924), Nr. 1; Pop. Astr. 32 (1924), p. 463.

— The absolute magnitudes and parallaxes of 1080 stars. Journ. Roy. Astr. Soc. of Canada 18 (1924), p. 9.

D. L. Edwards: Spectroscopic parallaxes of 100 *B*-type stars. London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 366. Siehe auch ebendort 83 (1922), p. 47.

H. Macklin: Note on spectroscopic parallaxes. London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1924), p. 444.

G. Abetti: Parallassi spettroscopiche di 159 stelle del primo typo di Secchi. Arcetri, osservazioni e memorie 41 (1924), p. 9.

— Parallassi spettroscopiche di 275 stelle del primo typo di Secchi. Ebendort 42 (1925), p. 11.

D. L. Edwards: Spectroscopic parallaxes of *B*-type stars (Third paper). London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 439.

A. V. Douglas: Spectroscopic absolute magnitudes and parallaxes of 200 *A*-type stars. Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 20 (1926), p. 265.

W. S. Adams, A. H. Joy und *M. L. Humason:* The absolute magnitudes and parallaxes of 410 stars of type *M.* Astroph. Journ. 64 (1926), p. 225; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 319 (1926); Pop. Astr. 35 (1927), p. 135.

B. Lindblad: On the absolute magnitudes and parallaxes of bright stars determined by the cyanogen criterion. Kunigl. Svenska Vetenscaps acad. Handlingar (3) 4 (1927), Nr. 5; Upsala Meddelanden 28 (1927).

Ch'ing Sung Yü: Spectroscopic parallaxes of *B*-type stars. London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1927), p. 364.

H. C. Woods: Spectroscopic parallaxes of 300 stars *A* 0 to *A* 5. London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1927), p. 387.

Die Genauigkeit der spektroskopischen Parallaxenbestimmungen ist mehrfach geprüft worden, und zwar von *W. S. Adams, A. H. Joy* und *G. Strömberg*[1117]), *H. H. Turner*[1118]) sowie von *W. S. Adams* und *G. Strömberg*[1119]) durch Vergleichen mit den trigonometrisch erhaltenen Werten und weiter von *H. N. Russell, W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1120]) und von *G. Shajn*[1121]) durch Benutzung bekannter Distanzen von Doppelsternen. Die Übereinstimmung ergab sich überall als befriedi-

1117) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 195.

1118) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 354, 597.

1119) Washington Nat. Acad. Proc. 5 (1919), p. 228; Mt. Wilson Solar Obs. Comm 58 (1919).

1120) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 189.

1121) Astroph. Journ. 62 (1925), p. 104.

gend, und nur geringe systematische Differenzen waren von *G. Strömberg*[1122]) einmal nachweisbar.

Die zur Ermittlung der Leuchtkraft geeigneten spektralen Unterschiede bei Riesen und Zwergen sind aus der Ionisationstheorie durch Unterschiede in Dichte, Masse und Temperatur erklärbar.[1123]) Darauf, daß auch die Masse, also die Gravitation an den Sternoberflächen mitspielt, hatte schon *A. Pannekoek*[1124]) hingewiesen, der dann gleichzeitig versuchte, aus Differenzen zwischen spektroskopischen und trigonometrischen Parallaxenwerten auf die Masse zu schließen.

29. Die relative Häufigkeit der Elemente in den Atmosphären der Fixsterne. Die relative Häufigkeit eines Elementes in einem Gemisch ist aus der Intensität der Spektrallinien schätzbar. *H. N. Russell*[1125]) hat bereits vor längerer Zeit versucht, aus der Intensität der Linien im Sonnenspektrum auf die relative Häufigkeit der Elemente in der Sonnenatmosphäre zu schließen und hat dabei eine auffallende Ähnlichkeit mit irdischen Verhältnissen gefunden. Die Intensität der Spektrallinien hängt jedoch in komplizierter Weise mit der Temperatur, dem Druck, mit inneren atomaren Verhältnissen und dem Ionisationsgrad und mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Linien der einzelnen Serien so eng zusammen, daß eine solche Untersuchung nur qualitative Resultate ergeben kann. Jedenfalls wird das erste Erscheinen einer bestimmten Linienserie davon abhängen, ob eine bestimmte geringste Anzahl von Atomen in dem betreffenden Erregungszustand vorhanden ist oder nicht.[1126]) Die Teilkonzentration solcher Atome ist aber mit den in Nr. 7b gegebenen Formeln bei bekannter Temperatur und bekanntem Elektronendruck berechenbar. Macht man, um auf die relative Häufigkeit des Elementes übergehen zu können, nun die Annahme, daß die für das erste Erscheinen einer Linienserie nötige Teilkonzentration für alle Elemente gleich sei, so geben die reziproken Werte dieser Teilkonzentrationen unmittelbar ein Maß für die relativen Häufigkeiten selbst. Auf diesem Wege er-

---

1122) Ebendort 55 (1922), p. 11; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 220 (1922).

1123) Harvard Coll. Obs. Circ. 291 (1926). Im Gegensatz hierzu findet *B. P. Gerasimovič* [Harv. Coll. Obs. Circ. 311 (1927)], daß die Erklärung der Tatsache, daß nur einzelne Linien Veränderungen erleiden, Schwierigkeiten verursache. Siehe hierzu auch *J. Q. Stewart,* Pop. Astr. 31 (1923), p. 88 und *C. H. Payne,* Stellar Atmospheres Kap. 10 sowie Washington Nat. Acad. Proc. 12 (1926), p. 12.

1124) Astron. Institutes Netherland Bull. 1 (1922), Nr. 19, p. 107.

1125) Science 39 (1914), p. 791. Siehe auch die Erörterungen dazu von *H. H. Plaskett,* Victoria Domin. Astroph. Obs. Publ. 1 (1922), p. 325.

1126) Washington Nat. Akad. 11 (1925), p. 192. *(C. H. Payne.)*

hielt *C. H. Payne*[1127]) die in der folgenden Tabelle für 15 in den Sternatmosphären anscheinend besonders häufig vorkommende Elemente gegebenen Häufigkeitszahlen in Prozenten:

Element	Sternatmosphäre	Erde		Steinmeteoriten
		Erdkruste	Ganze Erde	
Si	5,7	16,2	9,58	11,2
Na	5,7	2,02	0,97	0,6
Mg	4,2	0,42	3,38	2,8
Al	3,6	4,95	2,66	1,1
C	3,6	0,21	—	—
Ca	2,9	1,5	1,08	0,56
Fe	2,5	1,48	46,37	5,92
Zn	0,57	0,0011	—	—
Ti	0,43	0,241	0,12	—
Mn	0,36	0,035	0,06	—
Cr	0,29	0,021	0,05	0,29
K	0,11	1,088	0,38	0,10
V	0,05	0,0133	—	—
Sr	0,002	0,0065	—	—
Ba	0,005	0,0098	—	—

Ein Vergleich mit den für die Erde und die Steinmeteoriten nach *Clarke*[1128]) beigesetzten Werten zeigt insofern eine im allgemeinen befriedigende Übereinstimmung, als doch die in den Sternatmosphären besonders stark vertretenen Elemente auch auf der Erde zu den häufiger vorkommenden gehören. Gewisse Unterschiede, wie insbesondere bei Si und Fe, können vielleicht auf kosmogonische Ursachen (Bildung der Erde aus den äußeren Schichten der Sonne, Herabsinken schwererer Elemente in dem noch nicht erstarrten Erdkörper) zurückgeführt werden.

30. Die neuen Sterne. In den fast 300 Jahren, die zwischen dem Aufleuchten der Nova Cassiopeiae im Jahre 1572 und der Entdeckung der Nova (*T*) Coronae im Jahre 1866 liegen, bei der zuerst spektroskopische Beobachtungen angestellt worden sind, hatte das Aufleuchten von im ganzen nur sieben neuen Sternen beobachtet werden können. Daß nun aber bis jetzt bereits über 100 neue Sterne bekannt geworden sind, ist hauptsächlich der Photopraphie zu danken, die nicht nur die Überwachung des Himmels erleichtert, sondern auch schwächere Novaerscheinungen zur Entdeckung gebracht hat.

1127) Stellar Athmospheres p. 187.

1128) U. S. Geolog. Survey, Prof. Papers 132 (1924) und Bull. 491.

Schon bei der *Nova (T) Coronae* vom Jahre 1866, die hauptsächlich von *W. Huggins* und *W. A. Miller*[1129]), *E. J. Stone* und *Carpenter*[1130]) und von *C. Wolf* und *G. Rayet*[1131]) spektroskopisch untersucht worden ist, fiel das Auftreten heller Bänder und breiter heller Wasserstofflinien auf, die, wie die weiteren Beobachtungen gezeigt haben, für das Novaspektrum nach dem Lichtmaximum typisch sind. Das Spektrum dieses Sterns, der vor dem Lichtausbruch ungefähr von der $10^{\text{mag.}}$ war, ist in neuester Zeit wieder von *K. Lundmark*[1132]) untersucht worden. Der Stern hatte mit $9{,}4^{\text{m}}$ visuell und $11{,}0^{\text{m}}$ photographisch seine ursprüngliche Helligkeit wieder angenommen, und das Spektrum war vom Typus $M1e$, wie sich später noch herausstellen wird, ganz abweichend vom normalen spektroskopischen Verlauf einer Novaerscheinung.

Eingehendere Studien konnten schon an der nächsten, am 24. November 1876 von *Schmidt* entdeckten *Nova Cygni* angestellt werden. Nach *H. C. Vogel*[1133]), *A. Cornu*[1134]) und *R. Copeland*[1135]) erschienen u. a. H_α, H_β und H_γ und die grüne Nebellinie bei 5007 als breite helle Bänder. *Vogel* konnte schon an diesem Stern beobachten, daß das Spektrum am 25. Oktober 1877, also ungefähr ein Jahr nach dem Aufleuchten, fast nur mehr aus der Nebellinie 5007 bestand, daß also der Stern um diese Zeit bereits in das sogenannte Nebelstadium übergegangen war. Diese Beobachtung von *Vogel* bildete eine wertvolle Ergänzung einer Wahrnehmung von *J. W. Backhouse*[1136]), daß zunächst die *F*-Linie des Wasserstoffs am hellsten war, später aber zurücktrat, während die grüne Nebellinie gleichzeitig immer heller wurde.

Bei der *Nova Aurigae* vom Jahre 1891 wurde zum erstenmal von allen Beobachtern festgestellt, daß fast alle hellen Bänder, insbesondere die hellen Wasserstofflinien, an der violetten Seite von Absorptionslinien begleitet waren, die so stark nach Violett verschoben waren, daß sie Geschwindigkeiten bis zu mehreren tausend Kilometern ergaben, wenn man die Verschiebungen als *Doppler*sche Verlagerungen deutete. Ähnliche Verhältnisse zeigten sich dann später bei allen anderen seither erschienenen neuen Sternen, so daß das Auftreten

1129) London Roy. Soc. Proc. 15 (1866), p. 146; Roy. Astr. Soc. Month. Not. 26 (1866), p. 275.

1130) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 26 (1866), p. 295.

1131) Paris C. R. 62 (1866), p. 1108.

1132) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 271.

1133) Berlin Sitzber. 1877, Mai.

1134) Paris C. R. 83 (1877), p. 1172.

1135) Astr. Nachr. 89 (1877), p. 63; 90 (1877), p. 351.

1136) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 39 (1877), p. 35.

heller Bänder mit stark nach Violett verschobenen dunklen Begleitern nunmehr als typisches Merkmal neuer Sterne gilt und vielfach zur Entdeckung schwacher Objekte auch dann noch führt, wenn diese ihr Lichtmaximum bereits stark überschritten haben. Die starken Verschiebungen, die auf bis dahin ungewohnte Geschwindigkeiten führten, ließen damals Zweifel darüber entstehen, ob sie nach dem *Doppler*schen Prinzip als Geschwindigkeitsverschiebungen gedeutet werden dürfen. Insbesondere hat *J. Wilsing*[1137]) in mehreren Publikationen darauf hingewiesen, daß kräftige Druckverschiebungen auftreten können, wenn man den Funken in Wasser, also unter hohem Druck überspringen läßt, und er dachte bei den neuen Sternen an die Möglichkeit, daß eine Kombination der Spektren des Kerns und der ausgebreiteten Gashülle vorliege.

Daß das früher erwähnte Auftauchen der Nebellinie bei 5007 im vorgerückten Novastadium noch nicht den Schlußzustand bedeutet, haben wesentlich später *C. D. Perrine*[1138]) sowie *W. S. Adams* und *G. E. Pease*[1139]) zeigen können, als sie fanden, daß 12 bzw. 23 Jahre nach dem Aufleuchten dieses Sterns die früher beobachteten Nebellinien bei 4960 und 5007 nicht mehr vorhanden waren.

Die von *Anderson* zwei Tage vor ihrem Maximum am 21. Februar 1901 als Stern 2^m entdeckte *Nova Persei* ist infolge der Fülle der an ihr beobachteten Erscheinungen neuerlich besonders wichtig geworden. Nach amerikanischen Aufnahmen hatte der Stern vor dem Maximum ein Spektrum vom Typus *B.*[1140]) Von den zahlreichen Beobachtern, die diese Nova spektroskopisch untersucht haben, seien nur erwähnt *J. N. Lockyer*[1141]), *W. Sidgreaves*[1142]), *G. E. Hale*[1143]), *H. C. Vogel*[1144]), *J. Hartmann.*[1145]) Danach war das Spektrum um die Zeit des Maximums etwa vom Typus *A—F*, die Linien der Metalle und des H waren breit und verwaschen, die Linien *H* und *K* des Ca^+ dagegen scharf. Aber schon kurz nach dem Maximum, am 24. Februar, hatten sich diese Verhältnisse umgekehrt, da nun die Linien der

1137) Potsdam Astrophys. Obs. Publ. 12 (1900), p. 77; Berlin Sitzber. 1899, p. 426; Astroph. Journ. 10 (1899), p. 113.

1138) Astroph. Journ. 19 (1903), p. 80.

1139) Ebendort 40 (1914), p. 294.

1140) Harvard Coll. Obs. Circ. 56 (1901).

1141) London Roy. Astr. Soc. 61 (1901), App.; 62 (1902), App.

1142) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 61 (1901), p. 355, 388; 62 (1902), p. 137, 521.

1143) Astroph. Journ. 13 (1901), p. 173, 238.

1144) Astr. Nachr. 154 (1901), p. 391; 155 (1901), p. 66.

1145) Astr. Nachr. 155 (1901), p. 73.

Metalle scharf erschienen, während sich *H* und *K* verbreitert hatten, und außerdem zeigten sich bereits die Linien des Wasserstoffs, Natriums und anderer Elemente, inbesondere die He^+-Linie 4686, als helle Bänder von wechselnder Intensität und oft ziemlich komplizierter Struktur, und ebenso war das ein gleiches Verhalten zeigende typische helle Band bei 4640 aufgetreten. Alle hellen Bänder waren an der violetten Seite von dunklen Absorptionslinien begleitet, die eine starke, aber von Tag zu Tag wechselnde Blauverschiebung aufwiesen. Anscheinend waren zwei Spektren, ein kontinuierliches Spektrum mit Absorptionslinien und ein reines Emissionsspektrum, vorhanden, die sich, wie *W. W. Campbell* und *W. H. Wright*[1146]) und *W. S. Adams*[1147]) fanden, unabhängig voneinander veränderten, und zwar derart, daß bei jedem Aufflammen das Absorptionsspektrum kräftiger und das Emissionsspektrum schwächer wurde, während das Umgekehrte eintrat, wenn die Helligkeit des Sterns wieder abfiel. Die aus den stark verschobenen dunklen Begleitern der hellen Bänder folgenden veränderlichen Radialgeschwindigkeiten wollte *J. Wilsing*[1148]) später wieder daraus erklärt wissen, daß zunächst mit nur geringer Geschwindigkeit losgeschleuderte Gasmassen unter dem Einfluß einer veränderlichen Repulsivkraft verschieden hohe Geschwindigkeiten in radialer Richtung annehmen. Die Nebellinien 4959 und 5007 zeigten sich zuerst im April 1901 als helle Linien. Sie wurden dann immer kräftiger, während der Stern an Licht abnahm, und bildeten bald das auffälligste Merkmal des ganzen Spektrums[1149]), bis das letztere im August 1903 überhaupt völlig in das Spektrum eines Gasnebels übergegangen war.[1150]) Dann aber bildeten sich die Nebellinien wieder zurück; 1905 und 1907 waren sie nach *J. Hartmann*[1151]) nicht mehr auffindbar, und statt ihrer waren die für einen O-Stern typische Linie 4686 des He^+ und die Wasserstofflinien wieder als helle Linien sichtbar geworden. Spätere Aufnahmen von *W. H. Wright*[1152]) und von *W. S. Adams* und *G. E. Pease*[1153]) ergaben dann keine weitere Veränderung mehr.

Zur Zeit, als das kontinuierliche Spektrum schwächer und die hellen Bänder kräftiger wurden, zeigten Aufnahmen mit photographischen Objektiven die Nova wie von einer Aureole umgeben, die von

1146) Astroph. Journ. 14 (1901), p. 269.
1147) Ebendort 14 (1901), p. 158.
1148) Astr. Nachr. 157 (1902), p. 346.
1149) Siehe bei *E. C. Pickering,* Astroph. Journ. 14 (1901), p. 82.
1150) Siehe bei *H. D. Curtis,* Astroph. Journ. 19 (1903), p. 83.
1151) Astr. Nachr. 177 (1908), p. 113.
1152) Publ. Astr. Soc. Pac. 29 (1917), p. 217.
1153) Harvard Coll. Obs. Bull. 646 (1917).

M. Wolf[1154]) und *E. v. Gothard*[1155]) dadurch erklärt wurde, daß die Achromasie der betreffenden Objektive nicht mehr zur Strahlung des Sterns paßte. Aus dem gleichen Grunde mußte der Stern im späteren Stadium bei visuellen Beobachtungen an Refraktoren wegen der hauptsächlich blauen und violetten Strahlung anders fokussiert werden[1156]), während weder das eine noch das andere bei Benutzung von Spiegeln bemerkt wurde.

Im August 1901 fand *M. Wolf*[1157]) photographisch, daß der Stern von einer ziemlich strukturreichen, ausgebreiteten Nebelhülle umgeben sei, die dann auch auf amerikanischen Aufnahmen bemerkt wurde.[1158]) Bald danach beobachtete *C. D. Perrine*[1159]), daß sich einzelne Nebelknoten im Verlauf von 48 Tagen um etwa 1,5′ vom Stern wegbewegt hatten. In der Zeit vom 31. Oktober bis 4. November 1902 gelang es dann *C. D. Perrine*[1160]), am Crossley-Reflektor der Licksternwarte das Spektrum dieses Nebels mit 34stündiger Expositionszeit zu photographieren. Es war schwach kontinuierlich mit einem hellen Band zwischen H_β und H_γ und ähnelte dem Spektrum, das die Nova selbst zur Zeit des Aufleuchtens gezeigt hatte. Somit schien es sich in diesen Nebeln um eine Staubwolke zu handeln, die beim Aufleuchten des Sterns durch dessen Licht nach und nach immer weiter hinaus beleuchtet wurde und in dem Maße größer zu werden schien, als das Licht in ihr weiter eindrang. Parallaxenmessungen an der Nova haben diese Vorstellung gefestigt, da sich aus der scheinbaren Vergrößerung der Nebelhülle und der bekannt gewordenen Distanz des Sterns tatsächlich Ausbreitungsgeschwindigkeiten ergaben, die der Luftgeschwindigkeit entsprachen. Später wurden neue Nebelwindungen um die Nova herum beobachtet, die aber vermutlich durch wirkliche Ausströmungen aus dem Stern hervorgerufen waren.

Mit Übergehung der Nova Geminorum I vom Jahre 1903 und der Nova Lacertae vom Jahre 1910, welche letztere in späteren Stadien bezüglich photographischer Aureole[1161]) und Fokusdifferenz bei visuellen Beobachtungen[1162]) die gleichen Erscheinungen zeigte wie die

1154) Astr. Nachr. 156 (1901), p. 254.

1155) Ebendort 156 (1901), p. 283. Siehe auch *S. Kostinsky,* Astr. Nachr. 156 (1901), p. 271.

1156) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 183.

1157) Astr. Nachr. 157 (1901), p. 143.

1158) Siehe bei *G. W. Ritchey,* Astroph. Journ. 14 (1901), p. 167, 293.

1159) Telegramm an die Astr. Nachr. 157 (1901), p. 79.

1160) Lick Obs. Bull. 33 (1903); Astroph. Journ. 17 (1903), p. 310.

1161) Siehe *S. Kostinsky,* Astr. Nachr. 189 (1911), p. 111.

1162) Siehe *E. E. Barnard,* ebendort 187 (1911), p. 92.

Nova Persei, sei sofort auf die von *S. Enebo* entdeckte *Nova Geminorum 2* vom Jahre 1912 übergegangen, bei der der Verlauf der Erscheinung unter Benutzung von Aufnahmen, die von *G. Eberhard* in Potsdam bei Kombination von Objektivgitter und Objektivprisma ausgeführt worden sind, von *A. Brill* [1163]) und unter Verwendung von in Cambridge, Bonn und Allegheny aufgenommenen Platten von *F. J. M. Stratton* [1164]) besonders eingehend studiert worden ist. Eingehende Beschreibungen des Spektrums rühren außerdem noch her u. a. von *W. H. Wright* [1165]), *F. C. Jordan* [1166]), *A. L. Cortie* [1167]), *J. S. Plaskett* [1168]) sowie *W. S. Adams* und *A. Kohlschütter.* [1169]) Nach *H. F. Newall* und *F. J. M. Stratton* [1170]) ähnelte das Absorptionsspektrum anfänglich stark dem Spektrum von α Cygni und es waren etwa 50 Linien mit Ti^+, Fe^+, Va^+, Sc^+ und Sr^+ identifizierbar. Bei einigen Linien unbekannten Ursprungs machten *F. Küstner* [1171]) und *H. Giebeler* [1172]) darauf aufmerksam, daß sie Linien von U, A, Ra und RaEm auffallend nahe liegen. Schon unmittelbar nach dem Maximum waren die hellen Bänder ungemein strukturreich. Ihre Breite war nach *W. H. Wright* [1173]) ungefähr λ^2 proportional und ihre Maxima waren nach Rot oder Violett verlagert, während ihre Mitten nahezu an der richtigen Stelle standen. In diesem Stadium wurde auch das kontinuierliche Spektrum an der Seriengrenze des Wasserstoffs hell gesehen. Dann ging der Stern zum Typus *B* über und es erschienen die Linien 3995, 4447, 4602, 4607, 4614, 4621 und 4631 des N^+, die noch ein Jahr nach dem Aufflammen, wo der Stern bereits das Spektrum eines typischen *O*-Sterns zeigte, jedesmal deutlicher wurden, wenn die Helligkeit der Sterns wieder etwas anstieg. Nach *W. H. Wright* [1174]) war der Stern sechs Monate nach seinem Aufleuchten nochmals in das frühere Stadium getreten, wo das Band bei 4640 heller wird, während gleichzeitig 4686 (He^+) zurücktritt. Dasselbe Verhalten wie 4640 zeigten auch die hellen Bänder bei 3484 und 4103, die nach Untersuchungen von

---

1163) Potsdam Astroph. Obs. Publ. 23/2 (1915), Nr. 70.
1164) Cambridge Solar Physics Observ. Ann. 4/1 (1920).
1165) Lick Obs. Publ. 14 (1926), p. 27.
1166) Allegheny Obs. Publ. 3 (1913), Nr. 3.
1167) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 646.
1168) Journ. of Roy. Astr. Soc. Canada 6 (1912), p. 27.
1169) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 293.
1170) London Roy. Astr. Soc. 73 (1913), p. 380.
1171) Astr. Nachr. 194 (1913), p. 369.
1172) Ebendort 191 (1912), p. 393.
1173) Lick Obs. Publ. 14 (1926), p. 36.
1174) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 181.

A. Fowler[1175]) dem N^{++} angehören. Auch im Jahre 1914 war die Nova nach Beobachtungen von *W. S. Adams* und *F. G. Pease*[1176]) noch vom Typus *O*. Die hellen Bänder von H, He^{+} und N^{++} (besonders 4610 und 4640) waren auf kontinuierlichem Grund schwach zu sehen, und die Nebellinien, wenn überhaupt vorhanden, so äußerst matt.

Die photometrischen Untersuchungen des Spektrums durch *A. Brill*[1177]) ergaben deutlich ein Wandern des Energiemaximums nach Violett, wenn die Helligkeit des Sterns zurückging, aber das ganze Spektrum zeigte dabei keineswegs ein einheitliches Verhalten, denn während die Region 4700—5500 bei steigender Helligkeit ein Steigen der Temperatur andeutete, war eben gerade bei Wellenlängen kleiner als 4700 das Gegenteil der Fall. *J. Wilsing*[1178]) hat übrigens an der Nova Aquilae vom Jahre 1918 beobachten können, daß Temperatur und Helligkeit völlig parallel verliefen, wenn man nur die helle Wasserstoffstrahlung ausschaltete.

Was diese nächste *Nova Aquilae* vom Jahre 1918 betrifft, so war ihr Spektrum vor dem Maximum nach *A. J. Cannon*[1179]) vom Typus *B* oder *A*. Diese Nova wurde u. a. spektroskopisch beobachtet von *A. L. Cortie*[1180]), *F. E. Baxandall*[1181]), *J. Lunt*[1182]), *L. B. Allen*[1183]) und *G. F. Paddock*[1184]), der auch den roten Teil des Spektrums untersucht hat.[1185]) Danach zeigten sich im Ultraviolett zwei Serien von Wasserstofflinien, die verschieden verschoben waren und deren jede einem der beiden sich überlagernden Spektren angehörte.[1186]) *F. E. Baxandall*[1187]) beobachtete schon 24 Stunden nach dem Maximum helle Linien des N^{+}, O^{+}, C^{+} und He. Auch der Übergang zum Nebelspektrum erfolgte anscheinend außerordentlich rasch, da *J. Lunt*[1188]) die Nebelbänder schon am 15. Juni 1918, d. i. acht Tage nach dem Maximum, vorfand, ganz

1175) Ebendort 81 (1921), p. 189.
1176) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 294
1177) a. a. O.
1178) Astr. Nachr. 208 (1919), p. 191.
1179) Harvard Coll. Obs. Ann. 81 (1921), part 3, p. 179.
1180) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 171.
1181) Ebendort 81 (1920), p. 66.
1182) Ebendort 79 (1919), p. 416.
1183) Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 308.
1184) Ebendort 30 (1918), p. 244.
1185) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 47.
1186) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 123; 81 (1921), p. 438. Das gleiche ist übrigens bei der Nova Geminorum vom Jahre 1912 von *F. J. M. Stratton* [Cambridge Solar Physics Obs. Ann. 4 (1920), p. 41] bemerkt worden.
1187) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 81 (1920), p. 70.
1188) Ebendort 80 (1920), p. 519.

im Gegensatz zum Verhalten der Nova Ophiuchi vom Jahre 1919, die nach Aufnahmen von *W. S. Adams* und *G. C. Burwell*[1189]) sechs Wochen nach ihrem Aufleuchten noch immer das gleiche Anfangsstadium zeigte. Dementsprechend schien auch die Struktur der hellen Bänder bei Nova Aquilae bald stabil geworden zu sein, wenigstens haben *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1190]) in der Zeit von November 1918 bis März 1919 nur mehr geringe Änderungen bemerkt. Bei dieser Nova und ebenso bei den neuen Sternen im Fuhrmann (1892), Perseus (1901) und in den Zwillingen (1912) gelang *W. S. Adams*[1191]) auch zu zeigen, daß die Verschiebungen der dunklen Begleiter der hellen Bänder ziemlich gut proportional der Wellenlänge waren, so daß wahrscheinlich wirklich an *Doppler*sche Verschiebungen, also radiale Ausbreitung leuchtender Gaswolken gedacht werden darf.

Aufnahmen des Spektrums, wie sie von *J. H. Moore* und *C. D. Shane*[1192]) auf Mt. Wilson 1—3 Jahre nach dem Aufleuchten am 1. August 1919, 27. Mai 1920 und 6. Juni 1921 erhalten worden sind, zeigten in Übereinstimmung mit visuellen Beobachtungen von *E. E. Barnard*[1193]) und *R. G. Aitken*[1194]), daß der Stern nun von einer sich langsam vergrößernden Nebelscheibe umgeben war. Entsprechend der Schichtung der Gase in derselben und infolge des merklichen Durchmessers des Sterns war das Spektrum nicht fadenförmig, sondern aus verschieden dicken Knoten zusammengesetzt. Der Stern hatte im Lichte verschiedener Linien verschiedene Durchmesser, und zwar gaben die Messungen

bei 5007 (Nebellinie)	. .	Durchmesser	3,0″
„ 4959 „	. .	„	2,2″
„ H_β	. .	„	1,0″.

Im Jahre 1926 war der Durchmesser, wie *E. Hubble* und *Ch. Duncan*[1195]) auf Mt.-Wilson-Aufnahmen fanden, bereits auf 16,4″ angewachsen. Die Vergrößerung der Nebelscheibe betrug also pro Jahr etwa 1″. Nennt man r die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Kilometern pro Sekunde, so wäre damit die Distanz des Sterns etwa $D = 0{,}211\,r$ in Parsec. Substituiert man noch für r einen Wert von 1700 km sec^{-1},

1189) Astroph. Journ. 51 (1920), p. 121.

1190) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 182.

1191) Washington Nat. Acad. Proc. 4 (1918), p. 355.

1192) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 269; Lick Obs. Bull. 322 (1919).

1193) Astroph. Journ. 49 (1919), p. 199; Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920).

1194) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 283; 32 (1926), p. 231; 33 (1921), p. 219.

1195) Astroph. Journ. 66 (1927), p. 59.

wie aus der Verschiebung der Absorptionslinien und der Breite der Emissionen nach dem *Doppler*schen Prinzip im Mittel folgen würde, so wäre $D \sim 360$ Parsec oder die Parallaxe $\pi = 0{,}0028$ in Übereinstimmung mit den negativen Ergebnissen trigonometrischer Parallelenmessungen.

Die nächste hellere Nova, die von *W. F. Denning* entdeckte Nova Cygni 3 vom Jahre 1920 zeigte spektral nichts wesentlich Neues. Beschreibungen des Spektrums rühren u. a. her von *F. J. M. Stratton*[1195a]), *W. H. Wright*[1196]), *W. E. Harper*[1197]) und *W. S. Lockyer.*[1198]) Der letztere betont insbesondere die Ähnlichkeit des Spektrums zur Zeit des Lichtmaximums mit dem der Chromosphäre oder von α Cygni, wie von *J. S. Plaskett*[1199]) schon bei der Nova Geminoren vom Jahre 1912 und von *W. E. Harper*[1200]), *R. H. Curtiss*[1201]) und *J. Evershed*[1202]) an der Nova Aquilae 1918 bemerkt worden war. Die *H*- und *K*-Linie des Ca^+ waren stationär[1203]) und Temperatursteigerungen ließen sich, wie *P. Davidovich*[1204]) und *Ch. Nordmann*[1205]) beobachteten, bei jedem Helligkeitsanstieg feststellen.

Ein besonderes Verhalten zeigte die von *Watson* im Jahre 1925 entdeckte Nova Pictoris insofern, als in ihrem Spektrum, das besonders eingehend von *J. Lunt*[1206]) untersucht worden ist, etwa drei Monate nach dem Lichtmaximum dieselben hellen Bänder unbekannten Ursprungs auftraten[1207]), die im Spektrum von η Carinae sichtbar sind. Vor dem Maximum war das Spektrum, wie *P. Davidovich*[1208]) auf Grund von Harvardaufnahmen feststellen konnte, nicht, wie durchschnittlich sonst vom Typus *A*, sondern vom Typus *cF*5. Die Nebellinien erschienen erst spät, 4363 als erste Ende Januar 1927, nachdem die unbekannten Bänder von η Carinae längst vorhanden waren.

1195a) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 82 (1921), p. 44.

1196) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 273, 340.

1197) Victoria Domin. Astroph. Obs. Publ. 1 (1921), p. 267; Pop. Astr. 29 (1921), p. 159.

1198) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 81 (1921), p. 30, 173.

1199) Ottawa Domin. Obs. Publ. 1 (1914), p. 159.

1200) a. a. O.

1201) Pop. Astr. 33 (1925), p. 167.

1202) The Observatory 42 (1919), p. 85.

1203) *J. Evershed* hat Andeutungen hierfür schon bei der Nova Aquilae (1918) gefunden. Siehe The Observatory 42 (1919), p. 85.

1204) Russ. Astron. Inst. 1 (1925), p. 70.

1205) Paris C. R. 171 (1920).

1206) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1926), p. 498.

1207) Siehe bei *J. Lunt* [The Observatory 49 (1926), p. 57] und *P. Davidovich* [Harvard Coll. Obs. Bull 837 (1926); Pop. Astr. 34 (1926), p. 185].

1208) Harvard Coll. Obs. Bull. 837 (1926).

Das allgemeine Verhalten der neuen Sterne ist also etwa folgendes: Während des Helligkeitsanstieges zum Maximum zeigt das Spektrum in der Regel einen frühen Typus $A - F$ mit ungewöhnlich scharfen Wasserstofflinien, ähnlich wie im Spektrum von α Cygni (also eigentlich Typus $cA - cF$). Emissionslinien sind in diesem Stadium vielleicht eben nur angedeutet. Im Maximum oder meistens kurz danach werden die Absorptionslinien insbesondere von He^+, O^+, N^+ kräftiger und dieses Absorptionsspektrum wird überlagert von einem Emissionsspektrum, das aus hellen breiten Wasserstofflinien und anderen unbekannten Emissionen insbesondere bei 4640, 4515, 4379 und 3480 gebildet ist. Charakteristisch ist, daß die Emissionen durchweg von stark nach Violett verschobenen Absorptionslinien begleitet sind, die durch sich radial vom Stern weg ausbreitende Gasmassen hervorgerufen sein dürften. In diesem Stadium ähnelt das Spektrum dem Typus *B*. Früher oder später treten dann die Linien des He^+ (4686), O^+ und N^+ als helle Emissionsbänder hinzu, das kontinuierliche Spektrum wird schwächer und das Spektrum nähert sich dem Typus *O*. Jeder Helligkeitsanstieg verursacht aber stets einen gleichzeitigen Rückgang in das frühere spektrale Stadium. Schließlich nähert sich das Spektrum dem der planetarischen Nebel, indem die Nebellinien bei 3633, 4959, 5007 usw. auftreten. In diesem Stadium zeigt dann der Stern in der Regel auch visuell einen merklichen Durchmesser. Unter Rückbildung der Nebellinien geht dann der Stern wieder zum Typus *O* über.

Der ganze Verlauf solcher normaler Erscheinungen ist in einer Bezeichnungsweise für die einzelnen typischen Entwicklungsstufen enthalten, die auf dem Kongreß der internationalen astronomischen Union zu Rom im Jahre 1922 vorgeschlagen worden ist. Danach sollen die Entwicklungsstadien solcher mit *Q* zu bezeichnenden neuen Sterne in folgender Weise typisiert werden:

Qa: Spektrum ähnlich α Cygni mit schwachen Absorptionslinien und ohne oder nur schwache Andeutung von Emissionen. Die Wasserstofflinien sind auffallend scharf. (Vor dem Maximum und in demselben.)

Qb: Die Absorptionslinien insbesondere der ionisierten Atome sind kräftiger und die Emissionen deutlich und mit stark nach Violett verschobenen dunklen Begleitern versehen (kurz nach dem Maximum).

Oc: Volle Ausbildung eines Doppelspektrums. Die Absorptionslinien von H^+, O^+ und N^+ usw. weisen auf ein Absorptionsspektrum vom Typus *B*. Die Emissionen, insbesondere des Wasserstoffs, sind kräftig, breit und stark gegliedert.

Qu: Auftreten heller Bänder bei 3480, 4515 und 4640.

Qx: Das He^+-Band bei 4686 und andere schwächere Emissionen von zumeist O^+ und N^+ treten hinzu, während meistens gleichzeitig das Band 4640 schwächer wird. Das Absorptionsspektrum ist nur mehr schwach sichtbar und im ganzen ist große Ähnlichkeit mit dem Typus *O* vorhanden.

Oy: Die Nebellinien erscheinen als helle Bänder. Die Aufnahmen des Spektrums zeigen bei quer über die Nova gestelltem Spalt meist einen deutlichen, aber im Licht verschiedener Linien verschiedenen Durchmesser des Sterns an.

Oz: Rückgang zum Typus *O*.

Wie schon bei der Nova Pictoris erwähnt wurde, kommen aber auch Abweichungen von diesem normalen Verlauf vor. Zunächst wäre hier der veränderliche Stern P Cygni, der im Jahre 1600 aufgeleuchtet hat und noch jetzt, also 300 Jahre nach dem Aufflammen, ein Spektrum zeigt vom Typus *Be*, in dem nach *E. B. Frost*[1209]) und *P. W. Merrill*[1210]) die hellen Linien noch immer an der violetten Seite von stark verschobenen dunklen Begleitern flankiert erscheinen. Ähnliche Eigentümlichkeiten wurden auch noch bei S Doradus[1211]), AG Pegari[1212]), AG Carinae[1213]) und einigen anderen Sternen[1214]) beobachtet.

Ein vom normalen Verlauf abweichendes Verhalten zeigt noch die Nova Coronae (T Coronae) vom Jahre 1866, da sie jetzt ein Schlußspektrum vom Typus *M1ep* zeigt.

Weiter haben folgende Sterne novaähnliche Spektren: HD 51480 und — 27°11944, deren Spektren *P. W. Merill*[1215]) P Cygni-artig findet, dann v Sagittarii[1216]) und HD 45910[1217]), sowie der veränderliche η Carinae u. a. m.[1218]) Nach *A. J. Cannon*[1219]) hatte η Carinae in den Jahren 1892 und 1893 ein Spektum *F*5 mit zahlreichen hellen Bändern.

1209) Astroph. Journ. 35 (1912), p. 286.

1210) Lick Obs. Bull. 201 (1911); 246 (1913).

1211) Harvard Coll. Obs. Bull. 814 (1925).

1212) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 93; 224 (1925), p. 146; Harvard Coll. Obs. Bull. 762 (1922).

1213) Harvard Coll. Obs. Ann. 56 (1912), p. 183.

1214) Harvard Coll. Obs. Ann. 76 1916), p. 31; Harvard Coll. Obs. Bull. 801 (1924).

1215) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 418.

1216) Nach *J. S. Plaskett* [London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1926), p. 31.

1217) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 87 (1926), p. 31.

1218) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 20 (1926), p. 20.

1219) Harvard Coll. Obs. Circ. 59 (1901).

Wenige Jahre später, 1898 und 1901, beobachteten *D. Gill*[1220]) und *E. C. Pickering*[1221]) an ihm wieder ein typisches Novaspektrum, und ab 1912 zeigte er nach *A. J. Cannon*[1222]) und *J. H. Moore* und *R. F. Sanford*[1223]) ein Spektrum, in dem nur helle Linien des Fe^+, Ti^+ und Cr^+, aber keine Absorptionen vorhanden waren. Das Spektrum speziell dieses Sterns ist bis in die neueste Zeit vielfach beobachtet worden, z. B. von *J. Lunt*[1224]), *F. E. Baxandall*[1225]), *W. M. Worsell*[1226]), *C. D. Perrine*[1227]) und *P. Davidovich*.[1228]) Auch der unregelmäßig veränderliche T Pyxidis zeigt nach *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1229]) im Lichtmaximum stets breite Emissionslinien des Wasserstoffs mit dunklen Begleitern an der violetten Seite und außerdem helle Linien des Fe^+ sowie Absorptionslinien von Sauerstoff und Stickstoff, also ein novaähnliches Spektrum, in dem auch H_α als helle Linie gesehen wurde.[1230]) Es sei noch erwähnt, daß Nebellinien, die auf eine den Stern einhüllende Nebelmasse hinweisen, in einem auch sonst novaähnlichen Spektrum noch die veränderlichen Sterne RY Scuti[1231]) (Spektrum *Bp*, H, He und die Nebellinie 4658 hell), Z Andromedae (*Oc*)[1232]), RX Puppis (nach dem *Draper*katalog mit hellen Nebellinien bei 3869, 4363, 4688) und SY Muscae sowie CM Aquilae[1233]) aufweisen.

Die Versuche, die an den neuen Sternen beobachteten Phänomene zu deuten, reichen weit zurück bis in den Beginn des 17. Jahrhunderts.[1234]) Von älteren Erklärungsversuchen sei nur erwähnt die Meteorhypothese von *J. N. Lockyer*[1235]), nach der eine Novaerscheinung durch Zusammenstoß von zwei Meteorschwärmen entstehen soll. Auch der

---

1220) Astr. Nachr. 155 (1901), p. 239; London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 61 (1901), App. p. 66.

1221) Harvard Coll. Obs. Circ. 59 (1901).

1222) Harvard Coll. Obs. Ann. 76 (1916), p. 36; Pop. Astr. 28 (1920), p. 524.

1223) Lick Obs. Bull. 8 (1914, 1915), p. 55, 134.

1224) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 621.

1225) Ebendort 79 (1919), p. 619.

1226) Johannisburg Union Obs. Circ. 46 (1919).

1227) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 117.

1228) Harvard Coll. Obs. Bull. 837 (1926).

1229) Pop. Astr. 28 (1920), p. 514.

1230) Vgl. bei *M. L. Humason* [Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 200].

1231) Siehe auch *P. W. Merrill*, Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 134, 295.

1232) Nach *H. H. Plaskett*, Pop. Astr. 31 (1923), p. 658.

1233) Harvard Obs. Bull. 826 (1925).

1234) Siehe den Artikel von *F. J. M. Stratton* im „Handbuch der Astrophysik", Bd. 6 (1928), p. 293.

1235) Nature 37 (1887), p. 55, 80, 585, 606; 38 (1888), p. 8. 31, 56, 79; 65 (1901), p. 133.

Zusammenstoß zweier oder mehrerer Körper wird neuerlich wieder von *A. Veronnet*[1236]) herangezogen. *F. Nölke*[1237]) denkt an Auflösung eines an der *Roche*schen Grenze kreisenden Planeten und Einsturz in den Fixstern, und *H. Vogt*[1238]) untersuchte die Möglichkeit, daß der Zusammenstoß durch das Eindringen eines Doppelsternsystems in eine kosmische Staubwolke hervorgerufen sei. *H. Ebert*[1239]) hat versucht, die Novaerscheinungen aus der Wirkung anomaler Dispersion zu erklären, und *H Kayser*[1240]) hat darauf hingewiesen, daß die bei Ausbrüchen radioaktiver Stoffe frei werdenden gewaltigen Energien ebenfalls zur Erklärung des fast plötzlichen Aufleuchtens herangezogen werden könnten. Endlich hat das Auftreten der sich um die Nova Persei ausbreitenden Nebel *H. v. Seeliger*[1241]) zur Hypothese geführt, daß eine Nova durch Eindringen eines Sterns in eine kosmische Staubwolke und die dadurch hervorgerufene starke oberflächliche Erhitzung entstehe. Später hat *E. W. Brown*[1242]) auch noch die Beleuchtungseffekte, die in einer solchen Staubwolke durch das in ihr immer weiter vordringende Licht des Sterns bewirkt werden, genauer untersucht. Nach *J. Halm*[1243]) wären dabei die starken Verschiebungen der Absorptionslinien nach Violett durch eine infolge der plötzlichen Erhitzung mit großer Geschwindigkeit erfolgende radiale Ausbreitung der Sternatmosphäre zu erklären, während es *E. A. Milne*[1244]) neuerlich auch für nicht undenkbar hält, daß die Atome unter dem Einfluß des gesteigerten Strahlungsdruckes solche hohe Geschwindigkeiten in radialer Richtung annehmen. In neuester Zeit haben die oft beobachtete Vergrößerung des Sterndurchmessers gegen Ende des Erscheinungsverlaufes und eine im Jahre 1928 an der Nova Pictoris beobachtete Spaltung des Sterns in zwei Teile wieder dazu geführt, die starken Violettverschiebungen der dunklen Begleiter der Emissionsbänder nach dem *Doppler*schen Prinzip auf eine überaus rasche Ausdehnung des instabil gewordenen Sterns zurückzuführen. In präziser Form hat *J. Hartmann*[1245]) diesem Gedanken Ausdruck gegeben.

1236) Paris C. R. 172 (1921), p. 666.

1237) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 345.

1238) Ebendort 214 (1921), p. 85; 218 (1923), p. 61.

1239) Ebendort 164 (1903), p. 66.

1240) Ebendort 191 (1912), p. 421.

1241) Ebendort 181 (1909), p. 81; siehe auch *R. Emden,* Thermodynamik der Himmelskörper, diese Encykl. VI 2, p. 382.

1242) Astroph. Journ. 53 (1921), p. 169.

1243) Astr. Nachr. 130 (1892), p. 393; 181 (1909), p. 81.

1244) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1926), p. 459; siehe auch *R. H. Fowler,* On dense matter, ebendort 87 (1926), p. 114.

1245) Astr. Nachr. 226 (1926), p. 63, 203.

31. Die veränderlichen Sterne. Die in voriger Nr. besprochenen Sterne mit novaähnlichem Spektrum, von denen die meisten auch einen Lichtwechsel aufweisen, leiten hinüber zu den veränderlichen Sternen im allgemeinen, bei deren Mehrzahl wieder Eigentümlichkeiten in den Spektren auftreten, die mit der Veränderlichkeit der Helligkeit in Zusammenhang stehen.

Es ist zunächst klar, daß sich die Bahnbewegung des einen Sterns um den anderen bei den sogenannten *Bedeckungsveränderlichen*, deren Lichtwechsel durch gegenseitige periodische Verfinsterung der beiden Sterne eines engen Doppelsternsystems zustande kommt, in einer Veränderlichkeit der Radialgeschwindigkeit äußern wird. Die Duplizität von Algol, des Hauptvertreters dieser Gruppe von Variablen, wurde so spektroanalytisch zuerst von *H. C. Vogel*[1246]) erkannt. Spätere Beobachtungsreihen von *A. Belopolsky*[1247]), *R. H. Curtiss*[1248]) und *D. B. Mc Laughlin*[1249]) ergaben dazu noch langperiodische Veränderungen des Elementensystems dieses Sterns, so daß hier offenbar sogar ein dreifaches Sternsystem vorliegt. Auf die Möglichkeit, daß bei solchen Bedeckungsveränderlichen während der Verfinsterung, wo ja nacheinander beide Ränder des helleren Sterns zur fast alleinigen Wirkung kommen, Änderungen der Radialgeschwindigkeiten durch eine eventuelle Rotationsbewegung dieses Sterns beobachtbar sein müssen, hat bereits *W. H. S. Monck*[1250]) hingewiesen, und *G. Forbes*[1251]) und *D. B. Mc Laughlin*[1252]) ist es gelungen, einen solchen Rotationseffekt bei Algol tatsächlich dadurch aufzudecken, daß die Radialgeschwindigkeit in der ersten Hälfte der Verfinsterung positive, in der zweiten Hälfte negative Reste gegen den Mittelwert mit einer Amplitude von etwa 35 km ergab. Ähnliches wurde von *F. Schlesinger*[1253]) und *D. B. Mc Laughlin*[1254]) auch bei δ Librae beobachtet. Daß die Algol-Veränderlichen durchweg weiße Sterne früherer Typen sind, könnte nach *A. A. Nijland*[1255]) darauf zurückzuführen sein, daß die Lichtminima bei den gelben und roten Sternen weniger gut definiert sind, dürfte

1246) Astr. Nachr. 123 (1889), p. 289.
1247) Pulkowa Nicolai-Hauptsternw. Mitt. 3 (1908), p. 72.
1248) Astroph. Journ. 28 (1908), p. 150.
1249) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 22.
1250) The Observatory 23 (1900), p. 254.
1251) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 578.
1252) Astroph. Journ. 60 (1924), p. 22; Pop. Astr. 33 (1925), p. 295.
1253) Allegheny Obs. Publ. 1 (1909), p. 134; London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 71 (1911), p. 719.
1254) Pop. Astr. 32 (1924), p. 558.
1255) Gazette astronomique Anvers 4 (1911), p. 9.

aber wohl eher in kosmogonischen Verhältnissen seine Ursache haben. Komplizierter liegen die Verhältnisse bei den Bedeckungsveränderlichen, wo (wie z. B. bei β Lyrae) beide Komponenten nahe gleich hell sind und Kombinationen beider Spektren verschiedener Art auftreten. Speziell das Spektrum von β Lyrae ist oft studiert worden, z. B. von *W. Sidgreaves*[1256]), *H. E. Lau*[1257]) und *R. H. Curtiss.*[1258]) Danach ist das Spektrum ein Kombinationsspektrum aus dem Spektrum vom Typus $B8$ des Hauptsterns mit dem Spektrum $B5e$ des Begleiters.[1259]) Die dunklen Linien des H und He sind dadurch von hellen Emissionen begleitet, die sich gegen die Absorptionen mit einer Amplitude von etwa 5 Å.E. rhythmisch nach Violett verschieben. Dabei wächst die Violettverschiebung vom Hauptminimum an durch etwa 11 Tage, und der dann einsetzende Rückgang nimmt nur ca. 3 Tage in Anspruch.[1260]) Sowohl Emissionen als auch Absorptionen erreichen etwa 12 Stunden nach dem Hauptminimum ihre größte Intensität. Da diese Eigentümlichkeiten aus dem *Doppler*effekt durch die Bahnbewegung allein nicht erklärt werden können, hat man es offenbar mit ellipsoidischen Körpern zu tun, auf denen sich lebhafte Gezeitenwirkungen äußern. Die dunklen Linien H und K des Ca^+ nehmen an der *Doppler*schen Verschiebung der anderen Linien nicht teil, sondern sind stationär. Das System β Lyrae scheint also in eine Kalziumwolke eingebettet zu sein (siehe Nr. **35**). Vor nicht langer Zeit hat *L. Ferkán*[1261]) über Temperaturmessungen an β Lyrae berichtet, die im Jahre 1913 ausgeführt worden sind und Strahlungsschwankungen ergeben haben, die ebenfalls mit der Periode parallel verlaufen.

Andere Sterne vom Typus β Lyrae, deren Spektrum eingehender untersucht worden ist, sind u. a. W Crucis[1262]) und u Herculis[1263]) sowie W Ursae majoris. Der letztere Stern sei als Vertreter der ganz kurzperiodischen β Lyrae-Sterne angeführt. Die Lichtkurve dieser Sterne zeigt eigentlich kaum ein ausgeprägtes Verfinsterungsminimum, und die Spektrallinien sind verhältnismäßig breit. *J. Schilt*[1264]) meint,

1256) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 64 (1904), p. 168.

1257) Bull. Soc. Astron. de France 20 (1906), p. 131.

1258) Allegheny Obs. Publ. 2 (1911), p. 73. Eine Zusammenstellung aller Arbeiten über β Lyrae hat *W. Baade* in einer Dissertation gegeben (Göttingen 1918).

1259) Nach *A. C. Maury* [Pop. Astr. 34 (1926), p. 625] wären die beiden Spektren $B9$ und $B3e$.

1260) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 54 (1864), p. 57.

1261) Astr. Nachr. 226 (1926), p. 345.

1262) Siehe bei *H. N. Russell,* Astroph. Journ. 36 (1912), p. 133.

1263) a. a. O.

1264) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 160.

daß die beobachteten Linienbreiten kaum durch Rotationseffekte zu erklären sein dürften, und daß man es bei Sternen dieses Lichtwechseltypus vielleicht nicht einmal mit fertigen Doppelsternsystemen zu tun habe, sondern mit Zwischenstadien zwischen einfachen und Doppelsternen.

Spektralanalytisch besonders interessant sind die veränderlichen Sterne vom Miratypus, deren Perioden durchweg lang sind, und die sogenannten δ Cephei-Sterne.

Die *Mirasterne* sind ausschließlich rote Sterne und gehören den Spektraltypen K, M, N, R, S an, auf die sie sich, soweit ihre Zahl bis jetzt bekannt geworden ist, nach *H. Ludendorff*[1265]) in folgender Weise verteilen:

Typus	*Me*	321	Sterne
„	*K*, *M* 0—*M* 8	39	„
„	*N*, *R*	24	„
„	*Se*	18	„
„	besondere Spektren .	3	„

Die Mehrzahl aller dieser Sterne gehört also dem durch die Titanoxydbanden charakterisierten Typus M an und zeigt außerdem helle Emissionen (Me).[1266]) Nur wenige Sterne, die ein Spektrum vom Typus Me besitzen, sind nicht veränderlich.[1267]) Insbesondere der Hauptvertreter Mira (o) Ceti ist spektralanalytisch eingehend untersucht worden. Schon *H. C. Vogel*[1268]) war aufgefallen, daß H_ε dunkel erschien, während alle anderen Wasserstofflinien als Emissionen auftraten, und auch im *Draper*katalog[1269]) ist das Spektrum bereits ziemlich eingehend beschrieben. Weitere Untersuchungen rühren her von *W. W. Campbell*[1270]), *A. H. Clerke*[1271]), *W. Sidgreaves*[1272]) und *J. Stebbins*[1273]), die übereinstimmend feststellten, daß die hellen H-Linien durchweg nach Violett verschoben erschienen. Gleiche Verschiebungen dieser Linien

---

1265) Handbuch der Astrophysik 6 (1928), p. 130.

1266) Spezielle Verzeichnisse von *Me*-Sternen finden sich in Harvard Coll. Obs. Ann. 48 (1903), part 3; 55 (1907), part 1; 56 (1912), part 6; außerdem bei *P. W. Merrill*, Astroph. Journ. 58 (1923), p. 215; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 264 (1923).

1267) Siehe bei *A. H. Joy*, Astroph. Journ. 63 (1926), p. 301; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 311 (1926).

1268) Berlin Sitzber. 1896, p. 395.

1269) Harvard Coll. Obs. Ann. 28 (1897), p. 45, 98, 108.

1270) Astroph. Journ. 9 (1899), p. 31.

1271) The Observatory 22 (1899), p. 152.

1272) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 58 (1898), p. 344; 59 (1899), p. 509.

1273) Lick Obs. Bull. 2 (1903), p. 78; Astroph. Journ. 18 (1903), p. 341.

nach Violett treten nach genauen Untersuchungen von *P. W. Merrill*[1274]) auch bei den Miraveränderlichen vom Typus *Se* sowie bei Sternen der Typen *N* und *R*[1275]) auf. Sie sind also für Veränderliche dieser Art typisch und auch bereits von *G. Eberhard*[1276]) an einem anderen Miravariablen, χ Cygni, bemerkt worden. Die Struktur der Wasserstoffemissionen ist meistens recht kompliziert, da aber *W. H. Wright*[1277]) an den Teilen von H_γ keinerlei Polarisation hat nachweisen können, spielt ein *Zeeman*effekt hier offenbar nicht mit. *W. Sidgreaves*[1278]), *A. L. Cortie*[1279]), *J. S. Plaskett*[1280]) und *V. M. Slipher*[1281]) beobachteten auch anderweitige Linien als Emissionen, insbesondere die Fe-Linien 4308 und 4376, und bei späteren genauen Identifikationen von *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1282]) ließen sich dann auch noch Emissionslinien des Mg und Si feststellen sowie helle Linien unbekannten Ursprungs.[1283]) Verzeichnisse der sicher beobachteten hellen Linien und ihre eventuellen Identifikationen mit Fe, Si (3905, 4103), Mg (4571) und Mn (4031) sind von *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1284]) und *P. W. Merrill*[1285]) gegeben worden. Die vorhandenen Absorptionslinien sind zumeist Bogenlinien des Fe, Ti, Mg, V, Cr, Mn, Ca, Sr, Ba, Co, Na.[1286]) Die Intensität aller Linien schwankt jedoch mit dem Lichtwechsel, und zwar werden die Absorptionslinien der ionisierten Atome bei Abnahme der Helligkeit schwächer, während gleichzeitig die Emissionslinien in der Reihenfolge des wachsenden Ionisationspotentials auftreten und an Kraft gewinnen.[1287]) Von besonderem Interesse ist die Helligkeitsfolge der hellen Wasserstofflinien, die mit der im Laboratorium beobachteten Helligkeitsanordnung dieser Linien nicht übereinstimmt und überdies mit dem Lichtwechsel des Sterns

1274) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 457; 63 (1926), p. 13; Mt. Wilson Contr. 263, 306 (1922, 1926).

1275) Harvard Coll. Obs. Circ. 184 (1914); Publ. Astr. Soc. Pac. 36 (1924), p. 351.

1276) Astr. Nachr. 157 (1902), p. 341; Astroph. Journ. 18 (1903), p. 198.

1277) Lick Obs. Bull. 183 (1910).

1278) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 67 (1907), p. 534.

1279) Ebendort 67 (1907), p. 537; Astroph. Journ. 26 (1907), p. 123.

1280) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 1 (1907), p. 45.

1281) Astroph. Journ. 25 (1907), p. 66.

1282) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 163; 35 (1923), p. 168.

1283) Siehe *E. B. Frost* und *Fr. Lowater,* Astroph. Journ. 58 (1923), p. 265.

1284) Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 193.

1285) Astroph. Journ. 58 (1923), p. 195; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 265 (1923).

1286) Siehe bei *A. H. Joy,* Astroph. Journ. 63 (1926), p. 281; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 311 (1926).

1287) Nach *D. H. Menzel,* Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

periodisch veränderlich ist. *A. J. Cannon*[1288]) bemerkte, daß H_β fast stets heller erscheint als H_γ, während *W. S. Lockyer*[1289]) wieder die Reihenfolge H_δ, H_γ, H_ζ, H_β, also $H_\beta < H_\gamma$ beobachtete H_ε fehlt meistens, wie *W. S. Lockyer*[1290]) und schon früher *J. S. Plaskett*[1291]) bemerkten, dagegen wurde H_α von mehreren Beobachtern, wie z. B. *V. M. Slipher*[1292]) und *C. D. Shane*[1293]), ebenfalls als helle Linie beobachtet. *A. H. Joy*[1294]) gelang es schließlich, den Stern während des ganzen Verlaufs seiner Helligkeitsschwankung spektroskopisch zu beobachten und dadurch noch weitere Gesetzmäßigkeiten festzustellen. Danach nehmen die Absorptionsbanden, die nach *A. Fowler*[1295]) teilweise dem Titanoxyd angehören, mit Abnahme der Sternhelligkeit an Kraft zu, so daß das Spektrum, das im Maximum vom Typus $M5e$ ist, im Minimum etwa mit $M9e$ zu klassifizieren wäre. Verschiedene der schwächeren Absorptionslinien verschwinden im Minimum, um teilweise durch Emissionen ersetzt zu werden, die Ca-Linie 4227 jedoch ist im Minimum außerordentlich breit (bis zu 30 Å.E.). Im kleinsten Licht sind alle Wasserstofflinien dunkel, beim Anstieg der Helligkeit treten dann zuerst H_δ und H_γ als helle Linien auf, und zwar bleibt vor dem Maximum H_γ schwächer als H_δ. Dann aber ändert sich das Helligkeitsverhältnis dieser beiden Linien langsam und kehrt sich schließlich um, bis endlich beide Linien in der Nähe des Minimums als Emissionen verschwinden, um dann im Minimum selbst als Absorptionen aufzutreten. H_β und H_ζ erscheinen erst im Maximum, H_ε und H_η sogar erst danach. Auch diese Linien verschwinden dann aber gleichzeitig etwa 3—4 Monate nach dem Maximum, also noch vor dem Minimum. Bald nach dem Maximum sind somit die Emissionslinien des Wasserstoffs im allgemeinen am intensivsten, während die Bogenlinien des Fe, Mg und Mn erst viel später hell aufleuchten. In den Jahren 1920 und 1921 hatten *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1296]) im Minimum auch Emissionen des He bemerkt. *A. H.*

1288) Pop. Astr. 27 (1919), p. 527.

1289) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1924), p. 558.

1290) a. a. O.

1291) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 1 (1907), p. 45.

1292) Astroph. Journ. 25 (1907), p. 66, 235.

1293) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 234.

1294) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 281; Pop. Astr. 31 (1923). p. 237.

1295) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 69 (1909), p. 508. Eine Anzahl anderer Bänder, die während des schwachen Maximums vom Februar 1925 beobachtet werden konnten, schreibt *F. E. Baxandall,* ebendort 88 (1928), p. 679, dem Aluminiumoxyd zu.

1296) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 163; 33 (1921), p. 107.

Joys[1297]) Vermutung, daß daher vielleicht ein Begleiter mit einem früheren Spektrum vorhanden sei, fand bald ihre Bestätigung, als *R. G. Aitken*[1298]) diesen Begleiter im Oktober 1923 wirklich auffand. Der Begleiter ist nach *A. H. Joy*[1299]), dem es schließlich gelang, sein Spektrum von dem der Mira Ceti zu trennen, vermutlich vom Typus $B8$.

Während die älteren Beobachtungen[1300]) mit den Absorptionslinien eine konstante Radialgeschwindigkeit von + 62 km, für die mit der Helligkeit veränderlichen hellen Wasserstofflinien aber mehr oder minder veränderliche Geschwindigkeitswerte ergeben hatten, zeigten genaue Untersuchungen von *A. H. Joy*[1301]), daß auch die aus den Absorptionslinien folgenden Radialgeschwindigkeiten mit einer Amplitude von 5,9 km veränderlich seien, und zwar in Übereinstimmung mit der Doppelsternnatur von einer Periode, die der des Lichtwechsels gleich ist. Dabei tritt das positive Maximum der Radialgeschwindigkeit stets im Maximum des Lichtwechsels ein, das negative Maximum dagegen im Lichtminimum. Bezüglich der Variabilität der Radialgeschwindigkeit zeigte sich also das gerade Gegenteil des Verhaltens bei den später zu besprechenden δ Cephei-Sternen. Die Bahnelemente, die die variable Geschwindigkeit darzustellen geeignet wären, sind nach *A. H. Joy*[1302])

$$\begin{aligned}
P &= 330^{\mathrm{d}} \\
\gamma &= +58{,}2 \text{ km} \\
K &= 5{,}9 \text{ „} \\
\omega &= 265{,}2^{0} \\
e &= 0{,}20 \\
a \sin i &= 26\,200\,000 \text{ km} \\
\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1+m_2)^2} &= 0{,}007\ \odot.
\end{aligned}$$

Die anderen veränderlichen Sterne vom Miratypus zeigen, soweit sie spektralanalytisch untersucht worden sind, abgesehen von gewissen Individualitäten, ein ähnliches Verhalten wie o Ceti. Bei dem von *L. B. Allen*[1303]) untersuchten Stern T Centauri ($M0e$) erreichen die Emissionslinien ihre größte Intensität schon vor dem Maximum und ver-

1297) Pop. Astr. 31 (1923), p. 237.

1298) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 323; 36 (1924), p. 296; Harvard Coll. Obs. Bull. 792 (1923).

1299) Publ. Astr. Soc. Pac. 36 (1924), p. 290.

1300) z. B. bei *W. W. Campbell,* Astroph. Journ. 9 (1899), p. 31.

1301) a. a. O.

1302) a. a. O

1303) Lick Obs. Bull. 369 (1925), p. 73.

schwinden auch bald nach dem Maximum wieder. Von speziellem Interesse ist der Stern R Aquarii dadurch geworden, daß *P. W. Merrill*[1304]) in seinem Spektrum, wie bereits oben erwähnt, einen Monat vor dem Maximum auch die typischen Nebellinien 3869, 3967, 4068, 4363, 4658, 4959 und 5007 sowie 4471 (He) als helle Linien beobachten konnte. Diese Linien sind aber keinen Intensitätsschwankungen unterworfen und rühren offenbar von einer Nebelhülle her, die bei größerer Helligkeit des Sterns durch die Sternstrahlung zur Emission angeregt wird. Diese Nebelhülle ist übrigens im Jahre 1922 von *C. O. Lampland*[1305]) photographisch aufgefunden worden. Ende 1926 zeigte der Stern dann plötzlich ein Spektrum wie P Cygni (s. Nr. **30**, p. 740).[1306])

Auch die veränderlichen Sterne der Typen *R* und *N* verhalten sich nach speziellen Untersuchungen von *W. C. Rufus*[1307]), *J. H. Moore*[1308]), *R. F. Sanford*[1309]), *C. D. Shane*[1310]) und *P. W. Merrill*[1311]) spektral ungefähr wie die Veränderlichen vom Typus *M*, da die nach Violett verlagerten hellen Wasserstofflinien auch bei ihnen in der Intensität mit dem Lichtwechsel variieren. Unter den Sternen dieser Typen *R* und *N* finden sich auch Veränderliche von ganz unregelmäßigem Lichtwechsel. Das gleiche gilt auch noch für die *Se*-Sterne, deren Spektrum (R Cygni) zuerst von *A. M. Clerke*[1312]), *T. E. Espin*[1313]) und *W. H. Wright*[1314]) beschrieben worden ist. Bisher ist H_ε bei ihnen noch niemals als helle Linie gesehen worden.[1315])

Es ist bereits erwähnt worden, daß bei diesen langperiodischen, veränderlichen roten Sternen bei Abnahme der Helligkeit ein Weiterschreiten in der Typenreihe im Sinne eines Nochröterwerdens eintritt. Nach *W. Gyllenberg*[1316]) stehen auch Periodenlänge und Typus im Maxi-

1304) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 305; 32 (1920), p. 247, 34 (1922), p. 134; Astroph. Journ. 53 (1921), p. 375; Harvard Coll. Obs. Circ. 697 (1919).

1305) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 218; Pop. Astr. 30 (1922), p. 162, 618.

1306) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 48; Harvard Coll. Obs. Bull. 842 (1927).

1307) Univers. Obs. of Michigan (Detroit) 2 (1916), p. 103.

1308) Lick Obs. Bull. 10 (1922), p. 160.

1309) Astroph. Journ. 59 (1924), p. 339; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 276 (1924), Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1826), p. 177.

1310) Lick Obs. Bull. 10 (1920), p. 79.

1311) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 306 (1926).

1312) The Observatory 29 (1906), p. 164.

1313) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 72 (1912), p. 546.

1314) Ebendort 72 (1912), p. 548.

1315) Siehe *P. W. Merrill,* Astroph. Journ. 56 (1922), p. 457; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 252 (1922); Astroph. Journ. 63 (1926), p. 13; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 306 (1926).

1316) Lund Obs. Meddelanden Serie 1. Nr. 90 (1918).

mum derart in Korrelation, daß bei längeren Perioden spätere Maximaltypen auftreten. Im Mittel hätte man danach

bei Perioden	$< 200^d$	Typus im Maximum $M\,4{,}5$
	200^d—249^d	$M\,5{,}1$
	250^d—299^d	$M\,5{,}7$
	300^d—349^d	$M\,6{,}6$
	$> 350^d$	$M\,7{,}1$.

H. Ludendorff[1317]) fand, daß auch das Helligkeitsverhältnis zwischen H_δ und H_γ bei Sternen größerer Periode in der Regel größer sei und daß sogar noch die Größe der Blauverschiebung der hellen Linien in Zusammenhang mit der Periodenlänge stehe.[1318]) Wie *P. W. Merrill*[1319]) vermutet, scheinen die Sterne der Maximumstypen $M\,3$—$M\,5$ im allgemeinen auch größere Radialgeschwindigkeiten zu besitzen als Sterne der Typen $M\,6$—$M\,8$. Aus dem Verhalten der Titanoxydbanden, die bei diesen Sternen gewöhnlich in einer Stärke auftreten, wie sie nach Versuchen von *A. S. King*[1320]) im elektrischen Ofen bei Temperaturen zwischen 2400°—2500° zu beobachten ist, schloß *D. H. Menzel*[1321]), daß die Temperatur dieser Sterne besonders niedrig sei. Tatsächlich haben Temperaturbestimmungen mit der Thermosäule von *S. B. Nicholson* und *E. Pettit*[1322]) für diese Sterne Temperaturen ergeben, die zwischen 1650° und 2260° liegen und nur einmal ausnahmsweise bei RT Cygni 3960° erreichen. Daß die Mirasterne, wie *A. Corlin*[1323]) vermutet, die sogenannte durchdringende Höhenstrahlung verursachen, ist neuerlich von *V. Oberguggenberger*[1324]) bezweifelt worden.[1324a])

Die Ursachen des Lichtwechsels und der mit demselben parallel gehenden spektralen Veränderungen der Mirasterne liegen jedenfalls in physikalischen Zuständen und Vorgängen auf dem Stern. Ursprünglich dachte man, den Lichtwechsel durch veränderliche Flecken- oder Schlackenbildungen (*Zöllners* Schlackentheorie) auf den rotierenden Sternkörpern erklären zu können. Die bezüglichen Möglichkeiten sind

---

1317) Astr. Nachr. 228 (1926), p. 369.

1318) Astr. Nachr. 212 (1921), p. 483.

1319) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 171.

1320) Ebendort 36 (1924), p. 140.

1321) Harvard Coll. Obs. Circ. 258 (1924).

1322) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 132, 181, 290; Pop. Astr. 31 (1923), p. 18.

1323) Astr. Nachr. 231 (1928), p. 137; Beob. Zirk. der Astr. Nachr. Nr. 41 vom Jahre 1926.

1324) Astr. Nachr. 232 (1928), p. 117.

1324a) Über die Mirasterne siehe noch *J. Hopmann,* Colorimetrie der Gestirne, Nr. 24, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

von *H. Gyldén*[1325]), *H. Bruns*[1326]), *H. N. Russell*[1327]), *A. Brester*[1328]) und *P. Guthnick*[1329]) erörtert worden, wobei der letztere auch eine eventuelle durch die Sternatmosphäre verursachte Randverdunkelung der Sternscheibe berücksichtigt hat. Auf die spektralen Eigentümlichkeiten ist aber bei allen diesen Vorstellungen keinerlei Beziehung genommen. Die neueren Hypothesen von *P. W. Merrill*[1330]), der an ein periodisches Auftreten kondensierter Gase denkt (Schleiertheorie), und von *J. H. Jeans*[1331]), der die Mirasterne als Gebilde betrachtet, die unter Oszillationen in die Birnenform übergehen wollen, suchen zwar auch die spektralen Eigentümlichkeiten zu interpretieren, aber eine einheitliche Erklärung der Gesamtheit der Erscheinungen steht noch immer aus. Auch die von *A. S. Eddington*[1332]) speziell für die Veränderlichen vom Typus δ Cephei aufgestellte Pulsationstheorie käme vielleicht in Betracht. *J. Hopman*[1333]) hat den einzelnen Erklärungsversuchen eine kritische Studie gewidmet, und *H. Ludendorff*[1334]) meint, daß den beobachteten Erscheinungen kosmogonische Ursachen zugrunde liegen, da man es in den Mirasternen durchweg mit Riesen, also ganz jungen Sternen zu tun hat, die sich nach und nach im Sinne $M8 \rightarrow M0$ weiterentwickeln werden.

Unter den roten Sternen mit hellen Linien, also mit einem *Me*-Spektrum, gibt es übrigens auch solche mit nur kleinen, aber ganz unregelmäßigen Lichtschwankungen. Es seien hier nur genannt DJ Carinae[1335]), VV Cephei[1336]), W Cephei[1337]) und WY Geminorum.[1338])

Spektroskopisch besonders interessant ist auch die Gruppe der

---

1325) Versuch einer mathem. Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne, Helsingfors 1879.

1326) Preuß. Akad. Monatsber. 1881, p. 46.

1327) Astroph. Journ. 24 (1906), p. 1.

1328) Verhand. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 1, Sectie 9, Nr. 6 (1908).

1329) Astr. Nachr. 209 (1919), p. 1; siehe auch *K. F. Bottlinger,* ebendort 210 (1919), p. 33.

1330) Univ. of Michigan Obs. (Detroit) 2 (1916), p. 70.

1331) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 797.

1332) The Interior Constitution of the Stars, Cambridge 1925, und Der innere Aufbau der Sterne, deutsch von *E. v. d. Pahlen,* Berlin (Springer) 1928, p. 219ff.

1333) Astr. Nachr. 228 (1926), p. 105.

1334) Ebendort 220 (1924), p. 145.

1335) Harvard Coll. Obs Bull. 780 (1922).

1336) Publ. Astr. Soc. Pac. 33 (1921), p. 263.

1337) Ebendort 34 (1922), p. 58, 175; Pop. Astr. 30 (1922), p. 103.

1338) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 133; Harvard Coll. Obs. Bull. 767 (1922).

δ Cephei-Sterne. Sie gehören nach *Martha Güssow*[1339]) meistens den Typen $A-K$ an, und nur ein einziger δ Cephei-Stern (RU Camelopardalis) des späteren Typus R ist bisher bekannt geworden.[1340]) In den Spektren dieser Sterne sind die Linien der Metalle zumeist breit und verwaschen, die Wasserstofflinien dagegen scharf.[1341]) Alle Sterne dieses Typus zeigen auch veränderliche Radialgeschwindigkeit mit der Eigentümlichkeit, daß die größte negative Radialgeschwindigkeit (Annäherung) mit dem Lichtmaximum, der größte positive Wert dagegen mit dem Helligkeitsminimum zusammenfallen, während die mittlere Geschwindigkeit nahe der Null gleichbleibt.[1342]) Eine Auswahl der Linien nach der Höhe ihres Entstehens in der Sternatmosphäre zeigte zudem, daß die Verschiebungsamplitude der einzelnen Linien mit deren Höhe in der Atmosphäre unter gleichzeitiger Phasenverzögerung abnimmt.[1343]) In Übereinstimmung damit hatten auch schon *Ch. E. St. John* und *W. S. Adams*[1344]) bei Funken- und Bogenlinien verschiedene Radialgeschwindigkeiten beobachtet. Die Radialgeschwindigkeitskurve selbst ist übrigens veränderlich, und mit ihr ändern sich natürlich auch die unter Voraussetzung *Doppler*scher Verschiebung abgeleiteten Elemente.[1345]) Dabei bevorzugen aber die Periastronwerte stets eine bestimmte Richtung, und die Exzentrizitäten sind trotz kleiner Periode durchweg abnorm groß, dagegen die $a \sin i$ und die Massenfunktionen wieder unverhältnismäßig klein. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit fällt zumeist auch etwas variabel und nach *R. E. Wilson*[1346]) bei kürzerer Periode in der Regel etwas größer aus. Zwischen Periode, Exzentrizität und Länge des Periastrons dürfte nach *H. Ludendorff*[1347]) ein Zusammenhang bestehen, wenigstens bei Sternen von ausgesprochenem

1339) Kritische Zusammenstellung sämtlicher Beobachtungsergebnisse der Veränderlichen vom δ Cephei-Typus und Kritik der *Eddington*schen Pulsationstheorie, Inauguraldiss. Berlin 1924.

1340) Siehe bei *A. H. Joy,* Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 180.

1341) Siehe bei *A. Belopolsky,* St. Petersburg, Bull. de l'acad. (5) 1 (1894), p. 267; 7 (1897), p. 367; Astr. Nachr. 136 (1894), p. 281; 140 (1896), p. 17; Astroph. Journ. 1 (1895), p. 160 und bei *A. C. Maury,* Harvard Coll. Obs. Ann. 28 (1897), part 1.

1342) *C. D. Perrine,* Astroph. Journ. 50 (1919), p. 148.

1343) Siehe bei *R. H. Curtiss,* Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 148 und bei *W. C. Rufus,* Washington Nat. Acad. Proc. 10 (1924), p. 264.

1344) *Ch. E. St. John* und *W. S. Adams,* Astroph. Journ. 60 (1924), p 43; Mt. Wilson Contr. 279 (1924).

1345) Die umfangreiche Literatur ist von *H. Ludendorff* im Handb. der Astroph. Bd. 6, p. 203ff. zusammengestellt.

1346) Astr. Journ. 35 (1923), p. 35.

1347) Astr. Nachr. 203 (1916), p. 361.

δ Cephei-Charakter. Zur Erklärung sekundärer Wellen in den Radialgeschwindigkeitskurven sind unter der Voraussetzung, daß die beobachteten Linienverschiebungen wirklich auf *Doppler*effekt zurückgeführt werden dürfen, von *A. W. Roberts*[1348]) ellipsoidale Gestalt der Komponenten, von *R. H. Curtiss*[1349]) anderweitige abnormale Rotationseffekte herangezogen worden.

Die meisten δ Cephei-Sterne zeigen auch Besonderheiten des Spektrums. W Serpentis hat z. B. nach *W. S. Adams* und *A. H. Joy*[1350]) doppelt umgekehrte helle *H*-Linien. Das gleiche fand *A. H. Joy*[1351]) bei W Virginis, doch nahmen dort diese Linien an der Veränderlichkeit der Radialgeschwindigkeit nicht teil, sondern blieben stationär.[1352])

Intensitätsänderungen der Spektrallinien und gleichzeitige Änderungen des Typus sind bei δ Cephei und ζ Geminorum schon von *Ina Lehmann*[1353]) bemerkt worden. *W. S. Adams* und *H. Shapley*[1354]) fanden bei δ Cephei im Minimum eine schwache Verbreiterung aller Linien, und nach *Th. S. Jacobsen*[1355]) soll dieses Verhalten bei Sternen dieses Types ziemlich allgemein sein. Nach *F. Henroteau*[1356]) scheinen bei δ Cephei und η Aquilae Maximum und Minimum des Lichtes mit den gleichen Phasen des Ionisationsgrades zusammenzufallen, während die Ionisationsextreme bei ζ Geminorum und α Ursae minoris ungefähr um ein Viertel der Periode vor und nach dem Maximum auftreten. *G. Tiercy*[1357]) fand allgemein bei kurzperiodischen δ Cephei-Sternen im Minimum eine geringere Ionisation derjenigen Elemente, deren Ionisationspotential zwischen 9 und 11 Volt liegt, während sich die Elemente höheren und niedrigeren Ionisationspotentials neutral verhalten sollen. *J. J. Reesinck*[1358]) dagegen schließt wieder auf höhere Ionisation bei absteigendem Licht. Offenbar spielen also individuelle Unterschiede stark mit.

Die Änderungen des Typus im Sinne eines Weiterschreitens in

1348) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 66 (1906), p. 329.

1349) Univ. of. Michigan Obs. (Detroit) Publ. 1 (1915), p. 104.

1350) Publ. Astr. Soc. Pac. 30 (1918), p. 306.

1351) Ebendort 37 (1925), p. 156.

1352) Mt. Wilson Solar Obs. Annual Report 1925, p. 113.

1353) Pulkowa Mitt. 5 (1911), p. 176; Petersburg Acad. Bull. (6) 8 (1914), p. 423.

1354) Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 136.

1355) Lick Obs. Bull. 12 (1926), p. 138.

1356) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 19 (1927), p. 81; Ottawa Dominion Obs. Publ. 9 (1925), p. 52, 115.

1357) Publ. Obs. de Genéve 1928, Nr. 8.

1358) Bull. Astr. Inst. Netherland 4 (1927), p. 41.

der Typenreihe bei abnehmendem Licht sind mehrfach bestätigt worden, so von *F. G. Pease*[1359]), *H. Shapley*[1360]) und von *W. S. Adams* und *H. Shapley*[1361]), und in Übereinstimmung damit hat *Ch'ing Sung Yü*[1362]) bei ζ Geminorum festgestellt, daß die im Maximum unsichtbaren Cyanbanden im Minimum ziemlich kräftig auftreten. Mit den Typusänderungen scheinen auch Änderungen der Wellenlängen parallel zu gehen, wie sie für die Typenreihe charakteristisch sein dürften (siehe Nr. 24), wenigstens sind solche Wellenlängenänderungen von *S. Albrecht*[1363]) bei η Aquilae und l Carinae und von *W. Gyllenberg*[1364]) bei S Sagittae bemerkt worden. Bei l Carinae schwankt dabei der Typus zwischen $F7$ im Maximum und $G5$ knapp nach dem Minimum hin und her. Wie *A. Pannekoek* und *J. J. Reesinck*[1365]) bemerken, ist also die Sterntemperatur im Maximum höher als im Lichtminimum.

Daß auch zwischen Periodenlänge und Spektraltypus im Maximum eine Korrelation besteht, ist mehrfach bemerkt worden, z. B. von *W. W. Campbell*[1366]), *H. Shapley*[1367]), *S. Albrecht*[1368]), *Y. Chang*[1369]), *H. Shapley* und *M. L. Walton*[1370]) und von *H. N. Russell.*[1371]) Der Zusammenhang ist nach *Martha Güssow*[1372]) folgender:

Periode	$< 1^d$,	mittl.	Typus	im	Maximum	$A2$,
"	1^d—3^d,	"	"	"	"	$F1$,
"	3^d—10^d,	"	"	"	"	$G0$,
"	10^d—30^d,	"	"	"	"	$G4$,
"	30^d—45^d,	"	"	"	"	$G8$.

Mit der Periodenlänge wächst also die Sternfarbe.

Nur nebenbei sei bemerkt, daß α Persei und γ Cygni in ihrem Spektrum zwar vielfach an das Spektrum der δ Cephei-Sterne er-

1359) Publ. Astr. Soc. Pac. 26 (1914), p. 256.

1360) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 217; 44 (1926), p. 273; Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 208.

1361) Ebendort 2 (1916), p. 136.

1362) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 357.

1363) Lick Obs. Bull. 4 (1907), p. 131.

1364) Lund Astr. Obs. Meddelande II (1920), Nr. 24.

1365) Bull. Astr. Inst. Netherland 3 (1925), p. 47.

1366) Lick Obs. Bull. 6 (1910), p. 51.

1367) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 451; 48 (1918), p. 106); Mt. Wilson Contr. 96 (1914); 151 (1918).

1368) Astroph. Journ. 54 (1921), p. 188.

1369) Bull. Lyon. Obs. 8 (1926), p. 161.

1370) Harvard Coll. Obs. Circ. 313 (1927).

1371) Astroph. Journ. 66 (1927), p. 122.

1372) a. a. O.

innern[1373]), daß es aber bisher nicht gelungen ist, bei diesen Sternen eine Veränderlichkeit der Helligkeit festzustellen.

Die zur Erklärung der beobachteten Eigentümlichkeiten aufgestellten Theorien gliedern sich hauptsächlich in solche, bei denen die beobachteten Linienverschiebungen als *Doppler*effekte in einem Doppelsternsystem aufgefaßt werden, und in solche, bei denen hierfür Vorgänge auf dem als einfacher Stern angenommenen Veränderlichen herangezogen werden. Wollte man an der Duplizität dieser Sterne festhalten, dann müßte man mit *J. C. Duncan*[1374]) wohl auch bei der Vorstellung verbleiben, daß die beiden das System bildenden Sterne in eine gemeinsame dichte Atmosphäre eingebettet sind, die durch den helleren Stern auf der Vorderseite im Sinne seiner Bewegung zurückgedrängt wird, während sie sich an der Rückseite anstaut. Die gegenseitige Lagerung der Maxima und Minima von Helligkeit und Radialgeschwindigkeit ließe sich auf diese Weise erklären. Schwierigkeiten macht aber nach *H. Ludendorff*[1375]) und *A. Pannekoek*[1376]) die dabei nötig werdende weitere Annahme, daß der wegen des kleinen Wertes der Massenfunktion offenbar auch nur kleine dunkle Stern mit einer ungeheuer mächtigen Atmosphäre ausgestattet sein müßte. Wie *J. Hellerich*[1377]) meint, ließe sich der Lichtwechsel auch durch ungleiche Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche der helleren Komponente erklären. Anomalien der Helligkeitsverteilung könnten nach *P. Guthnick*[1378]) durch gegenseitige Beeinflussung beider Sterne in meteorologischem Sinn oder nach *J. H. Jeans*[1379]) und *J. G. Hagen*[1380]) durch auf dem helleren Stern verursachte Gasausbrüche entstehen und wären denkbar, wenn man mit *J. Hellerich*[1381]) annimmt, daß sich die beiden Komponenten fast berühren, und wenn man sich vielleicht mit *C. D. Perrine*[1382]) noch weiter vorstellt, daß beide Sterne sich in einem dichten widerstehenden Mittel bewegen. *A. Vogt*[1383]) hat übrigens darauf hingewiesen, daß es zur Sicherung der Doppelsternnatur der

1373) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 184; 32 (1920), p. 165.

1374) Lick Obs. Bull. 5 (1909), p. 82.

1375) Astr. Nachr. 184 (1910), p. 373.

1376) Ebendort 215 (1922), p. 227.

1377) Ebendort 215 (1922), p. 291.

1378) Berlin-Babelsberg Veröff. 2 (1918), p. 3; Astr. Nachr. 208 (1919), p. 171; Die Naturwissenschaften 6 (1918), p. 716.

1379) The Observatory 42 (1919), p. 88.

1380) Astroph. Journ. 51 (1920), p. 62.

1381) Astr. Nachr. 224 (1925), p. 277.

1382) Astroph. Journ. 50 (1919), p. 81.

1383) Astr. Nachr. 212 (1921), p. 473.

Cepheiden wohl richtig wäre, einen Stern aufzufinden, der neben dem δ Cephei-Lichtwechsel auch noch Bedeckungslichtwechsel zeigt.

Die anderen von *A. Ritter*[1384]), *F. R. Moulton*[1385]), *H. C. Plummer*[1386]), *H. Shapley*[1387]) u. a. gegebenen Erklärungsversuche ziehen fast ausschließlich Pulsationen eines einfachen Sterns zur Erklärung der Erscheinungen heran. Insbesondere *A. S. Eddington*[1388]) hat diese Pulsationstheorie unter Zugrundelegung der in einer adiabatischen Gaskugel herrschenden Verhältnisse mathematisch ausgebaut und im Gegensatz zu einer Bemerkung von *E. Persico*[1389]) zeigen können[1390]), daß sich Pulsationen als freie Schwingungen in einem Sternkörper sehr lange erhalten können und sich vielleicht erst in tausend Jahren erschöpfen.

Die Verquickung der Doppelsternhypothese mit der Pulsationstheorie führt auf erzwungene Pulsationen, deren Theorie und Wirkung von *J. H. Jeans*[1391]), *P. ten Bruggencate*[1392]) und *H. Vogt*[1393]) erörtert worden sind. *A. S. Eddington*[1394]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß bei solchen erzwungenen Schwingungen Gleichheit von Periodenlänge und Rotationsdauer erforderlich ist, und daß dann für die Rotationsgeschwindigkeit bei Annahme eines Durchmessers von etwa 20 Millionen Kilometer (auch die δ Cephei-Sterne sind Riesensterne) so hohe Beträge folgen würden, daß die Spektrallinien selbst bei Annahme einer starken Randverdunkelung der Sternscheiben bis auf 3 Å.E. verbreitert erscheinen müßten. Da bei Annahme der Pulsationstheorie offenbar ein Pulsationslichtwechsel mit einem durch die Verschiebungen des Spektraltypus hervorgerufenen Temperaturlichtwechsel kombiniert ist, während sich in der Geschwindigkeitskurve nur die

---

1384) Ann. Phys. Chem., Neue Folge 8 (1879), p. 179; 13 (1881), p. 366.

1385) Astroph. Journ. 29 (1909), p. 257.

1386) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 73 (1913), p. 665; 75 (1915), p. 566.

1387) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 448; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 92 (1914).

1388) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1918), p. 2, 177; The internal constitution of the Stars, Cambridge 1926; Der innere Aufbau der Sterne, Berlin (Springer) 1928, p. 219 ff.

1389) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1926), p. 98.

1390) Ebendort 79 (1919), p. 177.

1391) Ebendort 86 (1926), p. 90; 85 (1925), p. 797; The Observatory 42 (1919), p. 88; 49 (1926), p. 125.

1392) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 86 (1926), p. 335; Astr. Nachr. 228 (1926), p. 217.

1393) Astr. Nachr. 229 (1927), p. 125.

1394) The Observatory 49 (1926), p. 88.

Pulsationen registrieren, könnte die Pulsationstheorie nach *W. Baade*[1395]) dadurch geprüft werden, daß man den Temperaturlichtwechsel aus der Lichtkurve eliminiert und die korrigierte Lichtkurve mit der Geschwindigkeitskurve vergleicht.[1395a])

32. Die Spektren der Nebelflecken. *E. P. Hubble*[1396]) hat die Nebelflecken nach ihrem Aussehen und ihrer Lage gegenüber der Milchstraße in folgende Gruppen und Untergruppen eingeteilt:

1. Galaktische Nebel.
   a) Planetarische Nebel.
   b) Diffuse Nebel.
2. Nichtgalaktische Nebel.
   a) Regelmäßig geformte Nebel ohne feinere Struktur von kugelförmiger, elliptischer oder linsenartiger Gestalt.
   b) Spiralnebel.
   c) Unregelmäßig geformte Nebel.

Die erste Gruppe der galaktischen Nebel umfaßt durchweg Gasnebel, deren Spektrum Emissionslinien zeigt. Daß solche Nebel existieren, die ein Gasspektrum aus hellen Linien geben, ist zuerst von *W. Huggins*[1397]) bemerkt worden. Nach Beobachtungen von *Huggins*, *H. C. Vogel*[1398]), *H. L. D'Arrest*[1399]), *R. Copeland*[1400]) u. a. waren immer vier Linien auffallend, von denen man in den beiden Linien bei 4861 und 4341 bald die beiden *Balmer*linien H_β und H_γ wiedererkannte. Die beiden anderen Linien bei 4959 und 5007 hielt *W. Huggins*[1401]) zunächst für Stickstofflinien. Die erste Photographie eines Nebelspektrums (Orionnebel) gelang wieder *W. Huggins*[1402]), der bei dieser Gelegenheit noch eine weitere kräftige Linie bei 3730 auffand. Durch neuere Untersuchungen von *W. H. Wright*[1403]), der auch

1395) Astr. Nachr. 228 (1926), p. 359.

1395a) Wegen der Cepheiden siehe auch *J. Hopmann*, Colorimetrie der Gestirne, Nr. 23, diese Encykl. VI 2 (1930), Nr. 26.

1396) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 162.

1397) Phil. Trans. 1864, p. 437; London Roy. Soc. Proc. 13 (1864), p. 492.

1398) Astr. Nachr. 78 (1871), p. 245; London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 40 (1880), p. 294; Astr. Nachr. 96 (1880), p. 287.

1399) Undersogelser over de nebulose Stjerner i Henseende til deres spectralanalytiske Egenskaber, Kopenhagen 1872; Astr. Nachr. 79 (1872), p. 93; 80 (1873), p. 189.

1400) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 48 (1888), p. 360.

1401) Phil. Trans. 1868, p. 529.

1402) Paris C. R. 94 (1882), p. 94.

1403) Astroph. Journ. 16 (1902), p. 53; Lick Obs. Bull. Nr. 183 (1910); Bd. 13 (1919); London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 75 (1915), p. 20; Washington Nat. Acad. Proc. 1 (1915), p. 266.

den roten Teil des Spektrums von N.G.C. 7027 studiert hat[1404]), dann von *W. W. Campbell* und *J. H. Moore*[1405]), *E. P. Hubble*[1406]), *R. F. Sanford*[1407]), *M. Wolf*[1408]) u. a. wurden nicht nur immer mehr für die Gasnebel typische Linien, sondern auch deren Intensitätsverhältnisse näher bekannt. Danach treten neben den hellen Linien der *Balmer*serie des Wasserstoffs, der auch durch das an der Seriengrenze bei 3647 einsetzende kontinuierliche Emissionsspektrum nachweisbar ist, insbesondere noch die Linien des He (4472) und He^+ (4686, 3869) sowie eine Gruppe unbekannter Linien bei 3726 (Duplex), 3729, 4363, 4959, 5007, 6584 und 7325[1409]) auf. Man schrieb diese unbekannten Linien einem hypothetischen Element „Nebulium" (Nu) zu und bezeichnete sie, bei der auffälligsten 5007 beginnend und gegen Violett zu weitergehend, als Nu I, Nu II ... Nu V. Das Intensitätsverhältnis[1410]) der einzelnen Linien untereinander ist typisch für einzelne Nebelgruppen und gestattet eine Klassifizierung derselben. Nach dem *Draper*katalog[1411]) können danach folgende Typen gebildet werden:

Pa: Nu IV, V besonders kräftig, ebenso die *Balmer*serie, He^+ 3869 scheint zu fehlen.

Pb: Nu I, II kräftiger als in *Pa*.

Pc: Nu III besonders stark. Das Spektrum ähnelt dem der neuen Sterne im Stadium *Qx* außerordentlich.

Pd: Nu I ist etwa fünfmal heller als H_γ. He^+ 4686 fehlt.

Pe: Wie *Pd*, aber He^+ 4686 deutlich vorhanden.

Pf: He^+ 4686 ist die auffälligste Linie.

Was nun den Ursprung der Nu-Linien betrifft, so hat zunächst *J. W. Nicholson*[1412]) in mehreren Arbeiten versucht, ein Atommodell zu konstruieren, das Schwingungen von der Art der Nu-Linien aus-

---

1404) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 63.

1405) Lick Obs. Bull. 9 (1916), Nr. 279, p. 6.

1406) Publ. Astr. Soc. Pac. 32 (1920), p. 155. Betrifft N.G.C. 1499.

1407) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 108; 34 (1922), p. 222; 36 (1924), p. 349.

1408) Heidelberg Akad. Sitzber. 1911, Nr. 35; 1915, Nr. 1.

1409) Das Dublet 7323,7 und 7334,4 ist von *P. W. Merrill*, Publ. Astr. Soc. Pac. 40 (1926), p. 254, in den Spektren von N. G. C. 7027 und 6572 gefunden worden.

1410) Intensitätsverhältnisse der Spektrallinien sind schon von *J. Scheiner* und *J. Wilsing*, Potsdam Astroph. Obs. Publ. 15 (1905), Nr. 47 und Astr. Nachr. 159 (1902), p. 182, angegeben worden.

1411) Harvard Coll. Obs. Ann. Bd. 91 (1918).

1412) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 72 (1911), p. 49; 74 (1913—1914), p. 118, 486.

sendet. Sein Resultat, daß ein Atom mit vier positiven Kernladungen und Elektronen von verschiedener Zahl, so daß positive oder negative freie Reste auftreten, Träger des Nu-Spektrums sei, ist durch die *Bohr*sche Atomtheorie überholt. Während noch *H. H. Plaskett*[1413]) bei einem Versuch, die Nebellinien nach Serien zu ordnen, auf den Gedanken kam, daß vielleicht ein Bandenspektrum eines H—He-Moleküls vorliege, hat erst vor kurzem *J. S. Bowen*[1414]) zeigen können, daß man es in der Mehrzahl der Nu-Linien offenbar mit Linien des hochionisierten O und N zu tun habe, die aus nach den Auswahlprinzipien verbotenen Sprüngen zwischen metastabilen Zuständen ihren Ursprung nehmen. Nach *Bowen* könnten solche verbotene Sprünge in den Nebeln dadurch begünstigt werden, daß die mittlere zwischen den Zusammenstößen von Atomen und Elektronen verstreichende Zeitdauer wegen der außerordentlich geringen Dichte der Nebelgase so groß (10^4—10^6 Sek.) wird, daß die erregten Atome ihre Energie nicht durch Kollisionen auf andere Atome übertragen, sondern durch Strahlung abgeben. *J. Woltjer jr.*[1415]), der die Bedingungen erörtert hat[1416]), unter denen solche verbotene Elektronensprünge auch im Laboratorium zustande kommen könnten, und der sich der *Bowen*schen Argumentation anschließt, hat theoretisch gefunden, daß solche verbotene Linien unter Umständen weit kräftiger werden können als die gewöhnlichen Linien der gleichen Elemente.[1417]) Die Hauptlinien der Nebelspektren wären nach *Bowen* in folgender Weise zu identifizieren:

3726	Nu V:	O^{++}	... ^4S—$^2D_3$
3729	Nu IV:	O^{++}	... ^4S—$^2D_3$
4363	Nu III:	O^{+++}	... ^1D—^1S
4959	Nu II:	O^{+++}	... $^3P_1$—^1D
5007	Nu I:	O^{+++}	... $^3P_2$—^1D
6548	—	N^{++}	... $^3P_1$—^1D
6584	—	N^{++}	... $^3P_2$—^1D
7325	—	O^{++}	.. ^2D—^2P

Eine Bestätigung von *Bowens* Schlußfolgerungen scheint darin zu liegen, daß sich die Linien 4363, 4959 und 5007 nach *W. H. Wright*[1418])

1413) Nature 112 (1923), p. 392.

1414) Publ. Astr. Soc. Pac. 39 (1927), p. 295.

1415) Bull. Astr. Inst. Netherland 4 (1927), p. 108.

1416) Ebendort 4 (1927), p. 107.

1417) Siehe hierzu die Vorhalte zu *Bowens* Identifikationen von *A. Fowler*, Nature 120 (1927), p. 582 und *A. S. Eddington*, London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 88 (1927), p. 134.

1418) Lick Obs. Publ. 13 (1918), p. 193.

in den Nebeln ähnlich verhalten wie die Linie He^+ 4686, und daß dem He^+ und dem O^{+++} nahe gleiche Ionisationspotentiale von ungefähr 55 Volt zukommen. Außerdem fand auch *Mihul*[1419]) Linien des O^{+++} auf, die mit den Nebellinien 3313, 3342, 3445 und 3759 identisch sein können.

Was speziell die planetarischen Nebel betrifft, so zeigen sich bei ihnen die Emissionslinien in der Regel auf einem hellen kontinuierlichen Grund, der vom Nebelkern herrührt und dessen Helligkeit von der Helligkeit des letzteren abhängt. Die Kerne zeigen, wie von *W. H. Wright*[1420]) bei einem Vergleich des Kernspektrums von N.G.C. 6572 mit dem *Wolf-Rayet*-Stern *BD* $+ 30^0$ 3639 bemerkt worden ist, in der Regel auch die typischen Bänder der O-Sterne. Neuere Beobachtungen von *G. F. Paddock*[1421]) und *W. H. Wright*[1422]) stellten ein gleiches Verhalten noch bei einer größeren Anzahl planetarischer Nebel fest, so daß wohl an einen allgemeineren Zusammenhang zwischen planetarischen Nebeln und O-Sternen gedacht werden darf. Auch Ähnlichkeiten in den Radialgeschwindigkeiten deuten nach *H. Ludendorff*[1423]) auf Beziehungen zwischen diesen Gebilden hin.

Im Jahre 1913 bemerkte *V. M. Slipher*[1424]) beim Nebel N.G.C. 4594 eine Neigung der Spektrallinien gegen die Längenausdehnung des Spektrums, die auf Rotation der Nebelmasse hinwies. In mehreren Arbeiten haben dann *W. W. Campbell* und *J. H. Moore*[1425]) über Beobachtungen berichtet, die sich auf 43 Nebel erstrecken und bei 16 derselben Rotation und bei anderen 9 Bewegungen im Innern der Nebelmasse haben feststellen lassen. Bei den planetarischen Nebeln N.G.C. 7662 und 2392 sowie einigen anderen beobachteten sie eine Spaltung[1426]) der Hauptnebellinien Nu I und II und anscheinend noch weiterer Linien im Spektrum des Kerns, die auf heftigere Bewegungen hinwies und Geschwindigkeitsunterschiede zwischen Kern und Nebel von über 80 $\mathrm{km\,sec^{-1}}$ ergab. Einen Versuch, die den Beobachtungen zufolge von innen nach außen langsamer werdende Rotation der

1419) Paris C. R. 183 (1926), p. 1035; Paris C. R. 184 (1927), p. 1055.

1420) Astroph. Journ. 40 (1914), p. 466; Washington Nat. Akad. Proc. 1 (1915), p. 596.

1421) Lick Obs. Bull. 9 (1916), Nr. 284, p. 29.

1422) Amer. Phil. Soc. Proc. 59 (1920), p. 517.

1423) Astr. Nachr. 212 (1920), p. 2.

1424) Lowell Obs. Bull. 2 (1914), Nr. 62, p. 65.

1425) Publ. Astr. Soc. Pac. 27 (1915), p. 245; 28 (1916), p. 119, 120, 190, 213, 283; Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 566; Lick Obs. Bull. 9 (1916), p. 1; Pop Astr. 24 (1916), p. 655.

1426) Publ. Astr. Soc. Pac. 29 (1917), p. 110.

planetarischen Nebel theoretisch zu untersuchen, hat *P. Gerasimovič*[1427]) unternommen, ohne jedoch dabei eine Übereinstimmung mit den für Gleichgewichtsfiguren geltenden Bedingungen erzielen zu können. Verzerrungen der Nu V-Linie wurden von *M. Wolf*[1428]) auch in den Ringteilen des Ringnebels in der Leier bemerkt. Aufnahmen des Spektrums dieses Nebels von *M. Wolf*[1429]) und *K. Burns*[1430]) zeigten im Lichte verschiedener Linien verschieden große Bilddurchmesser, also Schichtung der Gase. Weitere Aufnahmen von *Wolf* ergaben, daß Nu I und II im Ring am stärksten waren und daß Nu III und He^+ 3869 über die ganze Nebelfläche verfolgt werden konnten, während He^+ 4686 nur in den äußersten Ringteilen sichtbar war. Ähnliche Verhältnisse fand dann *M. Wolf*[1431]) auch noch beim Dumbbellnebel und beim Nebel H IV, 39 Argus.[1432])

Von den unregelmäßigen Milchstraßennebeln ist der Orionnebel am eingehendsten untersucht worden. Schon *J. E. Keeler*[1433]) hatte beobachtet, daß die Intensität von H_β in verschiedenen Teilen des Nebels verschieden sei, und Aufnahmen von *J. Hartmann*[1434]) mit dem Objektivprisma ließen erkennen, daß Nu, H und He im Nebel ziemlich ungleichmäßig verteilt sind, ein Resultat, das sich auch bei Aufnahmen von *J. H. Reynolds*[1435]) mit Filtern bestätigte. *V. M. Slipher*[1436]) fand dann dazu, daß das Spektrum der einzelnen Nebelteile vom reinen Emissionstypus an der hellsten Stelle (Trapez) nach außen hin variiert bis zum kontinuierlichen Sternspektrum. Also ist auch beim Orionnebel Schichtung vorhanden. Aus der Beobachtung einer Deformation der H_γ-Linie an einer Stelle des Nebels hatte *H. C. Vogel*[1437]) auf Bewegungen im Nebelinneren geschlossen, und weitere Messungen von *H. Bourget*, *Ch. Fabry* und *H. Buisson*[1438]), die mit Hilfe von Interferenzmethoden[1439]) an verschiedenen Stellen dieses Orionnebels durch-

---

1427) Astr. Nachr. 217 (1922), p. 409.

1428) Heidelberg Akad. Sitzber. 1915, Nr. 1.

1429) Ebendort 1911, Nr. 27; V. J. Schrift d. Astr. Ges. 43 (1908), p. 283; Astr. Nachr. 180 (1909), p. 151.

1430) Publ. Astr. Soc. Pac. 23 (1911), p. 33.

1431) Astr. Nachr. 199 (1914), p. 319; Heidelberg Sitzber. 1915, Nr. 1.

1432) Ebendort 1916, Nr. 2

1433) Astr. Nachr. 148 (1899), p. 207.

1434) Astroph. Journ. 21 (1905), p. 398; Berlin Sitzber. 1905, p. 360.

1435) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 79 (1919), p. 561; 81 (1921), p. 410.

1436) Publ. Astr. Soc. Pac. 31 (1919), p. 212.

1437) Berlin Sitzber. 1902, p. 259.

1438) Paris C. R. 158 (1914), p. 1269; Astroph. Journ. 40 (1914), p. 241.

1439) Beschrieben von *Ch. Fabry* und *H. Buisson* in Astroph. Journ. 33 (1911), p. 406.

geführt worden sind, haben tatsächlich unregelmäßige Bewegungen vielleicht im Sinne einer Rotation der Nebelmasse beobachten lassen, ein Resultat, das von *W. W. Campbell* und *J. H. Moore*[1440]) sowie von *F. B. Frost*[1441]) im wesentlichen bestätigt werden konnte.

Von Untersuchungen anderer unregelmäßiger Gasnebel seien erwähnt die Studien von *V. M. Slipher*[1442]) über die beiden variablen Nebel N G. C. 2261 und 6729 und von *M. Wolf*[1443]) über H V 15 Cygni und über den von ihm entdeckten Amerikanebel.[1444]) Von den ebenfalls von *M. Wolf* in den sternleeren Kanälen der Milchstraße gefundenen „Höhlennebeln" zeigen die an den Rändern der Milchstraßenhöhlen liegenden Nebel meistens ein recht schwaches Gasspektrum, während die um Sterne herum gelagerten eigentlichen Höhlennebel fast stets ein kontinuierliches Spektrum liefern, das offenbar von reflektiertem Sternenlicht herrührt.[1445])

Die Frage, wodurch das Leuchten der die Nebel bildenden Gase bewirkt wird, wurde schon von *Huggins* erörtert, der meint, daß nur wenige schwingende Moleküle oder Atome genügen, um das Leuchten hervorzurufen. Ungeachtet der niederen Nebeltemperatur würden solche Atome doch Wärmeschwingungen ausführen. Aus der auf interferenziellem Wege gemessenen Linienbreite haben nun aber *H. Bourget, Ch. Fabry* und *H. Buisson*[1446]) unter der Annahme, daß diese Linienbreiten durch Wärmeschwingungen der Atome bewirkt werden, auf Temperaturen geschlossen, die zwischen 10000° bis 16000° liegen und diesen hohen Temperaturwerten entspräche auch völlig der beobachtete hohe Ionisationsgrad, schließlich hat kürzlich *H. Zanstra*[1447]) auf Grund theoretischer Erwägungen für die planetarischen Nebel sogar Temperaturen bis zu 100000° gefordert. Wahrscheinlich ist jedoch, daß die Anregung zur Strahlung bei den planetarischen Nebeln vom O-Sternähnlichen, also sehr heißen Kern ausgeht, und da sich auch bei den unregelmäßigen Nebeln in vielen Fällen gewisse Zusammenhänge mit den umliegenden Sternen feststellen lassen, dürfte auch das Leuchten dieser Nebel durch die Strahlung benachbarter Sterne hervorgerufen sein.[1448])

1440) Publ. Astr. Soc. Pac. 29 (1917), p. 109.

1441) Washington Nat. Acad. Proc. 1 (1915), p. 416.

1442) Lowell Obs. Bull. Nr. 81 (1918).

1443) Astr. Nachr. 178 (1908), p. 379.

1444) Heidelberg Sitzber. 1910, Nr. 27.

1445) Astr. Nachr. 204 (1917), p. 41.

1446) Paris C. R. 158 (1914), p. 1017.

1447) Nature 121 (1928), p. 780; V. J. Schrift der Astr. Ges. 63 (1928), p. 260.

1448) Mit den durch die Strahlung des Zentralsterns bewirkten Ionisationserscheinungen hat sich *P. Gerasimovič*, Amer. Ac. Sciences and Arts Proc. 62 (1927), Nr. 5; Harvard Coll. Obs. Reprint 38 (1927) befaßt.

Während sich die Radialgeschwindigkeiten der Gasnebel[1449]) im Mittel den mittleren Radialgeschwindigkeiten der Fixsterne gut anschließen — die Gasnebel sind nach neueren Ansichten Glieder unseres Fixsternsystems — haben die Spiralnebel durchweg Radialgeschwindigkeiten beobachten lassen, die mindestens mehrere 100 km, in einzelnen Fällen sogar über 1000 km $\sec^{-1}$ betragen und vorzugsweise von uns weggerichtet sind.[1450]) Sie gehören also vermutlich nicht mehr unserem Fixsternsystem an.

Das Spektrum der Spiralnebel ist, von wenigen Ausnahmen wie N. G. C. 1068 oder M 77 Ceti abgesehen, kontinuierlich mit Absorptionslinien. Besonders oft ist der helle Andromedanebel spektroskopisch untersucht worden, z. B. von *J. Scheiner*[1451]), nach dem das Spektrum vom Typus *G* sein soll, und von *M. Wolf.*[1452]) Andere Spiralnebel sind von *M. Wolf*[1453]) und besonders von *E. A. Fath*[1454]) untersucht worden. Danach scheinen die Spiralarme stets etwas blauer zu sein als der Kern. so daß die die Spiralen bildenden Sterne einem früheren Typus angehören würden als die Kernsterne. Im Spiralnebel N. G. C. 4594 (Virgo) hat schon *V. M. Slipher*[1455]) Rotation vermutet, später konnte *F. G. Pease*[1456]) bei diesem Nebel und dem Andromedanebel[1457]) ebenfalls Rotationsbewegungen der inneren Teile spektroskopisch beobachten, die dann von *V. M. Slipher*[1458]) neuerlich bestätigt und noch bei fünf anderen Nebeln nachgewiesen werden konnten. Übereinstim-

1449) Siehe darüber u. a. *H. C. Vogel,* Berlin Sitzber. 1902, p. 259, *J. Hartmann,* Berlin Sitzber. 1902, p. 237 und Astroph. Journ. 15 (1902), p. 287, *W. W. Campbell,* Astr. Nachr. 188 (1911), p. 345; Publ. Astr. Soc. Pac. 25 (1913), p. 288; Science 40 (1914), p. 770, *J. H. Moore,* Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1925), p. 224.

1450) Siehe bei *V. M. Slipher,* Lowell Obs. Bull. 2 (1913), p. 56 und Publ. Astr. Soc. Pac. 28 (1916), p. 191, *F. G. Pease,* ebendort 27 (1915), p. 133, 239; Pop. Astr. 25 (1917), p. 26; Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 517; 4 (1918), p. 21; Mt. Wilson Comm. 32 (1916); 51 (1918); *J. H. Moore,* Publ. Astr. Soc. Pac. 27 (1915), p. 192; *M. Selga,* Rev. Soc. Astr. Espana 5 (1915), p. 7, 24; *R. F. Sanford,* Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 44. Eine Zusammenstellung ist von *G. Strömberg* in Astroph. Journ. 61 (1925), p. 353 gegeben.

1451) Astr. Nachr. 148 (1899), p. 326; Astroph. Journ. 30 (1909), p. 69.

1452) Heidelberg Sitzber. 1912, Nr. 3.

1453) Ebendort 1912, Nr. 15.

1454) Lick Obs. Bull. 149 (1909), p. 71; Astroph. Journ. 33 (1911), p. 58; 37 (1913), p. 198; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 49 (1911).

1455) Pop. Astr. 23 (1914), p. 21.

1456) Washington Nat. Acad. Proc. 2 (1916), p. 517; Mt. Wilson Comm. 32 (1916).

1457) Washington Nat. Acad. Proc. 4 (1918), p. 21; Mt. Wilson Comm. 51 (1918).

1458) Pop. Astr. 29 (1921), p. 272.

mend damit haben *S. K. Kostinsky*[1459]) und *A. van Maanen*[1460]) am Spiralnebel in den Jagdhunden und der letztere[1461]) auch noch bei anderen Objekten durch den Vergleich älterer und neuerer Photographien Bewegungen markanter Spiralenpunkte wahrscheinlich gemacht. Da die beobachteten Bewegungen nur sehr klein sind und lediglich wenige Hundertstel einer Bogensekunde ausmachen, sind die bezüglichen Resultate allerdings noch mit Vorsicht aufzunehmen, um so mehr, als ähnliche Messungen von *W. J. A. Schouten*[1462]) und *K. Lundmark*[1463]), bei denen zum Teil dasselbe Plattenmaterial benutzt wurde, zu Widersprüchen geführt haben.

Erwähnt seien schließlich noch die staubförmigen Nebel, die das Licht der in ihnen stehenden Sterne reflektieren. Die Plejadennebel als Hauptvertreter dieser Art sowie etwa 30 andere solcher eigentlich dunkler Nebel haben, wie *V. M. Slipher*[1464]) und insbesondere *E. P. Hubble*[1465]) fanden, ein kontinuierliches Spektrum, das dem Spektrum der in ihnen stehenden Sterne ähnlich ist.

33. Das mittlere Spektrum der Sternhaufen. Die Untersuchung der Spektren der einzelnen einen Sternhaufen bildenden Sterne ist lediglich bei den sogenannten „offenen Haufen“ möglich, bei denen die Sterne nicht allzu dicht gedrängt stehen. Immerhin verursacht die geringe Helligkeit der Haufensterne Schwierigkeiten, und man greift daher mit Vorliebe zu kolorimetrischen Methoden[1466]) zur Bestimmung der Spektraltypen. Ganz lockere Haufen hellerer Sterne, wie Plejaden, Praesepe und Hyaden, können auch unter Verwendung des Objektivprismas spektralanalytisch bearbeitet werden. In dieser Weise hat *A. Kohlschütter*[1467]) die Sterne der Praesepe und der Hyadengruppe untersucht. Weitere Beobachtungen an den Plejaden von *R. J. Trümpler*[1468]) und *F. H. Seares*[1469]) haben eine Verteilung der Leuchtkräfte

1459) Petersburg Acad. Bull. 1916, p. 871.

1460) Astroph. Journ. 54 (1921), p. 237.

1461) Astroph. Journ. 44 (1916), p. 331; 56 (1922), p. 200, 208; 57 (1923), p. 49, 264 oder Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 118 (1916), 242 (1922), 243 (1922), 264 (1923).

1462) The Observatory 42 (1919), p. 441.

1463) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 67; London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 85 (1925), p. 865.

1464) Lowell Obs. Bull. 2 (1913), p. 26.

1465) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 400; Mt. Wilson Solar Obs. Contr. 250 (1922).

1466) Siehe *J. Hopmann*, Colorimetrie. Diese Encykl. VI 2, Nr. 26.

1467) Astr. Nachr. 211 (1920), p. 289.

1468) Lick Obs. Bull. 333 (1921).

1469) Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 56.

in diesen Sterngruppen ergeben, die von der in unserem Fixsternsystem herrschenden verschieden ist und nach *P. ten Bruggencate*[1470]) auf selektive Absorption im Raum zwischen den Haufensternen hinweist. Diese Unterschiede sind auch noch von *R. J. Trümpler*[1471]) und *P. Doig*[1472]) näher besprochen worden. In manchen dieser offenen Haufen ist insbesondere der Riesenast nur schwach ausgeprägt.

Bei den sogenannten „kugelförmigen Sternhaufen", bei denen oft viele Tausende von Sternen dicht gedrängt und unter starker Konzentration gegen die Haufenmitte auf einem kleinen, nahe kreisrunden Fleckchen am Himmel beisammen stehen, wird es wieder möglich, das Gesamtspektrum des Haufens und damit das mittlere Spektrum der den Haufen bildenden Sterne zu untersuchen. Die meisten Spektralaufnahmen dieser Art rühren von *E. A. Fath*[1473]) und *V. M. Slipher*[1474]) her. Der letztere hat seine Aufnahmen auch zur Ableitung von Radialgeschwindigkeiten der Haufen verwendet. Im Durchschnitt ergaben diese Aufnahmen mittlere Spektren von den Typen *F—G*, so daß in diesen Gebilden eine ähnliche Streuung der Spektren wahrscheinlich ist wie in unserem Fixsternsystem. Etwas spätere Mitteltypen *G—K* haben Aufnahmen südlicher Kugelhaufen mit dem Objektivprisma von *C. D. Perrine*[1475]) ergeben. Dieser geringe Unterschied mag darauf zurückzuführen sein, daß ja diese Aufnahmen mit dem Objektivprisma wegen der merkbaren Durchmesser der Objekte eigentlich linienlose Spektren liefern, aus denen der Typus nur aus der Ausdehnung des Spektrums gegen die kurzen Wellen hin abgeleitet werden konnte.

Eine Zusammenstellung der bis Ende 1924 bekannt gewordenen Radialgeschwindigkeiten von Kugelhaufen ist von *G. Strömberg*[1476]) gegeben worden. Aus ihr geht hervor, daß die Geschwindigkeiten dieser Gebilde, abgesehen von einigen Schnelläufern, ziemlich normal und den mittleren Geschwindigkeiten der Sterne unseres Fixsternsystems vergleichbar sind.

34. Das mittlere Spektrum der Milchstraße ist im Jahre 1912 von *E. A. Fath*[1477]) mit einer Expositionszeit von 74 Stunden aufge-

---

1470) Bull. Astr. Inst. Netherland 4 (1927), Nr. 128.

1471) Allegheny Obs. Publ. 6 (1922), p. 45; Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1925), p. 307; 38 (1926), p. 350.

1472) Publ. Astr. Soc. Pac. 38 (1926), p. 113.

1473) Lick Obs. Bull. 149 (1909); Bd. 5 (1911), p. 71; Astroph. Journ. 33 (1911), p. 58; 37 (1913), p. 198.

1474) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 11 (1917), p. 335.

1475) Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 229.

1476) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 353.

1477) Ebendort 36 (1912), p. 362.

nommen worden und entspricht ungefähr dem Typus *G*. Da nun die Zahl der im *Draper*katalog klassifizierten *A*-Sterne wesentlich höher ist als die der anderen Typen, wäre eigentlich ein anderer, früherer Mitteltypus zu erwarten gewesen. Es scheint somit, und das steht auch in Übereinstimmung mit anderweitigen Untersuchungen, daß gerade unter den schwächeren Sternen, die bei der Aufnahme eines mittleren Spektrums speziell zur Wirkung kommen, die späteren Typen vorherrschen.

35. Kalzium- und Natriumwolken im interstellaren Raum. Im Jahre 1904 bemerkte *J. Hartmann*[1478]) am spektroskopisch doppelten *B*-Stern δ Orionis, daß die scharfe Linie *K* des Ca^+ an der periodischen durch die Bahnbewegung verursachten Verschiebung der anderen Linien nicht teilnahm und daß vielleicht auch die *H*-Linie des Ca^+, die allerdings teilweise durch die Wasserstofflinie H_ε überlagert war, ein ähnliches Verhalten zeige. Er schloß daraus, daß im Weltraum zwischen Erde und Stern vermutlich ruhende Kalziumwolken vorhanden sind, die diese „stationären" Linien *H* und *K* hervorrufen. Die gleiche Erscheinung wurde dann von *V. M. Slipher*[1479]) noch bei den Sternen β, δ, σ Scorpii und ζ Ophiuchi bemerkt, und später stellte *R. K. Young*[1480]) noch etwa 40 andere Sterne mit solchen „ruhenden Kalziumlinien" zusammen. Nach Miß *M. L. Heger*[1481]) sind in den Spektren einiger Sterne auch noch die Linien D_1 und D_2 des Natriums stationär, so daß auch an das Vorhandensein ruhender Natriumwolken im interstellaren Raum gedacht werden muß.

An β Scorpii beobachteten zuerst *Z. Daniel* und *F. Schlesinger*[1482]) sowie *J. C. Duncan*[1483]), daß die Linie *K* nicht eigentlich völlig stationär war, sondern Schwankungen in der Wellenlänge zeigte von der Periode der Bahnbewegung, aber doch von weit geringerer Amplitude, als die übrigen Linien ergaben. Daher müßte also der Stern mit der Kalziumwolke derart in Verbindung stehen, daß dieselbe durch die Bewegung der beiden Komponenten des Sterns teilweise in Mitschwingungen versetzt wird. Somit könnten ähnliche Verhältnisse vorliegen wie beim veränderlichen Stern β Lyrae, bei dem, wie oben erwähnt, die H- und He-Linien andere Schwingungsamplituden zeigen und bei $\varkappa$ Draconis, bei dem nach *R. H. Baker*[1484]) die Wasserstofflinien an

1478) Astroph. Journ. 19 (1904), p. 268.

1479) 61th Meeting of the Americ. Assoc. for the advancement of science.

1480) Pop. Astr. 29 (1921), p. 86.

1481) Lick Obs. Bull. Nr. 326 (1919), p. 59.

1482) Allegheny Obs. Publ. 2 (1912), Nr. 14, p. 127.

1483) Lowell Obs. Bull. 2 (1912), Nr. 54, p. 21.

1484) Pop. Astr. 29 (1921), p. 146; Univ. of Michigan (Detroit) Publ. 3 (1923), p. 29.

der Verlagerung der übrigen Linien nicht ganz teilnehmen. Erst kürzlich hat aber *O. Struve*[1485]) wahrscheinlich gemacht, daß das beobachtete Mitschwingen der Kalziumlinie nur ein scheinbares sei und durch die normale *Doppler*sche Verschiebung einer anderen der stationären Linie angelagerten, dem Stern eigentümlichen Linie vorgetäuscht werde.[1486])

Zusammenfassende Berichte über die beobachteten Eigentümlichkeiten sind von *R. K. Young*[1487]), *F. C. Henroteau*[1488]) und *H. Kienle*[1489]) gegeben worden. Neuere Untersuchungen von *J. S. Plaskett*[1490]) haben gezeigt, daß überhaupt die meisten Sterne von einem Typus früher als *B* 3, ob sie nun Doppelsterne sind oder nicht, Ca^{+}-Linien zeigen, die andere Radialgeschwindigkeiten ergeben als die anderen Linien des Sternspektrums und somit durch solche Ca-Wolken hervorgerufen sein dürften. Statt der Bezeichnung „stationäre Linien" hat sich seither der Name „verlagerte Linien" (Detached Lines) eingebürgert. Stehen die Kalziumwolken nun aber wirklich ruhig im Weltraum, so ergeben solche detached lines natürlich direkt die in die Richtung zum Stern projizierte Komponente der Sonnenbewegung, und die aus ihnen abgeleiteten Radialgeschwindigkeiten gestatten daher eine völlig sichere Bestimmung von Apex und Geschwindigkeit der Bewegung des Sonnensystems. Solche Apexbestimmungen sind von *F. C. Henroteau*[1491]) vorgenommen worden, der mit nur sechs Sternen fand: $\alpha = 271^0$, $\delta = +42^0$, $V = 29{,}3$ km sec^{-1} und von *G. Strömberg*[1492]), der für den Apex mit 64 Sternen erhielt: $\alpha = 276^0$, $\delta = +37^0$, $V = 20{,}1$ km sec^{-1}. Die Nichtübereinstimmung der beiden Resultate scheint zu zeigen, daß die aus den detached lines abgeleiteten Radialgeschwindigkeiten die Sonnenbewegung doch nicht ganz rein widerspiegeln, daß also die bezüglichen Kalziumwolken keineswegs gänzlich ruhig in unserem Fixsternsystem stehen. Auch Rotationen des ganzen Milchstraßensystems, an die *J. H. Oort*[1493]) und *J. S. Plaskett*[1494]) denken, könnten in dieser Hinsicht von störendem Einfluß sein.

1485) Astroph. Journ. 67 (1928), p. 353.

1486) Siehe *B. J. Bock,* Bull. Astr. Inst. Netherland 4 (1927), p. 9.

1487) Domin. Astroph. Obs. (Victoria) Publ. 1 (1920), p. 219; Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 14 (1920), p. 389.

1488) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 15 (1921), p. 62, 109.

1489) Seeliger-Festschrift, Berlin (Springer) 1924.

1490) Domin. Astroph. Obs. (Victoria) Publ. 2 (1924), p. 335.

1491) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 14 (1920), p. 234.

1492) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 372.

1493) Bull. Astr. Inst. Netherland 3 (1927), p. 275; 4 (1927), p. 79.

1494) Journ. Roy. Astr. Soc. Canada 22 (1928), p. 131.

In mehreren Arbeiten hat *O. Struve*[1495]) das ganze Phänomen einem genauen Studium unterworfen und dabei gefunden, daß die Intensität solcher verlagerter Linien mit der Distanz des betreffenden Sterns zusammenhängt. Gleichzeitig nimmt die Intensität aber auch ab beim Fortschreiten vom Typus *O* zum Typus *B* 5, in welch letzterem solche detached lines im allgemeinen zuletzt auftreten. Weiter hat sich nach Abzug der Komponente der Sonnenbewegung von den mit solchen Linien erhaltenen Radialgeschwindigkeiten ergeben, daß die so erhaltenen individuellen Geschwindigkeiten eine Gruppierung am Himmel zulassen, die einen gewissen Zusammenhang mit den Sternwolken in der Milchstraße verrät. In Verbindung mit den Sterndistanzen ließ sich feststellen, daß die Entfernung der Kalziumwolken in Cygnus und Perseus etwa 1400 Parsec betragen dürfte, in Scorpius 1800, in Cepheus 2800, in Orion dagegen nur 200 Parsec. Nach *O. Struve*[1496]) scheinen die anderen in der Nähe solcher Sterne mit detached lines stehenden Sterne wegen der Absorption der Wolken durchschnittlich etwas röter zu sein, als ihrem Typus entsprechen würde.

Die Frage, wieso solche verlagerte Linien nur bei den heißesten Sternen beobachtet werden, hängt innig zusammen mit der Frage nach der Erregung solcher interstellarer Wolken zur Absorption. *Meg Nad Saha*[1497]) denkt daher zunächst überhaupt nicht an eigene Wolken im interstellaren Raum, sondern an vom Stern selbst durch den Strahlungsdruck fortgeschleuderte, erregte Atome. *J. Evershed*[1498]) hat jedoch aufmerksam gemacht, daß solche Atome schließlich eine konstante Maximalgeschwindigkeit annehmen müßten, während die betreffenden Ca-Linien auf wenigstens zum größten Teil ruhende Gebilde hinweisen. Eine Erklärung von *J. S. Plaskett*[1499]) erscheint jedenfalls plausibler, nach der die Erregung in den dem Stern nächsten Wolkenteilen durch die Sternstrahlung selbst verursacht sein soll, da ja nach Untersuchungen theoretischer Natur von *J. Woltjer* jr.[1500]) ein Stern von etwa 50facher Sonnenmasse und einer effektiven Temperatur von $30\,000^0$ imstande wäre, eine Ionisation der Ca-Wolken sogar noch auf große Distanzen hinaus hervorzurufen.

1495) Pop. Astr. 33 (1925), p. 596, 639; 34 (1924), p. 1, 158; 35 (1927), p. 212.
1496) a. a. O.
1497) Nature 107 (1921), p. 488.
1498) The Observatory 47 (1924), p. 53.
1499) London Roy. Astr. Soc. Month. Not. 84 (1923), p. 80.
1500) Publ. Astr. Inst. Netherland 2 (1924), p. 195.

(Abgeschlossen Ende 1928.)

VI 2, 26. ASTRONOMISCHE KOLORIMETRIE.

Von

JOSEF HOPMANN

IN LEIPZIG.

Mit Beiträgen von Bernhard Sticker in Bonn.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Die Literatur zur astronomischen Kolorimetrie ist in der Hauptsache in den Zeitschriften und Sternwartenveröffentlichungen verstreut, entsprechende Verweise sind daher in den nachstehenden Fußnoten gegeben. Eine zusammenfassende Darstellung gab es zur Zeit der Abfassung dieses Berichtes noch nicht; erst kurz vor der Drucklegung erschien eine solche im Handbuch der Astrophysik, Band II, 1, Verlag Springer 1929, verfaßt von *K. Bottlinger.* Aus dem VI. Bande dieses Werkes interessiert noch hier der Bericht von *H. Ludendorff* über die veränderlichen Sterne und der von *G. Stratton* über die neuen Sterne, aus dem IV. Bande die Berichte von *Graff* und *Kopff* über die Mitglieder des Sonnensystems. Es sei ferner noch auf folgende Lehrbücher hingewiesen:

Graff, Grundriß der Astrophysik, Leipzig u. Berlin 1928, B. G. Teubner.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Bd. V, 2, 1928, Vieweg & Sohn.

Schiller, Einführung in das Studium der veränderlichen Sterne, Leipzig 1923, Barth.

I. Theoretisches und Geschichtliches.

1. Definition und Aufgabenkreis der Kolorimetrie. Die Kolorimetrie ist ein Zweig astrophysikalischer Forschung, der sich in der Hauptsache erst in den zwei letzten Jahrzehnten enwickelt hat, wenngleich eine Reihe Beobachtungsdaten auch schon vor 1900 gewonnen wurden. Aller Voraussicht nach dürfte ihre Bedeutung künftighin noch stark anwachsen.

Die Untersuchung der von den Gestirnen kommenden Strahlung geschieht natürlich am vollkommensten durch die verschiedenartigen spektralanalytischen Methoden.[1]) Dabei wandte sich das Interesse der

1) Siehe das Referat von *Hnatek,* diese Encykl. VI 2, 25, sodann vor allem *A. Brill,* Die Temperaturstrahlung der Fixsterne, Ztschr. f. Phys. 52 (1929), p. 767;

meisten Forscher dem Verhalten der Spektrallinien in Emission und Absorption zu, während die Zahl der Untersuchungen des kontinuierlichen Spektrums, die naturgemäß nur Spektralphotometrien sein können, bis heute noch gering ist. Als ihr Ergebnis kann man ansehen:

Die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum an Stellen frei von störenden Absorptions- und Emissionslinien zeigt zunächst in engen Spektralgrenzen (0,64—0,45 μ bei *Wilsing*[2]), 0,54—0,33 μ bei *Rosenberg*[3])) einen guten Anschluß an die *Planck*sche Strahlungsgleichung

$$(1) \qquad E_\lambda = C \cdot \lambda^{-5}\left(e^{\frac{c}{T}\cdot\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^{-1},$$

aus welcher sich also $\frac{c}{T}$ bzw. T berechnen läßt. Die so gewonnenen Werte werden meist *effektive Temperaturen* genannt. Korrekter bezeichnet man sie nach *Brills* Vorschlag als Farbtemperaturen, da sie ja zunächst nur besagen, daß in dem entsprechenden Spektralbereich die Energieverteilung in den einzelnen Farben der eines schwarzen Strahlers der berechneten Temperatur entspricht. Das Gegenstück hierzu ist die Strahlungstemperatur, ermittelt aus der Gesamtstrahlungsenergie durch das *Stefan-Boltzmann*sche Gesetz.

Die *Rosenberg*sche Temperaturskala unterscheidet sich systematisch von der *Wilsing*schen in der Art, daß $\left(\frac{c}{T}\right)_R + 2{,}00 = \frac{1}{0{,}62}\cdot\left(\frac{c}{T}\right)_W$ ist. Wie die Überarbeitung beider Untersuchungen durch *Brill*[4]) zeigte, rührt dies in der Hauptsache davon her, daß von etwa 0,45 μ an nach Violett hin bei Sternen aller Temperaturgrade starke Absorptionen stattfinden und daher ein Anschluß an die *Planck*sche Gleichung nicht mehr möglich ist.[4a])

Auf der anderen Seite ergaben die Radiometermessungen von *Abbot*[5]) sowie die Ionisationstheorie der Spektrallinien (s. *Hnatek*, Encykl. VI 2, p. 720) in der Hauptsache die gleiche Temperaturskala wie die aus den Messungen von 0,4—0,7 μ abgeleitete, so daß wir dem

---

A. Brill, Die Strahlung der Sterne, Ergebn. d. exakten Naturw. 3, p. 1 (Berlin 1924, J. Springer), sowie die in beiden Arbeiten angeführte weitere Literatur.

2) *J. Wilsing,* Effektive Temperaturen von 199 helleren Sternen, Publ. Astroph. Obs. Potsdam 74 (1919).

3) *H. Rosenberg,* Photogr. Untersuchungen der Intensitätsverteilung in Sternspektren, Nova Acta Leopoldina 110, Nr. 2 (Halle 1914).

4) *A. Brill,* Spektralphotometrische Untersuchungen, Astr. Nachr. 218, 219 (1923).

4a) S. auch *N. W. Storer,* Lick Obs. Bull. 410 (1929).

5) *Abbot,* Astroph. Journ. 60 (1924), p. 87.

folgenden den Satz zugrunde legen können: *In erster Näherung entspricht die Energieverteilung der von den Fixsternen kommenden Strahlung dem Planckschen Gesetz.* Die Abweichungen hiervon interessieren für das Gebiet der Kolorimetrie bis heute noch wenig, in Frage kommen vor allem die Versuche *Brills*[1]), mit Hilfe der photographisch-visuellen Farbenindizes eine absolute Temperaturskala aufzustellen (s. Nr. 8 und Nr. 16).

Zwei Schwächen haften der spektralphotometrischen Methode gegenwärtig noch an. Einmal sind die Messungen im einzelnen verhältnismäßig unsicher und dann wurden bisher nur die etwa 200 hellsten Sterne, bis $4{,}5^m$ etwa, untersucht. Letzteres ist bedingt vor allem durch die Neuartigkeit und Schwierigkeit der Aufgabe, wobei man sich naturgemäß zunächst den hellen Sternen zuwandte, sodann durch die notgedrungene geringe Intensität des spektral zerlegten Sternlichtes.

In der Kolorimetrie dagegen werden auf verschiedenartigen, nachstehend zu schildernden Wegen Zahlenwerte abgeleitet, die in engster statistisch zu ermittelnder Beziehung zu den $\frac{c}{T}$ der *Planck*schen Gleichung stehen oder, anders ausgedrückt:

Die Beobachtungen liefern „Äquivalente“ für die „Farbe“, d. h. für die spektrale Energieverteilung des einzelnen Sterns. Sterne, deren effektive Temperaturen auf spektralphotometrischem Wege abgeleitet sind, gestatten dann, das jeweilige „Farbenäquivalent“ in $\frac{c}{T}$ umzurechnen. Damit sind dann auch die Temperaturwerte der übrigen Sterne bekannt.

Dabei findet in der Kolorimetrie keine spektrale Lichtzerlegung statt, wodurch es möglich ist, bis zu den allerschwächsten Sternen mit Erfolg vorzudringen. So gibt es denn auch heute bereits umfangreiche Kataloge von Farbenäquivalenten vieler Tausender von Sternen. Ferner hat sich herausgestellt, daß manche kolorimetrische Methoden wesentlich genauere $\frac{c}{T}$-Werte liefern, als die Spektralphotometrie. Schließlich ist die Kolorimetrie an Einfachheit der instrumentellen Hilfsmittel wie der Reduktionsrechnungen der Spektralphotometrie stark überlegen.

Das Richtigste wäre es also, alle kolorimetrischen Ergebnisse als Temperatur- oder besser als $\frac{c}{T}$-Werte mitzuteilen. Letzteres deshalb, weil in der Hauptsache der Gang der verschiedenen Farbenäquivalente mit $\frac{c}{T}$, nicht mit T linear verläuft. Von diesem Ideal sind wir allerdings heute noch weit entfernt, teils weil eine allgemein anerkannte Temperaturskala noch nicht vorliegt, teils weil die Beobachter es meist unterlassen haben, ihre Farbenäquivalente durch entsprechende Zusatzmessungen mit einer $\frac{c}{T}$-Skala in Beziehung zu setzen. (Näheres hierzu s. Nr. **16**).

Wie der Artikel von *Hnatek* (Encykl. VI 2, p. 694) des näheren zeigt, hat man auf Grund des Auftretens der Absorptionslinien die Sternspektra in eine größere Zahl Klassen geteilt, von denen über 90% auf die Typen *B, A, F, G, K, M* fallen, wobei dezimale Unterteilung (z. B. *B* 3) die Übergänge kennzeichnet. Die helleren mit freiem Auge sichtbaren Sterne bilden nun dadurch eine ziemlich einheitliche Gruppe, daß sie alle zu den absolut hellen Sternen, den Riesen gehören (s. die Referate von *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27, und *Hnatek*, Encykl. VI 2, p. 721). Wie die Erfahrung weiter zeigte, haben dann die Sterne des gleichen Spektraltypus ungefähr die gleiche absolute Temperatur. Daher ist es statthaft, aus den besten für die etwa 100 hellsten Stern vorliegenden $\frac{c}{T}$-Bestimmungen in passender Bearbeitung nach Spektraltypen geordnete Mittelwerte zu bilden. Die nebenstehende, von *Brill*[1]) gegebene Tabelle dürfte wohl die beste gegenwärtige Temperaturskala der Art darstellen. Neben seinen Werten stehen noch die der *Wilsing*schen Skala, wie sie *Hertzsprung* in seinem Kompilationskatalog (s. Nr. **16**)[6]) gegeben hat. Beide Tabellen finden in den folgenden Abschnitten mehrfache Verwendung.

Spektrum	T_{Brill}	$\frac{c}{T}_{\text{Brill}}$	$\frac{c}{T}_{\text{Potsdam}}$
B 0	23800°	0,60	1,48
B 5	16300°	0,88	1,36
A 0	11800°	1,22	1,48
A 5	9000°	1,59	1,89
F 0	7900°	1,82	2,20
F 5	6900°	2,08	2,40
G 0	6000°	2,39	2,87
G 5	5230°	2,74	3,14
K 0	4570°	3,14	3,53
K 5	3850°	3,73	4,32
M 0	3570°	4,02	4,53

2. Geschichtliche Bemerkungen. Da die unten folgende Beschreibung der einzelnen kolorimetrischen Methoden auch ihre Entwicklung bringt, genügt es hier, die Ideengeschichte kurz zu schildern. Als älteste kolorimetrische Daten haben wir Angaben über die Farben der Sterne, bis zur 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts verhältnismäßig vage Ausdrücke, aus denen sich später feste Farbskalen entwickelten. So lange allerdings keine Bestimmungen effektiver Temperaturen vorlagen, also bis 1910 etwa, fehlte diesen jegliche physikalische Bedeu-

6) *E. Hertzsprung,* Mean Color Aequivalents, Ann. der Sternw. Leiden 14 (1922), 1. Teil.

tung. Auch der wichtigste Begriff des Farbenindex — in der älteren Literatur auch Farbentönung, Farbengleichung genannt — entstand erst zwischen 1900 und 1910, vor allem durch die bahnbrechenden photographisch-photometrischen Arbeiten *Schwarzschilds* (s. Referat *Guthnick,* Encykl. VI 2, 27). Letzterer versuchte auch erstmalig, in der Göttinger Aktinometrie den Farbenindex mit einer $\frac{c}{T}$-Skala zu verbinden. Etwa ab 1910, besonders nach 1920, entwickelten sich dann die übrigen kolorimetrischen Methoden. Gegenwärtig ist vieles hier noch in starkem Aufschwung, vieles noch ungeklärt, so daß es noch nicht zu einer internationalen Normierung gekommen ist, die wir mit bestem Erfolge auf anderen Gebieten der Astronomie und Physik sehen.

II. Die kolorimetrischen Beobachtungsmethoden.

Dem Zweck dieses Artikels entsprechend kann jeweils in diesem wie allen folgenden Abschnitten nur auf die wichtigsten Arbeiten eingegangen werden. Eine vollständige Literaturübersicht ist nicht angestrebt.

A. Visuelle Beobachtungsmethoden.

3. Psycho-physiologisches. Nach dem Vorbild von *Helmholtz, A. König* u. a. hat man von verschiedener Seite die Empfindlichkeitskurve des normalen menschlichen Auges bei fovealer Beobachtung (Zäpfchen) ermittelt. Dem Folgenden sind hierfür die häufig gebrauchten Werte von *Henning* $f(\lambda)$ in der Formel zugrunde gelegt.[7]) Ferner sei $\varphi(\lambda)$ die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre; für die Rechnung wurden die Werte von *Wilsing*[8]), gültig für 45° Zenithdistanz, benutzt. Dann ist mit (1)

$$V(\lambda) = C \cdot E(\lambda) \cdot f(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) \tag{2}$$

(C = Proportionalitätsfaktor) die visuelle spektrale Energieverteilung unter mittleren Verhältnissen gegeben. Fig. 1 gibt diese Kurven für je einen B- und M-Stern, bzw. richtiger für $\frac{c}{T}$ gleich 0,7 und 4,5. Der Maßstab wurde jeweils so gewählt, daß die von der Abszisse und den Kurven umschlossenen Flächenstücke, also das Integral obigen Ausdrucks, gleich waren, die Sterne visuell also gleich hell erschienen. Neben der fovealen Empfindlichkeitskurve wurde auch die periphere (Stäbchen) heran-

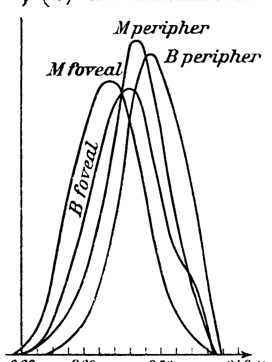

Fig. 1.

7) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 1919, Heft 1.

8) Publ. Astroph. Obs. Potsdam 76 (1920), p. 7.

gezogen. Der Figur entnimmt man zunächst, daß selbst in diesen Extremfällen die visuelle Energieverteilung nicht allzu verschieden ist. Das Energiemaximum bleibt im Grünen, wandert beim Übergang von B nach M nur wenig zu den längeren Wellen. Anwendungen dieser Kurven bringen die Nr. **6** und **7**.

Selbstverständlich zeigen die Kurven uns weiter die Tatsache, daß das Blau (Rot) eines B-Sterns stärker (schwächer) ist als das eines M-Sterns. Ist der Stern genügend hell, so wird er also entsprechend dem Verlaufe der Empfindlichkeitskurven für die drei *Helmholtz*schen Grundempfindungen Rot, Grün und Blau im integrierten Lichte je nach seinem $\frac{c}{T}$ eine verschiedene Farbtönung haben, die somit umgekehrt ein wichtiges Temperaturäquivalent abgibt.[9])

Mit steigender Temperatur werden dabei die Tönungen gelblich Rot—Gelb—Weiß—bläulich Weiß durchlaufen. Andere Farben — Purpur, Grün, Rosa, Braun usw. — können dabei normalerweise nicht vorkommen. Ausnahmen bilden einmal die neuen Sterne, bei denen in gewissen Entwicklungsstadien die rote Wasserstofflinie so stark strahlt, daß dadurch der Stern eine eigenartige rosa Tönung bekommt[10]), und ferner die sternartig erscheinenden planetarischen Nebelflecke, die eine fast rein monochromatische grüne Strahlung im visuellen Gebiete haben.

4. Farbenschätzungen. Das älteste aller Temperaturäquivalente ist die durch Schätzung ermittelte Farbe eines Sterns. Schon im Katalog des Almagest von Ptolemäus sind bei einigen Sternen Farbenangaben gemacht, wobei die über den „rötlichen" Sirius, der uns ja bläulich-weiß erscheint, eine umfangreiche Literatur verursacht hat.[11]) In der Literatur der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde besonders auf die merkwürdigen Farben hingewiesen, die die Komponenten von Doppelsternen haben, wobei Ausdrücke wie rosa, grünlich, lila und andere gebraucht wurden. Offenbar handelt es sich dabei um physiologische Kontrastwirkungen, die auftreten, wenn ein roter Stern einen bläulich-weißen zum Begleiter hat. So wies gelegentlich Spica grünliche Töne auf, als der rote Mars ihr nahe stand. An künstlichen Doppelsternen von objektiv weißer bis rötlicher Tönung konnte *Bell*[12]) die gleichen Kontrasterscheinungen nachahmen.

9) S. hierzu auch *Bottlinger,* Naturwiss. 1925, p. 882.

10) S. Referat *Hnatek,* diese Encykl. VI 2, p. 731.

11) S. u. a. *See,* Astr. Nachr. 229 (Sondernummer); *Osthoff,* Astr. Nachr. 229 (1927), p. 443.

12) Astroph. Journ. 31 (1910), p. 234.

Die älteren Beobachter (z. B. *Sestini*[13]) verwandten im übrigen mehr oder weniger klare ausführliche Farbbeschreibungen, während sich heute nach dem Vorbilde von *Schmidt*[14]), *Franks*[15]), *Müller* und *Kempf*[16]) hierfür Zahlen oder Buchstabensymbole durchgesetzt haben. Die von *Osthoff*[17]) benutzte zehnteilige Ziffernskala ist besonders mit Rücksicht auf die weitere rechnerische Bearbeitung der Beobachtungen wohl die zweckmäßigste. Sie ist nach seinen Angaben wie folgt gekennzeichnet:

0	W	Weiß
1	GW	Gelblichweiß (W überwiegt)
2	WG	Weißgelb (W und G zu gleichen Teilen)
3	HG	Hellgelb oder Blaßgelb
4	G	Reingelb
5	DG	Dunkelgelb, ein gesättigtes, tiefes Gelb
6	RG	Rötlichgelb (G überwiegt)
7	O	G und R zu gleichen Teilen (Orange)
8	GR	Gelblichrot
9	R	Rot.

Die Technik der sicheren Farbenschätzung sowie die verschiedenartigen dabei auftretenden Fehlerquellen (Dunkelanpassung, Ermüdung, Mondschein, Luftunruhe usw.) sind in den Einleitungen zu den großen Sternfarbenkatalogen ausführlich besprochen. Die in den Fußnoten angegebenen Verzeichnisse[18]) geben für 4500 nördliche und 1900 südliche Sterne Farbenwerte. Zu ihnen kommen die 14000 Sterne der Potsdamer Durchmusterung des nördlichen Himmels[16]), um nur die wichtigsten Verzeichnisse anzuführen.

Neben der bisher besprochenen linearen Farbenskala findet sich besonders in der englischen Literatur, vertreten vor allem durch *Franks*[19]), eine Zweidimensionale. In ihr wird neben der Tönung auch in drei Stufen die Sättigung der Sternfarben gekennzeichnet. Die Be-

13) *Sestini-Hagen,* Publ. Specola Vaticana II. Serie (1911), Nr. 3.

14) Astr. Nachr. 80 (1873), p. 9 u. 81.

15) *Franks-Hagen,* Publ. Specola Vaticana II. Serie (1923), Nr. 15.

16) Publ. Astroph. Obs. Potsdam 17 (1907).

17) Die Farben der Fixsterne, Publ. Specola Vaticana II. Serie (1916), Nr. 8.

18) Außer [13]), [15]), [17]) noch *Krüger,* Neuer Katalog farbiger Sterne, Publ. Specola Vaticana II. Serie (1914), Nr. 7; *Krüger,* Indexkatalog [aus [13]), [15]), [17]) und [18]) kompiliert], Publ. Specola Vaticana II. Serie (1917), Nr. 9.

19) Month. Not. Roy. Astr. Soc. 47 (1887), p. 269. Zusammenfassung der Beobachtungen in [15]).

ziehung beider Skalen zueinander hat *Franks* durch folgende Tabelle gegeben:

Farbe nach *Osthoff*	2,0	2,7	3,9	4,8	5,8	6,7		6,9	7,1	8,6
Normale Tönung	W	Y^1	$Y^{1.5}$	Y^2	OY^2			O^2		OR^2
Varianten	B^1	O^1	R^1		Y^3	OY^3			O^3	OR^3

(B = blue, W = white, Y = yellow, O = orange, R = red).

Hierzu bemerkt er unter anderem: „Ein tiefes Orange O^3 wird linear rötlich Orange genannt, während ein sehr blasses Orange O^1 oder Rot R^1 linear gelblich heißt.“ Über die Beziehungen der Skalen zueinander und ihre Wertung gibt ferner *Hagen* ausführliche Angaben in den Einleitungen zu den Katalogen von *Sestini*[13]) und *Krüger*[18]) sowie in zwei Sonderaufsätzen.[20]) Nach letzterem haben beide Bezeichnungsweisen ihre Vor- und Nachteile, können sich zuweilen ergänzen. In der Hauptsache gibt aber *Hagen* der linearen und hier der *Osthoff*schen den Vorzug. Für die weitere rechnerische Bearbeitung der Beobachtungen muß man stets statistisch die Flächenskala auf die lineare umformen.

Die Genauigkeit guter Farbenschätzungen beträgt eine Stufe der *Osthoff*schen Skala und weniger. Bedenklich ist es, daß bei ihnen die systematischen Fehler, vor allem solche, die von der Helligkeit der Sterne abhängen, mindestens ebenso groß sind. Neben *Osthoff* ist vor allem *Hertzsprung* dieser Frage nachgegangen und hat in Sonderheit für dessen Beobachtungen Kurven abgeleitet, um die Katalogangaben von der Helligkeitsgleichung zu befreien.[21])

Die Beziehung der verschiedenen Farbenschätzungen zur $\frac{c}{T}$-Skala hat im älteren Potsdamer System gleichfalls *Hertzsprung* abgeleitet.[6]) So ergeben z. B. 179 Sterne, die dem *Krüger*schen Kataloge[18]) und der Potsdamer Spektralphotometrie[2]) gemeinsam sind, statistisch folgende Beziehung:

Farbe nach *Krüger*	2,20	2,36	2,70	3,25	4,09	4,86	5,15	5,38	5,90	6,74
$\frac{c}{T}$	1,24	1,51	1,69	2,06	2,51	3,00	3,19	3,40	3,92	4,59

Diese Werte wurden graphisch ausgeglichen, und man kann offenbar nun die Farbe der übrigen Sterne des *Krüger*schen Kataloges ohne weiteres in $\frac{c}{T}$-Werte umsetzen. In ähnlicher Weise fand *Hertzsprung* für den *Osthoff*schen Katalog folgende Interpolationsformel[21])

$$\frac{c}{T} = 0{,}816 + 0{,}16 \cdot O + 0{,}05 \cdot O^2.$$

---

20) Astroph. Journ. 34 (1911), p. 261 und 49 (1919), p. 282.

21) Bull. Astr. Inst. Netherlands 37 (1923).

Methodisch genau gleichartig wie bei diesen beiden Beispielen geht man bei fast allen übrigen kolorimetrischen Beobachtungsverfahren vor, um die Beobachtungsdaten auf die $\frac{c}{T}$-Skala oder den photographischen Farbenindex zu reduzieren.

Nach *Hertzsprung* übertrifft ein auf den Farbenschätzungen *Osthoffs* beruhender $\frac{c}{T}$-Wert an Genauigkeit erheblich z. B. die Ergebnisse der fundamentalen Potsdamer spektralphotometrischen Messungen. Bemerkt sei noch, daß *Osthoffs* Beobachtungen an einem Vierzöller bis 6^m gehen. Nicht ganz so günstig beurteilt *Hertzsprung* die anderen Farbenkataloge.

5. Wilsings Rotkeil, Fessenkoffs Blaukeil. *Wilsing*[8]) wies darauf hin, daß das Jenaer Rotglas F 4512 das Licht verschiedener Wellenlängen entsprechend den Angaben der nebenstehenden Tabelle durchläßt. Wie die nächste Tabelle zeigt, lassen sich diese sehr nahe in der Form $\log \beta_\lambda = +0{,}327 - 0{,}214 \cdot \frac{1}{\lambda} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{\lambda}$ darstellen; das Absorptionsvermögen dieses Glases in der Dicke d wird dann

λ	Glasdicke	
	$^1/_{10}$ mm	1,0 mm
0,655	98,5%	87,7%
0,642	97,1	76,0
0,615	84,4	20,2
0,593	77,4	8,9
0,556	69,6	3,3
0,514	54,8	0,3
0,472	43,6	0,05

λ	$\log \beta_\lambda$	v
0,655	— 0,0006	+ 0,0023
0,642	— 0,0016	+ 0,0026
0,615	— 0,0116	— 0,0023
0,593	— 0,0171	— 0,0019
0,577	— 0,0191	— 0,0038
0,556	— 0,0216	— 0,0004
0,535	— 0,0300	+ 0,0022
0,514	— 0,0366	+ 0,0023
0,494	— 0,0491	— 0,0014
0,472	— 0,0573	+ 0,0007

$$(1) \qquad e^{(\beta_0 + \beta_1/\lambda)\cdot d} = e^{\beta_\lambda \cdot d}.$$

Wie *Wilsing* weiter zeigt, kann man innerhalb des Gebietes der visuellen Strahlung die mit λ veränderliche Wirkung der Extinktion in der Luft in der Form

$$(2) \qquad (Ext)_\lambda = e^{(-\alpha_0 - \alpha_1/\lambda)\cdot l(z)}$$

schreiben. Hier sind α_0 und α_1 aus Potsdamer spektralphotometrischen Untersuchungen gefundene Konstanten, $l(z)$ ist die effektive Lichtweglänge bei der Zenithdistanz z.[22]) Schließlich hat *Wilsing* noch gezeigt, daß man die *Planck*sche Gleichung wie folgt schreiben kann

$$(3) \quad E_\lambda = C \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}} \cdot (1 - e^{\frac{c}{\lambda T}})^{-1} = C \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c}{T}\cdot\frac{1}{\lambda}} \cdot e^{(\gamma_0 + \gamma_1/\lambda)}.$$

22) S. Encykl. d. math. Wiss. VI 2, p. 326.

Hier sind γ_0 und γ_1 noch schwach veränderliche Funktionen von $\frac{c}{T}$, die durch *Schnauder*[23]) tabuliert wurden.

Wilsing bringt nun einen Keil aus dem angeführten Rotglas in den Strahlengang eines Fernrohrs nahe dem Fokus; durch Zahn und Trieb läßt er sich verschieben, seine Stellung zeigt eine Millimeterskala an. Hinter dem Keil befindet sich ein normales *Zöllner*photometer (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27), aus welchem nur die Blaugläser entfernt sind, die in der gewöhnlichen Photometrie die Farbe des Vergleichstern der der natürlichen Sterne ähnlich machen sollen. Der Rotkeil, der ja nur die Energieverteilung des natürlichen Sternlichtes ändert, wird dann je nach der effektiven Temperatur des beobachteten Objektes so weit verschoben und zugleich durch Drehen der Nicols die Helligkeit des Photometersternes so geändert, daß natürlicher und künstlicher Stern dem Beobachter nach *Intensität und Farbe* gleich erscheinen. Die durch Extinktion und Rotglas geschwächte Sternstrahlung ist dann

$$(4) \qquad C_* \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c}{T_*}\cdot\frac{1}{\lambda}} \cdot e^{(\gamma_0+\gamma_1/\lambda)T_*} \cdot e^{-(\alpha_0+\alpha_1/\lambda)l(z)} \cdot e^{-(\beta_0+\beta_1/\lambda)(K+k)}$$

und diese ist identisch für die einzelnen Wellenlängen innerhalb berechtigter Vernachlässigungen mit der Lampenstrahlung

$$(5) \qquad C_L \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c}{T_L}\cdot\frac{1}{\lambda}} \cdot e^{(\gamma_0+\gamma_1/\lambda)T_L} \cdot \sin^2\varphi.$$

Hier sind C_* und C_L Proportionalitätsfaktoren, T_* und T_L die effektiven Stern- und Lampentemperaturen, K die Ablesung des Rotkeils, k die zugehörige Nullpunktskorrektion, also $K+k$ die der Keildicke proportionale wahre Keillänge, φ der Drehungswinkel des Nicols. Wie die Tabellen von *Wilsing* und *Schnauder* zeigen, ist für T_L γ_0 und γ_1 verschwindend, d. h. im visuellen Gebiet kann bei der niedrigen Lampentemperatur, nicht dagegen, wie es irrig zuweilen geschehen, bei den Sterntemperaturen statt der *Planck*schen die *Wien*sche Strahlungsformel verwandt werden. Setzt man noch $A = \frac{c}{T} - \gamma_1$, so folgt wegen der Identität in λ sofort

$$(6) \qquad A_* = A_L - \alpha_1 \cdot l(z) - \beta_1(K+k)$$

bzw. für zwei kurz hintereinander beobachtete Sterne (A_L konstant, die Lampe brennt während der kurzen Dauer der Beobachtung gleichmäßig)

$$(7) \qquad A_{*1} - A_{*2} = \beta_1(K_1 - K_2) + \alpha_1(l(z_1) - l(z_2)).$$

23) Astr. Nachr. 219 (1923), p. 221.

α_0 und α_1 sind bekannt, β_0 und β_1 ergibt die spektralphotometrische Laboratoriumsuntersuchung des Rotkeils. Dann ist die Differenz der Keilablesungen bis auf den kleinen Einfluß der Extinktion proportional der Differenzen der A bzw. nahezu der $\frac{c}{T}$.

Weiter folgt aus (4) und (5)

$$C_* \cdot e^{\gamma_{0*} - \alpha_0 l(z) + \beta_0 (K+k)} = C_L \cdot e^{\gamma_0 L} \cdot \sin^2 \varphi. \tag{8}$$

Die Grenzen der Empfindlichkeit des Auges setzt *Wilsing* zu 0,68 und 0,45 μ an. Dann ist die ins Auge kommende Gesamtenergie des Sternes bzw. der Lampe

$$E = C_* \cdot e^{\gamma_{0*}} \int_{0,45}^{0,68} \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{A}{\lambda}} d\lambda = C_L \cdot e^{\alpha_0 l(z) + \beta_0 (K+k)} \cdot \Phi(A) \cdot \sin^2 \varphi. \tag{9}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \int_{0,45}^{0,68} \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{A}{\lambda}} \, d\lambda \\ &= \left[e^{-\frac{A}{\lambda}} \cdot (A\lambda)^{-3} \cdot \left(1 + 3\left(\frac{\lambda}{A}\right) + 6\left(\frac{\lambda}{A}\right)^2 + 6\left(\frac{\lambda}{A}\right)^3\right)\right]_{0,45}^{0,68}. \end{aligned} \tag{10}$$

Schnauder gibt mit dem Argument A eine Tabelle für $\log \varphi(A)$, die von *Hopmann*[24]) noch etwas erweitert wurde. Der Unterschied der „kolorimetrischen Größen" $m_1 - m_2$ zweier Sterne wird dann

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= 2{,}5 \log \frac{E_2}{E_1} \\ &= 2{,}5\Big[\log \varphi(A_2) - \log \varphi(A_1) + 2(\log\sin \varphi_2 - \log\sin \varphi_1) \\ &\qquad + \alpha_0(l(z_2) - l(z_1)) + \beta_0(K_2 - K_1)\Big]. \end{aligned} \tag{11}$$

Wilsing hat die Brauchbarkeit des Rotkeilkolorimeters an 43 Sternen bis $4{,}5^m$ in Verbindung mit einem alten Fünfzöller erprobt. Vergleichsweise sei erwähnt, daß Sterne gleicher Helligkeit am Potsdamer 80 cm Refraktor spektralphotometrisch visuell nur sehr schwierig zu messen waren. Eine größere Beobachtungsreihe Schnauders am Potsdamer Zwölfzöller wurde leider durch seinen Tod unterbrochen. In Bonn hat *Hopmann* an einem Sechszöller umfangreiche Beobachtungen angestellt, auf die später (Nr. **23—25**) zurückgekommen wird. Bequem erreicht wurden dabei Sterne $6{,}5^m$.

Forsythe[25]) und *Henning*[26]) hatten bemerkt, daß die Absorptionseigenschaften des Rotkeils von der Glastemperatur abhängen. *R. Müller*[27]) untersuchte daraufhin den Potsdamer Keil mit dem Ergebnis,

24) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 233.
25) Astroph. Journ. 42 (1915), p. 294.
26) Ztschr. f. Phys. 32 (1925). p. 799.
27) Astr. Nachr. 229 (1927), p. 305.

daß dieser Effekt praktisch belanglos ist, besonders wenn man nicht Sterne stark verschiedener Färbung miteinander vergleicht; dagegen werden die Helligkeitsmessungen durch die jeweilige Glastemperatur mehr beeinflußt.

Die Genauigkeit des Verfahrens hatte sich in Potsdam und Bonn als den spektralphotometrischen Arbeiten gleichartig bzw. überlegen erwiesen (s. Nr. 15). Ferner wies *Wilsing*[8]) nach, daß seine Beobachtungen frei von Helligkeitsgleichungen sind, Sterne 1^m wurden kolorimetrisch ebenso aufgefaßt wie solche 4^m. Dagegen ergaben (noch nicht ganz abgeschlossene) Untersuchungen *Hopmanns*, daß seine $\frac{c}{T}$-Werte stark von der Sternhelligkeit abhängen. Ob dies davon herrührt, daß in Bonn zur Lichtabschwächung des künstlichen Sternes statt Nicols ein sog. Neutralglaskeil verwandt wurde, der in Wahrheit merklich selektiv absorbiert, oder ob hier Fragen der Augenphysiologie in Frage kommen, ist noch unentschieden. Durch Verwendung von Drahtgazegitter und Ringblenden verschiedener Öffnung — also völlig neutralen Abschwächungsmitteln — wurden die scheinbare Helligkeit der Sterne innerhalb $\pm 0{,}3^m$ konstant gehalten und so die Fehler, sei es des Graukeils, sei es des Auges, eliminiert.

Statt nach *Wilsing* durch den Rotkeil das Licht der *natürlichen* Sterne zu färben, kann man auch die Energieverteilung im Spektrum der *Photometer*lampe durch einen Blauglaskeil meßbar ändern. Die Absorption der zurzeit erhältlichen Blaugläser verläuft aber derart, daß die Anwendung der *Wilsing*schen Formel $e^{\beta_0+\beta_1/\lambda}$ nicht in Frage kommt. *Fessenkoff*[27a]) hat daher in einer ersten Arbeit den Keil an Hand von Sternen mit bekanntem $\frac{c}{T}$ kalibriert. Später wurde von ihm eine etwas verwickelte Theorie gegeben[27b]), um trotz der in λ etwas unregelmäßigen Absorptionskurve des Blaukeils zu einer absoluten Temperaturskala zu kommen. Dabei mußte unter anderem das *Maxwell-Helmholtz*sche Farbendreieck bzw. die Empfindlichkeitskurven des Auges für Rot, Grün und Blau auf Grund der Messungen *Königs*[27c]) herangezogen werden. Nach *Fessenkoffs* Angaben scheint die innere Genauigkeit der Beobachtungen recht hoch zu sein. Dabei muß es wohl mitgespielt haben, daß die extrafokal eingestellten Sterne nach Farbe und Intensität mittels eines *Lummer-Brodhun*schen Würfels gemessen wurden, die genauere Flächenphotometrie statt der sonst üblichen Einstellung auf punktförmige Objekte also in Anwendung kam. Unter

27a) Russian Astr. Journ. 4 (1927), p. 169.

27b) Astr. Nachr. 236 (1929), p. 297.

27c) Ztschr. f. Physiol. u. Psychol. der Sinnesorgane 4 (1892), p. 241.

sonst gleichen Verhältnissen gestattet der Blaukeil, schwächere Sterne zu messen als der Rotkeil, da hier ja deren Licht durch das Filter geschwächt wird. Ein weiterer Vorteil seiner Methode soll nach *Fessenkoff* darin bestehen, daß das ungeschwächte Blau und Violett zur Beurteilung des Farbeneindrucks besonders wichtig sei. Im Gegensatz dazu hat *Hopmann* beim Rotkeilverfahren die Lampentemperatur möglichst niedrig gehalten, da ihm die Einstellung auf gelb-rote natürliche und Photometer-Sterne sicherer erschien als auf weiße.

6. Visuelle effektive Wellenlängen. Dieser von *Comstock*[28]) eingeführte Ausdruck bezeichnet die Lage des Energiemaximums der visuellen Strahlen. Bei seinen Beobachtungen an einem 40 cm-Refraktor wurde das Objektiv bis auf zwei parallele rechteckige schmale Öffnungen abgeblendet. In der Brennebene entstehen dann symmetrisch zum Sternbilde eine Reihe kurzer Beugungsspektra. Mit dem normalen Fadenmikrometer maß er dann die Abstände der „hellsten" Stellen, etwa in den beiden Spektren erster Ordnung. Bei bekannter Brennweite des Fernrohres, Ganghöhe der Mikrometerschraube und den Dimensionen und Abständen der beiden Spalten ergibt die gewöhnliche Gitterformel die Wellenlänge der beobachteten Stelle. *Comstock* wandte das Verfahren auf etwa 50 hellere Sterne an. In gleicher Art verfuhr *Lau*[29]) bei 70 Sternen mit Hilfe eines Zehnzöllers. *Gramatzki*[30]) verbesserte an einem sechszölligen Reflektor das Verfahren. Statt der zwei Spalten benutzt er ein grobes Beugungsgitter (s. Nr. **12**) vor dem Objektiv, statt des Schraubenmikrometers ein neuartiges Kalkspat-Doppelbildmikrometer. 80 hellere Sterne aller Spektraltypen wurden gemessen. Im Mittel ist bei ihm $\lambda_{\text{eff.}}$ für B-Sterne 545 $\mu\mu$, für M-Sterne 569, die Amplitude also 24 $\mu\mu$, die Genauigkeit einer Beobachtung wird zu 2,5 $\mu\mu$ angegeben. Weitere Untersuchungen, wie Fragen der Helligkeitsgleichung usw. liegen noch nicht vor.

Schon mit Rücksicht auf die einfachere Optik, dann wegen ihrer wesentlich kleineren Amplitude beim Übergang von B nach M dürften die beiden älteren Reihen weit weniger genau sein; übrigens war ihr Hauptzweck, Hilfsgrößen zum Studium systematischer, von der Sternfarbe abhängiger Fehlerquellen bei photographischen Ortsbestimmungen bzw. Doppelsternmessungen zu ermitteln.

7. Visuelle Farbenindizes. Als Farbenindex eines Sternes bezeichnet man den in den üblichen astronomischen Größenklassen ausgedrückten Helligkeitsunterschied, den er aufweist, wenn das inte-

28) Astroph. Journ. 5 (1897), p. 26.

29) Astr. Nachr. 173 (1906), p. 81.

30) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 149.

grierte Licht zweier mehr oder weniger breiter, aber verschiedener spektraler Bereiche gemessen wird. Der Begriff des Farbenindex hat sich geschichtlich zusammen mit der photographischen Photometrie entwickelt (s. Nr. 8) und ist dann sinngemäß auf eine Reihe anderer Verfahren ausgedehnt worden.

Bei der visuellen Farbenindexbestimmung verwendet man Farbfilter, die am Okular eines Vergleichsphotometers (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27) leicht wechselbar angebracht werden. Um in gewisser Weise durch der Praxis nahekommende Idealisierung die Verhältnisse übersichtlicher zu gestalten, seien ein Gelb- und ein Blaufilter angenommen, die streng vor bzw. nach 0,55 μ alles Licht durchlassen bzw. absorbieren. Aus den Rechnungen, die der Konstruktion der Kurven in Fig. 1 zugrunde lagen, und die hier auch für einen A- und F-Stern $\left(\frac{c}{T} = 1{,}2 \text{ bzw. } 1{,}8\right)$ durchgeführt wurden, folgt dann, daß bei fovealer Beobachtung das volle visuell wirksame Licht um nachstehende Beträge gedämpft wird:

	B	A	F	M
Gelbfilter	$0{,}87^{\mathrm{m}}$	$0{,}81^{\mathrm{m}}$	$0{,}75^{\mathrm{m}}$	$0{,}28^{\mathrm{m}}$
Blaufilter	0,65	0,70	0,76	1,63

Legt man wie üblich die Nullpunkte der „freien“, „blauen“ und „gelben“ Größenklassen so, daß die Differenzen für A-Sterne verschwinden, so ergeben sich folgende visuelle Farbenindizes:

	B	F	M
Blau-frei	$-0{,}05^{\mathrm{m}}$	$+0{,}06^{\mathrm{m}}$	$+0{,}93^{\mathrm{m}}$
Frei-Gelb	$-0{,}06$	$+0{,}06$	$+0{,}53$
Blau-Gelb	$-0{,}11$	$+0{,}12$	$+1{,}46$

Ganz ähnliche Werte erhält man für das Stäbchensehen, wenn die Grenzlinie der Filter von 0,55 μ nach 0,52 μ gelegt wird. Nach (unveröffentlichten) Bonner Versuchen ist zur Berechnung der Filterwirkung bei der Photometrie schwacher Sterne unbedingt die Stäbchenkurve zugrunde zu legen. Ferner sei bemerkt, daß es in der Praxis wohl Gelbgläser gibt, die obiger Idealisierung entsprechen, nicht aber Blaugläser, wodurch die F.I.-Amplitude wesentlich kleiner wird als obige Zahlenangaben.

Berücksichtigt man, daß der wahrscheinliche Fehler einer derartigen Farbenindexbestimmung mit den normalen Photometern unter günstigen Umständen zu $\pm 0{,}10^{\mathrm{m}}$ bis $\pm 0{,}15^{\mathrm{m}}$ zu veranschlagen ist, so kommt man zu folgendem Schluß: Die Benutzung eines der Filter oder auch beider zusammen liefert für die heißen Sterne (B

bis F) kein genügend sicheres Farbenäquivalent, wohl aber bei den kälteren, wenngleich auch hier die Amplitude B bis M kleiner ist als bei Verwendung der Photographie (Nr. 8), in voller Bestätigung der Erfahrungen von *Graff.*[31])

Wohl dürfte künftighin das Verfahren unter Verwendung der Flächenphotometer brauchbar werden. Diese haben nach den Beobachtungen von *Gramatzki, Schönberg* und *Hopmann* eine Genauigkeit von $0{,}02^m$ in den Helligkeiten bzw. $0{,}03^m$ im Farbenindex. In Leipzig sind derart größere Untersuchungen auf Grund günstig verlaufener Vorarbeiten mit einem *Gehlhoff-Schering*schen Flächenphotometer geplant.

Nach Ausweis obiger Zahlen blenden die angenommenen Farbfilter im Durchschnitt $0{,}8^m$ ab, schränken also die Reichweite des jeweiligen Instrumentes nicht stark ein. Wählt man dagegen strengere Filter — z. B. ein Blauglas, das von Violett nur bis $0{,}51\ \mu$ und ein Gelbglas, das von Rot bis $0{,}63\ \mu$ durchlässig ist —, so erreicht man folgende Farbenindizes: $B - 0{,}23^m$, $F + 0{,}27^m$, $M + 2{,}88^m$, also wesentlich größere als oben. Man gewinnt so eine brauchbare Methode, Farbenäquivalente abzuleiten auch mit den normalen Photometern, muß aber einen Verlust von 2^m—3^m in Kauf nehmen. Dieses ist im wesentlichen das Prinzip des „Heterochromen Photometers", das schon 1909 von *Nordmann*[32]) eingeführt wurde. In Verbindung mit einem Neunzöller, der ohne Filter gewiß Sterne 11^m zu messen gestattet, kann er noch solche 7^m messen. (Das dritte, grüne Filter *Nordmanns* spielt keine wesentliche Rolle.) Zu bemerken ist noch, daß *Nordmann* nicht bei den Farbenindizes stehen bleibt, sondern mit Hilfe der Absorptionskurven seiner Filter, der Empfindlichkeitskurve des Auges und der *Planck*schen Gleichung ganz im Sinne unserer Nr. **1** direkt Temperaturwerte ableitet. Nach seinen knappen Angaben kann man mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}2$ in $\frac{c}{T}$ rechnen. Leider gestattet die geringe Zahl gemessener Sterne keine weiteren Schlüsse auf seine Temperaturskala, systematische Fehler und anderes. Ähnlich wie *Nordmann* benutzt auch *Terkán*[32a]) verschiedene Filter in Verbindung mit einer nicht ganz einwandfreien Flächenphotometrie. Angaben über Genauigkeit und Reichweite der Methode fehlen leider.

31) Astr. Nachr. 215 (1822), p. 429.

32) Bull. Astr. 26 (1909), p. 158; Paris C. R. 149 (1909), p. 557; 173 (1922), p. 72.

32a) Astr. Nachr. 226 (1926), p. 345.

B. Photographische Beobachtungsverfahren.

Drei Gründe führten dazu, in der astronomischen Kolorimetrie besonders die photographischen Methoden auszubauen. Der erste ist die Möglichkeit, zahlreiche Sterne einer Gegend gleichzeitig mit einer Aufnahme untersuchen zu können, also neben Arbeitsökonomie ein Gewinn an Genauigkeit dadurch, daß wenigstens die systematischen Fehler, die vom stark wechselnden Zustand der Luft abhängig sind, geringeren Einfluß bekommen. Dann gestatten Dauerexpositionen zu schwächeren Sternen vorzudringen, als es dem Beobachterauge möglich ist. Schließlich lassen sich durch passende Sensibilisierung der Platten in Verbindung mit Filtern stärker getrennte Spektralbereiche der Sternstrahlung im integrierten Lichte untersuchen als es bei den visuellen Methoden der Nr. **6** und **7** möglich ist. Die Amplitude der Farbenäquivalente wird damit größer, bei gleicher photometrischer Genauigkeit also $\frac{c}{T}$ genauer bestimmt.

8. Photographische Farbenindizes. Der Umstand, daß ein weißer und ein roter Stern, die visuell gleich hell erscheinen, photographisch sehr verschieden hell sind, war in der Frühzeit der photographischen Photometrie, d. h. vor 1900, eine lästige Erscheinung, über die noch nichts näheres bekannt war.[33]) Erst durch den eigentlichen Begründer der astrophotographischen Photometrie, *Schwarzschild*[34]), wurde Klarheit geschaffen. So verwendet er bewußt in seiner zweiten Arbeit die Unterschiede der photographischen und visuellen Helligkeiten der Veränderlichen β Lyrae und η Aquilae, um Schlüsse auf die physikalische Natur dieser Sterne zu ziehen. 1904 zeigte er, wie man aus der Differenz photographische — visuelle Größe durch das *Wien*sche Verschiebungsgesetz die Temperaturen der Sterne ermitteln kann (der Größenordnung nach stimmen seine Werte mit den heutigen recht gut). Vorher[35]), 1900, schlägt er für die genannte Differenz das Wort Farbentönung vor, ein Ausdruck, der um 1910 in internationaler Übereinkunft[36]) sich in Farbenindex (Colorindex) ändert. Heute ist unstreitig der photographische Farbenindex das wichtigste aller Temperaturäquivalente geworden.

33) S. z. B. *Müller,* Photometrie der Gestirne (Leipzig 1897), p. 303.

34) Die Bestimmung von Sternhelligkeiten aus extrafokalen photogr. Aufnahmen, Beiträge zur photogr. Photometrie der Gestirne, Publ. der v. Kuffnerschen Sternwarte in Wien V (1899).

35) Wien Sitzber. math.-naturw. Klasse 109 (1900), p. 1127.

36) Bull. de comité international permanent de la carte du ciel VI (Paris 1913), Heft 1, p. 395.

Da das Referat von *Guthnick* (Encykl. VI 2, 27) die meßtechnischen Prinzipien der visuellen und photographischen Photometrie ausführlich schildert, braucht hier darauf nicht näher eingegangen zu werden. Die Praxis hat gezeigt, daß die in Größenklassen ausgedrückten Helligkeiten m einer Reihe von Sternen in zwei beliebigen photometrischen Arbeiten sich wie folgt unterscheiden

$$m_1 - m_2 = a + b(m_1 - m_0) + c(m_1 - m_0)^2 + f(T, \lambda_1, \lambda_2).$$

Hier ist a der Nullpunktsunterschied beider Systeme, b, c und m_0 kennzeichnen die Verschiedenheit beider photometrischer Skalen; b und c sollen bei einwandfreier Arbeit Null sein. λ_1 und λ_2 bedeuten die in der betreffenden Arbeit wirksamen Spektralbereiche, T die effektive Temperatur der Sterne. Werden a, b und c berücksichtigt, so ist der Farbenindex F.I. $= m_1 - m_2 = f(T, \lambda_1, \lambda_2)$. Unter Mitwirkung von *Schwarzschild* wurde 1910 international festgelegt, daß für Sterne $5{,}5^{\mathrm{m}} - 6{,}5^{\mathrm{m}}$ vom Spektraltypus $A\,0$ F.I. $= 0$ sein soll. Die B-Sterne haben dann negative Farbenindizes, die kälteren, vom Typus F bis M, positiven.

Wie stark die Amplitude B bis M ist, hängt von der Verschiedenheit der λ_1 und λ_2 ab. So hatte z. B. *Pickering* in Harvard ein mehr nach Blau hin empfindliches Auge als die Potsdamer Beobachter *Müller* und *Kempf*, so daß der Helligkeitsunterschied Potsdam—Harvard stark von der Sternfarbe bzw. T abhängt, somit einen Farbenindex darstellt, der allerdings in Anbetracht der Kleinheit seiner Amplitude ($B - M = 0{,}44^{\mathrm{m}}$) mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Beobachtungen selbst zur genauen Temperaturermittlung nicht ausreicht.

Auf der anderen Seite hängt die wirksame Wellenlänge bei den photographischen Verfahren sowohl von den Platteneigenschaften wie von dem benutzten Objektiv ab. Ersteres ist einleuchtend im Hinblick auf die verschiedenartige Sensibilisierung, wobei die Bemerkung *Hoffmeisters* erwähnt sei, daß die handelsüblichen Platten alle mehr oder weniger für Grün und Gelb empfindlich gemacht werden, und nur die „Sternwartenemulsionen" eine reine Bromsilberschicht tragen. Hinsichtlich der Wirkung der Optik sei darauf hingewiesen, daß die frisch versilberten Spiegel der Reflektoren ultraviolettes Licht besser zurückwerfen als solche mit älterem Belag, und daß bei photographischen Refraktoren die Gestalt der Farbenkurve, insbesondere die Lage ihres Scheitelpunktes, von Bedeutung ist. So ist z. B. das Potsdamer, von *Schwarzschild* entworfene Triplet nach *Hertzsprung* für 390 $\mu\mu$ achromatisiert, während sonst etwa 430 $\mu\mu$ hierfür gewählt wird. Dadurch wird die Amplitude des Farbenindex photographische—visuelle Größe bei diesem Instrument etwa 1,3 mal größer als im Normalfalle.[37])

Einige der wichtigsten bzw. charakteristischen Farbenindexkataloge seien kurz besprochen, und zwar zunächst die „Göttinger Aktinometrie“[38]) (näheres über Beobachtungs- und Meßverfahren s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27). Ihr Katalog gibt für den Gürtel 0—20° für über 3500 Sterne bis zur Größe $7{,}5^m$ der Bonner Durchmusterung in erster Linie die photographische Helligkeit, daneben die visuelle der Potsdamer photometrischen Durchmusterung, sowie als Differenz beider die Farbenindizes der Sterne. Ihre Amplitude beträgt im Mittel $B - M = 2{,}5^m$. *Schwarzschild* hat ferner wie folgt versucht, aus den F.I. die Temperaturen der Sterne abzuleiten. In der vereinfachenden Annahme, daß das Auge nur für $\lambda_1 = 0{,}570\,\mu$, die Platte für $\lambda_2 = 0{,}425\,\mu$ lichtempfindlich sei, ergibt sich aus der *Planck*schen Gleichung sofort

$$\text{F.I.} = K + 2{,}5 \log \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{e^{\frac{c}{T} \cdot \frac{1}{\lambda_2}} - 1}{e^{\frac{c}{T} \cdot \frac{1}{\lambda_1}} - 1} \right),$$

wo die additive Konstante K (auf hier zu weit führendem Wege) aus dem Umstande ermittelt wird, daß für die Sonne durch anderweitige Beobachtungen $T = 5900^0$ bekannt ist und diese als Vertreter des Spektraltypus $G\,0$ zu gelten hat. Die so gewonnenen Temperaturen für die einzelnen Spektraltypen schließen sich besonders bei B und A enger an die heutigen Werte an als die fundamentalen Potsdamer spektralphotometrischen Messungen.

Das Gegenstück zu vorstehender Arbeit ist die „Yerkes Aktinometrie“ von *Parkhurst*[39]), in der ebenfalls bis $7{,}5^m$ der B.D. die Sterne von 73° bis zum Pol untersucht sind (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27). Die Bestimmung der photographischen Helligkeit erfolgte durch extrafokale Aufnahmen auf gewöhnlichen Platten, die visuellen Größen wurden neubestimmt, ebenfalls auf photographischem Wege mit Hilfe panchromatischer Platten und durch Vorsetzen eines Gelbfilters. Dieses war so abgestimmt, daß die Empfindlichkeitskurve von Platte und Filter sehr nahe der des normalen Auges entsprach, so daß tatsächlich zwischen diesen „photovisuellen Größen“ und den Potsdamern kaum ein Unterschied besteht. Der w. F. eines Farbenindex auf Grund je einer photographischen und photovisuellen Aufnahme beträgt $\pm 0{,}096^m$.

37) Astr. Nachr. 186 (1910), p. 180.

38) Astr. Mitteil. d. Sternw. Göttingen, Heft 14 (1910 u. 1912).

39) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 169.

Als dritte sei eine Arbeit von *Hertzsprung*[40]) kurz besprochen. Sie gibt für 658 hellere Sterne zwischen — 5⁰ und + 80⁰ photographische Größen, die, mit den visuellen der Potsdamer Photometrie verbunden, $\frac{c}{T}$-Werte im *Wilsing*schen System liefern. Ähnlich ist das Ziel von *King*.[41]) Auch er beobachtet extrafokal an größeren Instrumenten, ermittelt auf Grund von Platten, die teils im Harvard Coll. Obs., teils in seiner Filiale in Arequipa gewonnen wurden, die photographischen und — mit panchromatischen Platten und Gelbfilter — die photovisuelle Helligkeit einer beschränkten Zahl hellerer Sterne des ganzen Himmels, damit auch deren F.I.; die Beziehung zur $\frac{c}{T}$-Skala ist von *Brill*[1]) abgeleitet worden.

Wie in *Guthnick*s Referat (Encykl. VI 2, 27) dargelegt, sind für ca. 150 Sterne bis 19^m im nächster Umgebung des Nordpols[42]) die photographischen und photovisuellen Helligkeiten — erstere durch mehrere unabhängige Beobachtungsreihen, letztere nur durch *Seares* auf den Mount Wilson — sehr genau festgelegt, also auch ihre F.I. Weiter hat *Parkhurst*[43]) in gleicher Art etwa 1500 Sterne bis 14^m untersucht, die sich in $+45^0$ Dekl. in den *Kapteyn*schen Auswahlfeldern (selected areas) befinden.

Ein sehr großes Material an F.I. (20843 Sterne zwischen -40^0 und -52^0) enthält eine auf der Kap-Sternwarte ausgeführte Arbeit.[44]) Durch photographisch photometrische Sonderaufnahmen wurden die in willkürlichen Einheiten (Durchmesser der fokalen Sternbilder) zunächst gegebenen photographischen Helligkeiten in die photometrische Skala gebracht und mit den visuellen Helligkeiten des *Draper*kataloges[45]) zusammengestellt. Da in dieser Art sowohl die photographischen wie die visuellen Größen erheblich viel unsicherer sind als die in den oben besprochenen Arbeiten, demnach auch die Farbenindizes, dürften letztere im *einzelnen* wenig verwendbar sein. Wohl aber ist das Material zu statistischen Untersuchungen brauchbar (s. Nr. **19**).

In den Harvardbänden 59, 71, 81 usw. finden sich weitere meist von *King* abgeleitete photographisch photometrische Helligkeiten vieler heller und schwacher Sterne, vielfach in Verbindung mit den visuellen photometrischen Größen. Da aber sowohl die photographischen als auch

40) Bull. Astr. Inst. of the Netherlands 35 (1923).
41) Harvard Coll. Obs. Annals 85 (1928), Teil 10.
42) Trans. of the Intern. Astr. Union 1 (1922), S. 69.
43) Publ. Yerkes Obs. 4 (1927), Nr. 6.
44) *H. Spencer Jones*, Magnitudes of stars, London 1927.
45) Harvard Coll. Obs. Annals 91—99.

die visuellen Harvardgrößen in verschiedenartigster Weise systematischer Verbesserungen bedürfen (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27), kann der aus ihnen abgeleitete F.I. erst nach kritischer Untersuchung weiter benutzt werden.

Das gleiche gilt für den ganzen *Draper*katalog, zumal hier in den meisten Fällen aus der visuellen die photographische Helligkeit nur mit Hilfe des Spektraltypus, also nicht auf Grund von gesonderten Messungen abgeleitet ist. Für alle $K0$-Sterne ist so z. B. als F.I. schematisch $1{,}00^{\mathrm{m}}$ angesetzt worden. Zwar ist die Korrelation von Spektraltyp und Farbenindex recht eng, die Bindung aber durchaus nicht streng (s. Nr. **16, 17**), so daß man die Differenzen photographisch-visueller Größen des riesigen Katalogs durchaus nicht als gemessene F.I. im hier gebrauchten Sinne ansprechen kann.

9. Methode Seares. 1926 machte *Seares*[46]) den Vorschlag, wie folgt ein Farbenäquivalent der Sterne zu gewinnen. Unter Benutzung farbenempfindlicher Platten wird zunächst eine Reihe Expositionen des Sterns mit geometrisch wachsender Belichtungszeit nebeneinander gesetzt (also z. B. mit 2, 4, 8, 16, 32 Sekunden) und ferner eine Aufnahme durch ein Gelbfilter (etwa von 16 Sek.). Wenn dann letztere im Aussehen der von 4 Sek. ohne Filter entspricht, so ist das Verhältnis der Expositionszeiten $E = 4:1$, $\log E = 0{,}602$. Oder wenn das gelbe Bild (g) nach einer entsprechenden Schätzung sich zwischen die blauen von 8 Sek. (a) und 16 Sek. (b) näher an a heran einfügen läßt (symbolisch etwa $a\,3\,g\,7\,b$), so würde dem eine Expositionszeit von 9,8 Sek. entsprechen $[\log 9{,}8 = (\log 16 - \log 8)\cdot\frac{3}{10} + \log 8]$. Es ist dann $\log E = -0{,}993 + 1{,}204 = +0{,}21$. Der zweite Stern ist offensichtlich weißer als der des ersten Beispiels; je größer also $\log E$, desto roter ist der Stern. Das Verhältnis der Belichtungszeiten (exposure ratios) ist also das Farbenäquivalent. Wie die weiteren Arbeiten von *Seares* selbst, dann die von *Baade* und *Malmquist*[47]) und nach der theoretischen Seite hin die von *Sternberk*[48]) zeigten, ist auch diese im Prinzip einfache Methode durch die verwickelten Eigenschaften der photographischen Platten vielerlei Fehlerquellen unterworfen. Vor allem tritt eine Helligkeitsgleichung auf, verursacht durch die verschieden steile Gradation der Platten für kurz- und langwelliges Licht. Infolgedessen kann das gelbe Bild eines schwachen Sterns etwa zwischen Nr. 3 und 4 der blauen liegen, während es bei einem hellen Stern von gleichem Farbenindex vielleicht zwischen Nr. 2 und 3 ein-

46) Proc. Nat. Akad. 2 (1916), p. 521 und in den späteren Bänden.

47) Mitteil. der Sternw. Hamburg-Bergedorf 5, Nr. 21.

48) Veröffentl. der Sternw. Berlin-Babelsberg 5 (1924), Heft 2.

geschätzt wird. *Seares* sucht diese Schwierigkeit dadurch zu umgehen, daß er durch Anwendung geeigneter Öffnungen, Blendgitter und Belichtungszeiten die Sterne auf eine passende Normalhelligkeit bringt, ihren Bildchen dadurch fast konstante Durchmesser gibt. *Baade* und *Malmquist* änderten vor allem die Methode in der Richtung ab, daß die Werte für $\log E$ sich für alle Sterne der Platte ableiten ließen, nicht nur, wie bei *Seares*, für solche nahe der optischen Achse. Erforderlich war dabei die Berücksichtigung der bei dem Bergedorfer Reflektor besonders großen Gesichtsfeldkorrektur (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27).

Die $\log E$ hängen natürlich von der verwandten Plattensorte, Entwicklungsart usw. sowie von der Art des Gelbfilters ab. Sie müssen daher durch Sterne, deren Farbenindex anderweitig bekannt ist, an eine der üblichen Farbenäquivalentskalen bzw. an die der $\frac{c}{T}$ angeschlossen werden. Die Ableitung der Helligkeitsgleichung wurde in Bergedorf mit diesen Anschlußrechnungen verbunden. Die Genauigkeit des so gewonnenen Farbenindex beträgt $\pm 0{,}10^{m}$ w. F. Gleich der photo-visuellen Farbenindexmethode (Nr. 8) kann man mit *Seares* bei Verwendung eines Reflektors verhältnismäßig leicht zu den schwächsten Sternen vordringen. Bei Refraktoren liegen die Verhältnisse anders, da die Farbenkurve der üblichen photographischen Objektive im grüngelben meist sehr steil verläuft, ein gutes fokales Sternbild dann nur mit Verwendung verhältnismäßig strenger Filter, also starken Lichtverlusten, zu erreichen ist.

10. Methode Tikhoff. Dieses Verfahren wurde 1916 an etwas schwer zugänglicher (russischer) Stelle mitgeteilt. *Tamm*[49]) in Norwegen kam unabhängig 1921 auf den gleichen Gedanken, woraufhin *Tikhoff*[50]) seine Arbeit in deutscher Übertragung 1923 nochmals veröffentlichte. Methodisch des näheren untersucht wurde das Verfahren durch *Sternberk.*[48]) Es besteht in der Hauptsache in folgendem. Zentral vor das Objektiv kommt ein kreisförmiges Blech von etwa der halben Objektivöffnung. Orthochromatische Platten haben nun zwei Empfindlichkeitsmaxima, eines wie üblich im Blauviolett und eines im Gelbgrünen. Die Farbenkurve normaler photographisch korrigierter Objektive verläuft sehr steil, so daß Aufnahmen im „gelben“ Fokus weit außerhalb des violetten liegen. Bei Aufnahmen im gelben Fokus mit genannter zentraler Blende werden die gelben Strahlen mehr oder weniger punktförmig abgebildet, während die violetten sich als ein

49) Astr. Nachr. 216 (1922), p. 331

50) Astr. Nachr. 218 (1923), p. 145.

um sie herumliegender Ring darstellen. Bei passender Belichtung werden nun bei einem gelblich-weißen Stern zentrales Bild und Ring gleichgeschwärzt aussehen, während sehr weiße Sterne einen hellen Ring und schwachen Kern haben, umgekehrt die roten. *Sternberk* maß nun bei den violetten Bildern, die mit geometrisch steigender Expositionszeit gewonnen wurden, die Schwärzung des Ringes, bei den gelben die fokalen Durchmesser, und erhält so das Verhältnis der Belichtungszeiten, die nötig sind, um von einem Stern festgewählte Ringschwärzungen bzw. Durchmesser zu bekommen.

Eine Variante der Methode, die gleichfalls *Sternberk* untersuchte, benutzt nicht die zentrale Objektivblende. Vielmehr wird die Platte hier so extrafokal gestellt, daß der innere Teil des Sternscheibchens, entsprechend den zwei Empfindlichkeitsmaximas der verwandten orthochromatischen Platten, in der Hauptsache von den gelben Strahlen erzeugt wird, während der äußere Ring wieder von den violetten herrührt. Die Einzelheiten der *Sternberk*schen Arbeit, insbesondere die Beseitigung der Helligkeitsgleichung durch Variation des *Schwarzschild*schen Exponenten p der photographischen Photometrie, müssen der Kürze wegen übergangen werden. Im System der normalen Farbenindizes haben seine Farbenäquivalente, beruhend auf einer Aufnahme, $\pm 0{,}08^m$ w. F. Die extrafokale Stellung bewirkt, daß allerdings trotz 40 cm Öffnung des Instruments bei einer Stunde Belichtung nur Sterne 9^m erreicht werden.

Offensichtlich hat *Sternberk* die Methoden von *Seares* und *Tikhoff* miteinander verbunden und glaubt so eine größere Freiheit von systematischen Fehlern erreicht zu haben. *Öpik*[51]) hat mit einer 16 cm-Kamera mit der gleichen Methode Sterne 10^m erreichen können; dabei gestattete der flache Verlauf der Farbenkurve des Objektivs und die Verwendung normaler wie orthochromatischer Platten zwei verschiedene F.I. zu messen. Der eine entspricht der Differenz der Helligkeiten bei 630 und 430 $\mu\mu$, die Differenz der wirksamen Wellenlängen ist damit etwas größer als bei *Seares*. Zum zweiten F.I. gehören die Werte $\lambda_1 = 430$, $\lambda_2 = 365\ \mu\mu$, also violett—ultraviolett. Die Werte der ersten Methode schließen sich gut an die sonstigen F.I.-Bestimmungen an, auch gibt *Öpik* die Beziehung seiner F.I. zur Potsdamer $\frac{c}{T}$-Skala. Dagegen zeigt der zweite F.I. den Einfluß der ausgedehnten Absorption im Ultravioletten der A- und B-Sterne (s. Referat *Hnatek*, Encykl. VI 2, p. 726), wodurch sie für eine $\frac{c}{T}$-Bestimmung bzw. einen Vergleich mit den normalen F.I. nicht geeignet sind.

51) Publ. Obs. Astr. de Tartu (Dorpat) 26 (1925), Nr. 3.

11. Methode Rosenberg. Nach *Rosenbergs* Vorschlag wird in den Strahlengang eines 20 cm-Reflektors, der durch einen Cassegrainspiegel auf 4 m Brennweite gebracht ist, etwa 50 cm vor der in der Bildebene liegenden Platte ein Doppelfilter angebracht. Dieses besteht aus zwei mit den brechenden Kanten aneinander liegenden Prismen von sehr kleinem Winkel bzw. zu vernachlässigender Dispersion aus blauem und gelbem Glase (zwei gleichartige, schräggestellte, planparallele Platten wären vielleicht auch brauchbar). Auf der photographischen Platte liegen dann die blauen und gelben Sternbildchen dicht nebeneinander und können in bekannter Weise ausphotometriert werden, z. B. mit Hilfe des *Rosenberg*schen Elektrophotometers (s. das Referat von *Guthnick,* Encykl. VI 2, 27). Entsprechend den Ideen von *Seares* werden eine Reihe von Aufnahmen mit steigender Expositionszeit nebeneinander gesetzt und so in bekannter Art die Schwärzungskurven der gelben und blauen Sternbilder abgeleitet.

Näher untersucht wurde dieses Verfahren durch *Führer*[52]), wobei die Farbenindizes der Sterne des *Bergstrand-Rosenberg*schen Verzeichnisses beobachtet wurden (Nr. **12**). Vom Spektraltypus $B\,2$ bis $K\,6$ ergab sich die recht beträchtliche Amplitude von $2{,}7^m$. Für Sterne $6{,}5^m$ waren 24 Minuten Belichtungszeit nötig. Die Genauigkeit des einzelnen Farbenindex auf einer Platte beträgt etwa $\pm\, 0{,}05^m$ w. F.

12. Photographische effektive Wellenlängen.[53]) Nach den Vorschlägen von *Bergstrand*[54]) bzw. *Hertzsprung*[55]) setzt man vor das Objektiv eines photographischen Refraktors ein grobes Beugungsgitter (bei kleineren Instrumenten z. B. gleich starke und in gleichen Abständen gehaltene Drähte oder Stäbe, beim 150 cm-Spiegel des Mount Wilson 3 mm starke, schwarz übersponnene Gummibänder). Die Platte zeigt dann seitlich des zentralen Sternbildes symmetrisch sternartige kurze Beugungsspektra, deren Stellen größter Schwärzung bzw. Mitten bei einem weiß-blauen Stern dann offenbar enger zusammenliegen als bei einem roten. Die unter dem Meßmikroskop ermittelten Abstände etwa der beiden Spektren erster Ordnung sind dann ein Farben- bzw. $\frac{c}{T}$-Äquivalent. Sind die Abstände der Spektren, die Brennweite des

52) Diss. Kiel 1929.

53) Geschichte und Literatur dieser Methode ist bis 1924 fast vollständig mitgeteilt in *H. v. Klüber,* Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. 5 (Kiel 1924), Heft 1. — Die neueste Entwicklung sowie eine eingehende Kritik des ganzen Verfahrens bezüglich Genauigkeit, systematischer Fehler usw. bringt *R. Cherubim,* Veröffentl. der Universitätssternw. Göttingen 1929, Heft 9.

54) Paris C. R. 148 (1909).

55) *Hertzsprung,* Astr. Nachr. 182 (1909), p. 289; Publ. Potsdam 1911, Nr. 63.

Instruments sowie die Gitterkonstante in Millimeter gegeben, so liefert die bekannte einfache Gitterformel die „effektiven Wellenlängen“ ($\lambda_{\text{eff.}}$). Bei aller prinzipiellen Einfachheit hat sich aber bei dieser Methode eine so große Zahl systematischer Fehlerquellen herausgestellt, daß gelegentlich ihre Brauchbarkeit überhaupt bestritten wurde.

Als praktisch hat sich zunächst erwiesen, die Gitterkonstante etwa 8 bis $10 \cdot 10^{-4}$ der Brennweite des Instruments zu machen. Der Abstand der Spektren erster Ordnung wird dann etwa 1 mm. Zweckmäßig ist es in vielen Fällen ferner, die Intervalle der Stäbe gleich der Stabdicke zu machen, da dann die Spektren gerader Ordnung verschwinden, die ungerader Ordnung am hellsten werden (s. Referat *Guthnick*, Photographische Photometrie, Encykl. VI 2, 27).

Die systematischen Fehlerquellen seien nur kurz aufgeführt. Bei Refraktoren ist zunächst nicht jedes Objektiv für das Verfahren brauchbar, so z. B. dann nicht, wenn die Achromatisierung zu stark nach violett erfolgt ist[55]), auch soll die Farbenkurve möglichst symmetrisch und flach verlaufen[56]) Vor allem erweisen sich die $\lambda_{\text{eff.}}$ als sehr stark abhängig von der Helligkeit der Sterne und der Expositionszeit. Durch Aufnahmen mit verschieden langer Belichtung wird dies für das einzelne Instrument ermittelt und die Messungen entsprechend vereinheitlicht, wobei der Durchmesser der zentralen Sternbilder als Argument genommen wird. Verwickelt werden die Verhältnisse dadurch, daß diese Helligkeitsgleichung sich mit dem Spektraltypus (besser mit $\lambda_{\text{eff.}}$ selbst bzw. $\frac{c}{T}$) ändert. Dazu kann eine starke Änderung dieses Effektes mit wechselnder Fokussierung treten, selbst wenn es sich nur um das eine oder andere 0,1 mm handelt.[57]) Letzteres tritt nach *Bergstrand*[58]) bei Objektiven mit unsymmetrischer Farbenkurve auf. Schließlich spielen die stets und unregelmäßig wechselnden Eigenschaften der photographischen Platten — Schichtdicke, Entwicklungsart usw. — eine erhebliche Rolle.[59])

Es erfordert also die Methode der $\lambda_{\text{eff.}}$ jedenfalls umfangreiche Untersuchungen über das Verhalten des ganzen Instrumentariums (diese treten denn auch in der Literatur stärker hervor als die eigentlichen auf die Sterne bezüglichen Ergebnisse). Weiter ist es begreiflich, daß trotz aller Vorsicht die Ergebnisse der verschiedenen Autoren noch stark gegeneinander differieren. Nachdem *Wolf*[60]) in einer interessanten

56) *Lindblad*, Arkiv. f. Math. och Phys. 13 (Stockholm 1919), Nr. 26.

57) *Rosenberg*, Astr. Nachr. 213 (1921), p. 329.

58) Seeliger-Festschrift, p. 386 (Berlin 1924, Springer).

59) *Eberhard* in Seeliger-Festschrift, p. 115.

60) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 49.

Studie über Bestimmung von $\lambda_{\text{eff.}}$ am Heidelberger Reflektor betont hatte, „es sei nötig, bei jeder Angabe effektiver Wellenlängen auch diejenigen einiger allgemein benutzter Sterne mit anzugeben", schlugen *Rosenberg* und *Bergstrand*[61]) eine Liste von 27 Sternen aller Spektraltypen nahe $+ 80^0$ Dekl. in diesem Sinne vor. Bis heute liegen erst vier Beobachtungsreihen der $\lambda_{\text{eff.}}$ dieser Normalsterne vor (s. auch Nr. **11**).[62])

Gleich anderen Farbenäquivalenten haben die $\lambda_{\text{eff.}}$ keine direkte physikalische Bedeutung, müssen vielmehr statistisch an eine $\frac{c}{T}$- oder allenfalls gut definierte F.I.-Skala angeschlossen werden, wie es z. B. *Hertzsprung*[63]) in seinem Kompilationskatalog und in seiuer Plejadenarbeit[63]) getan hat.

Bezüglich der Reichweite sei bemerkt, daß bei den meist üblichen Gittern die Spektren erster Ordnung rund $2{,}5^{\text{m}}$ schwächer sind als die Sternbilder bei Aufnahmen ohne Gitter. Die Fußnoten [64]) bis [67]) geben einige weitere hierher gehörige Arbeiten an.

C. Elektrische Beobachtungsverfahren.

13. Lichtelektrische Farbenindizes. Über die Prinzipien und die Technik der lichtelektrischen Photometrie berichtet das Referat von *Guthnick* (Encykl. VI 2, 27). Da die lichtelektrischen Zellen einen verhältnismäßig breiten spektralen Empfindlichkeitsbereich haben, liegt die Möglichkeit vor, ähnlich der Methode der visuellen Farbenindizes durch Benutzung von Farbfiltern zu Temperaturäquivalenten zu gelangen. Die erste Beobachtungsreihe der Art rührt von *Guthnick* her.[68]) 67 Sterne verschiedener Spektraltypen wurden mit und ohne Gelbfilter beobachtet. Die Differenz der Größen, der Farbenindex änderte sich von *B*- bis *M*-Sternen nur um $0{,}5^{\text{m}}$. Wenngleich bei der hohen inneren Genauigkeit der lichtelektrischen Photometrie diese F.I. mindestens den normalen (photographisch-visuell) ebenbürtig waren, so kam doch die Präzision der Methode noch nicht recht zur Geltung. *Guthnick*

61) Astr. Nachr. 215 (1922), p. 447.

62) *H. v. Klüber*[58]); *V. Oberguggenberger*, Mitteil. der Sternw. Innsbruck, Nr. 4, bzw. Wien Sitzber. math.-naturw. Klasse IIa 137 (1928), Heft 5 und 6; *C. R. Davidson, E. Martin,* Month. Not. Roy. Astr. Soc. 84 (1924), p. 425; Bull. Astr. Inst. Netherlands 140 (1927).

63) Mem. Roy Akad. Danemark, Section des sciences, 8. Serie, 4 (1923), Nr. 4.

64) Determinations of effective wave lenghts, Roy. Obs. Greenwich 1926.

65) *E. A Kreiken,* On the colour of the faint stars, Diss. Groningen 1924.

66) *E. Hertzsprung* und *F. H. Seares,* Astroph. Journ. 42 (1915), p. 92—132.

67) *E. Hertzsprung,* Astroph. Journ. 55 (1922), p. 370.

68) Astr. Nachr. 210 (1920), p. 345; Veröffentl. der Sternw. Berlin-Babelsberg II 3 (1918), p. 30.

und *Bottlinger* gingen daher dazu über, Gelb- und Blaufilter zu benutzen. Der damit begründete Verlust an Helligkeit (vgl. auch Nr. 7) ist nicht sehr groß, die Amplitude der F.I. steigt aber auf das Doppelte. *Bottlinger* hat in der Art 459 Sterne bis 6^m des Nordhimmels gemessen.[69]) Seine F.I., im Mittel $-0{,}68^m$ für einen *B*-Stern, $+0{,}25^m$ für einen *M*-Stern, wurden durch quadratische Interpolationsformeln auf die übliche F.I.- bzw. auf eine $\frac{c}{T}$-Skala umgerechnet. Die Gefahr einer Helligkeitsgleichung wurde durch Verwendung von Objektivblenden umgangen, die alle Sterne innerhalb eines engen wirksamen Helligkeitsbereiches zu messen gestatteten.

Unstreitig sind die lichtelektrischen F.I. bisher die genauesten Temperaturäquivalente (s. Nr. **15**), nur drei nicht kleine Nachteile haften dem Verfahren an. Einmal verlangt es eine ziemlich kostspielige Apparatur (relativ zu den übrigen Methoden), dann hat es nur eine beschränkte Reichweite (am 30 cm-Refraktor ist die Grenze bei 6^m) und schließlich sind die Zellen selbst gegen Störungen sehr empfindlich: eine sog. „leuchtende Entladung", die z. B. durch Induktion bei Gewittern auftreten kann, macht leicht die Zelle unbrauchbar. — Eine Verbesserung des Verfahrens schlug 1924 *Guthnick* vor.[70]) Das neuartige Photometer enthält vier Zellen, die während des Beobachtens leicht gewechselt werden können. So kann z. B. ein Stern rasch hintereinander mit einer Natrium- und einer Rubidiumzelle gemessen werden. Diese haben merklich verschiedene spektrale Empfindlichkeit, können so also F.I. liefern. Die Vorschaltung von Farbfiltern kann noch die wirksamen Spektralbereiche stärker trennen. Über Erfahrungen mit diesem Instrument ist noch nichts mitgeteilt.

14. Die thermoelektrische Methode. Von den drei Methoden, auf elektrischem Wege die *Gesamt*strahlungsenergie der Sterne zu bestimmen — also letztlich bolometrische Größen abzuleiten (s. Nr. **1** und Nr. **20**) —, der radiometrischen, der bolometrischen und der thermoelektrischen, wurde bis heute nur die dritte so weit entwickelt, daß über das Versuchsstadium hinaus umfangreichere Beobachtungsreihen angestellt wurden. Es handelt sich um die Arbeiten von *Coblentz*[71])[72]), der die Spiegel der Lick- und Flagstaff-Sternwarte zur Verfügung hatte, und die von *Pettit* und *Nicholson* am $2^1/_2$ m-Reflektor des Mount Wilson.[73]) Auf letztere sei näher eingegangen.

69) Veröffentl. der Sternw. Berlin-Babelsberg III 4 (1923).

70) Ztschr. f. Instrumentenkunde 1924, p. 303 (Berlin, Springer).

71) Lick Obs. Bull. 266 (1915).

72) Über ältere Arbeiten [71]) und *Brill*[1]).

73) Astroph. Journ. 68 (1928), p. 279.

Zur Erreichung allerhöchster Empfindlichkeit mußten die in den Fokus des Reflektors gebrachten Thermoelemente äußerst klein gemacht (einschließlich kurzer zuführender Drähte wiegt ein solches 0,1 mg) und in ein Vakuumgefäß gebracht werden, das mit einem dünnen Steinsalz-, Quarz- oder Mikroskopdeckglasfenster versehen ist. Der durch die Strahlung entstehende Thermostrom wird mit einem D'Arsonval-Galvanometer höchster Empfindlichkeit unter Verwendung photographischer Registrierung der Spiegelstellung gemessen. Es lassen sich dann Sterne 7^m noch mit einer Genauigkeit von $0{,}1^m$ messen. Charakteristisch für die Methode, die ja vor allem die langwellige Strahlung erfaßt, ist es, daß die Sterne bei Tage ebensogut meßbar sind wie nachts. Die Instrumentalfehler — Einfluß der Extinktion, Alter der Versilberung des Reflektors u. a. — werden an Hand besonderer Messungen eliminiert. So kann zunächst ein Verzeichnis der thermoelektrischen Größen von 124 irgendwie bemerkenswerten Sternen mitgeteilt werden. Bildet man nun die Differenzen „visuelle Größe im Harvardsystem — thermoelektrische“, so erhält man analog dem Farbenindex den „Wärmeindex“ der Sterne (W.I.). Wird der Nullpunkt der thermoelektrischen Größen so gelegt, daß für A-Sterne W.I. $= 0$ ist, so wird für M-Sterne W.I. 3—5^m.

Das Gerät gestattet noch in anderer Weise ein Temperaturäquivalent abzuleiten. Analog der Ermittelung photovisueller F.I., d. h. der Kombination von Aufnahmen ohne und mit Gelbfilter, wird hier, wie es *Coblentz* zuerst getan hatte, einmal die Gesamtstrahlung eines Sterns gemessen, dann die von einer 1 cm dicken Wasserschicht noch durchgelassene. Für A-Sterne ist diese „Wasserzellenabsorption“ $0{,}25^m$, für M-Sterne 1—$1{,}7^m$. Auf die Ergebnisse dieser Meßmethode werden wir später noch mehrfach zurückkommen; dadurch, daß sie als einzige den großen Wellenlängenbereich von $0{,}7\,\mu$ an erfaßt, ist sie besonders wichtig.

15. Zusammenfassende Übersicht. Es wird von gewissem Interesse sein, die oben dargestellten vielartigen Methoden ihrer Leistungsfähigkeit nach zu vergleichen. Bei der Unvollkommenheit des Beobachtungsmaterials kann allerdings ein solcher Versuch nicht in allen Teilen befriedigen. Für jedes Verfahren wurde eine besonders typische Arbeit gewählt. Die instrumentellen und meßtechnischen Angaben der einzelnen Beobachter lieferten zunächst die Möglichkeit, die jeweilige Reichweite auf gewisse Normalverhältnisse zu reduzieren, nämlich auf Beobachtungen mit einem Fernrohr von 16 cm Öffnung (6-Zöller) und $^1/_2$ Stunde Belichtungszeit. Bei der Reduktion der Belichtungszeiten wurde die auch sonst oft zu findende Annahme gemacht, daß Verdreifachung der Belichtung einem Gewinn von 1^m entspricht.

Zu zweit mußten die Genauigkeitsangaben der verschiedenen Methoden in einheitlichem Maße ausgedrückt werden, d. h. es galt, entsprechend dem früher (Nr. 1) gesagten, den w.F. in der $\frac{c}{T}$-Skala abzuleiten. Naturgemäß kam es dabei auf die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung (also der einzelnen Platte, Pointierung usw.) an, nicht auf die der jeweiligen Katalogangaben, die auf mehreren Abenden u. dgl. beruhen. Diese Umrechnung konnte in vielen Fällen nur indirekt nach Art des nachstehenden Beispiels erfolgen: Der w.F. einer Beobachtung bei den photographischen effektiven Wellenlängen in Greenwich ist $\pm$ 17 Å.E. Ihre Amplitude von *B*- bis zu *M*-Sternen beträgt 370 Å.E., die der $\frac{c}{T}$ in der *Brill*schen Skala 3,8, womit der w.F. einer Beobachtung in der $\frac{c}{T}$-Skala $\pm$ 0,17 wird.

Die Spalten der nachstehenden Übersicht geben nacheinander: Die Methode, die jeweils als Beispiel ausgewählte Arbeit, Öffnung des Instruments in Zentimetern, die Belichtungszeit, die in der Arbeit erreichte Grenzgröße, die wie oben angegeben errechnete relative Grenzgröße und den w.F. einer Beobachtung in der $\frac{c}{T}$-Skala. : bedeutet unsichere Angaben.

Nr.	Methode	Beispiel	Öffnung	Expos.-zeit	Reichweite beob.	Reichweite rel.	W.F. b. Beob.
1.	Farbenschätzungen	*Osthoff*	10,5	—	6^m	7^m	0,36
2.	Rotkeil	*Hopmann*	16	—	6,5	6,5	0,20 [1])
3.	$\lambda_{eff.}$ vis.	*Gramatzki*	16	—	6	6	0,45
4.	F.I. vis. Filter	*Hopmann*	16	—	8	8	0,14
5.	F.I. photogr.-vis.	Götting. Akt.	4,5	30^m	8	10	0,14
6.	F.I. photogr.-photovis.	*Parkhurst*	14,5	30	8	8	0,15 [2])
7.	*Seares*	*Baade*	100	11	14,2	11	0,12
8.	*Tikhoff*	*Öpik*	16	60	10,5	10	0,12
9.	*Rosenberg*	*Führer*	20	30	6,5	6	0,07:
10.	$\lambda_{eff.}$ photogr.	Greenwich	53	10	11	9	0,17
11.	F.I. Lichtelektr.	*Bottlinger*	30	—	6	4,5	0,037 [3])
12.	Thermoelektr.	*Pettit*	250	—	7	1	0,20:
13.	Spektralphotom. vis.	*Wilsing*	80	—	4,5	0,5	0,20:
14.	„ photogr.	*Rosenberg*	10,5	9:	3,1	5	0,20:
15.	„ „	Göttingen [4])	16	3	5,0	7	0,02

[1]) Auf Grund der Beobachtungen bei verschiedenen veränderlichen Sternen.
[2]) Die Aufnahmen erfolgten extrafokal. [3]) Je 25—30 Einzelmessungen!
[4]) Veröffentl. Univers.-Sternw. Göttingen 11 (1930).

Zu der Tabelle ist zu bemerken: 13. und 14. enthalten die bis heute grundlegenden absoluten Temperaturbestimmungsarbeiten. Wir sehen hier die unbedingte Überlegenheit des photographischen Verfahrens;

15. zeigt die ständige Steigerung der Empfindlichkeit der Platten, ferner die Wirkung der Verbesserung des Instrumentariums; der kleine w.F. ist gutteils auch bedingt durch die Auswahl nur besonders klarer Nächte. Die ultrarote Strahlung (12.) ist leider nur den allergrößten Reflektoren zugänglich, auch die drei ersten visuellen Methoden stehen an Reichweite und Genauigkeit den photographischen etwas nach. Daher dürfte mindestens die Beobachtung visueller $\lambda_{\text{eff.}}$ künftig selten in Anwendung kommen. Das einfache Instrumentarium und Reduktionsverfahren von 1. und 2. gestattet immerhin durch wiederholte Messung die größere Unsicherheit auszugleichen, wie das Beispiel der *Osthoff*schen Beobachtungen in ihrer hohen Bewertung durch *Hertzsprung*[21]) zeigt. Zudem gibt das Rotkeilverfahren als einziges neben der eigentlichen Spektralphotometrie unmittelbar $\frac{c}{T}$-Werte. Das vierte, recht günstig erscheinende Verfahren bedarf erst noch längerer Erprobung.

Die photographischen Methoden stehen, was die Genauigkeit anlangt, etwa gleichberechtigt nebeneinander, nur das *Rosenberg*sche scheint merklich genauer zu sein, allerdings auf Kosten der Reichweite. Bezüglich dieser sind die Unterschiede nicht allzu groß, besonders wenn man noch andere, nicht in der Tabelle ausgeführte Arbeiten berücksichtigt. Vor allem sind aber die photographischen Methoden den anderen dadurch überlegen, daß sie, wenigstens in vielen Fällen, die zahlreichen Sterne einer Aufnahme zu untersuchen gestatten; ihr Nachteil ist die immerhin stets etwas umständliche Bearbeitung der Platten. Allen anderen Verfahren weit an Genauigkeit — wieder auf Kosten der Reichweite — überlegen ist die lichtelektrische Photometrie, selbst wenn nur zweimal vier Einstellungen bei der Messung, sonstiger photometrischer Gewohnheit entsprechend, gemacht werden, statt der in Babelsberg üblichen 25 bis 30.

III. Ergebnisse bei normalen Sternen.

16. Allgemeines. Nach Ausweis der Literaturangaben der vorstehenden Nummern liegen heute weit über 40000 Farbenäquivalente von Fixsternen vor. Zu bedauern ist nur, daß sie noch keine einheitliche Bearbeitung, also Reduktion auf eine $\frac{c}{T}$-Skala, gefunden haben. Für die hellen Sterne ist nochmals *Hertzsprungs* Katalog[6]) anzuführen sowie das Verzeichnis von *Brill.*[74]) Die $\frac{c}{T}$-Werte in diesem haben ca. 0,05 w.F.

74) Astr. Nachr. 223 (1924), p. 105.

Eines der ersten Ergebnisse von F.I.-Bestimmungen bzw. spektralphotometrischen Messungen war die enge Beziehung zwischen F.I. bzw. $\frac{c}{T}$ einerseits und dem durch das Auftreten bestimmter Absorptionslinien gekennzeichneten Spektraltypus andererseits. Die Korrelation ist so eng, daß man — wie es im großen *Draper*katalog[45]) geschehen ist — an Hand des Spektraltypus genäherte F.I. ansetzen kann.

Umgekehrt hat man nach dem Vorschlag von *Seares*[75]) parallel zu den Spektralklassen Farbklassen für Übersichtszwecke eingeführt, die mit *b, a, f*, ... bezeichnet werden und sich für die normalen F.I. ungefähr wie folgt gruppieren:

Spektrum	Farbklasse	Farbenindex
B	*b*	$-0{,}4^m$ bis $0{,}0^m$
A	*a*	$+0{,}0$ „ $+0{,}4$
F	*f*	0,4 „ 0,8
G	*g*	0,8 „ 1,2
K	*k*	1,2 „ 1,6
M	*m*	1,6 „ 2,0 und mehr

Sinngemäß ist ihre Anwendung bei den anderen Farbenäquivalenten.

Wie die Beziehung zwischen $\frac{c}{T}$-Skala und den Spektralklassen durchaus nicht linear ist, so auch die der verschiedenen Temperaturäquivalente. Nachdrücklich hat hierauf *Hertzsprung*[76]) aus folgendem Anlaß hingewiesen:

Die Greenwicher $\lambda_{\text{eff.}}$ ändern sich vom Typus *A* bis *F* nur sehr wenig, weshalb von anderer Seite der Schluß gezogen wurde, daß diese Methode wenig brauchbar sei. *Hertzsprung* zeigt aber, daß „die $\lambda_{\text{eff.}}$ mit den F.I. der Yerkes-Aktinometry sehr gut übereinstimmen, die Beziehung zwischen beiden Arbeiten streng linear ist“. Auch *Bottlingers* lichtelektrische F.I. sowie die $\frac{c}{T}$ nach *Brill* (s. p. 773) zeigen ein ähnliches Verhalten wie die λ_{eff}, was alles nur auf eine Ungleichförmigkeit der Spektralklasseneinteilung hinweist.

Andererseits ist die Beziehung zwischen F.I. und Spektraltypus durchaus nicht eindeutig. Dies führt zum Begriff des Farbenexzesses. Dieser ist die Differenz zwischen F.I. eines einzelnen Sterns und dem Mittelwert der F.I., den sonst normale Sterne des gleichen Spektraltypus haben (s. Nr. **17**). Verzeichnisse von Sternen mit für ihren

75) Washington Proc. National Acad. 1915, p. 481.

76) Bull. Astr. Netherland 134 (1927).

Spektraltypus besonders hoher oder niedriger Temperatur haben *Bottlinger*[69]), *Hertzsprung*[77]) u. a. gegeben.

Statistische Untersuchungen über die Abhängigkeit der Sternfarbe von sonstigen Kennzeichen, wie scheinbarer oder absoluter Helligkeit, Abstand von der Milchstraße usw. haben trotz unvollständigen Materials zu einer Reihe wichtiger Ergebnisse geführt, die hier und in den nächsten drei Nummern erörtert seien.

So ist nach *Seares*[78]) der Zusammenhang von F.I. (photographisch-visuell) und scheinbarer visueller (m_v) bzw. photographischer Helligkeit (m_p) bis zur 17^m herunter gegeben durch

$$\text{F.I.} = +\,0{,}50^m + 0{,}029^m\, m_v \quad \text{bzw.} \quad \text{F.I.} = -\,0{,}18^m + 0{,}071^m\, m_p;$$

d. h. im Durchschnitt sind die schwächeren Sterne viel roter als die hellen. Die Erklärung dafür ist wohl darin zu suchen, daß erst allmählich das Heer der Zwergsterne von den Typen *G*, *K* und *M* zur Mitwirkung kommt.

In der gleichen Arbeit leitet *Seares* auch die Beziehung zwischen mittleren F.I. und galaktischer Breite ab, gültig etwa für Sterne 5^m bis 7^m. Danach sind die „blauen" Sterne ausgesprochen in der Milchstraße konzentriert, was offenbar identisch ist mit dem *Pickering*- bzw. *Kapteyn*schen Phänomen.[79])

17. Farbe und absolute Helligkeit. Neben den Kriterien zur Unterscheidung der absoluten Helligkeit, die das Absorptionsspektrum liefert (Methode der spektroskopischen Parallaxbestimmung s. Encykl. VI 2, 23, p. 272), ist von besonderem Interesse die Untersuchung der Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Riesen- und Zwergsterne. Ansätze zu *direkten* Untersuchungen in dieser Richtung liegen bis jetzt jedoch nur bei wenigen Sternen vor (*N. W. Storer*[79a]), *L. Hufnagel*[79b])). Dagegen sind die verschiedenen Farbäquivalente, darunter vor allem die Farbenindizes, auf einen Einfluß der absoluten Leuchtkraft der Sterne hin untersucht worden. Bereits Miß *Maury*[80]) unterschied bei ihrer sorgfältigen Spektralklassifikation zwei Gruppen der Klasse XV (α Bootis und α Cassiopeiae-Sterne) nach der auffallend verschiedenen Stärke des Intensitätsabfalls im Violetten und brachte so zuerst den Nachweis, daß Farbe und Spektraltypus nicht eindeutig

77) Bull. Astr. Netherland 37 (1924); *E. F. Hubble,* Astroph. Journ. 52 (1920), p. 8.

78) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 114.

79) Siehe diesen Band p. 291.

79a) Lick Obs. Bull. 410 (1929).

79b) Harvard Coll. Obs. Circular 343 (1929).

80) Harvard Annals (28) 1 (1897), p. 39.

durcheinander bestimmt sind. Dabei mußte zunächst die Frage offen bleiben, ob es sich hierbei um einen Einfluß der Leuchtkraft der Sterne oder um einen Absorptionseffekt im interstellaren Raume handelt. *Kapteyn*[81]) stellte daher den folgenden Ansatz auf, der sowohl diese beiden Effekte wie auch den einer Helligkeitsgleichung in dem zugrunde gelegten Farbenmaterial berücksichtigt:

$$\text{beobachtete Farbe} = a + bm + cM + dR,$$

wo m die scheinbare, M die absolute Helligkeit und R die Entfernung des Sternes bezeichnen. Der *Kapteyn*sche Ansatz ist in der Folgezeit häufig benutzt worden, obwohl er in dieser einfachen Form zu keinen brauchbaren Ergebnissen führen konnte, weil einmal die Voraussetzung einer linearen und für alle Spektraltypen gleichen Abhängigkeit der Farbe von der absoluten Helligkeit, wie wir heute wissen, nicht zutrifft, und weil ferner — worauf zuerst *van Rhijn*[82]) hingewiesen hat — eine getrennte Bestimmung der Koeffizienten b, c, d nicht möglich ist, da die Größen m, M und R noch folgender Nebenbedingung genügen müssen:

$$M = m - 5 \log R.$$

Von größerer Bedeutung waren daher die rein empirischen Feststellungen von *Adams*, *Kohlschütter* und *Monk*[83]), die Spektren von Sternen verschiedener Eigenbewegung untersuchten. Sie fanden, daß von Sternen des gleichen Spektraltypus diejenigen mit kleiner Eigenbewegung von relativ geringerer Intensität im violetten Teil des kontinuierlichen Spektrums waren als solche mit großer Eigenbewegung; und zwar wachsen die Intensitätsdifferenzen beim Übergang von F- zu K-Sternen um das doppelte an. Bei gleicher Amplitude der Eigenbewegung kann also höchstens ein Teil des Effektes der Raumabsorption zugeschrieben werden, in höherem Maße müssen die Bedingungen in den Sternatmosphären dafür verantwortlich gemacht werden.

B. Lindblad[84]) bestimmte die effektiven und Minimalwellenlängen von Sternen mit spektroskopisch bestimmter absoluter Helligkeit. (Im Gegensatz zu den $\lambda_{\text{eff.}}$ (Nr. **12**) beziehen sich die $\lambda_{\text{min.}}$ nicht auf die Mitten, sondern auf die violetten Enden der durch die Objektivgitter erzeugten, kurzen Beugungsspektra.) Er fand innerhalb der Spektralgrenzen $G0$ bis $K8$, daß bei den Riesen das blaue Ende des Spektrums stärker geschwächt ist als bei den Zwergen, und zwar derart,

---

81) Astroph. Journ. 30 (1909), p. 284.

82) Diss. Groningen 1915.

83) Astroph. Journ. 39 (1913), p. 89; 40 (1914), p. 385; 44 (1916), p. 45.

84) Arkiv f. Math. Astr. Phys. 13 (1918), Nr. 26.

daß bei Sternen mit gleicher effektiver Wellenlänge die Minimalwellenlänge bei Zunahme der absoluten Helligkeit wächst. Diese größere Empfindlichkeit des durch die Minimalwellenlängen gegebenen Farbenäquivalentes gegen den Einfluß der Leuchtkraft ist ein theoretisch wichtiger Unterschied, da es sich bei den effektiven Wellenlängen im wesentlichen um ein Temperaturäquivalent handelt, die Minimalwellenlängen dagegen in gewisser Hinsicht für die Absorption in der Sternatmosphäre charakteristisch sind.

F. Seares[85]) dehnte mit Hilfe der Methode der exposure-ratios die Untersuchungen auf alle Spektralklassen aus. Er fand bei zunehmender absoluter Helligkeit für die *B*-, *G*- und *K*-Sterne Zunahme der Farbe, für die *A*-Sterne das umgekehrte und für die *F*-Sterne erst Zunahme, dann Abnahme der Farbe. In einer späteren Arbeit[86]) zog *Seares* jedoch die für die frühen Spektraltypen angegebenen Werte zurück; erst von *F* 5 ab macht sich in steigendem Maße der Einfluß verschiedener Leuchtkraft geltend. Ein Ergebnis, das *E. Öpik*[87]) unter Anwendung der *Tikhoff*schen Farbenmethode bestätigen konnte, wobei zugleich die Möglichkeiten untersucht wurden, nur mit Hilfe der Farbenunterschiede zur Kenntnis der absoluten Helligkeiten zu gelangen.

War mit diesen Arbeiten der Effekt für die späten Spektraltypen wenigstens der Größenordnung nach sichergestellt, so blieb die Frage nach dem Verhalten der früheren noch längere Zeit offen. Auch *Bottlingers* Katalog von lichtelektrischen Farbenindizes[69]) bestätigte nur, wie auch die Diskussion von *G. Shayn* und *J. Hase* zeigte[88]), daß bei den späten Typen abnorme Färbung auf Sterne großer Leuchtkraft, Übergiganten und solche von der Ordnung der δ Cephei-Sterne schließen läßt.

Erst *H. Petersson*[89]) gelang es, auch bei den *A*-Sternen einen merklichen Einfluß der absoluten Helligkeit und zwar in dem von *Seares* geforderten Sinne nachzuweisen. Während sich die mittlere effektive Wellenlänge bei dem von ihm benutzten Instrument von *A* bis *F* nur wenig ändert, nimmt sie z. B. innerhalb der Klasse *A* 0 um 2 $\mu\mu$ pro Größenklasse zu.

Eine weitere Frage, ob die Annahme einer linearen Abhängigkeit der Farbe von der Leuchtkraft den Beobachtungen genügt, konnte aus den bis dahin vorliegenden Arbeiten, die immer nur auf einem ge-

---

85) Mt. Wilson Comm. 59 (1919).

86) Astroph. Journ. 55 (1921), p. 198.

87) Publ. der Sternw. Dorpat XXVI, 3 (1925).

88) Astr. Nachr. 225 (1925), p. 307.

89) Upsala Meddelanden 29 (1927), p. 20.

ringen Material beruhten, nicht mit Sicherheit beantwortet werden. *J. Balanowsky*[90]) fand zwar aus Messungen effektiver Wellenlängen einen merklich verschiedenen Einfluß der Leuchtkraft für Riesen- und Zwergsterne, doch ist hier noch die Frage einer Helligkeitsgleichung ungeklärt. Später zogen *Balanowsky* und *Hase*[91]) zu dem gleichen Zweck das Material der Göttinger Aktinometrie heran und leiteten folgende Beziehung ab, die von $G\,5$ bis $K\,4$ und für absolute Helligkeiten von $+\,6^M$ bis $-\,2^M$ Gültigkeit hat:

$$\text{Farbenindex (Gött.—Potsd.)} = +\,1{,}08^m - 0{,}116^m M + 0{,}006^m M^2.$$

In einheitlicher Weise wurden in letzter Zeit von *B. Sticker*[92]) nochmals die Farben der Göttinger Aktinometrie mit dem inzwischen beträchtlich angewachsenen Material an trigonometrischen, spektroskopischen und Gruppenparallaxen für rund 1650 Sterne zusammengestellt. In der folgenden Tabelle ist — das Ergebnis dieser Arbeit — zu jeder absoluten Größenklasse die Differenz des zugehörigen mittleren Farbenindex gegen den Farbenindex eines Sternes von der absoluten Helligkeit $-\,1^M$ angegeben.

Beziehung zwischen Farbe und absoluter Helligkeit.

Abs. Größe	B	A	F	$G\,0—G\,4$	$G\,5—G\,9$	K
$-\,1^M$	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$	$0{,}00^m$
0	+ 0,05	+ 0,02	— 0,11	— 0,07	— 0,06	— 0,07
+ 1	+ 0,10	+ 0,05	— 0,21	— 0,13	— 0,13	— 0,14
+ 2		+ 0,07	— 0,28	— 0,18	— 0,20	— 0,22
+ 3		+ 0,09	— 0,29	— 0,22	— 0,26	— 0,31
+ 4			— 0,28	— 0,25	— 0,33	— 0,40
+ 5			— 0,26	— 0,24	— 0,40	— 0,50
+ 6				— 0,21	— 0,46	— 0,60

Danach lassen sich drei verschiedene Gruppen unterscheiden: bei den B- und A-Sternen Zunahme der Farbe mit abnehmender absoluter Helligkeit (die Riesen sind blauer), von F bis $G\,4$ erst Abnahme, dann von der absoluten Helligkeit $+\,3^M$ ab langsame Zunahme und drittens von $G\,5$ ab ebenfalls starke Abnahme der Farbe, die aber bis zu den schwächsten Sternen anhält (die Riesen sind roter). Nur bei dieser letzten Gruppe besteht — im Widerspruch zu den Ergebnissen von *Balanowsky* und *Hase* — eine lineare Abhängigkeit zwischen Farbe und Leuchtkraft.

90) Astr. Nachr. 226 (1925), p. 393.

91) Bull. Inst. Astr. Leningrad 18 (1928).

92) Veröffentl. der Sternw. Bonn 23 (1930).

Über die Entstehung des Leuchtkrafteffektes ist nur wenig bekannt. Man dachte zunächst an einen reinen Temperatureffekt, der so zustande kommt: Sterne geringerer Dichte und geringeren Druckes in den Atmosphären (Riesensterne) erreichen einen bestimmten Ionisationsgrad bei niedrigerer Temperatur als Sterne großer Dichte (Zwergsterne). Riesen und Zwerge desselben Spektraltypus, der ja durch den Ionisationsgrad festgelegt wird, unterscheiden sich daher in ihren effektiven Temperaturen und damit in ihrer Farbe. Es besteht nach *Sticker*[93a]) folgende Beziehung zwischen der Änderung der reziproken Temperatur $\frac{1}{T}$ und des Elektronendruckes P_e

$$d\frac{1}{T} = -d\log P_e \cdot \frac{1}{1{,}08\,T + 5043\,V}.$$

Dies besagt, daß sich die reziproke Temperatur nahezu linear mit $\log P_e$ oder mit der prozentualen Druckänderung $\frac{dP}{P}$ ändert; ferner, daß je größer das Ionisierungspotential V ist (also bei den frühen Spektralklassen A—F), um so langsamer $\frac{1}{T}$ bei gegebener Druckabnahme zunimmt, wie es die Erfahrung auch gezeigt hat. Trotz der enormen Dichteunterschiede in den Atmosphären der Riesen- und Zwergsterne (1 : 10000 bei $K0$), haben aber die mit obiger Formel ermittelten Drucke nur das Verhältnis 1 : 60.

Lindblad[93]) machte wahrscheinlich, daß wenigstens ein Teil des Temperatureffektes auch durch selektive Zerstreuung und Absorption in der Sternatmosphäre hervorgerufen wird. Läßt sich durch diese Vorgänge die Depression der Energiekurve der Sonne erklären, so muß die Wirkung in den ausgedehnten Atmosphären der Riesensterne noch weit größer sein. Nimmt man an, daß die Zerstreuung nur mit der 4. (wahrscheinlich noch einer höheren) Potenz der reziproken Wellenlänge wächst, so hat man einen sehr selektiv wirkenden Effekt vor sich und die Deformation der Energiekurve wird eine wesentlich andere sein als die nur durch einen Wechsel der Temperatur hervorgebrachte.

Weiter muß mit der Zunahme der Absorptionslinien und Banden gerechnet werden, die ebenfalls eine Depression der Energiekurve hervorrufen und damit einen Temperatureffekt vortäuschen. Eine Trennung dieser Effekte wäre nur möglich auf Grund spektralphotometrischer Messungen oder mittels Farbenindizes, die sich auf absorptions-

---

93a) Ztschr. f. Phys. 61 (1930), Heft 7/8.

93) Continuous spectra of the sun and the fixed stars, Upsala Universitets arsskrift 1920.

freie Gebiete (λ etwa größer als 450 $\mu\mu$) beziehen. Für das umgekehrte Verhalten der *B*- und *A*-Sterne ist noch keine Erklärung gegeben.

18. Farbe und Sternort (interstellare Absorption). Bei Untersuchungen über die interstellare *selektive* Absorption, mit der allein wir uns hier zu befassen haben, ging man früher vielfach von der Annahme aus, daß dieselbe durch ein den ganzen Raum gleichmäßig erfüllendes Medium hervorgebracht würde.[94]) Der schon in Nr. **17** bemängelte *Kapteyn*sche Ansatz wurde daher auf ein möglichst großes Material von Sternen bekannter Farbe und Entfernung in einer ganz willkürlichen Himmelsgegend angewandt. Die Werte, die man auf diese Weise für den Koeffizienten d erhielt, schwankten zwischen 10^{-3} und 10^{-4} Größenklassen pro Entfernungseinheit (1 parsec). Keiner dieser Werte aber kann die Existenz selektiver Absorption verbürgen. Solche Untersuchungen sind auf Gebiete zu beschränken, die von vornherein aus anderen Gründen die Existenz absorbierender Massen vermuten lassen, oder für die der Nachweis einer allgemeinen Absorption (Schwächung aller Wellenlängen um gleiche Beträge) durch Sternzählungen und andere Methoden bereits erbracht ist. Denn daß von einer selektiven Absorption über den *ganzen* Himmel keine Rede sein kann, ist in hohem Grade wahrscheinlich gemacht durch die Untersuchungen von *Shapley, Lindblad* u. a. an Sternhaufen und Spiralnebeln, die, in zweifellos sehr großen Entfernungen, die gleiche Amplitude in den beobachteten Farben, also vor allem auch sehr blaue Sterne aufweisen (s. aber Nr. 27).

Einen Versuch zur Lokalisation bestimmter Absorptionsgebiete hat *O. Struve*[95]) unternommen, der für die *O*-, *B*- und *A*-Sterne des *Bottlinger*schen Kataloges[69]) mit großem positivem oder negativem Farbexzeß bestimmte Gegenden am Himmel findet, in denen sämtliche Sterne entweder zu rot oder zu blau sind. Die ersteren fallen zusammen mit Gebieten, in denen sich das häufige Auftreten von scharfen Kalziumlinien in den Sternspektren oder photographisch dunkle kosmische Wolken nachweisen lassen.

Schließlich muß noch auf die Abhängigkeit des mittleren Farbenindex von Sternen des gleichen Spektraltypus von der galaktischen Breite hingewiesen werden. *Balanowsky* und *Hase*[91]) wiesen zuerst einen derartigen Effekt in der Göttinger Aktinometrie nach, der genauer von *Sticker*[92]) untersucht wurde. Die Zunahme des mittleren Farbenindex ist im allgemeinen für die späten Spektraltypen größer

---

94) Vgl. auch den Abschnitt von *Kobold,* Encykl. VI 2, 23.

95) Astr. Nachr. 227 (1926), p. 377.

und erreicht bei den K-Sternen 0,2 Größenklassen derart, daß die Sterne in der Milchstraße scheinbar roter sind. Das umgekehrte Verhalten läßt sich aus dem Kap-Katalog[44]) nachweisen, in welchem die Sterne um rund 0,4 Größenklassen in der Milchstraße blauer sind als außerhalb. Ob in beiden Fällen nicht auch systematische Beobachtungsfehler eine Rolle spielen, sei dahingestellt.

19. Die Verteilungsfunktion der Farben. Bei der Bearbeitung des in der mehrfach erwähnten Kap-Publikation[44]) veröffentlichten Materials von Farbenindizes untersuchte *J. K. E. Halm* die Möglichkeit, die beobachteten Häufigkeitsfunktionen der Farben für die einzelnen Spektraltypen durch eine Summe von *Gauß*schen Fehlerkurven darzustellen. Er stieß dabei auf die bemerkenswerte Tatsache, daß eine derartige Analyse ohne Schwierigkeit durchzuführen ist, wenn man annimmt, daß sich die Farben aller Sterne nach dem Fehlergesetz um mehrere ausgezeichnete Werte gruppieren. Die Willkür, die darin besteht, daß man eine vorgegebene Funktion immer durch eine Reihe von Exponentialfunktionen approximieren kann, ist dadurch weitgehend eingeschränkt, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. der Modul der Verteilungsfunktionen ist für sämtliche Kurven der gleiche, 2. die Maxima liegen in gleichen Abständen voneinander, d. h. die sieben bevorzugten Farbenindizes (preferential colorindices) genügen folgender Beziehung

$$\text{Farbenindex} = a + b \cdot n \qquad (n = 0, 1, \ldots, 6).$$

Damit sind also nur wenige Konstanten willkürlich zu bestimmen, nämlich die Größen a und b, der Modul h und die jeweilige prozentuale Verteilung der Sterne auf die einzelnen Gruppen. Auf diese Weise gelang es *Halm*, sämtliche sowohl mit der galaktischen Breite wie mit der scheinbaren Helligkeit variierenden Verteilungskurven für die einzelnen Spektralklassen befriedigend darzustellen. *Halm* prüfte die Erscheinung an weiteren Farbenverzeichnissen nach und zwar an Farbenindizes aus den Harvard Selected Regions[96]), an den *Wilsing*schen Temperaturbestimmungen von 199 Sternen[2]) und an den im *Hertzsprung*schen Katalog[6]) zusammengestellten $\frac{c}{T}$-Werten. Jede dieser Reihen enthüllte die gleiche Verteilung um dieselben ausgezeichneten Werte der Farbäquivalente, für die folgende Beziehung abgeleitet werden konnte:

$$\frac{c}{T} = 0{,}788\, n \qquad (n = 0, 1, \ldots, 6)$$

oder $$T_n = \frac{18\,150^0}{n} \text{ in der \textit{Wilsing}schen Temperaturskala.}$$

96) Harvard Annals (71) 4.

Halms Untersuchungen wurden in strengerer Form von *B. Sticker*[92]) fortgesetzt. Er versuchte die ausgezeichneten Temperaturwerte in der am sichersten begründeten Temperaturskala von *Brill* festzulegen und ferner die Frage zu entscheiden, ob die gleiche Diskontinuität auch für die scheinbar schwächeren Sterne gilt, sich also nicht nur auf die Riesensterne in der näheren Umgebung der Sonne beschränkt. Beide Fragen wurden unter Zuhilfenahme einer von *G. Doetsch*[97]) entwickelten Methode gelöst, die die exakte Zerlegung einer empirisch bestimmten Häufigkeitskurve in eine Reihe von *Gauß*schen Fehlerkurven selbständig vornimmt. Damit ist die Willkür, die der *Halm*schen Untersuchung noch anhaftete, weitgehend vermieden. Mit Hilfe der *Doetsch*schen Methode wurden die folgenden Farben- und Temperaturverzeichnisse analysiert: 1. *Brill*, Temperaturen von 134 Sternen[74]), 2. Farbenindizes Gött.—Potsdam nach der Göttinger Aktinometrie[38]), 3. auf der Yerkes-Sternwarte photographisch bestimmte Farbenindizes für 1550 Sterne aus Zone $+45^0$ der Selected Areas.[98]) Die folgende Tabelle enthält die bevorzugten charakteristischen Farbenindizes dieser drei Kataloge neben den von *Halm* abgeleiteten. Sämtliche Reihen sind einheitlich reduziert auf die Farbenindexskala von *King*, dessen Beziehung zu dem Temperatursystem von *Brill* sicher bekannt ist. Die 6. Spalte enthält den Mittelwert aller vier Reihen in der Farbenindexskala und die 7. in $\frac{c}{T}$, die 8. die entsprechenden Temperaturen in Graden. Die mittlere scheinbare Helligkeit, auf die sich die einzelnen Kataloge erstrecken, ist in der zweiten Zeile zu finden.

Die bevorzugten Farb- und Temperaturwerte.

	Brill $0-5^m$	Göttingen $6-8^m$	Kap $8-10^m$	Yerkes $10-14^m$	Mittel	$\frac{c}{T}$	$T_{\text{eff.}}$
I	$-0{,}30^m$	—	$-0{,}43^m$	—	$-0{,}36^m$	0,55	26100°
II	$+0{,}01$	$+0{,}03^m$	0,00	$0{,}00^m$	$+0{,}01$	1,27	11300
III	$+0{,}50$	$+0{,}41$	$+0{,}48$	$+0{,}49$	$+0{,}47$	2,05	7000
IV	$+1{,}01$	$+1{,}07$	$+0{,}99$	$+1{,}00$	$+1{,}02$	2,97	4830
V	$+1{,}60$	$+1{,}56$	$+1{,}53$	$+1{,}50$	$+1{,}55$	3,88	3700
VI	—	—	$+1{,}96$	$+2{,}11$	$+2{,}03$	4,68	3060

Die Übereinstimmung ist in Anbetracht der nur näherungsweise aufeinander zu reduzierenden verschiedenen Skalen gut und über einen Bereich von 14 Größenklassen als gesichert zu bezeichnen. Die Sonne

97) Ztschr. f. Phys. 49 (1928), p. 705.
98) Publ. Yerkes Obs. 4 (1927), Nr. 6.

mit einer effektiven Temperatur von 6650° $\left(\frac{c}{T} = 2{,}16\right)$ würde, um ein konkretes Beispiel zu geben, sich leidlich in die dritte Gruppe einfügen.

Halm deutet diese quantenähnliche Diskontinuität so, als ob die Sterne aus physikalischen Gründen nur diese bestimmten Temperaturwerte und keine anderen annehmen können. *Sticker* hat folgende Erklärung vorgeschlagen. In der Gruppierung um sechs bevorzugte Temperaturwerte ist der *gegenwärtige* Zustand verschiedener Gruppen *gleichalter* Sterne in unserem Milchstraßensystem gekennzeichnet. Sternsysteme, die aus Sternen anderer Altersstufen zusammengesetzt sind, brauchen deswegen nicht notwendig die gleichen Temperaturen zu bevorzugen. Neuere Untersuchungen an kugelförmigen Sternhaufen (offene Haufen eignen sich wegen der meist ungeklärten Rolle der selektiven Absorption und der Unmöglichkeit, die Mitglieder des Haufens sicher von den Hintergrundsternen zu trennen, schlechter) deuten darauf hin, daß auch diese aus wenigen Gruppen gleichfarbiger Sterne aufgebaut sind, deren Temperaturen sich aber ihrerseits von den im engeren Sternsystem gefundenen wesentlich unterscheiden. (Weiteres über die Farbenverteilung in Sternhaufen s. Nr. **26, 27.**)

20. Bolometrische und instrumentelle Größenklassen. Bezeichnet man in der Annahme, die Sterne strahlten entsprechend dem *Planck*schen Gesetz, die Strahlung eines Sternes der Temperatur T bei der Wellenlänge λ mit $E(T,\lambda)$, mit $\varphi(\lambda)$ die Empfindlichkeitsfunktion des jeweiligen Strahlungsempfängers (Auge, Platte, Zelle, Thermoelement, mit oder ohne Farbfilter), mit C einen passend zu wählenden Faktor, so ist das Verhältnis der Gesamtenergie E_b zu der zur Messung gelangenden instrumentellen E_i gleich

$$C \cdot \int_0^\infty E(T,\lambda)\,d\lambda : \int_0^\infty E(T,\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Durch Logarithmieren und Multiplikation mit $-0{,}4$ vollzieht man den Übergang auf die astronomische Größenskala, wobei an Stelle von C die additive Konstante c tritt, und wir statt E_b und E_i die bolometrischen und instrumentellen Größen m_b und m_i bekommen. c wird dadurch bestimmt, daß man für einen passenden Wert von T $m_b = m_i$ setzt. Für andere T ergeben sich dann die Reduktionen der instrumentellen auf die bolometrischen Größen.

Bottlinger[69]) hat eine von *Eddington*[99]) zuerst gegebene Tabelle

99) Ztschr. f. Phys. 7 (1921), p. 251.

zur Reduktion visueller Größen auf bolometrische erweitert. Zugrunde liegt ihr die bekannte Empfindlichkeitskurve des Auges und die Festsetzung, daß für $T = 6000^0$ ($G\,0$-Typus) $m_b = m_i$ ist. *Hopmann*[100]) hat $T = 10\,000^0$ als Grundtemperatur vorgeschlagen, da sie nahezu die der $A\,0$-Sterne ist und ja für diese der normale F.I. $= 0$ gesetzt ist. Auch *Pettit* und *Nicolson*[73]) haben den Wärmeindex folgerichtig für $A\,0$-Sterne zu 0 angenommen. *Bottlinger*s und *Hopmann*s Tabellen unterscheiden sich fast nur um eine kleine additive Konstante. Die Unempfindlichkeit des Auges für Strahlung jenseits 0,4 bzw. 0,7 μ bewirkt, daß die Reduktion bei den heißesten, besonders aber bei den kältesten Sternen mehrere Größenklassen beträgt, naturgemäß ganz in Übereinstimmung mit dem Wärmeindex. (Siehe Nr. **14**, besonders aber auch Nr. **24**.)

21. Farbe und Sterndurchmesser. Sind π_1 und π_2 die Parallaxen zweier Sterne, d_1 und d_2 ihre linearen Durchmesser, T_1 und T_2 ihre effektiven Temperaturen, H_1 und H_2 die scheinbaren bolometrischen Helligkeiten, so ist mit dem *Stephan-Boltzmann*schen Gesetz

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{d_1^2 \cdot \pi_1^2}{d_2^2 \cdot \pi_2^2} \cdot \left(\frac{\frac{c}{T_2}}{\frac{c}{T_1}}\right)^4.$$

Geht man von den Helligkeiten zu Größenklassen über, wählt ferner als zweiten Stern die Sonne, so wird

$$\log d_* = -\,0{,}2\, m_{b*} - \log \pi_* + \log \frac{c}{T_*} + \left[0{,}2\, m_{b\odot} - \log \frac{c}{T_\odot} + k\right],$$

wo k den Sonnendurchmesser und den Übergang von der Distanz Erde—Sonne auf die kosmische Einheit (parsec) enthält. Entsprechend der letzten Nr. lassen sich die visuellen Größen von Stern und Sonne in bolometrische umsetzen. Wir können also bei bekannter visueller Helligkeit eines Sterns sowie $\frac{c}{T_*}$ und π_* seinen linearen Durchmesser in Einheiten des der Sonne berechnen. Ist π_* unbekannt, so erhält man den $d \cdot \pi_*$, d. h. den Durchmesser nun in Bogensekunden.

Ein im Prinzip gleichartiges Verfahren, allerdings mit Anwendung der *Planck*schen Gleichung und in Anpassung an die Rotkeilkalorimetrie hat *Wilsing*[8]) entwickelt. Es wurde von *Schnauder*[28]) schärfer gefaßt, der auch eine für die Praxis nötige Hilfstafel gab, die von *Hopmann*[100]) für tiefste Temperaturen erweitert wurde.

---

100) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 233.

Andererseits ist es neuerdings möglich geworden, mit Hilfe des Interferometers die Winkeldurchmesser einiger heller roter Riesensterne direkt zu messen. *Brill*[74]) kommt zu nebenstehendem Vergleich der strahlungstheoretischen und interferometrischen Ergebnisse. Die gute Übereinstimmung kann als Beweis für die Richtigkeit der Anwendung der Strahlungsgesetze angesehen werden, trotzdem die Spektren dieser Sterne starke Bandenbildung aufweisen.

Stern	Sp.	Radius	
		kolorim.	interferom.
Arktur . . .	$K0$	0,0095″	0,0108′
Aldebaran. .	$K8$	0,0105	0,0144
Beteigeuze .	$M1$	0,0225	0,0183
Antares . . .	$M2$	0,0200	0,0173

Verzeichnisse strahlungstheoretischer Sterndurchmesser haben *Wilsing*[8]), *Bottlinger*[69]), *Brill*[74]) und *Hertzsprung*[6]) gegeben.

Unter Berücksichtigung der selektiven Absorption in der Apparatur und besonders der im Ultraroten merklichen in der Erdatmosphäre können *Pettit* und *Nicholson*[73]) aus dem Wärmeindex bzw. Wasserzellenindex gleichfalls Sterndurchmesser ermitteln. Hier sind im Gegensatz zu oben die interferometrischen Daten um ca. $50\,^0/_0$ kleiner als die thermoelektrischen. Die Verfasser führen dies auf Abweichungen der Strahlung vom *Planck*schen Gesetz im Gebiet der ultraroten Wellenlängen zurück, nach Ansicht des Referenten dürfte aber auch eine im visuellen Gebiet stärker als im ultraroten wirkende Randverdunklung die interferometrischen Werte und damit selbstverständlich auch die kolorimetrischen obiger Tabelle, die ja beide auf Beobachtungen im visuellen Gebiete beruhen, beeinflußt haben.

IV. Ergebnisse bei veränderlichen Sternen.

22. Bedeckungsveränderliche. Kolorimetrische Beobachtungen dieser Gruppe — etwa durch Verbindung guter visueller und photographischer Lichtkurven — liegen bis heute nur vereinzelt vor, so sehr hier gewiß interessante Ergebnisse zu erwarten wären. So hat z. B. *Shapley*[101]) bei Y Pis und RR Dra gefunden, daß die photographischen Minima etwa $^1/_2{}^m$ tiefer sind als die visuellen. Ähnliches ermittelte *Russell*[101a]) bei sechs anderen Sternen. Die Erklärung liegt wohl darin, daß die Bedeckung durch die größere der beiden Komponenten erfolgt, deren Flächenhelligkeit bedeutend geringer ist als die des kleineren aber helleren zweiten Sterns. Erstere hat also auch geringere Oberflächentemperatur, späteren Spektraltypus. Anders ver-

101) Astroph. Journ. 37 (1913), p. 154.

101 a) Astroph. Journ. 45 (1917), p. 306.

hält sich Algol, dessen thermoelektrische Minima nach den vorläufigen Mitteilungen von *Pettit* und *Nicholson*[78]) ebenso tief sind wie die lichtelektrischen. Gerade bei diesem, schon so oft untersuchten System zeigt sich die Notwendigkeit präziser, gleichzeitiger, photometrischer wie kolorimetrischer Messungen. Erhält doch z. B. *Stebbins*[102]) durch lichtelektrische Beobachtungen (Blauviolett) für die hellere Komponente einen etwas kleineren Radius, als für die schwächere, während die ebenfalls recht guten visuellen Messungen von *Danjon*[103]) dahin führen, daß der helle Stern etwa 30% größer ist als der absolut dunkle Begleiter. (Bei *Stebbins* beträgt die Helligkeit des Begleiters 8% der des hellen Sternes.)

Es sei allerdings auch noch dahingestellt, wie weit diese Unterschiede auf Mängel der theoretisch-rechnerischen Bearbeitung beruhen, indem z. B. der durch *Fetlaar*[104]) verfeinerten Theorie der Algolveränderlichen in den beiden angeführten Arbeiten nicht genügend Rechnung getragen wurde.

Ein weiteres Beispiel hierzu ist β Lyrae, bzw. die Schwankungen der effektiven Temperatur des Sterns auf Grund visueller Filterbeobachtungen *Terkans*.[32a]) Leider sind die Beobachtungen zu gering an Zahl, so daß die aus ihnen gezogenen Schlüsse noch der Bestätigung bedürfen. Dem Spektraltypus ($B\,8\,p + B\,2\,p$) entsprechend haben demnach beide Komponenten ziemlich hohe Oberflächentemperaturen, auch ist richtig die des Hauptsterns niedriger als die des Begleiters, der im Hauptminimum vor dem helleren Sterne steht. Schließlich scheinen die Temperaturmaxima früher zu liegen als die der Helligkeiten. Ähnliches ergab sich aus den Beobachtungen *Nordmanns* (Nr. 7) sowie aus den F.I., die *Schwarzschild*[34]) aus dem Vergleich der photographischen und visuellen Lichtkurven ableitete.[104a])

Genauere photometrisch-kolorimetrische Beobachtungen als bisher dürften auch zur Klärung des *Nordmann-Tikhoff*schen Phänomens führen, nämlich daß sich bei mindestens 16 Algol-Veränderlichen der Zeitpunkt des Minimums im gelben Licht um durchschnittlich 15 Minuten früher ergeben hat als im blauen Lichte. Die ersten Mitteilungen von beiden Autoren[105]) verursachten eine umfangreiche Literatur in den Jahren 1908 bis 1910.[106]) Die Existenz der Erscheinung wurde

---

102) Astroph. Journ. 53 (1921), p. 105.

103) Ann. Obs. Strassbourg 2 (1928).

104) Rech Astr. Utrecht Nr. IX, 1 (1923).

104a) Weiteres über β Lyrae s. Ann. Solar Phys. Obs. Cambridge II, 1, 1930.

105) Bull. Astr. 26 (1909), p. 5; Pulkowa Obs. Mitteil. 2 (1908), p. 141.

106) S. die entsprechenden Bände des Astr. Jahresberichtes (Berlin, G. Reimer).

durch spätere Messungen von *Maggini*[107]) und *Okunew*[108]) sicher gestellt. Die damaligen Hypothesen dürften angesichts der heute völlig geänderten physikalischen und astrophysikalischen Anschauungen gewiß einer starken Überprüfung, die zur Zeit noch aussteht. (Vgl. auch diesen Band, p. 323 sowie [101a]).)

23. Die δ-Cephei-Sterne. Diese astrophysikalisch besonders wichtigen Objekte seien hier nur auf ihre kolorimetrischen Eigenschaften besprochen, zumal die Beobachtungsergebnisse auch methodologisch von Interesse sind. Man vergleiche im übrigen hierzu die Referate von *Hnatek* und *Guthnick* sowie die umfassende Darstellung von *H. Ludendorff.*[109])

Kennzeichnend für die δ-Cephei-Sterne ist neben der Form der Lichtkurve und hohen Konstanz der Lichtwechselperiode die starke Änderung der $\frac{c}{T}$-Werte bzw. der effektiven Temperaturen, F.I. oder anderer Farbäquivalente, die sich in der gleichen Periode wie der Lichtwechsel selbst vollzieht. Hierauf machte der Begründer der photographischen Photometrie, *K. Schwarzschild*[84]), 1900 zuerst aufmerksam durch den Nachweis, daß die photographische Helligkeitsamplitude von η Aquilae etwa doppelt so groß ist, wie die visuelle. Ihm folgten *Wirtz*, *Wilkens* u. a. mit gleichartigen Untersuchungen anderer δ-Cephei-Sterne. Der Nachteil ihres Vorgehens, nämlich eine photographische Lichtkurve mit einer anderweitig beobachteten visuellen zu vergleichen, liegt darin, daß die kolorimetrischen Daten dabei sich auf Beobachtungen beziehen, die zu verschiedenen Zeiten in nicht immer scharf definierten photometrischen Systemen angestellt wurden (s. u.). Erst bei wenigen Sternen dieser Klasse wurden die Kurven der Helligkeiten und Farbäquivalente gleichzeitig festgelegt.

Dies betont z. B. *Okunew*[109a]), der zwar die Farbenkurven für 36 δ-Cephei-Sterne ableitet, die Schwankungen des F.I. aber in keiner bestimmten Skala angeben kann, da eben die gegebenen Beobachtungsdaten solches nicht gestatten.

Für die neun hellsten Veränderlichen dieser Art, für die naturgemäß das meiste Beobachtungsmaterial vorliegt, ist das wichtigste hier interessierende in der nachfolgenden Übersicht zusammengestellt. Zu ihr ist zu bemerken. Auf den Namen des Veränderlichen folgt die Periodenlänge in Tagen, die Grenzen der Änderung des Spektraltypus

107) Paris C. R. 167 (1918).
108) Astr. Nachr. 234 (1929), p. 361.
109) Handbuch d. Astrophysik 6 (1928).
109a) Astr. Nachr. 236 (1929), p. 313.

Stern	Per.	Sp.		$\left(\frac{c}{T}\right)_{\text{Sp, Brill}}$		$\Delta\frac{c}{T}$	$\left(\frac{c}{T}\right)_{\text{Sp, Hertz.}}$		$\Delta\frac{c}{T}$	$\left(\frac{c}{T}\right)_{\text{kolor.}}$		$\Delta\frac{c}{T}$	Autor
SU Cass.	1,9	$A\,8$	$F\,5$	1,73	2,08	0,35	2,08	2,40	0,32	2,10	2,64	0,54	*Hopmann*
										1,71	2,02	0,31	*Tiercy*
RT Aur.	3,7	$A\,7$	$G\,1$	1,68	2,46	0,78	2,01	2,92	0,91	2,30	3,25	0,95	*Hopmann*
T Vulp.	4,4	$A\,9$	$G\,1$	1,77	2,46	0,69	2,14	2,92	0,78	2,89	4,23	1,34	*Hopmann*
										1,65	2,32	0,57	*Tiercy*
δ Ceph.	5,4	$F\,0$	$G\,2$	1,82	2,53	0,71	2,20	2,98	0,78	2,02	2,82	0,80	*Hopmann*
										2,69	3,39	0,70	*Reesinck*
Y Sagitt.	5,8	$F\,4$	$G\,4$	2,03	2,66	0,63	2,36	3,09	0,73	2,08	2,78	0,70	*ten Bruggencate*
η Aquil.	7,2	$A\,8$	$G\,5$	1,73	2,74	1,01	2,08	3,14	1,04	2,58	3,41	0,82	*Hopmann*
										2,73	3,52	0,79	*Wylie*
										2,18	3,12	0,94	*Schwarzschild*
										3,70	4,36	0,66	*Kohlschütter*
S Sagitt.	8,4	$F\,4$	$G\,3$	2,03	2,60	0,57	2,36	3,02	0,67	1,97	2,52	0,55	*Tiercy*
												0,81	*Gyllenberg*
ζ Gem.	10,2	$F\,8$	$G\,5$	2,25	2,74	0,49	2,68	3,14	0,46	3,14	4,01	0,87	*Hopmann*
										1,99	2,87	0,88	*C. S. Yü*
Y Oph.	17,1	$F\,5$	$G\,3$	2,08	2,60	0,52	2,40	3,03	0,63	2,3	3,1	0,8	*ten Bruggencate*

nach *Shapley*, die daraus folgenden Werte von $\frac{c}{T}$ und deren Amplitude in der *Brill*schen und *Hertzsprung*schen Temperaturskala (s. Nr. **1**), die Änderungen der $\frac{c}{T}$ auf Grund kolorimetrischer Beobachtungen. Gemäß den Ausführungen in Nr. **1** sind diese und nicht die Temperaturen selbst mitgeteilt, zumal sich so ein klareres Bild ergibt. *Hopmann*[110]) beobachtete nach dem *Wilsing*schen Rotkeilverfahren (Nr. **5**), *Tiercys*[111]) Methode war mehr spektralphotometrischer als kolorimetrischer Natur, desgleichen die von *Gyllenberg*[112]) und *C. S. Yü.*[113]) *Reesinck*[114]) leitete visuelle, *ten Bruggencate*[115]) photographische F.I. ab, während die Betrachtungen von *Wylie, Schwarzschild* und *Kohlschütter* bei η Aquilae durch *Hopmann*[110]) auf die $\frac{c}{T}$-Skala umgerechnet wurden.

Offensichtlich stimmen die Amplituden des $\frac{c}{T}$-Wechsels (bis auf

110) Astr. Nachr. 221, 222, 226, 227 (1924—26).

111) Publ. R. Osserv. Astrofisico di Arcetri Nr. 44, 1927; Publ. Obs. de Geneve, Serie d'Astronomie 1—8 (1928—29).

112) Meddelanden Lund Astr. Obs. Serie II (1921), Nr. 24.

113) Publ. Astr. Soc. Pacific 1926, Dez.

114) Diss. Amsterdam 1926.

115) Ann. v. d. Bosscha Sterrewacht Lembang, Java, 2 (1927—28), Heft 2 u. 3.

T Vulpeculae, wo die spektralen zwischen den kolorimetrischen Daten liegen) untereinander recht gut, besonders auch im Hinblick auf die schwankenden Angaben der einzelnen Beobachter für die Lichtwechselamplituden dieser Sterne (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27). Dagegen differieren die Absolutwerte der $\frac{c}{T}$ stark, was entweder, z. B. bei ζ Geminorum, am Anschluß an verschiedene Temperaturskalen liegt oder an der Unsicherheit der F.I. infolge des mangelhaften Anschlusses an wohl definierte visuelle und photographische Größensysteme. Hierfür ist η Aquilae ein typisches Beispiel, wie *Hopmann*[110]) des näheren ausführte. Solange die Homogenisierung der $\frac{c}{T}$-Kataloge noch nicht durchgeführt ist (s. Nr. **16**), lassen sich daher auch die vorstehenden Werte noch nicht vereinheitlichen und können Schlüsse aus der Tabelle und den zugehörigen Arbeiten nur mit Vorsicht gezogen werden.

Als qualitativ sicher ist folgendes zu betrachten. Die Temperaturkurven der abgeführten Sterne gleichen nur in groben Zügen den entsprechenden Lichtkurven (Zusammenfallen der Maxima bzw. Minima). Sicher bei SU Cas., aber auch bei anderen liegt das Temperaturmaximum zeitlich vor dem Intensitätsmaximum. Ferner ist sicher bei δ Cephei, doch wohl auch sonst die Temperatur bei einer bestimmten Intensität im aufsteigenden Teil der Lichtkurve höher als im absteigenden.

Aus den Licht- und Temperaturkurven lassen sich Kurven der bolorimetrischen Intensitätsschwankungen (Nr. **20**) und effektiven Sterndurchmesser (Nr. **21**) ableiten. Erstere haben naturgemäß wesentlich kleinere Amplituden als die visuellen (s. z. B. *Hopmann*[116])), was nach den vorläufigen Mitteilungen von *Nicholson* und *Pettit*[73]) durch die thermoelektrischen Messungen bestätigt wird. Die effektiven Durchmesser zeigen recht beträchtliche Schwankungen (r_{Min} zu r_{Max} wie 1 zu 1,1 bis 1,9, im Mittel etwa 1 zu 1,3), gleichfalls thermoelektrisch bestätigt. Dies ist viel mehr als nach der *Eddington*schen Pulsationstheorie[117]) zu erwarten ist. Desgleichen sind die beobachteten Temperaturschwankungen viel größer als die von *Eddington* der Theorie zugrunde gelegten. Auf diese Unstimmigkeit haben *Hopmann*[116]), *Reesinck*[114]), *ten Bruggencate*[115]) u. a. hingewiesen. Letzterer stellt die Hypothese auf, die δ-Cephei-Sterne hätten keine sphärische Gestalt. Eine genauere theoretische Durcharbeitung der Frage steht noch aus. Erste

116) Astr. Nachr. 222 (1924), p. 233.

117) S. Referat *Guthnick,* Encykl. VI 2, 27, und *A. S. Eddington,* Der innere Aufbau der Sterne, p. 221 ff. (Berlin 1928, Springer).

Ansätze dazu liefert die Diskussion zwischen *Reesinck*, *Eddington* und *Jeans*.[118]) Dieser vertritt in seiner zusammenfassenden Darstellung die Unhaltbarkeit der Pulsationstheorie in der *Eddington*schen Form und ersetzt sie durch die Hypothese, diese Veränderlichen seien im Entstehen begriffene Doppelsterne. Einzelheiten seiner Ausführungen erinnern an die Ideen von *ten Bruggencate*.

In einer weiteren Arbeit[118a]), die besonders *Y. Sag.* gewidmet ist, weist letzterer nochmals auf die Schwierigkeiten der Pulsationstheorie hin, angesichts der mit den Jahren sich ändernden Licht- und Farbkurven, bei konstanter Periode u. a.

24. Die Mira-Sterne. Auch bei diesen Veränderlichen lassen die kolorimetrischen Daten noch viele Wünsche offen. Zwar wissen wir schon seit *Schmidt*[119]), daß die Mira-Sterne im Maximum um so roter sind, je länger ihre mittlere Lichtwechselperiode ist, was durch *Chandler*, *Beliawsky*[120]) und *Thomas*[121]) an immer größerem Material bestätigt wurde. Doch eignet sich dieses, auf zahlreiche Beobachter verteilt, nicht zur Ableitung von $\frac{c}{T}$- bzw. T-Werten.

Ein Roterwerden der Mira-Sterne mit abnehmender Helligkeit ist auf Grund von Farbschätzungen gleichfalls gelegentlich beobachtet worden, ohne eine weitere Bearbeitung zu finden.

Kennzeichnend für die noch in der Entwicklung befindliche Kolorimetrie ist es dann, daß bis heute noch keine einwandfreien Farbenindexkurven von Mira-Sternen vorliegen, weder für die beiden meistuntersuchten Sterne, Mira selbst und χ Cygni, noch sind die für einige schwächere Sterne in Harvardveröffentlichungen abgeleiteten F.I.-Kurven brauchbar: denn immer wieder wurden hier die visuellen Schätzungen verschiedener Beobachter kombiniert mit anderweitigen photographischen Aufnahmen und „mittlere“ Licht- und Farbenkurven abgeleitet. Als relativ beste sei die Untersuchung von T Andromedae durch *Wilson* genannt.[122]) Die Ableitung der photographischen Helligkeiten ist ziemlich einwandfrei, sie erfolgte im Anschluß an die Harvardpolsequenz, die allerdings seitdem erheblich korrigiert worden ist. Schwer zu beurteilen ist noch gegenwärtig die systematische Genauigkeit der visuellen Helligkeiten der Vergleichssterne, zumal ihre Ableitung stark summarisch erfolgte. Vor allem ist aber bei diesen

118) S. z. B. *Jeans*, Astronomy and Cosmogony, p. 388 (Cambridge 1929).
118a) Harvard Circular 351 (1930).
119) Astr. Nachr. 80 (1873), p. 12.
120) Astr. Nachr. 177 (1908), p. 209.
121) Diss. Berlin 1926, nur Manuskript.
122) Harvard Annals 80 (1917), Heft 8.

roten Sternen die visuelle Helligkeitsauffassung stark subjektiv, auch wird der *Purkinje*-Effekt (s. Referat *Guthnick*, Encykl. VI 2, 27) hier in vollem Maße wirken: T Andromedae ist im Maximum für die benutzten Fernrohre recht hell, im Minimum aber an ihrer Sichtbarkeitsgrenze. So erklärt es sich wohl, daß der abgeleitete F.I. im Maximum einem *K*- bis *M*-Stern, im Minimum aber einem *F*-Stern entspricht, was im vollen Gegensatz zum Spektralbefund (s. Referat *Hnatek*, Encykl. VI 2, p. 747) und den kolorimetrischen und thermoelektrischen Beobachtungen steht (s. u.). Das hier Gesagte ist dann sinngemäß auf andere gleichartig behandelte Sterne zu übertragen.[123]) Die Differenzen der mittleren photographischen und visuellen Lichtkurven von T Columbae z. B. können unmöglich als F.I. im üblichen Sinne gewertet werden, da sie im Lichtmaximum $+ 0{,}45^{\mathrm{m}}$, im Minimum $- 0{,}71^{\mathrm{m}}$(!) betragen.

Aus den letzten Mitteilungen von *Campbell* und *Payne*[123]) über mehrere Veränderliche auf der Südhalbkugel kann man nur entnehmen, daß die Farbenkurven der einzelnen Miraveränderlichen völlig verschiedenartig aussehen.

Da keine Untersuchungen nach der Methode der Exposure ratios, effektiven Wellenlängen usw. vorliegen, bleiben nur die relativ wenigen Beobachtungen von *Nicholson* und *Pettit*[73]) und *Hopmann*[124]) zu besprechen, wobei noch die spektrographischen Studien an Mira von *A. H. Joy*[125]) sowie *Payne* und *Hogg*[126]) heranzuziehen sind. Die wichtigsten Erscheinungen enthält zunächst die nachstehende Übersicht:

Objekt	Beob.-Jahr	Beob.-Ort	Grenzen des hier beob. vis. Lichtwechsels	Grenzen der $\frac{c}{T}$	Grenzen bzw. T	Grenzen des beob. bolometr. Lichtwechsels
χ Cygni	1922/23	Mt. Wilson	$4{,}3-12^{\mathrm{m}}$	$6{,}4$[2])$-12{,}0$[2])	2200[2])-1200^{0}[2])	$1{,}3^{\mathrm{m}}$[1]); $1{,}4-1{,}8^{\mathrm{m}}$[2])
„	1923/24	Bonn	$4{,}8-7{,}6^{\mathrm{m}}$	$5{,}4-7{,}6$	$2600-1900^{0}$	$2{,}0-3{,}4^{\mathrm{m}}$
Mira	1921/22	Mt. Wilson	$4{,}5-8{,}9^{\mathrm{m}}$		$2300-1800^{0}$[3])	$0{,}1-1{,}2^{\mathrm{m}}$[4])
„	1924/25	Bonn	$3{,}7-7{,}2^{\mathrm{m}}$	$3{,}8-7{,}1$	$3700-2000^{0}$	$2{,}4-3{,}4^{\mathrm{m}}$
„	1925/26	Bonn	$4{,}1-6{,}4^{\mathrm{m}}$	$3{,}2-6{,}3$	$3500-2200^{0}$	$2{,}2-3{,}3^{\mathrm{m}}$
10 Mira-Sterne, Mittelwerte	—	Mt. Wilson	Amplit. $5{,}3^{\mathrm{m}}$		$2350-1830^{0}$[5]) $1990-1350^{0}$[6])	Amplitude $0{,}9^{\mathrm{m}}$

[1]) Nach *Pettit.* [2]) Indirekt von *Hopmann* ermittelt. [3]) Mittel über 4 Jahre. [4]) Annual Report 1922 Mt. Wilson Obs. [5]) Wasserzellenindex (s. Nr. **14**). [6]) Wärmeindex (s. Nr. **14**).

123) Z. B. Harvard Annals 84, Heft 1 u. 4; Harvard Bull. 837, 838, 842 (1926); 872 (1930).

124) Astr. Nachr. 222, 226, 227 (1925—26).

125) Astroph. Journ. 63 (1926), p. 281.

126) Harvard Circular 308 (1927).

Zu den Bonner Beobachtungen ist zu bemerken, daß sie mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Sechszöller nur die helleren Teile des Lichtwechsels umfassen. Die starken Temperaturschwankungen können demnach bei diesen Sternen als erwiesen gelten. Die damit verbundenen Änderungen der spektralen Energieverteilung sind der Hauptgrund für die großen visuellen und photographischen Helligkeitsamplituden, während die Gesamtstrahlung nur wenig und unregelmäßig variiert.

Daß die Rotkeilmessungen höhere Temperaturen ergaben als die thermoelektrischen, kann man (auch im Sinne der Ausführungen von *Nicholson* und *Pettit*) dahin deuten, daß bei diesen Sternen die Anwendung der *Planck*schen Strahlungsgleichung nicht statthaft ist. Vielleicht ist folgende Erklärung im Sinne der von *Hopmann*[127]) modifizierten *Merill*schen Schleiertheorie dieser Sterne denkbar. In allen Phasen des Lichtwechsels ist die effektive Temperatur des größten Teils der beobachtbaren Sternoberfläche relativ niedrig (unter 1500 Grad). Letztere wird unterbrochen, besonders im visuellen Maximum, von heißeren helleren Stellen. Auf diese reagiert im wesentlichen nur das Auge, im Gegensatz zur thermoelektrischen Zelle, die auch die visuell nicht mehr wirksamen Strahlen aufnimmt. Damit wird die beobachtbare Durchschnittstemperatur des Sterns sich visuell höher ergeben als thermoelektrisch; man könnte zugleich versucht sein, so die Unterschiede der bolometrischen Größen, wie sie sich aus beiden Beobachtungsarten ergeben, zu erklären.

Der Beitrag der Emissionslinien der *Balmer*serie usw. zur Gesamthelligkeit von Mira ist nach *Joy* und *Payne* verschwindend. Nach *Joy* sollen die TiO-Absorptionsbanden mit abnehmender Helligkeit des Sterns stark zunehmen. *Payne* und *Hogg* zeigten aber spektralphotometrisch, daß dieses wenigstens im Bereich von $3{,}5^m$ bis $6{,}5^m$ visuell nicht der Fall ist. Die Änderungen der TiO-Banden sind danach nur für einen Teil des Lichtwechsels verantwortlich zu machen.[127a])

Eine begründete Theorie des Lichtwechsels dieser Sterne existiert noch nicht. Entsprechende Zusammenfassungen der vorliegenden Beobachtungsdaten gaben *Joy*[125]) und *Hopmann*.[127]) Letztere Arbeit ist eine schärfere Beschreibung der beobachteten Vorgänge, doch ohne thermodynamische Begründung. Auch hier müssen erst weitere genaue, vor allem kolorimetrische Daten abgewartet werden, die den gesamten Lichtwechsel mehrerer Mira-Sterne einschließlich der Minima über längere Zeit verfolgen.

127) Astr. Nachr. 228 (1926), p. 105.

127a) Harvard Circular 308 (1927).

Die wechselnde Stärke der TiO-Banden berücksichtigen Überlegungen von *ten Bruggencate* und *Payne*[127b]), allerdings mangels geeigneter Beobachtungsdaten nur qualitativ, ohne Formel- und Zahlenangaben.

25. Sonstige Veränderliche. Ist schon bei den drei bisher besprochenen Klassen veränderlicher Sterne, die das meiste Interesse der Beobachter bisher erweckten, das kolorimetrische Tatsachenmaterial sehr gering, so erst recht bei den übrigen.

Die erste Entwicklungsphase der Novae und Nova-ähnlichen Sternen (s. Referat *Hnatek* und *Guthnick*) ließ ihres meist sehr raschen Verlaufs wegen kolorimetrische Beobachtungen noch nicht zu. In den späteren Stadien haben sie wegen des verwickelten Spektrums mit vorherrschenden Emissionsbanden keinen rechten physikalischen Sinn. So beeinflußte z. B. die Hα-Emission in den hellsten Lichtphasen der Novae Aquilae von 1918 die visuelle Strahlung so sehr, daß der Stern zeitweise eine eigenartige rötliche Farbe zeigte, anders als die sonstiger roter Sterne. Immerhin sei auf die lichtelektrischen F.I. *Guthnicks* und *Hügelers*[128]) sowie auf die photographisch-visuellen der Harvardsternwarte[129]) für den ebengenannten Stern verwiesen.

Bei den R Coronae- und U Geminorum-Sternen liegen noch keine kolorimetrischen Daten vor. Die unregelmäßigen Veränderlichen der μ Cepheiklasse sind rötlich, gehören den Spektralklassen N, R, M und K an. Die hier beobachteten Helligkeitsschwankungen dürften nur zum Teil reell sein, zum Teil aber auf physiologischen Beobachtungsfehlern beruhen. *Parkhurst*[130]) hat bei einigen photographisch-photovisuelle F.I., *Bottlinger*[69]) lichtelektrische F.I. ermittelt, *Hopmann*[131]) mit dem Rotkeil $\frac{c}{T}$-Werte, *Nicholson* und *Pettit*[73]) gaben thermoelektrische Beobachtungen. Die entsprechenden effektiven Temperaturen liegen nach den zwei letztgenannten Arbeiten zwischen 2100 und 2800 Grad. Ob sich, ähnlich den δ-Cephei- und Mira-Sternen, die Farbäquivalente mit dem Lichtwechsel ändern, ist noch unbekannt.

Die halbregelmäßigen RV-Tauri-Sterne schließlich gehören den Spektraltypen F bis M an. Von ihnen scheint nur der hellste, R Scuti, kolorimetrisch beobachtet zu sein, sein Spektrum wechselt zwischen $G\,5\,e$ im Maximum und $M\,0$ im Minimum. *Vogt*[132]) hat den

127b) Harvard Bulletin 876 (1930).

128) Astr. Nachr. 210 (1920), p. 345.

129) Harvard Annals 81, Heft 7.

130) Astroph. Journ. 35 (1912), p. 132.

131) Astr. Nachr. 226 (1929), p. 227.

132) Astr. Nachr. 228 (1926), p. 89.

Stern mit dem Rotkeil beobachtet. Die $\frac{c}{T}$-Werte schwanken danach zwischen 3,5 und 6,0, also ähnlich stark wie bei den Mira-Sternen; ebenso wie dort sind die bolorimetrischen Helligkeitsänderungen nur sehr gering, stark dagegen die der effektiven Durchmesser. In Verbindung mit *Eddingtons* Ansichten vom inneren Aufbau der Sterne bemerkt ferner *Vogt*, „daß der Stern während seiner starken Volumenänderungen eine Reihe von Zuständen durchläuft, die, was Druck, Dichte und Temperaturverteilung betrifft, immer in der Nähe von Zuständen verbleibt, bei denen sich der Stern im Gleichgewichtszustand befinden könnte."

V. Ergebnisse bei Sternhaufen und Nebelflecken.

26. Kugelförmige Sternhaufen. Die Kenntnis der Farbenverteilung in den Sternhaufen ist von Interesse für die Erforschung des Aufbaus dieser Systeme und muß in den meisten Fällen die spektrale Klassifizierung ersetzen. Die weitere Bedeutung der Farbenuntersuchungen für die Erforschung der interstellaren Absorption und für die Kosmogonie ist bereits in anderen Abschnitten besprochen worden (s. diesen Artikel Nr. **18** und Referat *Kienle*).[133])

Die ausführlichsten Untersuchungen stammen von *Shapley*[134]), der photographisch-photovisuelle Farbenindizes bestimmte. Nach der gleichen Methode verfuhren u. a. *H. v. Zeipel*[135]) und *A. Wallenquist.*[136]) Von Erfolg war auch die Methode der effektiven Wellenlängen (*Hertzsprung*), deren Anwendung sich natürlich auf die offenen Haufen beschränkt. Infolge der begrenzten Auflösbarkeit der Kugelhaufen kann man nur zu den hellsten, den Riesensternen vordringen, während über die Farben der schwächeren nichts bekannt ist. So beschränken sich die Untersuchungen von *Shapley* bei *M* 13 auf rund 600 Sterne der scheinbaren Helligkeit 12^m—17^m, während der Haufen bis zur scheinbaren Helligkeit 21^m schätzungsweise 50000 Sterne enthält.

Größere Farbenverzeichnisse liegen nur von den vier Kugelhaufen *M* 3, *M* 13, *M* 22 und *M* 68 vor. *Sticker*[136a]) fand nach der in Nr. **19** angeführten Methode folgende bevorzugte „typische" Farbenindizes und die prozentuale Verteilung auf dieselben:

---

133) S. hierzu auch *P. ten Bruggencate,* Die Sternhaufen (Berlin 1927, J. Springer).

134) Mt. Wilson Contr. 115 ff. (1916—21).

135) Kungl. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar 61 (1921), Nr. 15.

136) Meddelanden Obs. Upsala 32 (1927) und 42 (1928).

136a) Ztschr. f. Astrophys. Bd. 1, Heft 3 (1930).

	M 68		*M* 13		*M* 3		*M* 22	
	56 Sterne		495 Sterne		662 Sterne		623 Sterne	
I			$-0{,}08^m$	26 %				
II	$+0{,}48^m$	15 %	$+0{,}40$	10	$+0{,}20^m$	20 %	$+0{,}16^m$	29 %
III	$+0{,}88$	62	$+0{,}80$	61	$+0{,}66$	73	$+0{,}60$	59
IV	$+1{,}48$	23	$+1{,}40$	3	$+1{,}20$	7	$+1{,}20$	12

Danach setzen sich bei allen vier Haufen die Riesensterne zu zwei Dritteln aus gelben Sternen vom typischen F.I. $+0{,}6^m$ bis $+0{,}9^m$ zusammen, während sich das restliche Drittel in verschiedener Weise auf einen kleineren und einen größeren typischen F.I. verteilt, die aber bei allen Haufen in gleichen Abständen ($0{,}4^m$ für den vorangehenden und $0{,}6^m$ für den folgenden) vom Haupt-F.I. angeordnet sind. Es sprechen also auch hier bei den Kugelhaufen die Anzeichen dafür, daß, wie im Sternsystem (s. Nr. **19**), sich die kosmischen Großformen aus mehreren Gruppen zwar vielleicht gleich alter, aber verschieden heißer Sterne zusammensetzen, was nur dadurch erklärt werden kann, daß die Sterne bei ihrer Geburt mit verschiedenen Massen begabt waren.

27. Offene Sternhaufen und Milchstraßenwolken. Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse bei den offenen Sternhanfen in zweierlei Hinsicht. Die Trennung der physikalisch zum Haufen gehörigen Sterne von Hinter- und Vordergrundsternen ist nur bei wenigen näherstehenden Haufen (Plejaden) oder den Bewegungshaufen (Hyaden) möglich, wo das Kriterium der Eigenbewegung entscheidend ist. Ferner spielt die Frage der Absorption (verursacht durch mit den Haufen verbundene Massen oder durch ein nach *Trümpler*[137]) die ganze galaktische Zentralebene erfüllendes Medium) eine schwer zu berücksichtigende Rolle. In einem Falle (*NGC* 663) fand *Wallenquist*[136]) durch Vergleich mit spektral klassifizierten Sternen eine Verfälschung der Farbenindizes um mehr als eine halbe Größenklasse. Auch bei *M* 11 beträgt dieser sogenannte Farbexzeß, zumindestens bei den Sternen früher Spektralklassen, $0{,}65^m$. *Trümpler* hat zur Stützung seiner obigen Hypothese für sieben offene Haufen einen, aber nur unscharf ausgeprägten Gang der Farbexzesse mit der Entfernung der Haufen nachzuweisen versucht, und fand so als Koeffizienten der selektiven Absorption $0{,}32^m$ pro 1000 Parsek, d. h. um diesen Betrag ist die Absorption im photographischen Spektralgebiet größer als im visuellen. Eine so starke Absorption würde aber die bisherigen Anschauungen über die Dimensionen im Sternsystem erheblich modifizieren; indessen

137) Lick Obs. Bull. 420 (1930), p. 165.

sind nach *ten Bruggencates*[137a]) Ausführungen *Trümplers* Beweise nicht stichhaltig. Auf jeden Fall sind, solange die Ursachen des Farbexzesses nicht einwandfrei geklärt sind, auch alle Versuche sehr mit Vorsicht zu bewerten, aus der Verteilung der Farben und scheinbaren Helligkeiten (Farbenhelligkeitsdiagramme) Analogieschlüsse auf die Verteilung der Spektraltypen und absoluten Helligkeiten (*Russel*diagramme) zu ziehen, wie es von *ten Bruggencate* u. a. geschehen ist.

Die *Trümpler*sche Hypothese eines das Licht allgemein und selektiv absorbierenden Mediums, das in verhältnismäßig flacher Schicht nur die Raumgebiete nahe der Milchstraßensymmetrieebene erfüllt, hat auch zum Teil volle Zustimmung gefunden, so z. B. durch *v. d. Kamp.*[137b]) Er findet praktisch den gleichen Koeffizienten für die selektive Absorption wie *Trümpler* auf Grund der F.I.-Bestimmungen scheinbar schwacher, d. h. sehr ferner *A*- und *B*-Sterne, und berechnet die Mächtigkeit dieser Schicht in Richtung senkrecht zur galaktischen Ebene zu nur 175 Sternweiten. *Trümpler* selbst hat neuestens[137c]) weiteres Beobachtungsmaterial beigetragen. Würden sich diese Anschauungen weiterhin bestätigen, so würde — ganz abgesehen von ihren Folgen für die Lehren vom Bau des Sternsystems — die Kolorimetrie sehr ferner Objekte nicht mehr ein Maß für die Oberflächentemperatur der Sterne geben, dies müßte vielmehr durch das Linienspektrum und die Ionisationstheorie erfolgen. Dagegen wird der F.I. zu einem Mittel der Distanzbestimmung.

Für neun offene Haufen hat *Sticker*[136a]) die Analyse der typischen Farbenindizes durchgeführt, die zu folgenden Ergebnissen führte:

M 11		*NGC* 663		*M* 36		*M* 52		*M* 37	
$-0{,}27^{m}$	80%	$-0{,}13^{m}$	92%	$-0{,}01^{m}$	62%	$+0{,}03^{m}$	85%	$+0{,}07^{m}$	62%
$+0{,}25$	16	$+0{,}39$	8	$+0{,}47$	38	$+0{,}51$	10	$+0{,}53$	27
$+0{,}85$	4	—		—		$+1{,}01$	5	$+1{,}05$	11

M 34		Plejaden		Hyaden		*M* 67	
$+0{,}22^{m}$	81%	$+0{,}28^{m}$	62%	$+0{,}45^{m}$	80%	$+0{,}66^{m}$	88%
$+0{,}74$	12	$+0{,}80$	32	$+0{,}92$	20	$+1{,}22$	12
$+1{,}13$	7	$+1{,}35$	6				

Charakteristisch für die offenen Haufen ist, daß der kleinste typische F.I. weitaus den größten Prozentsatz aller Sterne einschließt, in den meisten Fällen 80—90%. Das ist ein wesentlicher Unterschied gegen

137a) Naturwissenschaften 1930, p. 725.

137b) Astronomical Journal Nr. 945 (1930).

137c) Publ. Astr. Soc. Pacific 42 (1930), p. 267.

die Kugelhaufen, bei denen der am meisten bevorzugte typische F.I. in der Reihenfolge derselben der zweite oder dritte ist. Weiter sind bei allen offenen Haufen die Abstände zwischen dem ersten und zweiten und dem zweiten und dritten typischen F.I. bei allen Haufen nahe die gleichen, nämlich im Mittel $0{,}50^m$. Auch dieser Punkt steht im Gegensatz zu den Ergebnissen bei den Kugelhaufen und im Sternsystem, was aber nicht verwundern darf, da wir uns bei den offenen Haufen vornehmlich auf dem Zwergast des *Hertzsprung-Russell*-Diagramms befinden, bei den Kugelhaufen und den helleren Sternen des Sternsystems aber nur auf dem Riesenast.

Von besonderer Bedeutung werden in Zukunft noch die Farbenuntersuchungen bei der Bestimmung von Entfernung und Ausdehnung der großen galaktischen Sternwolken sein. Kennt man für die verschiedenen Farbenklassen die scheinbare Helligkeit, bei der das Maximum der Anzahl der Sterne erreicht wird, so kann man mit Hilfe der zugehörigen absoluten Helligkeit (Spektrum- bzw. Farben-Leuchtkraftbeziehung) die Entfernung der Wolke abschätzen, vorausgesetzt, daß keine allgemeine Absorption des Lichtes im Raum stattfindet. Ist diese vorhanden, so können bis zu mehreren 100% falsche Entfernungen errechnet werden. *C. J. Krieger*[138]) fand auf diese Weise für die Scutum-Wolke eine Distanz von 2800 Parsec. Es zeigte sich hierbei, daß die Sternhäufigkeit beim Übergang von weißen zu roten Sternen außerordentlich rasch zunimmt. Die Dichte in der Scutum-Wolke ist verglichen mit der in der näheren Umgebung der Sonne die gleiche für die gelben Sterne und roten Riesen, dagegen beträchlich größer für die roten Zwergsterne, während die weißen Sterne anscheinend weniger zahlreich sind.

28. **Die Nebelflecken.** Über die Kolorimetrie der Nebelflecken ist mangels Beobachtungsdaten nicht viel zu berichten. Von den galaktischen Nebeln sind zunächst die chaotischen Gasmassen bisher meist nur photographisch beobachtet worden, vor allem aber noch nicht photometrisch, so daß kolorimetrische Daten noch nicht vorliegen. Eine Ausnahme bildet der Orionnebel, der durch *Hale*[139]) 1909 mit normalen und orthochromatischen Platten und Gelbfilter photographiert wurde. Es ergab sich eine Bestätigung ähnlicher noch unvollkommener Versuche *Keelers* (1899) und visueller Beobachtungen *Barnards*, daß z. B. der Südrand der hellen *Huygens*schen Gegend nahe der Mitte des Nebels durch das Licht der $H\alpha$-Linie rötlich gefärbt ist, daß also

138) Lick Obs. Bull. 416 (1929).
139) Washington Proc. Nat. Acad. 1916, p. 553.

die Gasmassen ähnlich den Verhältnissen bei den planetarischen Nebeln verschiedenartig geschichtet sind.

Eine Sonderstellung nehmen unter den chaotischen Nebeln die *Hagen*schen dunklen Wolken ein[140]), die bisher nur visuell beobachtet wurden, nicht dagegen photographiert werden konnten. Eine Erklärung hierfür wurde von *Hopmann*[140a]) vorgeschlagen. Die Anwendung der *Piper*schen und *Ricco*schen Regeln der Augenphysiologie in der Wahrnehmbarkeit äußerst schwacher Lichteindrücke im Vergleich zur Empfindlichkeit der photographischen Platte für Flächenobjekte ergibt eine starke Überlegenheit des Auges. Erwähnt sei auch, daß einzelne Beobachter bei den *Hagen*schen Wolken bräunliche Töne gesehen haben wollen. Das Licht der photographierbaren Nebel ist nach *Hubble* entweder reflektiertes Licht benachbarter Riesensterne oder entspricht dem monochromatischen Lichte der planetarischen Nebelflecke (s. Referat *Hnatek*, VI 2, p. 757 und Anm. 140a).

Da bei letzteren das Spektrum aus einzelnen hellen Linien vornehmlich von grün bis ultraviolett besteht, hat eine Kolorimetrie dieser Objekte keinen physikalischen Sinn. Gelegentlich mitgeteilte F.I., $-0{,}8^m$ etwa, kennzeichnen dann auch nur diese Strahlungsverhältnisse. Ähnliches gilt von den effektiven Wellenlängen, die *Lundmark* und *Lindblad* in Upsala abgeleitet haben.[141])

Die extragalaktischen sogenannten weißen, besser vielleicht gelben Nebel sind ungeheure Sternansammlungen, deren Spektrum etwa dem Typus *F* bis *K* entspricht. Dies wird bestätigt durch die eben angeführten Upsalaer Beobachtungen. Da die Nebelphotometrie erst in den Anfängen steckt — der W.F. einer Helligkeitsangabe nach den Beobachtungen von *Holetschek* und *Hopmann* beträgt etwa $0{,}2^m$ bis $0{,}3^m$[142]), und ähnlich, immerhin günstiger, liegen die Verhältnisse bei den photographischen Helligkeiten — lassen sich nur genäherte Werte angeben. Eine erste Untersuchung der Art gab *Wirtz*.[142a]) Bei 46 Nebeln der Coma-Virgo-Gegend wurden die photographischen Totalhelligkeiten auf Grund eigener Vermessung mit den visuellen von *Holetscheck-Hopmann* verglichen. Sie liegen zwischen $+0{,}1^m$ und $+2{,}0^m$, im Mittel $+0{,}9^m$, mit starker, zum Teil durch die Beobachtungen bedingter

---

140) Seine zahlreichen Artikel hierüber sind zusammengefaßt abgedruckt in Specola Astr. Vaticana, Miscellanea 53—68 (1920—29).

140a) Astr. Nachr. 238 (1930), p. 285; s. auch das Sammelreferat von *F. Becker*, Ergebn. d. exakten Naturw. Bd. 9, p. 25 (J. Springer 1930).

141) Astroph. Journ. 50 (1919), p. 376.

142) Astr. Nachr. 214 (1921), p. 425.

142a) Publ. der Kieler Sternw. 15 (1927), p. 3.

Streuung, aber in roher Übereinstimmung mit dem Spektralbefund. Schließlich sei auf die vorab nur qualitativen Angaben von *Seares*[139]) verwiesen. Mit Hilfe der Methode der exposure ratios zeigte er, daß die Nebelknoten der Spiralnebelarme wesentlich blauer sind als die Nebelkerne.

VI. Ergebnisse im Sonnensystem.

29. Die Sonne. Die Lichtfülle der Sonne gestattet die eingehendste spektrale Untersuchung ihrer Strahlung, weshalb die ja stets integrierenden Methoden der Kolorimetrie hier praktisch gegenstandslos sind. Daher genügen hier die folgenden Angaben: Nach *Russell*[143]) ist auf Grund der Messungen von *Zöllner*, *Fabry*, *Ceraski* und *Pickering* im visuellen Harvardsystem die Helligkeit der Sonne — $26{,}72^m$, die photographische (*King*, *Birk*) — $25{,}93^m$, der F.I. also $+ 0{,}79^m$, entsprechend dem Durchschnittsbetrag für einen G-Stern. Auch der Wasserzellenindex ist nach *Pettit* und *Nicholson*[73]) durchaus normal für einen $d\,Go$-Stern. Der — immerhin indirekt über die Solarkonstante weg ermittelte — Wärmeindex der Sonne ist nach den gleichen Autoren $0{,}14^m$ größer als im Durchschnitt für den Sonnentypus. Dies ist weniger als die Abweichung bei einigen anderen gleichartigen Sternen und kann auch herrühren von der Unsicherheit obiger Angabe für die visuelle Sonnenhelligkeit.

30. Der Mond. Nach der *Russell*schen Bearbeitung[143]) ist der F.I. des Vollmondes $+ 1{,}18^m$. Das Mondlicht ist danach entschieden rötlicher als das der Sonne, der F.I. entspricht etwa einem K-Spektrum. Diesen Eindruck liefern auch die Spektrogramme[144]); ferner zeigen es zahlenmäßig die spektralphotometrischen Beobachtungen von *Wilsing* und *Scheiner*.[145])

Tübinger Beobachtern[146]) verdanken wir die visuellen und photographischen Helligkeiten von 55 gleichmäßig über den Vollmond verteilten Punkten und damit deren relative F.I. Sie sind im ganzen sehr klein, entsprechend dem Eindruck am Fernrohr, daß auf dem Monde starke Färbungen nicht vorkommen. 1910 hatte *Wood* in der Nähe des Kraters Aristarch durch Filterphotographie eine Stelle gefunden, die fast kein ultraviolettes Licht reflektiert. *Miethe* und *See-*

143) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 188.

144) S. z. B. *Küstner*, Astr. Nachr. 198 (1914), p. 446.

145) Publ. Astroph. Obs. Potsdam 20 (1909).

146) *P. Götz*, Veröffentl. der Sternwarte Tübingen-Österberg I 2 (1919) und *H. Rosenberg*, Astr. Nachr. 214 (1921), p. 137.

gert[147]) haben die Filterstudien wesentlich ausgebaut und konnten nebst ausführlicher Beschreibung zahlreicher Stellen eine Zweifarbenreproduktion des Mondes geben. In diesem äußerst detailreichen Bilde haben die Oberflächenteile grünliche Tönung, die über den Durchschnitt stark im Ultravioletten reflektieren, im Gegensatz zu den gelblich-weißen Stellen (Durchschnittsverhältnisse) und den roten Teilen, die von stärkerer Reflektion im Orange stammen. Hierbei zeichnen sich die verschiedenen Mare besonders durch lebhafte Färbung beider Art aus. Auch *Wright* u. a.[148]) kamen zu ähnlichen Ergebnissen einer bisher nur qualitativen Mondkolorimetrie. Einen ersten Schritt in das Quantitative gibt *Rosenbergs* Vergleich der Tübinger Messungen mit der *Miethes*chen Reproduktion. Danach besitzen die dort rötlichen Stellen sowohl optisch wie photographisch größere Reflektionstätigkeit als die grünlichen. Auch liegen die relativen F.I. ganz im zu erwartenden Sinne (rötliche Stellen $+ 0{,}07^m$, grünliche $- 0{,}09^m$).

N. Barabacheff[149]) untersuchte 46 Punkte der Mondoberfläche an Hand photographischer Aufnahmen mit vorgesetzten Rot-, Grün- und Violettfiltern (wirksame Wellenlänge 620, 500 und 400 $\mu\mu$). Durch die starke selektive Wirkung dieser wurde die Amplitude seiner F.I. wesentlich größer als die von *Rosenberg-Götz*. Besonders markante dunkle Stellen sind danach, ähnlich vulkanischen Gesteinen, grünbraun, andere rötlich, rot-violett und reingrün. *Barabacheffs* Messungen gestatten ferner die den Farben der drei Filter zugehörigen Albedos zu ermitteln, die mit *Wilsings*[150]) spektralphotometrischen Untersuchungen an Gesteinen verglichen wurden. Wieder ist im ganzen die Übereinstimmung mit vulkanischen Auswürfen verschiedener Art gut. Nur die hellsten Stellen des Mondes fallen heraus, der Autor bezeichnet sie mit Sandstein bzw. Steinsalz.

Das thermo-elektrische Beobachtungsverfahren unter Verwendung passender Filter wurde in größerem Umfange zuerst von *F. W. Very*[151]) auf den Mond angewandt. Da damals die Strahlungsgesetze noch unvollkommen bekannt waren, bedürfen die von ihm abgeleiteten Temperaturen gewisser Berichtigungen, die *R. Dietzius*[152]) ermittelt hat. Praktisch bestätigt wurden diese Untersuchungen durch Arbeiten auf der Mount-Wilson- und der Flagstaff-Sternwarte, die Temperaturen

---

147) Astr. Nachr. 188 (1911), p. 2, 239, 371.
148) Publ. Astr. Soc. Pacific 1929, Juni.
149) Russian Astr. Journ. 1 (1924), Heft 3—4, p. 44.
150) Publ. Astr. Obs. Potsdam 61 (1909).
151) Astr. Journ. 8 (1898), p. 199, 265.
152) Wien Sitzber. Akad. d. Wiss. IIa 132 (1924), p. 193.

von + 120° C im Maximum für von der Sonne beleuchtete Stellen ergaben, während im Minimum die Temperatur unter — 160° sinkt. Schon *Very*, später *Nicholson* und *Pettit* konnten ferner zeigen[153]), daß bei einer Mondfinsternis, also plötzlichem Fortfallen der Sonnenbestrahlung, die Oberflächentemperatur in kürzester Zeit um fast 200° sinkt, um ebenso rasch nach Schluß der Finsternis wieder zu steigen, wohl einer der besten Hinweise, daß der Mond keine Atmosphäre, geschweige denn Eis oder dergleichen hat.

31. Die großen Planeten. Die folgende Übersicht gibt zunächst einige kolorimetrische Daten für das mittlere Gesamtlicht der einzelnen Planeten:

Planet	Farbe[154])	Farbzahl[155])	F.I.[156])
Merkur	gelb	5,6	$+ 1{,}0^m$
Venus	gelb	3,5	+ 0,91
Mars	rot	7,6	+ 1,45
Jupiter	gelblich-weiß	3,6	+ 0,96
Saturn	gelb	4,8	+ 1,22
Uranus	blaugrau		+ 0,74

Über Neptun scheint außer der gelegentlichen Bemerkung, er habe blaugrünliche Farbe ähnlich dem Uranus, nichts Kolorimetrisches bekannt zu sein.

Visuelle Oberflächenphotometrie im Lichte verschiedener Farben hat bei den großen Planeten bisher erst *Schönberg*[157]) angestellt und die im weißen Lichte ausgeführten wenigstens in bezug auf Jupiter und Saturn nach völlig neuen Gesichtspunkten bearbeitet.[158]) Dagegen waren die Farbfiltermessungen an Zahl noch zu gering, um sichere Schlüsse zu gestatten. Inzwischen hat *Schönberg* zahlreiche Filterbeobachtungen in Breslau ausgeführt, ihre Veröffentlichung ist nach privater Mitteilung bald zu erwarten. Es seien daher in Kürze nur seine wichtigsten Ergebnisse aus den Dorpater Beobachtungen angeführt. Zunächst zeigen die Filterbeobachtungen, entsprechend den obigen F.I. von *King*, daß die Saturnkugel gelber ist als Jupiter, dagegen

153) Mt. Wilson Obs. Ann. Report 1926/27.

154) Nach *Graff*, Grundriß der Astrophysik (Leipzig u. Berlin 1928, B. G. Teubner).

155) Im *Osthoff*schen System (§ 4) nach *Wirtz* im Astr. Handbuch, herausgegeben von *R. Henseling* (Stuttgart 1921).

156) Nach *King*, Harvard Annals 84 (1923), Nr. 4.

157) Publ. der Sternw. Dorpat 24 (1917).

158) Photometrische Untersuchungen über Jupiter und das Saturnsystem, Helsingfors 1921.

liegt die Farbe des Rings zwischen den Werten für die beiden Planeten. Da ferner das Reflektionsvermögen der Äquatorialstreifen beider Planeten nahezu gleich und von derselben Größe wie das der irdischen Wolken ist, kann die Verschiedenheit der Farben beider Planeten vielleicht der stärkeren Absorption der kurzwelligen Strahlen in der Atmosphäre des Saturn zugeschrieben werden. Die Bearbeitung der lichtelektrischen Babelsberger und visuellen Dorpater Messungen der Totalhelligkeit Saturns zeigt, daß die Veränderlichkeit der Ringe für die violetten Strahlen bedeutend stärker ist als für die gelben. Dies führt *Schönberg* zur Hypothese einer gelbgefärbten Dunstwolke, die den Saturnring umgibt. Diese ist vorwiegend über dem hellsten Mittelteil des Ringsystems ausgebreitet.

Noch nicht quantitativ, wohl aber qualitativ haben die photographischen Filteraufnahmen von *Wright, Ross* und *Trümpler* beträchtliche Unterschiede der Oberflächendetails im Lichte verschiedener Farben bei Venus, Mars, Jupiter und Saturn gezeigt. Der Kürze wegen und mit Rücksicht auf die hier nicht angängige Reproduktion ihrer Aufnahmen kann nur auf die betreffenden Arbeiten[159]) und die Zusammenfassung *Graffs* hingewiesen werden.[160])

Die Möglichkeit, auf thermoelektrischem Wege die ultrarote Strahlung in Verbindung mit verschiedenen selektiven Filtern zu untersuchen, gestattet die von den Planeten kommende Wärmestrahlung zu

Objekt	Temperatur	Bemerkungen
Merkur . . .	+ 420° bis + 230°	Vermutlich ohne Atmosphäre.
Venus . . .	+ 60° bis 0°	Die Angaben beziehen sich vermutlich auf eine den Planeten völlig umgebende dichte Wolkenhülle.
Mars	Äquator — 3°, Pole — 52°	Theoretisch von *Milankowitsch* ermittelt.
	+ 30° bis — 35°	Thermoelektrische Messungen, je nach Lage der beobachteten Stelle, am Äquator oder Pol des Mars, Sonnenauf- oder -untergangspunkt, hellen oder dunklen Oberflächenteilen usw.[161])
Jupiter und Saturn	— 110° bis — 135°	
Uranus . .	unter — 185°	

159) Astroph. Journ. 68 (1928), p. 57; Lick Obs. Bull. 389 (1927); Astroph. Journ. 43 (1916), p. 314.

160) Handbuch der Astrophysik 4, Kap. 4 (Berlin 1929, Springer).

161) S. den Sammelbericht von *Coblentz,* Naturwissensch. 1927, p. 809, sowie *Menzel, Coblentz* und *Lampland,* Astroph. Journ. 63 (1926), p. 177.

ermitteln, um so durch Vergleich mit der den betreffenden Planeten zugesandten Sonnenenergie Werte für die Oberflächentemperaturen abzuleiten. Diese bleiben immerhin stark hypothetisch, da in die zugehörige Theorie fragliche Annahmen eingeführt werden müssen, wie die, daß der Planet sich wie ein grauer Strahler verhält, daß die Albedo im ultraroten die gleiche sei wie die visuell ermittelte u. a. m. *Schönberg* hat hierzu eine kritische Übersicht gegeben.[162]) Die Werte der vorstehenden Zusammenstellung sind dementsprechend um etwa 10^0 bis 20^0 Grad absolut gewiß noch unsicher, dürften aber die relativen Verhältnisse in etwa darstellen.

32. Die Kleinkörper des Sonnensystems. Untersuchungen über Farbenäquivalente der *kleinen Planeten* sind dem Referenten nicht bekannt, wie denn in der Photometrie dieser Körper bisher erst wenig geschehen ist (s. Referat *Guthnick*). Nach den spektroskopischen Beobachtungen von *Brobounikow*[163]) leuchten sie zwar im reflektierten Sonnenlicht, das aber ähnlich dem Monde mehr dem eines *K*- als eines *G*-Sternes entspricht, ein starker F.I ($1—1{,}5^m$) dürfte also zu erwarten sein; auch aus dem Grunde, weil ihre Albedo ähnlich der des Mars bzw. des Merkurs ist.

Von den *Satelliten* sind nur die vier hellen Jupiters im Lichte verschiedener Wellenlängen beobachtet worden. Aus der Differenz der photoelektrischen Messungen von *Stebbins*[164]) und den visuellen *Guthnicks*[165]) ergeben sich zunächst folgende relative F.I.: I. $+ 0{,}36^m$, II. $+ 0{,}26^m$, III. $+ 0{,}21^m$, IV. $+ 0{,}03^m$ in Übereinstimmung mit der Färbung für das Auge, die nach *Graff*[160]) von einem satten Gelb bei I. zu einer gelblich-grauen Schattierung bei IV. geht. Zur selben Abstufung führen die Differenzen der photographischen Beobachtungen *Schüttes*[166]) gegen die visuellen *Guthnicks*. Da aber nach *Guthnick* die visuellen Helligkeitsschwankungen aller vier Satelliten größer sind als die lichtelektrischen, sind auch die F.I. veränderlich. Zur Erklärung der verwickelten Erscheinungen weist *Guthnick* auf die Möglichkeit meteorologischer Vorgänge bei den Monden hin. Jedenfalls ist weiteres Beobachtungsmaterial noch unbedingt nötig.

Bei der noch vorhandenen Unsicherheit aller photometrischer Daten über *Kometen* ist es nicht verwunderlich, daß auch kolorimetrische nicht vorhanden sind. Solchen wäre zudem bei der kompli-

162) Ergebnisse der exakten Naturw. 6, p. 19 ff. (Berlin 1926).

163) Lick Obs. Bull. Nr. 407 (1929).

164) Lick Obs. Bull. Nr. 385 (1927).

165) Sitzber. Berlin 1927, Nr. 17.

166) Astr. Nachr. 218 (1923), p. 273.

zierten Struktur der Kometenspektra kaum ein physikalischer Sinn unterzulegen. Zuweilen beobachtete gelbliche Färbung von Kometenkernen ist auf Na- usw. Emission zurückzuführen (s. Referat *Hnatek*). Nach einer aus instrumentellen Gründen recht interessanten Mitteilung von *Hartmann*[167]) war der Kopf des *Halley*schen Kometen 1910 in Erdnähe grüner als die Jupiterscheibe.

Nicht viel anders liegen die Verhältnisse bei den *Meteoren*, die gleichfalls ein unregelmäßiges Emissionsspektrum haben (s. Referat *Hnatek*), doch sei folgendes erwähnt: Wenn auch die Laienbeobachter der hellen Sternschnuppen, Feuerkugeln und Meteorite häufig Farbenangaben mitteilen, so hat doch anscheinend nur *J. Schmidt*[168]) von 1842—50 systematisch bei vielen tausend Beobachtungen auch die Farben vermerkt, wobei sich im Durchschnitt folgende prozentuale Verteilung ergab: weiß 62, gelb 15, gelb-rot 6, grün 3, „neblig" 14. Nachdem zuerst *von Nießl* auf Farbenänderungen hingewiesen hatte, untersuchte *A. Wegener*[169]) den Farbenwechsel großer Meteore, wobei zunächst eine starke Sichtung und Ordnung des Beobachtungsmaterials nötig war. Danach ist gewöhnlich die Farbe zuerst weiß, dann grün, um, verbunden mit starker Lichtzunahme, plötzlich nach rot umzuschlagen. *Wegener* sieht als Ursache hierfür den Übergang der Meteore von der Wasserstoff- in die Stickstoffschicht der oberen Erdatmosphäre an.

167) Astr. Nachr. 185 (1910), p 233.

168) S *Valentiner,* Handwörterbuch der Astronomie, Bd. II (1898).

169) Nova Acta Leopoldina Bd. 54, Nr. 1 (Halle 1918).

(Abgeschlossen Dezember 1930.)

VI 2, 27. PHOTOMETRIE DER GESTIRNE.

Von

ERICH SCHOENBERG

IN BRESLAU.

(Mit 21 Figuren.)

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Die Entwicklung der photometrischen Theorien. Die Photometrie ist die Lehre von der Intensität der Strahlung. Wie der Name lehrt, stammt die Bezeichnung vom sichtbaren Gebiete der Strahlung, vom Lichte, her; geschichtlich war dieses Gebiet auch das zuerst untersuchte; heute wird die Bezeichnung „Photometrie" auch auf die photographisch und lichtelektrisch wirksame Strahlung der kleineren Wellenlängen sowie auch, bis zu einer gewissen Grenze, auf das angrenzende Gebiet der ultraroten Strahlung angewandt.

Als Begründer der Photometrie sind *Pierre Bouguer*[1][2] (1698—1758) und *Johann Heinrich Lambert*[3] (1728—1777) anzusehen. Die ersten photometrischen Versuche von *Huygens*[4], *Celsius*[5] und *Buffon*[6] können kaum als die Einleitung der wissenschaftlichen Photometrie angesprochen werden, weil sowohl die Beobachtungsmittel derselben unzulänglich waren, als auch das für jede neue Wissenschaft notwendige Rüstzeug strenger Begriffsbestimmungen noch fehlte. *Bouguer* war der erste, der mit systematischen Versuchen über die Absorption und Reflexion des Lichtes an festen und flüssigen Körpern, beim Durchgang durch trübe Medien und bei diffuser Reflexion an matten Flächen begonnen hat und die hier auftretenden Gesetzmäßigkeiten, soweit sie sich bei seinen einfachen Beobachtungsmethoden erfassen ließen, formulierte. Seine Messungen hatten eine bedeutende Schärfe. Er hat sie auch auf die Helligkeit der Himmelskörper ausgedehnt und hier ganz wesentliche Ergebnisse erzielt. Er bestimmte das Helligkeitsverhältnis der Sonne zum Monde und entdeckte dabei die Randverdunkelung auf der Sonnenscheibe; er unterwarf die Lichtschwächung der Gestirne infolge der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre der Beobachtung und schuf die erste Theorie dieser Erscheinung, die auch heute ihre Bedeutung nicht verloren hat; sie ist auf dem *Bouguer*schen Grundgesetz für die Lichtschwächung durch Absorption, dem Exponentialgesetz, aufgebaut und vernachlässigt nur die Temperaturabnahme mit der Höhe in der Atmosphäre sowie die Krümmung der Lichtstrahlen

---

1) Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729.

2) Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouvrage posthume, publié par l'abbé *de Lacaille*. Paris 1760.

3) Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum 1760. Deutsche Ausgabe von *E. Anding*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissensch. Nr. 31—33. Leipzig 1892.

4) Hugenii Cosmotheoros etc. Hagae Comitum Ed. II (1699), p. 136.

5) Histoire de l'Acad. des Sciences, p. 5. Paris 1735.

6) Mém. de l'Acad. des Sciences, p. 84. Paris 1729.

infolge der Refraktion. *Bouguer* hat auch als erster die Lichtverteilung am klaren Tageshimmel gemessen. Von einer gewissen Bedeutung für die astronomische Photometrie sind auch die Anschauungen gewesen, die er über den Vorgang der diffusen Zurückwerfung des Lichtes durch matte Flächen entwickelt hat.

Lamberts „Photometria" ist das klassische Werk der theoretischen Photometrie; in ihm werden die beiden Grundgesetze, das Kosinusgesetz für Selbstleuchter und das zusammengesetzte Kosinusgesetz für matte Flächen in die Photometrie eingeführt und eine Reihe anderer wichtigerer Sätze und Definitionen, die noch heute die Grundlage dieser Wissenschaft bilden, mathematisch begründet. *Lambert* behandelt auch unabhängig von *Bouguer* die Theorien der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre und der Himmelshelligkeit. Nachdem vor ihm *Euler*[7]), *Kies*[8]) und *R. Smith*[9]) das Problem der Beleuchtung der Planeten durch die Sonne mehr oder weniger glücklich behandelt hatten, gibt *Lambert* die erste vollständige Lösung desselben für seine Formel der diffusen Reflexion. *Euler* hatte dabei die nach ihm benannte Formel zugrunde gelegt; diese steht aber sowohl mit der Theorie als mit den Beobachtungen an matten Körpern in so starkem Widerspruche, daß ihr nur geschichtliches Interesse zukommt.

Lamberts Extinktionstheorie kann gegenüber der *Bouguer*schen nicht als Fortschritt angesehen werden. Dieser ist an den Namen von *P. S. Laplace*[10]) gebunden, der um die Wende des Jahrhunderts in seiner „Mécanique céleste" eine neue Theorie der Extinktion entwickelte. *Laplace* zeigte ihren Zusammenhang mit der Theorie der Strahlenbrechung und berücksichtigte diese bei der Ausrechnung des Lichtweges in der Atmosphäre.

Es folgt jetzt eine Zeit der Entwicklung und Vervollkommnung der astronomischen Meßapparate, für die die theoretischen Arbeiten von *F. Arago*[11]) und *F. E. Neumann*[12]) über die Polarisation des Lichts die Voraussetzung bildeten. Diese Gelehrten begründeten die Theorie der Polarisation und schufen so die Grundlage für den Bau des Polarisationsphotometers, das später unter dem Namen des *Zöllner*schen allgemeine

---

7) Réflexions sur les divers degrés de lumière du soleil et des autres corps célestes. Hist. et Mém. de l'Acad. R. de Berlin (1750), p. 280.

8) Sur le plus grand éclat de Vénus etc. Hist. et Mém. de l'Acad. R. de Berlin (1750), p. 218.

9) A Complete System of Optics. Cambridge 1728.

10) Mécanique céleste 4, Kap. 3.

11) Über das Gesetz des Kosinusquadrates usw. Pogg. Ann. 35 (1335), p. 444.

12) Photometrisches Verfahren, die Intensität der ordentlichen und außerordentlichen Strahlen usw. zu bestimmen. Pogg. Ann. 40 (1837), p. 497.

Verbreitung gefunden hat. Dasselbe verwendet *Nicol*sche Prismen zur streng meßbaren Abschwächung des Lichtes einer künstlichen Lichtquelle, die im Gesichtsfelde des Fernrohres neben dem Bilde des Gestirnes sichtbar ist. Vor seiner Verbreitung hat *L. Seidel*[13]) ein anderes Meßprinzip angewandt, das aber nicht die Bedeutung des *Zöllner*schen gewonnen hat. Das von ihm benutzte, von *Steinheil*[14]) konstruierte Photometer erlaubte es, zwei verschiedene Gestirne direkt miteinander zu vergleichen, indem die Flächenhelligkeiten ihrer außerfokalen Abbildungen, die nebeneinander im Gesichtsfelde erschienen, gleich groß gemacht wurden. Hier wurden die Fokalabstände abgelesen und das Gesetz der Abnahme der Flächenhelligkeit mit dem Quadrate dieser Abstände verwendet. *Seidels* und *Aragos*[15]) Messungen der Helligkeit der Planeten waren insofern von großer Bedeutung, als sie die Unvollkommenheit der *Lambert*schen Reflexionsformel bewiesen. *Seidel* berechnete aus seinen Beobachtungen eine neue Tabelle der Extinktion; er leitete auch aus den Beobachtungen der Saturnhelligkeit eine Formel für die Abhängigkeit derselben von der Öffnung der Saturnringe ab.

Für die photometrische Auswertung der Stern- und der Planetenbilder ist die Kenntnis der Beugungserscheinungen im Fernrohre von Bedeutung. *Schwerd*[16]) behandelte dieselben in einem umfassenden Werke nach eigenartigen geometrischen Methoden; *Airy*[17]) entwickelte analytische Ausdrücke für den Spezialfall der Beugung bei punktförmigen Lichtquellen.

Mit einem besonders für diesen Zweck konstruierten Photometer beobachtete *J. Herschel*[18]) die Helligkeit der Mondphasen und zeigte ihre große Abweichung von der *Lambert*schen Theorie. *Fr. Zöllner*[19])

13) Die Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten usw. Monum. saec. der Münchner Acad. II. Kl. (1859).

14) Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel. Denkschr. d. Münch. Acad. II. Kl. 2 (1837); Verbesserte Form eines Prismenphotometers. Münch. gelehrte Anzeigen 15, p. 9; Beiträge zur Photometrie des Himmels. A.N. 48 (1858).

15) Sieben Abhandlungen zur Photometrie. Aragos Werke; Deutsche Ausgabe von *Hankel* 10 (1859).

16) Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

17) Cambridge Transactions 6 (1838).

18) Account of some Attempts etc. Results of Astr. Obs. made during 1834—38 at the Cape of Good Hope, p. 353. London 1847.

19) Photometrische Untersuchungen. Pogg. Ann. 100 (1857), p. 381, 474, 651 und daselbst 109 (1860), p. 244; Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels. Berlin 1861; Photom. Unters. mit besonderer Rücksicht auf die phys. Beschaffenheit der Himmelskörper. Leipzig 1865; Einige Sätze aus der theoretischen Photometrie. Pogg. Ann. 128 (1866), p. 46; Resultate photometrischer Beobachtungen an Himmelskörpern, ebd. 128 (1866), p. 260; A.N. 66 (1866), p. 225.

versuchte diese Abweichungen aus dem Einfluß der Mondberge abzuleiten; indessen war seine Theorie unrichtig, und erst in neuester Zeit ist es gelungen, das photometrische Verhalten des Mondes zu erklären. Die geistvollen photometrischen Arbeiten *Zöllners*, insbesondere die Konstruktion des noch heute gebräuchlichen Polarisationsphotometers, seine scharfen Messungen der Stern- und der Planetenhelligkeiten und die daran geknüpften theoretischen Betrachtungen haben in hohem Grade anregend auf die Entwicklung der Photometrie gewirkt.

Nicht geringer war die Bedeutung der Arbeiten von *G. P. Bond*[20]) an der Sternwarte des Harvard College, die gleichzeitig und unabhängig von den *Zöllner*schen unternommen waren. Sie beziehen sich hauptsächlich auf die Planeten und den Mond. Für die theoretische Photometrie ist der von *Bond* eingeführte Begriff der sphärischen Albedo wichtig gewesen, der heute, nachdem *H. N. Russell* ihn der Vergessenheit entrissen hat, allgemein gebraucht wird.

Auf ein für die Theorie der Bewegung der Jupitertrabanten wichtiges photometrisches Problem, die Verfinsterungen derselben, hat *A. Cornu*[21]) aufmerksam gemacht. *A. Obrecht*[22]) entwickelte die erste photometrische Theorie dieser Erscheinungen.

Um die Wende des Jahrhunderts setzt durch die Arbeiten *H. v. Seeligers*[23]) ein bedeutender Aufschwung der theoretischen Photometrie ein. *Seeliger* behandelte mit der ganzen ihm eigenen analytischen Schärfe, die oft weit über das Maß der möglichen Prüfungsgenauigkeit hinausging, eine Reihe neuer photometrischer Probleme. Als wichtigstes Ergebnis sind seine und *E. Lommels*[24]) Untersuchungen über das Gesetz

20) On the Results etc. Mem. Amer. Acad. New Ser. 8 (1861), p. 221; Comparation of the Light etc., ebd. 8 (1861), p. 287; On the Light of the Sun, Moon etc. M. N. 21 (1861), p. 197.

21) Sur la possibilité d'accroitre etc. Paris C. R. 96 (1883), p. 1609; Sur les méthodes photométriques etc. A. N. 114 (1886), p. 229.

22) Étude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Ann. de l'Obs. de Paris 18 (1885).

23) Zur Photometrie des Saturnringes. A. N. 109 (1884), p. 305; Bemerkungen zu *Zöllners* „Photometr. Unters.". Vjschr. 21 (1886) p. 216; Zur Theorie d. Bel. d. gr. Planeten usw. Abh. d. Münch. Akad. II. Kl. 16 (1888), p. 405; Zur Photom. zerstreut reflektierender Substanzen. Sitzber. d. Münch. Akad. II. Kl. 18 (1888), p. 201; Theorie d. Bel. staubförm. kosm. Massen usw. Abh. Münch. Akad. II. Kl. 18 (1893), p. 1; Über den Schatten eines Planeten. Sitzber. d. Münch. Akad. II. Kl. 24 (1894), p. 423; Über kosm. Staubmassen und das Zodiakallicht. Ebd. 31, H. 3; Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens usw. Abh. d. Bayr. Akad. II. Abt. 19 (1899).

24) Über Fluoreszenz. Abschnitt I: Über die Grundzüge der Photometrie. Wied. Ann. 10 (1880), p. 449; Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung. Sitzber. d. Münch. Akad. II. Kl. 17 (1887), p. 95.

der diffusen Reflexion zu nennen, die zu der berühmten *Lommel-Seeliger*schen Formel geführt haben. Eingehende Untersuchungen widmete *Seeliger* dem Problem der Beleuchtung abgeplatteter Planeten, wie Jupiter und Saturn, um die Abweichung der Phasenkurven, die durch die Abplattung bedingt ist, kennen zu lernen; als erster behandelte er auch das Problem der Beleuchtung staubförmiger Massen, insbesondere des Saturnringes; er folgerte theoretisch die Veränderlichkeit seiner Helligkeit in der Nähe der Opposition. *Seeliger* berechnete auch die Helligkeit des Zodiakallichtes und bewies, daß viele Nebel im Lichte nahe gelegener Sterne leuchten können. Von großem Interesse ist seine Theorie der Helligkeit des Mondes bei Finsternissen und die Erklärung, die er der beobachteten Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen gegeben hat.

Die Schüler *Seeliger*s haben dann seine Anregungen und Theorien auf verschiedene andere Probleme der Photometrie angewandt. *E. Anding*[25]) entwickelte Formeln für die Lichtverteilung auf einer beleuchteten Planetenscheibe und verfaßte eine Preisschrift über das Problem der Verfinsterung der Jupitertrabanten. *V. Wellmann*[26]) behandelte ebenfalls das letztgenannte Thema, und *K. Schwend*[27]) veröffentlichte eine Untersuchung über die Helligkeit des Zodiakallichtes. *G. Müller* gab in seinem vorzüglichen Lehrbuch „Photometrie der Gestirne“ (Leipzig 1897) eine Zusammenfassung der bis zum Ende des Jahrhunderts erschienenen theoretischen Arbeiten. Dieses Lehrbuch war bis zum Erscheinen des „Handbuchs der Astrophysik“ (Berlin 1929), Band II, das grundlegende Werk der astronomischen Photometrie.

Über die seit der Wende des Jahrhunderts erzielten Fortschritte der theoretischen Photometrie soll in dieser Arbeit berichtet werden. Hier muß aber noch die Entwicklung der photometrischen Beobachtungskunst durch Aufzählung der wichtigsten Merksteine derselben gewürdigt werden.

2. Die Entwicklung der Beobachtungsmethoden. Die älteste Beobachtungsmethode ist die visuelle; seit den ältesten Zeiten haben die Beobachter, die ein Verzeichnis der Fixsternörter geliefert haben, die Sterne durch Helligkeitsschätzungen gekennzeichnet. Diese Methode der Schätzungen hat sich seit den Zeiten des Hipparch bis

25) Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupitertrabanten. Preisschr. d. Univ. München 1889; Über die Lichtverteilung auf einer . . . Planetenscheibe. A. N. 129 (1892), p. 377.

26) Zur Photometrie der Jupitertrabanten. Berlin 1887.

27) Zur Zodiakallichtfrage. München 1904.

zur Mitte des 19. Jahrhunderts, wo sie durch *F. Argelander*[28])[29]) und *N. Pogson*[30]) verfeinert wurde, unverändert erhalten. Hipparchs (190 bis 125 v. Chr.) Größenschätzungen, die in die Mitte des 2. Jahrhunderts v. Chr. fallen, sind uns in dem Katalog von Ptolemäus (138 n. Chr.) erhalten und beziehen sich auf 1020 Sterne. Der nächste selbständige Sternkatalog von Al-Sufi (964 n. Chr.) enthält wiederum selbständige Helligkeitsschätzungen von 1150 Sternen, ebenso die folgenden Kataloge von Tycho Brahe (1590), Hevelius (1660), Halley (1679) und Flamsteed (um 1700). Der letzte Katalog enthält schon neben den Örtern die Größen von mehr als 3000 Fixsternen. Die meisten dieser Kataloge teilen die dem bloßen Auge sichtbaren Sterne in sechs Stufen oder Größenklassen, beginnend mit den hellsten, die zur 1. Klasse gezählt werden. Die Nullpunkte dieser Skalen sind natürlich etwas verschieden und auch der Wert der Stufe von Beobachter zu Beobachter wechselnd. Im 18. und 19. Jahrhundert wächst die Zahl der geschätzten Helligkeiten durch die Arbeiten von *Lacaille, Lalande, Bessel, Argelander* sehr schnell bis auf über 200000 Sterne, indem die Skala bis auf Sterne 9. Größe ausgedehnt wird. Als größter Katalog dieser Art ist die Bonner Durchmusterung von *Argelander* und *Schönfeld*[31]), sowie ihre Fortsetzung auf den südlichen Himmel von *Thome*[32]), die Cordoba Durchmusterung, anzusehen. Die Methode der Helligkeitsschätzungen bei Meridianbeobachtungen wird auch noch heute in derselben Art angewandt und ergibt ungeachtet gewisser individueller Nullpunkts- und Skalenfehler, die sich nachträglich immer bestimmen lassen, wertvolle Beiträge zur Beurteilung der Helligkeitsänderungen der Sterne. Die Genauigkeit der Helligkeitsschätzungen dieser Art ist in neuerer Zeit durch *F. Küstner*[33]) (1894) durch Einführung von Objektivgittern nicht unwesentlich vergrößert worden. Diese Gitter schwächen das Licht der hellsten Sterne so weit ab,

---

28) Neue Uranometrie (Uranometria Nova). Darstellung der im mittleren Europa mit bloßem Auge sichtbaren Sterne usw. Berlin 1843.

29) Aufforderung an Freunde der Astronomie zur Anstellung von Beobachtungen usw. Schumachers Jahrbuch für 1844.

30) Catalogue of 53 Known variable Stars, with notes. Radcliffe Obs. 15 (1856).

31) Bonner Durchmusterung des nördlichen Himmels. Bonner Beobachtungen Bd. 3—5. Zweite berichtigte Auflage unter Mitwirkung von *Deichmüller* bearbeitet von *Küstner*. Bonn 1903.

32) Córdoba Durchmusterung. Res. Obs. Nac. Arg. 16 (1892); 17 (1894); 18 (1900); 21 (1914).

33) Katalog von 10663 Sternen zwischen 0° u. 51° nördlicher Deklination ... nach Beobachtungen am *Repsold*schen Meridiankreise. 1894 bis 1903. Veröffentl. d. Kgl. Sternwarte Bonn Nr. 10 (1908).

daß der Beobachter nur ein kleines Helligkeitsintervall (etwa 2 Gr.kl.) durch Schätzung zu überbrücken hat, wodurch sich der zufällige Fehler der Schätzung auf 0,1 Gr.kl. vermindern läßt.

Für die Untersuchung von Helligkeitsschwankungen bei veränderlichen Sternen hat *Argelander*[34]) eine Methode entwickelt, die unter dem Namen der Stufenschätzungsmethode eine große Anwendung und Bedeutung gewonnen hat. Sie besteht in der Einschaltung einer gewissen Anzahl von Stufen zwischen die zu vergleichenden Sternhelligkeiten. Die Anwendung dieser Methode auf die Bestimmung der Größen der mit freiem Auge sichtbaren Sterne führte zu dem vollständigsten und genauesten Sternverzeichnis aller in mittleren nördlichen Breiten sichtbaren Sterne bis zur 5,6. Größenklasse, der Uranometria Nova[35]) *Argelanders*. Dieses Werk wurde von *E. Heis*[36]) auf die Anzahl von 4701 erweitert und fand in *B. Goulds*[37]) „Uranometria Argentina" seine Fortsetzung bis zum Südpol.

Die Stufenschätzungsmethode wurde dann von *N. Pogson* (1854) abgeändert, und von *E. C. Pickering*[38]) (1881) wurde eine andere Abänderung, die sog. Interpolationsmethode, zur Helligkeitsbestimmung der veränderlichen Sterne vorgeschlagen. Beide Methoden, die von *Argelander* und von *Pickering*, haben eine außerordentliche Verbreitung gefunden.

Von den verschiedenen Apparaten, die zur Ausführung genauer photometrischer Messungen vorgeschlagen und benutzt worden sind, haben wir die Einführung des Polarisationsphotometers durch *Arago* schon erwähnt. In der Gestalt des *Zöllner*schen Photometers hat dieses Instrument in der Astrophysik eine außerordentliche Bedeutung gewonnen. Mit ihm haben *G. Müller* und *C. Kempf*[39]) das genaueste Verzeichnis visueller Sternhelligkeiten geschaffen, die sog. Potsdamer Durchmusterung. Dasselbe umfaßt alle Sterne bis zur Größe 7,5, vom Nordpol bis zu der Deklination 0°. Das *Zöllner*sche Photometer benutzt das Polarisationsprinzip zur Abschwächung eines künstlichen Sterns, der im Gesichtsfelde neben dem zu vermessenden Sterne erscheint. *E. C. Pickering*[40]) schwächt in seinem Meridian-

34) S. Fußnote 29.

35) S. Fußnote 28.

36) Neuer Himmelsatlas. Köln 1872.

37) Uranometria Argentina. Resuld. d. Obs. Nac. Argent. en Córdoba I (1879).

38) Proc. Amer. Acad. 16 (1881), p. 280.

39) Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels, enthaltend die Größen und Farben der Sterne der B. D. bis zur Größe 7,5. Potsd. Publik. 17 (1907).

40) Harvard Ann. 14 (1884), p. 1; ebd. 23 I, s. 1. (1890); 23 II (1899).

photometer in ähnlicher Weise das Licht des Polarsternes, der als Vergleichsstern für alle anderen dient. Mit solchen Meridianphotometern ist in Harvard das vollständigste Helligkeitsverzeichnis der Sterne des nördlichen Himmels fertiggestellt worden, die sog. Harvard Photometrie. Dieser Katalog enthält die Helligkeiten von 45792 Sternen.[41])

Außer den genannten visuellen Instrumententypen hat nur noch das sog. Auslöschphotometer eine gewisse Bedeutung für die Astrophysik gewonnen, weil mit ihm ein größerer Helligkeitskatalog der Fixsterne von *C. Pritchard*[42]), die „Uranometria Oxoniensis“ (1885), beobachtet worden ist. Bei diesem Instrument wird mit Hilfe einer Abschwächungsvorrichtung, in der Regel einem in den Strahlengang des Fernrohres eingesetzten Keil, der Stern zum Verschwinden gebracht und die entsprechende Keilstellung abgelesen. Die Methode ist großen systematischen Fehlern unterworfen, deren Bestimmung besondere Untersuchungen erfordert.

Bei dem Studium der Veränderlichkeit der Lichtstärke der Sterne ist am meisten das *Zöllner*sche Photometer, öfters mit einer Keilvorrichtung an Stelle des Polarisationsapparates versehen, benutzt worden.

Für die visuelle Photometrie von Flächenhelligkeiten sind schon von *Zöllner* selbst und dann von *Ceraski* einfache Abänderungen des *Zöllner*schen Photometers vorgeschlagen worden. Ein von *E. Schoenberg*[43]) konstruiertes Flächenphotometer dieser Art muß hier erwähnt werden, weil mit ihm ausgedehnte Messungen der Flächenhelligkeit auf der Oberfläche des Mondes und der großen Planeten ausgeführt worden sind, die auf Grund neuer Beleuchtungstheorien zu weitgehenden Schlüssen über die Beschaffenheit der Oberfläche des Mondes, der Atmosphären einiger der großen Planeten und des Saturnringes geführt haben.

Die erste Anwendung der *Photographie* zur Bestimmung der Helligkeit der Gestirne fällt in die 80er Jahre des vorigen Jahrhunderts. Wenn auch schon *G. P. Bond*[44]) in den 50er Jahren an der Sternwarte des Harvard College die ersten photographisch-photometrischen Versuche mit Hilfe von Kollodiumplatten ausgeführt hat und auch eine Methode der Bestimmung von Sternhelligkeiten aus ihren Durchmessern auf der Platte entwickelte und *Warren de la Rue*[45]) schon im

---

41) Revised Harvard Photometry. Harvard Ann. 50 (1908) und Harvard Ann. 54 (1908).

42) Uranometria nova Oxoniensis. Oxford 1885.

43) Publik. der Sternwarte Dorpat 24 (1917), p. 3.

44) Monthly Not. 18 (1857/58), p. 54.

45) Astr. Nachr. 49 (1858), p. 81.

Jahre 1858 Helligkeitsvergleichungen des Mondes mit Jupiter und Saturn aus ihren Bildern auf Kollodiumplatten veröffentlichte, so ist doch erst durch das große Unternehmen der photographischen Himmelskarte die Anwendung der Photographie allgemein geworden. Es galt jetzt das reichhaltige Material, das die Platten der Himmelskarte lieferten, auch zur Bestimmung der Helligkeiten der Sterne zu verwerten. Dazu wurden zahlreiche Untersuchungen über die Beziehung zwischen dem photographischen Bilde und der Helligkeit des Sterns ausgeführt.[46]) Gleichzeitig (1882) hatte *E. C. Pickering*[47]) in Harvard die Arbeiten seines Vorgängers *Bond* mit den wesentlich bequemeren Trockenplatten wieder aufgenommen und bald erkannt, daß die Messung der Schwärzung der Sternbildchen auf der Platte derjenigen der Bilddurchmesser vorzuziehen sei. *Pickering* gebührt auch das Verdienst, die Notwendigkeit einer rein photographischen Helligkeitsskala eingesehen und durch eine Reihe photographisch-photometrischer Kataloge von Fixsternen eine solche praktisch eingeführt zu haben.

Die Arbeiten von *Pickering* und seinen Schülern in Harvard auf dem Gebiete der photographischen Photometrie sind außerordentlich fruchtbar gewesen und werden uns im Laufe dieser Untersuchung noch öfters beschäftigen. Von ähnlicher Bedeutung für die Entwicklung der photographischen Photometrie waren auch die Arbeiten von *K. Schwarzschild.*[48]) Auch *Schwarzschild* benutzte die Schwärzungen der Platte als Maß der Helligkeiten; da aber die Sternscheibchen im Brennpunkt zu klein und ungleichförmig geschwärzt herauskommen, führte er die Beobachtung außerfokaler Sternbilder ein. Um auch die fokalen Sternbilder genau vermeßbar zu machen, konstruierte er die sog. Schraffierkassette[49]), bei der durch eine zweidimensionale Bewegung der Kassette gleichmäßig geschwärzte Quadrate für die Sternbilder entstehen. Das zweite Verfahren hatte den Vorzug, daß die optischen Fehler des Objektives dabei unschädlich gemacht wurden. Mit diesem Instrument hat *Schwarzschild*[50]) einen

---

46) S. Fußnote 81, p. 855.

47) An Investigation in Stellar Photography. Mem. Amer. Acad. II (1886), p. 179.

48) Publik. der Kuffnerschen Sternwarte 5 (1900).

49) *Meyermann* u. *Schwarzschild,* Über eine Schraffierkassette zur Aktinometrie der Sterne. A. N. 170 (1906), p. 277. — Über eine neue Schraffierkassette. A. N. 174 (1907), p. 137.

50) Aktinometrie der Sterne der B. D. in der Zone 0° bis $+20^\circ$ Deklination. Teil A: Astr. Mitteil. d. Kgl. Sternwarte zu Göttingen, 14 Teile. Göttingen 1910. Teil B: Abh. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl. Neue Folge 8, Nr. 4. Berlin 1912.

photographisch-photometrischen Sternkatalog der Zone 0° bis 20° Deklination von sehr hoher Genauigkeit geschaffen, der die Grundlage vieler stellarstatistischer und anderer Untersuchungen wurde, die sog. Göttinger Aktinometrie. Der Katalog ist auf einer rein photographischen Helligkeitsskala aufgebaut, die *Schwarzschild* einem Vorschlage von *Kapteyn* zu verdanken hat. Außer diesem seinem photometrischen Hauptwerk hat *Schwarzschild* noch eine Reihe teils theoretischer, teils praktischer Untersuchungen durchgeführt oder angeregt, welche fast alle Zweige der photographischen Photometrie betreffen und wesentlich zur Erweiterung unserer theoretischen Kenntnisse beigetragen haben. Kurz nach der „Göttinger Aktinometrie" erschien die „Yerkes Actinometry" von *J. A. Parkhurst*[51]), welche die photographischen und die photovisuellen Helligkeiten der Sterne bis zur Größe 7,5 der nördlichen Polzone enthält. Ihr liegt eine mit Hilfe eines Röhrenphotometers hergestellte absolute Helligkeitsskala zugrunde. In neuerer Zeit ist von *E. C. Pickering* und seiner Mitarbeiterin Miss *Leavitt*[52]) ein äußerst genauer Katalog photographischer und photovisueller Helligkeiten, „die internationale Polsequenz" geschaffen worden; dieser kleine Katalog der um den Nordpol herum gelegenen Sterne bis zu den schwächsten ist dazu abgesehen, eine für alle photographischen Helligkeitsuntersuchungen gültige Skala abzugeben; durch eine Aufnahme des Poles auf dieselbe Platte, die die zu photometrierenden Sterne enthält, ergibt sich die Möglichkeit der Bestimmung der unbekannten Sternhelligkeiten, wobei verschiedene Fehlerquellen der photographischen Methode eliminiert werden. Die von *F. H. Seares*[53]) (Mt. Wilson) neubearbeitete definitive Form der Polsequenz ist heute allgemein im Gebrauch.

Außer diesen Helligkeitskatalogen sind in den letzten Jahrzehnten sehr viele photographisch-photometrische Spezialuntersuchungen, insbesondere über veränderliche Sterne gemacht worden, wobei die Methoden der Auswertung der Platten sehr verschieden waren. Von besonderem Interesse ist die von *E. Hertzsprung*[54]) ausgearbeitete Methode afokaler Aufnahmen durch ein Stabgitter vor dem Objektiv. Ein solches Gitter gibt neben dem zentralen Sternscheibchen zu beiden

51) Astroph. Journ. 36 (1912), p. 169.

52) The North Polar Sequence. Harvard Ann. 71, Nr. 3 (1917), p. 47.

53) Mt. Wilson Contributions 70, 80, 81, 97, 98, 234, 235, 287, 288, 289, 305 bzw. Ap. J. 38 (1913), p. 241; 39 (1914), p. 307; 41 (1915), p. 206, 259; 56 (1922), p. 84, 97; 61 (1925), p. 114, 284, 303; 63 (1926), p. 160.

54) A. N. 186 (1910), p. 177. *Chapman* a. *Melotte*, On the Application of Parallel Wire Diffraction Gratings to Photographie Photometry. M. N. 74 (1913), p. 50.

Seiten die Beugungsbilder, deren Helligkeitsverhältnis zum Zentralbilde aus der Dichte des Gitters streng berechenbar ist. Damit ist also eine Schwärzungsskala auf der Platte gegeben, die für die Untersuchung kleiner Lichtschwankungen äußerst bequem ist.

Für die Ausmessung der Schwärzungen photographischer Platten hat ein von *J. Hartmann*[55]) konstruiertes Instrument, das sog. Mikrophotometer, eine sehr große Bedeutung gewonnen. Dasselbe gestattet in seiner ursprünglichen Form, die Schwärzungen beliebig kleiner Teile der Platte (afokaler Sternbilder, fokaler Planetenbilder usw.) mit großer Genauigkeit visuell zu vergleichen; in seiner neueren Form ist das Instrument mit einer Thermosäule oder einer lichtelektrischen Zelle verbunden und mißt dann die Durchsichtigkeit der Platte automatisch unter Ausschaltung der subjektiven Fehler des Beobachters.

Für das genaue Studium der Lichtkurven veränderlicher Sterne hat das von *J. Stebbins*[56]) im Jahre 1910 in die astronomische Praxis eingeführte Selenphotometer und das von *H. Rosenberg*[57]) und *P. Guthnick*[58]) für astronomische Zwecke durchgearbeitete *lichtelektrische Photometer* eine große Bedeutung gewonnen. Diese Instrumente besitzen gegenüber den anderen Photometern eine etwa zehnfach größere Genauigkeit und sind von den persönlichen Fehlern des visuellen Photometers einerseits und den großen zufälligen und systematischen Empfindlichkeitsschwankungen photographischer Platten andererseits frei. Besonders fruchtbar sind die Arbeiten von *P. Guthnick* am lichtelektrischen Photometer der Sternwarte Berlin-Babelsberg gewesen; sie führten zur Entdeckung einer Reihe neuer schwach veränderlicher Sterne, deren Lichtkurven so genau festgelegt werden konnten, wie das mit keinem anderen Instrument möglich gewesen wäre. Auch zur Messung der spezifischen Farbe der Sterne, der sog. Farbenindizes, hat das Babelsberger Instrument sich als hervorragend brauchbar erwiesen.[59]) Für statistische Arbeiten und die dokumentarische Festlegung der Helligkeiten größerer Gebiete des Himmels ist aber die photographische Platte, die das aufgenommene Himmelsbild beliebig lange aufzubewahren gestattet, das wichtigste und unersetzliche Mittel der astronomischen Photometrie geblieben. Sie hat auch den Vorzug,

55) Apparat und Methode zur photogr. Messung von Flächenhelligkeiten. Ztschr. f. Instrum. 19 (1899), p. 97.

56) Ap. J. 32 (1910), p. 187.

57) Vjschr. 48 (1913), p. 210; Handb. d. Astrophys. Bd. II, p. 418.

58) A. N. 196 (1913), p. 357; Veröffentlich. d. Sternwarte Babelsberg 1 (1915), p. 1.

59) Veröffentl. d. Universitäts-Sternwarte Berlin-Babelsberg 3 (1923), H. 4. *Bottlinger,* Lichtelektrische Farbenindizes von 459 Sternen.

die schwächsten Sterne zu erfassen, was den visuellen Photometern, und in noch höherem Maße den elektrischen versagt ist. Praktisch reicht bisher nur die photographische Photometrie über die 8. Größenklasse der Sterne hinaus.

Noch begrenzter in ihrer Anwendung ist die *Radiometrie* oder die Messung der Gesamtstrahlung der Himmelskörper mit Hilfe von Pyrheliometern, Bolometern und Radiometern. Mit ihrer Hilfe sind wichtige Ergebnisse über die Strahlung der Sonne und der Planeten erzielt worden, in ihrer Anwendung auf Fixsterne versagen diese Instrumente auch in Verbindung mit den Riesenteleskopen Amerikas schon bei der 4. Größenklasse.

I. Die Methoden der Astrophotometrie und ihre Grenzen.

3. Allgemeine Definitionen. *Strahlungsmenge, Strahlungsintensität, Bestrahlung.* Der Gegenstand der Photometrie ist die *Intensität* der Strahlung, die immer durch die Strahlungsmenge bestimmt werden muß, welche auf einen flächenhaft ausgedehnten Empfänger fällt. Man definiert die Strahlungsintensität U einer punktförmigen Lichtquelle als die Strahlungsmenge G, die sich im räumlichen Winkel ω befindet, der den Empfänger umfaßt und seine Spitze in der Strahlungsquelle hat, dividiert durch die Größe dieses Winkels. Ist f die Fläche des Empfängers, i der Einfallswinkel der Strahlen auf denselben und r sein Abstand von der Lichtquelle, so ist der räumliche Winkel

$$\omega = \frac{f \cos i}{r^2} = s,$$

wo s die Fläche ist, die derselbe aus der Kugel mit dem Radius 1 und dem Zentrum im leuchtenden Punkte herausschneidet. Es ist also die Strahlungsintensität des Punktes

$$U = \frac{G}{\omega} = \frac{G}{s} \tag{1}$$

und die Strahlungsmenge auf der Fläche s (im räumlichen Winkel ω)

$$G = Us = U\omega = U\frac{f \cos i}{r^2}. \tag{2}$$

Wenn man die Strahlungsmenge auf die Einheit der Fläche bezieht, so wird die *Bestrahlung* B durch dieselbe Zahl gemessen wie die Intensität der Strahlung

$$B = \frac{G}{\omega} = \frac{G}{s} = U. \tag{3}$$

Bei der Bestimmung der Intensität von strahlenden Flächen kann man sich diese aus unendlich vielen Flächenelementen zusammengesetzt denken und jedes Element als strahlenden Punkt auffassen; es kommt hier aber ein neuer Winkel hinzu, nämlich der Winkel ε der Normalen des Flächenelements σ mit der Ausstrahlungsrichtung. Gilt das *Lambert*sche Emanationsgesetz für Selbstleuchter, so ist die von jedem Element austretende Strahlungsmenge J proportional dem Kosinus des Emanationswinkels

$$J = \eta \sigma \cos \varepsilon, \tag{4}$$

wo der Proportionalitätsfaktor η das *Strahlungsvermögen* genannt wird. Für eine leuchtende Fläche oder einen leuchtenden Körper, der aus ebenen Elementen zusammengesetzt ist, folgt

$$J = \eta \sum \sigma \cos \varepsilon = \eta S. \tag{4'}$$

Da aber $S = \sum \sigma \cos \varepsilon$ der räumliche Winkel ist, unter dem der Körper aus dem Abstande Eins erscheint, so folgt, daß ein strahlender Körper (oder eine strahlende Fläche) auf einen Punkt im Abstande Eins die Strahlenmenge sendet, die gleich ist dem Produkt aus dem Strahlungsvermögen mit seiner scheinbaren Größe aus diesem Abstande. Für einen Punkt im Abstande r muß die Strahlungsmenge im Verhältnis r^2 kleiner sein, da aber auch die scheinbare Größe im selben Verhältnis kleiner wird, so gilt der Satz für beliebige Abstände der strahlenden Fläche

$$J = \eta \frac{\sum \sigma \cos \varepsilon}{r^2} = \eta \Omega, \tag{4''}$$

wo Ω die Bezeichnung für den räumlichen Winkel im Abstande r ist.

Fällt die Strahlung vom leuchtenden Elemente σ, dem der räumliche Winkel ω entspricht, auf *die Fläche* s im Abstande r unter dem Einfallswinkel i, so ist nach (2) die auffallende Strahlungsmenge

$$G = \eta \omega s \cos i = \frac{\eta \sigma s \cos \varepsilon \cos i}{r^2}. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) trägt den Namen des zusammengesetzten *Lambertschen Grundgesetzes* der Photometrie.

Die von einer leuchtenden Fläche σ in den räumlichen Winkel 2π ausgesandte Strahlungsmenge ergibt sich durch Integration über die Halbkugel zu

$$G = 2\pi \eta \sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \, d\varepsilon = \pi \eta \sigma. \tag{6}$$

Die obigen Gleichungen gelten nur für monochromatische Strahlung mit einem bestimmten Strahlungsvermögen η_λ. Bei gemischter Strahlung ist letzteres für jede Wellenlänge verschieden, und wir haben für das Strahlungsvermögen im Bereiche der Wellenlängen λ_1 bis λ_2

$$\eta_{12} = \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \eta_\lambda \Delta\lambda,$$

wo $\Delta\lambda$ der Bereich ist, für den η_λ als konstant angesehen werden kann. Für das kontinuierliche Spektrum ist

$$\eta_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \eta_\lambda d\lambda.$$

Ebenso gilt für den gesamten Energiestrom bei zusammengesetzter Strahlung in den Grenzen λ_1 und λ_2

$$G_{12} = \frac{\sigma s \cos\varepsilon \cos i}{r^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \eta_\lambda d\lambda. \tag{7}$$

4. Die Definitionen der visuellen Photometrie. Ist der Empfänger der Strahlung das menschliche Auge, so verwandelt sie sich in Lichtempfindungen, und den Bestimmungsgrößen der Strahlungslehre entsprechen jetzt solche der visuellen Lichtmessung oder Photometrie.

Die Strahlung erleidet schon beim Durchgang der der Netzhaut vorgelagerten Medien des Auges, der Hornhaut, der Kristallinse, der zwischen beiden liegenden wässerigen Flüssigkeit und des jenseits der Linse liegenden Glaskörpers eine Absorption, so daß die Netzhaut nur noch Strahlen von kleinerer Wellenlänge als 0,812 μ erreichen; auch eine untere Grenze hat die bis zur Netzhaut durchdringende Strahlung; diese liegt bei 0,370 μ. Die äußerste rote Strahlung wird von der Netzhaut nicht als Licht empfunden, so daß die normalen Grenzen der Sichtbarkeit zwischen dem äußersten Rot bei 0,760 μ und dem äußersten Violett bei 0,370 μ liegen. Über den Vorgang der Verwandlung der die Netzhaut treffenden Strahlung in Farbenempfindungen sind wir nicht genau unterrichtet. Es ist aber bekannt, daß nur ein Bruchteil derselben in die physiologische Energie Φ verwandelt wird, welche die Lichtempfindung verursacht. Indem wir die Absorption vor der Netzhaut mit derjenigen *durch* dieselbe zusammenfassen, bezeichnen wir das Verhältnis der physiologischen Energie der Lichtempfindung Φ_λ für die Wellenlänge λ zu der äußeren Energie durch K_λ. Diese Zahl trägt den Namen des *physiologischen Koeffizienten.* Es ist also

$$\Phi_\lambda = U_\lambda K_\lambda, \tag{8}$$

wenn U_λ die Intensität der äußeren Strahlung bedeutet. Der Faktor K_λ ist mit der Wellenlänge stark veränderlich. Die folgende Tabelle 1 enthält die von der internationalen Beleuchtungskommission in Genf

1924 angenommenen Standardwerte desselben. Diese Werte sind aus Beobachtungen von 250 Personen als Mittel abgeleitet und dürften von den individuellen Verschiedenheiten in hohem Grade befreit sein. Sie gelten natürlich nicht für teilweise oder total Farbenblinde, sondern für das normale farbentüchtige Auge.

Tabelle 1.
Standardwerte der physiologischen Koeffizienten.

Wellenlänge in μ	K_λ	Wellenlänge in μ	K_λ	Wellenlänge in μ	K_λ
0,40	0,0004	0,53	0,862	0,65	0,107
0,41	0,0012	0,54	0,954	0,66	0,061
0,42	0,0040	0,55	0,995	0,67	0,032
0,43	0,0116	0,56	0,995	0,68	0,017
0,44	0,023	0,57	0,952	0,69	0,0082
0,45	0,038	0,58	0,870	0,70	0,0041
0,46	0,060	0,59	0,757	0,71	0,0021
0,47	0,091	0,60	0,631	0,72	0,00105
0,48	0,139	0,61	0,503	0,73	0,00052
0,49	0,208	0,62	0,381	0,74	0,00025
0,50	0,323	0,63	0,265	0,75	0,00012
0,51	0,503	0,64	0,175	0,76	0,00006
0,52	0,710				

Die Werte dieser Tabelle sind in einer willkürlichen Einheit ausgedrückt. Die Absolutwerte sind natürlich niemals zu bestimmen. Folgende Gleichungen, die die Beziehungen der Begriffe der Strahlungslehre zu denen der visuellen Photometrie ausdrücken, sind deshalb mit derselben Unbestimmtheit behaftet.

G Energiestrom, Energiemenge . $GK = Q$ Lichtstrom, Lichtmenge.
U Strahlungsstärke, Strahlungsintensität . . . . $UK = J$ Lichtstärke, Lichtintensität.
η Strahlungsvermögen . . . . $\eta K = h$ Leuchtvermögen oder auch Flächenhelle einer Lichtquelle.
B Bestrahlung . . . . $BK = L$ Beleuchtung.

Die Gleichungen (2), (3), (4) und (5) für die Grundgesetze der Strahlungslehre lassen sich mit den Bezeichnungen der visuellen Photometrie in der Form umschreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} (2') & Q = J\omega = J\dfrac{f\cos i}{r^2} \\[2ex] (3') & L = \dfrac{Q}{\omega} = J \end{array}\right\} \text{ für den leuchtenden Punkt;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (4') & J = h\sigma\cos\varepsilon \\[2ex] (5') & Q = \dfrac{h\sigma s\cos\varepsilon\cos i}{r^2} \end{array}\right\} \text{ für die leuchtende Fläche.}$$

Empfindlichkeitsschwelle, Unterscheidungsschwelle, Purkinjesches Phänomen. Zeigt schon die vorige Tabelle die außerordentliche Verschiedenheit in der Empfindlichkeit des Auges für Strahlung verschiedener Wellenlänge, so könnte dasselbe trotzdem innerhalb der Grenzen dieser Tafel als vorzügliches Meßinstrument gelten, wenn die individuellen Unterschiede einzelner Beobachter gegen die angeführten Mittelwerte sicher bekannt wären und auch konstant blieben. Das ist nun aber in der Regel nicht der Fall. Sowohl die *Empfindlichkeitsschwelle* der einzelnen Beobachter für Helligkeitsänderungen ist individuell und zeitlich recht verschieden als auch die *Unterscheidungsschwelle* der einzelnen Farben. Man rechnet durchschnittlich, daß das Auge 1 % der Helligkeit bei gemischtem Licht unterscheiden kann, doch sind die Werte, die *Bouguer*[60]), *Arago*[61]), *Fechner*[62]) und *Masson*[63]) für die Empfindlichkeitsschwelle angeben, recht verschieden und schwanken zwischen 1 : 64 und 1 : 130. Bei farbigem Lichte liegt nach *Lamansky* die Empfindlichkeitsschwelle für Grün und Gelb bei 1 : 286, für Blau bei 1 : 212, für Violett bei 1 : 109, für Orange und Rot bei 1 : 178. *Dobrowolsky* gibt für die einzelnen Farben nicht unwesentlich von den obigen abweichende Zahlen, und *König* und *Brodhun* finden als Empfindlichkeitsschwellen für die einzelnen Farben viel größere und viel weniger verschiedene Werte: 1 : 40 bis 1 : 51.

Die Unterscheidungsschwelle ist für ein normales farbentüchtiges Auge nach *Uthoff*[64]) im äußersten Rot 4,7 $\mu\mu$, nimmt im Orange schnell ab und erreicht im Gelb ein Minimum von 0,9 $\mu\mu$, steigt dann im Grün wieder an bis 1,9 $\mu\mu$, um im Blaugrün ein zweites Minimum mit 0,7 $\mu\mu$ zu erreichen und dann nach dem Indigo zu wieder anzusteigen bis 2,2 $\mu\mu$.

Alle diese Zahlen sind für die günstigsten Beobachtungsbedingungen gefunden worden und gelten nicht mehr, sobald die Helligkeit gewisse Grenzen nach oben oder nach unten überschreitet. Zu große Helligkeit blendet das Auge, bei einer zu kleinen Helligkeit verliert dasselbe allmählich das Unterscheidungsvermögen der Farben, wobei noch besondere Erscheinungen auftreten, die mit der Beschaffenheit der Netzhaut des menschlichen Auges zusammenhängen. Diese ist in ihren physiologischen Eigenschaften nicht gleichartig. Das Gebiet des schärfsten Sehens ist die Fovea, die wesentlich aus Zäpfchen

60) Traité d'optique etc., p. 25. Paris 1760.

61) Sämtliche Werke. Deutsche Ausgabe von *Hankel* 10, p. 210.

62) Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 4 (1859), p. 455.

63) Ann. de chim. et de phys. Série 3, tome 14 (1845), p. 150.

64) *R. Tigerstedt,* Lehrbuch der Physiologie des Menschen 2, p. 273.

besteht. Mit der Fovea sehen wir normalerweise bei hell adaptiertem Auge und bei (unbewußtem) Fixieren eines Gegenstandes. Der übrige Teil der Netzhaut besteht wesentlich aus Stäbchen, und diese benutzen wir bei dunkel adaptiertem Auge, wenn die Helligkeit unter der Unterscheidungsschwelle der Fovea liegt. Das Auge bildet bei Dunkeladaptation unbewußt extrafoveal ab und benutzt dann vorwiegend die Stäbchen. Diese haben aber eine andere Empfindlichkeitskurve als die Fovea.

Die Fig. 1 zeigt neben der unserer Tabelle der physiologischen Koeffizienten entsprechenden Empfindlichkeitskurve des Zäpfchensehens links den Verlauf derselben Koeffizienten bei extrafovealem Stäbchensehen nach *Bender*.[65]) Ihr Maximum liegt bei 520 $\mu\mu$, somit ist das Auge bei Dunkeladaptation empfindlicher für blau als bei Helladaptation. Diese in neuerer Zeit geklärten Erscheinungen haben für die visuelle Photometrie, die öfters unterschwellige Helligkeiten der Messung unterwirft, eine große Bedeutung. Das seit dem Beginn der Photometrie bekannte *Purkinjesche Phänomen*[66]) findet in ihnen seine einfache Erklärung. Das Auge besitzt bei einiger Übung die Fähigkeit, auch verschiedenfarbige Felder nach Helligkeitsgraden zu unterscheiden, indem es z. B. gleiche Helligkeit eines blauen und eines roten Feldes feststellen kann. Schwächt man nun beide Felder im gleichen Verhältnis fortschreitend ab, so erscheinen die Objekte zunächst gleich hell. Dann aber, sobald eine gewisse Strahlungsstärke unterschritten ist, nimmt die Helligkeit des blauen Feldes langsamer ab als die des roten, so daß bei weiterer Schwächung das blaue Feld heller erscheint; doch wird nach Überschreitung eines Maximums der Unterschied wieder geringer. Die Erklärung liegt darin, daß das Auge, um an Sehschärfe zu gewinnen, die Objekte an mehr und mehr zur Peripherie der Netzhaut hinrückenden Stellen abbildet. Damit nimmt die Zahl der erregten Stäbchen gegenüber der Zahl der Zäpfchen ständig zu, und da gleichzeitig die Stäbchen dunkel adaptieren, während die Zäpfchen das nicht tun, so wird die Empfindung in zunehmendem Maße durch die Stäbchen bestimmt. Sind schließlich nur

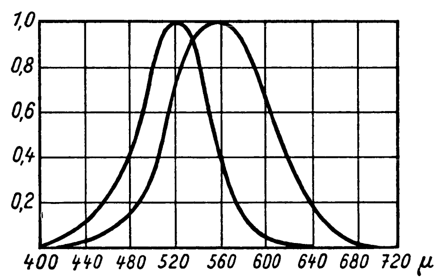

Fig. 1.
Relative spektrale Empfindlichkeit des Auges (rechts Zapfenkurve, links Stäbchenkurve). (Nach Handb. d. Astroph. II, p. 540.)

65) Untersuchungen am *Lummer-Pringsheim*schen Spektralflickerphotometer. Inaug.-Diss. Breslau 1913.

66) *Purkinje*, Zur Physiologie der Sinne 2, p. 109.

noch Stäbchen wirksam, so beginnt der Helligkeitsunterschied infolge der abnehmenden Unterscheidungsempfindlichkeit des Auges wieder kleiner zu werden.

Neuerdings wird übrigens die Konstanz der spektralen Empfindlichkeit der Fovea *oberhalb* der Unterschiedsschwelle für punktförmige Objekte bestritten, und zwar mit besonderem Nachdruck von *Ch. Gallissot*[67]) und *A. Danjon.*[68]) Dies *Gallissotsche Phänomen* verläuft im entgegengesetzten Sinne wie das *Purkinje*sche. Ein blauer und ein roter Stern sollen bei fovealem Sehen bei anfänglich geringer Lichtstärke, wenn man diese in gleichem Verhältnis verstärkt, nicht mehr gleich hell erscheinen, sondern der blaue in zunehmendem Maße heller erscheinen als der rote.

Der Übergang vom fovealen Zäpfchen- zum extrafovealen Stäbchensehen vollzieht sich bei abnehmender Lichtstärke nicht gleichzeitig für alle Beobachter. Er kann zu einer bedeutenden Fehlerquelle werden, besonders bei Beobachtung von veränderlichen Sternen mit großer Amplitude, wie die roten Mirasterne. Die Helligkeitskurven verschiedener Beobachter weichen in der Nähe des Minimums der Helligkeit stark voneinander ab, weil sie zu verschiedener Zeit und auch manchmal in verschiedenem Tempo vom Zäpfchen- zum Stäbchensehen übergehen, und sind beide gegenüber dem wirklichen Verlaufe der Helligkeit verfälscht. Eine Untersuchung dieser Fehler ist von *M. G. J. Minnaert* und *J. van der Bilt* [M. N. 92 (1932), p. 422] ausgeführt worden.

5. Das Prinzip des astronomischen Photometers. Das Auge kann somit zu Präzisionsmessungen der Helligkeit nur angewandt werden, wenn ihm *allein die Beurteilung gleicher Helligkeit* überlassen bleibt; dabei müssen die zu vergleichenden Objekte von gleicher Farbe sein und sich dicht nebeneinander und gleichzeitig auf der Netzhaut abbilden. Die Herstellung gleicher Helligkeit muß von dem optischen Apparat, dem Photometer, besorgt werden. Von diesen ist eine sehr große Zahl konstruiert und eine wesentlich geringere zu umfangreichen Messungen am Himmel verwendet worden. Die Genauigkeit dieser visuellen Photometer kann im allgemeinen 1% der Helligkeit nicht übersteigen.[69]) Sie ist beim Vergleich flächenhafter Objekte

67) La photométrie du point lumineux appliquée aux déterminations des éclats stellaires (Thèses presentées à la Faculté des sciences de Lyon 1921).

68) Ann. de l'Observ. de Strasbourg 2 (1928), p. 12.

69) Bei besonderen Vorrichtungen ist es in einem Falle gelungen, die Genauigkeit bei einem Punktphotometer darüber hinaus zu steigern. Siehe *A. Danjon,* Ann. de l'Obs. de Strasbourg 2 (1928), p. 82.

etwas größer als bei Punktphotometern. Wenn die Messungen von Verfälschungen durch das *Purkinje*-Phänomen frei sein sollen, muß für gleiche Färbung der zu vergleichenden Objekte aufs genaueste Sorge getragen werden.

6. Die Grenze der Sichtbarkeit. Neue Untersuchungen über die physiologischen Eigenschaften des Auges bei schwächsten Lichteindrücken haben nicht nur über die Grenze der Sichtbarkeit schwächster Lichteindrücke zahlenmäßige Daten geliefert, sondern dadurch auch den Bau von solchen Photometern ermöglicht, die in ihrer Lichtstärke über die alten Typen weit hinaus gehen.

Die Abbildung der Himmelsobjekte durch ein Fernrohr auf der Netzhaut kann auch bei Sternen flächenhaft sein, wenn diese extrafokal betrachtet werden, und zwar hat man es in der Hand, die Fläche der Abbildung auf der Netzhaut beliebig zu vergrößern. Für die Wahrnehmung schwächster Sterne und Nebelflecke ist eine genaue Kenntnis der Empfindungsschwelle bei fovealem und extrafovealem Sehen von größter Bedeutung. Das extrafoveale Sehen tritt erst bei Dunkeladaptation und schwächsten Objekten in Tätigkeit und reicht dann bis zu wesentlich geringeren Helligkeiten als das foveale. Als Empfindungsschwelle für das extrafoveale Sehen hat man die Größenordnung 10^{-13} Lumen, was der Auffassung eines Sternes 7. Größe mit bloßem Auge entspricht, angesehen und auch noch geringere Werte bis zur Größe 8,5 angegeben; für das foveale Sehen bei normalen Bedingungen liegt diese Schwelle 4^m höher. Für die Wahrnehmung der schwächsten Objekte kommt also nur das extrafoveale Sehen und das Gebiet der Übergänge aus dem einen in das andere in Betracht. Hier gelten nun folgende Regeln von *Riccò* und *Piper*, die neuerdings von *Löhle*[70]) geprüft und bestätigt worden sind. Die *Riccò*sche Regel lautet:

Der Schwellenwert der Gesamtintensität bleibt konstant bei der Vergrößerung des Sehwinkels von 0,1′ bis zu 10′, also von nahezu punktförmiger Abbildung auf der Netzhaut bis zu flächenhafter der genannten Größe.

Von 10′ bis 2° scheinbarer Ausdehnung haben wir den Übergang zur *Piper*schen Regel, die von 2° bis mindestens 15° Sehwinkel gilt. Nach dieser Regel ist die Schwelle des Lichtstromes dem Sehwinkel proportional, d. h. wenn man eine Lichtmenge unter 2° Sehwinkel gerade noch wahrnehmen kann, so kann man unter 4° Sehwinkel eine doppelt so große Lichtmenge gerade noch wahrnehmen,

70) Ztschr. f Phys. 54 (1929), p. 137.

obgleich deren Flächenhelligkeit nur halb so groß ist. Für Objekte von 5^0 Durchmesser liegt die Schwelle bei 10^{-12} Lumen.

Aus diesen Regeln hat *J. Hopmann*[71]) gefolgert, daß für die Wahrnehmung lichtschwacher, flächenhafter Objekte, bei günstiger Wahl der Vergrößerung, die ein genügend großes Netzhautbild (über 1^0) sichert, die Wahrnehmungsgrenze bei einem visuellen Fernrohr wesentlich tiefer liegen kann als diejenige eines photographischen mit günstigem Öffnungsverhältnis und langer Expositionsdauer. Dadurch erklärt sich nach *Hopmann* der Mißerfolg der Versuche, die lichtschwachen *Hagen*schen Nebel trotz mehrstündiger Expositionen photographisch festzuhalten. Dieser Vorzug visueller Wahrnehmbarkeit gegenüber der photographischen hört auf, sobald der Durchmesser der Nebel so klein ist, daß das Netzhautbild auch bei günstigster Vergrößerung unterhalb der *Piper*schen Grenze liegt.

Bei dem Bau lichtstarker Photometer hat man in neuerer Zeit diese Gesichtspunkte beachtet. Bei der Wichtigkeit der Photometrie schwächerer Sterne, der Kometen und Nebelflecke sind solche Photometer von großer Bedeutung. Für die Photometrie des nächtlichen Himmels in seinen verschiedenen Teilen (Milchstraße, Zodiakallicht u. a.) einerseits und für diejenige schwacher Sterne andererseits hat sich ein Instrumententypus besonderer Art entwickelt, dessen Idee auf *Helmholtz* und *Maxwell*[72]) zurückgeht. Es ist das ein Fernrohr ohne Okular, bei dem die Pupille des Beobachters in den Brennpunkt des Objektivs gesetzt wird und das Auge so ein Bild des Objektivs im Lichte des Sternes oder Himmels sieht, wobei das Netzhautbild des extrafokalen Sternbildes genügend groß ist, um die Höchstempfindlichkeit bei Dunkeladaptation des Auges zu garantieren. Es gilt dann für die Flächenhelligkeit des Bildes der Satz, daß dieselbe der Leuchtkraft des Objektes und dem Quadrate der Brennweite des Objektivs proportional ist, dagegen unabhängig von dessen Durchmesser. Somit können kleinere Objektive, die durch Vorsetzen einer Negativlinse vor den Brennpunkt auf große äquivalente Brennweite gebracht sind, in ihrer Wirksamkeit für geringe Lichtstärken sehr gesteigert werden.[73])[74])

7. Das Fechner-Webersche psychophysische Gesetz und die Größenklassen der Gestirne. Schon in den ältesten Sternverzeich-

71) A. N. 5706 (1930), p. 288.

72) Phil. Trans. 150 (1860), p. 57.

73) *G. Gehlhoff* u. *H. Schering,* Ztschr. f. techn. Phys. 1 (1920), p. 247; Phys. Ztschr. 22 (1921), p. 71.

74) *J. Hopmann,* Veröffentl. d. Sternwarte Leipzig, H. 3, 1932.

nissen, im Amalgest des Ptolemäus und dem Katalog von Al-Sufi[75]), finden wir die Helligkeitsangaben der Sterne nach Stufen geordnet, wobei den hellsten die Stufe 1 zugeordnet wird, den schwächeren größere Zahlen. Diese Stufen sind nichts anderes als die Größenklassen der Gestirne, die wir auch heute benutzen. Mißt man das Helligkeitsverhältnis zweier Sterne der Stufen 1 und 2, 2 und 3 usw., so findet man ein und dieselbe Zahl, die für die einzelnen Beobachter etwas verschieden ausfällt. Es offenbart sich darin ein Grundgesetz der menschlichen Empfindungen, das erst im 18. Jahrhundert durch *Fechner*[76]) und *Weber* seine strenge Formulierung gefunden hat. Die Empfindung wächst in arithmetischer Progression, während der Reiz in geometrischer fortschreitet. Bezeichnet J die objektive Helligkeit, E die geschätzte Empfindungsgröße und entspricht dem Zuwachs dJ der objektiven Helligkeit die Zunahme dE der Empfindungsstärke, dann ist nach *Fechner* dE dem Verhältnis $dJ : J$ proportional

$$dE = c_1 \frac{dJ}{J}, \tag{6}$$

wo c_1 eine Konstante ist. Durch Integration erhält man

$$E = c_1 \ln J + C = c \log J + C.$$

Für ein anderes Paar einander entsprechender Werte J_0 und E_0 hat man ebenso

$$E_0 = c \log J_0 + C,$$

und daraus folgt

$$E - E_0 = c \log \frac{J}{J_0}. \tag{7}$$

Zwei Sternpaare, deren Helligkeitsstufen um denselben Betrag $E - E_0$ verschieden sind, haben hiernach dasselbe Helligkeitsverhältnis $J : J_0$. Das *Fechner*sche Gesetz hat nicht unbeschränkte Gültigkeit, und zwar werden die Abweichungen bei sehr geringen Lichtstärken infolge des Eigenlichtes des Auges recht bedeutend. Bezeichnet man letzteres durch J_e, so müßte, da es jederzeit zu der objektiven Intensität hinzukommt, das *Fechner*sche Gesetz die Form haben

$$dE = c \frac{dJ}{J + J_e}.$$

Hieraus folgt, daß der Empfindungszuwachs geringer wird, als wenn $J_e = 0$ wäre, und daß die Abweichung um so größer wird, je kleiner J ist. Das Gesetz versagt natürlich auch bei zu großen Lichtstärken, die eine Blendung des Auges hervorrufen.

---

75) Siehe Einleitung p. 838.

76) Über ein psychophysisches Grundgesetz usw. Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 4 (1859), p. 455.

Nach der Gleichung (7) ist bei der Schätzung der Helligkeitsstufen der Sterne, den sog. Größenklassen derselben, für beliebige zwei aufeinanderfolgende Stufen $n - 1$ und n

$$E_n - E_{n-1} = c \log \frac{J_n}{J_{n-1}} = k; \tag{8}$$

die rechte Seite der Gleichung ist also eine Konstante. Bezeichnet man $k:c$ durch eine neue Konstante $\log \frac{1}{\varrho}$, so hat man

$$\frac{J_{n-1}}{J_n} = \varrho. \tag{9}$$

In der Tat zeigen alle bisherigen Untersuchungen, daß das Helligkeitsverhältnis sich innerhalb gewisser Grenzen als konstant erweist. Bei sechs Stufen der dem bloßen Auge sichtbaren Sterne ergibt sich für ϱ der Wert $\varrho = 2{,}5$, $\log \varrho = 0{,}398$. Aus Bequemlichkeitsrücksichten hat man nach einem Vorschlage von *Pogson*[77]) in den neueren Helligkeitskatalogen für $\log \varrho$ angenommen

$$\log \varrho = 0{,}4, \tag{10}$$

woraus folgt

$$\varrho = 2{,}512; \quad \frac{J_{n-1}}{J_n} = 2{,}512. \tag{11}$$

Damit sind die Größenklassen streng definiert, und Helligkeitskataloge, die auf *Messungen* der Helligkeitsverhältnisse beruhen und mit dem obigen Werte ϱ reduziert sind, können sich nur durch den Anfangspunkt der Zählung unterscheiden. Die strenge Gültigkeit der Gleichung (8) bei Schätzungen ist nach *Hassenstein*[78]) auf etwa 3 Gr.kl. beschränkt. Die alten Sternverzeichnisse erstrecken sich auf alle mit bloßem Auge sichtbaren Sterne und sind deshalb auch individuell systematisch verfälscht. Nach Einführung des Fernrohres wurde diese Skala dann, ursprünglich auch durch Schätzungen, auf teleskopische Sterne ausgedehnt. Die Sterngrößen nach der *Pogson*schen Skala verwendet als erster *E. C. Pickering.*[79])

C. A. Steinheil[80]) war der erste, der noch vor *Fechner* die logarithmische Beziehung (8) empirisch feststellte.

8. Die Methoden der photographischen Photometrie und die photographische Helligkeitsskala. Wenn man von den in der Einleitung erwähnten Versuchen, die Photographie in den Dienst astrono-

77) Radcliffe Observatory 15 (1856), p. 297; Monthly Not. 17 (1857), p. 13.

78) Handb. d. Astroph. II, 2. Hälfte (1931), p. 551.

79) Abh. d. Münch. Akad. II. Kl. 9 (1863), p. 421.

80) Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternhimmel, p. 80. München 1836.

mischer Helligkeitsmessungen zu stellen, absieht, so beginnt die Entwicklung der photographischen Photometrie mit dem Jahre 1887, als das große Unternehmen der photographischen Himmelskarte seinen Anfang nahm. Es entstand damals die Notwendigkeit, neben einem Katalog der Sternpositionen einen solchen ihrer photographischen Helligkeiten zu schaffen. Daß diese von den visuellen Helligkeiten ganz wesentlich abweichen, war bei den ersten Sternaufnahmen erkannt, und es galt nun ein System photographischer Helligkeiten zu schaffen, wozu die verschiedensten Vorschläge gemacht wurden. Man gedachte zunächst die Durchmesser der Sternscheibchen auf der photographischen Platte als Maß der Sternhelligkeit zu verwenden und hat eine Reihe empirischer Formeln für diesen Zweck vorgeschlagen und diskutiert, die den Zusammenhang zwischen gemessenem Durchmesser D, der Sterngröße m und der Expositionszeit t festlegen sollten. Einige dieser Formeln, die heute nur ein historisches Interesse haben, seien hier neben der einschlägigen Literatur nach *G. Eberhards* Zusammenstellung in seinem Beitrage „Photographische Photometrie" im Handbuch der Astrophysik, Bd. II, p. 432 in der Fußnote [81]) angeführt. Bei diesen Arbeiten versuchte man eine Beziehung der *visuell* beobachteten Helligkeiten zu den Sternbilddurchmessern zu finden, was natürlich keine selbständige photographische Helligkeitsskala ergeben konnte. Eine solche wurde erst durch die Arbeiten von *E. C. Pickering* der Harvard-Sternwarte geschaffen. *Pickering* erkannte als erster, daß die Schwärzung der Sternbildchen auf der Platte ein wesentlich sichereres Maß ihrer Helligkeit ist als der Durchmesser des Sternscheibchens, der wohl mit der Helligkeit des Sternes zunimmt, aber in einer in Abhängigkeit von der Farbe, der Helligkeit des Sterns und den Eigenschaften der Optik und der Platte sehr unübersichtlichen Weise.

---

81) *Charlier:*	$m = a - b \log D, \quad D = D_0 \sqrt[4]{t}, \quad D_0 = \text{const.}$	Publ. A. G. Nr. 19 (1889);
Christie:	$m = a + 2{,}5 \log\left(t - b\sqrt{D}\right)$	M. N. 52 (1891), p. 146;
Kapteyn:	$m = \dfrac{a}{b + D}$;	Cape Photographic Durchmusterung;
Pritchard:	$m = a - b \log\left(\dfrac{D}{\frac{1}{t^{\alpha}}}\right); \ \alpha = 3{,}8$	Réunion du comité intern. permanent, p. 80 (1891);
Scheiner:	$m = a + bD, \quad D = D_0 \sqrt{t}$	Réunion etc., p. 80 (1891);
Turner:	$m = a - b\sqrt{D}$	M. N. 65 (1905), p. 774.

m ist die Sterngröße, D der Durchmesser des Sternscheibchens, t die Expositionszeit. Die übrigen Buchstaben sind numerische Konstanten. Man sieht aus dieser Zusammenstellung, daß von einem eindeutigen Gesetz nicht gesprochen werden kann.

Zur Festlegung einer rein photographischen Helligkeitsskala hat *Pickering*[82])[83]) verschiedene Versuche gemacht, die nach heutigen Auffassungen ihr Ziel nicht ganz erreichen konnten, trotzdem aber für die Klärung des Problems von größter Bedeutung wurden. Anfangs versuchte er die Skala auf der Expositionszeit aufzubauen, indem er die Belichtungszeiten so abstufte, daß die auf die Platte aufgefallenen Energiemengen um eine Gr.kl. wuchsen; da aber der Messung nicht die Energiemengen, sondern die Schwärzungen des Sternbildes unterworfen wurden, so war eine Beziehung dieser Größen zueinander erst zu ermitteln, was aber nicht geschah. In einem späteren Verfahren benutzte *Pickering* kreisrunde Blenden vor dem Objektiv mit so abgestuften Durchmessern, daß nach rein geometrischer Rechnung die einfallenden Energiemengen um 1,2 Gr.kl. voneinander verschieden sein mußten. Wenn er mit solchen Blenden dieselben Sterne bei gleichbleibender Exposition photographierte, so sollte sich aus den gemessenen Schwärzungen eine Beziehung zwischen Schwärzung und Intensität ergeben. Der Mangel dieses Verfahrens war die Annahme, daß die Energiemengen den Flächen des unverdeckten Objektives streng proportional sein müßten. Es ist das tatsächlich nicht der Fall. Von den sehr zahlreichen Arbeiten von *E. C. Pickering* und seinen Mitarbeitern in Harvard sind in erster Linie drei größere rein photographisch-photometrische Kataloge zu nennen, die die Helligkeiten der Sterne der Polzone, einer Äquatorzone und der Plejaden[83]) enthalten. Die Genauigkeit dieser Kataloge ist verschieden. Die gleich zu besprechenden theoretischen Arbeiten von *K. Schwarzschild* haben ihre Vervollkommnung wesentlich beeinflußt. Von ganz besonderer Bedeutung ist das unter dem Namen der „Internationalen Polsequenz“ bekannte Verzeichnis, welches die photographischen und auch die photovisuellen Helligkeiten einer größeren Zahl um den Nordpol herum gelegener Sterne bis zu den schwächsten angibt. Die Genauigkeit dieser Helligkeiten ist so groß, wie sie überhaupt zur Zeit erreicht werden kann. Dieser kleine Katalog photographischer Helligkeiten, der von *Pickering* begonnen und durch die Arbeiten von Miß *Leavitt*[84]) in Harvard und von *F. H. Seares*[85]) in Mt. Wilson auf seine heutige Genauigkeit gebracht worden ist, dient als Grundlage aller neueren photographischen Helligkeitsbestimmungen.

82) An Investigation in Stellar Photography. Mem. Amer. Acad. 11 (1886), p. 179.

83) Harvard Ann. 18, Part VII (1890), p. 119.

84) The North Polar Sequence. Harvard Ann. 71, Nr. 3 (1917), p. 47.

85) Mt. Wilson Contrib. 70, 80, 81, 97, 98, 234, 235, 287, 288, 289, 305.

Parallel mit den Arbeiten der Harvard-Sternwarte und von ähnlicher Bedeutung für die Entwicklung der photographischen Photometrie gehen die Untersuchungen von *K. Schwarzschild*[86]) in Göttingen. Auch *Schwarzschild* benutzt die Schwärzungen der Platte als Maß der Helligkeit, aber nicht die Schwärzungen des fokalen, kleinen Sternscheibchens, deren Messung schon aus physiologischen Gründen sehr unsicher ist, sondern die Schwärzung der afokalen etwas vergrößerten Sternbilder. Dieses Verfahren gewährt den Vorteil, lokale Fehler der photographischen Schicht und auch die durch das Objektiv verursachten Ungleichmäßigkeiten der Schwärzung des Sternbildchens leicht erkennen und vermeiden zu lassen. Bei der Benutzung des *Hartmann*schen Mikrophotometers zur Ausmessung der Schwärzungen wird ein hoher Grad der Genauigkeit erreicht. Die Notwendigkeit, afokale Bilder aufzunehmen, bringt den Nachteil mit sich, nur die helleren Sterne auf diesem Wege zu erfassen oder die Expositionszeiten sehr stark zu vergrößern. *Schwarzschild*[87]) hat deshalb auch noch eine andere Methode zum Hervorbringen gleichmäßiger Schwärzungen ausgearbeitet, bei der im Brennpunkt selbst oder sehr nahe zu demselben mit Hilfe einer *Schraffierkassette* photographiert wird. Diese Methode bringt gleichmäßig geschwärzte Quadrate als Spuren des Sternbildes auf der Platte hervor; dazu wird dieser mit der Kassette während der Aufnahme eine zweidimensionale Bewegung erteilt. Mit Hilfe der Schraffierkassette hat *Schwarzschild* die „Göttinger Aktinometrie", einen großen Sternkatalog photographischer Helligkeiten von sehr hoher Genauigkeit in der Zone von 0^0 bis $+20^0$ Deklination geschaffen; ihm liegt eine rein photographische Helligkeitsskala zugrunde. Diese wurde mit Hilfe eines Objektivgitters erhalten, dessen Schwächung auf experimentellem Wege genau feststellbar war. Durch Aufnahmen derselben Sterne mit und ohne Gitter vor dem Objektiv erhielt man für alle Sterne der Platte eine gleichartige Helligkeitsskala. Die Idee dieser Methode geht auf *Kapteyn* zurück.[88]) *Schwarzschild* benutzte diese Skala zur Ermittlung des Schwärzungsgesetzes, das dann zur Verwandlung der von der Schraffierkassette gelieferten Schwärzungen der Sternbilder in Helligkeiten verwendet wurde.

Kurz nach der Göttinger Aktinometrie erschien die „Yerkes Actinometry"[89]) von *J. A. Parkhurst*, welche die photographischen und

86) Publik. d. von Kuffnerschen Sternwarte 5 (1900).

87) *Meyermann* u. *Schwarzschild*, Über eine Schraffierkassette zur Aktinometrie der Sterne. A. N. 170 (1906), p. 277. Über eine neue Schraffierkassette. A. N. 174 (1907), p. 137.

88) Réunion du comité intern. permanent, p. 54 (1891).

89) Yerkes Actinometry, Zone $+73$ to $+90^0$. Astroph. Journ. 36 (1912), p. 169.

photovisuellen Helligkeiten der Sterne bis zur Größe 7,5 der nördlichen Polzone enthält. Die Helligkeitsskala ist auch hier eine rein photographische; sie wurde mit Hilfe eines Röhrenphotometers erhalten. Dieses Instrument ist auf dem Prinzip aufgebaut, daß die durch kleine Öffnungen in einer Metallplatte hindurchgehenden Mengen diffusen Lichtes der Größe der Öffnungen proportional sind; es liefert auch einwandfreie Ergebnisse.

Eine andere Methode der Verwendung von Objektivgittern zur Herstellung photographischer Helligkeitsskalen, die von *E. Hertzsprung*[90]) ausgearbeitet ist, muß hier auch erwähnt werden, weil mit ihrer Hilfe mehrere wichtige photographisch-photometrische Untersuchungen ausgeführt sind. Es wird ein Stabgitter vor das ganze Objektiv gesetzt, wodurch außer dem Zentralbilde, zu beiden Seiten desselben, Beugungsbilder der Sterne entstehen, deren Helligkeitsverhältnis zum Zentralbilde aus der Beugungstheorie streng berechenbar ist. Stellt man die Platte etwas außerhalb des Fokus, so werden die Beugungsspektra kreisrund und haben eine recht gleichmäßige Schwärzung, die deshalb bequem an die Schwärzung des Zentralbildes angeschlossen werden kann. Jeder Stern der Platte hat somit mindestens zwei (oder vier) Begleiter, die genau in gleichen Helligkeitsverhältnissen zum Zentralbilde stehen; die Skala der Helligkeit ist somit durch eine Aufnahme der Himmelsgegend gleichzeitig auf der Platte eingetragen.

Endlich ist noch die Methode von *E. S. King*[91]) für eine photographische Helligkeitsskala zu erwähnen; diese besteht darin, daß man mehrere Aufnahmen eines Sternes in verschiedenen Abständen vom Brennpunkte mit derselben Expositionszeit macht und dann sowohl die Durchmesser als die Schwärzungen der extrafokalen Bilder vermißt. Hierbei wird also von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Energiemengen, die die Schwärzung hervorrufen, in allen Abständen vom Brennpunkte dieselben sind.

9. Die Eigenschaften der photographischen Platten. Die Schwärzungskurve. Der Empfangsapparat bei photographisch-photometrischen Messungen ist die photographische Platte. Die Grenzen der Genauigkeit und der meßbare Energiebereich, sowohl in bezug auf die Intensität der Strahlung als auch in bezug auf ihre Wellenlänge, sind somit von den Eigenschaften der photographischen Platte abhängig. Die Technik der Herstellung von Platten ist zur Zeit in intensivster Entwicklung

---

90) Vorschlag zur Festlegung der photographischen Größenskala. A. N. 186 (1910), p. 177.

91) Harvard Ann. 59 (1912), p. 33, 95, 127, 129, 157.

begriffen, und die Möglichkeiten der Steigerung sowohl der allgemeinen Empfindlichkeit derselben als auch der Erweiterung des Energiebereiches scheinen bei weitem noch nicht ausgeschöpft zu sein. Es kann sich hier deshalb nur darum handeln, die Prinzipien der Auswertung photographischer Aufnahmen in photometrischer Beziehung zu besprechen, wie sie für jede Plattensorte, die für astronomische Aufnahmen verwendet wird, gelten. Die Platte liefert *Schwärzungen* als Maß der aufgefallenen Energiemenge. Diese kann man als speziell photographisches Maß der Helligkeit benutzen, indem man sie etwa mit Hilfe des ausgezeichneten *Hartmann*schen Mikrophotometers mit anderen Schwärzungen vergleicht und dann mit Hilfe des sog. *Schwärzungsgesetzes* in Helligkeiten umwandelt, somit eliminiert. Das Schwärzungsgesetz bestimmt man wohl ausnahmslos auf graphischem Wege, indem man auf der Abszissenachse die $\log J$ (J die Intensität der Strahlung) oder die Größenklasse m und auf der Ordinatenachse die Schwärzungen S aufträgt. Die sich ergebende Schwärzungskurve hat das Aussehen, wie sie die Fig. 2, die wir nach *Fabry*[92]) wiedergeben, zeigt. Benutzt wird dabei nur der geradlinig verlaufende Teil der Kurve, in dem die Neigungstangente derselben, die sog. *Gradation*, ihren Maximalwert hat. Je größer die Gradation, desto empfindlicher ist die Platte. Die Schwärzung ist also in dem Gebiete normaler Exposition (also genügend weit vom Schwellenwerte einerseits und von dem Gebiete der Überexposition, in dem die Schwärzung nicht mehr zunimmt, andererseits) proportional dem Logarithmus der Belichtung. Genau so, wie die Empfindlichkeit des Auges, folgt sie dem *Lambert*schen Gesetze. Die Schwärzung ist natürlich ein Maß der Absorption des Lichtes innerhalb der Gelatineschicht der Platte und wird auch bei anderen Methoden der Auswertung als eine der Absorption proportionale Größe definiert. Bei der Anwendung moderner lichtelektrischer oder thermoelektrischer Apparate zur photometrischen Auswertung photographischer Aufnahmen tritt die *Absorption* an Stelle der Schwärzung als Maß für die Belichtung auf, weil hier die Wirkung der durch die Platte an der geschwärzten Stelle hindurchgegangenen Lichtmenge auf den Empfangsapparat (Zelle

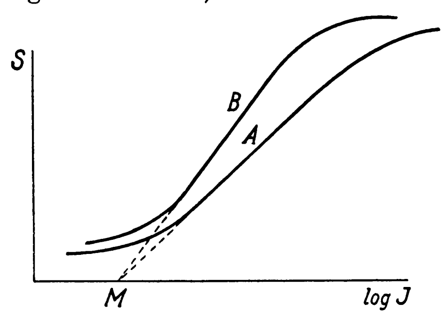

Fig. 2.
Intensitäts-Schwärzungskurve. *A* bei normaler, *B* bei sehr starker Entwicklung. (Nach *Fabry*, Leçons de Photométrie, p. 110.)

92) Leçons de Photométrie, p. 110.

oder Thermoelement) gemessen wird. Bezeichnet J_0 die einfallende, J die hindurchgegangene Lichtmenge, so ist die Absorption $A = \frac{J}{J_0}$. Den reziproken Wert bezeichnet man oft als Opazität $O = \frac{J_0}{J}$. Die Schwärzung S ist der *Brigg*sche Logarithmus der Opazität[93])

$$S = \lg O = \lg \frac{J_0}{J}.$$

Die Grenzen für die Anwendbarkeit dieser Formeln liegen normalerweise zwischen 3 und 4 Größenklassen. Größere Helligkeitsintervalle können durch eine Platte somit nicht überbrückt werden.

Die Schwärzungskurve ist in hohem Maße von der Stärke der Entwicklung abhängig, wie das durch die beiden Kurven der Fig. 2 veranschaulicht wird. Sie ist für verschiedene Platten in hohem Grade verschieden und von der Dicke der Emulsionsschicht auf der Platte abhängig. Sie muß also eigentlich für jede astronomische Platte, die für Helligkeitsmessungen bestimmt ist, eigens untersucht werden, zu welchem Zwecke man eine Helligkeitsskala vor der Entwicklung der Platte auf diese kopiert.

Die Schwärzungskurve ist außerdem in hohem Grade von der Wellenlänge des einwirkenden Lichtes abhängig, und wenn es sich darum handelt, die Helligkeiten für verschiedene Wellenlängen oder Wellenlängengebiete getrennt zu bestimmen, so ist es notwendig, die Schwärzungskurven für die einzelnen Farben getrennt zu berechnen.

Man kann nun auch eine andere Art von Schwärzungskurven herstellen, indem man bei konstanter Intensität Aufnahmen mit verschiedener Expositionszeit macht. Trägt man die Schwärzungen als Ordinaten, die Logarithmen der Expositionszeiten als Abszissen auf, so erhält man die Zeitschwärzungskurve. Diese Kurve kann aber nur dann zu Helligkeitsmessungen verwendet werden, wenn man die Beziehung zwischen den Intensitäten (J) und den Expositionszeiten (t) kennt, welche dieselbe Schwärzung hervorbringen. Die Beziehung zwischen den drei Größen S, J und t nennt man das *Schwärzungsgesetz*. Seine Form $S = F(J, t)$ ist bis jetzt unbekannt. Man verwendet vielfach den Ansatz von *Schwarzschild*, nach dem die photographische Wirkung des Lichtes eine Funktion des Produktes Jt^p bzw. $J^q t$, wo p bzw. q für die betreffende Plattensorte charakteristische Konstanten sind. Diese können aus der Zeitschwärzungskurve bestimmt werden. Auch dieses Gesetz, das *Schwarzschild*[94]) aus theoretischen Voraus-

93) *Eder*, System der Sensitometrie photogr. Platten I (1899), p. 18.

94) Publik. der von Kuffnerschen Sternw. 5, p. 8 und p. 129 ff.

setzungen abgeleitet hat, ist nicht allgemein gültig. Ebensowenig kann natürlich der Spezialfall dieses Gesetzes, das *Bunsen-Roscoe*sche Reziprozitätsgesetz [95]), nach dem gleiche Produkte Jt gleiche Schwärzungen hervorbringen sollen, richtig sein. Nach einer eingehenden Untersuchung von *E. Kron* [96]) können beide Formeln nur als Interpolationsformeln angesprochen werden, die für bestimmte Bereiche der drei Variablen gültig sind. Die Zeitschwärzungskurve wird bei astronomisch-photometrischen Untersuchungen trotzdem viel angewandt, wobei die *Schwarzschild*sche Form $S = Jt^p$ benutzt wird. p ergibt sich meistens von der Größenordnung 0,8, also kleiner als 1.

Nach dem bisherigen kurzen Überblick über die Eigenschaften der photographischen Platte ist es schon ersichtlich, daß dieselbe ein sehr unvollkommenes Hilfsmittel zur Bestimmung von Helligkeiten darstellt und nur bei sehr vorsichtiger und kritischer Behandlung als solches dienen kann. Sie kann nur für relative Helligkeitsbestimmungen von Lichtquellen genau derselben Farbe bei gleichen Expositionszeiten sichere Ergebnisse liefern, wenn die Schwärzungskurve für die betreffende Farbe bestimmt ist.

Zu beachten ist außerdem noch der Einfluß des *Schleiers*, der durch zerstreutes Licht (Mondschein, Dämmerung oder bei langen Belichtungen auch die Helligkeit des dunklen Himmels) auf der Platte erscheint und bei langer Entwicklung verstärkt wird. Sein Einfluß auf die Schwärzung der zu untersuchenden Himmelsobjekte muß eliminiert werden, wobei unter Umständen auch dem von *G. Eberhard* [97]) entdeckten *Nachbareffekt* Rechnung getragen werden muß. *Eberhard* fand, daß bei allen Plattensorten die Mitte eines größeren belichteten Feldes stets geringer geschwärzt ist als die eines ganz gleich belichteten aber kleineren Feldes. Die Schwärzung einer belichteten Stelle der photographischen Platte ist somit nicht allein von dem Betrage der einwirkenden Lichtmenge, sondern bis zu einem gewissen Grade auch von der Flächenausdehnung dieser Stelle und von der Beschaffenheit der ihr benachbarten Teile der Platte abhängig.

Auf photographischen Platten, die mit einem kurzbrennweitigen Objektiv aufgenommen sind und einen größeren Teil des Himmels abbilden, sind die Lichtmengen, die die Platten in der Mitte (also in

---

95) Ann. d. Phys. 117 (1862), p. 529.

96) Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam 22, Nr. 67 (1913); Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 751.

97) Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam Nr. 84 (1926), p. 45 ff. *F. E. Ross*, The Mutual Action of Adjacent Photographic Images. Astroph. Journ. 53 (1921), p. 349. Nachtrag p. 510.

der optischen Achse des Objektivs) und am Rande von gleich hellen Sternen erreichen, nicht mehr gleich; infolge der optischen Fehler des Objektivs sind die Randsterne außerdem anders als die Zentralsterne abgebildet. Bei der Vergleichung der Schwärzungen, Absorptionen oder Durchmesser der abgebildeten Sterne ist somit der sog. *Gesichtsfeldkorrektion* Rechnung zu tragen. Da diese für jedes Objektiv verschieden sein kann, muß sie empirisch aus der Platte selbst, wenn diese genügend Sterne bekannter Helligkeiten abbildet, berechnet werden.

Ganz unberechenbar sind natürlich die *zufälligen Fehler* der Platte. Nach *Eberhard*[98]) können solche zufällige Empfindlichkeitsschwankungen an verschiedenen Stellen derselben Platte sehr bedeutende Beträge (bis zu $0{,}4^{m}$) erreichen.

Trotz aller dieser Schwierigkeiten der photographischen Photometrie hat sie eine enorme Verbreitung in der Astronomie gefunden. Der Grund dafür ist im wesentlichen die Möglichkeit, auf der Platte ein großes Material fixierter Schwärzungen in kurzer Zeit zu erhalten, ein Material, das unbeschränkt und unverändert aufbewahrt werden kann. Außerdem erfaßt die Platte große Gebiete der ultravioletten Strahlung, die dem Auge unzugänglich, für die Natur der strahlenden Körper aber von ausschlaggebender Bedeutung sind. Endlich gibt sie die Möglichkeit, durch Verlängerung der Exposition die Strahlung der Himmelskörper auf der Platte zu summieren und so auch schwächste Objekte zu erfassen, die dem Auge auch beim stärksten Teleskop unsichtbar bleiben.

10. Farbenindizes. Die Photographie erfaßt ein wesentlich anderes Wellenlängengebiet der Strahlung als das Auge. Wenn es auch bei Verwendung von besonderen Gelbfiltern bei rotempfindlichen sog. panchromatischen Platten möglich ist, die von der Platte erfaßte Energie derjenigen des Auges anzupassen, so sind doch diese Möglichkeiten erst in neuester Zeit entstanden; die meisten photographischen Aufnahmen des Himmels sind auf normalen Bromsilberplatten gemacht, deren Empfindlichkeitskurve durch Tabelle 2 und graphisch neben der Empfindlichkeitskurve des Auges in Fig. 3 wiedergegeben ist. Die Tabelle 3 enthält die Empfindlichkeitskurve $e(\lambda)$ des Auges, die in der Fig. 3 rechts gezeichnet ist. Die photographische Helligkeitsskala, deren Entstehung und Bedeutung wir oben besprochen haben, bezieht sich auf eine solche normale photographische Platte, wobei leider bemerkt werden muß, daß die immerhin bedeutende Verschiedenheit

98) Handb. d. Astroph. II, 2. Hälfte, p. 459.

Tabelle 2.

λ	φ
4980	0,462
4770	925
4500	996
4220	986
4040	926
3930	853
3840	733
3770	600
3700	440
3620	300
3540	240
3460	190

Tabelle 3.

λ	φ	λ	φ
4400	0,058	5700	0,932
4600	184	5800	843
4800	281	5900	739
4900	369	6000	624
5000	495	6100	503
5100	638	6200	395
5200	775	6300	285
5300	888	6400	191
5400	968	6500	101
5500	994	6600	051
5600	984	6800	014

in den Empfindlichkeitskurven der gewöhnlichen photographischen Platten zur Zeit der Entstehung der Helligkeitskataloge nicht genügend bekannt und beachtet wurden.

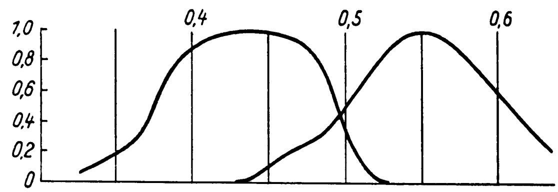

Fig. 3.
Die Empfindlichkeitskurven für die verschiedenen Wellenlängen der photographischen Platte und des Auges. (Nach *Bottlinger*, Handb. d. Astroph. II, p. 361.)

Der Unterschied zwischen photographischer und visueller Helligkeit eines Sternes ist ein Maß für seine Färbung, weil die roten Sterne photographisch schwach, dagegen die blauen visuell schwach ausfallen. Bezeichnet man die Empfindlichkeitskurve der Platte mit $\varphi(\lambda)$, diejenige des Auges mit $e(\lambda)$, die Intensitätsverteilung im Spektrum des Sternes mit $E(\lambda)$, so ist der Unterschied der photographischen Größenklasse m_{ph} gegen die visuelle m_v durch die Gleichung gegeben

$$m_{ph} - m_v = \text{F.I.} = -2{,}5 \log \frac{\int\limits_0^\infty E(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda}{\int\limits_0^\infty E(\lambda)\,e(\lambda)\,d\lambda} + K,$$

und enthält eine willkürliche additive Konstante K wegen der Willkür im Nullpunkte der Zählung photographischer Größenklassen. Wählt man diesen Nullpunkt so, daß für die Sterne vom Spektraltypus A_0 die visuelle und die photographische Größenklasse identisch sein sollen, so trägt das Äquivalent der Farbe eines Sternes, das durch die Differenz $m_{ph} - m_v$ gegeben ist, den Namen *Farbenindex* (F.I.). Diese Größe ist ein gewisses Äquivalent auch für den Spektraltypus, und da dieser in enger Beziehung zur Temperatur des Sternes steht, auch für diese. Umstehende Tabelle gibt diese Beziehungen nach einer Untersuchung

Tabelle 4.
Beziehung zwischen Temperatur, Spektraltypus und Farbenindex.

Temperatur	Spektral-typus	Farbenindex	Temperatur	Spektral-typus	Farbenindex
23800°	B_0	$-0{,}330^m$	6000°	G_0	$+0{,}670^m$
16300	B_5	$-0{,}170$	5230	G_5	$+0{,}930$
11800	A_0	$0{,}000$	4570	K_0	$+1{,}120$
9000	A_5	$+0{,}210$	3850	K_5	$+1{,}580$
7900	F_0	$+0{,}330$	3570	M_0	$+1{,}730$
6900	F_5	$+0{,}470$			

von *A. Brill*.[99]) Bei der großen Schwierigkeit, die Spektra der schwächeren und schwächsten Sterne zu untersuchen, haben die Farbenindizes für statistische Zwecke eine sehr große Bedeutung gewonnen. Sie können bei wesentlich kürzeren Expositionszeiten durch zwei Aufnahmen derselben Himmelsgegend für eine große Anzahl von Sternen erhalten werden, wenn man auch die visuellen Helligkeiten auf einer Aufnahme auf rotempfindlichen Platten bei Verwendung eines sog. photovisuellen Gelbfilters bestimmt. Dieses muß so gewählt werden, daß das Produkt $\varphi(\lambda)T(\lambda)E(\lambda)$ mit dem Produkte $e(\lambda)E(\lambda)$ unserer letzten Gleichung identisch wird, wo $T(\lambda)$ die Durchlässigkeit des Filters ist. Dann gibt die Aufnahme auf der rotempfindlichen Platte die visuellen Helligkeiten der Sterne.

11. Die lichtelektrische Methode der Photometrie. Während die visuelle Photometrie subjektiven Fehlerquellen unterworfen und in ihrer Genauigkeit durch die Empfindungsschwelle des Auges begrenzt ist, hat die photographische Methode mit den verschiedenartigen Fehlern der Platte selbst und der Abbildung der Gestirne auf ihr zu kämpfen; außerdem lassen sich bei einer visuellen Auswertung der Schwärzungen individuelle subjektive Fehler nicht ganz vermeiden. Die Genauigkeit beider Methoden ist ungefähr dieselbe und übersteigt nicht die Meßfehlergrenze des Auges von 2 bis 3% der gemessenen Helligkeit. Es war darum von großer Bedeutung, einerseits einen objektiven Meßapparat der Helligkeiten in die Astronomie einzuführen, der das Auge des Beobachters ganz ausschaltet, andererseits auch die Meßgenauigkeit über die genannte Grenze zu steigern. Beide Ziele sind durch die Einführung der lichtelektrischen Methoden der Helligkeitsmessung in die astronomische Praxis erreicht worden.

Zunächst war es die Eigenschaft des *Selens*, unter Einwirkung des Lichtes seinen elektrischen Widerstand zu ändern, die von *Stebbins*[100])

99) Handb. d. Astroph. II, p. 361.

100) Astroph. Journ. 26 (1907), p. 326; 27 (1908), p. 183; 32 (1910), p. 185.

für den Bau eines unpersönlichen Photometers von großer Empfindlichkeit benutzt wurde. Die Helligkeit der Gestirne wurde hier durch die Messung eines Widerstandes ermittelt, und zwar mit einer die visuelle Messung zehnfach übersteigenden Genauigkeit. Der Empfindlichkeitsbereich des Selens liegt im roten bis zum gelbgrünen Gebiete des Spektrums, nähert sich also demjenigen des menschlichen Auges. Eine große Schwierigkeit der Methode lag in der Temperaturempfindlichkeit des Selens, die den Apparat nur bei vollkommener Temperaturkonstanz brauchbar machte. Es ist in neuester Zeit *W. E. Bernheimer*[101]) gelungen, sowohl die Temperaturempfindlichkeit der Selenzelle zu beseitigen als auch ihre Empfindlichkeit zu steigern, so daß das Selenphotometer für Helligkeitsmessungen im langwelligen Lichte eine größere Bedeutung als der ursprüngliche Apparat von *Stebbins* zu gewinnen verspricht.

Dieser wurde bald durch das lichtelektrische Photometer von *H. Rosenberg* und *P. Guthnick* verdrängt, ein Instrument, das die Eigenschaft der Alkalimetalle — Natrium, Kalium oder Rubidium —, unter Einwirkung des Lichtes Elektronen auszusenden, zur Messung der Lichtstärke benutzt. Der entstehende *Photostrom* hat die Eigenschaft, der auf das Alkali einfallenden Lichtmenge streng proportional zu sein. Er wird entweder mit Hilfe eines empfindlichen Galvanometers oder aber mit einem Elektrometer gemessen, wobei eine Genauigkeit von 0,1% erreichbar ist. Die Schwierigkeit dieser Messung liegt in der Kleinheit des Photostromes, an dessen Isolierung von anderen Einflüssen deshalb die allerhöchsten Ansprüche gestellt werden. Die Montierung und die Handhabung eines lichtelektrischen Photometers an einem beweglichen Fernrohr ist deshalb unvergleichlich schwieriger als die visuelle und die photographische Photometrie; das ist der Grund, weshalb die von *H. Rosenberg*[102]) und *P. Guthnick*[103]) entwickelten Typen dieses Instrumentes eine relativ geringe Verbreitung gefunden haben. Die meisten Ergebnisse sind von *P. Guthnick*[104]) in der Babelsberger Sternwarte erzielt. Es gelang ihm, die Veränderlichkeit einer großen Reihe schwachveränderlicher Sterne zu entdecken, deren Amplituden zum großen Teil kleiner sind als 0,1 Gr.kl.; für bekannte Veränderliche konnte die Kurve der Lichtschwankung wesentlich genauer festgelegt werden, und so hat die

101) Meddel. fr. Lunds Astron. Observ. Ser. II, Nr. 61 (1931).

102) Vjschr. d. Astron. Ges. 48 (1913), p. 210; Die Naturwissenschaften 1921, H. 20.

103) Astr. Nachr. 196 (1913), p. 357.

104) Veröffentl. d. Sternwarte Berlin-Babelsberg 1 (1915).

Einführung der neuen Methode auf diesem Gebiete außerordentlich befruchtend gewirkt.

Die Grenzen der lichtelektrischen Helligkeitsmessungen am Himmel sind einerseits durch die Empfindlichkeit der Zellen, also durch die Schwäche der ausgelösten Photoströme bei schwachen Sternen gegeben, anderseits durch die Grenzen der Empfindlichkeit der Zellen in Wellenlänge; nur in Verbindung mit den allerstärksten Teleskopen können die Messungen bis auf Sterne 8. Größe ausgedehnt werden, während für mittelstarke Fernrohre die Grenze bei der 5. Gr.kl. liegt. In dieser Beziehung ist die Photographie der lichtelektrischen Methode weit überlegen.

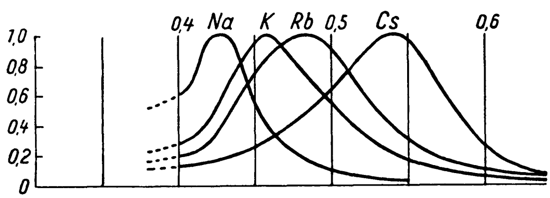

Fig. 4.
Die Empfindlichkeitskurven für die verschiedenen Wellenlängen für verschiedene Alkalizellen. (Nach *Bottlinger*, Handb. d. Astroph. II, p. 361.)

Die Empfindlichkeitsgrenzen der Natrium-, Kalium-, Rubidium- und Cäsiumzellen sind durch die Fig. 4 veranschaulicht und liegen bis auf die Cäsiumzelle, die aber bei höheren Temperaturen nicht benutzbar ist, alle im Gebiete der Empfindlichkeit der gewöhnlichen photographischen Platten. Sie erfassen also nicht das Gebiet der roten Strahlung, das somit der visuellen Photometrie und den modernen panchromatischen Platten vorbehalten bleibt.

Bei Benutzung von entsprechenden Farbfiltern kann die Zelle auch zur Bestimmung von Farbenäquivalenten dienen und ist von *K. F. Bottlinger*[105]) in dieser Weise zur Bestimmung von lichtelektrischen Farbenindizes von 459 Sternen benutzt worden.

Eine Grenze für die Genauigkeit der lichtelektrischen Messungen ist auch durch Unsicherheit und Veränderlichkeit *der Extinktion* des Lichtes in der Atmosphäre gesetzt.

Die Extinktion ist von so ausschlaggebender Bedeutung für alle astronomisch-photometrischen Messungen, daß wir ungeachtet der Behandlung des Problems an anderer Stelle dieses Werkes hier nicht ganz an ihm vorbeigehen können.

12. Der Einfluß der Extinktion auf photometrische Messungen. Derselbe berechnet sich, wenn p den Transmissionskoeffizienten der Atmosphäre (im Zenit) bezeichnet, nach der Formel

$$\text{Extinktion} = m_z - m_0 = -\frac{\log p}{0{,}4}\,[F(z) - 1],$$

105) Veröffentl. d. Sternwarte Berlin-Babelsberg 3 (1923), H. 4.

wo m_0 die Gr.kl. im Zenit und $F(z)$ die bei der Zenitdistanz z in der Atmosphäre durchlaufene Luftmasse bedeutet, wobei diese in Einheiten der Luftmasse im Zenit ausgedrückt ist. *Bemporad*s Untersuchungen über die Abhängigkeit dieser Funktion $F(z)$ von dem Druck und der Temperatur am Beobachtungsorte sowie von der Dichteverteilung innerhalb der Atmosphäre haben gezeigt, daß alle diese Einflüsse nur sehr gering sind. Die beiden erstgenannten sind auch leicht in Rechnung zu ziehen, wenn man die Tafeln von *Bemporad* dazu benutzt. Der Verlauf der Funktion $F(z)$ mit der Zenitdistanz ist nach den sichersten Daten über die Dichteabnahme der Luft mit der Höhe bis zu Zenitdistanzen von 85° bis auf einige Einheiten der dritten Dezimale in *Bemporad*s umfangreichen Tafeln ebenfalls gesichert. Diese Tafeln, sowie die Extinktionstheorie von *Bemporad* findet man ausführlich im Handbuch der Astrophysik, Bd. II, erste Hälfte, im Beitrage „Theoretische Photometrie“ wiedergegeben. Trotzdem ist die Berechnung der Extinktion schon für Zenitdistanzen von 60° bis 70°, bei denen $F(z)$ den Wert 2 bis 3 erreicht, meistens sehr unsicher, weil der Transmissionskoeffizient p nicht genügend genau bekannt ist. Sein Wert kann im Laufe eines Beobachtungsabends Schwankungen bis zu 30% aufweisen, ohne daß direkte Wolkenbildung festzustellen ist. Auch bei weniger extremen allgemeinen Durchlässigkeitsänderungen der Luft während der Beobachtungen kann die Reduktion der Helligkeit auf das Zenit nur mit einem weit größeren Fehler berechnet werden, als die Meßgenauigkeit es erfordern würde. Man muß sich deshalb auf relative Messungen von Sternen nahezu gleicher Zenitdistanz beschränken, in die dann nur die relative Extinktionskorrektion eingeht. Bei photographischen Aufnahmen ist somit die Schwierigkeit der Extinktionsbestimmung am geringsten, weil hier nur Sterne, die sich auf derselben Platte abbilden und deshalb in Zenitdistanz wenig voneinander abweichen, verglichen werden.

Der Transmissionskoeffizient ist aber auch von der Wellenlänge des Lichtes abhängig und deshalb für die photographisch wirksamen Strahlen ein anderer als für die visuellen. Man hat deshalb Tabellen der photographischen Extinktion berechnet, die auch für die Reduktion lichtelektrischer Messungen benutzt worden sind. Diese Tafeln, wie auch die Tafeln der visuellen Gesamtextinktion von *G. Müller* und *Bemporad* machen noch keinen Unterschied zwischen den Spektraltypen der Sterne, obgleich ein solcher Unterschied bestehen muß. Für visuelle Messungen mit ihrer geringen Genauigkeit macht sich dieser Unterschied in Höhen von über 30° noch nicht bemerkbar, photographische Messungen umfassen immer nur geringe Höhenunterschiede und sind auch nicht genügend genau, um verschiedene Extinktionskoeffizienten für die einzelnen Spektraltypen zu erfordern. Für die lichtelektrische Photometrie ist dagegen die Kenntnis der spezifischen Extinktionskoeffizienten der einzelnen Spektralklassen notwendig, ebenso für visuelle und photographische Messungen in geringen Höhen über dem Horizonte, weil die Extinktion der roten und der weißen Sterne hier merklich verschieden ist; sie ist dabei von der Durchsichtigkeit der Luft abhängig und muß deshalb an jedem Abend besonders bestimmt werden.

So weit man die Extinktion auf die atmosphärische Diffusion an Luftmolekülen allein zurückführen kann, müßte der Transmissionskoeffizient mit der vierten Potenz der Wellenlänge abnehmen; infolge der Beimischung fester Teilchen sowie wegen der Absorption durch Wasserdampf, Sauerstoff und Ozon, deren Absorptionsbanden im roten Gebiete des Spektrums liegen, und deren Mengen wechselnd und schwer bestimmbar sind, ist es unmöglich, die Abhängigkeit des Transmissionskoeffizienten von der Wellenlänge anders als durch besondere Beobachtungen zu bestimmen. *E. Schoenberg*[106]) hat den Einfluß der Diffusion an Molekülen und feinsten Partikeln untersucht und Tafeln für ihn berechnet. Experimentelle Bestimmungen der Abhängigkeit des Transmissionskoeffizienten von der Wellenlänge zeigen, daß dieselbe für verschiedene Höhen über dem Meeresniveau verschieden ist. So fand *H. Rosenberg*[107]) bei seinen spektralphotometrischen Untersuchungen der Fixsterne eine Abhängigkeit mit der 2,7ten Potenz; aus *Abbots* Messungen, die zur Bestimmung der Solarkonstante am Meeresniveau (in Washington), auf einer Höhe von 1700 m (Mt. Wilson) und in 4300 m (Mt. Whitney) mit empfindlichen Bolometern ausgeführt worden sind und die sich auf einen sehr großen Spektralbereich (0,30 μ bis 3,00 μ) erstrecken, fand *Boutaric*[108]) die Potenzen 2,1 für Washington, 3,1 für Mt. Wilson und 3,3 für Mt. Whitney. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in den Beimischungen gröberer Teilchen in den unteren Schichten der Atmosphäre.

Unter diesen Umständen ist eine sichere Reduktion von genauen Helligkeitsmessungen sowohl bei lichtelektrischen als bei spektralphotometrischen Untersuchungen, wenn diese nicht streng relativ an dicht beieinanderliegenden Sternen vorgenommen werden, nur dann durch-

---

106) Untersuchungen über die Diffusion des Lichts in Anwendung auf astronomische Probleme. Mitteil. der Sternwarte Breslau 3 (1932), p. 53.

107) Nova Acta. Abh. der Kais. Leop. Carol. Akad. der Naturforscher CI, Nr. 2 (1914).

108) Ann. de Chem. et de Phys. 9e série, t. 9 (1918), p. 113; 10 (1918), p. 5.

führbar, wenn der Transmissionskoeffizient des Beobachtungsabends getrennt für einige Wellenlängen durch besondere Beobachtungen festgestellt ist.

13. Die radiometrischen Messungen der bolometrischen Größenklassen und Temperaturen der Gestirne. In neuester Zeit ist es gelungen, mit Hilfe empfindlicher Thermoelemente die Gesamtstrahlung der helleren Sterne und Planeten, soweit dieselbe durch unsere Atmosphäre hindurchgelassen wird, zu messen. Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiete sind von *Coblentz*[109]) an der Lowell-Sternwarte am 40zölligen Reflektor ausgeführt und beziehen sich vorwiegend auf die großen Planeten, den weiteren Fortschritt hat man *E. Pettit* und *S. B. Nicholson*[110]) zu verdanken, die den 100zölligen Reflektor auf dem Mt. Wilson in den Dienst dieser wichtigen Aufgabe stellen konnten. Das neueste Thermoelement, das die letztgenannten Forscher benutzten, besteht aus feinsten Drähten aus Wismut und einer Legierung aus Wismut und Zinn von nur 0,03 mm Dicke, die in einer evakuierten Röhre mit einem Bergkristallfenster eingeschlossen sind. Der durch die Erwärmung dieses nur 0,000192 g schweren Empfängers ausgelöste Strom wird mit einem empfindlichen Galvanometer gemessen.

Aber nur in Verbindung mit den stärksten Teleskopen konnte die Strahlung der hellsten Sterne mit diesem Empfänger gemessen werden; der Stern Betelgeuse gibt am Hookerspiegel eine Erwärmung des Empfängers um 0,015° C; es sind trotzdem alle Sterne bis zur 4,2 Gr.kl. noch meßbar. Eine Zerlegung der Sternstrahlung in engere Bezirke, die für eine genaue Temperaturbestimmung notwendig wäre, ist freilich nicht möglich; wohl aber kann die Wärmestrahlung (beginnend mit 1,4 μ) durch ein Wasserfilter von der Gesamtstrahlung abgetrennt und die Reststrahlung gemessen werden. Diese letztere ist im wesentlichen die dem Auge zugängliche sichtbare Strahlung und entspricht der visuellen Helligkeit. Aus der Gesamtstrahlung, gemessen durch die Galvanometerausschläge, erhält man, wenn man ihre Logarithmen verwendet, die sog. *radiometrischen Größenklassen* (m_r). Diese sind noch wegen der Absorption in der Atmosphäre und der Apparatur zu korrigieren, um aus ihnen die *bolometrischen Größen-*

109) *W. W. Coblentz,* Measurements of Stellar and Planetary Temperatures. Nature 116 (1925), p. 439—441; Note on the Water-cell-Transmissions of the Radiation from Sirius. Pop. Astron. 35 (1925), p. 137.

110) *E. Pettit* u. *S. B. Nicholson,* Stellar Radiation Measurements. Astroph. Journ. 68 (1928), p. 279—308; Thermocouple Observations on the total Radiation from Variable Stars. Publ. ASP. 34 (1922), p. 181; Total Radiation from o Ceti. Publ. ASP. 34 (1922), p. 132—133; The Application of Vacuum Thermocouples to Problems in Astrophysics. Astroph. Journ. 56 (1922), p 295—317.

klassen (m_b) zu erhalten. Die Bestimmung dieser Absorptionen gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Methode.

Unter dem Wärmeindex (W.I.) versteht man die Differenz der visuellen und der radiometrischen Gr.kl.; unter der Wasserzellenabsorption den Bruchteil der Strahlung des Sternes, der durch das Wasserfilter eliminiert wird. Die bolometrische Gr.kl. ist also

$$m_b = m_r + (\mathrm{W.I.} + \Delta m_r),$$

der Ausdruck in der Klammer: Wärmeindex + Korrektionen wegen Absorption enthält in beiden Gliedern große Unsicherheitsmomente; Δm_r kann nur bei einer Annahme über den Verlauf der Strahlung im absorbierten Gebiete für beliebige Sterne berechnet werden, wenn der Betrag der Absorption für irgendeine Strahlungsquelle auch experimentell sicher bestimmt ist; der W.I. ist wiederum durch die Unsicherheit der Empfindlichkeitskurve des Auges, die dem System der benutzten visuellen Helligkeiten zugrunde liegt, nicht sicher zu bestimmen. Dadurch sind die bolometrischen Helligkeiten noch mit beträchtlichen Unsicherheitsfaktoren behaftet. Trotzdem sind sie von größter Bedeutung. Der Katalog von 124 helleren Sternen, deren bolometrische Helligkeiten und W.I. *Pettit* und *Nicholson* veröffentlicht haben, enthält neben diesen auch die Temperaturen der Sterne, wie sie sich aus dem W.I. und der Wasserzellenabsorption bei Annahme schwarzer Strahlung ergeben. Es erweist sich, daß diese Methode für die heißesten Sterne von B_0 bis A_5 versagt, weil die Wärmestrahlung im Verhältnis zur kurzwelligen Strahlung bei diesen Sternen verschwindend ist. Die späteren Spektraltypen ergeben insofern wichtige Temperaturwerte, als sie aus einem ganz anderen Wellenlängengebiet als dem der visuell oder photographisch wirksamen Strahlung bestimmt sind. Da die absoluten Helligkeiten der Katalogsterne bekannt sind, ist eine Trennung der Riesen- von den Zwergsternen möglich; hier zeigt sich nun, daß sowohl der W.I. als die Wasserzellenabsorbtion bei den Riesen größere Werte aufweisen als bei den Zwergen, was auf eine tiefere Temperatur der Riesen vom Typus F_5 bis M_0 gegenüber den Zwergen desselben Spektraltypus hinweist.

Wichtig ist auch die Feststellung, daß die roten M-Sterne eine vom schwarzen Körper stark abweichende Strahlungskurve haben. Die Erklärung liegt wahrscheinlich in den starken Absorptionsbanden im roten und ultraroten Gebiete des Spektrums. Die gemessene Gesamtstrahlung nach Korrektion wegen der Ausfälle durch Absorption der Atmosphäre und der Apparatur gestattet eine unabhängige Temperaturbestimmung des Sternes, wenn sein Durchmesser aus interferometrischen Messungen bekannt ist. Dieses ist für sieben Sterne der

Liste der Fall. Umgekehrt konnte bei Temperaturen, die aus dem W.I. bestimmt waren, aus der Totalstrahlung der Durchmesser für alle Sterne der Liste bestimmt werden.

Neben den bolometrischen Gr.kl., die als wichtigstes Ergebnis der neuen Methode aufzufassen sind, weil sie für die Gesamtstrahlung der Sterne eine neue Grundlage bieten, hat also die radiometrische Methode trotz ihrer relativen Unsicherheit, die durch die Schwäche der Strahlung bedingt ist, zu einer Reihe wichtigster Erkenntnisse geführt.

II. Theorien und Ergebnisse.

A. Die Strahlung der Selbstleuchter, der Sonne und der Fixsterne.

Wir behandeln zunächst die photometrischen Gesetze für *Selbstleuchter*, also die Fixsterne und die Sonne. Das photometrische Grundgesetz der Strahlungslehre ist das *Lambert*sche Kosinusgesetz, das deshalb zunächst begründet werden soll.

14. Das Lambertsche Emanationsgesetz. *Lambert* selbst hielt seine Formel durch den Umstand bewiesen, daß die Sonne eine gleichmäßige Helligkeit besitzt. Das trifft nun tatsächlich nicht zu, wie schon *Bouguer*[111]) durch Messungen festgestellt hatte. Trotzdem ist das *Lambert*sche Gesetz im wesentlichen richtig. Für den schwarzen Körper folgt dasselbe aus seiner Definition, aber auch für glühende Metallflächen und Gase ist es durch Messungen sehr nahe bestätigt. Einen Beweis für das Gesetz zu liefern ist erst gelungen, nachdem man die *Fourier*sche Anschauung über das Wesen der Ausstrahlung zugrunde gelegt hat. Nach dieser findet die Ausstrahlung nicht von der Oberfläche allein, sondern auch aus dem Inneren des Körpers statt. *Zöllner*[112]) hat bewiesen, daß die Versuche von *Beer*[113]) und *Rheinauer*[114]), das Gesetz theoretisch zu bekräftigen, unzulänglich waren und selbst einen Beweis geliefert, der aber ebenso wie ein anderer Beweis von *Lommel*[115]) einer vollkommenen Strenge ermangelte. Um diese zu erreichen, ist es notwendig, auch die Brechung der Strahlen an der Oberfläche des Körpers zu berücksichtigen, wobei sich dann eine allgemeinere Formel ergibt, die den Vorzug hat, auch der teilweisen Polarisation der Strahlung glühender fester Körper Rechnung zu tragen.

---

111) Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouvrage posthume, publié par l'abbé *de Lacaille*. Paris 1760.

112) Photometrische Untersuchungen usw., p. 12. Leipzig 1865.

113) Grundriß des photometrischen Calcüls, p. 6. Braunschweig 1854.

114) Grundzüge der Photometrie, p. 2. Halle 1862.

115) Wied. Ann., p. 449 (1880).

Für die Astronomie ist das freilich von geringer Bedeutung, weil diese es meistens mit glühenden Gasen zu tun hat, bei denen die Brechung und die Polarisation keine Rolle spielen. Wir wollen hier eine Ableitung der allgemeineren Formel nach *Smoluchowski de Smolan*[116]) andeuten, um dabei auch den Fall teilweise durchsichtiger Körper mit zu erfassen.

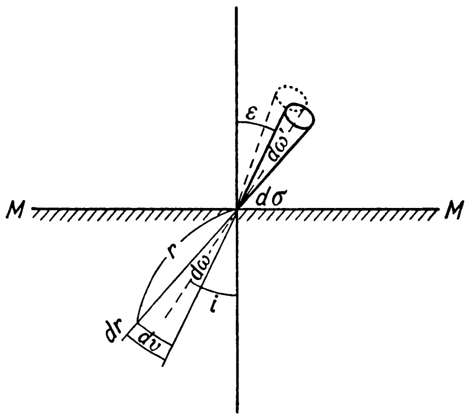

Fig. 5.
Das *Lambert*sche Gesetz für Selbstleuchter.

Der Körper sei eben begrenzt durch die Fläche MM und $d\sigma$ ein Element der Begrenzung, das wir uns als Spitze des räumlichen Winkels $d\omega$ denken, der sich ins Innere des strahlenden Körpers ausdehnt. Die Strahlung eines Elementarvolumens $dv = r^2 d\omega\, dr$ innerhalb dieses räumlichen Winkels im Abstande r von $d\sigma$ ist, wenn ihre Intensität U_0 in allen Richtungen gleich ist, durch $U_0\, dv$ gegeben. Es ist das die von dv in den räumlichen Winkel 1 ausgestrahlte Energiemenge; die auf das Element $d\sigma$ von dv gelangende Strahlungsmenge ist also

$$q = \frac{U_0\, dv\, d\sigma \cos i}{r^2} = U_0\, d\sigma \cos i\, dr\, d\omega\,,$$

wenn auf dem Wege r keine Absorption stattfindet. Mit Rücksicht auf die Absorption wird, wenn k den Koeffizienten derselben bezeichnet, daraus

$$q_0 = U_0 e^{-kr} d\omega\, d\sigma \cos i\, dr.$$

Von sämtlichen Volumelementen innerhalb des räumlichen Winkels erreicht die Oberfläche also eine Strahlungsmenge, die man durch Integration dieses Ausdrucks von $r = 0$ bis zu einem Abstande $r = \varrho$, aus welchem kein Licht mehr bis zur Oberfläche gelangt, erhält:

$$Q = U_0\, d\omega\, d\sigma \cos i \int_0^{\varrho} e^{-kr} dr = \frac{U_0}{k} d\sigma\, d\omega \cos i (1 - e^{-k\varrho}).$$

Da nun $e^{-k\varrho}$ verschwindend klein sein muß, wenn der Körper undurchsichtig ist, so erhält man für einen solchen Körper

$$Q = \frac{U_0}{k} d\sigma\, d\omega \cos i.$$

Vernachlässigt man die Brechung der Strahlung an der Oberfläche,

116) Journ. de Phys. 5 (1896), p. 488.

so tritt nach außen aus dem Element $d\sigma$ in den räumlichen Winkel $d\omega$ derselbe Energiestrom, und wir erhalten das *Lambert*sche Gesetz in der Form

(1) $$Q = U\,d\sigma\,d\omega\cos\varepsilon,$$

wo

(2) $$U = \frac{U_0}{k}$$

gesetzt ist. Bei senkrechter Ausstrahlung ($\varepsilon = 0$) würde sein $Q_0 = U\,d\sigma\,d\omega$, und es ist deshalb

(3) $$\frac{Q}{Q_0} = \cos\varepsilon.$$

Ist dagegen der glühende Körper teilweise durchsichtig, so ist die Integration bis zur anderen Begrenzung auszuführen. Wenn diese der oberen parallel ist und die Höhe der Schicht gleich H, so wird $\varrho = \frac{H}{\cos\varepsilon}$, und wir erhalten

$$Q = \frac{U_0}{k}\,d\sigma\,d\omega\cos\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{kH}{\cos\varepsilon}}\right)$$

und ebenso

$$Q_0 = \frac{U_0}{k}\,d\sigma\,d\omega\,(1 - e^{-kH}).$$

Mithin ist

(4) $$\frac{Q}{Q_0} = \cos\varepsilon\,\frac{1 - e^{-\frac{kH}{\cos\varepsilon}}}{1 - e^{-kH}}.$$

Für $\varepsilon = 0^0$ und $\varepsilon = 90^0$ wird dieser Ausdruck gleich 1 bzw. 0, fällt also mit dem *Lambert*schen Gesetze zusammen, für dazwischen liegende Werte weist er dagegen Abweichungen auf, die vom Produkte kH abhängig sind.

Wird die Strahlung bei ihrem Austritt aus dem undurchsichtigen Körper in $d\sigma$ gebrochen und bezeichnet jetzt i den Einfalls- und ε den Austrittswinkel, so wird sie dabei durch Reflexion nach der *Fresnel*schen Formel geschwächt, und zwar im Verhältnis

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-\varepsilon)}{\sin^2(i+\varepsilon)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-\varepsilon)}{\operatorname{tg}^2(i+\varepsilon)}\right].$$

Der austretende Energiestrom ist also

$$Q = p\,\frac{U_0}{k}\,d\sigma\,d\omega\cos i.$$

Berücksichtigt man die Veränderung des räumlichen Winkels durch Brechung aus $d\omega$ in $d\omega'$, so ergibt sich, wenn n_1 und n_2 die Brechungsexponenten der Medien bezeichnen,

(5) $$Q = p\,\frac{U_0}{k}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 d\omega'\,d\sigma\cos\varepsilon.$$

Es tritt also jetzt an Stelle des konstanten Strahlungsvermögens $U:k$ der Oberfläche die Größe

$$p\frac{U_0}{k}\frac{n_2^2}{n_1^2},$$

welche nicht mehr konstant ist, da sie sich mit p ändert, also von i und ε abhängig ist. Die letzte Formel enthält außerdem den Satz von *Kirchhoff-Clausius*, welcher aussagt, daß das Emissionsvermögen eines Körpers dem Quadrate des Brechungsexponenten des Mittels, in dem er sich befindet, proportional ist. Infolge der Brechung ist das schräg austretende Licht teilweise polarisiert. Schon *Arago* hat diese Polarisation beobachtet. Die Abweichungen von der *Lambert*schen Formel im Sinne der Formel (12) sind durch zahlreiche Messungen von *Lummer* und *Reiche*[117]), *Groß*[118]) u. a. bestätigt worden. Bei Gasen ist die Übereinstimmung mit der *Lambert*schen Formel nahezu vollkommen. Von der sehr zahlreichen Literatur über diesen Gegenstand seien hier nur die theoretischen Arbeiten von *H. v. Helmholtz* in den Vorlesungen für theoretische Physik, von *Uljanin*, Wied. Ann. 62 (1897), p. 528 und *F. Jentzsch*, Studien über Emission und diffuse Reflexion, Habilitationsschrift, Gießen 1912, und Ann. d. Phys. 39 (1912), p. 997, genannt.

15. Die Helligkeitsverteilung auf der Sonne. Bei den leuchtenden Gaskugeln, als die wir die Fixsterne ansehen müssen, können wir eine Bestätigung des *Lambert*schen Gesetzes für Selbstleuchter nicht erwarten. Bei der Erfüllung desselben müßten die Sterne gleichmäßig helle Kreisscheiben darstellen und bei dem einzigen Sterne, den wir als Scheibe sehen, der Sonne, ist das tatsächlich nicht der Fall. In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse bei einer Gaskugel wegen der Dichteabnahme in den Gasschichten und den Einflüssen der Atmosphäre wesentlich komplizierter; die Erfassung des Leuchtproblems der Sonne erfordert eine Theorie des Aufbaues der Gaskugel, die außerhalb des Rahmens dieser Abhandlung fällt. Sie ist im Bd. VI 2, 24 dieses Werkes durch *R. Emden* behandelt. Wir können uns hier auf die Zusammenstellung der verschiedenen theoretischen Ergebnisse mit den neuesten Beobachtungen der Lichtverteilung auf der Sonnenscheibe beschränken. Die tatsächliche Lichtverteilung auf der Sonnenscheibe ist für uns die Grundlage weiterer Betrachtungen über die Randverdunkelung der Sterne, die für das Problem der Bedeckungsveränderlichen von großer Bedeutung ist.

Nach der ursprünglichen Theorie des Strahlungsgleichgewichtes

---

117) Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 857.

118) Diss. Breslau 1911.

von *K. Schwarzschild*[119]) ist die Helligkeitsverteilung auf der Sonne für alle Wellenlängen gleich und durch die Formel

$$J = J_0 \tfrac{1}{3}(1 + 2\cos i)$$

gegeben, wo i der Austrittswinkel der Strahlen auf der Sonnenoberfläche bedeutet, so daß, wenn r der scheinbare Abstand vom Sonnenzentrum und R der scheinbare Radius der Sonnenscheibe ist, $\sin i = \frac{r}{R}$. *R. Emden*[120]) hat diese Formel wegen der unrichtigen Energiebilanz, die sie liefert, auf die Form

$$J = J_0 \tfrac{2}{5}(1 + \tfrac{3}{2}\cos i)$$

korrigiert, die einen etwas anderen Helligkeitsabfall zum Rande ergibt.

Die thermodynamischen Theorien des polytropen Aufbaues erfordern einen Helligkeitsabfall nach der Formel

$$J = J_0 \cos i^{\frac{n}{n+1}},$$

wo n die Polytrope bedeutet und nach *Eddington* nur die Polytrope $n = 3$ für die Verhältnisse auf der Sonne in Frage kommt.

Als Beobachtungsergebnisse führen wir nach *W. E. Bernheimer*[121]) den Mittelwert einer Reihe von Messungen der Helligkeitsverteilung mit Hilfe der Thermosäule (also für die Gesamtstrahlung) an, wobei aber bemerkt werden muß, daß die Ergebnisse für den Rand der Sonne nicht als sicher zu betrachten sind.

Tabelle 5.

Verschiedene Formen des theoretischen Helligkeitsverlaufes: Sonnenmitte bis Rand, verglichen mit Beobachtungsergebnissen der Randverdunkelung.

$\frac{r}{R}$	Strahlungsgleichgewicht I (nach *Schwarzschild*)	Strahlungsgleichgewicht II (nach *Emden*)	Polytroper Aufbau $n = 3$	$n = 5$	Beobachtungsergebnisse
0,00	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,20	99,0	99,0	98,0	99,0	99,0
0,40	95,0	95,0	92,0	94,0	96,4
0,60	87,0	88,0	80,0	86,0	91,3
0,70	81,0	83,0	71,0	80,0	86,6
0,80	73,0	76,0	60,0	71,0	80,2
0,90	63,0	66,0	44,0	58,0	69,6
0,96	52,0	57,0	28,0	43,0	58,7
0,98	47,0	52,0	20,0	34,0	49,0
1,00	33,0	40,0	0,0	0,0	(38,8)

119) Das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, p. 41 (1906).

120) Probleme der Astronomie. Seeliger-Festschrift, p. 347 (1924).

121) Handb. d. Astroph. IV, p. 8.

Der Verlauf der Helligkeit ist für die einzelnen Strahlungsgattungen verschieden. Die Ursache liegt im Temperaturgradienten der äußeren Schichten, von denen wir im Zentrum der Sonne tiefere sehen als am Rande. Die Theorie von *E. A. Milne*[122]) und von *B. Lindblad*[123]) trägt dieser Erscheinung Rechnung. Die Fig. 6 veranschaulicht diese einfache Theorie. ACB ist ein Schnitt der Sonnenoberfläche, der durch die Erde geht. P_1P_1', P_2P_2', ..., P_nP_n' sind die der gleichen optischen Tiefe entsprechenden Abstände von der Sonnenoberfläche, deren Strahlung in den Punkten $C, P_1, P_2, \ldots$ wesentlich wirksam ist. Die begrenzende Fläche $AC'P_1' \ldots B$ schneidet verschiedene Isothermen der Sonnenkugel, die zwischen den beiden kugelförmigen

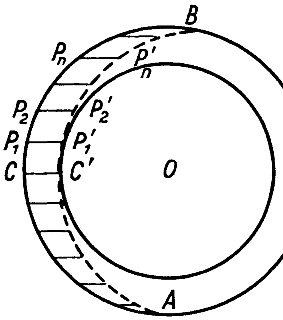

Fig. 6.

Tabelle 6.

Vergleichung der Helligkeitsabnahme auf der Sonnenscheibe nach den amerikanischen Beobachtungsergebnissen mit dem theoretischen Verlaufe nach *Milne* und *Lindblad*.

Wellenlänge in Å. E.	$\frac{r}{R}$	0,00	0,20	0,40	0,55	0,65	0,75	0,825	0,875	0,920	0,95	0,97
3737	*Abbot*	100,00	98,41	93,44	87,08	81,13	73,05	65,18	57,96	49,92	43,19	34,95
	Milne	100,00	98,2	92,9	85,9	79,5	71,1	63,2	57,0	49,0	44,1	—
	Lindblad	100,00	98,41	93,42	87,04	81,21	73,61	66,35	60,40	63,77	48,20	43,51
4265	*Abbot*	100,00	98,48	93,68	87,19	81,20	73,36	65,98	58,74	51,11	44,50	38,83
	Milne	100,00	98,5	93,9	88,0	82,5	75,1	68,0	62,1	55,6	49,9	—
	Lindblad	100,00	89,49	93,62	87,33	81,49	73,81	66,25	59,90	52,66	46,44	41,10
5062	*Abbot*	100,00	98,91	95,10	89,98	85,16	78,71	71,96	66,05	59,09	52,89	47,19
	Milne	100,00	98,8	94,9	90,0	85,4	79,4	73,4	68,4	62,6	57,4	—
	Lindblad	100,00	98,77	94,98	90,03	85,41	79,30	73,23	68,08	62,13	56,95	52,41
5955	*Abbot*	100,00	99,02	95,89	91,65	87,57	82,06	76,42	71,29	65,14	59,46	54,11
	Milne	100,00	99,0	95,7	91,4	87,4	82,1	77,0	72,4	67,2	62,5	—
	Lindblad	100,00	98,98	95,83	91,70	87,82	82,65	77,51	73,05	67,86	63,28	59,22
6702	*Abbot*	100,00	99,27	96,66	92,89	89,30	84,42	79,45	74,79	69,22	64,00	—
	Milne	100,00	99,1	96,1	92,3	88,7	83,8	79,0	74,7	69,9	65,5	
	Lindblad	100,00	99,13	96,45	92,92	89,58	85,16	80,67	76,78	72,23	68,20	
8580	*Abbot*	100,00	99,35	97,19	94,38	91,61	87,67	83,56	79,89	75,30	71,02	—
	Milne	100,00	99,3	97,0	93,9	91,0	87,1	83,2	79,7	75,5	71,7	
	Lindblad	100,00	99,32	97,19	94,35	91,68	88,10	84,41	81,19	77,36	73,92	
10 080	*Abbot*	100,00	99,39	97,48	94,88	92,27	88,80	85,07	81,64	77,30	73,31	—
	Milne	100,00	99,4	97,4	94,7	92,2	88,7	85,2	82,1	78,4	75,0	
	Lindblad	100,00	99,41	97,53	95,06	92,70	89,54	86,27	83,39	79,96	76,86	

122) Phil. Trans. Roy. Soc. 223 A (1922), p. 209.

123) Uppsala Univ. Årsskrift 1 (1920), p. 37 und Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal. 6, No. 1 (1923), p. 17.

Grenzflächen liegen. Die Temperatur der am Rande wirksamen Schicht ist tiefer als diejenige des Zentrums. Die sog. effektive Temperatur der Sonne bezieht sich deshalb auf eine mittlere Schicht.

Die vorstehende Tabelle gibt den Verlauf der Randverdunkelung nach diesen Theorien und nach neueren Messungsergebnissen von *Abbot*[124]) wieder. Sie ist der zitierten Arbeit von *W. Bernheimer*[121]) entnommen. In der zweiten Zeile ist die Temperatur nach *Milne* 5890°, in der dritten nach *Lindblad* eine Temperatur von 6000° angenommen.

Der Helligkeitsabfall ist in Violett beträchtlich stärker als in Rot.

Es ist wichtig, noch eine Folgerung der *Milne-Lindblad*schen Theorie der Randverdunkelung hervorzuheben: während die Randverdunkelung in jeder Wellenlänge von der Temperatur abhängt, ist die Randverdunkelung in der integrierten Gesamtstrahlung unabhängig von der Temperatur.

16. Die Gesamtstrahlung der Sonne und der Fixsterne. Die Temperatur der Sonne kann aus der Solarkonstante berechnet werden und ergibt sich zu rund 5800°. Konstruiert man die Strahlungskurve nach *Planck* für einen schwarzen Strahler dieser Temperatur, so ergeben sich erhebliche Abweichungen der Intensität der Sonnenstrahlung gegen die Beobachtungen der Intensität des Sonnenspektrums. Umgekehrt, wenn man aus der Intensität der maximalen Strahlung nach dem *Wien*schen Verschiebungsgesetze oder aus dem Gradienten der Intensität in einzelnen Teilen des Spektrums die Temperatur der Sonne als eines schwarzen Strahlers berechnet, so erhält man verschiedene Werte zwischen 5500° und 6000°. Das nämliche gilt sicher auch für die Strahlungskurven der Sterne anderer Spektraltypen und besonders für die roten Sterne mit starken Absorptionsbanden. Trotzdem wird auch die Gesamtstrahlung dieser Sterne nach der *Stefan-Boltzmann*schen Formel $\pi r^2 \sigma T^4$ berechnet, wo r der Radius des Sterns in cm und σ die *Stefan*sche Konstante, $\sigma = 5{,}70 \cdot 10^{-5}$ erg cm^2 sec^2 ist, und für T eine gewisse effektive Temperatur eingesetzt wird. Hierbei wird also von einer Randverdunkelung, die nicht bekannt ist, abgesehen. Das Studium der Randverdunkelung sowohl bei der Sonne als auch bei den Sternen ist für die Theorie des Strahlungsgleichgewichts und das Temperaturproblem von größter Bedeutung, und einige Methoden zu seiner Bestimmung sollen noch besprochen werden.

17. Interpolationsformeln für die Randverdunkelung bei Bedeckungsveränderlichen und bei der Sonne. *P. Harzer* hat in drei Arbeiten: „Über die Helligkeitsabnahme von Bedeckungsveränderlichen“[125]), „Über die Bestimmung der Randverdunkelung der Sonne

124) Smiths. Ann. IV (1922).

125) Publik. der Sternwarte Kiel 16 (1927).

während einer Sonnenfinsternis“[126]) und „Theoretische und praktische Untersuchungen über die Bestimmung der Randverdunkelung der Sonne usw.“[127]) den Einfluß der Randverdunkelung bei kreisförmigen Scheiben eingehend behandelt. Die erste Arbeit bezieht sich auf die Auswertung der Lichtkurven von Bedeckungsveränderlichen, die beiden anderen verwerten dieselben Formeln zur Bestimmung der Randverdunkelung der Sonne bei einer Sonnenfinsternis.

Nach der schon erwähnten Theorie von *K. Schwarzschild*[128]) muß die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe unabhängig von der Wellenlänge bei Strahlungsgleichgewicht der Formel genügen

$$(32) \qquad J = J_0\left(1 - c + c\sqrt{1 - r^2}\right),$$

wo J_0 die Helligkeit des Zentrums der Sonne, i der Austrittswinkel der Strahlen im Abstande r vom Zentrum der Scheibe ist. Die Konstante c hat nach *Schwarzschild* den Wert $c = \frac{2}{3}$. Tatsächlich ist aber die Randverdunkelung der Sonne für alle Wellenlängen verschieden und folgt dem obigen Gesetze nur für gewisse Strahlengattungen sehr angenähert. Außerdem können wir für Sterne anderer Spektraltypen und anderer Durchmesser eine wesentlich andere Randverdunkelung erwarten als bei der Sonne. *Harzer* erweitert die obige Formel für die Randverdunkelung durch zwei weitere Glieder mit unbestimmten Koeffizienten c_α, indem er in dem allgemeinen Ansatze

$$(33) \quad J = J_0\left(1 - \sum_1^\alpha c_\alpha + \sum_1^\alpha c_\alpha \cdot \sqrt{(1 - r^2)^\alpha}\right) = J_0\left(1 + \sum_1^\alpha c_\alpha \cos^\alpha i\right)$$

die Glieder bis $\alpha = 3$ mitnimmt; er führt die Berechnung der Lichtmengen für eine teilweise Bedeckung einer kreisförmigen Scheibe mit Randverdunkelung durch eine andere dunkle Scheibe bei verschiedenen Radienverhältnissen derselben streng durch. Mit Hilfe einer Reihe von Hilfstafeln ist es möglich, für beliebige Werte von c_1, c_2 und c_3, sowie für verschiedene $k = \frac{r_1}{r_2}$ die Verfinsterungskurve zu konstruieren. Bei der jetzigen Genauigkeit der Beobachtungen ist es meistens noch schwer zu entscheiden, welche von den beiden Annahmen, einer gleichmäßig hellen oder einer total verdunkelten Scheibe (die den Werten $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ entspricht), den Beobachtungen besser genügt; es ist also bisher keine Aussicht vorhanden, bei Verfinsterungsveränderlichen drei Konstanten der Randverdunkelung abzuleiten.

126) Astr. Nachr. Nr. 5663 (1929).

127) Publik. der Sternwarte Kiel 18 (1931).

128) Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1906.

Formeln für die *Schwarzschild*sche Form mit einer unbestimmten Konstante c hat *Schoenberg* im Handbuch für Astrophysik, Bd. II, 1. Hälfte, p. 30, angegeben.

Anders verhält es sich bei der Sonne, bei der eine direkte Messung der Helligkeitsabnahme zum Rande möglich ist. Zahlreiche Messungen[129]), von denen wir diejenigen von *Abbot*[130]) schon angeführt haben, ergeben einen wesentlich stärkeren Helligkeitsabfall im violetten als im roten Teile des Spektrums und müßten für ihre Darstellung durch eine der obigen Formeln recht verschiedene Werte der Konstanten für die einzelnen Wellenlängen erfordern. Das Gebiet der Wellenlängen von 323 bis 662 $\mu\mu$ hat *R. Witting*[131]) durch eine Formel der Form (32) darzustellen versucht, fand aber noch Abweichungen bis zu 6% der zentralen Helligkeit, während *P. Harzer*[132]) bei seiner Formel mit drei Konstanten für die Wellenlänge 604 $\mu\mu$ eine Darstellung bis auf 1% gelang.

Es ist aber von verschiedenen Seiten und zuerst wohl von dem niederländischen Physiker *W. H. Julius*[133]) darauf aufmerksam gemacht worden, daß diese direkten Messungen der Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe bedeutenden Fehlern unterworfen sind, die einerseits in der Luftunruhe ihre Ursache haben, andererseits in der Helligkeit des diffusen Atmosphärenlichtes, das sich zur Sonnenhelligkeit addiert. Die Luftunruhe verwischt die Helligkeitsunterschiede angrenzender Teile in einer schwer zu berücksichtigenden Weise; das diffuse Himmelslicht an einer bestimmten Stelle der Sonnenscheibe ist eine Integralwirkung des Beugungslichts der ganzen Umgebung der betreffenden Stelle und würde zu seiner Berechnung schon die Kenntnis der außeratmosphärischen Helligkeit der einzelnen Teile der Sonne erfordern. Die Helligkeit des diffusen Lichtes ist außerdem von der Apparatur abhängig, mit der die Messung ausgeführt wird.

Diese Fehlerquellen sind bei der Messung der Totalhelligkeit der Sonne während einer Finsternis zum Teil ausgeschaltet, zum Teil andersartig. Die Luftunruhe spielt keine Rolle. Das zerstreute Atmo-

129) *W. E. Wilson* a. *A. A. Rambaut,* Proceedings of the R. Irish Academy. 3 ser. Vol. II (1892), p. 299. *E. B. Frost,* Observations of the thermal absorption etc. A. N. 130 (1892), p. 129. *F. W. Very,* The absorptive power of the solar atmosph. Astroph. Journ. 16 (1902), p. 73. *K. Schwarzschild* u. *W. Villiger,* On the distribution of Brigtness etc. Astroph. Journ. 23 (1906), p. 284.

130) Ann. Astroph. Obs. Smith. Inst. 3 (1913), p. 157.

131) Festkrift tillegnad *A. Donner* etc. Helsingfors 1915. Om strålningen från olika delar af solskivan, p. 18.

132) Publik. d. Sternwarte Kiel 16 (1927), p. 4.

133) A new method for determining etc. Astroph. Journ. 23 (1906), p. 312.

sphärenlicht wirkt nur in seiner Gesamtheit innerhalb eines durch den Empfangsapparat begrenzten räumlichen Winkels. Von besonderem Werte ist die Möglichkeit, die Beobachtungen bis zum Ende der Finsternis auszudehnen und damit die Helligkeit der äußersten Randzone der Sonne zu erfassen, was bei direkten Messungen wegen der Luftunruhe und des starken Helligkeitsabfalls niemals einwandfrei möglich ist. *W. H. Julius* hat eine empirische Methode zur Bestimmung der Energiedichte der Sonnenscheibe aus Finsternisbeobachtungen vorgeschlagen und an zwei Beispielen durch numerische Rechnung geprüft.[133]) Aus gleichmäßig dickem Papier wurden durch konzentrische Kreise begrenzte Stücke ausgeschnitten, denen man gleiche, zunächst unbekannte Energiedichten zuschrieb und aus denen man den während der einzelnen Phasen der Finsternis unbedeckten Teil der Sonnenscheibe zusammensetzte; darauf wurden diese Papierausschnitte gewogen und lineare Gleichungen mit den unbekannten Dichten und den bekannten Gewichten der Teile aufgestellt, die die beobachtete Helligkeit enthielten. Die Auflösung derselben ergab die Energiedichten für die einzelnen Kreise der Scheibe. Später hat *Minnaert*[133a]) für die Erfassung der äußersten Randzone bei totalen und ringförmigen Finsternissen Formeln vorgeschlagen, die eine Ergänzung zu der Methode von *Julius* sein sollten, weil diese am äußersten Sonnenrande versagt.

Minnaert fand auf diese Weise aus den letzten Minuten vor der Totalität bei einer Reihe von Finsternissen den Abfall der Helligkeit am Rande der Sonne wesentlich abweichend von der *Schwarzschild*schen Formel und von den Ergebnissen direkter Messungen; der Abfall der Helligkeit verläuft hier ganz steil. Während nach *Schwarzschilds* Formel die Helligkeit am Rande nur auf 40% der zentralen herabsinkt, zeigen die Finsternisbeobachtungen der Totalhelligkeit, daß dieser Wert in etwa $0{,}01\,R$ vom Rande erreicht wird, worauf dann die Helligkeit steil zu 0 abfällt. Die *Minnaert*schen Formeln für die Totalhelligkeit in der Nähe der Verfinsterung setzen aber schon einen hypothetischen Helligkeitsabfall voraus.

O. Heckmann und *H. Siedentopf*[134]) haben eine Methode für die Berücksichtigung des Einflusses der Luftunruhe bei direkten Messungen der Helligkeitsverteilung angegeben und diese auf Beobachtungen von *A. Juska*[135]) in Göttingen angewandt. Nach Anbringung der Korrektionen wegen Szintillation zeigt sich tatsächlich, daß der Abfall

133a) Monthly Not. 89 (1928), p. 197.

134) Veröffentl. der Sternwarte zu Göttingen, Heft 8 (1929).

135) Veröffentl. der Sternwarte zu Göttingen, Heft 7 (1929).

der Helligkeit bis zu einem Abstande von 0,01 R wesentlich flacher verläuft, als bisher angenommen wurde, und bei etwa 0,005 R der steile Abfall bis zum Nullwerte am Rande ansetzt.

18. **Strenge Berechnung der Helligkeitsverteilung aus Finsternisbeobachtungen nach Heckmann und Siedentopf.**[135]) *Totale Sonnenfinsternis.* In der Fig. 7 ist S und M der Mittelpunkt der Sonne und des Mondes, Δ ihr Abstand. Der Radius der Sonne ist 1, der des Mondes m. In der schmalen Randzone zwischen r und $r + dr$ sei die Helligkeit $f(r)$. Der Winkel PSM sei $180^0 - \varphi$; der Grenzwert φ, bis zu dem mit konstantem r und $f(r)$ zu integrieren ist, hängt von Δ ab. Es wird nur diejenige Phase betrachtet, bei der der Mondrand den Mittelpunkt der Sonne bereits überschritten hat, wo also $m - 1 \leqq \Delta < m$ ist. Es sei weiter h die beobachtete Gesamthelligkeit des unverfinsterten Teiles der Sonne, c eine Konstante. Es ist dann

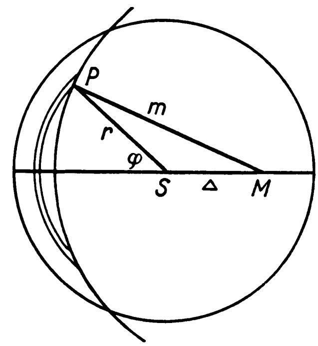

Fig. 7. Totale Sonnenfinsternis.

(34) $$h = 2c\int\limits_{m-\Delta}^{1} r f(r) \arccos \frac{m^2 - r^2 - \Delta^2}{2r\Delta}\, dr.$$

In den gleichen Einheiten gilt für I, die Gesamthelligkeit der Sonnenscheibe

$$I = c\pi f(0)\,\frac{\bar f}{f(0)},$$

wo $f(0)$ die zentrale, $\bar f$ die mittlere Flächenhelligkeit der Sonne ist. Durch Division erhält man

(34') $$\frac{h}{I} = \frac{2}{\pi}\,\frac{f(0)}{\bar f}\int\limits_{m-\Delta}^{1} r\,\frac{f(r)}{f(0)} \arccos \frac{m^2 - r^2 - \Delta^2}{2r\Delta}\, dr.$$

Der Wert von $\frac{f(0)}{\bar f}$ ist für die einzelnen Wellenlängen verschieden und bekannt, die Funktion $\frac{f(r)}{f(0)}$ soll aus den beobachteten Totalhelligkeiten bestimmt werden.

Zur Lösung der Integralgleichung (34) schlagen *Heckmann* und *Siedentopf* folgenden Weg ein. Zunächst wird statt m und r eingeführt

(35) $$\varrho = 1 - r, \quad \mu = m - 1,$$

weil bei der Beschränkung der Aufgabe auf Phasen nahe der Totalität beide Größen ϱ und μ klein werden gegen 1. Es wird dann der Kern der Integralgleichung

$$\Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos \frac{\mu^2 - \varrho^2 + 2(\mu + \varrho) - \Delta^2}{2\Delta(1-\varrho)} = \arccos\left\{\frac{\mu+\varrho}{\Delta} - \frac{\Delta^2 - (\mu+\varrho)^2}{2\Delta(1-\varrho)}\right\}.$$

Diese Funktion wird nach den Potenzen des zweiten Bruches in der Klammer, der klein ist gegen den ersten, entwickelt, und es ergibt sich

$$(36)\quad \Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta} + \frac{\Delta}{2(1-\varrho)}\left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{2^2(1-\varrho)^2}\left[1 - \left(\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \cdots.$$

Wenn man sich auf das erste Glied dieser Entwicklung beschränken könnte, so wäre das Problem gelöst, denn die Integralgleichung

$$(37)\qquad h = 2c\int_0^{\Delta-\mu}(1-\varrho)f(1-\varrho)\arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\,d\varrho$$

kann durch die Differentiation nach Δ auf die *Abel*sche Form gebracht werden. Die Abschätzung des zweiten Gliedes der Reihe (36) zeigt aber, daß für $\Delta > 0{,}02$ dasselbe schon von Bedeutung wird und daß man bei größeren Werten von Δ bis 0,7 und einer Genauigkeit von 1% in $\Gamma(\varrho, \Delta)$ schon zwei Glieder mitnehmen muß. Um nun die *Abel*sche Form der Integralgleichung beizubehalten, wird $\Gamma(\varrho, \Delta)$ in der Form

$$(38)\qquad \Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\,u(\varrho)\,v(\Delta)$$

dargestellt, wobei u und v geeignet gewählte Funktionen sind, die die gewünschte Genauigkeit für die Darstellung von $\Gamma(\varrho, \Delta)$ gewährleisten. Als solche Funktionen können lineare Ausdrücke gewählt werden, so daß man statt der Form (38) erhält:

$$(39)\qquad \Gamma(\varrho, \Delta) = \arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\,k(1+\alpha\Delta)(1+\beta\varrho).$$

Die Werte der Koeffizienten k, α und β sind durch numerische Ausgleichung passend gewählt. Es wird dann

$$(40)\quad h = 2c\int_0^{\Delta-\mu} f(1-\varrho)\arccos\frac{\mu+\varrho}{\Delta}\,k(1+\alpha\Delta)(1+\beta\varrho)(1-\varrho)\,d\varrho.$$

Setzt man hier

$$\frac{h}{k(1+\alpha\Delta)} = H(\Delta);\quad (1-\varrho)f(1-\varrho)(1+\beta\varrho) = F(\varrho),$$

so bekommt man

$$H(\Delta) = 2c\int_0^{\Delta-\mu} F(\varrho) \arccos \frac{\mu+\varrho}{\Delta}\, d\varrho,$$

und hieraus durch Differentiation nach Δ

$$H'(\Delta) = \frac{2c}{\Delta}\int_0^{\Delta-\mu} \frac{F(\varrho)}{\sqrt{\Delta^2-(\mu+\varrho)^2}}(\mu+\varrho)\, d\varrho.$$

Durch Einführung der neuen Variablen

$$(\varrho+\mu)^2 = t; \quad \Delta^2 = \delta$$

und der neuen Funktionen

$$\frac{\Delta}{c} H'(\Delta) = G(\delta); \quad F(\varrho) = \Phi(t)$$

erhält man die *Abel*sche Integralgleichung

$$(41) \qquad G(\delta) = \int_{\mu^2}^{\delta} \frac{\Phi(t)\, dt}{\sqrt{\delta - t}} dt$$

mit der Umkehrung

$$(42) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_{\mu^2}^{\delta} \frac{G(\delta)}{\sqrt{z-\delta}}\, d\delta = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dz}\int_{\mu^2}^{\delta} G'(\delta)\sqrt{z-\delta}\, d\delta.$$

Ringförmige Finsternisse. Bei einer ringförmigen Sonnenfinsternis liegt das Problem insofern schwieriger, als vom Momente des zweiten Kontaktes an die Integralgleichung keine eindeutige Lösung mehr haben kann. Von diesem Momente an ist $\Delta \leqq 1 - m$ und $f(r)$ aus der Gleichung zu bestimmen:

$$(43) \quad h = 2c\left\{\int_{m-\Delta}^{m+\Delta} r f(r) \arccos \frac{m^2 - r^2 - \Delta^2}{2r\Delta}\, dr + \pi \int_{m+\Delta}^{1} r f(r)\, dr\right\}.$$

Diese kann man auch in der Form schreiben:

$$(43') \; h = 2c\int_{m-\Delta}^{m} r f(r)\varphi(r,\Delta)\, dr + 2c\left\{\int_{m}^{m+\Delta} r f(r)\varphi(r,\Delta)\, dr + \pi\int_{m+\Delta}^{1} r f(r)\, dr\right\}.$$

Man sieht dann, daß man $f(r)$ entweder in dem Bereich $2m - 1 \leqq r < m$ vorgeben muß, wodurch es dann in dem Bereich $m \leqq r \leqq 1$ bestimmt ist, oder umgekehrt. Das wird durch Fig. 8 veranschaulicht. Entnimmt man die Werte von $f(r)$ für den gestrichelten Bereich anderen Beobachtungen, so ist die Bestimmung für den Randbereich nach der oben besprochenen Methode möglich.

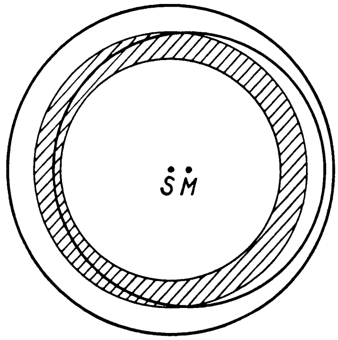

Fig. 8. Ringförmige Sonnenfinsternis. S Mittelpunkt der Sonne, M Mittelpunkt des Mondes. Der zu S konzentrische schraffierte Ring ist der Bereich $2m-1 \leqq r < m$. Er wird umschlossen vom Bereiche $m \leqq r \leqq 1$.

Der Gang der Rechnung bei der Auswertung der Kurve h zur Bestimmung von $f(r)$ ist bei partiellen Finsternissen folgender:

1. Man hat die Funktion h, die in abgemessenen Zeitintervallen abgelesen ist, zunächst als Funktion der Abstände Δ darzustellen als $h(\Delta)$.

2. Man berechnet die Funktionen $u(\varrho)$ und $v(\Delta)$.

3. Man berechnet die Funktion $G'(\delta)$ und erhält durch numerische Integration $\Phi(z)$.

4. Hieraus bekommt man dann

$$f(1-\sqrt{z}+\mu) = \frac{\Phi(z)}{(1-\sqrt{z}+\mu)\,u(\sqrt{z}-\mu)}.$$

Eine Anwendung dieser strengen Methode für die Auswertung von Finsterniskurven ist noch nicht versucht worden.

B. Die Resonanzstrahlung der Nebel und Kometen.

Neben der Eigenstrahlung der Sonne und der Sterne und der reflektierten Strahlung der dunklen Körper ist für die Deutung der Helligkeit der Nebel und der Kometen die durch Sterne angeregte Resonanz- oder Fluoreszenzstrahlung von Bedeutung. Dieses Gebiet ist erst in neuester Zeit durch die Fortschritte der Quantentheorie einer mathematischen Behandlung zugänglich und für die Astrophotometrie fruchtbar geworden. Strenge Theorien der Lichtstärke des Emissionsspektrums haben aber, auch soweit sie vorhanden sind, bisher keine astronomische Anwendung gefunden.

19. Untersuchungen über die galaktischen Nebel von Hubble. Die galaktischen Nebel, die gewöhnlich in zwei Klassen, die diffusen und die planetarischen Nebel eingeteilt werden, sind nach neueren Untersuchungen von *Hubble*[136]) keine Selbstleuchter, sondern leuchten entweder in reflektiertem Licht naheliegender Sterne, oder, wenn sie neben dem kontinuierlichen ein Emissionsspektrum aufweisen, durch

136) Astroph. Journ. 56 (1922), p. 162 und 400.

Anregung einer Eigenstrahlung ebenfalls durch benachbarte oder eingebettete Sterne von besonders hoher Temperatur.

Der Fall reiner Reflexion der Sternstrahlung an dunklen Staubwolken wird von uns in einem besonderen Kapitel behandelt werden. Er ist immer dort anzuwenden, wenn das Spektrum des Nebels mit dem der beleuchtenden Sterne identisch ist oder nur eine dem *Rayleigh*schen Gesetze entsprechende Verfärbung aufweist. Differentielle Intensitätsmessungen in verschiedenen Abständen vom beleuchtenden Sterne und in verschiedenen Farben liegen bei solchen Nebeln noch nicht vor, so daß Schlußfolgerungen über die Dichte und die Art der reflektierenden Partikel hier noch nicht möglich waren. Nur *E. Hertzsprung*[137]) hat die Gesamthelligkeit der Plejadennebel vermessen und den Schluß ziehen können, daß dieselbe 3,5 bis 5,6 Gr.kl. geringer ist, als bei der Annahme vollständiger Diffusion des Sternlichts in den Nebeln zu erwarten wäre. Doch ist sowohl das Beobachtungsmaterial als seine Auswertung in diesem Falle noch Zweifeln unterworfen.[138]) Gesicherte Fälle der Identität des Nebel- und Sternspektrums sind in einer Veröffentlichung von *V. M. Slipher*[139]) nachgewiesen. Größer ist die Anzahl von Nebelspektren mit Emissionslinien, auf die die Reflexionstheorie keine Anwendung finden kann, weil hier die Spektren des Sterns und des Nebels total verschieden sind.

H. N. Russell[140]) hat als erster die Vermutung ausgesprochen, daß auch dieses Emissionsspektrum durch die kurzwellige Strahlung naheliegender Sterne angeregt sein kann, und *Hubble* hat diese Annahme an einem großen Material bestätigt gefunden, so daß eine Temperaturstrahlung der Nebelmaterie heute als ausgeschlossen gelten kann.

Den Nachweis des Ursprungs der Nebelstrahlung in der Strahlung benachbarter Sterne hat *Hubble* für alle diffusen Nebel (mit kontinuierlichem und mit Emissionsspektrum) in folgender Weise erbracht. Wenn der Nebel kein Eigenlicht besitzt, sondern von einem Stern erleuchtet wird, so muß seine Flächenhelligkeit von der Helligkeit des Sterns abhängen und sich mit wachsender Entfernung von ihm vermindern. Der scheinbare Durchmesser auf der photographischen Platte muß dann auch eine Funktion der Sternhelligkeit und der Belichtungszeit sein, denn erstens wird ein um so größerer Teil der dunklen Nebelwolke vom Stern durchleuchtet sein, je heller dieser

137) Astr. Nachr. 195 (1913), p. 448.

138) *E. Schoenberg,* Theoretische Photometrie. Handb. d. Astroph. II, 1. Teil (1929), p. 166.

139) Publ. of the Astr. Soc. of the Pacific. 30 (1918), p. 63.

140) Proceed. of the Nation. Acad. of Sc. 8 (1922), p. 115.

ist, und zweitens bilden sich bei zunehmender Belichtung schwächere äußere Partien des Nebels auf der Platte ab. *Hubble* zeigt, daß diese Abhängigkeit auf die einfache Form

$$\alpha^2 = E \times J \times \text{const.}$$

gebracht werden kann, wo α der scheinbare Halbmesser des Nebels, E die Belichtungszeit und J die scheinbare Helligkeit des Sterns ist. Reduziert man auf gleiche Belichtungszeit und führt Größenklassen statt Helligkeiten ein, so ergibt sich hieraus die Beziehung

$$m + 5 \log \alpha = \text{const.} = 11{,}61.$$

Hier ist die Konstante aus einer Untersuchung der schwächsten Flächenhelligkeit, die bei einer gegebenen Belichtung gerade noch eine Schwärzung hervorruft, theoretisch bestimmt. Es müssen also die Logarithmen der reduzierten Nebeldurchmesser und die Gr.kl. der Sterne in linearer Beziehung stehen. *Hubble* hat das an 80 Nebeln geprüft und voll bestätigt gefunden, wobei die Konstante sich etwas kleiner, zu 11,0 ergab. Die kleine Unstimmigkeit kann leicht dadurch erklärt werden, daß die scheinbaren Helligkeiten der Sterne durch die Nebelmaterie, durch die sie hindurchscheinen, etwas geschwächt sind.

Die planetarischen Nebel, deren Anzahl nur gering ist (bisher 125), sind Himmelskörper mit Durchmessern von 12—15 Bogenminuten bis zu ganz kleinen, die kaum von Sternen zu unterscheiden sind. Sie sind von bestimmter Form und innerer Struktur (meist rund, elliptisch oder ringförmig) und haben in den meisten Fällen einen Stern in ihrem Zentrum. Dieser Stern ist der Erreger der Strahlung der Nebelmaterie. Ihr Spektrum besteht aus einer Reihe von hellen Linien und außerdem aus einem kontinuierlichen Teile, der an der Grenze der Balmerserie des Wasserstoffs beginnt und sich ins Ultraviolett erstreckt.

Die diffusen Nebel zeigen keine bestimmte Form und Struktur. *Hubble* rechnet auch die dunklen Nebelwolken der Milchstraße, die sich durch Absorption des Lichtes der hinter ihnen gelegenen Sterne nachweisen lassen, zu den diffusen Nebeln. Wo sie leuchtend sind, zeigen sie entweder ein Emissionsspektrum, wie die planetarischen Nebel, oder ein kontinuierliches Spektrum, wie die sie erleuchtenden Sterne. Bei der Untersuchung der Spektraltypen der erregenden Sterne hat sich dabei die wichtige Tatsache ergeben, daß die Emissionsspektra der Nebel immer nur durch die heißesten Sterne von den Typen O bis B_0 angeregt werden, während das Licht der Nebel mit kontinuierlichem Reflexionsspektrum von Erregern mit Spektraltypen von B_1 beginnend herrührt. Damit war erwiesen, daß für die Anregung eines Emissionsspektrums der Nebel die hohen Temperaturen eine notwendige Bedingung sein müssen.

20. Die Theorie der Nebelstrahlung von H. Zanstra. Für den Mechanismus der Anregung kommen zwei Annahmen in Betracht: 1. Anregung der Atome durch Linienabsorption und nachfolgende Reemission und 2. photoelektrische Ionisation der Atome und nachfolgende Lichtemission bei der Wiedervereinigung.

H. Zanstra[141]) hat für ein vereinfachtes Problem eines nur aus Wasserstoff bestehenden Nebels mit reinem Emissionsspektrum eine Theorie der photoelektrischen Ionisation entworfen und gezeigt, daß diese mit *Hubbles* Ergebnissen bezüglich der Helligkeiten der Nebel in bestem Einklange steht.

Die erstgenannte Theorie der einfachen Absorption und Reemission kann nach *Zanstra* der Lichtstärke der Nebel nicht Rechnung tragen.

Die zweite Annahme gibt wesentlich größere Lichtstärken. Der anregende Stern verhalte sich wie ein schwarzer Strahler bestimmter Temperatur. Durch die Absorption des gesamten Spektralgebiets jenseits der *Lyman*serie ($\lambda < 911{,}5$ Å.E.) werden die neutralen Wasserstoffatome photoelektrisch ionisiert. Bei Wiedervereinigung der freien Elektronen mit dem Atom werden dann die kontinuierlichen Spektra an der Grenze der *Lyman*serie, der *Balmer*serie usw. emittiert, beim Herabfallen der Elektronen von den höheren zu den tieferen Energiestufen die Linien der verschiedenen Serien. Von diesen sind photographisch erreichbar die *Balmer*serie und das kontinuierliche Spektrum an ihrer Grenze. Beide werden in den Spektren der Nebel beobachtet, das kontinuierliche bei diffusen Nebeln allerdings sehr selten, bei den planetarischen jedoch regelmäßig. Damit dieses erscheint, muß ein freies Elektron bei seiner Rückkehr in das Atom auf die zweite Energiestufe fallen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Elektron in einer Bahn mit der kleinen Quantenzahl n gebunden wird, wie das in dieser Theorie verlangt wird, erreicht nur dann beträchtliche Werte, wenn seine kinetische Energie groß ist, vergleichbar mit der Bindungsenergie in der betreffenden Quantenbahn. Große Geschwindigkeiten der photoelektrisch losgelösten Elektronen haben wir aber erst bei sehr hohen Temperaturen des anregenden Sternes zu erwarten. Da die Zentralsterne der planetarischen Nebel gerade zu den heißesten Sternen gehören, gewinnt die Theorie darin ihre wichtigste Stütze.

---

141) Astroph. Journ. 65 (1927), p. 50.

Zanstra erbringt noch den quantitativen Beweis seiner Theorie in folgender Weise. Nach der Theorie der Ionisation hängt die Intensität des Nebelspektrums von der des Ultraviolettspektrums des Anregers ab. Letzteres läßt sich aber nicht beobachten; wir können nur, wie *Hubble* es getan hat, das Intensitätsverhältnis des Nebellichtes zum photographisch wirksamen Sternenlicht ermitteln. Es muß also nach *Zanstras* Theorie versucht werden, für dieses einen theoretischen Wert zu berechnen. Bezeichnet man mit N'_{ph} die Zahl der im photographisch wirksamen Gebiet pro Sekunde auf die Platte auftreffenden Quanten der Nebelstrahlung, durch N_{ph} die entsprechende Zahl für den anregenden Stern und durch N_{ul} die Zahl der aus der Ultraviolettstrahlung des Sternes im Nebel absorbierten Quanten, so müßte wenigstens annähernd die Beziehung gelten

$$\frac{N'_{\mathrm{ph}}}{N_{\mathrm{ph}}} \sim \frac{N_{\mathrm{ul}}}{N_{\mathrm{ph}}}.$$

Durch Auswertung der Integrale N_{ul} und N_{ph} für verschiedene Sterntemperaturen konnte *Zanstra* das Verhältnis $L = \frac{N'_{\mathrm{ph}}}{N_{\mathrm{ph}}}$ berechnen. Dieses Verhältnis ist eine mit der Temperatur des Strahlers sehr schnell anwachsende Zahl. Die Tabelle von *Zanstra* ist hier angeführt. Da die Beobachtung für dasselbe Verhältnis den angenäherten Wert 1 ergibt, so folgt, daß die Temperatur der Sterne rund 33000° sein muß. Bestimmt man diese Zahl getrennt für die Nebel mit anregenden Sternen vom *O*-Typus und vom *B*-Typus, so erhält man Temperaturen von 34000° und 28000° resp. Das stimmt aber mit den Temperaturen der *O*- und der *B*-Sterne gut überein. Damit hat die Theorie eine so gute Bestätigung erhalten, als es bei der relativen Dürftigkeit der gemessenen Daten möglich war.

Tabelle 7.

T	L
15000	0,0075
20000	0,066
25000	0,271
30000	0,72
35000	1,41
40000	2,50
50000	5,4
70000	15,3
100000	38
200000	185

Für die Zentralsterne der planetarischen Nebel, wo die L-Werte die Zahl 100 übersteigen, liefert die Tabelle allerdings unwahrscheinlich hohe Temperaturen. Indessen sind die Zahlen hier kaum zu gebrauchen, weil in den planetarischen Nebeln nicht wie in den diffusen die *Balmer*serie die Haupthelligkeit liefert, sondern die sog. Nebuliumlinien N_1 und N_2.

21. Die Helligkeitsverteilung auf elliptischen Nebeln. Unter den 400 außergalaktischen Nebeln, die von *E. Hubble*[142]) klassifiziert wor-

142) Astroph. Journ. 64 (1926), p. 321; Mt. Wilson Contributions Nr. 324 (1926).

den sind, befinden sich 85 elliptische Nebel, die in ihrer scheinbaren Figur Exzentrizitäten von 0,3 bis 1 aufweisen. Die Helligkeitsverteilung auf den photographischen Bildern von 15 elliptischen Nebeln ist von *Hubble* auch annähernd untersucht.[143]) Wegen der guten Übereinstimmung der beobachteten Exzentrizitäten mit den von *Jeans* theoretisch gefolgerten Gleichgewichtsfiguren stark kompressibler rotierender Gasmassen schien dieses Ergebnis der Messung eine große kosmogonische Bedeutung und die Frage über die Statistik der einzelnen Abplattungen ein besonderes Interesse zu haben. Die beobachteten Exzentrizitäten sind durch die Projektion natürlich verfälscht. Eine theoretische Bestimmung der wahrscheinlichsten Helligkeitsverteilung einer solchen rotierenden Gasmasse gewinnt dadurch an Bedeutung, daß bei gewissen wahrscheinlichen Voraussetzungen aus der Helligkeitsverteilung auf der Projektion des Nebels das Gesetz der Helligkeits- und Dichteverteilung im Inneren des Nebels erschlossen werden kann.

Diese Aufgabe hat *P. ten Bruggencate*[144]) behandelt. Seine Ausführungen werden hier in Kürze wiedergegeben.

Die Voraussetzung des Problems sind: 1. Die Figur des Nebels ist ein Rotationsellipsoid, und auch die Flächen gleicher Leuchtkraft, die vom Zentrum nach außen abnehmend gedacht wird, sind konzentrische, koaxiale, ähnliche Ellipsoide; 2. es findet keine merkbare Absorption und keine Abdeckung der Strahlung im Inneren des Nebels statt, so daß die Helligkeit in jedem Punkte der sichtbaren Projektion die Summe der Helligkeiten aller in der Gesichtslinie liegenden Partikel des Nebels von der hinteren bis zur vorderen Begrenzung des Nebels ist.

Der Ursprung des Koordinatensystems wird in das Zentrum des Nebels gelegt, die z-Achse fällt in die Gesichtslinie; die x-Achse in die Schnittlinie des Nebeläquators mit der Projektionsebene xy. Dann liegt also die x-Achse in der großen Achse der sichtbaren Ellipse (α), die y-Achse in der kleinen Achse derselben (β); s. Fig. 9. Die yz-Ebene schneidet den Nebel längs

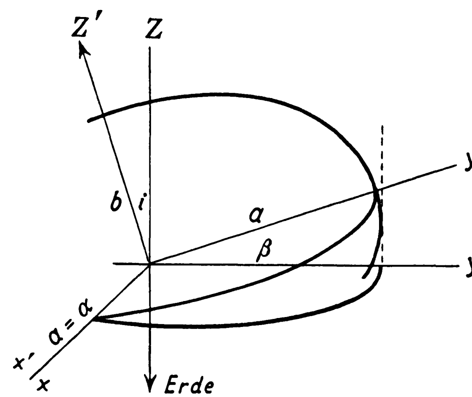

Fig. 9. Das Rotationsellipsoid und seine Projektion.

143) Astroph. Journ. 71 (1930), p. 231.

144) Ztschr. f. Astroph. 1, p. 275.

einem Meridian; in diesem liegt die Rotationsachse z' und die dazu senkrechte Achse y'. Wenn die Helligkeitsverteilung in diesem Schnitt bekannt ist, so ist die Aufgabe wegen der herrschenden Rotationssymmetrie gelöst.

Nennt man $I(x, y)$ die beobachtete Intensität im Punkte x, y der Projektion des Nebels, $H(x, y, z)$ die gesuchte Intensität im Raumpunkte x, y, z, so gilt nach den Voraussetzungen die Gleichung

$$I(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} H(x, y, z)\, dz, \tag{1}$$

wobei die Integration längs einer zur z-Achse parallelen Geraden von der hinteren (z_1) bis zur vorderen (z_2) Begrenzung auszuführen ist.

Die Flächen gleicher Helligkeit sollen durch die Gleichung

$$z = \psi(x, y, \alpha) \tag{2}$$

gegeben sein, wobei der Parameter α die einzelnen Flächen festlegt und von innen nach außen wachsend angenommen werden darf. Die durch den Punkt x, y gehende z-Gerade wird eine innerste Fläche berühren, die durch den Parameterwert $\alpha = \alpha_0$ charakterisiert werden soll, und alle äußeren Flächen in zwei Punkten schneiden. Die Oberfläche des Nebels kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch den Parameterwert $\alpha = 1$ festgelegt werden. Der Helligkeitsabfall H im Inneren des Nebels kann jetzt als reine Funktion von α betrachtet werden. Es ist die scheinbare Helligkeit im Punkte x, y

$$I(x, y) = 2\int_{\alpha = \alpha_0}^{\alpha = 1} H(\alpha)\, dz. \tag{3}$$

Man erhält aus (2)

$$dz = \frac{\partial \psi(x. y, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha \tag{4}$$

und nach Einsetzen von dz eine Integralgleichung

$$I(x, y) = 2\int_{\alpha_0}^{1} H(\alpha)\, \frac{\partial \psi(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha. \tag{5}$$

Sie gehört zu den *Volterra*schen Integralgleichungen erster Art, deren eindeutige Lösung nach der Methode der Iteration im allgemeinen Falle möglich ist. Die Gleichung (5) reduziert sich auf eine mit nur einer Variablen für die Punkte längs der großen Achse $(y = 0)$ und der kleinen Achse $(x = 0)$ der Projektion. Im ersten Falle ist außerdem $\alpha_0 = x$, im zweiten $\alpha_0 = \alpha_0(y)$. Setzt man also die Kenntnis der Funktion $\psi(x, y, \alpha)$ voraus und mißt, wie das *Hubble* getan hat, die

Intensitätsverteilung längs der großen und der kleinen Achse der Projektion, so gibt die Lösung der Integralgleichungen

$$(6) \qquad I_1(x) = 2\int\limits_x^1 H(\alpha)\,\frac{\partial\psi(x,0,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

und

$$(7) \qquad I_2(y) = 2\int\limits_{\alpha_0(y)}^1 H(\alpha)\,\frac{\partial\psi(0,y,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

die gesuchte Funktion $H(\alpha)$.

Die Bestimmung der Flächenschar $z = \psi(x, y, \alpha)$ ist freilich nur aus den Beobachtungen selbst durch sukzessive Näherungen möglich. Dabei ist ψ und deshalb auch H von der Neigung der Rotationsachse des Nebels gegen die Gesichtslinie abhängig. Da aber die Exzentrität der Projektion des Nebels $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ mit der Elliptizität $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ durch die Gleichung zusammenhängt

$$(8) \qquad \varepsilon = e \sin i,$$

und ε bekannt ist, so kann man H als eine Funktion von α und e ($H(\alpha, e)$) auffassen, und es ist die Lösung für verschiedene Werte von e getrennt aufzusuchen.

Bei konzentrischen, koaxialen und ähnlichen Rotationsellipsoiden, als Flächen gleicher Helligkeit, ist bei $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ die Gleichung (2) leicht auf die Formel zu bringen

$$(9) \qquad (1-e^2)x^2 + (1 - e^2\cos^2 i)y^2 + (1 - e^2\sin^2 i)z^2 \\ - 2e^2 \sin i \cos i\, yz = \alpha^2(1-e^2),$$

wobei der Parameter α zugleich die große Achse der Ellipsoide bestimmt.

Für Punkte der großen Achse der Projektionsellipse haben wir

$$x = x, \quad y = 0$$

und finden aus (9)

$$z = \psi(x, 0, \alpha) \equiv \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}}\sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Hieraus folgt

$$(10) \qquad dz = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}}\,\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Die Integralgleichung (6) nimmt dann die Form an

$$(11) \qquad I_1(x) = 2\sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}}\int\limits_x^1 H(\alpha)\,\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Für Punkte der kleinen Achse der Projektion gilt

$$x = 0, \quad y = y,$$

und es wird

$$z = \psi(0, y, \alpha) = \frac{e^2}{1-\varepsilon^2} \sin i \cos i\, y + \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \sqrt{\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}.$$

Hieraus

$$dz = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}}.$$

Die Gleichung (7) wird zu folgender

$$\text{(11a)} \qquad I_2(y) = 2\sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \int\limits_{y(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}}^{1} H(\alpha)\, \alpha \left(\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Die untere Grenze dieses Integrals $\alpha_0 = \frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ erhält man aus der Überlegung, daß y der Abstand der zur z-Achse parallelen Tangente an die Ellipse des Parameters α_0 von der z-Achse ist. Bezeichnet man noch in (11)

$$\text{(12)} \qquad \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}\, I_1(x) \equiv F(x),$$

so schreibt sich die Lösung derselben nach *P. ten Bruggencate*[145]) in der Form

$$\text{(13)} \qquad H(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{dF(x)}{d(x)} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

und kann für vorgegebene Werte der Funktion $I_1(x)$ leicht ausgewertet werden, natürlich nur bis auf den unbekannten Proportionalitätsfaktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}$.

Setzt man in (11a)

$$\frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \eta$$

und bezeichnet

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}\, I_2(\eta\sqrt{1-\varepsilon^2}) \equiv F(\eta),$$

so erhält man statt (11a) die Gleichung

$$F(\eta) = 2\int\limits_{\eta}^{1} H(\alpha) \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}},$$

deren Lösung in (13) gegeben ist.

145) *P. ten Bruggencate,* Die Sternhaufen, p. 76. Berlin 1927, Julius Springer.

Vergleicht man die Gleichungen (11) und (11a), so sieht man, daß die Intensitätsverteilung längs der großen Achse der Projektion als Funktion von x (x ausgedrückt in Einheiten der großen Achse) den gleichen Verlauf zeigen muß, wie die Intensitätsverteilung längs der kleinen Achse als Funktion von y (y ausgedrückt in Einheiten der kleinen Achse).

Es erweist sich, daß dieses Ergebnis der Theorie in Hubbles Messungen der Intensitätsverteilung in zehn elliptischen Nebeln sehr genau erfüllt ist.

Ein interessantes Ergebnis der Messungen ist weiter, daß die *Intensitätsverteilung längs den Achsen der Projektion für alle Nebel dieselbe ist.*

P. ten Bruggencate hat diesen Verlauf der Helligkeit: $\log I(x)$, wo x in Einheiten der großen Achse gemessen ist, mit dem Verlauf von $\log I(y)$, wo y in Einheiten der kleinen Achse gemessen ist, identisch gefunden und mit Hilfe der graphisch gemessenen Gradienten $\Delta \log I$ eine Integration der Gleichung (13) ausgeführt.

Er fand, daß $H(\alpha)$ nahezu umgekehrt proportional zu α vom Zentrum abnimmt. *Er schließt daraus, daß die Annahme konfokaler, koaxialer Ellipsoide als Flächen gleicher Leuchtkraft und Dichte nicht zutreffen könne.*

22. Die Resonanzstrahlung der Kometen. Das Spektrum der Kometen ist in großer Sonnenentfernung ein reflektiertes Sonnenspektrum. Dasselbe bleibt auch in der Sonnennähe erhalten, tritt aber hier gegen das hellere Bandenspektrum stark zurück. Die hellen Banden und einzelne helle Linien sind als Emissionsspektrum des Kohlenstoffes, besonders seiner Verbindungen, des Kohlenmonoxyds und des Zyans erkannt. Die charakteristischen hellen Banden tragen den Namen des Swanspektrums. Bei einzelnen Kometen mit sehr kleiner Periheldistanz hat man außerdem in Sonnennähe das Aufleuchten der gelben Natriumlinien beobachtet und beim großen Kometen vom Jahre 1882, mit der Periheldistanz von nur 0,008 astronomischen Einheiten, auch die gesamten hellen Linien des Eisendampfes.

Die physikalische Deutung dieser Erscheinungen ist heute allgemein folgende: der Kometenkopf besteht aus einer Meteorwolke, deren Bestandteile jedenfalls größer sind als 1 cm im Durchmesser und die in Sonnenferne allein durch das reflektierte Sonnenlicht sichtbar sind. Sie enthalten in gebundenem Zustande die genannten Gase, und diese werden in Sonnennähe unter dem Einfluß der Erwärmung frei; sie bilden die Koma oder den vergrößerten Kopf des Kometen. Diese

Koma, als der hellste Teil des Kometen, ist es, die meistens spektralanalytisch untersucht wird, und auf sie beziehen sich die genannten Ergebnisse über die Beschaffenheit des Spektrums der Kometen. In den Fällen, wo es gelungen ist, auch das Spektrum des Schweifes zu untersuchen, hat man mit der Entfernung vom Kopfe einen Übergang zum reinen Bandenspektrum des einfach ionisierten Kohlenmonoxyds feststellen können. Ein schwaches kontinuierliches Sonnenspektrum ist in der Regel auch im Schweife festzustellen.

Eine photometrische Analyse der Helligkeiten ist bei den Kometen deshalb so schwierig, weil die Trennung der beiden Bestandteile ihrer Helligkeit, des reflektierten Sonnenlichtes und der durch die Sonne angeregten Resonanz- oder Fluoreszenzstrahlung, die das helle Bandenspektrum bedingt, nur in den seltensten Fällen möglich ist. Sichere Daten liegen eigentlich nur für die Gesamthelligkeit der Kometen vor, und die Ergebnisse solcher Beobachtungen in verschiedenen Abständen von der Sonne und von der Erde bestätigen nur diejenigen der neueren Spektralanalyse: die Entwicklung von Eigenstrahlung in Sonnennähe.

Holetscheck[146]) hat in seinen umfangreichen Bearbeitungen der Helligkeiten aller historisch bekannten Kometen die Reduktion auf die Einheit des Abstandes von Sonne und Erde mit Hilfe des quadratischen Gesetzes $\left(\frac{1}{r^2 \Delta^2}\right.$, wo r der Sonnen-, Δ der Erdabstand ist$\left.\right)$ ausgeführt. Es zeigte sich aber bald, daß die Potenz von r höher angesetzt werden muß. *S. V. Orlow*[147]) suchte diesen Exponenten aus den beobachteten Helligkeiten zu bestimmen und fand verschiedene Zahlen mit dem Durchschnittswert 3,5. Endlich hat *S. Vsechsviatsky*[148]) aus einem Material von etwa 70 Kometen den Durchschnittswert 4 abgeleitet. Die Beobachtungen beziehen sich meistens auf die Gesamthelligkeit des Kometenkopfes. Es nimmt also diese bei Annäherung an die Sonne wesentlich schneller zu, als bei reiner Reflexion der Sonnenstrahlung zu erwarten wäre.

Differentielle Helligkeitsmessungen der Koma und des Schweifes in dessen verschiedenen Teilen sind erst in neuester Zeit auf Photographien vereinzelt gelungen. *K. Schwarzschild* und *E. Kron*[149]) haben solche Messungen des Kometen Halley theoretisch behandelt. Die

146) Untersuchungen über die Größe und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife. Denkschr. d. Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien, Math.-Phys. Kl. 63 (1896); 78 (1905).

147) Astr. Nachr. 189 (1911), p. 1 und 190 (1914), p. 157.

148) Russ. astr. Journ. 2, Heft 2 (1925), p. 68.

149) Astroph. Journ. 34 (1911), p. 342.

Helligkeit wird von ihnen als von einer Resonanzstrahlung herrührend aufgefaßt. Da gleichzeitige Messungen der Geschwindigkeit der Schweifmaterie vorlagen, konnte aus dieser photometrischen Analyse der wichtige Schluß gezogen werden, daß der Leuchtvorgang nicht etwa in der Koma entsteht und in den Schweif durch die Bewegung der Materie übertragen wird, sondern ein gleichzeitig in der Koma und im Schweif angeregter Zustand ist.

Wesentlich weiter hat *H. Zanstra*[150]) den Vorgang der Resonanz- bzw. der Fluoreszenzstrahlung der Kometen verfolgt.

Um die von *Holetschek* reduzierten Kometenhelligkeiten zur Prüfung der Resonanztheorie verwenden zu können, entwickelt *Zanstra* Ausdrücke für die visuelle Helligkeit einer Kometenkoma unter der Voraussetzung, daß dieselbe durch die Strahlung der hellen Banden des Swanspektrums oder der hellen Natriumlinie allein bedingt ist. Um diese Helligkeit in Sterngrößenklassen, wie sie Beobachtungen der Kometen geben, auszudrücken, wird die Helligkeit der als Kugel angenommenen Koma des Kometen in Einheiten der Sonnenhelligkeit abgeleitet. Das geschieht in folgender Weise.

Die Werte der physiologischen Koeffizienten Φ_λ des menschlichen Auges werden zunächst in Sichtbarkeiten pro Quant β umgerechnet mit Hilfe der Beziehung

$$\Phi_\lambda h\nu = \beta,$$

die sich aus der Überlegung ergibt, daß die Sichtbarkeit eines Quants dem Produkt aus seiner Energie $h\nu$ und der Sichtbarkeit im gewöhnlichen Sinne für die entsprechende Wellenlänge ist.

Die Strahlung der Sonne wird als diejenige eines schwarzen Strahlers von 6000° angenommen, wobei die *Wien*sche Formel benutzt wird, so daß, wenn ϱ_ν die Energiedichte für die Frequenz ν bedeutet, diese aus der Formel

$$(1) \qquad \varrho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit, $h = 6{,}56 \cdot 10^{-27}$, $k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}$)

zu finden ist, während die von der Sonne in einer Sekunde ausgestrahlte Energie sein muß

$$(2) \qquad \pi R^2 c \varrho_\nu d\nu;$$

die gesamte Anzahl der Quanten innerhalb $d\nu$, die von der Sonne in einer Sekunde ausgestrahlt werden, erhält man durch Division von (2) durch $h\nu$; somit ist diese Zahl

$$\frac{8\pi^2 R^2 k^3}{c^2 h^3} T^3 x^2 e^{-x} dx, \quad \text{wo} \quad x = \frac{h\nu}{kT}.$$

150) Monthly Not. 89 (1929), p. 178.

Multipliziert man diese Zahl mit der Sichtbarkeit pro Quant und integriert über alle Frequenzen, so erhält man die visuelle Gesamthelligkeit der Sonne als

$$B = \frac{8\pi^2 R^2 k^3}{c^2 h^3} T^3 \int_0^\infty \beta x^2 e^{-x} dx. \tag{3}$$

Die Helligkeit der Kometenkoma in einer bestimmten Frequenz ν_α, die von der Materie des Kopfes absorbiert und dann reemittiert wird, berechnet *Zanstra* folgendermaßen: Da die Absorption in einer gewissen Ausdehnung um die Frequenz ν_α vor sich geht, wobei bei totaler Absorption nur in der Mitte voller Lichtverlust eintritt, der nach beiden Seiten abklingt, so wird eine gewisse effektive Breite $\Delta\nu_\alpha$ eingeführt, für die die Absorption in allen Teilen gleich ist; als relative effektive Breite erhält man dann

$$w = \frac{\Delta\nu_\alpha}{\nu_\alpha} = \frac{\Delta x_\alpha}{x_\alpha}. \tag{4}$$

Wenn der Kometenkopf von der Sonne aus unter dem räumlichen Winkel Ω erscheint, so ist $\frac{\Omega}{4\pi}$ der Bruchteil der Sonnenstrahlung, der vom Kometen aufgefangen wird, und von diesem wird ein Bruchteil, der der Frequenzbreite $\Delta\nu_\alpha$ entspricht, absorbiert. Die Anzahl der absorbierten Quanten für die Wellenlänge α ist deshalb

$$N_\alpha = \frac{\Omega}{4\pi}\frac{8\pi^2 R^2 k^3}{c^2 h^3} T^3 x_\alpha^2 e^{-x_\alpha} \Delta x_\alpha; \quad \text{wo} \quad \Delta x_\alpha = w x_\alpha. \tag{5}$$

Bei Resonanz wird dieselbe Anzahl Quanten wieder emittiert. Die visuelle Helligkeit des Kometenkopfes in dieser Resonanzlinie ist deshalb

$$B_\alpha = \beta_\alpha N_\alpha, \tag{6}$$

wo β_α die Sichtbarkeit eines Quantes von der Frequenz ν_α bedeutet.

Aus den Gleichungen (3), (5) und (6) folgt als absolute visuelle Helligkeit des Kometenkopfes in Einheiten der absoluten Helligkeit der Sonne

$$\frac{B_\alpha}{B} = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{\beta_\alpha x_\alpha^2 e^{-x_\alpha} w}{\int_0^\infty \beta x^2 e^{-x} dx}. \tag{7}$$

Dieses ist die gesuchte Beziehung, die man für die einzelnen Emissionslinien auswerten kann, um damit den Betrag der Resonanzstrahlung eines Kometen zu prüfen.

Hypothetisch bleibt dabei, wenn direkte Messungen der Breite und der Intensitätsverteilung der einzelnen Linien und Banden nicht vorliegen, der Wert von $\Delta\nu_\alpha$. *Zanstra* berechnet denselben nach einer theoretischen Formel aus der kinetischen Gastheorie, indem er für die Temperatur der Gase des Kometenkopfes diejenige der Meteore selbst annimmt und diese als schwarze Strahler betrachtet. Dabei wird totale Absorption der betreffenden Wellenlängen angenommen. Das Ergebnis ist schon für *eine* der hellsten Banden des Spektrums eine Helligkeit, die die beobachtete bei weitem übersteigt. *Zanstra* schließt daraus, daß die Annahme von Resonanzstrahlung bei Annahme *unvollkommener Absorption*, die natürlich geringere Helligkeiten ergeben muß, für den Mechanismus der Strahlung aufrecht erhalten werden kann.

Will man *Fluoreszenz* statt Resonanz annehmen, so bedeutet das nur, daß die absorbierte Spektrallinie eine kürzere Wellenlänge γ besitzt als die emittierte Wellenlänge α. Nachdem ein Quant in der Linie γ absorbiert ist, fällt das Elektron auf ein tieferes Energieniveau, wobei die Spektrallinie α emittiert wird; für jeden absorbierten Quant werden nur f Quanten derselben Wellenlänge, wo $f < 1$ ist, reemittiert. Der Fall erlaubt die Anwendung derselben Theorie, wobei nur der Faktor f miteingeführt werden muß.

Eine genauere Prüfung der Theorie wird nur aus spektralphotometrischen Aufnahmen möglich sein, wenn die absoluten Helligkeiten der Banden und Linien vermessen vorliegen werden. Bei Verwertung von Gesamthelligkeiten der Koma geht als unsicheres Element auch die Ausdehnung der Koma ein, die meistens nicht genau bekannt ist. Bei flächenphotometrischer Vermessung der Spektrogramme würde dieses Element ganz herausfallen.

C. Die reflektierte Strahlung der Planeten und Meteore.

Für die Photometrie derjenigen Himmelskörper, die in reflektiertem Lichte leuchten, ist die Theorie der diffusen Reflexion von großer Bedeutung. Zu diesen Himmelskörpern gehören die kleinen und großen Planeten mit ihren Trabanten, die Kometen, der Saturnring, die Zodiakallichtmaterie und ein Teil der Nebelflecke. Die Veränderungen, die das Licht der Sonne oder der Sterne bei der Reflexion an dunklen Körpern erleidet, sind so verschiedenartig in Abhängigkeit von der Natur dieser Körper, ihrer Form, ihrer Größe und ihres Aggregatzustandes, daß es eine allgemeine Theorie der diffusen Zurückwerfung des Lichtes nicht geben kann. Für die Astronomie, die aus der Veränderung der Strahlung bei der Reflexion die Natur der reflektierenden Körper beurteilen will, und für die im Gegensatz zur Physik das Studium dieser Veränderungen der einzige Weg zum genannten Zwecke ist, müssen daher die Probleme der diffusen Reflexion weit über jene Grenzen hinaus entwickelt werden, die für die Physik von Interesse sind. Dadurch erklärt es sich, daß der Fortschritt auf diesem Gebiete im wesentlichen an die Namen von Astronomen wie *Lambert*, *Zöllner* und *Seeliger* gebunden ist.

Hier soll zunächst das Problem *der Reflexion an einer matten ebenen Fläche* als Grundlage für die in den anderen Kapiteln zu behandelnden Aufgaben der Reflexion an Kugeln, unregelmäßigen Körpern, an Wolken von Meteoren u. a. behandelt werden.

23. Die Lambertsche Formel für diffuse Reflexion. Ausgehend von der Beobachtung, daß eine von der Sonne beschienene Wand aus allen Richtungen gleich hell erscheint, stellte *Lambert* den Satz auf, ein diffus reflektierender Körper verhalte sich wie ein selbstleuchtender und strahle das Licht proportional dem Cosinus des Reflexionswinkels ε aus. Ist die auf die Flächeneinheit senkrecht einfallende Energiemenge gleich L, so erhält das Flächenelement ds die Menge $L\,ds\cos i$, und die in der Richtung ε reflektierte Lichtmenge ist

$$q = CL\cos i\cos\varepsilon\,ds.$$

C ist ein Absorptionsfaktor. Ein Element dw der Halbkugel vom Radius 1 mit dem Zentrum in ds erhält den Energiestrom

$$dQ = q\,dw = CL\,ds\cos i\cos\varepsilon\,dw$$

und die gesamte Halbkugel die Lichtmenge $Q = CL\pi\,ds\cos i$. Da dieselbe ein gewisser Teil A der einfallenden Lichtmenge ist, so haben wir auch

$$Q = AL\,ds\cos i,$$

woraus folgt

(1) $$C = \frac{A}{\pi}.$$

Der Faktor A, der angibt, welcher Teil des einfallenden Lichtstroms in den Raumwinkel 2π reflektiert wird, heißt *Albedo*. Bezeichnet man noch $\Gamma_1 = \frac{AL}{\pi}$, so wird

(2) $$q = \Gamma_1\cos i\cos\varepsilon\,ds.$$

Diese Formel hat keine theoretische Begründung, entspricht aber den Beobachtungen an matten Substanzen zum mindesten ebenso gut wie andere, denen theoretische Vorstellungen über den Vorgang der diffusen Reflexion zugrunde liegen.

24. Die Formeln von Seeliger, Lommel, Fessenkow und Schoenberg. *Lommel* und *Seeliger* gehen bei der Ableitung ihrer Formeln von der Vorstellung aus, daß die Strahlung bis zu einer gewissen Tiefe in den Körper eindringt, wobei sie nach allen Richtungen zerstreut wird. Diese zerstreute Strahlung ist es, die nach dem Austritt aus dem Körper beobachtet wird. Bei ebener Begrenzung und einem undurchsichtigen Körper gestaltet sich die Ableitung des Ausdruckes für die austretende Lichtmenge unter gewissen Voraussetzungen sehr einfach. Es wird ein Volumelement dv im Inneren des Körpers betrachtet, auf das die Lichtmenge

$$L_x = Le^{-kx}dv$$

einfällt, wenn L die pro Volumeinheit einfallende Strahlung ist, k der Absorptionskoeffizient, x der Lichtweg von der Oberfläche bis zu dv. Wenn nun dv einen gewissen Teil der Strahlung zerstreut, so soll μ den Diffusionskoeffizienten bezeichnen. *Lommel* und *Seeliger* nehmen beide an, die Zerstreuung gehe in allen Richtungen gleichmäßig vor sich, und die gesamte zerstreute Lichtmenge sei der Bruchteil $4\pi\mu$ der einfallenden, der Lichtstrom in jeder Richtung ε also gleich μL_x. Er erfährt auf dem Rückwege y wiederum eine Schwächung durch Absorption, wobei diese nach *Seeliger* mit einem anderen Koeffizienten k' vor sich geht, weil das Licht auf dem Hinwege schon eine Veränderung erfahren hat. An die Oberfläche gelangt somit die Lichtmenge dq

$$dq = \mu L_x e^{-k'y} dv = \mu L e^{-(kx+k'y)} dv,$$

oder da, wenn r den senkrechten Abstand des Elements dv von der Oberfläche bedeutet,

$$x = r \sec i, \quad y = r \sec \varepsilon \quad \text{und} \quad dv = dr\,ds \quad \text{ist:}$$

$$dq = \mu L ds\, e^{-(k \sec i + k' \sec \varepsilon) r} dr.$$

Um den vollen Lichtstrom vom Elemente ds in der Richtung ε zu erhalten, muß über alle Elemente dv integriert werden bis zu einer Tiefe, aus welcher überhaupt noch Licht bis zur Oberfläche durchdringen kann, also von $r = 0$ bis $r = R$, wo R eine solche Tiefe bedeutet, für welche $e^{-R(k \sec i + k' \sec \varepsilon)}$ verschwindet. Wir haben also

$$q = \mu L ds \int_0^R e^{-(k \sec i + k' \sec \varepsilon)} dr,$$

und nach Ausführung der Integration

$$q = \mu L ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{k \cos \varepsilon + k' \cos i}.$$

Seeliger setzt noch $\frac{k}{k'} = \lambda$ und $\frac{L\mu}{k'} = \Gamma_2$ und erhält so

$$q = \Gamma_2 ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}. \tag{3}$$

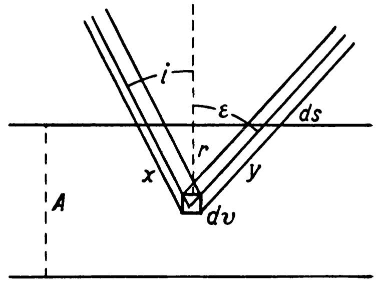

Fig. 10.
Die Reflexion aus dem Innern einer matten Platte.

Dieser Formel liegen eine Voraussetzung und eine Vernachlässigung zugrunde. Die erste ist die Annahme einer gleichmäßigen Diffusion in allen

Richtungen, die nur schwer aufrecht erhalten werden kann; wissen wir doch, daß bei Partikeln, die kleiner sind als ein Drittel der Wellenlänge des einfallenden Lichts, die Zerstreuung nach der *Rayleigh*schen Formel vor sich geht, bei größeren Partikeln in anderer äußerst verwickelten Weise. Wenn wir auch über den Vorgang der inneren Diffusion nicht unterrichtet sind und nicht wissen, welche Partikel, ob Moleküle oder größere Aggregate, das Licht zerstreuen, so ist die Annahme gleichmäßiger Streuung jedenfalls unhaltbar. Ein anderer Mangel der *Seeliger*schen Formel ist die Vernachlässigung der Diffusion höherer Ordnungen, d. h. desjenigen Lichtanteils, den jedes Volumelement von den Nachbarlementen zugestrahlt erhält. Die Berücksichtigung desselben führte *Lommel*[151]) auf sehr komplizierte Formeln für die reflektierte Lichtmenge. Beschränkt man sich auf die Berechnung der Diffusion 2. Ordnung, d. h. nimmt man an, daß jedes Volumelement dv von den anderen Elementen dv' zerstreutes Licht erhält, dieser zerstreute Anteil aber nur von der direkten Bestrahlung der Elemente dv' herrührt, so kommt man auf eine einfache Formel, deren erstes Glied mit der *Seeliger*schen (bei $\lambda = 1$) übereinstimmt:

$$(4)\quad q = \frac{\mu}{\pi} L ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}\left[1 + \frac{2\pi\mu}{k}\left(\cos\varepsilon \ln \frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon} + \cos i \ln \frac{1+\cos i}{\cos i}\right)\right].$$

Mit derselben Genauigkeit, d. h. mit Beschränkung auf Glieder 2. Ordnung, berechnete *Fessenkow*[152]) die austretende Lichtmenge unter der Annahme, jedes Volumelement zerstreue Licht nach der *Rayleigh*schen Formel. Das Ergebnis war eine wesentlich kompliziertere, im Bau aber der *Lommel*schen ganz ähnliche Formel, in der das erste Glied den *Rayleigh*schen Faktor $1 + \cos^2\alpha$ enthält, wo α der Winkel zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahl ist:

$$(5)\qquad q = \frac{\mu}{k} L ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}\left\{1 + \cos^2\alpha + \frac{\pi\mu}{k} f(i, \varepsilon, A)\right\}.$$

Die Funktion $f(i, \varepsilon, A)$ enthält die Glieder 2. Ordnung und zeigt, daß nunmehr die austretende Lichtmenge auch vom Azimut A zwischen den Ebenen des einfallenden und des reflektierten Strahles abhängt. Eine Bestätigung dieser Formel müßte man bei parallel begrenzten undurchsichtigen Gasschichten erwarten, weil die Moleküle eines Gases die *Rayleigh*sche Formel befolgen.

---

151) Münch. Akad. II. Kl. Sitzber. 17 (1887), p. 95. Wied. Ann. 36 (1889), p. 473.

152) Sur la diffusion de la lumière par les surfaces mates. (Russisch.) Bull. de la Société Astr. de Russie. Mai 1916.

Eine strenge Theorie der diffusen Reflexion an einem eben begrenzten undurchsichtigen Wolkenmeer hat *E. Schoenberg*[153]) geliefert. Ihr liegen Beobachtungen der Lichtverteilung auf einem sonnenbestrahlten Wolkenmeer in verschiedenen Azimuten zugrunde. Theoretisch ist dieser Fall vollkommen durchsichtig, weil die Streuung hier durch Wasserkügelchen erfolgt, und das Diffusionsdiagramm eines Wassertröpfchens nach der Theorie von *Mie*[154]) berechnet werden kann. Freilich ist dieses Diagramm von der Größe der Tröpfchen abhängig, und daher mußte, nachdem für die Diffusionsformel der Ansatz

$$dq = \frac{\mu}{k} L\,ds\,(1 - p\cos\alpha + q\cos^2\alpha)$$

mit unbestimmten Koeffizienten p und q gemacht worden war, der Wert derselben durch Anpassung an die Beobachtung bestimmt werden. Die Werte der Koeffizienten ergaben sich zu $p = 2{,}7$, $q = 3{,}0$. Das theoretisch berechnete Diffusionsdiagramm ergab eine nahe Übereinstimmung mit der obigen Näherungsformel und die mit Berücksichtigung der Diffusion 2. Ordnung aus ihr berechnete Formel für die reflektierte Lichtmenge stimmte gut mit der beobachteten Lichtverteilung in allen Azimuten und Reflexionswinkeln überein. Die Formel ist freilich äußerst kompliziert, wenn auch in ihrem Bau ganz ähnlich den beiden früher angeführten. Es ist die reflektierte Lichtmenge

$$(6)\qquad q = \frac{\mu}{k} L\,ds\,\frac{\cos i \cos\varepsilon}{\cos i + \cos\varepsilon}\left[1 - p\cos\alpha + q\cos^2\alpha + \frac{\pi\mu}{k} f_1(i,\ \varepsilon,\ A)\right]\cdot$$

Die Funktion f_1 oder die Glieder 2. Ordnung haben einen bedeutenden Einfluß auf die Helligkeit. Nur mit Hilfe ausgedehnter Tafeln, die *Schoenberg* für alle Werte der drei Variablen i, ε und A berechnet hat, ist die Formel anwendbar.[154a])

Aus dieser Formel ergibt sich diejenige von *Fessenkow*, wenn man $p = 0$ und $q = 1$ setzt, was der *Rayleigh*schen Diffusion für das einzelne Volumelement entspricht; setzt man dagegen $p = q = 0$, so muß die *Lommel*sche Formel aus ihr folgen. Die Formel ist wesentlich abhängig von dem Verhältnis des Diffusions- zum Absorptionskoeffizienten $\frac{\mu}{k}$. Der Wert desselben ist für den Fall vollkommener Diffusion, wenn keine Strahlung durch Absorption verloren geht, gleich

$$(7)\qquad \frac{\mu}{k} = \frac{1}{4\pi\left(1 - \frac{p}{2} + \frac{q}{3}\right)}.$$

153) Handb. d. Astroph. II, Teil 1 (1929), p. 37 u. Mitteilungen der Sternwarte Breslau 3 (1932).

154) Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 428.

154a) Handb. d. Astroph. II (1929), p. 246.

Für die *Rayleigh*sche Streuung ist bei denselben Voraussetzungen

$$\frac{\mu}{k} = \frac{3}{16\pi}. \tag{8}$$

25. Die Helligkeit von eben begrenzten, diffus reflektierenden Flächen und von Kugeln. Experimentelle Prüfung der Reflexionsgesetze. Die scheinbare Helligkeit einer eben begrenzten matten Substanz ist

$$\text{nach } \textit{Lambert} \quad h_1 = \frac{q}{ds \cos\varepsilon} = \Gamma_1 \cos i,$$

$$\text{„ } \textit{Seeliger} \quad h_2 = \Gamma_2 \frac{\cos i}{\cos i + \cos\varepsilon}.$$

Bei senkrechter Beleuchtung wird nach *Lambert* $h_1 = \Gamma_1$, nach *Seeliger* $h_2 = \Gamma_2 \frac{1}{1+\cos\varepsilon}$; für $\varepsilon = 0^0$ und $\varepsilon = 90^0$ erhalten wir nach *Seeliger* $h_2^0 = \frac{1}{2}\Gamma_2$ und $h_2^{90} = \Gamma_2$, d. h. die Helligkeit ist nach *Seeliger* bei senkrechter Betrachtung halb so groß als bei streifender, während nach *Lambert* die Helligkeit nur von dem Einfallswinkel abhängt und unabhängig vom Reflexionswinkel ist. Es wird daher eine matte Kugel, wenn man sie mit parallelen Strahlen beleuchtet und aus derselben Richtung betrachtet (i überall $= \varepsilon$), nach *Lambert* eine mit dem $\cos i$ nach dem Rande abnehmende Helligkeit aufweisen, dagegen nach *Seeliger* auf der ganzen Scheibe die Helligkeit $h_2 = \frac{1}{2}\Gamma_2$ haben. Trotz dieser tiefgreifenden Unterschiede ist es durch Beobachtungen im Laboratorium nicht gelungen, eine eindeutige Entscheidung für die Gültigkeit einer der beiden Formeln zu treffen. Es liegt das an der außerordentlichen Empfindlichkeit matter Substanzen gegen die Behandlung ihrer Oberfläche, bei der es nur selten gelingt, alle Spuren regelmäßiger Reflexion zu vermeiden. Diese ist aber wesentlich abhängig von der Richtung der spiegelnden Elemente und wird, wenn die Vorzugsrichtung derselben der Ebene der Begrenzung parallel ist, eine Zunahme der Helligkeit im Azimut von 180° bewirken. Die sehr zahlreichen Versuche an matten Substanzen werden hier deshalb nicht weiter behandelt. Als allgemeines Ergebnis derselben muß nur die Tatsache erwähnt werden, daß die *Lambert*sche Formel, trotzdem sie theoretisch keine Begründung gefunden hat, wesentlich besser mit den Beobachtungen übereinstimmt als die *Seeliger*sche, und zwar stimmt sie bei mehreren Substanzen, bei denen die ideale „Mattheit“ scheinbar erreicht war, wie z. B. bei Gips, Magnesiumoxyd u. a., fast vollkommen mit den Beobachtungen überein.

26. Die Reflexion an farbigen Substanzen und die Polarisation des reflektierten Lichtes. Daß die *Lambert*sche Formel in der Natur der diffusen Zurückwerfung des Lichtes begründet sein muß, folgt auch aus Untersuchungen, die sich an gewisse theoretische Überlegungen des russischen Physikers *N. Umow*[155]) anschließen. Wenn diese Gedankengänge bisher auch keine astronomische Anwendung gefunden haben, so sollen sie hier doch erwähnt werden, weil diese Anwendung aussichtsvoll erscheint.

Nach *Umow* müssen matte Oberflächen auffallendes polarisiertes Licht nur teilweise und nicht gleichmäßig depolarisieren, und zwar weiße Körper stärker als schwarze; im idealen Falle müßte der weiße Körper vollkommen, der schwarze gar nicht depolarisieren; farbige Körper müssen am meisten diejenigen Lichtstrahlen depolarisieren, die sie reflektieren. Diejenigen Wellenlängen, die depolarisiert werden, befolgen auch das *Lambert*sche Gesetz. Die Abweichungen von diesem Gesetze sind durch die Absorption bedingt und am stärksten in den Gebieten der Absorption. *Umows* Betrachtungen sind von verschiedenen Seiten bestätigt worden, nämlich von *D. Chmyrow* und *Slatowratzki*[156]), *Viktor Návrat*[157]) und *Woronkoff* und *Pokrowski*[158]). Die Ergebnisse ihrer zahlreichen Messungen an einer Reihe von Stoffen in verschiedenen Spektralbezirken lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Bei weißen Körpern ohne selektive Absorption, wie Magnesiumoxyd, wird bei normaler und nahezu normaler Inzidenz das *Lambert*sche Gesetz sehr nahe befolgt. Die Abweichungen wachsen aber auch bei diesen Körpern mit dem Einfallswinkel des Lichtes.

2. Bei selektiv absorbierenden Körpern wachsen die Abweichungen vom Kosinusgesetz in dem Gebiete der Wellenlängen, die am stärksten absorbiert werden, und zwar so, daß für große Reflexionswinkel die Intensität des zerstreuten Lichtes wächst.

3. Die Polarisationsverhältnisse ergeben sich qualitativ auch entsprechend der *Umow*schen Theorie.

27. Über den Begriff der Albedo. *Lambert* bezeichnet mit Albedo das Verhältnis der gesamten von einem Flächenelement in den räumlichen Winkel 2π reflektierten Lichtmenge zu der auffallenden. Da nach *Lamberts* Gesetz die austretende Lichtmenge lediglich vom Emanationswinkel abhängt, so hat seine Albedo für alle Inzidenzwinkel denselben Wert.

Wird nun ein anderes Beleuchtungsgesetz zugrunde gelegt, etwa das *Seeliger*sche, bei dem die austretende Lichtmenge auch vom Ein-

155) Phys. Ztschr. 6 (1905), p. 674.

156) Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 533.

157) Berichte d. Kgl. Akad. d. Wiss. Wien. 120 (2a) (1911), p. 1229.

158) Ztschr. f. Phys. 20 (1923), p. 358.

fallswinkel abhängt, so bekommt die Albedo für jeden Einfallswinkel einen anderen Wert. *Seeliger*[159]) hat deshalb eine Definition der Albedo vorgeschlagen, welche für jedes Beleuchtungsgesetz Gültigkeit hat. Ist das Reflexionsgesetz allgemein in der Form gegeben

$$dq = CLf(i, \varepsilon) ds,$$

wo L die auf die Flächeneinheit senkrecht einfallende Lichtmenge und C die von der Form des Gesetzes abhängige Reflexionskonstante bedeutet, so wird die auf die Halbkugel vom Radius 1 zerstreute Lichtmenge sein

$$(9) \quad q = CLds \int_0^{2\pi} dA' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varepsilon f(i, \varepsilon)\, d\varepsilon = 2\pi CLds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varepsilon f(i, \varepsilon) d\varepsilon.$$

Hier ist über alle Azimute A' integriert. Die Albedo A ist das Verhältnis von q zu der auf ds auffallenden Lichtmenge, mithin ist

$$(10) \qquad A = \frac{q}{L \cos i\, ds} = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(i, \varepsilon)}{\cos i} \sin \varepsilon\, d\varepsilon.$$

Aus dieser Formel ersehen wir, daß nur, wenn die Funktion f die Form hat $f(i, \varepsilon) = \cos i \varphi(\varepsilon)$, wie z. B. beim *Lambert*schen Gesetze, die Albedo vom Einfallswinkel unabhängig wird. Der einfachste Weg, diese Unklarheit zu vermeiden ist, unter der Albedo den Wert zu verstehen, den A für einen bestimmten Einfallswinkel besitzt, also z. B. die Albedo für normale Inzidenz

$$(11) \qquad A_0 = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(0, \varepsilon) \sin \varepsilon\, d\varepsilon.$$

Seeliger dagegen hat vorgeschlagen, mit Albedo den Mittelwert aller A zu bezeichnen, die sich für sämtliche Werte des Inzidenzwinkels ergeben. Bezeichnen wir diesen Wert mit A_2, so wäre also

$$A_2 = \frac{1}{2\pi} \sum A.$$

Hier hat A den durch die Gl. (10) bestimmten Wert. Führt man die Integration aus, so ergibt sich für die *Seeliger*sche Albedo

$$(12) \qquad A_2 = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i\, di \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon\, d\varepsilon.$$

159) Abh. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. II, Kl. 16 (1887), p. 430.

Bei der allgemeinen Form des *Seeliger*schen Gesetzes, wenn

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

ist, folgt nach Ausführung der Integrationen

$$A_2 = \frac{\pi C}{\lambda^2}\left\{1 - \lambda \ln \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \ln (1 + \lambda)\right\}. \tag{13}$$

Für die spezielle Form der *Seeliger*schen Formel ($\lambda = 1$) wird dagegen

$$A_2 = \pi C_2. \tag{14}$$

C_2 ist hier die Konstante des *Seeliger*schen Gesetzes, daher ist

$$C_2 = \frac{A_2}{\pi} = \frac{\Gamma_2}{L}. \tag{15}$$

Eine ganz ähnliche Beziehung besteht für die Reflexionskonstante C_1 des *Lambert*schen Gesetzes und die *Lambert*sche Albedo

$$C_1 = \frac{A_1}{\pi} = \frac{\Gamma_1}{L}. \tag{16}$$

28. Der Reflexionskoeffizient und die sphärische Albedo nach Bond. Für *eben begrenzte* Flächen ist die oben definierte Albedo (Gl. (11)) für normale Bestrahlung der angemessenste Begriff, weil diese für ein beliebiges Reflexionsgesetz bestimmt werden kann, wobei auch die im allgemeinen Falle vorhandene Abhängigkeit desselben vom Azimut bedeutungslos ist. Dieses Gesetz muß freilich durch besondere Messungen bestimmt werden. Hierzu eignet sich ein von *Fessenkow*[160]) vorgeschlagenes Albedometer, ein Instrument, bei dem die Helligkeiten für normale Inzidenz, aber bei verschiedenen Reflexionswinkeln mit der Helligkeit von Gips, dessen Reflexionsgesetz bekannt ist, verglichen werden.

Für *unregelmäßig begrenzte Körper*, Mineralien und Gesteine im natürlichen Zustande, ist der *Reflexionskoeffizient in der Bestrahlungsrichtung* die für astronomische Zwecke geeignetste Konstante. Er bezeichnet das Verhältnis der in der Bestrahlungsrichtung vom Körper reflektierten Lichtmenge zu derjenigen, welche eine ebene Fläche mit der Albedo 1, die dabei das *Lambert*sche Gesetz befolgt, in der Bestrahlungsrichtung zurückstrahlen würde, wenn sie senkrecht dieselbe Lichtmenge empfänge wie der unregelmäßige Körper. Die Albedo eines solchen Körpers kann in hohem Grade von der Form desselben abhängig sein, besonders durch die Lichtverluste, die durch Schattenwurf bei schräger Betrachtung entstehen, während der Reflexions-

160) Publ. de l'Observatoire Central Astroph. de Russie 2 (1923), p. 97.

koeffizient in der Bestrahlungsrichtung wohl noch von der Form, aber nicht mehr von den Schattenwirkungen abhängig ist.[161])

Besonders aufschlußreich sind natürlich die Reflexionskoeffizienten in der Bestrahlungsrichtung, wenn sie für einzelne Spektralgebiete getrennt bestimmt werden, weil dann auch die Farbe mitbestimmt ist. Eine große Reihe solcher Reflexionskoeffizienten von Gesteinen haben *J. Wilsing* und *J. Scheiner*[162])[163]) bekannt gegeben. Sie beziehen sich auf fünf verschiedene Wellenlängen, wobei als Vergleichsstoff weiße Kreide diente, für die der Reflexionskoeffizient in allen Farben gleich 1 gesetzt ist. Solche Bestimmungen ermöglichen eine Identifizierung der untersuchten Stoffe mit Formationen der Mondoberfläche, wenn ähnliche Messungen für die Mondoberfläche bei Vollmond zum Vergleich herangezogen werden. Auch bei den anderen Planeten und Trabanten, soweit sie keine Atmosphäre haben, scheinen derartige Messungen Aufschlüsse über ihre Beschaffenheit zu versprechen. Insbesondere gilt das auch für die kleinen Planeten, wenn hier auch nur eine Messung der Totalhelligkeit in Frage kommt. Bisher ist nur die Mondoberfläche in dieser Beziehung eingehend untersucht worden, worüber noch weiter berichtet werden soll.

Für die großen Planeten von kugelförmiger oder nahezu kugelförmiger Gestalt ist besonders zur Bestimmung ihrer Erwärmung, also der Absorptionsverhältnisse, der Begriff der *sphärischen Albedo* von *Bond* der geeignetste. *Bond*[164]) hat denselben schon im Jahre 1861 vorgeschlagen, aber erst *N. H. Russell*[165]) hat in neuerer Zeit seine Bedeutung für astronomische Zwecke begründet und ihm durch die Bestimmung der Albedo für die großen und eine Reihe kleiner Planeten die gebührende Bedeutung verschafft. Diese Definition hat den großen Vorzug, von der Art des Reflexionsgesetzes unabhängig zu sein: eine Kugel ist der Beleuchtung durch parallele Strahlen ausgesetzt; die sphärische Albedo dieser Kugel ist das Verhältnis der nach allen Richtungen zerstreuten zur einfallenden Lichtmenge.

Die Lichtmenge, welche auf eine Zone der Kugel vom Radius 1 zwischen den Einfallswinkeln i und $i + di$ einfällt, ist $2\pi L \cos i \sin i\, di$.

161) Vgl. hierzu *E. Schoenberg,* Untersuchungen zur Theorie der Beleuchtung des Mondes auf Grund photometrischer Messungen. Acta Acad. Scient. Fennicae 50, Nr. 9, p. 69.

162) Spektralphotometrische Beobachtungen am Monde und Gesteinen usw. Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam Nr. 61 (1909).

163) Spektralphotometrische Messungen an Gesteinen usw. Daselbst Nr. 77 (1921).

164) Proceedings of the American Academy of Arts a. Sc. N. S. 8 (1861), p. 232.

165) Astroph. Journ. 43 (1916), p. 175.

Hiervon wird der Bruchteil A reflektiert; das Integral über alle Zonen gibt die reflektierte Lichtmenge. Da die einfallende πL ist, so erhalten wir nach (10) für die *Bond*sche Albedo A_B:

$$A_B = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin i \cos i \, di = 4\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \, di \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\varepsilon. \tag{17}$$

Der Wert von A_B läßt sich aber auch auf andere Weise, ohne Kenntnis der Funktion $f(i, \varepsilon)$ bestimmen. Wir bezeichnen durch $\varphi(\alpha)$ das Verhältnis der Totalhelligkeit des Planeten beim Phasenwinkel α zu derjenigen Helligkeit, die er in Opposition, bei $\alpha = 0$, hat, wenn beide auf eine konstante Entfernung von der Erde (Δ_0) und der Sonne (r_0) reduziert sind. Es ist also $\varphi(0) = 1$. Diese Funktion, die sog. Phasenkurve, ist leicht zu beobachten und für alle großen Planeten innerhalb derjenigen Grenzen des Phasenwinkels α, die von ihnen erreicht werden, bekannt. Es sei Q_0 die auf die Flächeneinheit der Erdoberfläche in Opposition vom Planeten einfallende Lichtmenge. Denken wir uns eine Kugel vom Radius Δ_0 mit dem Planeten im Zentrum, so wird die auf die Kugelzone zwischen den Winkeln α und $\alpha + d\alpha$ vom Planeten reflektierte Lichtmenge gleich sein $2\pi\Delta_0^2 Q_0 \varphi(\alpha)$, die auf die ganze Oberfläche der Kugel auffallende ist dann

$$2\pi\Delta_0^2 Q_0 \int_0^{\pi} \varphi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha.$$

Es sei der scheinbare Halbmesser der Sonne für die Einheit des Abstandes gleich S, für den Abstand r des Planeten s; die von der Sonne auf die Einheit der Fläche auf der Erde einfallende Lichtmenge sei L', J die Intensität der Sonnenstrahlung. Bezeichnen wir weiter mit M_0 das Verhältnis der Helligkeit des Planeten in Opposition bei den Abständen von Sonne und Erde r_0 und Δ_0 zu derjenigen der Sonne im Abstande 1, so ist also

$$M_0 = \frac{Q_0}{L'}.$$

Die auf den Planeten einfallende Lichtmenge ist, wenn sein Halbmesser durch ϱ bezeichnet wird, $\pi\varrho^2 J\pi \sin^2 s$. Daher haben wir für die *Bond*sche Albedo auch den Ausdruck

$$A_B = \frac{2 M_0 \Delta_0^2 \sin^2 S \int_0^{\pi} \varphi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha}{\varrho^2 \sin^2 s} \tag{18}$$

$$= \frac{\sin^2 S \, M_0}{\sin^2 \sigma_0 \sin^2 s} \, 2\int_0^{\pi} \varphi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha = pq,$$

wo durch σ_0 der scheinbare Radius des Planeten in Opposition von der Erde aus bezeichnet ist.

Wir haben durch p das Produkt derjenigen Faktoren bezeichnet, die nur von den geometrischen und photometrischen Beziehungen des Planeten in Opposition abhängig sind:

$$p = \frac{\sin^2 S M_0}{\sin^2 \sigma_0 \sin^2 s}. \tag{19}$$

Der zweite Faktor q ist das doppelt genommene Integral, das nur von der Phasenkurve abhängig ist:

$$q = 2\int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha. \tag{20}$$

Es ist daher nur notwendig, außer der Oppositionshelligkeit die Phasenkurve des Planeten zu kennen, um den Wert der Albedo zu berechnen. Da nur für die inneren Planeten und den Mond die Phasenkurve für alle Winkel von 0 bis 180° beobachtet werden kann, so ist nur für diese die *Bond*sche Albedo einwandfrei zu bestimmen. Für die anderen großen Planeten muß der Wert von q aus dem Teil der Phasenkurve, der verfügbar ist, geschätzt werden, und für die weiter entfernten Planeten unseres Sonnensystems, deren Phasenwinkel nur einige Grad erreicht, kann man den Wert von q nur auf Grund der Ähnlichkeit ihrer Oberflächenbeschaffenheit an den Wert für Venus oder Merkur anschließend schätzen.

Bemerkenswert ist, daß sich der Wert von p mit dem Reflexionskoeffizienten in der Bestrahlungsrichtung für unregelmäßig geformte Körper identifizieren läßt. Der Wert von q wird durch mechanische Quadratur gefunden, wenn die Phasenkurve bekannt ist.

Folgende Tabelle enthält die von *Russell* bestimmten Werte der *Bond*schen Albedo für die großen und einige kleine Planeten sowie diejenigen für die vier hellen Jupitertrabanten. Die mit einem Doppelpunkt bezeichneten Werte sind Schätzungen, weil der beobachtete Phasenbereich für die sichere Bestimmung der Phasenkurve, somit auch des Wertes von q, nicht ausreichte. Die zwei Werte für die Albedo der Erde setzen der erste eine Phasenkurve der Erde gleich derjenigen der Venus, der zweite gleich derjenigen des Mondes voraus. Der letzte Wert für die photographische Albedo der Erde ist von *E. Oepik*[166]) abgeleitet, wobei die Phasenkurve von Venus zugrunde gelegt wurde.

166) Publ. de l'Observat. Astron. de l'Univ. de Tartu (Dorpat) **26**, Nr. 1 (1924).

Tabelle 8.
Bonds Albedo der Planeten und Trabanten.

	p	q	visuelle Albedo A_B	photograph. Albedo
Mond	0,105	0,694	0,073	0,051
Merkur	0,164	0,42	0,069	—
	0,077	0,72	0,055	—
Venus	0,492	1,20	0,59	0,60
Mars	0,139	1,11	0,154	0,090
Jupiter	0,375	1,5 :	0,56 :	0,73 :
Saturn	0,420	1,5 :	0,63 :	0,47 :
Uranus	0,42	1,5 :	0,63 :	—
Neptun	0,49	1,5 :	0,73 :	—
Ceres	0,10	0,55 :	0,06 :	—
Pallas	0,13	0,55 :	0,07 :	—
Juno	0,22	0,55 :	0,12 :	—
Vesta	0,48	0,55 :	0,26 :	—
Jupitertrabant I	0,46	1,5 :	0,69 :	—
" II	0,51	1,5 :	0,76 :	—
" III	0,30	1,5 :	0,45 :	—
" IV	0,11	1,5 :	0,16 :	—
Titan	0,33	1,5 :	0,50 :	—
Erde	0,37	1,20	0,45	0,63
	0,65	0,70	0,45	—

Wir sehen aus dieser Tafel, daß der größte Teil der A_B-Werte hypothetisch ist; er muß es auch bleiben, weil eine Beobachtung der Phasenkurve unmöglich ist. Es wäre aber überflüssig, die Albedo-Werte nach *Lambert* oder *Seeliger* für diese Planeten hinzuschreiben; sie sind aus den Werten von p leicht zu berechnen, aber wegen der Unbestimmtheit des wirklichen Reflexionsgesetzes in noch höherem Maße hypothetisch. Die *Seeliger*sche Albedo für Venus wird z. B. 1,1, ist also ein Widerspruch in sich.

29. Die Phasenkurven. Aus den Formeln für die von einem Flächenelemente ds reflektierte Lichtmenge,

$$dq_1 = \Gamma_1 \cos i \cos \varepsilon \, ds \qquad \text{nach } \textit{Lambert},$$

$$dq_2 = \Gamma_2 \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \, ds \qquad \text{nach } \textit{Seeliger},$$

lassen sich leicht durch Integration über die sichtbare und beleuchtete Oberfläche eines als Kugel angenommenen Planeten die gesamten von einem Planeten zur Erde reflektierten Lichtmengen berechnen. Sie sind Funktionen einer einzigen Variablen, des sog. Phasenwinkels α oder des Winkels am Zentrum des Planeten zwischen den Richtungen zur Sonne und zur Erde. Drückt man diese Lichtmengen in Einheiten derjenigen Lichtmenge q^0 aus, die der Planet der Erde in Opposition zusendet, so erhält man eine theoretische *Phasenkurve*. Die physikalische Voraussetzung einer solchen Berechnung ist natürlich die gleiche Albedo der ganzen kugelförmigen Oberfläche des Planeten und die Gültigkeit des einen oder des anderen Reflexionsgesetzes für dieselbe. Man erhält so für das *Lambert*sche Gesetz

$$\frac{q_1}{q_1^0} = \frac{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}{\pi} = \varphi_1(\alpha), \tag{21}$$

wo

$$q_1^0 = \tfrac{2}{3}\pi\Gamma_1\varrho^2,$$

und für das *Seeliger*sche Gesetz

$$\frac{q_2}{q_2^0} = 1 - \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ln\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4} = \varphi_2(\alpha), \tag{22}$$

wo

$$q_2^0 = \frac{\Gamma_2\varrho^2\pi}{2}.$$

In diesen Formeln ist vorausgesetzt, daß die Werte von q schon auf die konstante Entfernung Eins von der Erde und von der Sonne reduziert sind. Bezeichnet man die wahren Entfernungen zur Sonne und zur Erde durch r und r_0, Δ und Δ_0, so schreiben sich die Gleichungen für die direkt beobachteten Lichtmengen Q in folgender Weise:

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= q_1\frac{1}{\Delta^2 r^2}; \quad Q_1^0 = q_1^0\frac{1}{\Delta_0^2 r_0^2} \quad \text{und} \quad Q_1 = Q_1^0\frac{\Delta_0^2 r_0^2}{\Delta^2 r^2}\varphi_1(\alpha);\\ Q_2 &= q_2\frac{1}{\Delta^2 r^2}; \quad Q_2^0 = q_2^0\frac{1}{\Delta_2^0 r_0^2} \quad \text{und} \quad Q_2 = Q_2^0\frac{\Delta_0^2 r_0^2}{\Delta^2 r^2}\varphi_2(\alpha).\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Sie können dazu dienen, die beobachteten Phasenkurven mit den theoretischen zu vergleichen. Solche Vergleichungen zeigen nun allgemein, daß die Voraussetzungen der Theorie niemals erfüllt sind, denn die Abweichungen von beiden Phasenkurven sind bei allen Planeten so groß, daß es oft nicht einmal möglich ist, einem der Gesetze den Vorzug zu geben.

30. Die beobachteten Phasenkurven und Phasenkoeffizienten. Für die Planeten Merkur und Venus und für den Mond liegen Beobachtungen der ganzen Phasenkurven von 0 bis 180° vor; für Mars erstreckt sich die beobachtete Phasenkurve bis 46°, für die kleinen Planeten umfaßt sie 20 bis 40°. Die Abweichungen der vollständigen Phasenkurven von den theoretischen $\varphi_1(\alpha)$ und $\varphi_2(\alpha)$ sind in allen Fällen so groß, daß von einer Bestätigung der *Lambert*schen oder der *Seeliger*schen Formel nicht die Rede sein kann. Die Kurven für den Mond und Merkur zeigen große Ähnlichkeit und werden als typisch für eine atmosphärenfreie Kugel angenommen, während die Phasenkurve von Venus, die einzige ihrer Art, als die Phasenkurve einer dichten Atmosphäre angenommen wird. Sie stimmt wesentlich besser mit der *Seeliger*schen Phasenkurve $\varphi_2(\alpha)$ als mit der *Lambert*schen, weist aber auch gegen die erstere sogar bei mäßigen Phasenwinkeln Abweichungen von 40% der Helligkeit auf (s. nachstehende Tafel). Der Verlauf von $\varphi(\alpha)_{\text{beob.}}$ für Mars liegt zwischen demjenigen für den Mond und Venus, was der Mitwirkung der dünneren Marsatmosphäre zugeschrieben werden kann.

Tabelle 9.
Phasenkurve von Venus.

α	$\varphi_1(\alpha)$	$\varphi_2(\alpha)$	Beobacht.
0	1,000	1,000	1,000
20	0,944	0,925	0,759
40	0,800	0,784	0,556
60	0,609	0,620	0,387
80	0,410	0,455	0,258
100	0,236	0,303	0,167
120	0,109	0,176	0,104
140	0,034	0,080	0,060
160	0,004	0,020	0,032
180	0,001	0,005	0,022

Für die kleinen sowie für die großen äußeren Planeten muß man sich mit der Angabe der sog. *Phasenkoeffizienten* begnügen, der die Änderung der Helligkeit pro 1° Phase in Gr.kl. bedeutet.

Es sind verschiedene Versuche gemacht worden, durch Laboratoriumsmessungen an Kugeln aus verschiedenem Material, die entsprechend beleuchtet wurden, die kosmischen Verhältnisse der Beleuchtung durch die Sonne nachzuahmen und Phasenkurven oder Phasenkoeffizienten zu finden, die denjenigen der Planeten entsprechen.[167][168] Etwas Entscheidendes im Sinne der Identifizierung kann hierbei nicht erreicht werden, weil die Oberflächenbeschaffenheit der Himmelskörper nicht nachgeahmt werden kann. In Zusammenhang mit anderen Merkmalen können diese Phasenkoeffizienten aber Schlußfolgerungen über die Natur der Oberflächen erleichtern. Hier soll ein Auszug aus einer Arbeit von *H. Woerner*[168] über diesen Gegenstand angeführt werden.

Tabelle 10.
Phasenkoeffizienten nach *H. Woerner.*

Phasenintervall	0°—20°	20°—30°	Phasenintervall	0°—20°	20°—30°
Merkur	$0{,}^m037$	$0{,}^m037$	Kugel aus grünem		
Venus	0, 015	0, 014	Granit	0,015	0,011
Mond	0, 023	0, 028	Kugel aus Grünstein	0,010	0,012
Mars	0, 015	0, 015	Kugel aus weißem		
Ceres	0, 042	—	Sandstein	0,011	0,013
Pallas	0, 042	—	Kugel aus rotem		
Vesta	0, 027	—	Sandstein	0,015	0,011
Iris	0, 019	—	Kugel aus Schiefer.	0,016	0,010

Auffallend sind die großen Werte bei Ceres und Pallas, die bisher keine experimentelle und keine theoretische Erklärung gefunden haben.

167) *O. Frh. v. u. z. Aufseß,* Experimentelle Untersuchungen über Phasenwirkungen. Astron. Abh. als Ergänzungshefte zu den A. N. Nr. 17 (1910).

168) *H. Woerner,* Helligkeitsmessungen an kleinen Kugeln. Veröff. d. Universitäts-Sternwarte Berlin-Babelsberg 8, H. 4 (1931).

31. Die Reflexionskoeffizienten von irdischen Substanzen und Mondgebilden. *J. Wilsing* und *J. Scheiner*[169]) haben für eine Reihe von Gesteinen und anderen Substanzen die Reflexionskoeffizienten in der Bestrahlungsrichtung, die man mit der *Bond*schen Größe p identifizieren kann, bestimmt. Sie benutzten dabei ein Spektralphotometer, so daß sich dabei die Größe p für fünf verschiedene Wellenlängen ergab, was für Identifizierungszwecke besonders wichtig ist. Wir bringen hier nur einen kleinen Auszug ihrer Ergebnisse, der für Vergleiche mit den Reflexionskoeffizienten einzelner Teile der Mondoberfläche in Frage kommt. *Barabascheff*[170]) hat die Reflexionskoeffizienten einzelner Mondgebilde durch Farbfilter bestimmt, die wir hier ebenfalls mitteilen. In beiden Tabellen ist unter Albedo der Reflexionskoeffizient, in der ersten Spalte der Tabelle 11 der Reflexionskoeffizient für das Gesamtlicht zu verstehen.

Tabelle 11.
Reflexionskoeffizienten von Gesteinen.

	Albedo	0,448 μ	0,480 μ	0,513 μ	0,584 μ	0,638 μ	Farbe
Kreide	1,000						
Glimmerschiefer. .	0,232	0,194	0,208	0,232	0,254	0,282	gelblichgrau
Vesuvasche, obere Schicht.	0,192	0,158	0,175	0,198	0,213	0,226	hell bläulichgrau
Vesuvasche, mittlere Schicht.	0,179	0,125	0,160	0,166	0,220	0,251	hell rötlichgrau
Quarzporphyr . . .	0,107	0,078	0,086	0,098	0,128	0,171	rotbraun
Trachytlava. . . .	0,098	0,082	0,091	0,105	0,100	0,115	reingrau
Obsidian	0,089	0,090	0,094	0,095	0,082	0,087	blauschwarz
Heklalava	0,084	0,069	0,075	0,095	0,087	0,095	schwarzgrau
Basalt	0,064	0,056	0,064	0,069	0,065	0,069	sehr dunkelgrau
Vesuvlava	0,050	0,040	0,043	0,051	0,058	0,061	„ „
Ätnalava	0,048	0,039	0,048	0,054	0,046	0,053	„ „

Man kann aus diesen Tabellen ersehen, daß verschiedene Lavaarten mit den dunkleren Mondteilen am besten übereinstimmen. Eine weitere Bestätigung solcher Identifizierung bieten die von *Barabascheff*[171]) beobachteten Kurven des Polarisationsgrades für einzelne Mondpartien und irdische Stoffe, die für poröse Laven die beste Übereinstimmung zeigen. Für die hellen Mondgebilde, wie das Innere einzelner Krater und die hellen Strahlen, ist eine Identifizierung auf diesem Wege bisher noch recht unsicher.

Von anderen Gebilden, deren Reflexionskoeffizienten für andere Planeten von Bedeutung sind, kommen vor allem für den Vergleich

169) Spektralphotometrische Messungen an Gesteinen usw. Publ. d. astroph. Observ. Potsdam Nr. 77 (1921).

170) Études spectrophotometr. de la surface Lunaire. Russ. astron. Journ. 1 (1924).

171) Polarimetrische Beobachtungen usw. Astr. Nachr. 229 (1926).

Tabelle 12.
Die Albedo der Mondgebilde.

Mondgegend	Albedo		
	400 $\mu\mu$	500 $\mu\mu$	600 $\mu\mu$
1. Mare Crisium	0,127	0,200	0,152
2. Ocean. Procell.	0,040	0,108	0,070
3. Mare Humor.	0,057	0,119	0,097
4. Mare Serenit.	0,112	0,172	0,196
5. Krater Tycho	0,225	0,400	0,351
6. „ Langrenus	0,170	0,281	0,232
7. Mare Tranquill.	0,098	0,190	0,094
8. Plato	0,117	0,158	0,245
9. Copernicus	0,154	0,217	0,190
10. Mare Imbrium	0,035	0,104	0,074
11. Umgebung von Kepler	0,136	0,354	0,202
12. Aristarchus	0,270	0,511	0,429
13. Mare Nubium	0,080	0,169	0,098
14. Grimaldi	0,042	0,030	0,116
15. Umgebung von Linnée	0,082	0,154	0,134
16. Aristoteles	0,140	0,234	0,176
17. Agrippa	0,141	0,245	0,175
18. Ocean. Procell. zwischen Kepler und Aristarch	0,041	0,059	0,090
19. Dunkle Gegend bei Mare Crisium	0,127	0,181	0,140

mit der Venus-, Jupiter- und Saturnoberfläche Dampfwolken in Frage. Die besten Bestimmungen des Reflexionskoeffizienten für eine undurchsichtige Wolkenoberfläche von *L. B. Aldrich*[172]), *K. Stuchtey* und *A. Wegener*[173]) und *M. Lukiesh*[174]) ergeben die Werte 0,78, 0,73 und 0,78, also einen wesentlich größeren Wert als der Wert p bei den Planeten Venus, Jupiter und Saturn.

32. Die Bestimmung der Albedo und der Durchmesser der Planeten. Die Gleichungen (21), (22) und (23) können dazu dienen, die Albedo eines Planeten zu bestimmen, denn die Oppositionslichtmenge Q_0 hängt mit der Albedo zusammen. Die von der Sonne auf die Einheit der Planetenoberfläche einfallende Lichtmenge ist, wenn J ihre Leuchtkraft und s den scheinbaren Radius der Sonne vom Planeten aus bedeutet,

$$L = \pi J \sin^2 s,$$

und daher sind die Werte der Konstanten Γ_1 und Γ_2 der beiden Gesetze

$$\Gamma_1 = \frac{L A_1}{\pi} = A_1 J \sin^2 s \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \frac{L A_2}{\pi} = A_2 J \sin^2 s.$$

Es ist also, wenn man wieder von den Größen q_1 und q_2 auf die

172) Smiths Ann. 4 (1922), p. 375.

173) Die Albedo der Wolken und der Erde. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 1911.

174) Astroph. Journ. 49 (1919), p. 119.

meßbaren Q_1 und Q_2 übergeht, und durch σ den scheinbaren Radius des Planeten bezeichnet,

$$(24)\qquad \begin{cases} Q_1 = \frac{2}{3}\pi J A_1 \sin^2 s \sin^2\sigma\, \varphi_1(\alpha), \\ Q_2 = \frac{1}{2}\pi J A_2 \sin^2 s \sin^2\sigma\, \varphi_2(\alpha), \end{cases}$$

wo für den Moment der Opposition $\varphi(\alpha)$ gleich 1 zu setzen ist.

In diesen Gleichungen muß nur noch die Größe J eliminiert werden. Bezeichnet man mit L' die Lichtmenge, welche von der Sonne auf die Flächeneinheit der Erdoberfläche fällt, so ist $L' = J\pi \sin^2 S$, wo S der scheinbare Halbmesser der Sonne, von der Erde aus gesehen, ist. Das Verhältnis der Helligkeiten des Planeten zur Sonne oder den Quotienten $Q : L'$ wollen wir durch M bezeichnen. Dann ergibt sich aus den Gleichungen (24) der Wert der Albedo

$$(25)\qquad \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2} M \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s \sin^2\sigma} \dfrac{1}{\varphi_1(\alpha)}, \\ A_2 = 2\, M \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s \sin^2\sigma} \dfrac{1}{\varphi_2(\alpha)}. \end{cases}$$

Will man das Helligkeitsverhältnis M_0 für den Moment der Opposition benutzen, so hat man

$$(26)\qquad \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2} M_0 \dfrac{\sin^2 S}{\sin s_0 \sin\sigma_0}, \\ A_2 = 2\, M_0 \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2\sigma_0}. \end{cases}$$

Wir sehen also, daß $A_2 = \frac{4}{3} A_1$. Die Albedowerte nach den beiden Definitionen ergeben sich also aus der Oppositionshelligkeit als in einem konstanten Verhältnis zueinander stehend. Ohne Kenntnis der wahren Phasenkurve ist aber nicht zu entscheiden, welcher Albedowert der Natur am nächsten kommt.

Dieselbe Unbestimmtheit haftet einer Methode an, aus den letzten Gleichungen den *Durchmesser eines Planeten* aus seiner Albedo und der scheinbaren Helligkeit zu bestimmen. Über den Wert der Albedo kann man bei den kleinen Planeten und Trabanten, für die diese Aufgabe allein in Frage kommt, nur Vermutungen anstellen, und dementsprechend ist der erhaltene Durchmesser ganz unsicher. Da es aber oft der einzige Weg ist, etwas über den Durchmesser eines Himmelskörpers zu erfahren, nimmt man die große Unsicherheit in Kauf.

33. Der Einfluß der Unebenheiten der Oberfläche auf die Lichtverteilung auf derselben und auf die Phasenkurve des Planeten. Wie schon erwähnt, müßte in Opposition, wenn die Einfallswinkel in allen Punkten der Oberfläche den Reflexionswinkeln gleich sind, nach dem *Seeliger*schen Gesetze die Planetenscheibe gleichmäßig hell, nach dem *Lambert*schen mit dem Kosinus dieser Winkel von der

Mitte zum Rande an Helligkeit abnehmend erscheinen. Bei teilweise beleuchteter Scheibe, d. h. bei von 0 verschiedenen Phasenwinkeln, ergeben sich ebenfalls wesentlich verschiedene Lichtverteilungen auf der sichtbaren Planetenscheibe. Die Isophoten sind durch eine einfache Analyse zu bestimmen; wir wollen diese Frage, die *Anding*[175]) behandelt hat, hier nicht weiter verfolgen, weil die tatsächlichen Verhältnisse keiner der Theorien entsprechen. Bei den Planeten, die von Atmosphären umgeben sind, liegen die Verhältnisse überhaupt vollkommen anders und werden von uns in einem besonderen Kapitel behandelt werden. Für diejenigen Planeten und Trabanten, die keine Atmosphäre besitzen, bewirken aber die Unebenheiten der Oberfläche und die Verschiedenheit der Albedo ihrer einzelnen Teile ebenfalls eine wesentlich andere Lichtverteilung und eine andere Phasenkurve, als die einfachen Formeln von *Lambert* und *Seeliger* es verlangen. Schon *Zöllner*[176]) hat versucht, den Einfluß von Erhöhungen auf der Mondoberfläche auf den Verlauf der Phasenkurve zu berechnen. Seine scheinbar sehr einfache Theorie ist aber, wie *H. Seeliger*[177]) und *A. Searle*[178]) übereinstimmend nachgewiesen haben, fehlerhaft. Es ist ja auch von vornherein klar, daß die Darstellung der Phasenkurve des Mondes durch eine theoretische Formel, welche mit Hilfe irgendeines Reflexionsgesetzes der Mannigfaltigkeit der Mondformationen Rechnung tragen soll, eine unlösbare Aufgabe ist. Es kann sich nur darum handeln, die Phasenkurven einzelner gleichartiger Gebiete des Mondes, nachdem sie durch Beobachtungen festgestellt worden sind, theoretisch zu deuten, und diese Aufgabe erscheint durchaus aussichtsreich. *E. Schoenberg*[179]) hat eingehende Untersuchungen der relativen Helligkeiten und der Phasenkurven gleichartiger Mondgebilde in der Gebirgsgegend der südlichen Mondhälfte ausgeführt und konnte nachweisen, daß bei Zugrundelegung der *Lambert*schen Formel für ebene Teile der Oberfläche die beobachteten Helligkeiten sich durch eine besondere Beschaffenheit der Oberfläche erklären lassen, wie sie poröser Lava entspricht. Nur bei der Annahme dicht aneinander grenzender halbkreisförmiger Öffnungen oder Poren, wie sie für frische Lava als Folge des Entweichens der Gase aus runden Blasen charakteristisch sind, ergeben die Lichtverluste durch Schattenwurf die beobachteten

175) Astr. Nachr. 129 (1892), p. 377.

176) Photometrische Untersuchungen, p. 38.

177) Vjschr. d. Astron. Ges. 21 (1886), p. 216.

178) Proceedings of the American Academy of Sciences 19 (1884), p. 310.

179) Untersuchungen zur Theorie der Beleuchtung des Mondes. Acta Societatis Scientiarum Fennicae Tom. 50, Nr. 9. Helsingfors 1925.

Helligkeiten bei allen Werten der Variablen i, ε und A. Alle anderen Annahmen über die Form der Unebenheiten wie konische, halbkreisförmige oder kalottenförmige Erhebungen führen zu Widersprüchen mit den Beobachtungen. Somit ist hier ein Aufschluß über die Beschaffenheit derjenigen Teile des Mondes erreicht, die auch durch das stärkste Fernrohr keine Struktur aufweisen; die vulkanische Theorie der Entstehung der Mondformationen hat in diesem Nachweis poröser Beschaffenheit der Mondoberfläche eine wesentliche Stütze erhalten. Da nach photographischen Messungen von *E. Oepik*[180]) die Maria des Mondes eine ganz ähnliche Phasenkurve aufweisen, bezieht sich die Schlußfolgerung der porösen Beschaffenheit auch auf diese. *Schoenberg* schlägt vor, das photometrische Verhalten aller besonderen Mondgebilde, wie das der hellen Strahlen, des Inneren der Krater, der Rillen und Rugen in ähnlicher Weise zu untersuchen, indem für dieselben der Verlauf der Schattenfunktion $\psi(\alpha)$ bestimmt wird, die in dem Ausdruck für die reflektierte Lichtmenge

$$dq = \Gamma f(i, \varepsilon)\, \psi(\alpha)\, ds$$

im wesentlichen die Einflüsse des Schattenwurfes kennzeichnet. Für die Funktion $f(i, \varepsilon)$ empfiehlt er die *Lambert*sche Formel.

34. Die Flächenphotometrie der großen Planeten. Wegen ihres speziellen Charakters werden die theoretischen Untersuchungen über die Einflüsse des Schattenwurfes auf die Helligkeit der Planetenoberflächen hier nur erwähnt. Die Flächenphotometrie der Planetenoberflächen ist durch die Arbeiten von *E. Schoenberg*[181]) in die astronomische Praxis eingeführt worden und befindet sich erst im Beginn ihrer Entwicklung. *Schoenberg* untersuchte die Lichtverteilung auf den großen Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn und fand durchweg eine bedeutende Randverdunkelung bei voller Beleuchtung derselben. Indem er in erster Näherung die Helligkeit als Funktion des Einfallswinkels i und des Reflexionswinkels ε in der Form ansetzte:

$$h = kL(1 + \mu \cos i + \nu \cos 2i)(1 + \mu \cos \varepsilon + \nu \cos 2\varepsilon),$$

findet er für die Helligkeit in Opposition, wo für alle Punkte der Oberfläche $i = \varepsilon$ ist,

$$h_0 = kL(1 + \mu \cos i + \nu \cos 2i)^2;$$

die Werte der die Randverdunkelung charakterisierenden Koeffizienten μ und ν sind für die untersuchten Planeten:

---

180) Publ. de l'Observatoire Astr. Tartu. Tome 26, Nr. 1 (1924).

181) On the illumination of planets. Publ. d. Sternwarte Dorpat 24 (1917).

	μ	ν
Venus	— 4,25	1,135
Mars	— 2,56	0,54
Jupiter	1,80	0,0
Saturn	2,10	0,0

Hier sind die Werte für Jupiter und Saturn von besonderem Interesse, weil sie sicher bestimmt sind und weil diese Planeten immer nahezu voll beleuchtet sind, somit die durch die Formeln

$$h_{♃} = kL(1 + 1{,}8 \cos i)^2 \quad \text{und} \quad h_{♄} = kL(1 + 2{,}1 \cos i)^2$$

bestimmte Lichtverteilung dem üblichen Anblick der Planeten entspricht. Es ergibt sich die Möglichkeit, den Reflexionskoeffizienten p (vgl. p. 908) in der Bestrahlungsrichtung für die Oberflächen aus der Gesamthelligkeit der Planeten zu berechnen, indem man über die Oberfläche integriert. Die *Bond*schen Werte für p sind aus der Oppositionsgesamthelligkeit berechnet, wobei aber der Randverdunkelung nicht Rechnung getragen ist. Die von *Schoenberg*[182]) berechneten Reflexionskoeffizienten sind deshalb durchweg wesentlich größer als die *Bond*schen Werte von p.

	Russels p	*Schoenbergs* R
Venus	0,492	0,629
Mars	0,139	0,244
Jupiter	0,375	0,585
Saturn	0,420	0,672

Die Werte von R sind mit dem Reflexionskoeffizienten für eine Wolkenoberfläche eher vergleichbar als die p. Die Annäherung der Werte von R an letzteren (0,73) ist aber nicht als Bestätigung dafür anzusehen, daß Venus nur eine Wolkenoberfläche zeigt, wie das weiter noch genau erörtert werden soll.

35. Die Beleuchtung der Planetentrabanten. Das aschfarbene Mondlicht. Bei der Berechnung der Lichtmenge, die die Trabanten der großen Planeten der Erde zusenden, muß man, wenn die größte Schärfe erreicht werden soll, außer der direkten Beleuchtung des Trabanten durch die Sonne auch die ihm vom Planeten zugesandte Lichtmenge in Rechnung ziehen. Ein solches Problem liegt z. B. vor bei der Erklärung der beobachteten Helligkeitsschwankungen der großen Jupiter- und Saturntrabanten. Die Berechnung der vom Planeten dem Trabanten zugestrahlten Lichtmenge ist ein einfaches Problem, das z. B. in *Schoenbergs* „Theoretischer Photometrie“ im Handbuch der Astrophysik II, Teil 1, p. 87 behandelt ist; die Schwierigkeit einer

182) Handb. d. Astroph. II, Teil 1 (1929), p. 84.

strengen Lösung liegt in der Unkenntnis der vollen Phasenkurve der äußeren Planeten und des Trabanten selbst. Bei der Geringfügigkeit des Gesamteffekts hat man sich bisher mit Näherungsformeln für die Phasenkurven begnügt, indem man beim Planeten eine der bekannten Phasenkurven und für das Reflexionsgesetz an der Trabantenoberfläche etwa das *Lambert*sche Gesetz einsetzte.

Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist die Berechnung des *aschfarbenen Mondlichtes.* Bestimmt man dessen Helligkeit im Vergleich zur Helligkeit der beleuchteten Mondscheibe, so kann man aus dem Verhältnis beider *die Albedo der Erde* berechnen. Auch dieses Problem ist in der genannten Arbeit in allen Einzelheiten behandelt. In diesem Falle ist nur die Phasenkurve der Erde unbestimmt und muß gleich derjenigen von Venus oder Mars angenommen werden; dagegen ist das Reflexionsgesetz der Mondoberfläche in den vermessenen Teilen entweder bekannt oder läßt sich durch besondere Messungen bestimmen. Die Albedo der Erde ergibt sich, wie zu erwarten war, kleiner als diejenige von Venus und größer als die von Mars, weil die Durchsichtigkeit der Erdatmosphäre zwischen den bezüglichen Werten für Mars und Venus liegt.

36. Die Verfinsterung der Jupitertrabanten. Ein wichtiges Problem, in dem das Reflexionsgesetz und die aus ihm folgende Lichtverteilung auf der Trabantenscheibe von großer Bedeutung ist, bieten die Verfinsterungen der Jupitertrabanten. Diese Erscheinungen, die in früheren Zeiten auch zum Zwecke der Längenbestimmung zur See und auf Forschungsreisen beobachtet wurden, haben heute ihre wesentliche Bedeutung als Mittel zur Bestimmung der jovizentrischen Längen der Trabanten, somit für die Theorie der Bewegungen dieser interessanten Himmelskörper. *O. Römer* hat sie für die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit und der Sonnenparallaxe verwertet, doch ist heute diese Methode durch andere übertroffen, wenn sich auch bei einer genaueren Analyse der Bewegungserscheinungen ein Wert der Lichtgeschwindigkeit als Nebenresultat ergibt. Das wesentliche Ergebnis sind dabei aber die Bahnkonstanten der Jupitertrabanten; alle Theoretiker, die die Bewegungsverhältnisse im System der großen Jupitertrabanten eingehend studiert haben, wie *Laplace, Delambre* und in neuester Zeit *R. A. Sampson*[183]), haben sich dabei auf die beobachteten Verfinsterungsmomente gestützt. Diese Momente sind aber schwer festzulegen, wenn man eine größere Genauigkeit anstrebt, weil die

---

183) Harv. Ann. 52, Part II (1909); A Discussion of the Eclipses of Jupiter's Satellites 1878—1903.

Verfinsterungen für die inneren Jupitertrabanten von 4 Min. 19 Sek. bis 16 Min. 27 Sek. dauern und der Moment des Verschwindens von der Lichtstärke des Fernrohres und den atmosphärischen Verhältnissen abhängig ist. Der Trabant taucht allmählich in den Schatten des Planeten, und der Beginn dieser Erscheinung, den kein Fernrohr als solchen zu zeigen vermag, ist aus der langsam abnehmenden Lichtstärke des Trabanten unmöglich genau zu erfassen. Das Ende der Erscheinung wird dagegen von der Lichtstärke des Fernrohres abhängig sein. Der Verlauf der Lichtabnahme ist von der Lichtverteilung auf der Trabantenscheibe, also dem Reflexionsgesetz seiner Oberfläche abhängig. Nun hat schon *Cornu*[184]), der die photometrische Seite des Problems der Verfinsterungen als erster behandelt hat, darauf aufmerksam gemacht, daß die Lichtabnahme um die Mitte der Verfinsterung, wenn der Jupiterschatten über das Zentrum der Trabantenscheibe hinwegstreicht, am größten sein muß, und daß daher dieser Moment aus den Beobachtungen am leichtesten zu ermitteln ist. Nach ihm haben *Obrecht*[185]), *V. Wellmann*[186]) und *E. Anding*[187]) das Problem eingehend behandelt, und zwar der erstgenannte für den Fall einer gleichmäßigen Helligkeit der Trabantenscheibe, die beiden anderen Autoren für den Fall einer Lichtverteilung nach dem *Lambert*schen Gesetze. Die allgemeine Theorie der Verfinsterung ist recht kompliziert, es zeigt sich aber, daß sie wesentlich vereinfacht werden kann, wenn man die durch die Beobachtungsgenauigkeit gerechtfertigten Vereinfachungen zuläßt. Die wirkliche Beobachtungsgenauigkeit der Bedeckungsmomente ist sehr gering und die Vereinfachungen des Problems bewirken sämtlich Fehler von weniger als 0,01 Sek.

Man kann annehmen, daß die Bewegung der Schattengrenze auf den Trabanten proportional der Zeit verläuft, und braucht somit die wirklichen Bewegungsverhältnisse in der elliptischen Bahn nicht zu berücksichtigen. Weiter kann man die Krümmung der Schattengrenze vernachlässigen und diese als geradlinig und durch die Tangentialebene zur Jupiteroberfläche bestimmt denken. Bei dem geringen Winkelhalbmesser der Sonne aus Jupiterabstand (3′) erweist sich auch die Wirkung des Halbschattens des Planeten als ganz unmerklich; somit kann die Sonne als punktförmig betrachtet werden. Endlich braucht man auch den Einfluß der Phase, die bei Jupiter 12^0 nicht übersteigt, nicht in Rechnung zu ziehen.

---

184) Paris C. R. 96 (1883), p. 1690 und 1815.

185) Études sur les éclipses de Jupiter. Paris 1884.

186) Zur Photometrie der Jupitertrabanten. Diss. Erlangen 1887.

187) Photometrische Untersuchungen über die Jupitertrabanten. Preisschrift München 1889.

Unter diesen Umständen reduziert sich das ganze Problem auf folgende Aufgabe: es soll die Helligkeitsabnahme einer beleuchteten Kreisscheibe ermittelt werden, wenn dieselbe von einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit über sie hinweggehenden, gradlinig begrenzten dunklen Schatten bedeckt wird. Die Lösung derselben für den Fall des *Lambert*schen Gesetzes, bei dem die Helligkeit mit dem Kosinus des Einfallswinkels nach dem Rande zu abnimmt, ist folgende: die Lichtmenge vom Trabanten in Einheiten der Totalhelligkeit Q_0 seiner unbeschatteten Scheibe ist

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos^3\varphi, \tag{27}$$

wo

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \tag{28}$$

und r der Radius der Trabantenscheibe, a der kürzeste Abstand der Schattengrenze vom Mittelpunkt ist. Für den Fall einer gleichmäßigen Helligkeit der unverfinsterten Trabantenscheibe ist dagegen

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\pi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi}{\pi}. \tag{29}$$

Folgende kleine Tabelle veranschaulicht den Verlauf dieser Funktionen:

Tabelle 13.

$\frac{a}{r}$	$Q:Q_0$		$\frac{a}{r}$	$Q:Q_0$	
	Lambert	*Seeliger*		*Lambert*	*Seeliger*
1,0	1,000	1,000	0,0	0,500	0,500
0,9	0,993	0,981	— 0,1	0,425	0,436
0,8	0,972	0,948	— 0,2	0,352	0,373
0,7	0,939	0,906	— 0,3	0,282	0,312
0,6	0,896	0,858	— 0,4	0,216	0,252
0,5	0,844	0,804	— 0,5	0,156	0,196
0,4	0,784	0,748	— 0,6	0,104	0,142
0,3	0,718	0,688	— 0,7	0,061	0,094
0,2	0,648	0,627	— 0,8	0,028	0,052
0,1	0,575	0,564	— 0,9	0,007	0,019
0,0	0,500	0,500	— 1,0	0,000	0,000

Beide Kurven haben um die Mitte der Verfinsterung ihren Wendepunkt, was auch analytisch leicht zu zeigen ist. *Seeliger* hat aber bewiesen, daß diese Eigenschaft bei jeder konzentrischen Art der Lichtverteilung auf einer Kreisscheibe erhalten bleibt.

In der Tat, bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum der Scheibe hat man für die Lichtmenge von einem Flächenelement $dx\,dy$ im Abstande $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Zentrum

$$dQ = kF(\sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy,$$

wo k eine Konstante ist und die Funktion F das Helligkeitsgesetz in konzentrischen Kreisen darstellt.

Die gesamte Lichtmenge ist bei einem Abstande a der Schattengrenze vom Zentrum, falls mehr als die Hälfte der Scheibe beleuchtet ist,

$$Q = 2k\int_{-a}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} F(\varrho)\,dx\,dy.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dQ}{da} = 2k\int_{0}^{\sqrt{r^2-a^2}} F(\sqrt{a^2+y^2})\,dy$$

und weiter

$$\frac{d^2Q}{da^2} = 2k\left\{-\frac{aF(r)}{\sqrt{r^2-a^2}} + \int_{0}^{\sqrt{r^2-a^2}} \frac{\partial F(\sqrt{a^2+y^2})}{\partial a}\,dy\right\}. \tag{30}$$

Da aber

$$\frac{\partial F(\sqrt{a^2+y^2})}{\partial a} = 2a\frac{\partial F(\sqrt{a^2+y^2})}{\partial(a^2)} = 2a\frac{\partial F(\sqrt{a^2+y^2})}{\partial(a^2+y^2)},$$

so erhält man, wenn man die Variable $a^2+y^2=\xi^2$ einführt,

$$dy = \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}$$

und weiter

$$\frac{\partial F(\sqrt{a^2+y^2})}{\partial a}\,dy = 2a\frac{\partial F(\xi)}{\partial(\xi^2)}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}\,d\xi = a\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}$$
$$= a\frac{F'(\xi)}{\sqrt{\xi^2-a^2}}\,d\xi.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (30) ein, und beachtet die Integrationsgrenzen für ξ, welche r und a werden, so erhält man

$$\frac{d^2Q}{da^2} = -2ak\left\{\frac{F(r)}{\sqrt{r^2-a^2}} - \int_{a}^{r}\frac{F'(\xi)}{\sqrt{\xi^2-a^2}}\,d\xi\right\}. \tag{31}$$

Der Ausdruck verschwindet für $a=0$, und es ist deshalb dieser Punkt unter allen Umständen ein Wendepunkt, wenn auch nicht immer der einzige bei einer beliebigen Form der Funktion F.

Der Zeitraum zwischen Anfang und Mitte der Verfinsterung ergibt den Wert des Halbmessers des Trabanten, doch ist diese Bestimmung naturgemäß sehr unsicher, weil der Beginn der Verfinsterung nicht genau festgestellt werden kann.

Die ausgedehnteste Beobachtungsreihe der Verfinsterungskurven der vier hellen Jupitertrabanten ist an der Harvard-Sternwarte in den Jahren 1878—1903 ausgeführt worden. Mit einem besonders zu diesem Zweck konstruierten Photometer gelang es 12 bis 13 Messungen der Helligkeit in der Minute zu machen und dadurch die Kurven sicher festzulegen. Die Bearbeitung dieses 670 Verfinsterungen umfassenden Materials ist von *R. A. Sampson*[188]) im wesentlichen für die Theorie der Bewegungen ausgeführt worden und für die Himmelsmechanik als eine außerordentlich wertvolle Leistung anzusehen. In photometrischer Beziehung bieten die Beobachtungen eine Enttäuschung. Für die Mechanik war es nur wesentlich, die sichersten Momente der Verfinsterungsmitte festzulegen, und das wurde auf graphischem Wege erreicht. Der Verlauf der Verfinsterungskurven zeigte große Verschiedenheiten und Unregelmäßigkeiten, die nicht den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Daher waren die wahrscheinlichen Fehler der aus den Kurven abgeleiteten Verfinsterungsmomente für den ersten Trabanten 7,1, für den vierten sogar 22,1 Sek. und Abweichungen bis zu einer Minute keine Seltenheit. Als wichtigste Ursache der starken Abweichungen mancher Beobachtungen von systematischem Charakter kann nur die Atmosphäre des Planeten angesehen werden. Dieselbe ist in der Theorie in keiner Weise berücksichtigt. Lokale Erhebungen von Wolkengebilden über das durchschnittliche Niveau derselben müssen die Schattengrenze an der betreffenden Stelle verschieben. Die Rechnung zeigt, daß eine Erhebung um 1 : 14 des Halbmessers oder um 0,13″ eine Veränderung der Schattengrenze zur Folge hat, die den berechneten Moment um 30 Sek. beeinflussen kann. Bei den starken Umwälzungen, die die Oberfläche des Planeten öfters aufweist, erscheint es durchaus wahrscheinlich, daß auch die ausgedehnte Atmosphäre desselben durch auf- und niedersteigende Ströme die stärksten Refraktions- und Durchlässigkeitsstörungen erleidet. Als zweite mögliche Ursache der Abweichungen nennt *Sampson* unsymmetrische Fleckenbildungen auf der Oberfläche der Trabanten, die die Helligkeiten des beleuchteten Teiles stark verfälschen können.

Sehr auffallend ist die Tatsache, daß der Jupiterhalbmesser sich aus diesen Beobachtungen fast genau so groß ergibt wie aus Mikrometermessungen der Scheibe, während man doch zwei bedeutsame Ursachen für einen anderen Wert unmittelbar angeben kann. Infolge der Refraktion in der Jupiteratmosphäre müßte die Schattengrenze nach innen verschoben sein, somit der Durchmesser des Schattens kleiner ausfallen; infolge der Absorption in den tieferen Schichten der Atmosphäre muß sich die Schattengrenze nach außen verschieben, also ein entgegengesetzter Effekt entstehen. Daß sich die beiden Ein-

188) Harv. Ann. 52, Part II (1909); A Discussion of the Eclipses of Jupiter's Satellites 1878—1903.

flüsse gerade aufheben, erscheint jedenfalls auffallend bei der Dichte der Jupiteratmosphäre. Eine genauere photometrische Analyse der Beobachtungen der Harvard-Sternwarte scheint für die Klärung dieser Fragen noch durchaus aussichtsreich zu sein.

37. Über die Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Ein mit dem vorigen verwandtes Problem bietet sich bei der Erklärung der Helligkeitsverhältnisse während einer Mondfinsternis. Die Helligkeit des Kernschattens der Erde in Mondabstand ist bei jeder Finsternis etwas verschieden, außerdem hat die Erfahrung gezeigt, daß der ohne Rücksicht auf die irdische Atmosphäre berechnete Durchmesser des Kernschattens mit den Beobachtungen nicht übereinstimmt. Während man mit Rücksicht auf die Lichtbrechung eine Verkleinerung des Schattens erwarten müßte, erweist er sich in Wirklichkeit nicht unwesentlich vergrößert. Die Beobachtungen der Schattengrenze sind wegen ihrer Unschärfe recht ungenau, und der zu verschiedenen Zeiten aus ihnen abgeleitete Vergrößerungsfaktor schwankt recht beträchtlich. Zieht man nur die sichersten Ergebnisse in Betracht, bei denen nur die Ein- und Austritte derselben Mondkrater für die Bestimmung des Durchmessers verwandt wurden, so findet man nach *A. Brosinski*[189]) als Vergrößerungsfaktor des geometrischen Kernschattens den Wert $V = 1:55$, wobei aber die Einzelwerte immer noch zwischen $1:72{,}1$ und $1:41{,}5$ schwanken. *J. Hartmann*[190]) benutzte die Tafeln des Mondes, um alle sicheren Beobachtungen der Ein- oder Austritte einzelner Krater verwerten zu können, und erhielt auf diese Weise vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis zum Jahre 1898 insgesamt 4021 Einzelwerte bei 28 Finsternissen, die alle zur Bestimmung des Vergrößerungsfaktors herangezogen werden konnten. In Abhängigkeit von der Art der Zusammenfassung dieser Werte erhielten *Hartmann* und *H. Seeliger*[191]) auch aus diesem Material noch stark differierende Zahlen. So findet *Hartmann* für die Vergrößerung des Erdschattens in Bogensekunden in zwei Perioden, die sich in ihrer Genauigkeit unterscheiden,

$$\text{I. Periode} \quad V = 53{,}07'',$$
$$\text{II.} \quad \text{„} \quad V = 48{,}62'',$$

dagegen *Seeliger* aus dem Gesamtmaterial $V = 50{,}6''$. Auffallend ist,

189) Über die Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Göttingen 1889.

190) Die Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abh. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 17, Nr. 6 (1891).

191) Vjschr. d. Astron. Ges. 27 (1892), p. 186.

daß die Ein- und Austritte für sich behandelt zu merklich verschiedenen Werten führen:

	Periode I	Periode II
Eintritte	59,19″	50,93″
Austritte	49,30″	47,46″.

Ferner zeigen einzelne genauere Beobachtungen ein scheinbares Kleinerwerden des Schattens mit zunehmender Verfinsterung des Mondes und ein Wiederanwachsen desselben bei abnehmender Verfinsterung. Diese merkwürdigen Erscheinungen erklären sich z. T. wohl durch den wechselnden Zustand unserer Atmosphäre. Die immer auftretende Vergrößerung des Schattens führt *Seeliger*[192]) auf physiologische Ursachen zurück.

Zunächst beweist er, daß diese Vergrößerung nicht auf die Undurchsichtigkeit der unteren Schichten der Atmosphäre zurückgeführt werden kann. Er betrachtet die Sonnenstrahlen, die auf dem Wege zur Mondoberfläche in der Erdatmosphäre eine horizontale Refraktion erfahren, sowohl an der Erdoberfläche als auch in größerer Höhe der Erdatmosphäre und berechnet ihre Schwächung durch Extinktion. So findet er, daß sogar diejenigen Strahlen, die die Erdatmosphäre in 36 km Höhe passieren, infolge der Refraktion innerhalb des Kernschattens verlaufen, so daß, wenn die Atmosphäre bis zur genannten Höhe ganz undurchsichtig wäre, immer noch eine Verkleinerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen beobachtet werden müßte. Die Schwächung der horizontal verlaufenden Strahlen durch Extinktion beträgt in dieser Höhe nur etwa 6 %. Eine genaue Berechnung des ganzen Helligkeitsabfalls in der Umgebung der Kernschattengrenze ist von *v. Hepperger*[193]) und von *Seeliger*[194]) ausgeführt worden. Die Rechnung gestaltet sich recht umständlich, wenn man die Sonne nicht als Punkt, sondern als leuchtende Scheibe betrachtet, und besonders dann, wenn man den Helligkeitsabfall von der Mitte zum Sonnenrande in Betracht zieht. Letzteres ist in *Seeliger*s Abhandlung durchgeführt; sie kann aber trotzdem nicht als ganz strenge Lösung des Problems aufgefaßt werden, weil außer der Extinktion und der Strahlenbrechung auch noch eine merkliche Dispersion der Sonnenstrahlen stattfindet, deren Berechnung sich ganz besonders schwierig gestalten würde. Die

192) Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abh. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. II, Kl. 19 (1899).

193) Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes usw. Sitzber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Wien, Math. Naturw. Kl. 104 (1895), p. 189.

194) S. Anm. 192.

folgende Tafel enthält die Ergebnisse der *v. Hepperger*schen und der *Seeliger*schen Theorie, wobei die 2. Spalte ohne Rücksicht auf den Helligkeitsabfall auf der Sonnenscheibe berechnet ist, die letzte mit Rücksicht auf denselben. Die Tafel enthält den Logarithmus der Helligkeit (H) in Einheiten der Vollmondhelligkeit. Als Argument φ ist der Abstand vom Zentrum des Kernschattens in Bogensekunden angegeben.

Tabelle 14. $\log H$

φ	nach *v. Hepperger*		nach *Seeliger* I		nach *Seeliger* II	
2460″	7,576 —10		7,347 —10		7,180 —10	
2470	7,614	38	7,392	45	7,214	34
2480	7,656	42	7,445	53	7,250	36
2490	7,705	49	7,512	67	7,290	40
2500	7,765	60	7,604	92	7,338	48
2510	7,841	76	7,725	121	7,399	61
2520	7,930	89	7,850	125	7,478	79
2530	8,021	91	7,964	114	7,569	91
2540	8,106	85	8,064	100	7,667	98
2550	8,186	80	8,153	89	7,763	96
2560			8,232	79	7,855	92

Nimmt man die von *Seeliger* abgeleitete Vergrößerung des Erdschattens zu $V = 50{,}6''$ an, so hätte man bei $2521{,}8''$ die scheinbare Trennungslinie zu erwarten. Das ist gerade bei der am strengsten durchgeführten Rechnung aus dem Verlauf der Differenzen nicht zu ersehen. *Seeliger* hat dann mit Hilfe einer rotierenden Scheibe den berechneten Helligkeitsverlauf anschaulich gemacht und gefunden, daß eine Reihe von Versuchspersonen, wenn sie diese Scheibe aus angemessener Entfernung betrachteten, als Grenze zwischen hell und dunkel ungefähr den bei Finsternissen beobachteten Abstand angaben. Bei einem erwarteten Abstande von 9,13 cm vom Mittelpunkte der Scheibe schwanken die einzelnen Schätzungen immerhin zwischen 8,7 und 9,8 cm. Außerdem kann man die Bedingungen des Experiments nicht als identisch mit denen einer Finsternisbeobachtung ansehen. Interessant ist, daß es für das scheinbare Auftreten einer Trennungslinie nicht notwendig ist, daß der Helligkeitsverlauf einen Wendepunkt aufweist, und überhaupt können Trennungslinien gesehen werden, ohne daß $\frac{dH}{dr}$ oder $\frac{d \log H}{dr}$ oder $\frac{d^2 H}{dr^2}$ oder $\frac{d^2 \log H}{dr^2}$ etwas besonderes aufweisen.

Von besonderem Interesse sind die Schlußfolgerungen, zu denen *Hepperger* und *Seeliger* über die Wirkungen der unteren Schichten der Atmosphäre gelangen. Diese Schichten schicken *überhaupt kein Licht an die Grenze des Kernschattens*, so daß es für den Verlauf der Helligkeitskurve in der Nähe dieser Grenze gleichgültig ist, ob man die unteren Schichten der Atmosphäre als ganz undurchsichtig oder ganz durchsichtig annimmt. Die Veränderlichkeit des Vergrößerungsfaktors ist deshalb, wenn sie reell ist, nicht diesen zur Last zu legen.

Dagegen ist *im Zentrum des Kernschattens* der Zustand der Troposphäre von wesentlicher Bedeutung, indem die unteren Schichten der Atmosphäre das Sonnenlicht ausschließlich in den inneren Teil des Kernschattens senden. Die Helligkeit im Kernschatten ist aber in noch höherem Maße durch die Veränderlichkeit der Parallaxe beeinflußt. *Seeliger* berechnet, daß die Helligkeit im Zentrum des Kernschattens, gleiche Durchsichtigkeit der Atmosphäre vorausgesetzt, im Apogäum, also bei kleinster Parallaxe, viermal so groß ausfallen müsse, als im Perigäum. Eine Zusammenstellung der beobachteten Totalhelligkeiten der Mondscheibe bei Finsternissen zeigt, daß die Beobachtungen, die vielfach nur Schätzungen sind, wohl mit Sicherheit große Verschiedenheiten der Helligkeit aufweisen, die nicht durch den Abstand der Scheibe von dem Kernschatten allein erklärt werden können. *G. Zimmermann*[195]) findet in einer Zusammenstellung der alten und neuen Beobachtungen, daß nur das oben erörterte *Seeliger*sche Phänomen der Abhängigkeit der Kernschattenhelligkeit von der Parallaxe deutlich hervortritt, daß dagegen große beobachtete Helligkeitsunterschiede einzelner Finsternisse, wenn sie nicht auf Beobachtungsfehlern beruhen, keine Erklärung in den bisherigen Theorien finden. Das Interesse für das Problem ist in letzter Zeit reger geworden, und es sind verschiedene Klassifikationen der Finsternisintensität von *W. J. Fisher*[196]) und von *A. Danjon*[197]) vorgeschlagen worden, sowie auch eine bequeme Methode zur Messung der Helligkeit des Mondes im Anschluß an Fixsterne von *Selivanow.*[198])

38. Über die Beleuchtung der Planetenatmosphären. Die meisten der großen Planeten sind von Atmosphären umgeben, die mehr oder weniger dicht und mehr oder weniger durchsichtig sind. Das physikalische Studium der Oberflächen einiger Planeten bezieht sich deshalb überhaupt nur auf die Beschaffenheit der undurchdringlichen Atmosphäre derselben, während bei anderen, wie Mars, auch die feste Oberfläche durch die Atmosphäre hindurch studiert werden kann. Die enorme Bedeutung der gesetzmäßigen Veränderungen, die das Licht beim Durchdringen einer Atmosphäre erleidet, zur Beurteilung der Natur, der Temperaturverhältnisse, der Möglichkeit organischen Lebens und auch der Entwicklungsgeschichte der Planeten ist hieraus ersichtlich. Die theoretische Grundlage des Problems ist die Theorie der Absorption und der Diffusion des Lichtes in gasförmigen Körpern.

195) Astr. Nachr. 244 (1931), p. 23.
196) Smiths. Misc. Coll. 76 (1924), Nr. 9; Harv. Repr. 7 (1924).
197) Bull. Soc. Astr. France 39 (1925), p. 272.
198) Mirovedenie Astron. Bull. 1925, Nr. 1—2.

Das Problem kann nur idealisiert einer mathematischen Analyse unterworfen werden. Es ist zu unterscheiden: eine Wolkenatmosphäre, für die das Gesetz der Reflexion an einem irdischen Wolkenmeer, wie es in *Schoenbergs* Reflexionsformel behandelt ist, als Grundlage dienen kann, und eine gasförmige Atmosphäre über einer Wolkenschicht oder einer festen Oberfläche, für die das *Rayleigh*sche Diffusionsgesetz als Grundlage dienen muß.

39. Die Theorie der Diffusion und Absorption des Lichtes in Gasen von L. V. King.[199]) Die Grundlage der Theorie ist die *Rayleigh*sche[200]) Formel, die sich sowohl auf die Moleküle eines Gases als auch auf genügend kleine feste Partikel anwenden läßt. Nach ihr ist die Intensität der unter dem Winkel α zerstreuten Strahlung $J(\alpha)$, wenn E die Intensität der einfallenden bedeutet, durch die Formel gegeben

$$J(\alpha) = \mu(\alpha) E, \tag{32}$$

wo

$$\mu(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\pi^2(n^2-1)^2(1+\cos^2\alpha)}{N\lambda^4}. \tag{33}$$

Hier ist n der Brechungsexponent, λ die Wellenlänge des Lichtes und N die Anzahl der streuenden Partikel in der Volumeinheit. Die Formel gilt für beliebig kleine Partikel bis zur Größe von einem Drittel der Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Voraussetzung ist freilich die kugelförmige Gestalt derselben. Nach *Cl. Schäfer*[201]) gilt für zylindrische Oberflächen mit einem Querschnitt derselben Größenordnung eine Streuungsformel, die die dritte Potenz der Wellenlänge im Nenner enthält. Bei größeren kugelförmigen Partikeln kann die in verschiedenen Richtungen zerstreute Lichtmenge nach der Theorie von *Mie*[202]) berechnet werden.

Es ergeben sich mit wachsender Größe immer kompliziertere Formen des Diffusionsdiagramms, das jeweilig für ein bestimmtes Verhältnis

$$\alpha = \frac{2\pi r}{\lambda},$$

wo r der Halbmesser des Teilchens ist, und einen bestimmten Brechungsexponenten gilt. Nach einer Untersuchung von *E. Schoenberg*[203])

199) On the Scattering and Absorption of Light in Gaseous Media. Phil. Trans. Series A, vol. 212 (1913).

200) Phil. Mag. Series 4, vol. 41 (1871), p. 107, 274, 447; Series 5, vol. 12 (1881), p. 81; Series 5, vol. 47 (1899), p. 375.

201) Ann. d. Phys. 50 (1916).

202) Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 377.

203) Mitt. d. Universitäts-Sternwarte zu Breslau 3 (1932), p. 54.

ist die Proportionalität der zerstreuten Lichtmenge mit λ^{-4}, wie sie die *Rayleigh*sche Formel verlangt, nur bis zur Größe der Partikel von $\frac{1}{3}\lambda$ gültig, bei wachsenden Teilchen treten Abhängigkeiten annähernd von der Form λ^{-3}, λ^{-2} und λ^{-1} auf, bis bei einer Größe von 3λ die Abhängigkeit von der Wellenlänge ganz verschwindet. Diese Feststellungen sind durch die Festlegung der oberen Grenze einer Verfärbung der diffusen Strahlung von Bedeutung; die untere Grenze der *Rayleigh*schen Verfärbung ist sehr klein, jedenfalls kleiner als die Größenordnung der Atome und Ionen, die obere $\frac{1}{3}\lambda$. Das Gebiet zwischen $\frac{1}{3}\lambda$ und 3λ kommt für Beimischungen fester oder flüssiger Partikel in Gasen unter Umständen in Betracht; allgemein aber, bei Mischungen von festen Partikeln verschiedenster Größe, kann dasselbe nur einen verschwindenden Einfluß haben. Für Gasatmosphären kommt natürlich nur die *Rayleigh*sche Verfärbung in Betracht.

Kehren wir nun zur Formel (2) zurück. Da sowohl $n-1$ als auch N der Dichte ϱ des Gases proportional ist, so ist es auch $\mu(\alpha)$. Wir haben daher die Beziehung

$$\frac{\mu(\alpha)}{\mu_0(\alpha)} = \frac{N}{N_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{34}$$

wo der Index 0 einem bestimmten Zustande des Gases entspricht. Die Zerstreuung des Lichtes schwächt die das Gas durchdringenden Strahlen, ohne daß ein Verlust der gesamten Energie stattfindet. Will man neben der Schwächung durch Streuung auch der Absorption Rechnung tragen, so muß man noch den Absorptionskoeffizienten ν einführen, indem man den Bruchteil der durchdringenden Strahlung oder den Transmissionskoeffizienten durch die Gleichung

$$p = e^{-(k+\nu)} \tag{35}$$

definiert, wo k die Schwächung durch Streuung, ν die Schwächung durch Absorption bedeutet. Da die Streuung in verschiedenen Richtungen nicht gleich ist, so bedeutet hier k den mittleren Streuungskoeffizienten, der durch die Gleichung definiert ist:

$$k = 4\pi\bar{\mu} = \int \mu(\alpha)\, d\omega,$$

wo das Integral über die ganze Kugel zu erstrecken ist, also

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\pi^2}{2}\,\frac{(n^2-1)^2}{N\lambda^4}\,2\pi\int_0^\pi (1+\cos^2\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{\pi^2(n^2-1)^2}{N\lambda^4}. \tag{36}$$

Die Intensität der zerstreuten Strahlung in Abhängigkeit vom Abstande r von einer streuenden Partikel oder einem Volumelement dv

des Gases ist also für eine gegebene Richtung allgemein

$$(37)\qquad J(r,\alpha) = J(0,\alpha)\, e^{-\int\limits_0^r K\,d\,r} \quad \text{bei} \quad K = k + \nu,$$

wo $J(0, \alpha)$ die Intensität in unmittelbarer Nähe von dv bezeichnet und die Dichte auf dem Wege r veränderlich sein kann.

Wir denken uns das Gas von parallelen Ebenen begrenzt, die einfallenden Strahlen parallel. Die Lage des Volumelementes dv ist dann durch eine Koordinate x, die Höhe über der unteren Begrenzung, definiert. Wir schreiben $E(x)$ und $J(x, r, \alpha)$, wenn wir die Abhängigkeit der Funktionen E und J von der Höhe des Elementes dv unterstreichen wollen. Die auf dv einfallende Strahlung besteht aus:

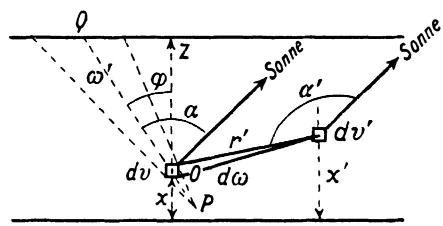

Fig. 11.
Die Streuung der Sonnenstrahlung in der planparallel begrenzten Atmosphäre.
(Nach Handb. d. Astroph. II, p. 210.)

1. Der direkt von außen einfallenden Strahlungsmenge $E(x)\,dv$, von der in den räumlichen Winkel $d\omega$ die Lichtmenge

$$\mu(\alpha)\, E(x)\, dv\, d\omega$$

zerstreut wird;

2. der von allen anderen Volumelementen dv' mit den Koordinaten x' und den Abständen r' von dv zugesandten Strahlung, deren Intensität ist

$$\frac{J(x', r', \alpha')\, dv}{r'^2}.$$

Von dieser wird der Anteil

$$d\omega\, dv \int\limits_{\Sigma} \frac{\mu(\widehat{rr'})\, J(x', r', \alpha')\, dv'}{r'^2}$$

in den räumlichen Winkel $d\omega$ zerstreut, wobei über alle Elemente dv' der Gasmasse, deren Gesamtvolumen Σ ist, summiert worden ist.

Nach der Definition ist die Summe der Beträge 1. und 2. gleich $J(x, 0, \alpha)\, d\omega$, der Strahlung in der nächsten Nähe von dv in der Richtung α zu den Sonnenstrahlen. Es ist also

$$(38)\qquad J(x, 0, \alpha) = \mu(\alpha)\, E(x) + \int\limits_{\Sigma} \mu(\widehat{rr'})\, \frac{J(x', 0, \alpha')\, e^{-\int\limits_0^{r'} K\,d\,r'}}{r'^2}\, dv',$$

wo $J(x', r', \alpha')$ durch $J(x', 0, \alpha')$ nach (6) ausgedrückt ist.

Sobald $J(x, 0, \alpha)$ als Funktion von x bekannt ist, was durch Auflösung der Integralgleichung (38) erreicht sein würde, ergibt sich die Strahlung im räumlichen Winkel ω nach einem Punkte P der

Gasmasse aus der Formel

$$(39) \qquad T\omega = \omega \int_0^{r_0} J(x, 0, \alpha)\, e^{-\int_0^r K\,dr}\, dr,$$

wo $PO = r$ ist; die Funktion unter dem Integralzeichen ist für ein gegebenes x von r und α abhängig und bedeutet die Intensität der einzelnen Punkte in der Richtung α; das Integral, bis $r = r_0 = PQ$ erstreckt, gibt also die Gesamtintensität in der Richtung PQ. $T\omega$ ist deshalb für einen Beobachter in P, für den die Gasschicht die Atmosphäre bedeutet, die von einem bestimmten Ausschnitt des Himmelsgrundes, der den räumlichen Winkel ω umfaßt, senkrecht auf die Flächeneinheit einfallende Lichtmenge.

Wenn wir in der Integralgleichung (38) $\mu(\widehat{rr'})$ durch $\bar{\mu}$ aus der Gleichung (36) ersetzen und auch im ersten Gliede $\mu(\alpha)$ durch denselben Wert, außerdem für dv' seinen Wert $r'^2 d\omega' dr'$ einsetzen, so erhalten wir

$$(40) \qquad J(x) = \bar{\mu} E(x) + \bar{\mu} \int_{\Sigma} J(x')\, e^{-\int_0^{r'} K\,dr'}\, d\omega'\, dr'.$$

Hat die Gasmasse veränderliche Dichte, wie das für Planetenatmosphären der Fall ist, so werden wir sie uns parallel zu den Begrenzungsflächen geschichtet denken. Eine solche geschichtete Atmosphäre kann durch eine homogene von der Dichte ϱ_0 ersetzt werden, die der Dichte an der unteren Begrenzung entspricht. Die Höhe einer solchen homogenen, reduzierten Atmosphäre ist durch die Gleichung gegeben

$$(41) \qquad H = \int_0^{\infty} \frac{\varrho}{\varrho_0}\, dx.$$

Führt man in die Gleichung (40) statt der Variablen r und x die neuen Variablen

$$(42) \qquad R = \int_0^{r} \frac{\varrho}{\varrho_0}\, dx \quad \text{und} \quad X = \int_0^{x} \frac{\varrho}{\varrho_0}\, dx$$

ein, so wird, da auch zwischen den Konstanten die Beziehungen bestehen:

$$(43) \qquad \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} = \frac{k}{k_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{K}{K_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

die Integralgleichung auf die Form transformiert

$$(44) \qquad J(X) = \bar{\mu}_0 E(X) + \bar{\mu}_0 \int_{\Sigma} J(X')\, e^{-K_0 R'}\, dR'\, d\omega',$$

wo die Funktion $J(X)$ den Wert hat:

$$J(X) = \frac{\varrho_0}{\varrho} J(x). \tag{45}$$

Diese Integralgleichung bezieht sich also auf die homogene, reduzierte Atmosphäre, welche die Eigenschaften der untersten Schicht der wirklichen Atmosphäre besitzt und dieser in ihrer optischen Wirkung gleichkommt. Die Transformation ist von dem Gesetze der Dichteabnahme unabhängig.

Die Gleichung (39) wird durch dieselbe Transformation zu folgender:

$$T\omega = \omega \int_0^{R_0} J(X)\, e^{-K_0 R}\, dR, \tag{46}$$

und wenn man $R = X \sec\varphi$ einsetzt, so erhält man für die Richtung φ zur Normalen die Intensität des Himmels aus

$$T = \sec\varphi \int_0^{H} J(X)\, e^{-K_0 X \sec\varphi}\, dX. \tag{47}$$

Das Integral in der Gleichung (44) ist jetzt über alle Volumelemente einer homogenen Atmosphäre, die sich als planparallele Schicht gleicher Dichte ins Unendliche erstreckt, zu bilden. Die Integrationsgrenzen nach x sind $X = 0$ und $X = H$ (Fig. 12).

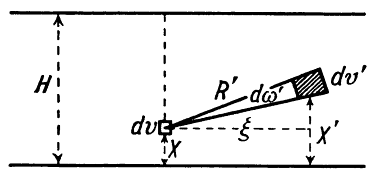

Fig. 12.
Die Streuung der Sonnenstrahlung in der reduzierten homogenen Atmosphäre.
(Nach Handb. d. Astroph. II, p. 212.)

In zylindrischen Koordinaten (ξ', ψ') ist der Ausdruck für $d\omega'$

$$dR'\, d\omega' = \frac{dv'}{R'^2} = \frac{dX'\, \xi'\, d\xi'\, d\psi'}{\xi'^2 + (X' - X)^2},$$

wo ψ' das Azimut des Elementes dv' in bezug auf eine feste Richtung ist. Das Integral in (44) nimmt jetzt die Form an

$$\int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{H} J(X')\, dX' \int_0^{\infty} e^{-K_0 [\xi'^2 + (X'-X)^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{\xi'\, d\xi'}{\xi'^2 + (X' - X)^2}.$$

Bezeichnet man

$$K_0 [\xi'^2 + (X' - X)^2]^{\frac{1}{2}} = u,$$

so daß

$$\frac{\xi'\, d\xi'}{\xi'^2 + (X' - X)^2} = \frac{du}{u},$$

so wird das letzte Integral gleich

$$\int_{K_0(X'-X)}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} = -\, li\,(e^{-K_0(X'-X)}),$$

wo li das Symbol für den Integrallogarithmus ist. Da die untere Grenze desselben positiv sein muß, so ist für die Punkte unterhalb des Punktes X, für welche $X' - X < 0$, die Integration getrennt vorzunehmen. Wir erhalten dann an Stelle von (44)

$$(48)\quad J(X) = \bar{\mu}_0 E(X) - 2\pi\bar{\mu}_0\left\{\int_0^X J(X')\,li\,e^{-K_0(X-X')}\,dX' + \int_{X'}^H J(X')\,li\,e^{-K_0(X'-X)}\,dX'\right\},$$

wo für die Punkte an der unteren Grenze ($X = 0$) das erste Integral verschwindet. Für $E(X)$ ist bei einer homogenen Atmosphäre einzusetzen

$$(49)\qquad E(X) = S\,e^{-K_0(H-X)\sec\zeta},$$

wo $(H - X)\sec\zeta$ die Weglänge bedeutet und S die Intensität der Sonnenstrahlung außerhalb der Atmosphäre. ζ ist die Zenitdistanz der Sonne.

Die Auflösung der Integralgleichung (44) in allen Einzelheiten darzustellen, würde hier zu weit führen. *L. V. King* wendet auf dieselbe, die vom *Fredholm*schen Typus der Integralgleichungen

$$u(x) = f(x) + \int_{x_1}^{x_2} u(\xi)\,K(x,\xi)\,d\xi$$

ist, ein Iterationsverfahren an, das schnell zur Lösung führt. Wir wollen nur die endgültigen Formeln von *King* für die Intensität der Himmelsstrahlung aus der Zenitdistanz φ bei einer Zenitdistanz der Sonne ζ anführen; bei $\zeta > \varphi$ ist

$$(50)\quad \begin{cases} T(\varphi,\zeta) \\ \quad = \frac{S}{4\pi}\frac{3}{4}(1+\cos^2\alpha)\frac{c}{C}\Big\{C\sec\varphi\, e^{-C\sec\varphi}\, G[C(\sec\zeta - \sec\varphi)] \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\frac{c}{C}E(C,\zeta)\,\Phi(C,\varphi)\Big\}, \\ \text{bei } \zeta < \varphi: \\ T(\varphi,\zeta) \\ \quad = \frac{S}{4\pi}\frac{3}{4}(1+\cos^2\alpha)\frac{c}{C}\Big\{C\sec\varphi\, e^{-C\sec\zeta}\, G[C(\sec\varphi - \sec\zeta)] \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\frac{c}{C}E(C,\zeta)\,\Phi(C,\varphi)\Big\}. \end{cases}$$

Hier bedeuten die Funktionen G, E und Φ

$$G(x) = \frac{1-e^{-x}}{x},$$

$$E(C,\zeta) = \frac{G(C\sec\zeta)}{\frac{C-c}{C} + \frac{1}{2}\frac{c}{C}\{f(C) + G(C)\}},\quad \text{wo } f(C) = e^{-C} + C\,li(e^{-C}),$$

$$\Phi(C,\varphi) = (1 - e^{-C\sec\varphi})(1 - f(C))$$
$$+ \cos\varphi\{B(C) - B[C(1+\sec\varphi)] + e^{-C\sec\varphi}B(C) - B[-C(\sec\varphi - 1)]\},$$

wo noch durch $B(x)$ bezeichnet ist:

$$B(x) = li(e^{-x}) - \ln x,$$
$$B(-x) = li(e^{x}) - \ln x.$$

Für die Helligkeit des Zenits ergibt sich aus (50)

$$(51)\quad T(0,\zeta) = \frac{3}{16\pi} S \left\{ C e^{-C} G[C(\sec\zeta - 1)] + \frac{1}{2}\frac{c}{C} E(C,\zeta)\,\Phi(C,0) \right\},$$

wo $\Phi(C,0)$ durch die Gleichung bestimmt ist

$$\Phi(C,0) = (1 - e^{-C})(1 - f(C)) + B(C) - B(2C) + e^{-C}(B(C) - \gamma).$$

Da für kleine Werte von C die angenäherte Beziehung besteht

$$(52)\qquad T(\varphi,\zeta) = \frac{\mu_0(\alpha)}{\mu_0(\zeta)} \sec\varphi\, T(0,\zeta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{1+\cos^2\zeta} \sec\varphi\, T(0,\zeta),$$

so läßt sich die totale Bestrahlung einer horizontalen Fläche ohne die Integration von $T(\varphi,\zeta)$ über die Halbkugel berechnen. Es ist die Beleuchtung der horizontalen Fläche

$$H(\zeta) = \int T(\varphi,\zeta) \cos\varphi\, d\omega,$$

wo das Integral über die Halbkugel zu erstrecken ist. Da

$$d\omega = \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

ist, so wird

$$H(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\varphi,\zeta) \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Unter Benutzung der Gleichung (52) folgt

$$(53)\quad H(\zeta) = \frac{T(0,\zeta)}{1+\cos^2\zeta} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\alpha) \sin\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\frac{\pi}{1+\cos^2\zeta} T(0,\zeta).$$

40. Die Anwendung der Theorie auf die Erdatmosphäre. Mit Hilfe dieser Entwicklungen kann sowohl die Lichtverteilung am klaren Himmel als auch die Beleuchtung der horizontalen Fläche aus den bekannten Transmissionskoeffizienten der Atmosphäre berechnet werden. Ausgedehnte Beobachtungsreihen der Durchlässigkeit unserer Atmosphäre für Strahlen verschiedener Wellenlänge liegen vor. Es seien hier erwähnt die Arbeiten von *Müller* und *Kron*[204]), die sich auf verschiedene Höhen über dem Meeresspiegel und verschiedene Wellenlängen im sichtbaren Gebiet des Sonnenspektrums beziehen und auf einer Expedition nach Teneriffa erhalten worden sind; dann die

---

204) Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam 22, Nr. 64 (1912), p. 71.

bolometrischen Messungen *Abneys*[205]), *Langleys*[206]), *Wilsings*[207]) und zuletzt diejenigen von *Abbot.*[208]) Letztere sind besonders wertvoll, weil sie sich über die längste Beobachtungszeit erstrecken und mit demselben Instrumente in drei verschiedenen Höhen über dem Meeresspiegel ausgeführt sind. Diese Messungen sind von *L. V. King* nach den oben abgeleiteten Formeln eingehend behandelt worden. Besonderes Interesse beansprucht die Bestimmung der Luftdichte oder der Anzahl der Moleküle pro Kubikzentimeter, die sich bei dieser Analyse ergab. Sie beruht auf folgender Beziehung.

Die Intensität der durchgelassenen Sonnenstrahlung in der Höhe x ist

$$E(X) = S e^{-K_0 (H-X)\sec\zeta},$$

wo

$$K_0 = \nu_0 + k_0.$$

X ist hier die reduzierte Höhe

$$X = \int_0^x \frac{\varrho}{\varrho_0}\,dx \quad \text{und} \quad H = \int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho_0}\,dx.$$

Es ist also

$$H - X = \int_x^\infty \frac{\varrho}{\varrho_0}\,dx,$$

so daß

$$\frac{H-X}{H} = \frac{\int_x^\infty \frac{\varrho}{\varrho_0}\,dx}{\int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho_0}\,dx} = \frac{B}{B_0},$$

wo B und B_0 den atmosphärischen Druck bedeuten. Führt man die Bezeichnung ein

$$C_x = K_0 H \frac{B}{B_0} = C\frac{B}{B_0},$$

so ist

(54) $$E(x) = S e^{-C_x \sec\zeta}.$$

Da aber

$$C = (\nu_0 + k_0)H = \frac{\frac{32}{3}\pi^3 (n_0 - 1)^2 \lambda^{-4} H}{N_0} + \nu_0 H,$$

so folgt

(55) $$C = \beta\lambda^{-4} + \gamma, \quad \text{wo} \quad \beta = \frac{\frac{32}{3}\pi^3(n_0-1)^2 H}{N}, \quad \gamma = \nu_0 H.$$

205) Philosoph. Transactions of the R. Soc. of London 178 (1887), p. 251; *Mascart,* Traité d'Optique III, p. 372.

206) Professional Papers of the Signal Service U. S. A. Nr. 15, p. 151.

207) Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam 25, Nr. 80 (1924).

208) Ap. J. 34 (1911), p. 203.

Die Gleichung

$$C_x \frac{B_0}{B} = \beta \lambda^{-4} + \gamma \tag{56}$$

verlangt, daß die auf den Meeresspiegel reduzierten Werte C_x für verschiedene Wellenlängen als Ordinaten gegenüber den Abszissenwerten λ^{-4} aufgetragen, auf einer Geraden mit der Neigungstangente β liegen. Aus dem Werte von β kann nach (55) bei Kenntnis des Brechungsexponenten die Anzahl N der streuenden Partikel bestimmt werden. Die Bestimmung derselben durch *King* und später durch *Fowle* aus den Beobachtungen *Abbots* gibt eine so gute Übereinstimmung mit dem Werte von *Millikan* $N = 2{,}644 \cdot 10^{19}$, daß darin eine Bestätigung der Theorie gesehen werden kann. *Fowle* fand für N_0 den Wert $2{,}70 \cdot 10^{19}$. Es ist also die Streuung die wesentliche Ursache der Lichtschwächung oder der Extinktion der irdischen Atmosphäre. Der Einfluß von Absorptionsbanden, die durch den Wasserdampf, den Sauerstoff und Ozon der Luft, sowie durch Beimischungen von Staubpartikeln verursacht werden, äußert sich in Abweichungen der C_x-Werte von der Geraden (56) in den Absorptionsgebieten und kann als solcher erkannt werden. Die Sicherheit der Bestimmung der Neigungstangente β leidet nur wenig unter der Anwesenheit dieser Banden, wenn ein genügend großer Bereich der Wellenlängen durch die Beobachtungen überspannt ist und man beachtet, daß die Abweichungen γ_x immer positiv sein müssen.

41. Über die Beleuchtung eines von einer Atmosphäre umgebenen Planeten. *E. Schoenberg*[209]) hat die *King*sche Diffusionstheorie auf das Problem der Beleuchtung der Planetenatmosphären ausgedehnt. Er geht dabei von folgenden Überlegungen aus: Die Helligkeit eines Elementes der Planetenoberfläche setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

1. aus der Helligkeit der Oberfläche selbst, die durch die nach dem Exponentialgesetz geschwächten, die Atmosphäre durchdringenden Sonnenstrahlen beleuchtet ist. Die Schwächung findet auf dem Hin- und Rückwege der Strahlung statt;

2. aus der Helligkeit der Oberfläche, die von der diffusen Beleuchtung durch die Atmosphäre an der betreffenden Stelle herrührt; diese Helligkeit ist auf dem Rückwege der Strahlen durch die Atmosphäre geschwächt;

3. aus der Helligkeit der Atmosphärensäule, die sich für den Beobachter auf das Oberflächenelement projiziert.

---

209) Handb. f. Astrophys. II. Theoretische Photometrie, p. 221 (1929).

Wir bezeichnen die drei Komponenten der Helligkeit in der obigen Reihenfolge durch h_1, h_2 und h_3. Wir wollen zunächst die dritte Komponente h_3 berechnen. Ersetzen wir in der Formel (47) unter dem Integral die Strecke $R = X \sec \zeta$ durch $(H - X) \sec \zeta$, so erhält man die nach außen gerichtete Strahlung oder die Intensität der Atmosphäre unter dem Winkel φ zur Normalen von außen betrachtet. Führen wir für den Reflexionswinkel φ unsere alte Bezeichnung ε wieder ein, ebenso für den Einfallswinkel der Sonnenstrahlung ζ den Buchstaben i, so ist also die Intensität der Atmosphärensäule oder unsere Helligkeitskomponente h_3 durch die Gleichung gegeben

$$h_3 = R(\varepsilon, i) = \sec \varepsilon \int_0^H J(X) e^{-K_0(H-X)\sec \varepsilon} dX,$$

wo noch die Variable $H - X$ durch X ersetzt werden kann. Es ergibt sich dann

$$R(\varepsilon, i) = \sec \varepsilon \int_0^H J(H - X) e^{-K_0 X \sec \varepsilon} dX,$$

und nach der Ausführung der Integration, wenn noch $K_0 H = C$ gesetzt wird,

$$(57) \quad R(\varepsilon, i)$$
$$= \frac{3}{16\pi} S(1 + \cos^2\alpha)\left[C \sec \varepsilon\, G(C(\sec \varepsilon + \sec i)) + \frac{1}{2} \frac{c}{C} E(C, i)\, \Phi(C, \varepsilon)\right].$$

Die beiden Summanden in der eckigen Klammer, sowie auch deren Summe, hat *Schoenberg* für diejenigen Werte von C, für welche die Lösung der Integralgleichung gültig ist, und für alle Werte der Variablen i und ε tabelliert.[210]) Die Tabellen gelten für den Spezialfall $c = C$, also für den Fall vollkommener Diffusion, in dem $\gamma = 0$ ist.

Die erste Komponente der Helligkeit h_1 enthält außer dem Schwächungskoeffizienten C noch die Albedo und das Reflexionsgesetz der Oberfläche des Planeten. Die Lichtmenge von einem Elemente ds dieser Oberfläche schreibt sich allgemein in der Form

$$dq_1 = S \frac{\mu}{\pi} f(i, \varepsilon, A) e^{-C(\sec i + \sec \varepsilon)} ds,$$

wo $f(i, \varepsilon, A)$ das Reflexionsgesetz, das auch vom Azimut A abhängen kann, und μ die Albedo oder die Reflexionskonstante ist.

Die zweite Komponente der Helligkeit muß die Albedo ebenfalls enthalten, nicht aber das Reflexionsgesetz, welches gerichtete Strahlen voraussetzt, während es sich hier um die Bestrahlung des Elementes

210) Handb. f. Astroph. II. Theoretische Photometrie, p. 276—280.

ds aus allen Richtungen der Halbkugel handelt. Wir schreiben daher für die reflektierte Lichtmenge in diesem Falle

$$dq_2 = \frac{\mu}{\pi} H(C, i) e^{-C \sec \varepsilon} ds,$$

wo $H(C, i)$ die auf ds einfallende zerstreute Strahlung ist. Für dieselbe haben wir die Formel (53), es ist daher

$$(58) \quad dq_2 = \frac{8}{3} \frac{\mu e^{-C \sec \varepsilon}}{1 + \cos^2 i} T(0, i) ds$$
$$= \frac{S\mu e^{-C \sec \varepsilon}}{2\pi} \left\{ Ce^{-C} G[C \sec i - 1)] + \frac{1}{2} \frac{c}{C} E(C, i) \Phi(C, 0) \right\} ds.$$

Aus den reflektierten Lichtmengen erhalten wir die Helligkeiten durch Division durch die scheinbare Größe des Elementes ds. Es ist also

$$h_1 = \frac{dq_1 \sec \varepsilon}{ds}, \quad h_2 = \frac{dq_2 \sec \varepsilon}{ds},$$

und die gesamte Helligkeit

$$(59) \qquad h = h_1 + h_2 + h_3.$$

Die Anwendung dieser Theorie auf die photometrische Analyse derjenigen Planeten, die von Atmosphären umgeben sind, ist nur möglich, wenn Helligkeitsmessungen durch Farbfilter in verschiedenen Punkten der Oberfläche des Planeten vorliegen. Der Anblick solcher Planeten durch Farbfilter ist für jede Farbe verschieden, und im allgemeinen lehren schon dieser Anblick und auch die Photographien durch Farbfilter, daß die Diffusion des Lichtes in den Atmosphären die Ursache dieser Verschiedenheit ist. Da die violetten Strahlen am stärksten zerstreut werden, ist bei einer Aufnahme durch ein violettes Filter meistens überhaupt nur die Atmosphäre sichtbar, und die Einzelheiten der Oberfläche verschwinden. Der Planet zeigt auch in kurzwelligen Strahlen einen größeren Durchmesser als ohne Filter, weil auch die äußeren Schichten der Atmosphäre auf der für blau empfindlichen photographischen Platte sich abbilden, während sie für das bloße Auge zu schwach sind, um sichtbar zu werden. Die Aufnahmen durch ein rotes Filter zeigen die schärfste Oberflächenzeichnung und den geringsten Durchmesser, weil für diese die blaue Atmosphäre verschwindet und die Durchlässigkeit der Atmosphäre für die durchdringenden, die Oberfläche beleuchtenden Strahlen, am größten ist.

Unsere Gleichungen müssen für die Helligkeiten der Planetenoberfläche in allen Strahlungsgattungen gelten. Für die kurzwelligen Strahlen ist der Wert von $C = \beta\lambda^{-4} + \gamma$ am größten, und die dritte Komponente h_3 der Helligkeit wird gegenüber den zwei ersten Komponenten überwiegend. Ist von der Oberfläche durch ein violettes Filter überhaupt nichts zu sehen, so müssen die zwei ersten Komponenten verschwinden. Dagegen wird für die roten Strahlen unter Umständen die dritte Komponente der Helligkeit verschwindend sein und die erste wesentlich überwiegen.

Bei der Auflösung der Gleichung von der Form

$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

wo die linke Seite die beobachtete Helligkeit eines durch die Variablen i, ε und A bestimmten Oberflächenelements ds ist, haben wir, wenn das Reflexionsgesetz als bekannt angesehen werden kann, für jedes Farbfilter zwei Unbekannte: die Albedo der Oberfläche μ_λ und den Schwächungskoeffizienten C_λ. Sie können durch sukzessive Näherung genügend sicher ermittelt werden, wenn die Zahl der Gleichungen für jedes Filter entsprechend der Anzahl der vermessenen Punkte groß ist und die Parameter i, ε und A in weiten Grenzen variieren. Für die Berechnung der zweiten Komponente der Helligkeit und ihrer Ableitung nach C hat *Schoenberg* ebenfalls Tafeln berechnet, die nach den Argumenten i und C fortschreiten.[211])

Für das Reflexionsgesetz der Oberfläche in der Formel für h_1 wird immer dann, wenn sich dieselbe als undurchdringliche Wolkenschicht darstellt, das Reflexionsgesetz an einem Wolkenmeer angenommen werden, zu dessen Anwendung ebenfalls Tafeln vorliegen.[212]) Ist die Oberfläche aber, durch ein rotes Filter betrachtet, eine feste, wie im Falle von Mars, so wird das *Lambert*sche Gesetz das angemessenste sein.

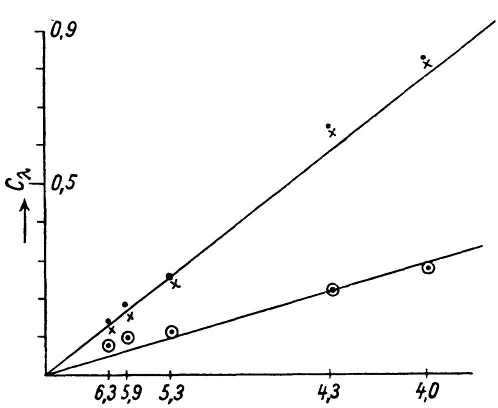

Fig. 13.
Die Abszissen sind λ^{-4} proportional. Die Ordinaten sind: $\beta\lambda^{-4} = c$ (Kreuze) und $\beta\lambda^{-4} + \gamma = C$ (Punkte). Die untere Gerade gilt für die Erdatmosphäre (Ordinaten nach *Fowle*).

Eine Untersuchung dieser Art hat *Schoenberg*[213]) für den Planeten Venus durchgeführt und im allgemeinen eine Bestätigung der obigen Beleuchtungstheorie gefunden. Die für die fünf Filter abgeleiteten Schwächungskoeffizienten C_λ genügten der Gleichung

$$C_\lambda = \beta\lambda^{-4} + \gamma_\lambda$$

zum mindesten ebensogut wie die von *Abbot* gefundenen Werte bei der irdischen Atmosphäre (Fig. 13). Die Diffusionskonstante

211) Mitt. der Univ.-Sternwarte Breslau 3 (1932), p. 49.

212) Daselbst p. 12.

213) Untersuchungen über die Atmosphäre des Planeten Venus. Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys. Math. Kl. XXI. 1931.

oder Neigungstangente der obigen Geraden ergab sich zu

$$\beta = 0{,}0209 \cdot 10^{-16}.$$

Ein wichtiges Ergebnis dieser Untersuchung war auch, daß das *Lambert*sche Gesetz für die Oberfläche den Beobachtungen besser genügte als die Reflexionsformel an einem Wolkenmeer. Auch die gefundenen Albedowerte waren nur halb so groß, als man sie für Wasserdampfwolken erwarten müßte:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{rot}} &= 0{,}235 \\ \mu_{\text{gelb}} &= 0{,}195 \\ \mu_{\text{grün}} &= 0{,}288 \\ \mu_{\text{blau}} &= 0{,}256 \\ \mu_{\text{violett}} &= 0{,}272. \end{aligned}$$

Endlich fehlen auch die Absorptionsbanden des Wasserdampfes im roten Gebiet, denn ein Anwachsen des Schwächungskoeffizienten $C_\lambda = c_\lambda + \gamma_\lambda$ durch die Absorptionskonstante γ_λ ist nicht festzustellen. Dieses ist aus der Figur zu ersehen, wo bei den irdischen Werten C_λ diese Absorptionskonstante, verursacht durch den Wasserdampf und Sauerstoff, im Rot deutlich hervortritt. Diese Ergebnisse stehen mit denen der Spektralanalyse im vollen Einklang.[214]) Die Helligkeit des Planeten Venus ist also im wesentlichen durch seine gasförmige Atmosphäre und nicht durch die hohe Albedo der undurchdringlichen Wasserdampfwolken bedingt.

Da für Venus aus den Beobachtungen der Verlängerung der Hörnerspitzen auch die Horizontalrefraktion bekannt ist, so ergab sich die Möglichkeit, aus der Diffusionskonstante auch den Wert der *Loschmidt*schen Zahl zu berechnen. Dieselbe ist

$$N_1 = 1{,}05\, N',$$

wo $N' = 2{,}64 \cdot 10^{19}$ der Wert derselben Größe für die irdische Atmosphäre bei Normalbedinungen des Druckes und der Temperatur an der Erdoberfläche ist.[214a])

42. Die Theorie der Verfärbung bei Diffusion in Anwendung auf astronomische Probleme. Die Theorie der Durchleuchtung gasförmiger Massen, die wir in ihren Grundzügen besprochen haben, bietet

214) *F. E. Ross,* Astroph. Journ. 58, p. 57. *St. John* u. *Nichelson*, Mt. Wilson Contrib. Nr. 249 u. Astroph. Journ. 56 (1922), p. 380. *John* u. *Nichelson* finden, daß auf dem Wege der Sonnenstrahlen in der Venusatmosphäre weniger als 1 mm verflüssigten Wasserdampfes vorhanden ist und daß die Sauerstoffmenge kleiner als 1 Tausendstel derjenigen ist, die unsere Atmosphäre enthält.

214a) Die Refraktions- und Diffusionskonstante der Venusatmosphäre. Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1933, I.

auch eine vollständige Lösung des Problems der Verfärbung bei Diffusion des Lichtes nach der *Rayleigh*schen Formel. Wie *Schoenberg*[215]) gezeigt hat, kann das Spektrum mit seiner Intensitätsverteilung für eine durchleuchtete Gasmasse theoretisch konstruiert werden, wenn die Diffusionskonstante

$$\beta = \frac{\frac{32}{3}\pi^3 (n-1)^2 H}{N \lambda^4} \tag{60}$$

bekannt ist. Er berechnete das Spektrum des Zentrums der Jupiterscheibe bei verschiedenen Annahmen über den Wert von β der Jupiteratmosphäre und zeigte, daß aus der Lage der Maxima der Intensität im beobachteten Jupiterspektrum der Wert dieser Konstante abgeschätzt werden kann.

Im Falle weniger dichter Gasmedien, bei denen die Selbstbeleuchtung der Partikel vernachlässigt werden kann, ist eine einfachere Theorie am Platze.

Derselbe Verfasser untersucht in einer anderen Arbeit[216]) die Lage des Maximums der Intensität für die durchdringende Strahlung einerseits und für die diffuse Strahlung des zerstreuten Mediums andererseits. Dabei legt er für die einfallende Strahlung das *Planck*sche Strahlungsgesetz zugrunde. Bezeichnet λ_m die intensivste Wellenlänge der einfallenden Strahlung, λ'_m der durchdringenden, endlich λ''_m die intensivste Wellenlänge der zerstreuten Strahlung, so bestehen im Falle der Gültigkeit des *Wien*schen Gesetzes an jeder Stelle auf dem Lichtwege des durchdringenden Strahles einfache Beziehungen, die wir für den Fall des einfacheren *Wien*schen Gesetzes hier anführen:

$$\lambda'^4_m \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda'_m}\right) = 0{,}8\,\beta, \tag{61}$$

$$\lambda''^4_m \left(1 - \frac{5}{9}\frac{\lambda_m}{\lambda''_m}\right) = \frac{4}{9}\beta. \tag{62}$$

Man sieht aus ihnen, daß λ''_m immer kleiner ist als λ'_m, aber nur bei kleinen Werten von β wird λ''_m auch kleiner als λ_m. Der durchdringende Strahl wird bei wachsendem β, dessen Wert immer dem zurückgelegten Wege proportional ist, immer röter, die zerstreute Strahlung in seiner Umgebung ist immer blauer als der durchdringende Strahl, wird aber allmählich auch röter als die äußere Strahlung. Die beigefügten Tabellen der Maxima λ'_m und λ''_m sind für verschiedene Temperaturen und verschiedene Werte der Diffusionskonstante berechnet und ermöglichen

215) Vjschr. d. Astron. Ges. 65 (1930) p. 268.

216) Mitt. d. Univ.-Sternwarte Breslau. 3: Das Gesetz der Verfärbung bei Diffusion (1932), p. 52.

die Abschätzung des Wertes von β aus den beobachteten Werten von λ'_m und λ''_m.

Bei Temperaturbestimmungen der heißesten Sterne wird der Gradient der Strahlungsintensität als Merkmal der Temperatur benutzt, weil das Maximum der Strahlung der Messung nicht zugänglich ist. Auch der Gradient ist beim Durchdringen eines diffundierenden Mediums verfälscht, somit können die Temperaturen der Fixsterne durch lichtzerstreuende Wolken auf dem Wege der Strahlung nicht unwesentlich verändert erscheinen. Die einfache Theorie zeigt den Weg, wie diese Einflüsse festzustellen und zu eliminieren sind.

Bei vielen Nebeln, außerdem in den Schweifen der Kometen, wird die zerstreute Strahlung der Beobachtung selbst zugänglich. Auch hier kann die einfache Verfärbungstheorie, ohne Rücksicht auf die Diffusion höherer Ordnung, dazu angewandt werden, aus dem Intensitätsmaximum oder dem Gradienten der Intensität die Diffusionskonstante zu bestimmen.

Eine solche Anwendung der Theorie hat *W. Gleißberg* [217]) für den Kopf des Kometen Morehouse ausgeführt.

Die einzige Konstante des Problems, die die Verfärbung kennzeichnet, ist die Diffusionskonstante, die der Länge des Lichtweges im Medium, seiner Dichte und dem Quadrate des um Eins verminderten Brechungsexponenten des Mediums proportional ist. Bei Medien aus festen Partikeln wird die Diffusionskonstante durch diejenigen Partikel allein bestimmt, deren Größe unterhalb $\frac{1}{3}\lambda$ der einfallenden Strahlung liegt. Eine Verfälschung derselben durch die gröberen Partikel braucht auf Grund der zu Beginn dieses Kapitels erwähnten Rechnungen nicht befürchtet zu werden, denn die Partikel, die größer sind als 3λ, rufen überhaupt keine Verfärbung im durchgehenden Lichte hervor, und nur die zerstreute Strahlung selbst könnte durch Absorptionsbanden stellenweise in ihrer Färbung verfälscht sein.

43. Seeligers Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen. Aus Anlaß einer von *G. Müller* [218]) entdeckten eigentümlichen Helligkeitsschwankung des Saturnringes hat *H. Seeliger* [219]) eine Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen ausgearbeitet und in ihr auch die Erklärung für die genannte Lichtschwankung des Ringes gefunden. Diese Theorie unterscheidet sich von der Theorie der Beleuchtung gasförmiger Massen, die das *Rayleigh*sche Streuungsgesetz befolgen, erstens durch die Dimensionen der Partikel, die so groß angenommen

217) Mitt. d. Univ.-Sternwarte Breslau 3 (1932), p. 69.

218) Publik. d. Astroph. Observ. zu Potsdam 8, Nr. 30 (1893).

219) Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen usw. Abh. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wissenschaften, II. Kl., Bd. 18 (1893), p. 1.

werden, daß eine Verfärbung nicht zu erwarten ist, und dann auch durch den relativen Abstand derselben voneinander, bei dem die Selbstbeleuchtung derselben vernachlässigt werden kann. Es ist also hier eigentlich nur das Problem der Bedeckung und Beschattung der Partikel durcheinander behandelt. Wie *Schoenberg*[220]) gezeigt hat, bedarf die Theorie, um den tatsächlichen Verhältnissen bei dem Saturnringe einigermaßen Rechnung zu tragen, in dem Sinne einer Ergänzung, daß das zerstreute Licht in Betracht gezogen wird. Geschieht das, so erfährt die theoretisch berechnete Helligkeitsschwankung des Saturnringes eine so wesentliche Veränderung, daß es schwer fällt, die Theorie der Beschattung noch aufrecht zu halten. Die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen hat aber auch noch andere wichtige Anwendungen auf die Massen des Zodiakallichtes und auf die Nebelflecke gefunden. Hier haben wir es mit noch wesentlich geringerer Dichte zu tun; auch tritt hier die für den Saturnring charakteristische Lichtschwankung nicht auf, so daß *Seeligers* Ausführungen über die Helligkeit des Zodiakallichtes und der Nebelflecke keine Einschränkung erfahren.

44. Die allgemeine Gleichung für die Helligkeit einer beleuchteten Staubmasse. Es wird eine Staubwolke betrachtet, die aus Kugeln gleicher Größe gebildet ist, die überall gleich dicht im Raume R verteilt sind. Die Voraussetzung gleicher Größe der Kugeln ist unwesentlich, wie *Seeliger* gezeigt hat; auch die Voraussetzung kugelförmiger Gestalten ist insoweit ohne Bedeutung, als man nur die Folgen der Bedeckung und Beschattung der Partikel durch einander in Betracht zieht; die gesamte Helligkeitsänderung der Staubwolke ist freilich auch abhängig von der Phasenkurve der einzelnen Teilchen, und diese kann in hohem Grade von der Gestalt derselben abhängig sein. Wir werden sehen, daß die Einflüsse der Phase und des Bedeckungs- und Beschattungsphänomens unabhängig voneinander sind. Weitere Voraussetzungen der *Seeliger*schen Theorie sind eine sehr geringe Raumdichte der Partikel und eine unendlich große Entfernung der Lichtquelle, die als punktförmig angesehen wird.

Es sei dq' die Lichtmenge, welche ein unendlich kleines Element einer im Inneren der Masse gelegenen Kugel dem Auge des Beobachters zusendet, wenn es von keiner anderen Kugel beschattet oder verdeckt ist. Beides kann eintreten, und es fragt sich, wie groß im Mittel die Lichtmenge dq eines solchen Elementes ist, wenn sehr viele derselben in Betracht gezogen werden. Diese Aufgabe löst *Seeliger* durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, die er von dem genannten Element der

220) Photometrische Untersuchungen über Jupiter und das Saturnsystem. Acta Ac. Scient. Fennicae, Ser. A, 16 (1921).

Kugeloberfläche auf die ganzen Kugeln überträgt. Wenn die Wahrscheinlichkeit der Bedeckung oder Beschattung einer Kugel w ist, so daß die durchschnittliche Lichtmenge von einer Kugel

$$q = wq' \tag{63}$$

wird, wo q' die Lichtmenge bei isolierter Lage bedeutet, so wird die Wahrscheinlichkeit w für eine Masse von Kugeln bei geringer Dichte sich in der Form schreiben lassen

$$w = e^{-N\frac{V}{R}}. \tag{64}$$

Hier ist N die Anzahl der Kugeln in der Staubwolke, R der gesamte von der Wolke eingenommene Raum und V derjenige Raum, der von Kugeln freibleiben muß, damit die betrachteten im Inneren der Masse gelegenen Kugeln weder beschattet noch verdeckt werden. Dieser Raum V hat augenscheinlich die in der Fig. 14 wiedergebene Gestalt. Er besteht aus zwei Zylindern, deren Achsen nach der Sonne und nach der Erde gerichtet sind und deren Querschnitt die betrachtete Kugel umfaßt. Da in einem Volumelement dv des Raumes sich Ndv/R Kugeln befinden, so ist die durchschnittliche Lichtmenge vom Elemente dv nach der Erde

$$dQ = \frac{N}{R}\,dv\,w\,q'.$$

Die Lichtmenge von einer isolierten Kugel ist aber

$$q' = \Gamma\varrho^2\varphi(\alpha),$$

wo Γ die Reflexionskonstante, ϱ der Halbmesser der Kugel und $\varphi(\alpha)$ ihre Phasenkurve ist. Ersetzt man noch dv durch $dx\,d\sigma$, wo dx ein Element der Achse des nach der Erde gerichteten Zylinders ist und $d\sigma$ die scheinbare Größe von dv darstellt, so ergibt sich

$$dQ = \Gamma\varrho^2\varphi(\alpha)w\frac{N}{R}\,dx\,d\sigma,$$

und für alle Kugeln, welche überhaupt einen Beitrag zur Helligkeit von $d\sigma$ liefern, erhält man die Lichtmenge

$$Q = \Gamma\varrho^2\varphi(\alpha)\frac{N}{R}\,d\sigma\int_0^X w\,dx,$$

wo X die Länge der Strecke innerhalb der Masse von der äußeren Begrenzung bis zu der Tiefe bedeutet, von welcher überhaupt noch Licht nach außen dringen kann. Die scheinbare Helligkeit von $d\sigma$ ist

$$J = \Gamma\varrho^2\varphi(\alpha)\frac{N}{R}\int_0^X w\,dx,$$

und wenn man noch den Wert für w aus (64) einsetzt, so wird

$$J = \Gamma \varrho^2 \varphi(\alpha) \frac{N}{R} \int_0^X e^{-N\frac{V}{R}} dx. \tag{65}$$

Diese Gleichung schließt alle Fälle der Beleuchtung eines Systems kleiner Körper, die nicht zu dicht verteilt sind, in sich.

Untersucht man den Fall einer *kugelförmig begrenzten Staubwolke* gleichmäßiger Dichte, so findet man, daß die Helligkeit derselben unabhängig von der Annahme über das Reflexionsgesetz eine ungleichmäßige ist: die der Lichtquelle zugewandte Seite ist begreiflicherweise die hellere; auf ihr findet sich ein Maximum der Helligkeit auf dem großen Kreise, der durch die Lichtquelle und den Beobachter geht. Die Helligkeitsverteilung ist natürlich eine andere als auf einer Vollkugel; sie ist wesentlich beeinflußt von der Phasenkurve der einzelnen Teilchen, außerdem aber von der Durchsichtigkeit der Kugel oder der Volumdichte. Nur im Falle einer undurchsichtigen Wolke ist bei voller Beleuchtung derselben die gesamte Lichtmenge einfach gleich

$$Q = \Gamma a^2 \varphi(0),$$

wo a der Halbmesser der Kugel ist, d. h. die Lichtmenge ist dieselbe wie von einer Vollkugel.

45. Die Beleuchtung des Saturnringes. Von besonderem Interesse ist der Fall, wo der Raum R von zwei parallelen Ebenen begrenzt ist, wie das im Falle des Saturnringes zutrifft. Es sei H (Fig. 14) die Gesamthöhe der Schicht, h der Abstand des Volumelementes dv von der oberen Begrenzung, i und ε die Winkel, welche die Normale zu derselben mit den Richtungen nach der Sonne und der Erde bildet. Es ist dann $h = x \cos \varepsilon$ und die Helligkeit der Schicht nach (65) gleich

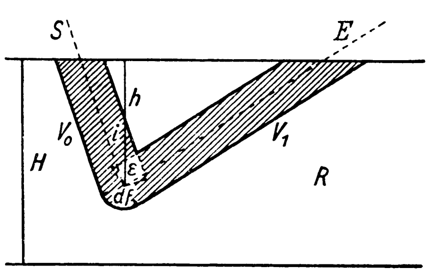

Fig. 14.
Die Beleuchtung des Saturnringes nach *Seeliger*.
(Nach Handb. d. Astroph. II, p. 135.)

$$J = \Gamma \varrho^2 \varphi(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \int_0^H e^{-N\frac{V}{R}} dh. \tag{66}$$

Das Volumen V besteht aus den beiden Zylindern V_0 und V_1, außerdem aus dem kleinen von einem Teil der Kugeloberfläche begrenzten Stück k, vermindert um das beiden Zylindern gemeinsame Stück G. Das Verhältnis der beiden letzteren Stücke zur Summe $V_0 + V_1$ verändert sich mit dem Winkel zwischen den Zylinderachsen, wobei G

für kleine Winkel stark anwächst, während der Teil k in allen Fällen so unbedeutend ist, daß er gegenüber dem Volumen der beiden Zylinder vernachlässigt werden kann. Ist der Phasenwinkel α groß, so darf das auch mit G geschehen. Wir betrachten zunächst diesen letzteren Fall, in welchem also

$$V = V_0 + V_1.$$

Da nun

$$V_0 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i}, \qquad V_1 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos \varepsilon},$$

so wird

$$V = \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}$$

und

$$J = \Gamma \varrho^2 \varphi(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \int_0^H e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}} dh.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Bezeichnung

$$y = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}$$

einführt, für die Helligkeit

$$J = \frac{\Gamma \varphi(\alpha)}{\pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} (1 - e^{-Y}), \tag{67}$$

wo Y der Wert von y bei $h = H$ ist.

Das zweite Glied in der Klammer kann im Falle, daß der Raum *undurchsichtig ist*, vernachlässigt werden. In diesem Falle hat man also

$$J = \frac{\Gamma \varphi(\alpha)}{\pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}. \tag{68}$$

Dieses ist ein Ausdruck für die Helligkeit eines festen Körpers nach dem *Lommel-Seeliger*schen Gesetze, wo nur der Faktor $\varphi(\alpha)$ oder die Phasenkurve der einzelnen Körper hinzugekommen ist. Die Betrachtungsweise, die dieser Ableitung zugrunde liegt, ist tatsächlich auch mit der Theorie der Absorption beim Eindringen des Lichtes in die Oberfläche des Körpers identisch. Führt man dieselbe für den Fall kleiner Winkel α durch, ohne das gemeinsame Stück der beiden Zylinder in Betracht zu ziehen, und geht zum Grenzfall $\alpha = 0$ über, so muß man einen Ausdruck erhalten, welcher sich aus der Formel (67) für $i = \varepsilon$ ergibt. Wir bezeichnen die entsprechende Helligkeit durch J_0' und haben

$$J_0' = \frac{\frac{1}{2} \Gamma \varphi(0)}{\pi} \left\{ 1 - e^{-2N \frac{H}{R} \frac{\varrho^2 \pi}{\cos i}} \right\}. \tag{69}$$

Dagegen wird, wenn das gemeinsame Stück G der beiden Zylinder von dem Gesamtvolumen V abgezogen wird, im Grenzfalle bei $\alpha = 0$,

V nur aus einem Zylinder bestehen und wir hätten

$$V = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i}.$$

Mithin würde sich in diesem Falle die Helligkeit nach (66) durch das Integral darstellen

$$J_0 = \Gamma \varrho^2 \varphi(0) \frac{N}{R \cos i} \int_0^H e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i}} dh,$$

oder nach Ausführung der Integration durch

$$J_0 = \frac{\Gamma \varphi(0)}{\pi} \left\{ 1 - e^{-N \frac{H}{R} \frac{\varrho^2 \pi}{\cos i}} \right\}. \tag{70}$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch (69), so folgt

$$\frac{J_0}{J_0'} = 2 \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}}, \tag{71}$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden ist $\lambda = N \frac{H}{R} \frac{\varrho^2 \pi}{\cos i}$. Ist das System undurchsichtig, so ist H und damit auch λ als sehr groß anzusehen, und es wird $J_0 : J_0' = 2$.

Die Helligkeit des Systems steigt also bei $\alpha = 0$ etwa auf das Doppelte derjenigen bei größerem α. Da J_0' sich nach (68) bei kleinem α nur sehr wenig ändert, so folgt hieraus, daß sich ein System von kleinen Körpern, das undurchsichtig ist, in der Nähe von $\alpha = 0$ wesentlich anders verhält als ein fester Körper.

Ist der Körper dagegen äußerst durchsichtig, so wird λ sehr klein und man nähert sich bei abnehmendem α dem Grenzwerte

$$\frac{J_0}{J_0'} = 1,$$

wo schließlich die ganze erwähnte Helligkeitszunahme überhaupt nicht mehr zum Vorschein kommt. Im Saturnringe haben wir ein Gebilde, in dem verschiedene Stufen zwischen den beiden genannten Grenzfällen vertreten sind.

Er besteht bekanntlich aus dem inneren dunklen, sog. Florringe, durch den man bei Bedeckungen das Sternlicht nur wenig abgeschwächt hindurchscheinen sieht, der also als fast durchsichtig zu betrachten ist, aus dem hellen B-Ringe, der als undurchsichtig gelten muß, und dem äußersten, schwächeren C-Ringe, welcher eine Zwischenstufe zwischen den beiden ersten einnimmt und als schwach durchsichtig gelten kann. Diese drei Teile des Ringes müßten also das oben genannte Aufhellungsphänomen in der Opposition in verschiedenem Grade aufweisen.

Bei einem undurchsichtigen Ringe ist bei der Berechnung seiner Helligkeit in der Nähe der Opposition der den beiden Zylindern gemeinsame Raum G von wesentlicher Bedeutung, während die untere halbkugelförmige Begrenzung in jedem Falle als verschwindend zu vernachlässigen ist. Man hat somit

$$V = V_0 + V_1 - G. \tag{72}$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur für diejenigen Volumelemente des Ringes, für welche das zugehörige G gänzlich innerhalb des Ringes liegt und nicht von der oberen Ringebene geschnitten wird.

Ist dieses letztere der Fall, so bleibt ein Teil von G, den wir mit Σ bezeichnen wollen, außerhalb des Ringes, und es gilt dann die Gleichung

$$V = V_0 + V_1 - G + \Sigma. \tag{73}$$

Nennt man h_1 denjenigen Wert von h, für welchen Σ gerade verschwindet, so setzt sich die Flächenhelligkeit aus zwei Teilen zusammen

$$J = \Gamma \varrho^2 \varphi(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \left\{ \int_0^{h_1} e^{-\frac{N}{R}(V_0 + V_1 - G + \Sigma)} dh + \int_{h_1}^{H} e^{-\frac{N}{R}(V_0 + V_1 - G)} dh \right\}. \tag{74}$$

Die Berechnung der Räume G und Σ ist recht umständlich. Auf ihre Ableitung, sowie diejenige der Schlußformeln für die Helligkeit des Ringes bei kleinen Phasenwinkeln muß hier verzichtet werden. Die Anwendung der Theorie ist nur dank den von *Seeliger* berechneten Hilfstafeln möglich. Das Argument dieser Tabellen, die *Schoenberg*[221]) noch erweitert hat, ist der Phasenwinkel und die Raumdichte. Die endgültige Formel für die Helligkeit ergibt sich in der Form

$$J = \gamma' \mathfrak{S}(\xi) \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A}, \tag{75}$$

wo $\gamma' = \frac{3}{32\pi} \Gamma \varphi(\alpha)$, A und A' die Elevationswinkel der Sonne und der Erde über der Ebene des Ringes sind und $\mathfrak{S}(\xi)$ eine komplizierte Funktion der Raumdichte D und des Phasenwinkels α ist, denn

$$\xi = \frac{8D}{\sin \alpha}. \tag{76}$$

Ist somit die Raumdichte gegeben, so kann der Verlauf der Helligkeit des Ringes den genannten Tabellen entnommen werden. Ein kleiner Auszug aus denselben wird hier wiedergegeben (p. 948). Diese Tabelle zeigt, daß z. B. für $D = 0{,}0006$ bereits bei $\alpha = 0{,}5^0$ die Helligkeit beinahe auf die Hälfte ihres Wertes bei $\alpha = 0^0$ zurückgeht und sich weiterhin fast gar nicht mehr ändert. Nimmt man

221) Handb. d. Astroph. II, 1. Hälfte (1929), p. 257.

dagegen $D = 0{,}00002$, so spielt sich die ganze Lichtvariation sogar schon zwischen $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 0{,}1^0$ ab. Bei größeren Dichten erstreckt sich die Veränderlichkeit auf ein größeres Gebiet, liegt aber in ihrem Hauptteil auch zwischen 0^0 und 1^0 Phasenwinkel.

Tabelle 15.
Tabelle der Funktion $\mathfrak{C}(\xi)$

$8D$	0,1	0,05	0,01	0,005
$\alpha = 0{,}0^0$	0,533	0,533	0,533	0,533
0,1	0,485	0,453	0,352	0,317
0,2	0,453	0,411	0,318	0,294
0,3	0,430	0,385	0,302	0,286
0,4	0,411	0,366	0,294	0,281
0,5	0,396	0,352	0,289	0,279
1,0	0,352	0,317	0,279	0,273
5,0	0,289	0,279	0,269	0,268

Eine staubförmige Masse, die so dick ist, daß sie ganz oder fast undurchsichtig erscheint, weist eine Flächenhelligkeit auf, die sehr stark mit abnehmendem Phasenwinkel zunimmt. Sie kann für $\alpha = 0$ fast den doppelten Betrag von der Helligkeit erreichen, die sie bei kleinem α besitzt. Die Lichtvariation spielt sich bei desto kleinerem α ab, je geringer die Volumdichte der staubförmigen Masse ist.

Bemerkenswert ist auch, daß die Helligkeit des Ringes sich von dem Erhebungswinkel der Erde und der Sonne über der Ringebene unabhängig erweist, was freilich seinen Grund darin hat, daß diese beiden Winkel sich nur wenig voneinander unterscheiden. Diese Schlußfolgerung der Theorie ist durch *Schoenbergs* Beobachtungen für den Bereich der Phasenwinkel zwischen 16^0 und 25^0 bestätigt. Bei kleinen Erhebungswinkeln sind Abweichungen sicher zu erwarten.

Seeliger untersucht auch den Einfluß einer teilweisen Durchsichtigkeit der Staubmasse auf die Lichtvariation und findet, daß das Aufhellungsphänomen in weiten Grenzen erhalten bleibt, der Betrag der Aufhellung aber mit der Durchsichtigkeit der Masse abnimmt.

Wie die Endformel (75) zeigt, muß der Lichtvariation durch Beschattung und Bedeckung sich eine andere, durch die Phasenkurve $\varphi(\alpha)$ bedingte, überlagern. Eine Trennung beider Ursachen durchzuführen ist sehr schwierig. *Schoenberg* hat diesen Versuch gemacht und, um einen Anschluß seiner Beobachtungen an eine theoretische *Seeliger*sche Kurve zu erreichen, einen sehr bedeutenden Phasenkoeffizienten der Partikel ($0^{\rm m}_{,}07$ pro 1^0 Phase) abgeleitet.

Durch die Tatsache ermutigt, daß die Beobachtungen *G. Müllers* eine starke Veränderlichkeit der Helligkeit des Saturnsystems mit der Phase aufwiesen, die im Sinne einer Beschattungstheorie verlief, hat *Seeliger* diese in allen Einzelheiten ausgebaut. Er zeigte, daß der Verlauf der Helligkeit des Ringes von den Voraussetzungen der Kugelförmigkeit der Partikel, der teilweisen Durchsichtigkeit des Ringes und von dem

Umstande im wesentlichen unabhängig sei, daß die Sonnenstrahlen nicht als parallel oder die Sonne nicht als punktförmig angesehen werden kann. Auch auf gewisse Folgerungen seiner Theorie für die Erklärung des sog. *Schleiers*, den man in der Projektion des dunklen *Florringe*s auf die Saturnscheibe einigemal beobachtet hat, hat *Seeliger* aufmerksam gemacht. Auch der freie Teil des dunklen Ringes sowie der äußere *A*-Ring müssen eigentümliche Lichtvariationen aufweisen, die sich aber so plötzlich während der Opposition abspielen, daß sie wohl niemals beobachtet werden können. Diese Folgerungen der *Seeliger*schen Theorie werden hier nur erwähnt, weil beträchtliche Zweifel darüber bestehen, ob eine grundlegende Vernachlässigung der ganzen Theorie, die von *Seeliger* nirgends erwähnt wird, zu solchen Folgerungen berechtigt. *Seeliger* vernachlässigt vollständig die Zerstreuung des Lichtes innerhalb der Staubwolke, die auch, wenn die Wolke ausschließlich aus größeren Körpern besteht, das ganze Phänomen beeinflussen muß, weil das von den Nachbarkörpern seitlich zerstreute Licht die Schatten aufhellen müßte. Nun haben aber neuere Beobachtungen und besonders die Photographien des Saturnsystems durch Farbfilter die Existenz einer Wolke feinster Partikel nachgewiesen, die sogar den Hauptbeitrag zur Helligkeit des Ringes liefert. Infolge der Beugung kann feinster Staub überhaupt keine Schatten werfen und muß in jedem Falle auch bei der Existenz von Schatten größerer Meteore diese ganz bedeutend erhellen. Wird das zerstreute Licht gegenüber dem der schattenwerfenden größeren Körper überwiegend, so erscheint es zweifelhaft, ob die ganze Beschattungs- und Bedeckungstheorie überhaupt noch anwendbar ist. *Schoenberg*, der durch langjährige Beobachtungen der Flächenhelligkeit des Ringes die Kurve der Veränderlichkeit festlegen und die Abhängigkeit derselben von den benutzten Farbfiltern feststellen konnte, hat versucht, die *Seeliger*sche Theorie durch die Lichtzerstreuung zu ergänzen, was aber nur mit Schwierigkeiten möglich war. Neuere Untersuchungen des Verfassers führen das ganze Phänomen der Aufhellung des Ringes während der Opposition auf Beugungserscheinungen zurück. Sollten diese in den Beobachtungen eine volle Bestätigung erfahren, so würde die geistreiche *Seeliger*sche Theorie der Helligkeit des Ringes in der Nähe der Opposition gegenstandslos werden.

Seeliger hat aber seine Theorie auch auf andere Erscheinungen angewandt, so zur Erklärung der Helligkeit des Zodiakallichtes und der von Sternen beleuchteten Nebelmassen, und hier, wo man es mit wesentlich geringeren Dichten und wahrscheinlich auch gröberen Partikeln zu tun hat, behalten seine Ausführungen ihre volle Bedeutung.

46. Die Beleuchtung des Zodiakallichtes. Bei dem Zodiakallicht haben wir es, wie die spektroskopischen Beobachtungen beweisen, mit reflektiertem Sonnenlicht zu tun. Wenn auch neuere Beobachtungen von *Slipher* das Vorhandensein einiger Emissionslinien im Zodiakallichtspektrum ankündigen, so ist das kontinuierliche Sonnenspektrum jedenfalls auch vorhanden und vorherrschend. *Seeliger* und mit ihm die meisten anderen Forscher rechnen nur mit festen Bestandteilen der Zodiakallichtmaterie, Meteoren, deren Dimensionen groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes. Diese Materie ist jedenfalls von außerordentlich geringer Raumdichte, und es gilt für ihre Beleuchtung die *Seeliger*sche Theorie, wobei aber die besonderen, bei kleinsten Phasenwinkeln auftretenden Erscheinungen bedeutungslos werden. Die Staubwolke, die wir als Zodiakallicht sehen, ist jedenfalls vorwiegend in der Ebene der Ekliptik ausgebreitet und umhüllt nach den Ansichten der meisten Forscher sowohl die Sonne als die Erde.

Bei der Berechnung der reflektierten Lichtmenge kann von dem Einfluß gegenseitiger Beschattung und Bedeckung der Partikel abgesehen werden. In der Tat, der Kernschatten einer Kugel vom Radius ϱ, die sich in der Entfernung r von der Sonne und Δ von der Erde befindet, hat bei einem Werte $\varrho = 0{,}5$ m und dem Verhältnis $r : S = 300$ (S Radius der Sonne) eine Höhe $r\varrho : S = 150$ m. Dabei sind die angenommenen Werte für die Durchschnittsgröße des Meteors eher zu groß als zu klein. Befinden sich N Kugeln im Raume R, so ist nach den Entwicklungen *Seeligers*[222]) der mittlere Abstand zwischen ihnen durch die Formel gegeben

$$2\left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{(\frac{4}{3}\pi)^{\frac{1}{3}}}.$$

Führen wir hier den Radius ϱ ein und nehmen an, die Raumdichte sei 10^x, so beträgt der mittlere Abstand

$$2\varrho\,\Gamma(\tfrac{4}{3})\,10^{\frac{x}{3}}.$$

Mit Hilfe dieser Formel erhält man nebenstehende Tabelle.

Tabelle 16.

Dichte	Mittl. Abst.	Dichte	Mittl. Abst.
10^{-6}	89 m	10^{-10}	1,9 km
10^{-7}	192	10^{-11}	4,1
10^{-8}	414	10^{-12}	8,9
10^{-9}	893	10^{-13}	19,2

Man ersieht aus derselben, daß bei einer Dichte von 10^{-7} im Durchschnitt weniger als eine Kugel in den Schattenkegel einer anderen fallen wird. Da es tatsächlich auch kleinere Kugeln geben muß, deren Schattenkegel entsprechend kürzer sein wird, so ist die Wahrscheinlichkeit noch

222) Astron. Nachr. 137 (1895), p. 129.

wesentlich geringer. Die angenommene Dichte ist dabei für den Meteorschwarm des Zodiakallichtes noch viel zu hoch. Man kann also von der gegenseitigen Beschattung der Meteore vollkommen absehen; aber auch der Einfluß der Bedeckung der Meteore durch einander ist verschwindend. Den Nachweis hat *K. Schwend*[223]) in seiner Dissertation erbracht. Gehen wir von der Formel (65) dieses Kapitels aus und wenden sie auf den Fall an, in dem sich sowohl die Sonne als die Erde innerhalb der Wolke befindet, so ist das Volumen V in diesem Falle aus zwei Kegeln zusammengesetzt, von denen der erste mit dem Volumen V_1 seine Spitze im betrachteten Meteor und seine Basis in der Sonne hat, der zweite dagegen V_2 seine Spitze im Auge des Beobachters und seine Basis im Meteor hat. Es ist also $V = V_1 + V_2$, und statt der Formel (65) erhalten wir für die Helligkeit

$$(77)\qquad J = \Gamma\varrho^2 \int\limits_0^{\Delta_0} \varphi(\alpha)\frac{N}{R}\, e^{-N\frac{V}{R}} \frac{\Delta^2}{\Delta^2 r^2}\, d\Delta = \Gamma\varrho^2 \int\limits_0^{\Delta_0} \frac{\varphi(\alpha)}{r^2}\frac{N}{R}\, e^{-N\frac{V}{R}}\, d\Delta,$$

wo der wechselnden Größe der Volumelemente $\Delta^2 d\sigma d\Delta$, und ihrem wechselnden Abstande von der Sonne und der Erde, sowie der Veränderlichkeit ihres Phasenwinkels bei der Berechnung der Helligkeit des Elementes dv Rechnung getragen ist. *K. Schwend* zeigt nun, daß bei einer Volumdichte von 10^{-13} der Wert der Exponentialfunktion wegen der Kleinheit von V gleich 1 gesetzt werden kann. Damit vereinfacht sich die Gleichung für die Helligkeit, wenn man für die Raumdichte $\frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{N}{R}$ die Bezeichnung $\mu(r)$ und für $\Gamma\frac{3}{4\pi\varrho}$ die Konstante γ_1 einführt, zu folgender Form:

$$(78)\qquad J = \gamma_1 \int\limits_0^{\Delta_0} \frac{\mu(r)}{r^2}\varphi(\alpha)\, d\Delta.$$

Führen wir orthogonale heliozentrische Koordinaten (x, y) für die Punkte P der Meteorwolke ein und bezeichnen das Dichtegesetz innerhalb der Wolke durch $\mu(x, y)$, wobei wir also eine um die Sonne symmetrische, aber von der Höhe über der Ekliptik abhängige Dichteverteilung voraussetzen, so haben wir in dem Ausdruck für die Helligkeit

$$J = \gamma_1 \int\limits_0^{\Delta_0} \frac{\mu(x, y)\,\varphi(\alpha)\, d\Delta}{r^2}$$

die Transformation auf die geozentrischen sphärischen Koordinaten in bezug auf die Ekliptik auszuführen. Wir haben dazu nach *van*

223) Zur Zodiakallichtfrage. Diss. München 1904.

Rhijn[224]) folgende aus der Abbildung (Fig. 15) unmittelbar abzulesende Beziehungen:

$$(79)\quad \begin{cases} r = R\dfrac{\sin\psi}{\sin\alpha}, \\ \Delta = R\dfrac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin\alpha}, \quad d\Delta = -\dfrac{R\sin\psi}{\sin^2\alpha}\,d\alpha; \quad \dfrac{d\Delta}{r^2} = -\dfrac{d\alpha}{R\sin\psi}, \\ y = \Delta\sin\beta = \dfrac{R\sin(\psi+\alpha)}{\sin\alpha}\sin\beta, \\ x^2 = r^2 - y^2 = R^2\dfrac{\sin^2\psi - \sin^2\beta\sin^2(\psi+\alpha)}{\sin^2\alpha}, \quad \cos\psi = \cos\beta\cos\lambda, \end{cases}$$

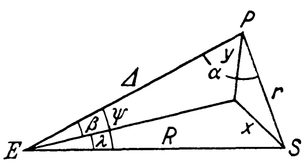

Fig. 15.
Beziehungen zwischen den orthogonalen heliozentrischen (x, y) Koordinaten eines Punktes P im Zodiakallicht und den geozentrischen sphärischen Koordinaten (β, λ) desselben.

wo β und λ die geozentrischen Breiten und Längen des Punktes P sind. Die Helligkeit ist dann

$$(80)\quad J = \frac{\gamma_1}{R\sin\psi}\int\limits_{\alpha_0}^{\pi-\psi}\mu(x,y)\,\varphi(a)\,d\alpha.$$

Die untere Grenze α_0 ist der für die Grenze der Wolke in der Richtung ψ geltende Phasenwinkel.

Wir sehen, daß, so lange die Form der Phasenkurve der einzelnen Meteore und die Dichte unbekannt sind, die Aufgabe unbestimmt bleibt. Man kann, wenn man eine dieser Funktionen vorgibt, die andere so bestimmen, daß sie der beobachteten Helligkeitsverteilung genügt. So hat *van Rhijn* für die Dichteverteilung die Funktion

$$(81)\quad \mu(x,y) = \mu_0(1 - \lambda x^2 - \nu y^2)$$

mit unbestimmten Koeffizienten λ und μ angesetzt, die der Annahme entspricht, daß die Flächen gleicher Dichte Sphäroide sind. Für die Phasenkurve mußte er dann eine durch Proben ermittelte, in der Nähe der Opposition stark abfallende Funktion ansetzen, von der es ganz unbestimmt bleibt, wie weit sie den wirklichen Verhältnissen entspricht. Die Beobachtungen weisen eine leichte Aufhellung des Himmels im Gegenpunkte der Sonne auf. Das ist der sog. *Gegenschein.* Die *Seeliger*sche Hypothese geht darauf aus, die Helligkeit des Gegenscheines im Zusammenhange mit der Helligkeit des ganzen Lichtbandes, das sich längs der Ekliptik, beginnend mit dem Zodiakallichtkegel, bis zum Gegenschein erstreckt, einheitlich durch eine Meteorwolke zu erklären. Hierbei ist dann zu beachten, daß in der Richtung des Gegenscheines ($\lambda = 180^0$, $\beta = 0^0$) die Form des Dichtegesetzes keinen Einfluß auf die Helligkeit hat, während die Form der

224) On the Brightness of the Sky, etc. Publ. of the Astronomical Laboratory at Groningen 31 (1921).

Phasenkurve dort wesentlichen Einfluß ausübt; dagegen ist für die Helligkeit in den Elongationen und den sonnennahen Partien der Ekliptik die Dichteverteilung in der Meteorwolke von wesentlichem Einfluß. Damit sind für die Hypothese über den Verlauf der Phasenkurve in der Nähe des Gegenscheines, also für kleine α, einige Anhaltspunkte gegeben. Darf man die Helligkeit des Gegenscheines und des Zodiakallichtes als von Meteoren herrührend ansehen, so ist eine Darstellung der geringen Helligkeiten längs der Ekliptik vom Standpunkte der *Seeliger*schen Hypothese möglich; auch die Ableitungen der Konstanten des Dichtegesetzes und der Raumdichte der Meteore in verschiedenen Abständen von der Sonne ist bei einigen Annahmen durchführbar.

Denkt man sich dagegen das Zodiakallicht von einem Gas oder von festen Partikeln herrührend, deren Dimensionen vergleichbar sind mit der Wellenlänge der Sonnenstrahlung, so liegt das Problem ganz anders. Insbesondere wird bei sehr kleinen festen Partikeln die Form der Phasenkurve ganz unbestimmt, soweit man ihre Dimensionen nicht genau angeben kann. Die Phasenkurve solcher Partikel kann mehrere Maxima und Minima aufweisen; aus ihrem Verlauf bei kleinem α kann gar nichts für größere Phasenwinkel ausgesagt werden. Wie schon oben bemerkt, weisen neue spektroskopische Beobachtungen neben einem kontinuierlichen Sonnenspektrum auch einige Emissionslinien in dem hellsten Teile des Zodiakallichtes auf. Bei der Schwierigkeit solcher Spektraluntersuchungen und der Unmöglichkeit, sie auch auf die schwächeren Teile des Zodiakallichtes auszudehnen, erscheint es somit zunächst noch nicht möglich, von einer einwandfreien Bestätigung der *Seeliger*schen Theorie zu sprechen.

47. Über die Beleuchtung kosmischer Staubmassen durch Sterne. *Seeliger* hat auch die Frage untersucht, ob kosmische Staubmassen in der Nähe von Sternen für uns sichtbar werden können und ob gewisse lichtschwache Nebel, die in der Umgebung von Fixsternen sichtbar sind, in reflektiertem Sternlichte leuchten. Diese Frage, die seinerzeit nur rein theoretisch aufgeworfen werden konnte, weil spektroskopisch solche Nebelflecke noch nicht untersucht waren, kann jetzt für eine große Gruppe von Nebelflecken in dem Sinne als bestätigt angesehen werden, daß die Erleuchtung der Nebel von Sternen herrührt; die Wirkung des Lichtes ist aber nicht allein eine diffuse Zerstreuung, sondern auch eine photoelektrische Anregung und hat ein Linienspektrum des Nebels zur Folge. Die Theorie dieses Leuchtens ist in einem besonderen Kapitel behandelt. Doch für die Deutung des kontinuierlichen Spektrums der Nebel behält die *Seeliger*sche Theorie ihre

Bedeutung. Diese Theorie ist in der Gleichung (65) dieses Kapitels enthalten, wir müssen sie nur auf zwei bisher nicht behandelte Fälle spezialisieren:

1. Der Stern und der Beobachter befinden sich beide weit außerhalb der Wolke, so daß ihre Dimensionen klein sind im Vergleich zu diesen Abständen.

2. Der Stern befindet sich innerhalb der Wolke, der Beobachter weit außerhalb derselben.

In beiden Fällen nehmen wir gleichmäßige Dichte der Massenverteilung an. Im ersten Falle kann man $\varphi(\alpha)$ und den Abstand r für alle Teile der Wolke als konstant annehmen; die beiden Kegel V_1 und V_2 werden zu Zylindern und $V = V_1 + V_2 = \pi\varrho^2(h_1 + h_2)$, wo h_1 und h_2 die Längen der Strecken vom Meteor nach der Erde und dem Sterne innerhalb der Wolke sind. Bezeichnet weiter $\mu = \frac{4}{3}\pi\varrho^2\frac{N}{R}$ die Volumdichte, und führt man noch zur Abkürzung die Bezeichnung ein

$$\frac{N}{R}\pi\varrho^2 = \frac{3}{4}\frac{\mu}{\varrho} = \lambda,$$

so wird aus unserer Gleichung (65) folgende:

$$J = \frac{\lambda\Gamma}{\pi}\frac{\varphi(\alpha)}{r^2}\int\limits_0^{\Delta_0} e^{-\lambda(h_1+h_2)}\,d\Delta = \frac{\Gamma\varphi(\alpha)}{\pi}\frac{1}{r^2}\Phi(\lambda), \tag{82}$$

wo

$$\Phi(\lambda) = \lambda\int\limits_0^{\Delta_0} e^{-\lambda(h_1+h_2)}\,d\Delta.$$

Hier ist Δ_0 die Strecke, die der nach der Erde gerichtete Strahl von der vorderen bis zur hinteren Begrenzung der Wolke durchläuft. Nimmt man als Form der Wolke eine durch zwei parallele Ebenen begrenzte Staubschicht an, bezeichnet durch x die Tiefe des Volumelementes unter der vorderen Grenzfläche, durch X die Dicke der Schicht, so ist

$$h_1 = x\sec i,\quad h_2 = x\sec\varepsilon$$

und

$$\Phi(\lambda) = \lambda\int\limits_0^X e^{-\lambda x\frac{\cos i + \cos\varepsilon}{\cos i\cos\varepsilon}}\,dx\sec\varepsilon = \frac{\cos i}{\cos i + \cos\varepsilon}\left(1 - e^{-\lambda X\frac{\cos i + \cos\varepsilon}{\cos i\cos\varepsilon}}\right).$$

Bezeichnet man den Klammerausdruck durch ψ, so ist

$$J = \frac{\Gamma\varphi(\alpha)}{\pi r^2}\frac{\cos i}{\cos i + \cos\varepsilon}\psi.$$

Die Formel gilt nur, solange $i < 90^0$. Das Maximum der Helligkeit tritt bei gegebenen i und ε ein, wenn $\psi = 1$ oder wenn $\lambda = \infty$,

d. h. $\varrho = 0$ (ϱ ist der Halbmesser des Teilchens); die größte Helligkeit ergibt also eine undurchsichtige Meteorwolke, die aus feinsten Staubteilchen besteht. *Seeliger* berechnet diese Helligkeit für einen Spezialfall, bei dem für die Helligkeit des Sternes diejenige der Sonne eingesetzt wird und die Staubwolke sich in der Entfernung $r = 1000$, gleich 30 Neptunsweiten befindet; dabei wird für den Reflexionskoeffizienten des einzelnen Meteors ein Drittel angenommen. Er findet, daß eine solche Staubwolke eine Flächenhelligkeit besitzen könnte, die diejenige der hellsten Teile des Zodiakallichtes sechsfach übersteigen würde. In einen Abstand von der Erde versetzt, dem die Parallaxe von $0{,}01''$ entspricht, hätte der beleuchtende Stern die Helligkeit $10{,}4^{\mathrm{m}}$ und würde in $10''$ Abstand von dem Nebel erscheinen. Die Flächenhelligkeit des letzteren wäre dabei natürlich unverändert die oben genannte. Wir hätten somit einen möglichen Fall.

Wir betrachten die andere Möglichkeit, bei der der Stern sich innerhalb der Staubwolke befindet, der Beobachter in sehr großer Entfernung von ihr. In diesem Falle wird $h_1 = r$, die Phasenkurve und der Abstand r wird veränderlich innerhalb der Wolke, und wir erhalten daher statt der Gleichung (82)

$$J = \frac{\lambda \Gamma}{\pi} \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h_2 + r)} \varphi(\alpha)}{r^2} \, dx. \tag{83}$$

Die weitere Entwicklung dieses Integrals ist von der Form von $\varphi(\alpha)$ abhängig. Fällt man vom Sterne aus eine Senkrechte s auf die vom Beobachter zum betrachteten Volumelement gezogene Gerade und ist m der Abstand des Fußpunktes dieser Senkrechten von der Eintrittsstelle der genannten Geraden in die Staubwolke, so hat man

$$h_2 = m + s \operatorname{cotg} \alpha, \quad h_2 + r = m + s \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{dx}{r^2} = -\frac{d\alpha}{s}$$

und

$$J = \frac{\lambda \Gamma}{\pi} e^{-\lambda m} \int_0^X e^{-\lambda s \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}} \varphi(\alpha) \frac{dx}{r^2} = \frac{\lambda \Gamma}{\pi} \frac{e^{-\lambda m}}{s} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} e^{-\lambda s \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}} \varphi(\alpha) \, d\alpha, \tag{84}$$

wo α_0 und α_1 die Werte von α für die Eintritts- und Austrittsstelle bedeuten. Setzt man noch

$$\nu = \lambda s, \quad \psi_\nu(\alpha) = \nu \int_0^\alpha e^{-\nu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \varphi(\pi - \alpha) \, d\alpha,$$

so wird, da $m = -s \operatorname{cotg} \alpha_0$,

$$J = \frac{\Gamma}{\pi s^2} e^{\nu \operatorname{cogt} \alpha_0} \{ \psi_\nu(\pi - \alpha_1) - \psi_\nu(\pi - \alpha_0) \}. \tag{85}$$

Für die Funktion ψ_ν hat *Seeliger* unter Zugrundelegung des *Lambert*schen Gesetzes eine Tafel berechnet und so eine numerische Ausrechnung für einen vorgegebenen Wert von ν möglich gemacht. Er findet, daß bei derselben Entfernung, $s = 1000$ Erdbahnradien, und dem beiläufigen Werte $\nu = 0{,}46$ sich wiederum Werte der Helligkeit des Nebels ergeben, die bedeutend größer sind als die Helligkeit des Zodiakallichtes. Dabei ist als beleuchtender Stern wiederum die Sonne angenommen. Bei Sternen von früherem Spektraltypus, die eine wesentlich höhere Leuchtkraft besitzen, würde auch die Helligkeit des Nebels wesentlich höher ausfallen.

E. Hertzsprung [225]) hat versucht, die vermessenen photographischen Helligkeiten der Plejadennebel von dem obigen Gesichtspunkte aus zu deuten und ihre Gesamtmasse zu bestimmen.

III. Die veränderlichen Sterne.

48. Das Bedeckungsproblem. Eine gewisse Klasse der veränderlichen Sterne bietet durch ihren Lichtwechsel die Möglichkeit, eine Reihe wichtiger physikalischer Daten für den Stern zu ermitteln. Es sind das die sog. Bedeckungsveränderlichen, deren ältester und am eingehendsten untersuchter Vertreter der Stern β Persei oder Algol ist. Bei diesen Sternen handelt es sich um enge Doppelsterne, deren Bahnen eine geringe Neigung gegen die Gesichtslinie haben, so daß zeitweise eine Überdeckung des einen Sterns durch den anderen für den Beobachter eintritt. Es liegt hier die Möglichkeit vor, das Verhältnis der Radien der beiden Sterne und deren Helligkeiten getrennt zu bestimmen; außerdem ist es prinzipiell möglich, die große Achse der relativen Bahn, die Exzentrizität, die Länge des Periastrons, die Neigung der Bahnebene gegen die Gesichtslinie, die Umlaufszeit und den Moment der Konjunktion zu ermitteln. Nur die Länge des Knotens der Bahn, oder die Lage der Schnittlinie derselben mit der Tangentialebene an die Himmelskugel muß unbestimmt bleiben, solange die beiden Komponenten nicht getrennt sichtbar sind. Unsere Kenntnis der Bahnelemente von Doppelsternen konnte durch diese engen Paare erweitert werden; doch die Sicherheit der Bahnbestimmung von Bedeckungsveränderlichen ist von der Sicherheit der *photometrischen Elemente,* der Leuchtkräfte und der Radien, abhängig, und diese sind bei der relativen Ungenauigkeit photometrischer Beobachtungen auch nur sehr unsicher abzuleiten.

---

225) Astr. Nachr. 195 (1913), p. 449.

Eine andere Ursache für die Unsicherheit in der Ableitung der photometrischen Elemente liegt im Problem selbst. Die Sterne sind bei dem geringen Abstande sicherlich nicht mehr als Gas*kugeln* aufzufassen, sondern als mehr oder weniger in der Richtung ihrer Verbindungslinie verlängert; in der Projektion müssen sie uns als Ellipsen oder Ovale erscheinen. Nach der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten müssen wir dreiachsige Ellipsoide erwarten. Es kommen also neue, die Abplattung der beiden Sterne charakterisierende Parameter hinzu, die bestimmt werden müssen. Außerdem ist die Lichtverteilung auf den Scheiben der Sterne wohl kaum als gleichmäßig anzunehmen und somit auch die Randverdunkelung, durch ein oder mehrere Parameter charakterisiert, mitzubestimmen.

H. N. Russell[226]) hat das Problem der Auswertung der beobachteten Lichtkurven bis zur Bestimmung aller genannten photometrischen Konstanten neben den Bahnelementen in äußerst knapper und doch so vollständiger Weise gelöst, wie die Genauigkeit der Beobachtungen es erfordert. Seine Methoden sind an ca. 100 Bedeckungsveränderlichen erprobt. Wir wollen ihre Grundgedanken mit den Bezeichnungen des Autors wiedergeben. Die zu bestimmenden Elemente sind:

Bahnelemente

a große Halbachse,
e Exzentrizität,
ω Länge des Periastrons,
i Neigung der Bahn gegen die Gesichtslinie,
P Umlaufszeit,
t_0 Zeit der Hauptkonjunktion.

Photometrische Elemente

r_1 Radius des größeren Sterns,
r_2 Radius des kleineren Sterns,
L_1 Die Helligkeit des größeren Sterns,
L_2 Die Helligkeit des kleineren Sterns.
Die anderen, die Abplattung und Randverdunkelung bestimmenden Parameter werden später eingeführt.

Die Sterne sind also zunächst als Kugeln von konstanter Helligkeit aufgefaßt. Als Einheit der Helligkeit wird die Summe $L_1 + L_2$ angenommen, also die Helligkeit des Systems außerhalb der Bedeckung, wenn beide Scheiben getrennt sind.

Man beginnt die Rechnung unter der weiteren vereinfachenden Annahme, daß die Bahn kreisförmig ist, und hat dann zunächst nur vier Elemente zu bestimmen, wenn man für die Längeneinheit den Radius der Kreisbahn annimmt und die Radien der Sterne in derselben ausdrückt. Es ist dann zu bestimmen:

---

226) Contributions from the Princeton University Observatory Nr. 3 (1915) und Astroph. Journ. 35 (1912), p. 333; 36 (1912), p. 243, 390.

Bahnelemente	Photometrische Elemente
i die Neigung	r_1 Radius des größeren Sterns,
(die Periode P und die Konjunktionszeit t_0 können der Lichtkurve direkt entnommen werden)	k das Verhältnis der Radien $r_2 : r_1$, L_1 die Helligkeit des größeren Sterns $(L_2 = 1 - L_1)$ (1)
$(\alpha = 1)$.	

Bei den gemachten Voraussetzungen werden die beiden Minima der Lichtkurve (das Hauptminimum entspricht der Bedeckung des helleren Sternes)

1. eine vollkommen symmetrische Form haben;

2. wird ihr Abstand der halben Periode des Lichtwechsels gleich sein.

3. Wenn die Bedeckung eine vollständige oder eine ringförmige ist, muß die Lichtkurve im Minimum so lange horizontal verlaufen, als die vollkommene Bedeckung oder die ringförmige Phase anhält. Ist dagegen die Bedeckung nur partiell, so wird es diese Konstanz im Minimum nicht geben.

4. Beide Minima müssen von gleicher Dauer sein, aber im allgemeinen von verschiedener Tiefe. Wenn bei irgendeiner Phase ein Stern einen Teil des anderen bedeckt, so muß nach einem halben Umlauf der andere Stern eine ebenso große Fläche des ersten bedecken, nicht aber denselben Bruchteil seiner Gesamtfläche, da die Sterne verschiedene Durchmesser haben. Bezeichnen l_1 und l_2 die Helligkeiten des Systems in zwei voneinander um eine halbe Periode verschiedenen Phasen, so ist also

$$l_1 = 1 - aL_2 \tag{2}$$

und

$$l_2 = 1 - k^2 a L_1, \tag{3}$$

wo a den Bruchteil der vom zweiten Stern bedeckten Fläche und $k^2 a$ den Bruchteil der vom ersten Stern bedeckten Fläche bedeuten, wobei k das Verhältnis der Radien ist. Hieraus folgt die Gleichung

$$1 - l_1 + \frac{1 - l_2}{k^2} = a(L_1 + L_2) = a. \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt auch für die konstanten Helligkeiten während der Minima, wobei $a = 1$. Sind die Helligkeiten dann λ_1 und λ_2, so ist

$$k^2(1 - \lambda_1) - k^2 = \lambda_2 - 1$$

und

$$k^2 = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1}. \tag{5}$$

Außerdem haben wir nach (2)

$$\lambda_1 = 1 - L_2 = L_1.$$

Es bleibt also nur noch r_1 und i zu bestimmen.

5. In dem öfters eintretenden Falle, daß das Hauptminimum eine konstante Helligkeit aufweist, das schwache Nebenminimum eine solche nicht mit Sicherheit abzulesen gestattet, können wir aus den Gleichungen (2) und (3) folgern: wenn die Helligkeit im Hauptminimum durch λ bezeichnet wird und wenn die Bedeckung im Hauptminimum eine volle ist,

$$L_2 = 1 - \lambda,$$

und wenn sie eine ringförmige ist,

$$k^2 L_1 = 1 - \lambda.$$

In jedem Falle ist für jede der Kurve entnommene Helligkeit l die Gleichung erfüllt

$$a = \frac{1 - l}{1 - \lambda}, \tag{6}$$

und wir erhalten so aus der Lichtkurve a als Funktion der Zeit und haben dann noch k, r_1 und i zu bestimmen.

6. Sind beide Minima beobachtet, zeigen aber keine konstante Helligkeit, so ist die Bedeckung eine partielle. Die Helligkeiten im Minimum seien λ_1 und λ_2; bezeichnet a_0 den entsprechenden Wert von a, so ist jedenfalls die Gleichung (4) gültig:

$$a_0 = 1 - \lambda_1 + \frac{1 - \lambda_2}{k^2}. \tag{7}$$

Da außerdem

$$a_0 = \frac{1 - \lambda_1}{L_2},$$

so können wir a_0 als Unbekannte an Stelle von L_1 annehmen und haben dann vier Größen r_1, i, k und a_0 mit Hilfe der Intensitätskurve und der Gleichung (7) zu bestimmen.

7. Wenn die Bedeckung partiell ist und das zweite Minimum zu schwach, um entdeckt werden zu können, haben wir die vorige Aufgabe, aber ohne die Gleichung (7) zu lösen.

49. Die Lösung des Problems für den Fall einer totalen Bedeckung nach H. N. Russell. Nimmt man das Zentrum des größeren Sternes als Anfangspunkt und zählt die Längen Θ des kleineren Sternes in seiner Bahn vom Momente der unteren Konjunktion t_0, so ist

$$\Theta = \frac{2\pi}{P}(t - t_0). \tag{8}$$

Man kann also mit Hilfe der Gleichung (6) a, das aus der Lichtkurve als Funktion der Zeit bekannt ist, auch als Funktion von Θ darstellen. Nun ist a, der Bruchteil des kleineren Sternes, der bedeckt ist, eine Funktion der Radien beider Sterne und des Abstandes ihrer Zentren;

dabei können nur die Verhältnisse dieser Größen in die Funktion eingehen, weil alle im selben Verhältnis verändert werden können. Ist δ der scheinbare Abstand der Zentren, so haben wir

$$a = f\left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{\delta}{r_1}\right) = f\left(k, \frac{\delta}{r_1}\right),$$

wo die Funktion f leicht zu berechnen ist. Wir können die letzte Gleichung in bezug auf $\frac{\delta}{r_1}$ auflösen und auch schreiben

$$\frac{\delta}{r_1} = \varphi(k, a). \tag{9}$$

Russell gibt eine Tabelle dieser Funktion für verschiedene Werte von k und a.

Nun folgt aus geometrischen Betrachtungen, daß der scheinbare Abstand der Zentren der Gleichung genügt:

$$\delta^2 = \sin^2\Theta + \cos^2 i \cos^2\Theta = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2\Theta, \tag{10}$$

woraus folgt

$$\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2\Theta = r_1^2\{\varphi(k, a)\}^2. \tag{11}$$

Denken wir uns aus der Lichtkurve drei Werte a_1, a_2, a_3 mit Hilfe von Gleichung (6) berechnet, und es seien Θ_1, Θ_2, Θ_3 die entsprechenden Werte von Θ. Subtrahiert man die drei Gleichungen (11) zu je zweien voneinander und dividiert die Ergebnisse, so findet man

$$\frac{\sin^2\Theta_1 - \sin^2\Theta_2}{\sin^2\Theta_2 - \sin^2\Theta_3} = \frac{\{\varphi(k, a_1)\}^2 - \{\varphi(k, a_2)\}^2}{\{\varphi(k, a_2)\}^2 - \{\varphi(k, a_3)\}^2} = \psi(k, a_1, a_2, a_3). \tag{12}$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält nur bekannte Größen, die rechte ist eine Funktion von k allein. Auch diese Funktion hat *Russell* tabuliert für vorgegebene Werte von $a_2 = 0{,}6$ und $a_3 = 0{,}9$ nach zwei Argumenten a_1 und k. Mit Hilfe dieser Tafel kann k leicht gefunden werden. Bezeichnet man

$$\sin^2\Theta_2 = A \quad \text{und} \quad \sin^2\Theta_2 - \sin^2\Theta_3 = B,$$

so wird aus (12)

$$\sin^2\Theta_1 = A + B\psi(k, a_1). \tag{13}$$

Diese Formel kann zur theoretischen Konstruktion der Lichtkurve bei bekanntem k für beliebige Werte von a_1 benutzt werden.

Die übrigen Elemente findet man dann aus der Gleichung (10), die man für die Momente der äußeren und der inneren Berührung der Sternscheiben in der Form

$$\begin{cases} r_1^2(1 + k)^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2\Theta' \\ r_1^2(1 - k)^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2\Theta'' \end{cases} \tag{14}$$

schreiben kann, weil für diese Momente $\delta = r_1 + r_2$ und $\delta = r_1 - r_2$

ist. Θ' und Θ'' sind die der äußeren und inneren Berührung entsprechenden Werte der Länge und können aus zwei Gleichungen (13) für die Werte $k = 0$ und $k = 1$ mit Hilfe der Tafel der Funktion ψ berechnet werden.

Die Entscheidung darüber, ob das Hauptminimum einer totalen oder einer ringförmigen Bedeckung entspricht, kann mit Hilfe des Nebenminimums getroffen werden.

50. Partielle Bedeckungen. Wenn das Nebenminimum nicht beobachtet ist, so wird die Aufgabe der Bestimmung der Bahnelemente in den meisten Fällen zu einer unbestimmten[227]); ist aber zum mindesten die Tiefe des Nebenminimums ablesbar, so wird eine Lösung möglich. Bezeichnet a_0 den maximalen Lichtverlust im Hauptminimum, so ist nach (13)

$$A + B\psi(k, a_0) = 0, \tag{15}$$

weil für die Konjunktion $\Theta = 0$ ist. Für irgendeinen Bruchteil n des maximalen Lichtverlustes haben wir dagegen die Gleichung

$$A + B\psi(k, n a_0) = \sin^2 \Theta_n. \tag{16}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander und dividiert durch eine ähnliche Gleichung, in der n den festen Wert $\frac{1}{2}$ hat, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\sin^2 \Theta_n}{\sin^2 \Theta_{\frac{1}{2}}} = \frac{\psi(k, n a_0) - \psi(k, a_0)}{\psi(k, \frac{1}{2} a_0) - \psi(k, a_0)} = \chi(k, a_0, n), \tag{17}$$

welche die Funktion $\chi(k, a_0, n)$ definiert, die von *Russell* mit den Argumenten k und a_0 für verschiedene Werte von n ebenfalls tabuliert ist.

Es erweist sich, daß es für gleichmäßig helle Scheiben genügt, eine dieser Funktionen χ z. B. für den Wert $n = \frac{1}{4}$ zu berechnen, weil sie alle mit großer Annäherung lineare Funktionen voneinander sind, so daß

$$\chi(k, a_0, n) = \omega_1(n) + \omega_2(n)\,\chi(k, a_0, \tfrac{1}{4}). \tag{18}$$

Wir erhalten darum aus (17)

$$\sin^2 \Theta_n = \omega_1(n) \sin^2 \Theta_{\frac{1}{2}} + \omega_2(n) \sin^2 \Theta_{\frac{1}{4}}, \tag{19}$$

denn es ist

$$\chi(k, a_0, \tfrac{1}{4}) = \frac{\sin^2 \Theta_{\frac{1}{4}}}{\sin^2 \Theta_{\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

Die empirische lineare Beziehung für die χ-Funktionen gibt uns die Möglichkeit, die Funktionen $\omega_1(n)$ und $\omega_2(n)$ selbst zu tabulieren und

---

227) Eine Ausnahme bildet der Fall, wenn das Minimum sehr tief ist, z. B. der Fall von Y Piscium. Astroph. Journ. 37 (1913), p. 157.

dann die Gleichung (19) zu benutzen, um möglichst viele Punkte der Verfinsterungskurve zur Bestimmung von $\sin^2\Theta_{\frac{1}{2}}$ und $\sin^2\Theta_{\frac{1}{4}}$ heranzuziehen; aus ihnen wird dann der Wert von $\chi(k, a_0, \frac{1}{4})$ abgeleitet. Die Gleichung (20) gibt dann die erste Beziehung zwischen k und a_0. Die zweite erhalten wir, wenn die Tiefe des sekundären Minimums gemessen ist, aus der Gleichung (7), in der λ_1 dasjenige Minimum ist, das der Bedeckung des kleineren Sternes entspricht. Mit Hilfe der Tabelle der Werte von $\chi(k, a_0, \frac{1}{4})$ und der Gleichungen (7) und (20) erhält man dann k und a_0. Die übrigen Elemente erhalten wir aus der ersten Gleichung (14), den Gleichungen (11) und (7):

$$\cos^2 i \cos^2\Theta' + \sin^2\Theta' = r_1^2(1+k)^2,$$

$$\cos^2 i = r_1^2\{\varphi(k, a_0)\}^2$$

und

$$\frac{1-\lambda_1}{a_0} = L_2 = 1 - L_1.$$

51. Der Einfluß der Randverdunkelung. Nur für die Sonne kann der Grad der Verdunkelung der Scheibe vom Zentrum nach dem Rande durch direkte Messungen bestimmt werden. Wie wir im zweiten Kapitel gesehen haben, läßt sich die Randverdunkelung der Sonne sehr nahe durch die Formel

$$J = J_0(1 + \mu\cos\gamma)$$

darstellen, wo J_0 die Intensität im Zentrum und γ den Winkel der austretenden Strahlen mit der Normalen bedeutet. Der Koeffizient μ hat freilich nicht genau den aus der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes folgenden Wert. Dieser Wert ist übrigens für die einzelnen Wellenlängen verschieden. Die Beobachtungen der Bedeckungsveränderlichen sind nicht genau genug, um mehr als eine Konstante der Randverdunkelung der Sterne abzuleiten, und *Russell* hat in seiner Methode der Auswertung der Bedeckungskurven nur diese Möglichkeit vorgesehen.

Bei Sternen mit Randverdunkelung kann es natürlich keine konstante Helligkeit während der Minima geben; der Beginn und das Ende der Verfinsterung muß flacher verlaufen als im Falle gleichmäßig heller Scheiben, dagegen muß die Mitte des Abfalls steiler sein, wenn die Verfinsterung eine zentrale ist. *Russell* bestimmt die Randverdunkelung durch einen Koeffizienten x in der Formel

$$J = J_0(1 - x + x\cos\gamma), \tag{21}$$

der für gleichmäßig helle Scheiben verschwindet und bei dem anderen Grenzwerte $x = 1$ einer vollkommenen Randverdunkelung proportional $\cos\gamma$ entspricht. Er gibt eine Methode der Bestimmung der Bedeckungsund Bahnkonstanten bei der Annahme vollkommener Randverdunkelung ($x = 1$), die neben der oben besprochenen (für $x = 0$) durchgeführt werden muß, um über den Vorzug einer der Annahmen zu entscheiden und den wahren Wert von x abzuschätzen. Die Methode ist fast genau der eben besprochenen angepaßt. Der Bruch a, der im Falle gleichmäßiger Helligkeit den bedeckten Teil der ganzen scheinbaren Fläche des kleineren Sternes bedeutet, wird jetzt anders definiert; er bedeutet den Lichtverlust in Einheiten desjenigen Lichtverlustes, der im Moment der inneren Berührung der Scheiben stattfindet. Die Einheit, in der a ausgedrückt ist, ist deshalb anders für die Haupt- und die Nebenbedeckung. An Stelle der Gleichung (7) tritt jetzt eine andere von der Form

$$Q(k, a_0') = \frac{1 - \lambda_2}{a_0' - (1 - \lambda_1)}, \tag{22}$$

wo a' der genannte Bruch ist im Falle, daß der kleinere Stern bedeckt wird, und wo die Funktion $Q(k, a_0')$ durch diese Gleichung und die Bedingung definiert ist, daß sie für gleichmäßig helle Scheiben und für gleiche Radien der Sterne ($k = 1$) gleich k^2 wird. Diese Funktion tritt im Falle der Randverdunkelung an Stelle der Konstanten k bei gleichmäßig hellen Scheiben; sie ist von *Russell* für angemessene Werte von a_0 und k tabuliert. Die übrigen Formeln für die Bestimmung der Konstanten bleiben dieselben, nur müssen andere Tafeln der Funktionen $\varphi(k, a)$, $\psi(k, a)$ und $\chi(k, a, n)$ benutzt werden.

Da eine konstante Helligkeit im Minimum in diesem Falle fehlt, so ist es aus der Bedeckungskurve in vielen Fällen unmöglich zu entscheiden, ob eine partielle Bedeckung gleichmäßig heller oder eine ringförmige Bedeckung randverdunkelter Scheiben vorliegt. Ganz unbestimmt wird die Lösung, wenn die Tiefe des sekundären Minimums nicht abzulesen ist. Aber auch wenn das der Fall ist, müssen öfters beide Lösungen als gleichwertig angesehen werden, wobei dann die Lösung für gleichmäßig helle Scheiben den größeren Stern größer, den kleineren kleiner ergibt, als die Lösung bei der Annahme totaler Randverdunkelung. Entsprechend sind die Folgerungen über die Dichte der beiden Komponenten, die man aus den Radien und Helligkeiten ableiten kann, nicht unwesentlich verschieden.

52. Bestimmung der Abplattung. Bei gewissen Bedeckungsveränderlichen, wie β Lyrae, weist die Lichtkurve auch außerhalb der Bedeckung keine Konstanz auf und ist in der Mitte zwischen den beiden Minima höher als beim Beginn der Verfinsterung. Diese Erscheinung wird durch die ellipsoidische Form der Komponenten erklärt, wobei man nach *Darwins*[228]) theoretischen Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten annimmt, daß die Sterne dreiachsige Ellipsoide sind, deren größte Achse in der Verbindungslinie der beiden Sterne liegt. Wenn auch die Sterne nicht als inkompressible Flüssigkeiten anzusehen sind, so bestätigen *Jeans*[229]) Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Gasmassen im allgemeinen die Ergebnisse von *Darwin. H. N. Russell* legt jedenfalls seinen Betrachtungen über die Formen der Komponenten der Algol-Veränderlichen die numerischen Ergebnisse von *Darwin* zugrunde.

Wie schon *A. Roberts*[230]) nachgewiesen hat, ist es unmöglich, aus der Bedeckungskurve die Abplattung der Ellipsoide in der Richtung senkrecht zur Bahnebene, in der die großen Achsen derselben liegen, zu bestimmen, obgleich das Vorhandensein einer solchen infolge der Rotation der Sterne mit Sicherheit anzunehmen ist. Nach *Darwin* ist für nahezu sphärische Figuren, wenn α und β die große und die kleine Halbachse des in der Bahnebene liegenden Schnittes bedeuten, die kleinste Achse der Figur γ durch die Gleichung bestimmt:

$$\beta - \gamma = \tfrac{2}{3}(\alpha - \beta).$$

Für starke Abplattungen hat *Russell Darwins* Ergebnisse für gleiche, homogene, inkompressible Massen durch empirische Formeln dargestellt:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1 - 4{,}4\,\alpha^3}{1 + 3{,}1\,\alpha^3}; \quad \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{1 - 3{,}4\,\alpha^3}{1 + 8{,}6\,\alpha^3}. \tag{23}$$

Es wäre somit möglich, aus den Werten zweier Achsen die dritte zu berechnen, was aber bei der Abweichung der Wirklichkeit von den *Darwin*schen Modellen jedenfalls sehr bedenklich erscheint.

Wenn die Komponenten von gleicher Masse und Dichte sind, so werden sie auch die gleiche Form haben, sonst wird die kleinere Masse die mehr verlängerte Figur besitzen, wenn sie nicht die größere an Dichte stark übersteigt. Bei der Berechnung der Abplattung aus der Lichtkurve ist man gezwungen, die Komponenten als ähnliche Figuren, also von gleicher Abplattung aufzufassen.

Die Gesichtslinien nach den Oberflächen der beiden Ellipsoide bilden zwei elliptische Zylinder mit parallelen Achsen, die sich während der Bedeckung teilweise durchdringen. Die scheinbaren Scheiben sind die Schnitte der Zylinder durch eine zur Achse senkrechte Ebene. Schneidet man dieselben durch eine andere Ebene, so erhält man

228) Philosoph. Transactions (A) 206 (1906), p. 160—248.

229) Philosoph. Transactions (A) 213 (1914), p. 457.

230) Monthly Not. 63 (1903), p. 528.

Ellipsen, deren Flächen in einem bestimmten Verhältnis zu den scheinbaren Scheiben stehen, so daß auch diese geneigten Schnitte bei der Berechnung der Lichtmenge, die der Beobachter erhält, benutzt werden können. Wählt man die Ebene der relativen Bahn als Grundfläche, so kann man sich zwei Sternsysteme denken, von denen eins aus dem anderen durch eine Vergrößerung in konstantem Verhältnis aller Koordinaten, die senkrecht zur Bahnebene stehen, entsteht (die Koordinaten parallel zur Grundebene bleiben unverändert). Die Flächen in der Bahnebene, die nach dem vorigen als Maß der Lichtmenge des Systems dienen können, sind in beiden Fällen identisch. Wir müssen also bei richtiger Wahl der angenommenen Oberflächenhelligkeit der Sterne in beiden Fällen identische Lichtkurven erhalten. Die beiden Systeme von Elementen werden sich nur durch die Polarachse der beiden Ellipsoide und die Tangenten des Winkels zwischen der Bahnebene und der Gesichtslinie unterscheiden, die in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen werden. Man kann dieses Verhältnis sich so gewählt denken, daß unsere dreiachsigen Ellipsoide sich in Rotationsellipsoide verwandeln, deren große Achse in die Verbindungslinie der Zentren beider Sterne fällt.

Solche Rotationsellipsoide sind es, deren Achsen *Russell* aus der Lichtkurve bestimmt, um aus ihnen dann mit Hilfe der Formel (23) den Wert der Polarachse theoretisch abzuschätzen.

Es seien α_1, β_1 die große und die kleine Achse des größeren Sphäroides und ε die Exzentrizität seines Meridianschnittes; die Achsen des kleineren Sternes seien $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\beta_2 = k\beta_1$. Beide Sterne werden als elliptische Scheiben erscheinen, deren große Achsen mit der Verbindungslinie der Zentren zusammenfallen. Die kleinen Achsen werden immer β_1 und β_2 sein, die großen Achsen aber scheinbar im allgemeinen kleiner als α_1 und α_2. Wenn ihre Werte für irgendeinen Moment d_1 und d_2 sind und φ der Winkel zwischen der Verbindungslinie der Zentren und der Gesichtslinie, so ist

$$d_1^2 = \alpha_1^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi), \quad d_2 = kd_1;$$

da aber bei unseren alten Bezeichnungen

$$\cos\varphi = \sin i \cos\Theta,$$

so folgt, daß

$$d_1^2 = \alpha_1^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2\Theta). \tag{24}$$

Wenn der scheinbare Abstand der Zentren δ ist, so kann bei $\delta > (1+k)d_1$ keine Bedeckung stattfinden, und wenn $\delta < (1-k)d_1$, so wird die Bedeckung total sein. Zwischen diesen Grenzen ist die Bedeckung partiell.

Wenn wir die Dimensionen der scheinbaren Ellipsen senkrecht zur Verbindungslinie der Zentren, d. h. in der Richtung ihrer kleinen Achsen in bestimmtem Verhältnis verändern, so ändert sich dabei nicht das Verhältnis der bedeckten Flächen. Wählt man den Vergrößerungsfaktor zu $d_1 : \beta_1$, so macht man die Scheiben kreisförmig von den Radien d_1 und kd_1. Dann haben wir die Verhältnisse für kreisförmige Scheiben und damit die Gleichung (9)

$$\delta = d_1 \varphi(k, a),$$

wo a der Bruchteil der kleineren Scheibe ist, der bedeckt ist. Die Lichtmengen l_1 und l_2 von den beiden Sternen sind aber jetzt nicht konstant, sondern ändern sich mit dem Winkel φ, und wenn L_1 und L_2 ihre maximalen Werte bedeuten, die bei $\Theta = 90^0$ erreicht werden, so ist

$$\frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2} = \frac{d_1}{\alpha_1} = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus folgt für l, den Betrag des Lichtes, der den Beobachter wirklich erreicht:

$$(25)\quad l = l_1 + (1 - a) l_2 = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} [L_1 + (1 - a) L_2].$$

Wenn $\varepsilon = 0$ ist, erhalten wir die Formel für sphärische Sterne.

Wir bezeichnen noch

$$(26)\qquad \varepsilon^2 \sin^2 i = z.$$

Es gilt nun die Konstante z der Abplattung aus der Lichtkurve zu bestimmen. *Russell* macht das in folgender höchst einfachen Weise. Da außerhalb der Bedeckung der zweite Faktor in Gleichung (25) konstant bleibt, so muß die Neigungstangente der Geraden

$$(27)\qquad l^2 = (1 - z \cos^2 \Theta) K,$$

die man erhält, wenn man l^2 mit dem Argument $\cos^2 \Theta$ aufträgt, den gesuchten Wert von z ergeben. Die Methode scheint zu versagen, wenn die Sterne während der Elongationen in wirklicher Berührung sind. In diesem Falle nimmt *Russell* die Tangente zu der Kurve (27) im Punkte $\cos^2 \Theta = 0$.

Wenn z bekannt ist, wird 'der Einfluß der Abplattung auf die Kurve dadurch eliminiert, daß man die beobachteten Helligkeiten von dem Faktor $(1 - z^2 \cos^2 \Theta)$ befreit. Dadurch wird die Lichtkurve „rektifiziert" und die Aufgabe auf den Fall kreisförmiger gleichmäßig heller Scheiben reduziert.

Auch den Einfluß der totalen Randverdunkelung bei abgeplatteten Komponenten hat *Russell* näherungsweise in Rechnung gezogen, wobei die eben beschriebene Methode der „Rektifizierung" der Lichtkurve dieselbe bleibt und auch die Bestimmung der Elemente der Bedeckung keine Änderung erleidet. Es wird nun statt der Größe $z = \varepsilon^2 \sin^2 i$ eine andere Konstante Z in der Gleichung $l = 1 - Z \cos^2 \Theta$ benutzt, wobei zwischen Z und z eine einfache numerische Beziehung besteht:

$$z = \tfrac{5}{4} Z - \tfrac{5}{28} Z^2.$$

Die dieser Gleichung zugrundeliegende Theorie gilt für die maximale Randverdunkelung bei einer Reihe vereinfachender Voraussetzungen, die hier nicht diskutiert werden sollen.

53. Der Einfluß der gegenseitigen Beleuchtung der Komponenten. Bei der großen Nähe der Komponenten muß infolge der Zustrahlung eine ungleichmäßige Beleuchtung der einander zugewandten und der abgewandten Hälften der beiden Sterne eintreten, was eine weitere Komplizierung des Problems zur Folge hat. Einen direkten Beweis der genannten Erscheinungen fand *Dugan*[231]) in den Fällen von RT Persei und Z Draconis und *Stebbins*[232]) in der Lichtkurve von Algol. Es gibt nur sehr wenig andere Sterne, deren Kurven zwischen den Minima genügend genau bekannt wären, um den genannten Einfluß zu zeigen, der jedenfalls nur einige Prozent in der Helligkeit der Komponenten ausmachen kann. Wahrscheinlich ist der Zuwachs der Helligkeit durch Zustrahlung geringer als der Helligkeitsabfall infolge allgemeiner Randverdunkelung.

Wenn die Lichtmenge, die wir von der dunkleren, von der anderen Komponente abgewandten Seite des größeren Sternes erhalten würden, $l_1 - c_1$ und die von der helleren Seite $l_1 + c_1$ wäre, so würde die Bahnbewegung des unverdeckten Sternes eine Lichtvariation von der Form

$$l = l_1 - c_1 \sin i \cos \Theta$$

zur Folge haben, bei der das Minimum bei $\Theta = 0$ eintritt, wenn der Begleiter sich hinter dem Hauptsterne befindet. Für den kleineren Stern hätte man in ähnlicher Weise

$$l = l_2 + c_2 \sin i \cos \Theta.$$

Für das ganze System hätten wir

$$l = l_1 + l_2 + (c_2 - c_1) \sin i \cos \Theta. \tag{28}$$

Die Größen c sind proportional dem Überschuß an Licht, das jeder Stern in der Richtung nach dem anderen ausstrahlt; wir können annehmen, daß sie auch proportional sind der Energiemenge, die jede

231) Publications of the Astr. and Astroph. Society of America 1 (1908), p. 311 und 1 (1909), p. 320.

232) Astroph. Journ. 32 (1910), p. 200.

der Komponenten von dem Nachbarstern erhält; dann sind diese Größen umgekehrt proportional den Oberflächenhelligkeiten der beiden Sterne. Bei kreisförmigen Bahnen ist das letztgenannte Verhältnis gleich dem Verhältnis der Lichtverluste in den beiden Minima; wir haben daher

$$c_1(1-\lambda_1) = c_2(1-\lambda_2). \tag{29}$$

Die Helligkeit des Systems ist darum gleich nach dem Nebenminimum größer als nach dem Hauptminimum, was in Einklang mit der Beobachtung ist. Wenn die beiden Minima von gleicher Tiefe sind, dürfte kein solcher Effekt zu erwarten sein und ist auch tatsächlich nicht beobachtet worden. Es ist zu erwarten, daß dort, wo die genannte Erscheinung auftritt, auch eine kleine Abplattung der Sterne sich offenbart. Da aber die letztere einen symmetrischen Einfluß um den mittleren Punkt zwischen den Minima haben muß, die erstgenannte aber ihr Zeichen wechselt, so bietet es keine Schwierigkeit, die beiden Einflüsse zu trennen. *Russell* bestimmt den Einfluß der Reflexion auf die logarithmische Helligkeitskurve durch die genäherte Formel

$$\Delta m = -1{,}08(c_2 - c_1)\sin i \cos\Theta.$$

Aus solchen Punkten der Kurve außerhalb der Bedeckung, in denen $\cos\Theta$ gleiche Werte von umgekehrtem Zeichen hat, findet er $(c_2 - c_1)\sin i$, und da $\sin i$ immer gleich 1 gesetzt werden kann, findet sich c_1 und c_2 mit Hilfe von (29).

54. Der Periastron-Effekt. Bei einigen Sternen, wie RT Persei und W Crucis, mit elliptischen Bahnen ist die beobachtete Helligkeit im Periastron und im Apastron verschieden als Folge einer stärkeren Ausdehnung der Flutwelle bei größerer Annäherung der Sterne. Angenähert kann dieser Einfluß durch eine Sinuswelle von der Form

$$\Delta m = \alpha\cos\Theta + \beta\sin\Theta$$

dargestellt werden. Das erste Glied dieses Ausdruckes vermischt sich mit dem Einfluß der Reflexion. Das Glied $\beta\sin\Theta$ verursacht einen Unterschied in den Helligkeiten während der beiden Minima und kann aus demselben abgeleitet werden.

55. Die Dichte der Komponenten. Die Anwendung des dritten *Kepler*schen Gesetzes auf die relative Bahn gibt uns die Möglichkeit, bei der Annahme einer bestimmten Verteilung der Gesamtmasse des Systems zwischen den Komponenten die Dichten derselben in Einheiten der Sonnendichte zu bestimmen. Wenn die Gesamtmasse durch m, diejenige des größeren Sternes durch mx bezeichnet wird, so hat der kleinere Stern die Masse $m(1-x)$. Wenn a die große Halbachse der relativen Bahn ist, so haben wir $\alpha = k^2 m^{\frac{1}{3}} P^{\frac{2}{3}}$. Die Konstante k ist von den Einheiten abhängig, und wenn wir die Sonnenmasse, den Sonnenradius und den Tag als Einheiten wählen, so würde für die Erdbahn $\alpha = 214{,}9$, $P = 365{,}24$ sein und k wird dann $k = 4{,}206$. In unserer Bahnbestimmung war α die Einheit der Länge; es ist daher der Radius des größeren Sternes αr_1 und sein Volumen in Einheiten des Sonnenvolumens $k^3 m P^2 r_1^3$ oder $74{,}4 m P^2 r_1^3$. Hieraus ergibt sich seine Dichte zu $\varrho_1 = 0{,}01344 x P^{-2} r_1^{-3}$; ähnlich ist die Dichte des kleineren Sternes $\varrho_2 = 0{,}01344\,(1 - x) P^{-2} r_2^{-3}$.

Nun ist es bekannt, daß sowohl bei den visuellen als bei den spektroskopischen Doppelsternen der hellere Stern im allgemeinen die größere Masse hat, und zwar liegen die Werte zwischen 0,36 und 0,78 für die Masse des helleren Sternes und zwischen 0,64 und 0,22 für den schwächeren. *Russell* hält diese Unterschiede für nicht so bedeutend, als daß die Annahme gleicher Massen der Komponenten ($x = 0{,}5$) für die Berechnung der Dichten nicht zulässig wäre, und rechnet diese somit nach der Formel

$$(30) \qquad \varrho_1 = 0{,}00672 P^{-2} r_1^{-3}; \quad \varrho_2 = 0{,}00672 P^{-2} r_2^{-3},$$

die als durchschnittliche Dichte beider Sterne als wichtige physikalische Konstante der Bedeckungsveränderlichen bestimmt wird.

56. Statistische Ergebnisse. Nach den hier entwickelten Methoden von *H. N. Russell* sind von ihm selbst und von seinen Mitarbeitern *H. Shapley*, *R. S. Dugan* u. a. eine große Reihe von Bedeckungsveränderlichen bearbeitet worden. Die Reduktion der Lichtkurven von 90 Veränderlichen, für die Beobachtungen in genügender Anzahl von verschiedenen Beobachtern gesammelt waren, ist hier mit aller erdenklichen Sorgfalt ausgeführt, und es ist versucht worden, den Einfluß aller in der Theorie behandelten Effekte aus ihnen zu bestimmen. Die Lichtkurven sind je nach den Beobachtungsmethoden und der Anzahl der Messungen von sehr verschiedener Genauigkeit; entsprechend ist auch die Sicherheit der abgeleiteten Konstanten sehr verschieden. Immerhin gestattet das hier erstmalig zusammengestellte große Material wichtige Schlüsse statistischer Art. Eine andere vollständige Zusammenfassung aller Ergebnisse über Bedeckungsveränderliche (im Ganzen 346 Systeme) ist in neuester Zeit von *S. Gaposchkin* geliefert worden. Sie enthält 82 vom Verfasser selbst berechnete Sterne. Wir können neben dem Werke von *Shapley*[233]) auch diese Statistik berücksichtigen.

233) Contributions of the Princeton Univ. Observatory Nr. 3 (1915) und *S. Gaposchkin*, Die Bedeckungsveränderlichen. Veröffentl. der Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg Bd. IX, H. 5 (1932).

a) *Die Randverdunkelung.* Mehr als 20 Sterne des Katalogs von *Shapley* zeigen eine konstante Helligkeit im Hauptminimum. Diese ist aber nicht durch eine ringförmige Bedeckung bei konstanter Helligkeit der Scheibe zu erklären, sondern durch totale Bedeckung. Dagegen sind die vier Fälle ringförmiger Finsternisse alle bei der Annahme der Randverdunkelung besser dargestellt als bei gleichmäßiger Helligkeit der Scheibe des bedeckten Sternes. *Shapley* glaubt, daß eine Randverdunkelung aus theoretischen Gründen immer zu erwarten ist, und es sind alle Bahnen und Elemente sowohl bei der Hypothese einer vollkommenen Randverdunkelung als auch einer gleichmäßigen Helligkeit berechnet, wobei im allgemeinen die Darstellung der Beobachtungen bei der ersten Annahme eine bessere ist. Die Berechnung ist für totale Randverdunkelung durchgeführt. Ein Unterschied der Grade derselben ist nicht gemacht und auch kein Einfluß des Spektraltypus festgestellt. Dieser Einfluß ist nach theoretischen Untersuchungen von *Milne* in dem Sinne zu erwarten, daß die frühen Spektraltypen keine, die späten eine bedeutende Randverdunkelung aufweisen müßten. Auch das neuere Material von *Gaposchkin* zeigt keine ausgesprochene Bestätigung dieser Theorie. Dazu sind die Bahnelemente und photometrischen Konstanten doch noch zu unsicher.

b) *Die relativen Dimensionen der Komponenten.* Die wichtige Frage, die es hier zu entscheiden galt, war, ob die schwächere Komponente tatsächlich immer oder meistens die größere sei, wie das früher auf Grund eines geringfügigen Materials allgemein angenommen wurde. *Shapley* verneint dieses vermeintliche Gesetz. Seine Statistik zeigt, daß die genannte Tatsache wohl ausnahmslos zutrifft, wenn der Helligkeitsabfall im Minimum zwei Gr.kl. und mehr beträgt, bei einem Helligkeitsabfall von einer bis zwei Gr.kl. nur noch in 63% der Fälle, bei einem Helligkeitsunterschied von 0,7 bis zu 1,0 Gr.kl. nur noch in 50% aller Fälle und bei noch kleinerer Helligkeitsschwankung überhaupt nicht mehr. Diese Statistik zeigt deutlich ihre eigene Unvollständigkeit. Entdeckt werden vorwiegend die Sterne mit tiefen Minima, bei denen totale Bedeckungen durch die dunkle größere Komponente die Ursache sind; bei gleich hellen und gleich großen Komponenten ist der Lichtwechsel geringer und bei den Bedeckungen durch schwache und kleine Begleiter sind sie ganz gering, weshalb sie auch selten entdeckt werden.

c) *Die relativen Flächenhelligkeiten der Komponenten.* Eine einwandfreie Feststellung über die Frequenz großer und kleiner Unterschiede der Flächenhelligkeiten der Komponenten ist aus demselben Grunde wie oben, betreffend die relativen Dimensionen, nicht möglich. Wenn für tiefe Minima von mehr als zwei Gr.kl. die Flächenhelligkeitsverhältnisse der Komponenten im Sinne $\frac{\text{hellerer Stern}}{\text{schwächerer Stern}}$ immer größer sind als 12 und oft größer als 30, und wenn dagegen bei einem geringen Helligkeitsminimum, das kleiner ist als $0{,}7^{m}$, das genannte Verhältnis meist kleiner ist als 2 (für dazwischen liegende Zahlen haben wir einen systematischen Gang in demselben Sinne), so ist dieses Ergebnis der *Shapley*schen Statistik mit dem für die Dimensionen gefundenen vollständig konform; dagegen kann die Anzahl der Sterne verschiedener Helligkeitsverhältnisse, wie sie diese Statistik liefert, nicht als ein Bild der wirklichen Verhältnisse angesprochen werden. In den Fällen, wo der Spektraltypus der schwächeren Komponente aus dem Unterschiede der visuellen und photographischen Amplitude des Lichtwechsels bestimmt werden kann, gehört die schwache und große Komponente immer zu einem wesentlich späteren Spektraltypus als die hellere. Der Spektraltypus des helleren Sterns fällt nahezu mit demjenigen des Systems zusammen und ist immer bekannt; der Unterschied der Flächenhelligkeiten ist aus den photometrischen Elementen bestimmbar; da nun zwischen der Flächenhelligkeit und dem Spektraltypus eine eindeutige Beziehung besteht, so kann auch der Spektraltypus der schwächeren Komponente berechnet werden. *Gaposchkin* findet so, daß der schwächeren Komponente mit wenigen Ausnahmen der spätere Spektraltypus entspricht. Die so bestimmten Spektraltypen gestatten nun umgekehrt die Berechnung der Totalhelligkeiten der Komponenten, die schon bekannt sind; es ergeben sich z. T. große Unstimmigkeiten beider Bestimmungen, die aus der Unsicherheit der Radien erklärt werden müssen.

d) *Die Elliptizität und die polare Abplattung.* Unzweideutig tritt die Abhängigkeit der äquatorialen Elliptizität von den Abständen der Komponenten hervor, wie es zu erwarten war. Wenn der Abstand der Oberflächen mehr als die Summe der Radien der Komponenten ausmacht, kann eine Verlängerung der Komponenten in der Bahnebene nur sehr selten festgestellt werden. Von den 90 berechneten Sternen zeigen 25 eine meßbare Elliptizität; doch kann ihre Anzahl noch wesentlich größer sein, denn die Beobachtungen während des Maximums, die zur Ableitung dieser Konstanten notwendig sind, sind wenig zahlreich und die Lichtkurven daher hier nicht genügend gesichert, um ihre Krümmung abzuleiten.

Sehr interessant ist die Zusammenstellung der abgeleiteten Werte von $\frac{\beta}{\alpha}$ mit der Trennung der Oberflächen (definiert als $1-(\alpha_1+\alpha_2)$) und ihr Vergleich mit den von *Darwin* theoretisch für inkompressible

Flüssigkeiten abgeleiteten Werten derselben Größe. Die Tafel von *Shapley* wird hier angeführt, um auch den Unterschied der Werte $\frac{\beta}{\alpha}$, die sich unter der Annahme gleichmäßiger Helligkeit der Scheiben und totaler Randverdunkelung ergeben, zu veranschaulichen.

Tabelle 17.

$1-(\alpha_1+\alpha_2)$	Anzahl der Sterne	$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$	Randverdunkl. $\frac{\beta}{\alpha}$	*Darwin* $\frac{\beta}{\alpha}$
0,501	5	0,971	0,983	0,944
0,399	5	0,900	0,939	0,902
0,320	6	0,838	0,900	0,858
0,196	4	0,809	0,883	0,772
0,106	4	0,700	0,782	0,692

Die theoretischen Werte stimmen besser mit den bei gleichmäßiger Helligkeit erhaltenen $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ überein, sind aber immer kleiner als die beobachteten, was man für gasförmige Massen auch erwarten muß.

Die polare Abplattung oder das Verhältnis $\frac{\gamma}{\alpha}$ ist mit Hilfe einer von *Darwin* berechneten Tabelle, welche die äquatoriale Abplattung $\frac{\beta}{\alpha}$ mit der polaren in Beziehung setzt, von *Russell* ebenfalls berechnet. Seine Werte haben also keine direkte Beobachtungsgrundlage. Je größer die äquatoriale Elliptizität, desto größer ist auch die polare Abplattung, doch sind die Achsen β und γ nur wenig verschieden, im Höchstfalle bei $\frac{\beta}{\alpha}=0{,}76$ ist $\frac{(\beta-\gamma)}{\alpha}=0{,}064$. In *Gaposchkins* Arbeit ist die Statistik der Elliptizitäten nicht wesentlich erweitert; als neues Ergebnis seiner Diskussion ergibt sich eine angedeutete schwache Abnahme der Werte $\frac{\beta}{\alpha}$ mit dem Spektraltypus.

e) *Die hypothetischen Parallaxen und die räumliche Verteilung.* Wir hatten schon Ausdrücke für die Dichten der Komponenten nach *Russell* angeführt (Gl. (30)). Wir schreiben dieselben hier in der Form

$$\varrho_1=(5{,}29\,P^{\frac{2}{3}}\,r_1)^{-3};\quad \varrho_2=(5{,}29\,P^{\frac{2}{3}}\,r_2)^{-3}.$$

Wenn wir noch annehmen, daß die Massen beider Komponenten der Sonnenmasse gleich sind, so wird, wie leicht einzusehen, $5{,}29\,P^{\frac{2}{3}}$ gleich der großen Achse der relativen Bahn in Einheiten des Sonnenradius, und dann sind die Größen

$$\bar{r}_1=5{,}29\,P^{\frac{2}{3}}r_1,\quad \bar{r}_2=5{,}29\,P^{\frac{2}{3}}r_2 \tag{31}$$

die Radien der Sterne in Einheiten des Sonnenradius. Diese Ausdrücke gestatten die Berechnung der absoluten Helligkeit des helleren Sternes und damit auch der Entfernung des Systems, vorausgesetzt, daß der Spektraltypus des helleren Sternes bekannt ist.

Bezeichnet L_1 die Helligkeit der helleren Komponente und m die visuelle Größenklasse des Systems im Maximum, ferner m_1 die Größenklasse des helleren Sternes und M seine absolute Helligkeit, so ist

$$M - m_1 = 5 + 5 \log \pi,$$

wo π die Parallaxe des Systems ist. M findet man aus der Flächenhelligkeit des helleren Sternes J_1, wenn diese in Einheiten der Flächenhelligkeit der Sonne in Größenklassen ausgedrückt ist, ferner aus dem Radius des Sternes in Sonnenradien $\bar{r}_1$ durch die Gleichung

$$M = J_1 - 5{,}0 \log \bar{r}_1 - \tfrac{5}{3} \log \mu + 4{,}75^{\mathrm{m}}.$$

Hier ist $\bar{r}_1$ der hypothetische Radius, wenn beide Sterne die Sonnenmasse haben, und das dritte Glied die Reduktion auf den Fall, daß die Massen der Komponenten im Verhältnis μ zur Sonnenmasse stehen. $4{,}75^{\mathrm{m}}$ ist die absolute Helligkeit der Sonne. Um diese Gleichung bei unbekannten J_1 und μ zu benutzen, muß man noch eine Beziehung zwischen diesen Größen für die einzelnen Spektraltypen der Sterne haben. Eine solche hat *Russell* aus statistischen Daten über die Massen der Sterne verschiedener Spektraltypen gewonnen, und mit dieser Beziehung sind dann die absoluten Größenklassen und die Parallaxen der Sterne des *Shapley*schen Kataloges berechnet. Es erweist sich, daß nur vier Bedeckungsveränderliche, nämlich β Aurigae, β Persei, R Canis Majoris und W Ursae Majoris, Parallaxen haben, die 0,01″ übersteigen, alle anderen sind weiter entfernt.

Die räumliche Verteilung der Bedeckungsveränderlichen zeigt eine deutliche Konzentration derselben in der Ebene der Milchstraße; die galaktische Breite 30° wird nur von 13 Sternen der *Shapley*schen Liste überschritten. *Gaposchkin* findet in seiner Liste von 349 Sternen die Hälfte innerhalb des Gürtels von + 10° bis − 10° galaktischer Breite liegend. Diese Konzentration ist weit stärker als für die Gesamtheit der Sterne. Am stärksten ist die Anhäufung in der Milchstraße für die frühen Spektraltypen.

f) *Die Dichten der Bedeckungsveränderlichen nach Spektraltypen geordnet.* Für diese wichtige Zusammenstellung, die ein Licht darauf werfen kann, ob die Einteilung der Sterne in Riesen und Zwerge innerhalb der Bedeckungsveränderlichen festzustellen ist, hat *Shapley* die bei der Voraussetzung gleicher Massen der Komponenten berechneten Dichten seines Kataloges noch zwei Korrekturen unterworfen;

die eine Korrektur trägt angenähert der polaren Abplattung der Systeme Rechnung, weil diese mit Sicherheit infolge der Rotation zu erwarten ist und die Dichten verkleinert. Er begnügt sich damit für alle Systeme, die eine Elliptizität in der Bahnebene aufweisen, die Dichten im Verhältnis $\frac{\beta}{\gamma}$ zu vergrößern, während für die anderen Systeme auf eine Korrektion verzichtet wird.

Die mittlere Dichte eines Bedeckungsveränderlichen ist unabhängig von der Gesamtmasse des Systems im Verhältnis zur Sonnenmasse, aber die Kenntnis der Verteilung der Masse zwischen den Komponenten ist wesentlich für die Bestimmung der Einzeldichten, deren Zusammenhang mit dem Spektraltypus untersucht werden soll. Da nun sowohl für die visuellen als für die spektroskopischen Doppelsterne die Regel gilt, daß die hellere Komponente die größere Masse hat, so ist anzunehmen, daß im Durchschnitt dieses Gesetz auch bei den Bedeckungsveränderlichen seine Gültigkeit hat. Die Annahme der Gleichteilung der Masse zwischen den Komponenten war somit irrig, und die Dichten erfordern daher eine Korrektion. Diese wird auf empirischen Wege aus den bekannten Massenverhältnissen der spektroskopischen Doppelsterne gewonnen, und zwar als Funktion der Helligkeit des helleren Sternes.

Darauf wurde eine Tabelle der Dichten, im wesentlichen der helleren Komponenten, geordnet nach Spektraltypen aufgestellt, wobei die Dichten selbst in enge Intervalle eingeteilt wurden.

Mit aller Deutlichkeit tritt aus dieser Tafel die Eigentümlichkeit der B- und A-Sterne hervor, nur Dichten einer bestimmten Größenordnung aufzuweisen, während bei den F- und G-Sternen zweierlei Dichten auftreten, entsprechend der Trennung des Riesen- und des Zwergastes des *Russell*-Diagramms, die beim F-Typus beginnt. Die mittlere Dichte von 16 B-Sternen (mit Ausnahme von β Lyrae) beträgt 0,12 der Sonnendichte; die mittlere Dichte von 54 A-Sternen ist 0,21. Unter den Sternen der F-Klasse ist die mittlere Dichte des Zwergastes etwa 0,4, bei den G-Sternen etwa 1,0, während die wenigen G-Riesen Dichten zwischen 10^{-4} und 10^{-6} aufweisen. In der Statistik von *Gaposchkin* finden wir auch noch die mittlere Dichte der Typen O_8 bis B_0 zu 0,009 und B_1 bis B_3 zu 0,074. Bei den Systemen, für die *Gaposchkin* auch das Spektrum der schwächeren Komponente berechnet hat, konnten auch die Dichten der Begleiter nach dem Spektraltypus geordnet werden; dabei zeigte sich, daß die schwächeren Komponenten meistens auf dem Riesenaste liegen, manchmal aber den Zwergen angehören; dabei liegen die helleren Komponenten auf der Hauptreihe des *Russell*-Diagramms, in der die Dichte mit dem Spektraltypus wächst. Der spektrale Unterschied beider Komponenten verschwindet allmählich mit fortschreitendem Spektraltypus der helleren Komponente. Es ist also nach dem obigen Ergebnis die schwächere Komponente eines Systems die in der Entwicklung jüngere, manchmal aber auch die ältere.

57. Andere Methoden und ungelöste Probleme. Wir haben hier die Methode von *H. N. Russell* in aller Ausführlichkeit wiedergegeben, weil sie als die einzige angesprochen werden kann, die dem größten Teil der bei der Bedeckung zweier Sterne auftretenden Erscheinungen mit derjenigen Strenge Rechnung zu tragen gestattet, die durch die Natur des Problems und die geringe Genauigkeit der Beobachtungen bedingt ist. Man kann es als besonderen Vorzug der *Russell*schen Methode ansehen, daß sie die mathematische Strenge in der Bestimmung der vielen Konstanten des Problems gerade nur bis zur erforderlichen Grenze treibt; nur dadurch ist ihre außerordentliche Verbreitung und die Bewältigung der großen Rechenarbeit, die in der Bestimmung von nunmehr ca. 300 Bahnelementen von Bedeckungsveränderlichen liegt, möglich gewesen. In seiner ganzen Allgemeinheit ist das Problem außerordentlich verwickelt; die klare Trennung und numerische Abschätzung der einzelnen Einflüsse auf die Lichtkurve, wie sie in der *Russell*schen Methode durchgeführt ist, kann kaum übertroffen werden.

Mit Einzelproblemen des Bedeckungsphänomens beschäftigt sich eine Anzahl von Arbeiten, die meist eine Theorie ad hoc für die Auswertung einer Lichtkurve bringen. Nur einige von ihnen sollen hier genannt werden. *G. W. Myers*[234]) untersucht den Einfluß der Abplattung der Komponenten im System β Lyrae, *A. Roberts*[235]) behandelt dieselbe Frage allgemein für enge Algolveränderliche und mit Anwendung auf das System RR Centauri. *v. Hepperger*[236]) entwickelt dasselbe Problem in sehr eleganter Weise im wesentlichen für den Fall zweier Minima von ungleicher Tiefe.

Ein bequemes Rechenschema für die Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Randverdunkelung hat *Blazko*[237]) angegeben, wobei mit der Randverdunkelung der Sonne gerechnet wird. Gewisse für die Rechnung bequeme Abänderungen der klassischen hier behandelten

234) Astroph. Journ. 7 (1898), p. 8.

235) Monthly Not. 63 (1903), p. 528.

236) Sitzber. der Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl. 118 (1909), p. 933.

237) Ann. de l'Observatoire astron. de Moskow, II série (1911), p. 91. — Dissertation О звѣздахъ типа Альголя.

*Russell*schen Methode der Bahnbestimmung haben *J. Fetlaar*[237a]) und *S. Scharbe*[237b]) vorgeschlagen; *Gaposchkin*[233]) hat sie in seiner großen Arbeit z. T. anwenden können; in ihr findet man auch eine Zusammenstellung der Formeln.

Aufgaben besonderer Art, die bisher nicht berücksichtigt wurden, entstehen für das Bedeckungsproblem in den Fällen, wo die beiden Komponenten des Doppelsternes in eine gemeinsame Atmosphäre eingehüllt sind. In diesem Falle wird die Abgrenzung der Radien beider Sterne schwierig, und wenn man dieselbe nach den üblichen Rechenmethoden durchführt, ist die Beeinflussung der Lichtkurve durch die gemeinsame Atmosphäre, bei der Veränderlichkeit des Lichtweges in derselben, schwer in Rechnung zu ziehen. Zwei interessante Systeme dieser Art sind die Systeme ζ Aurigae und ε Aurigae, von denen das erste von *Guthnick* und *Schneller*[238]) neuerdings behandelt worden ist.

Aus gleichzeitigen Beobachtungen der Linienintensität im Spektrum, deren Veränderungen mit der Periode des Lichtwechsels des Systems verlaufen, kann man in diesem Falle die Weglänge in der absorbierenden Atmosphäre abschätzen; das von den Autoren entworfene Bild dieses Systems, in dem die eine Komponente ein Übergigant vom Durchmesser der Erdbahn und vom Spektraltypus K ist, während die andere schwächere Komponente mit einem etwa 80fach kleineren Durchmesser vom B-Typus ist, kann noch nicht als abgeschlossen gelten; die photometrischen Erscheinungen, die das System bei solcher Beschaffenheit bieten muß, erfordern jedenfalls eine besondere Theorie.

Die Bestimmung der wahren *Randverdunkelung*, die durch Beobachtungen durch Farbfilter für die einzelnen Spektralgebiete getrennt festzustellen wäre, ist ebenfalls ein theoretisch noch ungelöstes Problem, wenn hier auch die in Nr. 18 für Sonnenfinsternisse entwickelte strenge Methode eine theoretische Grundlage bietet.

58. Die anderen Klassen der veränderlichen Sterne. *Einteilung.* Wenn man unter *Veränderlichen* alle Sterne versteht, die eine Veränderlichkeit ihrer Helligkeit aufweisen, so gehören die Bedeckungsveränderlichen, die im vorigen Kapitel besprochen wurden, auch mit dazu; sie bilden aber insofern eine besondere Gruppe, als die Ursache des Lichtwechsels bei ihnen eindeutig bekannt ist; ihre Anzahl ist unter der Gesamtheit der Veränderlichen nur gering, enthält doch der letzte Katalog von *Prager*[239]) für das Jahr 1933 die

237 a) Bull. of the Astronomic. Institutes of the Netherlands, NN. 58, 108, 204.

237 b) Bull. de l'Observ. Centr. Poulkowo, Nr. 94.

238) Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 10 (1932).

239) Kleine Veröff. d. Univ.-Sternwarte Berlin-Babelsberg Nr. 11. Berlin 1932.

Gesamtzahl von 5826 Sternen, bei denen ein Lichtwechsel einwandfrei festgestellt worden ist. Diese Anzahl ist in stetigem, schnellem Wachsen begriffen, besonders nachdem die fruchtbare photographische Methode durch die Organisation des Überwachungsdienstes des nördlichen Himmels[240]) es ermöglicht hat, auch die schwachen Veränderlichen zu erfassen. Das außerordentlich reichhaltige, bisher angehäufte Beobachtungsmaterial ist bis Ende 1925 in dem dreibändigen Werke von *G. Müller* und *E. Hartwig:* „Geschichte und Literatur des Lichtwechsels der bis Ende 1925 als sicher veränderlich anerkannten Sterne nebst einem Katalog der Elemente ihres Lichtwechsels“ zusammengefaßt.[241]) Die neuere Literatur, die Elemente des Lichtwechsels enthaltend, wird jährlich von *R. Prager* neu bearbeitet und als ein Heft der kleinen Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte Berlin-Babelsberg herausgegeben. Über den heutigen Stand unserer Kenntnisse der physikalischen Eigenschaften der veränderlichen Sterne gibt der Beitrag von *H. Ludendorff* im Handbuch der Astrophysik, Bd. VI (Berlin 1928, Springer) einen umfassenden Überblick.

Im Gegensatz zu den Bedeckungsveränderlichen ist die theoretische Deutung der Ursachen des Lichtwechsels bei den anderen Veränderlichen zum großen Teil noch unsicher. Die Gesamtheit der Daten über die Form, die Amplitude und Periode des Lichtwechsels, sowie über die Radialgeschwindigkeiten und die Veränderungen im Spektrum, die mit dem Lichtwechsel parallel laufen, läßt bis jetzt eine eindeutige physikalisch begründete Einteilung der Veränderlichen in Klassen noch nicht zu, und es sind deren verschiedene vorgeschlagen worden. Hier soll die Einteilung von *ten Bruggencate*[242]) benutzt werden, die neun Klassen veränderlicher Sterne enthält; als wesentliche physikalische Ursache des Lichtwechsels liegt dieser Einteilung die Hypothese der Pulsation oder Schwingung der Sternatmosphären zugrunde. Wir beschränken uns darauf, die Methoden zu besprechen, die zur Kenntnis der photometrischen Daten, also der absoluten Helligkeit sowie der Durchmesser und der Dichten der veränderlichen Sterne führen; weder eine Behandlung noch eine Kritik der Theorien des Lichtwechsels, die alle als unsicher zu betrachten sind, kann uns hier beschäftigen, viel weniger noch eine Sichtung oder Wiedergabe des außerordentlich reichhaltigen Beobachtungsmaterials. Die Einteilung von *ten Bruggencate* mit ihrer stichwortartigen Aufzählung der charakteristischen Eigenschaften jeder Gruppe der Veränderlichen ist folgende:

---

240) Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1928, XX.

241) Erschienen bei Poeschel & Trepte in Leipzig: 1 (1918), 2 (1920), 3 (1922).

242) Die veränderlichen Sterne. Ergebn. d. exakt. Naturwiss. Bd. X (1931).

1. Kurzperiodische Cepheiden: RR Lyrae, ST Virginis. Ganz regelmäßiger Lichtwechsel, Temperaturwechsel, veränderliche Radialgeschwindigkeit, Periode P kürzer als 1^d, Spektrum B—F (Fig. 16).

2. Klassische Cepheiden: δ Cephei, η Aquilae, ζ Geminorum. Ganz regelmäßiger Lichtwechsel, Temperaturwechsel, veränderliche Radialgeschwindigkeit, $1^d < P < 40^d$, Spektrum F—K (Fig. 17).

3. RV Tauri-Sterne: RV Tauri, R Sagittae. Halbregelmäßiger Lichtwechsel, Temperaturwechsel, veränderliche Radialgeschwindigkeit, $30^d < P < 80^d$, Spektrum G—M, sehr selten.

4. Langperiodische Veränderliche: o Ceti, χ Cygni. Regelmäßiger Lichtwechsel, Temperaturwechsel, veränderliche Radialgeschwindigkeit, $90^d < P < 600^d$, Spektrum K, M, N, R, S.

5. Unregelmäßige Veränderliche: X Herculis. Ganz unregelmäßiger Lichtwechsel, veränderliches Linienspektrum, geringe Radialgeschwindigkeitsänderungen, Spektrum K, M, N, R, *Pec.*

6. R Coronae-Sterne: R Coronae borealis. Auftreten von Emissionslinien im Minimum, Absorptionsspektrum konstant (G, K, R, *Pec.*), Radialgeschwindigkeit aus Absorptionslinien konstant, sehr selten.

7. U Geminorum-Sterne: U Geminorum, SS Cygni. Unregelmäßiger Lichtwechsel. Auftreten von Emissionsbändern zur Zeit der Minima, Spektren sehr linienarm (frühe Typen?), Radialgeschwindigkeitsänderungen unbekannt, sehr selten.

8. Nova-ähnliche Veränderliche: T Pyxidis, RS Ophiuchi. Unregelmäßiger Lichtwechsel, Spektren Nova-ähnlich, Linienverschiebungen ebenfalls Nova-ähnlich, sehr selten.

9. Neue Sterne: Einmalige große Lichtzunahme, spektrale Änderungen, Linienverschiebungen.

59. Die δ Cephei-Sterne. Die zwei ersten Klassen der Veränderlichen bilden eine organische Reihe bezüglich der Periodenlänge und des Spektraltypus. Gemeinsam ist auch das Hauptmerkmal der Cepheiden: Der schnelle Anstieg der Helligkeit bis zum Maximum und ihr langsamer Abfall zum Minimum. Diese Eigenschaft wird durch den Quotienten $(M - m) : P$, wo M und m die Momente des Maximums und des Minimums, P die Periode bezeichnen, charakterisiert. Dieser Quotient ist ein bequemes Maß der Asymmetrie der Lichtkurven und zeigt, daß die klassischen Cepheiden noch eine Unterteilung erfordern: in solche mit Perioden von 1 bis 10—11 Tagen und solche mit größeren Perioden. Im allgemeinen ist $(M - m) : P$ von der Größenordnung 0,3—0,4, und nur für Cepheiden mit der kritischen Periode von 10—11 Tagen wächst der Quotient bis zu 0,5 an, die typische Asymmetrie der Lichtkurve verschwindet, um dann

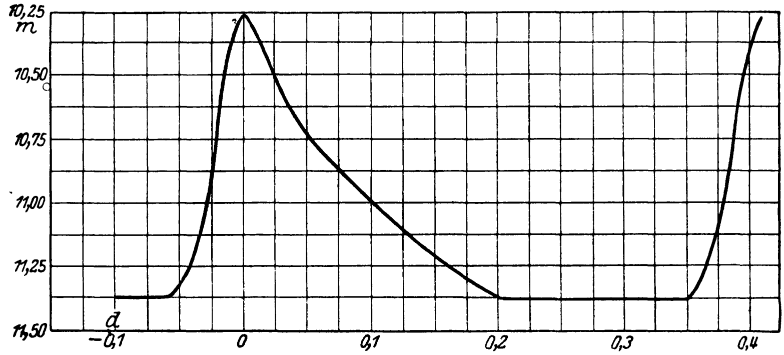

Fig. 16. Lichtkurve von ST Virginis nach photometrischen Messungen von *P. Guthnick* (A. N. 179, p. 181). $P = 0{,}411^d$. (Aus *Ludendorff*, Handb. d. Astroph. VI, 2. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

wieder bei größeren Perioden deutlich hervorzutreten. Besonders stark ist die Asymmetrie der Lichtkurven bei den kurzperiodischen Cepheiden mit Perioden unter einem Tage.

Ein wesentlicher Unterschied der kurzperiodischen und der klassischen Cepheiden tritt in ihrer räumlichen Verteilung und in ihrer Raumgeschwindigkeit zutage. Die letztgenannten zeigen eine deutliche Verdichtung nach der Milchstraße, während die kurzperiodischen gleichmäßig am Himmel verteilt sind. Auch die Eigenbewegungen zeigen einen wesentlichen Unterschied. Aus Radialgeschwindigkeiten für 37 Cepheiden mit $P > 2^d$ fand *Strömberg*[243]) als mittlere Geschwindigkeit relativ zur Sonne 11,5 km/sec, während für 26 Cepheiden mit $P < 0{,}7^d$ dieselbe Größe den Wert von 109 km/sec erreicht. Diese große Raumgeschwindigkeit, als besonderes Merkmal der Cepheiden mit kurzer Periode, unterscheidet sie von den klassischen in markanter bisher völlig ungeklärter Weise.

60. Die Perioden-Leuchtkraftkurve (PLk). Im Jahre 1908 entdeckte Miß *Leavitt*[244]) bei einer Untersuchung der Sternhellig-

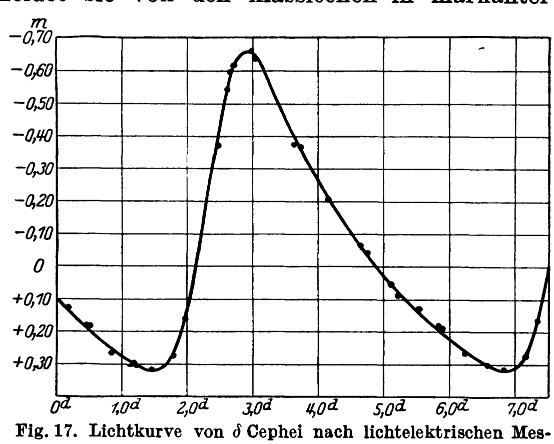

Fig. 17. Lichtkurve von δ Cephei nach lichtelektrischen Messungen von *P. Guthnick* (A. N. 208, p. 171). $P = 5{,}366^d$. (Aus *Ludendorff*, Handb. d. Astroph. VI, 2. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

243) Astroph. Journ. 61 (1925), p. 363; Mt. Wilson Contr. p. 193.

244) Harvard Ann. 60 (1908), p. 105 und Harvard Circ. p. 173 (1912).

keiten der kleinen Magellanschen Wolke eine große Reihe veränderlicher Sterne mit sehr verschiedenen Perioden des Lichtwechsels, deren Lichtkurven dem δ Cephei-Typus entsprachen. Da wegen der großen Entfernung des Sternhaufens die Abstände der einzelnen Sterne von der Erde als gleich groß angesehen werden konnten, unterscheiden sich die scheinbaren Helligkeiten (in Gr.kl.) derselben von ihren absoluten Werten (bezogen auf den Abstand von 10 Parsec) nur um eine additive Konstante. Trägt man die scheinbaren Helligkeiten als Gr.kl. gegenüber dem Logarithmus der Periode in ein Diagramm auf, so erhält man die PLk von Miß *Leavitt*, die einen auffallend glatten Verlauf nimmt, also eine in der Natur des Lichtwechsels begründete Gesetzmäßigkeit offenbart (Fig. 18). Diese Gesetzmäßigkeit, deren weitere Ausgestaltung und volle Ausnützung zum Studium der Entfernungen in und außerhalb unseres Sternsystems wir in erster Linie *Shapley*[245]) zu verdanken haben, erfordert noch eine Festlegung des Nullpunktes oder der absoluten mittleren Leuchtkraft der Cepheiden. Zu diesem Zwecke bestimmt man nach dem Vorschlage von *E. Hertzsprung*[246]) die mittlere Parallaxe und somit die mittlere Leuchtkraft der in unserem engeren Sternsystem bekannten klassischen Cepheiden, deren Perioden zwischen 1 und 10 Tagen liegen. Im wesentlichen geschieht das mit Hilfe der Eigenbewegungen. Bei der Benutzung desselben Nullpunktes für die Sterne in entfernten Sternsystemen ergibt sich die Möglichkeit, alle Cepheiden in eine PLk zu vereinigen und diese zur Bestimmung des Abstandes entfernter Sternhaufen und Spiralnebel, in denen Cepheiden beobachtet werden, zu benutzen. Die Voraussetzung dabei ist, daß der Lichtwechsel der Cepheiden innerhalb und außerhalb unseres engeren Sternsystems demselben physikalischen Vorgange entspricht, was insofern nicht über alle Zweifel erhaben ist, als die anderen Merkmale des Lichtwechsels außer der Lichtkurve bei den schwachen Sternen der entfernten Systeme (Radialgeschwindigkeit, Veränderungen im Spektrum) nicht nachgeprüft werden können. Außerdem setzt die Methode gleiche mittlere absolute Leuchtkräfte bei den Cepheiden unseres und der entfernten Sternsysteme voraus. Dabei sind in den kugelförmigen Sternhaufen die Perioden des Lichtwechsels kleiner ($P < 1^d$), dagegen bei den Spiralnebeln größer ($P > 10^d$) als die in unserem Sternsystem für die Bestimmung des Nullpunktes benutzten Perioden.

Die PLk konnten aber für die Sternhaufen einerseits und die Spiralnebel andererseits innerhalb der dort vorkommenden Perioden ge-

245) Star Clusters, Harvard Monograph 2 (1930).

246) Astr. Nachr. 196 (1913), p. 201.

trennt konstruiert werden, und diese Kurven stimmen mit der PLk für die kleine Magellanische Wolke nach einer Parallelverschiebung (zur Reduktion auf gleiche Entfernung) in den gemeinsamen Teilen recht gut überein. Die Magellanschen Wolken sind aber mit unserem Sternsystem auch in der Beziehung vergleichbar, als in ihnen alle Typen der Cepheiden, sowohl die kurz- als die langperiodischen vertreten sind. Die von *Shapley*[247]) abgeleitete PLk, die den ganzen Bereich der vorkommenden Perioden umfaßt, ist in Fig. 18 wiedergegeben.

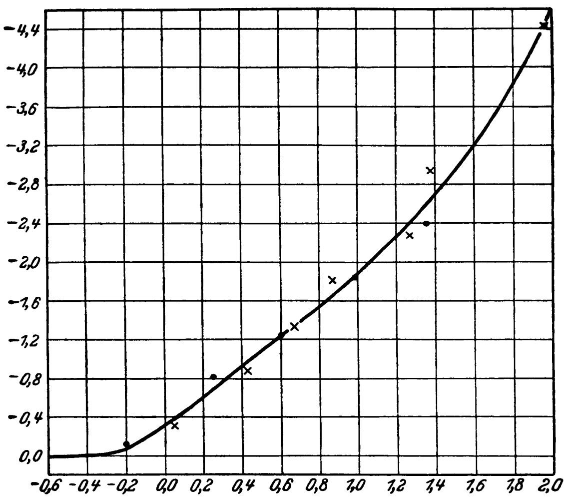

Fig. 18. Endgültig angenommene photographische Perioden-Leuchtkraftkurve. (Nach *Shapley*, Star Clusters p. 135.) (Aus *ten Bruggencate*, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. Bd. X. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

Die Tabelle 18 zeigt den Verlauf der absoluten Helligkeiten numerisch, dabei sind die „absoluten photographischen Größen" Mittelwerte aus den Helligkeiten im Maximum und im Minimum.

Tabelle 18.

Die photographische Perioden-Leuchtkraftkurve.

$\log P$	Abs. phot. Größe	$\log P$	Abs. phot. Größe
— 0,6	$0{,}00^m$	+ 0,8	$— 1{,}53^m$
— 0,4	0,00	+ 1,0	— 1,89
— 0,2	— 0,07	+ 1,2	— 2,26
0,0	— 0,31	+ 1,4	— 2,68
+ 0,2	— 0,61	+ 1,6	— 3,19
+ 0,4	— 0,93	+ 1,8	— 3,81
+ 0,6	— 1,22	+ 2,0	— 4,60

Die Helligkeiten der kurzperiodischen Cepheiden ($P < 0{,}8$) scheinen hiernach konstant zu sein. Das Anwachsen der Helligkeit mit der Periode beginnt bei $P = 1$.

61. Die Perioden-Spektrenkurve (PSk). Für den organischen Zusammenhang der kurzperiodischen und der klassischen Cepheiden über die RV Tauri-Sterne bis zu den langperiodischen Veränderlichen spricht

247) Star Clusters, Harvard Monograph 2 (1930), p. 135.

die von *Shapley* und Miß *Walton*[248]) entdeckte Beziehung der Periode des Lichtwechsels zum Spektraltypus. Diese Beziehung ist in der Perioden-Spektrenkurve (PSk) in Fig. 19 nach *Shapley* wiedergegeben. Das Fortschreiten nach den späteren Spektraltypen mit wachsender Periode offenbart sich hier, was aus dem Diagramm nicht immer ersichtlich ist, nicht nur von Gruppe zu Gruppe (kurzperiodische □, klassische Cepheiden •, RV Tauri-Sterne ○, langperiodische Veränderliche ×), sondern auch innerhalb jeder Gruppe. Die Streuung um den mittleren Spektraltypus beträgt freilich im Durchschnitt 2,1 Spektraleinheiten. Der Zusammenhang der Periode des Lichtwechsels mit der Temperatur ist trotzdem unzweideutig festgestellt, außerdem tritt der organische Zusammenhang der beiden ersten Gruppen der Veränderlichen sowohl untereinander als mit den folgenden Typen, die nicht mehr zu den Cepheiden gezählt werden, deutlich hervor.

62. Das Leuchtkraft-Spektraltypendiagramm. Die beiden Beziehungen zwischen Leuchtkraft und Periode (PLk) und Spektrum und Periode (PSk) können zu einer Beziehung zwischen den drei Variablen Spektraltypus (S), Leuchtkraft (L) und Periode (P) verbunden werden. Trägt man in das *Russell*-Diagramm, das den Spektraltypus und die Leuchtkraft als Koordinaten hat, die Cepheiden ein, so erhält man die ausgezogene Kurve in Fig. 20. Hier sind die angeschriebenen Zahlen die Log P. Die Schraffierung deutet die Häufigkeit der Sterne im *Russell*-Diagramm an, wobei die Übergiganten aber nicht eingetragen sind. Wir finden also die Cepheiden an der Stelle der größten Leuchtkräfte als Übergiganten, und zwar entsprechen den kleineren Leuchtkräften und kurzen Perioden die höheren Temperaturen, den größeren Leuchtkräften und langen Perioden die tieferen Temperaturen der gelben und roten Riesensterne. Diese Beziehung gilt auch für die RV Tauri-Sterne und die langperiodischen Veränderlichen und zeigt uns, daß der Lichtwechsel aller dieser Sterne nur bei einer bestimmten Kombination von Leuchtkraft und Temperatur möglich ist. Bei bestimmten Werten von L und T haben wir, soweit Veränderlichkeit eines Sternes vorliegt, eine bestimmte Periode des Lichtwechsels zu erwarten. Man kann es als notwendige (wenn auch

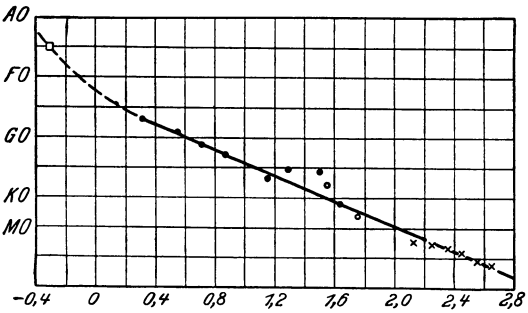

Fig. 19. Die Perioden-Spektrenkurve. (Nach *Shapley*, Star Clusters p. 137.) (Aus *ten Bruggencate*, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. Bd. X. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

248) Harvard Circular, p. 313 (1927).

nicht hinreichende) Bedingung des Lichtwechsels der genannten Klassen der Veränderlichen auffassen, daß der Bildpunkt des Sternes in den entsprechenden Ort der Perioden-Leuchtkraft-Temperaturkurve (PLTk) fällt.

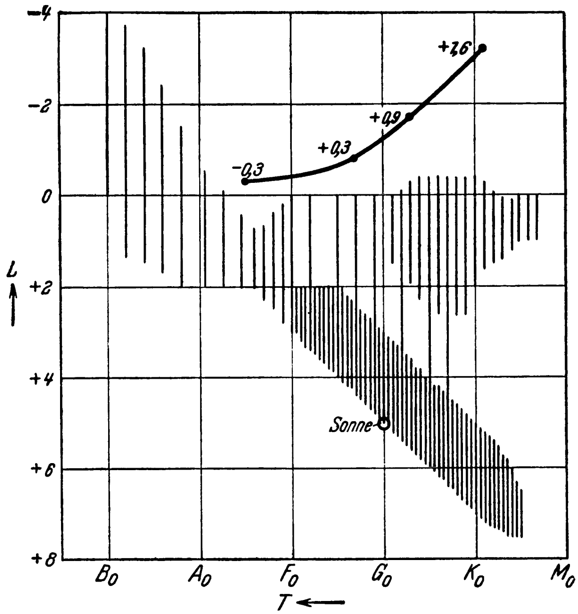

Fig. 20. Die Perioden-Leuchtkraft-Spektren-Beziehung. (Aus *ten Bruggencate*, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. Bd. X. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

Dieser Satz gilt nicht für die kurzperiodischen Cepheiden, die in der PLTk deshalb schwer einzutragen sind, weil sie keinen eindeutigen Zusammenhang der Leuchtkraft mit der Periode und auch zwischen Spektraltyp und Periode aufweisen. Sie liegen im *Russell*-Diagramm unabhängig von der Periode zwischen den Leuchtkräften — $0{,}5^m$ und $+ 0{,}5^m$ und den Spektraltypen B_0 und F_0.

Mit Hilfe der *Eddington*schen Beziehung zwischen der Masse und der Leuchtkraft[249]) kann man nun auch den Wert der mittleren Dichte aus der PLTk bestimmen. Dazu entnimmt man die zu einer bestimmten Periode gehörigen Werte von L und T. Das Masse-Leuchtkraftgesetz gibt uns den zu L gehörigen Wert der Masse und das *Stefan-Boltzmann*sche Gesetz den Wert der Leuchtkraft als Funktion des Radius und der Temperatur: $L = \pi k R^2 T^4$ (k bekannte Konstante); hieraus findet sich der Radius R für einen Veränderlichen mit der Periode P.

Miß *Payne*[250]) hat auf diese Weise die Werte der mittleren Dichte für eine große Reihe von Veränderlichen der genannten Typen berechnet und gefunden, daß zwischen den Dichten ϱ und den Perioden der Veränderlichen die Beziehung besteht

$$P^2 \sim \frac{1}{\varrho}.$$

249) *Eddington,* Der innere Aufbau der Sterne, p. 176 (1928).

250) *Payne,* The Stars of High Luminosity, Harvard Monograph 3 (1930) p. 218.

Diese Beziehung ist für die Erklärung des Lichtwechsels von größter Bedeutung, kann aber eine Entscheidung über die Art der dynamischen Erklärung des Lichtwechsels allein nicht herbeiführen, denn in verschiedenen dynamischen Theorien spielt das Produkt $P^2\varrho$ eine wesentliche Rolle.

Für die kurzperiodischen Cepheiden, die in der PLTk nicht Platz haben, kann die obige Beziehung zwischen Periode und Dichte nicht gelten.

63. Die langperiodischen Veränderlichen. Die Lichtkurven dieser Klasse von Veränderlichen sind bezüglich der Periode und auch der Amplitude weniger regelmäßig als die der Cepheiden. Ihre Perioden liegen fast ausnahmslos über der Grenze von 90 Tagen. Die photographische und visuelle Amplitude beträgt mehrere Gr.kl. Die gute Einordnung dieser Sterne von durchweg spätem Spektraltypus (*K*, *M*, *N*, *R*) in die PLTk zeigt, daß sie ebenfalls, zum mindesten während des Maximums der Leuchtkraft, zu den Übergiganten zu zählen sind. Auffallend sind aber die großen Amplituden des Lichtwechsels. Nun zeigen aber die von *Pettit* und *Nicholson*[251]) gemessenen radiometrischen Amplituden des Lichtwechsels, daß auch diese Diskrepanz gegen die δ Cepheisterne verschwindet. Die mittlere radiometrische Amplitude von neun langperiodischen Veränderlichen beträgt nur $0{,}71^m$, während die mittlere visuelle Amplitude von 89 Cepheiden 0,83 beträgt; die bolometrische ist noch etwas kleiner. Für die genannten neun Veränderlichen beträgt dabei die visuelle Amplitude ganze 6,3 Gr.kl. Dieser enorme Betrag erklärt sich aber durch die Selektivität der visuell zugänglichen Strahlung, wobei in dem wirksamen Gebiete starke Absorptionsbanden mit großer Veränderlichkeit von Einfluß sind. Die δ Cephei-Sterne haben solche Banden nicht aufzuweisen, und es scheinen gerade diese und die mit ihnen verbundenen Absorptionsbedingungen in den Atmosphären das besondere Merkmal der langperiodischen Veränderlichen zu sein, während sonst der organische Zusammenhang dieser Sterne mit den Cepheiden kaum bezweifelt werden kann.

64. Die halbregelmäßigen periodischen Veränderlichen werden neuerdings von *Gerasimovič*[252]), der dieselben eingehend behandelt hat, in zwei Gruppen geteilt, von denen nur eine, die RV Tauri-Sterne, gut in die PLTk hineinpaßt und somit unzweideutig zu derselben Entwicklungslinie gehört, wie die früher besprochenen Klassen. Unter

251) Astroph. Journ. 68 (1928), p. 279; Mt. Wilson Contr. 369.

252) Harvard Circ. 321, 323, 333, 338, 340, 341 u. 342 (1927—1929).

halbregelmäßigen Veränderlichen versteht man überhaupt solche, die starke Änderungen in der Form der Lichtkurve aufweisen. Ein genaueres Studium der RV Tauri-Sterne zeigt aber, daß eine bestimmte Periodizität des Lichtwechsels nachweisbar ist, wobei Hauptminima (Hm) und Nebenminima (Nm) zu unterscheiden sind. Letztere liegen in der Mitte zwischen zwei Hm. Dabei ist aber die Helligkeitsdifferenz zwischen Hm und Nm nicht konstant. Die Nm können manchmal ganz aussetzen. Nur wenn man als Periode P die Zeit zwischen

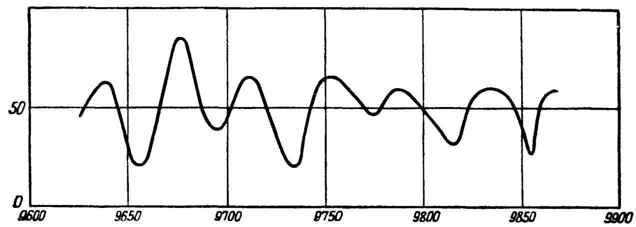

Fig. 21. Lichtkurve von RV Tauri nach *van der Bilt*. (Aus *Ludendorff*, Handb. d. Astroph. VI, 2. Verlag Jul. Springer, Berlin.)

zwei aufeinanderfolgenden Minima ansieht, folgen die RV Tauri-Sterne der Periodenspektralkurve. Es ist also der Charakter des Lichtwechsels durch den Spektraltypus und die effektive Temperatur bestimmt; diese Sterne bilden scheinbar ein Verbindungsglied zwischen den Cepheiden und den langperiodischen Veränderlichen, wobei aber eine Erklärung des Vorhandenseins der beiden Periodizitäten zunächst nicht möglich ist.

Eine andere Gruppe *halbregelmäßiger Veränderlicher*, von denen *Gerasimovič* vier aufzählt (Z Leo, V UMi, TT Per, SS Cep), fallen dank ihrem späten Spektraltypus (M) aus der PSk heraus. Andere Veränderliche derselben Klasse haben so starke Schwankungen in der Periode, daß sich eine bestimmte Periode für dieselbe überhaupt nicht ableiten läßt. *Gerasimovič* bezeichnet sie als zyklische Veränderliche und zählt zwölf von ihnen auf, sie gehören auch meist zum M-Typus.

65. Die seltenen Typen veränderlicher Sterne: R-Coronae, U-Geminorum und Novae. Die R-Coronae-Sterne weisen plötzlich ganz unregelmäßig auftretende Helligkeitsabnahmen auf, die bis zu 6—8 Gr.kl. betragen können. Sie gehören meistens entweder dem R-Typus (wie RS Telescopii) oder dem G-Typus (T Tau., SU Tau.) an, und da diese Spektraltypen nahe verwandt sind, scheint der dem Lichtwechsel zugrunde liegende physikalische Vorgang irgendwie damit zusammenzuhängen. Der am besten studierte Vertreter dieser seltenen Gruppe der Veränderlichen (man kennt 11 Sterne dieser Art) ist der Stern R Coronae borealis. Er weist eigentümliche Änderungen des Spektrums während des Lichtwechsels auf, wobei die Emissionslinien des Ti^+ und Ca^+ sich im Minimum in Absorptionslinien und Banden verwandeln.

Die U-Geminorum-Sterne zeigen im Gegensatz zu den R-Coronae-Sternen unregelmäßige Helligkeitszunahmen. Sie sind ebenfalls noch sehr wenig erforscht. Sichergestellt ist eine wesentlich höhere Temperatur als bei den R-Coronae-Sternen. Es werden z. Z. 11 Sterne zu diesem Typus gerechnet, darunter SS Aurig., SS Cygni.

Als Nova-ähnliche Veränderliche werden Sterne wie T Pyxidis und RS Ophiuchi bezeichnet, die ganz ähnliche spektrale Veränderungen während des Lichtwechsels aufweisen wie die Novae. Man hat es hier wahrscheinlich mit früheren Novae zu tun, die noch immer einen mehr oder weniger unregelmäßigen Lichtwechsel aufweisen. Das Gebiet der neuen Sterne soll hier aber nicht behandelt werden.

(Abgeschlossen im August 1932.)

VI 2, 28. KOSMOGONIE.

Von

H. KIENLE

IN GÖTTINGEN.

(Mit 3 Figuren.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Zusammenfassende Darstellungen und Berichte, unter Ausschluß der im Rahmen populärer Bücher und Sammelwerke erschienenen:

C. Wolf, Les hypothèses cosmogoniques, Paris 1885.

A. M. Clerke, Modern Cosmogonies, London u. New York 1906.

T. J. J. See, Researches on the evolution of the stellar systems. Vol. I (1896), vol. II (1910).

H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Paris 1911.

A. Véronnet, Les hypothèses cosmogoniques modernes, Paris 1914.

J. H. Jeans, Problems of cosmogony and stellar dynamics, Cambridge 1919. (Abkürzend zitiert als „Problems".)

J. Bosler, L'évolution des étoiles, Paris 1923.

F. Nölke, Entwicklung im Weltall. Probleme der kosmischen Physik VIII, Hamburg 1926.

A. Véronnet, Constitution et évolution de l'univers, Paris 1926.

A. Véronnet, Figures d'équilibre et Cosmogonie, Paris 1926.

J. H. Jeans, Astronomy and Cosmogony, Cambridge 1928. (Abkürzend zitiert als „A.C.")

Die verschiedenen Theorien der Entstehung des Planetensystems sind kritisch behandelt in:

F. Nölke, Der Entwicklungsgang unseres Planetensystems. Berlin-Bonn 1930. (Erstmalig erschienen unter dem Titel: „Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems, Berlin 1908.)

Über die „Welteislehre", die von der folgenden Darstellung grundsätzlich ausgeschlossen wurde, orientieren zahlreiche Schriften aus dem Verlag Voigtländer, Leipzig.

I. Einleitung.

1. Kosmogonie. Die Kosmogonie gehört zu den Gebieten der exakten Naturwissenschaften, auf denen die Arbeiten der Außenseiter und Phantasten die der eigentlichen Fachleute an Zahl und Umfang weit übertreffen. Wie das perpetuum mobile die Erfinder nimmer ruhen läßt und für das Rätsel der Schwerkraft alljährlich neue Lösungen gegeben werden, so findet die Frage nach dem Werden und Vergehen der Welt immer wieder neue Beantwortungen. Und wenn auch fast alle der einmal aufgestellten Theorien durch andere widerlegt und abgelöst worden sind, so behaupten sie sich doch heute noch nahezu unverändert nebeneinander oder tauchen in leicht abgewandelter Form immer wieder auf. Dies ist nicht anders zu erwarten, wenn gesichertes Wissen sich auf ein Minimum reduziert und Hypothesen die fast ausschließliche Grundlage bilden.

Wenn trotzdem im Rahmen einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften der Versuch gemacht werden soll, dem menschlichen Verlangen nach einer Abrundung des astronomischen Weltbildes so weit Rechnung zu tragen, als es mit den Aufgaben einer exakten Naturforschung verträglich erscheint, so möge die Begründung mit den Worten *H. Poincarés*[1]) gegeben werden:

«Il est impossible de contempler le spectacle de l'univers étoilé sans se demander comment il s'est formé; nous devrions peut-être attendre pour chercher une solution que nous ayons patiemment rassemblé les éléments, et que nous ayons acquis par là quelque espoir sérieux de la trouver; mais si nous étions si raisonnables, si nous étions curieux sans impatience, il est probable que nous n'aurions jamais créé la Science et que nous nous serions toujours contentés de vivre notre petite vie. Notre esprit a donc réclamé impérieusement cette solution, bien avant qu'elle fût mûre, et alors qu'il ne possédait que de vagues lueurs, lui permettant de la déviner plutôt que de l'attendre.»

Es kann allerdings nicht unsere Aufgabe sein, Vollständigkeit in der Aufführung der Theorien noch auch in der Angabe der umfangreichen Literatur anzustreben. Wir müssen uns vorbehalten, Theorien, die vom allgemein astronomischen Standpunkt aus als abwegig erscheinen, von der Darstellung auszuschließen. Die Grenzen sind schwer zu ziehen; denn die Beiträge der Fachwissenschaftler zu den Problemen der Kosmogonie sind keineswegs über die Kritik erhaben. Man begegnet vielmehr häufig einer gewissen Überspannung der Prinzipien, in der Kritik alter Hypothesen sowohl wie bei der Aufstellung neuer. Es wird leicht übersehen, daß wir einer viel zu großen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und Kräfte gegenüberstehen, als daß ein und dasselbe Prinzip — es sei denn eines der ganz allgemeinen und daher in Beziehung auf den praktischen Einzelfall „farblosen" — zur Erklärung alles Geschehens ausreichte. Und man vergißt gern, daß die aus einem zum Zweck der mathematischen Behandlung idealisierten Problem gezogenen Schlußfolgerungen unter Umständen nur Scheinargumente sind, wenn in dem natürlichen Problem wesentliche Teile in ihrer Bedeutung unterschätzt werden.

Wenn die *Laplace*schen Vorstellungen über die Entstehung des Planetensystems sich als unhaltbar erwiesen haben, so darf man deshalb den Grundgedanken eines durch Rotation instabil werdenden Gasballs nicht überhaupt verwerfen wollen. Wenn gewisse Gruppen von Doppelsternen sich nicht mit einer Theorie der Teilung rotierender Massen in Einklang bringen lassen, so darf man diesen Prozeß

1) *H. Poincaré,* Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, 2. édition. Paris 1913. Préface p. XLIX.

nicht kurzerhand ganz ausschließen. Und wenn sich umgekehrt etwa gewisse Eigentümlichkeiten im Planetensystem auf die „Einfangung" kleinerer Massen durch größere zurückführen lassen, so darf man nicht, in Überspannung des Prinzips, alle Arten kosmischer Systeme sich durch „Einfangung" zusammenfinden lassen.

2. Entwicklung der Theorien. Als Ausgangspunkte für eine wissenschaftliche Behandlung kosmogonischer Fragen können die Versuche von *Kant* und *Laplace* betrachtet werden. Durch sie sind die beiden Grundtypen von Hypothesen in die Literatur eingeführt worden, die in der Folgezeit das Feld, zum Teil gemeinsam, zum Teil abwechselnd, beherrschten: Die Meteoritenhypothese (*Kant*) und die Nebularhypothese (*Laplace*). *Kant*[2]), der selbst als Quelle *Th. Wright*[3]) anführt, scheint einen — ihm unbekannt gebliebenen — Vorgänger in *P. Estève*[4]) gehabt zu haben. Ohne Kenntnis des Werkes *Kants* bewegt sich *Lambert*[5]) einige Jahre später in ganz ähnlichen Spekulationen über den Bau des Weltalls. *Laplace*[6]) hat seine Theorie in knappen allgemeinen Zügen erstmalig der zweiten Auflage seiner „Exposition du système du monde" angefügt. Er erwähnt, 40 Jahre nach *Kant*, an Vorgängern nur *Buffon*[7]), in dessen Versuch, die Entstehung der Planeten auf den Zusammenstoß eines Kometen mit der Sonne zurückzuführen, man den ersten Ansatz zu der heute im Vordergrund der Diskussion stehenden Gezeitenhypothese erblicken kann.[8])

Kants Theorie scheint erst um die Mitte des 19. Jahrhunderts zur allgemeinen Kenntnis weiterer Kreise gelangt zu sein.[9]) Diese

2) *I. Kant,* Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt. Ohne Angabe des Verfassers. Königsberg und Leipzig 1755.

3) *Th. Wright,* An original theory and new hypothesis of the universe, London 1750.

4) Vgl. Kant-Studien 28 (1923), p. 193.

5) *J. H. Lambert,* Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues, Augsburg 1761.

6) *Laplace,* Exposition du système du monde. Seconde édition, Note VII, Paris 1796. Troisième édition, livre cinquième. Chap. VI. Paris 1808.

7) *Buffon,* Histoire naturelle, Paris 1745.

8) Über andere mehr oder weniger phantastische ältere Theorien vgl. *J. J. v. Littrow,* Die Wunder des Himmels, Stuttgart 1843.

9) In der ersten Auflage des unter Anm. 8 genannten Werkes ist nur *Laplace* genannt. In der zweiten schreibt *Littrow* im Anschluß an die ausführliche Darstellung der *Laplace*schen Kosmogonie: „Endlich wollen wir erwähnen, daß dieselbe Hypothese mit allen ihren Hauptmomenten schon früher von einem Manne aufgestellt worden ist, . . . *Kant* hat . . . aus denselben drei allgemeinen Erscheinungen unseres Planetensystems dieselben Folgerungen abgeleitet."

Kenntnis war allerdings nicht sehr tief, denn die Theorie wurde, in Verkennung ihres Grundgedankens, mit der des *Laplace* zusammengeworfen, so daß in die Literatur der Folgezeit eine „*Kant-Laplace*sche Kosmogonie“ überging, die je nach dem Geschmack des Darstellers mehr von der einen oder von der anderen der beiden Theorien übernahm.

Wesentliche Fortschritte über die im Grunde noch fast ausschließlich spekulative Beschreibung hinaus wurden erst erzielt, als *Roche*[10,11]) der Entwicklung der *Laplace*schen Nebelsonne eine mathematische Grundlage zu geben vermochte, *Maxwell*[12]) seine Untersuchungen über die Stabilität des Saturnringes bekanntmachte, die Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren[13]) rotierender Massen bis zu den birnenförmigen Figuren vorstießen, und die Entdeckungen auf dem Gebiete des restringierten Dreikörperproblems[14]) der „Einfangtheorie“ Nahrung gaben. Um die Jahrhundertwende trat die *Laplace*sche Theorie in ihrer Urgestalt stark in den Hintergrund; die „Meteoritenhypothese“ *Lockyers*[15]) und die „Planetesimalhypothese“[16]) von *Chamberlin* und *Moulton* lösten sie ab.

Gleichzeitig aber bereitete sich eine Verschiebung des Schwerpunktes der kosmogonischen Untersuchungen vor. Galt bis dahin unser Planetensystem als Normalfall kosmischer Entwicklung, nach dessen Muster man Systeme beliebig hoher Ordnung entstehen lassen konnte, so zielt die Entwicklung der letzten Jahrzehnte unzweideutig dahin, die Fülle der unserem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten als das Ergebnis eines seltenen Ausnahmefalles kosmischen Geschehens zu betrachten, und einen deutlichen Unterschied zu machen zwischen der Entwicklung von Weltsystemen und von einzelnen Sternen. Die Wurzeln dieser Umwertung sind zu suchen in den vorgenannten Arbeiten über die Dynamik der Entwicklungsvorgänge, die eine quantitative Prüfung der einzelnen kosmogonischen Hypothesen ermöglichten; in den Fortschritten der empirischen Astronomie und

10) *Roche,* Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes, Mém. de l'Acad. de Montpellier. Vol. 2 (1854), p. 399.

11) *Roche,* Essai sur la constitution et l'origine du système solaire, l. c. Vol. 8 (1873), p. 235.

12) *J. C. Maxwell,* Essay on the stability of the motion of Saturn's rings, Cambridge 1859.

13) Vgl. Encykl. VI 2, 21 (*S. Oppenheim*).

14) Vgl. Encykl. VI 2, 19 (*H. Samter*).

15) *J. N. Lockyer,* The Meteoric Hypothesis, London 1890.

16) Vgl. *T. C. Chamberlin,* The two Solar Families, Chicago 1928, wo sich alle einschlägigen Literaturangaben finden.

Astrophysik, die eine Fülle neuer und verschiedenartiger kosmischer Objekte der Beobachtung und der Theorie zugänglich machten; vor allem aber in der durch *J. R. Mayer*, *H. von Helmholtz*, *H. Lane*, *A. Ritter*, *W. Thompson*, *A. Schuster* und *R. Emden*[17]) eingeleiteten Entwicklung der Thermodynamik der Himmelskörper, die zu einer mathematisch-physikalisch begründeten Theorie des Sternaufbaus führte und die entscheidende Bedeutung der Strahlungsprobleme in den Vordergrund rückte. Die Namen *K. Schwarzschild*, *A. S. Eddington*, *J. H. Jeans*, *E. A. Milne*, *H. N. Russell* und *H. Vogt* bezeichnen die letzten Etappen auf diesem Wege, auf dem wir die Hoffnung geschöpft haben, wenigstens Teile einer wissenschaftlich begründeten Kosmogonie zu besitzen, wenn es sich auch vielfach mehr um Einschränkungen der Möglichkeiten handelt als um positive und eindeutige Aussagen über das „Wie?".

3. Methoden der Kosmogonie. Entsprechend ihrem stark spekulativen Charakter geht die Kosmogonie auf zwei verschiedenen Wegen vor, die man etwa so kennzeichnen kann[18]):

a) Man gibt einen — irgendwie idealisierten — Anfangszustand und bestimmte wirkende Kräfte vor und verfolgt die Entwicklung mit den zu Gebote stehenden mathematischen Hilfsmitteln. Der Vergleich der theoretisch erlangten Entwicklungsstufen mit den am Himmel beobachtbaren Objekten liefert Kriterien für die Brauchbarkeit der Theorie.

b) Man versucht unter Voraussetzung einer im einzelnen näher zu definierenden Stationarität aus der beobachtbaren Verteilungsfunktion der Zustände verschiedener Objekte die zeitliche Aufeinanderfolge der Zustände des Einzelobjektes abzuleiten.

Im allgemeinen überschneiden sich beide Wege vielfach; die praktischen Methoden sind fast durchweg „gemischt" und ergänzen sich gegenseitig. Daß man besonders auf dem zweiten Weg, auf dem unter anderem die Riesen-Zwerg-Theorie der Sternentwicklung gefunden wurde[19–28]), Gefahren ausgesetzt ist, leuchtet ein. Man wird

17) Vgl. Encykl. VI 2, 24 (*R. Emden*).
18) *H. Kienle*, Vjschr. der Astr. Ges. 59 (1924), p. 158.
19) *J. N. Lockyer*, The Chemistry of the Sun, London 1887.
20) „ The Meteoric Hypothesis, London 1890.
21) „ The Sun's Place in Nature, London 1897.
22) „ Inorganic Evolution, London 1902.
23) „ Proc. Roy. Astr. Soc. London 67 (1901), nr. 40.
24) *A. Schuster*, The evolution of solar stars, Ap. Journ. 17 (1903), p. 165.
25) *J. N. Lockyer*, Proc. Roy. Astr. Soc. London 73 (1904), nr. 492.
26) „ Proc. Roy. Astr. Soc. London 76 (1905), nr. 508.

stets anstreben müssen, die Wahrscheinlichkeit des gezeichneten Entwicklungsweges durch eine quantitative Theorie der Entwicklungskräfte zu erhärten. Aber auch die auf dem ersten Wege gefundenen Resultate bleiben vielfach unbefriedigend, wenn es nicht gelingt, die Mannigfaltigkeit der von der Theorie vorausgesagten möglichen Zustände so weit einzuschränken, daß sie identisch wird mit der Mannigfaltigkeit der tatsächlich in der Natur verwirklichten Zustände.

II. Innerer Aufbau und normale Sternentwicklung.

4. Zustandsgrößen. Anzahl und Art der voneinander unabhängigen Parameter anzugeben, die den physikalischen Zustand und die Entwicklung kosmischer Materie eindeutig festlegen, ist zur Zeit noch kaum möglich. Die Hauptschwierigkeit scheint darin zu liegen, daß der Beobachtung nur gewisse Integralwerte zugänglich sind, und auch diese nur in sehr beschränktem Umfang: die Gesamtmasse — nur bei Gliedern eines Doppelsternsystems hypothesenfrei zu berechnen —, die totale Leuchtkraft — visuell, photographisch oder bolometrisch —, die spektrale Verteilung der ausgestrahlten Energie und die mit deren Hilfe abgeleiteten effektiven Temperaturen, Durchmesser und mittleren Dichten. In die letztgenannten Größen, ebenso wie in die bolometrischen Leuchtkräfte gehen bereits wesentliche Voraussetzungen über die Natur der Sternstrahlung ein, vorab die Gültigkeit des *Planck*schen Gesetzes.

Fassen wir den Begriff der Zustandsgröße in dem weitesten kosmogonischen Sinn, so haben wir noch hinzuzufügen: die Geschwindigkeit des Schwerpunktes relativ zu einem vorgegebenen Koordinatensystem und die Rotation um bestimmte Achsen (Drehimpuls). Denn die Verteilung der kinetischen Energie auf die einzelnen Mitglieder eines Sternsystems ist von grundlegender Bedeutung für die Beurteilung des Entwicklungszustandes des Systems; während die Umlaufs- und Rotationsmomente eine entscheidende Rolle spielen bei der Kritik der Hypothesen über die Entstehung des Planetensystems und die Entwicklung von Doppelsternsystemen.

Die Zustandsgrößen im üblichen physikalischen Sinn, also Druck, Temperatur, Dichte der Materie, können nur auf theoretischem Wege abgeleitet werden, unter Übertragung der uns auf der Erde bekannten

27) *H. N. Russell*, „Giant" and „Dwarf" Stars, The Observatory 36 (1913), p. 324.

28) *H. N. Russell*, On the Probable Order of Stellar Evolution, The Observatory 37 (1914), p. 165.

physikalischen und chemischen Gesetzmäßigkeiten, was im allgemeinen auf eine weitgehende Extrapolation hinausläuft. Da für eine Prüfung der Theorie nur die obengenannten Integralwerte zur Verfügung stehen und, wie die Diskussionen der letzten Jahre ergeben haben, sehr allgemeine und unter Umständen recht verschiedene Voraussetzungen eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erzielen lassen, darf man von Anfang an keine eindeutige Entscheidung erwarten. In der Tat stehen sich gerade im Augenblick recht verschiedene Auffassungen über die Natur des Sterninnern gegenüber, die noch nicht zu einer endgültigen Klärung geführt haben.[29])

Zur Charakterisierung der Gesamterscheinung eines Sternes bieten sich, weil der Beobachtung im weitesten Umfange zugänglich, Leuchtkraft und effektive Temperatur als natürliche Parameter dar. Im Gegensatz zur Stellarastronomie, welche fast ausschließlich mit der Verteilungsfunktion der Leuchtkräfte[30]) rechnete, spielte für die Kosmogonie die Temperatur die entscheidende Rolle: der Vorgang der Abkühlung einer hochtemperierten Gasmasse erscheint als der natürlichste kosmogonische Prozeß. Die Erkenntnis, daß die Korrelation zwischen absoluter Leuchtkraft und effektiver Temperatur nicht eindeutig ist, daß vielmehr die großen Verschiedenheiten der Leuchtkräfte außer durch die Unterschiede der spezifischen Strahlungsintensitäten (Spektraltypen) vor allem durch die verschiedene Größe der strahlenden Oberflächen (Riesen und Zwerge) bedingt sind, war entscheidend für Stellarastronomie wie Kosmogonie. Beide müssen, wenn sie nicht Gefahr laufen wollen, Fehlschlüsse zu machen, mit zweiparametrigen Zustandsverteilungen rechnen. Nach dem Vorgange von *Hertzsprung* und *Russell*, mit deren Namen diese Art von Zustandsdiagrammen verknüpft wird (*Hertzsprung-Russell*-Diagramm), hat man sich daran gewöhnt, als den einen Parameter den Spektraltypus bzw. den Farbenindex zu wählen, als anderen die visuelle oder photographische Größe.

Der Spektraltypus wird im wesentlichen durch die Vorgänge in den äußeren Atmosphärenschichten der Sterne bestimmt und ist selbst wieder eine Funktion der effektiven Temperatur und der Dichte. Da man überdies bei schwächeren Sternen, deren Spektraltypen nicht zu bestimmen sind, Farbenindizes als Äquivalente einführen muß, die ihrer Herleitung entsprechend linear von den reziproken Temperaturen

29) Vgl. die Diskussionen zwischen *Eddington, Jeans, Milne, Russell* und *Vogt* in Monthly Notices, Observatory, Nature, Astr. Nachr. und Ztschr. f. Astroph. seit 1929.

30) Encykl. VI 2, 23 (*Kobold*).

abhängen, ist allgemein $\frac{c_2}{T}$ als Zustandsparameter vorzuziehen[31]); um so mehr, als auch die Reduktion auf bolometrische Größen[32]) eindeutig ist als Funktion der effektiven Temperatur, nicht aber als Funktion des Spektraltypus.

Die absolute bolometrische Leuchtkraft ist offenbar ein Maß für die im Innern eines Sternes erzeugte Energie und den mittleren Absorptionskoeffizienten der Sternmaterie; denn sie stellt den Nettostrom dar, der nach allen Emissions- und Absorptionsvorgängen im Innern und in der Atmosphäre die Oberfläche verläßt. Sie hängt daher eng mit dem zeitlichen Ablauf der Sternentwicklung zusammen und liefert das wichtigste Kriterium für die kosmogonische Zeitskala.

Die Tatsache, daß die dritte Zustandsgröße, die Masse, hypothesenfrei nur bei Doppelsternen bestimmt werden kann, läßt gerade bei kosmogonischen Betrachtungen einem grundsätzlichen Bedenken Raum: Man wird der Gesamtmasse, die bei der Bildung eines Doppelsternsystems in Wirksamkeit tritt, eine entscheidende Rolle zubilligen müssen. Die durch Beobachtungen von z. T. recht bescheidener Genauigkeit belegten Werte der Massen einzelner Sterne beziehen sich auf die Mitglieder von im ganzen 15 Doppelsternsystemen und einen einzigen isolierten Stern, die Sonne.[33]) Die Überzeugung, daß kein grundsätzlicher Unterschied besteht zwischen isolierten Sternen und den Mitgliedern von Systemen, schöpfen wir im Grunde nur daraus, daß die Sonne sich dem aus den Doppelsternmassen abgeleiteten Masse-Leuchtkraft-Gesetz (s. Nr. 5) gut einordnet.

Wegen der Beschränktheit unserer Kenntnisse individueller Massen hat man versucht, auf statistischem Wege Anhaltspunkte über die durchschnittliche Größe der Sternmassen zu gewinnen. *v. Zeipels*[34]) Abschätzung der Massen in Sternhaufen setzt eine Theorie des Aufbaus der Sternhaufen voraus und liefert nur die Verhältnisse der Massen einzelner Spektralgruppen. Die von *Seares*[35]) für die Sterne des Milchstraßensystems abgeleiteten mittleren Massen beruhen auf der Voraussetzung der Gleichverteilung der Energie, unter Verwendung der aus Radialgeschwindigkeiten, Eigenbewegungen und spektroskopischen Parallaxen berechneten Raumgeschwindigkeiten. Die Er-

31) Encykl. VI 2, 26 (*Hopmann*), Nr. 1.

32) Ebd. Nr. 20.

33) *Eddington,* Der innere Aufbau der Sterne, p. 18 (im Folgenden abkürzend zitiert als I. A. S.), Tabelle 17.

34) *H. v. Zeipel* und *J. Lindgren,* Photometrische Untersuchung der Sterngruppe Messier 37, K. Sv. Vet. Akad. Handl. 61 (1921), Nr. 15.

35) *F. H. Seares,* The masses and densities of the stars, Ap. J. 55 (1922), p. 165.

gebnisse dieser beiden Untersuchungen sind kosmogonisch nicht verwendbar, da sie die Fragestellung gerade umkehren und das zur Voraussetzung machen, was wir auf Grund der Beobachtungen ableiten wollen.[36])

Die Durchmesser der Sterne sind im allgemeinen nicht als unabhängige Parameter zu betrachten, da sie gewöhnlich aus der effektiven Temperatur und der Gesamtstrahlung berechnet werden.[37]) Die wenigen Fälle, in denen es möglich war, Winkeldurchmesser interferometrisch[38]) unmittelbar zu messen, sind insofern von Bedeutung, als sie in vollkommener Übereinstimmung stehen mit den aus der Strahlung abgeleiteten Werten und damit die Existenz riesig ausgedehnter Gasbälle (bis zum 500-fachen Sonnendurchmesser) niedriger effektiver Temperatur (zwischen 1800^0 und 3000^0 abs.) sicherstellten. Solche Gasbälle hat ja *Lockyer*[39]) an den Anfang der Sternentwicklung gestellt.

Zu den interferometrisch bestimmten Durchmessern gesellen sich noch die aus den Lichtkurven abgeleiteten Durchmesser von Bedeckungsveränderlichen[40]), die ihrem Sinne nach auch geometrische Durchmesser sind und bei Kenntnis der spektroskopischen Bahn in linearem Maß angegeben werden können.

Im übrigen sind die Durchmesser nicht Selbstzweck, sondern dienen vor allem zur Ableitung der mittleren Dichte, wenn die Massen bekannt sind oder man plausible Annahmen über sie machen kann. Bei den roten Riesen ergeben sich so Dichten von 10^{-4} bis 10^{-7}, wenn man normale Massen voraussetzt; bei den „weißen“ Zwergen kann man Dichten von 10^4 bis 10^5 nicht entgehen, wenn man die Berechnung der Durchmesser aus den effektiven Temperaturen für diese Sterne grundsätzlich anerkennt. Da bisher keiner dieser besonderen Sterne spektralphotometrisch untersucht worden ist, sind Zweifel vielleicht weniger scharf zurückzuweisen, als dies gemeinhin geschieht. Ebenso wie man, wenn man sich nur auf die Beobachtungen stützen will, die Möglichkeit nicht ausschließen kann, daß die roten Riesen abnorm große Massen besitzen, die sich nicht dem allgemeinen Masse-Leuchtkraft-Gesetz einordnen.

---

36) *H. Siedentopf,* Grundlagen der Kosmogonie, Veröffentl. Göttingen, Heft 3 (1928), p. 26.

37) Encykl. VI 2, 26, Nr. **21**.

38) Vgl. den Bericht mit Literaturangaben von *F. G. Pease*, Interferometer Methods in Astronomy, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 10 (1931), p. 84.

39) Anm. 22.

40) Encykl. VI 2, 27, Nr. **47—54.**

Weitgehend frei von unsicheren Hypothesen ist die Bestimmung der Dichte bei Bedeckungsveränderlichen.[40]) Hier geht in die Berechnung nur eine Annahme über das Massenverhältnis ein, wenn nicht auch dieses durch Hinzunahme spektroskopischer Daten abgeleitet und die Dichtebestimmung damit absolut gemacht werden kann. Bei Berücksichtigung der Leuchtkraft und der geometrischen Dimensionen des Systems sind die zulässigen Grenzen für das unbekannte Massenverhältnis stets so eng, daß auf keinen Fall Fehler in der Größenordnung der Dichte entstehen können. Alle bekannt gewordenen Werte fügen sich denn auch vollkommen dem aus den Strahlungseigenschaften der normalen Sterne gewonnenen Bilde ein.

Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der Zustandsparameter für eine Auswahl von Sternen, die als repräsentativ angesehen werden

Tabelle 1.

Zustandsgrößen ausgewählter Sterne.

Stern	Sp.	M_b	$\frac{c_2}{T_e}$	T_e	$\mathfrak{M}$	R	ϱ	ε
H. D. 1337 A	$O\,8$	$-8{,}8$	0,51	28000	36,3	23,8	0,004	15000
V Puppis A	$B\,1$	$-5{,}3$	0,51	28000	19,2	7,6	0,06	1100
β Aurigae A	$A\,0$	$+0{,}2$	1,28	11200	2,4	2,8	0,13	57
α Can. maj. A	$A\,0$	$+0{,}9$	1,28	11200	2,4	1,6	0,93	29
α Can. min. A	$dF\,5$	$+3{,}0$	2,04	7000	1,1	1,8	0,28	10
Sonne	$dG\,0$	$+4{,}8$	2,38	6000	1,0	1,0	1,42	1,9
α Centauri A	$dG\,0$	$+4{,}7$	2,38	6000	1,1	1,1	1,34	1,9
o_2 Eridani A	$dG\,5$	$+5{,}9$	2,60	5600	0,9	0,7	3,7	0,8
α Centauri	$dK\,5$	$+5{,}7$	3,24	4400	1,0	1,2	0,76	0,9
Krueger 60 A	$dM\,3$	$+10{,}0$	4,46	3200	0,26	0,33	9,6	0,07
α Aurigae B	$gF\,0$	$+0{,}1$	1,94	7400	3,3	5,5	$3\cdot10^{-2}$	46
α Aurigae A	$gG\,0$	$-0{,}2$	2,53	5650	4,2	11	$4\cdot10^{-3}$	48
α Bootis	$gK\,0$	$-0{,}8$	3,40	4200	(8)	30	$(3\cdot10^{-4})$	(44)
α Tauri	$gK\,5$	$-1{,}4$	4,33	3300	(4)	60	$(2\cdot10^{-5})$	(150)
β Pegasi	$gM\,5$	$-3{,}3$	4,83	2900	(9)	170	$(2\cdot10^{-6})$	(400)
α Orionis	$cM\,0$	$-4{,}6$	4,61	3100	(15)	290	$(6\cdot10^{-7})$	(750)
α Scorpii	$cM\,0$	$-5{,}6$	4,61	3100	(30)	480	$(3\cdot10^{-7})$	(800)
o_2 Eridani B	$A\,0$	$+10{,}8$	1,28	11200	0,44	0,019	$1\cdot10^{5}$	0,018
α Can. maj. B	$A\,7$	$+11{,}2$	1,79	8000	0,85	0,030	$4\cdot10^{4}$	0,007
van Maanen	F	$+14{,}3$	2,04	7000	(0,14)	0,017	$(4\cdot10^{5})$	(0,001)

Sp. Spektraltypus.

M_b absolute bolometrische Größe. Leuchtkraft $L = 2{,}512^{(4{,}85 - M_b)}$.

T_e effektive Temperatur (absolut).

$\mathfrak{M}$ Masse in Einheiten der Sonnenmasse ($1{,}985\cdot10^{33}$ g).

R Radius in Einheiten des Sonnenradius ($0{,}695\cdot10^{11}$ cm).

ϱ Dichte in g cm^{-3}.

ε Energieerzeugung pro g Masse in erg sec^{-1}.

Hypothetische Massen und die daraus abgeleiteten Größen sind eingeklammert.

kann. Sie umfaßt die nach all unseren bisherigen Erfahrungen „normalen“ Zustände, in denen kosmische Materie als eigenstrahlender Stern in Erscheinung tritt. Ausgeschlossen sind zunächst alle Arten von Nebeln und Nebelsternen (Spektralklassen P und Q) und die Sterne mit physikalischem Lichtwechsel. Diese kosmogonisch besonders bedeutsamen Objekte erfordern eine gesonderte Behandlung.

Auch auf alle Feinheiten der Unterteilung, wie z. B. die Zweiteilung der A-Sterne und anderes, und die seltenen Typen der Klassen R, S und N ist nicht weiter Rücksicht genommen.

Aus kosmogonischen Gründen sind neuerdings auch andere als die unmittelbar beobachtbaren Zustandsgrößen für die Zeichnung von Zustandsdiagrammen vorgeschlagen worden. *Atkinson*[41]) wählt Masse und mittlere Dichte, *Milne*[42]) Leuchtkraft und Radius. Da dadurch nur eine eindeutige Transformation des üblichen (L, T)-Diagramms vorgenommen wird, kann diese andere Wahl der Zustandsgrößen natürlich keine neuen Erkenntnisse bringen. Im folgenden soll daher die alte Darstellung beibehalten werden.

5. Zustandsgleichungen. Tabelle 1 zeigt deutlich die drei Gruppen, in die sich die Gesamtheit der uns bekannten Sterne — zunächst abgesehen von den in der vorigen Nummer genannten Ausnahmen — einordnen läßt, und die sich klar durch Größe und Zusammenhang der Zustandsparameter unterscheiden. Die Sterne der Tabelle sind in jeder Gruppe für sich nach abnehmenden effektiven Temperaturen angeordnet, entsprechend der historischen Reihenfolge der Spektraltypen von „frühen“ zu „späten“ Typen; die ursprüngliche kosmogonische Bedeutung dieser Bezeichnung liegt auf der Hand.

Bei den Sternen der „Hauptreihe“, deren zweite Hälfte, etwa von $F0$ ab, die normalen „Zwerge“ bilden, nehmen Leuchtkraft, Masse, Radius und Energieerzeugung pro Masseneinheit mit der Temperatur ab, die mittlere Dichte nimmt zu; die „Riesen“ zeigen gerade das umgekehrte Verhalten. An der Verzweigungsstelle der beiden Reihen, zwischen A und F, kommt man von beiden Seiten her zu den gleichen mittleren Werten; der Unterschied zwischen „Riesen“ und „Zwergen“ kann nur für die Typen später als F gemacht werden. Neuerdings sind wieder Stimmen laut geworden, welche, geleitet von kosmogonischen Gesichtspunkten, nicht den von der Verzweigungsstelle nach oben zu den B-Sternen führenden Ast, sondern den hier als

41) *R. d'E. Atkinson,* Atomic synthesis and stellar energy, Ap. Journ. 73 (1931), Heft 4 u. 5.

42) *E. A. Milne,* The white dwarf stars, Halley lecture 1932.

„Riesenast" bezeichneten, als zur Hauptreihe gehörig betrachtet wissen wollen[43]), während andere Wert auf die Feststellung legen, daß der Riesenast gar nicht in die Hauptreihe mündet, sondern von ihr deutlich durch die Lücke bei den F-Sternen getrennt ist. Von der dritten Gruppe, den „weißen Zwergen", kennen wir vorerst noch zu wenige Mitglieder, um gesetzmäßige Zusammenhänge aufdecken zu können. Die Gruppe ist als Ganzes gekennzeichnet durch die völlig andere Größenordnung der mittleren Dichten, zu denen keine Brücke von den beiden anderen Gruppen zu führen scheint.

Rein empirisch ist also festzustellen, daß eine enge Korrelation besteht zwischen den a priori als unabhängig zu betrachtenden Parametern Masse, Leuchtkraft und effektive Temperatur; in der Natur sind nur bestimmte Kombinationen verwirklicht. Leider aber ist unser Beobachtungsmaterial noch so geartet, daß wir nicht entscheiden können, ob für die Sterne der Hauptreihe und für die Riesen die gleichen funktionalen Zusammenhänge gelten. Die Massen der typischen Riesen sind, bis auf den einen Fall Capella, unbekannt; die eingeklammerten Werte der Tabelle sind extrapoliert unter der Voraussetzung, daß für die Riesen das gleiche „Masse-Leuchtkraft-Gesetz" gelte wie für die Hauptreihe.[44]) Innerhalb der Hauptreihe ist die Korrelation zwischen Leuchtkraft und effektiver Temperatur so eng, die Auswahl der Sterne mit einigermaßen sicher bestimmter Masse so gering, daß es unmöglich ist, die Abhängigkeit der Leuchtkraft von der Masse zu bestimmen.

Wir sehen uns daher vorerst außerstande, eine empirische Zustandsgleichung der Form

$$L = f(\mathfrak{M}, T_e) \tag{1}$$

abzuleiten; m. a. W. wir können in dem üblichen (L, T)-Diagramm keine Kurven $\mathfrak{M} = \text{const.}$ zeichnen. *Rabe*[45]) hat zwar einen solchen Versuch gemacht und aus dem vorliegenden Material an mehr oder weniger zuverlässigen Massenbestimmungen von Doppelsternen die Beziehungen abgeleitet

$$\tag{2} \begin{cases} L = C \cdot T^6 \cdot \mathfrak{M}^{\frac{4}{9}} & \text{für die Typen } A0 \text{ bis } F6, \\ L = C' \cdot T^{\frac{16}{3}} \cdot \mathfrak{M}^{\frac{2}{9}} & \text{,, \quad ,, \quad ,, } \; F8 \text{ ,, } M. \end{cases}$$

---

43) *B. Strömgren,* Ztschr. f. Astroph. 4 (1932), p. 146/147.

44) Über eine Korrektion bei α Bootis vgl. *Russell,* Astronomy, p. 875.

45) *W. Rabe,* Die absolute Helligkeit der Zwergsterne als Funktion ihrer Temperatur und Masse, A. N. 225 (1925), p. 217.

Da aber die verfügbaren Massen mit ganz wenigen Ausnahmen von Sternen der Hauptreihe stammen, kann man dem Beobachtungsmaterial innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit ebenso genügen durch eine der Beziehungen, die nur je zwei der Zustandsparameter verknüpfen:

$$L = \text{const. } \mathfrak{M}^3 \tag{3}$$

oder

$$L = \text{const. } T^{\frac{17}{3}}. \tag{4}$$

Auf (3) hat *Jeans*[46]) hingewiesen; (4) liest man aus der Fig. 1 (p. 1004) ab. *Siedentopf*[47]) hat den Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate *Rabes* untersucht und gezeigt, daß die Kurven $\mathfrak{M} = \text{const.}$, die bei *Rabe* sehr nahe parallel zur Richtung der Hauptreihe im (L, T)-Diagramm verlaufen, sich bei Berücksichtigung der Streuung durch die Beobachtungsfehler praktisch auf Punkte reduzieren, welche den Mittelwerten längs der durch (4) dargestellten Mittellinie der Hauptreihe entsprechen.

Über die Möglichkeiten, mit Hilfe der Theorie des Sternaufbaus zu Aussagen über die Zustandsgleichung zu gelangen, müssen wir heute skeptischer urteilen als zu der Zeit, da *Emden*[48]) über den Stand der Thermodynamik der Himmelskörper berichtete. Auf der einen Seite haben zuerst *Russell*[49]) und *Vogt*[50]) gezeigt, daß man unter sehr viel allgemeineren Voraussetzungen, als dem *Eddington*schen Modell entsprechen, eine Beziehung zwischen Masse, Leuchtkraft und effektiver Temperatur ableiten kann; auf der anderen Seite bestreitet *Milne*[51]) heute, daß man durch Gleichgewichtsbetrachtungen allein überhaupt zu Aussagen von so fundamentaler Art gelangen könne.

Selbst wenn man den letzteren radikalen Standpunkt nicht teilen will und unter Festlegung auf bestimmte Sternmodelle theoretische Zustandsgleichungen der Form (1) ableitet, denen sich alle uns bekannten Sternzustände — mit Ausnahme der weißen Zwerge — einfügen, bleibt vorerst als kosmogonisch bedeutsame Tatsache bestehen, daß die von der Natur offenbar getroffene Auswahl unter den theoretisch möglichen Zuständen nur durch Zusatzhypothesen verständlich

46) A. C., p. 126.

47) Fußnote 36), p. 21—23, Fig. 4.

48) Encykl. VI 2, 24 (1926).

49) Astronomy, Nr. 960 und 965 (1927).

50) Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 6 (1927); A. N. 233 (1928), p. 13; Veröffentl. Jena Nr. 3 (1930).

51) M. N. 90 (1929), p. 17; 91 (1930), p. 4.

gemacht werden kann, die sich entweder auf den Mechanismus der Energieerzeugung (*Jeans*[46]), *Atkinson*[41])) beziehen oder an dynamische Stabilitätsbetrachtungen anknüpfen.

Für homologe Sterne, in deren äußeren Schichten die Gasgesetze gelten, kann die Zustandsgleichung nach *Vogt*[50]) in der allgemeinen Form geschrieben werden:

$$L = 4\,\pi c G \frac{1-\beta}{k}\,\mathfrak{M}\left[1 + \psi\,\frac{\beta}{4-3\beta}\right] \tag{5}$$
$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = \varphi\,\mathfrak{M}^2 m^4.$$

Sie geht in die von *Eddington* angegebene Form[52]) über, wenn man für den Absorptionskoeffizienten k das *Kramers*sche Gesetz einführt und die Parameter ψ und φ für alle Sterne gleich setzt:

$$L = \text{const.}\,(1-\beta)^{\frac{3}{2}}\, m^{\frac{4}{5}}\,\mathfrak{M}^{\frac{7}{5}}\, T_e^{\frac{4}{5}} \tag{6}$$
$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = \text{const.}\,\mathfrak{M}^2 m^4.$$

Die relativ große Unempfindlichkeit dieser allgemeinen Zustandsgleichung gegenüber Änderungen im Aufbaugesetz der Sterne[50]), in Verbindung mit der Anpassungsfähigkeit der Formel an beobachtete Verhältnisse durch geeignete Wahl der verfügbaren Parameter (φ, ψ, k, m) gibt dem Masse-Leuchtkraft-Gesetz *Eddingtons* mehr den Charakter einer Interpolationsformel als den eines gut begründeten Naturgesetzes. Die Meinung *Eddingtons*, der sich auch *Emden*[53]) angeschlossen hat, daß die gute Darstellung der Beobachtungen durch die dem speziellen Sternmodell entsprechende Formel ein Beweis sei für die Richtigkeit der gemachten Voraussetzungen (vor allem die Gültigkeit der Gasgesetze auch im Innern der Zwerge), kann nicht mehr aufrechterhalten werden.

Man kann rein qualitativ aus der Gültigkeit eines Masse-Leuchtkraft-Gesetzes wenigstens einen Schluß auf die obere Grenze der Sternmasse ziehen. *Vogt*[50]) hat darauf hingewiesen, daß (5) die zulässigen Anordnungen der Energiequellen mit zunehmender Masse stark einschränkt, da dann $1-\beta$ gegen 1 geht und daher das Produkt $\frac{k L_r}{\mathfrak{M}_r}$ durch den ganzen Stern konstant gleich $\frac{kL}{\mathfrak{M}}$ sein muß. Da gerade alle neueren Untersuchungen darauf hindeuten, daß die Energiequellen stark gegen den Mittelpunkt der Sterne konzentriert angenommen

52) Encykl. VI 2, 24, Gleichung (149).

53) Encykl. VI 2, 24, p. 506.

werden müssen, wird verständlich, daß große Massen (größer als 10 Sonnenmassen) überhaupt selten sind, und daß man unter diesen Sternen auch einen erheblichen Prozentsatz mehr oder weniger instabiler Zustände (Veränderliche und spektroskopische Doppelsterne) vorfindet.

Die von *Eddington*[54]) für die bei der Bildung eines Sternes notwendige Masse angesetzte untere Grenze von etwa 3,5 Sonnenmassen ist lediglich aus dem Fehlen der M-Sterne von mittlerer Leuchtkraft, d. h. einem rein empirischen Befund, abgeleitet; sie hat zur wesentlichen Voraussetzung die Annahme, daß alle Sterne als M-Sterne entstehen. Dies aber ist bereits eine kosmogonische Ausdeutung des Beobachteten, für die keine theoretische Begründung gegeben werden kann; die im Gegenteil heute stark in Zweifel gezogen werden muß.

Angesichts der Unbestimmtheit der Zustandsgleichung bereits im rein statischen Problem kann es nicht überraschen, daß man bei den Untersuchungen über den Einfluß einer Rotation kaum über erste Ansätze hinausgekommen ist. Zu den den statischen Aufbau bestimmenden Parametern gesellt sich jetzt noch die Rotationsgeschwindigkeit ω, die einerseits die Gleichgewichtsbedingungen verschärft, andererseits die Mannigfaltigkeit der möglichen Zustände vermehrt. Unter der Voraussetzung gleichförmiger Rotation gilt nach *von Zeipel*[55]) zwischen der mittleren Energieerzeugung ε und der Winkelgeschwindigkeit der Rotation die Beziehung

$$\varepsilon \sim \left(1 - \frac{\omega^2}{2\pi G \varrho}\right).$$

Vogt[56]) hat dieses Theorem von *v. Zeipel* auf Sterne mit ungleichförmiger Rotation erweitert zu

$$\varepsilon \sim \left[1 - \frac{\omega^2}{2\pi G \varrho}\left(1 + \frac{\partial \log \omega}{\partial \log x} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y}\right)\right].$$

Man wird diese Bedingungen für die Anordnung der Energiequellen wohl so ausdeuten müssen, daß im allgemeinen eine gleichförmige Rotation der Sterne unmöglich ist, daß vielmehr stets Strömungen auftreten, wie sie auch von der Sonne her bekannt sind. *Jeans*[57]) hat aus Betrachtungen über die Strahlungsbremsung ein allgemeines Rotationsgesetz abzuleiten versucht; bei *Rosseland*[58]) findet man Ansätze

54) I.A.S., Nr. 214.

55) Seeliger-Festschrift 1924, p. 144; M. N. 24 (1924), p. 665.

56) Veröffentl. Jena Nr. 2 (1930).

57) A. C., Chapt. X.

58) *S. Rosseland,* Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage, 1931. Neuere Ausführungen in Publ. Univ. Obs. Oslo No. 1—3 (1931/32). Vgl. auch *L. Biermann,* Ztschr. f. Astroph. 5 (1932), p. 117.

zu einer Behandlung der Strömungsvorgänge. Die Theorie steckt noch in ihren ersten Anfängen.

6. Zustandsverteilungen. Art und Umfang unserer empirischen und theoretischen Kenntnisse bedingen, daß die Untersuchungen über die Verteilungsfunktion der Sternzustände sich fast ausschließlich auf die beiden Parameter Leuchtkraft und Temperatur beschränken. Unter den oben gemachten Vorbehalten über das Masse-Leuchtkraft-Temperatur-Gesetz können die für die Leuchtkräfte gefundenen Gesetzmäßigkeiten in solche für die Massen umgedeutet werden. Die Temperatur kann oder muß, je nach den Umständen, durch den Spektraltypus oder ein Farbenäquivalent vertreten werden.

Das Leuchtkraft-Temperatur-Diagramm (*Hertzsprung-Russell*-Diagramm, Farben-Helligkeits-Diagramm) in seiner üblichen einfachen Form verzeichnet die innerhalb einer nach irgendwelchen Gesichtspunkten ausgewählten statistischen Gesamtheit verwirklichten Zustände. Es drückt in erweiterter Form den Tatbestand aus, der in Tabelle 1 bereits in Erscheinung trat: die Beschränkung der in der Natur verwirklichten Zustände auf gewisse Kombinationen von Leuchtkraft und Temperatur, für welche sich die Bezeichnungen eingebürgert haben: Übergiganten (Sterne größter Leuchtkraft, gekennzeichnet durch besonders scharfe Linien im Spektrum, sog. c-Sterne), Riesen (neuerdings auch noch „Unterriesen"), Zwerge und weiße Zwerge (Sterne hoher Temperatur und niedriger Leuchtkraft).

Für die Zwecke der Stellarastronomie wie der Kosmogonie bedarf dieses Diagramm noch einer Bearbeitung, die es umwandelt in die wahre Verteilungsfläche $\psi(L, T)$ einer Raumgesamtheit, durch Befreiung von dem Einfluß der bei der Zusammentragung des Materials zufällig wirksamen Auswahlprinzipien. Zu der Charakterisierung der Zustände überhaupt muß sich noch eine Angabe gesellen über die relative Häufigkeit, mit der sich diese Zustände innerhalb einer räumlich und zeitlich zusammengehörigen Gruppe von Sternen verteilen. Unter gewissen Stationaritätsbedingungen wird man diese relativen Häufigkeiten dann umdeuten dürfen in relative Verweilzeiten der Sterne in den betreffenden einzelnen Zuständen, im Sinne der zweiten der in Nr. **3** angegebenen kosmogonischen Methoden.

Für unser Sternsystem haben ziemlich gleichzeitig *Heß*[59]), *Malmquist*[60]) und *van Rhijn*[61]) einen solchen Versuch unternommen. Fig. 1

59) Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 3 (1924) und Seeliger-Festschrift 1924.

60) Lund Meddel. 2 Nr. 32 (1924) = K. Sv. Vet. Handl. 3. Ser., Bd. 1, Nr. 2.

61) Seeliger-Festschrift 1924 und Publ. Groningen 38 (1925)

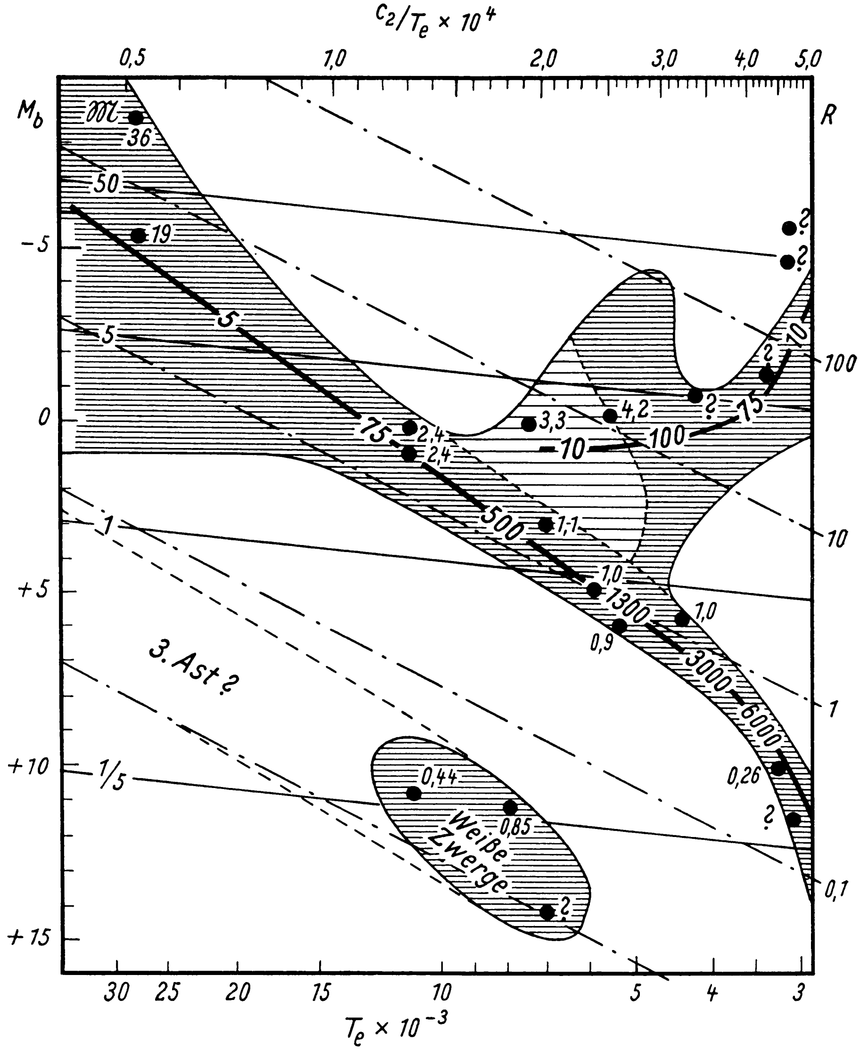

Fig. 1.
Schematisches Diagramm der Zustände und Zustandsverteilung im engeren Sternsystem. Die schraffierte Fläche umfaßt die überhaupt verwirklichten Zustände. Die Linie maximaler Häufigkeit verwirklichter Zustände (Kammlinie) ist dick eingezeichnet, unterbrochen durch Zahlen, die die ungefähren Häufigkeiten in willkürlicher Einheit angeben (*K*-Riesen = 100 gesetzt). Die einzelnen mit Zahlen bzw. ? bezeichneten Punkte bedeuten Sterne bekannter absoluter Leuchtkraft; die Zahlen geben die Masse an, soweit sie bekannt ist. — Abszisse: $\log \frac{c_2}{T_e}$; Ordinate: Bolometrische Leuchtkraft M_b; —— = Kurven konstanter Masse $\mathfrak{M}$ für das *Eddington*sche Modell; ·—·—· = Kurven konstanten Radius *R*.

gibt[62]) in stark schematisierter Form die Verteilungsfläche der Leuchtkräfte und Temperaturen wieder, wie sie sich nach diesen Untersuchungen

62) *H. Kienle*, Zur Statistik der Sterntemperaturen, Ztschr. f. Astroph. 3 (1931), p. 1.

darstellt. Eingezeichnet ist lediglich der ungefähre Umriß der Basis der Verteilungsfläche (Häufigkeit 0) und die Verbindungslinie der Maxima der Häufigkeiten für die einzelnen Spektraltypen (Kammlinie). Die relativen Höhen der Maxima sind in willkürlichen Einheiten angegeben.

Sieht man zunächst von den weißen Zwergen ab, so gehören ungefähr 99% aller Sterne der Hauptreihe an. Die relativen Häufigkeiten wachsen stark an mit abnehmender Leuchtkraft. Isoliert davon liegt ein verhältnismäßig breites Gebiet mit sehr geringer Häufigkeit: die Riesen, von der Hauptreihe getrennt durch ein dünn besetztes Gebiet, das fast ausschließlich Veränderliche und spektroskopische Doppelsterne enthält.[63])

Die großen Unterschiede in der relativen Häufigkeit der Riesen und der dem unteren Teil der Hauptreihe angehörigen Zwerge sind ein wesentliches Kennzeichen der Verteilungsfunktion zunächst des „engeren" Sternsystems. Wie sich die bekannten anderen Typen von Sternen einordnen, und ob dieser Verteilungsfunktion universelle Geltung zugesprochen werden kann, sind Fragen von erheblicher kosmogonischer Bedeutung.

O-Sterne, Planetarische Nebel und Novae (Spektraltypen *P*, *Q*) sind unzweifelhaft „seltene" Objekte, die im Diagramm der Zustandsverteilung in das Gebiet hoher Temperaturen und Leuchtkräfte fallen. Alle Arten von Veränderlichen finden wir vor allem unter den Riesen und Übergiganten, von denen überhaupt nur wenige einfache Sterne mit konstanter Helligkeit sind. Über die Stellung der weißen Zwerge lassen sich nur gewisse Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen anstellen. Wir kennen bisher zwar erst 4 oder 5 dieser Sterne, die wegen ihrer geringen Leuchtkraft reine Zufallsentdeckungen sind. Berücksichtigt man, daß diese Sterne sich innerhalb einer Kugel von 3 parsec Radius befinden, die insgesamt kaum mehr als 50 Sterne überhaupt enthält, so kommt man zu dem Schluß, daß die weißen Zwerge vielleicht in der gleichen Häufigkeit vorhanden sind wie die normalen Zwerge, daß also der durch sie verwirklichte Zustand als „normal" im kosmogonischen Sinn zu betrachten ist.

Die Schwierigkeiten, die sich der Bestimmung der vollständigen Verteilungsfunktion $\psi(L, T)$ entgegenstellen, haben vielfach dazu geführt, daß die Untersuchungen an die nur einparametrigen Verteilungsfunktionen der Leuchtkräfte bzw. Temperaturen anknüpften. Aus der

63) Über Verfeinerungen aus neuerer Zeit vgl. vor allem *Strömberg*, Ap. Journ. 75 (1932), p. 115 (Mt. Wilson Contr. 442).

komplexen Gestalt der allgemeinen Verteilungsfläche $\psi(L, T)$ folgt, daß man für die Verteilungsfunktionen $\varphi_1(L)$ bzw. $\varphi_2(T)$ im allgemeinen keine einfachen *Gauß*schen Verteilungen wird erwarten dürfen. Der über alle Spektraltypen integrierten „Leuchtkraftkurve" kann man insofern kosmogonische Bedeutung beimessen, als sie bei Gültigkeit des Masse-Leuchtkraft-Gesetzes äquivalent der Verteilungsfunktion der Massen ist; die Masse aber ist jedenfalls ein die Sternentwicklung wesentlich bestimmender Parameter.

Durch Kombination der Daten von *van Rhijn*[61]) für die Leuchtkraftfunktion und von *Eddington*[64]) für das Masse-Leuchtkraft-Gesetz erhält man die Tabelle 2.

Tabelle 2.

M	$\log \Phi(M)$	$\log \mathfrak{M}$	M	$\log \Phi(M)$	$\log \mathfrak{M}$
-4	3,52	$+1,34$	$+5$	7,42	$-0,03$
3	4,11	1,10	6	7,52	0,13
2	4,70	0,92	7	7,58	0,23
1	5,30	0,73	8	7,60	0,33
0	5,90	0,57	9	7,60	0,42
$+1$	6,43	0,43	10	7,63	0,51
2	6,78	0,30	11	7,79	0,61
3	7,04	0,18	12	7,98	0,70
4	7,25	0,07			

Ob die Häufigkeit für Massen kleiner als $\frac{1}{5}$ Sonnenmassen ($M = 12$) noch weiter zunimmt oder ob die tabulierten Werte die eine Hälfte einer normalen *Gauß*verteilung darstellen, deren andere Hälfte uns wegen der Lichtschwäche der Objekte nicht zugänglich ist, mit einem Maximum in der Gegend von $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{10}$ Sonnenmassen, kann nicht entschieden werden. So lange wir noch keine Vorstellung davon haben, welche Prozesse bei der „Bildung" eines Sternes sich abspielen, können wir auch theoretisch nichts darüber aussagen, ob und wie die Wahrscheinlichkeit der Zusammenballung der Materie zu isolierten „Sternen" von der Größe der Massen abhängt.

Da die effektive Temperatur eine für die Beschreibung zwar sehr geeignete, sicher aber keine unabhängige Zustandsgröße ist, sind Untersuchungen über die Verteilungsfunktion der Temperaturen (bzw. Farben) ohne Rücksicht auf die absoluten Leuchtkräfte, kaum von Bedeutung. Welche Temperatur ein Stern annimmt, hängt wesentlich mit von seiner Masse ab, wie das allgemeine (L, T)-Diagramm zeigt. Wie weit die gelegentlich behaupteten „diskreten Temperaturwerte",

64) I.A.S., Tabelle 14.

deren die Sterne nur fähig sein sollen[65][66][67]), reell sind, muß dahingestellt bleiben.

Kosmogonische Schlußfolgerungen von großer Tragweite sind an gewisse Feststellungen bei Doppelsternsystemen geknüpft worden, die sich auf die relative Lage der Komponenten im (L, T)-Diagramm und auf die Massenverhältnisse beziehen. *Leonard*[68]), *Lundmark* und *Luyten*[69]) sind gleichzeitig zu dem Ergebnis gelangt, daß die schwächere Komponente der helleren stets „im Sinne der *Lockyer-Russell*schen Entwicklungstheorie vorausgehe". Im Mittel kann man das Beobachtungsmaterial etwa durch folgende typische Systeme charakterisieren[70]):

Gruppe	Spektraltypen	Anzahl	Sp. (A)	$M(A)$	Sp. B	$M(B)$
Riesen	M bis F	17	$G\,7$	$-0{,}2$	$A\,5$	$+1{,}8$
Riesen/Zwerge	B bis A	12	$A\,3$	$+0{,}4$	$A\,9$	$+2{,}9$
Zwerge	F bis M	41	$G\,2$	$+4{,}8$	$G\,7$	$+6{,}0$

Sp. (A) und Sp. (B) sind die mittleren Spektra der Komponenten A und B, $M(A)$ und $M(B)$ die entsprechenden mittleren Leuchtkräfte.

Durch Übergang von den Leuchtkräften zu den Massen mit Hilfe des Masse-Leuchtkraft-Gesetzes wurden diese Feststellungen von *Vogt*[71]) noch ergänzt durch die weitere, daß die Massenverhältnisse sich mit abnehmender Leuchtkraft (Masse) der helleren Komponente, d. h. mit dem Fortschreiten längs der Hauptreihe, dem Wert 1 nähern.

Tabelle 3.

Spektrum	Anzahl	$\mathfrak{M}_h$	$\frac{\mathfrak{M}_h}{\mathfrak{M}_s}$
A	9	2,5	1,6
F	23	1,5	1,3
G	18	1,0	1,25
K	11	0,7	1,23
M	2	0,4	1,19

$\mathfrak{M}_h$ = Masse der helleren Komponente.
$\mathfrak{M}_s$ = „ „ schwächeren „

65) *J. Halm,* Magnitudes of stars contained in the Cape Zone Catalogue of 20843 stars. Zone -40° to -52°. London 1927.

66) *B. Sticker,* Veröffentl. Bonn 1930, Nr. 23; Ztschr. f. Astroph. 1 (1930), p. 174 und 4 (1932), p. 53; Encykl. VI 2, 26, Nr. **19**, **26**, **27**.

67) Fußnote 62.

68) Lick Obs. Bull. 1922, p. 343.

69) Astr. Journ. 35 (1922), p. 93 (Nr. 828).

70) Vgl. das Referat *Kienle,* Naturw. 11 (1923), p. 324. Die Figur von *Leonard* ist auch wiedergegeben in *Müller-Pouillet,* Physik V 2 (1928), p. 500.

71) Ztschr. f. Phys. 26 (1924), p. 139 und Astr. Nachr. 225 (1925), p. 315.

Genauere Untersuchungen über die vollständige Häufigkeitsfläche der Doppelsterne liegen mangels ausreichender Kenntnis von Parallaxen nicht vor.[72]) Eine rohe Vorstellung von den Verhältnissen vermitteln die folgenden Angaben über die relative Häufigkeit, gruppiert nach Spektraltypen und scheinbaren Helligkeiten (*H. N. Russell*[73])).

a) Sterne heller als $6{,}^{m}5$:

Spektralklasse	*B*	*A*	*F*	*G*	*K*	*M*
% Doppelsterne	42	17	17	25	10	8

b) Sterne aller Spektralklassen:

Scheinbare Größe	6	7	8	9
% Doppelsterne	11	7,5	6	4.

Shajn[74]) und *O. Struve*[75]) haben bereits frühzeitig darauf hingewiesen, daß man all diese Ergebnisse nur sehr mit Vorbehalt kosmogonisch ausdeuten dürfe, da sie durch Auswahleffekte der Beobachtungen beeinflußt sind. *Siedentopf*[76]) hat dann zeigen können, daß man die beobachtete Häufigkeit der Doppelsterne zwangläufig erhält aus der Häufigkeitskurve der einfachen Sterne, wenn man die Sterne regellos zu Paaren kombiniert mit dem Zusatz, daß die Entdeckungswahrscheinlichkeit abnimmt mit zunehmendem Unterschied der Helligkeit der beiden Komponenten. Bei der Gruppierung nach Spektraltypen würde die Berücksichtigung der Auswahleffekte die Zahlen noch weiter in dem Sinn verschieben, daß die relative Häufigkeit der Doppelsterne unter den frühen Typen größer ist als unter den späten, und daß von den *B*-Sternen mindestens die Hälfte Doppelsterne sind.

Die universelle Gültigkeit der für die Umgebung der Sonne abgeleiteten Verteilungsfunktion, insbesondere der „Leuchtkraftkurve", ist als Arbeitshypothese oft postuliert worden. Bei der Nachprüfung auf ihre Richtigkeit ist man aber auf erhebliche Schwierigkeiten gestoßen, da im allgemeinen nur der Teil der Zustandsdiagramme der Beobachtung zugänglich ist, in dem sich die großen absoluten Leuchtkräfte befinden. Die Untersuchungen an Sternhaufen und Milchstraßenwolken haben ergeben, daß, wenn man auf die relativen Häufigkeiten

72) Vgl. die Versuche von *A. Wallenquist* und *E. A. Kreiken,* Annalen der Bosscha-Sternwarte Lembang, Vol. IV (1930), sowie *E. A. Kreiken,* M. N. 89 (1929), p. 589; 90 (1930), p. 212, 306, 760; *W. J. Luyten,* Harvard Bulletin 870 (1929); M. N. 91 (1931), p. 938.

73) Astronomy II (1927), p. 721.

74) Astr. Nachr. 226 (1925), p. 49 und M. N. 85 (1925), p. 245.

75) Astr. Nachr. 227 (1926), p. 113.

76) Fußnote 36, § 11.

zunächst keine Rücksicht nimmt, die Zustandsdiagramme nicht wesentlich von dem des Sternsystems abweichen: die verwirklichten Zustände sind überall die gleichen. Abweichungen, die man gelegentlich festgestellt zu haben glaubte, daß z. B. die Sterne in offenen Haufen weißer seien als die Sterne entsprechender Leuchtkraft im normalen *Russell*-Diagramm („steilerer Zwergast"), dürften teils auf Beobachtungsfehler, teils auf Wirkungen der interstellaren Absorption zurückzuführen sein, nicht dagegen auf Verschiedenheiten der Zustandsgleichung.[77]) Die Zustandsdiagramme der Sternhaufen und Milchstraßenwolken bedecken, soweit sie bekannt sind, stets Gebiete, die sich innerhalb der durch das Zustandsdiagramm des engeren Sternsystems festgelegten Gebiete befinden.[78])

Anders liegen die Verhältnisse, wenn auch die relativen Häufigkeiten berücksichtigt werden. Zwar findet man, bei gebührender Rücksichtnahme darauf, daß die beobachteten Zustandsdiagramme nach der Seite der schwachen Leuchtkräfte und der großen Farbenindizes in verschiedenem Grade durch Unvollständigkeit des Beobachtungsmaterials verfälscht sind, im allgemeinen überall die Zwerge in der überwiegenden Häufigkeit gegenüber den Riesen; darf also annehmen, daß auch dieser wesentliche Zug des Zustandsdiagramms in allen Teilsystemen des größeren galaktischen Systems vorhanden ist. Daneben sind aber doch auch eindeutige Verschiedenheiten festzustellen, die Unterlagen für kosmogonische Deutungen liefern können.

Trümplers[79]) Typen der offenen Haufen lassen sich kaum aus ein und demselben Zustandsdiagramm rein statistisch ableiten als Funktion der Gesamtanzahl der Sterne, ohne Hinzunahme eines kosmogonischen Prinzips (Wirkung der Gesamtmasse, des „Alters"). Selbst wenn man bei den Plejaden etwa alles, was an Sternen scheinbar in dem Feld vorhanden ist, zur Gruppe rechnete, entspräche die Häufigkeit der G-Zwerge noch bei weitem nicht der der B-Sterne, verglichen mit dem normalen (L, T)-Diagramm. Ebenso auffallend ist das Vorhandensein von G- und K-Riesen in den Haufen vom Typus der Hyaden im Hinblick auf die geringe Gesamtzahl von Sternen, die diese Haufen überhaupt enthalten. Es scheint auch so zu sein, daß, wenn überhaupt in galaktischen Haufen neben Sternen der Hauptreihe noch Riesen vorkommen (*Trümplers* Typus 2), diese dem Gebiet maxi-

77) *P. ten Bruggencate,* Bull. Astr. Inst. Nethl. 128 (1927); *Schwaßmann,* Mitt. Hamburg-Bergedorf Nr. 31 (1930).

78) Vgl. z. B. *ten Bruggencate,* Sternhaufen, Kap. IV, Berlin 1927.

79) Publ. Astr. Soc. Pac. 37 (1927), p. 307, und Lick Obs. Bull. 420 (1930). Vgl. auch die Darstellung in [78]) oder *Müller-Pouillet,* Physik V 2 (1928), p. 501.

maler Häufigkeit im Sternsystem angehören (G- und K-Riesen, vgl. Fig. 1); und daß dann die Hauptreihe frühestens bei den A-Sternen beginnt.[80]) Es scheint neben den Haupttypen Ib (Plejaden) und 2a (Hyaden) zwar die Übergangstypen 1a und 2f zu geben, nicht aber den Typus 2b.

Bei den Kugelhaufen kann die Auffassung, daß der eigentliche Zwergast fehle[78]), nicht gehalten werden[81]); denn nach den Untersuchungen über die Leuchtkraftfunktion, die wesentlich schwächere Sterne noch erfassen als die Untersuchungen über die Farbenindizes, sind die Sterne der Hauptreihe mindestens bis zur absoluten Größe 5 noch in steigender Häufigkeit vorhanden. Bestehen bleibt dagegen die deutliche Verschiedenheit in der Lage der Linie maximaler Häufigkeit auf dem Riesenast, die verschieden starke Besetzung der dem Gebiet minimaler Häufigkeit im Sternsystem entsprechenden Gebiete mit δ Cephei-Sternen und Übergiganten (z. B. Messier 3 und ω Centauri verglichen mit Messier 13), die eng zusammenhängt mit dem ausgeprägten „sekundären Maximum“ der Leuchtkraftfunktion.

Zur Frage der Häufigkeit der weißen Zwerge hat das Studium der Sternhaufen bisher keinen Beitrag liefern können; dazu ist das Beobachtungsmaterial an schwachen Sternen in den Haufen zu spärlich und unsicher. Ein zur Präsepe gehöriger Stern der Größe $+5$, der als A-Stern klassifiziert wurde[82]), hat nach Göttinger Messungen den normalen Farbenindex der G-Zwerge. Wie viele der *Shapley*schen Plejadensterne wirklich zur Gruppe gehören und daher teilweise als weiße Zwerge angesprochen werden dürfen, muß dahingestellt bleiben, da die EB nicht die genügende Sicherheit haben.

Über die Zustandsverteilung in außergalaktischen Systemen ist aus begreiflichen Gründen nur sehr wenig bekannt. Die bisherigen Feststellungen beschränken sich darauf, daß die typischen Spiralnebel ein integriertes Spektrum vom mittleren Typus G zeigen, etwa entsprechend dem integrierten Spektrum der Milchstraße, woraus man zuerst Schlüsse auf ihre Natur als Sternsysteme hat ziehen können; und daß in den der Einzeluntersuchnng zugänglichen wenigen Systemen (Andromedanebel, Messier 33, NGC 6822) anscheinend keine von den uns sonst bekannten Typen von Sternen abweichenden Typen vorkommen. Kosmogonisch bedeutsam ist das relativ häufige Vorkommen von Novae, das zu einer Abschätzung der Häufigkeit dieser Sterne

80) *H. N. Russell,* Astronomy II (1927), p. 794.

81) *Eddington,* I. A. S., Nr. 217; *Lönnquist,* Meddel. Upsala Nr. 25, 87/88; *Siedentopf,* a. a. O. § 6.

82) Vgl. *P. ten Bruggencate,* Bull. Astr. Inst. Nethl. 128 (1927), Fig. 3.

überhaupt[83]) und damit zu gewissen Schlußfolgerungen über die Stellung des „Novazustandes“ innerhalb des zeitlichen Entwicklungsganges der Sterne geführt hat.

7. Alter und Energieerzeugung. Der Begriff des Alters setzt einen Anfangszustand und eine Richtung der Entwicklung voraus; die Angabe des Alters eines Sternes hat einen Sinn nur in Verbindung mit einer Angabe (oder stillschweigenden Voraussetzung) über die Art der „Geburt“ des Sternes; auch dann, wenn der Ausdruck nur im Sinne des relativen Alters verschiedener Sterne gebraucht werden soll. Die noch heute geläufige Unterscheidung von „frühen“ und „späten“ Spektraltypen stammt aus einer Zeit, die die Spektralreihe als einfache Entwicklungsreihe im Sinne fortschreitender Abkühlung auffaßte. *Lockyer*s Konzeption einer aufsteigenden und absteigenden Reihe verschob die Begriffe „jung“ und „alt“. Die Riesen-Zwerg-Theorie der Sternentwicklung, die sich aus *Lockyer*s Auffassung entwickelt hat, beruht auf der Voraussetzung, daß alle Sterne als rote Riesen geboren werden und daß sie jedenfalls den ersten Teil ihrer Entwicklung im Sinne eines Fortschreitens vom Spektraltypus M über K, G, F durchlaufen.

Daß die Sterne, wenn sie sich irgendwie aus nebliger Urmaterie durch Kondensation bilden, als Gaskugeln niedriger Temperatur erstmalig in Erscheinung treten, ist plausibel; aber vom Standpunkt des vorsichtigen Kritikers eine unbewiesene Annahme. Die folgerichtige Durchführung der Auffassung, daß Sterne nur so entstehen, führt jedenfalls auf erhebliche Schwierigkeiten bei der Ausdeutung der beobachteten Zustandsverteilung in den Sternhaufen.

Man hat versucht, auf dem Wege einer „vergleichenden Morphologie“ von Sternsystemen die Ansichten über die Entwicklung der Einzelsterne zu stützen. Dies führt auf die Notwendigkeit, Kriterien für das „Alter“ von Sternsystemen anzugeben, die natürlich genau wie beim Einzelstern Annahmen über die Art der Entstehung und Entwicklung der Systeme nach sich ziehen. Im Anschluß an Gedanken von *Shapley* über die Auflösung von Sternhaufen beim Eindringen in die Milchstraßenebene hat *ten Bruggencate*[84]) aus den Zustandsdiagrammen der Sternhaufen eine Entwicklungsreihe zu konstruieren versucht, die von den dichtesten Kugelhaufen über intermediäre Typen wie Messier 11 zu den offenen Haufen führt. Altersparameter wäre hier die Gesamtzahl der Sterne in dem Haufen bzw. der Grad der Auf-

83) Vgl. Nr. 22.

84) Über die Bedeutung der Farben-Helligkeits-Diagramme von Sternhaufen für eine empirische Kosmogonie, Seeliger-Festschrift 1924.

lockerung; unter der Voraussetzung, daß die Streuung der Zustände bei der Geburt eines Haufens klein ist gegenüber den durch die Entwicklung auftretenden Veränderungen. Berücksichtigt man die Unvollständigkeit des Beobachtungsmaterials, dann ergibt sich die Unmöglichkeit, einen Zusammenhang zwischen diesem Altersparameter und der Zustandsverteilung herzustellen.[85]) Es muß heute sogar als überaus zweifelhaft bezeichnet werden, ob man Kugelhaufen und offene Haufen im Sinne einer Entwicklungsreihe überhaupt verknüpfen darf.

Auch die Heranziehung der Doppelsterne zur Begriffsbestimmung des Alters hat versagt. Man hat zwar bei Berücksichtigung aller Kräfte, die eine Veränderung der Bahndimension eines Doppelsterns bewirken, zu der wenigstens statistisch gültigen Feststellung[86]) gelangen können, daß im allgemeinen ein „alter" Doppelstern mit größerer Wahrscheinlichkeit eine weite Bahn mit großer Exzentrizität beschreibt als ein „junger" Doppelstern. Die Prüfung des Beobachtungsmaterials zeigt aber auch hier, wenn auf die Verfälschung der Statistik durch Auswahl gebührend Rücksicht genommen wird, keinen Zusammenhang[87]) zwischen dem Altersparameter (große Achse und Exzentrizität) und den Zustandsgrößen (Masse und Leuchtkraft).

Wenn eine genaue Begriffsbestimmung des Alters nicht möglich ist ohne weitgehende Festlegung auf kosmogonische Theorien, so kann man noch die Frage stellen, ob wenigstens der Sinn der Entwicklung, das „Früher" oder „Später" angegeben werden kann. Die Beantwortung dieser Frage hängt eng zusammen mit der Frage nach den Energiequellen der Sterne.

Man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die normale Weggleichung eines Sternes durch eine Kurve dargestellt wird, längs der die Masse im allgemeinen abnimmt; obwohl man auch die Annahme, daß die Sterne Masse aufsammeln, nicht von der Hand weisen kann[88]) und sich selbst eine völlige Umkehrung des nach der allgemeinen Meinung wahrscheinlichsten Entwicklungsganges von großen zu kleinen Massen in eine solche von kleinen zu großen Massen durchaus vertreten läßt.[89]) Bei Annahme einseitig gerichteter Entwicklung (Abnahme der Masse) kann man auf ein Maximalalter der einzelnen Sterne schließen, kann aber nichts aussagen über das relative

85) *Siedentopf,* a. a. O. § 10; *Shapley,* Harvard Bulletin 876 (1930).

86) *Siedentopf,* a. a. O. p. 51.

87) Vgl. Fußnoten 74—76.

88) *Shapley,* Harvard Bull. 876, p. 15, Nr. 4.

89) *Mac Millan,* Ap. Journ. 48 (1918), p. 35; *Wiechert,* Vjschr. der Astr. Ges. 56 (1921), p. 171; § 7.

Alter von Sternen verschiedener Masse, wenn man nicht eine weitere Annahme hinzufügt über die Mindestmasse, die notwendig ist für die Entstehung eines Sternes. *Eddington*[90]) hat diese Annahme abgeleitet aus dem Fehlen der M-Sterne mit Leuchtkräften kleiner als $+2{,}5$ (Masse $< 3{,}5$); zu Unrecht, da die bei der Geburt vorhandene Masse sowohl Leuchtkraft wie Temperatur bestimmt und aus der Zustandsverteilung ebenso auf die Verweilzeit wie auf die Wahrscheinlichkeit des Zustandes geschlossen werden kann.

Jeans kommt (vgl. Nr. 22) zu einer allerdings sehr unsicheren Abschätzung der mittleren Masse der Kondensationen, die sich aus einem Nebel vorgegebener Dichte bilden werden; über die Streuung um diesen Mittelwert läßt sich theoretisch nichts aussagen. *Lönnquist*[91]) rechnet mit einer normalen Verteilung der $\log \mathfrak{M}$ gemäß

$$y_{t=0} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

$y =$ Anzahl der Sterne mit $\log \mathfrak{M} = x$; $x_0 = -0{,}5$ ($\mathfrak{M} = 0{,}3$); $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7$; $\mathfrak{M}_{x_0+\sigma} = 1{,}6$; $\mathfrak{M}_{x_0-\sigma} = 0{,}06$.

Eine Abschätzung des Maximalalters bei einseitig gerichteter Entwicklung, d. h. unter der Annahme, daß der Stern seinen Energievorrat während der Entwicklung nicht durch Zufuhr von außen merklich vermehren kann, ist nur möglich bei Voraussetzung einer bestimmten Weggleichung. Dies wird merkwürdigerweise oft übersehen; gewöhnlich wird einfach die Rechnung *Eddingtons*[92]) übernommen, die sich ausdrücklich auf den Fall bezieht, wo die Entwicklung längs einer Kurve $T_c =$ const. erfolgt. Das Masse-Leuchtkraft-Temperatur-Gesetz reduziert sich dann auf eine einfache Masse-Leuchtkraft-Beziehung:

$$L \sim \frac{\mathfrak{M}(1-\beta^2)}{\beta}. \tag{2}$$

In Verbindung mit der bei Umsetzung von Masse in Strahlung gültigen Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\frac{1}{c^2} L \tag{3}$$

erhält man

$$dt = -C \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \text{ Jahre.} \tag{4}$$

Die Konstante C bestimmt sich aus den Daten für die Sonne:

$$\mathfrak{M} \Big/ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 1{,}5 \cdot 10^{13} \text{ Jahre}, \quad 1-\beta = 0{,}05 \tag{5}$$

90) I. A. S., Nr. 214.

91) *C. Lönnquist,* On the evolution of the stars with mass reduction, Medd. Upsala Nr. 25 = Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 20 A (1927), Nr. 21.

92) I. A. S., Nr. 216.

zu
$$C = 4{,}0 \cdot 10^{10} \text{ Jahre.}$$
Integration liefert die Verweilzeit Δt in den einzelnen Stadien:

$$\Delta t = \frac{C}{4} \Delta \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} + \frac{6}{1-\beta}\right]. \tag{6}$$

Eddington gibt folgende Zahlen für sein Modell:

Tabelle 4.
Verweilzeiten bei Massenabnahme.

M	$\mathfrak{M}$	Δt (10[12] Jahre)	$\Delta t'$
$-\infty$ bis $-5{,}0$	∞ bis 35	0,04	—
$-5{,}0$ „ $-2{,}5$	35 „ 10	0,06	18,8
$-2{,}5$ „ $0{,}0$	10 „ 3,7	0,21	14,9
$0{,}0$ „ $+2{,}5$	3,7 „ 1,73	0,93	11,4
$+2{,}5$ „ $+5{,}0$	1,73 „ 0,92	5,2	9,4
$+5{,}0$ „ $+7{,}5$	0,92 „ 0,53	36,3	8,3
$+7{,}5$ „ $+10{,}0$	0,53 „ 0,31	281	8,1
$+10{,}0$ „ $+12{,}5$	0,31 „ 0,18	2190	8,1

Einfacher noch erhält man den zeitlichen Ablauf, wenn man, den Beobachtungen entsprechend, für die Hauptreihe ansetzt[93])

$$L \sim \mathfrak{M}^3, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \alpha \mathfrak{M}^3, \tag{7}$$

und integriert mit Bestimmung der Konstanten durch die Sonne:

$$t - t_0 = 7{,}6 \cdot 10^{12} \left(\frac{1}{\mathfrak{M}^2} - \frac{1}{\mathfrak{M}_0^2}\right) \text{ Jahre.} \tag{8}$$

Für die Größenordnung der Zeitskala ist offenbar die Anfangsmasse $\mathfrak{M}_0$ belanglos, wenn der Massenverlust überhaupt eine Rolle spielt.

Wählt man im Anschluß an *Jeans*[94]) die etwa bei spontanem Zerfall nach der Art der radioaktiven Prozesse (mit dem Unterschied, daß die abgespaltenen Massen sich in Strahlung umsetzen sollen) gültige Weggleichung

$$L = -c^2 \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \alpha' \mathfrak{M}, \tag{9}$$

so erhält man einen vollkommen anderen zeitlichen Ablauf des Geschehens, entsprechend der exponentiellen Massenabnahme

$$\Delta t' = C' \log \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}}\right). \tag{10}$$

Die Konstante C' hat, wie die ungefähr mit $\mathfrak{M}^2$ abnehmenden Werte für die Energieerzeugung pro Masseneinheit (ε in Tab. 1) zeigen, für

93) Vgl. Nr. 5, Gleichung (3), p. 1000.

94) A. C., Chapt. IV.

die einzelnen Sterne verschiedene Werte. Es ist z. B.

$$C'_{\text{Sonne}} = 34{,}5 \cdot 10^{12} \text{ Jahre}, \quad C'_{\text{Capella}} = 1{,}28 \cdot 10^{12} \text{ Jahre}.$$

Die Zahlen $\Delta t'$ in der Tabelle 4 beziehen sich auf die Sonne; sie verkleinern sich für Capella auf $\frac{1}{25}$.

Ist ein Teil $\mathfrak{M}_1$ der Masse unzerstörbar, so daß nur der Teil $\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_1$ für die Umsetzung in Strahlung zur Verfügung steht, so ist

$$L = \alpha'(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1), \tag{11}$$

und die Tabellenwerte $\Delta t'$ verkleinern sich im Verhältnis $\frac{(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1)}{\mathfrak{M}}$.

Wird die Energie durch Aufbau der Elemente unter Ausnutzung allein des Packungseffektes gedeckt, dann reduziert sich die Zeitskala ganz erheblich, da im Maximum knapp $1\%_0$ der Masse in Strahlung umgesetzt werden kann. Das Maximalalter eines Sternes mit der mittleren Energieerzeugung ε_* ist dann

$$t - t_0 = 0{,}76 \left(\frac{\varepsilon_\odot}{\varepsilon_*}\right) \cdot 10^9 \text{ Jahre}. \tag{12}$$

Radioaktiver Zerfall von Elementen kann nur dann eine Zeitskala von gleicher Größenordnung liefern, wenn man mit *Jeans*[94]) zu hypothetischen Elementen höherer Ordnungszahl als Uran seine Zuflucht nimmt. Auf diesem Weg ist bisher kaum jemand gefolgt.

Die der Sonne im heutigen Zustande zur Verfügung stehenden Energiequellen ergeben (größenordnungsmäßig) etwa folgende Beiträge (nach *Eddington*[95])) für die Energie und die entsprechende Zeitdauer bei unveränderter Ausstrahlung von $1{,}2 \cdot 10^{41}$ erg/Jahr:

	Energie	Zeitdauer
Strahlung	$0{,}3 \cdot 10^{48}$ erg	$2{,}4 \cdot 10^{6}$ Jahre
Kinetische Energie	$2{,}7 \cdot 10^{48}$ „	$23 \cdot 10^{6}$ „
Anregungsenergie (weniger als)	$2{,}7 \cdot 10^{48}$ „	$23 \cdot 10^{6}$ „
Gesamtmasse ($\mathfrak{M} c^2$)	$1{,}8 \cdot 10^{54}$ „	$15 \cdot 10^{12}$ „

Der in Form von Strahlung, kinetischer Energie der Atome und Elektronen aufgespeicherte Teil entspricht mehr als der Hälfte der Energie, die die Sonne bei Kontraktion von unendlichem Radius auf die heutige Größe (beim *Eddington*schen Modell) aus den Gravitationskräften hat gewinnen können:

$$\text{Gravitationsenergie: } 5{,}7 \cdot 10^{48} \text{ erg}.$$

Unter Abzug der aufgespeicherten Energie von mindestens $3 \cdot 10^{48}$ erg (über den in der elektrischen Anregung steckenden Bruchteil des Restes lassen sich kaum Angaben machen) errechnet sich also eine

95) I. A. S., Nr. 201.

maximale „Vergangenheit" der Sonne von $23 \cdot 10^6$ Jahren, wenn ihr keine anderen Energiequellen zur Verfügung gestanden haben als die Kontraktion. Geologische und biologische Daten fordern für das Alter der Erde und der Sonne eine Größenordnung von 10^9 Jahren.[96])

8. Die Weggleichung der normalen Sternentwicklung. Die Umdeutung des zunächst nur als Zustandsdiagramm gebildeten Leuchtkraft-Temperatur-Diagramms in ein Entwicklungsdiagramm bedarf der Kenntnis der Weggleichung, die die Entwicklung der Sterne bestimmt. Die Theorie des Sternaufbaus liefert nur die bei vorgegebenen Zustandsgrößen möglichen Gleichgewichtszustände; die Weggleichung gibt an, in welcher Weise der einzelne Stern solche Zustände relativen Gleichgewichtes in zeitlicher Aufeinanderfolge durchläuft. Das einzige, was wir an zeitlichem Ablauf am einzelnen Stern beobachten können, ist eine kontinuierliche Ausstrahlung von Energie, gemessen durch die Leuchtkraft. Die Frage nach der Weggleichung ist daher auf das engste verknüpft mit der Frage nach den Energiequellen, aus denen der Stern schöpft, um die Ausstrahlung zu decken; denn Gleichgewicht erfordert, daß die ausgestrahlte Energie gleich der im Innern des Sternes erzeugten ist.

Aus den Betrachtungen über die Ergiebigkeit der verschiedenen Energiequellen folgt unmittelbar die allgemeine Feststellung: Wenn dem Energievorrat U, der dem Stern außer den subatomaren Energiequellen (Aufbau, Abbau, Vernichtung von Materie) zur Verfügung steht, auch nur ein kleiner Bruchteil zur Deckung der Ausstrahlung entnommen wird, erfolgt die Entwicklung im (L, T)-Diagramm längs einer Kurve konstanter Masse in Richtung wachsender Temperaturen (wachsender Dichte, abnehmender Radien), da die Entwicklungsgeschwindigkeit im (L, T)-Diagramm in horizontaler Richtung die in vertikaler um Größenordnungen übertrifft (*Lönnquist*[97])).

Die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne scheint vorerst keine ausreichende Handhabe für die Ableitung einer Weggleichung zu bieten, da sie noch nicht einmal die Zustandsgleichung überzeugend liefert.[98]) Die kosmogonischen Überlegungen bewegen sich daher noch ganz in

---

96) *O. Hahn,* Was lehrt uns die Radioaktivität über das Alter der Erde? Berlin 1927. *H. Jeffreys,* The Earth, Chapt. V.

97) Fußnote 91, Chapt. VIII.

98) Die Schlußfolgerungen, die *Milne* aus den von ihm bisher gerechneten „Zweiphasenmodellen" gezogen hat [vgl. Ztschr. f. Astroph. 4 (1932), p. 75; Bakerian Lecture, Cambridge Press 1932), müssen notwendigerweise hypothetisch bleiben, solange die Theorie noch so in ihren Anfängen steckt und größten Bedenken ausgesetzt ist.

der Richtung einer empirischen Umdeutung des Zustandsdiagramms in ein Entwicklungsdiagramm Dabei sind verschiedene Weggleichungen in Betracht gezogen worden (vgl. Fig. 2):

a) $\mathfrak{M} = \text{const.}$, d. h. der mit der Ausstrahlung verbundene Massenverlust ist klein gegen die Gesamtmasse; der Stern deckt seine Strahlung aus dem Energievorrat U (im wesentlichen also aus der Kon-

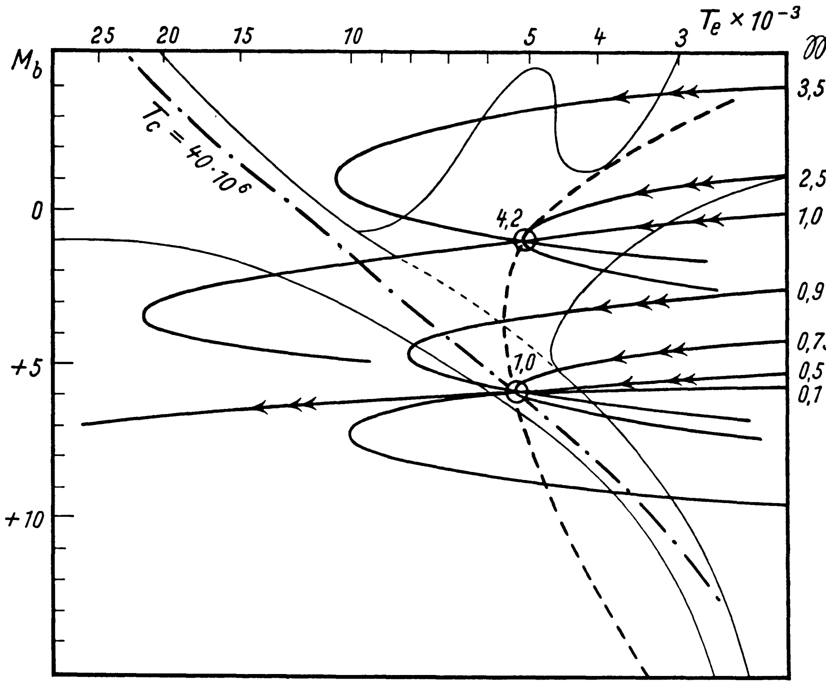

Fig. 2.
Weggleichungen im Zustandsdiagramm.
Die dick ausgezogenen und mit Richtungspfeilen versehenen Kurven sind die Wege $\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0$ für zwei verschiedene Durchgangsmassen (Capella $\mathfrak{M} = 4{,}2$ und Sonne $\mathfrak{M} = 1{,}0$) sowie verschiedene Werte für den unzerstörbaren Teil $\mathfrak{M}_0$ (Bezeichnung rechts, jeweils am Anfang der Kurven). Die gestrichelte Kurve ist $U = \text{const.}$ für die Sonne nach *Lönnquist*. Die strichpunktierte Kurve ist $T_C = 40 \cdot 10^6$ nach *Eddington*. Die Grenzen der Gebiete aus Fig. 1 sind dünn eingezeichnet.

traktion) oder aus dem mit nur unwesentlichem Massenverlust verbundenen Auf- und Abbau der Elemente.[99]) Die Verteilungsfunktion der Massen und Leuchtkräfte ist dann durch die Vorgänge bei der Bildung des ganzen Sternsystems bestimmt. Die Hauptreihe erscheint als das Gebiet größter Stabilität, und die Häufigkeit der Besetzung muß aus der Theorie des inneren Aufbaus durch besondere Zusatzannahmen abgeleitet werden. Die Zeitskala, d. h. die Größenordnung

99) *R. d'E. Atkinson,* Atomic synthesis and stellar energy, Ap. Journ. 1931, p. 73.

der Zeiten, während deren sich ein Stern längs einer Kurve konstanter Masse bewegen kann, ist von der Größenordnung $\left(\frac{\varepsilon_\odot}{\varepsilon_*}\right) \cdot 10^7$ Jahre, wenn nur Kontraktionsenergie zur Verfügung steht, und von der Ordnung $\left(\frac{\varepsilon_\odot}{\varepsilon_*}\right) \cdot 10^9$ Jahre, wenn radioaktive Prozesse oder Packungseffekte des Atomaufbaus ausgenützt werden.

b) $U =$ const., d. h. der Stern deckt seine ganze Ausstrahlung aus subatomaren Energiequellen. Die Form der Kurve hängt wesentlich von den physikalischen Zustandsgrößen im Sterninnern ab. Für das *Eddington*sche Modell ist sie von *Lönnquist*[100]) diskutiert worden. In jedem Fall verlaufen die Kurven $U =$ const. in der Richtung abnehmender Masse und grob qualitativ im Sinne der Riesen-Zwerg-Theorie der Sternentwicklung, mit einem jeweiligen Maximum der bei gegebener Gesamtenergie U erreichbaren effektiven Temperatur. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß die Kurven $U =$ const. wesentliche Teile der Weggleichung der Sternentwicklung darstellen. Die Zeitskala ist gegeben durch die Größe der Massenabnahme infolge der Ausstrahlung.

c) $T_c =$ const. ist als Teil des Entwicklungsweges zuerst von *Russell*[101]) vorgeschlagen worden, ausgehend von der Beobachtung, daß die Kurven $T_c =$ const. im (L, T)-Diagramm sehr nahe parallel der Richtung der Hauptreihe verlaufen, wenn die Sterne nach dem *Eddington*schen Modell aufgebaut gedacht werden. Die Mittellinie der Hauptreihe selbst wird dargestellt durch die Kurve $T_c = 32$ bis $40 \cdot 10^6$ Grad, je nach den Annahmen über das Molekulargewicht. Die Hauptreihe erscheint in diesem Fall also zugleich als wirkliche Entwicklungsreihe, die in der Richtung $B \to M$ durchlaufen wird. Die Länge des Wegstückes $T_c =$ const. und die Zeit, die der Stern braucht, um es zu durchlaufen, hängen von dem Bruchteil der Masse ab, der in Strahlung umgesetzt werden kann. Der Anfang des Wegstückes entspricht dem Zustand, in dem die subatomaren Energiequellen „angezapft" werden; am Ende steht ein Stern mit einer gewissermaßen „inerten" Restmasse, die nicht mehr für die Ausstrahlung nutzbar gemacht werden kann. Rein physikalisch bereitet diese Auffassung die Schwierigkeit, daß nicht recht eingesehen werden kann, wie der Vorgang der „Zerstrahlung" der Materie bereits bei den niedrigen Temperaturen, wie sie im Mittelpunkt des *Eddington*schen Modells herrschen, vor sich gehen soll; die kinetische Energie der Temperatur-

---

100) a. a. O. Chapt. VI.

101) Nature 116 (1925), p. 209; Astronomy, Chapt. XXVI.

bewegung wird erst in der Gegend von 10^{12} Grad von der Größenordnung der Masse ($\frac{3}{2}kT \simeq \mathfrak{M}c^2$).

Die Zeitskala bestimmt sich beim *Eddington*schen Modell aus der $(L, \mathfrak{M})$-Beziehung auf die oben angegebene Weise und ist durch die Verweilzeiten Δt der Tabelle 4 gekennzeichnet.

d) $\frac{L}{\mathfrak{M}} = \text{const.}$ bzw. $\frac{L}{(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1)} = \text{const.}$, d. h. die Energieerzeugung ist jeweils proportional der vorhandenen Masse oder einem „aktiven" Bruchteil $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$, wurde von *Jeans*[102]) vorgeschlagen in Verfolg seiner Hypothese, daß die Energiequellen in dem Zerfall von Elementen mit höheren Ordnungszahlen als 92 zu suchen seien. Bei diesem Zerfall sollen nicht nur die Packungsenergien frei werden, sondern ein Teil der Massen sich vollständig in Strahlung umsetzen, gekennzeichnet durch eine Zerfallskonstante $\varkappa$. Die Weggleichung liefert dann den zeitlichen Ablauf, entsprechend einer exponentiellen Massenabnahme:

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_1)\, e^{-\varkappa(t-t_0)} \tag{1}$$

mit den Verweilzeiten $\Delta t'$ der Tabelle 4.

Durch Kombination mit der Zustandsgleichung in der allgemeinen Form

$$L = -c^2 \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = A\mathfrak{M}^r T_e^s \tag{2}$$

erhält man die dem jeweiligen Zustand zugeordneten effektiven Temperaturen; damit ist der Weg im allgemeinen *Russell*-Diagramm festgelegt. Beim *Eddington*schen Modell kann angenähert, übereinstimmend mit der Beobachtung, gesetzt werden $r = 3$, $s = \frac{4}{5}$.

$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \text{const.}$ führt zwangläufig mit $\mathfrak{M} \to 0$ auf $T_e \to \infty$, scheidet also praktisch aus; man ist bei dieser Art Weggleichung zu der Annahme einer unzerstörbaren Restmasse $\mathfrak{M}_1$ gezwungen. Da $\frac{L}{\mathfrak{M}}$, die mittlere Energieerzeugung pro Masseneinheit, längs der Hauptreihe erfahrungsgemäß ungefähr wie $\mathfrak{M}^2$ abnimmt, erkennt man weiter, daß die durch eine Weggleichung mit konstanter Zerfallskonstante definierten Wege nur auf ganz kurze Strecken innerhalb des Gebietes der Hauptreihe verlaufen können.

Um Wege zu erhalten, die innerhalb eines Bereiches der effektiven Temperaturen von etwa $1500 < T_e < 20000$ unter merklicher Massenabnahme verlaufen, muß man schon, wie das auch *Jeans* tut,

102) Vgl. die Darstellung in A. C., Chapt. VII.

die Sterne sich aus Teilmassen verschiedener Ergiebigkeit zusammengesetzt denken, die dann der Reihe nach erschöpft werden:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 e^{-\varkappa_1 t} + \mathfrak{M}_2 e^{-\varkappa_2 t} + \cdots. \tag{3}$$

Da über die Größe der Zerfallskonstanten der hypothetischen Elemente und über die Zusammensetzung der Sterne aus diesen Elementen a priori gar keine Aussagen gemacht werden können, ist es nicht möglich, über den Lauf der Entwicklung irgend etwas auszusagen, was man nicht als Hypothese von vornherein hineingesteckt hat.

e) Eine Abwandlung der Hypothese von *Jeans* stellt die „Wasserstoffhypothese" *Lönnquists*[103]) dar. An die Stelle des radioaktiven Zerfalls von Elementen hoher Ordnungszahlen setzt *Lönnquist* unmittelbare Vernichtung von Materie durch den Zusammenstoß Proton—Elektron. Maßgebend für die Größe der Energieerzeugung ist in diesem Fall der Wasserstoffgehalt; von dem überhaupt für die Umsetzung in Strahlung zur Verfügung stehenden Teil $\alpha\mathfrak{M}$ der Masse ist jeweils nur der Bruchteil ι wirksam; die pro Zeiteinheit erzeugte Energie ist proportional $\varkappa\iota\alpha\mathfrak{M}$, und die Leuchtkraft

$$L = (1 + f)\varkappa\iota\alpha\mathfrak{M}, \tag{4}$$

wenn mit f der von der Kontraktionsenergie gedeckte Teil der Strahlung bezeichnet wird. Die aus den Stößen Proton—Elektron resultierende spezifische Energieerzeugung kann gesetzt werden:

$$\varepsilon \sim \frac{\alpha\varrho}{\sqrt{T}}. \tag{5}$$

Wird noch das Masse-Leuchtkraft-Gesetz in der einfachen, temperaturunabhängigen Form von *Eddington* angenommen:

$$L \sim \frac{\mathfrak{M}(1-\beta)^2}{\beta}, \tag{6}$$

so erscheint die Weggleichung schließlich für das *Eddington*sche Modell mit konstantem Molekulargewicht bei *Lönnquist* in der Gestalt

$$1 + f = q\,\frac{(1-\beta)^3}{\beta^2}\cdot\frac{\mathfrak{M}^{\frac{7}{2}}}{U^{\frac{5}{2}}(\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_0)}, \tag{7}$$

wo noch $\alpha\mathfrak{M} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0$, also $\mathfrak{M}_0$ der unzerstörbare Teil der Masse, und U die gesamte nicht subatomare Energie ist; q eine zeitabhängige Konstante. Durch die Zahl der verfügbaren Größen ist die Theorie auf der einen Seite sehr dehnbar, durch die Beschränkung auf das spezielle *Eddington*sche Modell andererseits sehr eng. Man kann aus

103) Fußnote 91, Chapt. VIII—XI.

ihr eine Entwicklung im Sinne *Russells* ableiten (Riese — Hauptreihe — weißer Zwerg), ohne zu zwingenden Schlußfolgerungen über die Notwendigkeit einer solchen Entwicklung zu gelangen.

Man hat versucht, wenigstens die grundsätzliche Frage zu klären, ob die Sternentwicklung unter wesentlicher Abnahme der Masse erfolgt oder nicht. Die Entscheidung dieser Frage entscheidet zugleich über die Frage der kosmogonischen Zeitskala. In der Hauptsache sind drei Argumente zugunsten der mit einer Entwicklung unter Massenabnahme verknüpften äußersten Zeitskala angeführt worden:

a) Für die Zeitdauer der geologischen und biologischen Entwicklung auf der Erde wird eine Spanne von der Größenordnung 10^9 Jahre gefordert[104]); das Alter der Sonne muß also mindestens von dieser Größe sein.

b) Die Bildpunkte der Doppelsternkomponenten rücken beim Fortschreiten längs der Hauptreihe immer näher zusammen; das Massenverhältnis nähert sich dem Wert 1.[105])

c) Die Verteilungsfunktion der Leuchtkräfte im Sternsystem läßt sich auffassen als Funktion der Verweilzeiten.[106])

Leider ist die Beweiskraft dieser Argumente nicht sehr groß. Das geologische Alter der Erde ist noch durchaus verträglich mit einer Zeitskala, die man erhält, wenn nur die Energien zur Verfügung stehen, die beim Aufbau und Abbau der Elemente frei werden; ohne daß man vollständige „Zerstrahlung" wesentlicher Bruchteile der Masse zu Hilfe nehmen müßte. Zudem darf nicht vergessen werden, daß die exakte Schlußfolgerung aus den geologischen Befunden nur lauten kann: die Sonne hat 10^9 Jahre lang mit konstanter Intensität gestrahlt; dazu sind Energiequellen nötig, die einem Gesamtverlust an Masse von nur 0,01 % entsprechen. Die Weggleichung der Sonne kann also sehr wohl eine solche nahezu konstanter Masse sein.

Daß die Gesetzmäßigkeiten bei Doppelsternsystemen eine zwangläufige Folge allein schon des Zustandsdiagramms sind, wurde von *Siedentopf*[107]) klar ausgesprochen und durch entsprechende Rechnungen belegt.

Die Deutung der Häufigkeiten der absoluten Leuchtkräfte im Sternsystem durch die Verweilzeiten hat zwei wesentliche Voraussetzungen, die nicht über den Charakter unbewiesener Hypothesen hinausgehoben werden können: daß die Sterne mit einer gewissen

104) Fußnote 96.
105) *Vogt*, Fußnote 71. Tabelle 3, p. 1007.
106) *Eddington*, I. A. S., Nr. 216.
107) Fußnote 36, § 11.

Minimalmasse geboren werden und daß das Sternsystem zum mindesten in einem quasistationären Zustand sich befinde, in dem immer noch Sterne in dem gleichen Maße neu entstehen oder doch bis vor kosmogonisch „kurzer" Zeit entstanden sind. Ist $A(M)$ die Anzahl der Sterne, die mit einer absoluten Leuchtkraft M pro Zeiteinheit entstehen, und M_0 die der Minimalmasse bei der Geburt entsprechende absolute Leuchtkraft, $\tau(M)$ die Verweilzeit in dem Zustand M bis $M + dM$, so ist die Leuchtkraftfunktion $\Phi(M)$ in einem bestimmten Augenblick gegeben durch

$$(8) \qquad \begin{cases} \Phi(M) = \tau(M) \int\limits_0^M A(M)\,dM & \text{für} \quad M \leqq M_0 \\[2ex] \Phi(M) = \tau(M) \int\limits_0^{M_0} A(M)\,dM & \text{für} \quad M \geqq M_0. \end{cases}$$

Der Quotient $\frac{\Phi}{\tau}$ sollte also monoton anwachsen bis zu einem Wert $M = M_0$ und von da wieder abnehmen. Aus den Werten von *van Rhijn*[108]) für $\Phi(M)$ und von *Eddington*[109]) für die Verweilzeiten erhält man für das Sternsystem die nebenstehende Gegenüberstellung.[110])

Tabelle 5.

M	$\frac{\Phi}{\tau}$
-4	0,19
3	0,29
2	0,60
1	1,07
0	1,57
$+1$	1,70
2	1,57
3	1,50
4	1,43
5	1,21
6	0,72
7	0,33
8	0,14
9	0,07

Aus dem Verlauf von $\frac{\Phi}{\tau}$ schließt man auf M_0 ungefähr $+1$, entsprechend $\mathfrak{M}_0 = 2{,}5$, in naher Übereinstimmung mit dem von *Eddington* angenommenen Wert $\mathfrak{M}_0 = 3{,}5$. Bei der Annahme dieser Deutung folgt aus der Existenz von Sternen der Masse 0,1 ein Mindestalter des Systems von 10^{15} Jahren, das schwer verträglich ist mit den Abschätzungen über die Relaxationszeit, die in der Gegend von 10^{13} Jahren liegen.[111])

Die Schwierigkeiten, auf die man bei den Sternhaufen stößt, wenn man die gleiche Deutung übertragen will, hat schon *Eddington*[112]) zugegeben; man muß bei den Kugelhaufen mit der Existenz mindestens von Zwergen mit Sonnenmasse rechnen, während bei den galaktischen Haufen die Ko-

108) Publ. Groningen 38, 1925.

109) I.A.S., Tabelle 41, Nr. 216.

110) Nach *Siedentopfs* Tabelle 9, durch Dreiermittel geglättet.

111) *Jeans*, A.C., Chapt. XII. Vgl. Nr. 14 und Nr. 22.

112) I.A.S., Nr. 217.

existenz von Riesen und Zwergen des *G*- und *K*-Typus gesichert erscheint, allerdings mit anderem Häufigkeitsverhältnis als im Sternsystem (vgl. Nr. **6**). *Siedentopf*[113]) sah den Ausweg nur in der Forderung einer weitgehenden Stationarität — die Relaxationszeiten berechnen sich bei den Kugelhaufen zu etwa 10^{10} bis 10^{11} Jahren[114]) — während *Lönnquist*[115]) für die Verteilung der Massen bei der Entstehung des Haufens eine Häufigkeit ansetzte, die praktisch identisch ist mit der heute beobachteten. In jedem Fall werden die aus den Sternhaufen gezogenen Argumente in dem Sinn geschwächt, daß die Beobachtungen einer Entwicklung unter Massenabnahme zwar nicht mehr widersprechen, daß sie aber nicht, wie vor allem *ten Bruggencate*[116]) wollte, zu Gunsten einer solchen Entwicklung sprechen.

Die ganze Frage spitzt sich heute dahin zu, aus rein physikalischen Überlegungen über die Erzeugung der Energie im Sterninnern zu einer Entscheidung über die Weggleichung zu gelangen. Der empirisch-kosmogonische Weg der Umdeutung der Zustandsdiagramme hat zu keiner eindeutigen Lösung geführt.

Ein erster Versuch, die aus dem Auf- und Abbau der Atomkerne verfügbaren Energien für die Sternentwicklung zu nutzen und die Vorgänge möglichst ohne astronomische Hilfsannahmen rein auf Grund einer Quantentheorie der Kernprozesse zu berechnen, ist von *Atkinson*[117]) unternommen worden. Der Grundgedanke der Theorie ist der schrittweise Aufbau höherer Kerne durch Einfangen von Protonen und Elektronen. Wenn in einem zunächst ganz aus Wasserstoff bestehenden Stern erst einmal der erste Heliumkern durch einen Sechserstoß entstanden ist, bietet der Aufbau weiterer Kerne durch einfache Zusammenstöße keine Schwierigkeiten mehr; die Wahrscheinlichkeiten der Prozesse lassen sich nach einer im Anschluß an *Gamov* von *Atkinson* und *Houtermans*[118]) entwickelten Theorie berechnen, ebenso die Temperaturen. Die bei dem stufenweisen Aufbau entstehenden instabilen Elemente liefern durch Zerfall wieder Heliumkerne, die als Bausteine für weiteren Aufbau dienen können, ohne daß die sehr unwahrscheinlichen Sechserstöße unmittelbar Heliumkerne aus Wasserstoff aufbauen müßten. Die Theorie erklärt sehr gut die relativen

113) A. a. O. §§ 7, 8.

114) *O. Heckmann* und *H. Siedentopf*, Zur Dynamik kugelförmiger Sternhaufen, Ztschr. f. Astroph. 1 (1930), p. 77. Vgl. auch Nr. **14**.

115) Fußnote 91, Chapt. XIV.

116) Vgl. das 4. Kapitel in dem Buch „Sternhaufen".

117) Fußnote 99.

118) Ztschr. f. Phys. 54 (1929), p. 656.

Häufigkeiten der leichteren Elemente; dagegen muß sie für die schwereren Elemente eine ad hoc-Hypothese hinzunehmen, die eine sehr starke Abhängigkeit des Bildungsprozesses von der Temperatur fordert. Die Wegkurven sind in diesem Fall praktisch solche konstanter Masse; die Entwicklung der Sterne erfolgt unter anfänglicher Kontraktion, nach Einsetzen des Aufbauprozesses unter langsamer Expansion. Temperaturen von der Größenordnung 10^7 Grad im Innern erscheinen ausreichend, um die Energieerzeugung dauernd sicherzustellen.

Ziemlich ungeklärt erscheint zur Zeit noch die Stellung der weißen Zwerge innerhalb der Entwicklungsreihe. In den Theorien von *Russell* und *Jeans* schließen sie sich, irgendwie als Endprodukte, an das untere Ende der Hauptreihe an; wobei die Koexistenz von normalen Sternen und weißen Zwergen in Doppelsternsystemen wie Sirius und Procyon schwer zu erklären ist. Bei *Atkinson* wird der Zustand des weißen Zwerges erreicht, wenn der für den Elementaufbau notwendige Wasserstoffvorrat aufgebraucht ist. Da dies bei Entwicklung längs Kurven konstanter Masse für Sterne jeder Leuchtkraft einmal eintreten wird, hat man hier eine ganze Reihe „toter Sterne“ zu erwarten, und findet damit den aus anderen Gründen naheliegenden Zusammenhang mit den Zentralsternen der planetarischen Nebel.

III. Dynamik der Entwicklungsvorgänge.

9. Rotationsdeformationen. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Massen ist für zwei Idealfälle der Dichteverteilung streng behandelt worden: Die homogene Flüssigkeit ($\varrho =$ const.) und das sogenannte *Roche*sche Modell, bestehend aus einem ausdehnungslosen Kern endlicher Masse und einer ausgedehnten Atmosphäre verschwindender Masse (mittlere Dichte $\bar{\varrho} =$ Masse des Kernes : Volumen der Figur). Kosmogonisch ergeben sich daraus die folgenden Fragestellungen:

a) Welches sind die Gleichgewichtsfiguren der wirklichen kosmischen Massen (Sterne, Nebel), deren innere Dichteverteilung irgendwie zwischen den beiden Idealfällen liegt ($\varrho = f(r, \varphi, \vartheta)$)?

b) Lassen sich die bekannten Reihen von Gleichgewichtsfiguren auffassen als zeitliche Aufeinanderfolge relativer Gleichgewichtszustände (d. h. als säkular stabile Entwicklungsstufen) einzelner Massen?

Die Weggleichung eines isolierten mechanischen Systems enthält notwendigerweise die Forderung, daß der gesamte Drehimpuls (in Anlehnung an die englische Bezeichnung „moment of momentum“ auch „Gesamtmoment“, gemeint jedenfalls immer $\int \omega r^2 d\mathfrak{M}$) konstant sei.

Die Entwicklungsreihen einer rotierenden Masse sind daher Folgen von Gleichgewichtsfiguren mit gleichem Rotationsmoment. Für die Stabilität ist wesentlich der Wert von $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho}$. Die Reihen von Gleichgewichtsfiguren konstanter Dichte bei zunehmendem Rotationsmoment sind identisch mit denjenigen zunehmender Dichte (Kontraktion, wachsende Winkelgeschwindigkeit) bei konstantem Rotationsmoment.

Ordnet man die bekannten Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten entsprechend [119]), so findet man, ausgehend von der Kugel $\left(\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = 0\right)$ für eine Masse $\mathfrak{M}$ mit dem Rotationsmoment M abgeplattete Rotationsellipsoide, so lange

$$0 \leqq \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} \leqq 0{,}187; \quad 0 \leqq \varrho \leqq 2{,}03 \cdot 10^{-8} \mathfrak{M}^{10} \mathsf{M}^{-6}.$$

Sie verlieren ihre Stabilität beim Verzweigungspunkt mit den dreiachsigen *Jacobi*schen Ellipsoiden, die eine stabile Fortsetzung der Reihe liefern, so lange

$$0{,}187 \geqq \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} \geqq 0{,}142; \quad 2{,}03 \cdot 10^{-8} \mathfrak{M}^{10} \mathsf{M}^{-6} \leqq \varrho \leqq 9{,}03 \cdot 10^{-8} \mathfrak{M}^{10} \mathsf{M}^{-6}.$$

Von der Verzweigungsstelle mit den birnenförmigen Figuren aus scheint es keine stabile Fortsetzung mehr zu geben [120]); es setzt offenbar ein Teilungsprozeß ein, sobald ϱ den Maximalwert $9 \cdot 10^{-8} \mathfrak{M}^{10} \mathsf{M}^{-6}$ übersteigt. Anders ausgedrückt: eine homogene Flüssigkeit mit einem Rotationsmoment

$$\mathsf{M} > 0{,}0670 \cdot \mathfrak{M}^{\frac{5}{3}} \varrho^{-\frac{1}{6}} \quad \text{oder} \quad \mathsf{M} > 0{,}774 \cdot \mathfrak{M}^{\frac{5}{3}} \omega^{\frac{1}{3}}$$

kann nicht als säkular stabile Gleichgewichtsfigur rotieren. Für die Sonne ($\mathfrak{M} = 2 \cdot 10^{33}$ g, $\varrho = 1{,}34$ g cm^{-3}) als homogene Kugel wäre der kritische Wert $\mathsf{M} = 2 \cdot 10^{54}$ g cm^2 sec^{-1}, während das tatsächliche Rotationsmoment 0,5 bis $1 \cdot 10^{49}$ ist, je nach der Annahme über die innere Dichteverteilung; also weit unterhalb dem zur Instabilität führenden Wert.

Eine mathematische Behandlung des Zerfalls der birnenförmigen Figur hat *Jeans* [121]) versucht für das vereinfachte zweidimensionale Problem des unendlich langen rotierenden Zylinders. Man kann daraus mit einiger Wahrscheinlichkeit schließen, daß bei dem Zerfall zwei

119) Encykl. VI 2, 21, p. 50/51.

120) *Jeans,* Problems, p. 87 gibt die endgültige Darstellung unter Verbesserung von Fehlern der früheren Rechnungen und Nachweis der Arbeiten von *Darwin, Liapounoff, Jeans.* Ein Einwand von *Baker,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 20 (1920), wurde später vom Verfasser selbst zurückgezogen, ib. 23 (1925).

121) Problems, p. 102.

Massen von nicht sehr verschiedener Größenordnung entstehen: Enge spektroskopische Doppelsternsysteme mit stark deformierten Komponenten.

Das *Roche*sche Modell, bei dem das Gravitationspotential nur durch die punktförmige Masse im Mittelpunkt bestimmt wird, das daher einfacher Behandlung zugänglich ist, führt auf nur eine einzige Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Die Niveauflächen sind Pseudosphäroide, bestimmt durch die Gleichung[122])

$$\frac{k^2\mathfrak{M}}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Die freie Oberfläche hat linsenförmige Gestalt (Abplattung $\frac{1}{3}$) und ist definiert durch

$$\frac{k^2\mathfrak{M}}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{3}{2}(k^2\mathfrak{M}\,\omega)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist $\bar{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{V}$, wo V das jeweilige Volumen der Atmosphäre ist, so wird die Reihe der Gleichgewichtsfiguren eines sich kontrahierenden Sternes formal beschrieben durch wachsende Werte von $\frac{\omega^2}{2\pi k^2\bar{\varrho}}$, beginnend mit dem Wert 0 für die Kugel und stabile Formen umfassend bis zu dem Maximalwert

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2\bar{\varrho}} = 0{,}36,$$

dem Wert für die kritische Niveaufläche, längs deren Äquator Anziehungskraft und Zentrifugalkraft sich das Gleichgewicht halten. Bei weiterer Kontraktion und damit verbundener Zunahme der Winkelgeschwindigkeit bleiben in der Äquatorebene frei umlaufende Teile der Atmosphäre zurück. Nur die innerhalb der Linse mit dem Äquatorradius

$$R = \frac{1}{\omega}(k^2\mathfrak{M})^{\frac{1}{3}}$$

gelegenen Teile rotieren wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω; die äußeren laufen langsamer um, entsprechend dem 3. *Kepler*schen Gesetz.

Es ist zu beachten, daß bei dem Modell von *Roche* die Größe des Rotationsmomentes kein Kriterium für die Instabilität ist. Das ideale Modell hat stets das Rotationsmoment 0; im praktischen Fall ist die Größe des Rotationsmomentes bedingt durch die Stärke der zentralen Verdichtung. Aus dem kritischen Wert $\frac{\omega^2}{2\pi k^2\bar{\varrho}} = 0{,}36$ läßt sich für jedes beliebig kleine Rotationsmoment ein Verhältnis von

122) Encykl. VI 2, 21, p. 70/71.

Kernmasse zu Gesamtmasse ableiten, für welches die Grenze der äquatorialen Stabilität überschritten wird.

Die beiden idealisierten Modelle der klassischen Theorie führen auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Rotationsinstabilität:

a) Teilung in Massen von gleicher Größenordnung bei der homogenen Flüssigkeit.

b) Äquatoreales Ausströmen atmosphärischer Massen bei dem Modell von *Roche.*

Für die Entscheidung wie wirkliche kosmische Massen sich verhalten, ist die Untersuchung intermediärer Typen nötig und die Auffindung von Kriterien, wann der eine oder andere Fall von Instabilität eintritt bzw. überwiegt. Untersuchungen dieser Art liegen bisher nur von *Jeans*[120]) vor, der die Zwischentypen in zweierlei Weise durch Parameter zu charakterisieren suchte, die einen kontinuierlichen Übergang ermöglichen:

a) Die rotierende Masse besteht aus einem Kern inkompressibler Flüssigkeit und einer masselosen Atmosphäre, so daß der Kern die ungestörten Gleichgewichtsfiguren durchläuft und durch seine Form allein die Gestalt und Größe der atmosphärischen Hülle bestimmt. Parameter ist $s = \frac{v_A}{v_N}$, wo v_N das Volumen des Kerns, v_A das der Atmosphäre ist; $s = 0$ für das inkompressible Modell, $s = \infty$ für das Modell von *Roche.*

b) Die rotierende Masse ist ein Gasball im adiabatischen (besser „polytropen") Gleichgewicht. Parameter ist der Exponent $\varkappa = \frac{n+1}{n}$ in der adiabatischen Beziehung

$$p = \text{const}\cdot\varrho^{\varkappa}$$

$\varkappa = \infty$ $(n = 0)$ für das inkompressible Modell, $\varkappa = \frac{6}{5}$ $(n = 5)$ für das Modell von *Roche,* $\varkappa = \frac{4}{3}$ $(n = 3)$ für den *Eddington*schen Stern.

Die Behandlung des ersten Falles ist leicht. Hat der Kern die Gestalt des kritischen *Maclaurin*-Ellipsoids, so bestimmt die kritische Niveaufläche der Atmosphäre das mögliche Volumverhältnis zu $s = \frac{1}{3}$. Hat die ursprüngliche Atmosphäre größere Ausdehnung, so wird bereits für Werte $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} < 0{,}187$ äquatoreales Ausströmen der Materie erfolgen; dies so lange, bis der Kern die Reihe der Rotationsellipsoide bis zur Verzweigung mit den *Jacobi*schen dreiachsigen Ellipsoiden durchlaufen hat.

Für die Grenzfigur der *Jacobi*schen Ellipsoide findet man $s = \frac{1}{8}$; d. h. an der Verzweigung mit den Birnenformen — entstehender Doppelstern — kann das Volumen der Atmosphäre nur noch $\frac{1}{8}$ des Kernes betragen. Der ursprüngliche Überschuß (zwischen $\frac{1}{3} > s > \frac{1}{8}$) wird, während der Kern die Reihe der *Jacobi*schen Ellipsoide durchläuft, an den in Richtung der großen Achse des Ellipsoids gelegenen diametralen Punkten der Atmosphäre abgestoßen.

Definiert man wieder formal die mittlere Dichte $\bar{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{(v_N + v_A)}$, so berechnet sich der zu dem kritischen Wert $s = \frac{1}{3}$ gehörige Wert der Winkelgeschwindigkeit zu

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \bar{\varrho}} = 0{,}25.$$

Für das adiabatische Modell hat *Jeans* durch Reihenentwicklungen der Dichte und des Potentials der Pseudosphäroide bzw. -ellipsoide Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen versucht; Entwicklungsparameter ist $\frac{(\varrho_0 - \sigma)}{\varrho_0}$, wo ϱ_0 die Zentraldichte, σ die Oberflächendichte bedeutet. Die Bedingung, daß die Verzweigungsstelle der Pseudosphäroide mit den Pseudoellipsoiden zusammenfalle mit dem Auftreten der Unstetigkeit am Äquator der freien Oberfläche, führt auf die Bedingung[123])

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{\varrho_0 - \sigma}{\varrho_0}[0{,}9990(\varkappa - 2) - 1{,}0500] \\ &+ \left(\frac{\varrho_0 - \sigma}{\varrho_0}\right)^2[0{,}4997(\varkappa - 2)^2 - 0{,}07140(\varkappa - 2) - 0{,}07998] + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Für $\frac{(\varrho_0 - \sigma)}{\varrho_0} \to 1$ konvergieren die Werte von $\varkappa$ gegen 2,2 ($n = \frac{5}{6}$) und für die kritische Rotationsgeschwindigkeit erhält man

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \bar{\varrho}} = 0{,}18712 + 0{,}06827\,\frac{\varrho_0 - \sigma}{\varrho_0} + 0{,}03022\left(\frac{\varrho_0 - \sigma}{\varrho_0}\right)^2 + \cdots,$$

konvergierend für $\frac{(\varrho_0 - \sigma)}{\varrho_0} \to 1$ gegen etwa 0,31. Gaskugeln mit $\frac{6}{5} < \varkappa < \frac{11}{5}$ $(5 > n > \frac{5}{6})$ werden äquatoreal instabil; solche mit $\frac{11}{5} < \varkappa < \infty$ $(\frac{5}{6} > n > 0)$ teilen sich nach dem Vorbild der Birnenformen homogener Flüssigkeiten. Der *Eddington*sche Stern würde formal mit $n = 3$ in die erste Reihe gehören. Da auch alle neueren Untersuchungen über den Aufbau der Sterne im allgemeinen formale Polytropenindizes über 1 ergeben, könnte man versucht sein, zu schließen, daß bei den in der Natur vorkommenden Sternen der Teilungsprozeß überhaupt nicht eintreten kann.

123) Zitiert nach A. C., abweichend von den früheren Werten.

Das wäre indessen ein bedenklicher Fehlschluß[124]), da alle Untersuchungen über den Polytropenindex Sterne ohne Rotation betreffen und die Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren Rotation wie ein starrer Körper voraussetzen. Das Theorem von *v. Zeipel* zeigt, daß wirkliche Sterne nicht wie starre Körper rotieren können. *Jeans* hat durch seine Theorie der Strahlungsbremsung zu zeigen versucht, daß das Rotationsgesetz von der Form $\omega \sim \frac{1}{r^2}$ sei. In diesem Fall würden wir gerade zu dem umgekehrten Schluß kommen wie oben: da die Zentrifugalkraft wegen der mit $\frac{1}{r^2}$ abnehmenden Winkelgeschwindigkeit nie den Wert der Schwerkraft erreichen kann, ist ein äquatoreales Instabilwerden ausgeschlossen. Die Sterne verhielten sich vielmehr dem Einfluß der Rotation gegenüber stets wie homogene Flüssigkeiten.

So lange wir keine Theorie des Aufbaus rotierender Gaskugeln besitzen — die Ergebnisse von *Jeans* sind sehr anfechtbar — kann aus der formalen Behandlung des adiabatischen Modells nichts über das wirkliche Verhalten kosmischer Massen geschlossen werden. Die Kosmogonie kann sich daher vorläufig nur auf den empirischen Standpunkt stellen:

a) Die Formen außergalaktischer Nebel weisen unzweifelhaft auf das Vorkommen äquatorealer Instabilitäten hin, nach dem Vorbild des Modells von *Roche*.

b) Die Existenz enger spektroskopischer Doppelsterne (Typus β Lyrae), bei denen Umlaufszeit und Rotation der Komponenten übereinstimmen und die Oberflächen in der Verbindungslinie der großen Achsen nahezu in Kontakt sind, macht das Vorkommen von Teilungsprozessen nach dem Vorbild der homogenen Flüssigkeiten fast zur Gewißheit.

10. Gezeitendeformationen. Unter dem Einfluß der Anziehung einer äußeren Masse treten Deformationen auf, die auch auf gewisse Reihen von Gleichgewichtsfiguren führen, wenn man die die Deformation bestimmenden Parameter kontinuierlich variiert. Das allgemeine Problem kann zunächst dahin vereinfacht werden, daß man beide Körper als in Ruhe befindlich betrachtet relativ zu einem Koordinatensystem, das mit der Umlaufsgeschwindigkeit der beiden Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt rotiert.

Als Erde-Mond-Problem, wo die Distanz des „Mondes" groß ist gegen seine Dimensionen, wird die Aufgabe schon von der klassischen Himmelsmechanik behandelt.[125]) Das allgemeinere Problem der Ge-

124) Auch von *Emden* gezogen: Encykl. VI 2, 24, p. 448.

125) Encykl. VI 2, 21, Nr. 26.

stalt, vor allem aber der Stabilität eines Satelliten[126]) wurde von *Roche* gelöst und führte zu der kosmogonisch bedeutsamen Feststellung, daß es, bei gegebenen Massen bzw. mittleren Dichten, eine Minimaldistanz gibt, innerhalb deren kein Satellit als zusammenhängender Körper umlaufen kann (*Roche*sche Grenze).

G. H. Darwin[127]) hat sich dann von der Einschränkung befreit, daß nur die eine Masse (der „Mond") deformierbar sei. Durch umfangreiche Reihenentwicklungen und Rechnungen hat er die Gleichgewichtsfiguren von Doppelsternsystemen verschiedenen Massenverhältnisses und verschiedener Distanz der Komponenten berechnet, ausgehend von ellipsoidischen Deformationen.

In all diesen Arbeiten wurde nur der Idealfall der homogenen Flüssigkeit behandelt. *Jeans*[128]) hat die entsprechenden Fälle für das Modell von *Roche* betrachtet, die nichts prinzipiell Neues ergeben hinsichtlich des Wertes der kritischen Distanz. Nur treten beim Instabilwerden wieder die analogen Unterschiede gegenüber der Flüssigkeit auf wie beim Rotationsproblem (vgl. unten). Ein erster Ansatz zu wirklich strenger Behandlung der Frage ist von *Lichtenstein*[129]) gemacht worden, zunächst allerdings nur wieder für den zweidimensionalen Fall.

Die Gleichgewichtsfiguren lassen sich mit sehr großer Annäherung durch Ellipsoide darstellen, die in der Richtung der Verbindungslinie beider Massen verlängert sind. Die Abweichungen vom Ellipsoid erreichen selbst bei *Darwins* Figuren „größter Annäherung" nur wenige Prozent; sie liegen in dem Sinn, daß die einander gegenüberliegenden Enden der Körper etwas verlängert, die abgewandten verkürzt sind (vgl. Tabelle 6).

Das allgemeine Problem ist gekennzeichnet durch das Massenverhältnis $\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}$, wo $\mathfrak{M}$ jeweils den Stern bedeutet, dessen Figur unter dem Einfluß von $\mathfrak{M}'$ betrachtet werden soll, und das Moment

$$\mathsf{M} = \left(\mathfrak{M} l^2 + \mathfrak{M}' l'^2 + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'} \Delta^2\right) \omega,$$

wo l und l' die Trägheitsradien der beiden Körper bedeuten, Δ die Distanz ihrer Mittelpunkte. Das spezielle Mondproblem von *Roche* entspricht der Annahme $\mathfrak{M}$ (d. i. der „Mond") unendlich klein, $\mathfrak{M}'$ undeformierbar, d. h. $l' =$ const., so daß das Potential sich nach Potenzen

126) Ebenda Nr. **27**.

127) Collected Works III. Vgl. auch *Jeans*, Problems und A.C.

128) Problems, Chapt. VII.

129) Kosmogonische Untersuchungen I. Ber. Leipzig **1928**, p. 80.

von $\frac{\mathfrak{M}'}{\Delta}$ entwickeln läßt. Das Moment schreibt sich für undeformierbares $\mathfrak{M}'$ einfach so:

$$\mathsf{M} = (\mathfrak{M} l^2 + \mathfrak{M}' l'^2)\omega + k^2 \mathfrak{M}\mathfrak{M}'(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^{-\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}}.$$

Für $\mathfrak{M} \rightarrow 0$ geht auch $\mathsf{M} \rightarrow 0$, aber $\frac{\mathsf{M}}{\mathfrak{M}}$ bleibt endlich:

$$\frac{\mathsf{M}}{\mathfrak{M}} = (k^2 \mathfrak{M}')^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} + \text{const.}$$

Das allgemeine „Doppelsternproblem" von *Darwin* entspricht endlichen Werten von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}$ und Deformierbarkeit auch von $\mathfrak{M}'$, so daß das Potential sich nur durch schrittweise Näherung berechnen läßt. In den Ausdruck für die Distanz Δ tritt der die Deformation charakterisierende Parameter ζ ein und das Moment wird allgemein

$$\mathsf{M} = (\mathfrak{M} l^2 + \mathfrak{M}' l'^2)\omega + k^2 \mathfrak{M}\mathfrak{M}'(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^{-\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} (1 + \zeta)^{\frac{2}{3}}$$

oder auch

$$\mathsf{M} = \left(\mathfrak{M} l^2 + \mathfrak{M}' l'^2 + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'} \Delta^2\right)(1 + \zeta)^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^{\frac{1}{2}} \Delta^{-\frac{3}{2}}$$

Für jeden Wert von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}$ lassen sich lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren angeben, die wieder so anzuordnen sind, daß sie den Reihen entsprechen, die bei konstantem Gesamtmoment durchlaufen werden. Allerdings liegen die Verhältnisse hier verwickelter als beim einfachen Rotationsproblem, da im praktischen Doppelsternproblem ein Austausch zwischen dem Umlaufmoment und den Momenten der relativen Rotation der Körper durch Gezeitenreibung stattfindet (vgl. Nr. **12**). Aber man kann — z. B. bei der Annahme gleichförmiger Kontraktion beider Komponenten — die wirklichen Reihen in Parallele setzen mit solchen veränderlichen Momentes. Die für die Stabilität maßgebende Größe $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho}$ ersetzt man zweckmäßigerweise durch eine dem Problem angepaßte kritische Distanz, indem man einführt

$$\mathfrak{M}' = \frac{4\pi}{3} a' b' c' \varrho' = \frac{4\pi}{3} R_0'^3 \varrho'.$$

Die Grenze der Stabilität entspricht dem Minimum des Momentes und ist gegeben durch

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{\mathfrak{M}'}{\Delta^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\left(\frac{R_0'}{A}\right)^3 = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^3$$

oder

$$\Delta = \left(\frac{3\omega^2}{4\pi k^2 \varrho}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} R_0' = \alpha \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} R_0' = \alpha \left(\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_0.$$

Diese in Einheiten des Radius der störenden oder der gestörten Masse ausgedrückte kritische Distanz, innerhalb deren Instabilität auftritt, ist die „*Roche*sche Grenze“. Im speziellen Mondproblem von *Roche* ist diese Grenze einfach gegeben durch

$$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} = 0; \quad \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = 0{,}045; \quad \Delta = 2{,}455\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} R_0'.$$

Der von *Roche*[130]) für $\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} = 1$ unter Voraussetzung der Nichtdeformierbarkeit der Masse $\mathfrak{M}'$ abgeleitete Wert ($\alpha = 2{,}64$) ist praktisch uninteressant. Wenn die Massen vergleichbar werden, muß die allgemeinere Behandlung von *Darwin* einsetzen. In *Darwins* Rechnungen ist $\varrho = \varrho'$ und als Einheit der Entfernung wird benutzt:

$$R_0 = \left(\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{\varrho} \cdot \frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Die wesentlichen Ergebnisse[131]) sind für die Grenzfiguren[132]) („figures of limiting stability“):

Tabelle 6.

$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}$	$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho}$	α	D	a	b	c	a'	b'	c'	$\frac{\delta c}{c}$	
0	0,0449	2,457	1,030	(0,482)	(0,511)	(1,000)	(0,942)	(1,030)	(1,030)		
0,4	0,0435	2,485	0,583	0,562	0,603	0,843	0,815	0,886	0,988	$+\frac{1}{17}$	$-\frac{1}{25}$
0,7	0,0428	2,497	0,559	0,652	0,701	0,901	0,753	0,815	0,958	$+\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{33}$
1,0	0,0420	2,514	0,576	0,708	0,762	0,927	0,708	0,762	0,927	$+\frac{1}{23}$	$-\frac{1}{39}$

a, b, c bzw. a', b', c' sind die Achsen der Körper, a und a' parallel der Rotationsachse, c und c' in Richtung der Verbindungslinie. Unter $\frac{\delta c}{c}$ stehen die prozentualen Abweichungen der großen Achse vom Ellipsoid; Verlängerungen (positive Reihe) auf der zugewandten Seite, Verkürzungen (negative Reihe) auf der abgewandten. Die Deformationen sind dem Massenverhältnis umgekehrt proportional:

$$\frac{\delta c'}{c'} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'} \cdot \frac{\delta c}{c}.$$

D ist die kürzeste Distanz der Oberflächen.

---

130) Encykl. VI 2, 21, p. 55.

131) Coll. Works III, p. 507—511.

132) Auf den Unterschied zwischen „partieller Stabilität“ und „säkularer Stabilität“ braucht hier nicht näher eingegangen zu werden. Bei dem ganzen Näherungscharakter der Rechnungen und den mehr qualitativen Bedürfnissen der Kosmogonie spielt es keine Rolle, ob α um einige Prozent größer oder kleiner ausfällt. Die Zahlen *Darwins* beziehen sich auf den Fall der partiellen Stabilität.

Die über die „limiting stability" hinaus noch formal nach der gleichen Methode von *Darwin* gerechneten Kontaktfiguren („figures of closest approach") sind notwendig instabil. *Darwin* hoffte damals, von hier aus den Anschluß an die von ihm als stabil betrachteten birnenförmigen Figuren finden zu können. Dieser Anschluß ist nicht geglückt. Es klafft eine Lücke, in der dynamische Vorgänge sich abspielen; der Übergang vom rotierenden dreiachsigen Ellipsoid zum Doppelstern erfolgt durch eine Katastrophe („Cataclysmic motion").

Das Gezeitenproblem kann noch in einer anderen sehr wichtigen Form spezialisiert werden. Im Fall der Annäherung zweier Himmelskörper aus großer Entfernung ist $\omega = 0$, so daß die Rotationsglieder in den die Deformation bestimmenden Ausdrücken verschwinden. Maßgebend für die Vorgänge ist aber nicht allein die jeweilige Distanz der beiden Massen, sondern auch die Geschwindigkeit, mit der die Annäherung bzw. der Vorübergang erfolgt, verglichen mit der Periode der freien Schwingungen der Masse. Bei „adiabatischer" Annäherung („slow encounter" in *Jeans'* Terminologie) kann das Problem als statisches Gleichgewichtsproblem behandelt werden; im anderen Extremfall („transitory encounter") hat man es mit einem Stoßvorgang zu tun.

Die kritische *Roche*sche Grenze ergibt sich in den beiden Extremfällen nur wenig verschieden und ist — da der Einfluß der Rotationsglieder wegfällt — kleiner als im Doppelsternproblem. *Jeffreys*[133]) findet z. B. die entsprechenden Zahlenfaktoren $2^{\frac{1}{3}}$ bzw. $\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$, d. h. bei einem „Stoß" einen um etwa $4\,\%$ größeren Wert als bei einer adiabatischen Annäherung; das aber liegt innerhalb der sonstigen Vernachlässigungen der Theorie. Nach *Jeans*[134]) gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 2{,}198 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right)^{\frac{1}{3}} R_0 \quad \text{für homogene Flüssigkeiten} \\ \Delta &= 1{,}75 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right)^{\frac{1}{3}} R_0 \quad \text{für das Modell von } \mathit{Roche} \end{aligned}\right\} \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} \to \infty$$

$$\Delta = 2{,}28 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right)^{\frac{1}{3}} R_0 \quad \text{für das Modell von } \mathit{Roche} \quad \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} = 2.$$

Begegnungen sind für einen Stern um so gefährlicher (Δ wird um so größer), je größer die Masse $\mathfrak{M}'$ ist, der er begegnet. Begegnet z. B. eine nach dem Modell von *Roche* aufgebaute Sonne einem Stern von der Masse $4\odot$ bei einer Relativgeschwindigkeit von 40 km/sec, so würde Annäherung auf die Distanz 4 (entsprechend dem mittleren

133) The Earth, p. 24.

134) Problems, p. 46 bzw. 156.

Abstand der Asteroiden) schon die Ablösung des von dem fremden Stern erzeugten Flutberges hervorrufen.

Wie beim Rotationsproblem, so hängt auch beim Gezeiten- und Doppelsternproblem die Art der auftretenden Instabilitäten von der Konstitution der Massen ab. *Jeans*[135]) hat plausibel machen können, daß die homogene Flüssigkeit beim Instabilwerden der verlängerten Pseudoellipsoide mehrere Einschnürungen bildet und entsprechend in mehrere Teilmassen von vergleichbarer Größe zerfällt, während das Modell von *Roche* in der Verbindungslinie beider Körper nur Bruchteile der atmosphärischen Massen ausströmen läßt (Ablösen eines Flutberges), zunächst auf der dem störenden Stern zugewandten Seite, im allgemeinen aber auch auf der Gegenseite.

Das allgemeine Modell des Übergangstypus hat *Jeans*[136]) nur für den Fall eines inkompressiblen Kernes mit Atmosphäre kurz diskutiert. Er findet für das kritische Verhältnis $\frac{v_A}{v_A + v_N}$ den Wert $\frac{1}{10}$; d. h. wenn die ursprüngliche Atmosphäre mehr als $\frac{1}{10}$ des Gesamtvolumens ausmacht, werden atmosphärische Teile abgestoßen, bevor der Kern instabil wird.

Im allgemeinen wird bei Begegnungen nur die kleinere der beiden Massen zerbrechen.[137]) Bei einem Vorübergang, d. h. einem nicht zentralen Stoß, wird außerdem auf den gestörten Körper, besonders auf den etwa abgelösten Flutberg, Impuls in der Bewegungsrichtung des störenden Körpers übertragen, außer bei dem in der Wirklichkeit nicht streng möglichen adiabatischen Fall. Diese beiden Bemerkungen sind wichtig für die Beurteilung der Theorien, die die Entstehung des Planetensystems auf eine Begegnung der Sonne mit einem Stern großer Masse zurückführen.

Für die Anwendung der Theorie ist bedeutungsvoll die Feststellung, daß im Planetensystem sicher alle Teile des Saturnrings innerhalb der kritischen Distanz liegen, die die Existenz eines Mondes verbietet (äußerer Radius des Ringes $= 2{,}30 \cdot R_♄$). Bedenklich nahe der Grenze laufen die innersten Monde von Jupiter (2,54), Mars (2,79) und auch noch Saturn (3,11), während alle anderen Monde, vor allem auch der Erdmond (60,3), weit außerhalb der Gefahrzone liegen, soweit man sie hier angeben kann mit Rücksicht auf den Faktor $\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}$, der die Grenze hinausrückt, wenn die Dichte des Mondes kleiner ist als die des Planeten.

135) Problems, p. 118—131.

136) Ebenda p. 160—164.

137) *Jeffreys*, The Earth, p. 24.

11. Schwingungen und Pulsationen.[138]) Für die Periode P einer freien Schwingung (Volumen konstant, Form periodisch veränderlich) oder Pulsation (Form konstant, Radius periodisch veränderlich) einer Gaskugel der mittleren Dichte ϱ gilt stets eine Beziehung der Form

$$P^2 \cdot \varrho = \text{const.} \tag{1}$$

Der Wert der Konstanten hängt vom Aufbaugesetz (Verhältnis der Mittelpunktswerte zu den Mittelwerten) und der Zustandsgleichung der Materie $\left(\text{Verhältnis der spezifischen Wärme } \varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right)$ ab und kann für wirkliche Sterne nur unsicher angegeben werden. *Eddingtons* Modell für normale Riesen ($n = 3$) liefert

$$P^2 \varrho = \frac{0{,}00052}{\gamma - \frac{4}{3}}, \tag{2}$$

wo γ das „effektive" Verhältnis der spezifischen Wärmen ist (Materie + Strahlung), das zwischen $\frac{c_p}{c_v}$ und $\frac{4}{3}$ liegt. Kommt γ dem Wert $\frac{4}{3}$ sehr nahe (Überwiegen der Strahlung), so wird P stark anwachsen. *Eddington*[139]) setzt als wahrscheinlichsten Wert an, allerdings unter Rücksichtnahme auf die bei den δ Cephei-Sternen beobachteten Verhältnisse, also nicht aus rein theoretischen Überlegungen,

$$\gamma - \tfrac{4}{3} = 0{,}030,$$

womit man erhält

$$P^2 \varrho = 0{,}017, \tag{3}$$

während *Jeans*[140]) mit einem viel kleineren Wert rechnet:

$$P^2 \varrho = 0{,}0020. \tag{4}$$

Die folgende Tabelle gibt einen Vergleich der „beobachteten" Werte der mittleren Dichten nach *Seares*[141]) und der nach den beiden Formeln berechneten.

Tabelle 7.

Sterne	Sp.	P	Mittlere Dichte *Seares*	*Eddington*	*Jeans*
Langperiodische . .	M	300^d	$6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$
Cepheiden	K	18	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$
„	G	4	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
„	F	0,9	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
Haufenveränderliche .	A	0,3	$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$

138) Vgl. *Emden,* Encykl. VI 2, 24, Kap. H.

139) I. A. S., p. 235.

140) A. C., p. 377.

141) Fußnote 35.

Führt man das Masse-Leuchtkraft-Gesetz ein, so erhält man mit großer Annäherung (bis auf den Einfluß der innerhalb der Reihe der Riesen nicht großen Variation des Molekulargewichtes und der Größe $1-\beta$) ein Perioden-Leuchtkraft-Gesetz in der Form

$$\log P + 0{,}25 \cdot M + 3 \log T_e = \text{const.} \tag{5}$$

Dieses Gesetz wird durch die Cepheiden sehr gut erfüllt.[142]) Die Konstante ergibt sich empirisch zu $11{,}35 \pm 0{,}01$.

Wesentlich für den Vergleich mit der Beobachtung sind gewisse Phasenbeziehungen, die bei radialen Pulsationen erfüllt sein sollten:

a) Die Temperatur muß in Phase sein mit dem Radius[143]), dessen Änderungen aus der beobachteten Radialgeschwindigkeitskurve abgeleitet werden können.

b) Da die Leuchtkraft durch Radius und Temperatur bestimmt ist, müssen Radius und Temperatur beide in Phase sein mit der Leuchtkraft.[144])

Hier liegt eine der großen Schwierigkeiten für die Deutung der Cepheiden nach der Pulsationstheorie vor (vgl. Nr. **20**).

Die kosmogonisch bedeutsamen Fragen: Ursachen und Aufrechterhalten der Pulsationen, Auftreten bzw. Fehlen von Oberschwingungen sind noch wenig geklärt; man verfügt kaum über mehr als ad hoc konstruierte Hypothesen.[145])

12. Gezeitenreibung. Durch innere Reibung tritt eine Verzögerung der Gezeiten auf, wenn Umlaufszeit und Rotationszeiten nicht gleich sind. Die großen Achsen der durch Gezeitenwirkung deformierten Figuren weisen nicht in die Verbindungslinie der Mittelpunkte. Dadurch entstehen Kräfte, die einen Austausch von Umlauf- und Rotationsmomenten bewirken und die Herstellung eines Zustandes erstreben, in dem beide Körper keine relative Rotation mehr besitzen. Eine gründliche Diskussion der mit der Gezeitenreibung zusammenhängenden Fragen verdankt man *G. H. Darwin*[146]), der zwar nicht als erster

---

142) *Jeans,* A. C., p. 378, Table XXXII.

143) *Jeans,* M. N. 84 (1926), p. 86 u. 574. *Reesinck,* Dissertation Amsterdam 1926; M. N. 84 (1927), p. 414.

144) *W. Baade,* A. N. 5468 (1926) = Mitt. Hamburg-Bergedorf, Bd. 6, Nr. 26.

145) Vgl. *H. Siedentopf,* A. N 244 (1931), p. 17 und 245 (1931), p. 85.

146) Coll. Works Vol. II. Tidal friction and Cosmogony. Encykl. VI 1, B, 6 E.: Flutreibung und spekulative Astronomie. Vgl. auch die allgemeine Darstellung in „Ebbe und Flut", Sammlung Wissenschaft und Hypothese Bd. V (1911), Kap. XVI—XXI. Mathematische Analyse der wesentlichen Punkte bei *Poincaré,* Leçons, Chap. VII und bei *Jeffreys,* The Earth, Chapt. XIV.

auf ihre kosmogonische Bedeutung hingewiesen[147]), die Folgerungen aber im weitesten Umfange gezogen hat.

Die bei der Gezeitenreibung auftretende Kraft G ist bis auf unwesentliche Faktoren (Zahlenkoeffizienten, Viskositätskonstante), die als Proportionalitätsfaktor α eingeführt werden mögen:

$$(1) \qquad G = \alpha \left(\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right)^2 \frac{R^9}{\Delta^6} = \alpha_1 \cdot \mathfrak{M}'^2 \cdot \mathfrak{M} \cdot \varrho^{-3} \Delta^{-6}.$$

Die durch Gezeitenreibung vernichtete Energie ist

$$(2) \qquad -\frac{dE}{dt} = G(\omega - n),$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, n die des Umlaufs ist. G hat das gleiche Vorzeichen wie $\omega - n$. Die Hauptwirkungen auf die Bahnelemente sind[148]), wenn man zur Abkürzung die kanonische Variable $\xi = \sqrt{a}$ einführt und $K = \alpha_2 \cdot \frac{G}{\mathfrak{M} R^2}$ setzt:

a) Änderung der großen Achse a bzw. der mittleren Bewegung n:

$$(3) \qquad \frac{dn}{dt} = -\frac{d\xi}{dt} = -K(\omega - n),$$

b) Änderung der Exzentrizität:

$$(4) \qquad \frac{de}{dt} = +\frac{Ke}{2\xi}(11\omega - 18n),$$

c) Anderung der Neigung i des Äquators und j der Bahnebene gegen die unveränderliche Ebene:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{K\omega}{2\xi}(i + j) \\ \dfrac{dj}{dt} = +\dfrac{K}{2\omega}(i + j)(\omega - 2n). \end{cases}$$

Aus (1) ersieht man, daß das Massenverhältnis $\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}$ eine entscheidende Rolle spielt; die besondere Stellung des Erde-Mond-Systems mit seinem großen Wert von $\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{82}$, gerade bezüglich der Wirkung der Gezeitenreibung, wird daraus verständlich. Die Wirkung nimmt außerdem mit einer sehr hohen Potenz des Abstandes ab; daher ist die durch die Sonnengezeiten auf die Planeten ausgeübte Wirkung bedeutungslos, außer etwa bei Merkur und Venus.[149])

Da K eine positive Konstante ist, folgt aus (3), daß die Bahndimensionen sich verkleinern (vergrößern), wenn die Rotationsgeschwindigkeit

147) Vgl. die historische Darstellung von *G. H. Darwin* selbst in Encykl. VI 1, B, 6 E., Nr. **41**.

148) *Poincaré*, Leçons, Nr. 118.

149) Vgl. die Tabelle bei *Darwin*, Coll. Works II, 8.

ω kleiner (größer) ist als die Umlaufsgeschwindigkeit n. Der innerste Marsmond ($n \sim 3\omega$) muß sich dem Planeten nähern, während der Erdmond ($n < \omega$) sich entfernt. Ist $n > \omega$, dann gibt es keine säkular stabile Lösung; der Mond muß notwendigerweise auf den Planeten fallen. Ist dagegen $n < \omega$, dann erweitert sich die Bahn unter gleichzeitiger Verlangsamung der Rotation, bis $n = \omega$ wird. Der Erdmond hat unter dem Einfluß der von der Erde ausgeübten Gezeitenwirkung schon in der Vergangenheit den Zustand erreicht, daß sein „Tag" gleich dem Monat ist. Das ganze System Erde—Mond wird diesen Zustand erreichen, wenn Erdtag und Monat gleich etwa 55 unserer heutigen Tage geworden sind.[150])

Die Diskussion der Gleichungen (4) und (5) ist komplizierter. Als wesentliches Ergebnis der Untersuchungen *Darwins* ist zu verzeichnen, daß durch Gezeitenreibung aus kleinen zufälligen Störungen exzentrische und geneigte Bahnen entstehen können, selbst wenn zu irgendeinem Zeitpunkt $e = 0$ und $i + j = 0$ waren.

Darwin hat auch noch die gleichzeitige Variation von R durch Abkühlung berücksichtigt und *Poincaré* hat zu zeigen versucht, daß das Zusammenwirken der Verzögerung durch Gezeitenreibung und der Beschleunigung durch Kontraktion unter Umständen (d. h. bestimmten Annahmen über das Kontraktionsgesetz) eine ursprünglich rückläufige Rotation in eine rechtläufige verwandeln könne.

Darwins Untersuchungen beziehen sich fast ausschließlich auf die Verhältnisse im Planetensystem und hier speziell wieder auf das System Erde—Mond. Die Folgerungen aus der Theorie der Gezeitenreibung für die Entwicklung von Doppelsternsystemen aus sich teilenden und kontrahierenden Massen hat in größerer Allgemeinheit *H. N. Russell*[151]) gezogen. Es gibt eine obere Grenze für die Distanz, bis auf die sich beide Komponenten voneinander entfernen können; sie ist dadurch gegeben, daß der gesamte Drehimpuls des Systems nur noch als Umlaufmoment vorhanden ist, nachdem die Rotationsmomente durch Gezeitenreibung aufgezehrt worden sind.

Wird der Einfluß der Deformation durch die Gezeiten auf das Potential wieder durch den Faktor $1 + \zeta$ berücksichtigt (*Darwin*), so ist

$$(6) \qquad n^2 \cdot a^3 = k^2(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')(1 + \zeta)$$

und das Gesamtmoment setzt sich aus drei Teilen zusammen:

$$(7) \quad \mathsf{M} = \mathfrak{M} l^2 \omega \cos i + \mathfrak{M}' l'^2 \omega' \cos i' + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{\sqrt{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}} k \sqrt{a(1 - e^2)(1 + \zeta)}.$$

150) *Darwin,* Coll. Works II, 8, § 8β; *Poincaré,* Leçons, Nr. 128—131.

151) *H. N. Russell,* On the origin of Binary Systems, Ap. Journ. 31 (1910), p. 185—207.

Für $\omega = \omega' = n$ und $i = i' = 0$ und mit der Abkürzung $a \cdot (1 - e^2) = p$ wird

$$(8) \qquad \mathsf{M} = \left[\mathfrak{M} l^2 + \mathfrak{M}' l'^2 + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'} p^2\right] k \sqrt{\frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')(1 + \zeta) p}{R^3}}.$$

Für *Darwins* Figuren der größten Annäherung hat *Jeans*[152]) folgende Anteile der Momente ausgerechnet:

Tabelle 8.

$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}$	0	0,4	0,5	1,0
Rotationsmoment von $\mathfrak{M}$	0	0,039	0,046	0,077
„ „ $\mathfrak{M}'$	1	0,160	0,135	0,077
Umlaufmoment	0	0,801	0,819	0,846

Da das Umlaufmoment sich höchstens um die totalen Rotationsmomente vermehren und ζ höchstens von dem Wert 0,22 für die am stärksten deformierten Kontaktfiguren auf 0 abnehmen kann, folgt, daß der Parameter p der Bahn sich, solange $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'} > 0{,}4$ ist, maximal auf den $\left(\frac{1}{0{,}8}\right)^2 \cdot 1{,}22 = 1{,}90$fachen Wert vergrößern kann. Bei Kompressibilität ist der ursprüngliche Anteil der Rotationsmomente noch kleiner; entsprechend die mögliche Vergrößerung der Bahndimensionen. Daraus ergibt sich eine wesentliche Grenze für die Anwendbarkeit der Theorie der Gezeitenreibung auf die Entstehung und Entwicklung von Doppelsternsystemen: Es erscheint ausgeschlossen, daß die visuellen Doppelsternsysteme sich allein unter dem Einfluß der Gezeitenreibung aus spektroskopischen Doppelsternsystemen entwickelt haben.

13. Widerstehendes Mittel und Einfang von Massen. Bewegt sich ein Körper in einem Medium irgendwelcher Art (kosmische Staubwolke oder ausgedehnte Gasmassen), so wird seine Bewegung in verschiedener Hinsicht beeinflußt. Das Mittel setzt durch den Zusammenstoß seiner Teilchen mit dem bewegten Körper der Bewegung einen Widerstand entgegen, dessen Größe von der Dichte des Mediums, dem Wirkungsquerschnitt des Körpers und der Geschwindigkeit der aufstürzenden Teilchen relativ zu dem Körper abhängt. Das Mittel übt außerdem durch seine Masse Gravitationswirkungen aus, wirkt also als störende Masse. Schließlich wird durch die Vereinigung von Teilchen des Mittels mit dem bewegten Körper dessen Masse vergrößert. Alle diese Arten von Einwirkungen bedingen bei umlaufenden Körpern wie den Planeten, Monden und Kometen Veränderungen der Bahnelemente säkularer oder periodischer Natur.

152) Problems, p. 257.

Neben diesen Störungen der Bewegungen sind aber auch noch zu berücksichtigen die thermodynamischen Wirkungen, die mit den Zusammenstößen verknüpft sind, bei denen kinetische Energie in Wärme umgesetzt wird. Bei den großen Geschwindigkeiten, mit denen wir es bei kosmischen Vorgängen gewöhnlich zu tun haben, sind diese thermischen Wirkungen oft ganz erheblich und können, wie etwa das Beispiel der Meteore zeigt, zu teilweiser oder vollständiger Zerstörung führen.

Die Theorie des „widerstehenden Mittels" ist vor allem herangezogen worden zur Erklärung der bei periodischen Kometen beobachteten Störungen.[153]) In dem einfachen Fall, wo ein Körper (Planet, Komet) in einem relativ zum Zentralkörper „ruhenden" Medium umläuft[154]), das der Bewegung in der Richtung der jeweiligen Bahntangente einen Widerstand der Größe

$$R \sim v^p \cdot r^{-q}$$

entgegensetzt (v = Geschwindigkeit, r^{-q} = Dichte des Mediums im Abstand r vom Zentralkörper), findet man durch Integration der Störungsgleichungen[155]), daß Knoten und Neigung nicht verändert werden, daß dagegen die große Achse der Bahn stets abnimmt (Säkularbeschleunigung der mittleren Bewegung). Die Exzentrizität nimmt ab, wenn gleichzeitig $p \geqq 1$ und $q \geqq 2$ ist, d. h. wenn der Widerstand mindestens mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit geht und zugleich die Dichte des Mittels mindestens mit der zweiten Potenz des Radius nach außen abnimmt.

Nölke[156]) hat die Störungsgleichungen unter Mitberücksichtigung der Massenvergrößerung des bewegten Körpers durch Aufsammeln von Teilen des Mediums integriert und für die Fälle $p = 2$, $q = 0, 1, 2$ zahlenmäßige Abschätzungen versucht. Dabei zeigt sich, daß auch für $q < 2$ eine Abnahme der Exzentrizität auftritt, daß aber eine merkliche „Abrundung" der Bahn stets mit einer sehr erheblichen Ver-

153) Encykl. VI 2, 22, Nr. 26.

154) Eine ausführliche Darstellung der verschiedenen Originalarbeiten findet man bei *See*, Researches on the Evolution of Stellar Systems, Vol. II, Chapt. VII, mit einer Reihe historischer Bemerkungen. Ganz neuerdings sind diese Fragen von russischen Autoren aufgegriffen worden: vgl. *N. Moisseiev*, Über einige Grundfragen der Theorie des Ursprungs der Kometen, Meteore und des kosmischen Staubes, Publ. de l'Inst. Astroph. Moscou, Vol. V 1, 1930, und Russian Astr. Journ. Vol. IX, No. 1—2; *G. Doubochine*, Sur le mouvement dans un milieu résistant, Russian Astr. Journ. Vol. IX, No. 1—2, 1932.

155) *Tisserand*, Traité de méc. cel. IV, Chap. XIII.

156) Entwicklungsgang . . . Nr. 30—36, 48. Vgl. auch die Untersuchungen von *Mac Millan*, Amer. Math. Monthly 26 (1919), p. 326.

kleinerung der Bahndimensionen verbunden ist. Für $q = 0, 1, 2$ findet *Nölke* z. B. eine Abnahme der Exzentrizität auf $\frac{1}{10}$ ihres ursprünglichen Wertes verknüpft mit entsprechenden Verkleinerungen des Bahnparameters auf $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ des ursprünglichen Wertes. Je stärker die Konzentration des Mittels nach der Mitte zu ist, desto wirksamer ist es hinsichtlich der Verkleinerung der Bahnexzentrizitäten.

Erfolgt die Bewegung eines Körpers in einem Medium, das selbst umläuft, sei es in gleichförmiger Rotation (etwa als ausgedehnte Atmosphäre eines Zentralkörpers) oder in freien Keplerbahnen seiner Einzelteilchen (nach Art des Saturnringes), dann wird auch die Bahnneigung beeinflußt in dem Sinn, daß eine etwa vorhandene Neigung der Bahnebene gegen die Symmetrieebene des Mittels sich zu verringern sucht. Die Integration der Störungsgleichungen ist nur durch verwickelte Reihenentwicklungen und unter speziellen Annahmen möglich. Man findet auch hier[157]), wie im Fall des ruhenden Mittels, ganz allgemein eine Abnahme der Exzentrizität und der Bahndimensionen.

Der Fall des rotierenden Mittels ist vor allem wichtig bei der Bewegung der Trabanten; er ist gewöhnlich bei der Behandlung des Einfangs kleiner Massen durch die Planeten zugrunde gelegt worden.[158]) Die auf das rotierende Koordinatensystem bezogenen Bewegungsgleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems sind dann zu ergänzen durch ein Widerstandsglied, das von der Geschwindigkeit V des bewegten Körpers relativ zu dem rotierenden Koordinatensystem und von der Dichte ϱ des Mittels abhängt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} - f(\varrho, V)\dfrac{\dot{x}}{V}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} - f(\varrho, V)\dfrac{\dot{y}}{V}, \\ \ddot{z} \qquad\quad = \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} - f(\varrho, V)\dfrac{\dot{z}}{V}. \end{cases}$$

An die Stelle des *Jacobi*schen Integrals tritt ein Ausdruck von der allgemeineren Form

$$(2)\qquad V^2 = 2\Omega - C - 2\int_0^t f(\varrho, V)\, V dt = 2\Omega - (C + I).$$

Der Integrand ist stets positiv, d. h. die Größe I wächst kontinuierlich mit der Zeit. Man kann die Bewegung des dritten Körpers daher in erster Näherung so beschreiben, als ob sie in jedem Zeitpunkt

157) *Nölke,* a. a. O. Nr. 37—43; *Jeffreys,* The Earth, Chapt. IV.
158) Vgl. *See,* a. a. O. Chapt. VIII und X.

entsprechend einer „effektiven" *Jacobi*schen Konstante $C' = C + I$ erfolgte. Die durch die Gleichung

$$(3) \qquad 2\Omega - C' = 0$$

definierten Nullgeschwindigkeitsflächen bestehen für große Werte von C' aus drei getrennten Teilen. Von diesen grenzen zwei um jede der beiden endlichen Massen geschlossene Bereiche ab, innerhalb deren reelle Bewegungen möglich sind, während der dritte Teil einen beide Massen umschließenden Bereich abgrenzt, außerhalb dessen wieder reelle Bewegungen möglich sind. Für kleinere Werte von C' nähern sich die Begrenzungen der Bereiche einander und fließen schließlich zusammen, so daß von einem gewissen Wert von C' ab ein einfach zusammenhängender, bis ins Unendliche sich erstreckender Bereich reeller Bewegungen entsteht. Für einen unteren Grenzwert von C' reduzieren sich die verbotenen Gebiete auf die beiden *Lagrange*schen Dreieckspunkte.

Beginnt die Bewegung im Zeitpunkt $t = 0$ mit einer *Jacobi*schen Konstanten C, welche einem einfach zusammenhängenden Realitätsbereich entspricht (C klein), so geht die Wirkung eines vorhandenen widerstehenden Mittels ganz allgemein dahin, daß es diesen Bereich dauernd verkleinert. Wenn dann bei einem gewissen Wert von $C' = C + I$ das Zusammenfließen im Librationspunkt L_2 erfolgt, zerfällt der Realitätsbereich in einen inneren Bereich um die beiden Massen und einen äußeren; bei noch größerem Wert von C' teilt sich auch noch der innere Bereich in getrennte Bereiche um jede der beiden Massen. Der in dem rotierenden Mittel sich bewegende Körper wird also im Laufe der Zeit in einen dieser drei Bereiche eingeschlossen, dem er von da ab nicht mehr entweichen kann: er bewegt sich weiterhin entweder als Trabant um eine der beiden Massen (als Planetoid um die Sonne oder als Mond um den Jupiter in dem Spezialfall, wo Sonne und Jupiter die beiden endlichen Massen des eingeschränkten Dreikörperproblems sind) oder in großer Entfernung um den gemeinsamen Schwerpunkt beider. Welche dieser Möglichkeiten verwirklicht wird, kann nur durch vollständige Integration der Bewegungsgleichungen unter den Bedingungen des Einzelfalls entschieden werden; das *Jacobi*sche Integral allein gestattet keine weitergehenden Aussagen.

Rotiert das Mittel nicht mit der Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs der beiden Massen, besitzen seine Teilchen also auch noch Bewegungskomponenten relativ zu dem rotierenden Koordinatensystem, dann überlagert sich die Einwirkung des Mittels auf die relative Bahn der beiden Massen und es können verhältnismäßig komplizierte säkulare Störungen auftreten.

Schließlich ist noch der Fall zu betrachten, daß etwa das Planetensystem als Ganzes sich durch ein interstellares Medium bewegt[159]) („durchschrittenes Mittel"). Die Störungen hängen dann im allgemeinen noch von der Lage der Bahn relativ zu der Fortschreitungsrichtung im Medium ab. Unabhängig von dem speziellen Widerstandsgesetz und von der Bahnlage erfolgt in jedem Fall eine Verkleinerung der großen Achsen, und zwar rascher als in einem Mittel, das relativ zum Zentralkörper ruht. Die Exzentrizitäten können je nach der Bahnlage zu- oder abnehmen; auch das Vorzeichen der Neigungsänderungen und der Drehung der Knotenlinien hängt von den besonderen Verhältnissen ab. Man wird im allgemeinen erwarten dürfen, daß ein durchschrittenes Mittel weniger ausgleichend auf etwa vorhandene Verschiedenheiten der Bahnelemente wirkt als vielmehr sie vergrößernd.

Die Modifikationen, die durch die Rückwirkung des bewegten Körpers selbst auf das Mittel hervorgebracht werden, sind in der Literatur kaum behandelt worden. *Jeffreys*[160]) hat gezeigt, daß ein stationärer Zustand des Mittels unter dem Einfluß des Potentials der Sonne und eines Planeten nur möglich ist, wenn das Medium keine Bewegung relativ zu dem mit der mittleren Bewegung des Planeten rotierenden Koordinatensystems hat. Für den Einfluß eines widerstehenden Mittels im Planetensystem käme daher nur der oben behandelte Fall des „rotierenden" Mittels in Frage, wenn man nicht den anderen Schluß ziehen will, daß im konkreten Fall ein stationärer Zustand des Mittels nicht möglich ist, weil wir es z. B. im Planetensystem nicht mit der Wirkung eines einzigen Planeten zu tun haben, sondern mit mehreren, die sich zudem keineswegs in Kreisbahnen bewegen, wie im problème restreint vorausgesetzt. In der Umgebung jedes Planeten wird sich also nur eine Art quasistationären Zustandes ausbilden können in dem Sinn, daß das Medium sich der Umlaufbewegung des Planeten anzupassen strebt.

Der Einfluß der reinen Gravitationswirkung des Mittels auf die Bewegungen der in ihm umlaufenden Körper ist kosmogonisch bedeutungslos. Er spielt nur eine Rolle bei der Berechnung säkularer Störungen[161]) und ist in jedem Falle klein, verglichen mit den Wir-

159) *Tisserand,* a. a. O. Chap. XIII, p. 97—100; *Nölke,* a. a. O. Nr. 44—46.

160) The Earth, Chapt. IV, 3.

161) Vgl. hierzu etwa die Untersuchungen *Seeligers* über das Zodiakallicht [Encykl. VI 2, 22 (*Oppenheim*), Nr. 25]; auch *Silbernagel,* Bewegung eines Punktes innerhalb einer nicht homogenen Staubmasse, Diss. München 1905.

kungen, die bei kosmogonischen Problemen dem widerstehenden Mittel zugeschrieben werden.

Beim Einfang kleiner Massen müssen zwei Fälle unterschieden werden:

a) Angliederung interstellarer Massen an das Planetensystem;

b) Einfang interplanetarer Massen durch Planeten.

Interstellare Massen können ohne die Einwirkung eines widerstehenden Mittels dem Planetensystem angegliedert werden durch Umwandlung ursprünglich hyperbolischer oder parabolischer Bahnen in elliptische beim Durchgang durch die Wirkungssphäre[162]) eines Planeten, rein unter dem Einfluß der Gravitationsstörungen. Auf solche Weise können z. B. dem Planetensystem Kometen angegliedert werden, vor allem durch die großen Planeten Jupiter und Saturn, die sehr ausgedehnte Wirkungssphären haben (Kometenfamilie des Jupiter).

Die Möglichkeit des Einfangs interplanetarer (oder auch interstellarer) Massen durch Planeten und deren Umwandlung in Trabanten dieser Planeten („eingefangene“ Monde) wird im allgemeinen als an die Existenz eines widerstehenden Mittels gebunden erachtet. Unterlagen für diese Schlußweise liefert das *Jacobi*sche Integral und die daraus abgeleitete Existenz der *Hill*schen Grenzkurven. Aus den heutigen Werten der *Jacobi*schen Konstanten für die einzelnen Monde folgt, daß sie alle, bis auf die beiden äußersten Monde des Jupiter, geschlossene Grenzflächen um ihren Planeten besitzen. Keiner dieser Monde kann sich also über die durch die geschlossene Grenzfläche gegebene Maximalentfernung hinaus von seinem Planeten entfernen.

Umgekehrt wird aber auch für die Vergangenheit geschlossen, daß diese Monde nicht aus größeren Entfernungen, als der heutigen Ausdehnung der Grenzflächen entspricht, von dem Planeten eingefangen worden sein können, es sei denn, daß ein widerstehendes Mittel wirksam war. Streng genommen gilt diese Schlußweise nur für den idealisierten Fall des eingeschränkten Dreikörperproblems. Versuche, die *Hill*schen Grenzflächen in dem allgemeinen Fall elliptischer Bewegung der beiden endlichen Massen durch eine einhüllende Fläche zu ersetzen[163]), haben schon für kleine Exzentrizitäten auf sehr undurchsichtige zeitliche Abhängigkeiten geführt. Was bei großen Exzentrizitäten, wie sie etwa im Planetensystem anfangs geherrscht haben mögen, und unter dem Einfluß gegenseitiger Störungen in kosmogonischen Zeiträumen sich ereignet, darüber lassen sich nur Vermutungen aufstellen.

---

162) Vgl. Encykl. VI 2, 18, p 904.

163) *Wilkens,* Seeliger-Festschrift.

Ob ein widerstehendes Mittel nötig ist, um einen kleinen Planeten in einen Mond des Jupiter oder Mars zu verwandeln, muß dahingestellt bleiben. Daß aber bei Vorhandensein eines solchen Mittels Wirkungen in diesem Sinne ausgeübt werden, so wie es die Einfangtheorien annehmen, ist nicht zu bezweifeln.[164]) Schwierig, wenn nicht überhaupt unmöglich ist es, bei der Mannigfaltigkeit der Bahnformen schon im idealisierten eingeschränkten Dreikörperproblem über diese allgemeinen Aussagen hinaus den Einzelvorgang des Einfangs zu beschreiben oder zu entscheiden, ob ein heutiger Trabant in früherer Zeit wirklich eingefangen worden ist.

14. Massenänderungen und Energieaustausch. Änderungen der Masse bedingen Änderungen des Bewegungszustandes; und ebenso wirkt sich der Energieaustausch bei Begegnungen von Sternen aus. Diese Vorgänge haben daher besondere Bedeutung für die Entwicklung von Doppelsternsystemen, wo man sie für gewisse Gesetzmäßigkeiten in den Bahnelementen verantwortlich zu machen versucht hat. Sie können auch eine Rolle spielen oder gespielt haben in der Geschichte des Planetensystems und sind sicherlich von Einfluß auf die Entwicklung der großen Sternsysteme. Neben den eigentlichen Massenänderungen, die durch Abstoßen von materiellen Teilchen (etwa bei den Ausbrüchen einer Nova) oder durch Aufsammeln von Materie aus dem interstellaren Raum (Wachsen von Himmelskörpern aus kleinen Kondensationen) hervorgerufen werden, können in kosmogonischen Zeiträumen auch die Massenverluste eine Rolle spielen, die mit der Abgabe von Strahlungsenergie verbunden sind.

Im Anschluß an einen Versuch *Oppolzers*[165]), Massenänderungen der Erde und des Mondes durch aufstürzende Meteore zur Erklärung der Säkularstörungen des Mondes heranzuziehen, ist das Zweikörperproblem mit veränderlicher Zentralmasse oder Gesamtmasse mehrfach behandelt worden, zuletzt in einer Reihe von Abhandlungen von *Doubochine.*[166]) Offenbar ohne Kenntnis der älteren Arbeiten, in denen

164) Die gegenteilige Argumentation von *S. Brodetsky,* A. N. 184 (1910), p. 257, ist unrichtig. Man kann höchstens Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen darüber anstellen, ob die dritte Masse sich zu dem Zeitpunkt, in dem die Grenzflächen sich schließen, sich gerade in dem äußeren oder inneren Teil aufhält. Da der äußere Bereich wesentlich größer ist als der innere, kann man vielleicht annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für ein wirkliches Einfangen nicht sehr groß ist.

165) Vgl. die Literaturnachweise bei *Oppenheim,* Encykl. VI 2, 26, Fußnote 73) und bei *Doubochine,* Sur la forme des trajectoires dans le problème de deux corps de masses variables, Russ. Astron. Journ. VII (1930), Heft 3/4.

166) Unter dem Titel: Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps, Russ. Astron. Journ. II (1925), p. 5; IV (1927), p. 123; V (1928), p. 138 (russisch mit franz. Résumé); VI (1929), p. 162.

ganz allgemein die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \varphi(r, t) = 0$$

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{const.}$$

diskutiert[167]) sind, hat *Jeans*[168]) noch einmal den Einfluß einer säkularen Massenabnahme unter spezieller Anwendung auf Doppelsternsysteme untersucht. Im Anschluß an diese Arbeit von *Jeans*, welche zu der Feststellung kam, daß die Exzentrizität konstant bleibe[169]), während die große Achse der Bahn umgekehrt proportional der Masse, die Periode umgekehrt proportional dem Quadrat der Masse sich ändere, ist es zu Meinungsverschiedenheiten gekommen über die Form, in der die Bewegungsgleichungen anzusetzen seien. Während *Jeans*, wie alle früheren Autoren, von der Grundgleichung des einzelnen Massenpunktes der Masse $\mathfrak{M}$ unter dem Einfluß einer Kraft mit den Komponenten X, Y, Z in der Form

$$\mathfrak{M} \cdot \ddot{x} = X \tag{1}$$

ausgeht, diskutiert *Brown*[170]) noch die beiden weiteren Ansätze

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{M}\dot{x}) = X \tag{2}$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2}(\lambda x) = \lambda X, \tag{3}$$

wo λ als Funktion der zeitlich variablen Masse $\mathfrak{M}$ gedacht ist.

Brown sagt über diese drei verschiedenen Ansätze: „These reduce to the same equation if the masses are constant, but there appears to be no information as to which should be chosen if mass is lost in any other way than that given by the classical laws of dynamics.“ *Mac Millan*[171]) schließt sich *Jeans* an, während *Levi-Civitá*[172]) den

---

167) Vgl. u. a. die Darstellung von *Poincaré* im Anschluß an die Kosmogonie von *Faye* in Leçons Cosm. Nr. 64—66.

168) *Jeans*, Cosmogonic Problems associated with a Secular Decrease of Mass, M. N. 85 (1924), p. 2.

169) In dieser Formulierung, $ma = \text{const.}$, $e = \text{const.}$ z. B. bei *Poincaré*, loc. cit. p. 80.

170) *E. W. Brown*, The Effect of varying Mass on a Binary System, Proc. Nat. Ac. Sci. 11 (1925), p. 274. Erwiderung von *Jeans* unter dem gleichen Titel in M. N. 85 (1925), p. 912.

171) *W. D. Mac Millan*, The Problem of Two Bodies with Diminishing Mass, M. N 85 (1925), p. 904.

172) Rendiconti dei Lincei 1928, p. 329.

Ansatz (2) für den richtigen hält. *H. Mineur*[173]) hat in mehreren Noten den Einfluß des Massenverlustes durch Strahlung vom relativistischen Standpunkt aus betrachtet. Indem er zunächst das Linienelement im Gravitationsfeld einer zeitlich variablen Masse ableitet und dann die Bewegung einer zweiten Masse in diesem Feld untersucht, findet er, daß diese Bewegung für eine veränderliche Masse die gleiche sei wie für eine variable.

Selbst in den Schlußfolgerungen aus denselben Bewegungsgleichungen stimmen die verschiedenen Autoren nicht überein. Die wesentlichen Schritte bei *Poincaré* und *Jeans*[174]) sind durch folgende Gleichungen gekennzeichnet:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2) - \frac{\mathfrak{M}}{r}\right] = -\frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{M}}{dt} \tag{4}$$

beschreibt die Bewegung einer konstanten Masse um eine zeitlich veränderliche Zentralmasse $\mathfrak{M}$; die Klammer auf der linken Seite stellt die Gesamtenergie dar, die bei einer elliptischen Bahn mit der Halbachse a ersetzt werden kann durch $-\frac{\mathfrak{M}}{2a}$. Also kommt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{M}}{2a}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{M}}{dt}. \tag{5}$$

Unter Voraussetzung nur säkularer Massenänderungen wird der Mittelwert von $\frac{1}{r}$ ersetzt durch $\frac{1}{a}$; also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{M}}{2a}\right) = \frac{1}{a}\frac{d\mathfrak{M}}{dt}. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{M}\cdot a = \text{const.} \tag{7}$$

$$1 - e^2 = \frac{p}{a} = \frac{h^2}{\mathfrak{M}a} = \text{const.} \tag{8}$$

$$\mathfrak{M}^2 P = \mathfrak{M}^2\frac{2\pi}{n} = 2\pi(\mathfrak{M}a)^{\frac{3}{2}} = \text{const.} \tag{9}$$

Für ein Doppelsternsystem gelten die gleichen Beziehungen, wenn $\mathfrak{M}$ die Summe der variablen Massen bedeutet und a, e, P sich auf die relative Bahn beziehen.

Brown hebt im Gegensatz dazu hervor, daß der Übergang von (4) nach (5) bei veränderlichen Massen nicht der üblichen Definition von

173) *H. Mineur,* Le champs de gravitation d'une masse variable, Paris C. R. 190 (1930), p. 625; La dynamique des masses variables d'après les lois de Newton et d'Einstein, Paris C. R. 192 (1931), p. 663; Remarques à propos de la mécanique des masses variables, Paris C. R. 192 (1931), p. 1082.

174) Vgl. die Darstellung bei *Jeans,* A.C., Nr. 268.

a entspreche und daß außerdem bei einer gestörten Bahn auch nicht der Mittelwert des gestörten Radius durch $\frac{1}{a}$ ersetzt werden dürfe, da periodische Störungen in r säkulare Störungen in a hervorrufen. Er erhält bei seiner Rechnung an Stelle von (7) die Beziehung[175])

$$(10) \qquad \mathfrak{M} \cdot a \cdot (1 - e^2) = \text{const.}$$

und schließt, daß sowohl bei dem Ansatz (1) wie auch bei (2) Halbachse und Exzentrizität beide mit abnehmender Masse zunehmen. Dabei gilt zwischen a und e noch die Beziehung

$$(11) \qquad \frac{a}{e} - ae = \text{const.}$$

Die relative Bahn zweier sich begegnenden Sterne ist eine Hyperbel. Sind die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 vor der Begegnung und die relative Geschwindigkeit nach der Begegnung bekannt, dann lassen sich die Geschwindigkeiten beider Sterne nach der Begegnung berechnen.[176]) Bezeichnet ϑ den halben Winkel der Asymptoten der relativen Bahn, so ist die Änderung der kinetischen Energie der Masse $\mathfrak{M}_2$ durch Begegnung mit einer Masse $\mathfrak{M}_1$:

$$(12) \quad E_2' - E_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_2(V_2'^2 - V_2^2) = \frac{4\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2}\cos^2\vartheta\,[\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_1 V_1^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_2 V_2^2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2)(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2)].$$

Bei Gleichheit der Massen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ geht dieser Ausdruck in die einfache Form über

$$E_2' - E_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\cos^2\vartheta\,(V_1^2 - V_2^2) = \cos^2\vartheta\,(E_1 - E_2),$$

die unter Einführung der Relativgeschwindigkeit V und der Beziehungen für die Bewegung in einer Hyperbel

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a}, \qquad V^2 = k^2\,\frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{a} = \frac{2k^2\mathfrak{M}}{a}$$

geschrieben werden kann:

$$(13) \qquad \Delta E = E' - E = \frac{E_1 - E_2}{1 + \frac{b^2 V^4}{4k^4\mathfrak{M}^2}}.$$

Der Energieaustausch ist um so kleiner, je größer der Abstand der Massen (b ist das Lot vom Brennpunkt der Hyperbel auf die Asym-

175) Dieses Resultat findet sich auch schon in den älteren Arbeiten, z. B. bei *Lehmann-Filhés,* A. N. 145 (1898), p. 353 oder *Strömgren,* A. N. 163 (1903), p. 129.

176) *C. V. L. Charlier,* Notes on statistical mechanics, Ark. f. Mat. Astr. och Fys. 10 (1915), Nr. 29 = Meddel. Lund I, 69/70; Statistical mechanics based on the law of Newton, Kungl. Fys. Sällsk. Handl. 28 (1917), Nr. 5 = Meddel Lund II, 16.

ptote) und je größer die Relativgeschwindigkeit ist. Die Masse mit der kleineren Energie gewinnt, die mit der größeren verliert kinetische Energie; die Begegnungen wirken in der Richtung einer „Gleichverteilung“ der Energie auf die verschiedenen Massen des Systems.

Aus der Formel (13) ergibt sich die natürlichste Definition der „Relaxationszeit“ nach *Rosseland*[177]) als der Zeit, die ein Stern im Mittel braucht, um durch wiederholte Begegnungen insgesamt so viel Energie umzusetzen, als der mittleren kinetischen Energie eines Sternes im System entspricht.

Zur Ableitung der Formel geht man am besten von der Vorstellung aus, wie sie etwa der Theorie der Sternhaufen von *Heckmann* und *Siedentopf*[178]) zugrunde gelegt ist: in eine Sterngruppe mit der Geschwindigkeitsverteilung

$$f(u, v, w) = \frac{\varrho}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\alpha^3} e^{-\frac{u^2+v^2+w^2}{2\alpha^2}}$$

werden Sterne hineingeschossen, deren Geschwindigkeiten einer Verteilungsfunktion

$$F(U, V, W) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}A^3} e^{-\frac{U^2+V^2+W^2}{2A^2}}$$

genügen. Der quadratische Mittelwert der dabei umgesetzten Energie ist, unter Benutzung von (13)

$$\overline{L^2} = t \cdot 4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^4 \mathfrak{M}^4 \varrho \frac{\alpha^4 + A^4}{(\alpha^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rosselands Definition der Relaxationszeit lautet dann:

$$\overline{L^2} = (\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}A^2)^2$$

und führt auf die Formel:

$$\tau = \frac{(\frac{1}{2}\mathfrak{M}A^2)^2}{4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^4 \mathfrak{M}^2 \varrho \frac{\alpha^4 + A^4}{(\alpha^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}}}. \tag{14}$$

Für $\alpha = A$, d. h. gleiche Geschwindigkeitsverteilung für Gruppensterne und Feldsterne, erhält man einfach:

$$\tau_R = \frac{1}{8\sqrt{\pi}k^4} \cdot \frac{\alpha^3}{\mathfrak{M}^2\varrho}. \tag{15}$$

177) *S. Rosseland*, On the time of relaxation in closed stellar systems, M. N. 88 (1928), p. 208. Auch „Astrophysik“ (1931), Nr. 29.

178) *O. Heckmann* und *H. Siedentopf*, Zur Dynamik kugelförmiger Sternhaufen, Ztschr. f. Astroph. 1 (1930), 67 = Veröffentl. Göttingen 13.

Rosseland selbst kommt auf etwas anderem Weg zu der Beziehung[179])

$$\tau = \frac{(\frac{1}{2}\mathfrak{M}V^2)^2}{\pi k^4 \mathfrak{M}^4 \overline{V}\varrho}, \tag{16}$$

die mit $V = A = \alpha$ und $\overline{V} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\alpha$ identisch mit (15) wird.

Charlier[180]) geht aus von der Festsetzung, daß ein „Vorübergang" dann stattfindet, wenn sich zwei Sterne auf weniger als den halben mittleren Abstand D nähern; genauer, wenn die oben eingeführte Größe $b < \frac{1}{2}D$ wird. Daraus ergibt sich unmittelbar die Zeit zwischen zwei Vorübergängen nach der einfachen gaskinetischen Formel

$$\Delta t = \frac{1}{\pi \overline{V} \varrho \sigma^2}, \tag{17}$$

wenn man für den „Wirkungsquerschnitt" $\pi\sigma^2$ eines Sternes den Wert $\frac{1}{4}D^2$ einsetzt. Für die Relaxationszeit folgt aus *Charliers* Theorie ein Ausdruck, den man unter Gleichsetzung der Massen schreiben kann:

$$\left\{\begin{aligned} \tau_{Ch} &= c_1 \cdot \frac{1}{8\sqrt{\pi}k^4}\,\frac{\alpha^3}{\mathfrak{M}^2\varrho}, \\ c_1 &= \frac{5\pi}{\ln\frac{2D\alpha^2}{k^2\mathfrak{M}}}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Führt man die von *Charlier* angenommenen Zahlenwerte (in „planetarischen Einheiten") ein[181]):

$$k = 2\pi;\quad D = 1{,}611\cdot 10^6\cdot x;\quad \alpha = 3{,}527\cdot y;\quad \mathfrak{M} = 1\cdot z;$$
$$\varrho = 0{,}239\cdot 10^{-18},$$

unter Hinzufügung der Umrechnungsfaktoren x, y, z zum Übergang auf etwaige andere Zahlenwerte, so findet man:

$$c_1 = \frac{1{,}14}{1 + 0{,}17\log\frac{xy^2}{z}}, \tag{19}$$

d. h *Charliers* Definition ist praktisch völlig identisch mit der *Rosselands.*[182])

---

179) Formel (223) in „Astrophysik", spezialisiert au. gleiche Massen $m = M_i = \mathfrak{M}$, womit $\sum_i (1 + m/M_i)^{-2} = \frac{1}{4}\varrho$ wird.

180) Meddel. Lund II, 16, Chapt. II.

181) *Charlier* setzt loc. cit. p. 83 $\alpha = \sigma = 5{,}624$, was nach Meddel. I, 70 aber der Wert für $\Omega = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ ist.

182) Für die von *Jeans* (A. C, Nr. 286) benutzten Daten ($\varrho = 4\cdot 10^{-57}$, $V_0 = 10$ km/sec, d. h. $x = 0{,}26$, $y = 0{,}60$) wird $c_1 = 1{,}4$; für die von *Heckmann*

Jeans[183]) betrachtet die Ablenkung $\psi = 180 - 2\vartheta$, welche ein Stern bei einer Begegnung erfährt. Sie ist gegeben durch

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_2 = \frac{k^2 \mathfrak{M}_2{}^3}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2 V_2{}^2 b}$$

oder, wieder für durchschnittlich gleich große Massen der mittleren Geschwindigkeit V_0:

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi = \frac{k^2 \mathfrak{M}}{4 b V_0{}^2}.$$

Daraus läßt sich einmal der Wert ableiten für die Zeit zwischen zwei Begegnungen, deren jede eine Ablenkung größer als ψ_0 bewirkt. Sie ist:

$$\text{(22)} \qquad \Delta t_{\psi_0} = \frac{128}{\sqrt{\pi}} \operatorname{cotg}^2 \frac{\psi_0}{2} \cdot \frac{1}{8\sqrt{\pi} k^4} \cdot \frac{V_0{}^3}{\mathfrak{M}^2 \varrho}.$$

Dem von *Jeans* für das Sternsystem angesetzten Zahlenwert für die mittlere Geschwindigkeit V_0 entspricht es, sein V_0 mit α zu identifizieren. Ablenkungen um volle 90^0 ereignen sich also in durchschnittlichen Zeitabständen von

$$\text{(23)} \qquad \Delta t_{\frac{\pi}{2}} = 72 \cdot \frac{1}{8\sqrt{\pi} k^4} \cdot \frac{\alpha^3}{\mathfrak{M}^2 \varrho},$$

die groß sind, verglichen mit den oben abgeleiteten Relaxationszeiten. Viel wirkungsvoller als die seltenen großen Ablenkungen sind in ihrer Gesamtheit die kleinen, aber um so häufigeren Ablenkungen. Durch sie wird eine „vollständige" Änderung der Bahn, definiert durch

$$\int \psi^2 d\psi = \frac{\pi^2}{4},$$

bewirkt in der Relaxationszeit (das ist *Jeans*' Definition)

$$\text{(24)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau_J &= c_2 \cdot \frac{1}{8\sqrt{\pi} k^4} \frac{\alpha^3}{\mathfrak{M}^2 \varrho}. \\ c_2 &= \frac{4 \pi^{\frac{3}{2}}}{\ln \frac{\psi_2}{\psi_1}}. \end{aligned} \right.$$

Da die großen Ablenkungen an und für sich selten sind, bereitet die Festsetzung der oberen Grenze ψ_2 der noch mitzunehmenden Ablenkungen keine Schwierigkeiten. *Jeans* setzt $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$. Schwieriger ist es, anzugeben, was nach unten hin noch als „Begegnung" gerechnet werden soll. *Jeans* wählt dafür Annäherung auf die mittlere Distanz,

---

und *Siedentopf* für die Sternhaufen angesetzten Werte ($\varrho = 600$ Sterne im Kubikparsec, $\bar{c} = \alpha\sqrt{\frac{3}{2}} = 14$ km/sec, d. h. $x = 0{,}015$, $y = 0{,}68$) wird $c_1 = 1{,}8$.

183) Problems, Nr. 222—228; A. C., Nr. 285—287.

d. h. $b < D$, im Gegensatz zu *Charlier*, der $b < \frac{D}{2}$ setzt. Nach (21) wird

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \frac{k^2 \mathfrak{M} D}{\alpha^2}$$

und damit

$$c_2 = \frac{4 \pi^{\frac{3}{2}}}{\ln \frac{\pi \alpha^2 D}{k^2 \mathfrak{M}}}. \tag{25}$$

Der numerische Vergleich mit (15) und (18) ergibt sich wieder durch Einführung der Zahlenwerte; es wird

$$c_2 = \frac{1{,}56}{1 + 0{,}16 \log \frac{x y^2}{z}}. \tag{26}$$

Jeans' Definition der Relaxationszeit liefert also nur unwesentlich größere Werte als die beiden anderen Festsetzungen

Die Größenordnung der Relaxationszeit selbst ergibt sich für das Sternsystem mit *Charliers* Daten zu:

$$\tau_R = 8{,}3 \cdot 10^{16} \text{ Jahre}.$$

Sie reduziert sich mit den von *Jeans* angenommenen Zahlen auf

$$\tau_R = 3{,}2 \cdot 10^{13} \text{ Jahre}.$$

Für die Sternhaufen erhält man mit den Zahlenwerten von *Heckmann* und *Siedentopf*[184])

$$\tau_R = 0{,}9 \cdot 10^{10} \text{ Jahre}.$$

Diese Zahlen sind bei den Betrachtungen über den dynamischen Zustand und die Entwicklung von Sternsystemen zu vergleichen mit den Angaben über die Entwicklungszeiten des einzelnen Sterns.

IV. Die Entstehung des Planetensystems.

15. Gesetzmäßigkeiten des Zustandes. Alle Theorien über die Entstehung des Planetensystems gehen aus von den Zügen größter Regelmäßigkeit und Gesetzmäßigkeit, die das System in seinem ganzen Aufbau aufweist und die eine Entstehung aus einheitlicher Ursache nahelegen. Betrachtungen über die verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit, daß die Glieder des Planetensystems „zufällig" zu solcher Einheitlichkeit zusammengetragen worden seien, hat schon *Laplace*[185])

184) Die Verfasser setzen $\bar{c} = \alpha$ und erhalten dementsprechend $\tau = 1{,}6 \cdot 10^{10}$ Jahre.

185) *Laplace,* Exposition du système du monde.

angestellt. Die Tatsachen, auf deren Erklärung Wert gelegt werden muß, sind[186]):

a) Alle Planeten bewegen sich rechtläufig um die Sonne in Ebenen, die nur wenig gegeneinander geneigt sind, und in Bahnen kleiner Exzentrizität. Ausnahmen finden sich nur unter den kleinen Planeten. Der Sonnenäquator ist gegen die unveränderliche Ebene des Systems um 6^0 geneigt.

b) Alle Planeten außer Uranus und Neptun weisen rechtläufige Achsendrehungen auf. Die Neigungen zwischen Äquator- und Bahnebene sind zum Teil erheblich. Bei den äußeren Planeten scheint ein systematischer Gang angedeutet:

Jupiter	3^0
Saturn	27^0
Uranus	98^0
Neptun	151^0.

c) Die Mehrzahl der Monde bewegt sich in der Äquatorebene des dazugehörigen Planeten und gleichsinnig mit dessen Rotation. Ausnahmen sind die äußeren Monde des Jupiter und Saturn, die zum Teil rückläufig sind.

d) Die Masse aller Planeten und Monde zusammengenommen ist nur ein kleiner Bruchteil (rund $\frac{1}{700}$) der Gesamtmasse des Systems. Hingegen ist das Rotationsmoment der Sonne nur ein kleiner Bruchteil des gesamten Drehmomentes des Systems; je nach den Annahmen über die innere Konstitution der Sonne $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{60}$.

e) Die Massen der Monde sind nur kleine Bruchteile der Massen ihrer Planeten (Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-8}). Die Umlaufmomente der Monde sind nur Bruchteile der Rotationsmomente der Planeten. Der Erdmond mit $\frac{1}{82}$ Erdmasse und einem Umlaufmoment gleich dem 4fachen Rotationsmoment der Erde stellt eine Ausnahme dar.

Gelegentlich spielt auch die merkwürdige Gesetzmäßigkeit, die in der sogenannten *Titius-Bode*schen Reihe zum Ausdruck kommt, eine Rolle bei kosmogonischen Spekulationen, vor allem der älteren Zeit.[187]) Nicht unwesentlich erscheint die Verteilung der Massen und Dichten. Der Ring der kleinen Planeten trennt deutlich die nach Masse und Dichte verschiedenen Gruppen der inneren und äußeren Planeten.

186) Vgl. die Tabellen der Elemente der Planeten, die sich in den meisten astronomischen Lehrbüchern befinden; sehr ausführlich z. B. bei *Russell, Dugan, Stewart,* Astronomy, Vol. I, Table IV, V.

187) Zuletzt wieder bei *Berlage,* Erg.-Hefte zu Gerlands Beiträgen zur Geophysik, Bd. 17 (1927).

Tabelle 9.

Planet	Masse	Dichte	Monde	Masse	Dichte
Merkur	0,04	3,8	Erdmond . .	0,012	3,3
Venus.	0,81	4,9	Jupiter I. .	013	2,9
Erde	1,00	5,5	„ II. .	008	2,9
Mars	0,11	4,0	„ III. .	026	2,2
Kleine Planeten	$< 0{,}001$	$\sim 3{,}3$	„ IV. .	007	0,6
			Saturn I. . .	023	3,5
Jupiter	317	1,3			
Saturn	95	0,7			
Uranus . . .	15	1,3			
Neptun	17	1,6			
Pluto	$\sim 0{,}1$	?			

Die größten Monde schließen sich in der Größenordnung an Merkur an, während die Summe aller kleinen Planeten noch nicht $\frac{1}{1000}$ Erdmasse erreicht. Die auf die planetarischen Körper verteilte Masse von rund $\frac{1}{700}$ Sonnenmassen zeigt eine starke Konzentration in der Gegend des Jupiter und Saturn, die zusammen 92 % der Masse in sich vereinigen. Innerhalb der Jupiterbahn liegen knapp 0,5 %, außerhalb der Saturnbahn 7,5 % der Gesamtmasse.

Die kosmogonischen Theorien des Planetensystems lassen sich in drei Hauptgruppen unterteilen. Die eine Gruppe leitet die Entstehung der Planeten in irgendeiner Form von den Gleichgewichtsfiguren rotierender Massen ab (Rotationshypothesen) und kommt auf diese Weise zu einer ausgezeichneten Symmetrieebene und einem ausgezeichneten Drehsinn; als typischer Vertreter kann die Theorie von *Laplace* gelten. Eine andere Gruppe, als deren ältester Vertreter *Kant* angesehen werden kann, betrachtet die Vorgänge in mehr oder weniger differenzierten kosmischen Staubwolken (Meteoritenhypothesen) und versucht die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des heutigen Zustandes aus dem gesetzmäßigen Wirken bestimmter Kräfte (widerstehendes Mittel, Zusammenstöße) herzuleiten. Die letzte Gruppe, die ihren ersten Vorläufer bereits in *Buffon* hat, läßt die Planeten durch Einwirken eines fremden Körpers (naher Vorübergang oder Zusammenstoß) entstehen (Kollisionshypothesen) und versucht dadurch die Besonderheiten in der Massenverteilung und den Unterschied zwischen Sonnenäquator und unveränderlicher Ebene zu erklären. Im einzelnen gibt es Übergänge und Abwandlungen mannigfacher Art; in manchen Theorien finden sich Elemente aller drei Gruppen.

Im folgenden soll keine Analyse der einzelnen Theorien und ihrer verschiedenen Abwandlungen gegeben werden. Diese findet man bei

Poincaré und *Nölke*. Es soll lediglich versucht werden, einige Grundgedanken herauszuschälen. Alle Theorien über die Entstehung des Planetensystems sind mehr oder weniger „Erzählungen". Die wesentlichen Schwierigkeiten beruhen darin, daß wir es auf der einen Seite offenbar mit einem Ineinandergreifen der verschiedenartigsten Prozesse zu tun haben, die sich jeder für sich nur in ganz idealisierten Fällen mathematisch behandeln lassen; während auf der anderen Seite jede Möglichkeit einer „vergleichenden Morphologie" fehlt, seit wir in den Spiralnebeln Systeme ganz anderer Größenordnung erkennen mußten und zweifeln, ob sich unter den uns bekannten anderen kosmischen Gebilden solche befinden, die wir als frühere Entwicklungsstufen eines Planetensystems ansprechen dürfen.

16. Rotationshypothesen. Ausgangspunkt für die Kritik der Rotationshypothesen sind Betrachtungen über den Drehimpuls (Gesamtimpulsmoment des Systems), die zuerst von *Babinet*[188]) angestellt und später von anderen aufgegriffen und verbessert wurden.[189]) Wenn das System sich unbeeinflußt von äußeren Kräften entwickelt hat, dann kann das Gesamtmoment sich nicht verändert haben. In seinem heutigen Zustand hat das Planetensystem einen gesamten Drehimpuls von

$$\mathsf{M} = \sum \mathfrak{M} r^2 \omega = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ (astr. Einh.) bzw. } 3{,}3 \cdot 10^{50} \text{ (c. g. s.)}.$$

Davon entfallen rund 97 % auf die Umlaufmomente der äußeren Planeten und höchstens 2 % auf das Rotationsmoment der Sonne. Die Rotationsmomente der Planeten sind verschwindend. Der Trägheitsradius einer mit der Umlaufgeschwindigkeit des Neptun rotierenden Ursonne folgt daraus zu

$$l = \sqrt{\frac{1}{\mathsf{M}\omega}} = \frac{1}{15{,}5} \cdot r_{\psi}, \text{ d. h. } 2 \text{ astr. Einh.}$$

Man schließt daraus, daß die Masse der Ursonne sehr stark gegen die Mitte zu konzentriert gewesen sein muß.[190]) In der Tat ist das auch

188) Paris C. R. 52 (1861), p. 481—484.

189) Vgl. die Darstellungen bei *Jeans, Jeffreys, Nölke, See*; am ausführlichsten vielleicht bei *Moulton*, Ap. Journ. 11 (1900), p. 103—130.

190) Gewöhnlich wird bei der Kritik der *Laplace*schen Theorie im Anschluß an *Babinet* so argumentiert, als ob die Größe des Momentes allein schon die Unmöglichkeit der Rotationsinstabilität beweise. Dabei wird — offen oder stillschweigend — vorausgesetzt, daß die Ursonne den Raum bis zur Neptunsbahn mit homogener Dichte erfüllt habe bzw. daß das Dichtegesetz bei der Kontraktion stets das gleiche geblieben sei. So vor allem *Moulton*, a. a. O.; *See*, Researches on the Evolution of Stellar Systems, Chapt. XV; *Jeans*, Problems, Nr. 14, im Gegensatz zu Nr. 287; *Nölke* (a. a. O. p. 155) setzt die Ursonne als Gaskugel im Strahlungsgleichgewicht voraus

die Annahme, die *Laplace* seiner Kosmogonie zugrunde gelegt hat, und ohne die jede Art von Rotationshypothesen sich von vornherein verbietet. Wenn überhaupt, dann kann das Planetensystem nur aus der Reihe von Rotationsfiguren abgeleitet werden, die an das Modell von *Roche* anknüpfen.

Man weiß, daß bei dem Modell von *Roche* äquatoreale Instabilität auftritt, wenn

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \bar{\varrho}} = 0{,}36 \quad (\bar{\varrho} = \text{mittlere Dichte}). \tag{1}$$

Ist R_0 der Äquatorradius der kritischen linsenförmigen Grenzfigur des *Roche*schen Modells, l der Trägheitsradius, und hat der Kern die Masse $x\mathfrak{M}$, so ist die Gesamtmasse

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi\bar{\varrho}(0{,}81\,R_0)^3 = 2\cdot 10^{33}\,\mathrm{g}, \tag{2}$$

das Gesamtmoment

$$\mathsf{M} = \mathfrak{M}\,l^2\omega = 3{,}3\cdot 10^{50}\,\mathrm{g\,cm^2\,sec^{-1}} \tag{3}$$

und der die Konzentration der Masse charakterisierende Wert

$$\frac{l^2}{R_0^2} = 0{,}523(1-x). \tag{4}$$

Unter Einführung der bei der Entwicklung unveränderlichen Größen $\mathfrak{M}$ und M wird

$$\frac{l^2}{R_0^2} = 1{,}41\cdot 10^4\sqrt{\frac{1}{R_0}}, \tag{5}$$

aus (4) und (5) leitet man ab

$$1-x = 2{,}7\cdot 10^4\sqrt{\frac{1}{R_0}}.$$

Zur Zeit der Abtrennung des Neptun ($R_0 = r_{♆} = 30$) mußten also 99,87 % ($1-x = 0{,}0013$) der Gesamtmasse im Kern vereinigt sein; die Sonne war in ihrer heutigen Form bereits „fertig“. Die mittlere Dichte der „Atmosphäre“, aus der sich die Planeten durch Abtrennung von Ringen bzw. innere Kondensation — die verschiedenen Rotationstheorien unterscheiden sich nur durch die Art der Bildung der Planeten aus der Atmosphäre — muß demnach von der Größenordnung $10^{-14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ gewesen sein.

Es ist zu bemerken, daß aus diesen Folgerungen nicht unmittelbar Argumente gegen die Rotationshypothese gezogen werden können. Bei den außergalaktischen Nebeln schließen wir mit ziemlicher Sicherheit auf Dichten von der Größenordnung $< 10^{-21}$ und beobachten vielfach Formen, die dem kritischen Modell von *Roche* entsprechen. Allerdings gibt es gewisse Anzeichen dafür, daß die Nebel mit nach außen abnehmender Winkelgeschwindigkeit rotieren; womit eigentlich die Möglichkeit der Anwendung der klassischen Theorie der Gleichgewichtsfiguren entfällt.

Jeans und *Jeffreys* haben aus dem Theorem von *Poincaré*, daß bei stabiler, gleichförmiger Rotation $\omega^2 = 2\pi k^2 \bar{\varrho}$ sein müsse, abgeleitet, daß die Dichte $\bar{\varrho}_R$ des Ringes bei der Bildung die Ungleichung erfüllen müsse

$$\bar{\varrho}_R > 0{,}36\, \bar{\varrho}_S$$

($\bar{\varrho}_S$ = mittlere Dichte der Ursonne).

Poincaré selbst hat, unter Berücksichtigung einer möglichen Ungleichförmigkeit der Rotation, die Abschätzung gegeben

$$(6) \qquad 3\,\omega^2 + 2\,\omega\,\omega' R < 4\pi\varrho < \frac{\omega^2}{14},$$

wo ω' die Ableitung von ω nach dem Radius, R den Radius des Ringes bedeutet. Im Fall der freien Keplerbahnen der einzelnen Teilchen ist

$$3\,\omega^2 + 2\,\omega\omega' R = 0,$$

die Bedingung also sicher erfüllt. Ist dagegen $\omega' = 0$, so ist der Ring instabil.

Es ist keine Frage, daß die Ablösung von diskreten Ringen nicht ohne mehr oder weniger gekünstelte Zusatzhypothesen auch nur plausibel gemacht werden kann[191]); daß man vielmehr bei Rotationsinstabilität einer dem *Laplace*schen Gasball ähnlichen Masse mit mehr oder weniger kontinuierlicher Massenabschleuderung rechnen muß. Die Meinungen darüber, ob und wie sich aus den abgeschleuderten Massen Planeten bilden können, sind geteilt und schwer auf eine mathematisch-physikalische Basis zu bringen. *Jeans* hat in seinen Untersuchungen über Gravitationsinstabilitäten eine Näherungsformel abgeleitet, welche die Zustandsgrößen des Gases mit den mittleren Abständen λ_0 der Kondensationen (d. i. Wellenlängen der zum Zerfall führenden Schwingungen) verbindet:

$$(7) \qquad \lambda_0^2 = \frac{\pi}{k^2\varrho}\frac{dp}{d\varrho} = \frac{\pi}{3k^2}\frac{\varkappa \cdot c^2}{\varrho}$$

$\left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v},\ c = \text{mittlere Molekulargeschwindigkeit}\right)$.

Die Massen der sich bildenden Kondensationen ergeben sich daraus zu

$$(8) \qquad \mathfrak{M} = \lambda_0^3\varrho = \left(\frac{\pi}{3}\frac{\varkappa}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}} c^3\varrho^{-\frac{1}{2}} = 1{,}3 \cdot 10^{11}\, c^3 \varrho^{-\frac{1}{2}}$$

191) *Poincaré*, Leçons, Nr. 22; *Jeans*, Phil. Trans. 199 A; A.C., p. 313—319.

($\varkappa = \frac{5}{3}$ gesetzt) oder, mit der oben abgeleiteten Dichte von 10^{-14}, zu

$$\mathfrak{M} = 1{,}3 \cdot 10^{18} \cdot c^3. \tag{9}$$

Eine andere Abschätzung für $\mathfrak{M}$ kann man einfach aus der Forderung erhalten, daß die Molekulargeschwindigkeit an der Oberfläche der Planeten kleiner sein müsse als die parabolische Entweichungsgeschwindigkeit, also

$$\left\{\begin{aligned} & c^2 < \frac{2\,k^2\,\mathfrak{M}}{R} \\ & \mathfrak{M} > 1 \cdot 10^{10} c^3 \varrho^{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot 10^{17} \cdot c^3. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Für die Molekulargeschwindigkeit c bzw. die „Temperatur“ T der Materie mit dem Molekulargewicht μ ergibt sich[192]), wenn man für $\mathfrak{M}$ die Masse etwa des Neptun ansetzt (10^{29}):

$c = 0{,}4 \cdot 10^4$ cm sec^{-1} nach (9) bzw. $c < 10^4$ cm sec^{-1} nach (10)
$T = 0{,}12\ \mu^0$ abs. „ „ $T < 0{,}8\ \mu^0$ abs. „ .

Da das Molekulargewicht μ sicher sehr klein angenommen werden muß, liegt T also nahe dem absoluten Nullpunkt. Ob man daraus ein Argument gegen die Möglichkeit von Kondensationen ableiten kann, muß dahingestellt bleiben; hier versagen thermodynamische Betrachtungen.

Will man statt durch unmittelbare Kondensationsprozesse die Planeten sich langsam durch Aufsammeln der mehr oder weniger gleichmäßig über die planetaren Räume verteilten Massen, infolge gegenseitiger Zusammenstöße, sich bilden lassen, so steht man vor einem hoffnungslos komplizierten Problem. *Poincaré*[193]) hat diesen Prozeß als selbstverständlich unterstellt, bleibt jedoch den Beweis schuldig; ganz abgesehen davon, daß er, um die *Laplace*sche Theorie zu retten, neue Annahmen hinzufügen muß zur Erklärung der beobachteten rechtläufigen Rotation der Planeten. Bei dem Prozeß des Aufsammelns entstehen nach *Poincaré* eigentlich rückläufige Rotationen (*Kant* und *Darwin* behaupten das Gegenteil!), die erst nachträglich (etwa durch Gezeitenreibung) in rechtläufige verwandelt werden müssen. *Poincaré* sieht in den rückläufigen Rotationen der äußersten Planeten eine gewisse Stütze für seine Theorie, da die Gezeiten-

192) Die Molekulargeschwindigkeit geht mit der 3. Potenz ein, so daß die Formel sehr empfindlich gegenüber Änderungen von c ist. So hat denn auch *Jeans* 1919 mit einem „reasonable value“ von $1{,}6 \cdot 10^5$ die *van Maanen*schen Daten für die Spiralnebel dargestellt, während er im Jahre 1928 der durch *Hubble*s Entdeckungen veränderten Sachlage sich anpaßte mit $c = 10^4$.

193) Leçons, Nr. 41/42, 54.

wirkung der Sonne (vgl. Nr. **12**) bei diesen Planeten infolge der großen Entfernung nicht ausgereicht habe, um die Umkehrung des Rotationssinnes zu erzwingen.

17. Katastrophenhypothesen. Die große innere Unwahrscheinlichkeit einer spontanen Entwicklung des Planetensystems durch Zerfall einer rotierenden Masse, in Verbindung mit der Beobachtungstatsache, daß die unveränderliche Ebene des Planetensystems deutlich abweicht von der Äquatorebene der Sonne, hat zur Aufstellung der Theorien geführt, welche die Entstehung des Systems auf die Begegnung zweier Himmelskörper zurückführen. Dabei tauchen alle Spielarten auf, von mehr oder weniger nahem Vorübergang bis zu unmittelbarem Zusammenstoß. In jedem Fall kommt man um die eine Schlußfolgerung nicht herum, die von den Kritikern der Katastrophentheorien gewöhnlich ins Feld geführt wird: da Zusammenstöße oder auch nur nahe Begegnungen im Sternsystem wegen der großen freien Weglängen der einzelnen Sterne außerordentlich selten sind, muß das Planetensystem als ein seltener Ausnahmefall kosmischen Geschehens betrachtet werden.

Man erhält aus der gaskinetischen Formel für die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen (vgl. Nr. **14** (17))

$$\Delta t = \frac{1}{\pi \sigma^2 \varrho \bar{V}} \tag{1}$$

mit den für die Umgebung der Sonne gültigen ungefähren Werten

der Dichte: $\varrho = 1$ Stern auf 10 Kubikparsec ($= 1{,}1 \cdot 10^{-16}$, wenn die astr. Einheit als Längeneinheit gewählt wird),

der mittl. Geschwindigkeit: $\bar{V} = 20$ km/sec ($= 4$ astr. Einh./Jahr)

bei verschiedenen Werten des Wirkungsquerschnittes $\pi\sigma^2$ die folgenden Zeiten:

$\sigma =$ Sonnenradius	$\Delta t = 3{,}0 \cdot 10^{20}$	Jahre,
Erdbahnradius	$0{,}7 \cdot 10^{16}$	„
Neptunbahnradius	$0{,}8 \cdot 10^{13}$	„

Die Wahrscheinlichkeit für einen unmittelbaren Zusammenstoß eines bestimmten Sternes mit einem anderen ist daher klein gegen die mittlere Lebensdauer des Sternes, die wir wohl kaum höher als von der Größenordnung 10^{13} Jahre ansetzen dürfen. Daher hat *Jeans* bei der Aufstellung seiner Gezeitentheorie[194]) geglaubt, eine Ausdehnung der Sonne zur Zeit der Begegnung mit dem fremden Stern bis zur Neptunsbahn annehmen zu müssen. *Jeffreys*[195]) hat demgegenüber betont, daß es nur

194) Vgl. die Darstellung in „Problems", p. 292—295 oder in der Seeliger-Festschrift.

195) The Earth, Appendix B und M. N. 92 (1932), p. 888.

darauf ankomme, die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, daß überhaupt innerhalb der normalen Lebensdauer eines Sternes ein Zusammenstoß zwischen zwei Sternen des Systems erfolge. Bei einer Gesamtzahl der Sterne des Systems von 10^9, die eher zu niedrig als zu hoch gegriffen ist, und einer mittleren Ausdehnung des einzelnen Sternes von der Größe des heutigen Sonnenradius erhält man für die Zeit, innerhalb deren mindestens einmal zwei Sterne sich so nahe gekommen sind, daß der eine von ihnen durch die Gezeitenwirkung des anderen teilweise zerbrochen ist, die Größenordnung 10^{11} Jahre. Größere Gesamtzahl der Sterne des Systems oder größere Dichte in früheren Zeiten (Expansion des ganzen Systems?) und damit verbunden zugleich größere mittlere Geschwindigkeiten wirken alle in dem Sinn einer Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes.

Da wir kein anderes Planetensystem außer dem unsrigen kennen und auch keine Möglichkeit sehen, die Existenz eines solchen Systems festzustellen, braucht die relative Seltenheit naher Vorübergänge nicht als zwingendes Argument gegen die Entstehung des Planetensystems auf solchem Wege betrachtet zu werden. Wenn hinreichend wahrscheinlich gemacht werden könnte, daß Planetensysteme von der Eigenart des unsrigen auf keine andere Weise entstehen können als eben durch die Wirkung eines nahen Vorübergangs oder sogar eines direkten Zusammenstoßes, dann wäre die relative Seltenheit einfach als notwendige Folgerung hinzunehmen.

Die Einwände, die gegen die *Laplace*sche Theorie und die ihr verwandten Theorien unter Berufung auf die Verteilung des Gesamtmomentes auf Umlauf- und Rotationsmomente erhoben wurden, werden bei den Katastrophentheorien gegenstandslos. Die Sonne braucht bei der Entstehung der Planeten keine von ihrer heutigen abweichende Ausdehnung gehabt zu haben; die Umlaufmomente der Planeten entstammen nicht dem ursprünglichen Rotationsmoment der Sonne, sondern sind ihnen übermittelt worden durch den Energieaustausch bei der Begegnung mit dem fremden Stern; schließlich ist auch die Symmetrieebene des Systems nicht gebunden an die Äquatorebene der Sonne, sondern gegeben durch die Ebene der relativen hyperbolischen Bahn der beiden sich begegnenden Sonnen.

Bei der Aufstellung der verschiedenen Formen von Katastrophentheorien hat der Gedanke einer Analogie zu den Spiralnebeln stets eine große Rolle gespielt. *Chamberlin* und *Moulton*[196]) lassen ausdrücklich als Folge der Gezeitenwirkung bei der Begegnung zunächst

196) Vgl. die letzte Darstellung der Theorie durch *Chamberlin*, The Two Solar Families. Chapt. XIV: The Spiralisation of the Solar Projectiles.

eine zweiarmige Spirale entstehen. Wie sie führt auch *Jeans*[197]) Bilder von typischen Spiralnebeln als Zeugen für die Existenz von Gezeitenwirkungen an. Diese formale Analogie ist indessen als Stütze für eine Gezeitentheorie des Planetensystems nur gering zu bewerten. *Chamberlin* hebt selbst hervor, daß die von ihm zum Vergleich herangezogenen Spiralnebel viel größere Massen, vor allem aber eine vollkommen andere innere Massenverteilung hätten, als einem werdenden Planetensystem entspricht. Die Massen der Arme sind vergleichbar mit der Masse des Kerns, während die Gesamtmasse der Planeten nur ein verschwindender Bruchteil der Sonnenmasse ist. Bei den kosmogonischen Spekulationen von *Jeans* spielt gerade dieser Unterschied in den Größenordnungen eine ganz wesentliche Rolle. Er bedingt nicht nur die Art des Instabilwerdens, sondern vor allem auch die Möglichkeit der Bildung von Kondensationen (vgl. die oben angeführte Abschätzung über die Mindestmasse der Kondensationen).

Eine quantitative Behandlung der Vorgänge bei einem Zusammenstoß oder nahen Vorübergang ist unmöglich, eine qualitative Beschreibung schwer und kaum eindeutig zu geben. *Jeffreys*[198]) kommt zu dem Ergebnis, daß ein typischer „slow encounter", den man rechnerisch als statisches Problem behandeln kann, in der Natur nicht verwirklicht wird. Ein Losreißen von Teilen der Flutberge kann nur dann stattfinden, wenn sie die *Roche*sche Grenzfigur überschreiten, deren Äquatorradius für großes $\mathfrak{M}'$ genähert gegeben ist durch

$$a = \left(\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}'}\right)^{\frac{1}{3}} \Delta. \tag{2}$$

Die Periode der freien Gezeitenschwingung ist von der Größenordnung

$$\tau_1 = 2\pi \left(\frac{a^3}{k^2 \mathfrak{M}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

die Zeit des Vorüberganges von der Größenordnung

$$\tau_2 = \pi \left(\frac{\Delta^3}{k^2(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Ihr Verhältnis wird also, mit Rücksicht auf den Wert von a,

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{2(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')}{\mathfrak{M}'}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

d. h. sicher größer als 1, während die Bedingung eines „slow encounters" verlangt, daß $\tau_1 \ll \tau_2$ ist.

197) Z. B. in A.C., plate XVI.

198) The Earth, Chapt. II.

Umgekehrt kann der typische „transitory encounter“ zwar verwirklicht werden, aber die in diesem Fall losgerissenen beiden Protuberanzen werden wieder auf die Sonne zurückfallen, ohne Anlaß zur Bildung von selbständigen Planeten zu geben. Der wahre Vorgang wird also von intermediärem Typus sein müssen. Das Argument *Nölkes*[199]), daß bei einem nahen Vorübergang keine selbständig die Sonne umlaufenden Massen zurückbleiben können, trifft diesen intermediären Typus nicht.

Die von *Chamberlin*[200]) und *Moulton*[201]) vorgeschlagene Theorie, die als „Planetesimalhypothese“ um die Jahrhundertwende die alte *Laplace*sche Theorie mit Erfolg zu verdrängen begann, hat, offenbar unter dem Einfluß der Schwierigkeiten, die bei genauer Durchrechnung der zunächst so einleuchtenden Vorgänge auftauchen, mancherlei Wandlungen im einzelnen durchgemacht. In der letzten Form, die *Chamberlin* selbst ihr gegeben hat, soll die Protuberanzentätigkeit der Sonne sich mit der Wirkung der Begegnung mit einer kleineren Masse in einer gegen den Äquator geneigten Bahn so kombinieren, daß je ein Paar Ausbrüche auf der dem begegnenden Stern zu- bzw. abgewandten Seite erfolgen, aus denen sich die äußeren bzw. inneren Planeten bilden. Die Eruptivität der Sonne im Gegensatz zu der Nichteruptivität des begegnenden Sternes ist hier der ausschlaggebende Faktor, die Gezeiten wirken nur verstärkend; so soll verständlich gemacht werden, daß die größere Masse aufbricht und nicht die kleinere

Im Gegensatz dazu betrachtet *Jeans*[202]) und ihm folgend *Jeffreys*[203]) die Begegnung der Sonne mit einer merklich größeren Masse, die nur

---

199) Z. B. Handb. d. Geophysik 1, p. 29.

200) *T. C. Chamberlin:* a) A Group of Hypotheses bearing on Climate Changes, Journ. of Geology 5 (1897), p. 653. b) On a Possible Function of Disruptive Approach in the Formation of Meteorites, Comets and Nebulae, Ap. Journ. 14 (1901), p. 17; Journ. of Geology 9 (1901), p. 369—393. c) Contributions to Cosmogony and the Fundamental Problems of Geology, Publ. Carnegie Inst. Washington 106 (1908). d) The Origin of the Earth, 1916. e) Synopsis of Planetary Evolution, Carnegie Inst. Washington. Year Book Nr. 26. f) The Two Solar Families, 1928. *T. C. Chamberlin* et al.: Contributions to Cosmogony and the Fundamental Problems of Geology. The Tidal and Other Problems. Publ. Carnegie Inst. Washington 107 (1909).

201) *F. R. Moulton,* On the Evolution of the Solar System, Ap. Journ. 22 (1905), p. 165; An Introduction to Astronomy, 1916.

202) Vgl. die Fig. 14 in der populären Darstellung von *Jeans,* The Universe around us. Deutsche Übersetzung: Sterne, Welten und Atome.

203) *H. Jeffreys,* Collision and the Origin of Rotation in the Solar System, M. N. 89 (1929), p. 636; The Early History of the Solar System on the Collision Theory, M. N. 89 (1929), p. 731.

von dem ihr zugewandten Flutberg Massen losreißt, während der abgewandte sich als große Protuberanz aufwölbt und wieder von der Sonne aufgesogen wird. Die heutige Anordnung der Massen wird auf die Verteilung in dem losgerissenen und schließlich zerbrechenden „Filament" zurückgeführt. Doch auch diese Theorie hat sich manche Umwandlungen gefallen lassen müssen, unter denen sie zur Zeit zu einer Kollisionstheorie im engeren Sinne geworden ist. *Jeffreys*[204]) glaubt heute nur noch durch einen wirklichen seitlichen Stoß die Vorbedingungen für eine Entstehung des Planetensystems schaffen zu können. *Nölke*[205]) geht noch einen Schritt weiter und setzt an den Anfang der Entwicklung einen Nebelarm, in dessen Massenverteilung die Sonne und die künftigen Planeten gewissermaßen embryonal bereits vorgebildet sind; unter Verzicht auf die Beantwortung der berechtigten Frage, wie denn ein solcher ganz besonders gearteter Nebelarm entstanden sei.

Die von der Sonne losgerissenen und den planetarischen Raum zunächst mehr oder weniger gleichförmig erfüllenden Massen haben eine doppelte Aufgabe zu erfüllen: sie liefern das Material, aus dem sich die Planeten und ihre Monde aufbauen, und stellen zugleich ein widerstehendes Mittel dar, das die Bahnen und Rotationen beeinflußt. *Chamberlin* und *Moulton* sind der Meinung, daß die ursprünglich gasförmigen Massen durch die mit der Expansion verbundene Abkühlung unter Durchschreiten des flüssigen Zustandes zu festen, meteoritenartigen „Planetesimals" werden, die durch vielfache Zusammenstöße zwar teilweise wieder verdampfen, aber im allgemeinen unter der Einwirkung der Gravitation sich zu größeren Massen ansammeln, wobei die von Anfang an vorhandenen Verdichtungen („bolts") als Kondensationskerne dienen.

Jeffreys schreibt dem interplanetaren Medium gasförmigen Charakter zu und kommt zu dem Schluß, daß die sich aus diesem Medium bildenden Planeten infolge adiabatischer Expansion nach ganz kurzer Zeit (Jupiter nach einer Woche, Erde schon nach einem Tag) einen kritischen Radius erreichen, numerisch nahe mit der heutigen Ausdehnung der Mondsysteme übereinstimmend, bei dem Kondensation einsetzt. Die Planeten entstehen also praktisch in flüssiger Form durch Zusammenfließen der Kondensationstropfen.

Die Verminderung der ursprünglich großen Exzentrizitäten auf ihre heutigen kleinen Werte auf den Einfluß eines widerstehenden

204) Vgl. die zweite der unter Fußn. 203) genannten Arbeiten und die Erwiderung auf *Nölke*s Kritik in M. N. 92 (1932), p. 887.

205) Fußnote 199.

Mittels zurückzuführen, dürfte ernstlichen prinzipiellen Bedenken nicht begegnen. Es bleiben zwar noch gewisse Unstimmigkeiten, auf die vor allem *Nölke*[205]) hingewiesen hat, und die auch *Jeffreys*[204]) nur teilweise beseitigen konnte durch besondere Annahmen über das Verhalten des gasförmigen widerstehenden Mittels. Aber man muß bedenken, daß es bei der rechnerischen Behandlung des Einflusses des widerstehenden Mittels nicht nur auf das Widerstandsgesetz ankommt, sondern auch auf die Gravitationswechselwirkung zwischen dem Mittel und dem sich bewegenden Körper.

Die von den Planeten und ihren Monden nicht aufgesammelten Teile des interplanetaren Mediums werden sich zum Teil wieder mit der Sonne vereinigt, zum Teil in den interstellaren Raum verflüchtigt haben. Reste finden wir heute noch in den Massen des Zodiakallichtes und den Meteoriten und Sternschnuppen. Wenn *Jeffreys*[206]) in Verfolgung seiner Theorie von der gasförmigen Natur des interplanetaren Mediums auch die Zodiakallichtmaterie als Gas anspricht, so befindet er sich damit im Gegensatz zu fast allen Astronomen, die in Analogie zum Saturnring, dessen Natur ganz eindeutig geklärt ist, das Zodiakallicht als Wolke „kosmischen Staubes" ansprechen.[207])

Die gleichsinnig mit dem Umlauf um die Sonne erfolgende Rotation der Planeten wird von den Katastrophentheorien im allgemeinen darauf zurückgeführt, daß beim Aufsammeln der interplanetarischen Kleinmassen deren Umlaufmomente in Rotationsmomente umgewandelt werden, wobei ein Überschuß in dem einen Sinn entsteht. Schon im vorigen Abschnitt wurde darauf hingewiesen, daß die Schlußfolgerungen über den Sinn der resultierenden Rotation verschieden ausfallen. *Chamberlin* und *Moulton* erhalten den richtigen Sinn dadurch, daß sie die Planeten in nahe kreisförmigen Bahnen, die Meteoritenteilchen des Mediums dagegen in stark elliptischen Bahnen sich bewegen lassen.[208]) Daß bei den äußeren Planeten Abweichungen auftreten, ist verständlich, weil hier der Einfluß des Mediums im allgemeinen nur noch gering sein kann. Die Unmöglichkeit, die Rotation der Planeten quantitativ durch Aufsturz satellitischer Massen zu erklären (bei Jupiter müßten z. B. Massen von der Größenordnung des Sechshundertfachen der heutigen Jupitermonde aufgestürzt sein), ist der wesentliche Grund, der *Jeffreys* von der reinen Gezeitentheorie zu einer wirklichen Kollisionstheorie geführt hat. Er verlegt die Ent-

206) The Earth, p. 59.
207) Encykl. VI 2, 27, Nr. **46**.
208) The Two Solar Families, Fig. 7.

stehung der Rotation[209]) in den Augenblick der Geburt des Systems selbst und macht die Scherungskräfte in dem zwischen den beiden Sonnen auseinandergezerrten „Flüssigkeitsband“ dafür verantwortlich.

18. Monde und Kleinkörper. Die meisten, vor allem die älteren Kosmogonien übertragen das Schema der Entwicklung der Planeten auch auf die Entwicklung der Monde, so wie sie nach oben eine formale Analogie zwischen Planetensystem und Spiralnebeln konstruieren. Es bestehen aber wesentliche Unterschiede, sowohl zwischen den Eigentümlichkeiten des Planetensystems und denen der Mondsysteme, als auch der Mondsysteme untereinander; die gleichen Argumente haben daher nicht immer die gleiche Überzeugungskraft. So versagt vor allem das gegen die Rotationshypothese angeführte „Kriterium von *Babinet*“ bei den Mondsystemen, da die Umlaufmomente der Monde (den Erdmond ausgenommen) nur Bruchteile der Rotationsmomente der Planeten darstellen. *Nölke* kommt daher bei den „regulären“ Monden wieder auf eine gewisse Form von Rotationsinstabilitäten zurück, die er für die Entstehung der Planeten mit Rücksicht auf das *Babinet*sche Kriterium ablehnen mußte.

Chamberlin und *Moulton* unterscheiden drei Gruppen von Monden[210]):

a) Die beiden Marsmonde, die sieben inneren Monde des Jupiter und die acht inneren des Saturn laufen alle im gleichen Sinn um wie die rechtsläufig rotierenden Planeten;

b) die beiden äußeren Monde des Jupiter und der äußerste des Saturn laufen im entgegengesetzten Sinne um wie die anderen Monde;

c) die vier Monde des Uranus und der Mond des Neptun laufen im gleichen Sinn um wie ihre Planeten rotieren, aber Umlauf und Rotation sind rückläufig.

Die Sonderstellung des Erdmondes wird von fast allen Kosmogonien anerkannt. Daß der eine der beiden Marsmonde rascher umläuft als der Mars rotiert, hebt auch diesen Satelliten in einem gewissen Sinn aus der Reihe der übrigen heraus und stellt eine Beziehung zum Saturnring her, dessen innere Teile auch rascher umlaufen als der Saturn rotiert. Es erscheint daher nicht nur nicht angebracht, die Entstehung der Monde in das gleiche Schema zu pressen wie die der Planeten, sondern man kann angesichts der großen Verschiedenheiten der Mondsysteme auch damit rechnen, daß zu ihrer Erklärung verschiedene Entstehungsursachen herangezogen werden müssen.

---

209) Fußnote 203.

210) Fußnote 200 f.

Aus der Tatsache, daß die fünf inneren Monde des Jupiter genau in der Äquatorebene des Planeten umlaufen, kann man allein noch nicht viel schließen, da diese Ebene selbst sehr nahe mit der Bahnebene zusammenfällt ($i = 3^0$). Daß aber die sieben inneren Monde des Saturn in der um 27^0 gegen die Bahnebene geneigten Äquatorebene umlaufen, die vier Monde des Uranus in der um 98^0 geneigten, spricht unbedingt zugunsten solcher Hypothesen, die die Entstehung der Hauptmondsysteme in irgendeiner Form in Zusammenhang mit der Rotation der Planeten bringen. Die von *Jeans* vertretene und von *Jeffreys* zunächst übernommene Theorie[211]), daß die Monde durch Gezeitenwirkung der Sonne bei dem ersten Periheldurchgang der in stark elliptischen Bahnen sich bewegenden jungen Planeten losgerissen worden seien, ist inzwischen von *Jeffreys*[212]) selbst als unhaltbar erklärt worden. Er kommt damit insofern wieder in Übereinstimmung mit der alten Planetesimalhypothese (die *Jeans* hatte verbessern wollen), als er den Monden von Anfang an selbständige Existenz neben den Planeten zuerkennt und beide Arten von Himmelskörpern in wesentlich dem gleichen Akt als Kondensationen verschiedener Größe entstehen läßt.

Das Hauptargument, das *Jeffreys* zu dieser veränderten Auffassung gebracht hat, daß die als Flüssigkeitskugeln entstehenden Planeten durch Gezeiteninstabilitäten nur in Massen von vergleichbarer Größenordnung zerfallen könnten, trifft auch die Rotationshypothesen. *Nölke* läßt daher, ähnlich wie früher *Faye*[213]) in Abwandlung der *Laplace*schen Hypothese die Planeten aus *inneren* Ringen des rotierenden Gasballs sich bilden ließ, die Monde als innere Kondensationen in den ausgedehnten ungleichförmig rotierenden atmosphärischen Hüllen der Planeten entstehen. *Chamberlin* und *Moulton* denken im Gegensatz dazu an Teilverdichtungen (sub knots), welche die Haupteruptionen begleiten und sich parallel mit der Umwandlung der „planetary bolts" in „planetesimals" zu einer Art „satellitesimals" entwickeln, wobei sie stets innerhalb der Wirkungssphäre der Planeten bleiben. Das Wachsen der Monde soll unter dem Einfluß der Gravitationskräfte der Planeten erfolgen; die Umläufe haben die gleiche, aus diesem Wachstum resultierende dynamische Ursache wie die Rotationen und erfolgen daher im allgemeinen auch im gleichen Sinne wie die Rotation.

211) Vgl. die Darstellungen von *Jeans,* The Origin of the Solar System, Supplement to Nature 2835 (1924) und Seeliger-Festschrift. Oder *Jeffreys,* The Origin of the Solar System, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 7 (1928).

212) Fußnote 204.

213) Vgl. die ausführliche Darstellung der Theorie bei *Poincare.*

Jeffreys' letzte, nur ganz qualitative Formulierung ist diese: "The matter swept off the sun would form a ribbon-like mass, which would be unstable in a complicated way, and would probably break up longitudinally into nuclei after a few hours. Transverse rupture might also occur, and offers a hint concerning the origin of the satellites of Uranus and Neptune. It seems probable from other considerations that the satellites were formed at nearly the same time as the planets and not at a later date."[214]) "But the last word has not been said about direct condensation. It could proceed if the density reaches its saturation density at the actual temperature."[215])

Die irregulären Monde des Jupiter und Saturn sind ohne Zweifel aus dem interplanetaren Medium bzw. dem Schwarm der kleinen Planeten eingefangen worden und stellen den Übergang dar zu der Kometenfamilie des Jupiter und den kleinen Planeten. Ob man auch die beiden Marsmonde als solche irreguläre Monde ansehen darf (wofür die Wahrscheinlichkeit erheblich gestiegen ist, seit sich die Entdeckungen von kleinen Planeten mit großer Exzentrizität häufen) oder ob die Gezeitenreibung für die besonderen Verhältnisse beim Mars verantwortlich gemacht werden kann, muß dahingestellt bleiben. Jedenfalls aber wird man die Auffassung von *See*[216]) ablehnen dürfen, der alle Monde generell als „eingefangen“ betrachtet wissen will. Die Hypothese wird nur in sehr gekünstelter Weise dem offenkundigen Unterschied zwischen regulären und irregulären Monden und den Besonderheiten gerade der regulären Monde gerecht.

Die Ausnahmestellung des Erdmondes erhellt daraus, daß seine Masse $\frac{1}{82}$ der Erdmasse beträgt, während das nächstgrößte Massenverhältnis im Planetensystem (Titan zu Saturn) erst $\frac{1}{4150}$ ist. Entsprechend ist sein Umlaufsmoment gleich dem vierfachen Rotationsmoment der Erde. Er kann sich also keinesfalls von einer rotierenden Erde abgelöst haben in einer Entfernung, die seiner heutigen vergleichbar ist. Hinsichtlich der absoluten Größe seiner Masse steht der Erdmond in einer Reihe mit den kleinsten Hauptplaneten (Merkur und Mars) und den größten Monden von Jupiter und Saturn (vgl. Tabelle 9).

G. H. Darwin[217]) hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Entstehungsgeschichte des Erde-Mond-Systems möglicherweise ein Fall

214) M. N. 89 (1929), p. 738.

215) M. N. 92 (1932), p. 891.

216) Researches on the Evolution of Stellar Systems (1910), sowie eine Reihe von Aufsätzen in den A. N. 180—182.

217) Vgl. Collected Works II, Nr. 3, sowie die populäre Darstellung in „Ebbe und Flut“. Auch bei *Jeffreys,* The Earth, Chapt. III.

von Resonanz sei in dem Sinne, daß die halbtägige Periode der von der Sonne auf der Erde erzeugten Gezeitenschwingungen in einer früheren Zeit nahe gleich der Periode der freien Schwingung der flüssigen Erde gewesen ist. Die kürzeste freie Schwingung konstanten Volumens beträgt bei einer mittleren Dichte 1 rund $2^1/_3$ Stunden. Die halbe Rotationsdauer einer homogenen Erde gleicher Dichte, der das gesamte Moment des heutigen Erde-Mond-Systems erteilt wird, beträgt 2,1 Stunden, wenn man sie als kugelförmig betrachtet, 2,4 Stunden, wenn man ihr die Grenzform des Rotationsellipsoides gibt. Die Möglichkeit einer Resonanz ist also in der Tat gegeben. Der Einwand *Moultons*[218]), daß die Rotationsdauer nicht hinreiche, die Erde so stark zu deformieren, daß die Resonanz wirksam werden könnte, ist von *Jeffreys*[219]) entkräftet worden durch den Hinweis, daß jede Dichtekonzentration zur Mitte hin den notwendigen kritischen Wert der Rotationsgeschwindigkeit vermindert, so daß durch relativ unbedeutende Änderungen in den Annahmen über die ursprüngliche Dichteverteilung innerhalb der Erde die Bedingungen für die Loslösung eines Mondes durch Resonanz in einem früheren Stadium der Erdentwicklung verwirklicht werden können (vgl. die analoge Argumentation bei der *Laplace*schen Theorie).

Ob der unmittelbare Entstehungsprozeß des Mondes wirklich diesem Bilde entspricht oder ob Mond und Erde als Geschwister gleichzeitig entstanden sind mit den übrigen Planeten, ist schwer zu entscheiden. Eine Folgerung wird man aber nicht von der Hand weisen können: daß die ursprüngliche Entfernung Erde—Mond nur ein Bruchteil der heutigen gewesen ist und daß Gezeitenreibung die Rotation des Mondes abgebremst, seine Entfernung von der Erde vergrößert hat. Denn diese Folgerung ergibt sich unmittelbar durch Rückwärtsrechnung aus den gegenwärtigen Verhältnissen des Systems.

Die Probleme des Saturnringes, der kleinen Planeten und des Zodiakallichtes sind in mancher Hinsicht verwandt. Schon die Hauptfrage, ob es sich um Reste der Urmaterie handelt, aus der Planeten und Monde geformt wurden, oder aber um die Produkte von Katastrophen, die im Laufe der Entwicklung des Planetensystems eingetreten sind, wird von den einzelnen Kosmogonien verschieden beantwortet. Die meteoritische Natur des Saturnrings ist einwandfrei sichergestellt, die des Zodiakallichtes im allgemeinen (über die abweichende Auffassung von *Jeffreys* wurde oben berichtet) anerkannt. Auf Zusammenhänge zwischen den Massen des Zodiakallichtes und dem Schwarm

218) Fußnote 201.

219) Fußnote 203.

der kleinen Planeten hat in der letzten Zeit vor allem *Hoffmeister* [220]) mit Nachdruck hingewiesen.

Daß der Saturnring sich ganz innerhalb der *Roche*schen Grenze befindet, kann als Bestätigung der Folgerungen angesehen werden, die aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren gezogen worden sind; innerhalb der kritischen Zone können keine größeren zusammenhängenden Weltkörper existieren. Die meisten Kosmogonien haben in dem Saturnring eine Stütze der Vorstellung gesehen, daß ringscheibenförmige Anordnungen eine Vorstufe der Planeten- und Mondbildung seien; so vor allem schon *Kant* und *Laplace*, aber auch *Chamberlin* und *Moulton*. Andere, die das Hauptgewicht auf den Einfluß des widerstehenden Mittels bei der Entwicklung des Planetensystems legen, sehen in dem Saturnring die Folgen des Eindringens eines früheren Mondes in die kritische *Roche*sche Sphäre auf einer im widerstehenden Mittel sich verengernden Bahn [221]); Vorbild des künftigen Schicksals auch der anderen Monde. Eine klare Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten kann nicht getroffen werden.

Die kleinen Planeten [222]) nehmen räumlich eine ausgezeichnete Stellung ein, für die man aber, im Gegensatz zum Saturnring, vorerst keinerlei dynamische Erklärung hat. Sie markieren die deutliche Zweiteilung des Planetensystems in die Zone der vier inneren Planeten, mit großen mittleren Dichten und kleinen Massen, und die Zone der vier äußeren, mit kleinen Dichten und großen Massen. Man wird daher das Problem der kleinen Planeten nicht betrachten dürfen, ohne gerade auf diese Zweiteilung Rücksicht zu nehmen.

Eine Möglichkeit ist, daß die kleinen Planeten Bruchstücke eines zerstörten Planeten sind, der zwischen Mars und Jupiter umlief, mit einer Masse von der ungefähren Größe eines der Jupitermonde. Wie die Zerstörung erfolgt sei, durch innere Explosion oder durch Einwirkungen des Jupiter (Gezeiten?), bleibt eine offene Frage. Im letzteren Fall müßte der Planet dem Jupiter schon sehr nahe gekommen sein, was allerdings bei den vermutlich großen Exzentrizitäten der ursprünglichen Planetenbahnen nicht ganz von der Hand zu weisen

220) Untersuchungen über das Zodiakallicht, Veröffentl. Berlin-Babelsberg X, 1 (1932).

221) Dies ist z. B. einer der Hauptpunkte in der *Hörbiger*schen Glazialkosmogonie, derzufolge im Laufe der Erdentwicklung schon mehrere früher vorhanden gewesene Monde, beim Durchschreiten der *Roche*schen Grenze sich auflösend, auf die Erde gestürzt sein sollen.

222) Vgl. *Stracke*, Die kleinen Planeten, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 4 (1925); *Klose*, Die Struktur des Planetoidensystems, Mitteil. Riga Nr. 2 (1928).

ist. Die große Verschiedenheit der heutigen Einzelbahnen, die gelegentlich dagegen angeführt wird, daß all diese Körper einmal von einem einzigen Punkt explosionsartig ausgegangen seien, kann als ernstliches Argument nicht gewertet werden, da die Störungen durch die benachbarten Planeten groß genug sind, um in so langen Zeiträumen gründliche Umwandlungen der Bahnen hervorzubringen, ganz abgesehen davon, daß bei einer heftigen Explosion recht verschiedene Bahnen der Bruchstücke zustande kommen können.

Die andere Annahme, daß es in der mittleren Entfernung der Planetoiden nie einen wirklichen Planeten gegeben habe, liegt vor allem im Rahmen der verschiedenen Meteoritenhypothesen. Verhältnismäßig zwanglos ergibt sich die mit Kleinkörpern angefüllte Zone bei der Planetesimalhypothese als Übergangsgebiet zwischen den von den beiden Protuberanzenpaaren belieferten Zonen. In dem kürzlich aufgefundenen Pluto könnte man eine Bestätigung der Voraussage dieser Theorie erblicken, daß an die großen Planeten sich nach außen hin eine ähnliche Zone von kleinen Planeten anschließe.

Jeffreys[223]) sah früher eine Schwierigkeit darin, daß das widerstehende Mittel die Bahnen dieser Kleinkörper ebenso hätte abrunden müssen wie die der vier inneren Planeten, und schließt daraus, daß die Planetoiden sich erst hätten bilden können, nachdem das interplanetare (gasförmige) Mittel verschwunden war. Da neuere Überlegungen von *Brown*[224]) über den Gültigkeitsbereich der Störungstheorie der Planeten erhebliche Änderungen der Exzentrizitäten auch ohne Zuhilfenahme eines widerstehenden Mittels innerhalb von Zeiträumen von 10^8 Jahren wahrscheinlich machen, verliert dieses Argument seine Bedeutung, da sowohl die ursprünglich großen Exzentrizitäten der Planeten sich vermindert als auch ursprünglich kleine der Planetoiden sich auf ihre heutigen Werte vergrößert haben können, rein durch die gegenseitigen Störungen.[225])

Die von *Hoffmeister*[220]) aufgedeckten Zusammenhänge zwischen Zodiakallicht und kleinen Planeten und die zunehmende Zahl von Neuentdeckungen kleiner Planeten, die die Marsbahn, z. T. sogar die Erd- und Venusbahn kreuzen, legen die Vermutung nahe, daß es überhaupt keine untere Grenze für die Massen der dem Planetoidenring zuzuordnenden Körper gibt. Die fein verteilte Zodiakallichtmaterie ist wahrscheinlich das letzte Auflösungsprodukt meteoritenartiger interplanetarer Massen; nicht nur der Kometen, wie *Fessen-*

223) The Earth, Chapt. IV, p. 7.
224) U. S. Nat. Res. Council Bull. 80, Part V (1931).
225) *Jeffreys,* M. N. 92 (1932), p. 890.

koff[226]) will, sondern vor allem der dem Planetoidenring angehörigen Körper.

Bezüglich aller bisher behandelten Körper besteht ziemliche Einstimmigkeit der Meinungen, daß sie dem Planetensystem seit seinem Bestehen angehören. Bei den Kometen und Meteoren gibt es eine Reihe von Argumenten, die auf eine Herkunft aus außerplanetaren Räumen hinweisen.[227]) Da wir heute wissen, daß der interstellare Raum von unregelmäßigen Wolken kosmischen Staubes durchsetzt ist, bereitet es keine Schwierigkeiten, anzunehmen, daß bei dem Durchschreiten einer solchen Wolke in früherer Zeit die Massen eingefangen wurden, die wir heute als periodische Kometen und Meteorschwärme die Sonne umlaufen und sich allmählich auflösen sehen. Es gibt allerdings auch Stimmen, welche einer solaren Herkunft der kometarischen Massen das Wort reden; vorab *Chamberlin* und *Moulton*, die spätere spontane Eruptionen der Sonne dafür verantwortlich machen im Gegensatz zu den von dem begegnenden Stern erzwungenen, die zur Entstehung der Planeten führten.[228]).

V. Einzelprobleme.

19. Doppelsterne. Die theoretischen Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren lassen eine Erklärung der Entstehung von Doppelsternen durch Teilung rotierender Massen zu. Dabei müßten zunächst Systeme entstehen, deren stark elliptisch deformierte Komponenten noch nahe in Kontakt miteinander stehen und bei denen Achsendrehung und Bahnumlauf die gleiche Periode haben. Solche Systeme sind in der Tat bekannt in den β Lyrae- und *W* Ursae Majoris-Sternen[229]), bei denen die Auswertung photometrischer und spektrographischer Daten zu einer genauen Kenntnis der physikalischen Verhältnisse führt.[230]) Man kann kaum eine ungezwungenere Erklärung für die Entstehung eines engen Doppelsternsystems finden. Die Hypothese, daß es sich hier nicht um neu gebildete Systeme handle, sondern um solche, die — etwa unter dem Einfluß eines widerstehenden Mittels — mit abnehmenden Bahndimensionen ihrer künftigen Vereinigung in

---

226) A. N. 198 (1914), p. 465.

227) Vgl. Encykl. VI 2, 18a.

228) Daher der Titel der letzten Veröffentlichung: The *Two* Solar Families.

229) *E. Schönberg*, Encykl. VI 2, 27, Kap. III, vor allem Nr. **56** mit Tab. 17 und *A. Hnatek,* Encykl. VI 2, 25, Nr. **31**.

230) Ausführliche Tabellen bei *H. Shapley,* Contr. Princeton Univ. Obs. Nr. 3 (1915) und *S. Gaposchkin,* Veröffentl. Berlin-Babelsberg IX, 5 (1932). Auswahl auch bei *J. H. Jeans,* A. C., table XIX.

einer Katastrophe entgegengehen, läßt sich nur unter sehr gezwungenen Annahmen durchführen und dürfte heute kaum mehr ernstlich verteidigt werden.

Die Frage aber, ob alle Doppelsternsysteme, auch die weiten visuellen Paare, einmal auf solche Weise entstanden sind, ist weniger leicht zu beantworten. Es läßt sich zwar eine Reihe von Prozessen angeben — vgl. die Ausführungen des vorigen Kapitels — die eine Vergrößerung der Bahndimensionen bewirken; aber die quantitative Durchrechnung der verschiedenen Möglichkeiten hat mit ziemlicher Sicherheit zu dem Schluß geführt, daß im allgemeinen aus einem engen spektroskopischen Doppelstern kein System vom Typus der bekannten weiten visuellen Systeme entstehen kann. *H. N. Russell*[231]) hat auf den Umstand hingewiesen, daß, solange nur innere Kräfte des Systems selbst in Frage kommen — vor allem die Gezeitenreibung —, der Vergrößerung der Bahndimensionen sehr enge Grenzen gesetzt sind durch die Bedingung, daß das Gesamtmoment des Systems erhalten bleibt. Die Gaskugel, aus der sich ein visuelles System der heute bekannten Art durch Teilung gebildet hätte, müßte einen Durchmesser gehabt haben von der Größenordnung des jetzigen Bahndurchmessers. Sterne solcher Art kennen wir aber nicht.

Der Einfluß säkularer Massenabnahme vermag die Bahndimensionen nur um kleine Bruchteile zu vergrößern. Wesentliche Veränderungen können dagegen hervorgebracht werden durch äußere Kräfte, wie sie bei Begegnungen mit anderen Sternen ausgeübt werden. Dahingehende Untersuchungen verdankt man vor allem *Jeans.*[232]) Er hat für ein System von Sternen im statistisch stationären Zustand, in dem also durch den Energieaustausch bei Begegnungen über lange Zeiten hin Gleichverteilung der Energie hergestellt ist, die Verteilungsfunktion der Perioden P und Exzentrizitäten ε der in dem System vorhandenen Doppelsternsysteme abgeleitet, ausgehend von den in Nr. **14** dargelegten Formeln für den Energieaustausch. Die Funktion hat, wenn man mit A und H Konstante bezeichnet, die Gestalt:

$$(1) \qquad f(P, \varepsilon)\,dP\,d\varepsilon = \tfrac{2}{3}\pi^2 A e^{\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{(\mathfrak{M}+\mathfrak{M}')^{\frac{1}{3}}}\cdot H\cdot\left(\frac{2\pi k^2}{P}\right)^{\frac{2}{3}}} dP\cdot 2\,\varepsilon\,d\varepsilon,$$

aus der hervorgeht, daß Perioden und Exzentrizitäten im stationären Endzustand sich unabhängig voneinander verteilen. In Wirklichkeit aber beobachtet man bei den Doppelsternen mit bekannten Bahnelementen eine ganz ausgesprochene Korrelation zwischen Perioden

231) *H. N. Russell,* On the Origin of Binary Stars, Ap. Journ. 31 (1910), p. 185.

232) A. C., Nr. 271—273.

und Exzentrizitäten, indem zu größeren Perioden auch größere Exzentrizitäten gehören. *Aitken*[233]) gibt folgende Tabelle:

Tabelle 10.
Perioden und Exzentrizitäten von Doppelsternsystemen.

Anzahl		Mittlere Periode	Mittlere Exzentrizität
Spektrosk. Doppelsterne	46	2,75 Tage	0,047
	19	7,80 „	0,147
	25	23,00 „	0,324
	29	1,5 Jahre	0,350
Visuelle Doppelsterne	30	31,3 „	0,423
	20	74,4 „	0,514
	18	170,0 „	0,539

Das Milchstraßensystem befindet sich demnach, wie wir auch aus anderen Überlegungen wissen, keineswegs in einem statistisch stationären Zustand. Man kann daher versuchen, aus der jetzigen Verteilung der Bahnelemente, in der die ursprüngliche Verteilung noch nicht ganz verwischt ist, Schlüsse auf die Art der Entstehung der Systeme zu ziehen.

Untersucht man die Häufigkeiten der Exzentrizitäten für sich, so findet man einen ausgeprägten Unterschied zwischen spektroskopischen und visuellen Doppelsternen: die spektroskopischen bevorzugen gegenüber der stationären Verteilung $2\varepsilon d\varepsilon$ in hervorstechendem Maße die ganz kleinen Exzentrizitäten, während bei den visuellen Doppelsternen theoretische und beobachtete Verteilung bis zu Exzentrizitäten von etwa 0,6 sehr nahe parallel laufen; vgl. die folgende Tabelle:

Tabelle 11.
Verteilung der Exzentrizitäten der Doppelsterne.

Exzentrizität	Spektr.	Vis.	Theor.
0,0 bis 0,2	66 %	10 %	4 %
0,2 „ 0,4	15	27	12
0,4 „ 0,6	13	41	20
0,6 „ 0,8	5	16	28
0,8 „ 1,0	1	6	36

(Anzahl der spektr. Doppelsterne 119, der visuellen 68.)

Die Verteilung der Perioden im stationären Endzustand wird wesentlich bestimmt durch die mittlere kinetische Energie der Sterne

233) *R. G. Aitken,* The Binary Stars (1918), p. 196. Ausführlichere Tabellen, die aber den gleichen Befund ergeben, bei *R. E. Wilson,* The Period-Eccentricity Relation in Binary Systems, Astron. Journ. 33 (1921), p. 147.

des Systems; denn die Konstante H in der Verteilungsfunktion (1) ist gegeben durch

$$\frac{1}{H} = \frac{2}{3}(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')\,V^2. \tag{2}$$

Mit dem von *F. H. Seares*[234]) unter Voraussetzung der Gleichverteilung der Energie im Milchstraßensystem abgeleiteten Wert für die Energiekonstante

$$\mathfrak{M}\,V^2 = 7{,}50 \cdot 10^{46}\ \mathrm{erg}$$

wird

$$H = 2 \cdot 10^{-47}$$

und die Verteilungsfunktion der Perioden nimmt die Gestalt an:

$$f(P)\,dP = D \cdot e^{0{,}79\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{2}{3}}}\,dP \tag{3}$$

mit

$$P_0 = 0{,}21\,\frac{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')^{\frac{3}{2}}}{(\mathfrak{M}+\mathfrak{M}')^{\frac{1}{2}}}\ \text{Jahre.}$$

Für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = 1$ wird $P_0 = 55$ Tage. Die Mehrzahl der Doppelsterne hat aber erheblich größere Perioden. Die Begegnungen im Sternsystem werden also vor allem im Sinne einer Verkleinerung der großen Perioden wirken müssen, um eine Annäherung an den stationären Endzustand herbeizuführen. Man wird im ganzen nicht um die von *Jeans* gezogene Schlußfolgerung herumkommen, daß wir mit zwei grundsätzlich verschiedenen Arten der Entstehung von Doppelsternsystemen wirklich rechnen müssen[235]):

1. Teilung rotierender Massen liefert die kurzperiodischen (spektroskopischen) Doppelsterne, deren Bahndimensionen sich unter dem Einfluß der Gezeitenreibung und der Begegnungen mit anderen Sternen im allgemeinen vergrößern.
2. Benachbarte Kondensationen in dem Nebel, aus dem das Milchstraßensystem entstanden ist, bilden langperiodische (visuelle) Doppelsterne, die durch Energieaustausch bei Begegnungen entweder zerstört werden (Übergang in hyperbolische Bahnen) oder aber ihre Dimensionen vorzugsweise verkleinern (Übergang in elliptische Bahnen größerer Energie).

Die drei- und mehrfachen Sternsysteme sind durchwegs von dem Typus, wie man ihn theoretisch zu erwarten hat, wenn die Kompo-

234) *F. H. Seares,* The Masses and Densities of the Stars, Ap. Journ. 55 (1922), 165 = Mt. Wilson Contr. 226.

235) Zu teilweise abweichenden Feststellungen kommt neuerdings *W. Markowitz,* The evolution of Binary Stars, Ap. Journ. 75 (1932), p. 69 und The problem of two bodies with variable mass, Ap. Journ. 77 (1933), p. 337.

nenten eines Doppelsternes durch Teilung selbst wieder Paare bilden: Die Dimensionen der sekundären Systeme sind kleine Bruchteile der Dimensionen des primären Systems. Als eines der eindrucksvollsten Beispiele führt *Jeans* den Stern 1502 in *Jonckheeres* Katalog an, dessen fünf Komponenten die folgenden mittleren Abstände haben:

$$Cc = 3'',1, \quad CD = 22'',7, \quad AB = 24'',2, \quad AC = 235'',7.$$

H. N. Russell[231]) hat ganz allgemein die Bedingungen untersucht, denen ein durch fortgesetzte Teilung entstandenes mehrfaches Sternsystem genügen muß hinsichtlich der Verhältnisse der Massen, Dichten und Abstände der Komponenten. *Jeans*[236]) hat ähnliche Betrachtungen angestellt, die ihn im Zusammenhang mit dem oben über die Entstehung weiter Doppelsterne Gesagten zu dem Schluß führten, daß die so bestechende Theorie der fortgesetzten Teilung nicht haltbar ist. Bei der Bildung von mehrfachen Sternsystemen haben offenbar beide Arten mitgewirkt: Die Hauptsysteme sind sicher nicht durch Teilung entstanden; wohl aber können die Komponenten sich mit zunehmender Kontraktion aufgespalten haben.

Aus der Statistik der absoluten Leuchtkräfte und der Massen lassen sich kaum Schlüsse ziehen auf die Art der Entstehung der Doppelsterne. Die Tatsache, daß wir unter den frühen Spektraltypen einen überwiegenden Prozentsatz von spektroskopischen Doppelsternen vorfinden, kann so gedeutet werden, daß Doppelsternbildung durch Teilung bevorzugt bei Sternen großer Masse stattfindet. Da wir aber noch keine sicheren Kenntnisse über die reellen Verschiedenheiten in der Verteilungsfunktion der Doppelsterne und der einfachen Sterne haben (vgl. p. 1008), müssen wir uns mit diesen allgemeinen Aussagen begnügen.

20. Veränderliche Sterne. Die kosmogonische Einordnung der veränderlichen Sterne wird wesentlich bestimmt durch die Anschauungen über die physikalischen Ursachen des Lichtwechsels. Im Rahmen der alten „Flecken“theorien, die die Veränderlichkeit auf oberflächliche Schlackenbildung bei fortschreitender Abkühlung zurückführen, erscheinen die Veränderlichen am Ende der Entwicklungsreihe der normalen Sterne. Die neueren Theorien, die die Ursachen des Lichtwechsels mehr in das Sterninnere verlegen (Pulsationen, Doppelsternbildung, Schwankungen der Energieerzeugung im Innern), führen zu der Auffassung der typischen Veränderlichen als Jugendstadien der Sternentwicklung. Diese Auffassung erfährt eine starke Stütze von der Seite der empirischen Kosmogonie durch Einordnung der Ver-

236) A. C., Nr. 280—283.

änderlichen in das (L, T)-Diagramm und durch das Studium der verwandtschaftlichen Beziehungen zwischen den einzelnen Klassen der Veränderlichen.[237]

Auf Grund der Beobachtungstatsachen kann man die folgenden für die Einordnung der Veränderlichen wesentlichen Feststellungen machen:

1. Die typischen Veränderlichen — d. h. abgesehen von Sternen wie etwa unsere Sonne, die streng genommen ja auch keine konstante Helligkeit hat — machen nur einen ganz kleinen Bruchteil der Sterne überhaupt aus. *Shapley*[238] gibt die Zahl aller Veränderlichen heller als 6. Größe zu 3% an. Die Zahl der δ Cephei-Sterne wird von *Jeans*[239] auf vielleicht $1:10^6$, die der langperiodischen Veränderlichen noch kleiner, vielleicht $1:10^7$ geschätzt. Die statistisch einwandfreie Diskussion der seit Jahren in Gang befindlichen „Überwachungsaufnahmen" dürfte nach den bis jetzt gemachten Erfahrungen bezüglich der relativen Häufigkeiten der verschiedenen Typen das heutige Bild zwar merklich verschieben[240]; dagegen scheint sich an der relativ geringen Häufigkeit der Veränderlichen überhaupt kaum etwas zu ändern.
2. Alle typischen Veränderlichen sind Sterne hoher Leuchtkraft, zum Teil Übergiganten. Wahrscheinlich ist ein sehr großer Prozentsatz der Riesen der späteren Spektralklassen (K, M, N, R, S) überhaupt veränderlich.
3. Die periodischen Veränderlichen erfüllen ein eng begrenztes Gebiet des (L, T)-Diagramms[241] und zeigen deutliche Korrelationen zwischen Leuchtkraft, Spektraltypus und Periode.

Stellt man sich auf den Boden der Riesen-Zwerg-Theorie der normalen Sternentwicklung, so ordnen sich nach diesen Gesetzmäßigkeiten die Veränderlichen als frühe Jugend- bzw. Durchgangsstadien ein. Ein durchaus „normaler" Weg führt möglicherweise von den langperiodischen roten Veränderlichen (Mira-Sterne) über *RV* Tauri-Sterne, δ Cephei-Sterne (lang- und kurzperiodische) und β Cephei-Sterne zu den normalen Sternen der Hauptreihe. Ob dabei mit zu-

---

237) Die ausführlichste Darstellung des ganzen Fragenkomplexes findet man bei *H. Ludendorff*, Handb. d. Astrophys. 6 (1928). Einen zusammenfassenden Bericht gibt *P. ten Bruggencate* in Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 10 (1931). Vgl. auch *E. Schönberg*, Encykl. VI 2, 27, Kap. III und *A. Hnatek*, Encykl. VI 2, 25.

238) Ap. Journ. 41 (1915), 305 = Mt. Wilson Contr. 99.

239) A. C., Nr. 354.

240) *C. Hoffmeister*, Zur Statistik der veränderlichen Sterne, Himmelswelt 40 (1930), p. 37.

241) Vgl. die von *ten Bruggencate* übernommene Fig. 20 bei *Schönberg*.

nehmender Kontraktion nur ein Abklingen der den Lichtwechsel in erster Linie bestimmenden Schwingungen erfolgt, gemäß dem Gesetz $P^2\varrho = \text{const.}$, oder ob, namentlich im Gebiet der eigentlichen δ Cephei-Sterne, auch Rotationsinstabilitäten eine Rolle spielen, die über Pseudoellipsoide zu Doppelsternen führen, darüber sind die Ansichten noch sehr verschieden. Die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen bei den verschiedenen Typen von veränderlichen Sternen ist im einzelnen so groß, daß man gar nicht erwarten darf, mit einer einfachen Theorie alles zu erfassen. Wahrscheinlich wird von all den verschiedenen Ansätzen und Erklärungsversuchen etwas in die endgültige Theorie übergehen, die der Vielfältigkeit der Erscheinungen durch eine entsprechende Vielfältigkeit der zusammenwirkenden Ursachen gerecht wird.

21. Novae, Planetarische Nebel und weiße Zwerge. Die Rolle, welche die Neuen Sterne innerhalb der kosmogonischen Spekulationen spielen, hat sich wesentlich gewandelt unter dem Einfluß der sich mehrenden Erkenntnisse über die Natur des einmaligen Aufleuchtens. Die relativ große Anzahl der bekannten Erscheinungen, verglichen mit der geringen Wahrscheinlichkeit naher Begegnungen von Sternen im Milchstraßensystem, macht es heute unmöglich, das Novaphänomen als das Ergebnis des zufälligen Zusammenstoßes zweier Sterne zu betrachten. Die genaue Verfolgung der Einzelvorgänge auf spektrographischem Wege[242]) — vor allem bei der besonders günstigen Erscheinung der Nova Pictoris — hat allgemein der Ansicht zum Durchbruch verholfen, daß auch die Ursachen für den Ausbruch einer Nova im Sterninnern zu suchen sind. Es kann sich hier nicht um eine dem Aufleuchten einer Sternschnuppe in der Erdatmosphäre vergleichbare Episode handeln, wie *Seeliger*s Theorie wollte.

Die Existenz Novaähnlicher Veränderlicher[243]), die über die *U* Geminorum-Sterne eine Verbindung zu den langperiodischen Veränderlichen herstellen, spricht für eine Einordnung der Novae in das Gebiet der aus inneren Gründen instabilen Sternzustände. Die Erkenntnis schließlich, daß die absolute Maximalhelligkeit, zu der die Neuen Sterne aufflammen, stets die gleiche ist[244]), mit einer Streuung von

---

242) Einzelheiten bei *F. J. M. Stratton,* Handb. d. Astrophys. 6, Chapt. 3.

243) Vgl. das Verwandtschaftsdiagramm bei *Ludendorff,* l. c. p. 248.

244) Von *K. Lundmark* zuerst als Hypothese gewagt in: The relations of the globular clusters and spiral nebulae to the stellar system, Kungl. Svensk. Vet. Handl. 60 (1920), Nr. 8. In einer Reihe weiterer Arbeiten gestützt und bestätigt: Publ. Astr. Soc. Pac. 35 (1923), p. 95; Pop. Astr. Tidskr. 4 (1923), p. 112; Uppsala Medd. Nr. 30 (1927); Pop. Astr. Tidskr. 9 (1929), p. 19 und 11 (1930), p. 85; Lund Medd. I Nr. 125 (1930).

kaum mehr als $\pm 0{,}5^m$, läßt keinen Zweifel mehr darüber zu, daß das Novaphänomen an wohl definierte Zustände im Sterninnern gebunden ist.

Als durch Ausdehnung der Untersuchungen auch auf schwächere Sterne durchschnittlich pro Jahr mindestens eine Nova gefunden wurde[245]) und als *E. B. Hubble* seine zahlreichen Entdeckungen von Neuen Sternen im Andromedanebel machte, konnte ernstlich der Gedanke erwogen werden, ob nicht das Novastadium überhaupt von jedem Stern während seiner Entwicklung einmal durchlaufen wird.[246]) *Lönnquist*[247]) hat neuerdings die allerdings für statistische Zwecke recht spärlichen Unterlagen im Hinblick auf diese Fragestellung diskutiert und für die „Nova-Periode“, d. i. die Zeit, innerhalb deren jeder Stern des Milchstraßensystems einmal als Nova aufleuchtet, die Größenordnung $5 \cdot 10^8$ Jahre gefunden. Diese Zahl ist klein, verglichen mit der Lebensdauer des einzelnen Sternes nach der „großen“ kosmogonischen Zeitskala; ließe also im Sinne der Theorie von *v. Zeipel* das Aufflammen als Nova sogar als ein periodisches Durchgangsstadium aller Sterne zu. Sie ist gerade vergleichbar mit den Werten, die aus der Theorie des „expanding universe“ (vgl. Nr. 22) für das Alter (bzw. die Periode) des Milchstraßensystems abgeleitet worden sind.

Der Zustand, dem die Novae nach dem mit dem Abstoßen von Nebelhüllen verbundenen Ausbruch zustreben, weist unzweifelhaft verwandte Züge mit den Wolf-Rayet-Sternen und den Planetarischen Nebeln auf, so daß es nahe liegt, diese Gebilde als späte Stufen früherer Novae anzusprechen. Leider besitzen wir so gut wie gar keine Kenntnisse über den physikalischen Zustand der Neuen Sterne während der Ruhezeit vor dem Ausbruch. Damit fehlt der eigentliche Schlüssel zur Lösung des Novaproblems. Aus einigen spärlichen Beobachtungen[248]) kann man auf ein *A*-Spektrum schließen, das während des Anstiegs zum Maximum der Lichtentfaltung *c*-Charakter annimmt. Aus der Helligkeit im Maximum und der durchwegs sehr großen Amplitude folgt die Zwergnatur im Normalzustand. Damit ergäbe sich eine mögliche Beziehung zu den weißen Zwergen, die ihrerseits wieder mit den Zentralsternen der Planetarischen Nebel in Verbindung

---

245) *S. Bailey,* Pop. Astr. 29 (1921), p. 554.

246) *H. Shapley,* Nature 1922, p. 580; *K. Lundmark,* Publ. Astr. Soc. Pac. 34 (1922), p. 207 und Pop. Astr. Tidskr. 4 (1923), p. 112; *H. v. Zeipel,* Pop. Astr. Tidskr. 10 (1929), p. 127.

247) Lund Circular Nr. 7 (1932).

248) *F. J. M. Stratton,* l. c. Nr. 19.

gebracht worden sind.[249]) So könnte sich möglicherweise der Kreis schließen, zu dem dann vielleicht der von *K. F. Bottlinger*[250]) vermutete „3. Ast der Sternentwicklung" als wesentliches Stück gehörte. So lange wir aber noch keine besseren empirischen Daten zur Verfügung haben und noch so gut wie gar keine befriedigende physikalische Theorie des Zustandes der weißen Zwerge, fehlt diesen nur auf mehr oder weniger deutliche phänomenologische Verwandtschaften gegründeten Spekulationen das tragende Gerüst.

22. Nebel und Sternsysteme. Die phänomenologische Einteilung der heute allgemein als außergalaktisch anerkannten Objekte legt einen Zusammenhang mit den theoretisch gefundenen Gleichgewichtsfiguren rotierender Gasmassen nahe. *Jeans* hat im Sinne der vergleichend-morphologischen Methode der Kosmogonie aus den *Hubble*schen Nebelklassen Entwicklungsreihen abgeleitet, die von großen kugelförmigen Nebelmassen zu Sternsystemen von der Art unseres Milchstraßensystems führen. Die Hauptklassen *Hubbles*[251]) sind:

1. *Elliptische Nebel*, $E0$ bis $E7$, geordnet nach der Größe der scheinbaren Elliptizität, d. h. der Größe $\frac{10(a-b)}{a}$.
2. *Normale Spiralen*, Sa, Sb, Sc, mit rundem bzw. ellipsoidischem Kern; Klasse Sa von der Kante gesehen, Klasse Sc ganz in der Aufsicht auf die Spirale.
3. *„Barred Spirals"*, früher vielfach als Spiralen vom Φ-Typus bezeichnet, SBa, SBb und SBc; bei denen der sehr unbestimmte eigentliche Kern von einem länglichen „Balken" durchkreuzt wird, an dessen Enden die Spiralarme ansetzen. Die Unterklassen haben die gleiche Bedeutung wie unter 2.
4. Unregelmäßige Nebel vom Typus der Magellan-Wolken.

Die Klassen S und SB schließen rein phänomenologisch an die späteren E-Klassen als getrennte Parallelreihen an, so daß man kosmogonisch an einen Verzweigungspunkt denken kann, von dem aus die durch Rotation bei einem bestimmten Wert der Abplattung instabil werdenden ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren sich fortsetzen in zwei Reihen verschiedenartiger Spiralen.

Die Möglichkeit einer solchen kosmogonischen Deutung ist gegeben durch *Jeans*' Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren der intermediären Modelle zwischen dem *Roche*schen Modell und der

249) Vgl. den Bericht von *F. Becker* und *W. Grotrian*, Über die galaktischen Nebel und den Ursprung der Nebellinien, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 7 (1928).

250) Veröffentl. Berlin-Babelsberg III, Heft 4 (1923).

251) *E. B. Hubble*, The extragalactic nebulae, Ap. Journ. 64 (1926), p. 321.

homogenen Flüssigkeit (vgl. Nr. 9). *Jeans*[252]) selbst hat das Schema der Entwicklungsreihen im Anschluß an *Hubbles* Klasseneinteilung durch die hier wiedergegebene Fig. 3 gekennzeichnet.

Danach erscheinen die normalen Spiralen als Fortsetzung der Pseudo-Sphäroide, die „barred spirals“ als Fortsetzung der Pseudo-Ellipsoide. *Jeans* weist allerdings ausdrücklich auf die Schwierigkeit hin, daß die Pseudo-Ellipsoide nach seiner früher entwickelten Theorie

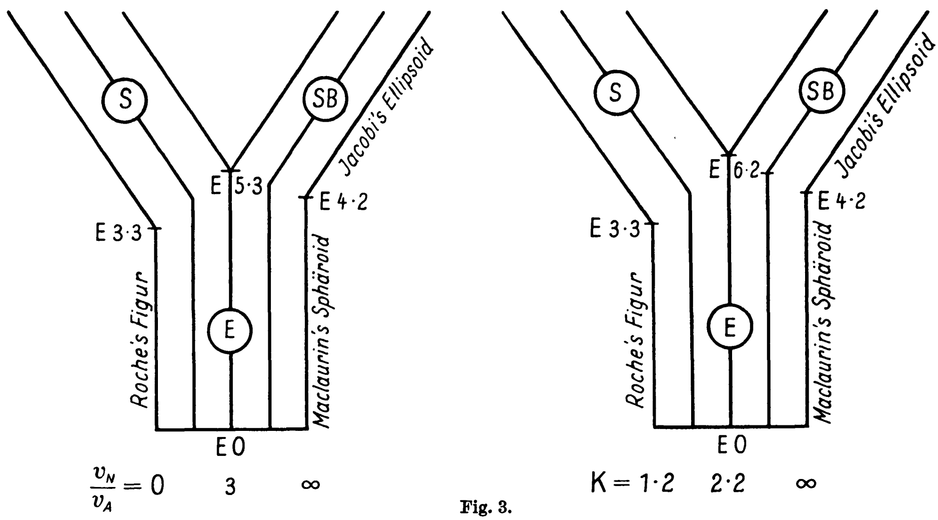

Fig. 3.

Schema der Entwicklung vom Kugelnebel zum Spiralnebel nach *Jeans* (A. C., Fig. 56/57).

der Gaskugeln nur als Gleichgewichtsfiguren rotierender Massen mit geringer zentraler Verdichtung auftreten können, während die Theorie für den Aufbau von Gasmassen durchweg auf große Dichtegradienten führt $\left(\frac{v_N}{v_A} < 3 \text{ bzw. } \varkappa < 2{,}2\right)$.

Aus den spektroskopisch beobachteten Rotationsgeschwindigkeiten einiger Nebel[253]), die einen linearen Gang mit dem Radius, d. h. gleichförmige Winkelgeschwindigkeiten ergeben haben, kann man zu einer Abschätzung der mittleren Dichte gelangen, wenn man für die kritische Größe $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho}$ einen plausiblen Wert einführt. *Jeans*[254]) setzt

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \varrho} = \frac{4}{3}\,\frac{a-b}{a} = \frac{2}{3}$$

---

252) A. C., Chapt. XIII.

253) *Slipher,* Lowell Bull. 2 (1914), p. 65; Pop. Astr. 23 (1915), p. 21; 25 (1917), p. 36; 29 (1921), p. 272; *F. G. Pease,* Wash. Proc. Nat. Ac. 2 (1916), p. 517; Publ. A. S. P. 28 (1916), p. 191; Wash. Proc. Nat. Ac. 4 (1918), p. 21.

254) A. C., Nr. 303, 304.

und findet dann mit den Daten von *Pease* für Messier 31 und NGC 4594 die Werte:

$$\text{Messier 31:}\quad \omega = 1{,}2\cdot 10^{-14}\ \mathrm{sec}^{-1},\quad \bar{\varrho} = 5\cdot 10^{-22}\ \mathrm{g\ cm}^{-3},$$
$$\text{NGC 4594:}\quad \omega = 0{,}4\cdot 10^{-14}\quad ,, \ ,\quad \bar{\varrho} = 2\cdot 10^{-21}\quad ,, \ .$$

Die linearen Dimensionen der Spiralnebel[255]), aus den scheinbaren Durchmessern und den bekannten Entfernungen abgeleitet, liegen zwischen 150 und 10 000 parsec; die Gesamtmassen werden zwischen 10^8 und 10^{10} Sonnenmassen geschätzt. Aus dem Vergleich der linearen Dimensionen mit den mittleren freien Weglängen, die für einfache Moleküle bei den angegebenen Dichten von der Größenordnung 10^{-4} parsec sind, ergibt sich die Möglichkeit, die elliptischen Nebel und die Kerne der Spiralnebel wirklich nach den für rotierende Gaskugeln entwickelten Methoden zu behandeln.

Dagegen treten ernstliche Schwierigkeiten auf, wenn man die außergalaktischen Objekte, wofür mancherlei Gründe angeführt werden können, als Sternsysteme auffassen will. Schon bei einer Größe der „Teilchen" von der Ordnung 1 mm (entspr. 10^7 Molekülen) wird die freie Weglänge von der Ordnung des Durchmessers der Systeme selbst; und wenn man gar zu Sternen übergeht, dann führen die in Nr. **14** gemachten Angaben über die Wirkung von Begegnungen auf formale freie Weglängen von der Größenordnung 10^6 bis 10^8 Nebeldurchmesser. Unter solchen Verhältnissen verliert der Begriff des „Gasdruckes" seinen Sinn und entfällt die Möglichkeit der unmittelbaren Übertragung der für Gaskugeln abgeleiteten Resultate. Man muß dann die allgemeinen statistischen Betrachtungen über stationäre bzw. nichtstationäre Sternsysteme heranziehen.

Die Frage, ob die elliptischen Nebel auf Grund empirischer Befunde als rotierende Gasmassen oder als Sternsysteme anzusehen sind, ist noch keineswegs geklärt.[256]) Soweit überhaupt Spektralaufnahmen vorliegen, entsprechen die Spektra fast aller außergalaktischen Nebel dem mittleren Spektrum der Milchstraße, d. h. einem mittleren Spektrum vom Typus *G*. Emissionslinien, insbesondere die Nebellinien, sind nur in ganz wenigen Ausnahmefällen beobachtet. Zwischen elliptischen Nebeln und Spiralnebeln scheint hinsichtlich der spektralen Eigentümlichkeiten kein wesentlicher Unterschied zu bestehen; nach Ausweis der Farbenindizes bzw. effektiven Wellenlängen gehören die elliptischen Nebel vielleicht einem etwas späteren Typus an als

255) Vgl. *H. D. Curtis,* Handb. d. Astrophys. V/2 (1933), table 16.
256) Ebenda Nr. 47—49.

die Spiralen. *Shapley*[257]) gibt folgende Mittelwerte für die Farbenindizes an:

12 elliptische Nebel C. I. = $+ 0{,}33^m$
18 Spiralnebel C. I. = $+ 0{,}22^m$.

Lundmark[258]) neigt daher dazu, die elliptischen Nebel als echte, nur wegen der großen Entfernung unaufgelöste außergalaktische Sternsysteme anzusehen, verwandt mit den kugelförmigen Sternhaufen im größeren galaktischen System; während *Jeans* an der Auffassung festhält, daß es sich um reine Gasmassen handle, die erst beim Übergang zur Linsenform durch Bildung von Kondensationen in den äußeren Teilen sich in Sternsysteme umformen.

Diese Bildung eines Sternsystems aus einem Nebel versuchte *Jeans*[259]) theoretisch zu fassen durch Betrachtungen über „Gravitationsinstabilitäten", die zu den p. 1057 bereits angeführten Formeln für die gegenseitigen Abstände λ_0 und Massen $\mathfrak{M} = \lambda_0^3 \varrho$ der Kondensationen führten. Mit $\varkappa = \frac{5}{3}$ erhält man folgende Übersicht der Werte für λ_0 und $\mathfrak{M}$ in Abhängigkeit von ϱ und c.

Tabelle 12.
Mittlere Abstände und Massen der Kondensationen in einem Nebel.

ϱ	$c = 10^4$ cm sec^{-1}		$c = 10^5$ cm sec^{-1}	
g cm^{-3}	λ_0 cm	$\mathfrak{M}$ g	λ_0 cm	$\mathfrak{M}$ g
10^{-32}	$5 \cdot 10^{23}$	$1{,}3 \cdot 10^{39}$	$5 \cdot 10^{24}$	$1{,}3 \cdot 10^{42}$
10^{-30}	$5 \cdot 10^{22}$	$1{,}3 \cdot 10^{38}$	$5 \cdot 10^{23}$	$1{,}3 \cdot 10^{41}$
10^{-22}	$5 \cdot 10^{18}$	$1{,}3 \cdot 10^{34}$	$5 \cdot 10^{19}$	$1{,}3 \cdot 10^{37}$
10^{-20}	$5 \cdot 10^{17}$	$1{,}3 \cdot 10^{33}$	$5 \cdot 10^{18}$	$1{,}3 \cdot 10^{36}$
10^{-6}	$5 \cdot 10^{10}$	$1{,}3 \cdot 10^{26}$	$5 \cdot 10^{11}$	$1{,}3 \cdot 10^{29}$
10^{-4}	$5 \cdot 10^{9}$	$1{,}3 \cdot 10^{25}$	$5 \cdot 10^{10}$	$1{,}3 \cdot 10^{28}$

Danach könnten Kondensationen von der Größenordnung der Sterne (10^{33}—10^{34} g) gerade bei den von *Jeans* errechneten mittleren Dichten der Nebel entstehen, wenn man die mittlere Molekulargeschwindigkeit zu $c = 10^4$ cm sec^{-1} ansetzt. Da man aber für diesen Wert so recht keinen Anhaltspunkt hat, während er die zahlenmäßigen Ergebnisse der Rechnung wesentlich bestimmt, darf man nicht zu großes Gewicht auf die numerischen Übereinstimmungen legen. *Jeans* selbst hat

257) Wash. Nat. Ac. Proc. 15 (1925). p. 565.
258) Publ. A. S. P. 42 (1930), p. 23; Pop. Astr. Tidskr. 11 (1930), p. 85.
259) Phil. Trans. 199 A (1902), p. 49; letzte Darstellung in A. C., Nr. 313—320.

z. B. früher[260]) $c = 1{,}6 \cdot 10^5$ vorgezogen, um in Übereinstimmung mit den aus *van Maanens* Beobachtungen abgeleiteten wesentlich größeren mittleren Dichten zu kommen.

Natur und Entwicklung der Spiralarme sind noch weitgehend in Dunkel gehüllt.[261]) Aus den Beobachtungen lassen sich als allgemeine Gesetzmäßigkeiten ableiten:

1. In der Regel setzen zwei Arme an gegenüberliegenden Punkten des Kernes an. Die Arme können bei keinem Nebel weiter verfolgt werden als bis über zwei volle Windungen.
2. In der Mehrzahl der untersuchten Fälle nähert sich die Form der Arme weitgehend der logarithmischen Spirale.[262]) Die Archimedische Spirale ist zur Darstellung der Beobachtungen ungeeignet. Doch gibt es auch Typen, die überhaupt keine einfache Darstellung erlauben, und Übergänge auf der einen Seite zu Typen mit stark verästelten Armen, auf der anderen bis zu solchen Typen, bei denen die beiden Arme zu einem fast völlig kreisförmigen Ring verschmelzen (NGC 7217).
3. Die spektrographischen Beobachtungen[263]) deuten darauf hin, daß die Rotation in dem Sinn erfolgt, in dem die Arme sich aufwickeln. Die Beobachtungen *van Maanens*[264]), denen zufolge die Materie längs der Spiralarme nach außen strömen sollte, haben einer strengen Kritik nicht standhalten können. Sie stehen in offenem Widerspruch mit den heutigen Kenntnissen über die Entfernungen.

Es ist stets möglich, spiralförmige Bahnen für die vom Kern ausgeschleuderten materiellen Teilchen zu erhalten, wenn man irgendwelche Zusatzkräfte zu der einfachen *Newton*schen Zentralkraft annimmt. Darauf läuft denn auch ein Teil der bisherigen Versuche zu einer dynamischen Deutung der Spiralarme hinaus. All diese Theorien geraten aber in Widerspruch mit der Beobachtungstatsache 3. Als typisches Beispiel kann der Versuch von *Jeans*[265]) zur Darstellung der Beobachtungen *van Maanens* gelten.

H. Vogt[266]) hat den Versuch gemacht, die zur Erklärung der

260) Problems Nr. 215.

261) Ausführliche Literaturnachweise bei *H. D. Curtis*, l. c. p. 878/879.

262) *E. von der Pahlen*, A. N. 188 (1911), p. 249; *J. H. Reynolds*, M. N. 85 (1924/25), p. 142 u. 1014.

263) Fußnote 253.

264) Literatur bei *H. D. Curtis*, l. c. p. 847 u. 850.

265) M. N. 84 (1923), p. 60.

266) A. N. 242 (1931), p. 181; 243 (1931), p. 405; 245 (1932), p. 281; 246 (1932), p. 343; 247 (1932), p. 169.

Spiralbahnen erforderliche Zusatzkraft als „kosmische Repulsivkraft“ in inneren Zusammenhang zu bringen mit der „Expansion der Welt“. *B. Lindblad*[267]) erhält Spiralbahnen um ein stark abgeplattetes Rotationsellipsoid, die asymptotisch zu Kreisbahnen sind und in ihrem Hauptteil gut den Vergleich mit den Beobachtungen aushalten. Bei *E. W. Brown*[268]) dagegen erscheinen die Spiralarme nur als Einhüllende der unter Annahme einer rein harmonischen Zentralkraft elliptischen Bahnkurven der Einzelteilchen.

Die Auszeichnung zweier diametraler Punkte als Ansatzstellen der Spiralarme (Ausströmungsstellen der Materie) könnte auf eine an jedem Ort vorhandene resultierende Gezeitenwirkung der übrigen Massen im Weltenraum zurückgeführt werden; eine Erklärung, die vor allem *Jeans* befürwortet hat. Daß kein Spiralnebel mehr als zwei vollständige Windungen der Arme aufweist, wird von *H. Vogt* als Ausdruck des geringen Alters all dieser Systeme betrachtet.

Die meisten Autoren sind sich letzten Endes der Unzulänglichkeit aller bisherigen Versuche in qualitativer wie quantitativer Richtung bewußt, so daß *H. D. Curtis*[269]) zu dem abschließenden Urteil kommt: „Nothing is as yet definitely known as to the laws which govern the characteristic structure of the spirals, nor as to the direction of the evolutionary process exhibited in them as a class. We do not know certainly whether the process as observed now is one of formation, permanency, or disintegration.“

Eines dürfte feststehen: Die Spiralstruktur ist eine so ausgeprägte Erscheinung unter den Objekten, die die Gesamtheit des von uns erfaßten Kosmos ausmachen, daß sie nicht als das Spiel eines seltenen „Zufalls“ betrachtet werden kann. Sie ist etwas Typisches, dessen Gesetzmäßigkeiten von allgemeinster Art sein müssen; welcher Art, das ist allerdings vorläufig noch eines der größten kosmogonischen Rätsel.

Einiges neue Licht haben die Untersuchungen der letzten Zeit über die „Expansion der Welt“ auf die Frage geworfen.[270]) Es scheint mit ziemlicher Klarheit daraus immer wieder hervorzugehen, daß die „Welt“ sich augenblicklich in einem ausgesprochen nichtstationären Durchgangsstadium befindet (im Sinne einer räumlichen Expansion)

267) K. Sv. Vet. Handl. Ser. III, Bd. 4, Nr. 7 = Medd. Upsala Nr. 31 (1927).

268) Obs. 51 (1928), p. 277.

269) l. c. p. 887, Nr. 66.

270) Die Hauptarbeiten sind bei *H. D. Curtis,* l. c. p. 891/892 zitiert. Eine Diskussion der Lösungstypen findet man bei *O. Heckmann,* Gött. Nachr. 1931, p. 126 und 1932, p. 97. Ausführungen über die Zeitskala bei *de Sitter,* M. N. 93 (1933), p. 628.

und daß Zeiten von der Größenordnung 10^9 bis 10^{10} Jahre eine ausgezeichnete Rolle in dem Weltgeschehen spielen; sei es als Periode bei den Lösungen, die auf eine pulsierende Welt führen, sei es als Zeitraum, innerhalb dessen sich der Radius der Welt von einem kleinsten Wert auf den heutigen vergrößert hat. Im Rahmen solcher Überlegungen ließen sich erheblich größere Gezeitenwirkungen in einer gar nicht so fernen Vergangenheit als Ursachen für das diametrale Ansetzen der Spiralarme wahrscheinlich machen; ebenso die relative „Jugend" der Spiralnebel. Da wir aber zur Zeit noch keine hinreichenden Gründe haben, uns für einen bestimmten Lösungstypus zu entscheiden, müssen auch die an spezielle nichtstatische Lösungen des kosmologischen Problems geknüpften Schlußfolgerungen noch mit Vorbehalt aufgenommen werden; sie sind kaum mehr als persönliche Meinungen.

Die Ansichten über die kosmogonische Stellung unseres Milchstraßensystems sind wesentlich bedingt durch unsere Kenntnisse von seinem Aufbau und seinem Bewegungszustand.[271]) Die Parallele zu den Spiralnebeln ist schon sehr früh gezogen worden. Ihre Zulässigkeit wurde vorübergehend in den letzten Jahren in Frage gestellt, weil die für das größere galaktische System gefundenen Dimensionen ganz erheblich größer waren als die der größten Spiralnebel. *Shapley*[272]) befürwortet daher eine Parallele mit gewissen Nebelhaufen. Indessen scheint die Schwierigkeit sich bis zu einem gewissen Grade dadurch zu beheben, daß sich auf der einen Seite die Dimensionen des Milchstraßensystems durch Berücksichtigung der interstellaren Absorption merklich verkleinern, während auf der anderen Seite die genauere Untersuchung der größten außergalaktischen Systeme, vorweg des Andromedanebels, zur Entdeckung von Kugelhaufen innerhalb dieser Systeme geführt hat, die bis in sehr viel größere Entfernungen von dem Kern des Nebels verfolgt werden können als die als solche erkennbaren „Arme". Die Analogie zwischen Milchstraße und Andromedanebel oder Messier 33 gewinnt dadurch wieder an Wahrscheinlichkeit.

Während *F. H. Seares*[273]) aus den beobachteten Geschwindigkeiten der Sterne und ihren durchschnittlichen Massen den Schluß auf eine weitgehende Gleichverteilung der Energie ziehen zu können glaubt, sprechen eine Reihe von Argumenten dagegen, daß sich das Milch-

---

271) *B. Lindblad,* Die Milchstraße, Handb. d. Astrophys. V/2, Kap. 7.

272) Harvard Circular 350 (1930).

273) Fußnote 234. Vgl. die merklich anderen Zahlen bei *H. Siedentopf,* Veröffentl. Göttingen, Heft 3, Tabelle 7.

straßensystem in einem statistisch stationären Zustand befindet: die offenkundigen Unregelmäßigkeiten in der räumlichen Verteilung (Milchstraßenwolken, Sternhaufen) und die Existenz von Gruppen, die durch Besonderheiten des physikalischen Zustandes ihrer Mitglieder (Spektraltypen, spezielle Veränderliche) und ihre gemeinsamen Bewegungen ausgezeichnet sind; die Größe der Relaxationszeit (von der Ordnung 10^{13} Jahre bei plausiblen Annahmen über die gegenwärtigen Verhältnisse, vgl. Nr. **14**) verglichen mit dem maximalen Alter der Sterne. Ob sich die Theorie eines dynamisch stationären Zustandes[274]) — im Sinne einer verallgemeinerten „Rotationstheorie" — befriedigend wird durchführen lassen, ist noch eine offene Frage. Eine Theorie nicht stationärer Zustände erscheint aussichtslos angesichts des noch völlig unzureichenden Beobachtungsmaterials.

Die Einordnung der Untersysteme des größeren galaktischen Systems, der Milchstraßenwolken, Sternhaufen, hellen und dunklen Nebel, in den Ablauf eines zeitlichen Geschehens wird noch für eine geraume Weile spekulativ bleiben müssen. Wir besitzen eine befriedigende Theorie der Kugelhaufen noch ebensowenig wie eine solche der Spiralnebel; nur mehr oder weniger viel versprechende Ansätze.[275]) Die langsame Auflösung der Haufen ist ein möglicher und wahrscheinlicher Vorgang. Ob aber die heutigen galaktischen Haufen Auflösungsprodukte früherer Kugelhaufen sind und aus dem räumlich Gegebenen auf dem Weg einer zeitlichen Umdeutung eine Entwicklungsreihe von Kugelhaufen über mehr oder weniger offene Haufen zu den kleinsten Bewegungsgruppen abgeleitet werden darf, erscheint mehr als fraglich. Dagegen sprechen die charakteristischen Unterschiede in den (L, T)-Diagrammen (vgl. p. 1009) und die Erkenntnis, daß die Absolutwerte der Dichten in Kugelhaufen, galaktischen Haufen und den dichtesten Milchstraßenwolken durchaus von der gleichen Größenordnung sind[276]), bis zum Mehrtausendfachen der Dichte der näheren Sonnenumgebung. Auch hier gilt entsprechend das bei den Veränderlichen Gesagte: Die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen läßt sich nicht auf eine einzige Entwicklungsreihe zurückführen; wir haben es mit Parallelreihen zu tun, deren Anfangszustand an die besonderen

---

274) Übersicht und Literatur darüber bei *Lindblad*, l. c. Kap. g. Vgl. auch *O. Heckmann*, Vjschr. der Astr. Ges. 68 (1933), p. 322.

275) *A. Martens*, A research on the spherical dynamical equilibrium distribution of stars of unequal mass. Göteborg 1928. *O. Heckmann* und *H. Siedentopf*, Zur Dynamik kugelförmiger Sternhaufen, Ztschr. f. Astrophys. 1 (1930), p. 67 = Veröffentl. Göttingen, Heft 13.

276) *R. J. Trümpler*, Lick Obs. Bull. Nr. 420, p. 169.

Verhältnisse bei der Entstehung des großen Milchstraßensystems geknüpft ist und deren Gang durch die räumliche Lage innerhalb des Systems entscheidend beeinflußt wird.

Eine Kosmogonie, die den Rahmen der „Wissenschaft“ nicht überschreiten will, muß notwendigerweise unbefriedigend ausklingen, wenn von ihr die Antwort verlangt wird auf die Frage, wie denn das Weltganze entstanden sei. Jede Zusammenfügung der von ihr aufgezeigten Möglichkeiten und Stücke von Entwicklungsreihen zu einem „befriedigenden“ Ganzen bleibt mehr oder weniger spekulativ und wird die Kritik herausfordern. Diese Kritik muß unerbittlich sein gegenüber Gedankengängen, die um der fanatischen Verfechtung einer einmal gefaßten Idee willen Tatsachen und wohlbegründete Gesetze vergewaltigen. Sie wird aber nachsichtig und wohlwollend stets auch dessen eingedenk sein müssen, daß für allen Fortschritt unserer Erkenntnis gilt, was *Kant* in der Vorrede zu seiner „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ gesagt hat:

> „Ich habe auf eine geringe Vermutung eine gefährliche Reise gewagt und erblicke schon die Vorgebirge neuer Länder. Diejenigen, welche die Herzhaftigkeit haben die Untersuchung fortzusetzen, werden sie betreten und das Vergnügen haben, selbige mit ihrem Namen zu bezeichnen.“

(Abgeschlossen im Oktober 1933.)

Sachregister zu Band VI, 2. Teil, 2. Hälfte.

Von B. Thüring in Breslau.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben. Die Wiederholung des Stichwortes ist durch einen Bindestrich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes.

B

C

D

G

T

Z

Namensverzeichnis zu Band VI 2, A und B.

Von B. Thüring in Breslau.

C

D

H

N

Y

Z

I. Band: Arithmetik u. Algebra

I. Teil (Heft 1–5 I) 1898/1900. Kpl. Geh. M. 19.20, geb. M. 26.20

1. Heft (*Schubert, Netto, Pringsheim*) 1898 . . . . Geh. M. 4.20
2. Heft (*Study, Schönflies, Burkhardt*) 1899 . . . . Geh. M. 4.20
3. Heft (*Netto, Landsberg, Meyer*) 1899 M. 4.80
4. Heft (*Runge, Vahlen, Hölder*) 1899 M. 6.—
5. Heft (In Teil I sind von diesem Hefte enthalten: *Netto, Vahlen, Wimann*) 1900 . . . . . Preis unter Teil II

II. Teil (Heft 5 II–8) 1900/1904. Kpl. Geh. M. 27.60, geb. M. 34.60

5. Heft (In Teil II sind von diesem Hefte enthalten: *Bachmann, Vahlen, Hilbert, Landsberg, Weber*) 1900 Geh. M. 7.80
6. Heft (*Czuber, Bauschinger, von Bortkiewicz, Bohlmann, Seliwanoff, Mehmke*) '01 . . . . Geh. M. 10.40
7. Heft (*Mehmke, Ahrens, Pareto*) '02 M. 4.80
8. Heft (*Pringsheim, van Dyck, Meyer, Inhaltsverzeichnis und Register*) '04 M. 4.60

II. Band: Analysis

I. Tl., I. Hälfte (H. 1—5) 1899/1904. Kpl. Geh. M. 29.—, geb. M. 36.—

1. Heft (*Pringsheim, Voss, Brunel*) *1899* . . . . Geh. M. 6.—
2. u. 3. Heft (*Brunel, Painlevé, Vessiot, von Weber*) 1900 . . . . . . Geh. M. 9.—
4. Heft (*Maurer, Burkhardt, Bôcher, Meyer, Sommerfeld*) 1900. . . Geh. M. 6.—
5. Heft (*Sommerfeld, Kneser, Zermelo, Hahn, Burkhardt, Wangerin*) '04. M. 8.—

I. Tl., II. Hälfte (Heft 6–9) '04/'16 Kpl. Geh. M. 26.—, geb. M. 33.—

6. Heft (*Pincherle*) '06 . . . . . Geh. M. 2.20
7. Heft (*Burkhardt*) '14 . . . . Geh. M. 12.60
8. Heft (*Burkhardt*) '15 . . . . Geh. M. 7.40
9. Heft (*Register u. Inhaltsverz.*) '16 M. 3.80

II. Teil. (Heft 1–5) '01/'21. Kpl. Geh. M. 34.—, geb. M. 41.—

1. Heft (*Osgood, Wirtinger*) '01 Geh. M. 6.60
2. u. 3. Heft (*Fricke*) '13 . . . . Geh. M. 11.—
4. Heft (*Hilb*) '14 . . . . Geh. M. 3.40
5. Heft (*Hilb, Krazer, Wirtinger; Inhaltsverzeichnis u. Register*) '21. Geh. M. 13.—

III. Tl., I. Hälfte (H. 1–5) '09/'21. Kpl. Geh. M. 25.40, geb. M. 32.40

1. Heft (*Pringsheim, Faber*) '09. Geh. M. 1.80
2. Heft (*Runge, Willers*) '15 . Geh. M. 5.—
3. Heft (*Lichtenstein*) '19 . . . . Geh. M. 7.40
4. Heft (*Bieberbach*) '21 . . . . Geh. M. 5.80
5. Heft (*Hensel, Jung*) '21 . . . Geh. M. 5.40

III. Teil, II. Hälfte (Heft 6—9)

6. Heft (*Nörlund, Bohr; Inhaltsverz. z. Bd. II:, III. Tl., 1. Hälfte.*). '23 Geh. M. 7.20
7. Heft (*Borel, Rosenthal, Zoretti, Montel, Fréchet*) '24 . . . . Geh. M. 12.60
8. Heft (*Hilb, Riesz, Szasz, Lichtenstein*) '24 . . . . Geh. M. 5.40
9. Heft (*Toeplitz, Hellinger*) [In Vorb.]

III. Band: Geometrie

I. Teil, I. Hälfte (Heft 1–4) '07/'10. Kpl. Geh. M. 28.—, geb. M. 35.—

1. Heft (*Enriques, von Mangoldt, Dehn, Heegaard*) '07 . . . . Geh. M. 8.—
2. Heft (*Fano*) '07 . . . . . . Geh. M. 6.40
3. Heft (*Schönflies*) '09 . . . . Geh. M. 2.60
4. Heft (*Steinitz, Papperitz, Müller*) '10 M. 11.—

I. Teil, II. Hälfte (Heft 5–10)

5. Heft (*Sommer, Zacharias*) '14. Geh. M. 7.20
6. Heft (*Zacharias, Meyer*) '20. Geh. M. 8.—
7. Heft (*Berkhan, Meyer, Rothe*) '21. M. 9.40
8. Heft (*Lotze, Betsch*) '24. . . Geh. M. 6.40
9. Heft (*Steinitz*) '22. . . . . . Geh. M. 5.—
10. Heft (*Tietze*) [In Vorb. '26.]

II. Teil, I. Hälfte (Heft 1–6) '03/'15. Kpl. Geh. M. 28.80, geb. M. 35.80

1. Heft (*Dingeldey*) '03 . . . . . Geh. M. 6.—
2. Heft (*Staude*) '04 . . . . . . Geh. M. 3.60
3. Heft (*Zeuthen, Berzolari*) '06. Geh. M. 7.40
4. Heft (*Kohn, Loria*) '09 . . . Geh. M. 4.40
5. Heft (*Loria*) '15 . . . . . . Geh. M. 2.40
6. Heft (*Castelnuovo, Enriques*) '15. M. 5.—

II. Teil, II. Hälfte (Heft 7—12)

7. Heft (*Segre*) '21 . . . . . . Geh. M. 7.60
8. Heft (*Zindler, Meyer; Inhaltsverzeichnisse zu Bd. III, I. Teil, 1. Hälfte und II. Teil, 1. Hälfte*) '22 . . Geh. M. 11.—
9. Heft (*Rohn, Berzolari*) [In Vorb. '26.]
10. Heft (*Meyer*) [In Vorb. '26.]
11. Heft (*Meyer*) [In Vorb. '26.]
12. Heft (*Berzolari*) [In Vorb. '26.]

III. Teil (Heft 1—7)

1. H. (*v. Mangoldt, von Lilienthal*) '02 M. 8.60
2. u. 3. Heft (*Scheffers, von Lilienthal, Voß*) '03 . . . . Geh. M. 9.60
4. Heft (*Liebmann*) '15. . . . . Geh. M. 3.80
5. Heft (*Salkowski*) '21 . . . . Geh. M. 2.40
6. Heft (*Weitzenböck*) '22. . . . Geh. M. 4.60
7. Heft (*Berwald*) [In Vorb. '26.]

IV. Band: Mechanik

I. Teil, I. Abt. (Heft 1–4) (= IV: 1) '01/'08. Kpl. Geh. M. 26.40, geb. M. 33.40

1. Heft (*Voß*) '01 . . . . Geh. M. 4.60
2. Heft (*Timerding, Schönflies, Grübler*) '02. . . . . Geh. M. 5.80
3. Heft (*Jung, Henneberg*) '03. . Geh. M. 5.80
4. Heft (*Stäckel; Inhaltsverzeichnis*) '08 M. 10.20

I. Tl., II. Abt. (Heft 1–4) (= IV: 2)

1. H. (*Furtwängler, Fischer, Walker*) '04 M. 5.80
2. Heft (*von Mises*) '11. . . . . Geh. M. 7.40
3. Heft (*Heun*) '14. . . . . . . Geh. M. 5.—
4. Heft (*Prange, Müller*) [In Vorb. '26.]

II. Teil, I. Abt. (Heft 1–4) (= IV: 3) '01/'08. Kpl. Geh. M. 22.80, geb. M. 29.80

1. Heft (*Abraham, Love*) '01 . . Geh. M. 5.60
2. Heft (*Finsterwalder, Cranz*) '03 Geh. M. 5.—
3. Heft (*Zemplén, Forchheimer*) '06 Geh. M. 7.20
4. Heft (*Grübler, Kriloff, Müller; Inhaltsverzeichnis*) '08 . . . . . Geh. M. 5.—

[IV. Band: Mechanik]

II.T., II. Abt. (H. 1-6) (=IV:4) '07/'14

Kpl. Geh. M. 32.40, geb. M. 39.40

1. Heft (*Müller, Timpe, Tedone*) '07 Geh. M. 4.80
2. Heft (*Tedone, Timpe, Lamb*) '07 Geh. M. 7.—
3. Heft (*von Kármán; Reißner*) '10 Geh. M. 4.—
4. Heft (*Grüning*) '14 . . . . . Geh. M. 4.40
5. H. (*Wieghardt, Hellinger, v. Kármán; Inhaltsverz. zu Bd. IV, 2 II*) '14 Geh. M. 8.80
6. Heft (*Ehrenfest*) '14 . . . . . Geh. M. 3.40

V. Band: Physik

I. Teil (Heft 1–6.) '03/'22. Kpl. Geh. M. 42.40, geb. M. 49.40

1. Heft (*Runge, Zenneck, Bryan*) '03 Geh. M. 6.—
2. Heft (*Hobson, Diesselhorst, Schröter, Prandtl*) '05. . . . . Geh. M. 6.—
3. Heft (*Hinrichsen, Mamlock, Liebisch, Schönflies, Mügge*) '06. Geh. M. 6.60
4. H. (*Boltzmann, Nabl, Minkowski*) '07 M. 4.60
5. Heft (*Kamerlingh Onnes, Keesom*) '12 M. 13.20
6. Heft (*Herzfeld; Inhaltsverz.*) '22 Geh. M. 6.—

II. Teil (Heft 1–5) '04/'22. Kpl. Geh. M. 34.20, geb. M. 41.20

1. Heft (*Reiff, Sommerfeld, Lorentz*) '04 M. 10.40
2. Heft (*Gans, Pockels*) '07 . . . Geh. M. 4.40
3. Heft (*Debye, Abraham*) '10 . . Geh. M. 6.—
4. Heft (*Pauli jr.*) '22. . . . . Geh. M. 9.—
5. Heft (*Seeliger; Inhaltsverz.*) Geh. M. 4.40

III. Teil (Heft 1–6)

1. Heft (*Wangerin, Wien*) '09. . Geh. M. 7.20
2. Heft (*Wien, Lorentz*) '09. . . Geh. M. 6.—
3. Heft (*von Laue, Epstein*) '15. Geh. M. 6.20
4. Heft (*Born*) '23 . . . . Geh. M. 9.60
5. Heft (*Runge, Kratzer*) '25 . . Geh. M. 3.60
6. Heft (*Smekal*) [II. d. Pr. '26.] " " 15.—

VI. Band, 1. Teil: Geodäsie und Geophysik

A. Geodäsie, (Heft 1–3)

B. Geophysik Heft 1–5 '06/'25. Kpl. Geh. M. 35.80, geb. M. 42.80

A. 1. Heft (*Reinhertz, Finsterwalder*) '06 M. 4.20
2. Heft (*Pizzetti*) '07 . . . . Geh. M. 4.80
3. Heft (*Bourgeois, Furtwängler, Meldau*) '09 . . . . Geh. M. 4.80

B. 1. Heft (*Darwin, Hough*) '08. . Geh. M. 3.—
2. Heft (*Helmert*) '10 . . . . . Geh. M. 3.60
3. Heft (*Exner, Trabert*) '13 . . Geh. M. 2.—
4. Heft (*Schweidler Schmidt*) '18 Geh. M. 6.—
5. Heft (*Conrad, Möbius, Inhaltsverzeichnis und Register*) '25 . . Geh. M. 7.40

VI. Band. 2. Teil: Astronomie

Abt. A. (Heft 1–8) '05/'23 Geh. M. 40.40, geb. M. 47.40

1. Heft (*Anding, Cohn, Wirtz, Caspari*) '05. . . . . Geh. M. 7.20
2. Heft (*Cohn, Bemporad*) '08. . Geh. M. 5.—
3. Heft (*Ginzel, Wilkens, Herglotz, von Nießl*) '10. . . . . Geh. M. 4.80
4. Heft (*Hepperger, Whittaker*) '12. Geh. M. 3.60
5. Heft (*von Zeipel*) '12 . . . . Geh. M. 4.20
6. Heft (*Brown, Sundman*) '15. Geh. M. 5.40
7. Heft (*Laves, Bauschinger*) '20. Geh. M. 3.20
8. Heft (*Oppenheim, Hoffmeister, Samter, Bauschinger, Hayn; Inhaltsverzeichnis und Register*) '23. . . Geh. M. 7.—

Abt. B (Heft 1–3)

1. Heft (*Oppenheim, Kottler*) '22. Geh. M. 9.—
2. Heft (*Kobold Guthnick*) [Ersch. Aug. '26.]
3. Heft (*Emden Kienle*) [In Vorb.]

Halblederelnbanddecken z. d. abgeschl. Teilbänden sind wieder lieferbar z. Preise von M. 5.–

Als Sonderausgaben sind erschienen:

Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Nach den Referaten von L. Zoretti, P. Montel und M. Fréchet. Von A. Rosenthal. M. 17.—. (II, 3, 7.)
Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. Von E. Hilb und M. Rieß. M. 2.20. (II, 3, 8.)
Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Von L. Lichtenstein. M. 3.20. (II, 3, 8.)
Relativitätstheorie. V. W. Pauli. M. Vorw. v. A. Sommerfeld. Geh. M. 11.—, geb. M. 13.— (V, 2. 4.)
Atomtheorie des festen Zustandes. (Dynamik der Kristallgitter.) Von M. Born. 2. Aufl. Mit 13 Fig. im Text und 1 Tafel. Geb. M. 13.40. (V, 3, 4.)
Allgemeine Grundlagen der Quantenstatistik u. Quantentheorie. Von A. Smekal. [U. d. Pr. '26.] (V, 3, 6)

GESAMTINHALTSVERZEICHNIS

ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

Rosenthal u. M. **Fréchet**, Funktionenfolgen. II, 3. Heft 7.
Rothe, H., Systeme geometr. Analyse. III, 1. Heft 7.
Runge, K., Maß und Messen. V, 1. Heft 1.
—— Separ. u. Approximation der Wurzeln. I. Heft 4.
—— die Seriengesetze in den Spektren der Elemente. V, 3. Heft 5.
—— u. Fr. A. **Willers**, num. u. graph. Quadratur u. Integration gewöhnlicher u. partieller Differentialgleichungen. II, 3. Heft 2.
Salkowski, E., dreifach orthogonale Flächensysteme. III, 3. Heft 5.
Samter, H., spezielle Störungen d. Planeten u. Kometen, numerische Behandlung besonderer Fälle des Dreikörperproblems. Mehrf. Fixsternsysteme. VI, 2. A. Heft 8.
Scheffers, G., besondere transcend. Kurven. III, 3. Heft 2/3.
Schmidt, A., Erdmagnetismus. VI, 1. B. Heft 4.
Schönflies, A., Mengenlehre. I. Heft 2.
—— projektive Geometrie. III, 1. Heft 3.
—— u. M. **Grübler**, Kinematik. IV, 1 I. Heft 2.
—— Th. **Liebisch** u. O. **Mügge**, Kristallographie V, 1. Heft 3.
Schröter, M., u. L. **Prandtl**, technische Thermodynamik. V, 1. Heft 2.
Schubert, H., Grundlagen der Arithmetik. I. Heft 1.
v. **Schweidler**, E., Atmosphärische Elektrizität. VI, 1. B. Heft 4.
Seeliger, R., Elektronentheorie der Metalle. V, 2. Heft 5.
Segre, C., Mehrdimens. Räume. III, 2. Heft 7.
Seliwanoff, D., Differenzenrechnung. I. Heft 6.
Smekal, A., allgemeine Grundlagen der Quantenstatistik und -theorie. V, 3. Heft 6.
Sommer, J., elementare Geometrie v. Standpunkte der neueren Analysis aus. III, 1. Heft 5.
Sommerfeld, A., Randwertaufgaben in der Theorie der part. Differentialgleichung. II, 1. Heft 4/5.
—— Vorwort zum V. Band. V, 1. Heft 6.
—— u. R. **Reiff**, Standpunkt d. Fernwirkung. Die Elementargesetze. V, 2. Heft 1.
Stäckel, P., elementare Dynamik der Punktsysteme u. starren Körper. IV, 1. I. Heft 4.
Staude, O., Flächen II. Ordnung und ihre Systeme u. Durchdringungskurven. III, 2. Heft 2.
Steinitz, E., Polyeder u. Raumeinteilungen. III, 1. Heft 9.
Steinitz, E., Konfigurationen d. projektiven Geom. III, 1. Heft 4.
Study, E., Theorie der gemeinen u. höheren komplexen Größen. I. Heft 2.
—— F. W. **Hinrichsen** u. L. **Mamlock**, chemische Atomistik. V, 1. Heft 3.
Sundman, K., Theorie der Planeten. VI, 2 A. Heft 6.
Szász, O., u. E. **Hilb**, allgemeine Reihenentwicklungen. II, 3. Heft 8.
Tedone, O., allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie). IV, 2. II. Heft 1.
—— u. A. **Timpe**, spez. Ausführungen zur Statik elastischer Körper. IV, 2. II. Heft 2.
Tietze, H., Beziehungen zwischen den verschied. Zweigen der Topologie. III, 1. Heft 10.
Timerding, H. E., geometrische Grundlegung der Mechan. ein. starr. Körpers. IV, 1. I. Heft 2.
Timpe, A., u. C. H. **Müller**, die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätslehre. IV, 2. II. Heft 1.
—— u. O. **Tedone**, spez. Ausführungen zur Statik elastischer Körper. IV, 2. II. Heft 2.
Toeplitz, O., u. E. **Hellinger**, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. II, 3. Heft 9.
Trabert, W., u. F. **Exner**, dynam. Meteorologie. VI, 1. B. Heft 3.
Vahlen, K. Th., arithmetische Theorie der Formen. I. Heft 5.
—— rationale Funktionen der Wurzeln; symmetrische u. Affektfunktionen. I. Heft 4.
Vessiot, E., gewöhnl. Integralgleichungen; elementare Integrationsmethoden. II, 1. Heft 2/3.
Voß, A., Abb. u. Abwickl. zweier Flächen aufeinander. III, 3. Heft 2/3.
—— die Prinzipien der rationellen Mechanik. IV, 1. I. Heft 1.
—— Different.- u. Integralrechn. II, 1. Heft 1.
Walker, G. T., Spiel und Sport. IV, 1. II. Heft 1.
Wangerin, A., Optik. Ältere Theorie. V, 3. Heft 1.
—— Theorie der Kugelfunktionen u. der verwandten Funktionen, insbesondere der Laméschen u. Besselschen. (Theorie spezieller, durch lineare Differentialgleich. definierter Funktionen). II, 1. Heft 5.
v. **Weber**, E., partielle Differentialgleichngn. II, 1. Heft 2/3.
—— H., kompl. Multiplikation. I. Heft 5/6.
Weitzenböck, R., neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten. III, 3. Heft 6.
Whittaker, E. T., Prinzipien der Störungstheorie u. allgemeine Theorie der Bahnkurven i. dynam. Probl. VI, 2. A. Heft 4.
Wieghardt, K., Theorie der Baukonstrukt. II: Spez. Ausführung. IV, 2. II. Heft 5.
Wien, W., elektromagn. Lichttheorie. V, 3. Heft 1.
—— Theorie d. Strahlung. V, 3. Heft 2.
Wilkens, A., u. F. K. **Ginzel**, Theorie der Finsternisse. VI, 2. Heft 3.
Willers, Fr. A., u. C. **Runge**, num. u. graph. Quadratur u. Integration gewöhnlicher u. partieller Differentialgleich. II, 3. Heft 2.
Wiman, A., endliche Gruppen linearer Substitutionen. I. Heft 5.
Wirtinger, W., algebr. Funkt. u. ihre Integrale. II, 2. Heft 1.
—— u. J. **Harkneß**, ellipt. Funkt. II, 2. Heft 2/3.
—— u. A. **Krazer**, Abelsche Funktionen u. allgem. Thetafunktionen. II, 2. Heft 5
Wirtz, C W., geogr. Ortsbestimmung. Nautische Astronomie. VI, 2. A. Heft 1.
Zacharias, M., Elementargeometrie u. elementare nichteuklid. Geometrie in synthetischer Behandlung. III, 1. Heft 5/6.
v. **Zeipel**, H., Entwickl. der Störungsfunkt. VI, 2. A. Heft 5.
Zemplén, G., Besondere Ausführungen über unstetige Beweg. in Flüssigk. IV, 2. I. Heft 3.
Zenneck, J., Gravitation. V, 1. Heft 1.
Zermelo, E., u. H. **Hahn**, Weiterentwicklung der Variationsrechn. in d. letzten Jahren. II, 1. Heft 5.
Zeuthen, H. G, abzähl. Methoden. III, 2. Heft 3.
Zindler, K., algebraische Liniengeometrie. III, 2. Heft 8.
Zoretti, L., u. A. **Rosenthal**, die Punktmengen. II, 3. Heft 7.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH