

PHYSIK

EIN LEHRBUCH

VON

WILHELM H. WESTPHAL

VIERTE AUFLAGE

PHYSIK

EIN LEHRBUCH

VON

WILHELM H. WESTPHAL

A. O. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

VIERTE AUFLAGE

MIT 619 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1937

ISBN 978-3-662-35580-0 ISBN 978-3-662-36409-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36409-3

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1937 BY SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN 1937
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 4TH EDITION 1937

Vorwort zur vierten Auflage.

Die Zeit seit dem Erscheinen der dritten Auflage ist zu einer tiefgehenden Umarbeitung und Verbesserung dieses Buches benutzt worden. Es tritt nunmehr in großen Teilen als ein ganz neues Buch vor seine Leser. Meine Bemühungen gingen vor allem dahin, ohne nennenswerte Vergrößerung des Umfanges durch eine knappere und dennoch leicht faßliche Darstellung Raum für eine wesentliche Vermehrung des mitgeteilten Stoffes zu gewinnen.

Die gründlichste Wandlung hat der erste Teil des Buches erfahren. Mit Ausnahme ganz weniger Seiten habe ich das 1. und 2. Kapitel vollkommen neu geschrieben und vor allem das 1. Kapitel mit fast durchweg neuen Abbildungen ausgestattet. Dabei hat die Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper eine ganz neue Darstellung gefunden. Ich bin zu der Überzeugung gekommen, daß man unmöglich eine kurze und doch einwandfreie und für den akademischen Anfänger verständliche Einführung in die Mechanik geben kann, wenn man nicht entschlossen von dem Hilfsmittel des Vektorbegriffs Gebrauch macht. Eine Kenntnis der eigentlichen Vektorrechnung ist dabei gänzlich unnötig. Es wird vom Leser nicht mehr erwartet, als daß er die wirklich höchst einfachen Begriffe des vektoriellen und des skalaren Produkts zur Kenntnis nimmt. Auf dieser Grundlage konnte dann auch die Darstellung der Elektrodynamik (6. Kapitel) an vielen Stellen verbessert und vereinfacht werden. Die grundlegenden Fortschritte der Quanten- und Kernphysik in den letzten Jahren machten es notwendig, auch das 9. Kapitel vollständig neu zu schreiben. Neu ist ferner u. a. eine kurze Darstellung der Systematik der Kristalle. Aber auch in den übrigen Kapiteln wurden große Teile neu abgefaßt. Die Zahl der Abbildungen wurde von 503 auf 619 vermehrt.

Mit besonderer Sorgfalt habe ich mich um die Ausmerzung entbehrlicher Fremdwörter bemüht. Doch dürfte unter den deutschen Physikern Einigkeit darüber bestehen, daß solchem Bestreben Grenzen gesetzt sind, die nicht ohne Schaden überschritten werden können.

Ogleich also dieses Buch sehr tiefgehende Änderungen erfahren hat, — von denen ich hoffe, daß sie durchweg als Verbesserungen begrüßt werden —, ist meine Einstellung zu der Aufgabe, die ich mir gestellt habe, durchaus die alte geblieben. Ich möchte mit diesem Buch einen nützlichen Beitrag zur Heranbildung des deutschen Physikernachwuchses leisten, — eine Aufgabe, die für den Fortschritt unseres Vaterlandes heute dringlicher ist, denn je. Ich glaube, daß das nur so geschehen kann, daß man dem werdenden Physiker die Physik von Anfang an so darstellt, wie sie die gereifte Physikergeneration sieht. Nur so gewinnt der junge Physiker ein richtiges Bild von seiner künftigen Arbeit und Aufgabe. Ich halte es nicht für richtig, offene Fragen oder Meinungen, die noch hypothetisch sind, dem Leser grundsätzlich zu verschweigen, denn hier handelt es sich ja gerade um die Dinge, die im Brennpunkt der fortschreitenden Forschung stehen. Der junge Physiker soll wissen, daß es auch für ihn noch genug zu leisten und neues zu finden geben wird. Zu den erkenntniskritischen Problemen der Physik habe ich jetzt häufiger und entschiedener Stellung genommen als früher. Ich weiß wohl, daß die Meinungen in dieser Hinsicht noch geteilt sind. Ich halte diese Fragen aber für zu wichtig, um sie in einem Lehrbuch für Studenten ganz zu verschweigen.

Die Ansprüche an das mathematische Wissen der Leser gehen nach wie vor nicht über den Rahmen der Schulmathematik hinaus. Man kann aber unser physikalisches Tatsachenwissen in seiner Fülle weder zweckmäßig ordnen, noch es in einem Lehrbuch in erlernbarer Weise lehren, wenn man sich nicht in einem gewissen Umfange des einzigartigen Hilfsmittels der mathematischen Formulierung bedient. In einer Vorlesung über Experimentalphysik ist das schon weit eher möglich. Aber ein Lehrbuch und eine Vorlesung unterliegen vollkommen verschiedenen pädagogischen Gesetzen. Wer sich vor einfachen Differentialquotienten und Integralen fürchtet, wird in der Physik kaum über ein ziemlich elementares Wissen hinausgelangen oder jedenfalls nur sehr schwer zu einem tieferen Verständnis der großen inneren Zusammenhänge kommen.

Wiederum habe ich zahlreichen Lesern für Hinweise und Anregungen zu danken. Für die vierte Auflage bitte ich um das gleiche freundliche Interesse. Herrn Dipl.-Ing. W. WALCHER, Berlin, schulde ich für seine wertvolle Mitarbeit bei der Korrektur lebhaften Dank, ebenso dem Verlage, der diese Auflage in verbesserter Ausstattung erscheinen ließ.

Berlin, im Januar 1937.

WILHELM H. WESTPHAL.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	I
1. Kapitel. Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper	8
I. Bewegungslehre	8
II. Die Lehre von den Kräften	20
III. Die allgemeine Gravitation	106
2. Kapitel. Mechanik der nichtstarrten Körper	113
I. Die Materie	113
II. Die Elastizität der festen Stoffe	115
III. Mechanik ruhender Flüssigkeiten	119
IV. Mechanik ruhender Gase	130
V. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase.	150
VI. Schwingungen und Wellen. Akustik.	160
3. Kapitel. Wärmelehre.	198
I. Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie	198
II. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen	215
III. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit.	237
4. Kapitel. Elektrostatik.	253
5. Kapitel. Elektrische Ströme.	284
I. Elektrische Ströme in festen Leitern	284
II. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern	306
III. Elektrische Ströme in Gasen	319
6. Kapitel. Magnetismus und Elektrodynamik.	332
I. Magnetische Felder im Vakuum.	332
II. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe.	369
III. Elektromagnetische Geräte und Maschinen	393
IV. Wechselstrom. Elektrische Schwingungen und Wellen.	407
7. Kapitel. Optik und allgemeine Strahlungslehre.	430
I. Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung	430
II. Geometrische Optik	439
III. Wellenoptik	471
IV. Das elektromagnetische Spektrum.	504
V. Temperaturstrahlung und Lumineszenz.	519
8. Kapitel. Relativitätstheorie.	527
9. Kapitel. Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle	541
I. Quantentheorie des Lichtes.	541
II. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik	547
III. Atomkerne. Positronen. Neutronen. Ultrastrahlung	586
IV. Kristalle	603
Schlußwort	611
Namenverzeichnis.	612
Sachverzeichnis	614

I. Universelle und Atomkonstanten.

Gravitationskonstante G	$6,685 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$
LOSCHMIDTSche Zahl N	$6,065 \cdot 10^{23}$
AVOGADROSche Zahl bei Normalbedingungen	$2,706 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$
BOLTZMANNsche Konstante k	$1,3708 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1}$
Allgemeine Gaskonstante $R = Nk$	$8,3144 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1}$ $= 1,9864 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$
Elektrisches Elementarquantum	$4,770 \cdot 10^{-10} \text{ e.s.E.}$ $= 1,591 \cdot 10^{-19} \text{ int. Coul.}$
Ruhmasse des Elektrons	$0,9033 \cdot 10^{-27} \text{ g}$
Ruhmasse des Protons	$1,6606 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Ruhmasse des Neutrons	$1,662 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Spezifische Ladung des Elektrons	$5,280 \cdot 10^{17} \text{ e.s.E.} \cdot \text{g}^{-1}$ $= 1,768 \cdot 10^8 \text{ Coul} \cdot \text{g}^{-1}$
Spezifische Ladung des Protons	$2,872 \cdot 10^{14} \text{ e.s.E.} \cdot \text{g}^{-1}$
Protonenmasse : Elektronenmasse	$1838,3$
Masse des Wasserstoffatoms ${}^1\text{H}$	$1,6615 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Atomgewicht des Elektrons	$1/1824,8 = 5,479 \cdot 10^{-4}$
Atomgewicht des Protons	$1,00721$
Atomgewicht des Wasserstoffatoms ${}^1\text{H}$	$1,00776$
Masse eines Atoms vom Atomgewicht A	$A \cdot 1,649 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
FARADAY-Konstante für 1 Mol	$2,8930 \cdot 10^{13} \text{ e.s.E.} \cdot \text{g}^{-1}$ $= 0,96494 \cdot 10^5 \text{ int. Coul.} \cdot \text{g}^{-1}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c	$2,99776 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$
Wirkungsquantum h	$6,544 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$
RYDBERG-Konstante R	$1,09737 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$
Feinstrukturkonstante	$1/137,3 = 0,7283 \cdot 10^{-3}$
COMPTON-Wellenlänge	$0,2420 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$

II. Sonstige Konstanten.

Schwerebeschleunigung in 45° Breite	$980,616 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$
Absoluter Nullpunkt	$- 273,16 \text{ }^\circ\text{C}$
Molvolumen der idealen Gase bei Normalbedingungen	$22414,5 \text{ cm}^3$
Mechanisches Wärmeäquivalent	$4,1855 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{cal}^{-1}$ $= 0,42681 \text{ mkg}^* \cdot \text{cal}^{-1}$
1 intern. Ampere bzw. Coulomb	$0,99993 \text{ abs. Amp. bzw. Coul.}$
1 intern. Ohm	$1,00046 \text{ abs. Ohm}$
1 intern. Volt	$1,00039 \text{ abs. Volt}$

III. Energieumrechnungstabelle.

Energie $kT/2$ eines Freiheitsgrades bei der Temperatur T	$T \cdot 0,6854 \cdot 10^{-16} \text{ erg}$
Energie eines durch U int. Volt beschleunigten Elektrons	$U \cdot 1,591 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$
Geschwindigkeit eines durch U int. Volt beschleunigten Elektrons	$\sqrt{U} \cdot 5,936 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$
Energie eines Lichtquants	$\nu \cdot 6,544 \cdot 10^{-27} \text{ erg}$ $= N \cdot 1,962 \cdot 10^{-18} \text{ erg}$
Energieäquivalent mc^2 der Masse 1 g	$8,9910 \cdot 10^{20} \text{ erg}$
Energieäquivalent mc^2 des Elektrons	$0,8122 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$
Energieäquivalent mc^2 des Protons	$1,493 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$
Masse eines Lichtquants	$\nu \cdot 0,7278 \cdot 10^{-47} \text{ g}$ $= N \cdot 2,182 \cdot 10^{-37} \text{ g}$
Massenäquivalent von 1 erg	$1,1122 \cdot 10^{-21} \text{ g}$

IV. Konstanten der Erde, der Sonne und des Mondes.

Mittlerer Erdradius	$6,370 \cdot 10^8$ cm
Erdoberfläche	$0,5049 \cdot 10^{19}$ cm ²
Masse der Erde	$5,97 \cdot 10^{27}$ g
Mittlere Dichte der Erde	$5,52$ g · cm ⁻³
Sterntag	86164 sec
Bahngeschwindigkeit der Erde	$2,98 \cdot 10^6$ cm · sec ⁻¹
Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Äquator	$4,65 \cdot 10^4$ cm · sec ⁻¹
Winkelgeschwindigkeit der Erde	$0,7292 \cdot 10^{-4}$ sec ⁻¹
Masse des Mondes = 1/81 Erdmasse	$7,4 \cdot 10^{25}$ g
Abstand Erde-Mond = 60,27 Erdradien	$3,84 \cdot 10^{10}$ cm
Radius der Sonne	$6,96 \cdot 10^{10}$ cm
Masse der Sonne	$1,97 \cdot 10^{33}$ g
Abstand Erde-Sonne	$1,495 \cdot 10^{13}$ cm

Einleitung.

1. **Die Physik im Rahmen der Naturwissenschaften.** Das Wort Physik bedeutet allgemein Naturlehre oder Naturwissenschaft. In der Tat beansprucht die Physik eine Zuständigkeit auf allen Wissensgebieten, die man als die Naturwissenschaften bezeichnet, die Erscheinungen der belebten Natur nicht ausgenommen. Die Aufteilung der Naturwissenschaft in die einzelnen Naturwissenschaften hat weitgehend äußere Gründe. Die einzelnen Zweige der Naturwissenschaft haben ein sehr verschiedenes Alter. So wurden z. B. Astronomie und Erdkunde schon im Altertum betrieben. Die Physik dagegen ist fast ganz ein Kind der Neuzeit. Sie beginnt, von wenigen Ansätzen in früherer Zeit abgesehen, erst um die Zeit GALILEIS (1564—1642), der als der eigentliche Schöpfer ihrer Methodik anzusehen ist. Als gegen Ende des 18. Jahrhunderts die Chemie bereits hoch entwickelt war, bildete nur die Mechanik ein theoretisch abgeschlossenes Gebiet der Physik. Infolge dieses sehr verschiedenen Entwicklungsstandes blieb der untrennbare Zusammenhang der Naturwissenschaften lange Zeit verborgen und wurde erst allmählich in vollem Umfange erkannt. Die auch heute noch bestehende Aufteilung der Naturwissenschaft in Teilgebiete hat vor allem praktische Gründe. Erstens ist eine wirkliche Beherrschung der gesamten Naturwissenschaft heute für einen einzelnen unmöglich. A. VON HUMBOLDT (1769—1859) war wohl einer der letzten, die noch den größten Teil des naturwissenschaftlichen Wissens ihrer Zeit in sich zu vereinigen vermochten. Zweitens aber zwingt die sehr verschiedene Arbeitsweise der Teilgebiete ganz von selbst eine Arbeitsteilung auf. Nicht minder als der Gegenstand der Forschung ist heute die Methode der Forschung ein Merkmal der einzelnen Teilgebiete der Naturwissenschaft. Die Erforschung der Atome und Moleküle — früher alleinige Aufgabe der Chemie — wurde in dem Augenblick auch zu einer der wichtigsten Aufgaben der Physik, in dem ihre Methoden erlaubten, sie erfolgreich anzugreifen.

Bezüglich ihrer Methodik kann man zwei Typen von Naturwissenschaften unterscheiden. Die ursprüngliche Methode beruht auf der *Beobachtung* der Vorgänge, wie sie sich in der Natur von selbst, ohne menschliches Zutun, abspielen. Ein Teil der Naturwissenschaften beruht auch heute noch auf dieser Grundlage, wie z. B. die Astronomie und die Meteorologie. Ihre Arbeitsstätte ist das *Observatorium*. Erst in einer späteren Phase begann man, Vorgänge zum Zweck ihrer Untersuchung künstlich hervorzurufen, um die Gesetzmäßigkeiten ihres Ablaufs zu untersuchen. Man erfand das *Experiment*, und so entstand das *Laboratorium*. Die eigentlichen Vertreter der *experimentellen Naturwissenschaften* sind die Physik und die Chemie. Das schließt nicht aus, daß auch in den anderen Naturwissenschaften, so z. B. in der Biologie, das Experiment eine ständig wachsende Bedeutung erhält. Es schließt andererseits nicht aus, daß sich die Physik auch der Ergebnisse der beobachtenden Wissenschaften zu ihrem Fortschritt bedient oder sich mit ihrer Deutung befaßt. Seitdem NEWTON den Blick des Physikers von der Erde zu den Sternen erhob,

gehören die astronomischen Beobachtungen zu dem wichtigsten Tatsachenmaterial, auf das sich die Physik gründet.

Wegen dieser engen Verknüpfung der gesamten Naturwissenschaft mit der Physik und wegen der unbestreitbaren Zuständigkeit der Physik auf allen Gebieten der Naturwissenschaft ist für den Physiker ein gewisses Maß *allgemeiner naturwissenschaftlicher Bildung unerlässlich*. Er muß jeden Augenblick bereit sein, die Bedeutung eines Ergebnisses einer Nachbarwissenschaft für die Physik oder die Anwendbarkeit physikalischer Methoden auf eine der Physik bisher fremde Frage zu erkennen. Er muß hierzu fähig sein, obgleich die Breite der heutigen Physik ihn schon in seiner eigenen Wissenschaft zu einer gewissen Einseitigkeit zwingt. Gegen diesen Zwang bildet eine allgemeine naturwissenschaftliche Bildung ein sehr wirksames Gegengewicht.

Das experimentelle Tatsachenmaterial der Physik ist unübersehbar groß. Sein Wert für die Naturerkenntnis wäre äußerst beschränkt, wenn es nicht sinnvoll geordnet und in einen großen inneren Zusammenhang gestellt würde. Die Aufgabe, diese Ordnung zu vollziehen, die großen Zusammenhänge in Gestalt von mathematisch formulierten Theorien zu erkennen und zu gestalten, fällt der *theoretischen Physik* zu. Diese Theorien sind auch das wichtigste Mittel, um neue, bisher noch nicht beobachtete Tatsachen und Zusammenhänge vorherzusagen und damit zu neuen experimentellen Fragestellungen und neuen Erkenntnissen zu gelangen. Sie ermöglichen es der Physik, ihren Fortschritt planvoll zu gestalten. So besteht eine unentbehrliche Wechselwirkung zwischen der theoretischen und der experimentellen Physik; die eine ist ohne die andere nicht denkbar.

Die Wurzel der physikalischen Forschung ist der reine Erkenntnistrieb, also eine ganz idealistische Motiv. Aus der *Anwendung* physikalischer Forschungsergebnisse aber entstand die *Technik*. Durch die Fülle der Fragestellungen, die seitdem von der Technik ständig neu aufgeworfen werden, erwächst der Physik eine außerordentliche Anregung und Förderung. Der *technische Physiker* hat die Aufgabe, die Erkenntnisse und Fortschritte der Physik für die Technik nutzbar zu machen. Seine wichtigsten Aufgaben liegen dort, wo neue physikalische Erfahrungen erst auf die Bedürfnisse der Technik zugeschnitten werden sollen, wo die Technik Vorstöße in Neuland zu machen versucht. Darum bedarf auch der technische Physiker eines umfassenden physikalischen Wissens, das ihn befähigt, sich jederzeit einer neuen Aufgabe zuzuwenden.

2. Ursache und Wirkung. Eine Erkenntnis hat nur dann wissenschaftlichen Sinn und Wert, wenn sie sowohl räumlich wie zeitlich Bedeutung über den Einzelfall hinaus hat, d. h., wenn sie uns Schlüsse erlaubt über Vergangenes wie Künftiges, über räumlich Nahes wie räumlich Entferntes. Die Möglichkeit einer auf solchen Erkenntnissen aufgebauten Naturwissenschaft ist gewährleistet, wenn wir es als sicher unterstellen können, daß zwischen Ursache und Wirkung stets und überall eine eindeutige Verknüpfung besteht, daß also die *gleiche Ursache* in jedem Fall die *gleiche Wirkung* hat. Die Behauptung, daß dies zutrifft, heißt das *Kausalitätsgesetz*. Auf die unbezweifelte absolute Geltung dieses Gesetzes ist nicht nur der gesamte Bau der Naturwissenschaften ursprünglich gegründet worden, sondern sie bildet überhaupt eine Voraussetzung für ein geordnetes menschliches Dasein. In der Tat bewährt sich das Kausalitätsgesetz unter den Verhältnissen des täglichen Lebens und in weiten Bereichen des Naturgeschehens mit jeder beliebigen Genauigkeit. Es kann genauer so ausgesprochen werden: *Sind in einem bestimmten Augenblick sämtliche Zustandsgrößen aller an einem Naturvorgang beteiligten Dinge bekannt, so ist dadurch sein weiterer Ablauf vollständig bestimmt* oder, wie man auch sagt, *determiniert*.

Wir wissen heute, daß das Kausalitätsgesetz nur auf Körper anwendbar ist, die aus sehr zahlreichen Atomen bestehen. (Sie können darum aber doch im alltäglichen Sinne noch *sehr* klein sein.) Bei den Vorgängen an den einzelnen Atomen und ihren Bausteinen ist das Walten einer Kausalität grundsätzlich nicht nachweisbar, auch wenn es etwa vorhanden sein sollte. Im Bereich dieser Erscheinungen ist also das Kausalitätsgesetz keine Grundlage der Physik (§ 356).

3. Physikalische Gesetze. Wie bereits gesagt, zieht die Physik ihre Erkenntnisse nur in seltenen Fällen aus der Beobachtung von Vorgängen, die sich in der Natur von selbst, ohne menschliches Zutun, abspielen. Meist sind diese Naturvorgänge zu verwickelt und durch mehrere verschiedene, oft schwer übersehbare Ursachen gleichzeitig bedingt, so daß die einfachen Gesetzmäßigkeiten nicht klar genug zutage treten. Im Experiment wird versucht, Bedingungen zu schaffen, bei denen die Wirkung einer in ihren Einzelheiten möglichst genau bekannten Ursache in möglichst klar beobachtbarer Form erscheint. Man hat das Experiment oft eine „*Frage an die Natur*“ genannt, durch deren Beantwortung sie dem Menschen Einblick in ihre Gesetzmäßigkeiten gewährt.

Das Ergebnis eines Experiments ist die Feststellung von zahlenmäßigen Beziehungen zwischen physikalischen Größen, z. B. Längen, Zeiten, Temperaturen usw. Man stellt fest, welche Beträge die Maßzahl y einer in den Versuch eingehenden Größe nacheinander annimmt, wenn man einer zweiten, willkürlich veränderlichen Größe nacheinander bestimmte Beträge x verleiht. Aus diesen Messungen entsteht ein physikalisches Gesetz, wenn es gelingt, die so gefundene Zuordnung bestimmter Beträge y zu bestimmten Beträgen x in die Gestalt einer mathematischen Beziehung $y = f(x)$ zu kleiden. Ein physikalisches Gesetz kann also durchweg als Gleichung zwischen zwei oder mehreren Veränderlichen ausgesprochen werden. Will man z. B. die Gesetze des freien Falles untersuchen, so mißt man die Zeiten t , die ein Körper zum Durchfallen verschieden großer Strecken s benötigt. Man erhält so eine Reihe von je zwei einander zugeordneten Maßzahlen für s und t , und es ergibt sich in diesem Fall, daß das gesuchte Gesetz in der Gestalt $s = f(t) = at^2$ ausgesprochen werden kann, d. h. daß die Fallstrecken s den Quadraten der Fallzeiten t proportional sind. Dabei ist a eine konstante Größe, deren *Bedeutung* man aus anderweitigen Überlegungen oder Versuchen erschließen muß, deren *Betrag* aber aus den durch das Experiment gewonnenen Zahlen berechnet werden kann. (Man gewöhne sich daran, physikalische Gesetze, soweit irgend möglich, auch in Gleichungsform auszusprechen, weil sie darin ihren kürzesten und meist ihren klarsten Ausdruck finden.)

Ein Gesetz, welches auf Grund zuverlässig beobachteter physikalischer Erscheinungen aufgestellt worden ist, kann grundsätzlich nie umgestoßen werden. Es kann aber geschehen, daß eine Verfeinerung der Beobachtungsmittel oder eine Ausdehnung des Beobachtungsbereiches in eine andere Größenordnung der in Frage stehenden Erscheinung zu der Erkenntnis führt, daß das betreffende Gesetz nur eine für den früheren Beobachtungsbereich mit sehr großer Annäherung ausreichende Geltung hat. Das vervollkommnete Gesetz aber muß immer das frühere Gesetz als Sonderfall in sich enthalten. Es handelt sich also in solchen Fällen stets um eine Erweiterung eines schon bekannten Gesetzes bzw. um eine Einschränkung seines Gültigkeitsbereiches (vgl. z. B. das NEWTONsche und das EINSTEINSche Gravitationsgesetz, § 331).

Das Wort Gesetz gründet sich gewissermaßen auf die Vorstellung, daß irgendeine unfehlbare Macht diese Gesetze gegeben habe, derart, daß jedes Geschehen in der Welt gezwungen ist, sich vollkommen danach zu richten.

Im Gegensatz zu den Gesetzen der menschlichen Gesellschaft sind die Naturgesetze absolut bindend. Wir sind vollkommen gewiß, daß da, wo wir in der Natur einen Widerspruch gegen ein bisher als sicher gültig angesehenes Gesetz entdecken, nicht die Natur einen Verstoß begangen hat, sondern daß wir dieses Gesetz noch nicht in vollem Umfange richtig erkannt haben.

Die fortschreitende Erfahrung hat gezeigt, daß die große Zahl von physikalischen Gesetzen, die sich zunächst aus der experimentellen Untersuchung der verschiedenen Naturerscheinungen ergeben, sich erheblich dadurch verringert, daß jeweils viele von ihnen Sonderfälle einer weit kleineren Zahl von sehr allgemeinen physikalischen Gesetzen sind. Es werden also die Vorgänge im *gesamten* unserer Beobachtung zugänglichen Weltall von einer verhältnismäßig kleinen Zahl von allgemeinen physikalischen Gesetzen beherrscht. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Entwicklung der Physik in dieser Richtung noch lange nicht abgeschlossen ist.

Eine Hypothese ist eine Deutung einer physikalischen Tatsache, welche noch der endgültigen Bestätigung bedarf, welche aber vor dem Beweis des Gegenteils am meisten geeignet scheint, irgendwelche Beobachtungen zu erklären. Der wissenschaftliche Wert der Hypothesen besteht darin, daß sie der Forschung Hinweise geben, welcher Art die Experimente sein müssen, die zu einem endgültigen Verständnis der noch nicht restlos geklärten, in Frage stehenden Erscheinung führen können. Im Laufe der Zeit kommt es stets dahin, daß eine Hypothese entweder verworfen werden muß, oder daß sie die Sicherheit eines Gesetzes erlangt, eine feststehende physikalische Tatsache wird. So war z. B. bis vor nicht allzu langer Zeit die Behauptung, daß alle Stoffe aus Atomen aufgebaut seien, eine Hypothese. Heute ist sie eine unumstößliche physikalische Tatsache.

Da die durch irdische Beobachtungen und Versuche erkannten Gesetze im gesamten Weltall gültig sind, so haben sie es ermöglicht, auch die Vorgänge an den Gestirnen in ihren wesentlichen Zügen zu verstehen. Darüber hinaus liefern aber die Astronomie und Astrophysik eine Fülle von Beobachtungsmaterial, das wir auf der Erde nie gewinnen könnten, und das sich in neuester Zeit als außerordentlich fruchtbar für den Fortschritt der physikalischen Erkenntnis erwiesen hat.

4. Physikalische Messungen. Physikalische Gesetze entstehen aus Zahlenbeziehungen zwischen physikalischen Größen. Solche Beziehungen sind deshalb möglich, weil man jeder physikalischen Größe eine *Maßzahl* zuordnen kann, welche angibt, wie oft eine bestimmte — der betreffenden Größe dem Wesen nach gleiche — *Maßeinheit* in ihr enthalten ist. Jede Messung einer physikalischen Größe bedeutet demnach einen Vergleich dieser Größe mit der gewählten Maßeinheit. Die Wahl der Maßeinheit ist an sich willkürlich und nur durch praktische Gesichtspunkte bestimmt; sie hat natürlich keinen Einfluß auf den Inhalt eines physikalischen Gesetzes. Die Beschreibung einer physikalischen Größe besteht also in der Angabe ihrer Maßzahl und der gewählten Maßeinheit. Ein Wechsel der Maßeinheit führt auch einen Wechsel der Maßzahl herbei (z. B. 1 km = 1000 m). Je größer die Maßeinheit ist, um so kleiner ist die Maßzahl.

Ein *unmittelbarer* Vergleich einer Größe mit ihrer Maßeinheit ist nur in den seltensten Fällen möglich. Längen können zwar mit der Längeneinheit durch Aneinanderlegen unmittelbar verglichen werden; Zeiten können durch Zählen von Metronomschlägen oder anderen periodisch wiederkehrenden Ereignissen unmittelbar gemessen werden. Aber dies ist nicht die übliche Art der Zeitmessung. Für gewöhnlich messen wir die Zeit mit der Uhr, indem wir die Stellung des

Zeigers auf dem Zifferblatt ablesen. Und von der gleichen Art sind fast alle physikalischen Messungen; sie sind durchweg *Zeigerablesungen*, d. h. Ablesungen der Stellung irgendeiner beweglichen Marke auf einer Skala. Beispiele sind die Waage, die elektrischen Meßgeräte, das Barometer usw. Die Zeigerstellung wird durch den *Abstand* des Zeigers von einem bestimmten Punkt, dem „Nullpunkt“ der Skala, beschrieben. Demnach werden alle Messungen fast durchweg auf eine Abstandsmessung, also eine *Längenmessung*, zurückgeführt. So messen wir Zeiten in Wirklichkeit durch die Länge eines von der Zeigerspitze zurückgelegten Weges. Aus diesem Grunde sind die Längenmessungen in der Physik von ganz besonderer Bedeutung.

Die Maßeinheiten der Physik sind wegen ihrer außerordentlichen Wichtigkeit für das tägliche Leben zum großen Teil nicht nur in allen Kulturländern gesetzlich festgelegt, sondern auch international vereinbart. Ursprünglich liegt ihnen allen eine *wissenschaftliche Definition* zugrunde. So ist das Meter ursprünglich als der zehnmillionte Teil der Länge eines Erdquadranten (Abstand Pol—Äquator, gemessen auf einem Längengrad) definiert. Die *internationale und gesetzliche Definition* bezieht sich aber auf ein in Paris aufbewahrtes Meternormal, „das Urmeter“, das mit dem wissenschaftlich definierten Meter so gut übereinstimmt, wie es die Meßtechnik zur Zeit seiner Herstellung zuließ. Ähnlich steht es mit den übrigen Einheiten. Nun wird die ständig fortschreitende Verfeinerung der Meßtechnik im Laufe der Zeit oft geringe Unterschiede zwischen der wissenschaftlichen und der gesetzlichen Einheit feststellen. Jedoch wird die gesetzliche Einheit deshalb meist nicht geändert, da ja auch die kleinen Unterschiede für die Praxis des täglichen Lebens völlig belanglos sind. In der Physik ist es jedoch bei der Auswertung von sehr genauen Messung gelegentlich nötig, diesen Unterschied zu beachten.

Häufig werden von den ursprünglichen Einheiten andere Einheiten abgeleitet. So bedeutet die Vorsilbe Kilo, abgekürzt k, das tausendfache der Einheit ($1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$), die Vorsilbe Milli, abgekürzt m, den tausendten Teil der Einheit ($1 \text{ mg} = \frac{1}{1000} \text{ g}$). Die Vorsilbe Mega, abgekürzt M, bedeutet das millionenfache, die Vorsilbe Mikro, abgekürzt μ , den millionten Teil der Einheit ($1 \text{ MVolt} = 10^6 \text{ Volt}$, $1 \mu\text{Volt} = 10^{-6} \text{ Volt}$). In der Physik ist es aber oft zweckmäßiger, beim Auftreten von unbequem großen oder kleinen Maßzahlen keinen Wechsel der Maßeinheit vorzunehmen, sondern die ursprüngliche Maßeinheit zu benutzen und die Maßzahl als das Produkt einer der 1 nahen Zahl mit einer Zehnerpotenz zu schreiben, z. B. $1,53786 \cdot 10^6 \text{ cm}$ statt $15,3786 \text{ km}$ oder $0,85 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ statt $0,85 \text{ mg}$.

5. **Längen. Winkel. Zeiten.** Die *Längeneinheit* der Physik ist 1 Zentimeter (cm), d. h. $\frac{1}{100}$ der Länge des Meters (m), dessen Länge durch das Urmeter (mètre des archives, § 4) definiert ist. Weitere oft benutzte, vom Meter abgeleitete Längeneinheiten sind das Kilometer (km) $= 10^3 \text{ m} = 10^5 \text{ cm}$ und das Millimeter (mm) $= 10^{-3} \text{ m} = 10^{-1} \text{ cm}$. Die Physik bedient sich ferner der Einheiten 1 Mikron (μ) $= 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm}$, 1 Millimikron (m μ) $= 10^{-9} \text{ m} = 10^{-7} \text{ cm}$ und 1 $\mu\mu$ (gesprochen Mymy) $= 10^{-12} \text{ m} = 10^{-10} \text{ cm}$. In der Optik sind ferner die Einheiten 1 Ångströmeinheit (Å) $= 10^{-8} \text{ cm}$ und 1 X-Einheit $= 10^{-11} \text{ cm}$ gebräuchlich. Astronomische Längeneinheiten sind 1 Lichtjahr und 1 parsec (Sternweite). 1 Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in 1 Jahr zurücklegt; es beträgt $0,94608 \cdot 10^{13} \text{ km}$. 1 parsec ist die Entfernung, aus der gesehen der Durchmesser der Erdbahn um die Sonne unter einem Winkel von 1" erscheint; es beträgt $3,06662 \cdot 10^{13} \text{ km} = 3,26 \text{ Lichtjahre}$.

Wird der Ort einer Strichmarke auf einer Millimeterteilung zur Ablesung einer Einstellung benutzt, so bedient man sich zur Erhöhung der Ablesegenauigkeit oft eines *Nonius* (Abb. 1). In diesem Falle bildet die Ablesemarke

den Nullstrich (C) einer der Hauptskala AB parallelen und an ihr entlang verschiebbaren Nebenskala CD , deren Teilstriche meist so bemessen sind, daß 9 Teilstriche der Hauptskala gleich 10 Teilstrichen der Nebenskala sind. Am Nullstrich der Skala des Nonius wird abgelesen, zwischen welchen zwei Millimeterzahlen die Ablesung liegt; in der Abbildung liegt sie zwischen 31,0 und 31,1. Die Zehntelmillimeter ermittelt man durch die Feststellung, welcher Teilstrich der Noniuskala mit einem Teilstrich der Hauptskala zusammenfällt. Ist dies z. B., wie in Abb. 1, der 6. Teilstrich, der in diesem Falle mit dem Teilstrich 31,6 der

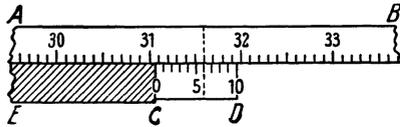


Abb. 1. Nonius.

Hauptskala zusammenfällt (in der Abbildung gestrichelt), so ist dieser sechste Teilstrich $54/10$ Teilstriche vom wahren Einstellungspunkt entfernt. Die richtige Ablesung lautet also $31,6 \text{ cm} - \frac{54}{10} \text{ mm}$ oder $31,06 \text{ cm}$. In dieser Weise gibt die Nummer des Teilstriches der *Nonius-*

skala — in diesem Falle 6 —, der mit irgendeinem Teilstrich der Hauptskala zusammenfällt, die Zehntelmillimeter an.

Bei der mathematischen Behandlung physikalischer Fragen ist es in der Regel zweckmäßig, als *Einheit des Winkels* nicht, wie im praktischen Leben,

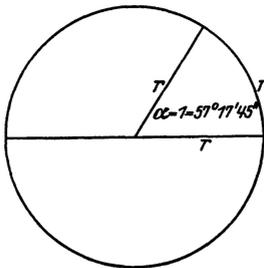


Abb. 2. Einheit des Winkels im Bogenmaß.

1° zu benutzen, sondern die Winkel im *Bogenmaß* zu messen. Bildet der Winkel α den Zentriwinkel eines Kreises vom Radius r , und begrenzen seine Schenkel auf dem Kreisumfang einen Kreisbogen von der Länge s , so beträgt α im Bogenmaß $\alpha = s/r$. Demnach ist $360^\circ = 2\pi$, $90^\circ = \pi/2$. Die Winkeleinheit im Bogenmaß liegt dann vor, wenn $s = r$ (Abb. 2) und beträgt im Gradmaß $360^\circ/2\pi = 57,2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$.

Bei sehr kleinen Winkeln kann man oft mit Vorteil von der Tatsache Gebrauch machen, daß ihr \sin und tg mit großer Annäherung ihrem im Bogenmaß gemessenen Betrage gleich ist, $\sin \psi \approx \psi$, $\text{tg} \psi \approx \psi$. Ferner ist dann $\cos \psi \approx 1 - \psi^2/2 \approx 1$. Zum Beispiel ist $6^\circ = 0,1047$, $\sin 6^\circ = 0,1045$, $\text{tg} 6^\circ = 0,1051$, $\cos 6^\circ = 0,9945$. Der Fehler ist also in vielen Fällen zu vernachlässigen.

Die Gesamtheit aller Strahlen, die einen Punkt im Raum mit allen Punkten der Berandung einer Fläche verbinden, schließen einen *räumlichen Winkel* ein. Sei F ein Stück einer Kugelfläche vom Radius r , so schließen alle Strahlen, die den Mittelpunkt der Kugel mit der Berandung von F verbinden, einen räumlichen Winkel Ω ein, dessen Größe durch die Gleichung

$$F = r^2 \Omega \quad \text{bzw.} \quad \Omega = \frac{F}{r^2}$$

gegeben ist. Da die Größe der gesamten Kugelfläche $F = 4\pi r^2$ beträgt, so ist ein „ganzer“ räumlicher Winkel (analog zum ganzen ebenen Winkel, 360° oder 2π) gleich 4π . Nach obiger Gleichung ist ein räumlicher Winkel gleich der Einheit, $\Omega = 1$, wenn er aus einer um seinen Scheitel beschriebenen Kugelfläche vom Radius r eine Fläche von der Größe r^2 ausschneidet. Dabei ist die Gestalt dieser Fläche ganz beliebig. Gleich große räumliche Winkel können also eine sehr verschiedene Gestalt haben. Ebene und räumliche Winkel sind reine Zahlen, also dimensionslos (§ 44).

Die wissenschaftliche *Zeiteinheit* ist die Sekunde (sec). Sie ist so definiert, daß $60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ sec} = 86400 \text{ sec}$ gleich einem *mittleren Sonnentage* (dem über

ein Jahr genommenen Mittelwert zwischen den Zeiten je zweier aufeinanderfolgender Kulminationen der Sonne) sind. Vom Sonnentag ist der *Sterntag*, der sich aus zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen eines Fixsternes ergibt, zu unterscheiden, weil die Erde bei einem vollen Umlauf um die Sonne bezüglich der Sonne scheinbar eine Umdrehung weniger um sich selbst macht als bezüglich des Fixsternhimmels. (Würde die Erde der Sonne immer die gleiche Seite zukehren, so würde sie sich bei einem vollen Umlauf um die Sonne gegenüber dem Fixsternhimmel einmal in einem Jahre ganz herumdrehen.) Die Dauer eines Sterntages beträgt genau $365,25/366,25$ eines Sonnentages oder 23 Stunden 56 Minuten 4,1 sec mittlerer Sonnenzeit. Für genaue Zeitmessungen benutzt man Pendeluhren mit Gewichtsantrieb, für allergenaueste Quarzuhren.

Der mittlere Sonnentag ist nicht völlig konstant. Aus astronomischen Beobachtungen geht hervor, daß seine Dauer sehr langsamen periodischen Schwankungen in der Größenordnung einiger Sekunden unterworfen ist. Ferner muß angenommen werden, daß die Erdrotation infolge der ständigen Reibung der Flutwelle ganz allmählich abnimmt (§ 47).

Erstes Kapitel.

Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper.

Vorbemerkung zum Studium der Mechanik. Die Mechanik bildet nicht deshalb den Anfang der üblichen Lehrbücher, weil sie der am leichtesten verständliche Teil der Physik wäre, sondern weil sie eine allgemeine Grundlage der Physik darstellt, die in allen Teilgebieten der Physik Anwendung findet. Einzelne Teile der Mechanik bieten für den Anfänger nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten. Es ist ihm daher zu empfehlen, diese Teile beim ersten Studium zunächst zu übergehen und sich nur mit denjenigen Teilen zu beschäftigen, die eine Kenntnis der elementaren Grundbegriffe und Gesetze der Mechanik vermitteln. Die weiteren Teile werden zweckmäßig jeweils dann eingehender studiert, wenn sich im weiteren Verlauf des Studiums dieses Buches eine Anwendung für sie ergibt, bzw. beim erneuten Durcharbeiten des Buches. Insbesondere betrifft dies die §§ 35 und 37—41. Durch die — vielleicht ungewohnte — ausgiebige Verwendung von Vektoren möge sich der Anfänger nicht abschrecken lassen, da er sehr schnell bemerken wird, daß sie ihm das Verständnis außerordentlich erleichtert, sobald er sich mit einigen sehr einfachen Grundbegriffen und Definitionen vertraut gemacht hat.

I. Bewegungslehre.

6. Massenpunkt. Starrer Körper. In diesem Kapitel behandeln wir das Verhalten idealisierter Körper. Erstens führen wir den Begriff des *Massenpunktes* ein. Wir verstehen darunter einen Körper von so geringen Abmessungen, daß wir ihn mit genügender Annäherung als punktförmig ansehen dürfen. Dadurch gewinnen wir den Vorteil, daß wir seine Lage im Raume auf die einfachste Weise, nämlich durch Angabe seiner drei Ortskoordinaten, beschreiben können. Bei einem ausgedehnten Körper ist das so einfach nicht möglich. Auch im täglichen Leben behandeln wir ja sogar recht ausgedehnte Körper oft stillschweigend wie Massenpunkte, z. B. bei der Angabe eines Schiffsortes in geographischer Länge und Breite. Es kommt nur darauf an, daß die Abmessungen des Körpers gegenüber denjenigen des in Frage kommenden Bereiches — beim Schiff der Meeresfläche — so klein sind, daß sie ihnen gegenüber vernachlässigt werden können.

Sofern wir aber berücksichtigen müssen, daß wir es in Wirklichkeit stets mit räumlich ausgedehnten Körpern zu tun haben, werden wir diese hier als *starre Körper* betrachten, indem wir ihnen eine durch äußere Einwirkungen nicht veränderliche Gestalt und Größe zuschreiben.

Wir beginnen mit der Behandlung von Massenpunkten. Den Übergang zu den räumlich ausgedehnten Körpern vollziehen wir, indem wir diese aus beliebig kleinen Teilen — *Massenelementen* — aufgebaut denken, die wir als Massenpunkte ansehen dürfen. In dem wir auf diese die für Massenpunkte gültigen Gesetze

anwenden, ermitteln wir die für ausgedehnte Körper geltenden Gesetze durch Summation (Integration) über den ganzen Raumbereich der Körper.

7. Geradlinige Bewegung. Die Merkmale einer Bewegung sind die *Geschwindigkeit* und die *Beschleunigung* des bewegten Körpers. Wir bezeichnen seine Geschwindigkeit als um so größer, je größer die Strecke ist, die er in einer bestimmten Zeit zurücklegt, und seine Beschleunigung als um so größer, je größer seine Geschwindigkeitsänderung in einer bestimmten Zeit ist. Wir messen daher — vorbehaltlich einer strengeren Definition — die Geschwindigkeit als das Verhältnis des zurückgelegten Weges zu der dazu benötigten Zeit, die Beschleunigung als das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der Zeitspanne, in der sie erfolgt.

Zur Einführung betrachten wir den einfachen Sonderfall einer *geradlinigen Bewegung* eines Massenpunktes. Den jeweiligen Ort des Massenpunktes auf der Geraden beschreiben wir durch seinen Abstand x von einem beliebig wählbaren Bezugspunkt $x = 0$ auf der Geraden. Bewegt sich der Massenpunkt längs der Geraden, so ist sein Ort x eine Funktion der Zeit t . Er befinde sich zur Zeit t im Punkte x , zur Zeit $t + \Delta t$, also um die endliche Zeitspanne Δt später, im Punkte $x + \Delta x$. Dann besitzt er eine um so größere *Geschwindigkeit*, je größer das Verhältnis der Strecke Δx zur Zeitspanne Δt ist, also je größer der Bruch $\Delta x / \Delta t$ ist. Im allgemeinen wird dieser Bruch nicht konstant sein, sondern einen mit Ort und Zeit veränderlichen Betrag haben. Er wird dann aber auch davon abhängen, wie groß man die Zeitspanne Δt wählt, an deren Anfang und Ende man den Ort des Massenpunktes feststellt. Demnach bildet der Bruch $\Delta x / \Delta t$ im allgemeinen noch kein eindeutiges Maß der Geschwindigkeit. Läßt man jedoch die Zeitspanne Δt und damit die Wegstrecke Δx unbeschränkt abnehmen, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, so daß Anfang und Ende der Zeitspanne und Anfang und Ende des Weges beliebig nahe zusammenfallen, — geht man also von den Weg- und Zeitdifferenzen Δx und Δt zu den entsprechenden Differentialen dx und dt über, so nähert sich der Bruch $\Delta x / \Delta t$ einem Grenzwert, dem Differentialquotienten dx/dt , der die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit t am Orte x darstellt. Demnach ist die Geschwindigkeit eines geradlinig bewegten Massenpunktes definiert als der Grenzwert

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Ist die Geschwindigkeit v zeitlich konstant, so bezeichnet man die Bewegung als *geradlinig und gleichförmig*. Ist aber v zeitlich veränderlich, also eine Funktion der Zeit, $v = v(t)$, so heißt die Bewegung *beschleunigt*, und zwar auch dann, wenn die Geschwindigkeit nicht zu-, sondern abnimmt. Ändert sich die Geschwindigkeit v in gleichen Zeitspannen Δt stets um gleiche und gleichgerichtete Beträge Δv , so ist die Bewegung *gleichförmig beschleunigt*. Je größer die Änderung Δv in der Zeitspanne Δt ist, um so größer ist die Beschleunigung, die daher durch den Bruch $\Delta v / \Delta t$ gemessen wird. Ist aber die Beschleunigung nicht konstant, die Bewegung also *ungleichförmig beschleunigt*, so hängt der Bruch $\Delta v / \Delta t$ von der Länge der gewählten Zeitspanne Δt ab. Man erhält dann, genau wie bei der Geschwindigkeit, einen Grenzwert für einen bestimmten Zeitpunkt t , wenn man die Zeitspanne Δt und damit die Geschwindigkeitsänderung Δv unbeschränkt abnehmen läßt, also von den endlichen Differenzen Δv und Δt zu den Differentialen dv und dt übergeht. Demnach wird allgemein die Beschleunigung b eines geradlinig bewegten Massenpunktes definiert als der Grenzwert

$$b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (2)$$

Die physikalische Einheit der Geschwindigkeit ist $1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, die der Beschleunigung $1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$. Die Technik bedient sich der Einheiten $1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ und $1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$.

Es seien x_1 und x_2 die Ortskoordinaten eines Massenpunktes zu den Zeiten t_1 und t_2 . Dann folgt durch Integration der Gl. (1)

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1. \quad (3)$$

Der zurückgelegte Weg $x_2 - x_1$ ist also bei geradliniger Bewegung das zeitliche Integral der Geschwindigkeit. Ist die Bewegung gleichförmig, also v zeitlich konstant, so folgt aus Gl. (3)

$$v(t_2 - t_1) = x_2 - x_1 \quad \text{oder} \quad v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (4)$$

In diesem Sonderfall ist also die Geschwindigkeit der Quotient aus dem in der endlichen Zeitspanne $t_2 - t_1$ zurückgelegten endlichen Wege $x_2 - x_1$ und dieser Zeitspanne.

Entsprechend folgt durch Integration der Gl. (2)

$$\int_{t_1}^{t_2} b dt = \int_{v_1}^{v_2} dv = v_2 - v_1. \quad (5)$$

Ist b konstant, also die Bewegung gleichförmig beschleunigt, so ergibt sich

$$b(t_2 - t_1) = v_2 - v_1 \quad \text{oder} \quad b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (6)$$

In diesem Sonderfall ist also die Beschleunigung b der Quotient aus der in der endlichen Zeitspanne $t_2 - t_1$ erfolgten endlichen Geschwindigkeitsänderung $v_2 - v_1$ und dieser Zeitspanne.

Wir wollen unsere Zeitskala so wählen, daß $t_1 = 0$ ist, und t_2 mit t bezeichnen, so daß auch $t_2 - t_1 = t$ ist. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Massenpunkt am Orte $x = x_0$ und habe die Geschwindigkeit $v = v_0$. Die Beschleunigung b sei zeitlich konstant. Dann ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit t nach Gl. (5)

$$v = v_0 + bt. \quad (7)$$

Sein Ort x zur Zeit t ergibt sich aus Gl. (3) und (7) zu

$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + bt) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} bt^2. \quad (8)$$

Aus Gl. (7) und (8) kann der Ort und die Geschwindigkeit eines geradlinig bewegten, gleichförmig beschleunigten Massenpunktes für jede Zeit t berechnet werden, wenn x_0 , v_0 und b bekannt sind. Auch kann die Geschwindigkeit v in jedem Punkt x der Bahn berechnet werden, indem man die Zeit t aus den Gl. (7) und (8) eliminiert.

Ist die Beschleunigung der Richtung zunehmender Werte von x entgegen gerichtet, so ist b mit negativem Vorzeichen zu versehen. Ebenso bedeutet ein negatives Vorzeichen der Geschwindigkeit v , daß die Bewegung der Richtung zunehmender Werte von x entgegen gerichtet ist.

8. Vektoren. Die physikalischen Größen gliedern sich in zwei Klassen, Skalare und Vektoren. *Skalare* sind Größen, die durch Angabe ihres Betrages, d. h. ihrer Maßzahl und der gewählten Maßeinheit, vollständig beschrieben sind, wie z. B. Rauminhalte, Massen, Temperaturen usw. *Vektoren* sind *gerichtete Größen*. Das heißt, daß zu ihrer vollständigen Beschreibung außer der Angabe

ihres Betrages und der Maßeinheit noch die Angabe einer der betreffenden Größe eigentümlichen *Richtung* gehört, durch die sie sich von anderen Größen gleicher Art und von gleichem Betrage unterscheidet. Ein Beispiel ist die Geschwindigkeit, denn die Richtung ist ein wesentliches Merkmal einer Bewegung. Man kann zwei Geschwindigkeiten von gleichem Betrage, aber verschiedener Richtung nicht im eigentlichen Sinne als gleich bezeichnen, denn sie bewirken durchaus verschiedene Ortsänderungen der bewegten Körper. Die eine ist nicht durch die andere ersetzbar, und gleich sind nur solche Größen, von denen die eine durch die andere ersetzt werden kann, ohne daß das einen Unterschied in der Wirkung hervorbringt. Auch die Beschleunigung ist ein Vektor, denn es ist wesentlich, in welcher Richtung die Geschwindigkeitsänderung eines beschleunigten Körpers erfolgt. Vektoren sind auch die unendlich kleinen Bahnelemente, aus denen sich die Bahn eines bewegten Körpers zusammensetzt. Denn die Bahn eines Körpers hat in jedem Punkte eine bestimmte Richtung, nämlich diejenige der Geschwindigkeit des Körpers in jenem Punkte. Die Richtung eines Bahnelements und der zugehörigen Geschwindigkeit ist diejenige der in dem betreffenden Punkte an die Bahn gelegten Tangente. Bevor wir uns mit den Bewegungen im Raum beschäftigen, wollen wir uns mit den wichtigsten Eigenschaften der Vektoren vertraut machen.

Wir unterscheiden die Vektoren von den Skalaren dadurch, daß wir jene mit deutschen (Fraktur), diese mit lateinischen Buchstaben bezeichnen, z. B. eine Geschwindigkeit mit v , eine Beschleunigung mit b . Der *Betrag eines Vektors*, d. h. die bloße Angabe seiner Maßzahl und der gewählten Maßeinheit, ist ein Skalar. Deshalb bezeichnen wir ihn mit einem lateinischen Buchstaben, und zwar im allgemeinen mit demjenigen, der den betreffenden Vektor in Fraktur als Vektor bezeichnet. So ist v der Betrag einer Geschwindigkeit v , b der Betrag einer Beschleunigung b . Jedoch ist auch die Bezeichnung $|v|$, $|b|$ für die Beträge von Vektoren in Gebrauch.

Einen Skalar kann man graphisch durch eine beliebig gerichtete Strecke darstellen, deren Länge gleich oder proportional der Maßzahl des Skalars ist. Das Symbol eines Vektors hingegen ist ein *Pfeil*, der in die dem Vektor eigentümliche Richtung weist, und dessen Länge dem Betrage des Vektors gleich oder proportional ist.

Die Summe zweier Skalare a und b ist ihre algebraische Summe $a + b$. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Bedeutung wir der Summe (*Vektorsumme*, *Resultierende*, *Resultante*) $a + b$ zweier Vektoren a und b zuzuschreiben haben. Wir wählen als Beispiel zwei beliebig gerichtete Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Man wird von der Summe zweier Geschwindigkeiten dann sprechen, wenn sie dem gleichen Körper gleichzeitig zukommen. Das ist natürlich so zu verstehen, daß sich einer Bewegung des Körpers mit der Geschwindigkeit v_1 eine zweite Bewegung mit der Geschwindigkeit v_2 überlagert, so daß eine aus diesen beiden Teilbewegungen zusammengesetzte Bewegung entsteht. Die Geschwindigkeit v , mit der diese Bewegung erfolgt, werden wir sinngemäß als die Summe $v = v_1 + v_2$ der beiden Teilgeschwindigkeiten v_1 und v_2 bezeichnen. Als Beispiel betrachten wir einen Körper, der sich auf einem mit der Geschwindigkeit v_1 gegenüber dem Wasser bewegten Schiff befindet, und der sich gleichzeitig auf dem Schiff in einer bestimmten Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Der Körper befinde sich in einem bestimmten Augenblick im Punkte A (Abb. 3a). Dann befindet er sich infolge seiner Geschwindigkeit $v = v_1 + v_2$ nach Ablauf von 1 sec im Punkte B . Den gleichen Ort hätte er auch erreicht, wenn er sich zunächst während 1 sec mit der Geschwindigkeit v_1 von A nach C , dann während 1 sec mit der Geschwindigkeit v_2 von C nach B bewegt hätte. Die Verschiebung von A nach B kann als die Summe der Verschiebungen von A nach C

und von C nach B angesehen werden. Man kann demnach den Vektor $v = v_1 + v_2$ so konstruieren, daß man an die Spitze des Vektorpfeils v_1 den Schwanz des Vektorpfeils v_2 anlegt, — unter Beachtung der Richtungen der Vektoren —, und Anfang und Ende des so entstandenen Linienzuges durch einen

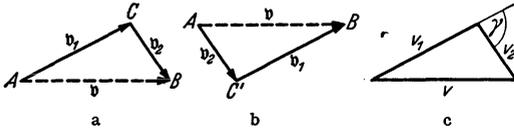


Abb. 3. Addition zweier Vektoren. a) $v = v_1 + v_2$, b) $v = v_2 + v_1$,
c) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \gamma}$.

den Winkel γ (Abb. 3c), so folgt aus dem Kosinussatz, daß, wenn

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{so} \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \gamma}. \quad (9)$$

Die Konstruktion der Abb. 3 kann bei mehr als zwei zu addierenden Vektoren beliebig fortgesetzt werden (Abb. 4), indem man die Vektorpfeile a , b , c usw. in beliebiger Reihenfolge aneinanderfügt und Anfang und Ende des entstandenen Linienzuges durch einen Vektorpfeil $s = a + b + c + \dots$ verbindet. Die

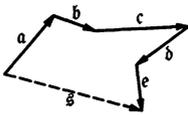


Abb. 4. Addition von mehr als zwei Vektoren, $s = a + b + c + \dots$

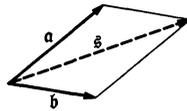


Abb. 5. Parallelogrammkonstruktion.

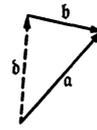


Abb. 6. Differenz zweier Vektoren, $b = a - b$.

Konstruktion gilt auch dann, wenn die einzelnen Vektorpfeile nicht in der gleichen Ebene liegen. (Man denke sich Abb. 4 in irgendeiner Weise als eine räumliche, perspektivisch gezeichnete Figur.)

Bei zwei Vektoren kann man, wie leicht ersichtlich, auch so verfahren, daß man die Vektorpfeile mit ihren Schwänzen aneinanderfügt und die Figur zu einem Parallelogramm ergänzt (Abb. 5). Die von den Schwänzen ausgehende Diagonale des Parallelogramms ist die Vektorsumme $s = a + b$ der Vektoren a und b .

In Abb. 6 ist der Vektor a die Summe der Vektoren b und b , also $a = b + b$. Statt dessen können wir schreiben $b = a - b$. Der Vektor b ist also die Differenz der Vektoren a und b . Hieraus ergibt sich ohne weiteres die Konstruktion der Differenz zweier Vektoren.

Der Vektor $-a$ hat den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie der Vektor a . Denn es ist $a + (-a) = a - a = 0$. Das heißt, die beiden Vektoren heben sich gegenseitig auf, was offensichtlich dann der Fall ist, wenn sie gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben.

Während demnach dem Vorzeichen eines Vektors eine mit seiner Richtung zusammenhängende Bedeutung zukommt, rechnen wir die Beträge von Vektoren stets positiv. Es haben also z. B. die Vektoren a und $-a$ den gleichen Betrag a .

Man kann jeden gegebenen Vektor als die Summe von beliebig gerichteten Vektoren auffassen, aus denen er zwar nicht durch Addition entstanden ist, wohl aber entstanden sein könnte. Wir wollen die Vektoren, aus denen wir uns einen Vektor auf diese Weise zusammengesetzt denken können, als *Komponenten* des Vektors bezeichnen. (In diesem Punkt herrscht keine einheitliche Übung. Oft bezeichnet man auch die skalaren Beträge dieser Vektoren als die

Komponenten des gegebenen Vektors.) Wir bezeichnen daher die Vektor-
komponenten mit deutschen, ihre Beträge mit lateinischen Buchstaben. Abb. 7
zeigt das Verfahren zur Zerlegung eines Vektors a in zwei Komponenten a_1, a_2
nach zwei vorgegebenen Richtungen. Man zieht durch den Schwanz von a
zwei Gerade in diesen Richtungen und ergänzt die Figur zu einem Parallelo-
gramm mit der Diagonale a . Die vom Schwanz von a ausgehenden Parallelo-
grammseiten a_1, a_2 sind die gesuchten Komponenten, denn nach Abb. 7 ist
 $a = a_1 + a_2$. Ihre Beträge hängen von der Wahl der Richtungen ab (Abb. 7a
und b).

Besonders wichtig ist die Zerlegung eines Vektors a in drei zueinander
senkrechte Komponenten a_x, a_y, a_z nach den drei Achsenrichtungen eines recht-
winkligen Koordinatensystems (xyz) (Abb. 8). Man findet diese drei Kom-
ponenten, indem man von der Spitze des Pfeils a die Lote auf die drei durch

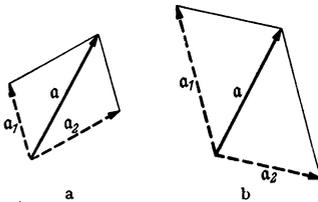


Abb. 7. Zerlegung eines Vektors in zwei Komponenten,
 $a = a_1 + a_2$.

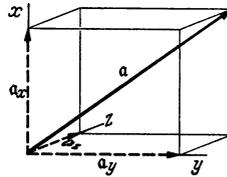


Abb. 8. Zerlegung eines Vektors nach den Achsen-
richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems,
 $a = a_x + a_y + a_z$.

den Pfeilswanz gehenden, zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden
fällt. Dann gelten für die Komponenten a_x, a_y, a_z des Vektors a und ihre Be-
träge a_x, a_y, a_z die Gleichungen

$$a = a_x + a_y + a_z \quad \text{und} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (10)$$

Gleichungen zwischen Vektoren haben eine weitergehende Bedeutung als
solche zwischen Skalaren. Die Gleichung $a = b$ sagt ja nicht nur aus, daß die
Vektoren a und b gleiche Beträge haben, sondern auch daß sie gleiche Richtung
haben. Dann aber haben auch die je drei Komponenten von a und b in drei
zueinander senkrechten Richtungen untereinander die gleichen Beträge. Die
eine Vektorgleichung $a = b$ ist also den drei algebraischen Gleichungen $a_x = b_x$,
 $a_y = b_y$, $a_z = b_z$ gleichwertig. Bei Zahlenrechnungen muß im allgemeinen jede
Vektorgleichung derart in algebraische Gleichungen zerlegt werden.

Das Produkt $a b = c$ eines Skalars a mit einem Vektor b ist ein Vektor c ,
der die gleiche Richtung und den a -fachen Betrag hat wie der Vektor b . Über
Produkte von Vektoren siehe § 10 und 21. Da das Verhältnis a/a eines Vektors a
und seines Betrages a ein Vektor vom Betrage 1 ist, der die gleiche Richtung
wie a hat, so entsteht durch Multiplikation einer skalaren Größe c mit dem
Vektor a/a ein Vektor $c = a c/a$, der die gleiche Richtung wie a hat, und dessen
Betrag gleich c ist. Den Vektor a/a nennt man den in der Richtung von a
liegenden *Einheitsvektor*.

9. Bewegung im Raume. Bei der vektoriellen Beschreibung der Bewegung
eines Massenpunktes beziehen wir seine jeweilige Lage im Raum auf einen
festen *Bezugspunkt* O , dessen Lage wir beliebig wählen können. Der jeweilige
Ort des Massenpunktes wird dann eindeutig beschrieben durch Betrag (Länge)
und Richtung des vom Bezugspunkt O nach dem Massenpunkt hin weisenden
Fahrstrahls oder *Radiusvektors* r , seine Bewegung durch die Änderungen dieses
Vektors nach Betrag und Richtung als Funktion der Zeit.

Ein Massenpunkt befinde sich zur Zeit t im Punkte A ; der zugehörige Fahrstrahl sei r (Abb. 9). In der endlichen Zeit Δt bewege er sich längs der Bahn s nach B , so daß er nach der Zeit Δt um die endliche, gerichtete Strecke $A \rightarrow B = \Delta r$ verschoben ist. Dabei hat sich der Fahrstrahl im allgemeinen sowohl nach Betrag wie nach Richtung geändert. Der zur Lage B gehörige Fahrstrahl ist die Vektorsumme des ursprünglichen Fahrstrahls r und der Verschiebung Δr , also gleich $r + \Delta r$. Der Quotient $\Delta r / \Delta t$ ist — als Produkt des Vektors Δr und des Skalars $1/\Delta t$ — ein dem Verschiebungsvektor Δr gleichgerichteter Vektor. Sein Betrag und seine Richtung hängen im allgemeinen bei gegebenem Anfangsort A von der Wahl der Zeitspanne Δt ab. (Von der Lage des Bezugspunktes O ist er unabhängig.) Je kleiner wir aber Δt wählen, um so näher rückt der Punkt B an den Punkt A heran, und um so mehr nähert sich der Vektor Δr der in A an die Bahn s gelegten Tangente, d. h. mit um so größerer Annäherung wird der Vektor Δr mit dem Stück AB der Bahn des Massenpunktes identisch. Gehen wir also, analog zu Gl. (1), zur Grenze $\Delta t \rightarrow 0$, also auch zur Grenze $\Delta r \rightarrow 0$, über, ersetzen wir also den Differenzenquotienten $\Delta r / \Delta t$ durch den Differentialquotienten dr/dt , so erhalten wir einen endlichen Grenzwert

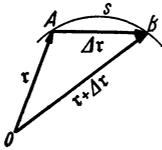


Abb. 9. Verschiebung eines Massenpunktes.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}, \quad (II)$$

der analog zu Gl. (1) die *Geschwindigkeit* v des Massenpunktes im Punkte A zur Zeit t darstellt. Die Geschwindigkeit v ist ein Vektor, der die gleiche Richtung hat wie der Vektor dr . Die Vektoren dr sind die *Bahnelemente* des Massenpunktes, d. h. die unendlich kleinen, gerichteten Strecken, aus denen sich die Bahn des Massenpunktes genau so zusammensetzt, wie der Linienzug der Abb. 4 aus Vektoren von endlichem Betrage.

Die (skalare) *Länge der Bahn* s zwischen zwei Punkten A und B ist die *algebraische Summe der Beträge* (Längen) der Bahnelemente dr . Hingegen ergibt die *Vektorsumme* der Bahnelemente dr , das Integral

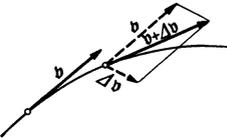


Abb. 10. Geschwindigkeitsänderung eines Massenpunktes.

$$\int_r^{r+\Delta r} dr = \int_t^{t+\Delta t} v dt = (r + \Delta r) - r = \Delta r, \quad (12)$$

die endliche *Verschiebung* $A \rightarrow B = \Delta r$ des Massenpunktes in der endlichen Zeit Δt , ohne Rücksicht auf die Gestalt der Bahn, welche der Massenpunkt zwischen A und B zurücklegt. Die endliche Verschiebung Δr ergibt sich als Vektorsumme unendlich vieler unendlich kleiner Verschiebungen dr ganz ebenso, wie der Vektor s in Abb. 4 als Summe einer endlichen Zahl von endlichen Vektoren.

Ein Massenpunkt besitze zur Zeit t die Geschwindigkeit v . Im Laufe der endlichen Zeit Δt wird sich im allgemeinen sowohl ihr Betrag wie ihre Richtung ändern. Sie wird nach der Zeit Δt , also zur Zeit $t + \Delta t$ gleich $v + \Delta v$ sein. Die Geschwindigkeitsänderung Δv wird im allgemeinen eine andere Richtung haben als die ursprüngliche Geschwindigkeit v , und daher hat im allgemeinen auch die neue Geschwindigkeit $v + \Delta v$ eine andere Richtung als diese (Abb. 10). Sie ist die Vektorsumme der ursprünglichen Geschwindigkeit v und der Geschwindigkeitsänderung Δv . Wie bei der geradlinigen Bewegung bezeichnen wir jede Bewegung, deren Geschwindigkeit nicht konstant ist, als *beschleunigt*. Je größer die Geschwindigkeitsänderung in einer gegebenen Zeit ist, um so größer ist die Beschleunigung. Analog zu Gl. (2) definieren wir die *Beschleunigung*

\mathfrak{b} eines Massenpunktes allgemein, indem wir zur Grenze $\Delta t \rightarrow 0$ übergehen, durch die Gleichung

$$\mathfrak{b} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathfrak{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}. \quad (13)$$

Die Beschleunigung ist demnach ein Vektor, der die gleiche Richtung hat wie die jeweilige Geschwindigkeitsänderung $d\mathfrak{v}$. Die in einer endlichen Zeit Δt eingetretene Geschwindigkeitsänderung $\Delta \mathfrak{v}$ erhalten wir, indem wir Gl. (13) integrieren,

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{b} dt = \int_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}+\Delta \mathfrak{v}} d\mathfrak{v} = (\mathfrak{v} + \Delta \mathfrak{v}) - \mathfrak{v} = \Delta \mathfrak{v}. \quad (14)$$

Besonders einfache Sonderfälle sind die geradlinige Bewegung (§ 7), bei der die *Richtung* der Geschwindigkeit konstant ist, und die gleichförmige Kreisbewegung (§ 10), bei der der *Betrag* der Geschwindigkeit konstant ist, und ihre Richtung im Raume sich mit konstanter Drehgeschwindigkeit ändert.

Eine Bewegung heißt immer dann beschleunigt, wenn \mathfrak{b} nicht verschwindet, also auch dann, wenn sich nur die Richtung, nicht der Betrag der Geschwindigkeit ändert, wie z. B. bei der gleichförmigen Kreisbewegung. Demnach ist *eine krummlinige Bewegung unter allen Umständen eine beschleunigte Bewegung*. Eine Änderung des Betrages der Geschwindigkeit findet nicht statt, wenn die Geschwindigkeitsänderungen $d\mathfrak{v}$, also auch die Beschleunigungen $\mathfrak{b} = d\mathfrak{v}/dt$, stets senkrecht zur jeweiligen Geschwindigkeit \mathfrak{v} gerichtet sind (Abb. 11).

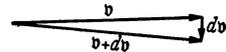


Abb. 11. Beschleunigte Bewegung mit konstantem Betrage der Geschwindigkeit.

Die Gl. (11) — (14) sind von der Wahl des Bezugspunktes O , d. h. vom Fahrstrahl \mathfrak{r} , unabhängig. Der Bezugspunkt ist also beliebig wählbar. Denn in die Gleichungen gehen nur die Verschiebungen $\Delta \mathfrak{r}$ bzw. die Bahnelemente $d\mathfrak{r}$ ein, und diese sind durch die Art der Bewegung, unabhängig von der Lage des Bezugspunktes, eindeutig gegeben.

Zur Einführung in das Wesen räumlicher Bewegungsvorgänge ist die vektorielle Darstellung ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit wegen von großem Vorteil. Hingegen ist die zahlenmäßige Berechnung solcher Vorgänge nur auf Grund algebraischer Gleichungen möglich. Daher muß man zu diesem Zweck aus den obigen Vektorgleichungen die algebraischen Gleichungen zwischen den Beträgen der auftretenden Vektoren bzw. ihrer Komponenten ableiten. Am einfachsten geschieht dies, indem man die Vektoren nach den drei Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems ($x y z$) zerlegt. Dann zerfällt jede einzelne Vektorgleichung in drei algebraische Gleichungen zwischen den Beträgen der Vektorkomponenten in den drei Richtungen. Dabei sind auch die Bahnelemente $d\mathfrak{r}$ in drei vektorielle Komponenten $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ mit den Beträgen dx , dy , dz zu zerlegen. Es ist also

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, \quad (15)$$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = v_x + v_y + v_z, \quad (16)$$

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_y}{dt} + \frac{dv_z}{dt} = b_x + b_y + b_z. \quad (17)$$

Aus den Gl. (16) und (17) folgt für die Beträge v_x , v_y , v_z und b_x , b_y , b_z der Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (18)$$

$$b_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad b_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad b_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (19)$$

Nach Gl. (10) ergibt sich ferner für die Beträge v und b der Geschwindigkeit und der Beschleunigung

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \quad (20)$$

Die je drei Gl. (18) und (19) sind den für geradlinige Bewegungen gültigen Gl. (1) und (2) analog. Die vorgenommene Zerlegung entspricht ja auch einer Zerlegung einer beliebigen räumlichen Bewegung in drei geradlinige Bewegungen in Richtung der Koordinatenachsen. Die Gl. (18) und (19) können wie die Gl. (1) und (2) integriert werden, wenn b_x , b_y und b_z als Funktionen der Zeit t bekannt sind. Man erhält dann die Ortskoordinaten als Funktionen der Zeit, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Eliminiert man aus den so gewonnenen drei Gleichungen die Zeit t , so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten x , y , z , die zwei sich schneidende Flächen darstellen. Die Schnittlinie dieser Flächen ist die *Bahnkurve* des Massenpunktes.

Bei einer *ebenen Bewegung*, d. h. einer solchen, die innerhalb einer Ebene erfolgt, wie z. B. eine Kreisbewegung, genügt natürlich zur Beschreibung der Bewegung ein zweidimensionales, in der Ebene liegendes Koordinatensystem (x, y).

Bezeichnen wir die Beträge der einzelnen Bahnelemente dr eines Massenpunktes mit ds , so ist $ds/dt = v$ der jeweilige Betrag der Geschwindigkeit $dr/dt = v$ des Massenpunktes. Wir nennen v die *Bahngeschwindigkeit* des Massenpunktes.

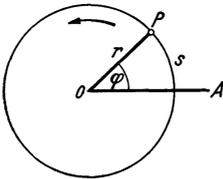


Abb. 12. Kreisbewegung eines Massenpunktes.

10. Kreisbewegung. Unter den krummlinigen Bewegungen spielt die *Kreisbewegung* oder *Rotation* eine besonders wichtige Rolle, also diejenige Bewegungsart, bei der sich ein Körper als Ganzes um eine Gerade, die *Drehachse* oder *Rotationsachse*, dreht. Dabei beschreibt

jedes Massenelement des Körpers eine Kreisbahn in einer zur Achse senkrechten Ebene um den Durchstoßpunkt der Achse durch die Ebene, das *Drehzentrum* O (Abb. 12). Die Kreisbewegung ist also eine ebene Bewegung. Sie erlaubt durch Einführung des Begriffs der Winkelgeschwindigkeit eine besonders einfache Darstellung.

Wir wollen zunächst die Kreisbewegung eines Massenpunktes ohne Benutzung des Vektorbegriffs behandeln, ähnlich wie die geradlinige Bewegung in § 7, um dann zur vektoriellen Darstellung überzugehen.

Ein Massenpunkt bewege sich auf einem Kreise vom Radius r um den Punkt O (Abb. 12). Wir legen eine beliebige Gerade OA durch O fest und beschreiben den jeweiligen Ort P des Massenpunktes zunächst durch seine auf dem Kreise gemessene Entfernung s von dem Schnittpunkt von OA mit dem Kreise. Da aber $s = r\varphi$ ist (§ 5), wenn φ der im Bogenmaß gemessene Winkel zwischen der Geraden OA und dem von O nach P weisenden Radius r ist, so ist P auch durch Angabe von φ bestimmt. Legt der Massenpunkt in der Zeit dt das Bahnelement ds zurück, so beträgt seine *Bahngeschwindigkeit* (§ 9)

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = u r, \quad \text{wobei} \quad u = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (21)$$

Die hier definierte Größe u heißt die *Winkelgeschwindigkeit* des Massenpunktes. Sie ist bei konstanter Bahngeschwindigkeit gleich der Änderung des Winkels φ in 1 sec. Da Winkel durch reine Zahlen ausgedrückt werden, so ist die Einheit der Winkelgeschwindigkeit 1 sec^{-1} .

Ist die Bahn- bzw. Winkelgeschwindigkeit des Massenpunktes nicht konstant, so beträgt die *Bahnbeschleunigung* des Massenpunktes

$$b_s = \frac{dv}{dt} = r \frac{du}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (22)$$

Die Größe $du/dt = d^2\varphi/dt^2$ heißt die *Winkelbeschleunigung* des Massenpunktes. Ihre Einheit ist 1 sec^{-2} .

Die Einführung der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung vereinfacht die Behandlung von Drehbewegungen sehr, weil die einzelnen Massenelemente eines rotierenden starren Körpers zwar — je nach ihrem Abstände von der Achse — sehr verschiedene Geschwindigkeiten, aber alle die gleiche Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung haben.

Wir beschreiben jetzt die Kreisbewegung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (xy) , dessen Ursprung im Kreismittelpunkt liegt, und rechnen die Winkel φ von der x -Achse ab (Abb. 13). Dann sind die Koordinaten des Massenpunktes

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (23)$$

Durch zweimaliges Differenzieren erhalten wir die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in den Achsenrichtungen (mit $d\varphi/dt = u$),

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -ur \sin \varphi, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = ur \cos \varphi, \quad (24)$$

$$b_x = \frac{dv_x}{dt} = -r \left(u^2 \cos \varphi + \frac{du}{dt} \sin \varphi \right), \quad b_y = \frac{dv_y}{dt} = -r \left(u^2 \sin \varphi - \frac{du}{dt} \cos \varphi \right). \quad (25)$$

Da b_x und b_y aufeinander senkrecht stehen, so ergibt sich die Gesamtbeschleunigung b aus der Gleichung

$$b^2 = b_x^2 + b_y^2 = (u^2 r)^2 + \left(r \frac{du}{dt} \right)^2 = b_r^2 + b_s^2 \quad (26)$$

mit den beiden Anteilen

$$b_r = -u^2 r = -\frac{v^2}{r} \quad \text{und} \quad b_s = r \frac{du}{dt} \quad (27)$$

[Gl. (22)]. Ein rotierender Massenpunkt erfährt also nicht nur bei veränderlicher Bahn- bzw. Winkelgeschwindigkeit eine Beschleunigung. Auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ($du/dt = 0$, also auch $b_s = 0$) erfährt er eine Beschleunigung $b_r = -u^2 r$. (Wegen des Vorzeichens s. u.) Das ist nach § 9 zu erwarten. Denn eine Drehbewegung ist eine krummlinige Bewegung und als solche immer beschleunigt. Für den Fall einer gleichförmigen Kreisbewegung, $u = \text{const}$, $du/dt = 0$, ist nach Gl. (25)

$$b_x = -u^2 r \cos \varphi = -u^2 x, \quad b_y = -u^2 r \sin \varphi = -u^2 y, \quad (28)$$

also $b_x/b_y = x/y$. Demnach liest man aus Abb. 14 ab, daß b_r in Richtung des Radius r liegt, und zwar ist b_r , wie schon das Vorzeichen seiner Komponenten andeutet (und wie die vektorielle Betrachtung beweisen wird), auf das Drehzentrum hin gerichtet. (Daher das negative Vorzeichen von b_r .) Ein auf einer Kreisbahn rotierender Massenpunkt erfährt also — neben einer etwaigen Bahnbeschleunigung b_s — stets eine *Zentripetalbeschleunigung* oder *Normalbeschleunigung* b_r in Richtung auf das Drehzentrum. b_r und b_s stehen daher aufeinander senkrecht.

Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit u rotierender Massenpunkt legt in der Zeit t den Weg $s = r\varphi = vt = urt$ zurück. Also ist $t = \varphi/u$. Für einen vollen Umlauf ($\varphi = 2\pi$) benötigt er die *Umlaufszeit*

$$\tau = \frac{2\pi}{u} \text{ sec.} \quad (29)$$

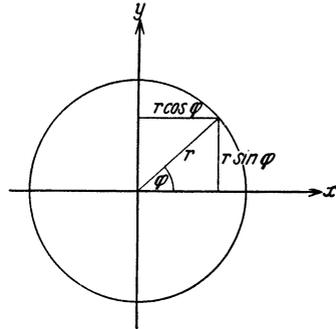


Abb. 13. Kreisbewegung eines Massenpunktes.

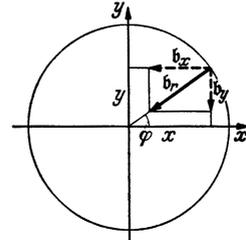


Abb. 14. Zentripetalbeschleunigung.

Er vollführt also in τ sec

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{u}{2\pi} \text{ sec}^{-1} \quad (30)$$

volle Umläufe. n heißt die *Drehzahl* des Massenpunktes.

Die vorstehende Darstellung der Kreisbewegung ist zwar durchaus richtig, aber nicht voll befriedigend. Sie liefert uns unmittelbar nur die Beträge der

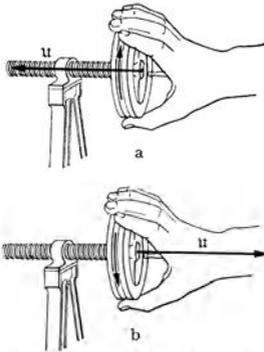


Abb. 15. Zur Schraubenregel.

Geschwindigkeit und der Beschleunigung, ihre Richtungen aber nur mittelbar, indem wir sie aus dem Verhältnis der Beträge ihrer Komponenten für jeden Augenblick berechnen können. Da aber Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Vektoren sind, so ist es erwünscht, daß das auch in der Schreibweise der Gleichungen zur Geltung komme. Es wird sich zeigen, daß sich dann die Ableitungen auch wesentlich einfacher und durchsichtiger gestalten.

Im Anschluß an § 9 wählen wir das Drehzentrum O als Bezugspunkt und betrachten den von dort nach dem rotierenden Massenpunkt weisenden Fahrstrahl als einen Vektor r (Betrag r). Ferner beschreiben wir die Winkelgeschwindigkeit durch einen Vektor u (Betrag u). Da die für eine Kreisbewegung charakteristische Richtung die Richtung der Drehachse ist, so legen wir den Vektor u in die Richtung dieser Achse, so daß damit auch die Lage der Bahnebene bestimmt ist. Ferner muß noch der Umlaufsinn um die Achse bestimmt werden. Wir setzen daher fest, daß der Vektor u in diejenige Richtung weisen soll, in der sich eine rechtsgängige Schraube (die meisten Schrauben, alle Bohrer, Korkzieher usw. sind rechtsgängig) bewegt, wenn man sie im Sinne der vorliegenden Rotation dreht. Wir wollen diese Regel, die uns noch sehr oft begegnen wird, kurz als die *Schraubenregel* bezeichnen. Sie erscheint zunächst kompliziert. Man gewöhnt sich aber sehr schnell daran, in Gedanken — oder auch wirklich — die betreffende Drehung mit der Hand auszuführen. Da derartige Schraubendrehungen jedermann geläufig sind, wird uns die Richtung des Vektors u und anderer ähnlich definierter Vektoren sofort vollkommen deutlich (Abb. 15). Wird also der Kreis, von unserem Standpunkt aus betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers umlaufen, so weist der Vektor u von uns fort. Wird er entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen, so weist er auf uns zu. Da der Vektor u eine Eigenschaft des

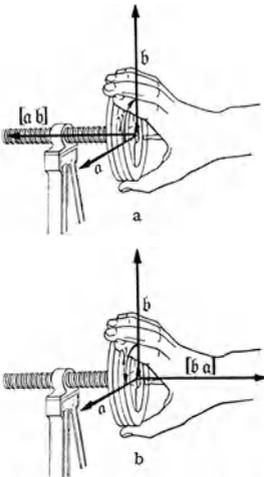


Abb. 16. Die Vektorprodukte $[a b]$ und $[b a]$.

rotierenden Massenpunktes bedeutet, so ist es oft zweckmäßig, den ihn darstellenden Vektorpfeil so zu zeichnen, daß er an dem Massenpunkt „angreift“. (Vektoren von der Art der Winkelgeschwindigkeit darf man unter Innehaltung ihrer Richtung beliebig im Raume verschieben, auch senkrecht zu ihrer Richtung. Das gilt aber nicht für alle Arten von Vektoren; vgl. § 15.)

Einschaltung über Vektorprodukte. Als *äußeres* oder *vektorielles Produkt* (kurz *Vektorprodukt*) zweier Vektoren a, b (Beträge a, b), deren Richtungen miteinander den Winkel γ bilden, geschrieben $[a b]$, bezeichnet man einen Vektor vom Betrage

$$|[a b]| = a b \sin \gamma, \quad (31)$$

der auf der durch die Vektoren a, b gebildeten Ebene senkrecht steht (Abb. 16a). Für seine Richtung gilt die *Schraubenregel* derart, daß er in diejenige Richtung weisen soll, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man sie in dem Sinne dreht, der einer Drehung des Vektors a in die Richtung des Vektors b entspricht. Man erkennt die Richtung des Vektors also auch hier ohne weiteres durch eine in Gedanken oder wirklich ausgeführte Handbewegung. Bei Vertauschung der Vektoren a, b kehrt sich der Drehsinn und damit die Richtung des Vektorproduktes um (Abb. 16b). Demnach ist nach § 8

$$[b a] = - [a b]. \tag{32}$$

Nach Gl. (31) verschwindet das Vektorprodukt $[a b]$, wenn $\sin \gamma = 0$, also $\gamma = 0^\circ$ oder 180° ist, d. h. wenn die beiden Vektoren einander gleich- oder entgegengerichtet sind. Ist im besonderen $b \equiv a$, so folgt

$$[a a] = 0. \tag{33}$$

Der Betrag von $[a b]$ ist nach Gl. (31) gleich der Fläche des von den Vektoren a, b als Seiten gebildeten Parallelogramms (Abb. 16).

Vektorprodukte werden ebenso differenziert wie algebraische Produkte, z. B.

$$\frac{d}{dt} [a b] = \left[\frac{da}{dt} b \right] + \left[a \frac{db}{dt} \right]. \tag{34}$$

Dabei darf die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauscht werden. Der Differentialquotient eines Vektorproduktes ist also die Summe von zwei — im allgemeinen verschieden gerichteten — Vektoren. Denn die Änderungen da und db von a und b werden im allgemeinen eine andere Richtung haben als die Vektoren a und b selbst.

Auf Grund der vorstehenden Definition des Vektorproduktes läßt sich nunmehr zeigen, daß die Geschwindigkeit $v = dr/dt$ [Gl. (11)] eines rotierenden Massenpunktes mit dem Vektorprodukt $[u r]$ identisch ist,

$$v = [u r]. \tag{35}$$

Zunächst ist, da die Vektoren u und r aufeinander senkrecht stehen ($\sin \gamma = 1$), der Betrag von $[u r]$ nach Gl. (31) gleich $u r$, in Übereinstimmung mit Gl. (21). Ferner steht v senkrecht auf den Richtungen von u und r (Abb. 17a) und weist entsprechend der Schraubenregel in die Richtung, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man sie so dreht, wie es einer Drehung des Vektors u in die Richtung des Vektors r entspricht (Abb. 17b). Damit sind alle Bedingungen für die Richtigkeit der Gl. (35) erfüllt.

Nunmehr lassen sich die Gesetze der Kreisbewegung in wenigen Zeilen ableiten. Es sei b (Betrag b) die Beschleunigung des Massenpunktes. Dann ist nach Gl. (11) und (34)

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [u r] = \left[\frac{du}{dt} r \right] + \left[u \frac{dr}{dt} \right] = b_s + b_r, \tag{36}$$

$$b_s = \left[\frac{du}{dt} r \right], \quad b_r = \left[u \frac{dr}{dt} \right] = [u v]. \tag{37}$$

Der Beschleunigungsvektor b setzt sich also, in Übereinstimmung mit Gl. (26), aus zwei Teilvektoren zusammen, der tangentialen Bahnbeschleunigung b_s und der radialen Zentripetalbeschleunigung b_r .

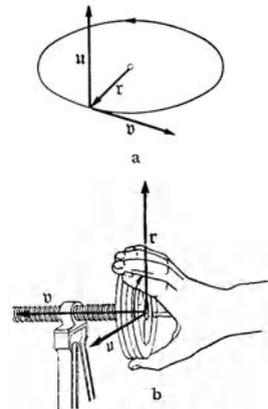


Abb. 17. Zur vektoriellen Darstellung der Kreisbewegung.

Da die Drehachse bei einer Kreisbewegung stets die gleiche Richtung, im Raume hat, so hat auch der Vektor u stets die gleiche Lage im Raum. Der Vektor du , die Änderung der Winkelgeschwindigkeit u in der Zeit dt , ist also dem Vektor u stets entweder gleich- oder entgegengerichtet. Daher steht der Vektor du/dt , die Winkelbeschleunigung, wie der Vektor u , senkrecht zur Bahnebene. Der Vektor b_s hat also nach der Schraubenregel stets die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie die Geschwindigkeit v , ist also tangential zur Kreisbahn gerichtet (Abb. 18a). Da du/dt und r aufeinander senkrecht stehen, so ist der Betrag von b_r gleich $r du/dt$, in Übereinstimmung mit Gl. (27).

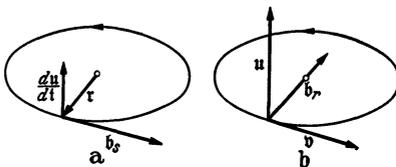


Abb. 18. Zur vektoriellen Darstellung der Kreisbewegung.

Da u und v aufeinander senkrecht stehen (Abb. 18b), so weist der Vektor $b_r = [u v]$ nach der Schraubenregel — unabhängig vom Drehsinn — stets radial auf das Drehzentrum hin. Der Betrag von v ist nach Gl. (31) (mit $\sin \gamma = 1$) und (35) $v = ur$, der Betrag von b_r gleich $b_r = uv = u^2 r$, in Übereinstimmung mit Gl. (27) (aber als Betrag eines Vektors hier positiv gesetzt). b_r ist des Massenpunktes. Da b_r den Betrag $u^2 r$ hat und dem Fahrstrahl r entgegengerichtet ist, so kann man statt Gl. (37) auch schreiben

$$b_r = -u^2 r. \quad (38)$$

II. Die Lehre von den Kräften.

11. Kräfte als Ursache von Beschleunigungen. Trägheitssatz. Träge Masse.

Wir haben bisher von der Beschleunigung eines Körpers (Massenpunktes) gesprochen, ohne nach einer Ursache für sie zu fragen. Wir wiederholen, daß unter einer *Beschleunigung* eines Körpers nicht nur *jede Änderung des Betrages*, sondern auch *jede Änderung der Richtung seiner Geschwindigkeit* zu verstehen ist. *Die Ursache jeder Beschleunigung nennen wir eine Kraft*. Das heißt, wir schließen, wo immer wir eine Beschleunigung eines Körpers beobachten, auf das Wirken einer äußeren Ursache, die wir als Kraft bezeichnen. Dem entspricht auch der uns wohlbekannte Begriff der Muskelkraft. Wir wissen aus der täglichen Erfahrung, daß wir mit der Kraft unserer Muskeln den Bewegungszustand eines Körpers sowohl nach Betrag wie nach Richtung ändern können, wenn wir diese Kraft an ihm angreifen lassen. Die Einführung des Kraftbegriffs ist dadurch gerechtfertigt, daß wir in der Tat in allen Fällen, in denen wir eine Beschleunigung beobachten, auch eine Ursache für das Wirken einer Kraft in den Bedingungen finden können, unter denen sich der beschleunigte Körper befindet, und daß wir die aus der Beschleunigung ermittelte Kraft stets in einen gesetzmäßigen Zusammenhang mit diesen Bedingungen bringen können, insbesondere mit den Lagebeziehungen des Körpers zu den ihn umgebenden anderen Körpern und mit der jeweiligen Beschaffenheit dieser Körper.

Diese allgemeine Definition des Kraftbegriffs schließt, wie schon GALILEI¹ erkannte, in sich, daß *ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, unbeschleunigt ist, sich also geradlinig und gleichförmig bewegt, bzw. in Ruhe verharret*. Dies ist der Inhalt des ersten der drei sog. Axiome, die NEWTON (1643—1727) an die Spitze seiner Mechanik stellte (1687). Das 1. NEWTONSche Axiom ist kein Gesetz, sondern eine allgemeine Definition des Kraftbegriffs. Wegen seiner großen Wichtigkeit wiederholen wir es noch einmal in zwei Ausdrucksweisen:

¹ GALILEI (1564—1642) ist als der Begründer der Physik im neuzeitlichen Sinne zu betrachten. Er war der erste neuzeitliche Mensch, der physikalische Gesetze mathematisch formulierte.

Die Ursache jeder Beschleunigung, also jeder Änderung des Betrages oder der Richtung der Geschwindigkeit eines Körpers ist stets eine Kraft. Oder: Jeder Körper verharrt in geradliniger, gleichförmiger Bewegung (oder in Ruhe), wenn nicht eine Kraft auf ihn wirkt, die seinen Bewegungszustand ändert.

Die Eigenschaft der Körper, ihren Bewegungszustand unverändert beizubehalten, sofern sie nicht unter der Wirkung einer Kraft stehen, bezeichnet man als *Trägheit*, daher das 1. NEWTONSche Axiom auch als den *Trägheitssatz*. Der Begriff der Trägheit wurde bereits von KEPLER (1571—1630) erkannt.

Die 3 NEWTONSchen Axiome lauten in ihrer unübertrefflich klaren lateinischen Originalfassung:

1. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

2. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur (s. u.).

3. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi (§ 16).

In unserer täglichen Erfahrung gibt es keinen Fall einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung, bei der nicht die ständige Wirkung einer Kraft erforderlich wäre, um diesen Bewegungszustand aufrecht zu erhalten. Darin liegt aber kein Widerspruch gegen den Trägheitssatz. Denn alle diese Bewegungen unterliegen hemmenden Kräften, insbesondere Reibungskräften (am Erdboden, im Wasser, in der Luft usw.), und diese Kräfte erzeugen eine der Bewegung entgegengerichtete Beschleunigung und bringen sie mehr oder weniger schnell zum Stillstand, wenn nicht eine ihnen entgegengerichtete, vorwärtstreibende Kraft wirkt, die sie aufhebt, wie z. B. bei einem Eisenbahnzug die Antriebskraft der Lokomotive. Je geringer die Reibung ist, um so langsamer nimmt die Geschwindigkeit eines bewegten, keiner sonstigen Kraft unterworfenen Körpers ab. Eine polierte Stahlkugel oder ein Stück Eis legt auf einer blanken Eisfläche sehr große Strecken mit nur sehr langsam abnehmender Geschwindigkeit zurück.

Während das 1. NEWTONSche Axiom nur allgemein aussagt, daß wir bei jeder Beschleunigung eine Kraft als Ursache annehmen, definiert das 2. NEWTONSche Axiom (schon 1632 von GALILEI ausgesprochen) den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung genau. Es lautet (s. o.):

Die Änderung der Bewegung, d. h. die Beschleunigung, eines Körpers ist der auf ihn wirkenden Kraft proportional und erfolgt in derjenigen Richtung, in der die Kraft wirkt. Oder anders ausgedrückt: Die Kraft ist ein Vektor, der die gleiche Richtung hat wie die von ihr bewirkte Beschleunigung, und dessen Betrag der Beschleunigung proportional ist.

Für den Kraftvektor \mathfrak{f} und den Beschleunigungsvektor \mathfrak{b} gilt also die fundamentale Definitionsleichung

$$\mathfrak{f} = m \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{f}}{m}. \quad (1)$$

Dabei ist m zunächst eine skalare Proportionalitätskonstante. Nun wissen wir, daß die gleiche Kraft verschiedenen Körpern verschieden große Beschleunigungen erteilt. m hängt also von der Art des beschleunigten Körpers ab. Lassen wir die gleiche Kraft, z. B. diejenige einer in bestimmter Weise gespannten Feder, einmal auf einen bestimmten Körper wirken, dann auf einen zweiten, der aus der doppelten Menge des gleichen Stoffes besteht, so ist die Beschleunigung im zweiten Falle halb so groß wie im ersten, m also im zweiten Fall doppelt so

groß wie im ersten. Demnach ist m bei gegebener Stoffart der im Körper enthaltenen Stoffmenge proportional. Nach Gl. (1) müssen wir zwei beliebig beschaffenen Körpern dann den gleichen Betrag der Größe m zuschreiben, wenn sie durch die gleiche Kraft, — d. h. unter völlig gleichen äußeren Bedingungen, — die gleiche Beschleunigung erfahren. Man nennt die Körper-eigenschaft m die *träge Masse* oder kurz die *Masse* und sieht in ihr die Ursache der Trägheit. Denn je kleiner die Masse eines Körpers ist, um so geringer ist sein Widerstand gegen Bewegungsänderungen. Man merke sich die wichtige Gl. (1) auch in Worten:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Die Maßeinheiten der Kraft und der Masse werden wir in § 13 besprechen.

Bei der praktischen Anwendung der Gl. (1) ist es im allgemeinen, wie bei den Bewegungsgleichungen des § 9, nötig, sie nach den drei Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems ($x y z$) zu zerlegen. Die Komponenten der Kraft in diesen drei Richtungen seien $\mathfrak{k}_x, \mathfrak{k}_y, \mathfrak{k}_z$, die Beträge der Kraft und ihrer Komponenten seien k, k_x, k_y, k_z . Die Komponenten der Beschleunigung \mathfrak{b} (Betrag b) seien b_x, b_y, b_z (Beträge b_x, b_y, b_z). Dann ist

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_x + \mathfrak{k}_y + \mathfrak{k}_z = m b_x + m b_y + m b_z, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} k_x = m b_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad k_y = m b_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ k_z = m b_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = m \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \quad (4)$$

Sind die Beträge k_x, k_y, k_z , also auch die Beschleunigungskomponenten b_x, b_y, b_z als Funktionen von Ort und Zeit bekannt, so können die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z und die Ortskoordinaten x, y, z eines Körpers als Funktionen der Zeit durch Integration der Gl. (3) berechnet werden, wenn ferner noch seine Ortskoordinaten und die drei Komponenten seiner Geschwindigkeit zu irgendeiner Zeit, z. B. für $t = 0$, gegeben sind. Denn diese gehen als Integrationskonstanten in die Lösungen der Gl. (3) ein. [Vgl. die Konstanten v_0 und x_0 in § 7, Gl. (8)].

12. Schwerkraft. Schwere Masse. Neben der Trägheit ist die sinnfälligste Eigenschaft der Körper ihre *Schwere*, die sich in der auf jeden Körper wirkenden *Schwerkraft* äußert. Diese ist bei frei beweglichen Körpern die Ursache ihres Fallens. Bei Verhinderung des Fallens macht sie sich durch einen Druck auf die Unterlage, einen Zug an der Aufhängung usw. bemerkbar. Die irdische Schwerkraft, die alle Körper nach unten zu treiben sucht — fast genau in Richtung auf den Erdmittelpunkt (§ 41) — ist ein Sonderfall der allgemeinen *Massenanziehung* oder *Gravitation* (III. Abschnitt dieses Kapitels).

Äußerst genaue Versuche haben ergeben, daß *alle Körper am gleichen Ort durch die Schwerkraft eine vollkommen gleiche Beschleunigung erfahren*. Sofern daher außer der Schwerkraft keine weiteren Kräfte wirksam sind, *fallen alle Körper gleich schnell*, wenn man sie am gleichen Orte herabfallen läßt (GALILEI 1590). Wenn dem z. B. beim gleichzeitigen Fallen eines Bleiklotzes und einer Feder der Augenschein zu widersprechen scheint, so liegt das nur an der Luftreibung, die auf so verschiedenartige Körper eine sehr verschieden große hemmende Kraft ausübt. Läßt man zwei Körper, bei denen der Einfluß der Luftreibung verhältnismäßig gering ist, z. B. einen Mauerstein und einen Bleiklotz, gleichzeitig aus gleicher Höhe herabfallen, so kommen sie fast genau

gleichzeitig am Boden an. Beseitigt man aber die Luftreibung ganz, indem man die Körper in einem luftleeren Raum herabfallen läßt, so fällt eine Feder genau so schnell wie eine Bleikugel (Abb. 19).

Die senkrecht nach unten gerichtete Beschleunigung frei fallender Körper, die *Erdbeschleunigung*, bezeichnen wir mit g (Betrag g). Sie hängt ein wenig von der geographischen Breite φ und der Höhe h über dem Meeresspiegel ab. Es ist

$$g = 980,62 (1 - 0,00264 \cos^2 \varphi - 0,000003 h) \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2} \quad (5)$$

(h in m gemessen). Die Abhängigkeit von h beruht auf dem verschiedenen Abstand vom Erdmittelpunkt. Die Abhängigkeit von φ hat zwei Gründe. Erstens hängt der Abstand vom Erdmittelpunkt wegen der Abplattung der Erde ein wenig von der geographischen Breite ab. Zweitens ist aber in der Gl. (5) ein nicht von der Schwerkraft, sondern von der Erddrehung herrührender Anteil enthalten, der auch von der geographischen Breite abhängt (§ 41). Für die meisten Zwecke genügt es, die Erdbeschleunigung in runder Zahl anzugeben, $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$.

Abweichungen von der normalen Dichteverteilung in der Erdkruste bewirken örtliche Abweichungen der Erdbeschleunigung von dem aus Gl. (5) berechneten Betrage. Die Untersuchung solcher Abweichungen spielt eine wichtige Rolle in der Geologie und bei der Aufsuchung von Minerallagerstätten.

Da ein Körper von der Masse m durch die Schwerkraft die Beschleunigung $b = g$ erfährt, so ist die an ihm angreifende Schwerkraft nach Gl. (1) $f = mg$. Ihren Betrag

$$k = mg \quad (6)$$

nennt man das *Gewicht* des Körpers. Die Schwerkraft, die auf einen Körper wirkt, ist also seiner trägen Masse m proportional. Es ist zunächst nicht ersichtlich, daß die Schwerkraft, d. h. die Anziehung eines Körpers durch die Erde, etwas mit seiner Trägheit, seinem Widerstand gegen Bewegungsänderungen zu tun haben muß. Es wäre durchaus denkbar, daß das Verhältnis zwischen Trägheit und Schwere für verschieden beschaffene Körper verschieden wäre. Daß dies nicht so ist, ist eine reine Erfahrungstatsache. Es ist daher berechtigt, wenn wir die Ursache der Schwerkwirkungen in einer besonderen Eigenschaft der Körper suchen, deren Betrag aber für jeden Körper seiner trägen Masse proportional ist. Wir bezeichnen diese, für die Schwere verantwortliche Körpereigenschaft als die *schwere Masse*. Demnach besteht zwischen der trägen und der schweren Masse aller Körper das gleiche Verhältnis. Man ist daher übereingekommen, sie einander gleichzusetzen. *Es ist also die schwere Masse eines Körpers gleich seiner trägen Masse*. Wir verwenden für beide künftig in der Regel nur die kurze Bezeichnung Masse.

Die genaueste Bestätigung der Gleichheit der trägen und der schweren Masse liefern Pendelversuche. Durch die allgemeine Relativitätstheorie werden Trägheit und Schwere auf einen gemeinsamen Ursprung zurückgeführt, und durch sie erhält die Gleichsetzung von träger und schwerer Masse ihre endgültige Rechtfertigung.

13. CGS-System und technisches Maßsystem. Bei der Festsetzung der Einheiten der Masse und der Kraft sind die Physik und die Technik auf Grund verschiedener Bedürfnisse verschiedene Wege gegangen und dadurch zu verschiedenen Maßsystemen, dem CGS-System und dem technischen Maßsystem

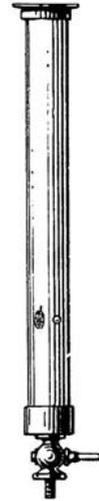


Abb. 19.
Gleich
schneller
Fall einer
Feder und
einer Bleikugel
im luft-
leeren Raum.

gelangt. Beide Maßsysteme bauen sich auf drei *Grundgrößen* und ihre Einheiten, die *Grundeinheiten* des Maßsystems, auf. Die Grundgrößen des CGS-Systems sind die *Länge*, die *Zeit* und die *Masse*, die des technischen Maßsystems die *Länge*, die *Zeit* und die *Kraft*. Alle mechanischen Größen und ihre Einheiten lassen sich aus diesen drei Grundgrößen und ihren Einheiten ableiten. Als *Längeneinheit* dient im CGS-System das cm, im technischen Maßsystem das m, als *Zeiteinheit* in beiden Systemen die sec.

Im CGS-System ist die *Masseneinheit* das *Gramm* (*Grammasse*), 1 g. Es ist definiert als die Masse von 1 cm³ Wasser bei 4° C. (Wegen der Wahl dieser Temperatur s. § 102). Die *Kraft* ist im CGS-System eine abgeleitete Größe, deren Einheit sich aus den Einheiten der Masse und der Beschleunigung nach Gl. (1) ergibt. *Einheit der Kraft* ist im CGS-System die Kraft, die der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm · sec⁻² erteilt, 1 Kräfteinheit = 1 g · 1 cm · sec⁻² = 1 g · cm · sec⁻². Sie hat den Namen 1 *dyn* und ist gleich dem Gewicht einer Masse von 1/981 g, also ein wenig größer als das Gewicht der Masse 1 mg = 10⁻³ g.

Im technischen Maßsystem ist die *Einheit der Kraft* das *Kilogramm* (*Kilogrammgewicht*, 1 kg*). Das ist eine Kraft, die dem Gewicht von 1 Liter (10³ cm³) Wasser von 4° C, also dem Gewicht eines Körpers gleich ist, der im CGS-System die Masse 10³ g = 1 kg hat. Die *Masse* ist im technischen Maßsystem eine abgeleitete Größe, deren Einheit aus Gl. (1) folgt. Die technische *Masseneinheit* ist diejenige Masse, die durch die Kraft 1 kg* die Beschleunigung 1 m · sec⁻² erfährt. Ein Körper von der Masse 1 kg erfährt durch die Kraft 1 kg*, also durch sein eigenes Gewicht, die Beschleunigung 9,81 m · sec⁻². Die technische Masseneinheit ist also 9,81mal träger als die Masse 1 kg, beträgt also 9,81 kg. Ihre Einheitsbezeichnung ist 1 Kräfteinheit/1 Beschleunigungseinheit = 1 kg* · sec² · m⁻¹. Leider hat diese wichtige Einheit keinen besonderen Namen. Als Volumeneinheit wird in der Technik oft nicht das m³, sondern 1 Liter = 10³ cm³ benutzt.

Da Gramm und Kilogramm — je nach dem Maßsystem — Einheitsbezeichnungen sowohl für Massen wie für Kräfte sind, zwischen diesen beiden Bedeutungen aber streng unterschieden werden muß, so versehen wir die Einheitsbezeichnungen, wenn sie Kräfte bedeuten, stets mit einem Stern. So bedeutet 1 g bzw. 1 kg = 1000 g stets eine Masse, 1 kg* bzw. 1 g* = 10⁻³ kg* stets eine Kraft.

Wir stellen die Grundgrößen und ihre Einheiten sowie die Kraft bzw. die Masse noch einmal übersichtlich zusammen:

Tabelle 1. CGS-System und technisches Maßsystem.

CGS-System	<i>Grundgrößen</i>	Länge	Masse	Zeit
	<i>Grundeinheiten</i>	1 cm	1 g	1 sec
	<i>Kraft, Einheit</i>	1 g · cm · sec ⁻² = 1 dyn = 1/981 g*.		
Techn. Maßsystem	<i>Grundgrößen</i>	Länge	Kraft	Zeit
	<i>Grundeinheiten</i>	1 m	1 kg*	1 sec
	<i>Masse, Einheit</i>	1 kg* · sec ² · m ⁻¹ = 9,81 kg.		

Man beachte genau, daß der wesentliche Unterschied der beiden Maßsysteme nicht in der Wahl verschiedener Einheiten liegt, sondern in der verschiedenen Wahl der einen *Grundgröße* (Masse bzw. Kraft). In keinem der beiden Systeme ist die Maßzahl der Masse eines Körpers gleich der Maßzahl seines Gewichts. Im CGS-System muß das Gewicht, als eine Kraft, in dyn ausgedrückt werden. Nach Gl. (6) beträgt es $h = mg \text{ dyn}$ ($g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$). Seine Maßzahl ist also 981mal größer als die der betreffenden, in g ausgedrückten Masse. Im

technischen Maßsystem ist, ebenfalls nach Gl. (6), die Masse eines Körpers vom Gewicht k gleich $m = k/g$ Masseneinheiten ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$). Ihre Maßzahl ist also gleich $1/9,81$ der Maßzahl des in kg^* ausgedrückten Körpergewichts.

In der praktischen Physik wird das Gewicht eines Körpers nicht in dyn, sondern in g^* gemessen. Dann sind die Maßzahlen der in g gemessenen Masse und des in g^* gemessenen Gewichts einander gleich. Es ist

$$1 \text{ g}^* = 981 \text{ dyn}, \quad 1 \text{ kg}^* = 981000 \text{ dyn} = 0,981 \cdot 10^6 \text{ dyn}.$$

Der Anfänger sei sich darüber klar, daß ein Werturteil für oder wider eines der beiden Maßsysteme nicht am Platze ist. Ein jedes hat an seiner Stelle seine volle Berechtigung. Für den Physiker ist eine Beherrschung beider Systeme und der Umrechnungsbeziehungen zwischen ihnen unerlässlich. Aber auch der Chemiker und der Ingenieur wird über diese Kenntnisse verfügen müssen, sobald er wünscht, die physikalischen Grundlagen der Technik wirklich kennen zu lernen. Die theoretische Physik bedient sich aus guten Gründen ausschließlich des CGS-Systems, und auch wir werden es in diesem Buch durchweg verwenden. Den Bedürfnissen der Technik ist das technische Maßsystem besser angepaßt. Der Vorzug des CGS-Systems, d. h. der Wahl der Masse und nicht der Kraft als Grundgröße, für die reine Physik liegt unter anderem darin, daß zweifellos die Masse eine weit fundamentalere Naturgröße ist als die Kraft.

Die genaue *Messung von Massen* geschieht stets durch *Wägung*, d. h. die Masse eines Körpers wird aus seinem in g^* oder kg^* gemessenen Gewicht ermittelt. Jedoch *schätzt* man im täglichen Leben Massen und damit ihre Gewichte oft auch aus ihrer *Trägheit*. Es ist z. B. jedermann geläufig, daß man das Gewicht eines Briefes abschätzt, indem man ihm mit der Hand ruckartige Beschleunigungen nach oben erteilt, also seinen der Masse proportionalen Trägheitswiderstand (§ 17) beurteilt.

Das internationale *Massenprototyp* ist das in Paris aufbewahrte, aus Platin-Iridium hergestellte „Urkilogramm“, von dem sich Kopien (Kilogrammnormale) in allen Kulturländern befinden. Nach neueren Messungen ist es um 0,027 g größer, als seiner Definition durch die Masse von 1 Liter Wasser bei 4° C entspricht. (Vgl. hierzu § 4, 3. Abs.)

14. Dichte. Spezifisches Volumen. Spezifisches Gewicht. Wir wollen für den späteren Gebrauch einige Materialkonstanten definieren, die von den Begriffen Volumen, Masse und Gewicht abgeleitet sind.

Die *Dichte* ρ eines homogenen Stoffes ist die *Masse der Volumeinheit*, also von 1 cm^3 des Stoffes, gemessen in $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Es ergibt sich die gleiche Maßzahl, wenn man die Masse in kg und das Volumen in Litern mißt. Demnach beträgt die Dichte eines Stoffes, wenn $V \text{ cm}^3$ (oder Liter) die Masse m [g] oder [kg] haben¹,

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}] \quad \text{bzw.} \quad [\text{kg} \cdot \text{Liter}^{-1}]. \quad (7)$$

Das *spezifische Volumen* V_s eines homogenen Stoffes ist das *Volumen der Masseneinheit*, also von 1 g, des Stoffes, gemessen in $\text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$. Auch hier ergibt die Messung in kg und Liter die gleiche Maßzahl. Das spezifische Volumen ist die zur Dichte reziproke Größe. Haben m [g] oder [kg] eines Stoffes das Volumen $V \text{ cm}^3$ (oder Liter), so ist

$$V_s = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad [\text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}] \quad \text{bzw.} \quad [\text{Liter} \cdot \text{kg}^{-1}]. \quad (8)$$

¹ Wir setzen die Einheitsbezeichnungen hier uns künftig in [], wenn eine Verwechslung der Einheit g (Gramm) mit der Erdbeschleunigung g möglich ist.

Das *spezifische Gewicht* σ eines homogenen Stoffes ist das *Gewicht der Volumeneinheit* des Stoffes, gemessen in $g^* \cdot cm^{-3}$ bzw. $kg^* \cdot Liter^{-1}$. Wiegen V cm^3 (bzw. Liter) eines Stoffes k [g^*] bzw. [kg^*], so beträgt sein spezifisches Gewicht

$$\sigma = \frac{k}{V} [g^* \cdot cm^{-3}] \quad \text{bzw.} \quad [kg^* \cdot Liter^{-1}]. \quad (9)$$

Nach den Gl. (7) und (9) haben die Dichte und das spezifische Gewicht die gleiche Maßzahl, aber verschiedene Einheitsbezeichnungen. Es ist daher zwischen ihnen wohl zu unterscheiden. Auch ist zu beachten, daß nicht das g^* , sondern das dyn die Gewichts- (Kraft-) Einheit des CGS-Systems ist. Sofern es nötig ist, ein spezifisches Gewicht in diesem Maßsystem auszudrücken, muß es in $dyn \cdot cm^{-3}$ angegeben werden und hat dann eine 981mal größere Maßzahl als die Dichte ρ . Es ist also im CGS-System

$$\sigma = \rho g [dyn \cdot cm^{-3}] \quad (g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}). \quad (10)$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich die folgenden Beziehungen: Die *Masse* eines Körpers vom Volumen V cm^3 und der Dichte ρ [$g \cdot cm^{-3}$] beträgt

$$m = \rho V [g]. \quad (11)$$

Das *Volumen* eines Körpers von der Masse m [g] und dem spezifischen Volumen V_s [$cm^3 \cdot g^{-1}$] beträgt

$$V = V_s m [cm^3]. \quad (12)$$

Das *Gewicht* eines Körpers vom Volumen V [cm^3] und vom spezifischen Gewicht σ [$g^* \cdot cm^{-3}$] beträgt

$$k = \sigma V [g^*] \quad \text{bzw.} \quad k = \rho V g [dyn] \quad (g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}). \quad (13)$$

Kennt man für einen Stoff eine der drei genannten Konstanten, so kann man die anderen ohne weiteres berechnen. Am unmittelbarsten läßt sich das spezifische Gewicht bestimmen, bei einfach geformten Körpern durch Wägung und Berechnung des Volumens aus den linearen Abmessungen. Ein auch für unregelmäßig geformte Körper brauchbares, sehr genaues Verfahren werden wir in § 59 kennen lernen.

Da 1 cm^3 Wasser von 4° C definitionsgemäß die Masse 1 g und das Gewicht 1 g^* hat, so hat Wasser von 4° C die Dichte 1 $g \cdot cm^{-3}$ und das spezifische Gewicht 1 $g^* \cdot cm^{-3}$. Daher ist die *Maßzahl* der Dichte bzw. des spezifischen Gewichts eines Stoffes gleich dem Verhältnis der Masse bzw. des Gewichts einer bestimmten Menge des Stoffes zur Masse bzw. dem Gewicht einer Wassermenge von gleichem Volumen. Diese für die Maßzahlen gültige Beziehung wird gelegentlich auf die Größen selbst ausgedehnt, und es wird die Dichte oder das spezifische Gewicht als eine reine Verhältniszahl definiert. Das ist unrichtig und zu verwerfen.

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele von Dichten bzw. spezifischen Gewichten zusammengestellt. Sie gelten bei festen und flüssigen Stoffen für 0° C, bei Gasen für 0° C und einen Druck von 760 mm Hg.

Tabelle 2. Dichten in $g \cdot cm^{-3}$ bzw. spezifische Gewichte in $g^* \cdot cm^{-3}$.

Aluminium	2,7	Äther	0,717
Blei	11,3	Alkohol	0,791
Eisen	7,6—7,8	Wasser	0,9997
Gold	19,3	Wasserstoff	0,0008985
Kupfer	8,9	Stickstoff	0,0012507
Natrium	0,97	Sauerstoff	0,0014291
Platin	21,4	Luft	0,0012928
Glas	2,4—2,6	Kohlensäure	0,0019768
Quecksilber	13,5951	Helium	0,0001785

15. Zusammensetzung von Kräften. Kräfte im Gleichgewicht. Wirken an einem Körper gleichzeitig mehrere Kräfte, so kann man auf sie, da sie Vektoren sind, die Gesetze der Vektoraddition anwenden (§ 8). Daß dies zulässig ist, beruht auf der an sich nicht selbstverständlichen Tatsache, daß sich die Wirkungen mehrerer gleichzeitig wirkender Kräfte ungestört überlagern, daß also ihre gemeinsame Wirkung gleich der Summe der Wirkungen ist, die die Kräfte einzeln hervorgebracht haben würden. Dieses *Unabhängigkeitsprinzip* wurde schon von NEWTON erkannt.

Die Addition von Kräften, die im *gleichen Punkt* eines Körpers angreifen, ist daher nach den Vorschriften des § 8 ohne weiteres ausführbar. Im allgemeinen werden aber die einzelnen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen, nicht den gleichen *Angriffspunkt* haben. In diesem Fall findet der wichtige Satz Anwendung, daß es zulässig ist, den *Angriffspunkt* einer Kraft längs der *Wirkungslinie* der Kraft beliebig zu verschieben.

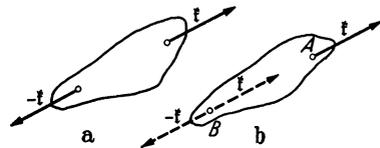


Abb. 20. a Zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete und in der gleichen Wirkungslinie liegende Kräfte heben sich auf. b Verschiebung eines Kraftvektors längs der Wirkungslinie.

Die Wirkungslinie einer Kraft ist die in der Krafrichtung durch ihren Angriffspunkt gehende Gerade. Der Beweis geht davon aus, daß zwei am gleichen Körper angreifende gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte f und $-f$ sich gegenseitig aufheben (Abb. 20a). Wir können uns deshalb an einem unter der Wirkung einer Kraft f stehenden Körper zwei weitere Kräfte, die dieser Bedingung genügen, angreifend denken, ohne die Kraftverhältnisse zu ändern. Die Kraft f greife im Punkte *A* (Abb. 20b). Wir denken uns nun in dem auf ihrer Wirkungslinie liegenden Punkte *B* zwei weitere Kräfte angreifend, die der Kraft f gleiche und ihr gleichgerichtete Kraft f und die ihr entgegengerichtete gleich große Kraft $-f$. Nunmehr fassen wir die ursprüngliche, in *A* angreifende Kraft f und die in *B* angreifende Kraft $-f$ zusammen. Sie heben sich gegenseitig auf, und es bleibt nur die Wirkung der in *B* angreifenden Kraft f übrig. Da wir durch die gedachte Hinzufügung der in *B* angreifenden Kräfte keine Änderung der Kraftverhältnisse herbeigeführt haben, so ersetzt die in *B* angreifende Kraft f die in *A* angreifende Kraft f in jeder Hinsicht. Wir dürfen uns also den Angriffspunkt der Kraft f von *A* nach *B* oder irgendeinem anderen Punkt ihrer Wirkungslinie verschoben denken. Für die Wirkung einer gegebenen Kraft kommt es demnach nur auf die Lage ihrer Wirkungslinie an, nicht auf die besondere Lage ihres Angriffspunktes auf dieser.

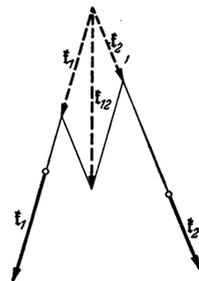


Abb. 21. Resultierende f_{12} zweier Kräfte f_1, f_2 , die nicht im gleichen Punkte angreifen.

Unter Ausnutzung dieser Verschiebungsmöglichkeit können zwei an einem Körper angreifende Kräfte f_1 und f_2 immer dann zu einer Resultierenden $f_1 + f_2 = f_{12}$ vereinigt werden, wenn ihre Wirkungslinien sich schneiden, also in der gleichen Ebene liegen und nicht parallel sind. Die Ausführung der Konstruktion gemäß Abb. 4 (§ 8) zeigt Abb. 21. Wirken an einem Körper mehr als zwei Kräfte, so kann man die Konstruktion bis zu Ende, d. h. bis zur Auffindung der Resultierenden aller angreifenden Kräfte durchführen, wenn stets die Wirkungslinie der Resultierenden aller bereits vereinigten Kräfte sich mit derjenigen einer der noch übrigen Kräfte schneidet. Im allgemeinen ist das aber nicht der Fall, und es bleiben zwei oder mehr resultierende Einzelkräfte übrig, die nicht auf die geschilderte Weise vereinigt werden können.

Es seien f_1, f_2 (Abb. 22) zwei solche Kräfte, deren Wirkungslinien sich nicht schneiden. (Abb. 22 ist räumlich zu denken. Die Vektoren f_1 und f_2 sollen

nicht in der gleichen Ebene liegen.) Wir denken uns jetzt in einem beliebigen Punkte O je zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte $\mathfrak{F}'_1 = \mathfrak{F}_1$, $-\mathfrak{F}'_1 = -\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}'_2 = \mathfrak{F}_2$, $-\mathfrak{F}'_2 = -\mathfrak{F}_2$ angreifend, die den Kräften \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 den Beträgen nach gleich und ihnen gleich- bzw. entgegengerichtet sind. Hierdurch wird an den Kraftverhältnissen nichts geändert. Nunmehr vereinigen wir die in O angreifenden Kräfte \mathfrak{F}'_1 und \mathfrak{F}'_2 zur Resultierenden $\mathfrak{F}'_{12} = \mathfrak{F}'_1 + \mathfrak{F}'_2 = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$. Es bleiben dann einerseits die beiden gleich großen, entgegengesetzt gerichteten (antiparallelen) Kräfte \mathfrak{F}_1 und $-\mathfrak{F}'_1 = -\mathfrak{F}_1$, andererseits die entsprechenden Kräfte \mathfrak{F}_2 und $-\mathfrak{F}'_2 = -\mathfrak{F}_2$ übrig, zwei sog. *Kräftepaare*. In §28 wird bewiesen, daß man beliebig viele Kräftepaare immer zu einem einzigen resultierenden Kräftepaar vereinigen kann. Es folgt: *Beliebig viele an einem Körper angreifende Kräfte können immer auf eine einzige resultierende Einzelkraft und ein einziges resultierendes Kräftepaar zurückgeführt werden.*

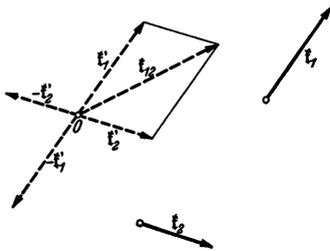


Abb. 22. Zwei Kräfte, deren Wirkungslinien sich nicht schneiden, ergeben eine Einzelkraft und ein Kräftepaar.

Beliebig viele an einem Körper angreifende Kräfte können immer auf eine einzige resultierende Einzelkraft und ein einziges resultierendes Kräftepaar zurückgeführt werden.

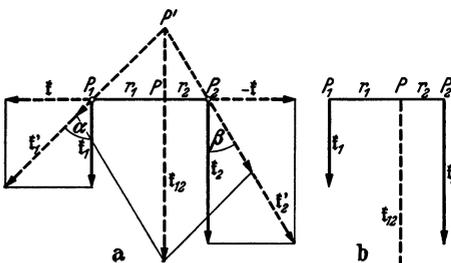


Abb. 23. Resultierende paralleler Kräfte.

Die Konstruktion der Abb. 21 ver- sagt zunächst, wenn es sich um zwei parallele oder antiparallele Kräfte handelt, da ihre Wirkungslinien zwar in einer Ebene liegen, sich aber nicht schneiden. Zur Vereinfachung denken wir uns die beiden Kraftvektoren \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 so verschoben, daß die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte P_1 und P_2 auf ihren Wirkungslinien senkrecht steht (Abb. 23 a u. 24 a). Nunmehr denken wir uns die beiden beliebigen, aber gleich

großen Kräfte \mathfrak{F} und $-\mathfrak{F}$ hinzugefügt, deren Wirkungslinie die gedachte Verbindungslinie $P_1 P_2$ ist. Sie ändern an den Kräfteverhältnissen nichts. Wir vereinigen jetzt \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F} zur Resultierenden \mathfrak{F}'_1 , \mathfrak{F}_2 und $-\mathfrak{F}$ zur Resultierenden \mathfrak{F}'_2 . Für diese beiden Resultierenden aber ist die Konstruktion der Abb. 21 ohne weiteres durchzuführen, und wir erhalten so die Resultierende $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_{12}$ der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 . Ihre Wirkungslinie ist derjenigen der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 parallel. Bei parallelen Kräften weist sie in die gleiche Richtung wie diese (Abb. 23 a), bei antiparallelen Kräften in Richtung der größeren Kraft (Abb. 24 a).

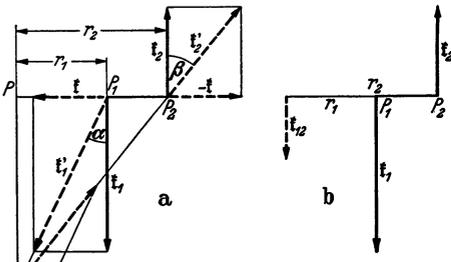


Abb. 24. Resultierende antiparalleler Kräfte.

Es seien k_1 und k_2 die Beträge der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 . Dann ist der Betrag der Resultierenden

$$\text{bei parallelen Kräften} \quad k_{12} = k_1 + k_2, \tag{14a}$$

$$\text{bei antiparallelen Kräften} \quad k_{12} = k_1 - k_2 \text{ bzw. } k_2 - k_1, \tag{14b}$$

je nachdem, welche der beiden Kräfte die größere ist. Das läßt sich ohne weiteres einsehen, wenn man die im gemeinsamen Angriffspunkt P' angreifend gedachten Kräfte \mathfrak{F}'_1 und \mathfrak{F}'_2 wieder in ihre ursprünglichen Komponenten zerlegt denkt. Die Komponenten \mathfrak{F} und $-\mathfrak{F}$ heben sich auf, und es bleiben nur die Komponenten \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 übrig, deren Summe der Vektor \mathfrak{F}_{12} ist.

Es seien r_1 und r_2 die Abstände des Schnittpunktes P der Wirkungslinie der Resultierenden \mathfrak{R}_{12} mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte P_1 und P_2 von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 von diesen Angriffspunkten. P heißt der *Mittelpunkt* der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 und teilt die Strecke P_1P_2 im Falle paralleler Kräfte innen, im Falle antiparalleler Kräfte außen im Verhältnis $r_1:r_2$. Man entnimmt aus Abb. 23a u. 24a in gleicher Weise: $\operatorname{tg} \alpha = k/k_1$, $\operatorname{tg} \beta = k/k_2$, $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = r_1/r_2 = k_2/k_1$ oder

$$r_1 k_1 = r_2 k_2 \quad \text{bzw.} \quad r_1:r_2 = k_2:k_1. \quad (15)$$

Abb. 23 b u. 24 b zeigen das Ergebnis noch einmal in übersichtlicher Darstellung.

Bei parallelen Kräften führt die beschriebene Konstruktion stets zum Ziel, bei antiparallelen Kräften nur dann *nicht*, wenn sie gleiche Beträge haben, also ein *Kräftepaar* bilden. Denn in diesem Fall rückt der Mittelpunkt P ins Unendliche, und der Betrag der Resultierenden ist nach Gl. (14b) gleich Null. In der Tat ist ein Kräftepaar ein Kräftesystem, das eine durchaus andere Bedeutung hat als irgendein anderes (§ 28).

Zwei oder mehrere Kräfte halten sich das *Gleichgewicht*, d. h. sie heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf, wenn ihre Summe (Resultierende) verschwindet,

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 + \dots = \sum \mathfrak{F}_i = 0, \quad (16)$$

und wenn bei ihrer Addition auch kein Kräftepaar übrig bleibt. Bei zwei Kräften ist das natürlich dann und nur dann der Fall, wenn sie gleiche Beträge und entgegengesetzte Richtung haben und in der gleichen Wirkungslinie liegen.

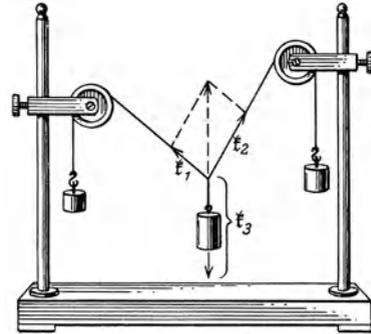


Abb. 25. Drei Kräfte im Gleichgewicht.

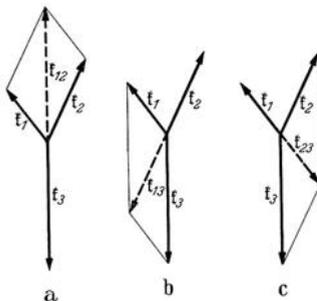


Abb. 26. Drei Kräfte im Gleichgewicht.

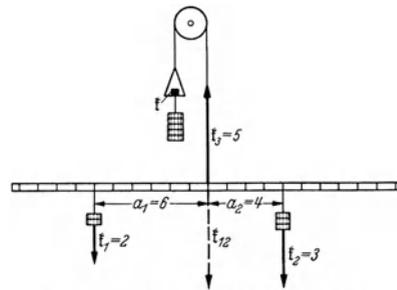


Abb. 27. Gleichgewicht paralleler Kräfte.

Allgemein muß bei Gleichgewicht die Resultierende, die man aus einem beliebigen Teil der Einzelkräfte bildet, gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben und in der gleichen Wirkungslinie liegen, wie die Resultierende, die man aus den noch übrigen Kräften bildet.

An der in Abb. 25 dargestellten Vorrichtung greifen im Schnittpunkt der drei Schnüre drei Kräfte an, unter deren Wirkung das System eine Gleichgewichtslage einnimmt, die durch bestimmte Beträge der Winkel gekennzeichnet ist, die die Schnüre, also auch die Krachrichtungen im Schnittpunkt miteinander bilden. In Abb. 26a ist gezeigt, daß die Resultierende $\mathfrak{F}_{12} = -\mathfrak{F}_3$ der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 der Kraft \mathfrak{F}_3 an Betrag gleich ist und ihr entgegengerichtet ist, sie also aufhebt. Das gleiche aber gilt entsprechend auch für die Resultierende $\mathfrak{F}_{13} = -\mathfrak{F}_2$ der Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_3 (Abb. 26b) und die Resultierende $\mathfrak{F}_{23} = -\mathfrak{F}_1$

der Kräfte \mathfrak{f}_2 und \mathfrak{f}_3 (Abb. 26c). Man kann jede der drei Kräfte als diejenige ansehen, die den beiden anderen das Gleichgewicht hält.

In Abb. 27 ist eine leichte Stange dargestellt, die in ihrer Mitte mit einer Schnur über eine Rolle aufgehängt und deren Gewicht durch ein Gegengewicht \mathfrak{f} aufgehoben ist. An der Stange, sowie am freien Schnurende hängen Massen, die durch ihr Gewicht Kräfte \mathfrak{f}_1 , \mathfrak{f}_2 , \mathfrak{f}_3 auf die Stange ausüben, \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 senkrecht nach unten, \mathfrak{f}_3 senkrecht nach oben. Damit Gleichgewicht herrscht, muß die Resultierende $\mathfrak{f}_{1,2}$ der Kräfte \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben wie die Kraft \mathfrak{f}_3 , also $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_{1,2} = -\mathfrak{f}_3$, $k_1 + k_2 = k_3$. Der Angriffspunkt der Kraft \mathfrak{f}_3 muß der Mittelpunkt der Kräfte \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 sein. Daher gilt für die Abstände r_1 und r_2 der Angriffspunkte von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 von diesem Punkte die Gl. (15). (In Abb. 27 ist $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ und $2 + 3 = 5$).

16. Das Wechselwirkungsgesetz. Zwangskräfte. Kraftwirkungen sind stets *Wechselwirkungen*. Erfährt ein Körper infolge der Anwesenheit eines zweiten



Abb. 28. Wechselwirkung bei zwei durch eine Feder verbundenen Massen.

Körpers in seiner Umgebung eine Kraft, so erfährt der zweite Körper infolge der Anwesenheit des ersten in seiner Umgebung ebenfalls eine Kraft. Für diese Kräfte gilt das *Wechselwirkungsgesetz* (3. NEWTONSches Axiom, vgl. die lateinische Fassung, § II):

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte (Wirkung und Gegenwirkung) haben gleiche Beträge und entgegengesetzte Richtungen.

Drückt ein ruhender Körper infolge seines Gewichts auf eine Unterlage, so drückt ihn diese mit gleicher Kraft nach oben. Die Anziehung der Körper durch die irdische Schwerkraft ist keine einseitige Wirkung der Erde, sondern die Körper ziehen auch die Erde ebenso stark an. Sind zwei Massen m_1 , m_2 (Abb. 28) durch eine zusammengedrückte Feder verbunden, so ist die Kraft \mathfrak{f}_1 , mit der die Masse m_1 nach der einen Seite gedrückt wird, ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft \mathfrak{f}_2 , mit der die Masse m_2 nach der anderen Seite gedrückt wird, $\mathfrak{f}_2 = -\mathfrak{f}_1$. Das gleiche gilt, wenn die zwischen zwei Massen wirkenden Kräfte nicht durch ein stoffliches Mittel, sondern durch den Raum hindurch übertragen werden, wie bei der allgemeinen Massenanziehung (Gravitation) oder bei der Anziehung und Abstoßung zwischen elektrischen Ladungen oder zwischen Magnetpolen.

Bilden die von einem Körper auf einen zweiten ausgeübten Kräfte ein Kräftepaar, so besteht auch die Gegenwirkung in einem Kräftepaar, und die von diesen Kräftepaaren auf die beiden Körper ausgeübten Drehmomente (§ 28) sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet, d. h. sie suchen die Körper in entgegengesetztem Sinne zu drehen.

Übt demnach ein Körper auf einen zweiten eine Kraft \mathfrak{f}_1 aus, so übt der zweite auf den ersten die Kraft $\mathfrak{f}_2 = -\mathfrak{f}_1$ aus. Es ist also $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 = 0$. Handelt es sich um ein System von beliebig vielen Körpern, auf die keine *äußeren*, d. h. von außerhalb des Systems befindlichen Körpern ausgehende Kräfte wirken, sondern nur gegenseitige, von den Körpern des Systems selbst ausgehende *innere Kräfte*, so folgt, indem wir die Kraftsumme über alle beteiligten Körper bilden,

$$\sum \mathfrak{f}_i = 0. \quad (17)$$

Die Vektorsumme aller an den Körpern eines Systems wirkenden inneren Kräfte ist gleich Null. Ebenso ist auch die Summe aller inneren Drehmomente gleich Null.

Das 1. und 2. NEWTONSche Axiom sind keine Gesetze, sondern geben die Definition der Begriffe Kraft und Masse. Das 3. NEWTONSche Axiom hingegen,

das Wechselwirkungsgesetz, ist ein physikalisches Gesetz und als solches an der Erfahrung prüfbar. Den unmittelbarsten Beweis liefert die strenge Gültigkeit des Impulssatzes und des Schwerpunktsatzes (§ 19), die nur andere Formen des Wechselwirkungsgesetzes sind.

Während in manchen Fällen, z. B. bei der Anziehung zweier Massen, der elektrischen und magnetischen Anziehung und Abstoßung, Wirkung und Gegenwirkung ganz gleichberechtigt nebeneinander stehen und ihre Unterscheidung willkürlich ist, wird in anderen Fällen die Gegenwirkung erst durch eine primäre Wirkung hervorgebracht. Wird z. B. ein Körper auf eine feste Unterlage gelegt, so ruft er im gleichen Augenblick durch sein Gewicht, durch den von ihm auf die Unterlage ausgeübten Druck, elastische Gestaltsänderungen (Zusammendrückungen, Verbiegungen) an ihr hervor, die einen Gegendruck gegen das Gewicht des Körpers erzeugen. Durch das Gewicht eines angehängten Körpers wird ein Faden oder Draht ein wenig gedehnt, und die dadurch hervorgerufenen inneren Spannungen erzeugen eine den Körper nach oben ziehende Kraft, die sein Gewicht genau aufhebt. Kräfte dieser Art, die sekundär als Gegenwirkung einer primären Kraft auftreten, heißen *Zwangskräfte*. Wir bezeichnen sie mit \mathfrak{k}_z (Betrag k_z).

Erzeugt eine an einem Körper angreifende Kraft \mathfrak{k} an einem zweiten Körper eine auf den ersten Körper zurückwirkende Zwangskraft \mathfrak{k}_z , so bildet die Resultierende $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}_z$ der beiden Kräfte die auf den ersten Körper wirkende Gesamtkraft. Als Beispiel betrachten wir einen Körper (Massenpunkt) m , der auf einer *schiefen Ebene* liegt, d. h. auf einer unter einem Winkel γ gegen die Vertikale geneigten Ebene AB (Abb. 29a).

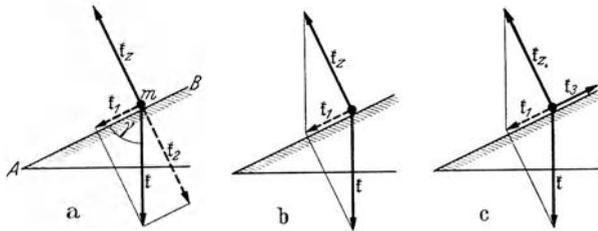


Abb. 29. Kräfte am Körper auf einer schiefen Ebene.

Auf den Körper wirkt die Schwerkraft $\mathfrak{k} = mg$ (Betrag $k = mg$). Wir zerlegen sie in ihre Komponenten \mathfrak{k}_1 (Betrag $k \cos \gamma$) und \mathfrak{k}_2 (Betrag $k \sin \gamma$) parallel und senkrecht zur schiefen Ebene. Die zur Ebene parallele Komponente \mathfrak{k}_1 hat auf diese keine Wirkung. Die zur Ebene senkrechte Komponente \mathfrak{k}_2 erzeugt eine kleine elastische Gestaltsänderung der Ebene, durch die eine auf den Körper zurückwirkende, zur Ebene senkrechte Zwangskraft \mathfrak{k}_z hervorgerufen wird, durch die die Kraft \mathfrak{k}_2 genau aufgehoben wird, $\mathfrak{k}_z = -\mathfrak{k}_2$. Es wirken auf den Körper also tatsächlich die beiden Kräfte \mathfrak{k} und \mathfrak{k}_z , und die natürliche Betrachtungsweise ist, daß man die Kraft \mathfrak{k}_1 als die Resultierende dieser beiden Kräfte ansieht, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}_z$ (Abb. 29b). Die stets zur Ebene senkrechte Zwangskraft \mathfrak{k}_z ist so groß, daß diese Resultierende zur Ebene parallel ist. Solange nämlich anfänglich die Zwangskraft \mathfrak{k}_z noch kleiner ist als die zur Ebene senkrechte Kraftkomponente \mathfrak{k}_2 , bewirkt der Überschuß von \mathfrak{k}_2 über \mathfrak{k}_z eine weitere kleine Verschiebung des Körpers senkrecht zur Ebene, und damit eine weitere Steigerung der elastischen Änderungen in ihr und infolgedessen auch der Zwangskraft. Die Verschiebung hört erst auf, wenn die obige Bedingung erfüllt ist.

Ganz entsprechende Verhältnisse bestehen auch dann, wenn es sich nicht um die Schwerkraft handelt, sondern um eine beliebige Kraft vom Betrage k , die an einem auf einer festen Fläche befindlichen Körper angreift, und deren Richtung mit der Fläche einen Winkel γ bildet. Die Zwangskraft beträgt dann stets, wie in Abb. 29,

$$k_z = k \sin \gamma. \tag{18}$$

Soll der Körper auf der schiefen Ebene ins Gleichgewicht gebracht werden, so muß an ihm eine weitere Kraft $\mathfrak{f}_3 = -\mathfrak{f}_1$ angreifen, die der Kraft \mathfrak{f}_1 an Betrag gleich und ihr entgegengerichtet ist (Abb. 29c). Der Betrag dieser Kraft ist also $k_3 = k \cos \gamma$.

17. Bewegte Bezugssysteme. Wir haben bisher stillschweigend die Bewegung eines Massenpunktes auf ein Koordinatensystem oder einen Punkt im Raum bezogen, ohne die Wahl eines bestimmten *Bezugssystems* zu begründen oder zu erörtern. Diese Wahl ist aber durchaus willkürlich und in keinem Fall von vornherein selbstverständlich. Wir können uns denken, daß wir z. B. die Bewegungsgesetze von Körpern in einem fahrenden Laboratorium untersuchen. Dann tritt an uns die Frage heran, ob wir die Bewegungen etwa in einem Koordinatensystem beschreiben sollen, das sich mit dem Laboratorium bewegt, also relativ zu ihm ruht, oder in einem relativ zur Erde ruhenden Koordinatensystem. Es liegt kein Grund vor, das letztere zu bevorzugen, denn auch die Erde ist ja nicht in Ruhe. Sie dreht sich um sich selbst und bewegt sich um die Sonne. Diese wiederum bewegt sich mit ihrem gesamten Planetensystem relativ zum Schwerpunkt unserer Milchstraße. Die Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes fällt aber vollkommen verschieden aus, je nachdem wir sie auf ein mit dem fahrenden Laboratorium bewegtes Koordinatensystem beziehen oder auf ein mit der Erde oder mit der Sonne bewegtes Koordinatensystem. Z. B. bewegt sich ein Körper, den man in einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit fahrenden Zuge frei herabfallen läßt, vom Zuge aus beurteilt, senkrecht abwärts. Von der Erde aus beurteilt hat er zu Beginn der Bewegung eine der Zuggeschwindigkeit gleiche, horizontale Anfangsgeschwindigkeit, er bewegt sich also wie ein horizontal fortgeschleudertes Körper auf einer gekrümmten, parabolischen Bahn zu Boden. Die *Beschreibung bestimmter Bewegungsvorgänge* durch Angabe der Koordinaten bewegter Massenpunkte als Funktionen der Zeit hängt also von der Wahl des Bezugssystems entscheidend ab. Wir ermitteln aber die *allgemeinen Bewegungsgesetze* aus der messenden Verfolgung spezieller Bewegungsvorgänge, und es erhebt sich die Frage, ob auch die so ermittelten Gesetze von der Wahl des Bezugssystems abhängen. Es wäre ja denkbar, daß man in der Lage wäre, ein bestimmtes Bezugssystem ausfindig zu machen, in dem diese Gesetze eine besonders einfache Gestalt annehmen. Dann wäre dieses Bezugssystem vor allen anderen ausgezeichnet und ihnen in der Regel vorzuziehen.

Wir wollen die Bewegung eines Massenpunktes auf zwei verschiedenen bewegte Bezugssysteme beziehen und wählen dazu das in § 8 angeführte Beispiel eines auf einem fahrenden Schiff bewegten Massenpunktes. Wir wollen seine Geschwindigkeit relativ zum Schiff hier mit v' (früher v_2) bezeichnen, die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Wasser mit v_s (früher v_1), und annehmen, daß diese konstant, also geradlinig und gleichförmig ist. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes relativ zum Wasser ist dann nach § 8 $v = v' + v_s$. Die Geschwindigkeit v' des Massenpunktes relativ zum Schiff sei nicht konstant. Er erfahre relativ zu einem mit dem Schiff bewegten Koordinatensystem die Beschleunigung $b' = dv'/dt$. Seine Beschleunigung relativ zum Wasser, d. h. in einem relativ zum Wasser ruhenden Koordinatensystem, ist dann $b = dv/dt = dv'/dt + dv_s/dt = dv'/dt = b'$, da ja $v_s = \text{const}$, also $dv_s/dt = 0$ ist. Der Massenpunkt erfährt also relativ zu den beiden mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegten Bezugssystemen die gleiche Beschleunigung.

Definieren wir wieder die auf einen Körper von der Masse m wirkende Kraft nach Gl. (1) durch die Beschleunigung, die er erfährt, so folgt, daß in beiden Systemen auch die gleiche Kraft auf ihn wirkt. Untersuchen wir z. B. an dem Massenpunkt die Gesetze des freien Falles, so finden wir die gleiche Erd-

beschleunigung und daher auch die gleiche Schwerkraft, ganz gleich ob wir unsere Messungen auf ein relativ zum Schiff ruhendes Koordinatensystem beziehen oder auf ein relativ zum Wasser ruhendes Koordinatensystem. Wir erhalten also in jedem Fall die gleichen Fallgesetze. Ein Unterschied besteht nur in der Beschreibung der Einzelvorgänge. Denn der Massenpunkt hat in den beiden Bezugssystemen verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten.

Denken wir uns auf dem fahrenden Schiff einen von jeder Verbindung mit der Außenwelt abgeschnittenen Beobachter, so ist es für ihn grundsätzlich unmöglich, aus dem Ablauf irgendeines mechanischen Vorganges auf dem Schiff zu erkennen, mit welcher Geschwindigkeit sich das Schiff relativ zum Wasser bewegt, und ob es sich überhaupt bewegt. Ebenso wenig ist es aber einem ebenso von der Außenwelt abgeschlossenen, relativ zum Wasser ruhenden Beobachter möglich, auf Grund mechanischer Untersuchungen irgend etwas über eine gleichförmige Bewegung des Wassers relativ zur Erde auszusagen. Denn jeder mechanische Versuch, den er etwa auf einem mit dem Wasser treibenden Schiff anstellt, verläuft nach den gleichen Gesetzen wie der entsprechende Versuch auf der Erde. In dieser Tatsache ist das *Relativitätsprinzip der Mechanik* enthalten. Wir werden später sehen (§ 326), daß es überhaupt für alle Naturvorgänge gilt. Es besagt, daß *alle unendlich vielen Bezugssysteme, die sich relativ zueinander unbeschleunigt, d. h. geradlinig und gleichförmig bewegen, physikalisch in jeder Hinsicht gleichberechtigt sind.*

Wir wollen jetzt einmal voraussetzen, es habe einen physikalischen Sinn, ein bestimmtes Bezugssystem als im Raume absolut ruhend anzusehen. Dann wären nach dem Relativitätsprinzip alle Bezugssysteme, die sich relativ zu ihm geradlinig und gleichförmig, also unbeschleunigt, bewegen, mit ihm und auch unter sich physikalisch vollkommen gleichberechtigt. Es gibt also grundsätzlich kein physikalisches Mittel, um festzustellen, welche absolute Geschwindigkeit dasjenige Bezugssystem hat, auf das man gerade seine Beobachtungen bezieht. Man kann also auch grundsätzlich nicht feststellen, welche Geschwindigkeit man selbst oder irgendein anderer Körper relativ zu jenem gedachten, absolut ruhenden System hat. Daher ist es auch grundsätzlich unmöglich, dieses vorausgesetzte, absolut ruhende Bezugssystem aus der Gesamtheit aller relativ zu ihm unbeschleunigt bewegten Bezugssysteme herauszufinden.

Der Begriff einer absoluten Bewegung hat in der Philosophie eine erhebliche Rolle gespielt. Aus den vorstehenden Ausführungen folgt, daß ihm eine Rolle in der Naturerkenntnis nicht zukommt. Aussagen, deren Prüfung als grundsätzlich unmöglich erkannt ist, die man also weder beweisen noch widerlegen kann, weil es dafür in der Natur keine denkbare Erkenntnisgrundlage gibt, sind im physikalischen Sinne „leere“ Aussagen. Dem durch sie behaupteten Sachverhalt — im vorliegenden Fall der Behauptung von der Existenz eines absolut ruhenden Bezugssystems — entspricht keine physikalische Wirklichkeit. Im physikalischen Sinne sind alle Bezugssysteme, in denen die physikalischen Erscheinungen nach den gleichen Gesetzen ablaufen, wie in einem gedachten, absolut ruhenden Bezugssystem, vollkommen gleichberechtigt. Man nennt solche Bezugssysteme Inertialsysteme. *Jedes beliebige Inertialsystem kann mit gleichem Recht wie ein absolut ruhendes Bezugssystem betrachtet werden.*

18. Beschleunigte Bezugssysteme. Trägheitskräfte. Wir wollen jetzt, an das Beispiel des § 17 anknüpfend, voraussetzen, daß das Wasser, in dem sich das Schiff bewegt, ein Inertialsystem ist. Die Geschwindigkeit v_s des Schiffes relativ zum Wasser sei aber nicht konstant; es erfahre eine Beschleunigung $\dot{v}_s = dv_s/dt$ relativ zum Wasser. Ein mit dem Schiff bewegtes Bezugssystem ist demnach kein Inertialsystem, sondern ein *beschleunigtes Bezugssystem*. Ein

Massenpunkt erfahre relativ zu diesem beschleunigten System eine Beschleunigung $\mathfrak{b}' = d\mathfrak{v}'/dt$ (Beispiel ein frei fallender Körper, beurteilt vom beschleunigten Schiff aus). Seine Beschleunigung relativ zum Inertialsystem ist $\mathfrak{b} = d\mathfrak{v}/dt$. Nun ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}_s$, also $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_s$ und demnach $d\mathfrak{v}'/dt = d\mathfrak{v}/dt - d\mathfrak{v}_s/dt = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_s$. Der Massenpunkt erfährt also relativ zum beschleunigten Bezugssystem eine andere Beschleunigung als relativ zum Inertialsystem. Definieren wir wieder die auf einen beschleunigten Körper wirkende Kraft durch Gl. (1), so erfährt er im Inertialsystem eine Kraft $\mathfrak{f} = m\mathfrak{b}$, im beschleunigten System eine Kraft

$$\mathfrak{f}' = m \frac{d\mathfrak{v}'}{dt} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - m \frac{d\mathfrak{v}_s}{dt} = m\mathfrak{b} - m\mathfrak{b}_s. \quad (19)$$

Es ist also

$$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f} - m\mathfrak{b}_s = \mathfrak{f} + \mathfrak{f}_t. \quad (20)$$

Demnach sind die Bewegungsgesetze des Massenpunktes im Inertialsystem und im beschleunigten Bezugssystem nicht identisch. Zu der Kraft \mathfrak{f} , die, vom Inertialsystem aus beurteilt, auf ihn wirkt, tritt im beschleunigten System eine weitere, dem Inertialsystem fremde, von der Beschleunigung des Systems herrührende Kraft

$$\mathfrak{f}_t = -m\mathfrak{b}_s, \quad (21)$$

hinzu, die man die *Trägheitskraft* oder den *Trägheitswiderstand* des Körpers nennt. Beschleunigte Bezugssysteme unterscheiden sich demnach von Inertialsystemen durch das Auftreten von Trägheitskräften. Ihr Fehlen ist ein eindeutiges Merkmal aller Inertialsysteme. Demnach kann die Beschleunigung eines Bezugssystems aus den in ihm auftretenden Trägheitskräften ermittelt werden. Die *Geschwindigkeit* ist ein *relativer* Begriff, denn die Angabe einer Geschwindigkeit erhält erst einen Sinn, wenn das Inertialsystem bekannt ist, auf das sich die Angabe bezieht. Die *Beschleunigung* dagegen ist ein *absoluter* Begriff. Ihre Angabe hat einen ganz bestimmten und eindeutigen Sinn. Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist in bezug auf jedes Inertialsystem die gleiche. Denn unsere Schlußfolgerungen ändern sich nicht, wenn wir dem oben gewählten Bezugssystem (dem Wasser) eine beliebige konstante Geschwindigkeit \mathfrak{v}_0 gegenüber irgendeinem anderen Inertialsystem zuschreiben und alle Bewegungen jetzt auf dieses beziehen. Die Geschwindigkeit \mathfrak{v}_0 addiert sich dann zu allen vorkommenden Geschwindigkeiten, geht aber, da $d\mathfrak{v}_0/dt = 0$, in die Beschleunigungen nicht ein.

Beindet sich ein Körper relativ zu einem beschleunigten Bezugssystem in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, so erfährt er relativ zu jedem beliebigen Inertialsystem die gleiche Beschleunigung $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_s$, wie das beschleunigte System selbst. Nach Gl. (21) ist dann die an ihm auftretende Trägheitskraft $\mathfrak{f}_t = -m\mathfrak{b}$, also der Kraft $\mathfrak{f} = +m\mathfrak{b}$, die ihm die Beschleunigung \mathfrak{b} erteilt, an Betrag gleich, aber ihr entgegengerichtet. Vom beschleunigten System aus beurteilt halten sich also die beschleunigende Kraft und die Trägheitskraft das Gleichgewicht, entsprechend der Tatsache, daß der Körper in diesem System unbeschleunigt ist.

Ein einfaches Beispiel wird das deutlich machen. Man denke sich einen völlig frei beweglichen Körper auf einer reibungslosen Ebene, die parallel zu sich selbst eine Beschleunigung \mathfrak{b} erfährt und das beschleunigte System darstellt. Der Körper befinde sich relativ zu einem Inertialsystem (der Zeichnungsebene) in Ruhe (Abb. 30a). Für einen mit der Ebene beschleunigten Beobachter, also in einem mit der Ebene beschleunigten Bezugssystem, bewegt er sich mit der Beschleunigung $-\mathfrak{b}$ rückwärts (Abb. 30b). (Für einen in einem anfahrenden Zuge befindlichen Beobachter bewegen sich die auf dem Bahnsteig stehenden Personen beschleunigt entgegen der Fahrtrichtung.) Wenn nun der mit der

Ebene bewegte Beobachter die beschleunigte Bewegung der Masse m relativ zu seinem Bezugssystem als die Wirkung einer Kraft auffaßt, die an dem Körper angreift, so handelt er ganz folgerichtig. Denn wenn diese Bewegung verhindert werden, der Körper also der Ebene folgen soll, so bedarf es dazu einer Kraft $f = mb$, die dem Körper die gleiche Beschleunigung b erteilt, die die Ebene erfährt, die ihn also relativ zur Ebene in Ruhe verharren läßt. Will der Beobachter dies selbst bewirken, so muß er den Körper mit einer Kraft mb festhalten, die ihn zwingt, der Bewegung der Ebene zu folgen (Abb. 30c). Wird der Körper durch eine horizontale Feder mit der Ebene verbunden, so bleibt, wenn auf den Körper sonst keine Kraft wirkt, die Feder gespannt, solange die Beschleunigung der Ebene andauert. Die Trägheitskräfte haben also in beschleunigten Systemen durchaus den gleichen Charakter wie andere Kräfte und sind genau wie sie zu behandeln, z. B. zu anderen Kräften nach den Gesetzen der Vektoraddition zu addieren.

Wir wollen uns einen mit einem gleichförmig beschleunigten System bewegten Beobachter denken, der von der Außenwelt völlig abgeschlossen ist, so daß er von der Beschleunigung seines Systems durch deren unmittelbare Beobachtung keine Kenntnis erlangen kann. Er wird das Walten einer besonderen Kraft feststellen, die an allen Körpern seines Systems angreift, den Massen der Körper proportional und überall gleichgerichtet ist. Diese Kraft wird also für ihn einen ganz analogen Charakter haben, wie für uns die irdische Schwerkraft (§ 331).

Die Trägheitskräfte sind uns aus der Erfahrung sehr geläufig. Wenn wir einen sonst kräftefreien, etwa auf einer horizontalen Ebene befindlichen Körper mit unserer Hand in beschleunigte Bewegung versetzen, so spüren wir deutlich den Widerstand des Körpers gegen die beschleunigende Kraft. Er ist um so größer, je größer die Beschleunigung und je größer die Masse des Körpers ist. Dieser Widerstand ist die Trägheitskraft. Wir spüren sie in unserer Hand, die ja bei diesem Vorgang selbst eine beschleunigte Bewegung ausführt, und die das beschleunigte System ist, von dem aus wir das Verhalten des beschleunigten Körpers beurteilen.

Die Trägheitskräfte in einem beschleunigten Bezugssystem kann man z. B. in einem Personenaufzug leicht messend verfolgen. Stellt man sich im Aufzuge auf eine Federwaage, so zeigt diese bei der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit das wahre Körpergewicht an, beim Anfahren oder Bremsen an der unteren Station aber ein erhöhtes, beim Anfahren oder Bremsen an der oberen Station ein vermindertes Gewicht. Im ersteren Fall erfährt der Aufzug eine Beschleunigung b nach oben, entgegen der Schwerkraft, und dem entspricht eine der Schwerkraft mg gleichgerichtete Trägheitskraft. Im zweiten Fall ist die Beschleunigung des Aufzuges abwärts, also die Trägheitskraft der Schwerkraft entgegengerichtet.

Würde ein geschlossener Kasten frei im Schwerfeld der Erde fallen, so hätte er eine Beschleunigung g , und an allen zu diesem beschleunigten System gehörenden Körpern würde eine Trägheitskraft $-mg$ auftreten, die die Schwerkraft $+mg$ genau aufhebt. Die Körper wären also der Schwerkraft (scheinbar) entzogen. Eine Kerze könnte in einem solchen Kasten nicht brennen. Sie bedarf der ständigen Zufuhr von Frischluft, und diese erfolgt nur durch den Auftrieb der heißen Verbrennungsgase. Der Auftrieb ist aber eine Wirkung der Schwerkraft und tritt nicht ein, wenn die Schwerkraft aufgehoben ist. Die Kerze müßte also in ihren eigenen Verbrennungsgasen ersticken.

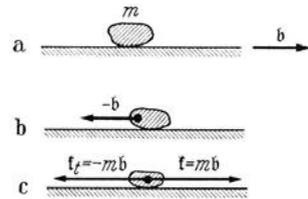


Abb. 30. Zur Trägheitskraft. a Die Masse m ruht, die Ebene bewegt sich beschleunigt unter ihr fort. b Die ruhende Masse m bewegt sich beschleunigt relativ zur beschleunigten Ebene. c Die die Masse m mit der Ebene beschleunigende Kraft f hebt die Trägheitskraft f , auf.

Da die Trägheitskraft der Beschleunigung proportional ist, so ist sie besonders groß bei Fahrzeugen, die beim Anfahren oder Bremsen große Beschleunigungen erfahren. Befinden wir uns in einem fahrenden Eisenbahnzuge, so sind wir in der Lage eines mit ihm bewegten und beschleunigten Beobachters. Schon am eigenen Körper beobachten wir die Trägheitskräfte beim Anfahren und beim Bremsen. Beim Bremsen strebt unser Körper, seine Geschwindigkeit beizubehalten, dem langsamer werdenden Zuge vorauszuweichen. Wir können sowohl die Schwerkraft mg , wie die Trägheitskraft $-mb$ im Körperschwerpunkt angreifend denken (§ 22). Damit wir nicht umfallen, müssen wir uns so stellen, daß die Resultierende von Schwerkraft und Trägheitskraft in Richtung unserer Körperachse fällt (Abb. 31), uns also *gegen* die Fahrtrichtung neigen. Entsprechend müssen wir uns beim Anfahren *in* die Fahrtrichtung neigen. Ungeheuer groß sind die Trägheitskräfte und ihre Wirkungen bei so plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen, wie sie bei Verkehrsunfällen vorkommen können. Der Tod durch Verkehrsunfall ist in der Mehrzahl der Fälle ein Tod durch Trägheitskräfte.

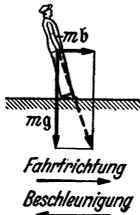


Abb. 31. Trägheitskraft beim Bremsen eines Zuges.

Man beachte wohl, daß wir mit den Trägheitskräften nicht im eigentlichen Sinne eine neue und besondere Art von Kraft eingeführt haben. Sie verschwinden ja, sobald man die Bewegungen auf ein Inertialsystem bezieht. Es ist aber sehr oft zweckmäßig, sie auf ein beschleunigtes Bezugssystem zu beziehen. Dann leistet der Begriff der Trägheitskraft sehr wertvolle Dienste und erleichtert und vereinfacht die Beschreibung der Vorgänge, wie sie sich einem mitbeschleunigten Beobachter darstellen. Sofern es nötig ist, kann man durch eine einfache Umformung stets zur Beschreibung in einem Inertialsystem übergehen und so die Trägheitskräfte zum Verschwinden bringen. Von besonderem Nutzen sind die Trägheitskräfte bei allen Überlegungen, die sich auf rotierende Systeme beziehen.

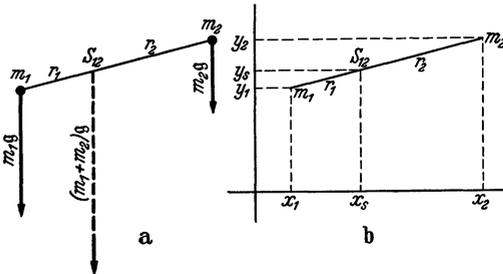


Abb. 32. Zur Berechnung des Schwerpunktes.

Schwerkraft ist die Summe der Schwerkraften, die an seinen einzelnen Massenelementen (Massenpunkten) m_i angreifen, also die Resultierende einer sehr großen Zahl von parallelen Einzelkräften $\mathfrak{k}_i = m_i g$ (g Erdbeschleunigung, Betrag g). Wir greifen zunächst aus einem Körper zwei beliebige Massenelemente m_1, m_2 heraus (Abb. 32a). Die an ihnen angreifenden Schwerkraften sind $\mathfrak{k}_1 = m_1 g, \mathfrak{k}_2 = m_2 g$ (Beträge $k_1 = m_1 g, k_2 = m_2 g$). Dann teilt nach § 15 ihre Resultierende (Betrag $k_1 + k_2 = m_1 g + m_2 g$) die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte im Punkte S_{12} , für dessen Abstände r_1, r_2 von den Massenelementen die Gl. (15) gilt,

$$r_1 k_1 = r_2 k_2, \quad r_1 m_1 g = r_2 m_2 g, \quad \text{also} \quad r_1 m_1 = r_2 m_2. \quad (22)$$

Der Betrag $(m_1 + m_2)g$ der Resultierenden ist die Summe der Gewichte der beiden Massenelemente. Denken wir uns die Massenelemente bei festgehaltenem Abstände $r_1 + r_2$ auf alle möglichen Weisen im Raum orientiert, den Körper also beliebig gedreht, so ändert sich die durch Gl. (22) gegebene Lage des Punktes S_{12} im Körper nicht. Die Wirkungslinie der resultierenden Schwerkraft geht stets durch S_{12} . Wir können uns also die Resultierende der Schwerkraft der beiden Massenelemente m_1, m_2 stets in S_{12} angreifend denken, bzw. wir

19. Der Schwerpunkt.

Die auf einen Körper als Ganzes wirkende

können uns die Massenelemente bezüglich aller Wirkungen der Schwerkraft durch einen in S_{12} befindlichen Massenpunkt $m_1 + m_2$ ersetzt denken. S_{12} heißt der *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* der beiden Massenelemente.

Die beiden Massenelemente sollen in der xy -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegen (Abb. 32b). Ihre Koordinaten seien x_1, y_1 und x_2, y_2 , die ihres Schwerpunktes x_s, y_s . Dann liest man aus Abb. 32b ab:

$$(x_s - x_1) : (x_2 - x_1) = (y_s - y_1) : (y_2 - y_1) = r_1 : r_2 = m_2 : m_1 \quad (23)$$

[Gl. (22)]. Bei beliebiger Orientierung im Raume kommt noch eine dritte Gleichung für die z -Koordinaten hinzu $(z_s - z_1) : (z_2 - z_1) = r_1 : r_2 = m_2 : m_1$. Aus diesen Gleichungen folgt

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}. \quad (24)$$

Nunmehr denken wir uns die Massenelemente m_1, m_2 durch einen Massenpunkt von der Masse $m_1 + m_2$ am Orte ihres Schwerpunktes S_{12} ersetzt. Nehmen wir ein drittes Massenelement m_3 hinzu, so ergibt die Wiederholung des obigen Verfahrens für den Schwerpunkt der drei Massen

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & y_s &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ z_s &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Allgemein ergibt sich für eine beliebige Zahl von Massenelementen m_i , also für einen aus ihnen zusammengesetzten Körper, die Lage des Schwerpunktes durch die Gleichungen

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_s = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (26)$$

Hierbei ist $m = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Körpers.

Im allgemeinen wird man natürlich die Gl. (26) in Gestalt von Integralen schreiben, die über alle Massenelemente dm des Körpers zu erstrecken sind. Sind x, y, z die Koordinaten der einzelnen Massenelemente dm , so lauten die Gleichungen dann

$$x_s = \frac{1}{m} \int x \, dm, \quad y_s = \frac{1}{m} \int y \, dm, \quad z_s = \frac{1}{m} \int z \, dm. \quad (27a)$$

Die Koordinaten x, y, z können auch als die Beträge der Komponenten des Fahrstrahls r angesehen werden, der vom Koordinatenursprung aus auf das betreffende Massenelement hinweist. Ist r_s der auf den Schwerpunkt hinweisende Fahrstrahl, so können wir die drei Gl. (27a) auch durch die eine Vektorgleichung

$$r_s = \frac{1}{m} \int r \, dm \quad (27b)$$

ausdrücken. Denn diese eine Gleichung zerfällt nach § 8 in die drei Gl. (27a) für die Beträge der Komponenten von r_s .

Häufig ist es zweckmäßig, den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers oder Körpersystems zu verlegen, $x_s = y_s = z_s = 0$. Dann folgt aus Gl. (26) und (27a und b)

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0, \quad \sum m_i z_i = 0, \quad (28a)$$

$$\text{bzw.} \quad \int x \, dm = 0, \quad \int y \, dm = 0, \quad \int z \, dm = 0, \quad (28b)$$

$$\text{bzw.} \quad \int r \, dm = 0. \quad (28c)$$

Die abgeleiteten Gleichungen gelten nicht nur dann, wenn es sich um einen in sich zusammenhängenden Körper handelt, sondern auch für irgendein System

von beliebig vielen Körpern. Im letzteren Falle spricht man auch von dem *gemeinsamen Schwerpunkt* der Körper des Systems, z. B. dem gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond oder des Sonnensystems. Es sei r der Abstand der Schwerpunkte zweier Massen m_1, m_2 , und es seien r_1, r_2 die Abstände dieser beiden Schwerpunkte vom gemeinsamen Schwerpunkt. Dann ist $r = r_1 + r_2$, und es folgt mit Hilfe von Gl. (22)

$$r_1 = r \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad r_2 = r \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (29)$$

Bei einfach geformten Körpern mit einfacher Dichteverteilung, insbesondere bei homogenen Körpern, d. h. solchen, die überall die gleiche Dichte haben, läßt sich die Lage des Schwerpunktes nach Gl. (27a) berechnen. Bei einer homogenen Voll- oder Hohlkugel ist es ihr Mittelpunkt, bei einem homogenen Ellipsoid der Schnittpunkt der Achsen, bei einem homogenen Parallelepipед der Schnittpunkt der Raumdiagonalen. Bei unregelmäßig geformten Körpern kann man ihn experimentell ermitteln als den Punkt, in dem sich die Verlängerungen des Aufhängefadens schneiden, wenn man den Körper an einem solchen in verschiedenen räumlichen Orientierungen frei herabhängen läßt. Denn der Schwerpunkt liegt in diesem Fall stets senkrecht unter dem Aufhängepunkt (§ 24).

Wird ein Körper drehungsfrei beschleunigt, so daß seine sämtlichen Massenelemente gleich große und gleich gerichtete Beschleunigungen b erfahren, so sind die an den einzelnen Massenelementen dm auftretenden Trägheitskräfte $-b dm$, genau wie die Einzelschwerkkräfte, unter sich parallel und den Massen dm proportional. Wir können daher die vorstehenden Überlegungen ohne weiteres auch auf die an einem Körper auftretenden Trägheitskräfte übertragen, indem wir an die Stelle der Schwerkraft mg die Trägheitskraft $-mb$ setzen. (Wir müssen uns den Körper dann in Abb. 32a nach oben beschleunigt denken.) Ebenso wie g geht auch b nicht in die Endgleichungen ein. Daher ist der Schwerpunkt nicht nur der Angriffspunkt der Resultierenden der an einem Körper angreifenden Schwerkkräfte, sondern auch der Resultierenden der bei drehungsfreier Beschleunigung an ihm auftretenden Trägheitskräfte.

Die Einführung des Schwerpunktes bietet unter anderem den großen Vorteil, daß man einen wirklichen, ausgedehnten Körper bezüglich der Wirkungen der irdischen Schwerkraft und der Trägheitswirkungen bei drehungsfreien Beschleunigungen durch einen ihm an Masse gleichen, am Ort seines Schwerpunktes befindlichen Massenpunkt ersetzt denken kann.

20. Impuls. Impulssatz. Schwerpunktsatz. Ist m die Masse, v die Geschwindigkeit eines Körpers, so heißt das Produkt

$$\mathfrak{G} = mv \quad (30)$$

der *Impuls* oder die *Bewegungsgröße* des Körpers. Der Impuls ist also ein *Vektor*, der die gleiche Richtung hat wie die Geschwindigkeit v . Ist deren Betrag v , so ist $G = mv$ der Betrag des Impulses. Die Maßeinheit des Impulses ist im CGS-System $1 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, im technischen Maßsystem $1 \text{ kg}^* \cdot \text{sec}$.

Wir können Gl. (1) (§ 11) nunmehr auch in folgender Gestalt schreiben

$$\mathfrak{k} = mb = m \frac{dv}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \quad (31)$$

Das 2. NEWTONSche Axiom läßt sich also auch so aussprechen: *Die auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem zeitlichen Differentialquotienten seines Impulses.* Durch Integration der Gl. (31) folgt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \int_0^i \mathfrak{k} dt,$$

wobei \mathcal{G}_0 den Impuls bedeutet, den der Körper zur Zeit $t = 0$ besitzt. Die *Impulsänderung* $\mathcal{G} - \mathcal{G}_0$ ist also das *zeitliche Integral der Kraft*.

Sind v_x, v_y, v_z die Komponenten der Geschwindigkeit und $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_z$ diejenigen des Impulses nach den drei Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so gilt gemäß § 8 für die Komponenten und ihre Beträge einzeln

$$\mathcal{G}_x = m v_x, \quad \mathcal{G}_y = m v_y, \quad \mathcal{G}_z = m v_z \quad \text{und} \quad G_x = m v_x, \quad G_y = m v_y, \quad G_z = m v_z. \quad (33)$$

Wir betrachten jetzt ein aus beliebig vielen Einzelkörpern mit den Massen m_i bestehendes Körpersystem. Zwischen den Einzelkörpern sollen nicht nur innere Kräfte (§ 16) wirken, sondern es sollen auf sie auch äußere Kräfte wirken, die von außerhalb des Systems befindlichen Körpern ausgehen. Die auf eine Masse m_i wirkenden inneren bzw. äußeren Kräfte bezeichnen wir mit k_i^i bzw. f_i^a , so daß die gesamte auf m_i wirkende Kraft $f_i^i + f_i^a$ ist. Ist v_i die Geschwindigkeit der Masse m_i , so ist demnach $f_i^i + f_i^a = m_i dv_i/dt$. Nunmehr bilden wir die Vektorsumme über alle im Körpersystem wirkenden Kräfte. Dabei verschwindet nach Gl. (17) die Summe der inneren Kräfte, so daß $\sum (f_i^i + f_i^a) = \sum f_i^a = f_a$. Nach Gl. (31) ist daher

$$f_a = \sum f_i^a = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum \frac{d\mathcal{G}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathcal{G}_i = \frac{d\mathcal{G}}{dt}, \quad (34)$$

da $\mathcal{G} = \sum \mathcal{G}_i$ die Vektorsumme der Impulse der Einzelkörper des Systems, also der gesamte im System enthaltene Impuls ist. Gl. (34) ist der *Impulssatz*. Er besagt, daß der zeitliche Differentialquotient des Gesamtimpulses eines Körpersystems gleich der Summe der an dem System angreifenden äußeren Kräfte ist, und daß der Impuls von den inneren Kräften des Systems nicht beeinflußt wird.

Ist ein System von Körpern keinen äußeren Kräften unterworfen, $f_a = 0$, so ist auch $d\mathcal{G}/dt = 0$, also \mathcal{G} zeitlich konstant. Das heißt: *Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen, also keinen äußeren Kräften unterworfenen Körpersystems ist konstant. Er kann durch die inneren Kräfte des Systems nicht geändert werden.*

Die Gesamtheit aller Körper im Weltall ist ein solches abgeschlossenes, keinen äußeren Kräften unterworfenes System. Demnach ist der Gesamtimpuls des Weltalls zeitlich konstant. Er kann weder zu- noch abnehmen. Es gilt also für den Impuls ein *Erhaltungssatz*. Tritt an einem Körper infolge einer Wechselwirkung mit anderen Körpern eine Impulsänderung ein, so müssen gleichzeitig an diesen anderen Körpern Impulsänderungen eintreten, deren Summe jener Impulsänderung dem Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Man beachte wohl, daß der Impulssatz für die Vektorsumme der Impulse, nicht für die Summe der Impulsbeträge gilt. Wenn z. B. zwei Körper ein System bilden, in dem nur innere Kräfte wirken, etwa eine abstoßende Kraft zwischen den beiden Körpern, so bleibt die Vektorsumme ihrer Impulse konstant, weil die Änderung, die der Impuls des einen Körpers in einer bestimmten Zeit erfährt, gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung hat, wie die Impulsänderung des anderen Körpers in der gleichen Zeit. Dabei nehmen aber die entsprechenden Impulsbeträge gleichzeitig beide zu oder beide ab, und die Summe der Impulsbeträge (der aber keine physikalische Bedeutung zukommt) kann sich im Laufe der Zeit beliebig ändern.

Wir betrachten ein System von Einzelmassen m_i , die wir als Massenpunkte ansehen können, und die sich unter der Wirkung von inneren und äußeren Kräften f_i^i und f_i^a im Raume bewegen. Da es sich um getrennte Massen handelt,

schreiben wir Gl. (27 b), die den jeweiligen Ort des Schwerpunktes des Systems angibt, hier in Summenform.

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i, \quad (35)$$

wobei $m = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Körpersystems ist. Durch Differenzieren nach der Zeit erhalten wir die Geschwindigkeit \mathbf{v}_s des Schwerpunktes [§ 9, Gl. (11)],

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \frac{1}{m} \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{v}_i. \quad (36)$$

Indem wir nochmals nach der Zeit differenzieren, erhalten wir

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (37)$$

Mit Hilfe von Gl. (34) folgt hieraus schließlich

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \sum \mathbf{F}_i^a = \mathbf{F}_a. \quad (38)$$

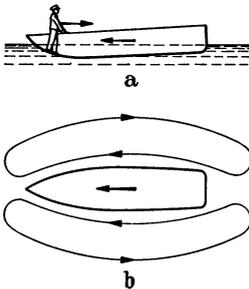


Abb. 33. Zum Impuls- und Schwerpunktsatz.

Es besteht also zwischen der Summe \mathbf{F}_a der am Körpersystem angreifenden äußeren Kräfte, der Gesamtmasse m des Körpersystems und der Schwerpunktsbeschleunigung $d\mathbf{v}_s/dt$ eine der Gl. (1) (§ 11) vollkommen analoge Beziehung. Gl. (38) enthält den *Schwerpunktsatz*: *Der Schwerpunkt eines Körpersystems bewegt sich infolge der an den Einzelkörpern des Systems angreifenden äußeren Kräfte so, als sei die Gesamtmasse m des Körpersystems im Schwerpunkt vereinigt, und als griffen alle äußeren Kräfte im Schwerpunkt an.* Wirken auf das Körpersystem keine äußeren Kräfte, so folgt hieraus:

Der Schwerpunkt eines keinen äußeren Kräften unterworfenen Körpersystems bewegt sich wie ein kräftefreier Körper, also geradlinig und gleichförmig, unabhängig von den im System etwa wirksamen inneren Kräften. Befindet sich insbesondere der Schwerpunkt eines solchen Systems zu irgendeiner Zeit in Ruhe, so verharrt er auch dauernd in Ruhe und kann durch innere Kräfte nicht in Bewegung versetzt werden. (Ein Mensch kann sich ohne äußere Hilfsmittel nicht an seinen eigenen Haaren in die Höhe ziehen, auch dann nicht, wenn er über beliebig große Kräfte verfügte.)

Impulssatz und Schwerpunktsatz sind nur verschiedene Gestalten des gleichen Gesetzes und im Prinzip mit dem Wechselwirkungsgesetz identisch, aus dem sie ohne zusätzliche Annahmen abgeleitet wurden.

Ein Beispiel für diese Sätze zeigt Abb. 33a. Bewegt sich ein Mensch in einem leichten Boot nach hinten, so bewegt sich das Boot vorwärts. Man kann das nach dem Impulssatz so erklären, daß das Boot einen Impuls nach vorn gewinnen muß, wenn der Mensch einen Impuls nach hinten gewinnt. Nach dem Schwerpunktsatz lautet die Erklärung, daß der Schwerpunkt des Systems Boot-Mensch bei der Bewegung des Menschen nur dann in Ruhe bleiben kann, wenn das Boot sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung bewegt. Tatsächlich ist der Vorgang aber verwickelter. Denn mit der Bewegung des Bootes und der Verlagerung des Schwerpunktes in ihm ist auch eine Wasserbewegung verbunden, so daß tatsächlich das System Boot-Mensch-Wasser betrachtet werden muß. Auch spielt die Reibung des Bootes am Wasser eine Rolle. Wäre diese nicht vorhanden, so müßte das Boot sogleich wieder zum Stillstand kommen, sobald die Bewegung des Insassen aufhört. Tatsächlich aber bewegt es sich noch eine Zeitlang weiter, denn durch seine Bewegung ist eine Wasser-

strömung eingeleitet worden, wie sie Abb. 33 b schematisch zeigt. Infolge der Reibung an der Bootswand wird das Boot von der Strömung noch eine Weile mitgenommen, bis die Strömung durch innere Reibung im Wasser abgebremst ist. Bei der Bewegung des Bootes durch das Wasser findet, wenn der Insasse sich nicht bewegt, keine Verschiebung des Schwerpunktes des Systems Boot-Wasser statt, wie eine genauere Rechnung zeigt. In der geschilderten Fortdauer der Bewegung liegt also kein Widerspruch gegen den Schwerpunktsatz.

Sehr große und plötzliche Impulsänderungen finden beim Abschluß und der Detonation von Geschossen statt. Daher liefert die Ballistik besonders eindrucksvolle Beispiele für den Impuls- und Schwerpunktsatz. Ein Geschöß, das keine Luftreibung erfahren würde, beschreibt eine parabolische Bahn (§ 27). Wenn es im Fluge platzt (Schrappnell), so geschieht es durch innere Kräfte, die Druckkräfte der Explosionsgase. Daher erfolgt die weitere Bewegung des Schwerpunktes der auseinanderfliegenden Sprengstücke so, als wirke an ihm, genau wie beim unversehrten Geschöß, die Summe der Schwerkkräfte sämtlicher Sprengstücke. Er beschreibt also seine alte Bahn weiter, als sei nichts geschehen. Wäre das Geschöß in der Ruhe geplatzt, so wären seine Sprengstücke im Durchschnitt gleichmäßig nach allen Richtungen geflogen. Dem überlagert sich beim Platzen des bewegten Geschosses die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes. Die Sprengstücke werden daher in der Hauptsache in Gestalt einer die Schwerpunktsbahn einhüllenden Garbe fortgeschleudert. Infolge der Luftreibung liegen die Verhältnisse in Wirklichkeit ein wenig anders. Die Summe der an den Sprengstücken angreifenden Lufttreibungskräfte ist größer als die Reibung am unversehrten Geschöß. Es treten also nach dem Platzen neue äußere Kräfte hinzu. Da wir uns die Reibungskräfte sämtlich im Schwerpunkt angreifend denken können, so bildet die Bahn des Schwerpunktes nach dem Platzen nicht die stetige Fortsetzung der ursprünglichen Geschößbahn, sondern ist stärker nach unten gekrümmt, und die durchschnittliche Schußweite der Sprengstücke ist geringer als es die des unversehrten Geschosses gewesen wäre.

Das Abfeuern eines Geschosses erfolgt durch innere Kräfte im System Geschütz-Geschöß, nämlich wieder durch die Druckkräfte der Explosionsgase. Erhält das Geschöß einen Impuls $m_1 v_1$, so erhält das Geschütz einen entgegengesetzt gerichteten Impuls $m_2 v_2 = -m_1 v_1$ von gleichem Betrage, den jedem Gewehrschützen und jedem Artilleristen wohl bekannten *Rückstoß*. Er ist um so heftiger, je größer die Masse m_1 und die Geschwindigkeit v_1 des Geschosses ist.

Die Raketen erhalten ihren Antrieb durch den Rückstoß der an ihrer Rückseite austretenden Verbrennungsgase, die zwar keine sehr große Masse, aber infolge ihrer hohen Ausströmungsgeschwindigkeit doch einen beträchtlichen Impuls haben.

21. Arbeit. Soll ein Körper, der unter der Wirkung irgendeiner Kraft steht, mit konstanter Geschwindigkeit in einer beliebigen Richtung *verschoben* werden, so ist es zunächst notwendig, daß diese Kraft durch eine zweite, ihr entgegengerichtete und in der gleichen Wirkungslinie liegende Kraft von gleichem Betrage aufgehoben wird, so daß die Resultierende der an dem Körper angreifenden Kräfte verschwindet. Denn nur dann ist die Bewegung des Körpers beschleunigungsfrei. Dann genügt ein beliebig kleiner Anstoß in der gewünschten Richtung, um zu bewirken, daß der Körper sich in dieser Richtung in Bewegung setzt und die gewünschte Verschiebung eintritt. Dabei verhält sich der Körper genau wie ein kräftefreier Körper, der sich nach dem Trägheitssatz beschleunigungsfrei bewegt. Trotzdem besteht ein grundlegender physikalischer Unterschied zwischen der Verschiebung eines wirklich kräftefreien Körpers und derjenigen eines Körpers, an dem Kräfte angreifen, deren Resultierende verschwindet.

Wir denken uns einen Körper auf einer horizontalen Ebene befindlich, auf der er sich reibungslos verschieben läßt (Abb. 34a). Die an ihm angreifende Schwerkraft mg wird durch die Zwangskraft $f_z = -mg$ in der Ebene aufgehoben, so daß die Summe der an ihm angreifenden Kräfte verschwindet. Wir können ihn in irgendeiner Richtung längs der Ebene verschieben, wenn wir ihm einen Anstoß in dieser Richtung geben, der beliebig schwach sein kann, da es uns hier nicht auf die Geschwindigkeit v der Verschiebung ankommt, die wir uns also als beliebig langsam erfolgend denken können. In dieser Richtung bewegt sich der Körper nunmehr ohne jedes Zutun geradlinig und gleichförmig weiter. Wenn die gewünschte Verschiebung eingetreten ist, können wir ihn durch einen entsprechenden Gegenstoß wieder zur Ruhe bringen. Hier handelt es sich also um eine Verschiebung senkrecht zur Wirkungslinie der an dem Körper angreifenden Kräfte (Schwerkraft und Zwangskraft).

Nunmehr wollen wir einen Körper gegen die Richtung der Schwerkraft senkrecht heben. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst eine weitere Kraft

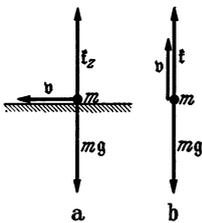


Abb. 34. Verschiebung eines Körpers, a senkrecht, b parallel zur Wirkungslinie zweier an ihm angreifender, sich gegenseitig aufhebender Kräfte.

$f = -mg$ angreifen lassen, die die Schwerkraft genau aufhebt (Abb. 34b). Erteilen wir dem Körper dann, z. B. durch eine winzige momentane Vergrößerung der Kraft f , einen Anstoß nach oben, der wieder beliebig schwach sein kann, so bewegt er sich geradlinig und gleichförmig aufwärts. Er erfährt also eine Verschiebung gegen die Schwerkraft, die wir wieder am gewünschten Ort unterbrechen können.

Der Unterschied zwischen den beiden gedachten Vorgängen wird sofort deutlich, wenn wir uns vorstellen, daß wir die zur Aufhebung der Schwerkraft nötige Gegenkraft mit unseren Armen selbst liefern. Den ersten Fall ändern wir so ab, daß der Körper an einem sehr langen Faden hängen soll, so daß er sich bei der gedachten Horizontalverschiebung nicht merklich hebt, wenn unsere Hand, die den Faden hält, bei der Verschiebung an ihrem Ort bleibt. Es bedarf dann nur des kleinen Anstoßes, und im übrigen läuft der Vorgang ganz von selbst ab, ohne daß wir uns weiter daran zu beteiligen brauchen. Ob wir den Faden selbst halten, oder ob wir ihn irgendwo befestigen, spielt keine Rolle. Ganz anders im zweiten Fall. Bei der Hebung gegen die Schwerkraft, überhaupt bei der Verschiebung eines Körpers gegen die Richtung einer an ihm angreifenden Kraft, müssen wir während der ganzen Dauer der Verschiebung aktiv eingreifen, wir müssen *Arbeit leisten*. Das war im ersten Fall nicht nötig. Zu einer Verschiebung senkrecht zur Wirkungslinie der angreifenden Kräfte ist ebensowenig eine Arbeit erforderlich wie zur beschleunigungsfreien Verschiebung eines wirklich kräftefreien Körpers. Wird ein Körper unter Arbeitsleistung verschoben, so sagt man, daß die Arbeit *von* derjenigen Kraft geleistet wird, in deren Richtung die Verschiebung erfolgt, und daß die Arbeit *gegen* die andere Kraft erfolgt.

Zur senkrechten Hebung eines Körpers von der Masse $2m$ gegen die Schwerkraft $2mg$ um die Höhe s ist die doppelte Arbeit erforderlich, wie zur Hebung der Masse m gegen die Schwerkraft mg um die gleiche Höhe. Denn wir können uns die Masse $2m$ in zwei Massen m geteilt denken, die wir einzeln um die Höhe s heben, und das erfordert offenbar die doppelte Arbeit wie die Hebung der Masse m um die Höhe s . Die gleiche Verschiebung s erfordert also, wenn sie *gegen* die doppelte Kraft, also auch *von* der doppelten Kraft geleistet wird, die doppelte Arbeit. *Die Arbeit ist der Kraft proportional*, von der bzw. gegen die sie geleistet wird.

Die senkrechte Hebung der Masse m um die Höhe $2s$ erfordert die doppelte Arbeit wie die Hebung der gleichen Masse um die Höhe s , denn sie setzt sich

aus zwei Hebungen um je die Höhe s zusammen. Die Arbeit ist also auch der Länge des Verschiebungsweges proportional.

Wir messen daher die Arbeit unmittelbar durch das Produkt aus dem Betrage k der arbeitsleistenden Kraft und dem Weg s , längs dessen die Kraft den Körper verschiebt:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}, \quad A = ks. \tag{39}$$

Sofern auf einen Körper außer anderen Kräften auch eine Zwangskraft wirkt, ist diese natürlich bei der Berechnung der geleisteten Arbeit mit zu berücksichtigen. Solche Zwangskräfte können immer auftreten, wenn die Bewegungsmöglichkeiten des Körpers durch irgendwelche äußeren Bedingungen eingeschränkt sind, z. B. wenn er sich nur längs einer bestimmten festen Fläche bewegen kann. An einem Körper, der sich nur längs einer Ebene bewegen kann (Abb. 35), greife eine unter dem Winkel γ gegen die Ebene gerichtete Kraft \mathfrak{f} (Betrag k) an. Nach Gl. (18) (§ 16) ruft sie in der Ebene eine zu dieser senkrechte Zwangskraft \mathfrak{f}_z vom Betrage $k_z = k \sin \gamma$ hervor, die stets so beschaffen ist, daß die Resultierende \mathfrak{f}_s von \mathfrak{f} und \mathfrak{f}_z zur Ebene parallel ist und den Betrag $k_s = k \cos \gamma$ hat. Sie kann den Körper längs der Ebene gegen eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft $\mathfrak{f}' = -\mathfrak{f}_s$ verschieben (Abb. 35) und leistet dann längs eines Verschiebungsweges s die Arbeit

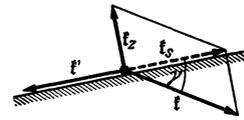


Abb. 35. Verschiebung bei gleichzeitiger Wirkung einer Zwangskraft.

$$A = k_s s = k s \cos \gamma. \tag{40}$$

Die Arbeit wird in diesem Falle tatsächlich von der Kraft \mathfrak{f}_s geleistet. Da sie aber auch als die zur Ebene parallele Komponente der Kraft \mathfrak{f} aufgefaßt werden kann, so bezeichnet man in der Regel die Kraft \mathfrak{f} als die arbeitsleistende Kraft. In diesem Sinne müssen wir die Arbeit genauer so definieren:

Arbeit = Kraftkomponente in der Verschiebungsrichtung · Verschiebung.

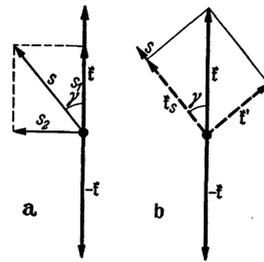


Abb. 36. Verschiebung, schräg zur Krafterichtung.

Gemäß dieser Betrachtungsweise sagt man, daß eine Zwangskraft nie Arbeit leistet, da sie durch die zur Verschiebungsrichtung senkrechte, der Zwangskraft entgegengerichtete Komponente der arbeitsleistenden Kraft \mathfrak{f} aufgehoben wird, und da die Verschiebung stets senkrecht zu ihrer Richtung erfolgt. Betrachtet man aber die Kraft \mathfrak{f}_s als die Resultierende von \mathfrak{f} und \mathfrak{f}_z — und das ist wohl die einfachere Betrachtungsweise —, so wird man sagen, daß die Zwangskraft \mathfrak{f}_z an der Arbeitsleistung durchaus beteiligt ist.

Ein Körper stehe unter der Wirkung zweier sich aufhebender Kräfte \mathfrak{f} , $-\mathfrak{f}$ und erfahre eine Verschiebung vom Betrage s , deren Richtung mit der Kraft \mathfrak{f} den spitzen Winkel γ bildet (Abb. 36a), indem ihm ein Anstoß in dieser Richtung gegeben wird. Wir können diese Verschiebung in zwei Verschiebungen von den Beträgen $s_1 = s \cos \gamma$ parallel zur Krafterichtung und $s_2 = s \sin \gamma$ senkrecht zur Krafterichtung zerlegt denken. Die Verschiebung s_2 erfordert keine Arbeit. Für die Verschiebung s_1 ist die Arbeit $ks_1 = ks \cos \gamma$ erforderlich. Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir die Kraft \mathfrak{f} in ihre Komponenten \mathfrak{f}_s , \mathfrak{f}' parallel und senkrecht zur Verschiebung zerlegt denken (Abb. 36b). Nur die erstere, deren Betrag $k_s = k \cos \gamma$ ist, trägt zur Verschiebungsarbeit bei, und diese beträgt daher $A = k_s s \cos \gamma$. Es gilt also auch hier Gl. (40). Man sieht, daß man auch sagen kann

Arbeit = Kraft · Verschiebungskomponente in der Krafterichtung.

Gl. (40) definiert die Arbeit ganz allgemein bei beliebiger Richtung der Verschiebung gegenüber der verschiebenden Kraft.

Einschaltung über skalare Produkte. Die Arbeit ist eine skalare Größe. Sie ist durch ihren Betrag und ihre Maßzahl vollständig beschrieben. Wir haben sie in Gl. (40) durch die Beträge k und s von Kraft und Verschiebung und durch den von deren Richtungen eingeschlossenen Winkel γ ausgedrückt. Nun sind aber sowohl Kräfte wie Verschiebungen gerichtete Größen, Vektoren. Es ist daher erwünscht, eine Schreibweise der Gl. (40) einzuführen, bei der Kraft und Verschiebung, ihrem Wesen entsprechend als Vektoren \mathfrak{k} und \mathfrak{s} auftreten, und zwar so, daß der Winkel γ , der ja schon durch die Richtungen von \mathfrak{k} und \mathfrak{s} gegeben ist, nicht mehr auftritt. Zu diesem Zweck definieren wir das *skalare* oder *innere Produkt* zweier Vektoren. Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren \mathfrak{a} , \mathfrak{b} mit den Beträgen a , b , deren Richtungen den Winkel γ einschließen, verstehen wir die skalare Größe $ab \cos \gamma$ und führen hierfür die Schreibweise

$$\mathfrak{a} \mathfrak{b} = ab \cos \gamma \quad (41)$$

ein. Stehen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} aufeinander senkrecht ($\cos \gamma = 0$), so ist $\mathfrak{a} \mathfrak{b} = 0$, sind sie gleichgerichtet ($\cos \gamma = 1$), so ist $\mathfrak{a} \mathfrak{b} = ab$. Ist insbesondere $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, haben also \mathfrak{a} und \mathfrak{b} gleichen Betrag und gleiche Richtung oder ist überhaupt \mathfrak{b} mit \mathfrak{a} identisch, so ist

$$\mathfrak{a} \mathfrak{a} = a^2 = a^2. \quad (42)$$

Auf die Reihenfolge der Faktoren kommt es — im Gegensatz zum Vektorprodukt $[\mathfrak{a} \mathfrak{b}]$ — nicht an. Es ist also $\mathfrak{a} \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \mathfrak{a}$.

Demnach ist nach Gl. (40) die Arbeit das skalare Produkt

$$A = k s \cos \gamma = \mathfrak{k} \mathfrak{s} \quad (43)$$

des Kraftvektors \mathfrak{k} und des Verschiebungsvektors \mathfrak{s} . Im allgemeinen wird sich längs der Bahn eines Körpers sowohl der Betrag wie die Richtung der an ihm angreifenden Kraft \mathfrak{k} , wie die Richtung seiner Verschiebung, also seiner Bahn, ändern. Dann gilt Gl. (43) für die einzelnen Bahnelemente $d\mathfrak{r}$ (§ 9),

$$dA = \mathfrak{k} d\mathfrak{r} = k \cos \gamma ds. \quad (44a)$$

Die längs eines endlichen Weges geleistete Arbeit ergibt sich durch Summierung der längs der einzelnen Bahnelemente geleisteten Arbeiten, also durch Integration der Gl. (44a) über den ganzen Verschiebungsweg,

$$A = \int \mathfrak{k} d\mathfrak{r} = \int k \cos \gamma ds. \quad (44b)$$

(ds ist der Betrag eines vektoriellen Bahnelements $d\mathfrak{r}$).

Das wesentliche Merkmal einer Arbeit ist, daß sie von einer Kraft geleistet wird, die an einem Körper angreift, der sich während der Dauer dieser Einwirkung *bewegt*. Bisher haben wir den Fall der reinen *Verschiebungsarbeit* behandelt, bei der diese Bewegung unter gleichzeitiger Wirkung einer der verschiebenden Kraft an Betrag gleichen, aber ihr entgegengerichteten Kraft geradlinig und gleichförmig erfolgt. Von der Seite der arbeitsleistenden Kraft her betrachtet besteht aber kein Unterschied, wenn sie an einem Körper angreift, an dem keine solche Gegenkraft besteht. Der Körper wird dann eine beschleunigte Bewegung ausführen, und wenn er einen bestimmten Weg zurückgelegt hat, so hat die Kraft — genau wie oben bei der reinen Verschiebung — längs dieses Weges an ihm gewirkt. Sie hat also genau das gleiche getan, wie bei einer Verschiebung gegen eine Gegenkraft. Nur ist hier ihre Wirkung auf Grund anderer Bedingungen eine andere. Man wird daher auch in diesem Falle sagen müssen, daß die Kraft an dem Körper Arbeit geleistet hat, und zwar, ihrer Wirkung entsprechend, *Beschleunigungsarbeit*. In der Tat bedarf es ja

genau so gut einer Anstrengung, d. h. der Leistung einer Arbeit, wenn wir einen Körper, auf den keine entgegengerichtete Kraft wirkt, in beschleunigte Bewegung versetzen, wie wenn wir ihn gegen eine Kraft unbeschleunigt verschieben. Wenn wir einen Stein horizontal schleudern, so muß unsere Muskelkraft längs eines bestimmten Weges an ihm angreifen. Unsere den Stein beschleunigende Hand ist notwendig ein beschleunigtes Bezugssystem, und in diesem tritt an dem beschleunigten Körper eine der Beschleunigung, also auch der beschleunigenden Kraft entgegengerichtete Trägheitskraft auf (§ 18). In diesem Sinne ist eine Beschleunigungsarbeit das gleiche wie eine Verschiebungsarbeit gegen die Trägheitskraft.

Bei einem frei beweglichen Körper wird im allgemeinen die Kraft \mathfrak{f} nicht die gleiche Richtung haben wie die Verschiebung $d\mathbf{r}$ (Abb. 37a), d. h. wie die momentane Geschwindigkeit \mathbf{v} . Bewegt sich der Körper in der Zeit dt um die Strecke (das Bahnelement) $d\mathbf{r}$, so ist nur die in der Richtung von \mathbf{v} liegende Komponente \mathfrak{f}_s der Kraft \mathfrak{f} arbeitsleistend wirksam (Abb. 37b). Das gleiche gilt, wenn ein Körper, der sich nur längs einer festen Fläche bewegen kann, durch eine schräge zur Fläche gerichtete Kraft beschleunigt wird (Abb. 35). Die Gl. (43) bzw. (44a und b) gelten also auch im Falle der reinen Beschleunigungsarbeit. Da eine Kraft keine Arbeit leistet, wenn sie senkrecht zur Bewegung gerichtet ist, so leistet auch bei der Kreisbewegung, die stets radial nach innen gerichtete, also zur Kreisbahn senkrechte Zentripetalkraft (§ 33) keine Arbeit an dem rotierenden Körper.

Bewegt sich ein Körper so, daß Kraft und Geschwindigkeit einen stumpfen Winkel miteinander bilden [$\cos \gamma$ negativ, Gl. (43)], so ist auch die Arbeit negativ. Die Kraft leistet dann an dem Körper negative Beschleunigungsarbeit, d. h. sie verlangsamt seine Bewegung. Das ist z. B. der Fall, wenn ein geworfener Körper entgegen der Schwerkraft senkrecht nach oben steigt ($\cos \gamma = -1$). Dann leistet die Schwerkraft an dem steigenden Körper negative Beschleunigungsarbeit. Man kann aber auch die der Schwerkraft entgegen, also nach oben gerichtete Trägheitskraft des Körpers als arbeitsleistende Kraft auffassen, die an dem Körper positive Verschiebungs- (Hebungs-) Arbeit gegen die Schwerkraft leistet. Denn daß sich ein sonst kräftefreier, bewegter Körper entgegen der Schwerkraft zu bewegen vermag, ist ja ausschließlich eine Folge seiner Trägheit.

Auch die Reibung bewegter Körper an ihrer Umgebung hat natürlich einen Einfluß auf die an ihnen geleistete Arbeit. Sie liefert stets eine der Bewegung entgegengerichtete Kraft, gegen die Arbeit geleistet werden muß, wenn die Bewegung des Körpers andauern soll. In einer sehr großen Zahl von praktisch besonders wichtigen Fällen besteht die geleistete Arbeit sogar überwiegend in Verschiebungsarbeit gegen die Reibung. Sämtliche Transportmittel bedürften auf ebener Bahn eines Aufwandes an Arbeit nur beim Anfahren, also zu ihrer Beschleunigung, wenn sie keiner Reibung unterlägen. Beim Bremsen leistet die Reibung an den Bremsbacken negative Beschleunigungsarbeit gegen die Trägheitskraft. Es ist eines der wichtigsten technischen Probleme, die gegen Reibungskräfte zu leistende Arbeit stets so klein wie möglich zu halten.

Man beachte, daß der Begriff der Arbeit im physikalischen Sinne enger gefaßt ist als im täglichen Sprachgebrauch. Im physikalischen Sinne wird eine Arbeit nur dann geleistet, wenn ein Körper verschoben wird. Das unbewegte Tragen eines Körpers, das wir im täglichen Leben auch als eine Arbeit bezeichnen (und durchaus als eine solche empfinden), ist mit einer mechanischen Arbeitsleistung nicht verbunden. Daß wir es doch als eine Arbeitsleistung empfinden, beruht darauf,

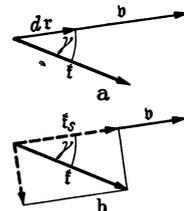


Abb. 37. Zur Wirkung einer Kraft auf einen frei beweglichen Körper.

daß schon bei der dauernden Muskelanspannung, die das Tragen erfordert, im Körper physiologisch-chemische Vorgänge ablaufen, die mit einem Aufwand an chemischer Energie (§ 128) verbunden sind, und die von gleicher Art sind wie diejenigen, die bei mechanischer Arbeitsleistung der Muskeln ablaufen.

Nach Gl. (43) liegt die *Einheit der Arbeit* vor, wenn ein Körper durch die Krafteinheit um die Wegeinheit in der Kraftrichtung verschoben wird, im CGS-System also dann, wenn er durch die Kraft 1 dyn um 1 cm in der Kraftrichtung verschoben wird. (Auf die Masse des Körpers und auf die Geschwindigkeit der Verschiebung kommt es dabei nicht an.) Die CGS-Einheit der Arbeit ist also 1 dyn · 1 cm. Sie heißt 1 *erg*. Da 1 dyn = 1/981 g*, so ist die Arbeit 1 erg ein wenig größer als die Arbeit, die erforderlich ist, um die Masse 1 mg um 1 cm oder die Masse 1 g um 1/100 mm gegen die Schwerkraft zu heben. Die Arbeit 1 erg ist also sehr klein gegen die im täglichen Leben vorkommenden Arbeitsbeträge. Ein Mensch, der in das nächsthöhere Stockwerk steigt, leistet z. B. eine Arbeit von der Größenordnung 3 · 10¹⁰ erg. Im technischen Maßsystem liegt die Einheit der Arbeit dann vor, wenn die Kraft 1 kg* einen Körper um 1 m in ihrer Richtung verschiebt, z. B. bei der senkrechten Hebung der Masse 1 kg (Gewicht 1 kg*) um 1 m. Diese Einheit heißt 1 *Meterkilogramm* (mkg*). Da 1 kg* = 9,81 · 10⁵ dyn, 1 m = 10³ cm, so ist 1 mkg* = 9,81 · 10⁷ erg. Vom erg abgeleitet ist die Arbeitseinheit 1 *Joule* oder *Wattsekunde* = 10⁷ erg = 1/9,81 mkg*, ferner 1 *Kilowattstunde* = 1000 · 60 · 60 Wattsekunden = 3,6 · 10¹³ erg.

Wir haben bisher nur von der Arbeit gesprochen, die geleistet wird, wenn ein Körper als Ganzes beschleunigt oder gegen eine Kraft verschoben wird. Natürlich wird auch bei einer beschleunigten Drehbewegung eines Körpers Arbeit geleistet, deren Betrag sich als die Summe der an den einzelnen Massenelementen des Körpers geleisteten Arbeiten ergibt, indem man Gl. (44 b) auf jedes Massenelement einzeln anwendet. Ferner wird Arbeit auch dann geleistet, wenn das Volumen eines Körpers, bei festen Körpern auch dann, wenn ihre Gestalt durch eine Kraft geändert wird. In diesen Fällen erfolgt die Arbeitsleistung gegen die elastischen Kräfte des Körpers. Stets ist mit einer solchen Arbeit eine Verschiebung der Massenelemente des Körpers gegeneinander verbunden, und man kann die geleistete Arbeit aus dieser Verschiebung und der dafür erforderlichen Kraft nach den Gl. (43) bzw. (44 b) berechnen, die demnach die mechanische Arbeit ganz allgemein definieren.

22. Leistung. Wird an einem Körper in gleichen Zeiten ständig die gleiche Arbeit geleistet, also in der endlichen Zeit Δt die endliche Arbeit ΔA , so heißt der Quotient $L = \Delta A / \Delta t$ die *Leistung* der arbeitleistenden Kraft. Sie ist gleich der in 1 sec geleisteten Arbeit. Ist die in gleichen Zeiten geleistete Arbeit nicht konstant, so wird die *Momentanleistung* in einem bestimmten Zeitpunkt durch den Grenzwert (Differentialquotienten)

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad (45)$$

definiert, den man erhält, wenn man die Zeitspanne Δt unbeschränkt abnehmen läßt. In der endlichen Zeitspanne t wird also die Arbeit

$$A = \int_0^t L dt \quad (46a)$$

geleistet. Die *mittlere* oder *durchschnittliche Leistung* während der Zeit t beträgt dann

$$\bar{L} = \frac{1}{t} \int_0^t L dt = \frac{A}{t}. \quad (46b)$$

Wird ein Körper durch eine Kraft \mathfrak{f} mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ verschoben, so beträgt die Leistung nach Gl. (44b) und (45)

$$L = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{f} d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{f} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{f} \mathbf{v} dt = \mathfrak{f} \mathbf{v} = kv \cos \gamma, \quad (47)$$

wenn die Richtungen von \mathfrak{f} und \mathbf{v} den Winkel γ einschließen. Sind \mathfrak{f} und \mathbf{v} gleich gerichtet, so ist $L = kv$.

Die Maßeinheit der Leistung im CGS-System ist $\text{erg} \cdot \text{sec}^{-1}$. Davon abgeleitet ist die Einheit $\text{Joule} \cdot \text{sec}^{-1} = \text{1 Watt} = 10^7 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$. Im technischen Maßsystem ist die Einheit der Leistung $\text{1 mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1}$. Jedoch bedient sich die Technik auch vielfach der Einheit $\text{1 Kilowatt (kW)} = 10^3 \text{ Watt}$. Es ist

$$1 \text{ mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} = 9,81 \text{ Watt}, \quad 1 \text{ kW} = 102 \text{ mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Die ältere technische Leistungseinheit $\text{1 Pferdestärke (PS)} = 75 \text{ mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1}$ kommt heute mehr und mehr außer Gebrauch.

23. Energie. Das Energieprinzip. Ein Körper, an dem Arbeit geleistet wird, erfährt durch diesen Vorgang eine Zustandsänderung, die ihn befähigt, seinerseits einen bestimmten Betrag an Arbeit zu leisten, d. h. unter Rückgängigmachung der Zustandsänderung eine Arbeitsleistung an anderen Körpern zu verursachen. Ist z. B. an einem Körper durch Hebung von einem tieferen auf ein höheres Niveau Verschiebungsarbeit gegen die Schwerkraft geleistet worden, so kann er, während er selbst wieder herabsinkt, an einem anderen, in geeigneter Weise mit ihm verbundenen Körper Hebungsarbeit gegen die Schwerkraft leisten. Oder er kann, indem er frei herabfällt, durch Stoß gegen einen anderen Körper an diesem Verschiebungs- oder Beschleunigungsarbeit oder irgendeine andere Art von Arbeit (Gestaltsänderung, Zertrümmerung usw.) leisten. Das durch die atmosphärischen Vorgänge in die Gebirgshöhen gehobene Wasser kann beim Herabfließen zur Arbeitsleistung verwendet werden, indem es Mühlen, Turbinen usw. treibt. Ebenso besitzt ein Körper, an dem Beschleunigungsarbeit geleistet wurde, infolge der erlangten Geschwindigkeit die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, z. B. durch Stoß gegen einen anderen Körper, oder wie der Wind an den Windrädern. In allen Fällen ist mit einer solchen Arbeitsleistung ein Verlust an der vorher durch Verschiebung oder Beschleunigung gewonnenen Arbeitsfähigkeit verbunden.

In einem Körper, an dem Verschiebungs- oder Beschleunigungsarbeit geleistet wurde, ist also ein vom Betrage dieser Arbeit abhängiger Vorrat an Arbeitsfähigkeit aufgespeichert. Man nennt diesen Vorrat an Arbeitsfähigkeit die *Energie* des Körpers. Je nachdem die Energie eines Körpers auf seiner Lage oder seiner Geschwindigkeit beruht, bezeichnet man sie als *Energie der Lage* oder *potentielle Energie* oder als *Energie der Bewegung* oder *kinetische Energie*.

Für den Vorrat an Arbeitsfähigkeit, d. h. für die Energie eines Körpers, gilt — bei vorläufiger Beschränkung auf rein mechanische Vorgänge — ein fundamentales Gesetz: *Ein Körper, an dem mechanische Arbeit geleistet wurde, vermag infolge der an ihm eingetretenen Zustandsänderung, indem er wieder in seinen früheren Zustand zurückkehrt, seinerseits den gleichen Betrag an Arbeit zu leisten, wie er vorher an ihm geleistet wurde. Die Änderung der Energie eines Körpers ist gleich der an ihm geleisteten Arbeit.* Die Energie eines Körpers, der Arbeit leistet, nimmt um den Betrag der von ihm geleisteten Arbeit ab. *Demnach kann Energie nie vernichtet werden oder aus nichts entstehen, sondern nur von einem Körper auf einen anderen übergehen.* Die Energiezunahme des einen Körpers ist gleich der Energieabnahme des anderen. Dieses Gesetz, eines der wichtigsten und allgemeinsten der ganzen Physik, heißt das *Energieprinzip*

oder der *Satz von der Erhaltung der Energie oder Arbeit*. Seine Gültigkeit für rein mechanische Vorgänge wurde schon 1673 von HUYGENS erkannt.

Da Energie Arbeitsfähigkeit, also sozusagen latente, aufgespeicherte Arbeit ist, so messen wir sie in der gleichen Maßeinheit wie die Arbeit, also im CGS-System in erg, im technischen Maßsystem in mkg*. Man muß indessen zwischen Energie und Arbeit begrifflich unterscheiden. Energie ist ein Zustand, Arbeit ein zeitlich ablaufender Vorgang.

Man berechnet demnach die Energie eines Körpers in einem bestimmten Zustand aus der Arbeit, die notwendig ist, um ihn in diesen Zustand zu versetzen. Die kinetische Energie eines in dem benutzten Bezugssystem ruhenden Körpers wird man natürlich in diesem System gleich Null setzen. Für die potentielle Energie hingegen gibt es keinen solchen natürlichen Nullpunkt. Wir können ihn — wie z. B. den Nullpunkt der Ortskoordinaten eines Körpers — nach Belieben wählen und werden das jeweils nach Gründen der Zweckmäßigkeit tun. Kommt — wie sehr oft — die Schwerkraft als Ursache der potentiellen Energie in Frage, so kann man z. B. den Nullpunkt der potentiellen Energie in die Erdoberfläche oder das Meeresniveau verlegen, d. h. dem betreffenden Körper im gewählten Niveau die potentielle Energie Null zuschreiben. Oft ist es zweckmäßig, die potentielle Energie des Körpers im Ursprung des gewählten Koordinatensystems gleich Null zu setzen. Demnach kann die potentielle Energie eines Körpers sowohl positiv wie negativ sein, denn er kann ja z. B. unter dem Meeresniveau liegen. Die kinetische Energie hingegen ist stets positiv. Die Wahl des Nullniveaus der potentiellen Energie ist physikalisch belanglos, da in die Gleichungen, die die Naturvorgänge beschreiben, stets nur Änderungen der potentiellen Energie, also ihre Differenzen bei verschiedenen Zuständen, nie ihre absoluten Beträge eingehen.

Die *potentielle Energie* P eines Körpers ist hiernach durch Gl. (44b) definiert. Schreiben wir ihm, bevor an ihm die Verschiebungsarbeit $A = \int \mathfrak{f} d\mathbf{r}$ geleistet wurde, die potentielle Energie P_0 zu, so besitzt er, nachdem diese Arbeit an ihm geleistet wurde, die potentielle Energie

$$P = P_0 + A = P_0 + \int \mathfrak{f} d\mathbf{r}. \quad (48)$$

Wird z. B. ein Körper von der Masse m um die Höhe h gegen die Schwerkraft gehoben, so ist die dazu nötige Kraft gleich seinem Gewicht mg , und seine potentielle Energie in der Höhe h beträgt $P = P_0 + mgh$, oder wenn wir seine Anfangsenergie $P_0 = 0$ setzen, $P = mgh$.

Wir berechnen nunmehr die *kinetische Energie* E eines Körpers aus der Arbeit, die nötig ist, um ihm aus der Ruhe eine Geschwindigkeit $v = d\mathbf{r}/dt$ (§ 9) zu erteilen. Zur Zeit $t = 0$ ruhe der Körper ($v = 0$). Nunmehr greife eine Kraft \mathfrak{f} an ihm an und erteile ihm eine Beschleunigung \mathfrak{b} , so daß $\mathfrak{f} = m\mathfrak{b} = m d\mathbf{v}/dt$. Wir beachten ferner, daß das Wegelement $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ ist. Dann ergibt sich für die kinetische Energie des Körpers bei der Geschwindigkeit v (Betrag v)

$$E = A = \int \mathfrak{f} d\mathbf{r} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m \int v dv = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad (49)$$

[Gl. (42)].

Wie insbesondere ROBERT MAYER (1840), JOULE (1843) und HELMHOLTZ (1847) erkannten, ist das Energieprinzip nicht auf mechanische Vorgänge beschränkt. Ziehen wir auch andere Vorgänge mit in Betracht, z. B. solche, die mit einem Umsatz von Wärme verbunden sind, oder elektrische oder chemische Vorgänge, so kann mechanische Energie, d. h. potentielle und kinetische Energie von Körpern, sehr wohl verschwinden oder neu entstehen. Es ist aber möglich,

auf allen Erscheinungsgebieten der Physik Größen zu definieren, die der mechanischen Energie äquivalent sind. Das heißt, eine Aufspeicherung von Arbeitsfähigkeit ist nicht nur in Gestalt potentieller oder kinetischer Energie möglich, sondern auch auf verschiedene andere Arten, z. B. als in einem Körper enthaltene Wärme (Wärmeenergie), in Gestalt einer gewissen Verteilung elektrischer Ladungen (elektrische Energie) oder eines bestimmten chemischen Zustandes eines Körpers (chemische Energie) usw. Zieht man alle möglichen Energieformen in Betracht, so ergibt sich, daß das *Energieprinzip ein allgemein gültiges Naturgesetz ist*. Bei keinem Vorgang in der Natur geht Energie verloren oder wird Energie aus nichts erzeugt. Energie kann nur von einem Körper auf einen anderen übergehen. Dabei kann die Energie die verschiedensten Gestalten annehmen, sich aus der einen Form in die andere verwandeln, und zwar auch an ein und demselben Körper. Die Energie eines Systems von Körpern kann nur durch Zufuhr von Energie von außen (Arbeitsleistung an dem Körpersystem) oder durch Abgabe von Energie nach außen (Arbeitsleistung durch das Körpersystem) geändert werden. Daraus folgt, daß *der Gesamtvorrat des Weltalls an Energie unveränderlich ist*.

Durch die im Energieprinzip niedergelegte und immer wieder bestätigte Erkenntnis ist ein uralter Traum der Menschheit gegenstandslos geworden, nämlich der Versuch, ein „*perpetuum mobile*“ zu ersinnen. Unter einem solchen versteht man nicht, wie der Name eigentlich besagt, eine Vorrichtung, die ohne äußeren Antrieb in ständiger Bewegung bleibt. Das wäre bei völliger Ausschaltung der Reibung durchaus denkbar und kein Widerspruch gegen das Energieprinzip. Ein Beispiel ist die ständige Bewegung der Planeten um die Sonne. Man versteht unter einem *perpetuum mobile* vielmehr eine Vorrichtung, die ohne Energiezufuhr von außen, also ohne daß an ihr Arbeit geleistet wird, selbst dauernd Arbeit leistet, also Energie aus nichts erzeugt, Arbeit „umsonst“ liefert. Das ist nach dem Energieprinzip nicht möglich, und die oft überaus kunstvollen Vorrichtungen, die zu diesem Zweck ersonnen wurden und von unbelehrbaren Erfindern auch heute noch ersonnen werden, sind völlig wertlos. Das Reichspatentamt nimmt Erfindungen, die ein angebliches *perpetuum mobile* betreffen, nicht an.

Da Energie ebensowenig wie Materie aus nichts erzeugt werden kann, so ist Energie, z. B. elektrische Energie, eine Ware, die wie ein körperlicher Gegenstand behandelt wird, und zwar eine Ware, deren Bedeutung im Wirtschaftsleben in ständigem Wachsen begriffen ist.

Wir wollen noch zwei einfache mechanische Beispiele für das Energieprinzip geben. Auf einer schiefen Ebene (Abb. 38) befinde sich ein Körper von der Masse m , der durch eine Schnur über eine Rolle mit einer zweiten Masse m' verbunden ist, die vom oberen Ende der schiefen Ebene frei herabhängt. Die Massen sind so bemessen, daß Gleichgewicht besteht. Es ist also das Gewicht $m'g$ der Masse m' gleich der zur schiefen Ebene parallelen Komponente $mg \cos \gamma$ des Gewichtes der Masse m , und daher $m' = m \cos \gamma$. Nunmehr erhalte die Masse m' einen kleinen Anstoß nach unten und sinke um die Strecke Δs . Dann verschiebt sich gleichzeitig die Masse m um die Strecke Δs längs der Ebene schräg nach oben. Die potentiellen Energien der Massen m und m' seien vor der Verschiebung P_0 und P'_0 . Infolge der Verschiebung wird die potentielle Energie der Masse m' um den Betrag $m'g \Delta s$ vermindert, beträgt also nur noch $P' = P'_0 - m'g \Delta s$. An der Masse m hat längs der Ebene die Kraft $m'g$ parallel zur Ebene gewirkt und sie um die Strecke Δs nach oben verschoben, also an ihr die Arbeit $m'g \Delta s$ geleistet. Demnach ist die potentielle Energie der Masse m

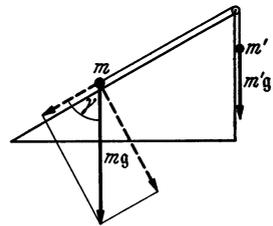


Abb. 38. Zum Energieprinzip.

gewachsen und beträgt nach der Verschiebung $P = P_0 + m'g \Delta s$. Der Zuwachs der potentiellen Energie der Masse m ist also gleich der Abnahme derjenigen der Masse m' , und es ist $P + P' = P_0 + P'_0$. Die Summe der potentiellen Energien der beiden Körper ist also konstant geblieben.

Wir betrachten zweitens einen Körper, der aus der Höhe $x = h$ frei herabfällt. In der Höhe $x = 0$ wollen wir ihm die potentielle Energie $P = 0$ zuschreiben. In der Höhe x beträgt sie dann $P = mgx$. Zur Zeit $t = 0$ werde der Körper aus der Ruhe (Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$) frei fallen gelassen, so daß er von der Schwerkraft die Beschleunigung $b = dv/dt = d^2x/dt^2 = -g$ erfährt. (g muß negatives Vorzeichen haben, da die Beschleunigung in Richtung abnehmender x -Werte gerichtet ist.) Dann ergibt sich durch Integration der Betrag der Geschwindigkeit $v = dx/dt = -gt$ zur Zeit t und durch nochmalige Integration die Höhe $x = h - gt^2/2 = h - v^2/2g$ zur Zeit t . Wir multiplizieren diese Gleichung mit mg (m Masse des Körpers) und erhalten dann

$$mgx = mgh - \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{oder} \quad mgh = mgx + \frac{1}{2}mv^2.$$

mgh ist die potentielle Energie des Körpers in der Höhe h . Seine kinetische Energie ist dort gleich Null. mgx ist die potentielle, $\frac{1}{2}mv^2$ die kinetische Energie des Körpers in der Höhe x . Demnach ist beim Fallen die Gesamtenergie des Körpers unverändert geblieben. Er hat nur auf Kosten seiner potentiellen Energie kinetische Energie gewonnen, es ist potentielle Energie in kinetische Energie von gleichem Betrage verwandelt worden.

Wenn wir den Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit vom Betrage v_0 aus dem Niveau $x = 0$ senkrecht nach oben werfen, so ergibt eine entsprechende Wiederholung der obigen Rechnung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgx + \frac{1}{2}mv^2.$$

In diesem Falle verwandelt sich beim Aufstieg des Körpers die anfängliche kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_0^2$ mehr und mehr in potentielle Energie mgx . In der Höhe $x = v_0^2/2g$ ist die kinetische Energie vollständig verschwunden ($v = 0$). Die Bewegung kehrt sich um und verläuft weiter so, wie oben beim freien Fall beschrieben. Die Summe der kinetischen und potentiellen Energie bleibt auch in diesem Fall konstant.

24. Gleichgewichtszustände von Körpern. Ein Körper kann nie im strengen Sinne kräftefrei sein, denn jeder Körper ist Kräften unterworfen, die von den ihn umgebenden anderen Körpern ausgehen. Irdische Körper sind unter allen Umständen der Schwerkraft ausgesetzt. Daher kann sich ein Körper nur dann in Ruhe befinden, wenn die Resultierende aller an ihm angreifenden Kräfte verschwindet. Ein solcher Zustand heißt ein *Gleichgewichtszustand*.

Im allgemeinen sind die an einem Körper angreifenden Kräfte Funktionen seiner Lage und ändern sich bei einer Lagenänderung des Körpers nach Betrag und Richtung. Daher wird ein bestehender Gleichgewichtszustand im allgemeinen gestört, wenn der Körper eine Verschiebung aus seiner Gleichgewichtslage erfährt. Die Resultierende der an ihm angreifenden Kräfte hat nunmehr einen endlichen Betrag, und sie sucht den Körper in einer bestimmten Richtung zu beschleunigen. Damit dies eintritt, genügt im allgemeinen schon eine beliebig kleine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage. Ist die an einem ein wenig aus der Gleichgewichtslage verschobenen Körper auftretende resultierende Kraft so beschaffen, daß sie ihn wieder in die Gleichgewichtslage zurückzutreiben sucht, so heißt das Gleichgewicht *stabil*. Ist sie aber so beschaffen, daß sie ihn noch weiter von der Gleichgewichtslage zu entfernen sucht, so heißt das Gleichgewicht *labil*. In Sonderfällen kann es vorkommen, daß ein Körper sich auch bei einer Verschiebung aus der Gleichgewichtslage weiter

im Gleichgewicht befindet, indem die Verschiebung keine Änderung der Kräfteverhältnisse hervorruft. Dann heißt das Gleichgewicht *indifferent*. Nur stabile Gleichgewichtslagen können Dauerzustände eines Körpers sein. Befindet sich ein Körper in einer labilen Gleichgewichtslage, so genügt die kleinste äußere Störung, um eine ihn aus dieser forttriebende Kraft zu erzeugen, die ihn dann vollends aus ihr entfernt und in Richtung auf eine stabile Gleichgewichtslage treibt. Auch eine indifferente Gleichgewichtslage kann im strengen Sinne kein Dauerzustand eines Körpers sein. Denn jeder noch so kleine, momentane Anstoß setzt ihn in Bewegung. Er wird dann, da Reibungskräfte nie ganz auszuschließen sind, in einer benachbarten indifferenten Gleichgewichtslage wieder zur Ruhe kommen. Bei einem in stabilem Gleichgewicht befindlichen Körper aber ruft jede durch eine kleine Störung verursachte Verschiebung eine Kraft hervor, die der Störung entgegenwirkt und den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen sucht. Wir wollen einige Beispiele betrachten.

In Abb. 39a befindet sich ein Körper m unter der Wirkung zweier gedehnter Federn in einer Gleichgewichtslage. (Von der Schwerkraft ist abgesehen). Das Gleichgewicht ist stabil. Denkt man sich den Körper nur ein wenig nach oben verschoben (Abb. 39b), so wird dadurch die Richtung der beiden an ihm angreifenden Kräfte so geändert, daß sie nicht mehr in der gleichen Wirkungslinie liegen und eine endliche, nach unten gerichtete Resultierende haben, die den Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurückzutreiben sucht. Verschieben wir den Körper seitlich (Abb. 39c), so wird die Spannung der einen Feder und damit die von ihr ausgeübte Kraft vergrößert, die der anderen verkleinert, und es resultiert eine Kraft, die den Körper wiederum in seine ursprüngliche Lage zurückzutreiben sucht. Denken wir uns aber die Federn in Abb. 39a nicht gedehnt, sondern zusammengedrückt, so ist das Gleichgewicht des Körpers labil. Verschiebt man ihn auch nur ein wenig nach oben (Abb. 39d), so ändert sich die Richtung der an ihm angreifenden Kräfte so, daß ihre Resultierende nach oben weist und den Körper noch weiter aus seiner ursprünglichen Lage zu entfernen sucht.

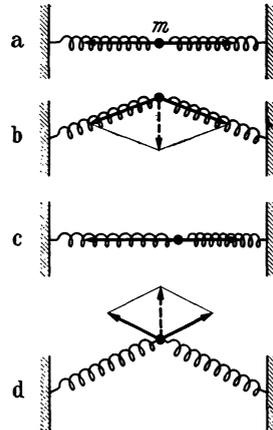


Abb. 39. Zum Gleichgewicht eines durch zwei Federn gehaltenen Körpers.

Während in diesem Beispiel bei den gedachten Verschiebungen stets eine resultierende Einzelkraft auftritt, wird in anderen Fällen bei einer Lagenänderung eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers ein Kräftepaar wirksam, das den Körper zu drehen sucht (§ 28), bei einer stabilen Gleichgewichtslage in diese zurück, bei einer labilen Gleichgewichtslage noch weiter aus ihr weg. Das ist oft dann der Fall, wenn zu den an dem Körper angreifenden und das Gleichgewicht bedingenden Kräften auch Zwangskräfte gehören, und wenn die Bewegungsmöglichkeiten des Körpers in Drehungen (Kippungen) bestehen. Ein rechteckiger Klotz befindet sich auf einer horizontalen Fläche unter der Wirkung der Schwerkraft $m g$ und der ihr entgegengerichteten, durch seinen Druck auf die Fläche hervorgerufenen Zwangskraft $\mathfrak{F}_z = -m g$ im stabilen Gleichgewicht (Abb. 40a). Drehen wir den Klotz ein wenig um eine seiner Kanten oder Ecken, so greift die Zwangskraft nunmehr an dieser Kante oder Ecke an und bildet mit der im Schwerpunkt S angreifenden Schwerkraft ein Kräftepaar, das den Körper in seine ursprüngliche Lage zurückzutreiben sucht. Hingegen ist ein auf seiner Spitze stehender Kegel im labilen Gleichgewicht (Abb. 40b). Denn bei jeder Drehung um seine Spitze bilden die Schwerkraft und die in der Spitze angreifende

Zwangskraft ein Kräftepaar, das den Kegel noch weiter aus der Gleichgewichtslage zu entfernen sucht. Eine auf einer ebenen horizontalen Fläche ruhende Kugel ist offensichtlich in indifferentem Gleichgewicht (Abb. 40c). Ein Körper, der in einem senkrecht über seinem Schwerpunkt S liegenden Punkte A drehbar aufgehängt ist, ist im stabilen Gleichgewicht (Abb. 41). Denn wenn er ein wenig um den Punkt A gedreht wird, sucht ihn das aus der Schwerkraft und der im

Aufhängepunkt auftretenden Zwangskraft bestehende Kräftepaar wieder in seine alte Lage zurückzudrehen.

Da bei jeder Verschiebung eines Körpers aus einer stabilen Gleichgewichtslage eine zurücktreibende Kraft auftritt, so ist eine Verschiebungsarbeit gegen diese Kraft erforderlich, um eine solche Verschiebung zu bewirken. Wird aber an einem Körper Verschiebungsarbeit gegen eine Kraft geleistet, so wächst seine potentielle Energie um den Betrag dieser Arbeit. Eine *stabile Gleichgewichtslage* ist also vor allen ihr unmittelbar benachbarten Lagen dadurch ausgezeichnet, daß der Körper in ihr ein *Minimum der potentiellen Energie* besitzt. Ist ein Körper aus einer labilen Gleichgewichtslage ein wenig verschoben, so unterliegt er der Wirkung einer

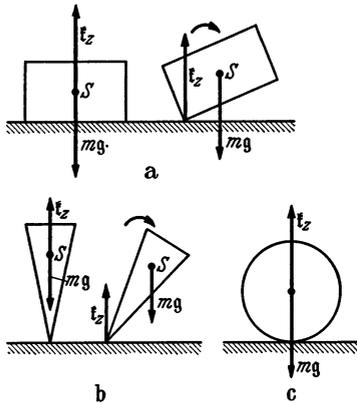


Abb. 40. a stabiles, b labiles, c indifferentes Gleichgewicht.

von ihr fort gerichteten Kraft. Es ist also Verschiebungsarbeit gegen diese Kraft erforderlich, um ihn wieder in die ursprüngliche Lage zurückzubringen. Dabei wächst die potentielle Energie des Körpers, d. h. sie ist um so größer, je näher er der labilen Gleichgewichtslage ist. Eine *labile Gleichgewichtslage* ist also vor allen ihr unmittelbar benachbarten Lagen dadurch ausgezeichnet, daß der Körper in ihr ein *Maximum der potentiellen Energie* besitzt. Bei einer *indifferenten Gleichgewichtslage*, z. B. bei einer homogenen Kugel auf einer horizontalen Ebene, ändern sich die Kräfteverhältnisse auch bei einer endlichen Verschiebung längs der Ebene nicht. Zu einer solchen Verschiebung bedarf es keiner Arbeit; die potentielle Energie ist in jeder Lage auf der Ebene die gleiche.

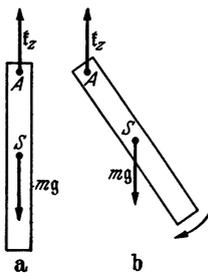


Abb. 41. Stabiles Gleichgewicht eines hängenden Körpers.

Die vorstehenden Gleichgewichtsbedingungen sind aus den Abb. 40 a, b u. c ohne weiteres abzulesen. Die stabile Gleichgewichtslage des Klotzes (Abb. 40 a) ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihr der Schwerpunkt eine tiefere Lage hat als in jeder benachbarten Lage, in die der Klotz durch eine Drehung um eine Kante oder Ecke übergehen kann. Mit jeder möglichen Lagenänderung ist eine Hebung des Schwerpunktes, also eine Vermehrung der potentiellen Energie verbunden. Ebenso im Fall der Abb. 41. Im Fall des labilen Gleichgewichts der Abb. 40 b aber ist mit jeder Drehung des Kegels um seine Spitze eine Senkung des Schwerpunktes, also eine Verminderung der potentiellen Energie verbunden. Bei der Kugel der Abb. 40 c schließlich ändert der Schwerpunkt seine Höhenlage bei einer Rollbewegung nicht. Sofern es sich also um einen Körper handelt, der entgegen der Schwerkraft durch eine Zwangskraft ins Gleichgewicht gebracht ist, kann die Art des Gleichgewichts aus der Änderung der Höhenlage des Schwerpunktes ermittelt werden, die bei einer mit den vorgegebenen Bedingungen verträglichen Lagenänderung des Körpers eintritt. Das allgemeine, für alle Fälle gültige Gleichgewichtskennzeichen aber ist die Änderung der potentiellen

Energie P bei einer gedachten kleinen Lagenänderung. Da sie bei Gleichgewicht ein Extremum — ein Minimum oder ein Maximum — ist, so gilt, wenn ds eine unendlich kleine, mit den gegebenen Bedingungen verträgliche Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist, und wenn P eine stetige Funktion des Ortes ist, die bekannte Bedingung für einen Extremwert

$$\frac{dP}{ds} = 0. \quad (50)$$

In vielen Fällen hat ein Körper unter gegebenen Bedingungen mehrere stabile und labile Gleichgewichtslagen. Ein auf einer horizontalen Fläche befindlicher rechteckiger Klotz hat 6 stabile Gleichgewichtslagen, entsprechend der Zahl seiner Flächen, und $8 + 12 = 20$ labile Gleichgewichtslagen, entsprechend der Zahl seiner Ecken und Kanten. Ein Fadenpendel hat nur eine einzige stabile, keine labile Gleichgewichtslage, der hängende Körper der Abb. 41 außer seiner einen stabilen noch eine labile Gleichgewichtslage, bei der sein Schwerpunkt senkrecht über dem Aufhängepunkt liegt.

Ist bei einem in einer stabilen Gleichgewichtslage befindlichen Körper nur eine verhältnismäßig kleine Arbeit nötig, um ihn in eine nahe benachbarte labile Gleichgewichtslage zu überführen, so ist jene Lage einer labilen Lage ähnlich. Denn es genügt eine ziemlich kleine, aber endliche Störung, um den Körper in die wirklich labile Lage und über diese hinaus in eine andere, stabilere Gleichgewichtslage zu überführen. Ein Beispiel ist ein hochkant auf eine schmale Seite gestelltes Brett. Eine solche Gleichgewichtslage von geringer Stabilität nennt man auch *metastabil*. Die *Standfestigkeit* eines Körpers in einer stabilen Gleichgewichtslage ist um so größer, je mehr Arbeit aufgewendet werden muß, um ihn in die nächstbenachbarte labile Gleichgewichtslage zu überführen.

25. Stoßvorgänge. Ein besonders lehrreiches Beispiel für die Anwendung des Impulssatzes und des Energieprinzips bildet der Zusammenstoß zwischen zwei bewegten Körpern. Wirken auf diese keine äußeren Kräfte, so ist nach dem Impulssatz die Vektorsumme ihrer Impulse vor und nach dem Stoß die gleiche. Denn während des Stoßvorganges selbst sind nur innere Kräfte im System der beiden Körper wirksam. Das Energieprinzip schreibt vor, daß die Summe der kinetischen Energien der beiden Körper vor dem Stoß gleich der Summe der kinetischen Energien nach dem Stoß zuzüglich der beim Stoß in andere Energiearten umgewandelten Energie ist. Eine solche Umwandlung eines Teils der Energie in Wärme, Schall, Formänderungsarbeit usw. findet bei jedem Stoß in mehr oder weniger hohem Grade statt. Ist im idealen Grenzfall der umgewandelte Energiebetrag verschwindend klein, so heißt der Stoß *vollkommen elastisch*. Findet ein Maximum von Energieumwandlung statt, so heißt der Stoß *vollkommen unelastisch*. In diesem Fall bleiben die stoßenden Körper nach dem Stoß beieinander und setzen ihren Weg gemeinsam fort.

Es ist zweckmäßig, zunächst den Sonderfall zu betrachten, daß der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Körper ruht, bzw. die Bewegung der Körper in einem mit dem Schwerpunkt bewegten Koordinatensystem zu beschreiben. In einem solchen Bezugssystem müssen, damit überhaupt ein Zusammenstoß erfolgt, die Schwerpunkte der beiden Körper, die wir uns als Kugeln denken wollen, einander auf parallelen Geraden entgegenlaufen, deren Abstand kleiner als die Summe der beiden Kugelradien ist. Fallen die beiden Geraden zusammen (*zentraler Stoß*), so kehren die beiden Körper beim Stoß ihre Bewegungsrichtungen um, laufen also auf der gleichen Geraden zurück. Haben die beiden Geraden einen endlichen Abstand (*exzentrischer Stoß*), so entfernen sie sich nach dem Stoß ebenfalls auf parallelen Geraden voneinander, die aber mit den ersteren Geraden einen — vom Grade der Exzentrizität des Stoßes abhängigen — Winkel

bilden. In den folgenden Abbildungen aber denken wir uns der Einfachheit halber die stoßenden Körper zu Massenpunkten verkleinert, so daß die parallelen Geraden auch bei exzentrischem Stoß stets zusammenfallen. (Bei exzentrischem Stoß erhält jeder der beiden Körper tatsächlich auch noch einen Drehimpuls [§ 35] und es wäre auch noch der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses zu berücksichtigen. Doch wollen wir davon hier absehen.) Die Körper stoßen dann in ihrem Schwerpunkt zusammen und bewegen sich schließlich von ihm aus wieder auf einer Geraden, die nicht mit der ersten zusammenzufallen braucht, in entgegengesetzten Richtungen von ihm weg. Es seien m_1, m_2 die Massen der beiden Körper, v_1, v_2 ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß, v'_1, v'_2 nach dem Stoß, ε die beim Stoß in andere Energiearten umgewandelte Energie (Abb. 42). Der Impulssatz (§ 20) liefert dann, da bei ruhendem Schwerpunkt die Impulssumme verschwinden muß, die beiden Gleichungen

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \quad m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0. \quad (51)$$

Das Energieprinzip (§ 23) liefert die Gleichung

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \varepsilon. \quad (52)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\left. \begin{aligned} v_1'^2 &= v_1^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} \right), \\ v_2'^2 &= v_2^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Bezeichnen wir die Anfangsenergie $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ mit E , so können wir statt dessen auch schreiben

$$v_1'^2 = v_1^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{E} \right), \quad v_2'^2 = v_2^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{E} \right). \quad (54)$$

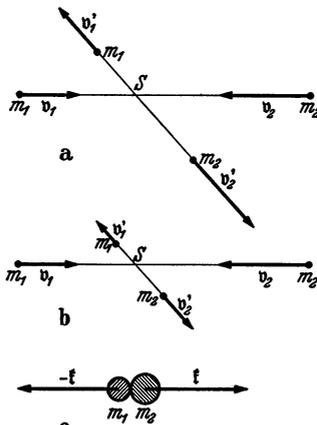


Abb. 42. Stoß bei ruhendem Schwerpunkt.

Diese Gleichungen liefern uns die Quadrate der Geschwindigkeiten relativ zum Schwerpunkt nach dem Stoß, also die skalaren Produkte $v_1 v_1$ und $v_2 v_2$, und diese hängen nur von den Beträgen, nicht von den Richtungen der betreffenden Vektoren ab (§ 21), sagen also nichts über ihre Richtung aus. Demnach liefert Gl. (53) bzw. (54) auch nur die Beträge v'_1 und v'_2 der Geschwindigkeiten nach dem Stoß,

$$v'_1 = v_1 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{E}}, \quad v'_2 = v_2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{E}}. \quad (55)$$

Über die Richtung erfahren wir nichts. Wir wissen nur, daß v'_1 und v'_2 entgegengesetzt gerichtet sein müssen, da nach Gl. (51) $v_2 = -v_1 m_1/m_2$ ist. Die Unkenntnis der Richtung ist auch durchaus verständlich. Denn die Richtung nach dem Stoß muß von den Einzelheiten des Stoßvorganges (dem Grade der Exzentrizität) abhängen, über die wir hier nichts vorausgesetzt haben.

Nach Gl. (55) behalten die Geschwindigkeiten relativ zum Schwerpunktsystem beim vollkommen elastischen Stoß ($\varepsilon = 0$) ihre alten Beträge, ändern nur im allgemeinen ihre Richtung (Abb. 42a). Ist der Stoß nicht vollkommen elastisch, so nehmen die Geschwindigkeiten um die gleichen Bruchteile ihrer ursprünglichen Beträge ab (Abb. 42b), z. B. bei $\varepsilon/E = 3/4$ um die Hälfte. Ist der Stoß vollkommen unelastisch, so ist — bei ruhendem Schwerpunkt — $\varepsilon = E$; die gesamte kinetische Energie wird in andere Energiearten umgewandelt. Es ist $v'_1 = v'_2 = 0$, und die Körper verharren nach dem Stoß in ihrem Schwerpunkt in Ruhe.

Nunmehr können wir leicht zur Betrachtung von Stößen übergehen, bei denen der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Körper nicht ruht und die

Geschwindigkeiten einen beliebigen Winkel miteinander bilden. Da wir voraussetzen, daß auf die Körper keine äußeren Kräfte wirken, so bewegt sich der Schwerpunkt nach dem Schwerpunktsatz, unbeeinflußt durch den Stoß, bei dem nur innere Kräfte wirksam sind, nach dem Stoß geradlinig und gleichförmig mit der gleichen Geschwindigkeit v_s , weiter, die er vor dem Stoß besaß. Wir brauchen also den beiden Körpern der Abb. 42 nur die gleiche zusätzliche Geschwindigkeit v_s zu erteilen, und zwar vor und nach dem Stoß, um zum Fall des bewegten Schwerpunktes überzugehen. Die wirkliche Geschwindigkeit

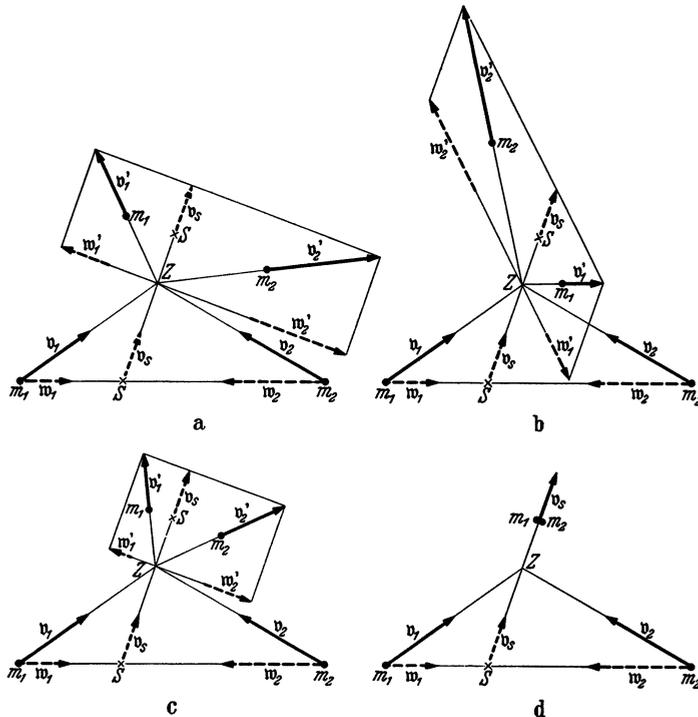


Abb. 43. a und b vollkommen elastischer, c unvollkommen elastischer, d vollkommen unelastischer Stoß bei bewegtem Schwerpunkt. $m_1 = m_2$.

der Körper ist dann die Vektorsumme v_1, v_2 bzw. v'_1, v'_2 ihrer Relativgeschwindigkeit w_1, w_2 bzw. w'_1, w'_2 gegenüber dem Schwerpunktssystem und der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_s (Abb. 43). Wir verfahren dann so, daß wir, wie im Fall des ruhenden Schwerpunkts, im Stoßpunkt Z die neuen Relativgeschwindigkeiten w'_1, w'_2 gegenüber dem Schwerpunktssystem nach Richtung und Betrag antragen und die Resultierenden v'_1, v'_2 dieser Geschwindigkeiten und der unverändert gebliebenen Schwerpunktsgeschwindigkeit v_s bilden. Die neuen Geschwindigkeiten hängen jetzt natürlich davon ab, welchen Winkel die neuen Relativgeschwindigkeiten mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit bilden. Abb. 43a u. b zeigt zwei verschiedene Fälle bei vollkommen elastischem Stoß zweier gleicher Massen und bei gleichen Anfangsbedingungen, bei denen aber der eigentliche Stoß unter verschiedenen Umständen erfolgt. Abb. 43c zeigt einen unvollkommen elastischen Stoß unter sonst gleichen Bedingungen wie in Abb. 43a. Es ist angenommen, daß die Relativgeschwindigkeiten w'_1, w'_2 gegenüber dem Schwerpunktssystem infolge des Stoßes auf $\frac{3}{8}$ der Beträge von w_1 und w_2 gesunken sind. Im Fall des vollkommen unelastischen Stoßes verschwinden nach dem Stoß die Relativgeschwindigkeiten gegenüber dem Schwerpunktssystem, und die beiden Körper

bewegen sich mit der Schwerpunktschwindigkeit v_s gemeinsam weiter (Abb. 43d).

Wir wollen noch den besonderen Fall betrachten, daß sich zwei Körper auf der gleichen Geraden bewegen und auch nach dem Stoß auf ihr verbleiben, daß aber ihr Schwerpunkt nicht ruht, so daß auch die Impulssumme zwar konstant ist, aber nicht, wie in Gl. (51), verschwindet. An die Stelle der beiden Gl. (51) tritt dann die eine Gleichung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (56)$$

während die Energiegleichung Gl. (52) bestehen bleibt. Dann lautet die Lösung der Gl. (52) und (56)

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}}, \quad (57a)$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}}. \quad (57b)$$

Das den beiden Gleichungen gemeinsame erste Glied ist nach Gl. (36) die Schwerpunktschwindigkeit v_s . Zu ihr addieren sich die durch die zweiten Glieder dargestellten Relativgeschwindigkeiten gegenüber dem Schwerpunkt. Beim *vollkommen elastischen Stoß* ($\varepsilon = 0$) ergibt sich

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (58)$$

Handelt es sich um zwei gleiche Massen, $m_1 = m_2$, so wird $v'_1 = v_2$ und $v'_2 = v_1$. Die Massen tauschen beim Stoß ihre Geschwindigkeiten aus. Ruhte die eine vor dem Stoß, so ruht nach dem Stoß die andere. Beim *vollkommen unelastischen Stoß* hat der Energieverlust ε seinen größten möglichen Betrag. Das ist dann der Fall, wenn die in den Gl. (57) auftretende Wurzel verschwindet, wenn also

$$\varepsilon = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (59)$$

Die Geschwindigkeiten der beiden Massen sind dann nach dem Stoß gleich groß, und, wie schon bewiesen, gleich der Schwerpunktschwindigkeit,

$$v'_1 = v'_2 = v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (60)$$

Wir haben im vorstehenden den eigentlichen Stoßvorgang überhaupt nicht in Betracht gezogen, sondern nur auf Grund des Energieprinzips und des Impulssatzes sozusagen die Bilanz des Stoßvorganges gezogen. Wir wollen jetzt auch den Stoß selbst genauer betrachten. In dem Augenblick, in dem die erste Berührung der Körper erfolgt, beginnt an ihren Berührungsstellen eine ständig zunehmende Formänderung (Zusammendrückung). Dabei wird auf Kosten kinetischer Energie Formänderungsarbeit gegen die elastischen Kräfte der Körper geleistet, und es wird in ihnen elastische Energie aufgespeichert. Das dauert bei zentralem Stoß so lange an, bis sich die Geschwindigkeiten der beiden Körper ausgeglichen haben und sie sich momentan beide mit der Geschwindigkeit v_s ihres Schwerpunktes bewegen. Nunmehr beginnen die durch die elastische Formänderung wachgerufenen Gegenkräfte, die die Gestalt der Körper wieder herzustellen suchen, die Körper wieder voneinander weg zu treiben (Abb. 42c). Sofern die aufgespeicherte elastische Energie nicht inzwischen ganz oder teilweise in andere Energieformen, insbesondere in Wärme, verwandelt worden ist, wird sie in der zweiten Phase des Stoßvorganges restlos wieder in kinetische Energie der Körper umgewandelt, und es liegt ein *vollkommen elastischer Stoß* vor. Ist die Energie aber schon restlos umgewandelt,

wenn die Körper gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben, so fällt die zweite Phase fort. Das ist der Fall beim vollkommen unelastischen Stoß.

Zur Untersuchung von Stoßvorgängen kann das in Abb. 44 dargestellte Gerät dienen, an dem einige gute Stahlkugeln an Doppelschnüren (bifilar) aufgehängt sind. Hübsch ist unter anderem der folgende Versuch. Man bringt eine Anzahl von gleich großen Kugeln genau miteinander in Berührung, hebt auf der einen Seite eine oder mehrere Kugeln ab und läßt sie gegen die übrigen stoßen. Dann fliegen am anderen Ende ebenso viele Kugeln fort, und zwar mit der gleichen Geschwindigkeit, die vorher die stoßenden Kugeln besaßen, während diese zur Ruhe kommen. Dies folgt aus dem Energieprinzip und dem Impulssatz. Es sei n die Zahl, v die Geschwindigkeit der stoßenden Kugeln, n' die Zahl, v' die Geschwindigkeit der fortfliegenden Kugeln, m die Masse einer Kugel. Dann muß sein

$$n \frac{1}{2} m v^2 = n' \frac{1}{2} m v'^2 \quad \text{und} \quad n m v = n' m v'.$$

Hieraus folgt $n' = n$ und $v' = v$. Der vollkommen unelastische Stoß wird gut mit zwei Bleikugeln verwirklicht. Lehrreiche Beispiele für die Stoßgesetze liefert auch das Billardspiel.

26. Kraftfelder. Damit ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, ist es nicht immer nötig, daß sich die Körper unmittelbar berühren. In vielen Fällen besteht eine Wechselwirkung auch dann, wenn die Körper räumlich getrennt sind und der Raum zwischen ihnen völlig leer ist. Beispiele hierfür sind die allgemeine Massenanziehung (§ 45), die sich auch in der irdischen Schwerkraft äußert, und die Anziehung und Abstoßung zwischen elektrischen Ladungen oder zwischen Magnetpolen (§ 131 und 186). In diesen Fällen besteht also *wenigstens scheinbar* eine *Fernwirkung* zwischen den Körpern. Sie äußert sich darin, daß ein Körper, der sich irgendwo in der näheren oder weiteren Umgebung eines zweiten Körpers befindet, der Wirkung einer durch diesen hervorgerufenen Kraft unterliegt. Diese Kraft hängt im allgemeinen nach Betrag und Richtung von der gegenseitigen Lage der beiden Körper ab, ist also eine Funktion des Ortes. Jedoch ist die Annahme, daß es sich in solchen Fällen wirklich um eine unvermittelte Fernwirkung handelt, schon begrifflich unbefriedigend. Nun können wir aber auch in den meisten Fällen nachweisen, daß die Kraftwirkung sich nicht momentan, d. h. unendlich schnell ausbreitet, sondern daß stets eine endliche, vom Abstand der beiden Körper abhängige Zeit verstreicht, ehe eine am einen Körper neu auftretende krafterzeugende Ursache als Wirkung am anderen in die Erscheinung tritt. (Nur bei der Gravitation ist ein experimenteller Nachweis bisher nicht möglich gewesen. Die Tatsache unterliegt aber auch hier keinem Zweifel.) Aus diesem Sachverhalt zog zuerst FARADAY den Schluß, daß es wirkliche Fernwirkungen nicht gibt. Er schloß, daß die Kraftwirkungen durch den Raum und durch seine Vermittlung von einem Körper auf einen anderen übertragen werden, daß also die Anwesenheit eines Körpers in dem ihn umgebenden Raum, auch wenn er völlig leer ist, gewisse Veränderungen hervorruft, die von dem jeweiligen Zustand des Körpers abhängen. Diese Veränderungen erstrecken sich rings um den Körper — im allgemeinen mit der Entfernung abnehmend — durch den ganzen Raum. Die Wirkungen auf einen zweiten Körper werden hiernach durch die örtlichen Veränderungen hervorgerufen, die der Raum am

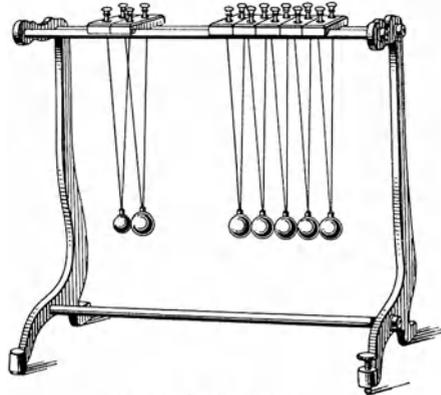


Abb. 44. Kugelstoßgerät.

Ort des zweiten Körpers infolge der Anwesenheit des ersten erfahren hat. Diese Vorstellung setzt also an die Stelle einer unvermittelten Fernwirkung eine durch den Raum vermittelte *Nahewirkung* von Ort zu Ort des Raumes, und zwar durch den Raum als solchen, nicht durch etwa in ihm vorhandene Materie. Denn Wirkungen dieser Art bestehen zwischen Körpern auch im leeren Raum, z. B. zwischen den Himmelskörpern im leeren Weltraum. Sie können durch etwa im Raum vorhandene Materie beeinflußt werden, werden aber durch sie nicht bedingt.

Das bedeutet, daß der leere Raum fähig ist, in seinen einzelnen Punkten unterschiedliche physikalische Zustände anzunehmen. *Der Raum wird damit zum Träger physikalischer Eigenschaften.* Einen Raumbereich, in dem auf Körper Kräfte wirken, nennt man ein *Kraftfeld* oder kurz ein *Feld*, und die Nahewirkungstheorie heißt deshalb auch *Feldtheorie*.

Die Nahewirkungstheorie steht in einem engen Zusammenhange mit den Erhaltungssätzen der Energie und des Impulses. Leistet eine Kraft an einem Körper Arbeit, so ändern sich seine Energie und sein Impuls. Diese Änderungen müssen auf Kosten von Energie und Impuls desjenigen Körpers gehen, von dem die Kraftwirkung ausgeht. Nun haben wir bereits gesagt, daß bei endlichem Abstände zweier Körper eine endliche Zeit zwischen dem Auftreten der Ursache, also der Abgabe von Energie und Impuls durch den einen Körper, und der Wirkung, also ihrer Aufnahme durch den zweiten Körper, verstreicht. Während dieser Zeit befinden sich Energie und Impuls weder an dem einen noch an dem anderen Körper. Will man nicht annehmen, daß sie während dieser Zeit verschwunden sind, sondern die Erhaltungssätze streng aufrechterhalten, so muß man schließen, daß sie sich während dieser Zeit auf dem Wege von dem einen Körper nach dem anderen befinden. Es müssen sich also Energie und Impuls in irgendeiner Form mit endlicher Geschwindigkeit durch den Raum von dem einen Körper nach dem anderen bewegen, und während dieser Zeit muß der Raum Träger der Energie und des Impulses sein. Diese Vorstellung ist ganz analog zur Fortpflanzung von Energie und Impuls durch einen materiellen Stoff, z. B. in Gestalt einer in Wasser oder Luft verlaufenden Druck- oder Schallwelle.

Wenn wir auf diese Weise dem leeren Raum die Fähigkeit zuschreiben, gewisse Zustände anzunehmen, durch die sich die einzelnen Raumteile voneinander unterscheiden können, und Träger physikalischer Eigenschaften zu sein, insbesondere Energie und Impuls zu übertragen, so gewinnt er eine Bedeutung, die über seine rein geometrische Bedeutung als Inbegriff aller Orte im Weltall weit hinausgeht. Er wird zu einem wirklichen Gegenstand der physikalischen Forschung, der es obliegt, seine physikalischen Eigenschaften zu entdecken. Denn diese kann man nicht, wie es z. B. in der Geometrie des euklidischen Raumes geschieht, durch gewisse Axiome a priori definieren, sondern man kann sie nur auf Grund der experimentellen Erfahrung ermitteln. Der Raum tritt daher in die Reihe der physikalischen „Medien“ neben die materiellen Stoffe oder Medien.

In den Anfängen der Nahewirkungstheorie und bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts war man überzeugt, daß alle Vorgänge in der Natur mechanisch anschaulich begreifbar sein müßten. Die Unmöglichkeit, sich ein nicht materielles Medium anschaulich vorzustellen, führte dazu, daß man als Träger der physikalischen Eigenschaften im Raum einen masselosen Stoff, den *Weltäther* oder *Äther*, annahm, der überall, auch im scheinbar leeren Raum, vorhanden sei und alle Körper durchdringe. Diese Annahme ist durch die experimentelle Erfahrung eindeutig widerlegt worden (§ 326). Wenn daher heute in der Physik das Wort Äther noch gebraucht wird, so ist darunter nichts anderes zu verstehen

als der Raum selbst als Träger physikalischer Eigenschaften im Gegensatz zum rein geometrischen Raumbegriff.

Das in einem Raum herrschende Kraftfeld ist charakterisiert durch Betrag und Richtung der Kraft, die ein Körper in den einzelnen Raumpunkten des Feldes erfährt. Damit an einem Körper eine solche Kraft überhaupt auftritt, muß er Träger einer bestimmten, für die Art des betreffenden Kraftfeldes charakteristischen Eigenschaft sein. Diese Eigenschaft besteht z. B. in einem Schwerkraftfeld (Gravitationsfeld) in der (schweren) Masse, in einem elektrischen Feld in der elektrischen Ladung des Körpers usw. Wir wollen den Betrag, in dem ein Körper eine solche Eigenschaft besitzt, hier allgemein mit w bezeichnen. Je größer dieser Betrag ist, um so größer ist die im Kraftfelde auf den Körper wirkende Kraft,

$$\mathfrak{f} = w \mathfrak{F}. \quad (61)$$

Die Größe \mathfrak{F} heißt die *Feldstärke* in dem betreffenden Raumpunkt. Sie ist ein der örtlichen Kraft \mathfrak{f} gleichgerichteter Vektor und ihrem Betrage nach gleich der Kraft, die ein Körper im betrachteten Raumpunkt erfährt, wenn er die Eigenschaft w im Betrage \mathfrak{r} besitzt. Daher ist die Feldstärke in einem Schwerkraftfelde ihrem Betrage nach gleich der auf die Masse \mathfrak{r} g wirkenden Schwerkraft, in einem elektrischen Felde gleich der Kraft, die ein mit der elektrischen Ladungseinheit behafteter Körper erfährt usw. Ein Kraftfeld kann also durch Angabe des Betrages und der Richtung der Feldstärke in seinen einzelnen Raumpunkten beschrieben werden. Es ist vollständig bekannt, wenn die Feldstärke nach Betrag und Richtung als Funktion der Ortskoordinaten bekannt ist.

Wird ein Körper in einem Kraftfelde durch eine der Kraft $\mathfrak{f} = w \mathfrak{F}$ entgegengerichtete gleich große Kraft $-w \mathfrak{F}$ von einem Punkt A nach einem Punkt B verschoben, so ändert sich dabei seine potentielle Energie nach Gl. (48) um den Betrag

$$P = -w \int_A^B \mathfrak{F} d\mathfrak{r} = w \Delta U. \quad (62)$$

Die Größe ΔU heißt die *Potentialdifferenz* (in manchen Fällen auch die *Spannung*) zwischen den Punkten A und B des Kraftfeldes. Sie ist gleich der Arbeit, die nötig ist, um einen Körper, der die Eigenschaft w im Betrage \mathfrak{r} besitzt, von A nach B zu verschieben. Potentialdifferenz und Feldstärke stehen also mit einander in der gleichen Beziehung wie Arbeit und Kraft. Nach § 22 ist die Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie willkürlich, und wir können ihr in irgendeinem Punkt O des Kraftfeldes den Betrag Null zuschreiben. Die Potentialdifferenz eines Raumpunktes A gegen den gewählten Bezugspunkt O heißt das *Potential* in jenem Raumpunkt. Wir bezeichnen nunmehr die auf den Punkt O bezogenen Potentiale in den einzelnen Raumpunkten A mit U . Dann ist nach Gl. (62)

$$-w \int_O^A \mathfrak{F} d\mathfrak{r} = w U, \quad U = - \int_O^A \mathfrak{F} d\mathfrak{r}. \quad (63)$$

Das durch Gl. (63) definierte Potential ist nicht in allen Arten von Kraftfeldern eindeutig, d. h. vom Wege unabhängig, auf dem man sich die Verschiebung von O nach A vorgenommen denkt. Es ist dann eindeutig, wenn die Summe der Arbeiten, die geleistet werden, wenn man einen Körper auf geschlossener Bahn zum Ausgangspunkt zurückführt, unabhängig vom Wege gleich Null ist. Solche Felder heißen *wirbelfrei*. Ist das aber nicht der Fall, so ist das Potential nicht eindeutig, und es liegt ein *Wirbelfeld* vor. Ein wirbelfreies Feld kann also auch durch Angabe des Potentials in seinen einzelnen Raumpunkten beschrieben werden. Es ist vollständig bekannt, wenn das Potential als Funktion der Ortskoordinaten bekannt ist.

Im allgemeinen wechselt in einem Kraftfeld die Feldstärke von Ort zu Ort ihre Richtung und ihren Betrag. Ein *homogenes Feld* ist ein solches, in dem das nicht der Fall ist, indem also die Feldstärke überall gleiche Richtung und gleichen Betrag hat. Ein Feld, in dem die Feldstärke überall zeitlich konstant ist, heißt ein *stationäres Feld*, ein solches, indem sich die Feldstärke überall periodisch ändert, ein *Wechselfeld*.

Wird ein Körper in einem Kraftfelde senkrecht zur jeweiligen Feldstärke, also senkrecht zur Krafrichtung, verschoben, so ist dazu nach § 20 keine Arbeit erforderlich. Die potentielle Energie des Körpers ändert sich bei einer solchen Verschiebung nicht. In jeder zur Richtung der Feldstärke senkrechten Fläche (*Äquipotentialfläche, Niveaufläche*) besteht also überall das gleiche Potential. Die Äquipotentialflächen sind stets geschlossene Flächen. Die senkrecht zu den Äquipotentialflächen verlaufenden Kurven heißen *Kraftlinien* oder *Feldlinien*, denn sie (bzw. ihre Tangenten in den einzelnen Raumpunkten) geben überall die örtliche Richtung der Feldstärke, also auch der Kraft, an.

Die Feldstärke ist ein Vektor, das Potential — als skalares Produkt zweier Vektoren [Gl. (63)] — ein Skalar. Daher bezeichnet man ein Feld als Inbegriff der in seinen Raumpunkten herrschenden Feldstärken als ein *Vektorfeld*, als Inbegriff der entsprechenden Potentiale als ein *skalares Feld*. Die Beschreibung eines Feldes durch das Potential ist im allgemeinen einfacher, da das Potential zu seiner Beschreibung nur der Angabe des Betrages bedarf. Bei der Feldstärke kommt noch die Angabe der Richtung hinzu bzw. es müssen die Beträge ihrer drei Komponenten angegeben werden.

Wir beschränken uns hier auf diese allgemeinen Definitionen und gehen auf Einzelheiten erst bei der Besprechung spezieller Kraftfelder ein.

27. Das Schwerkraftfeld an der Erdoberfläche. Ein Beispiel eines Kraftfeldes ist das Schwerkraftfeld an der Erdoberfläche. In ihm befindet sich jeder Körper überall unter der Wirkung der Erdanziehung. Das Schwerkraftfeld ist kein homogenes Feld, da seine Kraftlinien radial auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet sind, und weil die Schwerkraft mit der Höhe abnimmt (§ 12). In ausreichend kleinen Bereichen können wir es aber wie ein homogenes Feld behandeln.

Die für das Schwerkraftfeld charakteristische Körpereigenschaft, die wir in § 26 allgemein mit w bezeichnet haben, ist die *schwere Masse*, die wir vorläufig, zum Unterschied von der trägen Masse m , mit m' bezeichnen wollen. Demnach ist die Feldstärke \mathfrak{F} des Schwerkraftfeldes nach Gl. (61) durch die Gleichung

$$\mathfrak{f} = m' \mathfrak{F} \quad (64)$$

definiert. Andererseits erfahren im Schwerkraftfelde alle Körper die gleiche Beschleunigung g (§ 12), so daß für die Schwerkraft \mathfrak{f} auch die Gleichung $\mathfrak{f} = m g$ gilt. Da wir aber in § 12 die träge Masse gleich der schweren Masse gesetzt haben, $m = m'$, so folgt

$$\mathfrak{F} = g, \quad (65)$$

d. h. im Schwerkraftfelde ist die Feldstärke mit der Beschleunigung g identisch. Dies ist eine besondere Eigenschaft des Schwerkraftfeldes und folgt *nur* aus der Gleichheit der schweren und der trägen Masse (vgl. § 12). In anderen Kraftfeldern sind Feldstärke und Beschleunigung keineswegs identisch.

Wird ein Körper von der Masse m um die Höhe h senkrecht gehoben, so beträgt die dabei aufzuwendende Arbeit $A = m g h$ (§ 22). Um den gleichen Betrag hat seine potentielle Energie zugenommen. Demnach beträgt das Potential in der Höhe h , d. h. die potentielle Energie der Masse 1 g , wenn wir es in der Höhe $h = 0$ gleich Null setzen,

$$U = g h. \quad (66)$$

Die Einheit der Feldstärke im Schwerkraftfeld ist nach Gl. (64) und (65) $1 \text{ dyn} \cdot \text{g}^{-1} = 1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ ($1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$), die Einheit des Potentials nach Gl. (66) $1 \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$ ($1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$). Die Äquipotentialflächen des Schwerkraftfeldes sind fast genau Kugelflächen.

Erteilt man einem Körper eine Geschwindigkeit v_0 (Betrag v_0) in einer unter dem Winkel φ gegen die Horizontale geneigten Richtung (Abb. 45), so wird seine weitere Bewegung durch die Schwerkraft beeinflusst, und er beschreibt eine nach unten gekrümmte Bahn. Wir zerlegen seine Geschwindigkeit in ihre horizontale und ihre vertikale Komponente, deren Beträge v_x und v_y im Augenblick des Starts $v_x^0 = v_0 \cos \varphi$ und $v_y^0 = v_0 \sin \varphi$ betragen, und behandeln die Bewegung als die Überlagerung zweier aufeinander senkrechter, geradliniger Bewegungen nach der Methode des § 7. In der horizontalen x -Richtung wirkt auf den Körper keine Kraft, und er bewegt sich in dieser Richtung mit konstanter Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \varphi. \quad (67)$$

Im Startpunkt seien $x = 0$, $y = 0$ und $t = 0$. Dann folgt durch Integration der Gl. (67)

$$x = v_0 t \cos \varphi. \quad (68)$$

In vertikaler Richtung erfährt der Körper durch die Schwerkraft eine nach unten, also gegen die positive y -Richtung gerichtete Beschleunigung vom Betrage g , so daß

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (69)$$

Durch zweimalige Integration erhalten wir, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen,

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin \varphi - gt \quad \text{und} \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2. \quad (70)$$

Indem wir aus den Gl. (68) und (70) die Zeit t eliminieren, erhalten wir die Gleichung der Bahnkurve des Körpers,

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}. \quad (71)$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel im höchsten Punkt der Bahn liegt. In diesem Punkt ist $v_y = 0$, und wir erhalten aus Gl. (70) die Steigzeit t_h und die Steighöhe $y = h$,

$$t_h = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}. \quad (72)$$

Nach Gl. (71) wird das Ausgangsniveau $y = 0$ bei einer Wurfweite

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \varphi \quad (73)$$

zum zweitenmal erreicht. Nun ist $\sin 2 \varphi = \sin (180^\circ - 2 \varphi) = \sin 2 (90^\circ - \varphi)$. Man erreicht also bei einem Anstellwinkel $90^\circ - \varphi$ die gleiche Wurfweite, wie beim Anstellwinkel φ (Abb. 45 a u. b). Der eine dieser Winkel ist also größer, der andere um ebenso viel kleiner als 45° . Die beiden Fälle werden identisch bei $\varphi = 45^\circ$. In diesem Fall wird die größte Wurfweite erreicht, die bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit möglich ist, nämlich $x_m = v_0^2/g$. Die Steighöhe beträgt in diesem Fall $h = v_0^2/4g$, also ein Viertel der Wurfweite. Die Möglichkeit, bei

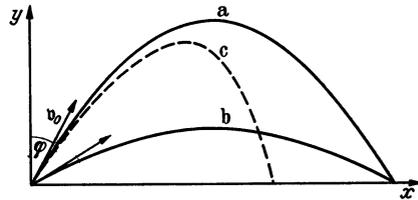


Abb. 45. Schräger Wurf. a) $\varphi = 60^\circ$, b) $\varphi = 30^\circ$, c) ballistische Kurve.

gleicher Anfangsgeschwindigkeit die gleiche Wurfweite bei flachem und bei steilem Abschluß zu erzielen und damit auch einen flacheren oder steileren Einfall zu bewirken, spielt eine wichtige Rolle in der Ballistik. Die Artillerie unterscheidet einen Flachschuß und einen Steilschuß. Die größte Wurfhöhe wird bei senkrechtem Wurf erzielt und beträgt $h = v_0^2/2g$.

Wir haben bisher die unvermeidliche Luftreibung nicht berücksichtigt. Bei großen Geschwindigkeiten, wie sie bei den Geschossen der Infanterie und der Artillerie vorkommen, beeinflußt sie die Bewegung und die Bahnform beträchtlich. Die Wurfweite wird stark verringert. Der absteigende Ast der Bahn zeigt eine stärkere Krümmung nach unten als der aufsteigende Ast (*ballistische Kurve*, Abb. 45c).

Die Gesetze des senkrechten Wurfs nach oben ergeben sich als Sonderfall, wenn man in den obigen Gleichungen $\varphi = 90^\circ$ setzt. Wird ein Körper zur Zeit $t = 0$ in der Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ frei fallen gelassen, so ergibt die Integration der Gl. (69)

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{oder} \quad h - y = \frac{1}{2}gt^2. \quad (74)$$

Die Fallgeschwindigkeit ist also der Zeit proportional, und die Fallstrecke $h - y$ wächst mit dem Quadrat der Fallzeit. Die nach Durchfallen der Höhe h erreichte Geschwindigkeit beträgt

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (75)$$

Daß beim freien Wurf und Fall das Energieprinzip erfüllt ist, haben wir in § 22 nachgewiesen.

Beim freien Fall treten schon nach kurzer Zeit bzw. auf kurzen Strecken beträchtliche Geschwindigkeiten auf. Nach 1 sec sind fast 5 m, nach 2 sec schon fast 20 m durchfallen. Daher können die Gesetze die freien Falles mit einfachen Mitteln nur dann einigermaßen genau nachgewiesen werden, wenn beträchtliche Fallhöhen zur Verfügung stehen. GALILEI, der die Fallgesetze 1590 entdeckte und 1604 genauer formulierte, benutzte für seine Fallversuche die einzelnen Stockwerke des bekannten schiefen Turms in Pisa.

28. Statisches Moment einer Kraft. Kräftepaare. Es sei \mathfrak{k} eine an einem Körper in A angreifende Kraft, P ein beliebiger Punkt im Raum, r der von P nach dem Angriffspunkt A weisende Fahrstrahl (Abb. 46a). Dann heißt das Vektorprodukt (§ 10)

$$\mathfrak{M} = [r \mathfrak{k}] \quad (76)$$

das *statische Moment* der Kraft \mathfrak{k} bezüglich des Punktes P . Sein Betrag ist nach § 10, Gl. (31)

$$N = r k \sin \gamma = r_0 k, \quad (77)$$

wenn die Richtungen von r und \mathfrak{k} den Winkel γ einschließen, und wenn r_0 (Betrag $r_0 = r \sin \gamma$) der von P senkrecht auf die Wirkungslinie von \mathfrak{k} weisende Fahrstrahl ist. Wir können den Fahrstrahl r in die beiden Vektoren r_0 senkrecht und r' parallel zur Richtung von \mathfrak{k} zerlegen, so daß $r = r_0 + r'$. Dann ist $\mathfrak{M} = [(r_0 + r') \mathfrak{k}] = [r_0 \mathfrak{k}]$, da $[r' \mathfrak{k}] = 0$ als Vektorprodukt zweier gleichgerichteter Vektoren. Statt Gl. (76) können wir demnach auch schreiben.

$$\mathfrak{M} = [r \mathfrak{k}] = [r_0 \mathfrak{k}]. \quad (78)$$

Der Vektor r_0 heißt der *Arm* der Kraft \mathfrak{k} bezüglich des Punktes P . Aus Gl. (78) folgt, daß sich das statische Moment von \mathfrak{k} bezüglich P bei einer Verschiebung des Angriffspunktes A längs der Wirkungslinie von \mathfrak{k} nicht ändert.

Gemäß der *Schraubenregel* (§ 10) ist das statische Moment ein Vektor, der auf der durch die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{f} gelegten Ebene senkrecht steht, und der in diejenige Richtung weist, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man sie in dem Sinne dreht, der einer Drehung des Vektors \mathbf{r} in diejenige des Vektors \mathbf{f} entspricht (Abb. 46 b). Im Fall der Abb. 46a würde diese Drehung im Uhrzeigersinne erfolgen, so daß der Vektor \mathfrak{M} senkrecht zur Zeichnungsebene nach hinten weist. Diese Festsetzung hat folgende anschauliche Bedeutung.

Die Kraft \mathbf{f} sucht ihren Angriffspunkt A in ihrer Richtung zu verschieben, und bei einer solchen Verschiebung dreht sich der vom festen Punkt P nach A weisende Fahrstrahl \mathbf{r} um eine durch P gehende Achse, die senkrecht zu der durch die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{f} gelegten Ebene ist. Je nach der Richtung von \mathbf{f} erfolgt die Drehung im einen oder anderen Sinne. Liegt P auf der Wirkungslinie von \mathbf{f} , so findet bei einer Verschiebung des Angriffspunktes eine Drehung von \mathbf{r} nicht statt, und das statische Moment ist — Übereinstimmung mit Gl. (77) ($\sin \gamma = 0$, $r_0 = 0$) — gleich Null.

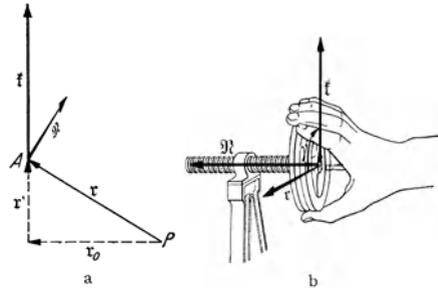


Abb. 46. Zum statischen Moment einer Kraft. a Definition, b Schraubenregel.

Die Bedeutung des statischen Moments für die Wirkung einer Kraft wird aus folgender Erfahrungstatsache deutlich. Abb. 47 zeigt einen um eine durch O gehende feste Achse drehbaren Körper. Es ist aus Symmetriegründen klar, daß Gleichgewicht besteht, wenn an ihm zwei gleich große, parallele Kräfte $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$ in gleichen Abständen beiderseits von O angreifen. Nun zeigt ein einfacher Versuch, daß man die Kraft \mathbf{f}_1 ohne Störung des Gleichgewichts durch eine ihr parallele Kraft $\mathbf{f}_1/2$ ersetzen kann, die im Abstände $2r$ von O angreift, oder allgemein durch eine parallele Kraft \mathbf{f}_1/n , die im Abstände $n r$ angreift. In allen diesen Fällen ist das statische Moment der Kraft bezüglich des Punktes O gleich groß und gleich $[r \mathbf{f}_1]$.

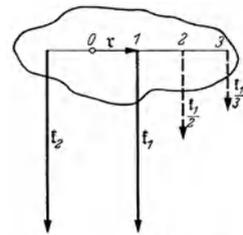


Abb. 47. Zur Bedeutung des statischen Moments einer Kraft.

Nunmehr betrachten wir ein *Kräftepaar* \mathbf{f} , $-\mathbf{f}$, also zwei gleich große, antiparallele Kräfte, deren Wirkungslinien nicht zusammenfallen (§ 15). Wie schon früher erwähnt, gibt es für ein solches keine resultierende Einzelkraft, und seine Wirkung ist von derjenigen einer Einzelkraft durchaus verschieden. Während eine Einzelkraft eine beschleunigte fortschreitende Bewegung (Translation) eines Körpers als Ganzes erzeugt, ruft ein an einem Körper angreifendes Kräftepaar eine beschleunigte Drehbewegung (Rotation) hervor. Es übt an ihm ein *Drehmoment* aus. Das Drehmoment eines Kräftepaares ist definiert als die Summe der statischen Momente der beiden Einzelkräfte des Kräftepaares. Es spielt bei beschleunigten Drehbewegungen die gleiche Rolle wie eine Einzelkraft bei der beschleunigten fortschreitenden Bewegung.

Es sei \mathbf{f} , $-\mathbf{f}$ (Abb. 48a) ein Kräftepaar, P ein beliebiger Punkt im Raum, der nicht in der Zeichnungsebene zu liegen braucht. \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 seien die von P nach den Angriffspunkten von \mathbf{f} , $-\mathbf{f}$ weisenden Fahrstrahlen, \mathbf{r} der vom Angriffspunkt von $-\mathbf{f}$ nach dem Angriffspunkt von \mathbf{f} weisende Fahrstrahl. Es ist $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}$, also $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Die statischen Momente der beiden Kräfte bezüglich P sind $\mathfrak{M}_1 = [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}]$ und $\mathfrak{M}_2 = [\mathbf{r}_2 (-\mathbf{f})] = -[\mathbf{r}_2 \mathbf{f}]$. Demnach beträgt ihre Vektorsumme, das Drehmoment des Kräftepaares,

$$\mathfrak{M} = [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{f}] = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{f}] = [\mathbf{r} \mathbf{f}]. \tag{79a}$$

Demnach ist das Drehmoment des Kräftepaars gleich dem statischen Moment der Kraft \mathfrak{f} , bezogen auf den Angriffspunkt der Kraft $-\mathfrak{f}$, und unabhängig von der Lage des Bezugspunktes P . Ist r_0 der senkrechte Abstand der Wirkungslinien der beiden Kräfte (Abb. 48b), so ist entsprechend Gl. (78)

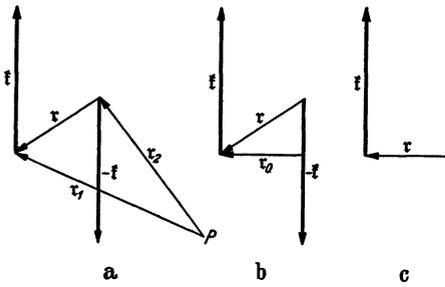


Abb. 48. Zum Drehmoment eines Kräftepaars.

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r} \mathfrak{f}] = [r_0 \mathfrak{f}]. \quad (79b)$$

r_0 heißt der *Arm des Kräftepaars*. Da wir die Angriffspunkte der beiden Einzelkräfte des Kräftepaars längs ihrer Wirkungslinien beliebig verschoben denken können, ohne an der Wirkung der Kräfte etwas zu ändern, so können wir sie stets so zeichnen, daß r senkrecht zu den Wirkungslinien steht, also r mit r_0 identisch wird (Abb. 48c). Überhaupt können wir mit einem Kräftepaar jede Umformung vornehmen, die

in einer Verschiebung des Angriffspunktes einer der beiden Kräfte oder beider Kräfte längs ihrer Wirkungslinien besteht (Abb. 49a u. b).

Die Maßeinheit des statischen Moments und des Drehmoments im CGS-System ist $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$, im technischen Maßsystem $1 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$.

(Aber nicht etwa 1 erg bzw. 1 mkg^* , denn dies sind Arbeitseinheiten. Die Arbeit ist das skalare, das Drehmoment aber das vektorielle Produkt einer gerichteten Strecke und einer Kraft. Es sind dies also ganz verschiedene physikalische Größen.)

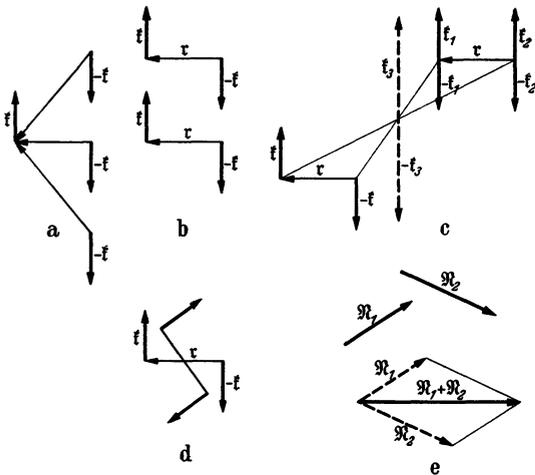


Abb. 49. Umformung, Drehung, Verschiebung und Addition von Kräftepaaren.

Das Drehmoment ist wie das statische Moment ein Vektor, für den die Schraubenregel gilt. Es weist also in Abb. 48 senkrecht nach hinten, entsprechend der Drehung im Uhrzeigersinn, die das Kräftepaar zu erzeugen sucht.

Im folgenden benutzen wir den Kunstgriff, daß wir zu einem Kräftepaar zwei oder mehr Kräfte hinzugefügt denken, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben,

so daß sie am gesamten Kräfteverhältnis nichts ändern (§ 15). Zwei gleich große, antiparallele Kräfte, die die gleiche Wirkungslinie haben, deren Drehmoment also $\mathfrak{M} = 0$ ist, wollen wir ein *Nullkräftepaar* nennen.

Zu einem Kräftepaar \mathfrak{f} , $-\mathfrak{f}$ (Abb. 49c) fügen wir an einer beliebigen Stelle im Raum (die Zeichnung ist räumlich zu denken) zwei Nullkräftepaare \mathfrak{f}_1 , $-\mathfrak{f}_1$ und \mathfrak{f}_2 , $-\mathfrak{f}_2$ hinzu, deren Wirkungslinien den gleichen Abstand haben wie diejenigen der Einzelkräfte des gegebenen Kräftepaars, und deren Kraftbeträge denen der Kräfte dieses Kräftepaars gleich sind. Nunmehr fassen wir die Kräfte \mathfrak{f} und \mathfrak{f}_2 zur Einzelkraft $\mathfrak{f}_3 = 2\mathfrak{f}$ und die Kräfte $-\mathfrak{f}$ und $-\mathfrak{f}_1$ zur Einzelkraft $-\mathfrak{f}_3 = -2\mathfrak{f}$ zusammen. Diese bilden ein Nullkräftepaar und heben sich gegenseitig auf. Es bleiben also nur die Kräfte $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}$ und $-\mathfrak{f}_2 = -\mathfrak{f}$ wirksam, die ein dem ursprünglichen Kräftepaar völlig gleiches, aber ihm gegenüber

parallel zu sich selbst verschobenes Kräftepaar bilden. Ein Kräftepaar darf also — im Gegensatz zu einer Einzelkraft — parallel zu sich selbst beliebig im Raum verschoben werden, ohne daß sich an seiner Wirkung etwas ändert.

Dreht man ein Kräftepaar in der durch die Wirkungslinien seiner Einzelkräfte gelegten Ebene um den Mittelpunkt seines Arms (Abb. 49d), so hat das offensichtlich auf Richtung und Betrag seines Drehmoments keinerlei Einfluß. Es ergibt sich also, daß man einem Kräftepaar jede beliebige Verschiebung und Drehung erteilen darf, bei der die durch die Wirkungslinien seiner Einzelkräfte gelegte Ebene ihre Richtung im Raum beibehält. Das heißt, für die Wirkung eines Kräftepaares kommt es einzig und allein auf den Betrag und die Richtung seines zu jener Ebene senkrechten Drehmomentvektors \mathfrak{M} an. Wir dürfen diesen also unter Innehaltung seiner Richtung nicht nur, wie einen Kraftvektor, vorwärts und rückwärts verschoben denken, sondern auch parallel zu sich selbst. Die Freizügigkeit eines Drehmomentvektors ist also nur durch die Bedingung beschränkt, daß seine Richtung erhalten bleiben muß.

Hieraus folgt, daß man zwei oder mehrere Kräftepaare stets zu einem einzigen Kräftepaar addieren kann. Man braucht nur die ihre Drehmomente darstellenden und zuerst in beliebiger Lage gedachten Vektorpfeile \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 (Abb. 49e) in einem beliebigen Raumpunkt unter Beibehaltung ihrer Richtungen mit ihren Schwanzenden zusammenzufügen und ihre Summe $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ nach den Gesetzen der Vektoraddition zu bilden.

Da es für die Wirkung eines Kräftepaares nur auf sein Drehmoment ankommt, so ist ein Kräftepaar mit den Einzelkräften \mathfrak{f} , $-\mathfrak{f}$ und dem Arm r einem Kräftepaar mit den Einzelkräften $n\mathfrak{f}$, $-n\mathfrak{f}$ und dem Arm r/n in jeder Hinsicht gleichwertig. Man kann also ein Kräftepaar ohne Änderung seiner Wirkung derart umformen, daß man seine Einzelkräfte im gleichen Verhältnis vergrößert oder verkleinert, wie man seinen Arm verkleinert oder vergrößert.

29. Feste Drehachse. Hebel. Ein Körper sei um eine in ihm und im Raum feste, senkrecht zur Zeichnungsebene durch A gehende Achse drehbar (Abb. 50), also um eine Achse, die eine feste Lage im Körper hat, und deren Lage im Raum durch feste Achsenlager bestimmt wird. An dem Körper greife eine Kraft \mathfrak{f} an, deren Wirkungslinie in der Zeichnungsebene liegt und nicht durch A geht. Sie sucht den Körper in ihrer Richtung zu beschleunigen. Das aber wird durch die feste Lagerung der Achse verhindert. Sobald die Kraft zu wirken beginnt, ruft sie in der Achse eine Zwangskraft $\mathfrak{f}_z = -\mathfrak{f}$ hervor, die der Kraft \mathfrak{f} entgegen gerichtet und von gleichem Betrage wie diese ist, und deren Wirkungslinie durch A geht. Die Kräfte \mathfrak{f} und \mathfrak{f}_z bilden also ein Kräftepaar, das den Körper zu drehen sucht. Tatsächlich sind ja auch Drehungen um die Achse die einzigen Bewegungen, deren der Körper fähig ist. Sei r der Arm der Kraft \mathfrak{f} bezüglich A , so ist das von dem Kräftepaar erzeugte Drehmoment \mathfrak{M} und sein Betrag N

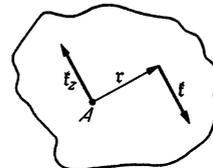


Abb. 50. Drehmoment bei fester Achse.

$$\mathfrak{M} = [r \mathfrak{f}], \quad N = r k, \quad (80)$$

da r und \mathfrak{f} aufeinander senkrecht stehen.

Abb. 50 ist ein Beispiel eines *Hebels*. Ein Hebel ist jeder Körper, der um eine Achse oder einen Punkt drehbar ist, dessen Lage durch äußere Bedingungen bestimmt ist. Es ist nicht nötig, daß ihre Lage im Hebel dauernd die gleiche sei. Sie kann sich auch bei einer Drehung des Hebels verändern. Man unterscheidet daher Hebel mit ortsfester und im Körper fester Achse und Hebel mit veränderlicher Achse. Ein Beispiel für das letztere ist das Brecheisen

(Abb. 53), dessen Achse jeweils durch den Punkt geht, in dem sich Brecheisen und Unterlage berühren, und sich bei jeder Drehung verschiebt.

Wirkt an einem Hebel mit ortsfester Achse eine Kraft, deren Wirkungslinie nicht in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt, so wird ihre zur Achse parallele Komponente durch Zwangskräfte in den Achsenlagern vollkommen aufgehoben. Es kommt also nur ihre Komponente zur Wirkung, die in einer zur Hebelachse senkrechten Ebene liegt.

Ein Hebel ist unter der Wirkung mehrerer an ihm angreifenden Kräfte \mathfrak{f}_i nur dann im Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente $[\mathfrak{r}_i \mathfrak{f}_i]$, die sie zusammen mit den Zwangskräften an ihm erzeugen, verschwindet,

$$\sum \mathfrak{M}_i = \sum [\mathfrak{r}_i \mathfrak{f}_i] = 0. \quad (81)$$

Die Größen $[\mathfrak{r}_i \mathfrak{f}_i]$ sind die statischen Momente der angreifenden Kräfte bezüglich der Achse. Man kann daher die Gleichgewichtsbedingung auch so

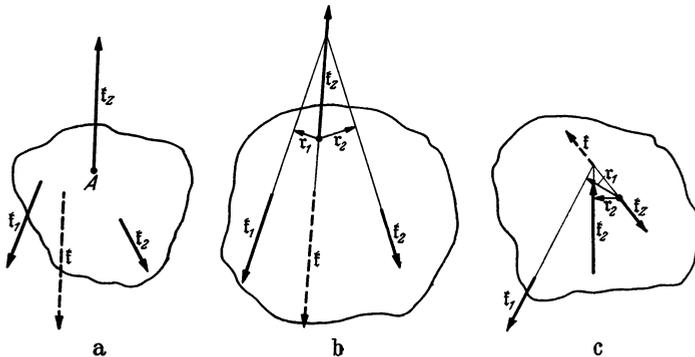


Abb. 51. Kräfte am Hebel.

aussprechen: *Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der auf seine Achse bezogenen statischen Momente der an ihm angreifenden Kräfte verschwindet.*

Handelt es sich um zwei Kräfte $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$, deren Wirkungslinien in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen, so besteht kein Gleichgewicht, wenn die Wirkungslinie ihrer Resultierenden \mathfrak{f} nicht durch die Achse geht, sondern mit der Zwangskraft $\mathfrak{f}_z = -\mathfrak{f}$ ein Kräftepaar bildet (Abb. 51a). Nur wenn sie durch die Achse geht, wird sie durch die Zwangskraft vollkommen aufgehoben (Abb. 51b). Andernfalls besteht ein Drehmoment, das den Hebel zu drehen sucht. Im Falle des Gleichgewichts ist entsprechend Gl. (81)

$$\mathfrak{M}_1 = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{f}_1] = -\mathfrak{M}_2 = -[\mathfrak{r}_2 \mathfrak{f}_2] \quad (82)$$

und für die Beträge der Drehmomente gilt

$$N_1 = r_1 h_1 = N_2 = r_2 h_2. \quad (83)$$

Dieses Gesetz ist uns schon für den Sonderfall paralleler Kräfte aus § 15 (Abb. 27) bekannt.

Liegen bei einem Hebel, an dem zwei äußere Kräfte angreifen, die beiden Angriffspunkte auf verschiedenen Seiten der Wirkungslinie der Zwangskraft \mathfrak{f}_z , so nennt man den Hebel *zweiarmig* (Abb. 51b). Liegen sie auf der gleichen Seite, so heißt er *einarmig* (Abb. 51c).

30. Maschinen. Die Technik unterscheidet Kraftmaschinen und Arbeitsmaschinen. Die *Kraftmaschinen* wandeln die primär zur Verfügung stehende Energie in diejenige Energieform um, die für den jeweiligen Zweck benötigt wird. Hierhin gehören die Dampfmaschinen und alle sonstigen Motoren, die Generatoren für elektrische Energie usw. Die *Arbeitsmaschinen* setzen die ihnen

von einer Kraftmaschine gelieferte Energie in die gewünschte Arbeit um, wie z. B. die Werkzeugmaschinen, Hebezeuge, Fahrräder, Nähmaschinen usw. Die der Kraftmaschine zugeführte primäre Energie kann potentielle Energie irgendwelcher Körper sein, insbesondere von Wasser, das innerhalb der Maschine von höherem zu tieferem Niveau sinkt und dabei potentielle Energie verliert. Sie kann auch kinetische Energie sein, z. B. von Wasser oder Luft (Wind). Bei den Dampfmaschinen ist die primäre Energie Wärmeenergie, die zunächst aus chemischer Energie von Brennstoffen gewonnen wird, bei den Elektromotoren elektrische Energie. Treibt ein Mensch oder ein Tier eine Maschine, so liefern die in seinem Körper ablaufenden chemischen Vorgänge die nötige Energie. Ein Mensch, der mit der Schreibmaschine schreibt oder auf dem Fahrrad fährt, wirkt als Kraftmaschine, die die Schreibmaschine oder das Fahrrad als Arbeitsmaschine betreibt.

Wir befassen uns hier nur mit den rein mechanischen Maschinen, also solchen, bei denen sowohl die zugeführte, wie die umgewandelte Energie bzw. die geleistete Arbeit, soweit sie nicht durch Reibung in Wärme verwandelt wird, rein mechanischer Natur ist. Ein besonderes Merkmal solcher Maschinen ist, daß sie bewegte (hin- und hergehende oder rotierende) Teile haben. Viele mechanische Maschinen dienen entweder der Änderung der potentiellen Energie (Hebung) oder der kinetischen Energie (Beschleunigung) von Körpern oder beidem zugleich. Andere dienen zur Überwindung aller möglichen Arten von Widerständen (z. B. Metall- und Holzbearbeitungsmaschinen). Jede Maschine muß gleichzeitig die nie vermeidbaren Reibungskräfte zwischen ihren bewegten Teilen und die Reibung am Außenmedium (Luft, Wasser) überwinden. Viele Maschinen dienen fast ausschließlich diesem Zweck, so die Maschinen der Fahrzeuge bei der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit auf horizontaler Bahn. Beim Anfahren leisten sie außerdem Beschleunigungsarbeit, auf ansteigender Bahn auch Hebearbeit.

Bei den mechanischen Maschinen tritt mechanische Energie an einer Stelle sozusagen ein und an einer anderen Stelle in verwandelter Gestalt wieder aus. Am Eingang leistet eine äußere Kraft *an der Maschine* Arbeit, am Ausgang wird *von der Maschine* eine Kraft ausgeübt, die an einem anderen Körper Arbeit leistet. So ist die Zuführung von Energie zur Maschine wie der Austritt von Energie aus ihr mit der Wirkung einer Kraft verknüpft. Die am Eingang auf die Maschine wirkende Kraft \mathfrak{f}_1 verschiebt einen Maschinenteil um den Weg Δr_1 , und gleichzeitig verschiebt am Ausgang ein anderer Maschinenteil einen Körper mit einer Kraft \mathfrak{f}_2 um einen Weg Δr_2 . Sofern innerhalb der Maschine keine mechanische Energie durch Reibung in Wärme verwandelt werden würde, müßte nach dem Energieprinzip die am Eingang *an* der Maschine geleistete Arbeit $\mathfrak{f}_1 \Delta r_1$ gleich der am Ausgang *von* der Maschine geleisteten Arbeit $\mathfrak{f}_2 \Delta r_2$ sein. Da aber Reibungsverluste unvermeidlich sind, so gilt

$$\mathfrak{f}_2 \Delta r_2 \leq \mathfrak{f}_1 \Delta r_1. \quad (84)$$

(*Goldene Regel der Mechanik.*) Wird durch die Maschine die primäre Kraft vergrößert, $\mathfrak{f}_2 > \mathfrak{f}_1$, so kann das nur durch einen entsprechenden Verlust an Verschiebungsweg, $\Delta r_2 < \Delta r_1$, erkaufte werden. Wird z. B. eine Last mit einem Kran gehoben, an dem eine Kraft wirkt, die hundertmal kleiner ist als das Gewicht der Last, so muß — bei Ausschluß von Reibung — der Angriffspunkt der Kraft bei einer Hebung der Last um 1 m einen Weg von 100 m zurücklegen. Wegen der Reibungsverluste muß bei diesem Verhältnis der Wege die Kraft tatsächlich größer sein.

Die meisten Maschinen bezwecken eine *Änderung der Kraft*. Jedoch gehören zu den Maschinen auch Vorrichtungen, die eine *Änderung des Weges* bezwecken, z. B. die Uhrwerke, bei denen kleine Verschiebungen der treibenden Gewichte

bzw. des Uhrfederendes in viel größere Wege des Uhrzeigerendes umgesetzt werden. Die beim Aufziehen aufgespeicherte und beim Ablaufen verschwindende mechanische Energie dient nur zur Überwindung von Reibungswiderständen.

Wegen der unvermeidlichen inneren Reibungsverluste ist das Verhältnis der von einer Maschine geleisteten Arbeit zu der für ihren Betrieb aufgewendeten Energie, ihr *Wirkungsgrad*, stets kleiner als 1 (100%). Je größer der Wirkungsgrad ist, um so wirtschaftlicher arbeitet die Maschine. Die Berechnung des Wirkungsgrades η einer Maschine geschieht also so, daß man die von ihr in 1 sec geleistete Arbeit, ihre Nutzleistung L_2 (§ 22), durch die ihr in 1 sec zugeführte Energie, die Primärleistung L_1 , dividiert, $\eta = L_2/L_1$. Auf die Messung der Primärleistung, die je nach der Art der primären Energie auf sehr verschiedene Weisen ausgeführt wird, gehen wir hier nicht ein. Dagegen wollen wir zeigen, wie die mechanische Nutzleistung eines Motors mit dem *PRONYSchen Zaum* gemessen wird. Auf die Achse des Motors werden zwei Bremsbacken gesetzt, die durch Schrauben mehr oder weniger fest angezogen werden können (Abb. 52). Mit den Backen ist eine Stange verbunden, an

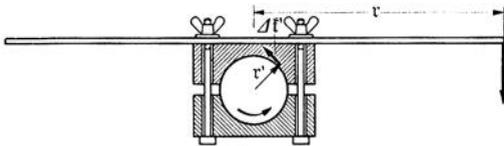


Abb. 52. Leistungsmessung mit dem PRONYSchen Zaum.

deren Ende man eine Kraft F , z. B. ein bestimmtes Gewicht, wirken lassen kann, die ein Drehmoment $\mathfrak{N} = [r F]$ vom Betrage $N = r k$ um die Achse erzeugt. Der Motor wird in Drehung versetzt, und die Schrauben werden so angezogen, daß die Backen

durch die Reibung an der Achse gerade nicht mitgenommen werden und der Zaum durch die Kraft F gegen die Reibungskraft genau ins Gleichgewicht gebracht ist. An jedem Flächenelement der Backen wirkt eine Kraft $\Delta k'$ am Arm r' (Achsenradius) und erzeugt ein Drehmoment vom Betrage $\Delta N' = r' \Delta k'$. Da alle Reibungskräfte gleich große Arme haben, und da die von ihnen erzeugten Drehmomente sämtlich gleichgerichtet sind (ihre Drehmomentvektoren weisen in Abb. 52 sämtlich nach vorn), so beträgt das gesamte Drehmoment der Reibungskräfte $N' = \sum \Delta N' = r' \sum \Delta k'$. Bei Gleichgewicht müssen die beiden entgegengesetzten Drehmomente \mathfrak{N} und \mathfrak{N}' gleiche Beträge haben, $r k = r' \sum \Delta k'$. Ist n die Drehzahl des Motors (§ 10), so legt jeder Punkt des Achsenumfangs in 1 sec den Weg $2\pi r' n$ zurück, und um den gleichen Betrag verschieben sich die Angriffspunkte aller Einzelkräfte $\Delta k'$. Jede Einzelkraft leistet also in 1 sec die Arbeit $2\pi r' \Delta k' n$, und die gesamte Nutzleistung des Motors gegen die Reibungskräfte beträgt also $L_2 = 2\pi r' \sum \Delta k' n = 2\pi r k n$. Sie ist die gleiche, wenn der Motor bei gleicher Drehzahl nicht, wie bei der Messung, Arbeit gegen Reibungskräfte leistet, sondern gegen die im praktischen Betriebe tatsächlich zu überwindenden Kräfte.

Bei Maschinen mit großen hin- und hergehenden, also ständig beschleunigten Teilen treten an diesen große Trägheitskräfte auf, die die Fundamente stark beanspruchen, sofern dies nicht durch einen Kunstgriff, den *Massenausgleich*, verhindert wird. Man baut die Maschine derart, daß die Beschleunigungen ihrer einzelnen Teile einander entgegengerichtet und so bemessen sind, daß die einzelnen Trägheitskräfte sich gegenseitig aufheben.

31. Die einfachen Maschinen. Man kann die einzelnen Elemente, aus denen eine Maschine besteht, auf gewisse Grundtypen, die *einfachen Maschinen*, zurückführen, und zwar solche vom Typus des *Hebels* und solche vom Typus der *schiefen Ebene*.

Hebel finden wir in den mannigfachsten Anwendungsarten und Gestalten, sei es zur Hebung von Lasten oder zur Überwindung anderer Widerstände.

Meistens dienen sie dazu, eine verfügbare Kraft, z. B. die menschliche Muskelkraft, zu vergrößern. In diesem Sinne finden wir sie verwendet bei den Pumpenschwengeln, den Steuerrudern der Schiffe, dem Steuerrad der Kraftfahrzeuge, den Pedalen und Bremsen der Fahrräder, den Klaviaturen der Klaviere usw. Ein sehr einfacher Hebel ist das Brecheisen, dessen Wirkung aus Abb. 53 ohne weiteres ersichtlich ist. Sehr viele Werkzeuge des Handwerks sind ein- oder

zweiarmige Hebel, so die Zangen und Scheren. Die Schubkarre ist ein einarmiger Hebel, dessen Drehpunkt in

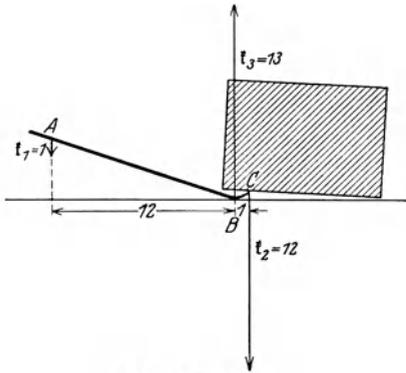


Abb. 53. Brecheisen.

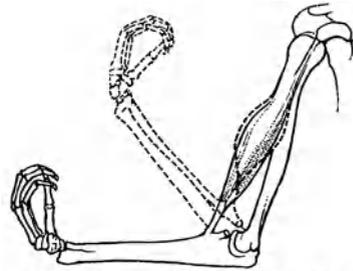


Abb. 54. Der menschliche Arm als Hebel.

der Radachse liegt. Oft haben Hebel die Gestalt von Rädern, z. B. als Handgriffe zur Betätigung von Ventilen. Ein Hebel dieses Typus ist auch das Wellrad, wie man es z. B. an Brunnen findet. Hebel sind ferner die Glieder der menschlichen und tierischen Körper (Abb. 54).

Zu den Hebeln gehören auch die *Rollen*, die als feste und bewegliche Rollen vorkommen. Eine feste Rolle besteht aus einem um eine feste Achse drehbaren Rad, über dessen Kranz ein Seil, ein Riemen oder eine Kette läuft (Abb. 55). Sie ist im Gleichgewicht, wenn an den beiden Enden des Seils gleich große Kräfte f_1 und f_2 angreifen. Ihnen wird durch die in der Achse der Rolle auftretende Zwangskraft f_z das Gleichgewicht gehalten. Feste Rollen dienen meist dazu, die Richtung einer Kraft (der Zugkraft im Seil) zu ändern oder drehende Bewegungen von einer Achse auf eine andere zu übertragen (Transmissionen). Eine Änderung des Betrages der Kraft bewirken sie nicht. Bewegliche Rollen bilden einen Bestandteil der Flaschenzüge. Abb. 56 zeigt einen einfachen Flaschenzug,

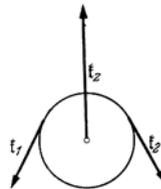


Abb. 55. Feste Rolle.

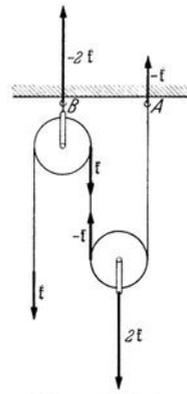


Abb. 56. Einfacher Flaschenzug.

der aus einer festen und einer beweglichen Rolle besteht. Bei Gleichgewicht ist das Seil in seiner ganzen Länge gleich stark gespannt, und es herrscht in ihm überall die gleiche Zugkraft. Wenn daher am freien Seilende eine Kraft f wirkt, so wird die bewegliche Rolle mit der Kraft $-2f$ nach oben gezogen, und diese Kraft kann einer an der beweglichen Rolle nach unten wirkenden Kraft $2f$ das Gleichgewicht halten. (Das Gewicht der Rolle ist in die Kraft $2f$ einbegriffen; vom Gewicht des Seiles ist abgesehen.) Das Gleichgewicht des ganzen Flaschenzuges wird durch die im Aufhängepunkt der festen Rolle erzeugte Zwangskraft $-2f$ und durch die Zwangskraft $-f$ am befestigten Seilende bewirkt, die zusammen die Kräfte f und $2f$ aufheben. (Die Seilspannungen sind nur innere Kräfte des Systems.) Mit Hilfe des einfachen Flaschenzuges

vermag eine Kraft f gegen die Kraft $2f$ Arbeit zu leisten, also z. B. eine Last vom Gewicht $2f$ zu heben. Wie man leicht sieht, beträgt die Hebung der Last nur die Hälfte der Senkung des Angriffspunktes von f .

Auch die Zahnräder gehören zum Hebeltypus. Das in Abb. 57 dargestellte Zahnradsystem ist unter den verzeichneten Kräfte- und Radienverhältnissen im Gleichgewicht.

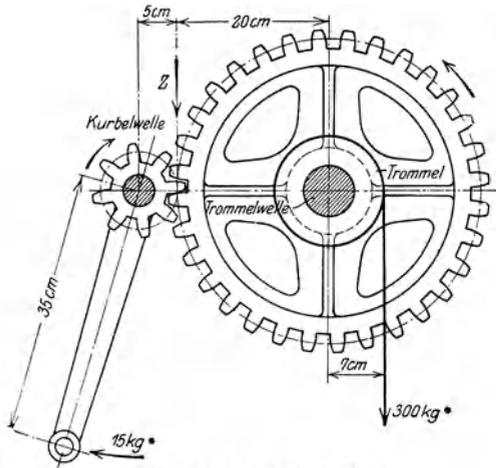


Abb. 57. Zahnräder als Hebel.

Die an der Kurbel am Arm 35 cm angreifende Kraft 15 kg^* erzeugt am kleinen Zahnrad am Arm 5 cm eine Kraft von 105 kg^* ($35 \cdot 15 = 5 \cdot 105$). Die auf das große Zahnrad am Arm 20 cm bei Z angreifende Kraft

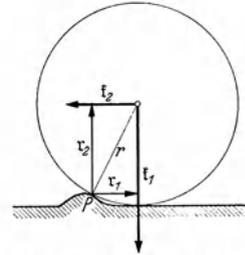


Abb. 58. Wirkung der Wagenräder.

105 kg^* hält der an der Welle am Arm 7 cm angreifenden Kraft 300 kg^* das Gleichgewicht ($20 \cdot 105 = 7 \cdot 300$). Man berechnet leicht, daß wenn der Angriffspunkt der Kraft 15 kg^* durch Drehen der Kurbel in Richtung der Kraft um die Strecke s verschoben wird, der Angriffspunkt der 20mal größeren Kraft 300 kg^* um die Strecke $s/20$ gehoben wird. Es ist also, dem Energieprinzip entsprechend, die an der Maschine geleistete Arbeit gleich der von ihr geleisteten Arbeit. (Dabei haben wir von Reibungswiderständen abgesehen.)

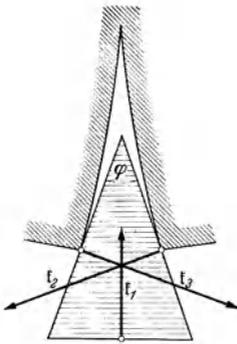


Abb. 59. Schema der Keilwirkung.

Ein Wagen überwindet die Unebenheiten eines Weges um so leichter, je größere Räder er hat. Damit sich in Abb. 58 der Wagen nach links bewegt, muß sich das Rad um den Punkt P drehen. Damit das möglich ist, muß die Zugkraft f_2 ein mindestens ebenso großes Drehmoment $M_2 = [r_2 f_2]$ (Betrag $r_2 k_2$) um den Punkt P erzeugen, wie das entgegengesetzte gerichtete Drehmoment $M_1 = [r_1 f_1]$ (Betrag $r_1 k_1$) der vom Wagengewicht her-

rührenden Kraft f_1 . Es muß also mindestens $k_2 = r_1 k_1 / r_2$ sein. Die Zugkraft kann also um so kleiner sein, je größer r_2 , also je größer der Radius r des Rades ist. (Ein weiterer Vorzug großer Räder besteht darin, daß sie sich bei gleicher Fahrgeschwindigkeit langsamer drehen, so daß die Achsenreibung geringer ist.)

Einfache Maschinen vom Typus der schiefen Ebene (im allgemeinen Sinne, § 16) sind der Keil und die Schraube. Beim Keil (Abb. 59) hält die treibende Kraft f_1 den am Hindernis hervorgerufenen Zwangskräften f_2, f_3 das Gleichgewicht. Man berechnet leicht, daß bei einem Keilwinkel φ $k_2 = k_3 = \frac{1}{2} k_1 / \sin \varphi/2$ ist. Bei kleinem Keilwinkel können also mit einer gegebenen Kraft f_1 viel größere Gegenkräfte überwunden werden, als bei größerem Keilwinkel. Beim Holzspalten mit einer Axt besteht die Kraft f_1 in der Trägheitskraft der als Keil

wirkenden bewegten Axt. Auf einer Keilwirkung beruht auch die schneidende Wirkung der Messer.

Eine Schraube ist eine wendelförmig aufgewickelte schiefe Ebene. Am Schraubenkopf wirke eine Kraft vom Betrage k_1 am Arm r . Die Ganghöhe der Schraube sei s , und sie arbeite gegen ein Hindernis, das eine Kraft vom Betrage k_2 gegen die Schraube ausübt. Bei einer vollen Umdrehung legt der Angriffspunkt der Kraft k_1 den Weg $2\pi r$ zurück. Die Kraft k_1 leistet also die Arbeit $2\pi r k_1$. Nach dem Energieprinzip muß dies gleich der gegen die Gegenkraft k_2 geleisteten Arbeit sein. Da sich deren Angriffspunkt um die Ganghöhe s verschoben hat, so beträgt diese Arbeit $k_2 s$. Demnach ist $k_2 = 2\pi r k_1 / s$. Die Kraft k_1 überwindet daher an der Schraube eine um so größere Kraft k_2 , je länger der Arm r ist, an dem sie angreift, und je kleiner die Ganghöhe s der Schraube ist.

32. Waagen. Die Waagen dienen dazu, die Masse von Körpern aus ihrem Gewicht zu bestimmen. Die meisten, insbesondere die genauen Waagen für wissenschaftliche Zwecke, beruhen auf dem Hebelprinzip. Wir wollen hier nur die in der Physik und Chemie meist gebrauchte Form, die chemische oder Analysenwaage, näher betrachten. Ihr Hauptteil ist der Waagebalken (Abb. 60). Er besitzt in seiner Mitte eine fein geschliffene Schneide aus Achat, mit der er bei Gebrauch auf einer horizontalen Platte aus Achat oder Stahl aufliegt, und die seine Drehachse bildet. Nach Gebrauch wird der Waagebalken zur Schonung der Schneide mit einer Arretiervorrichtung von der Unterlage abgehoben. In möglichst gleichen Abständen von der Schneide hängen an den beiden Enden des Waagebalkens — meist ebenfalls auf Schneiden — die beiden Waagschalen. Zur Ablesung der Stellung des Waagebalkens dient ein auf einer Skala spielender Zeiger. Der Waagebalken trägt ein vertikal verschiebbares Schraubchen, das dazu dient, seinen Schwerpunkt zur Regelung der Empfindlichkeit höher oder tiefer zu legen (s. u.), und ein horizontal verschiebbares Schraubchen zur horizontalen Verschiebung des Schwerpunktes.

Das Wägungsverfahren, auf dessen Einzelheiten wir nicht näher eingehen wollen, besteht darin, daß man nach Auflegen des zu wägenden Körpers auf die eine Waagschale den Waagebalken durch Auflegen von Massennormalen („Gewichten“) auf die andere Schale möglichst genau wieder in die Stellung bringt, die er im unbelasteten Zustand einnahm. Massennormale von weniger als 10^{-2} g (1 cg) werden gewöhnlich nicht verwendet. Die Waage läßt aber eine erheblich genauere Massenmessung zu. Hierzu dient der Reiter (Abb. 60 oben), der auf die Teilstriche einer am Waagebalken angebrachten

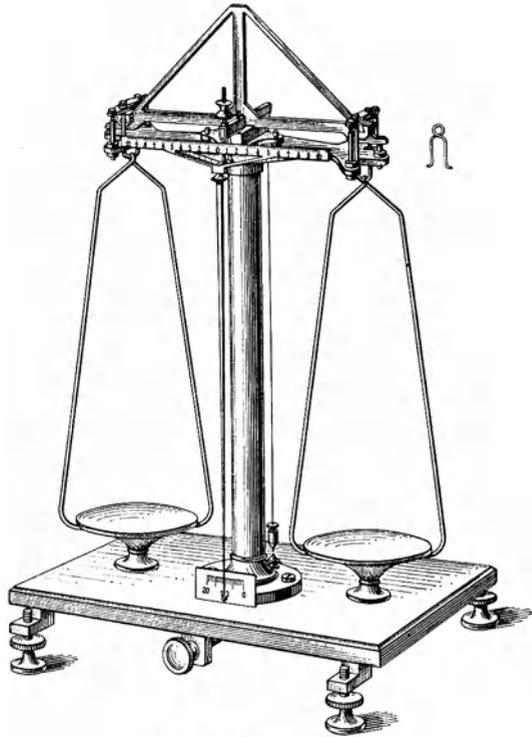


Abb. 60. Analysenwaage.

Skala gesetzt werden kann, die die wirksame Hebellänge des Balkens in 10 gleiche Teile teilt. Die Masse des Reiters beträgt 10^{-2} g (1 cg). Befindet er sich auf dem 10. Teilstrich, also in der gleichen Entfernung von der Balkenmitte, wie die Aufhängung der Waagschale, so übt sein Gewicht das gleiche Drehmoment aus, als wenn $10^{-2} \text{ g} = 10 \text{ mg}$ auf der Waagschale lägen. Auf dem n . Teilstrich hat er die gleiche Wirkung wie $n \text{ mg}$ auf der Waagschale. Auf diese Weise kann die Masse auf 1 mg genau ermittelt werden. Aber eine gute Waage zeigt noch kleinere Unterschiede an. Man schließt deshalb die Masse des zu wägenden Körpers zwischen zwei Werte ein, die sich um 1 mg unterscheiden, liest die zugehörigen Zeigerausschläge ab und ermittelt die Bruchteile von 1 mg durch Interpolation. Genaue Wägungen werden stets bei schwingender Waage an- gestellt. Die Einstellung, die die Waage einnehmen würde, wenn sie zur Ruhe

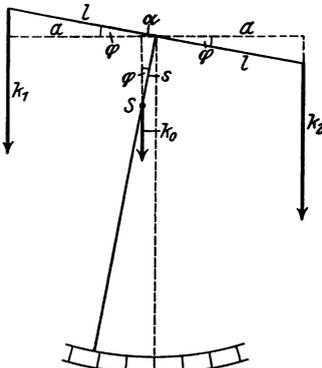


Abb. 61. Zur Theorie der Waage.

kommt, wird durch geeignete Mittelwertbildung aus den Umkehrpunkten des Zeigers berechnet.

Die Waage ist ein *dreiarmer Hebel*, denn außer der Zwangskraft in der Schneide greifen am Waagebalken drei Kräfte an und erzeugen drei Drehmomente, nämlich die beiden einander ganz oder nahezu gleichen, entgegengesetzt gerichteten Drehmomente, die die Gewichte der Waagschalen und der auf ihnen liegenden Körper erzeugen, und das vom Eigengewicht des Waagebalkens herrührende Drehmoment. Das Eigengewicht des Waagebalkens (nebst Zeiger) können wir uns in seinem Schwerpunkt angreifend denken. Dieser muß unterhalb der Schneide liegen, damit ein stabiles Gleichgewicht möglich ist. Das vom Gewicht des

Waagebalkens herrührende Drehmoment verschwindet nur in der Nullstellung, d. h. wenn der Balkenschwerpunkt senkrecht unterhalb der Schneide liegt. Dann besteht (genaue Gleicharmigkeit der Waage vorausgesetzt) Gleichgewicht, wenn der Balken auf beiden Seiten gleich stark belastet ist.

Es sei l die Länge der wirksamen Hebelarme des Balkens, S sein Schwerpunkt, s dessen Abstand von der Mittelschneide (Abb. 61). Das im Schwerpunkt S angreifende Balkengewicht betrage k_0 . Am linken Hebelarm wirke die eine belastete Waagschale mit einer Kraft vom Betrage k_1 , am rechten Hebelarm die andere Schale mit der etwas größeren Kraft $k_2 = k_1 + \Delta k$. Die Waage steht dann unter einem Winkel φ gegen diejenige Lage ein, bei der $k_1 = k_2$, die Waage also auf beiden Seiten gleich belastet ist. Die Arme der Kräfte k_1 und k_2 betragen dann $a = l \cos \varphi$. Der Arm der Kraft k_0 beträgt $\alpha = s \sin \varphi$. Nach dem Hebelgesetz besteht Gleichgewicht, wenn

$$k_1 a + k_0 \alpha = k_2 a \quad \text{oder} \quad k_1 l \cos \varphi + k_0 s \sin \varphi = k_2 l \cos \varphi.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_0} \frac{l}{s} = \frac{\Delta k}{k_0} \frac{l}{s}.$$

Bei gegebener Differenz Δk der Gewichte k_1 und k_2 ist der Ausschlagswinkel φ um so größer, je größer die Balkenlänge l und je kleiner der Schwerpunktsabstand s ist, und um so größer ist dann die *Empfindlichkeit* der Waage. Denn je größer der Ausschlag ist, den eine bestimmte Gewichts- differenz erzeugt, um so kleinere Gewichts- differenzen werden von der Waage noch beobachtbar angezeigt.

Einer beliebigen Steigerung der Empfindlichkeit durch Vergrößerung von l und Verkleinerung von s , die hiernach möglich schiene, sind jedoch Grenzen

gesetzt. Denn jede Änderung an der Waage, die ihre Empfindlichkeit steigert, vergrößert zwangsläufig ihre Schwingungsdauer und verringert ihre Stabilität. Dadurch wird nicht nur das Arbeiten mit der Waage schließlich allzu zeitraubend, sondern die Waage wird vor allem zu empfindlich gegen unvermeidliche Störungen (Erschütterungen usw.), die die Genauigkeit der Wägung beeinträchtigen. Neuere Waagen haben meist ziemlich kurze Balken.

Bei einer genauen *absoluten Wägung* darf niemals völlige Gleicharmigkeit des Balkens vorausgesetzt werden. Die beiden Balkenhälften können schon infolge kleiner Temperaturunterschiede ein wenig verschieden lang sein. Man trägt dem durch eine Doppelwägung Rechnung, d. h. man stellt zwei Wägungen an, bei denen der zu wägende Körper einmal auf der einen, dann auf der anderen Schale liegt, und nimmt das Mittel aus den beiden Ergebnissen. Ferner ist auch der Auftrieb, den der zu wägende Körper und die Gewichtsstücke in der Luft erleiden (§ 69), zu berücksichtigen, und der Fehler ist durch Rechnung zu beheben.

33. Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft. Ein auf einer Kreisbahn rotierender Massenpunkt erfährt nach § 10 [Gl. (37) und (38)] eine dauernde *Zentripetalbeschleunigung* $b_r = [u v] = -r u^2$ in Richtung auf den Kreismittelpunkt. Um diese Beschleunigung zu bewirken, also die Kreisbewegung aufrechtzuerhalten, muß eine ebenfalls dauernd auf den Kreismittelpunkt hin gerichtete Kraft, eine *Zentripetalkraft*,

$$f = m b_r = m [u v] = -m r u^2 \quad (85)$$

an dem Massenpunkt angreifen, deren Betrag

$$k = m b_r = m r u^2 = \frac{m v^2}{r} \quad (86)$$

ist. Das kann die Zugkraft in einem Faden oder einer sonstigen festen Verbindung des Massenpunktes mit dem Kreismittelpunkt sein oder die Massenanziehung, wie bei der kreisenden Bewegung der Planeten um die Sonne, eine elektrische Anziehung usw.

Die Zentripetalkraft steht bei der Kreisbewegung, wie die Zentripetalbeschleunigung, senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit, also zu den einzelnen Bahnelementen dr . Demnach leistet die Zentripetalkraft an dem rotierenden Massenpunkt keine Arbeit (§ 21). Sie bewirkt keine Änderung seiner kinetischen Energie, sondern nur eine ständige Änderung der Richtung seiner Geschwindigkeit.

Der radial nach dem Drehungszentrum hin gerichteten, von ihm ausgehenden und am rotierenden Massenpunkt angreifenden Zentripetalkraft $-m r u^2$ entspricht nach dem Wechselwirkungsgesetz eine entgegengesetzt, also radial nach außen gerichtete, gleich große, vom Massenpunkt ausgehende und am Drehungszentrum angreifende Gegenkraft $f' = -f = -m b_r = +m r u^2$, die das Drehungszentrum radial nach außen zu ziehen sucht. Diese Kraft fühlt man deutlich, wenn man einen Körper an einer Schnur im Kreise herumschleudert. Sie erweckt den Eindruck, als strebe der rotierende Körper infolge einer an ihm angreifenden Kraft radial nach außen und heißt deshalb *Zentrifugalkraft*. Tatsächlich greift sie nicht am rotierenden Massenpunkt an, sondern geht von ihm aus und greift am Drehungszentrum an. Sobald die Zentripetalkraft zu wirken aufhört, verschwindet auch ihre Gegenkraft, die Zentrifugalkraft. Läßt man die Schnur los, die einen rotierenden Körper mit dem Drehungszentrum verbindet, so bewegt sich der Körper nicht etwa in Richtung der Zentrifugalkraft radial nach außen, sondern er fliegt auf Grund seiner Trägheit nunmehr tangential zu seiner bisherigen Bahn in derjenigen Richtung und mit der Geschwindigkeit weiter, die er im Augenblick des Verschwindens der Zentripetalkraft hatte.

Abb. 62 stellt die Kräfteverhältnisse bei der Rotation eines Massenpunktes m dar. Am Massenpunkt greift, vom Drehungszentrum A ausgehend, die radial nach innen gerichtete Zentripetalkraft $\mathfrak{f} = -m r u^2$ an, am Drehungszentrum, vom rotierenden Massenpunkt ausgehend, die Zentrifugalkraft $\mathfrak{f}' = -\mathfrak{f} = +m r u^2$.

Wird ein Körper in der Luft an einem Faden im Kreise herumgeschleudert, so muß zur Aufrechterhaltung der Bewegung Arbeit gegen die Luftreibung geleistet werden. Es muß also, außer der Zentripetalkraft, noch eine in Richtung der jeweiligen Geschwindigkeit am Körper angreifende, zur Kreisbahn tangentielle Kraftkomponente vorhanden sein. Dies wird durch die jedermann geläufige kreisende Handbewegung erreicht (Abb. 63). Der Faden liegt tangential zu dem von der Hand beschriebenen Kreise und überträgt auf den rotierenden Körper eine Kraft \mathfrak{f} , deren radiale Komponente die Zentripetalkraft $-m r u^2$ liefert, und deren tangentielle Komponente \mathfrak{f}_t Verschiebungsarbeit gegen die Reibung leistet.

Ist die rotierende Masse ein räumlich ausgedehnter Körper, so können die von seinen einzelnen Massenelementen ausgehenden Zentrifugalkräfte nach den Gesetzen der Vektoraddition zusammengefaßt werden. Im allgemeinen ergibt sich dann eine resultierende Einzelkraft und ein Kräftepaar (§ 13).

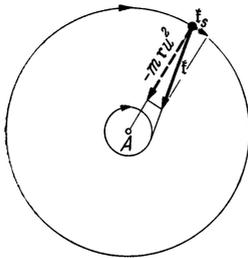


Abb. 63. Kreisbewegung im reibenden Medium.

Wir haben bisher die Kräfteverhältnisse bei der Kreisbewegung so dargestellt, wie sie einem Beobachter erscheinen, der sich außerhalb des rotierenden Systems in Ruhe befindet. Nunmehr wollen wir uns auf den Standpunkt eines Beobachters stellen, der selbst dem rotierenden System angehört und mit ihm rotiert. In dieser Lage befinden wir uns z. B. selbst bei der Beobachtung der Wirkung der Erddrehung auf irdische Körper. Eine Rotation ist eine beschleunigte Bewegung, und der Übergang vom Standpunkt des ruhenden Beobachters zu dem des mitrotierenden Beobachters bedeutet demnach den Übergang von einem Inertialsystem zu

einem beschleunigten Bezugssystem (§ 18). Die neue Betrachtungsweise wird sich demnach von der obigen durch das Auftreten von *Trägheitskräften* an den Körpern des rotierenden Systems unterscheiden.

Der Einfachheit halber betrachten wir als rotierendes System eine ebene, in ihrer Ebene rotierende Scheibe, auf der Körper verteilt sind. Nehmen diese an der Rotation teil, so befinden sie sich für einen mitrotierenden Beobachter, in einem mitrotierenden Koordinatensystem, in Ruhe, wie für uns ein Haus auf der rotierenden Erde. Nun bemerkt aber dieser Beobachter sehr wohl, daß nur solche Körper sich in seinem Bezugssystem in Ruhe befinden, die durch eine Kraft festgehalten werden, die der Zentripetalkraft entspricht. Andernfalls führen sie relativ zu seinem Bezugssystem eine beschleunigte Bewegung aus (s. u.). Er stellt fest, daß die Wirkungslinien dieser Kräfte sich sämtlich in einem Punkt der Scheibe schneiden, und daß die Kräfte alle auf diesen Punkt hin gerichtet sein müssen, nämlich auf den Durchstoßpunkt der Drehachse durch die Scheibe. Für ihn ist dieser Punkt — sofern er ihn nicht durch Beobachtung der Außenwelt in diesem Sinne zu deuten vermag — einzig als Schnittpunkt dieser Wirkungslinien ausgezeichnet. Da jeder Körper, der nicht durch eine solche Kraft im rotierenden System in Ruhe gehalten wird, sich relativ zu dem System beschleunigt von jenem Punkt fortbewegt, so wird er dies der Wirkung einer Kraft \mathfrak{f} zuschreiben (Abb. 64), die an allen Körpern seines Systems angreift und sie, wie eine Abstoßungskraft, radial von jenem Punkte

wegzutreiben sucht. Für ihn ist also die Zentrifugalkraft eine an den mitrotierenden Körpern selbst angreifende, vom Drehungszentrum weg gerichtete Kraft. Sollen die Körper trotzdem in seinem System in Ruhe verharren, so muß die Zentrifugalkraft \mathfrak{f}' durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Zentripetalkraft \mathfrak{f} aufgehoben werden. Die Zentrifugalkraft ist also eine den Körpern eines rotierenden Systems eigentümliche Trägheitskraft.

Der mitrotierende Beobachter wird ferner feststellen, daß die Zentrifugalkräfte erstens den Massen m der mitrotierenden Körper, zweitens ihren Abständen r von jenem Zentrum proportional sind. Er findet also die Beziehung $\mathfrak{f}' = \text{const} \cdot m r$. Die Konstante ist tatsächlich das Quadrat u^2 der Winkelgeschwindigkeit seines Bezugssystems [Gl. (85)]. Dem mitrotierenden Beobachter erscheint sie wie eine seinem Bezugssystem eigentümliche Naturkonstante — etwa analog zur allgemeinen Gravitationskonstante (§ 45) —, für die er ohne eine Einsicht von der Rotation seines Bezugssystems eine nähere Erklärung nicht zu geben vermöchte.

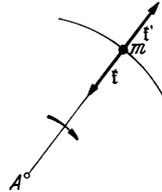


Abb. 64. Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft im mitrotierenden System.

Wir wollen noch zeigen, daß im rotierenden System ein freibeweglicher, also nicht durch eine Zentripetalkraft festgehaltener Körper tatsächlich eine radiale Zentrifugalbeschleunigung vom Betrag $b_r = r u^2$, einer Zentrifugalkraft vom Betrage $m r u^2$ entsprechend, erfährt. Ein Körper befinde sich anfänglich im Abstände r vom Drehungszentrum relativ zum mitrotierenden Bezugssystem in Ruhe, indem er durch eine Zentripetalkraft festgehalten wird (Abb. 65). Zur Zeit $t = 0$ verschwinde die Zentripetalkraft. Da der Körper völlig freibeweglich sein soll, also vom rotierenden System aus keine Kräfte auf ihn übertragen werden, so bewegt er sich nunmehr, von einem ruhenden System aus beurteilt, in seiner momentanen Richtung mit der Geschwindigkeit $v = r u$ tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn geradlinig und gleichförmig weiter. Dabei wächst sein Abstand vom Drehungszentrum, den wir mit r' bezeichnen. Nach der Zeit t hat er die Strecke vt zurückgelegt, und sein Abstand vom Drehungszentrum A beträgt jetzt $r' = \sqrt{r^2 + (vt)^2}$. Seine radiale Geschwindigkeit dr'/dt und Beschleunigung d^2r'/dt^2 im mitrotierenden System betragen also

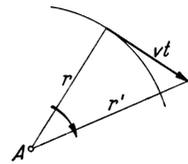


Abb. 65. Zur Zentrifugalbeschleunigung im mitrotierenden System.

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{v^2 t}{(r^2 + v^2 t^2)^{1/2}}, \quad \frac{d^2r'}{dt^2} = \frac{r^2 v^2}{(r^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{v^2 v^2}{r'^3}. \quad (87)$$

Für den Augenblick des Starts, $t = 0$, $r' = r$, folgt hieraus $d^2r'/dt^2 = v^2/r = r u^2$, also die dem Abstände r vom Zentrum entsprechende Zentrifugalbeschleunigung.

Man beachte, daß es sich bei den Standpunkten des ruhenden und des mitrotierenden Beobachters nur um verschiedene (und ohne weiteres in einander übersetzbare) Arten der Beschreibung der Naturvorgänge handelt, die beide gleich richtig und konsequent sind. Man wird in jedem Einzelfall denjenigen Standpunkt wählen, der dem vorliegenden Problem am besten angepaßt ist. Sehr häufig ist das der Standpunkt des mitrotierenden Beobachters.

Da jedes Bahnelement eines auf beliebig gekrümmter Bahn bewegten Körpers als unendlich kleines Stück eines die Bahn tangierenden Kreises angesehen werden kann, so besteht auch bei jeder gekrümmten Bahn in jedem Augenblick eine zur Bahn senkrechte Zentrifugalkraft, die man hier als *Normalkraft* zu bezeichnen pflegt, deren Betrag um so größer ist, je größer die Geschwindigkeit des Körpers und je kleiner der Krümmungsradius der Bahn an jener Stelle ist. Über weitere Kräfte in rotierenden Systemen s. § 41.

34. Beispiele zur Zentrifugalkraft. Bei der in Abb. 66 dargestellten Vorrichtung, die durch einen Motor in schnelle Drehung versetzt werden kann, liefert die von der Masse m_1 ausgehende Zentrifugalkraft die Zentripetalkraft für die mit ihr durch eine Schnur verbundene Masse m_2 und umgekehrt. Sind ihre Abstände von der Drehachse r_1 und r_2 , und ist ihre Winkelgeschwindigkeit u , so halten sich die Zentrifugalkräfte das Gleichgewicht, wenn $m_1 r_1 u^2 = m_2 r_2 u^2$, also $r_1 : r_2 = m_2 : m_1$. Andernfalls werden die Massen nach der einen oder anderen Seite geschleudert.

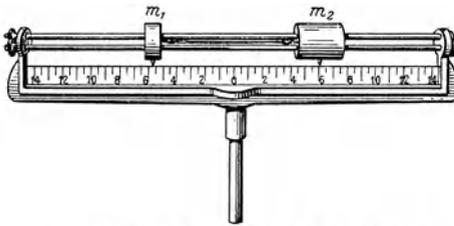


Abb. 66. Gleichgewicht zweier Zentrifugalkräfte.

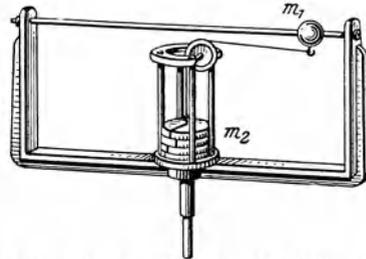


Abb. 67. Hebung einer Masse m_2 durch die von der Masse m_1 ausgehende Zentrifugalkraft.

In Abb. 67 vermag die von der Masse m_1 ausgehende Zentrifugalkraft $m_1 r u^2$ die Masse m_2 zu heben, wenn sie größer ist als deren Gewicht $m_2 g$. Hebung erfolgt also, sobald $u^2 = m_2 g / m_1 r$. Die Masse m_1 schlägt dann an die seitliche Backe an und ihr Bahnradius ist nunmehr $r' > r$. Läßt man die Winkel-

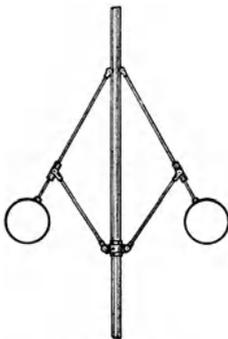


Abb. 68. Zentrifugalregulator.

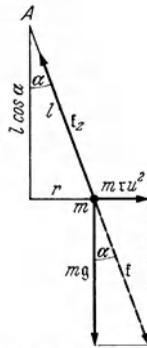


Abb. 69. Zur Theorie des Zentrifugalregulators.

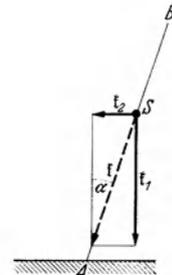


Abb. 70. Zur Theorie des Radfahrens.

geschwindigkeit jetzt wieder abnehmen, so fällt die Masse m_2 erst wieder, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Gleichung $u'^2 = m_2 g / m_1 r'$ entspricht. Es ist also $u' < u$.

Ein wichtiger Bestandteil der Dampfmaschinen ist der Zentrifugalregulator (Abb. 68). Je schneller er rotiert, um so höher heben sich die beiden Massen, die an den Enden zweier in einer vertikalen Ebene drehbarer Stangen befestigt sind. Wir stellen uns auf den Standpunkt eines mitrotierenden Beobachters. Befindet sich die Masse m im Abstände l vom Drehpunkt A der Stange (Abb. 69), so wirkt für diesen Beobachter auf die Masse m außer der Schwerkraft mg die Zentrifugalkraft $m r u^2$. Die Masse ist im Gleichgewicht, wenn sich die statischen Momente dieser Kräfte bezüglich des Punktes A aufheben. Diese statischen Momente betragen $N_1 = m g r$ und $N_2 = m r u^2 l \cos \alpha$, wenn α der Winkel ist, den die Stange mit der Drehachse bildet. Aus $N_1 = N_2$ folgt $\cos \alpha = g / l u^2$. Die Resultierende f der beiden Kräfte liegt in Richtung der Stange und wird

durch die in ihr hervorgerufene Zwangskraft \mathfrak{f}_z aufgehoben, deren statisches Moment bezüglich A gleich Null ist. Der $\cos \alpha$ ist um so kleiner, α also um so größer, je größer die Winkelgeschwindigkeit u ist. Eine Hebung beginnt erst dann, wenn $u^2 > gl$ ($\cos \alpha < 1$). Der Zentrifugalregulator dient zur Regelung des Ganges von Dampfmaschinen. Er drosselt durch ein mit ihm verbundenes Gestänge die Dampfzufuhr, wenn seine Drehzahl infolge zu schnellen Ganges der Maschine einen bestimmten Betrag überschreitet.

Die Kunst des Radfahrens beruht wesentlich auf einer geschickten Ausnutzung der Zentrifugalkraft. Bekanntlich genügt zum Fahren einer Kurve die Schrägstellung des Steuerrades allein nicht. Es muß die für jede Kreisbewegung nötige Zentripetalkraft hinzukommen. Diese wird von der Schwerkraft geliefert und durch eine geeignete Neigung des Fahrrades hervorgerufen. Der Einfachheit halber denken wir uns das Fahrrad nebst Fahrer als einen Massenpunkt m im Schwerpunkt S des Systems Fahrrad-Fahrer (Abb. 70), das wir durch die unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigte Gerade AB schematisieren. Wir betrachten die Verhältnisse vom Standpunkt des Fahrers, also eines mitbewegten Beobachters. In S greift erstens die Schwerkraft \mathfrak{f}_1 vom Betrage $k_1 = mg$ an, zweitens die Zentrifugalkraft \mathfrak{f}_2 vom Betrage $k_2 = mv^2/r$ (r Kurvenradius). Jede der beiden Kräfte erzeugt ein Drehmoment um den Fußpunkt A des Fahrrades, und je nachdem dasjenige der Schwerkraft oder der Zentrifugalkraft überwiegt, fällt das Fahrrad nach innen, oder der Schwerpunkt wird nach außen abgetrieben. Das Fahren der Kurve ist nur möglich, wenn das Drehmoment der Resultierenden \mathfrak{f} von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 verschwindet, ihre Wirkungslinie also durch den Fußpunkt A geht. Der Neigungswinkel des Fahrrades ergibt sich dann aus der Bedingung $\operatorname{tg} \alpha = k_2/k_1 = v^2/rg$.

Demnach ist es zum Fahren einer Kurve nötig, die dem Bahnradius r und der Geschwindigkeit v entsprechende Neigung α herzustellen. Der Kurvenradius wird durch die Stellung des Vorderrades zum Hinterrade bestimmt, indem die in der Fahrbahn an die beiden Räder gelegten Tangenten gleichzeitig Tangenten der Bahnkurve sind. Die richtige Neigung α wird durch Ausnutzung der Zentrifugalkraft erzeugt. Will man aus gerader Bahn z. B. in eine Kurve nach *rechts* einbiegen, so wird die dazu nötige Neigung nach rechts dadurch hervorgerufen, daß man zunächst dem Vorderrad einen kurzen Ruck nach *links* erteilt, also eine kleine Linkskurve fährt. Die dabei auftretende, nach rechts gerichtete Zentrifugalkraft treibt den Schwerpunkt nach rechts, erzeugt also eine Neigung dorthin. Wenn diese den richtigen Betrag erreicht hat, wird das Vorderrad in die Stellung umgeworfen, die dem Radius der zu fahrenden Kurve entspricht. Will man aus der Kurve wieder in die Gerade übergehen, so verfährt man umgekehrt. Man fährt momentan noch ein wenig stärker in die Kurve nach rechts, so daß die Zentrifugalkraft das Fahrrad aufrichtet, und stellt dann das Vorderrad auf gerade Fahrt. Entsprechend werden auch alle kleinen zufälligen fehlerhaften Neigungen während der Fahrt durch Fahren kleiner Kurven beseitigt.

Da die Zentrifugalkraft um so größer ist, je schneller man fährt, so genügen bei großer Geschwindigkeit viel kleinere Lenkstangenbewegungen, um Gleichgewicht zu halten, als bei kleiner Geschwindigkeit. Deshalb ist es für den Anfänger viel leichter, schnell zu fahren, als langsam. Die Vordergabel ist so gebaut, daß sich das Vorderrad bei kleinen Körperbewegungen des Fahrers ein wenig dreht. Bei nicht zu kleiner Geschwindigkeit genügen diese Bewegungen, um kleine zufällige Neigungen zu beseitigen. Darauf beruht das freihändige Fahren. Kreiselkräfte (§ 40) von merklicher Stärke treten beim Fahrrad wegen der geringen Masse der Räder nur bei beträchtlicher Geschwindigkeit mit einiger Stärke auf und spielen bei der Kunst des Radfahrens höchstens eine untergeordnete Rolle.

Damit ein schnell fahrendes Fahrzeug nicht infolge der Zentrifugalkraft in einer Kurve seitlich abgelenkt oder sich seitlich überschlägt, ist es erforderlich, daß die Resultierende von Schwerkraft und Zentrifugalkraft wenigstens ungefähr senkrecht zur Fahrbahn steht. Aus diesem Grunde werden die Kurven von Eisenbahnen, Rad- und Automobilrennbahnen und Autostraßen überhöht, d. h. so schräge gelegt, daß dieser Bedingung bei der durchschnittlich vorkommenden Geschwindigkeit genügt ist. Da die Neigung vom Kurvenradius abhängt, so ist sie bei breiten Bahnen an der Außenseite der Kurve geringer als an der Innenseite.

Auf der Zentrifugalkraft beruht ein bekanntes Zirkuskunststück, die Schleifenfahrt, bei der ein Radfahrer oder ein kleiner bemannter Wagen, aus größerer Höhe kommend, eine vertikale Schleife durchfährt. Man kann den Versuch im kleinen mit einer Kugel machen (Abb. 71a). Es kommt natürlich

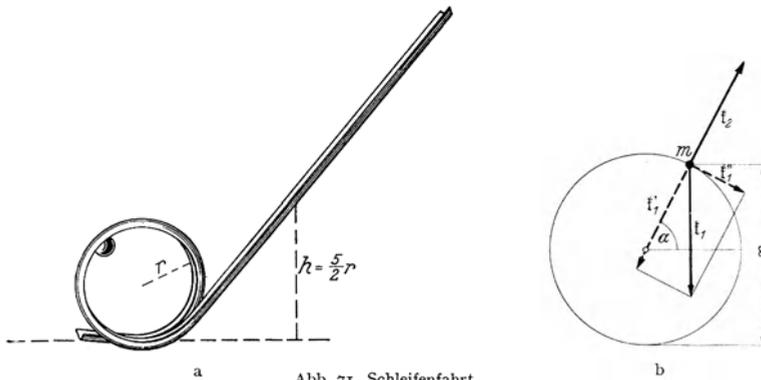


Abb. 71. Schleifenfahrt.

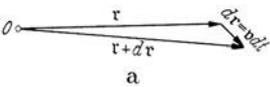
darauf an, daß die Zentrifugalkraft \mathfrak{f}_2 in jedem Augenblick groß genug ist, um die Schwerkraft aufzuheben. Wir zerlegen die an der Masse m angreifende Schwerkraft \mathfrak{f}_1 vom Betrage mg in ihre radiale Komponente \mathfrak{f}_1' vom Betrage $mg \sin \alpha$ und ihre tangentielle Komponente \mathfrak{f}_1'' vom Betrage $mg \cos \alpha$ (Abb. 71 b). Die Zentrifugalkraft mv^2/r muß in jedem Bahnpunkt mindestens ebenso groß sein wie erstere. Befindet sich die Masse m in der Höhe x über dem tiefsten Punkt der Bahn, und ist sie aus der Höhe h über diesem gestartet, so beträgt ihre kinetische Energie $mv^2/2 = mg(h-x)$, also die Zentrifugalkraft $2mg(h-x)/r$. Nach Abb. 71 b ist $\sin \varphi = (x-r)/r$. Es folgt

$$2mg \frac{h-x}{r} = mg \frac{x-r}{r} \quad \text{oder} \quad h = \frac{3x-r}{2}.$$

Damit dies auch im höchsten Punkt der Bahn erfüllt ist ($x = 2r$), muß demnach die Abfahrthöhe mindestens $h = 5r/2$ betragen. (Wegen der Energieverluste durch Reibung tatsächlich noch mehr.) Andernfalls fällt der Körper aus der Höhe $x = (2h+r)/3$ herab.

35. Drehimpuls. Momentensatz. Flächensatz. Ein Massenpunkt bewege sich in einem beliebigen Kraftfelde. Er unterliegt an jedem Ort einer Kraft \mathfrak{f} , die im allgemeinen von Ort zu Ort ihren Betrag und ihre Richtung ändert, also eine Funktion der Ortskoordinaten ist. Es sei O ein beliebiger Punkt im Raum (Abb. 72a), r sei der von O nach dem jeweiligen Ort des Massenpunktes weisende Fahrstrahl, $v = dr/dt$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes (§ 9), also dv/dt seine Beschleunigung. Dann ist $\mathfrak{f} = m dv/dt$ die auf ihn wirkende Kraft, und das statische Moment dieser Kraft bezüglich des Punktes O ist

$$\mathfrak{M} = [r \mathfrak{f}] = m \left[r \frac{dv}{dt} \right]. \quad (88)$$



Als *Drehimpuls*, *Drall* oder *Impulsmoment* q des Massenpunktes bezüglich des Punktes O definieren wir — ganz analog zum statischen Moment einer Kraft — das Vektorprodukt aus dem Fahrstrahl r und dem Impuls $m v = m dr/dt$ des Massenpunktes (§ 20),

$$q = [r \cdot m v] = m [r v] = m \left[r \frac{dr}{dt} \right]. \quad (89)$$

Die Richtung des Vektors q folgt aus der Schraubenregel (§ 10). Er steht daher in Abb. 72a auf der Zeichnungsebene senkrecht und weist nach hinten, also in Richtung einer Achse, die auf der durch r und $m v$ bzw. dr definierten Ebene senkrecht steht (Abb. 73). Der Drehimpuls verschwindet gemäß § 10, Gl. (31), wenn r und dr gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind ($\sin \gamma = 0$), und hat seinen größten Betrag, $q = mrv$, wenn r und dr aufeinander senkrecht stehen ($\sin \gamma = \pm 1$), genau wie das statische Moment einer Kraft.

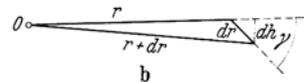


Abb. 72. Zum Momentensatz.

Wir wollen q nach der Zeit differenzieren. Dabei ist zu beachten, daß das Vektorprodukt $[dr/dt \cdot v] = [v v] = 0$ ist [§ 10, Gl. (33)]. Wir erhalten dann, unter Berücksichtigung von Gl. (88),

$$\frac{dq}{dt} = m \left[r \frac{dv}{dt} \right] + m \left[\frac{dr}{dt} v \right] = m \left[r \frac{dv}{dt} \right] = \mathfrak{R}. \quad (90)$$

Diese Gleichung spricht den *Momentensatz* aus: *Der zeitliche Differentialquotient des Drehimpulses eines Massenpunktes bezüglich irgendeines Punktes ist gleich dem statischen Moment der auf ihn wirkenden Kraft bezüglich des gleichen Punktes.* Man beachte, daß demnach Drehimpuls und statisches Moment in einer ganz analogen Beziehung zueinander stehen wie Impuls und Kraft [§ 20, Gl. (31)].

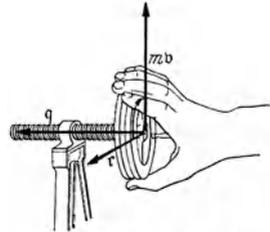


Abb. 73. Zur Definition des Drehimpulses.

In Abb. 72a ist die Änderung des Vektors r in der Zeit dt dargestellt. Er erfährt in dieser Zeit einen Zuwachs $dr = v dt$, indem sich der Massenpunkt um die Strecke dr bewegt, und er hat sich nach Ablauf der Zeit dt in den Vektor $r + dr$ verwandelt. Dabei hat der Fahrstrahl eine Fläche dF überstrichen, die durch die drei Vektoren r , dr und $r + dr$ begrenzt wird. Die Fläche ist ein Dreieck vom Inhalt $dF = \frac{1}{2} r dh = \frac{1}{2} r dr \sin \gamma$, wenn r und dr die Beträge der Vektoren r und dr sind und γ der von ihren Richtungen eingeschlossene Winkel ist (Abb. 72b). Nun ist der Betrag des Drehimpulses q nach Gl. (89) und nach Gl. (31) (§ 10) $q = m r \sin \gamma dr/dt$, also $r dr \sin \gamma = q dt/m$. Es ergibt sich also

$$dF = \frac{1}{2} r dr \sin \gamma = \frac{1}{2m} q dt. \quad (91)$$

Die vom Fahrstrahl r in der Zeit dt überstrichene Fläche dF ist dem Betrage q des Drehimpulses des Massenpunktes proportional. Dieser wichtige Satz heißt der *Flächensatz*.

Im allgemeinen wird sich der Drehimpuls unter der Wirkung der am Massenpunkt angreifenden Kraft im Laufe der Zeit ändern, und so wird sich im allgemeinen auch die Änderungsgeschwindigkeit dF/dt der überstrichenen Fläche ändern. Der Drehimpuls ist nur dann konstant, $dq/dt = 0$, q (und q) = const, wenn das statische Moment der Kraft $\mathfrak{R} = 0$ ist [Gl. (90)]. Das statische Moment der Kraft verschwindet dann und nur dann in jedem Augenblick, wenn die Kraft in jedem Raumpunkt stets auf den gleichen Punkt hin oder von ihm

weg gerichtet ist, und wenn wir diesen Punkt als Bezugspunkt O wählen. Denn in diesem Fall ist $\mathfrak{R} = [\mathfrak{r}\mathfrak{f}] = 0$, weil \mathfrak{r} und \mathfrak{f} dann in gleicher oder entgegengesetzter Richtung liegen. Eine solche Kraft nennt man eine *Zentralkraft*, weil sie überall auf das gleiche Zentrum hin oder von ihm weg weist. Dann ist die in einer endlichen Zeit t vom Fahrstrahl überstrichene endliche Fläche nach Gl. (91) $F = qt/2m$, also der Zeit t proportional. In diesem Sonderfall lautet der Flächensatz: *Bewegt sich ein Massenpunkt unter der Wirkung einer Zentralkraft, so ist sein auf das Kraftzentrum bezogener Drehimpuls zeitlich konstant, und der vom Kraftzentrum auf den Massenpunkt hinweisende Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.* Ein Beispiel hierfür ist das 2. KEPLERsche Gesetz (§ 46).

Die Einheit des Drehimpulses ist im CGS-System $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$, im technischen Maßsystem $1 \text{ kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}$.

36. Rotationsenergie. Trägheitsmoment. Ein Körper rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit u (Betrag u) um eine Achse. Die Geschwindigkeit v , mit der sich ein im senkrechten Abstände r von der Achse befindliches Massenelement dm des Körpers bewegt, hat dann den Betrag $v = ur$, und seine kinetische Energie beträgt $dE = dm v^2/2 = dm u^2 r^2/2$. Die Winkelgeschwindigkeit ist für alle

Massenelemente eines rotierenden Körpers die gleiche. Demnach ergibt sich die kinetische Energie des ganzen Körpers — seine *Rotationsenergie* —, indem man die Summe (das Integral) über alle Massenelemente des Körpers bildet,

$$E = \frac{u^2}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} J u^2. \quad (92)$$

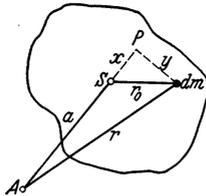


Abb. 74. Zum STEINERSchen Satz.

Die hier eingeführte Größe

$$J = \int r^2 dm \quad (93)$$

heißt das *Trägheitsmoment* des Körpers bezüglich der betrachteten Achse. Es hängt von der Lage der Drehachse relativ zum Körper ab. Das Trägheitsmoment eines einzelnen Massenpunktes m im senkrechten Abstände r von der Drehachse beträgt $J = m r^2$. Die Einheit des Trägheitsmoments ist im CGS-System $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$, im technischen Maßsystem $1 \text{ kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$.

Definieren wir bei einem um eine Achse drehbaren Körper von der Masse m einen senkrechten Abstand r_i von dieser Achse durch die Gleichung

$$r_i^2 = \frac{1}{m} \int r^2 dm = \frac{J}{m}, \quad \text{so daß} \quad J = m r_i^2, \quad (94)$$

so können wir uns den Körper bezüglich seines Trägheitsmomentes durch einen um den *Trägheitsradius* r_i von der Achse entfernten Massenpunkt von der Masse m ersetzt denken.

In Abb. 74 sei A der Durchstoßpunkt einer zur Zeichnungsebene senkrechten Achse, S der Durchstoßpunkt einer zu ihr parallelen, durch den Schwerpunkt eines Körpers gehenden Achse (*Schwerpunktsachse*) und a der Abstand dieser beiden Achsen. Es sei ferner r der senkrechte Abstand eines Massenelements dm des Körpers von der ersten Achse, r_0 sein Abstand von der Schwerpunktsachse. Das von dm auf die Gerade AS gefällte Lot schneide die Gerade in P im Abstände $SP = x$ von S und habe die Länge y . Dann ist $r^2 = (a + x)^2 + y^2$, $r_0^2 = x^2 + y^2$. Das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der durch A gehenden Achse beträgt dann

$$J = \int r^2 dm = \int [(a + x)^2 + y^2] dm = a^2 \int dm + \int r_0^2 dm + 2a \int x dm.$$

Nun ist $\int dm = m$ die Masse des Körpers, $\int r_0^2 dm = J_s$ das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der zur vorgegebenen Achse parallelen Schwerpunktsachse und $\int x dm = 0$ nach Gl. (28b) (§ 19). Demnach ist

$$J = J_s + ma^2 \quad (95)$$

(STEINERScher Satz). Das Trägheitsmoment J eines Körpers bezüglich einer beliebigen Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der zur vorgegebenen Achse parallelen Schwerpunktsachse und dem Trägheitsmoment ma^2 eines dem Körper an Masse gleichen, im Körperschwerpunkt befindlichen Massenpunktes bezüglich der vorgegebenen Achse. Hiernach kann das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich jeder beliebigen Achse berechnet werden, wenn man seine Trägheitsmomente bezüglich aller Schwerpunktsachsen kennt.

Bei einfach geformten und homogenen Körpern läßt sich das Trägheitsmoment nach Gl. (93) leicht berechnen. Zum Beispiel beträgt es

für eine homogene Vollkugel mit dem Radius r für jede durch den Mittelpunkt gehende Achse $2mr^2/5$,

für einen homogenen Hohlzylinder mit den Radien r_1 und r_2 bezüglich seiner Körperachse $m(r_1^2 + r_2^2)/2$,

für einen homogenen Würfel von der Kantenlänge a bezüglich jeder durch seinen Mittelpunkt gehenden Achse $ma^2/12$.

Die verschiedenen Schwerpunktsachsen eines beliebig gestalteten Körpers unterscheiden sich durch die Beträge der zu ihnen gehörigen Trägheitsmomente. Jedoch lassen sich diese in einen einfachen Zusammenhang bringen, den wir mitteilen wollen, auf dessen Beweis wir aber verzichten müssen. Im allgemeinen hat ein Körper eine bestimmte Schwerpunktsachse, bezüglich derer sein Trägheitsmoment einen größeren Betrag hat als bezüglich aller anderen Schwerpunktsachsen, und eine zu ihr senkrechte Schwerpunktsachse, bezüglich derer sein Trägheitsmoment den geringsten Betrag hat. Diese beiden Schwerpunktsachsen größten und kleinsten Trägheitsmoments und die zu ihnen senkrechte dritte Schwerpunktsachse, der ein mittleres Trägheitsmoment entspricht, heißen die drei *Hauptträgheitsachsen* des Körpers, die zugehörigen Trägheitsmomente, die wir mit J_a, J_b, J_c bezeichnen wollen, seine *Hauptträgheitsmomente*. Es sei J das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer beliebigen Schwerpunktsachse. Wir stellen jetzt die reziproken Werte der Wurzeln aus den genannten Trägheitsmomenten durch Strecken dar, die wir uns vom Schwerpunkt aus in Richtung der zugehörigen Achsen abgetragen denken,

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = R, \quad \frac{1}{\sqrt{J_a}} = a, \quad \frac{1}{\sqrt{J_b}} = b, \quad \frac{1}{\sqrt{J_c}} = c. \quad (96)$$

Die Endpunkte der zu allen möglichen Schwerpunktsachsen gehörigen Strecken R bedecken dann eine geschlossene, den Schwerpunkt einhüllende Fläche. Der Schwerpunkt liege im Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems (xyz) , dessen Achsen mit den drei Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, so daß x, y, z die Koordinaten der Endpunkte der Strecken R seien, und $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist. Dann läßt sich die Gültigkeit der folgenden Gleichung beweisen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (97)$$

Die genannte Fläche bildet also ein Ellipsoid, das *Trägheitsellipsoid* des Körpers. Es hat die drei Halbachsen a, b, c und ist demnach bekannt, wenn die drei Hauptträgheitsmomente bekannt sind. Man findet die Strecke R und damit das Trägheitsmoment J für eine bestimmte Schwerpunktsachse, indem man

vom Schwerpunkt aus eine Gerade in der betreffenden Richtung bis zur Fläche des Trägheitsellipsoids zieht. Demnach sind durch die drei Hauptträgheitsmomente auch die Trägheitsmomente für sämtliche Schwerpunktsachsen des Körpers bestimmt.

Bei homogenen, rotationssymmetrischen Körpern — wie sie auf der Drehbank entstehen — artet das Trägheitsellipsoid in ein Rotationsellipsoid, also ein Ellipsoid mit zwei gleichen Hauptachsen aus. In diesem Fall ist die geometrische Achse (Figurenachse) des Körpers stets eine Hauptträgheitsachse, und zwar eine Achse größten oder kleinsten Trägheitsmoments. Ersteres, wenn der Körper abgeplattet, letzteres wenn er länglich ist. Allen zur Figurenachse senkrechten Schwerpunktsachsen entspricht dann das gleiche Trägheitsmoment, und zwar bei einem abgeplatteten Körper das kleinste, bei einem länglichen Körper das größte. Zum Beispiel ist bei einem abgeplatteten Kreiszyylinder (Kreisscheibe) die Figurenachse die Achse größten Trägheitsmoments, jede dazu senkrechte Schwerpunktsachse eine Achse kleinsten Trägheitsmoments. Bei einem länglichen Kreiszyylinder ist es umgekehrt. Die beiden Fälle gehen ineinander über bei einem Zylinder, für dessen Höhe h und Radius r die Gleichung $h^2 = 3r^2$ gilt. In diesem Fall sind die drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, das Trägheitsellipsoid ist demnach eine Kugel, und es sind überhaupt die Trägheitsmomente bezüglich aller Schwerpunktsachsen gleich groß. Körper dieser Art heißen daher auch *Kugelkreisel*. Zu ihnen gehört unter anderem auch die homogene Kugel und der homogene Würfel.

Man kann die Rotation eines Körper, um eine beliebige Schwerpunktsachse stets in drei gleichzeitige, unabhängige Rotationen um die drei Hauptträgheitsachsen zerlegen, entsprechend der Zerlegung einer beliebigen Bewegung in drei gleichzeitige, unabhängige Bewegungen in drei zueinander senkrechten Richtungen. (Bezüglich irgendwelcher anderer zueinander senkrechter Achsen besteht diese Möglichkeit nicht.) Es seien u_a , u_b , u_c die Beträge der Winkelgeschwindigkeiten dieser drei Rotationskomponenten. Dann kann man statt Gl. (92) auch schreiben

$$E = \frac{1}{2} J u^2 = \frac{1}{2} (J_a u_a^2 + J_b u_b^2 + J_c u_c^2). \quad (98)$$

Ein auf einer Ebene rollender Körper vom Radius r führt gleichzeitig eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit v und eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $u = v/r$ aus. Daher beträgt seine kinetische Energie $E = mv^2/2 + Ju^2/2 = (m + J/r^2)v^2/2$. Bei einer Kugel ist $J = 2mr^2/5$. Ihre kinetische Energie beträgt daher beim Rollen $E = 7mv^2/10$, ist also um den Faktor $7/5$ größer als bei reiner fortschreitender Bewegung. Läßt man zwei äußerlich ganz gleich geformte Zylinder, von denen der eine ein Vollzylinder, der andere ein ihm an Masse gleicher Hohlzylinder aus schwererem Stoff ist, auf einer schiefen Ebene gleichzeitig abrollen, so läuft der Vollzylinder schneller. Beide gewinnen zwar beim Durchfallen gleicher Strecken die gleiche Energie. Von dieser aber entfällt beim Hohlzylinder, weil er das größere Trägheitsmoment hat, ein kleinerer Bruchteil auf die reine fortschreitende Bewegung als beim Vollzylinder.

37. Rotation eines Massenpunktes um eine feste Achse. Ein Massenpunkt m rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit u um eine feste Achse AA' (Abb. 75). Sein senkrechter Abstand von der Achse sei r_0 , seine Geschwindigkeit v . Sie weise in Abb. 75a momentan senkrecht nach hinten. Als Bezugspunkt seines Drehimpulses (§ 35) wählen wir einen beliebigen auf der Achse AA' liegenden Punkt O . Der von O nach dem Massenpunkt weisende Fahrstrahl sei r . Dann ist nach Gl. (89) sein Drehimpuls bezüglich O

$$q = m [rv]. \quad (99)$$

Der Vektor q steht nach § 10 senkrecht auf der durch r und v gelegten Ebene, liegt also momentan in der Zeichnungsebene, weist gemäß der Schraubenregel schräge nach oben gegen die Achse und rotiert mit dem Massenpunkt um diese.

Wir zerlegen q in seine zur Achse parallele Komponente q_1 und seine zur Achse senkrechte Komponente q_2 (Abb. 75 b). Der von O nach dem Fußpunkt von r_0 — dem Zentrum der Kreisbahn des Massenpunktes — weisende Strahl sei a , so daß $r = r_0 + a$ die Vektorsumme von r_0 und a ist. Dann folgt aus Gl. (99)

$$q = m [(r_0 + a) v] = m [r_0 v] + m [a v] = q_1 + q_2, \quad (100)$$

denn nach der Schraubenregel weist das Vektorprodukt $[r_0 v]$ wie q_1 in Richtung der Achse, das Vektorprodukt $[a v]$ wie q_2 in der Zeichnungsebene senkrecht auf sie hin. q_1 ist von der Lage des Bezugspunktes O auf der Achse unabhängig, q_2 hingegen nicht. q_1 ist der Drehimpuls des Massenpunktes um die feste Achse. q_2 verschwindet, wenn man den Mittelpunkt des Bahnkreises des Massenpunktes als Bezugspunkt wählt, wenn also $a = 0$, $r = r_0$ ist.

Da r_0 und v aufeinander senkrecht stehen, so ist der Betrag von q_1 gleich $q_1 = m r_0 v$ [§ 10, Gl. (31)] oder, wegen $v = u r_0$, $q_1 = m r_0^2 u = J u$, da $J = m r_0^2$ das Trägheitsmoment des Massenpunktes bezüglich der Achse AA' ist. Da die Vektoren q_1 und u die gleiche Richtung, nämlich die der Achse haben, so gilt demnach auch die Vektorgleichung

$$q_1 = J u. \quad (101)$$

Der Vektor $q_2 = m [a v]$ steht senkrecht zur Achse und liegt im Fall der Abb. 75 momentan in der Zeichnungsebene. Während aber die Komponente q_1 eine feste Richtung im Raum hat, rotiert die Richtung von q_2 mit dem Massenpunkt um die Achse. Demnach ist q_2 als ein Vektor, der ständig seine Richtung ändert, auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit u zeitlich nicht konstant. Nur sein Betrag $q_2 = m a v = m a r u$ ist bei konstantem u zeitlich konstant. Entsprechend ist auch der Vektor $q = q_1 + q_2$ zeitlich nicht konstant, dq/dt hat einen endlichen Wert.

Dann aber folgt aus Gl. (90), daß auf den Massenpunkt eine Kraft wirken muß, deren statisches Moment bezüglich des Punktes O gleich $\mathfrak{N} = dq/dt$ ist. Nach Gl. (90) ist

$$\mathfrak{N} = \frac{dq}{dt} = m \left[r \frac{dv}{dt} \right] = m [r b], \quad (102)$$

wenn $b = dv/dt$ die Beschleunigung des Massenpunktes ist. Wir zerlegen wie oben $r = r_0 + a$ in seine beiden Komponenten und die Beschleunigung $dv/dt = b = b_s + b_r$ nach § 10 in die tangentielle Bahnbeschleunigung b_s und die radiale Zentripetalbeschleunigung b_r (Abb. 76a). Wir beachten ferner, daß r_0 und b_r einander entgegengerichtet sind, so daß nach § 10, Gl. (31) ($\sin \gamma = 0$), das Vektorprodukt $[r_0 b_r] = 0$ ist. Dann folgt aus Gl. (102)

$$\mathfrak{N} = m [(r_0 + a) (b_s + b_r)] = m [r_0 b_s] + m [a b_r] + m [a b_s] = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3. \quad (103)$$

Das statische Moment \mathfrak{N} setzt sich also aus drei Komponenten zusammen, die aufeinander senkrecht stehen (Abb. 76b). Aus der Schraubenregel folgt, daß

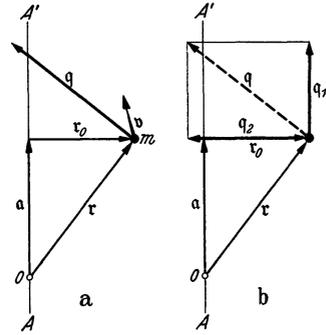


Abb. 75. Zum Drehimpuls eines rotierenden Massenpunktes.

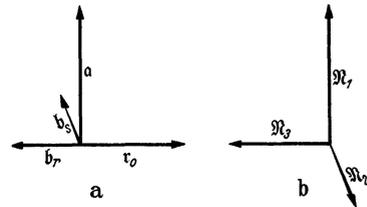


Abb. 76. a die Vektoren a , r_0 , b_s , b_r , b die Komponenten des Vektors \mathfrak{N} (zu Abb. 75).

\mathfrak{N}_1 in Richtung der Achse weist, in Abb. 75 also senkrecht nach oben, und der Winkelgeschwindigkeit u gleich (oder entgegen) gerichtet ist. Der Vektor \mathfrak{N}_2 weist in Abb. 75 momentan senkrecht nach vorn, der Vektor \mathfrak{N}_3 liegt momentan in der Zeichnungsebene und weist momentan nach links. Die Richtung von \mathfrak{N}_1 ist zeitlich konstant, die Richtungen von \mathfrak{N}_2 und \mathfrak{N}_3 rotieren mit dem Massenpunkt um die Achse. Durch Vergleich mit Gl. (100) erkennt man, daß \mathfrak{N}_1 mit der axialen Komponente q_1 des Drehimpulses, \mathfrak{N}_2 und \mathfrak{N}_3 mit seiner radialen Komponente q_2 zusammenhängen,

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{d q_1}{d t} = m [r_0 b_s], \quad \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 = \frac{d q_2}{d t} = m [a b_r] + m [a b_s]. \quad (104)$$

Daher ergibt sich aus Gl. (101) für \mathfrak{N}_1 und seinen Betrag N_1

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{d q_1}{d t} = J \frac{d u}{d t}, \quad N_1 = J \frac{d u}{d t} = J \frac{d^2 \varphi}{d t^2} \quad (105)$$

[§ 10, Gl. (22)], wenn φ der Drehwinkel des Massenpunktes, also $d\varphi/dt = u$ der Betrag seiner Winkelgeschwindigkeit ist. Ist $\mathfrak{N}_1 = 0$, so ist demnach der Drehimpuls q_1 um die Achse und die Winkelgeschwindigkeit u konstant. Wirkt an dem Massenpunkt eine zur Achse und zum jeweiligen Fahrstrahl r_0 senkrechte, also seiner Geschwindigkeit v gleich oder entgegen gerichtete Kraft, die bezüglich der Achse das statische Moment \mathfrak{N}_1 besitzt, so erfährt der Massenpunkt eine Winkelbeschleunigung $d^2\varphi/dt^2 = N_1/J$, die je nach der Richtung von \mathfrak{N}_1 — ob der Winkelgeschwindigkeit gleich- oder ihr entgegengerichtet — seine Winkelgeschwindigkeit vergrößert oder verkleinert.

Damit der Massenpunkt eine Kreisbahn beschreibt, also die dazu nötige Zentripetalbeschleunigung b_r erfährt, muß nach Gl. (85) eine Zentripetalkraft $m b_r$, entgegen der Richtung des Fahrstrahls r_0 (Abb. 75) an ihm angreifen. Das statische Moment dieser Zentripetalkraft bezüglich des Bezugspunktes O ist nach § 28 $[a m b_r] = m [a b_r]$, also gleich dem statischen Moment \mathfrak{N}_2 [Gl. (104)]. Dieses dient also zur Erzeugung der zur Aufrechterhaltung der Kreisbewegung erforderlichen Zentripetalkraft, die der Zentrifugalkraft $-m b_r$, entgegenwirkt (Abb. 77). Dieses statische Moment verschwindet, wenn man den Bezugspunkt O in den Mittelpunkt des Bahnkreises des Massenpunktes verlegt. Die Zentripetalkraft ist die Resultierende von Zwangskräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, die in den Achsenlagern durch die von dem rotierenden Massenpunkt ausgehende Zentrifugalkraft wachgerufen werden.

Das statische Moment \mathfrak{N}_3 tritt nach Gl. (103) nur dann auf, wenn der Massenpunkt eine Bahnbeschleunigung b_s , also eine Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit, erfährt, und fehlt bei konstanter Winkelgeschwindigkeit. Es beruht auf zusätzlichen Zwangskräften, die in den Achsenlagern unter der Wirkung einer Kraft auftreten, die eine Winkelbeschleunigung des Massenpunktes bewirkt, und die mit der Resultierenden dieser Zwangskräfte ein Kräftepaar bildet. Das statische Moment \mathfrak{N}_3 verschwindet, wenn man den Mittelpunkt des Bahnkreises als Bezugspunkt O wählt.

Die Wahl des Bezugspunktes O hat, wie wir gesehen haben, keinen Einfluß auf die axiale Drehimpulskomponente q_1 und die axiale Komponente \mathfrak{N}_1 des statischen Moments. Die radiale Drehimpulskomponente q_2 und die statischen Momente \mathfrak{N}_2 und \mathfrak{N}_3 hingegen hängen von der Wahl des Bezugspunktes ab und verschwinden, wenn man ihn in den Mittelpunkt des Bahnkreises verlegt. Die in den Achsenlagern auftretenden Zwangskräfte, auf die es neben den am Massenpunkt angreifenden äußeren Kräften für die Bewegung des Massenpunktes

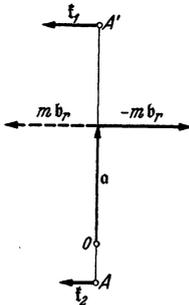


Abb. 77.
Statisches Moment der
Zentripetalkraft.

allein ankommt, sind natürlich von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig. Demnach ist es physikalisch belanglos, welchen Punkt auf der Achse man als Bezugspunkt wählt. Im Falle eines rotierenden Massenpunktes ist es natürlich am einfachsten, wenn man den Mittelpunkt des Bahnkreises wählt.

Wir wollen dies jetzt tun, so daß $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = 0$. Eine äußere Kraft, die an dem Massenpunkt angreift, habe bezüglich des Bahnmittelpunktes das statische Moment $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, erzeuge also an dem Massenpunkt ein Drehmoment vom Betrage $N = J \, du/dt$ [Gl. (105)]. Da $d\varphi = u \, dt$, so ist das Integral

$$\int N \, d\varphi = J \int \frac{du}{dt} \, d\varphi = J \int \frac{du}{dt} \, u \, dt = J \int u \, du = \frac{1}{2} J u^2 \quad (106)$$

gleich der Rotationsenergie E des Massenpunktes [Gl. (92)], also auch gleich der Arbeit, die erforderlich ist, um ihm diese zu erteilen. Bei der Rotation besteht also, analog zur Beziehung Arbeit = Kraft \times Weg, die Beziehung Arbeit = Drehmoment \times Drehung. Auch besteht zwischen der kinetischen Energie $mv^2/2$ und der Rotationsenergie $Ju^2/2$ eine formale Analogie, indem sich J und m , sowie u und v entsprechen. Überhaupt bestehen nahe Analogien zwischen den Gesetzen der reinen fortschreitenden Bewegung und denen der Rotation von Massenpunkten. Sie werden deutlich, wenn man Geschwindigkeiten durch Winkelgeschwindigkeiten, Beschleunigungen durch Winkelbeschleunigungen, Massen durch Trägheitsmomente und Kräfte durch Drehmomente ersetzt. So entspricht auch der axiale Drehimpuls $q_1 = Ju$ dem Impuls $\mathfrak{G} = mv$, die Gleichung $\mathfrak{M} = dq/dt$ der Gleichung $\mathfrak{k} = d\mathfrak{G}/dt$ (§ 20).

38. Rotation eines Körpers um eine feste Achse. Rotiert ein räumlich ausgedehnter Körper um eine feste Achse, so ist sein Drehimpuls q , — den wir wieder auf einen auf der Drehachse gelegenen Punkt beziehen — gleich der Vektorsumme der Einzeldrehimpulse q_i seiner Massenelemente m_i . Indem wir diese gemäß § 37 in ihre zur Achse parallelen und senkrechten Komponenten q_1^i und q_2^i zerlegen, erhalten wir

$$q = \sum q_i = \sum q_1^i + \sum q_2^i = q_1 + q_2, \quad (107)$$

wobei q_1 und q_2 die entsprechenden Komponenten des gesamten Drehimpulses bedeuten.

Die Einzeldrehimpulse q_1^i sind alle der Achse parallel, unter sich gleichgerichtet und nach Gl. (101) gleich $J_i u$. Demnach ist die axiale Komponente des Drehimpulses

$$q_1 = u \sum J_i = Ju, \quad (108)$$

also analog zu Gl. (101), da das Trägheitsmoment J des Körpers gleich der Summe der Einzelträgheitsmomente seiner Massenelemente bezüglich der Drehachse ist. Der Drehimpuls senkrecht zur Achse ist nach Gl. (100)

$$q_2 = \sum q_2^i = \sum m_i [a_i v_i]. \quad (109)$$

Da die Einzeldrehimpulse q_2^i verschiedene Richtungen haben, können wir dies hier nicht weiter vereinfachen.

Zwischen der axialen Drehimpulskomponente q_1 und einem axialen Drehmoment \mathfrak{M}_1 besteht nach Gl. (90) und (108) die Beziehung

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{d q_1}{dt} = J \frac{du}{dt}. \quad (110)$$

Demnach gilt auch für einen um eine Achse drehbaren Körper die Gl. (106).

Wir wollen den Drehimpuls eines rotierenden Körpers einmal auf einen Punkt O beziehen, dann auf einen Punkt O' , der ihm gegenüber um die Strecke Δr verschoben ist. Die von O bzw. O' nach den einzelnen Massenelementen m_i

des Körpers weisenden Fahrstrahlen seien \mathbf{r}_i bzw. $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}$ (Abb. 78). Die entsprechenden Drehimpulse sind dann nach Gl. (89)

$$q = \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i]$$

$$\text{und } q' = \sum m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] - \sum m_i [\Delta \mathbf{r} \mathbf{v}_i] = q - \sum m_i [\Delta \mathbf{r} \mathbf{v}_i].$$

Da die Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$ bezüglich aller Einzelmassen m_i die gleiche ist, so können wir für das letzte Glied auch schreiben $-\Delta \mathbf{r} \sum m_i \mathbf{v}_i$. Nach Gl. (37) (§ 20) ist aber $\sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_s$, wenn $m = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Körpers und \mathbf{v}_s die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes ist. Demnach ist

$$q' = q - m [\Delta \mathbf{r} \mathbf{v}_s]. \quad (\text{III})$$

Ruht der Schwerpunkt, ist also $\mathbf{v}_s = 0$, so ist $q' = q$. Das ist bei einem rotierenden Körper dann und nur dann der Fall, wenn der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt, diese also eine Schwerpunktsachse ist. In diesem Fall ist also der Drehimpuls des Körpers von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig, und sowohl seine axiale Komponente q_1 , wie auch seine radiale Komponente q_2 haben in jedem Augenblick einen ganz bestimmten Betrag und eine ganz bestimmte Richtung.

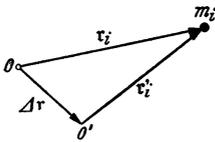


Abb. 78. Verschiebung des Bezugspunktes des Drehimpulses.

Die an den Massenelementen m_i eines Körpers auftretenden Zentrifugalkräfte \mathfrak{f}_i , die alle zur Achse senkrecht stehen, aber verschieden gerichtet sind und in verschiedenen parallelen Ebenen liegen, lassen sich nach § 15 stets zu einer resultierenden Einzelkraft $\mathfrak{f} = \sum \mathfrak{f}_i$ und einem resultierenden Kräftepaar vereinigen. Die Einzelkraft ist die Vektorsumme der einzelnen Zentrifugalkräfte $-m_i \mathbf{v}_i^{\dot{}} = -m_i d\mathbf{v}_i/dt$. Wenn wir beachten, daß — wie oben — $\sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_s$, also $\sum m_i d\mathbf{v}_i/dt = m d\mathbf{v}_s/dt$ ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{f} = - \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}. \quad (\text{II2})$$

Ist die Drehachse eine Schwerpunktsachse, so ruht der Schwerpunkt des rotierenden Körpers, so daß $\mathbf{v}_s = 0$ und demnach auch $d\mathbf{v}_s/dt = 0$ und $\mathfrak{f} = 0$. In diesem Fall ergeben die Zentrifugalkräfte also keine resultierende Einzelkraft. Ist die Achse aber keine Schwerpunktsachse, so besteht, wie beim rotierenden Massenpunkt, eine solche Einzelkraft, analog zur Kraft $-m \mathbf{v}_r$ in Abb. 77, deren Richtung mit dem Körper um die Achse rotiert, in der festen Achse entsprechende Zwangskräfte als Zentripetalkräfte hervorruft und die Achse einseitig beansprucht.

Wenn aber auch — bei der Rotation um eine Schwerpunktsachse — die resultierende Einzelkraft verschwindet, so bedeutet das noch kein Verschwinden des resultierenden Kräftepaares. (Die Vektorsumme der Einzelkräfte eines solchen ist ja stets gleich Null). Im allgemeinen ergeben also bei der Rotation eines Körpers um eine Schwerpunktsachse die Zentrifugalkräfte ein Kräftepaar, das ein Drehmoment (*Zentrifugalmoment*) um eine zur Ebene des Kräftepaares senkrechte Achse ausübt. Dieses Drehmoment wird bei fester Achsenlagerung durch ein entgegengesetztes Drehmoment $\mathfrak{N}_2 = d q_2/dt$ aufgehoben, das durch Zwangskräfte in der Achse erzeugt wird (*Lagerreaktion*). Das Drehmoment der Zentrifugalkräfte verschwindet nur dann, wenn die Drehachse nicht nur eine Schwerpunktsachse, sondern auch eine der Hauptträgheitsachsen ist. Wir wollen das hier nicht streng beweisen, sondern an einfachen Beispielen verständlich machen.

Ein länglicher, homogener Kreiszyylinder (Abb. 79a) bzw. eine Kreisscheibe (Abb. 79d) rotiere um eine beliebige feste Schwerpunktsachse AA' . Die gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Resultierenden der Zentrifugalkraft \mathfrak{f} , $-\mathfrak{f}$

an den beiden Körperhälften liegen im allgemeinen nicht in der gleichen Wirkungslinie, bilden also ein Kräftepaar, das den Körper um eine zur Achse AA' senkrechte Achse zu drehen, ihn also in die Lage der Abb. 79c bzw. 79e zu bringen sucht. Die Kräfte haben nur dann die gleiche Wirkungslinie, heben sich also auf und üben kein Drehmoment aus, wenn die Drehachse entweder mit der Figurenachse zusammenfällt (Abb. 79b bzw. 79e) oder wenn sie eine der dazu senkrechten Schwerpunktsachsen ist (Abb. 79c bzw. 79f). Dies aber sind nach § 36 Hauptträgheitsachsen der beiden Körper. Ist die Drehachse keine Hauptträgheitsachse (Abb. 79a bzw. 79d), so sucht das Drehmoment der Zentrifugalkräfte den Körper in diejenige Lage zu überführen, in der er um die Achse größten Trägheitsmoments rotiert (Abb. 79c bzw. 79e). Rotiert der Körper

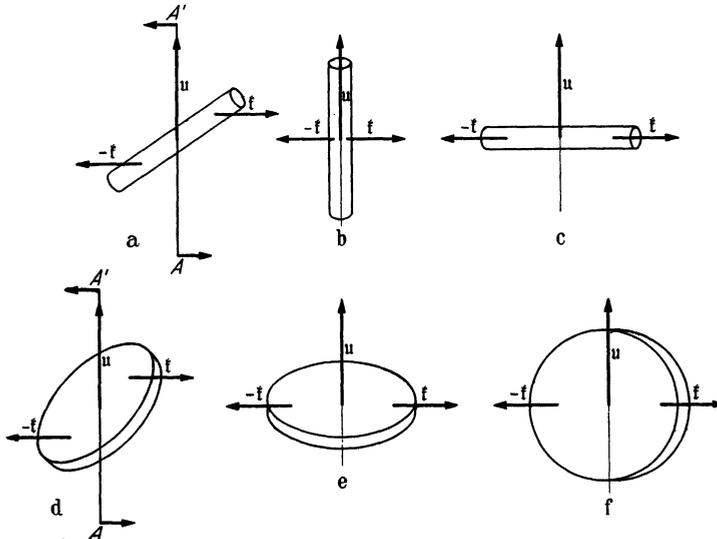


Abb. 79. Zentrifugalkräfte an rotierenden Körpern. a—c länglicher Kreiszyylinder, d—f Kreisscheibe.

bereits um diese Achse und erleidet er eine kleine Störung, so tritt sofort ein Drehmoment auf, das den alten Zustand wieder herzustellen sucht. Rotiert aber der Körper um eine Achse kleinsten Trägheitsmoments (Abb. 79b bzw. 79f), so genügt die kleinste Störung, um ein Drehmoment wachzurufen, das den Zustand noch mehr zu ändern sucht. In Analogie zum stabilen und labilen Gleichgewicht kann man daher eine Rotation um eine Achse größten Trägheitsmoments als einen stabilen, eine Rotation um eine Achse kleinsten Trägheitsmoments als einen labilen Rotationszustand bezeichnen. Die Rotation eines Kugelkreises (§ 36) um irgendeine Schwerpunktsachse ist dem indifferenten Gleichgewicht analog, denn bei ihm sind alle Schwerpunktsachsen gleichwertig.

Ein Körper, der um eine beliebige feste Schwerpunktsachse rotiert, unterliegt also — außer wenn diese eine Hauptträgheitsachse ist — einem Drehmoment \mathfrak{M}_2 der Zwangskräfte in der Achse, die von den Zentrifugalkräften erzeugt werden (Abb. 79a bzw. 79d). Er besitzt demnach im allgemeinen auch einen radialen Drehimpuls q_2 , der mit dem Körper um die Achse rotiert. Rotiert er aber mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Hauptträgheitsachse, so ist $\mathfrak{M}_2 = d.q_2/dt = 0$ und $q_2 = \text{const.}$ Da nun q_2 , wenn überhaupt vorhanden, wegen seiner ständigen Richtungsänderungen bei endlichem Betrage nicht konstant sein kann, so folgt $q_2 = 0$. Ein um eine Hauptträgheitsachse rotierender Körper besitzt demnach nur Drehimpuls um die Drehachse, und es ist $q = q_1$. Ist

J_a das zur betreffenden Hauptträgheitsachse gehörige Hauptträgheitsmoment, so können wir in diesem Fall nach Gl. (108) u. Gl. (110) auch schreiben

$$q = J_a u \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = J_a \frac{du}{dt}. \quad (113)$$

Ein Körper rotiere um eine beliebige Schwerpunktsachse. Seine Hauptträgheitsmomente seien J_a, J_b, J_c , die Komponenten seiner Winkelgeschwindigkeit u in Richtung der drei Hauptträgheitsachsen seien u_a, u_b, u_c , die Komponenten seines Drehimpulses q in diesen Richtungen q_a, q_b, q_c . Dann kann man, wie in § 36 erwähnt, die Rotation in drei *unabhängige* Rotationen um diese drei Achsen zerlegt denken, und es ist

$$q_a = J_a u_a, \quad q_b = J_b u_b, \quad q_c = J_c u_c \quad (114)$$

und

$$q = q_a + q_b + q_c = J_a u_a + J_b u_b + J_c u_c. \quad (115)$$

Ist ein rotierender Körper keinem äußeren Drehmoment \mathfrak{N} , auch keinen Zwangskräften in einer Achse unterworfen, ist also $\mathfrak{N} = d q / dt = 0$, so ist $q = \text{const}$, d. h. sein Drehimpuls hat konstanten Betrag und konstante Richtung. Erzeugt ein Körper durch von ihm ausgehende Kräfte an einem zweiten Körper ein Drehmoment $\mathfrak{N} = d q' / dt$, so erzeugt dieser an ihm nach dem Wechselwirkungsgesetz ein gleich großes, entgegengesetzt gerichtetes Drehmoment $-\mathfrak{N} = d q'' / dt$. (q', q'' Drehimpulse des ersten und des zweiten Körpers). Es folgt

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{dq''}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad q' + q'' = \text{const}. \quad (116)$$

Die Vektorsumme der Drehimpulse der beiden Körper bleibt also bei allen zwischen ihnen auftretenden Wechselwirkungen konstant. Das entsprechende gilt bei Wechselwirkungen zwischen beliebig vielen Körpern. Die zwischen ihnen wirkenden inneren Kräfte vermögen die Vektorsumme ihrer Drehimpulse weder nach Betrag noch nach Richtung zu ändern. *Der Drehimpuls eines nur inneren Kräften unterworfenen Körpersystems ist unveränderlich.* Dieser *Erhaltungssatz des Drehimpulses* ist ganz analog zum Erhaltungssatz des Impulses (§ 20). Ändert sich der Drehimpuls eines Körpers, so kann das nur so geschehen, daß gleichzeitig andere Körper insgesamt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Änderung ihres Drehimpulses erfahren. (Dabei kann die Summe der Beträge der Drehimpulse zu- oder abnehmen, ebenso wie wir das in § 20 für den Impuls gezeigt haben). Da die Gesamtheit der Körper im Weltall ein Körpersystem bildet, das nur inneren Kräften unterworfen ist, so folgt, daß der Vorrat des Weltalls an Drehimpuls unveränderlich ist.

Der Erhaltungssatz des Drehimpulses ist der zweite Erhaltungssatz, den wir in der Mechanik kennen lernen. Man kann diese Erhaltungssätze als die fundamentalsten Sätze der Mechanik bezeichnen.

Rotierende Körper bezeichnet man allgemein als *Kreisel*. Die vorstehenden Ausführungen enthalten die Grundlagen der *Kreiseltheorie*. Sie haben u. a. auch große technische Bedeutung für alle schweren, schnell rotierenden Maschinenteile. Diese dürfen natürlich — wenn möglich — ihre Achsen und Achsenlager nicht durch mit ihnen umlaufende Zentrifugalkräfte und Zentrifugalmomente beanspruchen. Sie müssen also tunlichst um eine Hauptträgheitsachse rotieren, und dies äußerst genau. Denn schon kleine Abweichungen können bei Maschinenteilen mit großem Trägheitsmoment oder bei sehr schneller Rotation sehr beträchtliche und auf die Dauer gefährliche Beanspruchungen der Maschine und des Gebäudes zur Folge haben.

39. Rotation um freie Achsen. Kräftefreier Kreisel. Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Rotationen um freie Achsen über, d. h. um solche Achsen, deren Lage im Raum und im rotierenden Körper nicht durch irgendwelche

Bedingungen festgelegt ist, die also ihre Lage im Raum und im Körper ändern können. Der wesentliche Unterschied gegenüber der Rotation um eine feste Achse besteht darin, daß die Zentrifugalmomente nicht mehr durch Zwangskräfte in der Achse aufgehoben werden. Ihre Wirkung führt im allgemeinen zu komplizierten Bewegungen, und daher ist die allgemeine Kreiseltheorie sehr verwickelt und schwierig. Wir beschränken uns hier auf einfachere Fälle, die auch praktisch die wichtigsten sind, nämlich auf *symmetrische Kreisel*. Unter einem solchen versteht man einen homogenen, rotationssymmetrischen Körper, — Kugeln, Kreiszylinder, Rotationsellipsoide, Kegel von kreisförmigem Querschnitt, Räder usw. Ihre geometrische *Figurenachse* ist stets eine Hauptträgheitsachse, beim *abgeplatteten Kreisel*, z. B. einer Kreisscheibe, diejenige größten Trägheitsmoments, beim *verlängerten Kreisel*, z. B. einem länglichen Kreiszylinder, diejenige kleinsten Trägheitsmoments (Abb. 79). Die zur Figurenachse senkrechten Schwerpunktsachsen sind sämtlich gleichberechtigt und beim abgeplatteten Kreisel Achsen kleinsten, beim verlängerten Kreisel Achsen größten Trägheitsmoments. Demnach ist beim abgeplatteten Kreisel auch das Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes, beim verlängerten Kreisel ein verlängertes Rotationsellipsoid.

Ist ein Kreisel keinen äußeren Kräften unterworfen (*kräftefreier Kreisel*), so muß nach § 19 sein Schwerpunkt unbeschleunigt sein, d. h. er nimmt an der Rotation nicht teil. Das ist nur möglich, wenn er auf der Drehachse liegt. *Es kann daher nur eine Schwerpunktsachse Drehachse eines kräftefreien Kreisels — eine freie Drehachse — sein.* Ist sie obendrein eine Hauptträgheitsachse, so verläuft die Kreiselbewegung besonders einfach, weil in diesem Fall nach § 38 die Zentrifugalmomente am Kreisel fehlen.

Da ein kräftefreier Kreisel keine äußeren Einwirkungen erfährt, so sind seine Rotationsenergie und sein Drehimpuls konstant, letzterer als ein Vektor sowohl bezüglich seines Betrages wie seiner Richtung im Raume. Bei einem kräftefreien Kreisel hat also die *Drehimpulsachse*, d. h. die durch den Kreisel-schwerpunkt in Richtung des Drehimpulsvektors weisende Gerade, bei noch so komplizierten Kreiselbewegungen eine *unveränderliche Richtung*. Im allgemeinen fällt weder die *Figurenachse* noch die *momentane Drehachse*, die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors u , mit der Drehimpulsachse zusammen. Diese beiden Achsen führen also bei der Kreiselbewegung eine Bewegung um die raumfeste Drehimpulsachse aus.

Es sei u die momentane Winkelgeschwindigkeit eines symmetrischen Kreisels (Abb. 80 a u. b). In der gleichen Richtung liegt dann auch die momentane Drehachse. Wir zerlegen die Winkelgeschwindigkeit in ihre beiden zueinander senkrechten Komponenten u_a in Richtung der Figurenachse und u_b in der dazu senkrechten Richtung. Das entspricht der Zerlegung der Rotation in zwei unabhängige Rotationen um die entsprechenden Hauptträgheitsachsen. Das Trägheitsmoment bezüglich der Figurenachse sei J_a , dasjenige bezüglich aller zu ihr senkrechten gleichberechtigten Schwerpunktsachsen sei J_b . Nach Gl. (II4) besitzt der Kreisel bezüglich der Figurenachse den Drehimpuls $q_a = J_a u_a$, bezüglich der dazu senkrechten Achse den Drehimpuls $q_b = J_b u_b$. (Die dritte Komponente entfällt, da u momentan keine Komponente senkrecht zur

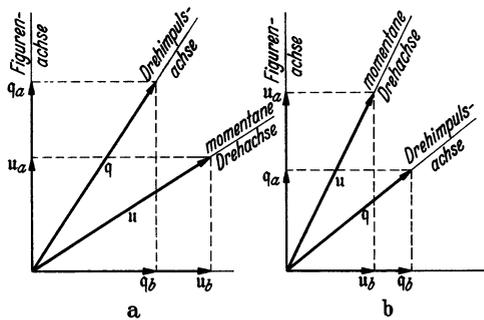


Abb. 80. Figurenachse, Drehimpulsachse und Drehachse, a beim abgeplatteten, b beim verlängerten Kreisel.

Zeichnungsebene besitzt.) Der gesamte Drehimpuls ist also der Vektor $q = J_a u_a + J_b u_b$ [Gl. (115)]. Aus Abb. 80 ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Drehimpulsachse — die Richtung des Vektors q — im allgemeinen nicht mit der Richtung der momentanen Drehachse — der Richtung des Vektors u — zusammenfällt. Ist $J_a > J_b$ (abgeplatteter Kreisel, Abb. 80a), so liegt die Drehimpulsachse zwischen Figurenachse und Drehachse. Ist $J_a < J_b$ (verlängerter Kreisel, Abb. 80b), so liegt die Drehachse zwischen Figurenachse und Drehimpulsachse. Jedoch liegen die drei Achsen beim symmetrischen Kreisel stets in der gleichen Ebene. Da sich der Kreisel in Abb. 80 *momentan* um die gezeichnete u -Achse dreht, also auch die Figurenachse momentan eine entsprechende Drehung um diese Achse ausführt, da die drei Achsen ferner stets in der gleichen Ebene liegen und die Winkel zwischen den drei Achsen durch die unveränderlichen Beträge von J_a , J_b und q_a , q_b

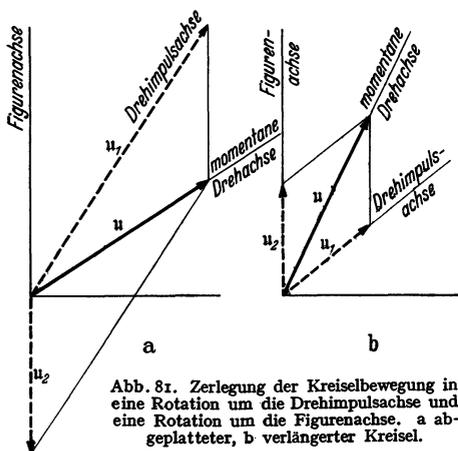


Abb. 81. Zerlegung der Kreiselbewegung in eine Rotation um die Drehimpulsachse und eine Rotation um die Figurenachse. a abgeplatteter, b verlängerter Kreisel.

fest gegeben sind, und da schließlich die Drehimpulsachse ihre Richtung im Raum nicht ändert, so folgt, daß die Figurenachse und die Drehachse eine kreisende Bewegung auf Kugelmanteln um die raumfeste Drehimpulsachse ausführen müssen. Dabei führt die Drehachse ihrerseits eine Drehung innerhalb des Kreisels um die Figurenachse aus. Die Bewegung der Figurenachse um die Drehimpulsachse heißt die *Präzession* des Kreisels. Sie kann als Wirkung der am Kreisel auftretenden Zentrifugalmomente angesehen werden.

Die Drehachse und die Drehimpulsachse fallen nur dann zusammen, wenn u_a oder $u_b = 0$ ist, wenn also die Drehachse auch mit der Figurenachse oder einer zu ihr senkrechten Schwerpunktsachse zusammenfällt (Abb. 79b, c, e, f), wenn sie also eine Hauptträgheitsachse ist. (Das gilt auch beim nicht symmetrischen Kreisel). In diesen Fällen hat demnach auch die Figuren- und die Drehachse eine raumfeste Richtung. Die Drehachse fällt auch dann mit der Drehimpulsachse zusammen, wenn $J_a = J_b$ ist. Das ist bei den Kugelkreiseln der Fall, deren Trägheitsellipsoid eine Kugel ist (§ 38). In allen diesen Fällen gibt es also keine Präzession, und zwar deshalb, weil keine Zentrifugalmomente auftreten.

Wir können die Kreiselbewegung noch auf eine andere Weise verständlich machen. Wir zerlegen die Winkelgeschwindigkeit u in zwei Komponenten, deren eine, u_1 , in Richtung der Drehimpulsachse und deren andere, u_2 , in Richtung der Figurenachse liegt. Das entspricht der Zerlegung der Kreiselbewegung in eine Rotation um die raumfeste Drehimpulsachse und eine Rotation um die nicht raumfeste Figurenachse. (Daß diese Rotationen nicht voneinander unabhängig sind, ist hier ohne Belang). Es ergibt sich, daß ein abgeplatteter Kreisel (Abb. 81a) außer seiner Rotation um die Figurenachse (u_2) eine im wesentlichen gegenläufige Präzession um die Drehimpulsachse (u_1) ausführt. Hingegen erfolgen beim verlängerten Kreisel (Abb. 81b) die beiden Rotationen im wesentlichen gleichsinnig.

Zur Demonstration der Kreiselgesetze kann man einen Kreisel kräftefrei machen, indem man ihn in einer kardanischen Aufhängung (Abb. 86) so lagert, daß sein Schwerpunkt im Mittelpunkt der Aufhängung liegt, oder indem man ihn — wie beim KLEINSCHEN Kreisel (Abb. 82) — unmittelbar in seinem Schwerpunkt unterstützt.

Bei der Bewegung eines symmetrischen Kreisels ist die jeweilige Lage und Bewegung der Figurenachse ohne weiteres sichtbar. Auch die Lage der raumfesten Drehimpulsachse ist als diejenige Gerade, um die die ganze Bewegung erfolgt, deutlich kenntlich, aber nicht die Lage der momentanen Drehachse und ihre Bewegung im Raum und innerhalb des Körpers. Man kann aber nach POHL auch diese sichtbar machen, wenn man eine zur Figurenachse senkrechte Ebene am Kreisel mit bedrucktem Papier beklebt. Dieses erscheint wegen der schnellen Drehung überall gleichmäßig grau. Nur im jeweiligen Durchstoßpunkt der Drehachse ist eine Struktur zu erkennen, deren Wanderung auf der Fläche die Wanderung der Drehachse im Körper anzeigt.



Abb. 82.
KLEINSCHER KREISEL. Nach
MÜLLER-POUILLET,
Lehrbuch der Physik.

40. Kreisel unter der Wirkung eines äußeren Drehmomentes. Wir wollen jetzt die Wirkung eines an einem Kreisel mit freier Drehachse angreifenden äußeren Drehmoments betrachten und dabei voraussetzen, daß der Kreisel um eine Hauptträgheitsachse rotiert. Er habe den Drehimpuls q . Wirkt jetzt während der Zeit dt an ihm ein Drehmoment \mathfrak{M} , so erzeugt es an ihm einen zusätzlichen Drehimpuls $dq = \mathfrak{M} dt$ [Gl. (90)], der sich vektoriell zum Drehimpuls q addiert, so daß der Drehimpuls des Kreisels nunmehr $q' = q + dq$ ist (Abb. 83a). Wenn dq nicht mit q gleichgerichtet ist, so hat q' eine Richtung, die von derjenigen von q ein wenig abweicht. Der Betrag des Drehimpulses ändert sich nur dann nicht, wenn dq senkrecht zu q gerichtet ist. Dann ändert sich nur die Richtung von q . In Abb. 83b ist dies für eine endliche Richtungsänderung angedeutet. Die aneinander gereihten Pfeilchen bedeuten die aufeinanderfolgenden, zur jeweiligen q -Richtung senkrechten Drehimpulsänderungen dq .

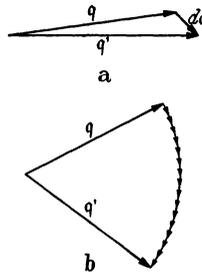


Abb. 83. Änderung des Drehimpulses beim Kreisel.

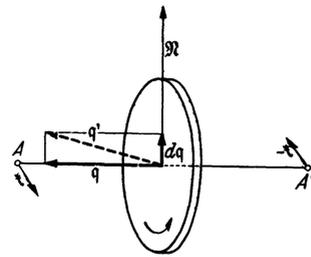


Abb. 84. Kreisel unter der Wirkung eines äußeren Drehmoments.

Abb. 84 stellt als Beispiel eines Kreisels eine um ihre Figurenachse rotierende Kreisscheibe dar, deren Achse AA' frei drehbar ist, aber eine feste Lage im Kreisel hat. Der Drehimpulsvektor q weist in Richtung der Achse horizontal von rechts nach links (Schraubenregel). Nunmehr lassen wir während einer Zeit dt an der Achse ein Kräftepaar wirken, dessen Einzelkräfte \mathfrak{f} , $-\mathfrak{f}$ zur Zeichnungsebene senkrecht stehen, und das nach der Schraubenregel ein Drehmoment \mathfrak{M} erzeugt, das senkrecht zur Achse in der Zeichnungsebene liegt, den Kreisel also um eine in der Zeichnungsebene liegende vertikale Achse zu drehen sucht. Die dadurch hervorgerufene Drehimpulsänderung $dq = \mathfrak{M} dt$ ist mit \mathfrak{M} gleichgerichtet, weist also senkrecht nach oben. Der Drehimpuls q verwandelt sich demnach in einen Drehimpuls $q' = q + dq$, der wieder in der Zeichnungsebene liegt, aber ein wenig gegen die Horizontale geneigt ist. Da der Kreisel nur um die in seiner Figurenachse festgelegte Achse rotieren kann, die Richtung seiner Figuren- und Drehachse also stets mit seiner Drehimpulsachse übereinstimmt, so folgt, daß sich der Kreisel ebenso gedreht hat wie der Drehimpulsvektor q . Man kann den Versuch leicht so verwirklichen, daß man einen Kreisel von der in Abb. 84 dargestellten Art an den beiden Enden seiner Achse anfaßt und ihm einen kurzen drehenden Ruck im Sinne des gedachten Kräftepaars erteilt. Das Ergebnis des Versuches ist immer wieder überraschend. Es gelingt

nicht, den Kreisel im Sinne des angewandten Drehmoments zu drehen. *Ein Kreisel reagiert auf den Versuch, ihn um irgendeine zu seiner Drehachse senkrechte Achse zu drehen, mit einer heftigen Drehung um die zu dieser Achse und zur Drehachse senkrechte Achse.* Natürlich handelt es sich hier um die Wirkung von Trägheitskräften. Bei schneller Rotation und großem Trägheitsmoment sind diese *Kreiselkräfte*, mit denen sich ein Kreisel jeder Richtungsänderung seiner Drehachse in einem bestimmten Sinne widersetzt, sehr beträchtlich. Natürlich ist es möglich, jede gewünschte Richtungsänderung der Kreiselachse zu bewirken. Dann aber muß das Drehmoment, entgegen jeglicher Erfahrung an nicht rotierenden Körpern, genau senkrecht zu derjenigen Achse gerichtet sein, um die man den Kreisel zu drehen wünscht. Zu Versuchen ist das abmontierte Rad eines Fahrrades geeignet, dessen Bereifung durch einen Bleikranz ersetzt und dessen Achse durch Handgriffe verlängert ist. Man versetzt es durch Anziehen einer auf die verlängerte Achse gewickelten Schnur in schnelle Rotation.

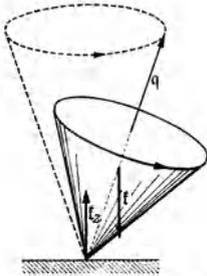


Abb. 85. Kinderkreisel.

Die Achsendrehung eines Kreisels, die durch ein äußeres Drehmoment hervorgerufen wird, bezeichnet man ebenso wie die vom Drehmoment der Zentrifugalkräfte hervorgerufene Drehbewegung (§ 39) als *Präzession*.

Ein Kinderkreisel, der mit genau lotrechter Figuren- und Drehachse läuft, verhält sich wie ein kräftefreier Kreisel. Kleine Kippungen sind aber unvermeidlich. Sobald eine solche eintritt, tritt am Kreisel ein Kräftepaar auf, das einerseits aus der in seinem Schwerpunkt S angreifenden Schwerkraft \mathfrak{f} andererseits aus der entgegengesetzt gerichteten gleich großen Zwangskraft $\mathfrak{f}_z = -\mathfrak{f}$ an seiner Spitze besteht. Es sucht den Kreisel im Fall der Abb. 85 noch weiter nach rechts zu kippen, ihn also um eine durch seine Spitze gehende, zur Zeichnungsebene senkrechte, horizontale Achse zu drehen. Der Kreisel aber reagiert darauf mit einer Drehung seiner Achse um die dazu senkrechte, in der Zeichnungsebene liegende, vertikale Achse. Seine Achse dreht sich bei dem in Abb. 85 angenommenen Umlaufsinn des Kreisels nach hinten — also im gleichen Sinne wie die Kreiseldrehung — und setzt diese Bewegung, da das Drehmoment andauert und seine Richtung die Präzessionsbewegung mitmacht, entsprechend fort. Die Kreiselachse dreht sich also in der bekannten Weise auf einem Kegelmantel um die Vertikale, gleichsinnig mit der Rotation des Kreisels. Die Winkelgeschwindigkeit und der Drehimpuls des Kreisels ändern dabei, sofern der Kreisel reibungslos läuft, nur ständig ihre Richtung, aber nicht ihren Betrag. Infolge des Energie- und Drehimpulsverlustes durch Reibung werden aber bei einem wirklichen Kreisel die Kreiselkräfte allmählich schwächer. Die Öffnung des Präzessionskegels wird ständig größer, so daß der Kreisel schließlich umfällt.

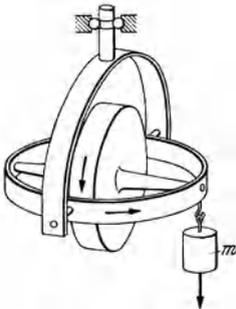


Abb. 86. Zur Präzession unter der Wirkung eines äußeren Drehmoments. Nach MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik.

Abb. 86 stellt einen Kreisel dar, der mit horizontaler Achse kräftefrei in einer kardanischen Aufhängung gelagert ist, so daß seine Achse allseitig drehbar ist. Durch das Gewicht einer am Ende seiner Achse angebrachten Masse m kann ein Drehmoment wirksam gemacht werden, das ihn um die zu seiner Drehachse senkrechte horizontale Achse zu drehen sucht. Er antwortet darauf mit einer Präzessionsbewegung um die vertikale Achse, um die er sich mit merklicher

Geschwindigkeit dreht. Hängt man die Masse auf das andere Ende der Achse, so kehrt sich die Präzessionsbewegung um.

In der Technik müssen Kreiselkräfte überall in Betracht gezogen werden, wo die Richtung der Drehachsen schnell rotierender Maschinenteile sich schnell ändert, also insbesondere bei Fahrzeugen. Denn die Kreiselkräfte, die Trägheitswiderstände der rotierenden Teile gegen eine Änderung der Richtung ihrer Drehimpulse, können unter Umständen die Achsenlager stark beanspruchen und erhebliche Drehmomente auf das Fahrzeug ausüben. Zum Beispiel bewirken die Kreiselkräfte an den Rädern beim Fahren einer Kurve eine Vermehrung des Raddruckes an der Außenseite der Kurve, eine Verminderung an der Innenseite, erzeugen also eine zusätzliche, gleichsinnige Wirkung zur Zentrifugalkraft, die ebenfalls das Fahrzeug nach außen zu kippen sucht (§ 34). Eine einseitige Einbiegung der Schienen kann bei Eisenbahnwagen eine plötzliche Kippung und damit eine Drehung der Radachsen um eine in der Fahrtrichtung liegende horizontale Achse hervorrufen, die ihrerseits ein Drehmoment um eine vertikale Achse erzeugt und Entgleisungsgefahr herbeiführt. Bei Schiffen erzeugen die Stampf-, Gier- und Schlingerbewegungen Kreiselkräfte an den rotierenden Maschinenteilen, die zu gegenseitigen Verstärkungen



Abb. 87. Diskuswurf. Nach MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik.

dieser Bewegungen führen. Besonders wichtig sind die Kreiselkräfte an den Luftschrauben der Flugzeuge. Ihre Berücksichtigung und Beherrschung spielt bei der Kunst des Fliegens eine maßgebende Rolle.

Die Kreiselkräfte finden aber auch unmittelbare technische Anwendungen. Bei den Kollergängen der Mühlen rotieren die an der gleichen horizontalen Achse befestigten Mahlsteine gemeinsam um eine durch die Mitte der ersteren Achse gehende vertikale Achse und rollen dabei über das Mahlgut hinweg. Infolge der ständigen Richtungsänderung der ersten Achse treten an den Mahlsteinen Kreiselkräfte auf, durch die sie, wie die Räder an der Außenseite von Kurven, nach unten gedrückt werden. Der Mahldruck wird dadurch beträchtlich erhöht.

In der Ballistik werden die Kreiselkräfte, d. h. die Tendenz eines Kreisels, seine Achsenrichtung beizubehalten, ausgenutzt, um ein Überschlagen der Geschosse im Fluge zu verhindern. Sie erhalten durch die in den Rohrlauf eingeschnittenen schraubenförmigen „Züge“ einen beträchtlichen Drehimpuls (*Geschoßdrall*), durch den die Treffsicherheit außerordentlich erhöht wird. Beim Diskuswerfen erteilt man dem Diskus eine schnelle Rotation um seine Achse größten Trägheitsmoments. Infolgedessen stellt er sich im zweiten Teil seiner Bahn, wie die Tragfläche eines Flugzeuges, schräg gegen den Luftwiderstand an und erreicht eine erheblich größere Wurfweite, als wenn dies nicht der Fall wäre (Abb. 87).

Bei einem kräftefreien Kreisel sind die Winkel zwischen Figuren-, Drehimpuls- und Drehachse unveränderlich (§ 39), denn sie sind durch die unveränderliche Rotationsenergie und den nach Betrag und Richtung unveränderlichen Drehimpuls eindeutig bestimmt. Ist aber ein Kreisel äußeren Drehmomenten unterworfen, die seine Energie und seinen Drehimpuls ändern können, so können sich auch diese Winkel ändern. Das zeigt z. B. der folgende Versuch. An der vertikalen Achse *A* eines Elektromotors hängt eine Kreisscheibe an einem an ihrem Rande befestigten Faden (Abb. 88a). Wird die Scheibe in Drehung versetzt, so rotiert sie anfänglich um ihren Durchmesser, also um eine Achse kleinsten Trägheitsmoments. Jede unvermeidbare momentane Abweichung von dieser Achsenrichtung ruft aber, wie in § 38 besprochen, ein

Zentrifugalmoment wach, das die Scheibe so zu drehen sucht, daß sie um ihre Achse größten Trägheitsmoments, also um ihre Figurenachse rotiert. Beim kräftefreien Kreisel kann das nicht eintreten, weil damit eine Energie- und Drehimpulsänderung verbunden sein müßte. Der Scheibe aber, die durch den Motor auf konstanter Winkelgeschwindigkeit gehalten wird, kann der Motor Energie und Drehimpuls zuführen, so daß sie dem Zentrifugalmoment nachzugeben vermag. Sie beginnt in schräger Lage zu wirbeln und stellt sich schließlich horizontal (Abb. 88b).

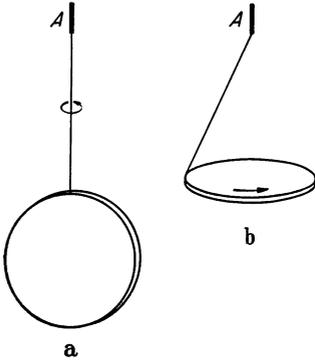


Abb. 88. Übergang der Rotation einer Scheibe von der Achse kleinsten Trägheitsmoments zur Achse größten Trägheitsmoments.

41. Wirkung der Erddrehung. Corioliskräfte.

Jeder mit der Erde bewegte und auf ihr ruhende Körper beschreibt eine Kreisbahn mit der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Diese beträgt, da die Drehung auf den Fixsternhimmel, nicht auf die Sonne, bezogen werden muß, $360^\circ = 2\pi$ in seinem Sterntag von 86164 sec (§ 5). Demnach beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Erde $u = 2\pi/86164 = 0,7292 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Die für die Kreisbewegung der irdischen Körper nötige Zentripetalkraft liefert die Schwerkraft f_1 , die alle Körper genau in Richtung auf den Erdmittelpunkt ziehen würde, wenn die Erde eine genaue Kugel wäre.

Wenn wir dies, da es nahezu zutrifft, zunächst als streng richtig voraussetzen, so ist der Radius der Kreisbahn eines in der geographischen Breite φ auf der Erdoberfläche ruhenden Körpers $r = R \cos \varphi$, wenn R der Erdradius ist (Abb. 89a). Demnach wirkt, von der Erde aus beurteilt, auf jeden auf der Erde ruhenden Körper eine Zentrifugalkraft f_2 vom

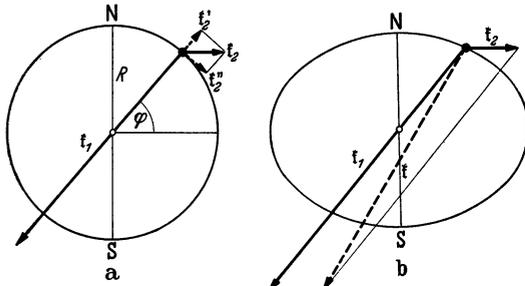


Abb. 89. Zentrifugalkraft auf der Erde und Abplattung der Erde.

Betrage $k_2 = m R u^2 \cos \varphi$ senkrecht zur Erdachse. Ihre zur Erdoberfläche senkrechte Komponente ist der Schwerkraft entgegengerichtet und beträgt $k_2' = k_2 \cos \varphi = m R u^2 \cos^2 \varphi$. Sie steht also zur Schwerkraft mg im Verhältnis $R u^2 \cos^2 \varphi / g = 0,00341 \cos^2 \varphi$ ($R = 6,370 \cdot 10^8$ cm). Sie nimmt vom Äquator nach den Polen hin ab, beträgt am Äquator rund $1/300$ der

Schwerkraft und verschwindet an den Polen. Die Vertikalkomponente der Zentrifugalkraft bewirkt also eine scheinbare Verminderung der irdischen Schwerkraft, deren Betrag von der geographischen Breite φ abhängt (§ 15), jedoch wegen der Abplattung der Erde in etwas anderer Weise als bei der oben vorausgesetzten Kugelgestalt.

Die zur Kugelfläche tangentielle Komponente der Zentrifugalkraft f_2 weist in Richtung der Längengrade auf den Äquator hin und hat den Betrag $k_2'' = k_2 \sin \varphi = m R u^2 \sin \varphi \cos \varphi$. Sie verschwindet am Äquator und an den Polen und hat ihren größten Betrag $m R u^2 / 2$ in der Breite $\varphi = 45^\circ$. Sie sucht alle auf der Erde befindlichen Massen in Richtung auf den Äquator hin zu treiben. Dies ist die Ursache für die tatsächliche *Abplattung der Erde*. Das Erdinnere ist zähflüssig, also beweglich. Die auf ihm schwimmende Erdkruste bildet nur eine relativ dünne, biegsame Schicht. Die Gleichgewichtsfigur eines nicht rotierenden, flüssigen Himmelskörper wäre die Kugel, da dann die allein vor-

handene Schwerkraft überall senkrecht zur Oberfläche stehen würde und keine Kraft vorhanden wäre, die die Massen parallel zur Oberfläche zu verschieben sucht. Entsprechend muß ein rotierender Himmelskörper so gestaltet sein, daß die Resultierende der Schwerkraft und der Zentrifugalkraft überall senkrecht zur Oberfläche steht. Die dieser Bedingung entsprechende Gleichgewichtsfigur ist nahezu ein abgeplattetes Rotationsellipsoid und heißt *Geoid*. Ein solches ist die Erde (Abb. 89b). Die Zentrifugalkraft ist in Abb. 89 der Deutlichkeit halber sehr übertrieben groß gezeichnet, und daher ist auch die Abplattung tatsächlich viel geringer, als dort gezeichnet. Der Unterschied des polaren und des äquatorialen Durchmessers der Erde beträgt nur rund $\frac{1}{300}$. Die reine Gestalt des Geoides zeigt — von Gezeitenwirkungen abgesehen — die Oberfläche des Weltmeeres.

Die Zentrifugalkraft hat für einen irdischen Beobachter, d. h. in einem mit der Erde rotierenden Bezugssystem, den Charakter einer an allen irdischen Körpern angreifenden Kraft (§ 18). Wir betrachten nunmehr ein rotierendes System, relativ zu dem sich ein Körper *bewegt*. Dieser Fall liegt bei allen Körpern vor, die sich auf der Erde bewegen, und die wir von der Erde aus beobachten. Wir wollen daher als Beispiele für solche Erscheinungen Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde wählen. An solchen relativ zu einem rotierenden System bewegten Körpern treten, von ihm aus beurteilt, zusätzliche Trägheitskräfte auf, die man *Corioliskräfte* nennt. Denn die bewegten Körper erfahren relativ zum rotierenden System Beschleunigungen, die sie relativ zu einem Inertialsystem (§ 18) nicht erfahren, und denen im rotierenden System Trägheitskräfte entsprechen. Wir wollen hier ohne Beweis anführen, daß die Corioliskraft, die in einem mit der Winkelgeschwindigkeit u rotierenden System auf einen mit der Geschwindigkeit v relativ zum System bewegten Körper wirkt, gleich $2m [v u]$ ist.

Es ist bei der Betrachtung der Corioliskräfte zweckmäßig, die Winkelgeschwindigkeit u der Erde (Betrag u) in zwei Komponenten zu zerlegen (Abb. 90). Die eine, die Azimutalkomponente u_1 , ist zur Erdoberfläche senkrecht gerichtet und hat in der Breite φ den Betrag $u_1 = u \sin \varphi$. Die zweite, die Vertikalkomponente u_2 , steht auf ihr senkrecht und hat den Betrag $u_2 = u \cos \varphi$. Dem entsprechend teilen wir die Corioliskräfte ein in solche, die von der Azimutalkomponente herrühren, und solche, die von der Vertikalkomponente der Erddrehung herrühren. Erstere sind am größten an den Polen ($\sin \varphi = 1$) und verschwinden am Äquator ($\sin \varphi = 0$). Bei letzteren ist es umgekehrt.

Die Azimutalkomponente entspricht einer Drehung einer bei A in der Breite φ gelegenen horizontalen Fläche mit der Winkelgeschwindigkeit $u_1 = u \sin \varphi$ um eine zur Fläche senkrechte Achse. Die Fläche dreht sich also in der Zeit dt um den Winkel $u \sin \varphi dt$ um diese Achse. Die Drehung erfolgt, wie man an Hand der Abb. 90 leicht feststellt (Schraubenregel), auf der nördlichen Halbkugel — von oben gesehen — gegen die Uhrzeigersinn, auf der südlichen im Uhrzeigersinn (Abb. 91).

Auf der Azimutaldrehung beruht die zuerst 1661 von VIVIANI beobachtete, 1850 von FOUCAULT neu entdeckte Drehung der Schwingungsebene eines ebenen

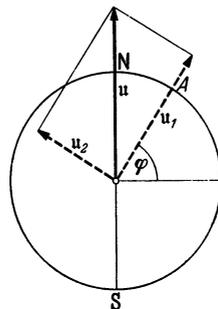


Abb. 90. Zerlegung der Erddrehung u in eine Azimutalkomponente u_1 und eine Vertikalkomponente u_2 .

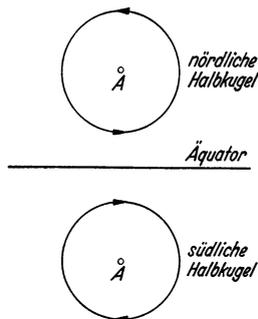


Abb. 91. Azimutaldrehung auf der nördlichen und der südlichen Halbkugel.

Pendels (FOUCAULTScher Pendelversuch). Wird einem senkrecht über dem Punkt A (Abb. 92) hängenden Pendel ein Anstoß in irgendeiner Richtung gegeben, so behält seine Schwingungsebene infolge der Trägheit ihre Richtung im Raume bei, nimmt also an der Azimutaldrehung der Umgebung nicht teil. Von dieser aus betrachtet dreht sich also die Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit $u_1 = u \sin \varphi$, auf der nördlichen Halbkugel im Uhrzeigersinn, auf der südlichen ihm entgegen, in Berlin um rund 12° in einer Stunde. An den Polen beträgt die Drehung 360° in einem Sterntag, am Äquator findet keine Drehung statt. Wird, wie das bei der praktischen Ausführung meist der Fall ist, das Pendel nicht in seiner Ruhelage A angestoßen, sondern in B (Abb. 92) losgelassen, so bringt es, von A aus beurteilt, die dem Punkt B entsprechende Azimutaldrehung mit, und die Bewegung verläuft ein wenig anders. Die relative Winkelgeschwindigkeit ist dann, wie hier nicht bewiesen werden soll, um den Faktor $1 - a^2/3l^2$ kleiner, wenn a die Schwingungsweite und l die Länge des Pendels ist. Die Bahnkurve hat dann eine etwas andere Gestalt.

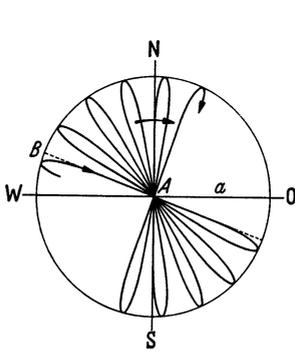


Abb. 92. Schema des Foucault'schen Pendelversuchs auf der nördlichen Halbkugel.

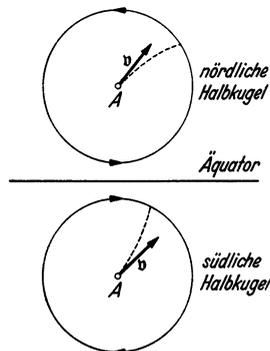


Abb. 93. Rechtsabweichung auf der nördlichen und Linksabweichung auf der südlichen Halbkugel.

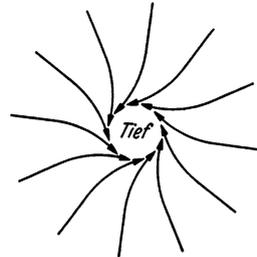


Abb. 94. Zyklone auf der nördlichen Halbkugel.

Besitzt ein Körper im Punkte A (Abb. 93) relativ zur Erde die Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung, so dreht sich die Erdoberfläche unter dem bewegten Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $u \sin \varphi$. Der Körper beschreibt daher auf der nördlichen Halbkugel eine nach rechts, auf der südlichen Halbkugel eine nach links gekrümmte Bahn. Es wirkt auf ihn, von der rotierenden Erde aus beurteilt, eine ihn nach der betreffenden Seite treibende Corioliskraft. Sie bewirkt auf der nördlichen Halbkugel eine *Rechtsabweichung*, auf der südlichen Halbkugel eine *Linksabweichung der Geschosse*. Flüsse werden durch die Corioliskraft auf der nördlichen Halbkugel gegen ihr rechtes, auf der südlichen Halbkugel gegen ihr linkes Ufer gedrückt, und dieses Ufer zeigt eine stärkere Erosion als das andere (VON BAERSches Gesetz). Die Neigung von Flüssen, ein von Gebirgen umrandetes Becken auf der nördlichen Halbkugel in einem nach rechts, auf der südlichen in einem nach links ausladenden Bogen zu durchfließen, kann man auf der Landkarte an manchen Beispielen, z. B. bei der Donau, bestätigt finden.

Die in ein Gebiet niedrigen Luftdrucks von allen Seiten einströmenden Luftmassen erfahren eine entsprechende Ablenkung durch die Corioliskraft, die zur Folge hat, daß die Winde im Tief eine *Zyklone* bilden, die das Tief auf der nördlichen Halbkugel *gegen* den Sinn des Uhrzeigers umläuft (Abb. 94), auf der südlichen Halbkugel aber *im* Uhrzeigersinn (*Gesetz von BUYS-BALLOT*).

Die Vertikaldrehung erfolgt um eine zur örtlichen geographischen Südrichtung parallele Achse (Abb. 90). Sie bewirkt ein Sinken des Horizonts im

Osten und ein Steigen im Westen mit der Winkelgeschwindigkeit $u_2 = u \cos \varphi$. Die von der Vertikaldrehung herrührende Geschwindigkeit eines im Abstände R vom Erdmittelpunkt befindlichen Körpers beträgt $Ru \cos \varphi$, diejenige eines im Abstände $R + h$ befindlichen Körpers $(R + h) \cos \varphi$. (Das ist tatsächlich nichts anderes als die Umfangsgeschwindigkeit des Körpers.) Ein in der Höhe h über dem Erdboden befindlicher Körper hat also eine um den Betrag $hu \cos \varphi$ größere West-Ost-Geschwindigkeit als die Erdoberfläche. Läßt man ihn aus der Höhe h frei herabfallen, so eilt er der Erdoberfläche mit dieser Geschwindigkeit voraus, fällt also nicht lotrecht herab, sondern ein wenig schräg in östlicher Richtung.

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v relativ zur Erde auf einem Breitengrad ostwärts, also gleichsinnig mit der Erddrehung, so besitzt er eine zusätzliche Winkelgeschwindigkeit $\Delta u = v/R \sin \varphi$ (R Erdradius, φ geographische Breite), und daher ist die der Schwerkraft entgegengerichtete Komponente seiner Zentrifugalkraft etwas größer als bei einem auf der Erde ruhenden Körper. Ein ostwärts bewegter Körper hat also

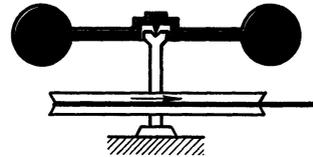


Abb. 95. Eörvös' Versuch zum Nachweis der Corioliskraft an bewegten Körpern. Aus Handbuch der Physik, Bd. 5, nach GRAMMEL.

scheinbar ein etwas kleineres, ein westwärts bewegter Körper ein etwas größeres Gewicht als ein ruhender Körper von gleicher Masse. So gering dieser Unterschied ist, so konnte er doch durch einen von Eörvös — neben vielen anderen schönen Versuchen zu diesem Thema — ausgeführten Versuch nachgewiesen werden. Abb. 95 stellt eine Art von Waage dar, die in schnelle Umdrehung versetzt werden kann. Von den beiden gleichen Massen ist stets die westwärts laufende scheinbar schwerer als die ostwärts laufende. Daher hat die Waage das Bestreben, nach der Seite jener Masse auszu-

schlagen, z. B. sich auf der nördlichen Halbkugel mit ihrem jeweils nach Westen laufenden Arm zu neigen, mit ihrem nach Osten laufenden Arm zu heben. Das läßt sich in der Tat nachweisen, wenn man die Waage mit der Frequenz ihrer Eigenschwingung rotieren läßt.

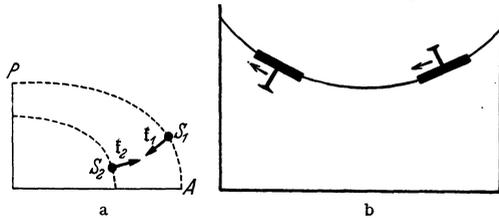


Abb. 96. a Zur Erklärung der Polfluchtkraft, b Demonstrationsversuch zur Polfluchtkraft, nach LELY.

nach Westen laufenden Arm zu neigen, mit ihrem nach Osten laufenden Arm zu heben. Das läßt sich in der Tat nachweisen, wenn man die Waage mit der Frequenz ihrer Eigenschwingung rotieren läßt.

Nach A. WEGENER bewirkt die Abplattung der Erde und die Zentrifugalkraft eine fundamentale geologische Erscheinung, die *Polflucht der Kontinente*. Bei der Betrachtung eines Globus fällt auf, daß die Kontinente wesentlich um die äquatorialen und mittleren Breiten versammelt, an den Polen spärlich sind. Die Kontinente bilden Schollen, die auf dem zähflüssigen Magma des Erdinnern schwimmen und unter der Wirkung von ausreichend lange andauernden Kräften auf ihm verschieblich sind. Ihr Schwerpunkt S_1 liegt höher als der Schwerpunkt S_2 des von ihnen verdrängten Magmas (Abb. 96a). In ihrem Schwerpunkt greift die Resultierende \mathfrak{F}_1 von Schwerkraft und Zentrifugalkraft der Scholle an, während der Auftrieb \mathfrak{F}_2 der Scholle im Schwerpunkt des verdrängten Magmas angreift. Die Beträge der beiden Kräfte sind gleich groß, aber sie sind einander wegen der Abplattung der Erde nicht genau entgegengerichtet. Sie haben daher eine Resultierende, die in Richtung auf den Äquator hinweist. (In Abb. 96a sind die den beiden Schwerpunktslagen entsprechenden Niveauflächen gezeichnet, d. h. die Flächen, auf denen die Schwerkraft + Zentrifugalkraft senkrecht steht. Die Verhältnisse sind der Deutlichkeit halber sehr stark übertrieben.) Die genannte Resultierende ist die Polfluchtkraft, die die

Kontinentalschollen in Richtung auf den Äquator treibt. Läge der Schwerpunkt der Schollen tiefer als der Schwerpunkt des verdrängten Magmas, so wäre die Kraft umgekehrt gerichtet. Eine hübsche Analogie hierzu bildet der folgende Versuch (Abb. 96b). Ein zylindrisches Gefäß mit Wasser wird in schnelle Umdrehung versetzt und ein Kork mit einem Nagel hineingebracht. Steht der Nagel nach unten, so wird der Kork nach außen (vom Pol fort) getrieben, steht er nach oben, so bewegt er sich nach innen. Die Analogie des ersten Falles mit der Polflucht wird deutlich, wenn man den Luftraum über dem Wasser mit der rotierenden Erde identifiziert. Der linke Kork entspricht den Kontinentalschollen.

Die Erde ist ein Kreisel mit völlig freier Drehachse, aber sie ist nicht kräftefrei. Infolge ihrer Abplattung und der Schiefe der Ekliptik erzeugt ihre Anziehung durch Sonne und Mond zusammen mit der von der Drehung der Erde um die Sonne herrührenden Zentrifugalkraft an ihr ein Drehmoment. Das kommt auf

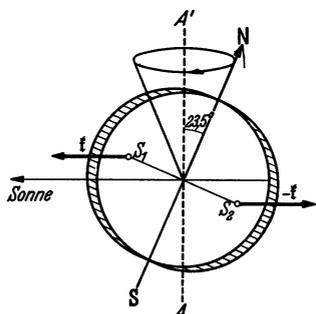


Abb. 97. Zur Präzession der Erdachse.

folgende Weise zustande. Wir denken uns die Erde, das Geoid, als eine ideale Kugel mit einem darauf liegenden Wulst, der am Äquator am dicksten ist (in Abb. 97 sehr stark übertrieben) und betrachten zuerst die Wirkung der Sonne allein. Im Erdmittelpunkt, ihrem Schwerpunkt, ist die Anziehung durch die Sonne der vom Erdumlauf um die Sonne herrührenden Zentrifugalkraft genau gleich und ihr entgegengerichtet. Den Wulst teilen wir in seine der Sonne zu- und von ihr abgewandte Hälfte. Auf der der Sonne zugewandten Hälfte ist die Sonnenanziehung, des

kleineren Abstandes wegen, größer als im Erdmittelpunkt, die Zentrifugalkraft aber aus dem gleichen Grunde kleiner, und im Schwerpunkt S_1 der Wulsthälfte resultiert eine auf die Sonne hin gerichtete Kraft f . Auf der von der Sonne abgewandten Seite ist es umgekehrt, und es resultiert hier im Wulstschwerpunkt S_2 eine von der Sonne weg gerichtete Kraft $-f$, die wegen der Schiefe der Ekliptik mit der ersteren ein Kräftepaar bildet, das die Erdachse um die zum Erdbahnradius senkrechte, in der Ebene der Erdbahn liegende (also in Abb. 97 zur Zeichnungsebene senkrechte) Achse zu drehen sucht. Genau wie ein Kinderkreisel antwortet der Erdkreisel auf dieses Drehmoment mit einer Präzessionsbewegung seiner Dreh- und Figurenachse um die zur Erdbahn senkrechte Achse. Im gleichen Sinne wirkt der Mond, und zwar noch stärker als die Sonne, weil die Kleinheit seiner Masse durch die Kleinheit seines Abstandes mehr als ausgeglichen wird. Die Erdachse läuft in rund 26000 Jahren einmal auf einem Kegelmantel um, dessen Öffnungswinkel gleich der doppelten Schiefe der Ekliptik ist, also 47° beträgt, verändert daher im Laufe der Jahrtausende ständig ihre Richtung. Der Polarstern, auf den sie heute ungefähr hinweist, wird im Laufe der Zeit das Recht, diesen Namen zu führen, an andere Sterne abtreten müssen. Mit der Präzession der Erdachse ist für jeden Ort der Erdoberfläche eine ständige, langsame Änderung im Bilde des gestirnten Himmels verbunden. Teile des Fixsternhimmels, die vorher nie über dem Horizont erschienen, werden sichtbar, andere verschwinden. Sterne, die vorher wegen ihres kleinen Abstandes vom Himmelspol nie unter den Horizont traten, tun dies nunmehr. Dies ist z. B. für Griechenland seit der Zeit HOMERS mit dem zum Großen Bär gehörenden Stern η ursae majoris eingetreten¹.

¹ Vgl. Odyssee, 5. Gesang, 274—276, und Ilias, 17. Gesang, 487—489: *Οἷη δ' ἄμμορος ἔστι λοετρῶν Ὠκεανοῖου*. Er allein ist des Bades im Ozean nicht teilhaftig.

Ein Kreisel mit freier Achse, z. B. in kardanischer Aufhängung, der auf der Erde rotiert, hat nach dem Drehimpulssatz das Bestreben, die Richtung seiner Drehimpulsachse im Raum unverändert beizubehalten. Daher wird diese relativ zur rotierenden Erde eine kreisende Bewegung um eine zur Erdachse parallele Achse ausführen. Die Richtung der Drehimpulsachse ändert sich nur dann relativ zur Erde nicht, wenn sie zur Erdachse parallel ist, also nach dem Himmelspol weist. Hierauf beruht der *Kreiselkompaß*. Er besteht aus dem Anker eines kardanisch aufgehängten Elektromotors. Wird eine kreisende Bewegung, die seine Achse anfänglich zeigt, durch Anblasen mit einem Luftstrom abgebremst, so richtet sich die Achse parallel zur Erdachse in die Süd-Nord-Richtung. Der Kreiselkompaß ist also von der Mißweisung des magnetischen Kompasses frei. Eine Mißweisung besteht bei ihm nur insofern, als er bei der Fahrt des Schiffes eine zusätzlich Winkelgeschwindigkeit besitzt, die sich vektoriell zur Winkelgeschwindigkeit der Erde addiert. Der resultierende Winkelgeschwindigkeitsvektor bildet im allgemeinen einen kleinen Winkel mit der Richtung der Erdachse, und die Kreiselachse zeigt eine entsprechende kleine Abweichung von der Süd-Nord-Richtung. Diese Mißweisung kann bei Kenntnis der Fahrtrichtung leicht korrigiert werden.

42. Richtkraft. Richtmoment. Schwingungsgleichung. Eine Masse (Massenpunkt) m , die längs einer in der x -Richtung liegenden Geraden beweglich ist, habe eine stabile Gleichgewichtslage im Punkte $x = 0$ (Abb. 98). Nach § 24 tritt dann bei einer Verschiebung aus dieser Lage eine Kraft auf, die sie in die Gleichgewichtslage zurückzutreiben sucht, und deren Betrag im allgemeinen eine Funktion des Betrages der Verschiebung ist, $k = k(x)$. Bei nicht zu großen Verschiebungen ist diese Kraft sehr häufig der Verschiebung proportional. Dann gilt die Gleichung



Abb. 98. Zur Richtkraft und zur Schwingungsgleichung.

$$k = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a x \quad (117)$$

($-a x$, weil $d^2 x/dt^2$ negativ, auf den Punkt $x = 0$ hin, gerichtet ist, wenn x positiv ist, und positiv, wenn x negativ ist). Die Größe a heißt die *Richtkraft* (Rückstellkraft, Direktionskraft) des Systems. Sie ist gleich der Kraft, die an der Masse auftritt, wenn sie um $x = 1$ cm aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben ist. Ihre Einheit ist $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1} = 1 \text{ g} \cdot \text{sec}^{-2}$. Die Lösung der Gl. (117) lautet, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt,

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (118)$$

wobei
$$\omega = \sqrt{\frac{a}{m}} \text{ sec}^{-1}. \quad (119)$$

x_0 und α sind Integrationskonstanten, die von den besonderen Bedingungen (Anfangsbedingungen) des Vorganges abhängen. Nach Gl. (118) führt der Massenpunkt eine periodische Bewegung, eine *harmonische Schwingung*, längs der x -Achse um den Punkt $x = 0$ zwischen den Grenzen $+x_0$ und $-x_0$ aus (Abb. 99a).

x_0 ist die *Schwingungsweite* oder der *Scheitelwert* (auch Ausschlag oder Amplitude) der Schwingung, nämlich der größte Abstand von der Gleichgewichtslage $x = 0$, den der Massenpunkt im Laufe seiner Schwingungen — rechts und links — erreicht. Die irgendeinem Zeitpunkt t entsprechende Verschiebung x heißt der *Momentanwert* der Schwingung. Der Betrag, um den das Argument $\omega t + \alpha$ das nächst kleinere ganzzahlige Vielfache von 2π überschreitet, heißt die *Phase* der Schwingung. Bei einem Zuwachs des Arguments um 2π wird jeweils wieder die gleiche Phase und damit der gleiche Betrag von x erreicht. Die Größe α heißt die *Phasenkonstante*. Ihr Betrag hängt vom Anfangspunkt

der gewählten Zeitskala ab. Wählt man sie so, daß zur Zeit $t = 0$ der Massenpunkt gerade seine Gleichgewichtslage $x = 0$ in der positiven x -Richtung durchläuft, so ist $\alpha = 0$, also $x = x_0 \sin \omega t$. Wählt man hingegen die Zeitskala so, daß der Massenpunkt sich zur Zeit $t = 0$ gerade in seinem Umkehrpunkt $x = +x_0$ befindet, so ist $\alpha = \pi/2$ und $x = x_0 \sin(\omega t + \pi/2) = x_0 \cos \omega t$. Diese Formen der Lösung, sowie weitere, die bei anderer Wahl der Zeitskala auftreten, sind also physikalisch vollkommen gleichwertig.

Die durch Gl. (119) definierte Größe ω heißt die *Kreistrequenz* der Schwingung. Ihre Einheit ist $1 \text{ sec}^{-1} = 1 \text{ Hertz (Hz)}$. Wir können Gl. (118) auch in folgenden Formen schreiben (mit $\alpha = 0$):

$$x = x_0 \sin \omega t = x_0 \sin 2\pi \nu t = x_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad (120)$$

$$\text{mit } \omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{\nu}. \quad (121)$$

τ ist die Zeit, nach der x wieder in die gleiche Phase zurückkehrt. Denn es ist $\sin 2\pi \frac{t+\tau}{\tau} = \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau} + 2\pi\right) = \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$. Demnach ist τ die Dauer einer vollen Hin- und Herschwingung, die *Schwingungsdauer* oder *Schwingungsdauer* des Massenpunktes. Dann ist $\nu = 1/\tau$ die Zahl der in 1 sec vollführten Vollschwingungen, die *Schwingungszahl* oder *Frequenz* des Massenpunktes. Auch ihre Einheit ist $1 \text{ sec}^{-1} = 1 \text{ Hz}$. Aus Gl. (119) und (121) folgt

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}} \text{ sec}. \quad (122)$$

Diese Gleichung spricht die wichtige Tatsache aus, daß die Schwingungsdauer einer linearen harmonischen Schwingung nur von der Masse und der Richtkraft, aber nicht von der Schwingungsweite abhängt.

Die momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes beträgt (mit $\alpha = 0$)

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t, \quad (123)$$

und demnach seine kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} x_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{a x_0^2}{2} \cos^2 \omega t. \quad (124)$$

An jedem Ort besitzt er gegenüber der Gleichgewichtslage $x = 0$ eine bestimmte potentielle Energie. Diese ist gleich der Arbeit, die aufzuwenden ist, um ihn gegen die Kraft $-ax$, also durch eine Kraft $+ax$ bis in den Abstand x zu verschieben. Sie beträgt also

$$P = \int_0^x a x dx = \frac{a x^2}{2} = \frac{a x_0^2}{2} \sin^2 \omega t. \quad (125)$$

Demnach beträgt die Gesamtenergie des schwingenden Massenpunktes

$$A = E + P = \frac{a x_0^2}{2}. \quad (126)$$

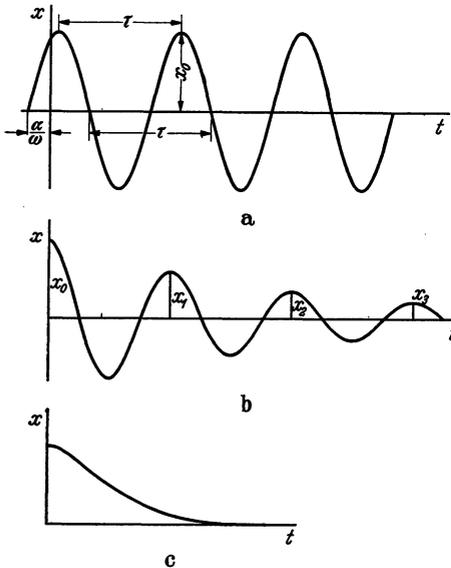


Abb. 99. a ungedämpfte, b gedämpfte harmonische Schwingung, c aperiodische Bewegung (Kriechbewegung).

Sie ist also — in Übereinstimmung mit dem Energieprinzip — zeitlich konstant, da das System keinen äußeren Kräften unterliegt, und dem Quadrat der Schwingungsweite proportional. Die Energie A ändert periodisch ihre Form. Im Punkte $x = 0$ besitzt der Massenpunkt nur kinetische, in den Umkehrpunkten $+x_0$ und $-x_0$ nur potentielle Energie. Zwischen diesen Punkten findet ein stetiger Übergang der einen Energieform in die andere statt. Die über die Schwingungsdauer τ genommenen zeitlichen Mittelwerte von $\sin^2 \omega t$ und $\cos^2 \omega t$ sind einander gleich und betragen $1/2$. Demnach sind die zeitlichen Mittelwerte der kinetischen und der potentiellen Energie einander gleich und betragen je $ax_0^2/4$, sind also dem Quadrat der Schwingungsweite proportional.

Gilt für den Massenpunkt noch eine der Gl. (117) entsprechende zweite Gleichung $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -a' y$ für die zur x -Richtung senkrechte y -Richtung mit einer anderen Richtkraft a' , so folgt daraus die der Gl. (118) analoge Gleichung $y = y_0 \sin(\omega' t + \alpha')$ mit der Kreisfrequenz $\omega' = \sqrt{a'/m}$ und im allgemeinen mit einer anderen Phasenkonstanten α' . Die beiden zueinander senkrechten Bewegungen überlagern sich dann zu einer im allgemeinen sehr verwickelten

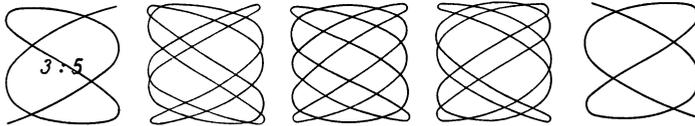


Abb. 100. LISSAJOUS-Figuren. $\omega : \omega' = 3 : 5$.

Bewegung in der xy -Ebene, und die Bahn bildet eine sog. LISSAJOUS-Figur, deren Gestalt bei gegebenem ω und ω' von der Differenz $\alpha - \alpha'$ der Phasenkonstanten und von den Schwingungsweiten x_0, y_0 abhängt. Sie ist nur dann eine geschlossene Kurve, wenn ω und ω' in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Abb. 100 zeigt einige Beispiele für den Fall $\omega : \omega' = 3 : 5$ bei gleichen Schwingungsweiten und verschiedenen Beträgen der Phasendifferenz. Ist $a = a'$, also auch $\omega = \omega'$, so ist die Bahn eine Ellipse, die bei der Phasendifferenz 0 in eine Gerade, bei gleichen Schwingungsweiten und der Phasendifferenz $\pm \pi/2$ in einen Kreis ausartet.

Ein Körper sei um eine im Raum feste Achse drehbar, bezüglich derer er das Trägheitsmoment J besitzt, und habe bezüglich Drehungen um diese Achse eine bestimmte Gleichgewichtslage. Daher tritt an dem Körper, wenn er um einen Winkel φ aus dieser Gleichgewichtslage herausgedreht wird, ein ihn in diese zurücktreibendes Drehmoment auf. Bei nicht zu großen Drehungen ist meist der Betrag dieses Drehmoments dem Drehwinkel proportional, $N = -D \varphi$. Das ist z. B. dann der Fall, wenn ein Körper an einem Draht oder Faden aufgehängt ist, dessen Richtung die Drehachse bildet, oder wenn er an einer festen Achse befestigt ist, an der eine Spiralfeder angreift, wie bei der Unruhe einer Taschenuhr. Nach Gl. (110) und § 10 [Gl. (22)] gilt dann

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi. \tag{127}$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. (117) mathematisch vollkommen. Nur ist an die Stelle der Masse m das Trägheitsmoment J , an die Stelle der Beschleunigung $d^2 x/dt^2$ die Winkelbeschleunigung $d^2 \varphi/dt^2$ getreten (vgl. den Schluß von § 37). Die an die Stelle der Richtkraft a getretene Größe D heißt das *Richtmoment* (Direktionsmoment) des Körpers. Seine Einheit ist $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$. Die der Gl. (118) vollkommen analoge Lösung der Gl. (127) lautet

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}} \text{ sec}^{-1}. \tag{128}$$

Der Körper führt also eine *harmonische Drehschwingung* um seine Gleichgewichtslage mit der Schwingungsweite φ_0 aus. Ihre *Schwingungsdauer* beträgt

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ sec.} \quad (129)$$

Sie hängt auch hier nicht von der Schwingungsweite ab.

Wir haben bisher angenommen, daß der Körper keinen Widerständen, z. B. der Reibung, unterliegt, durch die seine Schwingungsenergie allmählich aufgezehrt wird. Ist ein solcher vorhanden, so führt der Körper eine *gedämpfte Bewegung* aus. Im allgemeinen darf man annehmen, daß der dämpfende Widerstand der Geschwindigkeit dx/dt (bzw. der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$) proportional ist. Da er ihr stets entgegengerichtet ist, so setzen wir ihn gleich $-\rho dx/dt$, wobei ρ eine von den äußeren Bedingungen abhängige Konstante ist. Auf den Körper von der Masse m wirken also jetzt zwei Kräfte: die ihn in die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft $-ax$ und die bewegungshemmende Reibungskraft $-\rho dx/dt$. Die Summe dieser beiden Kräfte muß gleich Masse \times Beschleunigung sein. Wir erhalten demnach an Stelle von Gl. (117)

$$k = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -ax - \rho \frac{dx}{dt}. \quad (130)$$

Wir führen zur Abkürzung $a/m = \omega_0^2$ und $\rho/m = 2\beta$ ein und können dann nach Division durch m schreiben

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (131)$$

Die Lösung dieser Gleichung hat eine verschiedene Gestalt, je nachdem $\omega_0^2 - \beta^2$ größer oder kleiner als Null ist. Im Falle $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, also bei geringerem Betrage der Dämpfung, erhalten wir eine *gedämpfte harmonische Schwingung*, im Falle $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ eine *aperiodische Kriechbewegung*. Wir betrachten zuerst den ersten Fall und wählen unsere Zeitskala diesmal so, daß sich der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ gerade in dem Umkehrpunkt $x = +x_0$ befindet, so daß dann auch seine Geschwindigkeit $dx/dt = 0$ ist. Dann lautet, wie man durch Einsetzen bestätigt, die Lösung der Gl. (131)

$$x = x_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right), \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (132)$$

Die Bewegung des Massenpunktes ist also periodisch. Jedoch ist seine Kreisfrequenz ω kleiner, daher seine Schwingungsdauer τ größer als bei fehlender Dämpfung ($\beta = 0$, $\omega = \omega_0$). Der wesentliche Unterschied gegenüber der ungedämpften Schwingung liegt aber in dem Faktor $e^{-\beta t}$ (e Basis des natürlichen Logarithmensystems), der bewirkt, daß die Schwingungsweite, als die wir die Größe $x_0 e^{-\beta t}$ ansehen können, ständig abnimmt (Abb. 99b). Ist x_n der n -te Umkehrpunkt auf der positiven Seite, den also der Massenpunkt zur Zeit $n\tau$ erreicht, so kann man leicht zeigen, daß $x_n = x_0 e^{-n\beta\tau} = x_0 e^{-n\Lambda}$. Die Größe $\Lambda = \beta\tau$ heißt das *logarithmische Dekrement* der Schwingung. Es ist gleich dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Schwingungsweiten auf der gleichen Seite, $\log(x_n/x_{n+1}) = \Lambda$, das demnach konstant ist. Ersetzt man in Gl. (132) die Verschiebung x durch den Drehwinkel φ , so gilt sie in genau dem gleichen Sinne für die gedämpfte Drehschwingung.

Ist $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, so ist, wie wir hier nicht im einzelnen ausführen wollen, die Bewegung nicht periodisch, sondern der Körper kriecht von einem anfänglich vorhandenen Ausschlage x_0 aus in seine Gleichgewichtslage zurück, ohne sie je zu überschreiten (Abb. 99c). Als Beispiele für eine gedämpfte Schwingung und für eine aperiodische Kriechbewegung denke man sich ein Pendel, das sich

einmal in Luft, ein anderes Mal in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Im Grenzfall $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ (*aperiodischer Grenzfall*) lautet die Lösung der Gl. (131)

$$x = x_0 e^{-\beta t} (\tau + \beta t), \tag{133}$$

und entsprechend, mit φ statt x , für Drehbewegungen. Letzteres ist wichtig bei den Galvanometern.

Eine ausführliche Behandlung der Schwingungen findet sich im VI. Abschnitt des 2. Kapitels.

43. Das Pendel. Ein Pendel ist jeder Körper, der in einem festen Punkt oder in einer festen Achse drehbar aufgehängt ist, und der unter der Wirkung eines von der Schwerkraft an ihm erzeugten Richtmoments Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage auszuführen vermag. Das ist diejenige Lage, in der seine potentielle Energie ihren kleinsten möglichen Betrag hat, d. h. diejenige, in der sein Schwerpunkt die tiefste mögliche Lage einnimmt (§ 24). Wird er aus ihr entfernt und wieder losgelassen, so treibt ihn die Schwerkraft wieder auf ihn hin. Da er aber auf diesem Wege durch die Schwerkraft beschleunigt wird, so führt ihn die gewonnene Geschwindigkeit über die Gleichgewichtslage hinaus, so daß er auf der anderen Seite wieder gehoben wird, bis seine kinetische Energie restlos in potentielle Energie verwandelt ist. Dann wiederholt sich das Spiel in umgekehrter Richtung. Das Pendel führt also eine periodische Schwingung um die Gleichgewichtslage aus.

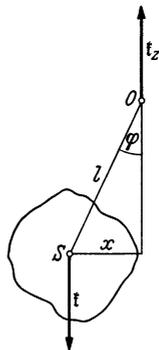


Abb. 101.
Zur Ableitung des
Pendelgesetzes.

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß das Pendel in einer vertikalen Ebene schwingt (ebenes Pendel). Es sei m die Masse des Pendels, J sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse, um die es schwingt, und die in Abb. 101 senkrecht zur Zeichnungsebene durch O gehe. Der Pendelschwerpunkt befinde sich in S im Abstände l von der Achse, und das Pendel sei momentan um den Winkel φ aus seiner Gleichgewichtslage gedreht. Die in S angreifende Schwerkraft $\mathfrak{f} = mg$ vom Betrage mg ruft in O eine ihr entgegengerichtete, gleich große Zwangskraft $\mathfrak{t}_z = -\mathfrak{f}$ hervor, mit der zusammen sie ein Kräftepaar bildet. Dieses erzeugt am Pendel ein Drehmoment vom Betrage $mgx = mgl \sin \varphi$ (Abb. 101), wenn x der momentane Arm der Kraft \mathfrak{f} bezüglich des Punktes O ist. Wir wollen nur so kleine Pendelausschläge betrachten, daß wir ohne merklichen Fehler $\sin \varphi \approx \varphi$ setzen können. Dann folgt aus Gl. (110) und (127)

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi = -D\varphi. \tag{134}$$

Es ist also $D = mgl$ das Richtmoment des Pendels, und aus Gl. (129) folgt für seine Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \text{ sec.} \tag{135}$$

Es sei J_s das Trägheitsmoment des Pendels bezüglich der zu seiner Schwingungsebene senkrechten Schwerpunktsachse (§ 36). Dann ist nach Gl. (95) sein Trägheitsmoment bezüglich seiner wirklichen, durch O gehenden Drehachse $J = J_s + ml^2$. Liegt O weit außerhalb des Körpers, so daß l groß gegen die Abmessungen des Körpers ist, so ist J_s klein gegen ml^2 , und man kann mit geringem Fehler $J = ml^2$ setzen. Dann beträgt nach Gl. (134) die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ sec} \tag{136}$$

(GALILEI 1596). Dies würde streng gelten für einen Massenpunkt an einem masselosen Faden. Ein solches idealisiertes Pendel heißt im Gegensatz zum wirklichen *physikalischen* Pendel ein *mathematisches Pendel*. Es kann durch eine nicht zu große Kugel an einem ausreichend langen Faden sehr weitgehend angenähert werden. Ist z. B. der Kugelradius $r = 1$ cm, der Abstand des Kugelschwerpunktes vom Aufhängepunkt $l = 100$ cm, so ist $J_s = 2mr^2/5$ (§ 36) und $J = 1,00004 ml^2$ (von dem sehr kleinen Einfluß des Fadens abgesehen), also fast genau gleich ml^2 . Ein solches Pendel kann also, wenn es nicht auf äußerste Genauigkeit ankommt, wie ein mathematisches Pendel behandelt werden, dessen Pendelkörper ein im Kugelmittelpunkt befindlicher Massenpunkt ist.

Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels hängt — außer von der Erdbeschleunigung g — nur von der Pendellänge l ab und ist von der Masse des Pendels unabhängig. Mit $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ findet man nach Gl. (136) für ein mathematisches Pendel von der Länge $l = 100$ cm fast genau $\tau = 2 \text{ sec}$ (*Sekundenpendel*).

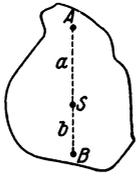


Abb. 102.
Zur Theorie des
Reversions-
pendels.

Die Größe

$$\lambda = \frac{J}{ml} \quad (137)$$

heißt die *reduzierte Pendellänge* eines physikalischen Pendels. Aus Gl. (135) folgt für seine Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}. \quad (138)$$

Sie ist also gleich der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Länge λ . Da stets $J > ml^2$, so ist stets $\lambda > l$, d. h. der *Schwingungsmittelpunkt* des Pendels, der Punkt, in dem man sich einen Massenpunkt an Stelle des ausgedehnten Pendelkörpers denken kann, ist stets weiter vom Aufhängepunkt entfernt als der Pendelschwerpunkt.

Nach Gl. (138) kann man aus der Schwingungsdauer τ eines Pendels von bekannter reduzierter Pendellänge λ die Erdbeschleunigung g berechnen. Für weniger genaue Messungen genügt eine kleine, schwere Kugel an einem nicht zu kurzen Faden. Genauere Ergebnisse liefert das *Reversionspendel*. Ein Körper sei um eine im Abstände a von seinem Schwerpunkt S befindliche, durch A gehende horizontale Achse drehbar (Abb. 102). Sein Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist dann $J = J_s + ma^2$ [Gl. (95)], seine reduzierte Pendellänge $\lambda = (J_s + ma^2)/ma$ [Gl. (137)]. Es gibt nun stets auf der Geraden AS jenseits von S im Abstände b einen Punkt B , der so gelegen ist, daß der Körper, wenn er um eine durch B gehende horizontale Achse schwingt, die gleiche Schwingungsdauer und daher die gleiche reduzierte Pendellänge hat, wie bei der Schwingung um die durch A gehende Achse. Solche Achsen heißen *korrespondierende Achsen*. Es muß demnach sein

$$\lambda = \frac{J_s + ma^2}{ma} = \frac{J_s + mb^2}{mb}. \quad (139)$$

Außer der trivialen Lösung $a = b$ (d. h. B fällt mit A zusammen) hat diese Gleichung die Lösung $b = J_s/ma$. Dann ist der Abstand $AB = a + b = a + J_s/ma = b + J_s/m b$, also gleich der reduzierten Pendellänge λ sowohl des um A , wie des um B schwingenden Pendels, die auf diese Weise ermittelt werden kann.

Abb. 103 zeigt eine Ausführungsform des Reversionspendels. Eine Stange ist mit zwei einander zugekehrten Stahlschneiden A, B versehen, die auf eine horizontale Stahlplatte gesetzt werden können, so daß das Pendel um die eine oder um die andere als Achse schwingen kann. Sofern das Pendel um beide Achsen gleich schnell schwingt, ist der Schneidenabstand AB seine reduzierte

Pendellänge λ . Dies wird durch Verschieben zweier Massen bewirkt, von denen die eine zwischen den Schneiden, die andere außerhalb sitzt.

Das Trägheitsmoment J eines Körpers ist bei gegebener Gestalt und Dichteverteilung seiner *trägen Masse*, die auf ihn wirkende Schwerkraft mg aber seiner *schweren Masse* proportional. Demnach enthält das in Gl. (135) eingehende Verhältnis J/mg im Grunde das Verhältnis der trägen zur schweren Masse des Pendels, das wir in § 12 gleich 1 gesetzt haben. Daher können Versuche mit Pendeln aus verschiedenen Stoffen, aber von sonst gleicher Beschaffenheit dazu dienen, die Berechtigung dieser strengen Gleichsetzung (bzw. Proportionalität) zu prüfen, d. h. zu untersuchen, ob das Verhältnis der trägen zur schweren Masse tatsächlich für verschiedene Stoffe das gleiche ist. Versuche, die bis zur äußersten Grenze der Genauigkeit durchgeführt wurden, haben dies vollkommen bestätigt.

Unter der hier gemachten Voraussetzung kleiner Schwingungswerten hängt die Schwingungsdauer eines Pendels nicht von seiner Schwingungsweite ab. Hierauf beruht bekanntlich die Steuerung des Ganges der *Pendeluhr*en (HUYGENS 1658). Bei den Taschenuhren wird das gleiche durch die Drehschwingungen eines Rädchens, der *Unruhe*, bewirkt, dessen Schwingungsdauer durch sein Trägheitsmoment und durch das Richtmoment bestimmt ist, das eine an seiner Achse angreifende Spiralfeder liefert.

Von der Schwingungsweite vollkommen unabhängig ist die Schwingungsdauer des *Zykloidenpendels*. Das ist ein Pendel, dessen Pendelkörper sich nicht auf einem Kreise bewegt, sondern auf einer Zykloide.

44. Die Dimensionen und Einheiten der mechanischen Größen. Alle mechanischen Größen lassen sich, wie wir das in diesem Kapitel getan haben, auf die drei *Grundgrößen* des CGS-Systems, die Masse, die Länge und die Zeit zurückführen, und dementsprechend können ihre Einheiten als Potenzprodukte der drei *Grundeinheiten*, des g, des cm und der sec, ausgedrückt werden, z. B. die Einheit der Kraft als $1 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$. Unter der *Dimension* einer



Abb. 103. Einfaches Reversionspendel.

Tabelle 2. Dimensionen und Einheiten der mechanischen Größen.

Dimension	Einheit		
	CGS-System	Techn. System	
Masse	$ m $	g, gr	$\text{kg}^* \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-1}$
Länge	$ l $	cm	m
Zeit	$ t $	sec	sec
Geschwindigkeit	$ l t^{-1} $	$\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$
Beschleunigung	$ l t^{-2} $	$\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$
Kraft	$ m l t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn}$	kg^*
Druck ¹	$ m l^{-1} t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$	$(\text{kg}^* \cdot \text{m}^{-2}) \text{ s. u.}$
Impuls	$ m l t^{-1} $	$\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$	$\text{kg}^* \cdot \text{sec}$
Energie, Arbeit	$ m l^2 t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{erg}$	mkg^*
Leistung	$ m l^2 t^{-3} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-3} = \text{erg} \cdot \text{sec}^{-1}$	$\text{mkg}^* \cdot \text{sec}^{-1}$
Winkelgeschwindigkeit	$ t^{-1} $	sec^{-1}	sec^{-1}
Winkelbeschleunigung	$ t^{-2} $	sec^{-2}	sec^{-2}
Schwingungszahl	$ t^{-1} $	$\text{sec}^{-1} = \text{Hz}$	$\text{sec}^{-1} = \text{Hz}$
Trägheitsmoment	$ m l^2 $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2$	$\text{kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$
Drehmoment	$ m l^2 t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn} \cdot \text{cm}$	$\text{kg}^* \cdot \text{m}$
Drehimpuls	$ m l^2 t^{-1} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$	$\text{kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{sec}$
Richtkraft	$ m t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$	$\text{kg}^* \cdot \text{m}^{-1}$
Richtmoment	$ m l^2 t^{-2} $	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn} \cdot \text{cm}$	$\text{kg}^* \cdot \text{m}$

¹ Der Druck wird in der Technik meist in $\text{kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen.

physikalischen Größe versteht man einen Ausdruck, der angibt, in welcher Potenz die drei Grundgrößen in sie eingehen, bzw. in welcher Potenz die drei Grundeinheiten in ihre Einheit eingehen. Die Dimensionen der drei Grundgrößen bezeichnen wir mit $|m|$ (Masse), $|l|$ (Länge), $|t|$ (Zeit). Dann kann die Dimension jeder von ihnen abgeleiteten Größe in der Form $|m^a l^b t^c|$ ausgedrückt werden, wobei a, b, c Zahlen sind, die positiv, negativ oder gleich Null sein können. Zum Beispiel ist die Dimension einer Geschwindigkeit, als des Verhältnisses einer Länge zu einer Zeit (Einheit $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$), $|m^0 l^1 t^{-1}| = |l t^{-1}|$. Zahlenfaktoren, z. B. der Faktor $1/2$ der kinetischen Energie, sind dimensionslos und beeinflussen die Dimension einer physikalischen Größe nicht. Auch Winkel sind — als reine Zahlen — dimensionslos. Die Kenntnis der Dimension einer Größe ist in vielen Fällen nützlich. Natürlich kann man entsprechende Überlegungen auch für das technische Maßsystem durchführen, wobei an Stelle der Masse die Kraft als Grundgröße und das kg^* als Grundeinheit auftritt.

In der Tabelle 2 sind die Dimensionen der wichtigsten mechanischen Größen, sowie die Einheiten des CGS-Systems und des technischen Maßsystems zusammengestellt.

III. Die allgemeine Gravitation.

45. Das NEWTONSche Gravitationsgesetz. Die irdische Schwerkraft ist, wie NEWTON (1643—1727) erkannte, nur ein Sonderfall einer allgemeinen Eigenschaft jeglicher Materie, der *allgemeinen Massenanziehung* oder *Gravitation*. Sie ist die Gravitation zwischen dem Erdkörper und den auf ihm und in seiner Nähe befindlichen Körpern. NEWTON bewies, daß die Zentripetalkraft, die den Mond zwingt, die Erde auf einer Kreisbahn zu umlaufen, nichts anderes als die von der Erde auf den Mond ausgeübte Schwerkraft ist. Er schloß daraus, daß entsprechende Kräfte auch zwischen der Sonne und ihren Planeten und überhaupt zwischen allen Massen wirksam sind. NEWTON bewies, ferner daß die Kraft, mit der sich zwei Massen, m_1, m_2 anziehen, der Größe der Massen proportional und ihrem Abstände r umgekehrt proportional ist. Demnach ist der Betrag der anziehenden Kraft

$$k = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ dyn.} \quad (1)$$

Dabei sind m_1, m_2 in g , r in cm gemessen. G ist eine universelle, von der Beschaffenheit der beiden Körper unabhängige Naturkonstante, die *Gravitationskonstante*, und beträgt $G = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot g^{-2}$ bzw. $\text{cm}^3 \cdot g^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$. Demnach ziehen sich z. B. zwei Massenpunkte von je $1 g$ im Abstände $r = 1 \text{ cm}$ mit der sehr kleinen Kraft von $6,685 \cdot 10^{-8} \text{ dyn}$ an. Entsprechend dem Wechselwirkungsgesetz zieht die Masse m_1 die Masse m_2 mit der gleichen Kraft an, mit der die Masse m_2 die Masse m_1 anzieht.

Wir können das NEWTONSche Gravitationsgesetz auch vektoriell aussprechen. Es sei \mathfrak{f} die Kraft, die die Masse m_2 von der Masse m_1 erfährt, r der von der Masse m_1 in Richtung auf die Masse m_2 weisende Fahrstrahl (Betrag r). Dann ist r/r ein in Richtung von r weisender Vektor vom Betrage 1 (Einheitsvektor, § 8). Wir erhalten die NEWTONSche Anziehung in vektorieller Form, wenn wir die rechte Seite von Gl. (1) mit $-r/r$ multiplizieren. Dadurch wird ihr Betrag nicht geändert, sondern ihr lediglich eine Richtung zugeordnet, und zwar die dem Fahrstrahl r entgegen, auf die Masse m_1 weisende Richtung. Es ist also

$$\mathfrak{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} r. \quad (2)$$

In dieser Gleichung ist also unter r jeweils der Fahrstrahl zu verstehen, der von der anziehenden Masse auf die angezogene hinweist, also der von m_1 nach

m_2 weisende Fahrstrahl, wenn es sich um die Anziehung von m_2 durch m_1 handelt, und umgekehrt.

Strenggenommen gilt das obige Gesetz ohne weiteres nur für Massenpunkte. Bei ausgedehnten Körpern muß über die zwischen ihren sämtlichen Massenelementen wirkenden Kräfte integriert werden. Bei sehr großem Abstände der Körper, d. h. wenn ihre Abmessungen klein gegen ihren Abstand sind, kann man aber ohne ins Gewicht fallenden Fehler ihre Massen in ihrem Schwerpunkte vereinigt denken. Bei homogenen Kugelschalen und aus solchen zusammengesetzten Kugeln ist das sogar bei beliebigem Abstände streng richtig. Daher ist Gl. (1) auf die nahezu kugelförmigen Himmelskörper sowie auf die Erdanziehung fast immer ohne weiteres anwendbar. Befindet sich aber eine Masse m_2 innerhalb einer räumlich verteilten Masse m_1 , so ist das durchaus nicht der Fall. Wenn sich z. B. ein Massenpunkt innerhalb einer homogenen Kugelschale von beliebiger Dicke befindet, so heben sich, wie man aus Gl. (1) ableiten kann, die Anziehungskräfte der einzelnen Massenelemente der Hohlkugel auf den Massenpunkt gegenseitig genau auf. Der Massenpunkt ist im Innern der Hohlkugel kräftefrei. Für einen Massenpunkt m_2 , der sich im Erdinnern, im Abstände r vom Erdmittelpunkt befindet, ist die Hohlkugel mit den Radien R (Erdradius) und r unwirksam (Abb. 104). Er unterliegt nur der Anziehung der Kugel vom Radius r . Ist deren Dichte ρ , also ihre Masse $m_1 = 4\pi r^3 \rho / 3$ so wird der Massenpunkt m_2 mit der Kraft

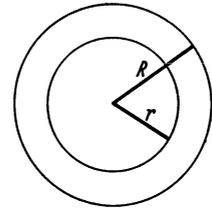


Abb. 104. Zur Schwerkraft im Erdinnern.

$$k = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{4\pi}{3} \rho m_2 r \quad (3)$$

in Richtung auf den Erdmittelpunkt gezogen. Die Gravitation im Erdinnern ist — konstante Dichte ρ vorausgesetzt —, dem Abstände r vom Erdmittelpunkt proportional, während sie außerhalb der Erdoberfläche $1/r^2$ proportional ist. Die Anziehung der Erde nimmt also bei Annäherung an die Erde wie $1/r^2$ zu, um nach dem Durchgang durch die Erdoberfläche wie r wieder abzunehmen und im Erdmittelpunkt zu verschwinden.

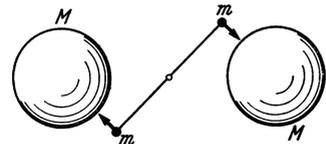


Abb. 105. CAVENDISH'S Versuch zum Nachweis der Massenanziehung.

Die Schwerkraft einer Masse m an der Erdoberfläche ergibt sich aus Gl. (1), wenn wir für r den Erdradius $R = 6370 \text{ km} = 6,370 \cdot 10^8 \text{ cm}$ und für m_1 die Masse M der Erde einsetzen. Andererseits beträgt die auf eine Masse m auf der Erdoberfläche wirkende Schwerkraft $k = mg$ ($g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$). Demnach ist

$$G \frac{M m}{R^2} = m g \quad \text{oder} \quad g = G \frac{M}{R^2}. \quad (4)$$

Hieraus kann die Masse M der Erde berechnet werden. Sie ergibt sich zu rund $6 \cdot 10^{27} \text{ g} = 6 \cdot 10^{21} \text{ Tonnen}$, ihre mittlere Dichte zu $5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Das Erdinnere besteht also aus ziemlich schweren Stoffen, zum großen Teil vermutlich aus Eisen und Nickel.

Die Massenanziehung kann im Laboratorium mit einer empfindlichen Drehwaage nachgewiesen werden (CAVENDISH 1798), die aus zwei kleinen, an den Enden einer drehbaren Stange befestigten Bleikugeln m, m besteht (Abb. 105). Stellt man ihnen zwei große Bleikugeln M, M gegenüber, so werden jene von diesen angezogen, und die Waage dreht sich entsprechend. Eine der genauesten Messungen der Gravitationskonstante G lieferten RICHARZ und KRIGAR-MENZEL, indem sie das Gewicht von Körpern oberhalb und unterhalb von großen Bleimassen bestimmten.

46. Die Bewegung des Mondes und der Planeten. Gravitation im Weltraum. Einen schlagenden Beweis für das Gravitationsgesetz lieferte NEWTON durch Berechnung der *Umlaufszeit des Mondes* um die Erde aus Gl. (1). Die Bahn des Mondes um die Erde ist nahezu kreisförmig. Ihr Mittelpunkt ist der gemeinsame Schwerpunkt Sp von Erde und Mond (Abb. 106). Auch die Erde vollführt um diesen in der gleichen Zeit wie der Mond einen vollen Umlauf. Abb. 106 ist nur schematisch zu verstehen. M und m sind als Massenpunkte am Ort der Schwerpunkte von Erde und Mond gedacht. Auch liegt Sp dem Erdmittelpunkt tatsächlich sehr viel näher, s. u.). Erde und Mond drehen sich also mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, da dieser ja stets auf der Verbindungslinie von Erde und Mond liegt.

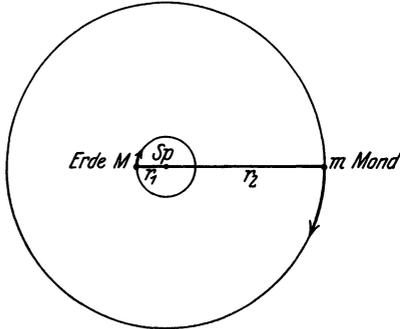


Abb. 106. Zur Mondbewegung.

Es sei r der Abstand Erde—Mond, r und r_2 seien die Abstände der Erde M und des Mondes m vom Schwerpunkt Sp , so daß $r = r_1 + r_2$. R sei der Erdradius. Es ist $r_2 \approx 81 r_1$ und $r \approx 60 R$. Dann ist nach § 19 $M r_1 = m r_2$ oder $M/m = r_2/r_1 \approx 81$. Nach § 19, Gl. (29), ist $r_1 = r m / (M + m)$. Es folgt $r_1 \approx 60 R / 82$ oder rund $3R/4$. Der Schwerpunkt Sp des Systems Erde—Mond liegt also im Erdinnern, rund $3/4$ des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt. Weiter ist $r_2 = r M / (M + m)$.

Sowohl für die Erde wie für den Mond liefert die gegenseitige Anziehung die zum Umlauf auf ihrer Kreisbahn nötige Zentripetalkraft. Es ist demnach nach § 34 [Gl. (91)] und Gl. (1)

$$M r_1 u^2 = m r_2 u^2 = G \frac{M m}{r^2}. \quad (5)$$

Hieraus und aus Gl. (4) folgt

$$u^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) g \frac{R^2}{r^3} \text{ sec}^{-2}. \quad (6)$$

Dann ergibt sich die Umlaufszeit $\tau = 2\pi/u$ [§ 10, Gl. (29)] mit $m/M = 1/81$, $R = 6,370 \cdot 10^8$ cm, $r/R = 60,267$ und $g = 981$ cm \cdot sec $^{-2}$ richtig zu $27^{1/3}$ Tagen.

Auch die *Bewegungen der Planeten* lassen sich, wie NEWTON zeigen konnte, aus dem Gravitationsgesetz in Übereinstimmung mit den Gesetzen berechnen, die bereits KEPLER (1609 und 1618) empirisch aus den astronomischen Beobachtungsdaten abgeleitet hatte. Die *KEPLERSchen Gesetze* lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der von der Sonne nach einem Planeten weisende Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Die Exzentrizität der meisten Planetenbahnen ist gering. Sie ist am größten beim Merkur mit 0,20561, am kleinsten bei der Venus mit 0,00682 und beträgt bei der Erde 0,01675. Nach dem Schwerpunktsatz müßte das 1. KEPLERSche Gesetz streng so formuliert werden, daß der Schwerpunkt des ganzen Sonnensystems im Brennpunkt liegt. Die Sonnenmasse überwiegt aber die Planetenmassen so sehr, daß der Schwerpunkt des Sonnensystems fast genau in den Sonnenmittelpunkt fällt. (Die Sonnenmasse ist 1047mal größer als die Jupitermasse und diese wieder 750mal größer als die Masse aller übrigen Planeten zusammen.) Kleine, aber für die praktische Astronomie wichtige Abweichungen

von den KEPLERSchen Gesetzen, die *Störungen* der Planetenbahnen, beruhen auf der gegenseitigen Gravitation der Planeten. Die KEPLERSchen Gesetze gelten grundsätzlich auch für die zum Sonnensystem gehörigen, periodisch wiederkehrenden Kometen. Ihre Bahnen besitzen aber eine große Exzentrizität, und sie unterliegen beträchtlichen Störungen durch die Planeten, in deren Nähe sie gelangen.

Das 2. KEPLERSche Gesetz ist der *Flächensatz* für den Fall einer Zentralkraft (§ 35), wie sie ja bei der Gravitation vorliegt. Abb. 107 veranschaulicht das Gesetz für eine stark exzentrische Planetenbahn. Man sieht, daß die Planetengeschwindigkeit im sonnennahen Teil der Bahn (Perihel) am größten, im sonnenfernen Teil (Aphel) am kleinsten ist. Das entspricht auch dem Energieprinzip. Die Gesamtenergie des kreisenden Planeten ist konstant. Im Perihel hat er die kleinste, im Aphel die größte potentielle Energie gegenüber der Sonne. Er muß also im Perihel die größte, im Aphel die kleinste kinetische Energie besitzen

Das 3. KEPLERSche Gesetz ist für den Sonderfall einer Kreisbahn schon in Gl. (6) enthalten. Denn da $u^2 \sim 1/r^3$ und $\tau = 2\pi/u$, so ist das Quadrat der Umlaufzeit $\tau^2 \sim r^3$.

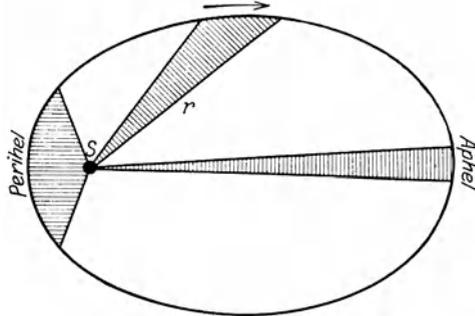


Abb. 107. Zum 2. KEPLERSchen Gesetz.

Die Entstehung des Planetensystems der Sonne ist zweifellos einem in der Geschichte des Weltalls sehr seltenen Zufall zu verdanken, vielleicht einer sehr großen Annäherung eines andern Fixsternes an die Sonne, infolge derer Teile der Sonnenmaterie von ihr losgelöst wurden. Daher werden wahrscheinlich außer der Sonne höchstens sehr wenige Fixsterne ein Planetensystem besitzen; und daß sich unter diesen Planeten einer befindet, auf dem die Bedingungen der Entstehung organischen Lebens so günstig sind, wie auf der Erde, wird noch außerordentlich viel seltener vorkommen. Es ist daher so gut wie sicher, daß das Menschengeschlecht sein Dasein einem außerordentlich seltenen Zusammentreffen verschiedener Umstände verdankt.

Die KEPLERSchen Gesetze gelten nicht nur bei der Gravitation, sondern überhaupt immer dann, wenn sich zwei Körper mit einer zu $1/r^2$ proportionalen Kraft anziehen. Das ist z. B. der Fall bei der Anziehung zweier entgegengesetzt elektrisch geladenen Körper. Wir werden diesem Fall in der BOHRschen Atomtheorie begegnen. Wenn sich zwei Körper mit einer zu $1/r^2$ proportionalen Kraft abstoßen, so gilt das 2. KEPLERSche Gesetz ebenfalls und das 1. KEPLERSche Gesetz mit der Abänderung, daß die Bahn eine Hyperbel ist.

Natürlich bestehen Gravitationswirkungen zwischen allen Massen im Welt- raum. In unserer Milchstraße macht sich die gegenseitige Gravitation der etwa 1000 Millionen Fixsterne, aus denen sie besteht, im OORT-*Effekt* bemerkbar. Die Sterne unserer Milchstraße rotieren um deren Schwerpunkt, und zwar gemäß dem 3. KEPLERSchen Gesetz um so langsamer, je weiter sie von ihm entfernt sind.

Man nimmt an, daß sich die Fixsterne im Laufe der Zeit infolge der gegenseitigen Gravitation der einzelnen Atome aus diffuser Materie zusammengeballt haben. Die bei dieser Zusammenballung eintretende Zusammendrückung führt zu einer allmählichen Erwärmung auf sehr hohe Temperaturen, und es entsteht schließlich ein leuchtender Fixstern. Jedoch ist schätzungsweise nur $\frac{2}{3}$ der im Bereiche unserer Milchstraße vorhandenen Materie zu Fixsternen

verdichtet. Der Rest erfüllt den Raum in Gestalt einer äußerst dünnen, nur an einzelnen Stellen zu dichteren Nebeln vereinigten Materie (*kosmische Wolke*), deren Dichte jedenfalls nicht mehr als $10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt.

47. Die Gezeiten. Die Gezeiten, der regelmäßige Wechsel von Ebbe und Flut, sind, wie ebenfalls bereits NEWTON erkannte, die Folge eines Zusammenwirkens der Anziehung des Meerwassers durch Mond und Sonne und der Zentrifugalkraft. Wir wollen hier zunächst nur die Wirkung des Mondes betrachten, die weit stärker ist als diejenige der Sonne. Für das Verständnis der Gezeiten ist die Tatsache wesentlich, daß sowohl die Erde wie der Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt *S* rotieren (Abb. 108), wie wir das in § 46 auseinandergesetzt haben.

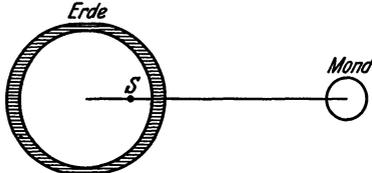


Abb. 108. Schema der Gezeiten.

Die infolge dieser Rotation auf das Meerwasser wirkenden Zentrifugalkräfte sind auf der dem Monde zugekehrten Erdseite wegen des kleineren Abstandes von *S* kleiner als auf der vom Monde abgekehrten Seite. Hingegen ist die Anziehung des Meerwassers durch den Mond auf der ihm zugekehrten Seite wegen des kleineren Abstandes

von ihm größer als auf der von ihm abgewandten Seite. Auf der dem Monde zugewandten Seite sind Gravitation und Zentrifugalkraft gleichgerichtet und der irdischen Schwerkraft entgegengerichtet.

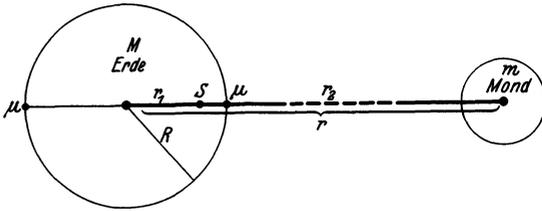


Abb. 109. Zur Theorie der Gezeiten.

An der vom Monde abgekehrten Seite ist die Mondanziehung der Schwerkraft gleichgerichtet, die Zentrifugalkraft ihr entgegengerichtet.

Es seien k_1 und k_2 die Beträge der von diesen Wirkungen herrührenden Kräfte auf eine Masse μ auf jener und dieser Seite der Erde, die auf der durch die Mittelpunkte von Erde

und Mond gehenden Geraden liegt. Der Anteil der Zentrifugalkraft beträgt auf der mondnahen Seite — mit den gleichen Bezeichnungen wie in § 46 —, $\mu(R - r_1) u^2$, auf der mondfernen Seite $\mu(R + r_1) u^2$ (Abb. 109). Aus Gl. (4) und (6) folgt $u^2 = G(M + m)/r^3$. Ferner ist $r_1 = r m / (M + m)$ (§ 46). Dann ergibt sich durch einfache Rechnung für die Zentrifugalkraft auf der mondnahen Seite $G \mu (M + m) R / r^3 - G \mu m / r^2$, auf der mondfernen Seite $G \mu (M + m) R / r^3 + G \mu m / r^2$. Die Mondanziehung beträgt auf der mondnahen Seite $G \mu m / (r - R)^2$, auf der mondfernen Seite $G \mu m / (R + r)^2$. Insgesamt ergeben sich also die folgenden, der irdischen Schwerkraft entgegengerichteten Kräfte

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= G \frac{\mu m}{(r - R)^2} + G \frac{\mu (m + M) R}{r^3} - G \frac{\mu m}{r^2}, \\ k_2 &= -G \frac{\mu m}{(r + R)^2} + G \frac{\mu (m + M) R}{r^3} + G \frac{\mu m}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In diesen Gleichungen ist das zweite Glied rund 27mal größer als der Rest der rechten Seiten. Da außerdem M sehr viel größer als m ist, so ist in recht guter Näherung $k_1 \approx k_2 \approx G \mu M R / r^3$ oder nach Gl. (4) gleich $\mu g (R/r)^3$. Da $R/r \approx 1/60$, so beträgt also die der Schwerkraft entgegengerichtete Gezeitenkraft in den betrachteten Punkten rund $1/200000$ der irdischen Schwerkraft μg . Diese erscheint an diesen Stellen um diesen Bruchteil vermindert, und zwar auf beiden Erdseiten um (nahezu) den gleichen Bruchteil. Denn die Summe der Zentrifugalkraft und der Mondanziehung an der mondnahen Seite ist — bis

auf kleine Größen — ebenso groß wie die Differenz der Zentrifugalkraft und der Mondanziehung auf der mondfernen Seite. An den übrigen Punkten der Erdoberfläche sind die Wirkungen geringer. Die betrachteten Orte sind demnach die Orte höchster Flut, da die Gegenkraft gegen die Schwerkraft hier am größten ist.

Mit der täglichen Drehung der Erde um ihre eigene Achse wandern die Orte höchster Flut, indem sich die Erde sozusagen unter ihnen hinwegdreht. Hier nach allein würde an jedem Ort des Meeres in 24 Stunden zweimal höchste Flut und tiefste Ebbe eintreten. Da sich aber der Mond gleichsinnig mit der Erdrotation in $27\frac{1}{3}$ Tagen um die Erde dreht, was eine zusätzliche Wanderung der Orte höchster Flut auf der Erde in einem dem obigen entgegengesetzten Sinne bewirkt, so ist der Umlauf um die Erde tatsächlich ein wenig langsamer. Höchste Flut und tiefste Ebbe treten zweimal in rund $24\frac{3}{4}$ Stunden ein. Den Mondzeiten überlagern sich die weit schwächeren Sonnezeiten und bewirken, je nach der relativen Stellung von Sonne und Mond zur Erde, eine Verstärkung (Springflut) oder eine Schwächung der Gezeiten (Nippflut).

Da sich die Erde unter der Flutwelle hinwegdreht, so besteht eine dauernde Reibung zwischen dem Erdkörper und dem Meerwasser. Sie muß mit einem Energieverlust auf Kosten der Erddrehung verbunden sein und eine allmähliche Abnahme ihrer Umdrehungsgeschwindigkeit und damit eine Verlängerung des Tages zur Folge haben. Jedoch ist dieser Einfluß so gering, daß man ihn trotz des hohen Standes der heutigen Uhrentechnik nicht hat nachweisen können. Auf einer entsprechenden Tatsache beruht aber zweifellos die an sich sehr auffällige Tatsache, daß der Mond der Erde stets die gleiche Seite zukehrt, sich also während eines Umlaufs um die Erde genau einmal um seine eigene Achse dreht. Das ist sicher kein Zufall und erklärt sich ohne Zweifel auf folgende Weise. Bevor die Mondoberfläche erstarrte, muß die Erde in seiner flüssigen Substanz ganz entsprechende Gezeitenwirkungen hervorgerufen haben, wie sie der Mond heute noch im Meerwasser hervorruft [Gl. (7) unter Vertauschung von M und m , R jetzt Mondradius]. Hierbei müssen durch die Gezeiten in der zähflüssigen Mondsubstanz sehr starke Reibungskräfte erzeugt worden sein, die die Mondrotation schließlich so weit abbremsen, daß eine Wanderung der Orte höchster Flut auf dem Monde nicht mehr stattfand. Da diese Orte aber stets der Erde zu- bzw. von ihr abgewandt sein müssen, so ergibt sich, daß der Mond in diesem Zustande der Erde stets die gleiche Seite zukehren muß.

48. Das Gravitationsfeld. Die Anwesenheit eines Massenpunktes m_1 im Raume hat nach dem Gravitationsgesetz zur Folge, daß auf jede andere Masse m_2 in seiner Umgebung eine von ihm ausgehende anziehende Kraft wirkt. Der Massenpunkt erzeugt also in dem ihn umgebenden Raume ein Kraftfeld, ein *Gravitationsfeld*. Ebenso wie im Sonderfall des irdischen Schwerefeldes ist die für das Gravitationsfeld charakteristische Körpereigenschaft, die wir in § 26 allgemein mit w bezeichnet haben, die Masse. Wir erhalten also nach Gl. (67) (§ 26) die *Gravitationsfeldstärke* \mathfrak{F} in einem Raumpunkt in der Umgebung einer Masse m , wenn wir die Kraft ermitteln, die ein Massenpunkt von der Masse 1 g in jenem Punkt erfährt. Wir setzen demnach in Gl. (1) $m_1 = m$ und $m_2 = 1\text{ g}$. Dann ergibt sich der Betrag F der Gravitationsfeldstärke \mathfrak{F} im Felde eines einzelnen Massenpunktes zu

$$F = G \frac{m}{r^2} \text{ dyn} \cdot \text{g}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}, \quad (8)$$

wenn r der Abstand des betrachteten Raumpunktes vom Schwerpunkt der Masse m ist. Die Richtung der Feldstärke weist überall auf m hin, das Feld ist ein *Zentralfeld*. Wie wir schon im Falle des irdischen Schwerefeldes

bewiesen haben, ist auch in einem beliebigen Gravitationsfeld die Feldstärke in jedem Raumpunkt identisch mit der Beschleunigung, die irgendeine zweite dorthin gebrachte Masse erfährt. Der Tatsache, daß im irdischen Schwerefeld alle Massen die gleiche Beschleunigung erfahren, entspricht hier, daß alle Körper, unabhängig von ihren Massen, am gleichen Ort eines Gravitationsfeldes die gleiche und gleichgerichtete Beschleunigung $b = \mathfrak{G}$ erfahren.

Bei Zentralfeldern ist es üblich, den Nullpunkt des Potentials (§ 26) in die Entfernung $r = \infty$ vom Kraftzentrum zu legen, d. h. einem Körper, der sich unendlich fern von diesem befindet, die potentielle Energie Null zuzuschreiben. Wir finden dann das *Gravitationspotential* U im Abstände r von einem Massenpunkt m , wenn wir die Arbeit berechnen, die geleistet wird, wenn ein Körper von der Masse 1 g aus der Entfernung $r = \infty$ bis in den endlichen Abstand r von der Masse m verschoben wird. Da diese Verschiebung in Richtung der anziehenden Kraft erfolgt, so ist dazu keine Arbeit aufzuwenden, sondern es wird Arbeit gewonnen. Demnach sinkt dabei die potentielle Energie des Körpers. Das Potential ist — infolge der Wahl des Nullpunktes des Potentials — im ganzen Gravitationsfeld negativ. Die auf die Masse 1 g wirkende Kraft ist durch Gl. (8) gegeben. Demnach beträgt die Arbeit bei der Verschiebung der Masse 1 g von $r = \infty$ bis in den endlichen Abstand r vom Kraftzentrum, also das Gravitationspotential in diesem Abstände,

$$U = \int_{\infty}^r F dr = Gm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -G \frac{m}{r} \text{ erg} \cdot \text{g}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}. \quad (9)$$

Nach Gl. (9) herrscht in allen Punkten, die gleichen Abstand r von einem einzelnen Massenpunkt m haben, das gleiche Gravitationspotential. Die *Flächen gleichen Potentials* (*Äquipotentialflächen, Niveauflächen*) im Gravitationsfelde eines einzelnen Massenpunktes sind also Kugelflächen um den Massenpunkt.

Wie wir bereits erwähnt haben, können homogene Kugelschalen und aus solchen zusammengesetzte Kugeln bezüglich ihrer Gravitationswirkungen durch einen in ihrem Schwerpunkt befindlichen Massenpunkt ersetzt gedacht werden. Das Gravitationsfeld einer solchen Kugel ist dann das gleiche wie dasjenige dieses Massenpunktes. Doch gilt dies nur für den Raum außerhalb der Kugel. Im Innenraum liegen die Verhältnisse anders (§ 45).

Zweites Kapitel.

Mechanik der nichtstarrten Körper.

I. Die Materie.

49. Erscheinungsformen der Materie. Nach dem Widerstand, den die Körper einer Änderung ihrer Gestalt und ihres Volumens entgegensetzen, kann man drei Erscheinungsformen (*Aggregatzustände*) der Stoffe unterscheiden: den festen, den flüssigen und den gasförmigen Zustand. Das verschiedene Verhalten fester, flüssiger und gasförmiger Körper gegenüber Kräften, die ihre Gestalt oder ihr Volumen zu ändern suchen, beruht auf der sehr verschiedenen Größe der Kräfte, durch die ihre elementaren Bausteine aneinander gebunden sind und in ihren augenblicklichen Lagen festgehalten werden. Nach ihrem allgemeinen Verhalten gegenüber äußeren Kräften kann man sie nach den folgenden Gesichtspunkten unterscheiden:

Feste Körper setzen sowohl einer Änderung ihrer Gestalt wie einer Änderung ihres Volumens einen großen Widerstand entgegen. Aus diesem Grunde ist es in vielen Fällen möglich, die an ihnen wirklich eintretenden Änderungen zu vernachlässigen und sie als starre Körper zu idealisieren.

Flüssigkeiten setzen einer Änderung ihres Volumens einen Widerstand entgegen, der zwar im allgemeinen kleiner als bei den festen Körpern, aber doch noch sehr beträchtlich ist. Hingegen ist ihre Gestalt äußerst leicht zu verändern. Deshalb passen sie sich auch der Gestalt jedes von ihnen erfüllten Raumes ohne weiteres an.

Gase sind sehr viel leichter zusammendrückbar als Flüssigkeiten. Einer Volumvergrößerung und einer Gestaltsänderung setzen sie überhaupt keinen Widerstand entgegen, sondern sie füllen von selbst jeden ihnen dargebotenen Raum aus.

Während die Grenze zwischen den Gasen und den Flüssigkeiten unter gewöhnlichen Umständen sehr scharf ist, so daß kein Zweifel besteht, ob man einen bestimmten Stoff als Gas oder als Flüssigkeit zu bezeichnen hat, ist das bei den Flüssigkeiten und den festen Stoffen nicht immer der Fall. Nur die *kristallinen* Stoffe gehen unter sprunghafter Änderung ihrer Eigenschaften bei einer bestimmten Temperatur in den flüssigen Zustand über, wie z. B. Eis, die Metalle usw. Die *amorphen* festen Stoffe dagegen zeigen bei Erwärmung einen stetigen Übergang vom festen zum flüssigen Zustand, z. B. Wachs, Siegelack, Paraffin, Glas usw. Wenn sie vom flüssigen Zustande ausgehend abgekühlt werden, so nimmt ihre Zähigkeit mehr und mehr zu und wird schließlich so groß, daß sie sich wie ein fester Stoff verhalten, sofern nicht sehr lange andauernde Kräfte auf sie wirken. Unterliegen sie aber genügend lange Zeit gestaltsändernden Kräften, so zeigt sich ihr Unterschied gegenüber den kristallinen Stoffen deutlich in ihrer größeren Plastizität. Zum Beispiel drückt sich eine Münze im Laufe einiger Zeit in kaltem Siegelack ab. Die Ursache für das verschiedene Verhalten der kristallinen und der amorphen Stoffe liegt in ihrem ganz verschiedenen molekularen Bau. Bei den amorphen Stoffen ist er im wesentlichen der gleiche wie bei den Flüssigkeiten. In den Kristallen aber sind die elementaren Bausteine ganz regelmäßig, in sog. Raumgittern, angeordnet (§ 314 und 365).

Ein Körper, der in allen seinen Teilen von gleicher Beschaffenheit ist, heißt *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Ein Körper, der sich in allen Richtungen gleich verhält, heißt *isotrop*. Er heißt *anisotrop*, wenn seine Eigenschaften und sein Verhalten von der Richtung in ihm abhängen. Gase und Flüssigkeiten sind in ihrem natürlichen Zustande stets isotrop, ebenso die amorphen festen Körper. Dagegen sind alle Kristalle anisotrop.

Bei vielen Vorgängen sehen wir, daß sich die physikalische Beschaffenheit eines Stoffes grundlegend ändert oder daß er gar zu verschwinden scheint, so beim Verdampfen, beim Lösen in einer Flüssigkeit, bei chemischen Umsetzungen. Man kann aber in allen Fällen den Nachweis führen, daß der Stoff tatsächlich nicht verschwindet, sondern nur seine Erscheinungsform ändert. Man bezeichnet diese Erfahrungstatsache als den *Satz von der Erhaltung der Materie*. Materie kann weder vernichtet, noch aus nichts erzeugt werden. Es ist allerdings wahrscheinlich, daß dieser Satz nur ein Sonderfall des Satzes von der Erhaltung der Energie ist, da, wie wir heute wissen, Masse und Energie einander äquivalent sind (§ 330).

50. Vorläufiges über den Aufbau der Materie. Zerlegt man einen einheitlichen (homogenen) festen, flüssigen oder gasförmigen Körper in einzelne Teile, so erhält man zunächst immer wieder Gebilde, die sich von dem ursprünglichen Ganzen lediglich durch Größe und Form unterscheiden, aber nicht durch ihr physikalisches Verhalten. Zum Vergleich denke man sich eine sehr große Menschenmenge in Gruppen und diese immer wieder in kleinere Gruppen eingeteilt. Diese Gruppen und Untergruppen werden sich in ihrem allgemeinen Verhalten von der ursprünglichen Gesamtmenge nicht unterscheiden. Aber ebenso, wie man mit einer solchen Einteilung einer Menschenmenge in Gruppen schließlich an eine Grenze kommt, wenn man sie nämlich so weit aufgeteilt hat, daß jede Gruppe nur noch aus einem einzigen Menschen besteht, so gibt es auch eine Grenze der Unterteilung der Körper, die ohne ein tieferes Eingreifen in die Natur des betreffenden Stoffes nicht unterschritten werden kann. Was bei der Menschenmenge die einzelnen Menschen sind, sind bei den physikalischen Körpern die Moleküle und Atome, die man als die Bausteine der Körper bezeichnen kann. Die einzelnen Stoffarten unterscheiden sich dadurch, daß sie aus verschiedenartigen Molekülen aufgebaut sind. Jeder unserer Beobachtung zugängliche Körper besteht aus einer ungeheuer großen Zahl von Molekülen. In einem Kubikzentimeter der uns umgebenden Luft befinden sich rund 27 Trillionen ($27 \cdot 10^{18}$) Moleküle, in 1 g Wasser $3,37 \cdot 10^{22}$ Moleküle. Die Masse eines Moleküles des Gases Wasserstoff beträgt nur rund $3,3 \cdot 10^{-24}$ g, also die Masse einer Quatrillion (Billion Billionen) Wasserstoffmoleküle nur etwa 3,3 g (§ 62).

In einem festen Stoff liegen die molekularen Bestandteile ziemlich dicht beieinander und sind mehr oder weniger fest an eine Gleichgewichtslage gebunden infolge von Kräften, mit denen benachbarte Teilchen aufeinander wirken. Auch in den Flüssigkeiten liegen die Moleküle einander ziemlich nah, aber die Kräfte, die sie aufeinander ausüben, sind nicht so groß wie bei den festen Stoffen. Die Moleküle sind daher in den Flüssigkeiten nicht fest an ihren Ort gebunden, sondern vermögen sich aneinander vorbei zu bewegen. In noch erhöhtem Maße ist dies bei den Gasen der Fall, bei denen im allgemeinen die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte sehr klein sind, weil die Abstände der einzelnen Moleküle in den Gasen erheblich größer sind als in den festen oder flüssigen Stoffen.

Als feste Körper im eigentlichen Sinne sind die *Kristalle* zu betrachten. Ihr innerer Aufbau ist uns durch die Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen (§ 314 und 365) sehr genau bekannt. Er ist dadurch ausgezeichnet, daß die elementaren Bausteine der Kristalle eine ganz regelmäßige Anordnung in Gestalt

eines *Raumgitters* besitzen. Die Bausteine der Kristalle sind an feste Gleichgewichtslagen gebunden. Ihre einzige Bewegungsmöglichkeit besteht in Schwingungen um diese Gleichgewichtslagen.

II. Die Elastizität der festen Stoffe.

51. Begriff der Elastizität und allgemeine Tatsachen. Die Gestalt und das Volumen der festen Körper sind durch die Kräfte bestimmt, die zwischen ihren molekularen Bausteinen wirken. Im natürlichen Zustande eines Körpers sind diese miteinander im Gleichgewicht. Jede Änderung der gegenseitigen Lagen dieser Bausteine durch eine mit dem Körper vorgenommene Gestalt- oder Volumänderung stört dieses innere Gleichgewicht und bewirkt das Auftreten von Zwangskräften im Innern des Körpers, die der von außen an dem Körper angreifenden Kraft entgegenwirken und ein neues Gleichgewicht herzustellen suchen.

Wir wollen zunächst einen zylindrischen, homogenen und isotropen Körper betrachten, der einer Dehnung oder Zusammendrückung in Richtung seiner Achse unterworfen wird. Die einzelnen festen Stoffe verhalten sich bei einer solchen Einwirkung im einzelnen recht verschieden, aber gewisse allgemeine Züge sind ihrem Verhalten gemeinsam. Bei einer Dehnung oder Zusammendrückung können wir jeden Querschnitt, den wir uns senkrecht zur Achse durch den Körper gelegt denken, als Angriffsfläche von Zwangskräften ansehen, welche zu verhindern suchen, daß der Körper in diesem Querschnitt durch die äußeren Kräfte auseinandergerissen oder noch weiter zusammengedrückt wird. Diese Zwangskräfte sind über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt. Unter der *inneren Spannung* ρ verstehen wir die Summe der Zwangskräfte, die auf 1 cm² eines solchen Querschnitts q entfallen, also

$$\rho = \frac{k_z}{q}, \quad (1)$$

wobei k_z die Summe der inneren Spannungen im ganzen Querschnitt q ist. Die Größe der inneren Spannung hängt von der Änderung der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte ab, die durch die Änderungen ihrer Abstände hervorgerufen wird. Nimmt die innere Spannung mit wachsender Längenänderung zu, so kann sie der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten. Nimmt sie aber ab, wird also der innere Zusammenhalt des Körpers durch die Längenänderung nicht verstärkt, sondern geschwächt, so kann ein solches Gleichgewicht nicht eintreten.

Es sei l die natürliche Länge eines zylindrischen Körpers, Δl seine erzwungene Längenänderung. Wir bezeichnen dann mit $\delta = \Delta l/l$ seine relative Längenänderung, die bei Dehnung positiv, bei Zusammendrückung negativ ist. Entsprechend rechnen wir auch die innere Spannung bei einer Dehnung positiv, bei einer Zusammendrückung negativ. Abb. 110 zeigt den Zusammenhang zwischen der relativen Längenänderung und der inneren Spannung für den Fall des Gußstahls. Solange δ einen gewissen Betrag, die *Proportionalitätsgrenze* P bzw. P' , nicht überschreitet, ist die innere Spannung der relativen Längenänderung proportional. Bei stärkerer Längenänderung wächst die innere Spannung langsamer, ein Zeichen dafür, daß der Widerstand des Stoffes gegen die Längenänderung abzunehmen beginnt. Von einem Punkt S bzw. S' an, der *Streck-* oder *Fließgrenze*, beginnt der Stoff deutlich plastisch zu werden. Bei weiterer Dehnung treten am Körper Einschnürungen auf, und er zerreißt

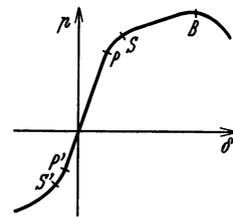


Abb. 110. Relative Längenänderung und innere Spannung bei Gußstahl.

schließlich. Bei manchen Stoffen, z. B. bei dem in Abb. 110 dargestellten Gußstahl, nimmt die innere Spannung vor dem Zerreißen vom Punkte B an wieder ab. Unmittelbar vor B kann die innere Spannung der dehrenden Kraft noch das Gleichgewicht halten. Vergrößert man aber diese Kraft so, daß der Punkt B überschritten wird, so vermag die sinkende innere Spannung ihr nicht mehr das Gleichgewicht zu halten, die Dehnung schreitet immer weiter fort, und der Körper erfährt bei konstanter äußerer Kraft eine sehr beträchtliche Längenänderung, ehe er zerreißt. Man kann dies mit einem Eisendraht leicht zeigen. Auf der Plastizität, die nach Überschreitung der Streckgrenze eintritt, beruht die Bearbeitung der Metalle durch Hämmern, Walzen, Ziehen usw.

Bei nicht zu großen Längenänderungen stellt sich unter der Wirkung der inneren Spannungen die ursprüngliche Gestalt des Körpers nach Verschwinden der äußeren Kraft sofort und vollkommen her. Wird aber diese *Elastizitätsgrenze* überschritten, so erfolgt die Rückbildung, wenn überhaupt, erst im Laufe einer mehr oder weniger langen Zeit (*elastische Nachwirkung*). Die *Elastizitätsgrenze* liegt meist in der Nähe der Proportionalitätsgrenze, darf aber mit ihr nicht verwechselt werden. Ganz entsprechende Verhältnisse bestehen bei Zusammendrückung (Abb. 110).

Besonders interessante Erscheinungen zeigen Einkristalldrähte. Das sind Drähte, die nicht, wie sonst die Metalle, aus sehr vielen Mikrokristallen bestehen, sondern einen einzigen, einheitlichen Kristall bilden. Solche Drähte besitzen fast immer eine außerordentliche Dehnbarkeit, so daß man sie oft schon mit den Händen auf das Doppelte und mehr ihrer Länge ausziehen kann (§ 365). Dabei erhält ihre Oberfläche ein schuppiges Aussehen. Die Erscheinung beruht darauf, daß sich die einzelnen Bereiche des Kristalls bei der Dehnung längs Kristallgitterebenen gegeneinander verschieben, aufeinander gleiten.

Mit jeder Längenänderung eines Körpers ist stets auch eine Änderung seiner Querabmessungen verbunden. Der Querschnitt wird bei Dehnung kleiner, bei Zusammendrückung größer, das Volumen des Körpers bei Dehnung größer, bei Zusammendrückung kleiner. Das Verhältnis der relativen Änderung der Querabmessungen zur relativen Längenänderung heißt die *POISSONSche Zahl*. Ihr Höchstwert tritt ein, wenn das Volumen konstant bleibt, und beträgt 0,5.

In einem gewissen Zusammenhang mit der Elastizität steht die *Härte*, die allerdings schwer streng zu definieren ist, aber eine große technische Bedeutung besitzt. Man nennt einen Körper härter als einen andern, wenn man diesen mit jenem ritzen kann. Die Härte wird durch Druck- oder Schlagproben gemessen. Manche Stoffe, z. B. Stahl, können durch besondere Verfahren gehärtet werden. Der härteste bekannte Stoff ist der Diamant.

52. Kleine Längenänderungen. Biegung. Besteht an einem gedehnten Körper Gleichgewicht, so heben die inneren Zwangskräfte k_z die äußere dehrende Kraft k auf, haben also den gleichen Betrag wie diese, $k = k_z = p/q$. Innerhalb des Proportionalitätsbereichs ist die innere Spannung p der relativen Längenänderung $\delta = \Delta l/l$ proportional, also ist

$$p = E \delta \quad \text{und daher} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{qE}. \quad (2)$$

Dies ist das *HOOKESche Gesetz* für kleine Längenänderungen. Es gilt sowohl für Dehnungen wie für Zusammendrückungen innerhalb der Proportionalitätsgrenzen. Die Größe E ist eine Materialkonstante, der *Elastizitätsmodul*. $1/E$ heißt die *Elastizitätszahl*. Je größer E ist, um so kleiner ist unter sonst gleichen Verhältnissen die relative Längenänderung. Daher hat z. B. Stahl einen sehr großen, Kautschuk einen sehr kleinen Elastizitätsmodul. Da $\Delta l/l$ eine reine Zahl ist, so hat E die gleiche Dimension wie k/q , wird also im GGS-System

in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen. In der Technik wird E in der Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}$ oder $1 \text{ kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen. Tabelle 3 gibt einige Zahlenbeispiele

Tabelle 3. Elastizitätsmoduln in $\text{kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}$.

Aluminium	6300—7200	Iridium	53000
Blei	1500—1700	Kupfer	10000—13000
Schmiedeeisen und Stahl	20000—22000	Messing	8000—10000
Gußeisen	7500—13000	Holzfasern	500—1200

Bei einer *Biegung* wird ein Körper auf der nach außen gekrümmten Seite gedehnt, auf der nach innen gekrümmten Seite zusammengedrückt. Die Grenzfläche zwischen diesen beiden Bereichen, die *neutrale Zone*, erfährt keine Längenänderung. Bei einem Stab oder Brett liegt sie in der Mitte zwischen den Seitenflächen. Für eine Biegung gilt innerhalb der Proportionalitätsgrenzen das HOOKEsche Gesetz. Aus ihm läßt sich der Winkel φ berechnen, um den das Ende eines einseitig eingespannten

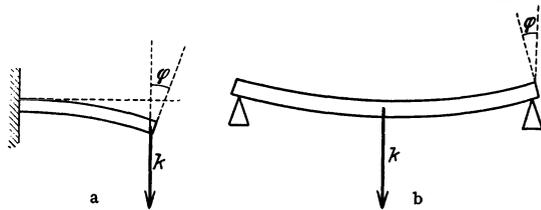


Abb. 111. Biegung eines Stabes.

Stabes von der Länge l , der Breite b und der Dicke a durch eine am Stabende angreifende Kraft k gedreht wird (Abb. 111a). Es ergibt sich $\text{tg } \varphi = 6l^2k/a^3bE$. Für einen an beiden Enden aufliegenden Stab ergibt sich bei Angriff der Kraft k in der Mitte (Abb. 111b) $\text{tg } \varphi = 3l^2k/4a^2bE$. Der Elastizitätsmodul kann also sowohl durch Dehnungs-, wie durch Biegungsversuche gemessen werden.

53. Scherung. Eine von einer Dehnung oder Zusammen-drückung ganz verschiedene elastische Zustandsänderung ist die in Abb. 112 dargestellte *Scherung*, auch *Schub* genannt. Der anfänglich rechteckige Körper wird an seiner unteren Fläche festgehalten, an seiner oberen Fläche greifen, parallel zu ihr und über sie gleichmäßig verteilt, Kräfte an, die diese Fläche in ihrer eigenen Ebene zu verschieben suchen. Unter der Wirkung dieser scherenen Kräfte drehen sich die Seitenflächen um einen Winkel α . Dieser ist bei nicht zu großer Gestaltsänderung proportional der Summe der auf 1 cm^2 der oberen Fläche entfallenden scherenen Kräfte, also proportional k/F , wenn die Summe der auf die Fläche F entfallenden Kräfte den Betrag k hat. Es ist also

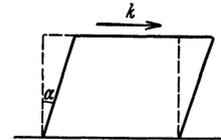


Abb. 112. Scherung.

$$\alpha = \frac{k}{FG}, \tag{3}$$

wobei G eine neue elastische Materialkonstante ist, der *Scherungs*-, *Schub*- oder *Torsionsmodul* des betreffenden Stoffes. Da α eine dimensionslose Größe ist, so hat G die gleiche Dimension wie k/F , wird also, genau wie der Elastizitätsmodul, in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ bzw. $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}$ oder $1 \text{ kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen.

Wird ein Körper, z. B. ein zylindrischer Stab oder Draht tordiert, indem sein eines Ende festgehalten, sein anderes Ende um den Winkel φ gedreht wird, so erfährt jedes zur Torsionsachse parallele Volumelement des Körpers eine reine Scherung. Ist l die Länge, r der Radius eines kreiszylindrischen Stabes oder Drahtes, N der Betrag des an seinem Ende wirkenden tordierenden Drehmoments, so ist

$$N = \frac{\pi r^4 G}{2l} \varphi. \tag{4}$$

Nach § 42 besitzt also der Stab ein Richtmoment vom Betrage $D = \pi r^4 G / 2l$. Wird am unteren Ende eines oben befestigten Drahtes ein Körper vom Trägheitsmoment J angebracht und aus seiner natürlichen Ruhelage gedreht, so führt er, wieder sich selbst überlassen, Drehschwingungen von der Schwingungsdauer $\tau = 2\pi \sqrt{J/D}$ aus. Auf diese Weise kann D und damit der Scherungsmodul G des Drahtes bestimmt werden.

Wird ein langer Draht zu einer schraubenförmigen Feder (Wendel) aufgewickelt, so verhält sich diese als Ganzes bei Längenänderungen in weiten Grenzen wie ein dem HOOKEschen Gesetz gehorchender Körper. Die wirkliche Zustandsänderung des Drahtes bei einer Dehnung oder Zusammendrückung der Feder besteht aber in einer Torsion. Eine aus einem flachen Stahlband gewickelte Spiralfeder, kann als Ganzes tordiert werden, wie z. B. eine Uhrfeder beim Aufziehen, und verhält sich dann wie eine tordierte Scheibe. Die wirkliche Zustandsänderung des Stahlbandes besteht aber in einer Biegung.

54. Druckkraft. Druck. Der tägliche Sprachgebrauch macht keinen scharfen Unterschied zwischen den Begriffen *Kraft* und *Druck*. In der Physik muß zwischen ihnen genau unterschieden werden. Man sagt, daß auf eine Fläche eine *Druckkraft* wirkt, wenn senkrecht zur Fläche eine so große Zahl von kleinen Einzelkräften wirken, daß wir uns diese stetig über die Fläche verteilt denken können. Die Druckkraft ist die Resultierende dieser Einzelkräfte. Als *Druck* p auf eine Fläche F bezeichnet man die auf 1 cm^2 der Fläche entfallende Druckkraft. Es ist also $\text{Druck} = \text{Druckkraft}/\text{cm}^2$,

$$p = \frac{k}{F}. \quad (5)$$

Demnach wird der Druck im CGS-System in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \text{ bar}$ gemessen. In der Technik wird er meist in der Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen. Weiteres über Druckeinheiten siehe § 70.

55. Elastische Energie. Wird ein Körper durch eine Kraft gedehnt, so leistet sie Arbeit gegen die inneren molekularen Kräfte des Körpers. Wir wollen die bereits eingetretene Dehnung mit $\Delta l = x$ bezeichnen. Wird die Dehnung durch die Kraft $k = qEx/l$ auf den Betrag $x + dx$ vergrößert, also ihr Angriffspunkt um dx verschoben, so leistet sie die Arbeit $dA = k dx = qEx dx/l$. Zur Erzeugung einer endlichen Dehnung Δl ist also die Arbeit

$$A = \frac{qE}{l} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{qE}{2l} (\Delta l)^2 \quad (6)$$

erforderlich. Sie steckt nunmehr als potentielle, *elastische Energie* in dem gedehnten Körper, und das gleiche gilt für eine Zusammendrückung, da ja A nicht vom Vorzeichen von Δl abhängt. In elastisch gedehnten oder zusammengedrückten und ebenso auch in tordierten Körpern ist also Energie aufgespeichert, die bei der Rückbildung der elastischen Gestalts- und Volumänderung wieder frei wird und sich in mechanische Arbeit verwandeln kann. Aus diesem Grunde können auch gespannte Federn als Energiespeicher dienen und zum Betriebe von Uhren und anderen mechanischen Vorrichtungen verwendet werden. Die Federung von Fahrzeugen beruht darauf, daß die Federn die an ihnen von unten her geleistete Zusammendrückungs- oder Dehnungsarbeit zunächst als elastische Energie aufspeichern und dadurch die Fortleitung des Stoßes nach oben zum mindesten verlangsamen oder ihn dadurch schwächen, daß sie einen erheblichen Teil ihrer Energie bei einem schnell folgenden, umgekehrt gerichteten Stoß wieder nach unten abgeben.

Wird ein rechteckiger Körper mit den Seiten a, b, c einem allseitigen Druck p unterworfen, so daß auf seine Flächen die Druckkräfte pab, pac, pbc wirken, so ändern sich die Seitenlängen um Beträge $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, die wir als sehr klein gegen a, b, c annehmen wollen. Dann beträgt die bei dieser Zusammendrückung geleistete Arbeit

$$\Delta A = -p(ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a) = -p\Delta(abc) = -p\Delta V. \quad (7)$$

Dabei sind natürlich $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ und ΔV negativ, die Arbeit ΔA also positiv.

III. Mechanik ruhender Flüssigkeiten.

56. Hydrostatischer Druck. Eine Flüssigkeit, die wir uns vorläufig der Schwerkraft nicht unterworfen und nicht zusammendrückbar denken, befinde sich in einem beliebig geformten Gefäß mit zwei verschiebbaren Stempeln S_1, S_2 mit den Querschnitten q_1, q_2 (Abb. 113). Vom Stempel S_1 her wirke auf die Flüssigkeit eine Kraft ξ_1 (Betrag k_1), so daß die Flüssigkeit einen Druck $p = k_1/q_1$ erfährt. Ebenso groß ist nach dem Wechselwirkungsgesetz (§ 16) der Druck, den die Flüssigkeit gegen S_1 ausübt. Der Stempel S_1 werde durch die Kraft ξ_1 um die Strecke a_1 verschoben. Die dabei geleistete Arbeit beträgt $k_1 a_1 = p q_1 a_1 = p \Delta V$, wenn $q_1 a_1 = \Delta V$ das bei der Verschiebung verdrängte Flüssigkeitsvolumen bedeutet. Infolge der Verschiebung des Stempels S_1 nach innen muß sich der Stempel S_2 um eine Strecke a_2 nach außen verschieben, und zwar unter der Wirkung einer von der Flüssigkeit auf den Querschnitt q_2 ausgeübten Druckkraft ξ_2 (Betrag k_2). Die dabei geleistete Verschiebungsarbeit beträgt $k_2 a_2$ und muß gleich der vom Stempel S_1 gegen die Flüssigkeit geleisteten Arbeit sein. (Wir setzen dabei voraus, daß die Verschiebung der Flüssigkeit reibungslos, d. h. ohne Energieverlust, stattfindet.) Es ist also $k_2 a_2 = k_1 a_1$. Es sei p' der Druck, den die Flüssigkeit gegen S_2 ausübt, also $k_2 = p' q_2$. Dann ist $p' a_2 q_2 = p a_1 q_1$. Nun ist aber das bei S_2 neu auftretende Flüssigkeitsvolumen $a_2 q_2$ gleich dem bei S_1 verdrängten Volumen $a_1 q_1 = \Delta V$. Es folgt $p' = p$, d. h. der Druck, den die Flüssigkeit gegen S_2 ausübt, ist ebenso groß wie der Druck, den sie gegen S_1 ausübt. Was für die beiden beweglichen Teile der Gefäßwand gilt, das gilt natürlich auch für jeden anderen Teil derselben. Demnach übt eine der Schwerkraft nicht unterworfenen Flüssigkeit auf die Wandung eines sie einschließenden Gefäßes überall den gleichen Druck aus.

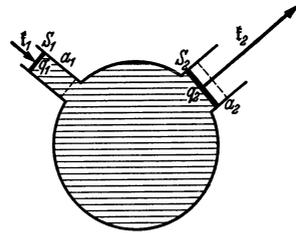


Abb. 113. Druck in einer der Schwerkraft nicht unterworfenen Flüssigkeit.

Nun kann man sich innerhalb der Flüssigkeit beliebig Körper befindlich denken, deren Oberflächen auch Grenzflächen der Flüssigkeit wären. Auch diese würden den gleichen Druck erfahren, wie die äußeren Begrenzungen der Flüssigkeit. In diesem Sinne spricht man von dem *Druck im Innern einer Flüssigkeit*. Demnach gilt der Satz: *Im Innern und an den Grenzflächen einer der Schwerkraft nicht unterworfenen ruhenden Flüssigkeit herrscht überall der gleiche Druck*. Diesen Druck nennt man den *hydrostatischen Druck*. Die *hydrostatische Druckkraft einer Flüssigkeit ist stets senkrecht zu den Begrenzungen der Flüssigkeit gerichtet*.

Aus den obigen Ausführungen folgt

$$p = \frac{k_1}{q_1} = \frac{k_2}{q_2} \quad \text{oder} \quad k_1 : k_2 = q_1 : q_2, \quad (1)$$

d. h. die von einer Flüssigkeit auf ein Stück der Gefäßwandung ausgeübte Druckkraft ist der Größe der Fläche proportional. Diese Tatsache findet Anwendung

bei der hydraulischen Presse (Abb. 114), bei der mittels einer an einem Stempel S_1 von kleinem Querschnitt wirkenden Kraft f_1 eine viel größere Kraft f_2 an einem zweiten Stempel S_2 von entsprechend größerem Querschnitt ausgeübt wird. Die hydraulische Presse unterscheidet sich von der Abb. 113 grundsätzlich nur dadurch, daß S_1 als Pumpe ausgebildet ist, so daß der Arbeitsvorgang zur Erzielung größerer Wirkung oft wiederholt und der Stempel S_2 um größere Strecken verschoben werden kann.

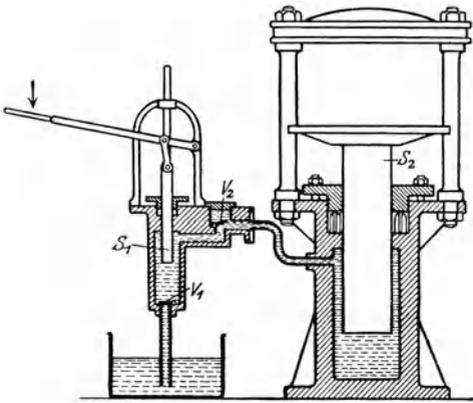


Abb. 114. Hydraulische Presse.

Ist eine Flüssigkeit der Schwerkraft unterworfen, so rührt der Druck in ihrem Innern nicht nur von den Druckkräften her, die von ihren Wandungen ausgehen oder vom Luftdruck auf sie ausgeübt werden, sondern auch vom Gewicht der höheren Flüssigkeitsschichten. Es sei AB (Abb. 115) ein horizontaler Querschnitt in der Tiefe x durch eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht σ bzw. der Dichte ρ .

Auf jedem Flächenelement dieses Querschnittes wirkt als Druckkraft das Gewicht $\sigma q x g^*$ bzw. $\rho g q x$ dyn der darüber befindlichen Flüssigkeit und liefert einen Druck

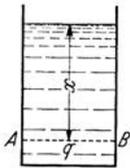


Abb. 115. Druckzunahme mit der Tiefe.

$$p = \sigma x [g^* \cdot \text{cm}^{-2}] \quad \text{bzw.} \quad p = \rho g x [\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}]. \quad (2a)$$

Es ist also

$$\frac{dp}{dx} = \sigma [g^* \cdot \text{cm}^{-3}] \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp}{dx} = \rho g [\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-3}]. \quad (2b)$$

Dabei setzen wir wieder hier und im folgenden — in äußerst weitgehender Übereinstimmung mit der Wirklichkeit — voraus, daß die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar (inkompressibel), ihre Dichte also nicht vom Druck abhängig ist. Demnach nimmt der hydrostatische Druck infolge der Schwerkraft proportional der Tiefe x zu. Zu dem vom Gewicht der Flüssigkeit selbst herührenden Druck kommt noch der etwa von außen auf die Flüssigkeit wirkende Druck p_0 , z. B. der Luftdruck, hinzu, so daß der Gesamtdruck in der Tiefe x gleich $p_0 + \sigma x$ ist. Ist h die gesamte Höhe der Flüssigkeit, so beträgt der Bodendruck $p_0 + \sigma h g^*$.

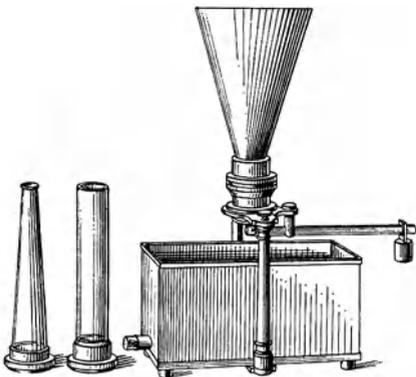


Abb. 116. Bodendruckapparat.

Der Bodendruck in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß ist von der Gestalt des Gefäßes unabhängig, die Druckkraft gegen einen horizontalen Boden also nur von der Flüssigkeitshöhe und der Größe der Bodenfläche abhängig. Abb. 116 zeigt eine Vorrichtung, bei der der gleiche Boden mit stets gleicher Kraft gegen verschieden geformte Gefäße gedrückt werden kann. Diese können sämtlich bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt werden, ohne daß es unten ausfließt (hydrostatisches Paradoxon, PASCAL 1660). Diese Tatsache, die besonders

verschieden geformte Gefäße gedrückt werden kann. Diese können sämtlich bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt werden, ohne daß es unten ausfließt (hydrostatisches Paradoxon, PASCAL 1660). Diese Tatsache, die besonders

bei dem sich nach oben verjüngenden Gefäß zunächst überrascht, erklärt sich auf folgende Weise. Man denke sich in ein sich nach oben erweiterndes gefülltes Gefäß einen Zylinder mit unendlich dünnen Wänden lose eingesetzt (Abb. 117a). Dadurch wird an den Druckverhältnissen in der Flüssigkeit, also auch am Bodendruck, nichts geändert. Es wird aber auch dann nichts geändert, wenn wir uns jetzt das zylindrische Gefäß mit dem Boden wasserdicht verbunden denken, so daß alle etwaigen Druckwirkungen der außerhalb befindlichen Flüssigkeit auf den Boden ausgeschaltet werden. Der Druck auf den Boden des zylindrischen Gefäßes ist also ebenso groß wie vorher der Druck auf den Boden des sich nach oben erweiternden Gefäßes. Wir denken uns zweitens in ein zylindrisches gefülltes Gefäß ein sich nach oben verjüngendes Gefäß mit unendlich dünnen Wänden zunächst lose eingesetzt, dann mit dem Boden wasserdicht verbunden (Abb. 117b). Eine Wiederholung der obigen Überlegungen

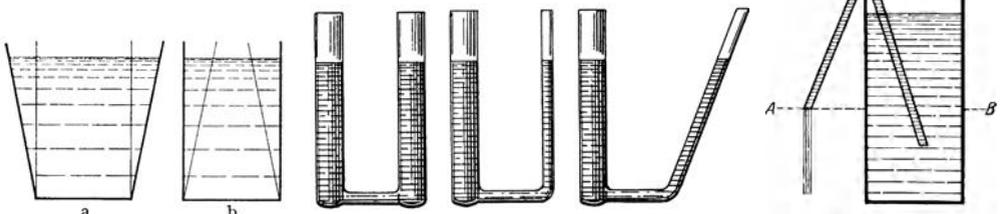


Abb. 117. Zum hydrostatischen Paradoxon.

Abb. 118. Zusammenhängende Flüssigkeitsräume.

Abb. 119. Flüssigkeitsheber.

ergibt, daß auch dies ohne Einfluß auf den Bodendruck bleiben muß. Dieser ist also in dem sich nach oben verjüngenden Gefäß ebenso groß, wie im zylindrischen Gefäß.

Demnach hat überhaupt die Gestalt der Flüssigkeit keinen Einfluß auf ihren Druck, der nur von der Tiefe, d. h. von dem senkrechten Abstand von der Oberfläche, abhängt. Hängen zwei mit der gleichen Flüssigkeit gefüllte Räume zusammen (kommunizierende Röhren, Abb. 118), so muß bei Gleichgewicht der Druck, den jede der beiden Flüssigkeitsvolumina in irgendeinem horizontalen Querschnitt ihrer Verbindung erzeugt, der gleiche sein. Demnach muß auch die Flüssigkeit in beiden Räumen gleich hoch stehen. Das gleiche gilt für beliebig viele zusammenhängende Räume. Diese Tatsache ist von großer Bedeutung bei den Wasserleitungsnetzen und in der Natur bei den Bodenwässern (Grundwasser, Quellen).

Die Wirkung des Flüssigkeitshebers (Abb. 119) beruht darauf, daß im Niveau AB im Innern der Flüssigkeit ein höherer Druck herrscht, als an der Ausflußöffnung des Hebers. Hier herrscht der äußere Luftdruck, dort kommt zum Luftdruck noch der hydrostatische Druck der Flüssigkeitssäule hinzu. Es besteht also kein Gleichgewicht, sondern der höhere innere Druck treibt die Flüssigkeit gegen den kleineren äußeren Druck heraus, und zwar so lange, bis durch Senken des Flüssigkeitsspiegels bis in das Niveau AB Druckgleichheit in diesem Niveau hergestellt ist. Um den Heber in Betrieb zu setzen, muß er zunächst durch Ansaugen mit Flüssigkeit gefüllt werden.

57. Freie Flüssigkeitsoberflächen. Die Massenteilchen einer Flüssigkeit setzen einer verschiebenden Kraft keinen dauernden Widerstand entgegen, verschieben sich also unter der Wirkung einer an ihnen angreifenden Kraft. Daher müssen sich die Kräfte an den einzelnen Massenelementen einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit gegenseitig aufheben. Auf ein an der freien Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit befindliches Massenteilchen wirkt die Schwerkraft senkrecht

nach unten und ruft in der Flüssigkeit eine auf das Teilchen gerichtete Zwangskraft hervor, die zur Flüssigkeitsoberfläche senkrecht gerichtet ist. Damit diese beiden Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, also Gleichgewicht besteht, muß die freie Flüssigkeitsoberfläche horizontal liegen. Andernfalls besäße die Schwerkraft eine zur Oberfläche parallele Komponente, die die Flüssigkeitsteilchen so lange verschieben würde, bis dieser Zustand erreicht ist.

Wirken außer der Schwerkraft noch weitere Kräfte auf die Flüssigkeit, so muß die freie Oberfläche senkrecht zur Resultierenden sämtlicher Kräfte stehen. Rotiert eine Flüssigkeit in einem vertikalen zylindrischen Gefäß um

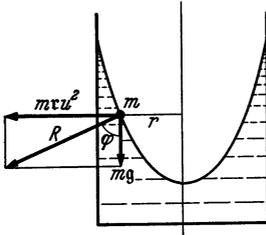


Abb. 120. Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit.

dessen Achse, so wirkt auf jedes Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche erstens die Schwerkraft mg in vertikaler Richtung, zweitens in radialer Richtung die Zentrifugalkraft mru^2 (Abb. 120). Ihre Resultierende R muß zur Oberfläche senkrecht stehen. Daher gilt für den Neigungswinkel φ der Oberfläche gegen die Horizontale $\text{tg } \varphi = mru^2/mg = ru^2/g$. Es läßt sich leicht zeigen, daß hiernach die Flüssigkeitsoberfläche ein Rotationsparaboloid ist, dessen Scheitel um den Betrag $u^2 r_0^2/4g$ unterhalb des Niveaus der nicht rotierenden Flüssigkeit liegt, wenn r_0

der Radius des Gefäßes ist. Auf dieser Erscheinung beruht ein Gerät zur Messung von Drehzahlen.

58. Auftrieb. Schwimmen. Wir denken uns innerhalb einer der Schwerkraft unterworfenen, im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ein beliebiges Volumen derselben abgegrenzt (Abb. 121a). Das

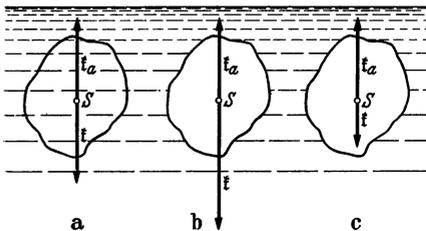


Abb. 121. Zum Auftrieb. a) $\sigma = \sigma_f$, b) $\sigma > \sigma_f$, c) $\sigma < \sigma_f$.

Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn wir uns dieses Flüssigkeitsvolumen unter Erhaltung seiner Dichte erstarrt, also als einen festen Körper, denken. Die Kräfte, die das Gleichgewicht bedingen, sind einmal die an dem Körper angreifende Schwerkraft k , sein Gewicht, ferner die überall senkrecht zu seiner Oberfläche gerichteten Druckkräfte der umgebenden Flüssigkeit. Ist σ_f das spezifische Gewicht, ρ_f die Dichte der Flüssigkeit, also auch des erstarrt gedachten Teils derselben, V das abgegrenzte Volumen, g die Erdbeschleunigung, so beträgt das Gewicht des Körpers $k = \sigma_f V [g^*] = \rho_f V g$ [dyn] (§ 14). Die Druckkräfte zerlegen wir in ihre horizontalen und ihre vertikalen Komponenten. Da Gleichgewicht besteht, so müssen sich die horizontalen Druckkraftkomponenten gegenseitig aufheben, und zweitens muß die Schwerkraft k durch die Summe der vertikalen Druckkraftkomponenten aufgehoben werden. Letztere ist also senkrecht nach oben gerichtet, $k_a = -k$, und hat den Betrag

$$k_a = \rho_f V g$$
 [dyn] = $\sigma_f V [g^*]$. (3)

Die Vertikalkomponente k_a der hydrostatischen Druckkraft heißt der *Auftrieb*.

Nummehr ersetzen wir die als erstarrt gedachte Flüssigkeitsmenge durch einen beliebig beschaffenen festen, in die Flüssigkeit getauchten Körper von gleicher Gestalt. An den Druckkräften der Flüssigkeit wird dadurch nichts geändert, also bleibt auch der Auftrieb der gleiche. Daher befindet sich ein solcher Körper im allgemeinen in der Flüssigkeit nicht im Gleichgewicht. Ist sein spezifisches Gewicht σ größer als das der Flüssigkeit, so überwiegt sein

Gewicht $k = \sigma V$ den Auftrieb $\sigma_f V$, und er sinkt zu Boden (Abb. 121b). Ist aber sein spezifisches Gewicht kleiner als das der Flüssigkeit, so überwiegt der Auftrieb sein Gewicht, und er steigt in der Flüssigkeit in die Höhe (Abb. 121c). Die gesamte auf den Körper wirkende Kraft beträgt

$$k' = k - k_a = \sigma V - \sigma_f V = (\sigma - \sigma_f) V [g^*]. \quad (4)$$

Der Körper erleidet also in einer Flüssigkeit einen *scheinbaren Gewichtsverlust* um den Betrag des Auftriebes k_a . Dieser hängt nur vom Volumen des eingetauchten Körpers und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit ab, nicht von der besonderen Gestalt und Beschaffenheit des Körpers. Er ist gleich dem Gewicht einer dem Körper an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge (der sog. verdrängten Flüssigkeitsmenge, *Archimedisches Prinzip*, nach dem angeblichen Entdecker benannt, um 250 v. Chr.).

Der Auftrieb beruht auf der Zunahme des Drucks mit der Tiefe in einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit. Denn durch diese Druckzunahme wird bewirkt, daß die Druckkraft an der Unterseite eines eingetauchten Körpers größer ist als an seiner Oberseite. In einer der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit würde es keinen Auftrieb geben.

Da der Auftrieb die Schwerkraft des oben als erstarrt gedachten Flüssigkeitsvolumens aufhebt und mit ihr kein Kräftepaar bildet, da ja Gleichgewicht besteht, so liegen an diesem Volumen Auftrieb und Schwerkraft in der gleichen Wirkungslinie, die also durch den Schwerpunkt des Flüssigkeitsvolumens geht. Am Auftrieb ändert sich nichts, wenn wir das erstarrt gedachte Flüssigkeitsvolumen durch einen anderen Körper ersetzt denken. In allen Fällen geht die Wirkungslinie des Auftriebs durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Der Auftrieb kann also stets in diesem Schwerpunkt angreifend gedacht werden. Ist der eingetauchte Körper, wie die Flüssigkeit, homogen, so fällt sein Schwerpunkt mit dem der verdrängten Flüssigkeit zusammen (Abb. 121b u. c). Ist er aber nicht homogen, so ist das im allgemeinen nicht der Fall. Dann können Auftrieb und Schwerkraft, außer einer resultierenden Einzelkraft, ein Kräftepaar erzeugen, das den Körper beim Steigen oder Sinken dreht.

Der Auftrieb bietet nach Gl. (3) ein bequemes Mittel zur Bestimmung des Volumens $V = k_a/\sigma_f$ bei unregelmäßig geformten Körpern, bei denen eine geometrische Volumbestimmung nicht möglich ist. Der Auftrieb kann als die Differenz $k - k'$ des wirklichen Gewichts k und des scheinbaren Gewichts k' in der Flüssigkeit leicht gemessen werden. Das spezifische Gewicht des Körpers ist dann

$$\sigma = \frac{k}{V} = \sigma_f \frac{k}{k_a} = \sigma_f \frac{k}{k - k'} [g^* \cdot \text{cm}^{-3}]. \quad (5)$$

Besonders einfach verhält es sich bei Benutzung von Wasser. Da sein spezifisches Gewicht die Maßzahl 1 hat, so ist die Maßzahl des in g^* gemessenen Auftriebes eines Körpers in ihm unmittelbar gleich der Maßzahl seines in cm^3 gemessenen Volumens. Die *Maßzahl* des spezifischen Gewichts des Körpers ist dann einfach der Quotient Gewicht/Auftrieb, $|\sigma| = |k/(k - k')|$.

Abb. 122 zeigt ein einfaches Gerät zur Messung spezifischer Gewichte (JOLLYsche Federwaage). Der Körper befindet sich einmal auf der oberen Schale in Luft, dann auf der unteren Schale in Wasser. Die entsprechenden

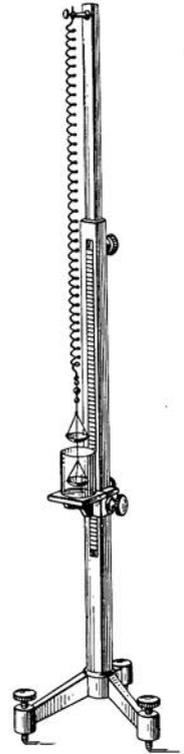


Abb. 122. JOLLYsche Federwaage.

Verlängerungen λ_1 und λ_2 der Feder sind seinem wahren Gewicht k bzw. seinem scheinbaren Gewicht k' in Wasser proportional. Daher berechnet sich die Maßzahl des spezifischen Gewichts des Körpers nach Gl. (5) (mit $\sigma_f = 1$) zu $\lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Die Auftriebe des gleichen Körpers in zwei verschiedenen Flüssigkeiten verhalten sich nach Gl. (3) wie deren spezifische Gewichte. Bei der MOHRschen Waage (Abb. 123) ist der Schwimmkörper, wenn er sich in Luft befindet, durch ein Gegengewicht G genau ins Gleichgewicht gebracht. Sein Auftrieb in irgendeiner Flüssigkeit kann gemessen werden, indem man ihn durch Aufsetzen von Reitergewichten auf den Waagebalken kompensiert, deren Einheit so bemessen ist, daß sie den Auftrieb des Schwimmkörpers in Wasser von 4°C genau kompensiert.

Ein Körper *schwimmt* an der Oberfläche einer Flüssigkeit, wenn sein Auftrieb bei voller Eintauchung größer ist, als sein Gewicht (Abb. 121c). Beim Schwimmen

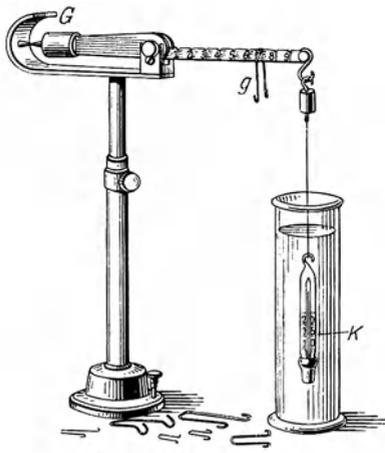


Abb. 123. MOHRsche Waage.

ragt ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit, so daß das für die Größe des Auftriebs maßgebliche verdrängte Flüssigkeitsvolumen V' kleiner ist, als das Volumen V des Körpers. Bei Gleichgewicht ist der Auftrieb $V'\sigma_f$ gleich dem Gewicht $V\sigma$ des Körpers, also $V'/V = \sigma/\sigma_f$. Hiernach kann ein homogener Körper nur dann schwimmen, wenn sein spezifisches Gewicht kleiner ist, als das der Flüssigkeit. Bei geeigneter Formgebung können aber auch Körper schwimmen, deren Material ein höheres spezifisches Gewicht hat, als die Flüssigkeit, z. B. eiserne Schiffe in Wasser.

Unter allen denkbaren Lagen, die der Bedingung $V'/V = \sigma/\sigma_f$ entsprechen, sind aber nur einige, oft nur eine einzige, *stabile Schwimm-lagen*, denen eine oder mehrere labile Schwimm-lagen gegenüberstehen. Das Gleichgewicht wird ja nicht nur durch gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung von Schwerkraft und Auftrieb bedingt. Es kommt hinzu, daß diese beiden Kräfte auch kein Drehmoment erzeugen, also kein Kräftepaar bilden dürfen, ihre Wirkungslinien also zusammenfallen müssen. Für die stabilen und labilen Schwimm-lagen eines Körpers gelten natürlich auch die Gleichgewichtsbedingungen des § 24. Eine stabile Schwimm-lage ist äußerlich dadurch gekennzeichnet, daß der Körper, wenn er ein wenig aus ihr entfernt wird, durch ein an ihm auftretendes Drehmoment wieder in sie zurückgetrieben wird, während er bei der Entfernung aus einer labilen Schwimm-lage noch weiter von ihr fortgetrieben wird. Ein schwimmender Körper, der aus einer stabilen in eine labile Schwimm-lage überführt wird, kann über diese hinaus in eine andere stabile Schwimm-lage übergehen. Er kann *kentern*. Allgemein sind stabile Schwimm-lagen dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen das System Flüssigkeit + Körper ein Minimum der potentiellen Energie besitzt, sein Schwerpunkt also tiefer liegt, als bei jeder unmittelbar benachbarten Schwimm-lage. Bei labilen Schwimm-lagen ist es umgekehrt. Es gibt auch indifferente Schwimm-lagen, aber nur bei gewissen Körpern von besonders einfacher Gestalt. Zum Beispiel kann eine homogene Kugel in jeder beliebigen Lage schwimmen.

Der in Abb. 124a dargestellte rechteckige, homogene Klotz befindet sich in einer stabilen Schwimm-lage. Bei einer kleinen Verdrehung (Abb. 124b) verlagert sich der Schwerpunkt S_2 der verdrängten Flüssigkeit, also der Angriffs-

punkt des Auftriebes, bei einer Rechtsdrehung nach rechts, bei einer Linksdrehung nach links, liegt also nicht mehr auf der Mittelachse des Körpers. Gewicht f und Auftrieb $t_a = -f$ bilden nunmehr ein Kräftepaar, das den Körper in seine stabile Schwimmelage zurückzudrehen sucht. Den Schnittpunkt M der Wirkungslinie des Auftriebes mit der in der betrachteten Gleichgewichtslage vertikalen Mittelachse des Körpers nennt man bei Schiffen das *Metazentrum*. Eine Schwimmelage ist stabil, wenn das Metazentrum oberhalb des Schwerpunkts S_1 des schwimmenden Körpers liegt, andernfalls labil. Abb. 124c zeigt eine labile Schwimmelage des Klotzes. Wird er aus dieser ein wenig verdreht, so verschiebt sich der Schwerpunkt S_2 der verdrängten Flüssigkeit derart, daß

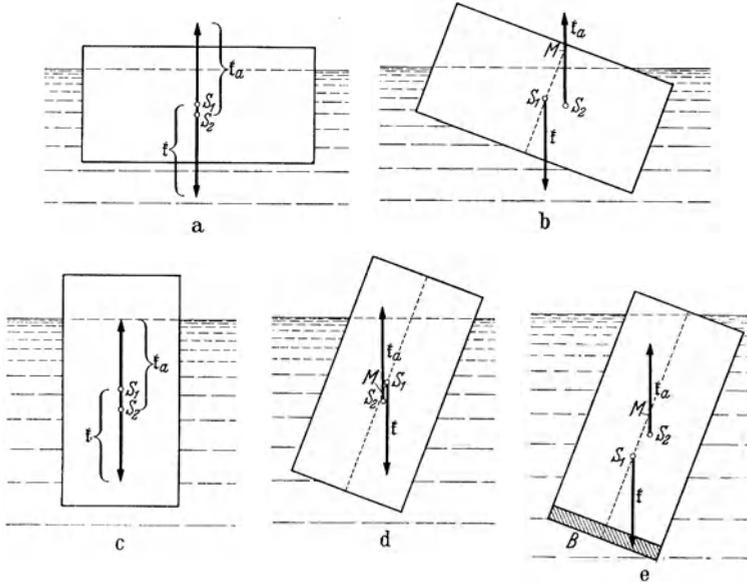


Abb. 124. Schwimmlagen eines rechteckigen, homogenen Klotzes.

Gewicht und Auftrieb ein Drehmoment erzeugen, das den Körper noch weiter von der labilen Schwimmelage zu entfernen sucht. Das Metazentrum M liegt jetzt unterhalb des Körperschwerpunkts S_1 . Ein homogener, rechteckiger Klotz mit den Seiten $a > b > c$ hat zwei stabile und vier labile Schwimmlagen. Die Schwimmelage ist stabil, wenn die Seitenflächen ab horizontal liegen, labil wenn die Seitenflächen ac oder bc horizontal liegen.

Die Stabilität der Schwimmelage eines Körpers, z. B. eines Schiffes, ist um so größer, je tiefer sein Schwerpunkt liegt. Je höher er liegt, je kopflastiger ein Schiff ist, um so leichter kann es zum Kentern gebracht werden. Die Lage des Metazentrums hängt von der Neigung gegen die Gleichgewichtslage ab. Je größer die Neigung ist, um so näher rückt es dem Körperschwerpunkt. Je tiefer also der Schiffsschwerpunkt liegt, eine um so größere Neigung verträgt das Schiff, ohne zu kentern. Die labile Schwimmelage des Klotzes in Abb. 124c kann in eine stabile verwandelt werden, wenn man, z. B. durch Anbringung eines Stückes Blei B , den Körperschwerpunkt S_1 so tief legt, daß das Metazentrum nunmehr über ihm liegt (Abb. 124e). Je nach Gestalt und Schwerpunktlage ist die Stabilität eines Schiffes mehr durch jene oder diese bestimmt. Bei einer flachen Jolle (Abb. 125a) rührt sie im wesentlichen von ihrer Gestalt her, da sich schon bei einer kleinen Drehung aus der stabilen Schwimmelage der Angriffspunkt des Auftriebes sehr stark verschiebt, so daß ein großes

Drehmoment auftritt. Die Stabilität von Seeschiffen (Abb. 125b) hingegen beruht in der Hauptsache auf der durch die in ihren unteren Teilen befindlichen

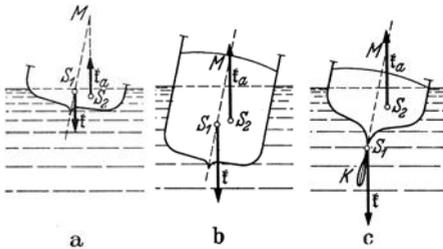


Abb. 125. Verschiedene Schiffstypen, a flache Jolle, b Seeschiff, c Rennjacht.

Maschinen und ihre Ladung bedingten tiefen Lage des Schwerpunktes. In höchstem Grade ist dies bei Rennjachten mit bleibeschwertem Kiel (Abb. 125c) der Fall. Ihr Schwerpunkt liegt so tief, daß das Metazentrum überhaupt nicht unter ihn rücken kann. Ein solches Schiff hat nur eine einzige stabile Schwimmelage. Erst bei einer Drehung um 180° wird die Schwimmelage labil. Es kann daher überhaupt nicht kentern.

Die Eintauchtiefe eines schwimmenden Körpers ist um so größer, je kleiner das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist. Dies wird bei der Senkspindel (Aräometer, Abb. 126) benutzt, um das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten zu messen. Schiffe tauchen in das spezifisch schwerere Meerwasser etwas weniger tief ein als in das leichtere Süßwasser.

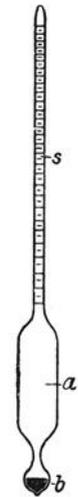


Abb. 126. Senkspindel (Aräometer).

59. Die Elastizität der Flüssigkeiten. Eine Flüssigkeit befindet sich in einem zylindrischen Gefäß von der Länge l und dem Querschnitt q , also vom Volumen $V = lq$. Das Gefäß sei durch einen beweglichen Stempel verschlossen. Wird dieser durch eine Kraft vom Betrage k um die Strecke Δl nach innen verschoben, so verkleinert sich das Volumen der Flüssigkeit um den Betrag $\Delta V = -q \Delta l$. Die Kraft k erzeugt in der Flüssigkeit einen Druck $p = k/q$. Die durch ihn verursachte relative Volumänderung $\Delta V/V$ ist dem Druck proportional, also

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{\chi} = \frac{k}{q\chi}. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist grundsätzlich identisch mit dem HOOKESCHEN Gesetz für feste Körper (§ 53). Die Konstante χ , der *Kompressionsmodul*, spielt bei den Flüssigkeiten die gleiche Rolle, wie bei den festen Körpern der Elastizitätsmodul E . (Das negative Vorzeichen in Gl. (6) rührt davon her, daß wir χ aus der Zusammendrückung definieren, während wir E aus der Dehnung definierten.)

Bei der Messung von Kompressionsmodul muß Sorge getragen werden, daß der auf die Flüssigkeit wirkende Druck nicht auch das Volumen des Gefäßes vergrößert. Bei dem OERSTEDSchen Piezometer (Abb. 127) wirkt auf das die Flüssigkeit enthaltende Gefäß A von außen und innen der gleiche Druck. Es befindet sich in Wasser und ist unten durch Quecksilber abgeschlossen. Wird die ganze Vorrichtung unter erhöhten Druck gebracht, so kann die Zusammendrückung der in A befindlichen Flüssigkeit am Stande des Quecksilbers im Steigrohr abgelesen werden.

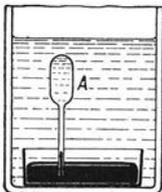


Abb. 127. Piezometer zur Messung des Kompressionsmoduls von Flüssigkeiten.

Die Flüssigkeiten sind der Größenordnung nach rund zehnmal so stark zusammendrückbar wie die festen Körper.

60. Oberflächenspannung. Eine freie Flüssigkeitsoberfläche erweckt den Eindruck einer dünnen, gespannten Haut. Diese *Oberflächenspannung* beruht darauf, daß zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit stets anziehende, sog. VAN DER WAALSSCHE Kräfte wirken. Das Vorhandensein solcher Kräfte wird schon durch die Tatsache bewiesen, daß das Volumen einer

Flüssigkeit, also der Abstand ihrer Moleküle, auch durch beträchtliche Kräfte nur sehr wenig vergrößert werden kann. Die Kräfte, die auf ein im Innern einer Flüssigkeit befindliches Molekül von den es rings umgebenden Nachbarmolekülen ausgeübt werden, heben sich im Durchschnitt gegenseitig auf. Ein an der Oberfläche befindliches Molekül aber ist nur auf der einen Seite von Molekülen umgeben, und die von diesen ausgehenden Anziehungskräfte haben eine senkrecht in das Innere der Flüssigkeit weisende Resultierende f (Abb. 128). Um Moleküle an die Oberfläche einer Flüssigkeit zu schaffen, ist demnach Arbeit gegen diese Kraft zu leisten, analog zur Hebearbeit gegen die Schwerkraft. Daher besitzt ein an der Oberfläche befindliches Molekül eine größere potentielle Energie, als die Moleküle im Innern der Flüssigkeit. Bei stabilem Gleichgewicht der ganzen Flüssigkeit ist ihre potentielle Energie, zu der auch die Oberflächenenergie hinzuzurechnen ist, ein Minimum (§ 24). Ziehen wir diese allein in Betracht, so ist das dann der Fall, wenn sich möglichst wenige Moleküle an der Oberfläche befinden, wenn diese also möglichst klein ist (Minimalfläche). Aus diesem Grunde sind frei schwebende Tropfen kugelförmig, denn dann haben sie bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche. Ist die Minimalbedingung nicht erfüllt, so wandern solange Moleküle von der Oberfläche in das Innere, bis dieser Zustand erreicht ist.

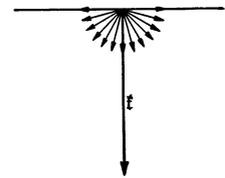


Abb. 128. Zur Erklärung der Oberflächenspannung.

In einem rechteckigen Drahtrahmen, dessen eine Seite (a) beweglich ist, sei eine Flüssigkeitslamelle gespannt (Abb. 129). Sie wird sich verkleinern und die Seite a mitnehmen, wenn dies nicht durch eine an dieser Seite angreifende Kraft vom Betrage k verhindert wird. Wir denken uns nun die Seite a durch diese Kraft um die Strecke dx verschoben. Da dabei *beide* Oberflächen der Lamelle wachsen, so erfährt ihre Oberfläche einen Zuwachs $dF = 2 a dx$. Die potentielle Energie eines einzelnen Oberflächenmoleküls betrage ϵ . Wenn sich n Moleküle auf jedem Quadratcentimeter der Oberfläche befinden, so entfällt auf je 1 cm^2 derselben die potentielle Energie $n\epsilon = \vartheta$. Mit dem Zuwachs der Oberfläche ist also eine Vermehrung ihrer potentiellen Energie im Betrage

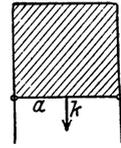


Abb. 129. Zur Theorie der Oberflächenspannung.

$$dA = \vartheta dF = \vartheta 2 a dx \text{ erg}$$

verbunden. Die hierzu, d. h. zur Beförderung der Moleküle aus dem Innern an die Oberfläche nötige Arbeit wird von der Kraft k längs des Weges dx geleistet. Es ist demnach auch $dA = k dx$ und

$$k = 2 a \vartheta \text{ dyn.} \tag{7}$$

Von dieser Kraft entfällt auf jedes Zentimeter der an die Seite a angrenzenden Flüssigkeit (wieder beide Seiten der Lamelle) der Betrag $k/2a = \vartheta$. Die durch Gl. (7) gegebene Kraft ist diejenige, die die Lamelle gegen die Wirkung der Oberflächenspannung im Gleichgewicht hält, demnach auch die Kraft, mit der sich die Lamelle zusammenzuziehen sucht. Die Lamelle greift also mit der Kraft $k = 2 a \vartheta \text{ dyn}$ an der Seite a an, bzw. an jedem Zentimeter der Berandung ihrer Oberflächen mit der Kraft ϑ . Gemäß Gl. (7) ist es üblich, die *Konstante der Oberflächenspannung* $\vartheta = n\epsilon$ in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$ anzugeben. Ihrer eigentlichen Bedeutung nach als Energie/Flächeneinheit wäre sie in der Einheit $1 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2}$ auszudrücken. Das ist aber dimensionsmäßig das gleiche, da $1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot 1 \text{ cm}$, und ergibt die gleiche Maßzahl. ϑ beträgt bei Wasser 72,8, bei Äthyläther 17,0, bei Quecksilber 500 $\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$.

An stark gekrümmten Oberflächen ist die Oberflächenspannung kleiner als an ebenen Flächen, weil dann die Zahl der Moleküle, welche ein Oberflächenmolekül

nach innen ziehen, kleiner ist, und daher eine geringere Arbeit nötig ist, um neue Oberflächenmoleküle zu schaffen. Das gilt insbesondere für sehr kleine Tröpfchen.

Eine Seifenblase ist im Gleichgewicht, wenn ihr innerer Überdruck Δp (die Differenz zwischen innerem und äußerem Druck) der zusammenziehenden Kraft der Oberflächenspannung das Gleichgewicht hält. Die gesamte innere und äußere Oberfläche einer (gegen ihren Radius r stets sehr dünnen) Seifenblase beträgt $8\pi r^2$, die vom Überdruck Δp herrührende, auf die Innenfläche $4\pi r^2$ wirkende Druckkraft $4\pi r^2 \Delta p$. Wenn diese Druckkraft den Blasenradius um dr vergrößert, so leistet sie die Arbeit $4\pi r^2 \Delta p dr$. Diese Arbeit dient dazu die bei der Aufblähung nötige Zahl von neuen Molekülen an die Oberflächen zu schaffen. Der Oberflächenzuwachs beträgt $dF = d(8\pi r^2) = 16\pi r dr$, die dazu nötige Energie $16\pi r dr \vartheta$. Es ist also $16\pi r dr \vartheta = 4\pi r^2 \Delta p dr$ oder

$$r \Delta p = 4 \vartheta.$$

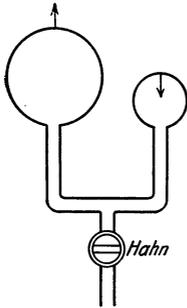


Abb. 130. Eine große Seifenblase wächst auf Kosten einer kleineren.

Es folgt also das zunächst überraschende Ergebnis, daß der Überdruck Δp in einer Seifenblase um so kleiner ist, je größer der Radius der Blase ist. Wenn man eine Seifenblase aufbläst, so vergrößert man tatsächlich ihren inneren Druck nicht, sondern er wird kleiner. Man sorgt nur für die nötige Luftzufuhr, und der innere Druck sinkt. Sind zwei anfänglich verschieden große Seifenblasen durch ein Rohr verbunden (Abb. 130), so kann kein Gleichgewicht bestehen, weil die verschieden großen Radien einen verschieden großen inneren Druck erfordern. Die größere Seifenblase wächst auf Kosten der kleineren, bis diese nur noch eine Kuppe bildet, deren Radius gleich demjenigen der großen Blase ist. (Wären beide Blasen gleich groß, so würde ein labiles Gleichgewicht vorliegen.)

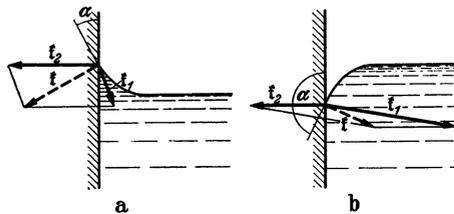


Abb. 131. Zur Kapillarität.

61. **Kapillarität.** Grenzt eine Flüssigkeit an irgendeinen anderen Stoff, so bestehen auch zwischen ihren Molekülen und denen des Stoffes anziehende Kräfte, deren Größe von der Art der beiden Stoffe abhängt. Hierauf beruhen die *Kapillarerscheinungen* an der Grenze fester und flüssiger oder zweier flüssiger Körper. Auf die in der Grenzfläche befindlichen Flüssigkeitsmoleküle wirkt erstens die Anziehung f_1 der Moleküle im Inneren der Flüssigkeit, zweitens die Anziehung f_2 der Moleküle der festen Wand (Abb. 131). Von der Schwerkraft, die stets klein gegen diese Kräfte ist, können wir hier absehen. Wir betrachten insbesondere die Stelle, wo die freie Flüssigkeitsoberfläche in die Grenzfläche übergeht. Je nach dem Verhältnis jener beiden Kräfte weist ihre Resultierende f in Richtung auf die Wand (Abb. 131a) oder in das Innere der Flüssigkeit (Abb. 131b). Da sie bei Gleichgewicht auf der freien Oberfläche senkrecht stehen muß (§ 57), so bildet diese mit der Wand einen vom Kräfteverhältnis abhängigen *Randwinkel* α . Dieser ist gleich 0° , wenn f_1 gegenüber f_2 verschwindet, und gleich 180° , wenn f_2 gegenüber f_1 verschwindet. Im ersteren Fall, z. B. bei Wasser und fettfreiem Glas, breitet sich die Flüssigkeit unter der Wirkung der Kraft f_2 auf der festen Fläche als dünne, fest haftende Haut aus, es tritt *vollständige Benetzung* ein. Im zweiten Fall, z. B. bei Quecksilber und Glas, bildet die Flüssigkeit auf der festen Fläche Tropfen, die nicht an ihr haften. Bei vollständiger Benetzung sucht also die

Flüssigkeit eine möglichst große, bei vollständiger Nichtbenetzung eine möglichst kleine Berührungsfläche mit der festen Fläche zu bilden. Aus diesem Grunde steigt Wasser in einer eingetauchten engen Glasröhre (Kapillare), deren Wandung vorher gut benetzt wurde, über den äußeren Wasserspiegel in die Höhe (Kapillaraszension, Abb. 132a). Quecksilber dagegen wird in einer solchen Röhre herabgedrückt (Kapillardepression, Abb. 132b). Die freie Flüssigkeitsoberfläche bildet — weil die Krümmung der freien Flüssigkeitsoberfläche immer stetig sein muß — in der Kapillaren einen *Meniskus*, der im ersten Fall nach unten, im zweiten nach oben gekrümmt ist.

Wird eine Kapillare vom Radius r in eine Flüssigkeit getaucht, mit der ihre innere Wandung bereits vollkommen benetzt ist, so wird die Flüssigkeit im ersten Augenblick innen und außen gleich hoch stehen und alsdann zu steigen beginnen. Die Dichte der Flüssigkeit sei ρ . Steht sie in der Höhe h über dem äußeren Spiegel (Abb. 133), so ist die Arbeit bei ihrem weiteren Anstieg um eine Höhe dh gleich derjenigen, die bei der Hebung eines Flüssigkeitsvolumens $\pi r^2 dh$ von der Masse $dm = \rho \pi r^2 dh$ um die Höhe h geleistet werden würde. Sie beträgt also $dm gh = \rho \pi r^2 dh gh$.

Andererseits verschwindet ein Stück der benetzenden Flüssigkeitshaut mit der freien Oberfläche $2 \pi r dh$, es wird also die Oberflächenenergie $\vartheta \cdot 2 \pi r dh$ frei. Anfänglich ist diese frei werdende Energie viel größer als die entsprechende Hebungsarbeit. Der Überschuß wird zur Überwindung der inneren Reibung (§ 76) beim Aufstieg der Flüssigkeit verbraucht. Mit wachsender Steighöhe h wird aber die Hebungsarbeit immer größer. Bei einer bestimmten Steighöhe genügt die freiwerdende Oberflächenenergie gerade noch, um die Hebungsarbeit zu leisten, bei größerer Steighöhe aber nicht mehr. Höher kann also die Flüssigkeit nicht steigen. Demnach ist die maximale Steighöhe durch die Bedingung $\rho \pi r^2 gh dh = 2 \pi r \vartheta dh$ gegeben und beträgt

$$h = \frac{2 \vartheta}{\rho r g} \tag{8}$$

Bei nicht vollständiger Benetzung gilt allgemein

$$h = \frac{2 \vartheta}{\rho r g} \cos \alpha, \tag{9}$$

wenn α der Randwinkel ist. Bei vollständiger Nichtbenetzung ($\cos \alpha = -1$) ergibt sich $h = -2 \vartheta / \rho r g$. Wegen ihres Zusammenhanges mit den Kapillarerscheinungen heißt ϑ auch die *Kapillaritätskonstante*.

Öl breitet sich auf Wasser infolge der zwischen den Molekülen des Öls und des Wassers wirkenden Molekularkräfte zu einer sehr dünnen Schicht aus. Eine gegebene Ölmenge kann aber nicht eine beliebig große Wasserfläche bedecken. Die Ausbreitungsfähigkeit des Öls hat eine Grenze. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese dann erreicht ist, wenn die Ölschicht nur noch aus einer einzigen Lage von Molekülen besteht, so daß die Schichtdicke von der Größenordnung der Moleküldurchmesser ist. Die Schichtdicke kann aus der Größe des Ölflecks und der Ölmenge berechnet werden. Auf diese Weise haben RAYLEIGH, FERRIN u. a. gefunden, daß die Größenordnung der Moleküldurchmesser jedenfalls kleiner als 10^{-6} cm ist. Ähnliche Schlüsse kann man aus der Dicke des schwarzen Flecks von Seifenblasen ziehen (§ 288).

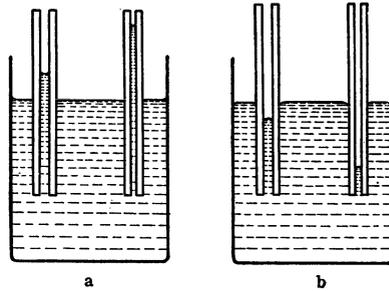


Abb. 132. a Kapillaraszension, b Kapillardepression.

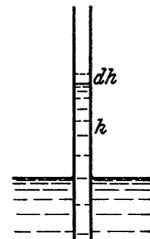


Abb. 133. Zur Theorie der Kapillarität.

Kapillarkräfte sind, neben osmotischen Kräften (§ 119) beim Aufsteigen der Pflanzensäfte wirksam. Auf ihnen beruht auch die Aufsaugung von Flüssigkeiten durch feinporige und schwammige Körper.

Molekularkräfte ähnlicher Art können auch zwischen den Molekülen verschiedener fester Stoffe und denen von festen Stoffen und Gasen auftreten. Hierauf beruht die *Adhäsion*, z. B. das Haften von Staub an festen Flächen, von Kreide an einer Tafel, ferner die *Adsorption* von Gasen an festen Flächen (§ 120).

IV. Mechanik ruhender Gase.

62. Grundlagen der Gastheorie. Schon vor zwei Jahrhunderten wurde, insbesondere von DANIEL BERNOULLI, erkannt, daß man die wichtigsten Eigenschaften der Gase verstehen kann, wenn man annimmt, daß sich die einzelnen Moleküle der Gase in einer ständigen Bewegung befinden. Bei dieser Bewegung erleiden die Moleküle ständig Zusammenstöße untereinander und mit den das Gas begrenzenden festen Wänden. Die Zusammenstöße der Moleküle erfolgen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes (§ 25), d. h. es bleibt die Summe ihrer Energien und ihrer Impulse erhalten, aber die Geschwindigkeiten der einzelnen Moleküle ändern sich durch den Austausch von Energie und Impuls bei jedem Stoß nach Betrag und Richtung. Ein einzelnes Molekül bewegt sich also unter ständigen, sprunghaften Änderungen seiner Geschwindigkeit auf einer Zickzackbahn. Bei den Zusammenstößen mit einer Wand, die die gleiche Temperatur hat wie das Gas, wird sich im allgemeinen Energie und Impuls des einzelnen Moleküls ändern. Aber durchschnittlich wird von der Wand an die Moleküle ebenso viel Energie abgegeben, wie sie von den Molekülen aufnimmt, so daß infolge dieser Zusammenstöße eine Änderung der gesamten Molekularenergie des Gases nicht eintritt.

Der Zustand eines Gases ändert sich also „mikroskopisch“, d. h. wenn wir die jeweiligen Zustände seiner einzelnen Moleküle, gekennzeichnet durch ihre Orte und ihre Geschwindigkeiten, betrachten, fortgesetzt. Betrachten wir aber eine größere Gasmenge „makroskopisch“, d. h. bezüglich ihrer unmittelbar beobachtbaren Wechselwirkungen mit ihrer Umgebung, so bemerken wir von diesen ständigen molekularen Zustandsänderungen nichts. Das liegt daran, daß die makroskopischen *Zustandsgrößen* eines Gases, sein Volumen, sein Druck und seine Temperatur, lediglich durch die Mittelwerte der mikroskopischen Zustandsgrößen der Moleküle, insbesondere ihrer räumlichen Dichte und ihrer kinetischen Energie, bestimmt werden. Sind diese Mittelwerte zeitlich konstant, befindet sich das Gas in *dynamischem Gleichgewicht*, so bleibt sein makroskopischer Zustand unverändert. Er ändert sich nur, wenn sich diese Mittelwerte ändern. Denn bei einer makroskopisch beobachtbaren Gasmenge handelt es sich, wie wir noch sehen werden, stets um eine ungeheuer große Zahl von Molekülen. Wäre es möglich, die molekularen Zustandsänderungen in einem in dynamischem Gleichgewicht befindlichen Gase in allen Einzelheiten zu beobachten, so würde man feststellen, daß jeder Zustandsänderung, die in irgendeinem Augenblick an einem der Moleküle vor sich geht, praktisch am gleichen Ort und im gleichen Augenblick eine entgegengesetzte Zustandsänderung an einem anderen Molekül entspricht, die die Wirkung jener Zustandsänderung auf den makroskopischen Zustand praktisch genau aufhebt. Oder noch richtiger: Es besteht bei der ungeheuer großen Zahl der Moleküle eine an Gewißheit grenzende *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß dies stets der Fall ist. Wir wollen diese wichtige Tatsache als *Ersatzprinzip* bezeichnen.

Die damit zwischen den Zustandsänderungen der einzelnen Moleküle hergestellte Beziehung ist nun von ganz anderer Art als diejenige, die wir bisher

bei physikalischen Gebilden betrachtet haben. Bisher handelte es sich immer um *kausale* Beziehungen, d. h. um solche, bei denen ein ursächlicher Zusammenhang zwischen den Erscheinungen besteht. Davon ist hier keine Rede. Die Zustandsänderung eines Moleküls durch einen Zusammenstoß und die entgegengesetzte Zustandsänderung eines zweiten durch einen beliebigen anderen Zusammenstoß stehen in keinerlei ursächlichem Zusammenhang, sind zwei völlig unabhängige Ereignisse. Daß wir sie in Beziehung zueinander setzen, ist lediglich durch die an Gewißheit grenzende *Wahrscheinlichkeit* gerechtfertigt, daß bei der ungeheuer großen Zahl von Molekülen und der großen Häufigkeit ihrer Zusammenstöße sich unter ihnen stets je zwei finden lassen, deren Zustandsänderungen in der gedachten Weise miteinander korrespondieren.

Ein in dynamischem Gleichgewicht befindliches Gas läßt sich mit einer Bevölkerung vergleichen, die unter völlig gleichbleibenden Bedingungen lebt. Die „mikroskopische“ Betrachtung einer solchen zeigt uns das bunte, ständig wechselnde Schicksal der einzelnen Menschen, Geburt und Tod, Krankheit, Wohnungswechsel usw. Betrachten wir aber die Bevölkerung „makroskopisch“, also nach der Methode der *Statistik*, so zeigen die Tabellen Jahr für Jahr das gleiche Bild, sofern sich der Zustand der Bevölkerung als Ganzes nicht ändert. Jeder Geburt entspricht im Durchschnitt ein Todesfall, Jahr für Jahr erkranken durchschnittlich gleich viele Menschen an Masern, Tuberkulose usw. Welche Einzelpersonen gerade von solchem Schicksal, von solcher Zustandsänderung, betroffen werden, ist für den Statistiker ohne jedes Interesse. Die Einzelperson geht ihn nur ganz anonym und in sofern an, als sie zu irgendeiner Tabelle eine Einheit hinzufügt.

Eine solche statistische Betrachtungsweise ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn es sich um eine beträchtliche Zahl von Individuen handelt. Auf die Bevölkerung eines Einfamilienhauses wäre sie nicht sinnvoll anzuwenden, weil hier die Zufälligkeiten der Einzelschicksale weniger Personen allzu große *Schwankungen* hervorrufen würden. Solche Schwankungen weist auch die Tabelle des Statistikers natürlich stets auf. Sie sind aber, verglichen mit den Gesamtzahlen, um so kleiner, je größer die Zahl der beteiligten Personen ist. Denn eine um so größere Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sie sich ausgleichen.

Da es sich bei makroskopisch beobachtbaren Gasmengen stets um eine ungeheuer große Zahl von Molekülen handelt — z. B. bei 1 cm^3 der atmosphärischen Luft um rund das 10^9 -fache der Bevölkerungszahl der Erde — zudem bei einem einheitlichen Gase um lauter völlig gleiche Individuen, so ist die Vorbedingung für die Anwendung der statistischen Betrachtungsweise hier in idealer Weise gegeben (MAXWELL, BOLTZMANN). In der Tat führen die auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung und auf Mittelwertbildungen gegründeten Methoden der Statistik, angewandt auf die Gase, zu Aussagen über ihr Verhalten, die ihrem wirklichen Verhalten vollkommen entsprechen, also den Charakter *streng gültiger Gesetze* haben und sich in ihrer Gültigkeit in nichts von kausal begründeten Gesetzen unterscheiden. Die *strenge Kausalität* einerseits, das Walten einer *absoluten Zufälligkeit*, der Zustand *idealer Unordnung* andererseits bilden die beiden Grenzfälle, bei denen die Aufstellung streng gültiger makroskopischer Gesetze allein möglich ist.

Die statistische Betrachtungsweise ist also insbesondere dadurch gekennzeichnet, daß sie sich nur mit den *Mittelwerten der mikroskopischen Zustandsgrößen* der einzelnen Moleküle beschäftigt. Dabei handelt es sich entweder um den Mittelwert für ein bestimmtes Molekül, genommen über eine längere Zeit (*zeitliches Mittel*), oder um den Mittelwert der gleichzeitigen Zustände aller vorhandenen Moleküle (*räumliches Mittel*).

Die Gesetze, die man auf diese Weise ableiten kann, haben eine besonders einfache Gestalt, wenn man die Moleküle als Massenpunkte betrachtet, und wenn man die Tatsache vernachlässigt, daß zwischen ihnen stets anziehende Kräfte, die VAN DER WAALSSchen Kräfte (§ 60), wirksam sind. Bei vielen Gasen, z. B. den Edelgasen, der Luft, den elementaren Gasen Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff usw., ist das tatsächlich sehr weitgehend zulässig. Ein Gas, bei dem diese Voraussetzung streng erfüllt wäre, nennt man ein *ideales Gas*. Für ein solches liefert die *kinetische Gastheorie* die folgenden grundlegenden Gesetze:

1. Der räumliche und der zeitliche Mittelwert der kinetischen Energie $\mu\bar{v}^2/2$ der Moleküle eines Gases von einheitlicher Temperatur ist gleich groß, d. h. sämtliche Moleküle haben in einem bestimmten Augenblick durchschnittlich die gleiche kinetische Energie, wie sie ein einzelnes Molekül im Durchschnitt während einer längeren Zeit hat. Dieser Mittelwert ist für alle idealen Gase bei gleicher Temperatur der gleiche und vom Druck unabhängig. Die Schreibweise \bar{v}^2 bedeutet, daß es sich um das *mittlere Geschwindigkeitsquadrat*, den Mittelwert der Einzelbeträge v^2 , handelt. Unter μ verstehen wir künftig stets die Masse einzelner molekularer oder atomarer Gebilde, im Gegensatz zur Masse m eines ausgedehnten Körpers. Haben die Moleküle zweier verschiedener Gase die Massen μ_1 und μ_2 , so ist demnach $\bar{v}_1^2 : \bar{v}_2^2 = \mu_2 : \mu_1$. D. h. je kleiner die Masse der Moleküle eines Gases ist, um so größer ist bei gegebener Temperatur ihr mittleres Geschwindigkeitsquadrat und damit ihre mittlere Geschwindigkeit.

2. Die Geschwindigkeiten der Moleküle sind bei dynamischem Gleichgewicht in einem als Ganzes ruhenden Gase über alle räumlichen Richtungen gleichmäßig verteilt, es ist keine Richtung vor der anderen bevorzugt.

3. Infolge ihrer völlig zufälligen Bewegungen füllen die Gasmoleküle, sofern sie keinen äußeren Einwirkungen unterliegen, den ihnen dargebotenen Raum im Durchschnitt gleichmäßig aus, so daß sich in gleichen Raumteilen gleich viele Moleküle befinden. Man vergleiche hiermit die allmähliche Verteilung einer größeren Menschenmenge, die sich anfänglich in einer Ecke eines großen Raumes befindet, über den ganzen Raum, sobald sie beginnt, sich ganz zwanglos in ihm zu bewegen, und sofern kein Grund vorliegt, eine bestimmte Gegend im Raum zu bevorzugen.

4. Die durchschnittliche kinetische Energie der Moleküle hängt nur von der Temperatur, nicht vom Druck ab (§ 100).

5. Die Zahl n der Moleküle in 1 cm^3 eines idealen Gases, die *Moleküldichte*, hängt nur von Temperatur und Druck, nicht von der Art des Gases ab. Sie ist also für alle idealen Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleich groß (*Gesetz von AVOGADRO*, 1811, Beweis § 66). Sie beträgt bei *Normalbedingungen*

$$n = 27,06 \cdot 10^{18} \text{ oder rund } 27 \text{ Trillionen}$$

(*AVOGADROSche Zahl*). Unter Normalbedingungen versteht man eine Temperatur von 0°C und einen Druck von 760 mm Hg . Es ist üblich, die Konstanten der Gase in Tabellen auf Normalbedingungen zu beziehen.

Ist μ die Masse eines Moleküls, n die Zahl der Moleküle eines Gases in 1 cm^3 unter den jeweils herrschenden Temperatur- und Druckbedingungen, so ist die Dichte des Gases

$$\rho = n \mu. \quad (1)$$

Demnach gilt für *verschiedene* ideale Gase unter *gleichen* Bedingungen (gleiches n)

$$\frac{\rho}{\mu} = n = \text{const}, \quad (2)$$

d. h. die Dichten der idealen Gase verhalten sich wie die Massen ihrer Moleküle. Für das *gleiche* Gas gilt aber unter *verschiedenen* Bedingungen

$$\frac{\rho}{n} = \mu = \text{const}, \quad (3)$$

d. h. die Dichte eines Gases, ist, wie selbstverständlich, der Zahl der in 1 cm³ enthaltenen Moleküle proportional.

Wir werden mehrfach in die Lage kommen, räumliche und zeitliche Mittelwerte zu bilden. In einem Volumen seien n Moleküle enthalten, von denen n_1 eine Eigenschaft ψ im Betrage ψ_1 , n_2 im Betrage ψ_2 , allgemein n_i im Betrage ψ_i besitzen. Dann ist der räumliche Mittelwert $\bar{\psi}$ von ψ derjenige Betrag dieser Eigenschaft, der sämtlichen n Molekülen gleichmäßig zukommen müßte, damit sie insgesamt in dem Volumen in dem gleichen Betrage vorhanden wäre, wie sie es tatsächlich ist. Es muß daher $n\bar{\psi} = \sum n_i\psi_i$ sein oder

$$\bar{\psi} = \frac{1}{n} \sum n_i\psi_i. \quad (4a)$$

Handelt es sich um eine sehr große Zahl von Molekülen, über die die einzelnen Beträge von ψ praktisch stetig verteilt sind, so teilen wir die möglichen Beträge von ψ in unendlich kleine Bereiche $d\psi$ ein. Ist dn die Zahl der Moleküle, die die Eigenschaft ψ in einem zwischen ψ und $\psi + d\psi$ liegenden Betrage besitzen, so ergibt sich, indem wir die Summe der Gl. (4a) durch ein Integral ersetzen, der Mittelwert von ψ zu

$$\bar{\psi} = \frac{1}{n} \int_0^n \psi dn. \quad (4b)$$

Besitzt ein einzelnes Molekül eine Eigenschaft ψ während einer Zeit t_1 im Betrage ψ_1 , während einer Zeit t_2 im Betrage ψ_2 , allgemein während einer Zeit t_i im Betrage ψ_i , so ist der zeitliche Mittelwert $\bar{\psi}$ von ψ derjenige Betrag, den man der Eigenschaft ψ während der ganzen Zeit $t = \sum t_i$ zuschreiben müßte, damit das Produkt $t\bar{\psi}$ gleich der Summe der Produkte $t_i\psi_i$ ist. Es ist also

$$\bar{\psi} = \frac{1}{t} \sum t_i\psi_i. \quad (5a)$$

Ändert sich aber die Eigenschaft ψ nicht sprunghaft, sondern stetig, so müssen wir zur Grenze $t_i \rightarrow 0$ übergehen, also die Summe durch ein Integral über die Zeit t ersetzen, und erhalten dann statt Gl. (5a)

$$\bar{\psi} = \frac{1}{t} \int_0^t \psi dt \quad (5b)$$

als zeitlichen Mittelwert der Größe ψ .

Nicht nur für die kinetische Energie, sondern für alle molekularen Zustandsgrößen gilt, daß ihr räumlicher Mittelwert gleich ihrem zeitlichen Mittelwert ist. Das entspricht der einleuchtenden Tatsache, daß sich in den gleichzeitigen Zuständen aller in einem Raum vorhandenen Moleküle stets mit überaus großer Genauigkeit sämtliche Zustände vorfinden, die ein einzelnes Molekül im Laufe einer längeren Zeit durchläuft, und zwar mit einer ihrer Dauer proportionalen Häufigkeit. So ist ja auch eine große Zahl von Menschen aller Altersklassen ein im Durchschnitt getreues Abbild der Entwicklungsphasen, die ein einzelner Mensch im Laufe seines Lebens durchläuft.

63. Molekulargewicht und Atomgewicht. Mol und Grammatom. Die Massen der Atome und Moleküle sind sehr klein, am kleinsten beim Wasserstoffatom mit rund $1,6615 \cdot 10^{-24}$ g. Daher ist es oft unbequem, sie in der Einheit 1 g auszudrücken. In der Chemie ist es seit langem üblich, als molekulare und atomare

Masseneinheit eine Masse von $\frac{1}{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms zu benutzen, was nahezu, aber nicht genau, gleich der Masse eines Wasserstoffatoms ist. Weil die Massenbestimmung durch Wägung erfolgt, ist es üblich, vom *Molekulargewicht* und *Atomgewicht* der Stoffe zu sprechen. Bei der Anwendung handelt es sich aber durchweg um die betreffenden *Massen*, und es wäre daher richtiger, von der *Molekülmasse* und der *Atommasse* zu sprechen. Das ist aber nicht üblich. Wir werden deshalb künftig unter dem Molekular- und Atomgewicht stets die betreffenden Massen verstehen, ohne uns wegen der begrifflichen Unsauberkeit dieser Ausdrucksweise jedesmal zu rechtfertigen. In der molekularen Masseneinheit gemessene Molekulargewichte bezeichnen wir zum Unterschied von den in Gramm gemessenen Molekülmassen μ mit M .

Die gebräuchlichste Methode der Atomgewichtsbestimmung beruht auf der Messung des chemischen Verbindungsgewichts. Wir werden aber auch Verfahren kennen lernen, durch die die Massen einzelner Atome unmittelbar gemessen werden können (Massenspektroskopie, § 358). Zur Messung von Molekulargewichten gibt es zahlreiche physikalische Verfahren. Zum Beispiel kann, da sich die Molekulargewichte M zweier Stoffe wie die Massen μ ihrer Moleküle verhalten, das Molekulargewicht eines unbekanntes Stoffes mit dem eines bekannten nach Gl. (2) verglichen werden, sofern man beide Stoffe in den idealen Gaszustand versetzen kann (§ 112). Ein anderes Verfahren siehe z. B. § 118.

Wir wollen das Verhältnis der Masseneinheit 1 g zur oben definierten molekularen Masseneinheit mit N bezeichnen. Dann ist 1 g gleich N molekularen Masseneinheiten. N ist also eine universelle Konstante. Ist μ die Masse eines Moleküls in Gramm, so ist

$$\frac{M}{\mu} = N \quad \text{und} \quad M = N\mu \quad (6)$$

die in der Molekulargewichtseinheit gemessene Molekülmasse.

Wir definieren nun 1 *Mol* oder *Grammolekül* als diejenige Menge eines Stoffes, die so viel Gramm desselben enthält, wie sein Molekulargewicht angibt, z. B. 32,0000 g Sauerstoffgas oder 2,0152 g Wasserstoffgas. In diesem Sinne kann dann M auch als die in Gramm gemessene *Masse von 1 Mol* des betreffenden Stoffes betrachtet werden. Da μ die in Gramm gemessene Masse eines einzelnen Moleküls ist, so ist nach Gl. (6) die Zahl N auch die Zahl der in 1 Mol enthaltenen Moleküle. Da sie aber gemäß ihrer obigen Definition eine universelle Konstante ist, so folgt, daß in 1 Mol eines beliebigen Stoffes, unabhängig von seiner Beschaffenheit und den Bedingungen, unter denen er sich befindet, stets die gleiche Zahl N von Molekülen enthalten ist. In dieser Tatsache liegt die große Bedeutung des Molbegriffs für die Chemie und Physik. Die Abwägung von 1 Mol eines Stoffes ist gleichbedeutend mit der Abzählung einer unter allen Umständen gleich großen Zahl von Molekülen. N heißt die *LOSCHMIDTSche Zahl*. Es gibt mehrere Verfahren, um sie zu messen, die zu sehr gut übereinstimmenden Ergebnissen geführt haben. Ihr Zahlenwert beträgt

$$N = 6,065 \cdot 10^{23}.$$

Man beachte, daß N , im Gegensatz zu der auf Normalbedingungen bezogenen *AVOGADROSchen Zahl*, vom Zustand des betreffenden Stoffes vollkommen unabhängig ist.

Analog zum Mol ist ein *Grammatom* eines Stoffes definiert als diejenige Menge desselben, die soviel Gramm enthält, wie sein Atomgewicht angibt. Die gleiche Überlegung wie oben ergibt, daß auch die Zahl der Atome in 1 Grammatom stets gleich der *LOSCHMIDTSchen Zahl* N ist.

Die Kenntnis der *LOSCHMIDTSchen Zahl* erlaubt die Berechnung der Molekül- und Atommassen in Gramm, da nach Gl. (6) $\mu = M/N$ ist. Zum Beispiel beträgt

das Molekulargewicht des Sauerstoffs 32,00, also die Masse eines Sauerstoffmoleküls $O_2 \mu = (32,00/6,06) \cdot 10^{-23} = 5,28 \cdot 10^{-23}$ g. Entsprechend ergibt sich die Masse eines Wasserstoffatoms zu $(1,00776/6,065) \cdot 10^{-23} = 1,6615 \cdot 10^{-24}$ g. (Vgl. die Tabelle auf S. VI.)

Da 1 Mol eines Stoffes stets die gleiche Zahl von Molekülen enthält, so hat es bei allen idealen Gasen nach dem Gesetz von AVOGADRO *unter gleichen Bedingungen*, unabhängig von der Art des Stoffes, stets das gleiche Volumen (*Molvolumen* V_m). Zum Beispiel beträgt das spezifische Volumen des Sauerstoffgases bei Normalbedingungen $700 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$. Sein Molvolumen beträgt daher unter den gleichen Bedingungen $32 \cdot 700 = 22\,400 \text{ cm}^3$ (genauer $22\,414,5 \text{ cm}^3$, *normales Molvolumen*). Für andere dem idealen Gaszustand ausreichend nahe Gase ergibt sich die gleiche Zahl. Ist n die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 , so enthält 1 Mol $N = n \cdot V_m$ Moleküle. Demnach gilt für das Molvolumen

$$V_m = \frac{N}{n}.$$

64. Das MAXWELLSche Verteilungsgesetz. In einem auf konstanter Temperatur gehaltenen Gase ist, wie schon gesagt, sowohl der räumliche wie der zeitliche Mittelwert der kinetischen Molekularenergie $m\overline{v^2}/2$ konstant. Zwar wechselt der Bewegungszustand jedes einzelnen Moleküls bei jedem Zusammenstoß in völlig zufälliger Weise. Die Gesamtenergie des Gases aber ändert sich nicht. Besitzen in einem bestimmten Augenblick von den Molekülen in 1 cm^3 des Gases n_1 die Geschwindigkeit v_1 , n_2 die Geschwindigkeit v_2 , allgemein n_i die Geschwindigkeit v_i , und ist $n = \sum n_i$ die gesamte Molekülzahl in 1 cm^3 , so ist die mittlere kinetische Energie der Moleküle durch die Gleichung $n\mu\overline{v^2}/2 = \sum n_i\mu v_i^2/2$ gegeben (§ 62). Der Mittelwert $\overline{v^2}$, das *mittlere Geschwindigkeitsquadrat*, spielt in der Gastheorie eine sehr wichtige Rolle. Betrachten wir nun das Gas in einem späteren Augenblick, so werden zwar die einzelnen Moleküle ihren Bewegungszustand sämtlich geändert haben. Es werden aber wieder gleich viele Moleküle n_i eine bestimmte Geschwindigkeit v_i haben, da ja der Zustand des Gases als Ganzes, d. h. ohne Rücksicht auf die Individualität der einzelnen Moleküle, sich nicht geändert hat. Da die möglichen Geschwindigkeiten der Moleküle eine stetige Folge bilden, so teilen wir sie in unendlich kleine Geschwindigkeitsbereiche dv ein und fragen nach der Zahl dn_v der Moleküle, deren Geschwindigkeit zwischen den Beträgen v und $v + dv$ liegt. Diese Zahl wird um so größer sein, je häufiger sich infolge eines Zusammenstoßes gerade eine solche Geschwindigkeit ergibt, je *wahrscheinlicher* also eine solche Geschwindigkeit ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist von MAXWELL berechnet worden. Man kann schon von vornherein sagen, daß sehr große und sehr kleine, d. h. vom Mittelwert sehr stark abweichende Geschwindigkeiten sehr selten vorkommen werden, und daß die Verteilungskurve ein Maximum in der Gegend dieses Mittelwertes haben muß. Wir wollen die diesem Maximum entsprechende, also die *wahrscheinlichste Geschwindigkeit* mit v_0 bezeichnen. Dann lautet das MAXWELLSche Verteilungsgesetz

$$\frac{dn_v}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} d\left(\frac{v}{v_0}\right). \quad (7)$$

Das Gesetz enthält die Masse μ der Moleküle nicht, ist also von der Art des Gases unabhängig und demnach für alle idealen Gase in gleicher Form gültig. In Abb. 134 ist die Abhängigkeit der zu dn_v/n , also zur relativen Häufigkeit der Geschwindigkeiten v proportionalen Funktion $\frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}$ dargestellt. Die Kurve

liegt nicht symmetrisch zum Maximum, das der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit v_0 entspricht. Man sieht, daß die Zahl der Moleküle, die eine größere Geschwindigkeit als v_0 haben, größer ist als diejenige der Moleküle mit kleinerer Geschwindigkeit. Demnach ist der Mittelwert der Geschwindigkeitsbeträge v , die *mittlere Geschwindigkeit* \bar{v} , nicht identisch mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit. Sie kann nach Gl. (4b) aus Gl. (7) berechnet werden. Es ergibt sich

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v \, dn_v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 = 1,128 v_0. \quad (8)$$

Entsprechend ergibt sich das *mittlere Geschwindigkeitsquadrat* zu

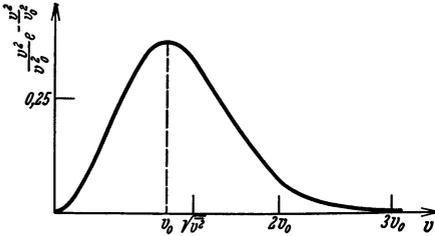


Abb. 134. MAXWELLSches Verteilungsgesetz.

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 \, dn_v = \frac{3}{2} v_0^2 \quad (9)$$

und daraus die *Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat* zu $\sqrt{\bar{v}^2} = 1,224 v_0$. Es ist also

$$\bar{v}^2 = \frac{3\pi}{8} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_0^2. \quad (10)$$

Es sei noch einmal betont, daß zwischen der mittleren, der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit und der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat streng unterschieden werden muß. In vielen Fällen ist es zulässig, so zu rechnen, als käme allen Molekülen die gleiche Geschwindigkeit zu. In diesen Fällen handelt es sich fast stets um die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat.

65. Diffusion. Eine unmittelbare Folge der Molekularbewegung ist die Diffusion, der Ausgleich von Dichteunterschieden infolge des ganz zufälligen und unregelmäßigen Charakters dieser Bewegung. Man pflegt die freie Diffusion und die Diffusion durch poröse Wände zu unterscheiden. Doch besteht zwischen ihnen kein grundsätzlicher Unterschied. Die Diffusion ist nichts weiter als eine Folge des Bestrebens der Moleküle, sich über den ganzen verfügbaren Raum gleichmäßig zu verteilen. Ist dieser Raum in zwei Bereiche durch eine Wand getrennt, durch die die Moleküle hindurchtreten können, so wird natürlich eine Diffusion auch durch diese hindurch stattfinden.

Befindet sich innerhalb eines Gases, z. B. in der Luft, an irgend einer Stelle ein fremdes Gas, so breitet es sich, indem es den verfügbaren Raum gleichmäßig zu erfüllen, sich also mit jenem Gas gleichmäßig zu vermischen strebt, allmählich im Raume aus. Besonders deutlich ist diese Diffusion bei stark riechenden Stoffen, wie Tabaksqualm, und vor allem bei vielen Duftstoffen, bei denen schon eine äußerst geringe Menge genügt, um ihre Anwesenheit bemerkbar zu machen. Die Diffusion wird natürlich um so schneller erfolgen, je größer die Molekulargeschwindigkeit des diffundierenden Gases ist, und je ungestörter sich die Moleküle bewegen können, also je größer die mittlere freie Weglänge (§ 68) in dem Gase ist, in welchem das Fremdgas diffundiert.

Abb. 135 stellt einen unglasierten Tonzylinder T dar, der mit einem Wasser­manometer verbunden ist. Der Zylinder ist für Gase durchlässig und anfänglich mit Luft gefüllt. Nunmehr wird über ihn ein Becherglas B gestülpt und unter dieses Wasserstoff geleitet. Dann zeigt das Manometer im ersten Augenblick einen starken Überdruck an, der schnell wieder verschwindet. Die Molekulargeschwindigkeit des Wasserstoffs ist nämlich viel größer als die der Luft, und deshalb diffundiert der Wasserstoff viel schneller in den Zylinder hinein, als die Luft aus ihm heraus. Erst allmählich folgt die Luft, und es stellt sich dann

ein Zustand ein, bei dem Luft und Wasserstoff innen und außen in gleichem Verhältnis gemischt sind, und bei dem innen und außen der gleiche Druck herrscht. Entfernt man dann das Becherglas wieder, so zeigt das Manometer im ersten Augenblick einen starken Unterdruck im Zylinder an, weil der Wasserstoff viel schneller aus ihm heraus diffundiert, als die Luft in ihn hinein. Nach kurzer Zeit stellt sich auch jetzt die Druckgleichheit wieder her.

Auch in Flüssigkeiten finden entsprechende Diffusionsvorgänge überall statt, wo Konzentrationsunterschiede vorhanden sind. Bringt man zwei mischbare Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Alkohol, in das gleiche Gefäß, so stellt sich allmählich durch freie Diffusion eine gleichmäßige Mischung her — von gewissen durch das verschiedene spezifische Gewicht der Flüssigkeiten bedingten Einflüssen abgesehen. Natürlich erfolgt die Diffusion sehr viel langsamer als in einem Gase, weil die freie Weglänge in der Flüssigkeit viel kleiner ist. Die Moleküle (bzw. Ionen) gelöster Stoffe und kleine schwebende Teilchen diffundieren in einer Flüssigkeit genau wie ein Gas in einem andern, äußerst dichten Gase und suchen den ganzen verfügbaren Raum, in diesem Falle das ganze Volumen der Flüssigkeit, gleichmäßig zu erfüllen. Überschichtet man eine Kupfersulfatlösung vorsichtig mit reinem Wasser, so erhält man anfänglich eine ganz scharfe Trennungsfäche. Im Laufe der Zeit wird diese allmählich verwaschen, das Kupfersulfat breitet sich durch Diffusion nach oben hin aus. Nach Ablauf einiger Monate ist das Gefäß mit gleichmäßig blau gefärbter Flüssigkeit erfüllt.

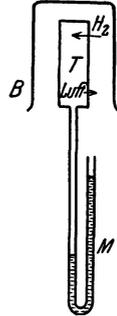


Abb. 135.
Diffusion
eines Gases.

66. Der Druck der Gase. Die Druckkraft, die ein Gas auf eine begrenzende Wand ausübt, beruht auf den Stößen der Gasmoleküle gegen sie, ist also nur makroskopisch eine statische, in Wirklichkeit eine dynamische Größe. Man kann sie mit der Druckkraft vergleichen, die auftritt, wenn viele Menschen mit ihren Fäusten sehr schnell gegen eine Wand trommeln, oder mit der Druckkraft, die fallende Regentropfen ausüben. Die Moleküle werden an der Wand reflektiert. Dieser Vorgang hat im allgemeinen nicht den Charakter eines elastischen Zusammenstoßes eines sehr kleinen Körpers mit einer ebenen Wand von sehr viel größerer Masse. Denn erstens ist eine im makroskopischen Sinne ebene Wand im molekularen Sinne stets uneben. Zweitens erfährt im Einzelfall ein Molekül bei der Reflexion in der Regel eine Änderung des Betrages seiner Geschwindigkeit, es gewinnt oder verliert kinetische Energie. Hier erlaubt nun das Ersatzprinzip eine sehr vereinfachte Betrachtungsweise. Bei der großen Zahl der Moleküle wird es zu einem Molekül, das mit einer bestimmten Geschwindigkeit und in einer bestimmten Richtung gegen die Wand stößt, stets einen Partner geben, der die Wand im gleichen Augenblick verläßt, und dessen Geschwindigkeit nach dem Stoß von gleichem Betrage ist wie diejenige des ersten Moleküls vor dem Stoß und mit dem an der Stoßstelle errichteten Lot (Einfallslot) den gleichen Winkel α bildet, wie die Geschwindigkeit des ersten Moleküls vor dem Stoß. Indem wir das Ersatzprinzip paarweise auf die einzelnen Moleküle anwenden, können wir so rechnen, als ob jedes einzelne Molekül ohne Energieverlust an der Wand reflektiert würde, und zwar unter dem gleichen Winkel gegen das Einfallslot, unter dem es auf die Wand traf (reguläre Reflexion, Abb. 136).

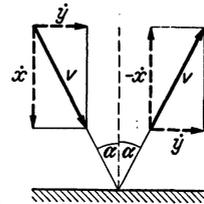


Abb. 136. Reguläre
Reflexion eines
Gasmoleküls.

Die Geschwindigkeit eines Moleküls betrage v . Die Wand liege senkrecht zur x -Richtung, so daß die zur Wand senkrechte Geschwindigkeitskomponente des Moleküls $v_x = \dot{x} = v \cos \alpha$ beträgt, wenn α der Einfallswinkel des Moleküls

ist. Die zur Wand senkrechte Impulskomponente des Moleküls beträgt dann vor dem Stoß $\mu \dot{x}$, nach dem Stoß $-\mu \dot{x}$. Sie erfährt also infolge des Stoßes eine Änderung um den Betrag $2\mu \dot{x}$. Die zur Wand parallele Impulskomponente hingegen bleibt unverändert.

Wir betrachten ein ebenes Wandstück von der Fläche q (Abb. 137). Auf dieses treffen Moleküle aus allen möglichen Richtungen und mit allen möglichen Geschwindigkeiten. Wir greifen von diesen diejenigen heraus, die eine bestimmte Geschwindigkeit v haben und unter einem bestimmten Einfallswinkel α auf die Wand fallen. Diese Moleküle bewegen sich also innerhalb eines schrägen Zylinders auf die Wand hin. Wir fragen nunmehr nach der Impulsänderung, die sich an diesen Molekülen innerhalb einer Zeit dt an der Wand vollzieht. Da die Moleküle in der Zeit dt die Strecke $v dt$ zurücklegen, so gelangen in dieser Zeit so viele Moleküle an die Wand, wie sich in dem Raum vom Querschnitt q und der Höhe $v dt \cos \alpha = \dot{x} dt$ befinden. Das Volumen dieses Raumes beträgt also $\dot{x} q dt$. Enthält 1 cm^3 des Gases n_i Moleküle der betrachteten Art, so wird die Wand in der Zeit dt von $n_i \dot{x} q dt$ solchen Molekülen erreicht, und da jedes Molekül eine Impulsänderung $2\mu \dot{x}$ erfährt, so beträgt die gesamte

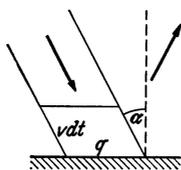


Abb. 137.
Zur Ableitung
des Gasdrucks.

Impulsänderung in der Zeit dt , die wir mit dG_x bezeichnen wollen, $dG_x = n_i \dot{x} q dt 2\mu \dot{x} = 2n_i \mu \dot{x}^2 q dt$. Die Ursache dieser Impulsänderung ist eine von der Wand auf die Moleküle ausgeübte Kraft. Wegen der sehr großen Molekülzahl können wir die Impulsänderung wie einen stetig verlaufenden Vorgang betrachten und daher die von der Wand ausgehende Kraft — um deren zeitlichen Mittelwert es sich, molekular betrachtet, handelt — als zeitlich konstant ansehen. Nach dem Wechsel-

wirkungsgesetz (§ 16) ist die von den Molekülen auf die Wand ausgeübte Druckkraft k_i von gleichem Betrage, wie die Kraft, die die Wand auf die Moleküle ausübt. Nach § 20 beträgt diese Kraft $k_i = dG_x/dt$, und wir erhalten daher

$$k_i = 2n_i \mu \dot{x}^2 q.$$

Die gesamte, auf die Wand ausgeübte Druckkraft k erhalten wir, indem wir über alle in Betracht kommenden Moleküle summieren,

$$k = 2\mu q \sum n_i \dot{x}^2. \quad (\text{I1})$$

Ist n die Gesamtzahl der Moleküle in 1 cm^3 des Gases, so kommt von ihnen nur der Teil in Betracht, der sich auf die Wand hin bewegt. Wegen der gleichmäßigen Verteilung der Geschwindigkeiten auf alle Richtungen ist das die Hälfte, also $n/2$. Bezeichnen wir mit $\overline{\dot{x}^2}$ den über $n/2$ Moleküle genommenen Mittelwert von \dot{x}^2 , so ist nach Gl. (4a) $\frac{n}{2} \overline{\dot{x}^2} = \sum n_i \dot{x}^2$. Mithin folgt aus Gl. (I1)

$$k = n \mu \overline{\dot{x}^2} q. \quad (\text{I2})$$

Indem wir durch die Fläche q dividieren, erhalten wir dann für den Druck des Gases auf die Wand, d. h. für die Druckkraft je Flächeneinheit,

$$p = n \mu \overline{\dot{x}^2}. \quad (\text{I3})$$

Für jedes einzelne Molekül gilt $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Demnach ist auch der Mittelwert von v^2 , das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, gleich $\overline{v^2} = \overline{\dot{x}^2} + \overline{\dot{y}^2} + \overline{\dot{z}^2}$. Da nun alle Richtungen gleichberechtigt sind, so ist $\overline{\dot{x}^2} = \overline{\dot{y}^2} = \overline{\dot{z}^2} = \overline{v^2}/3$, und wir erhalten schließlich

$$p = \frac{1}{3} n \mu \overline{v^2}. \quad (\text{I4})$$

Diese wichtige Gleichung wurde bereits 1738 von DANIEL BERNOULLI abgeleitet.

Nach Gl. (1) ist $n\mu = \rho$ die Dichte des Gases. Daher können wir auch schreiben

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}. \quad (15)$$

Hieraus ergibt sich die bemerkenswerte Möglichkeit, die molekulare Größe $\overline{v^2}$ aus den makroskopischen Größen p und ρ zu berechnen. Zum Beispiel ist für Luft bei Normalbedingungen $p = 1,0133 \cdot 10^6 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ und $\rho = 1,2928 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Es folgt $\sqrt{\overline{v^2}} = 4,84 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ oder $484 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$. Für Wasserstoff ergibt sich entsprechend $1837 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$. Aus $\overline{v^2}$ kann dann nach Gl. (9) auch die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} und die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_0 berechnet werden.

Besteht ein Gas aus einer Mischung mehrerer idealer Gase, so übt jedes von ihnen für sich den gleichen Druck aus, den es ausüben würde, wenn es allein anwesend wäre. Der Gesamtdruck ist also gleich der Summe der *Partialdrücke* der einzelnen Bestandteile,

$$p = p_1 + p_2 + \dots \quad (16)$$

(DALTONSches Gesetz).

Da die mittlere kinetische Energie der einzelnen Moleküle gleich $\mu \overline{v^2}/2$ ist, so ist $u = n \mu \overline{v^2}/2$ die in 1 cm^3 des Gases enthaltene kinetische Energie, die kinetische *Energiedichte* des Gases. Aus Gl. (14) folgt

$$p = \frac{2}{3} u. \quad (17)$$

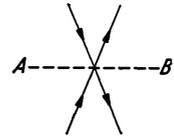


Abb. 138. Zum Druck im Innern eines Gases.

Wir denken uns innerhalb eines Gases einen Querschnitt AB (Abb. 138). Durch diesen treten ständig Moleküle von beiden Seiten hindurch. Nach dem Ersatzprinzip gibt es nun zu jedem Molekül, das von der einen Seite her durch den Querschnitt tritt, einen Partner, der gleichzeitig von der andern Seite her durch ihn hindurchtritt, und zwar so, als werde das erste Molekül an der Fläche AB reflektiert. Lassen wir demgemäß je zwei Moleküle an der Fläche AB ihre Rollen tauschen und denken uns, daß die Moleküle wirklich so reflektiert werden, so würde auf beide Seiten der Fläche ein Druck gemäß Gl. (14) wirken. Diesen Druck bezeichnet man als den *Druck im Innern des Gases*. Bei einem idealen Gase ist er gleich dem Druck, den eine an den Ort des gedachten Querschnitts gebrachte feste Fläche erfahren würde. Bei den wirklichen Gasen aber ist der molekulare Zustand des Gases in der nächsten Nähe einer Begrenzung ein wenig anders als im freien Gasraum und daher auch der wie vorstehend definierte Druck im Innern des Gases ein wenig verschieden von dem unmittelbar meßbaren Druck p an der Begrenzung. Man muß daher zwischen ihnen grundsätzlich unterscheiden. Bei den wirklichen Gasen gelten Gl. (14) und (17) streng nur für den Druck im Innern.

Da die Größe $\mu \overline{v^2}$, die doppelte kinetische Energie der Gasmoleküle, durch die Temperatur des Gases eindeutig bestimmt wird (§ 62), so kann Gl. (14) auch in folgender Form ausgesprochen werden. *Bei gegebener Temperatur ist der Druck aller idealen Gase, die in 1 cm^3 gleich viele Moleküle enthalten, gleich groß.* Das ist aber nur eine andere Fassung des *AVOGADROSchen Gesetzes*, das also hiermit bewiesen ist, und dessen eigentliche Bedeutung erst durch diese Fassung klar wird.

67. Isotherme Zustandsänderungen von Gasen. Führt man in Gl. (15) das spezifische Volumen $V_s = 1/\rho$ ein, so ergibt sich

$$p V_s = \frac{1}{3} \overline{v^2}. \quad (18)$$

Wird bei Zustandsänderungen des Gases seine Temperatur, also auch \bar{v}^2 , konstant gehalten, handelt es sich also um *isotherme Zustandsänderungen*, so folgt

$$p V_s = \text{const.} \quad (19)$$

Ist m die Masse einer Gasmenge vom Volumen V , also $V = m V_s$, so folgt aus Gl. (19) das allgemeinere Gesetz $p V = m \bar{v}^2/3$ oder

$$p V = \text{const.} \quad (20)$$

Gl. (19) und (20) sind verschiedene Formen der *isothermen Zustandsgleichung* der idealen Gase. Sie wird meist BOYLE (1660) und MARIOTTE (1676) zugeschrieben, wurde aber schon früher von TOWNLEY erkannt, natürlich nicht auf Grund der molekularen Betrachtungsweise, sondern rein empirisch.

Ein ideales Gas sei in ein zylindrisches Gefäß vom Querschnitt q eingeschlossen, dessen eine Endfläche durch einen beweglichen, dicht schließenden Stempel gebildet wird (Abb. 139). Auf den Stempel wirke eine Kraft vom Betrage k , die im Gase einen Druck $p = k/q$ aufrecht erhält. Wir wollen mit diesem Gase eine isotherme Zustandsänderung vornehmen,

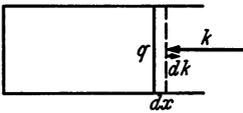


Abb. 139. Zur Elastizität der Gase.

die der Dehnung eines Drahtes, wie wir sie in § 53 behandelt haben, analog ist. Zu diesem Zweck lassen wir auf den Stempel eine zusätzliche, der Kraft k entgegengerichtete Kraft dk wirken. Es stellt sich dann bei verändertem Druck und Volumen ein neues Gleichgewicht her, bei dem der Druck nunmehr $p + dp = (k - dk)/q$

beträgt, so daß die eingetretene Druckänderung $dp = -dk/q$ ist. Nach Gl. (20) ist nun $p dV + V dp = 0$, also $dp = -p dV/V$. Es folgt

$$\frac{dV}{V} = \frac{dk}{q p}. \quad (21)$$

Diese Gleichung entspricht völlig dem HOOKESCHEN Gesetz [§ 54, Gl. (1)]. Denn da der Querschnitt des Gasvolumens unverändert geblieben ist, ist die relative Volumänderung dV/V gleich der relativen Längenänderung, die wir beim Draht mit $\Delta l/l$ bezeichnet haben. Die zusätzliche Kraft dk entspricht der dortigen dehrenden Kraft k , während wir hier mit k die Kraft bezeichnen haben, die den Zusammenhalt des Gases sichert, was bei einem festen Körper die inneren molekularen Kräfte von selbst besorgen. Demnach spielt bei einer isothermen Volumänderung eines Gases der Druck p die Rolle, die bei einem festen Körper der *Elastizitätsmodul* E spielt. Da Gl. (21) auch für Zusammenrückungen gilt, ist es üblich, wie bei den Flüssigkeiten von dem *Kompressionsmodul* zu sprechen (§ 60). Der isotherme Kompressionsmodul eines Gases ist also identisch mit seinem Druck (vgl. hierzu § 108).

Bei der Volumvergrößerung dV leistet das Gas infolge der Verschiebung des Stempels um die Strecke dx *äußere Arbeit* gegen die Kraft k im Betrage $dA = k dx = p q dx$ oder, da $q dx = dV$,

$$dA = p dV \quad (22)$$

[vgl. § 56, Gl. (7)]. Dieser Betrag an äußerer Arbeit wird also bei der Volumvergrößerung gewonnen. Umgekehrt muß der gleiche Betrag an Arbeit gegen die Druckkraft des Gases geleistet werden, wenn das Volumen des Gases um den Betrag dV verkleinert wird. Gl. (22) gilt allgemein, auch für nicht isotherme Volumänderungen und für nicht ideale Gase, da sie unmittelbar aus der Definition des Arbeitsbegriffs folgt.

68. Freie Weglänge. Wirkungsquerschnitt. Stoßzahl. Die Moleküle der nicht idealen Gase, also aller wirklichen Gase haben ein endliches Volumen und erleiden Zusammenstöße untereinander. Wir wollen sie als Kugeln vom Radius r

annehmen. Wir betrachten eine Schar von sehr vielen Gasmolekülen, die sich in der gleichen Richtung bewegen (Abb. 140). Zur Zeit $t = 0$ sei ihr Ort auf der in ihrer Bewegungsrichtung liegenden Koordinate $x = 0$, ihre Anzahl z_0 . In jeder von der Schar durchlaufenen Gasschicht wird eine Anzahl dz der Moleküle einen Zusammenstoß erleiden und dadurch aus der Schar ausscheiden. Die Zahl der Moleküle in der Schar nimmt also ständig ab. Sie betrage in der Entfernung x vom Ursprung noch z . Der Querschnitt der Schar sei F , also $F dx$ das Volumen einer von ihr durchlaufenen Gasschicht von der Dicke dx . Ist n die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 , so enthält die Schicht $n F dx$ Moleküle. Diese wollen wir uns zunächst als ruhend denken. Man sieht dann sofort ein, daß es für die Zahl der Zusammenstöße in der Schicht nichts ausmacht, wenn wir uns die Moleküle der Schar punktförmig und dafür die Moleküle der Schicht durch Kreisscheiben vom Radius $2r$ ersetzt denken, die zur Bewegungsrichtung der Schar senkrecht stehen. Die Schicht sei so dünn, daß diese Scheiben sich nicht gegenseitig überdecken. Sie stellen dann der Schar eine auffangende Fläche von der Größe $4\pi r^2 n F dx$ entgegen, so daß von den in die Schicht gelangenden Molekülen der Bruchteil $4\pi r^2 n F dx / F = 4\pi r^2 n dx$ in ihr abgefangen wird. Die relative Änderung der Molekülzahl der Schar in der Schicht beträgt also

$$\frac{dz}{z} = -4\pi n r^2 dx.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\log \frac{z}{z_0} = -4\pi n r^2 x \quad \text{oder} \quad z = z_0 e^{-4\pi n r^2 x} = z_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (23)$$

Dabei haben wir $4\pi n r^2 = 1/\lambda$ gesetzt. Nach Gl. (4b) erhalten wir als Mittelwert der von den einzelnen Molekülen frei zurückgelegten Wege x

$$x = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} x dz.$$

Indem wir in diese Gleichung den aus Gl. (23) berechneten Wert von $x dz$ einsetzen, und $x/\lambda = y$ setzen, ergibt sich durch partielle Integration leicht

$$x = \lambda \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \lambda. \quad (24)$$

Man bezeichnet daher λ als die *mittlere freie Weglänge* oder kurz als *freie Weglänge* der Gasmoleküle. Läßt man die Vernachlässigung fallen, daß die Moleküle in den durchlaufenen Schichten ruhen, so ergibt sich für die freie Weglänge ein um den Faktor $3/4$ kleinerer Wert.

Wir haben hier die freie Weglänge als Mittelwert über eine größere Zahl von Molekülen, also als räumliches Mittel berechnet. Das zeitliche Mittel für ein einzelnes Molekül ist dann aber ebenso groß, und λ ist daher auch der Mittelwert der Wege, die ein einzelnes Molekül zwischen zwei Zusammenstößen frei zurücklegt.

Die mittlere freie Weglänge ist der Zahl n der Moleküle in 1 cm^3 , also der Dichte des Gases, und bei kugelförmigen Molekülen ihrem Querschnitt πr^2 umgekehrt proportional. Bei anders gestalteten Molekülen tritt an die Stelle von πr^2 eine Größe, die man als den *Wirkungsquerschnitt* der Moleküle bezeichnet.

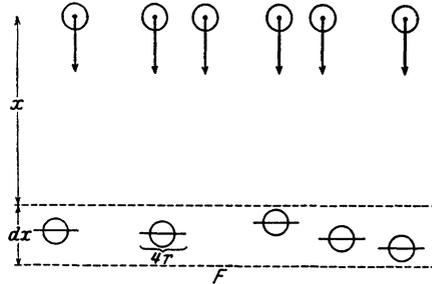


Abb. 140. Zur Berechnung der freien Weglänge.

Die freie Weglänge kann z. B. aus der inneren Reibung der Gase berechnet werden (§ 76). Sie ist natürlich bei den einzelnen Gasen verschieden groß. Bei einem Druck von 760 mm Hg ist sie von der Größenordnung 10^{-5} cm, bei einem Druck von 0,1 mm Hg ganz rund gerechnet gleich 0,1 mm, was man sich leicht merken kann. Der Wirkungsquerschnitt der Moleküle berechnet sich daraus in der Größenordnung 10^{-16} cm², ihr Radius in der Größenordnung 10^{-8} cm. Die Summe der Wirkungsquerschnitte der Moleküle in 1 cm³ ist bei einem Druck von 760 mm Hg von der Größenordnung 1 bis 3 m².

Aus der freien Weglänge und der mittleren Molekulargeschwindigkeit \bar{v} kann die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Zusammenstößen, $\bar{t} = \lambda/\bar{v}$ berechnet werden. Die Größe $\lambda\bar{t} = \bar{v}/\lambda$ ist die *Stoßzahl* in 1 sec. Sie ist bei Normalbedingungen von der Größenordnung 10^9 bis 10^{10} sec⁻¹, also außerordentlich groß.

Man beachte folgende wichtige Tatsache. Wenn ein Molekül bereits eine gewisse Strecke frei durchlaufen hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es nunmehr auf einem bestimmten Stück seines weiteren Weges einen Zusammenstoß erleiden wird, um nichts größer, sondern genau so groß wie in jedem andern Punkt seines Weges. Die Tatsache, daß es bereits einen mehr oder weniger langen Weg frei durchlaufen hat, ist ohne jeden Einfluß auf sein weiteres Schicksal. Denn es handelt sich hier nicht um kausale Zusammenhänge, sondern um statistische Beziehungen. Wir haben uns ja auch bei der obigen Ableitung gar nicht darum gekümmert, ob die Moleküle unserer Schar, die wir am Orte $x = 0$ zu betrachten begannen, dort bereits mehr oder weniger große Wege zurückgelegt hatten. Man vergleiche hiermit folgendes. Wenn man gewöhnt ist, einen bestimmten Menschen *rein zufällig* durchschnittlich in bestimmten Zeitabschnitten zu treffen, so berechtigt die Tatsache, daß man ihn *zufällig* einmal ungewöhnlich lange nicht getroffen hat, in keiner Weise zu der Erwartung, daß man ihn *deswegen* nun unbedingt bald treffen müsse. Diese allgemeine Tatsache wird oft übersehen. Auf ihrer Verkennung beruhen viele Versuche, bei Glücksspielen Gewinnsysteme zu ersinnen, indem von der Annahme ausgegangen wird, daß die vorhergegangenen Spielausfälle die kommenden irgendwie beeinflussen. Bei einem echten, also dem unbedingten Zufall unterworfenen Glücksspiel, ist das nicht der Fall. Selbst wenn ich bereits roomal mit einem einwandfreien Würfel keine 6 geworfen habe, ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich beim nächsten Wurf eine 6 werfe, noch immer genau ebenso groß wie zu Beginn des Spiels, nämlich $\frac{1}{6}$. Die sehr geringe Wahrscheinlichkeit für 100 aufeinanderfolgende Würfe ohne 6 ändert daran nichts.

69. Gase unter der Wirkung der Schwerkraft. Jedes auf der Erde befindliche Gas unterliegt zwei Wirkungen von entgegengesetzter Tendenz. Unter der Wirkung der *Molekularbewegung* sucht das Gas sich gleichmäßig über den ganzen verfügbaren Raum zu verteilen. Dem wirkt die *Schwerkraft* entgegen, die die Moleküle nach unten zieht, also das Gas in der tiefsten möglichen Lage zu verdichten sucht. Unter der gemeinsamen Wirkung dieser beiden Ursachen stellt sich bei dynamischem Gleichgewicht ein Zustand ein, bei dem der Gasdruck und die Gasdichte nach oben hin abnehmen. Nach § 62 ist die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle um so größer, je kleiner ihre Masse, je kleiner also das Molekulargewicht des Gases ist. Bei einem Gase von kleinem Molekulargewicht ist also die zerstreuende Wirkung der Molekularbewegung größer als bei einem Gase von größerem Molekulargewicht. Die Schwerkraft hingegen erteilt jedem Molekül, unabhängig von seiner Masse, die gleiche Beschleunigung g nach unten. Die Moleküle eines Gases verteilen sich also, entgegen der Schwerkraft, um so gleichmäßiger in alle Höhen, je kleiner das Molekulargewicht ist; um so langsamer nimmt also auch die Dichte des Gases nach oben hin ab.

Wir greifen aus einem Gase eine horizontale Schicht von der sehr geringen Dicke Δx und dem Querschnitt q heraus (Abb. 141). Bezüglich dieser Schicht stellen wir die gleiche Überlegung an, wie in § 66 bei der Definition des Drucks im Innern eines Gases. Wir lassen an den Grenzen der Schicht jeweils zwei Moleküle ihre Rollen tauschen und verfahren so, als ob alle gegen diese Grenzen anlaufenden Moleküle an ihr reflektiert werden. Es ändert dann nichts, wenn wir uns die Schicht mit festen, masselosen Wänden umgeben denken, so daß sie sich wie ein in das Gas eingebetteter fester Körper verhält, der in dem Gase schwebt, also im Gleichgewicht ist. Die Summe der an der Schicht angreifenden Kräfte muß dann gleich Null sein. Die Schicht befinde sich in der Höhe x über einem Niveau $x = 0$. Beträgt der Druck an der unteren Fläche p , so beträgt er nach dem TAYLORSCHEN Satz an der oberen Fläche $p + \Delta x dp/dx$. Ist ρ die Dichte des Gases in der Schicht, so ist ihr Gewicht $\rho g q \Delta x$. Die auf die untere Fläche wirkende Druckkraft muß gleich der Summe aus diesem Gewicht und der auf die obere Fläche wirkenden Druckkraft sein, also $p q = (p + \Delta x dp/dx) q + \rho g q \Delta x$ oder

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g. \quad (25)$$

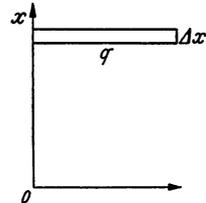


Abb. 141. Zur Ableitung der barometrischen Höhenformel.

Nun ist nach Gl. (15) p/ρ in einem Gase von überall gleicher Temperatur konstant. Ist p_0 der Druck, ρ_0 die Dichte im Niveau $x = 0$, so ist demnach $p/\rho = p_0/\rho_0$ oder $\rho = \rho_0 p/p_0$. Dann folgt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dx.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$x = \frac{p_0}{\rho_0 g} \log \frac{p_0}{p} \quad \text{bzw.} \quad p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \quad (26 \text{ a u. b})$$

(*barometrische Höhenformel*). Da nach Gl. (3) und (15) $p/p_0 = \rho/\rho_0 = n/n_0$, so gilt ferner auch

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \quad \text{und} \quad n = n_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x}. \quad (26 \text{ c u. d})$$

Ersetzen wir in den Exponenten der Gl. (26) die Dichte ρ_0 und den Druck p_0 durch die in Gl. (1) und (14) gegebenen Ausdrücke, so erhält der Exponent den Wert $3 gx/v^2$. Druck, Dichte und Molekülzahl nehmen also mit der Höhe um so schneller ab, je kleiner v^2 ist, also nach § 62 je größer die Masse der Moleküle ist. Das entspricht der oben angestellten allgemeinen Überlegung.

Nach Gl. (25) wächst der Druck, wenn die Höhe um den Betrag dx abnimmt, um den Betrag $\rho g dx$, d. h. um den Betrag des Gewichtes einer Gasmenge von der Höhe dx und dem Querschnitt 1 cm^2 . In einem nach oben hin unbegrenzten Gase, wie der Erdatmosphäre, ist daher der Druck in einem Niveau gleich dem Gewicht einer über diesem Niveau befindlichen Gassäule von 1 cm^2 Querschnitt.

Handelt es sich um so kleine Höhenunterschiede h , daß man in ihrem Bereich die Dichte ρ als konstant ansehen kann, so folgt aus Gl. (25)

$$p = p_0 - \rho g h \quad \text{oder} \quad p_0 - p = \rho g h. \quad (26 \text{ e})$$

Die Gleichung ist dann mit derjenigen für den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit identisch (§ 56).

Füllt man ein geschlossenes Gefäß mit einem Gase, so wiegt es um so viel mehr als das gasleere Gefäß, wie das Gewicht des eingeschlossenen Gases beträgt. Diese Tatsache ist nicht so trivial, wie sie zunächst zu sein scheint.

Denn man bedenke, daß in jedem Augenblick nur der winzige Bruchteil aller Moleküle eine Wirkung auf die Waage ausübt, der sich gerade in einem Zusammenstoß mit einer Gefäßwand befindet, aber nicht die übrigen Moleküle, die sich frei im Raum bewegen. Die Waage zeigt in Wirklichkeit die Differenz der nach oben und der nach unten gerichteten Druckkräfte an. Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist diese Differenz in der Tat streng gleich dem Gewicht des eingeschlossenen Gases.

Kleine Teilchen, die in einem Gase schweben, auch solche, die bereits mit dem bloßen Auge sichtbar sind, verhalten sich grundsätzlich wie Gasmoleküle. Auch sie führen eine ständige Bewegung, die sog. *BROWNSche Bewegung* (§ 101)

aus, und ihre mittlere kinetische Energie $m\bar{v}^2/2$ ist gleich derjenigen der Moleküle des umgebenden Gases. Infolge ihrer großen Masse ist aber bei ihnen die Größe v^2 sehr viel kleiner als bei den Gasmolekülen, und ihre Anzahl nimmt mit der Höhe sehr viel schneller ab. Abb. 142 zeigt dies für verschiedene Teilchenmassen. Abb. 143 zeigt mikrophotographische Aufnahmen schwebender Teilchen aus Mastix von $1\ \mu$ Durchmesser, die

gewonnen wurden, indem das Aufnahmemikroskop auf verschiedene horizontale Niveaus eingestellt wurde, deren Abstand je $12\ \mu$ betrug. Durch Auszählung der Teilchen kann die Größe $\rho_0 g/p_0 = 3g/v^2$ bestimmt und die Gültigkeit der Gl. (26d) für die Teilchen nachgewiesen werden. Ähnlich verhalten sich schwebende Teilchen in einer Flüssigkeit.

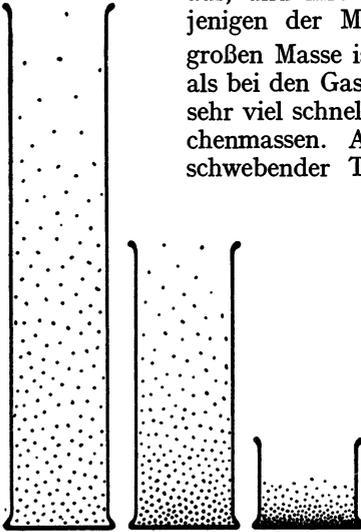


Abb. 142. In einem Gase schwebende Teilchen.

Jeder in einem Gase befindliche Körper erfährt in ihm, genau wie in einer Flüssigkeit, einen *Auftrieb* gemäß dem archimedischen Prinzip. Der Auftrieb ist also gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Gasmenge. Die Ursache dieses Auftriebes ist leicht zu verstehen. Er beruht auf der

Abnahme der Molekülzahl und damit des Druckes mit der Höhe. Infolgedessen erfährt der Körper von oben her eine geringere Druckkraft als von unten her, und die Differenz dieser Druckkräfte ist, analog zu dem oben behandelten Fall der Wägung eines Gases, streng gleich dem Gewicht derjenigen Gasmenge, die durch die Anwesenheit des Körpers verdrängt wurde.

Natürlich ist der Auftrieb in einem Gase, verglichen mit demjenigen in einer Flüssigkeit, gering. Bei genauen absoluten Wägungen muß aber berücksichtigt werden, daß der zu wägende Körper und die Gewichtsstücke, sofern sie nicht zufällig das gleiche Volumen haben, einen verschieden großen Auftrieb in der Luft erleiden. Da der Auftrieb eines Körpers vom Volumen $1\ \text{cm}^3$ in Luft von der Größenordnung von $1\ \text{mg}^*$ ist, so macht sich seine Wirkung an einer empfindlichen Waage durchaus bemerkbar. Bereits OTTO VON GUERICKE wies den Auftrieb in der Luft auf folgende Weise nach. Er brachte an den beiden Balkenenden einer kleinen Waage eine Metallkugel und eine erheblich größere hohle Glaskugel an, die so bemessen waren, daß an der Waage in Luft Gleichgewicht bestand. Da die Glaskugel einen größeren Auftrieb erfährt als die kleinere Metallkugel, ist also erstere in Wirklichkeit schwerer als letztere. Wenn man nun die Waage in ein Gefäß bringt, aus dem man die Luft entfernen kann, so wird der Auftrieb beseitigt, und die Waage senkt sich nach der Seite der Glaskugel.

Auf dem Auftrieb in der Luft beruhen die Luftballone. Diese steigen in der Luft bis in diejenige Höhe, in der die Luftdichte so gering ist, daß das Gewicht des Ballons genau gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Luftmenge ist, so daß der Ballon sich im Gleichgewicht befindet.

Befindet sich an irgendeiner Stelle eines Gases eine Gasmenge von abweichender Dichte, sei es daß es sich um ein fremdes Gas von anderem Molekulargewicht oder um eine auf anderer Temperatur befindliche Menge des gleichen Gases handelt, so ist das Druckgleichgewicht an jener Stelle gestört. Eine spezifisch leichtere Gasmenge sinkt in einem spezifisch schwereren Gase zu Boden, eine spezifisch leichtere steigt in einem spezifisch schwereren Gase in die Höhe. Daher rührt z. B. das Aufsteigen der erhitzten Luft über einem Feuer. Auf derartigen Auf- und Abstiegsbewegungen verschieden warmer Luftmassen beruhen in erster Linie die Witterungserscheinungen.

70. Der Luftdruck. Die atmosphärische Luft ist der einzige Fall, in dem wir die Änderungen von Druck und Dichte über einen sehr großen Höhenbereich verfolgen können. Bei der Temperatur 0°C ist für die Luft $\rho_0 g/p_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$. Messen wir die Höhe x in m, so beträgt der Exponent der Gl. (23b) $-1,25 \cdot 10^{-4} x = -x/8000$. Beträgt die Temperatur $t^\circ\text{C}$, so ist noch durch $1 + \alpha t$ zu dividieren, so daß der Exponent $-x/8000(1 + \alpha t)$ beträgt. Die Konstante α ist gleich $1/273$ (§ 103). Für die Luft lautet demnach die Gl. (26b)

$$p = p_0 e^{-\frac{x}{8000(1 + \alpha t)}}. \tag{27}$$

Die folgende Tabelle gibt einige Zahlenbeispiele für die

Tabelle 4. Luftdruck in verschiedenen Höhen bei 0°C .

Höhe in m	Druck in mm Hg
0 (Meeresniveau)	760
500	714
1000	671
2000	592
4000	461

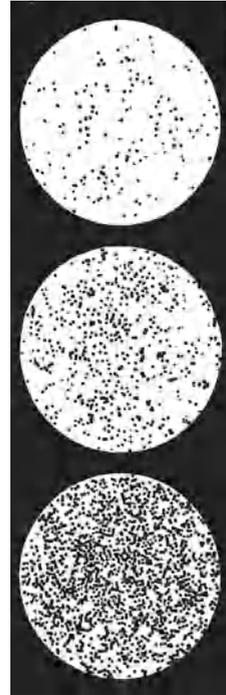


Abb. 143. Dichte schwebender Teilchen in verschiedenen Höhen. (Nach PERRIN.)
(Es handelt sich um drei parallele Schichten, die in je 12μ Abstand übereinander liegen.)

Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe über dem Meeresspiegel. Bei Benutzung BRIGGScher Logarithmen ergibt sich aus Gl. (27), wenn wieder x in m gemessen wird,

$$x = 18400(1 + \alpha t) \log \frac{p_0}{p}. \tag{28}$$

Hiernach kann also die Höhe über dem Meeresniveau aus dem Luftdruck berechnet werden.

Das Wesen des Luftdrucks ist zuerst 1643 von VIVIANI, etwa um die gleiche Zeit auch von OTTO VON GUERICKE, richtig erkannt worden. Jener erklärte dadurch die Tatsache, daß eine Saugpumpe Wasser nicht höher als 10 m heben kann. Denn eine Wassersäule von 10 m Höhe erzeugt einen dem Luftdruck gleichen Bodendruck. Daher kann der Luftdruck dem Gewicht einer höheren Wassersäule nicht das Gleichgewicht halten. Indem TORRICELLI eine entsprechende Überlegung für Quecksilber anstellte, kam er im gleichen Jahre

zur ersten genauen Messung des Luftdrucks. Im Jahre 1648 wies PASCAL die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe nach. Auch die mit der Wetterlage zusammenhängenden Luftdruckschwankungen wurden bereits damals erkannt.

TORRICELLI benutzte eine Vorrichtung, die im Prinzip ein Quecksilberbarometer ist (Abb. 144). Eine zunächst vollständig mit Quecksilber gefüllte, unten mit dem Finger verschlossene Glasröhre von 80—100 cm Länge wird in eine mit Quecksilber gefüllte Wanne gestellt und geöffnet. Dann strömt ein Teil des Quecksilbers aus, und oben in der Röhre entsteht ein luftleerer Raum, ein *Vakuum*. Die Quecksilbersäule stellt sich so ein, daß der Druck, den sie in der Höhe des äußeren Quecksilberniveaus erzeugt, gleich dem auf diesem lastenden Luftdruck ist. Denn bei Gleichgewicht muß im Quecksilber in dieser Höhe in der Röhre und außerhalb derselben der gleiche Druck herrschen. Da der Druck nur von der vertikalen Flüssigkeitshöhe abhängt, so bleibt diese auch bei einer Neigung der Glasröhre die gleiche. Sie beträgt im Meeresniveau im Durchschnitt 76 cm.

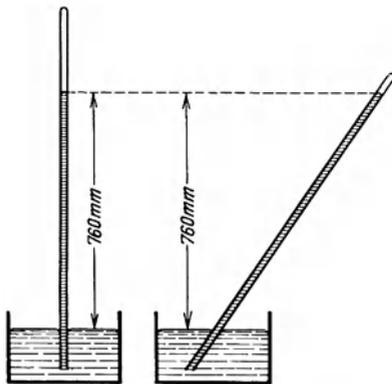


Abb. 144. Messung des Luftdrucks nach TORRICELLI.

Da Quecksilber bei 0°C das spezifische Gewicht $13,5951$ hat, so wiegt eine Quecksilbersäule vom Querschnitt 1 cm^2 und 76 cm Höhe bei 0°C $13,5951 \cdot 76 = 1033,23\text{ g}^*$, erzeugt also einen Druck von $1033,23\text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-2} = 1,01325 \cdot 10^6\text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$. Dieser Druck heißt *1 Atmosphäre* (at). Der Luftdruck wird aber oft durch die Länge der entsprechenden Quecksilbersäule, in mm Hg, angegeben und beträgt demnach in dieser Einheit im Meeresniveau durchschnittlich 760 mm Hg . Ein Druck von $1\text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ heißt *1 bar*, 10^6 bar heißen *1 Megabar*. Daneben sind noch andere Druckeinheiten und Bezeichnungen im Gebrauch.

So bedient sich heute die Wetterkunde statt der früher benutzten Einheit 1 mm Hg zwar der obigen Einheit 1 Megabar , bezeichnet diese aber als *1 Bar* und gibt den Luftdruck in der Einheit 1 Millibar (mb) $= 10^{-3}\text{ Bar} = 10^3\text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ (bar) an. 1000 mb sind fast genau gleich 750 mm Hg .

In einem Gemisch mehrerer Gase gelten die Gl. (26) für jedes dieser Gase einzeln. Unter p und p_0 sind dann die Partialdrucke der einzelnen Bestandteile zu verstehen. Demnach muß sich in einem Gasgemisch bei Gleichgewicht das Mischungsverhältnis der Bestandteile mit der Höhe zugunsten der Bestandteile von kleinerem Molekulargewicht ändern. Die Erdatmosphäre ist ein Gasgemisch. Sie besteht (in Volumprozenten) aus rund 78% Stickstoff, 21% Sauerstoff und 1% Argon, nebst Spuren anderer Gase. Sie ist aber nicht im Gleichgewicht. Infolge der vertikalen Luftströmungen findet in ihr eine ständige Durchmischung ihrer Bestandteile statt, so daß sich ihr Mischungsverhältnis bis in sehr große Höhen nicht merklich ändert.

Bereits OTTO VON GUERICKE hat in der Mitte des 17. Jahrhunderts, anknüpfend an seine Erfindung der Luftpumpe, eine Reihe von schönen Versuchen über den Luftdruck angestellt und auch das Gewicht der irdischen Lufthülle berechnet. Besonders bekannt sind die *Magdeburger Halbkugeln*, die er 1654 auf dem Reichstag in Regensburg vorführte. Es sind dies zwei große Halbkugeln aus Kupfer, die dicht aufeinander schließen, und die mit einer Luftpumpe luftleer gemacht werden können. Sie werden dann durch den äußeren Luftdruck so fest aufeinander gedrückt, daß sie durch je 8 Pferde, die auf beiden Seiten an ihnen angespannt waren, nicht auseinandergerissen werden konnten.

Das spezifische Gewicht des Leuchtgases ist sehr viel kleiner als das der Luft. Daher nimmt der Druck in einer Gasleitung mit der Höhe viel weniger ab, als in der Luft. Aus diesem Grunde ist der Überdruck des Leuchtgases über den Luftdruck in höheren Stockwerken, im Gegensatz zu dem Druck in Wasserleitungen, größer, als in den tiefer gelegenen.

Einen äußerst empfindlichen Nachweis für die Druckänderung mit der Höhe liefert die BEHNSche Röhre (Abb. 145). Man läßt in sie Leuchtgas einströmen, das man so stark abdrosselt, daß es an den beiden oberen Öffnungen der Röhre nur einen ganz geringen Überdruck über den Luftdruck hat, wenn die Röhre horizontal steht. Zündet man das Gas dort an, so brennt es an beiden Öffnungen gleich hoch. Es genügt aber eine ganz geringe Neigung der Röhre, um den Überdruck an der höher liegenden Öffnung merklich zu verstärken, an der tiefer liegenden zu schwächen, so daß die beiden Flammen sehr verschieden hoch brennen. (Vorsicht vor Explosionen! Flammen vor dem Schließen des Hahnes auslöschen.)

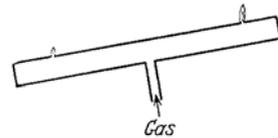


Abb. 145. BEHNSche Röhre.

Der Zug im Kamin eines Ofens entsteht dadurch, daß sich der Druck der in ihm befindlichen erhitzten Luft mit der Höhe langsamer ändert, als in der kälteren, also dichteren Außenluft. An der weiten oberen Kaminöffnung ist der Druck gleich dem äußeren Luftdruck, und daher muß im Ofen an der engen unteren Ofenöffnung ein geringer Druck herrschen, als der dortige Luftdruck. Infolgedessen besteht an dieser Öffnung ein starkes Druckgefälle von außen nach innen, durch das dem Brennstoff ständig Frischluft zugeführt wird. Die Luftzufuhr wird durch die verstellbare Ofentür so geregelt, daß gerade diejenige Luftmenge zuströmt, die zur Aufrechterhaltung der gewünschten Stärke des Feuers nötig ist. Ein zwischen Ofen und Kamin angebrachter regelbarer Absperrschieber sorgt dafür, daß die Luft den Ofen nicht zu schnell durchströmt. So wird erreicht, daß nicht mehr Warmluft in den Kamin entweicht, als zur Aufrechterhaltung der Verbrennung und des Zuges erforderlich ist. Werden Ofentür und Absperrschieber zu weit geöffnet, so brennt der Ofen zwar, aber er arbeitet unwirtschaftlich, weil ein zu großer Teil der erzeugten Wärme nutzlos durch den Kamin entweicht.



Abb. 146. Pipette.



Abb. 147. Quecksilberbarometer.

Auf einer Wirkung des Luftdrucks beruht die Pipette (Abb. 146). Taucht man sie in eine Flüssigkeit und verschließt sie oben mit dem Finger, so strömt beim Herausheben zunächst ein wenig von der Flüssigkeit aus. Dadurch dehnt sich die Luft in der Pipette aus und ihr Druck sinkt soweit, daß sie zusammen mit dem Druck der Flüssigkeit in der Pipette an der unteren Öffnung einen dem äußeren Luftdruck gleichen Druck erzeugt. Die Flüssigkeit wird dann vom äußeren Luftdruck getragen und strömt erst aus, wenn man die Pipette oben öffnet. Der Versuch gelingt aber nur, wenn die Flüssigkeit die Pipettenwandung benetzt; andernfalls dringt längs der Wandung Luft ein und die Flüssigkeit strömt aus. Der Versuch von TORRICELLI könnte ohne Wanne angestellt werden, wenn Quecksilber Glas benetzte.

Geräte zur Messung des Luftdrucks heißen *Barometer*. Am häufigsten wird das Quecksilberbarometer benutzt, das im Prinzip der einfachen

Vorrichtung von TORRICELLI entspricht, und von dem Abb. 147 eine Ausführungsform zeigt. Für weniger genaue Messungen dient das Aneroidbarometer

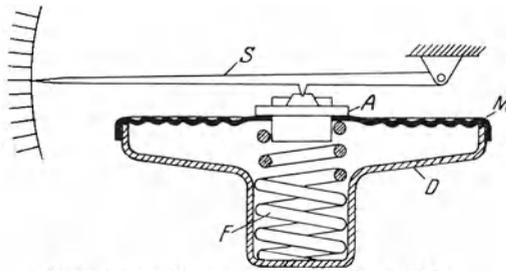


Abb. 148. Aneroidbarometer. *D* Metalldose, *F* Feder, *M* Membran, *A* Lager, *S* Zeiger.

(Abb. 148). Es besteht im wesentlichen aus einer luftdicht verschlossenen Metalldose, deren biegsame Membran *M* sich je nach der Differenz zwischen dem inneren und dem äußeren Luftdruck mehr oder weniger wölbt, und deren Bewegungen auf einen Zeiger übertragen werden. Auch aus der Siedetemperatur des Wassers kann der Luftdruck berechnet werden (§ 113).

71. Vakuumtechnik. Für die Messung von Gasdrücken unterhalb von 760 mm bis herab zu höchstens 1 mm Hg benutzt man Quecksilberbarometer, die an den mit dem Gase gefüllten Raum angeschlossen sind. Abb. 149 zeigt ein abgekürztes Barometer für kleine Drücke, das am einen Ende (rechts) mit dem Gasraum in Verbindung steht. Für Drücke unterhalb von etwa 1 mm Hg benutzt man das Manometer von MACLEOD (Abb. 150). Es ist durch das Rohr *C* mit dem Raum verbunden, in dem der Gasdruck gemessen werden soll. Zunächst wird das Vorratsgefäß *B*, das durch einen dickwandigen Schlauch mit dem etwa 80 cm langen (unterbrochen gezeichneten) Rohr *A* verbunden ist, soweit gesenkt, daß das in dem Apparat enthaltene Quecksilber unterhalb der Abzweigung des Rohres *C* vom Rohr *A* steht, so daß das Gefäß *D* und der Ansatz *E* mit Gas von dem

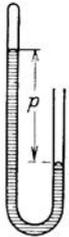


Abb. 149. Abgekürztes Quecksilberbarometer zur Messung kleinerer Gasdrücke.

das in *D* und *E* enthaltene Gas abgesperrt und bis auf $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ oder $\frac{1}{10000}$ seines Volumens zusammengedrückt. Dabei steigt sein Druck auf das 100-, 1000- oder 10000fache an und kann nunmehr aus der Höhendifferenz *b*

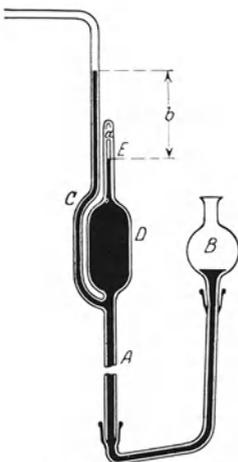


Abb. 150. Manometer nach MACLEOD.

des Quecksilbers in den Röhren *E* und *C* abgelesen werden. Der Gasdruck in *C* wird bei der Kalibrierung von *E* berücksichtigt. Er kann nunmehr berechnet werden. Natürlich kann dieses Verfahren nur auf nahezu ideale Gase angewendet werden, weil der Berechnung ja die Beziehung $pV = \text{const}$ zugrunde liegt, die nur für solche Gase gilt. Sehr niedrige Drücke können z. B. auch aus der Dämpfung eines im Gase schwingenden Quarzfädchens oder aus der Wärmeleitfähigkeit des Gases ermittelt werden.

Einen Raum völlig gasfrei zu machen, ein absolutes Vakuum herzustellen, ist praktisch unmöglich. Unter einem Vakuum versteht der physikalische Sprachgebrauch daher auch nur einen Raum, in dem ein Druck herrscht, der sehr viel kleiner ist als der Druck der Atmosphäre. Man spricht von einem Hochvakuum, wenn der Druck von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} mm Hg ist, bei noch geringeren Drücken von einem Extremvakuum. Es ist möglich, Drücke von 10^{-10} mm Hg und sogar noch weniger zu erzeugen. Daß es sich selbst bei einem Druck von 10^{-10} mm Hg noch keineswegs um einen von Materie im wesentlichen freien Raum handelt, erkennt man leicht. Mit Hilfe der AVOGADROSCHEN Zahl (§ 62)

berechnet man, daß die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 bei Normalbedingungen dann noch einige Millionen beträgt.

Zur Erzeugung eines Vakuums, also zur Verdünnung von Gasen, dienen die Vakuumpumpen. Die erste Luftpumpe wurde im 17. Jahrhundert von OTTO VON GUERICKE erfunden. Sie war eine sog. Stiefelpumpe. In der heutigen Physik spielt die *Vakuumtechnik* eine ganz überragende Rolle. Ihrer Entwicklung die sich insbesondere an den Namen GAEDE knüpft, ist der ungeheure Fortschritt der Physik in den letzten Jahrzehnten zum großen Teil mit zu verdanken. Pumpen für höhere Vakua können nicht gegen den äußeren Luftdruck arbeiten, sondern erfordern ein Vorvakuum, das durch eine Vorpumpe hergestellt wird. Das Gas wird also aus dem zu entleerenden Raum zunächst in das Vorvakuum befördert und aus diesem durch die Vorpumpe entfernt.

Von den zahllosen verschiedenen Pumpenkonstruktionen können wir hier nur einige besonders wichtige erwähnen. Eine sehr bequeme Form der Vorpumpe ist die Wasserstrahlpumpe von BUNSEN (Abb. 151). Aus der Wasserleitung strömt Wasser unter Druck in ein sich konisch verengendes Rohr, aus dessen Düse es in kurzem Strahl in ein weiteres Rohr übergeht, an dessen unterem Ende es austritt. Infolge der Querschnittsverengung in der Düse und auch infolge der Ein-

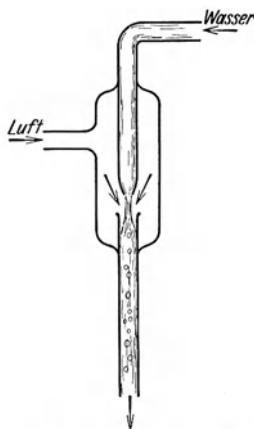


Abb. 151. Wasserstrahlpumpe.

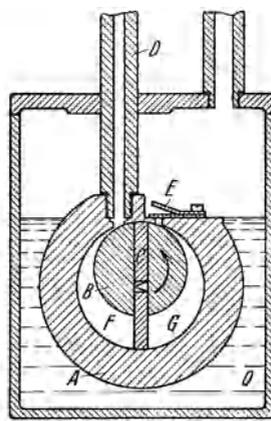


Abb. 152. Kapselpumpe nach GAEDE (Schema).

schnürung im freien Strahl hat das Wasser im Strahl eine große Geschwindigkeit und daher einen niedrigen Druck (§ 73). Daher reißt es das umgebende Gas an sich und befördert es ins Freie. Der zu evakuierende Raum ist an die Pumpe angeschlossen. Da der Raum in der Pumpe stets gesättigten Wasserdampf enthält, so kann mit der Wasserstrahlpumpe ein geringerer Druck als der Sättigungsdruck des Wassers (bei Zimmertemperatur 10—20 mm Hg) nicht erreicht werden.

Einen Druck bis etwa 0,2 mm Hg erreicht man mit der Kapselpumpe von GAEDE (Abb. 152). Sie arbeitet nach dem gleichen allgemeinen Prinzip wie die alte Stiefelpumpe. Der das zu verdünnende Gas enthaltende Raum wird künstlich vergrößert und dadurch der Gasdruck verkleinert. Dann wird ein Teil des Raumes abgesperrt und nach außen entleert. Die Kapselpumpe besteht aus einem zur Dichtung in Öl gebetteten Metallzylinder *A*, innerhalb dessen sich exzentrisch ein drehbarer Zylinder *B* befindet. Dieser besitzt zwei Schieber, die durch Federn gasdicht gegen die Wandung von *A* gepreßt werden, so daß der freie Innenraum in zwei Abteile *F* und *G* getrennt ist. *E* ist ein nach außen führendes Ventil. Der zu evakuierende Raum ist bei *D* angeschlossen. Rotiert der innere Zylinder *B* im Sinne des Pfeils, so vergrößert sich der in Verbindung mit *D* stehende Raum *F* zunächst und wird schließlich mit dem in ihn geströmten Gase durch den Schieber *C* von *D* abgetrennt. Dann tauscht er mit dem Raum *G* die Rollen und verkleinert sich wieder. Dabei wird das in ihm befindliche Gas durch das Ventil *E* nach außen gedrückt. Auf diese Weise entsteht in dem an *D* angeschlossenen Raum ziemlich schnell ein niedriger Druck.

Recht niedrige Drucke erzielt man schon mit der Quecksilberdampfstrahlpumpe, die nach dem gleichen Prinzip arbeitet, wie die Wasserstrahlpumpe.

An die Stelle des Wassers tritt hier ein Strahl von Quecksilberdampf, der von siedendem Quecksilber ausgeht. Der Dampf wird, nachdem er das Gas aus dem zu evakuierenden Raume in das Vorvakuum mitgerissen hat, durch Kühlwasser wieder kondensiert und fließt in das Siedegefäß zurück. Als Vorpumpe kann eine der vorstehend beschriebenen Pumpen dienen.

Zur Erzielung von Hochvakua werden vor allem die Quecksilberdiffusionspumpen benutzt (Abb. 153). Diese Pumpen beruhen darauf, daß das Gas aus dem zu evakuierenden Raum in strömenden Quecksilberdampf hineindiffundiert und von ihm in das Vorvakuum mitgenommen wird. Eine Kühlvorrichtung sorgt dafür, daß kein Quecksilberdampf in das Vakuum gelangt, und daß das Quecksilber im Vorvakuum wieder kondensiert wird, worauf es wieder in das Siedegefäß zurückfließt. Bei dem hier dargestellten Modell ist das zu evakuierende Gefäß bei *F* angeschlossen. Das Rohr *V* führt zu einem größeren Gefäß, in dem ein Vorvakuum aufrechterhalten wird. Der Quecksilberdampf steigt in Richtung des Pfeiles hoch und nimmt bei dem Diaphragma *S* das aus dem Rohr *F* kommende Gas mit. Am Kühler *C* wird der Dampf kondensiert, ebenso der etwa in das Diaphragma eintretende Dampf bei *H*. Das flüssige Quecksilber fließt an der Wand des mit fließendem Wasser gekühlten Kühlers herab und gelangt durch das Rohr *D* wieder in das Siedegefäß.

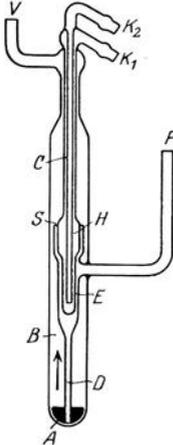


Abb. 153. Quecksilber-Diffusionspumpe.

Die niedrigsten Drucke werden dadurch erzielt, daß man die nach Erzeugung eines Hochvakuums mittels Pumpen noch vorhandenen Gasreste durch besondere Kohlearten absorbieren läßt, die mit flüssiger Luft, für allertiefste Drucke auch mit flüssigem Wasserstoff oder Helium, gekühlt werden (§ 120).

V. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase.

72. Allgemeines über strömende Flüssigkeiten und Gase. Die Gesetze strömender Flüssigkeiten und Gase können unter einem einheitlichen Gesichtspunkt behandelt werden, solange die auftretenden Volumänderungen so klein sind, daß man sie vernachlässigen kann. Bei den Flüssigkeiten ist das wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit stets der Fall. Läßt man bei den Gasen Volumänderungen bis zu 1% zu, ohne sie zu berücksichtigen, so gelten z. B. für atmosphärische Luft die gleichen Gesetze wie für Flüssigkeiten, solange die Strömungsgeschwindigkeiten den Betrag von etwa $50 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ und die vorkommenden Höhenunterschiede den Betrag von etwa 100 m nicht überschreiten. Das trifft in den meisten Fällen zu. Wir werden daher unter dem Begriff „Flüssigkeit“ auch die Gase mit verstehen.

Man bezeichnet die Lehre von den strömenden Flüssigkeiten als *Hydrodynamik*, in der Anwendung auf Gase auch als *Aerodynamik*. Bei eindimensionalen Problemen, wie bei der Strömung durch Röhren, spricht man auch von *Hydraulik*. Wir wollen uns im folgenden auf den Fall *stationärer Strömungen* beschränken, d. h. solcher Strömungen, bei denen die Richtung und Geschwindigkeit der strömenden Teilchen an jedem festen Ort innerhalb der Strömung zeitlich konstant ist.

Unter den *Stromlinien* in einer Flüssigkeit verstehen wir Linien, die überall in Richtung der örtlichen Strömung verlaufen. Eine Stromlinie ist also bei stationärer Strömung das Bild der Bahn eines bewegten Flüssigkeitsteilchens. Die durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve verlaufenden Strom-

linien bilden eine *Stromröhre*. Die innerhalb der Stromröhre bewegte Flüssigkeit nennt man einen *Stromfaden*. Da nirgends aus einer Stromröhre seitlich Flüssigkeit austritt und sich nirgends ständig Flüssigkeit anhäuft, so fließt in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt einer Stromröhre die gleiche Flüssigkeitsmenge (*Kontinuitätsbedingung*).

Demnach kann eine Stromröhre nirgends innerhalb eines von einer stationären Strömung erfüllten Raumes Anfang oder Ende haben. Entweder beginnt sie an der Begrenzung der Flüssigkeit und verläuft nach einer anderen Stelle der Begrenzung oder sie ist in sich geschlossen, sie bildet einen *Wirbel*. Man unterscheidet danach *wirbelfreie Strömungsfelder* und *Wirbelfelder*.

Die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt q strömende Flüssigkeitsmenge ist dem Querschnitt und der Geschwindigkeit v in diesem proportional. Also ist nach der Kontinuitätsbedingung innerhalb einer Stromröhre

$$qv = \text{const.} \quad (1)$$

Dem entspricht die einfache Tatsache, daß in einem Rohr die Flüssigkeit an den engsten Stellen am schnellsten strömt.

Alle Flüssigkeiten zeigen eine *innere Reibung* (§ 76), die die Strömungsverhältnisse mehr oder weniger stark beeinflusst. In vielen Fällen ist dieser Einfluß gering, und man kann von ihm absehen, indem man die Fiktion einer reibungsfreien, *idealen Flüssigkeit* macht. Die wirklichen Flüssigkeiten bezeichnet man demgegenüber als *zähe Flüssigkeiten*. Wir behandeln zunächst die idealen Flüssigkeiten.

73. Die BERNOULLISCHE Gleichung. Wir betrachten ein Element einer Stromröhre von der sehr kleinen Länge Δs . Ihr senkrechter Querschnitt an der Eintrittsstelle sei q , an der Austrittsstelle q' und von q nur sehr wenig verschieden (Abb. 154). Die Koordinate der Stromlinien sei s , und die Röhre sei um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt. In q herrsche der Druck p , in q' der von p nur wenig verschiedene Druck p' . Die Dichte der Flüssigkeit sei ρ und daher die in dem Element enthaltene Masse $\Delta m = \rho q \Delta s$. Auf die Masse Δm wirkt in der Richtung von s infolge des auf ihre Enden wirkenden Druckes die Kraft $p q - p' q'$, ferner die Schwerkraft $-\Delta m g \cos \alpha$, oder wenn wir mit h den senkrechten Abstand des Elements von irgendeiner festen Horizontalebene bezeichnen, wegen $\cos \alpha = \Delta h / \Delta s = dh / ds$ die Kraft $-\Delta m g dh / ds$. Da sich $p' q'$ von $p q$ nur äußerst wenig unterscheidet, so können wir nach dem TAYLORSCHEN Satz schreiben $p' q' = p q + \Delta s d(p q) / ds$. Die gesamte auf die Masse Δm wirkende Kraft ist gleich $\Delta m dv / dt$ ($v =$ Strömungsgeschwindigkeit), so daß wir schließlich erhalten

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = -\Delta s \frac{d(pq)}{ds} - \Delta m g \frac{dh}{ds}.$$

Setzen wir noch $dv / dt = dv / ds \cdot ds / dt = v dv / ds$ und multiplizieren mit ds , so folgt

$$\Delta m \cdot v dv + \Delta s \cdot d(pq) + \Delta m \cdot g dh = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\frac{1}{2} \Delta m v^2 + \Delta s pq + \Delta m gh = \text{const.},$$

oder nach Division durch $\Delta s \cdot q = \Delta m / \rho$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = \text{const} \quad (2)$$

($\rho =$ Dichte der Flüssigkeit). Dies ist die *BERNOULLISCHE Gleichung* (1738). Sie gibt die gegenseitige Abhängigkeit der Geschwindigkeit, des Drucks und der Höhe innerhalb einer Flüssigkeit an.

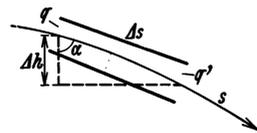


Abb. 154. Zur Ableitung der BERNOULLISCHEN Gleichung.

Dividieren wir die Gl. (2) noch durch ρg , so folgt

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \text{const.} \quad (3)$$

Die drei Glieder dieser Gleichung haben je die Dimension einer Länge (Höhe). Man nennt $v^2/2g$ die *Geschwindigkeitshöhe*. Sie ist gleich der Höhe aus der die Flüssigkeit frei herabgefallen sein müßte, um die Geschwindigkeit v zu erlangen [§ 27, Gl. (75)]. $p/\rho g$ heißt die *Druckhöhe*, denn sie ist gleich der Höhe einer ruhenden Flüssigkeitssäule, die einen hydrostatischen Druck vom Betrage p hervorrufen würde [§ 57, Gl. (2a)]. h heißt die *Ortshöhe*. Demnach ist die Summe dieser drei Höhen innerhalb einer strömenden Flüssigkeit *längs eines Stromfadens* konstant. Für $v = 0$ sind Gl. (2) und (3) mit dem Gesetz des hydrostatischen Drucks identisch.

Die Differenz des Druckes p gegenüber dem hydrostatischen Druck innerhalb einer strömenden Flüssigkeit nennt man den *hydrodynamischen Druck*. Er kann größer oder kleiner als Null sein. Die Gesetze des hydrodynamischen Drucks spielen u. a. eine wichtige Rolle in allen Fällen, wo sich im Wege einer Strömung, sei es eines Gases oder einer Flüssigkeit,

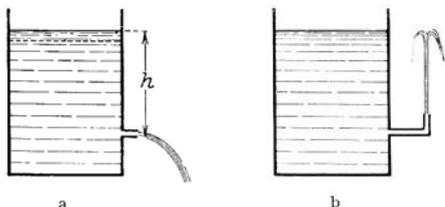


Abb. 155. Zum Theorem von TORRICELLI.

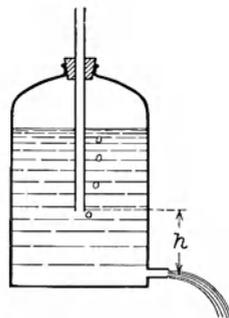


Abb. 156. MARIOTTESCHE Flasche.

ein festes Hindernis befindet, das die Strömung in irgendeiner Weise beeinflusst. Dabei kommt es lediglich darauf an, daß sich Gas oder Flüssigkeit und Hindernis relativ zueinander bewegen, und es ist für die auftretenden Druckkräfte ganz gleichgültig, ob das Hindernis in einer Strömung ruht oder ob es sich durch ein ruhendes Medium hindurchbewegt. Die Theorie des in strömender Luft schwebenden Drachens und die des durch die Luft hindurchbewegten Flugzeugs ist grundsätzlich die gleiche. Die Modellversuche der Flugtechnik werden in der Mehrzahl der Fälle mit ruhenden Modellen in strömender Luft angestellt, die des Schiffbaues dagegen in Kanälen, in denen die Modelle durch ruhendes Wasser geschleppt werden.

Wir wollen die Anwendung der BERNOULLISCHEN Gleichung an einigen Beispielen betrachten. Ein mit einer Flüssigkeit von der Dichte ρ gefüllter Behälter habe h cm unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche eine Ausflußöffnung, aus der die Flüssigkeit ausströmt (Abb. 155a). Im oberen Flüssigkeitsspiegel und an der Öffnung herrscht der äußere Luftdruck $p = b$. Die Ortshöhe der Öffnung sei $x = 0$, diejenige des oberen Flüssigkeitsspiegels also $x = h$. Der Behälter sei so weit, daß die Flüssigkeit in ihm beim Ausströmen nur sehr langsam absinkt, so daß wir im Flüssigkeitsspiegel $v = 0$ setzen dürfen. Dann folgt aus der Gl. (3)

$$\frac{b}{\rho g} + h = \frac{b}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

oder

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (4)$$

Dies ist das *Theorem* von TORRICELLI (1646, aber bereits HERO von Alexandrien um 100 n. Chr. bekannt). Die Ausflußgeschwindigkeit ist so groß, als habe

die strömende Flüssigkeit die ganze Höhe h frei durchfallen. Die Geschwindigkeitshöhe beim Ausfluß ist gleich der Ortshöhe im oberen Niveau. Wird das Ausflußrohr senkrecht nach oben geführt, so müßte die Flüssigkeit wieder bis in die Höhe h steigen (Abb. 155 b). In Wirklichkeit steigt sie wegen der Reibung und wegen der zurückfallenden Tropfen nicht ganz so hoch. Mit sinkendem Flüssigkeitsspiegel sinkt auch die Ausflußgeschwindigkeit. Konstante Ausflußgeschwindigkeit erhält man mit der *MARIOTTESchen Flasche* (Abb. 156). In die verschlossene Flasche ragt ein offenes Rohr, dessen untere Öffnung sich in der Flüssigkeit h cm über der Ausflußöffnung befindet. Infolgedessen herrscht in diesem Niveau stets Atmosphärendruck. (Der Luftdruck oberhalb der Flüssigkeit ist um die Druckhöhe der h überragenden Flüssigkeitsschicht geringer als der Atmosphärendruck, und beim Ausströmen perlt Luft durch das Rohr.) Die Anwendung der Gl. (3) auf das Niveau des unteren Röhrenendes und auf die Ausflußöffnung ergibt wieder die Gl. (4) mit der veränderten Bedeutung von h . Wegen der Konstanz von h ist jetzt auch v konstant.

In einem Behälter, der eine enge Öffnung besitzt, befinde sich ein Gas unter dem Druck p_1 . Im Außenraum herrsche der kleinere Druck p_2 . Im Innern ruht das Gas, an der Öffnung ströme es mit der Geschwindigkeit v aus (Abb. 157). Die beiden Drucke

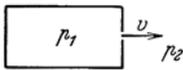


Abb. 157. Zum BUNSENSchen Ausströmungsgesetz.

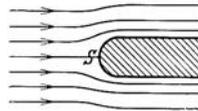


Abb. 158. Zum Staudruck. (Nach PRANDTL.)

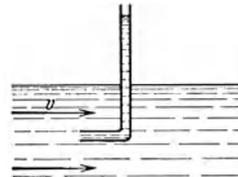


Abb. 159. Pitot-Rohr.

und ihre Differenz seien so groß, daß wir von etwaigen Unterschieden der Ortshöhe h absehen können (bei nicht horizontaler Ausströmung). Dann folgt aus Gl. (2)

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \quad (5)$$

Bei gleicher Druckdifferenz $p_1 - p_2$ ist also die Ausströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase den Wurzeln aus ihren Dichten umgekehrt proportional (*Auströmungsgesetz von BUNSEN*). Hierauf beruht eine Methode zur Bestimmung der Dichte von Gasen.

Be findet sich in einer strömenden Flüssigkeit ein Hindernis, so wird es von ihr umströmt, und die Flüssigkeit staut sich an der Front des Hindernisses. Wo die Strömung sich nach beiden Seiten teilt, im *Staupunkt S*, ist die Strömungsgeschwindigkeit $v = 0$ (Abb. 158). Die Strömungsgeschwindigkeit und der Druck in der strömenden Flüssigkeit im Niveau des Staupunktes (gleiche Ortshöhe h) in größerer Entfernung vom Hindernis seien v_0 und p_0 , der Druck im Staupunkt sei p . Dann folgt aus Gl. (2)

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p \quad \text{oder} \quad p - p_0 = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (6)$$

Die Größe $p - p_0$ heißt der *Staudruck*. Die Gl. (6) bildet ein wichtiges Mittel, um die Strömungsgeschwindigkeit in beliebigen Punkten in einer Strömung, z. B. in Flüssen, aus den Werten von p_0 und p zu bestimmen. Der Staudruck kann mit dem *PITOT-Rohr* (Abb. 158) gemessen werden. Es besteht im einfachsten Fall aus einem gebogenen Rohr, das der Strömung entgegengerichtet wird und als Hindernis dient. Das Wasser steigt im Rohr über das äußere Flüssigkeitsniveau um einen Betrag, der dem Staudruck entspricht. PRANDTL hat ein kombiniertes Gerät angegeben, das p_0 und p gleichzeitig zu messen gestattet.

Sind die Ortshöhenunterschiede in einer Strömung so klein, daß wir sie vernachlässigen dürfen, so nimmt die Gl. (2) die einfachere Form an

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{const.} \quad (7)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß dann der Druck in einer strömenden Flüssigkeit um so kleiner ist, je größer die Geschwindigkeit ist. In einem horizontalen Rohr ist also der Druck an den engeren Stellen kleiner als an den weiteren. Das gleiche gilt auch für die Stromfäden in einer ausgedehnteren Strömung. Auf dieser Tatsache beruht z. B. der Flüssigkeitszerstäuber. Im Wege eines aus einer engen Öffnung austretenden Luftstrahls steht senkrecht zum Strahl ein in die zu zerstäubende Flüssigkeit tauchendes Rohr, das oben auch eine feine Öffnung hat. Infolge des Umströmens der Rohrspitze ist die Strömungsgeschwindigkeit der Luft in der Umgebung der Spitze größer als in weiterer Entfernung, wo Atmosphärendruck herrscht, der Druck also geringer als dieser. Infolgedessen drückt der auf dem Flüssigkeitsniveau lastende

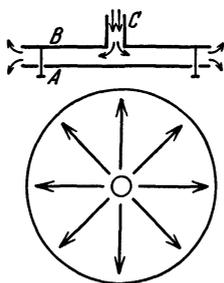


Abb. 160. Zum Nachweis des hydrodynamischen Drucks in einem Gasstrahl.

Atmosphärendruck die Flüssigkeit im Rohr in die Höhe, und sie wird in feinen Tröpfchen vom Luftstrahl mitgenommen. Eine weitere Anwendung der Gl. (7) ist die Wasserstrahlpumpe (Abb. 151, § 71). Aus dem gleichen Grunde, der die Saugwirkung beim Zerstäuber hervorbringt, ziehen Schornsteine bei stetigem Wind besser als bei ruhiger Luft.

Einer mit einem Rohr C versehenen Platte B (Abb. 160) steht in kleinem Abstände eine zweite, bewegliche Platte A gegenüber. Bläst man durch C einen Luftstrom, so wird A nicht etwa abgestoßen, sondern angezogen (aerodynamisches Paradoxon). Es herrscht nämlich an den Außenflächen und am Rande der Platten Atmosphärendruck.

Da der Querschnitt des Luftstroms in der Mitte der Platten enger ist als am Rande, die Geschwindigkeit also von der Mitte zum Rande abnimmt, so ist der Druck zwischen den Platten kleiner als der äußere Druck, und dieser drückt die Platte A gegen B. Im Augenblick der Berührung wird der Luftstrom gedrosselt, die Platte fällt ab, und das Spiel wiederholt sich. Die Platte A tanzt periodisch auf und ab. Auf derartigen periodischen Bewegungen des Gaumensegels beruht auch das Schnarchen. Damit der soeben beschriebene Versuch gelingt, darf der Plattenabstand eine gewisse Größe nicht überschreiten, da sonst der Druckunterschied zu gering wird.

Man forme eine Papiertüte mit verschlossener Spitze so, daß sie genau in einen Glattrichter hineinpaßt, und lege sie lose in ihn hinein. Bläst man durch das Rohr des Trichters, so wird die Tüte gegen den Luftstrom an die Trichterwand gedrückt. Die Erklärung ist die gleiche wie bei Abb. 160.

Auf der BERNOULLISCHEN Gleichung beruht auch der *MAGNUS-Effekt* (1850). Seine strenge Theorie, die eine Berücksichtigung der Reibung erfordert, können wir hier nicht wiedergeben. Wir beschränken uns deshalb auf das Grundsätzliche. Der *MAGNUS-Effekt* besteht darin, daß ein in einer strömenden Flüssigkeit rotierender Zylinder, dessen Achse zur Flüssigkeitsströmung senkrecht steht, eine zur Strömungsrichtung und zu seiner Achse senkrechte Kraft erfährt. Abb. 161 zeigt die Aufnahme eines Modellversuchs in strömendem Wasser. Man sieht, daß unter der Wirkung der Rotation des Zylinders die Stromlinien der Flüssigkeit rechts zusammengedrängt sind, so daß die Flüssigkeit rechts schneller strömt als links. Infolgedessen ist der Druck der Flüssigkeit rechts kleiner als links [Gl. (7)], und der Zylinder wird nach rechts gedrückt. Dieser Effekt wird beim *FLETTNER-Rotor* zum Schiffsantrieb benutzt, wobei ein rotierender Zylinder im Winde dem *MAGNUS-Effekt* unterliegt und wie ein Segel wirkt.

Abb. 162 zeigt einen einfachen Vorlesungsversuch zum Nachweis des MAGNUS-Effekts. Der Effekt spielt eine Rolle in der Ballistik, indem die Geschosse infolge ihres Rechtsdralls bei ihrer Bewegung durch die Luft eine Rechtsabweichung erleiden. Geschnittene, also stark rotierende Tennisbälle beschreiben in der Luft gekrümmte Bahnen.



Abb. 161. Strömung um einen rotierenden Zylinder. (Nach PRANDTL.)

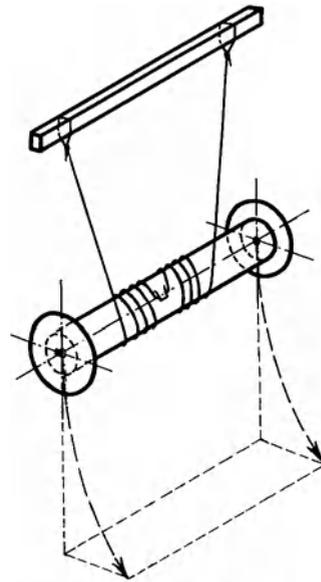


Abb. 162. Zur Demonstration des MAGNUS-Effektes.

74. Trennungsflächen. Wirbel. Kommen zwei Strömungen von verschiedener Geschwindigkeit miteinander in Berührung, so daß sie nunmehr parallel zueinander weiterlaufen, so herrscht zwar auf beiden Seiten der Trennungsfläche der gleiche Druck, aber es besteht eine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit. Dieser Zustand ist mit der Gl. (2) nicht vereinbar und deshalb auch nicht beständig. Vielmehr bilden sich längs der Trennungsfläche *Wirbel* aus, die von der Strömung mitgenommen werden, und die beiden Strömungen gleiten sozusagen wie auf Rollen aneinander vorbei, indem die Wirbel in dem Sinne rotieren, daß ihre Rotation auf der Seite der größeren Geschwindigkeit *in* Richtung der Strömung, auf der anderen Seite *gegen* diese Richtung erfolgt. (Man kann die Erscheinung ganz grob mit der Wirkung eines Kugellagers vergleichen.)

Überhaupt besteht die Neigung zur Wirbelbildung an allen Unstetigkeitsstellen der Strömung oder ihrer Begrenzung. Abb. 163 zeigt die allmähliche Ausbildung eines Wirbelsystems an einer scharfen Kante. In der Bucht hinter der Kante bildet sich ein Totwasser, das gegen die Strömung durch eine Schicht von Wirbeln abgegrenzt ist.

Strömt eine Flüssigkeit oder ein Gas schnell durch eine scharfkantige Öffnung, so bildet sich an dieser ein ringförmig geschlossener Wirbel (Abb. 164). Diese Erscheinung läßt sich mit einem Kasten mit elastischer Rückwand, der vorn eine Öffnung hat, sehr hübsch zeigen, wenn man der Luft im Kasten ein wenig Rauch beimischt. Schlägt man kurz gegen die Rückwand, so bildet sich ein Wirbel und fliegt mit erheblicher Geschwindigkeit mehrere Meter fort, ehe er

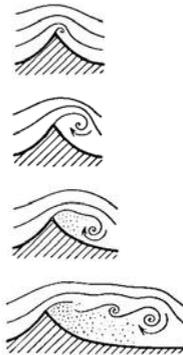


Abb. 163. Ausbildung eines Wirbelsystems an einer scharfen Kante. (Nach PRANDTL.)

sich durch Reibung auflöst. Infolge des beigemischten Rauches ist er sichtbar. Die Heftigkeit der Luftzirkulation im Wirbel zeigt die Tatsache, daß eine brennende Kerze, die von dem Wirbel getroffen wird, mit heftigem Zucken erlischt, ausgeblasen wird. Wie man sieht, sind derartige Ringe sehr beständig.



Abb. 164. Wirbelbildung an einer Ausströmungsöffnung. (Nach PRANDTL.)

Sie werden nur durch Reibung zerstört, und in einer idealen Flüssigkeit wäre ein einmal gebildeter Wirbel überhaupt unzerstörbar. Allerdings gäbe es dann auch kein Mittel, um einen Wirbel zu erzeugen.

75. Tragflächen. Von der technisch überaus wichtigen Theorie der Tragflächen können wir hier nur das Grundsätzliche anführen. Bewegt sich die Tragfläche eines Flugzeuges durch die Luft oder strömt die Luft an der ruhenden Tragfläche vorbei, wie das bei Modellversuchen geschieht, so bildet sich um die Tragfläche eine Strömung aus, die man als die Überlagerung einer sog. *reinen Potentialströmung* (Abb. 165a) und einer *Zirkulation* (Abb. 165b) ansehen kann, so daß die in Abb. 165c dargestellte Strömung entsteht. In dieser sind die Stromlinien oberhalb der Tragfläche zusammengedrängt, unterhalb der Fläche

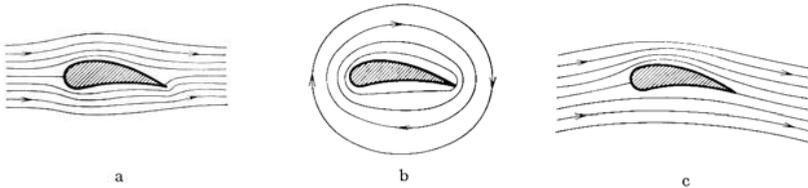


Abb. 165. Zur Theorie der Tragflügel. (Nach PRANDTL.) a Potentialströmung, b Zirkulation, c kombinierte Strömung.

viel weniger dicht, und daher ist der Luftdruck über dem Flügel nach Gl. (2) geringer als unter dem Flügel. Dieser erfährt also eine nach oben gerichtete Kraft, die man auch als *Auftrieb* bezeichnet, die das Flugzeug zum Fliegen befähigt. Das Steigen der Drachen erklärt sich ebenso, desgleichen die treibende

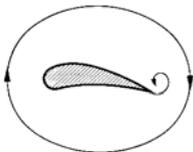


Abb. 166. Anfahrwirbel.

Wirkung von Schiffs- und Luftschauben und die Drehung von Windrädern. Ferner beruht auf der gleichen Ursache die Wirkung der Schiffssegel, der Steuerruder von Luft- und Wasserfahrzeugen und die Tragwirkung der Vogelschwinge beim Segelflug.

Die die Tragfläche ringförmig umströmende Luft (Abb. 165 b) besitzt einen Drehimpuls, und dieser kann nach § 35 nicht entstehen, ohne daß gleichzeitig der gleiche Betrag an Drehimpuls von entgegengesetztem Drehsinn auftritt, so daß die Vektorsumme der beiden Drehimpulse verschwindet. Tatsächlich bildet sich beim Anfahren eines Flugzeuges an der Hinterkante des Tragflügels ein *Anfahrwirbel* aus, dessen Drehsinn demjenigen der Zirkulation entgegengerichtet ist (Abb. 166).

76. Zäh Flüssigkeiten. Innere Reibung. Wie bereits gesagt, ist die Voraussetzung absoluter Reibungsfreiheit eine Idealisierung, die bei den wirklichen Flüssigkeiten und Gasen nie streng zutrifft. Sie besitzen alle eine *Zähigkeit* oder *Viskosität*, die das Auftreten von *innerer Reibung* in einer strömenden Flüssigkeit bzw. einem Gase zur Folge hat. Die innere Reibung äußert sich darin, daß in einer Flüssigkeit (bzw. einem Gase), in der senkrecht zur Strömungsrichtung ein Geschwindigkeitsgefälle besteht, in der also benachbarte Stromröhren eine verschiedene Geschwindigkeit haben, zwischen diesen Stromröhren eine Kraft wirkt, die den schnelleren Stromfaden verzögert, den langsameren beschleunigt, also einen Ausgleich der Geschwindigkeiten herbeizuführen versucht. Diese Kraft ist erstens der Fläche, in der sich die beiden Strom-

röhren berühren, proportional. Zweitens ist sie um so größer, je schneller sich die Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsrichtung von Ort zu Ort ändert, je größer also das Geschwindigkeitsgefälle in der zur Grenzfläche senkrechten Richtung ist. Bezeichnen wir die in dieser Richtung liegende Koordinate mit x , so ist das Geschwindigkeitsgefälle gleich dv/dx . Zwischen zwei Strömungen, die sich in der Fläche F berühren, besteht also eine Kraft

$$k = \eta F \frac{dv}{dx} \text{ dyn.} \quad (8)$$

η ist eine für die betreffende Flüssigkeit oder das Gas charakteristische Konstante, der *Koeffizient der inneren Reibung* oder die Viskosität oder Zähigkeit schlechthin. Ihre Einheit ist 1 Poise = 1 dyn · cm⁻² · sec.

Während eine strenge Theorie der inneren Reibung bei den Flüssigkeiten heute noch nicht besteht, läßt sich ihr Wesen bei den Gasen in allen Einzelheiten auf Grund der kinetischen Gastheorie verstehen. Vor allem bei den Gasen hat die innere Reibung mit der Reibung zwischen festen Flächen nichts als den Namen gemein. Es ist ein Vorgang völlig anderer Art.

In einem ruhenden, gleichmäßig temperierten Gase haben alle Moleküle im Durchschnitt die gleiche Geschwindigkeit, und die Geschwindigkeiten sind über alle Richtungen gleichmäßig verteilt. In einem mit der Geschwindigkeit v strömenden Gase aber überlagert sich der ungeordneten Molekularbewegung die einseitig gerichtete Strömungsgeschwindigkeit. Die Moleküle haben also eine zusätzliche Geschwindigkeit in der Strömungsrichtung. Infolge ihrer ungeordneten Molekularbewegung wechseln nun die Moleküle dauernd zwischen den einzelnen Stromröhren des strömenden Gases hin und her und gelangen dabei aus einer schneller strömenden Röhre in eine langsamer strömende und umgekehrt. Auf diese Weise wird Bewegungsgröße (Impuls) von einer Stromröhre auf die andere übertragen. Die schneller bewegten Stromröhren verlieren durch Abgabe von schnelleren und Aufnahme langsamerer Moleküle Impuls, und umgekehrt erfahren die langsamer bewegten Stromröhren einen Zuwachs an Impuls. Die Geschwindigkeitsunterschiede im strömenden Gase müssen sich also allmählich ausgleichen, wenn nicht von außen her für Aufrechterhaltung des ursprünglichen Zustandes gesorgt wird. Der Übergang des Impulses eines Moleküls auf eine Stromröhre wird dann als vollzogen anzusehen sein, wenn das Molekül mit einem Molekül der betreffenden Stromröhre zusammenstößt. Das stoßende Molekül wird dabei aus einem Bereich kommen, dessen Entfernung von der Stromröhre von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge ist. Je größer diese ist, um so größer ist der Unterschied der Geschwindigkeiten. Sei sie in dem Bereich, von dem das Molekül ausgeht, gleich v und in dem um die freie Weglänge λ entfernten Bereich v' , so ist nach dem TAYLORSchen Satz $v' - v = \lambda dv/dx$, und dieser Größe ist demnach der von dem einen Bereich auf den anderen übertragene Impuls proportional. Jeder Impulsänderung aber entspricht eine Kraft (§ 20). Es erfahren also die einzelnen Stromröhren eines strömenden Gases beschleunigende oder verzögernde Kräfte, die ebenfalls $\lambda dv/dx$ proportional sind. Durch Vergleich mit Gl. (8) erkennt man, daß die innere Reibung η eines Gases seiner freien Weglänge λ proportional sein muß. Ist n die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter, μ die Masse eines Moleküls, also $n\mu = \rho$ die Dichte des Gases, und v die mittlere thermische Geschwindigkeit der Gasmoleküle, so ergibt die Theorie, daß

$$\eta = \frac{1}{3} n \mu v \lambda = \frac{1}{3} \rho v \lambda \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec.} \quad (9)$$

Diese Gleichung liefert das beste Mittel, um die freien Weglängen in Gasen zu bestimmen. Da nach § 68 die freie Weglänge λ der Dichte ρ umgekehrt

proportional ist, so ist die innere Reibung eines idealen Gases von seiner Dichte unabhängig. Da sie der mittleren Molekulargeschwindigkeit proportional ist, so nimmt sie wie die Wurzel aus der absoluten Temperatur zu (§ 62 und 100).

Bei den Flüssigkeiten gelten ähnliche Überlegungen. Doch nimmt ihre innere Reibung mit der Temperatur ab. (Vgl. das Verhalten von Schmierölen bei verschiedenen Temperaturen; Winter- und Sommeröl der Kraftwagen.)

Unter den Erscheinungen, bei denen die Zähigkeit eine wesentliche Rolle spielt, sind die Strömungen durch enge Röhren von besonderer Wichtigkeit. Wir betrachten eine Strömung in einer kreiszylindrischen Röhre vom Radius r

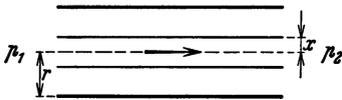


Abb. 167. Zur Ableitung des POISEUILLESchen Gesetzes.

und in dieser einen axialen zylindrischen Stromfaden vom Radius x (Abb. 167). Am Anfang der Röhre herrscht der Druck p_1 , an ihrem Ende der Druck p_2 , wobei $p_1 > p_2$. Auf den Stromfaden wirkt infolgedessen in der Strömungsrichtung die Kraft $(p_1 - p_2)\pi x^2$. Zweitens wirkt nach Gl. (8) in der Mantelfläche $F = 2\pi x l$ der Stromröhre die Kraft $\eta \cdot 2\pi x l \frac{dv}{dx}$. Da bei einer stationären Strömung bei konstantem Rohrquerschnitt eine Beschleunigung der Flüssigkeit nicht erfolgt, so muß die Summe dieser Kräfte gleich Null sein, also

$$(p_1 - p_2)\pi x^2 + \eta \cdot 2\pi x l \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} x.$$

Bei der Integration dieser Gleichung ist zu beachten, daß die der Rohrwandung anliegende Flüssigkeit *stets an der Wand haftet*, also die Geschwindigkeit $v = 0$ hat. Dann folgt

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r^2 - x^2) \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \quad (9)$$

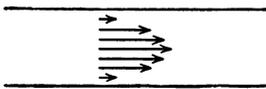


Abb. 168. Strömung einer Flüssigkeit durch ein enges Rohr. Die Pfeile bedeuten die Strömungsgeschwindigkeiten.

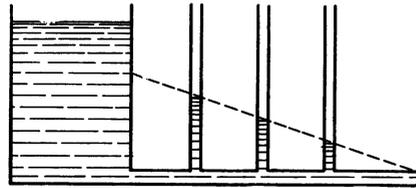


Abb. 169. Druckgefälle in einer Röhre.

Durch eine weitere Integration findet man hieraus leicht das in der Zeit t durch jeden Rohrquerschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen,

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_1 - p_2) t \text{ cm}^3. \quad (10)$$

Dies Gesetz wurde 1839 von HAGEN gefunden, wird aber nach seinem zweiten Entdecker meist das POISEUILLESche Gesetz genannt.

Die Verteilung der Geschwindigkeiten in einer engen Röhre ist in Abb. 168 dargestellt. Die Geschwindigkeit nimmt vom Rande nach der Mitte zu. Doch gelten die vorstehenden Gleichungen nur in engen, nicht in weiten Röhren. Aus Gl. (10) folgt, daß die in 1 sec durch die Röhre fließende Flüssigkeitsmenge der längs der Röhre herrschenden Druckdifferenz proportional ist. Das Druckgefälle in einer Röhre zeigt der in Abb. 169 dargestellte, leicht verständliche Versuch.

Das POISEUILLESche Gesetz gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß die Strömung in der Röhre den von uns vorausgesetzten glatten Verlauf hat, eine sog. *laminare* Strömung ist. Bei nicht zu hoher Geschwindigkeit und nicht zu großem Rohrquerschnitt ist das auch der Fall. Andererseits tritt in der Röhre *Wirbelbildung* ein; die laminare Strömung schlägt in eine *turbulente* Strömung um,

auf die unsere obigen Überlegungen nicht zutreffen. Der Strömungswiderstand der Röhre steigt beträchtlich, und die in 1 sec durch die Röhre strömende Flüssigkeitsmenge ist nunmehr nur etwa der Wurzel aus $p_1 - p_2$ proportional.

Jeder Körper, der sich durch eine Flüssigkeit oder ein Gas bewegt, erfährt eine hemmende Kraft. Diese rührt nicht von einer unmittelbaren Reibung des Körpers am umgebenden Medium her. Denn wie wir schon gesagt haben, haftet die unmittelbar an den Körper grenzende Schicht an ihm, und der auftretende Widerstand rührt von innerer Reibung im umgebenden Medium her. Er hängt, außer von der Art des Mediums, von der Geschwindigkeit und der Gestalt des bewegten Körpers ab. Für eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Kugel vom Radius r gilt unter gewissen Bedingungen in einer Flüssigkeit oder einem Gase von der Viskosität η das *Stokes'sche Gesetz*, nach dem die Größe des Widerstandes

$$k = 6\pi\eta vr \text{ dyn} \quad (11)$$

beträgt. An dieser Gleichung ist bei Gasen noch eine Korrektur anzubringen, wenn es sich um Kugeln handelt, deren Radius so klein ist, daß er mit der freien Weglänge im Gase vergleichbar wird.

Allgemein gilt bei nicht zu großer Geschwindigkeit, daß die hemmende Kraft

$$k = \alpha v \text{ dyn}, \quad (12)$$

also der Geschwindigkeit v proportional ist, wobei α eine von der Art der Flüssigkeit oder des Gases und der Gestalt des Körpers abhängige Größe ist. Fällt ein Körper in einem reibenden Medium, so bewirkt im Anfang der Bewegung die Schwerkraft mg , vermindert um den Auftrieb A , eine Beschleunigung, also ein Wachsen der Fallgeschwindigkeit, und daher auch ein Anwachsen des Reibungswiderstandes. Es stellt sich aber sehr schnell ein Gleichgewichtszustand derart her, daß die um den Auftrieb verminderte Schwerkraft, $mg - A = k'$, durch den Reibungswiderstand kompensiert wird, so daß der Körper nunmehr mit konstanter Geschwindigkeit weiter fällt. Dann ist

$$k = k' = \alpha v \quad \text{oder} \quad v = \frac{k'}{\alpha}.$$

Bei gleichgeformten Körpern wachsen Gewicht mg und Auftrieb A , also auch die Kraft k' , mit der 3. Potenz ihrer Abmessungen, der Reibungswiderstand aber nur mit einer kleineren Potenz [s. als Beispiel Gl. (11)]. Darum fallen kleine Körper langsamer als gleichgeformte größere Körper aus dem gleichen Stoff. Das Schweben sehr kleiner Teilchen, wie Staub, Tröpfchen usw., ist ein sehr langsames Fallen unter der Wirkung der obengenannten Kräfte.

77. Flüssigkeits- und Gasstrahlen. Eine turbulente Strömung liegt auch vor, wenn eine Flüssigkeit oder ein Gas mit einer gewissen Geschwindigkeit aus einer engen Öffnung in einen weiteren, mit dem gleichen Stoff erfüllten Raum eintritt. Es bildet sich dann ein von der Öffnung ausgehender *Strahl*. Dabei werden die angrenzenden Schichten von dem Strahl mitgerissen und in den Strahl mit einbezogen (Abb. 170).

Der Strahl verbreitert sich also, und zwar nimmt sein Querschnitt proportional der Entfernung von der Öffnung zu. Dadurch wächst die Masse m des im Strahl bewegten Stoffes, und da nach dem Impulssatz (§ 20) die Bewegungsgröße mv des Strahls erhalten bleibt, so nimmt gleichzeitig die Strahlgeschwindigkeit v um so mehr ab, je weiter der Strahl sich von der Öffnung entfernt, und wird in großer Entfernung gleich Null. Der umgebende Stoff wird von den Seiten

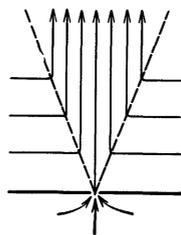


Abb. 170. Stromlinien in einem Flüssigkeits- oder Gasstrahl. (Nach PRANDTL.)

in den Strahl hineingerissen, strömt also von allen Seiten her auf ihn zu. Auf dieser Tatsache beruht das Schweben leichter Körper, z. B. eines Zelluloidballes, in einem Luftstrahl. Wird der Ball in den Strahl gebracht, so wird er durch den Druck des Strahles getragen und durch die allseits zuströmende Luft am seitlichen Entweichen gehindert. Der Versuch gelingt nicht nur bei senkrecht aufsteigendem Strahl, sondern auch noch bei einer nicht zu großen Neigung. In diesem Fall führt der Ball eine Drehbewegung aus, weil er wegen seiner Schwere ein wenig unterhalb der Strahlachse liegt und seine obere Hälfte sich in einem Bereich größerer Strömungsgeschwindigkeit befindet als seine untere Hälfte. (Das bekannte Tanzen eines Balles auf einem Wasserstrahl erklärt sich ganz anders als die vorstehende Erscheinung.)

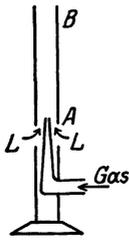


Abb. 171.
Bunsenbrenner.

Auf der geschilderten Art der Strahlbildung beruht auch der Bunsenbrenner (Abb. 171). Das aus der Düse A ausströmende Gas reißt von den Seiten her Luft mit sich und mischt sich mit ihr im Rohr B.

VI. Schwingungen und Wellen. Akustik.

78. **Schwingungen von Massenpunkten.** Wir haben die Schwingungen eines einzelnen Massenpunktes schon in § 42 behandelt. Da wir im folgenden mit x, y, z die Ortskoordinaten der Gleichgewichtslage eines schwingenden Massenpunktes bezeichnen wollen, so bezeichnen wir künftig den Momentanwert der geradlinigen Schwingung eines Massenpunktes, also seine momentane Entfernung von dieser Gleichgewichtslage, mit ξ , seine Schwingungsweite mit ξ_0 . Wir schreiben also nunmehr die Gl. (118) (§ 42) einer ungedämpften, linearen harmonischen Schwingung in der Gestalt

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha) = \xi_0 \sin(2\pi \nu t + \alpha) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau} + \alpha\right). \quad (1)$$

Dabei bedeutet wieder ω die *Kreisfrequenz*, $\nu = \omega/2\pi$ die *Schwingungszahl* oder *Frequenz*, $\tau = 1/\nu$ die *Schwingungsdauer* und α die von der Wahl des Nullpunktes der Zeitskala abhängige *Phasenkonstante*.

Die Schwingung eines Massenpunktes erfolgt aber nur dann nach der einfachen Gl. (1), wenn sie unter der Wirkung einer konstanten Richtkraft erfolgt (§ 42), d. h. wenn die den Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft seinem jeweiligen Abstände ξ von ihr proportional ist. Es gibt Fälle, in denen diese Kraft in anderer Weise vom Abstände ξ abhängt. Auch dann kann eine Schwingung erfolgen, d. h. der Massenpunkt kann eine periodische Bewegung ausführen, bei der er in gleichen Zeitabständen immer wieder die gleichen Orte mit gleich großer und gleich gerichteter Geschwindigkeit durchläuft. Es läßt sich beweisen, daß dann die Schwingung als eine Summe aus — im allgemeinen Fall unendlich vielen — harmonischen *Teilschwingungen* oder *Partialschwingungen* dargestellt werden kann, deren jede für sich der Gl. (1) gehorcht. Der Momentanwert ξ läßt sich also dann als eine, im allgemeinen unendliche, *FOURIERSche Reihe* schreiben,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots = \xi_1^0 \sin(\omega t + \alpha_1) + \xi_2^0 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \left. \begin{aligned} &+ \xi_3^0 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^0 \sin(n\omega t + \alpha_n). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei bedeuten die laufenden *Ordnungszahlen* n die Reihe der positiven ganzen Zahlen. Die 1. Teilschwingung ($n=1$) mit der Kreisfrequenz ω , also der

Schwingungszahl $\nu_1 = \omega/2\pi$, heißt die *Grundschiwingung*, die weiteren Teilschwingungen mit den Kreisfrequenzen $2\omega, 3\omega, \dots$ sind die *Oberschwingungen*. Die n -te Teilschwingung ist also identisch mit der $(n-1)$ -ten Oberschwingung. Die Schwingungszahlen $\nu_n = n\nu_1 = n\omega/2\pi$ sind ganzzahlige Vielfache der Grundschiwingungszahl ν_1 . Im übrigen unterscheiden sich die einzelnen Teilschwingungen erstens durch ihre Phasenkonstanten α_n , zweitens durch ihre Schwingungsweiten ξ_n^0 . In den meisten praktischen Fällen nehmen letztere mit wachsender Ordnungszahl n schnell ab, so daß man die Reihe der Gl. (2) meist nach wenigen Gliedern abbrechen kann, ohne einen ins Gewicht fallenden Fehler zu begehen. Abb. 172 stellt eine Schwingung dar, die aus einer Grundschiwingung und den beiden ersten Oberschwingungen besteht. Es ist angenommen $\xi_1^0 : \xi_2^0 : \xi_3^0 = 6 : 3 : 2$. Die beiden dargestellten Fälle unterscheiden sich durch die Phasenkonstanten. In Abb. 172a ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, in Abb. 172b ist $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\pi/2, \alpha_3 = +\pi/2$.

79. Fortpflanzung von Störungen. Wellen. Wird ein Massenelement eines festen, flüssigen oder gasförmigen Stoffes momentan ein wenig aus seiner natürlichen Ruhelage entfernt, so wird an jener Stelle das elastische Gleichgewicht innerhalb des Stoffes gestört. Indem die zwischen den einzelnen Massenelementen bestehenden elastischen Kräfte das Gleichgewicht wieder herzustellen suchen, überträgt sich die Störung auf die dem verschobenen Massenelement unmittelbar benachbarten Massenelemente, die sich ebenfalls aus ihren Ruhelagen entfernen. Indem diese ihrerseits die ihnen benachbarten Massenelemente beeinflussen, pflanzt sich die Störung vom Störungszentrum aus durch den Stoff fort. Handelt es sich um eine einmalige, momentane Störung, so stellt sich das innere Gleichgewicht des Stoffes auf diese Weise zuerst im Störungszentrum, dann von Ort zu Ort wieder her. Dauert die Störung im Zentrum an, indem die dort befindlichen Massenelemente in dauernder Bewegung um ihre natürliche Ruhelage gehalten werden, so ergreift sie allmählich den ganzen Stoff. Die Störung durchläuft den Stoff mit einer von seiner Beschaffenheit abhängigen Geschwindigkeit. Eine solche Störung, die sich in einem Stoff ausbreitet, heißt eine *Welle*, der von einer Welle betroffene Bereich ein *Wellenfeld*.

Innerhalb eines homogenen und isotropen Stoffes breitet sich eine Welle nach allen Richtungen vom Störungszentrum mit gleicher *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* c aus. Eine in einem bestimmten Zeitpunkt vom Zentrum ausgehende Störung hat also nach der Zeit t die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = ct$ erreicht (Abb. 173). Der zeitliche Verlauf der Störung im Störungszentrum werde durch die Gleichung $\xi = f(t)$ als Funktion der Zeit t dargestellt. Dann treten die einzelnen Zustände, die jeweils durch die einzelnen Phasen der primären Störung im Zentrum bedingt werden, in den Punkten einer solchen Kugelfläche um die Zeit r/c später ein als im Zentrum. Es entspricht also der jeweilige Zustand in den Punkten der Kugelfläche vom Radius r im Zeitpunkt t

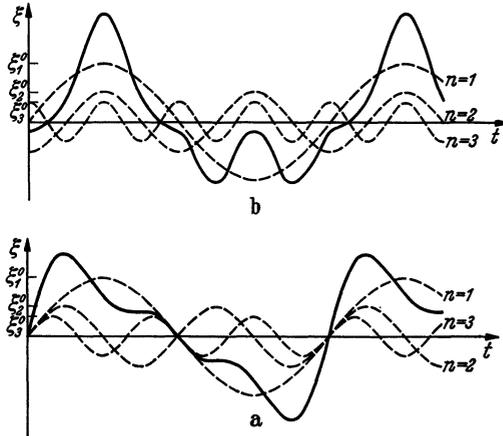


Abb. 172. FOURIER-Zerlegung von Schwingungen.

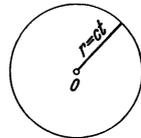


Abb. 173. Ausbreitung einer Kugelwelle.

Innerhalb eines homogenen und isotropen Stoffes breitet sich eine Welle nach allen Richtungen vom Störungszentrum mit gleicher *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* c aus. Eine in einem bestimmten Zeitpunkt vom Zentrum ausgehende Störung hat also nach der Zeit t die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = ct$ erreicht (Abb. 173). Der zeitliche Verlauf der Störung im Störungszentrum werde durch die Gleichung $\xi = f(t)$ als Funktion der Zeit t dargestellt. Dann treten die einzelnen Zustände, die jeweils durch die einzelnen Phasen der primären Störung im Zentrum bedingt werden, in den Punkten einer solchen Kugelfläche um die Zeit r/c später ein als im Zentrum. Es entspricht also der jeweilige Zustand in den Punkten der Kugelfläche vom Radius r im Zeitpunkt t

dem Zustand im Störungszentrum O im Zeitpunkt $t - r/c$. Demnach wird der Zustand im Abstände r vom Zentrum durch die Gleichung

$$\xi = \gamma \cdot f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (3)$$

dargestellt. Der Faktor γ trägt dem Umstande Rechnung, daß der Betrag der Störung vom Abstände vom Zentrum abhängt und außerdem in verschiedenen Richtungen verschieden sein kann.

Demnach sind die Zustände in den einzelnen Punkten eines Wellenfeldes zeitlich verschobene (und in ihrem Betrage verkleinerte) Abbilder der Zustände im Störungszentrum. Greifen wir im Wellenfelde eine Gesamtheit von Punkten heraus, deren momentane Zustandsphasen durch die gleiche — einem bestimmten Zeitpunkt angehörige — Phase der Störung im Zentrum bedingt werden, so sind diese Punkte unter sich alle in gleicher Störungsphase. In einem homogenen Stoff liegen sie auf einer geschlossenen Fläche um das Zentrum. Eine solche Fläche, in der überall gleiche Störungsphase besteht, heißt eine *Wellenfläche*. In einem homogenen und isotropen Stoff sind es Kugelflächen, und man spricht in diesem Falle von *Kugelwellen*. Durch geeignete Reflexion einer Kugelwelle kann man ihre Wellenflächen in Ebenen verwandeln. Eine solche Welle mit ebenen Wellenflächen heißt eine *ebene Welle*. Ebenso wie man die in Wirklichkeit gekrümmte Oberfläche eines kleinen Gewässers auf der Erde meist mit ausreichender Genauigkeit als eben ansehen kann, so kann man oft auch einen kleinen Ausschnitt aus einer Kugelwelle mit kleinem Öffnungswinkel wie eine ebene Welle betrachten (Abb. 174). Das ist insbesondere dann der Fall, wenn es sich um einen kleinen



Abb. 174. Kleiner Ausschnitt aus einer Kugelwelle als ebene Welle.

Raubereich eines Wellenfeldes in großer Entfernung vom Zentrum handelt. Die zu den Wellenflächen senkrechten Kurven heißen *Wellennormalen*. Bei einer Kugelwelle sind sie Radien der Kugel, bei ebenen Wellen parallele Gerade.

Zur Verursachung der Störung im Zentrum müssen die dort befindlichen Massenelemente durch eine an ihnen angreifende Kraft gegen die ihr Gleichgewicht bedingenden Kräfte aus ihrer Ruhelage entfernt werden. Es muß also an ihnen Verschiebungsarbeit gegen diese elastischen Kräfte geleistet werden, durch die die potentielle Energie der Massenelemente erhöht wird. Diese Energie geht mit dem Fortschreiten der Störung auf die benachbarten Massenelemente über und überträgt sich so von Ort zu Ort durch den Stoff. Mit der Ausbreitung der Störung ist also ein Wandern von Energie durch den Stoff verbunden. In jedem Wellenfelde besteht ein vom Störungszentrum ausgehender *Energiestrom*. Auf diese Weise kann die vom Störungszentrum ausgehende Energie an entfernten Orten wirksam werden. So kann eine von einem schwingenden Körper ausgehende Schallwelle unser Trommelfell in Bewegung versetzen. Bei ausreichender Stärke können Störungswellen sogar sehr starke Wirkungen bis in große Entfernungen ausüben (Explosionswellen, Erdbebenwellen).

Geht innerhalb der Zeit dt und innerhalb eines räumlichen Winkels Ω vom Zentrum die Energie $dE = \Phi \Omega dt/4\pi$ aus, so ist $\Phi \Omega/4\pi$ die in 1 sec innerhalb dieses Winkels ausgesandte Energie und heißt die *Energiestromstärke* im Winkel Ω . Der Winkel Ω begrenzt auf einer mit dem Radius r um das Zentrum beschriebenen Kugelfläche eine Fläche $F = r^2 \Omega$ (§ 5). Durch jedes cm^2 dieser Fläche tritt also bei geradliniger Ausbreitung in 1 sec die Energie

$$j = \frac{\Phi \Omega}{4\pi F} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}. \quad (4)$$

j heißt die *Energiestromdichte* in der Fläche F . Sie ist dem Quadrat des Abstandes vom Zentrum umgekehrt proportional (*Entfernungsgesetz*). Ist Φ von der Richtung unabhängig, sendet also das Zentrum Energie nach allen Richtungen in gleicher Stärke aus, so ist Φ die gesamte vom Zentrum in 1 sec ausgesandte Energie, da $4\pi r^2$ die gesamte Oberfläche der Kugel ist.

Wir haben bisher angenommen, daß die Störungsenergie auf ihrem Wege durch den Stoff keine Änderungen erfährt. Meist aber findet eine allmähliche Umwandlung der Energie in andere Energieformen längs ihres Weges statt, insbesondere in Wärme. Dieser Vorgang heißt *Absorption*. Er bewirkt eine Abnahme der Energiestromstärke mit der Entfernung vom Zentrum. In vielen Fällen, besonders bei rein harmonischen Wellen in homogenen Stoffen, gehorcht die Absorption einem einfachen Gesetz: Die Abnahme $d\Phi$ der Größe Φ längs eines Weges dx ist dem örtlichen Betrage von Φ und der Weglänge dx proportional,

$$d\Phi = -\beta\Phi dx. \quad (5)$$

Ist im Punkte $x = 0$ $\Phi = \Phi_0$, so lautet die Lösung dieser Gleichung

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\beta x}. \quad (6)$$

β heißt der *Absorptionskoeffizient* des Stoffes für die betreffende Störung.

80. Strahlen. Wir greifen aus einer Kugelwelle einen Kegel von sehr kleinem Öffnungswinkel heraus (Abb. 174). Lassen wir die Größe dieses Öffnungswinkels unbeschränkt abnehmen, so schrumpft der Kegel mehr und mehr in eine Gerade zusammen, die der Wellennormalen in jenem Bereich entspricht. Ein solches gedachtes Wellengebilde von unendlich kleinem Öffnungswinkel heißt ein *Strahl*. Eine Welle von endlichem Öffnungswinkel kann aus unendlich vielen Strahlen zusammengesetzt gedacht werden. Die Gesamtheit der einen Kegel von endlichem Öffnungswinkel erfüllenden Strahlen heißt ein *Strahlenbüschel*, eine Gesamtheit von parallelen Strahlen ein *Strahlenbündel*. Eine ebene Welle kann als aus Strahlenbündeln zusammengesetzt gedacht werden.

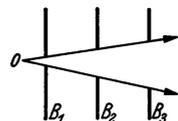


Abb. 175.
Zur Definition der
Bahn der Energie in
einer Welle.

Obgleich man die einzelnen Energieanteile, die sich von einem Zentrum aus innerhalb eines Mediums ausbreiten, nicht identifizieren, d. h. nicht nach einiger Zeit individuell wiedererkennen kann, wie es bei materiellen Körpern der Fall wäre, und obgleich man demnach den Weg, den die Energie in einem Wellenfelde nimmt, nicht von Ort zu Ort verfolgen kann, so kann man doch der Aussage, daß sich die Energie längs bestimmter Wege ausbreitet, einen vernünftigen Sinn beilegen. Blendet man aus einer Welle durch eine Blende B_1 (Abb. 175) einen Kegel aus, so kann man die Begrenzung des Wellenfeldes im weiteren Verlauf durch Anbringung weiterer Blenden B_2, B_3 usw., die die Ausbreitung der Welle gerade nicht mehr stören, ermitteln. In homogenen Medien ergibt sich dann, daß eine Ausbreitung nur innerhalb des durch das Zentrum und die erste Blende definierten Kegels stattfindet. (Von Beugungserscheinungen sehen wir hier ab.) Indem wir die erste Blende beliebig verkleinert denken, schrumpft der Kegel zum Strahl zusammen. Wir dürfen daher so verfahren, als breite sich die Energie auch innerhalb einer Welle von endlichem Öffnungswinkel längs der Strahlen aus, aus denen wir die Welle zusammengesetzt denken können.

Hiernach findet in homogenen Medien eine *geradlinige Fortpflanzung* der Energie in einer Welle statt, und zwar in Richtung der mit den Wellennormalen identischen Strahlen. In inhomogenen Medien, deren Beschaffenheit sich von Ort zu Ort ändert, sind die Strahlen im allgemeinen gekrümmt. Bei sprunghafter Änderung der Beschaffenheit, an der Grenze zweier verschiedener Medien,

findet auch eine sprunghafte Richtungsänderung der Strahlen statt (Reflexion, Brechung). In anisotropen Stoffen fallen die als Bahnen der Energie definierten Strahlen im allgemeinen nicht mit den Wellennormalen zusammen.

Der Begriff des Strahles findet seine wichtigste Anwendung bei den Lichtwellen, die mit den hier betrachteten mechanischen Wellen nur in einem formalen Zusammenhang stehen. Aber auch bei den mechanischen Wellen ist seine Anwendung oft nützlich. Zum Beispiel findet bei den Schallwellen der Begriff des *Schallstrahls* im obigen Sinne häufig Verwendung.

81. Oberflächenwellen. Unter den verschiedenen Wellenarten beanspruchen die *periodischen Wellen* ein besonderes Interesse. Das sind Wellen, die durch eine periodische, d. h. in gleichen Zeitabständen sich ständig wiederholende Störung verursacht werden.

Der allgemeine Begriff der Welle ist von den *Wasserwellen* bzw. den *Oberflächenwellen* von Flüssigkeiten überhaupt abgeleitet. Da an ihnen gewisse grundlegende Begriffe besonders anschaulich verständlich werden, so wollen wir mit ihrer Behandlung beginnen. Die Wasserbewegung in einer Wasser-

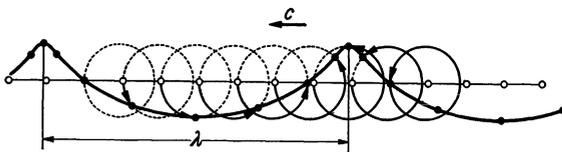


Abb. 176. Wasserwelle.

welle besteht in einer kreisenden Bewegung der Wasserteilchen in der Nähe der Wasseroberfläche. Betrachten wir den Zustand in einer Welle in einem bestimmten Augenblick, so sind die in Richtung der Wellenfortpflanzung auf-

einanderfolgenden Teilchen in ihrer Kreisbewegung um so weiter fortgeschritten, je näher sie dem Ursprung der Welle sind. Denn um so eher werden sie ja von jeder Störungsphase erfaßt (Abb. 176). Auf den Wellenbergen bewegen sich die Wasserteilchen in Richtung der *Wellengeschwindigkeit* c , in den Wellentälern ihr entgegen. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Wellenberge oder Wellentäler, überhaupt zweier aufeinanderfolgender Punkte, in denen sich die Wasserteilchen im gleichen Schwingungszustand befinden, also ihre Phasen sich um 2π unterscheiden, heißt die *Wellenlänge* λ . Die Winkelgeschwindigkeit der Wasserteilchen beträgt ω , also ihre Umlaufzeit auf dem Kreise $\tau = 2\pi/\omega$. Diese ist gleich der Zeit, in der sich ein Wellenberg um eine Wellenlänge fortbewegt. Es ist also $\tau = \lambda/c$ und demnach

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (7)$$

Es ist zweckmäßig, den Zustand in der Welle in einem Koordinatensystem zu betrachten, das sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Welle in der Wellenrichtung bewegt. In diesem System ruhen die Wellenberge und Wellentäler an ihren Orten, und die — in einem ruhenden Koordinatensystem als Ganzes ruhende — Flüssigkeit strömt in ihm als Ganzes mit der Geschwindigkeit c . In einem relativ zur Flüssigkeit ruhenden System ist die Bahngeschwindigkeit eines rotierenden Flüssigkeitsteilchens $r\omega$, wenn r sein Bahnradius ist, oder nach Gl. (7) gleich $2\pi r c/\lambda$. Im bewegten System beträgt sie daher

$$\left. \begin{array}{l} \text{auf den Wellenbergen } v_1 = -c + \frac{2\pi r c}{\lambda}, \\ \text{in den Wellentälern } v_2 = -c - \frac{2\pi r c}{\lambda}. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Da die Flüssigkeit im bewegten System ihre Gestalt an allen Orten unverändert beibehält, besteht in ihm eine stationäre Flüssigkeitsströmung, deren Stromfäden von den kreisenden Flüssigkeitsteilchen gebildet werden und auf die wir

die BERNOULLISCHE Gleichung [§ 72, Gl. (2)] anwenden können. Der Druck p ist auf den Wellenbergen und in den Wellentälern, überhaupt auf der ganzen Oberfläche, der gleiche, nämlich der Luftdruck. Die Höhe h wollen wir vom ungestörten Wasserniveau ab rechnen. Sie beträgt dann im Wellental $-r$, auf dem Wellenberg $+r$, wenn r der Bahnradius der Oberflächenteilchen ist. Dann ergibt die auf diese Stellen angewandte BERNOULLISCHE Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p + \rho g r = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p - \rho g r$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (8)

$$v_1^2 - v_2^2 = 4 g r = \frac{8 \pi r c^2}{\lambda}.$$

Hieraus und aus Gl. (7) folgt

$$c = \sqrt{\frac{g \lambda}{2 \pi}} = \frac{g}{u} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2 \pi c^2}{g} = \frac{2 \pi g}{u^2} \text{ cm}. \quad (9)$$

Es hängt von der Art der Erregung der Welle ab, ob wir die Geschwindigkeit c oder die Kreisfrequenz u als primär gegeben anzusehen haben. Die gewöhnlichen Wasserwellen sind durch hinüberstreichenden Wind erregt, und ihre Geschwindigkeit ist durch die Windgeschwindigkeit bestimmt. In diesem Fall sind also λ und u Funktionen von c gemäß Gl. (9). Wird hingegen die Welle durch eine der Oberfläche an irgendeiner Stelle aufgezwungene Schwingung von der Frequenz ν , also der Kreisfrequenz $2 \pi \nu$ erregt (§ 42), so ist $u = 2 \pi \nu$ primär gegeben, und c und λ ergeben sich aus Gl. (9) als Funktionen von u bzw. ν . Wird eine Welle durch einen in die Flüssigkeit geworfenen Körper erregt, so ist ebenfalls die Frequenz primär gegeben. Sie ist gleich der Frequenz, mit der die durch den Körper hervorgerufene Eindellung der Oberfläche wieder in den normalen Oberflächenzustand einschwingt, und im wesentlichen durch die Abmessungen des Körpers bestimmt. An den Gl. (9) ist bemerkenswert, daß sie weder von der Art der Flüssigkeit (z. B. von ihrer Dichte) noch von der Wellenhöhe abhängen. (Bei sehr großer Wellenhöhe trifft allerdings die vorstehende einfache Theorie nicht zu, und die Geschwindigkeit wird dann auch von der Höhe abhängig.)

Wellen der vorstehenden Art, für deren Zustandekommen die Schwerkraft maßgebend ist, heißen *Schwerewellen*. Der Einfluß der Schwerkraft besteht darin, daß sie die gestörte Flüssigkeitsoberfläche wieder horizontal zu stellen sucht, also die Richtkraft für die Schwingung der Flüssigkeitsteilchen liefert. Im gleichen Sinne wirkt aber auch die Oberflächenspannung (§ 60). Wird auch sie berücksichtigt, so tritt an die Stelle der Gl. (9) die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{g \lambda}{2 \pi} + \vartheta \frac{2 \pi}{\rho \lambda}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad (10)$$

wobei ϑ die Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit ist. Bei langen Wellen überwiegt das der Gl. (9) entsprechende erste Glied weitaus, bei kurzen Wellen aber das zweite. Für diese *Kräusel-* oder *Kapillarwellen* geht daher die Gl. (10) in die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{2 \pi \vartheta}{\rho \lambda}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (11)$$

über. Das sind die kleinen Wellen, die man auf Wasserflächen bei ganz schwachen Winden oder beim leichten Anstoßen eines Wasserglases beobachtet. Nach Gl. (10) hat die Wellengeschwindigkeit ein Minimum bei der Wellenlänge $\lambda = 2 \pi \sqrt{\vartheta / \rho g}$. Ihr entsprechender kleinster möglicher Wert beträgt $c = \sqrt[4]{4 \vartheta g / \rho}$. Diese *kritische Geschwindigkeit* beträgt z. B. beim Wasser rund $23 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, die entsprechende Wellenlänge $1,7 \text{ cm}$.

Die Wellenbewegung erstreckt sich bis in eine gewisse, von der Wellenhöhe abhängige Tiefe unter der Oberfläche. In flachem Wasser kann sie bis auf den Grund reichen. Ist das der Fall, so erfahren die Wasserteilchen in den Wellentälern am Grunde eine Hemmung, und das Fortschreiten der Welle wird an ihrer Basis verzögert, während die Wellenberge noch ungestört fortschreiten. Sie beginnen daher, die Wellentäler zu überholen und überschlagen sich schließlich. Hierauf beruht die *Brandung* im flachen Wasser.

Schwerewellen treten auch an der Grenze zweier Luftschichten von verschiedener Temperatur auf, wenn sie übereinander hinweggleiten (*HELMHOLTZsche Luftwogen*). Sie sind oft an den gerippten Wolkengebilden kenntlich, von denen sie begleitet sind.

82. Räumliche periodische Wellen. Bei der Betrachtung räumlicher Wellen beschränken wir uns auf ebene Wellen. Die Übertragung auf Wellen mit gekrümmten Wellenflächen kann immer leicht vollzogen werden. Wir greifen

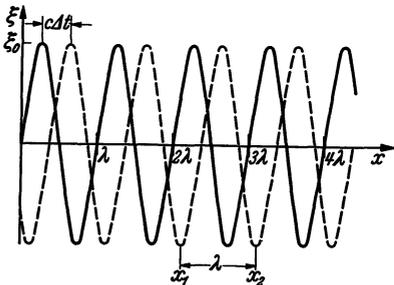


Abb. 177. Momentanwerte der Schwingungen in einer Welle als Funktion des Ortes in einem bestimmten Zeitpunkt t und zur Zeit $t + \Delta t$.

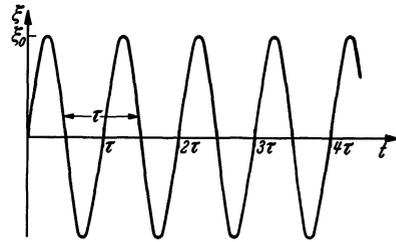


Abb. 178. Momentanwerte der Schwingungen in einer Welle als Funktion der Zeit t an einem bestimmten Ort.

einen Punkt im Felde einer in der positiven x -Richtung fortschreitenden ebenen, harmonischen Welle heraus und bezeichnen seine Koordinate mit $x = 0$. Unsere Zeitskala wählen wir so, daß hier die Phasenkonstante α verschwindet und die Schwingung durch die Gleichung $\xi = \xi_0 \sin \omega t = \xi_0 \sin 2\pi \nu t$ dargestellt wird. In einem um die Strecke x von diesem Punkt entfernten zweiten Punkt wird daher die Schwingung nach Gl. (3) durch die Gleichung

$$\xi = \xi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \xi_0 \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (12)$$

dargestellt. (Wir nehmen an, daß keine Absorption der Welle stattfindet, und daß daher die Schwingungsweite ξ_0 vom Orte x unabhängig ist.) Zwei Punkte mit den Koordinaten x_1 und x_2 (Abb. 177) befinden sich dann *zu jeder Zeit* t im gleichen Schwingungszustand, wenn ihre Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π also gleich $2n\pi$ ist (n positive oder negative ganze Zahl), d. h. wenn $2\pi \nu (t - x_1/c) - 2\pi \nu (t - x_2/c) = 2n\pi$ oder $x_2 - x_1 = nc/\nu$ ist. Demnach haben zwei aufeinander folgende Punkte von gleichem Schwingungszustand, z. B. zwei benachbarte Maxima $+\xi_0$ oder Minima $-\xi_0$ den Abstand $x_2 - x_1 = c/\nu$. Dieser Abstand

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi \frac{c}{\omega} = c\tau \text{ cm} \quad (13)$$

heißt die *Wellenlänge* der Welle, wie der Abstand zweier Wellenberge bei einer Oberflächenwelle. Sie ist bei gegebener Wellengeschwindigkeit c um so kleiner, je größer die Schwingungszahl ν ist. Längs einer Wellenlänge kommen alle möglichen Schwingungszustände einmal vor. (Alle einzelnen Beträge des Momentanwertes kommen zweimal vor. Diese Punkte werden aber momentan jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.)

Abb. 177 gibt eine graphische Darstellung der Momentanwerte ξ in einer Welle als Funktion des Ortes x in einem bestimmten Zeitpunkt t (ausgezogen) und in einem um die Zeit Δt späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ (gestrichelt). Während der Zeit Δt hat sich die Welle um die Strecke $c\Delta t$ in der x -Richtung verschoben. Abb. 178 zeigt die Welle als Funktion der Zeit t in einem bestimmten Punkte x . (Abb. 178 ist mit Abb. 99a identisch, da auch sie eine ungedämpfte Schwingung eines Massenpunktes darstellt.) Die beiden Kurven gleichen einander vollkommen. Dies ist ein Beispiel für den häufig vorkommenden Fall, daß ein gleichzeitiges räumliches Nebeneinander ein getreues Abbild des zeitlichen Nacheinander ist. In Abb. 177 ist der Abstand zweier benachbarter Punkte von gleichem Schwingungszustand die Wellenlänge λ , in Abb. 178 die Schwingungsdauer τ .

83. Longitudinale Wellen.

Man hat zwei verschiedene Arten von Wellen zu unterscheiden, je nach der Richtung, in der die Massenteilchen gegenüber der Fortpflanzungsrichtung der Welle schwingen. Bei den *longitudinalen Wellen* führen die Massenteilchen Hin- und Herschwingungen *in Richtung* der Wellenfortpflanzung aus, bei den *transversalen Wellen senkrecht* zu ihr. Bei den longitudinalen Wellen liegt also die Verschiebung ξ in der Wellennormalen. In Abb. 179a sind die momentanen Verschiebungen ξ äquidistanter Massenteilchen aus ihrer Gleichgewichtslage in einer longitudinalen Welle dargestellt. Man sieht, daß der Stoff, in dem die Welle verläuft, in gewissen Bereichen, deren Breite gleich einer halben Wellenlänge ist, zusammengedrückt und in gleich breiten Bereichen gedehnt ist. In Abb. 179b sind die momentanen Geschwindigkeiten $v = d\xi/dt = \xi_0 \omega \cos \omega(t - x/c)$ durch Pfeile angedeutet. In den zusammengedrückten Bereichen bewegen sich die Massenteilchen in Richtung der Wellenfortpflanzung, in den gedehnten Bereichen ihr entgegen. In ersterem herrscht ein erhöhter, in letzteren ein erniedrigter Druck. Die Druckänderungen Δp sind gegenüber den Verschiebungen ξ um $\pi/2$ in Phase verschoben, wie ein Vergleich der Abb. 179c und d zeigt.

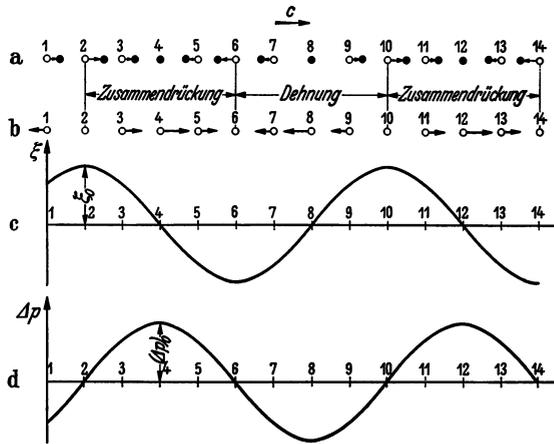


Abb. 179. a momentane Verschiebung, b momentane Geschwindigkeit der Massenteilchen in einer longitudinalen Welle, c graphische Darstellung der momentanen Verschiebung, d der momentanen Druckänderung.

Wie man sieht, hängt der Mechanismus der longitudinalen Wellen eng mit der Zusammendrückbarkeit und Dehnbarkeit der Stoffe, also mit ihrem Elastizitätsmodul E , zusammen. Ferner leuchtet ein, daß dabei auch die Trägheit der Massenteilchen, also die Dichte ρ des Stoffes, eine Rolle spielt. In der Tat wird die Geschwindigkeit longitudinaler Wellen allein durch diese beiden Materialkonstanten bestimmt. Sie beträgt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \tag{14}$$

(NEWTONSche Gleichung). Bei den Gasen könnte man nach § 67 vermuten, daß der Druck p an die Stelle des Elastizitätsmoduls E zu treten hätte. Tatsächlich ist, wie wir in § 108 begründen werden, an Stelle von E das Produkt

$\rho \kappa$ aus dem Druck p und der Größe $\kappa = c_p/c_v$ zu setzen, das für einatomige ideale Gase 1,67, für zweiatomige 1,40 und für drei- und mehratomige 1,33 beträgt. Bei den Gasen ist also

$$c = \sqrt{\frac{p \kappa}{\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \quad (15a)$$

Statt p/ρ können wie bei einem idealen Gase nach § 103 auch schreiben $p/\rho = p V_s = RT/M$ (V_s spezifisches Volumen, T absolute Temperatur, M Molekulargewicht, R universelle Gaskonstante). Dann folgt

$$c = \sqrt{\frac{RT}{M}} \kappa \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \quad (15b)$$

Die Wellengeschwindigkeit hängt also in einem idealen Gase nur von der Temperatur, nicht vom Druck ab. Führen wir statt T die Celsiusstemperatur t ein, $T = t + 273^\circ$ (§ 99), und ist c_0 die Geschwindigkeit bei 0°C , so ergibt eine einfache Umrechnung

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \quad (16)$$

Da auch der Schall ein Wellenvorgang ist, dessen Geschwindigkeit durch die

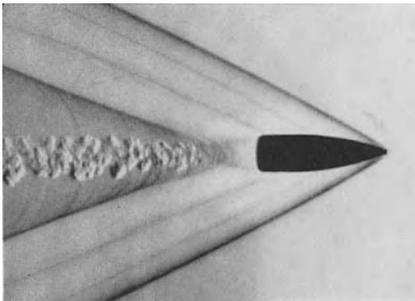


Abb. 180. Kopfknallwelle eines Geschosses.
(Nach CRANZ.)

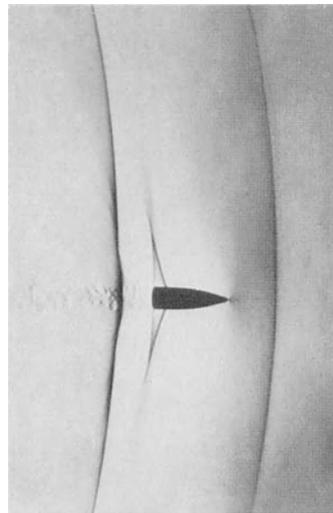


Abb. 181. Ablösung der Knallwelle vom Geschöß.
(Nach CRANZ.)

obigen Gleichungen gegeben ist, so bezeichnet man die longitudinale Wellengeschwindigkeit c oft auch als die *Schallgeschwindigkeit*. Bei $t = 0^\circ \text{C}$ beträgt sie in Luft $33150 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, bei 20°C rund $34000 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$.

Longitudinale Wellen können in allen Arten von Stoffen auftreten. Man kann sie in der Luft und andern Gasen mit der *Schlierenmethode* (TÖPLER, CRANZ) sichtbar machen. Diese beruht darauf, daß die Verdichtungen und Verdünnungen in der Welle Inhomogenitäten des Gases und damit örtliche Änderungen des optischen Brechungsindex hervorrufen. Abb. 180 zeigt eine nach diesem Verfahren hergestellte Aufnahme der Kopfknallwelle eines Infanteriegeschosses, d. h. der von der Bewegung der Geschößspitze erzeugten Druckwelle. Am Geschößschwanz entsteht ein luftverdünnter Raum, an den sich wiederum eine Verdünnungswelle anschließt. Wenn die Geschößgeschwindigkeit durch Luftreibung kleiner als die Schallgeschwindigkeit geworden ist, lösen sich beide Wellen vom Geschöß ab (Abb. 181). Bei sehr großer Knallstärke treten Abweichungen von der Gl. (15) ein.

84. Transversale Wellen. Polarisation. Wellen bei denen die Massenteilchen senkrecht zur Wellenfortpflanzung schwingen, heißen *transversale Wellen*.

Im einfachsten Falle bewegen sich dabei die Teilchen innerhalb eines Strahls auf parallelen, zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten *Geraden*, also in der gleichen Ebene. Eine solche Welle heißt *linear polarisiert* (Abb. 182b). Erfolgt die Bewegung der einzelnen Teilchen aber in einer zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten *Ebene*, so kann man die Welle in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen zerlegen, die sich in isotropen Stoffen mit gleicher, in anisotropen Stoffen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Im allgemeinsten Falle wird bei einer einfach harmonischen transversalen Welle der jeweilige Ort eines Massenteilchens durch einen von seiner natürlichen Ruhelage ausgehenden Fahrstrahl r dargestellt, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω , also mit der Kreisfrequenz $\omega = u$, in der zur Fortpflanzungsrichtung der Welle senkrechten Ebene umläuft und dabei periodisch seine Länge ändert, so daß sein Endpunkt, der Ort des Teilchens, eine Ellipse beschreibt (Abb. 182a). Eine solche Welle heißt *elliptisch polarisiert*. Die Momentanwerte der Schwingungskomponenten in Richtung der beiden Halbachsen der Ellipse haben die Phasendifferenz $\pi/2$ und werden daher (bei entsprechender Wahl der Phasenkonstanten) durch die Gleichungen

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \quad \text{und} \quad \zeta = \zeta_0 \cos \omega t \quad (17)$$

dargestellt. η_0 und ζ_0 sind die beiden Halbachsen der Teilchenbahn, und es ist $\eta^2/\eta_0^2 + \zeta^2/\zeta_0^2 = 1$. Wird die eine Halbachse, z. B. ζ_0 gleich 0, so ist die Welle *linear polarisiert* (Abb. 182b). Ist $\eta_0 = \zeta_0$, so ist die Bahn ein Kreis, die Welle ist *zirkular polarisiert* (Abb. 182c).

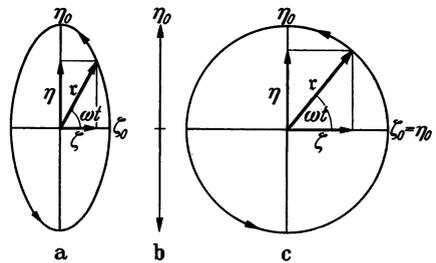


Abb. 182. a elliptisch, b linear, c zirkular polarisierte Schwingung.

Durch die Polarisationserscheinungen unterscheiden sich die transversalen Wellen grundsätzlich von den longitudinalen Wellen. Im Zweifelsfalle kann die Möglichkeit, eine Welle linear zu polarisieren, zur Entscheidung über ihren longitudinalen oder transversalen Charakter führen, wie das beim Licht der Fall gewesen ist. Längs eines gespannten Seiles können sowohl longitudinale wie transversale Wellen verlaufen. Führt man das Seil durch einen Schlitz, so können longitudinale Seilwellen durch den Schlitz bei jeder Orientierung desselben stets ungestört hindurchtreten. Von einer transversalen Seilwelle kann aber nur die in der Schlitzrichtung gelegene linear polarisierte Komponente hindurchtreten. Ist die Welle schon linear polarisiert, so geht sie nur dann ungestört durch den Schlitz hindurch, wenn die durch die Schwingungsrichtung des Seils und die Fortpflanzungsrichtung der Welle bestimmte Ebene, die *Polarisationsebene*, in der Schlitzrichtung liegt. Liegt sie senkrecht dazu, so kann die Welle durch den Schlitz überhaupt nicht hindurchtreten. *Es ist ein Kennzeichen transversaler Wellen, daß sie polarisiert, insbesondere linear polarisiert sein können, und daß geeignete, in ihren Weg gestellte Gebilde sie dann bei einer Drehung um die Fortpflanzungsrichtung als Achse je nach ihrer Stellung ungestört hindurchlassen oder zum Teil oder ganz aufhalten.*

In Abb. 183a sind die momentanen Verschiebungen äquidistanter Teilchen in einer linear polarisierten, einfach harmonischen transversalen Welle dargestellt. Die durch die Phasenunterschiede der Schwingungen hervorgerufenen gegenseitigen Verschiebungen der einzelnen Teilchen sind mit Biegungen und Scherungen des Mediums verknüpft (Abb. 183b). Die Richtkräfte, die die natürliche Ruhelage der Teilchen gegen die durch die Welle übertragenen Kräfte wieder herzustellen suchen, sind biegende und schernde Kräfte. Solche gibt es aber nur in festen Stoffen, und daher sind *transversale Wellen nur in festen Stoffen möglich*.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist kleiner als diejenige der longitudinalen Wellen und hängt außer vom Elastizitätsmodul auch vom Scherungsmodul ab.

Man erkennt aus Abb. 183b, daß die Biegungen in den Maxima, die die Scherungen in den Minima der Schwingungen am größten sind. Die Scherungsmaxima sind also — wie die Druckmaxima in einer longitudinalen Welle —, gegen die Verschiebungsmaxima um $\pi/2$ in Phase verschoben, und das gleiche gilt für die entsprechenden Minima.

Von den Erdbebenherden gehen im Erdkörper longitudinale und transversale Wellen und drittens Oberflächenwellen aus, die von dem senkrecht über dem Herd liegenden Punkt der Erdoberfläche ausgehen. Die drei Wellen

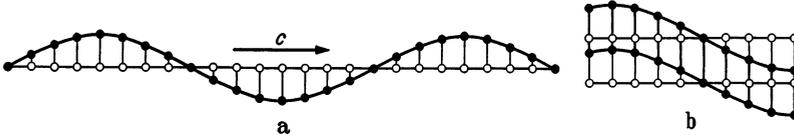


Abb. 183. a momentane Verschiebungen in einer transversalen Welle, b Biegung und Scherung des Mediums.

haben verschiedene Geschwindigkeiten und daher verschieden lange Laufzeiten nach entfernteren Orten. Aus den Differenzen dieser Laufzeiten kann auf Grund der Aufzeichnungen der Seismographen der Erdbebenwarten die ungefähre Lage des Erdbebenherdes berechnet werden.

85. DOPPLER-Effekt. Eine allgemein bekannte Erscheinung ist der DOPPLER-Effekt, z. B. das plötzliche Sinken der Tonhöhe eines Lokomotivpfeifs im Augenblick des Vorbeifahrens.

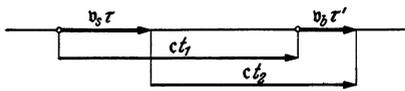


Abb. 184. Zum DOPPLER-Effekt.

Das gleiche beobachtet man auch, wenn man in einem Zuge an einem in Betrieb befindlichen Läutewerk vorbeifährt, sowie überhaupt immer dann, wenn sich ein Beobachter und eine Schallquelle aneinander vorbeibewegen.

Der DOPPLER-Effekt beruht darauf, daß durch eine gegenseitige Bewegung von Schallquelle und Beobachter die Schwingungszahl des empfangenen Schalles verändert wird.

Wir wollen nur die Fälle betrachten, in denen sich Beobachter und Schallquelle längs der gleichen Geraden bewegen (Abb. 184). Die Geschwindigkeit der Schallquelle sei v_s (Betrag v_s), die des Beobachters v_b (Betrag v_b), die Schallgeschwindigkeit c (Betrag c). Die Frequenz der Schallquelle sei ν , also ihre Schwingungszeit $\tau = 1/\nu$. Zur Zeit $t = 0$ sende sie einen Scheitelwert ihrer Schwingung aus, also zur Zeit τ den nächstfolgenden Scheitelwert. Wir fragen nach der Zeit τ' , die zwischen dem Eintreffen des ersten und des zweiten Scheitelwertes beim Beobachter verstreicht, und nach der Frequenz $\nu' = 1/\tau'$ des von ihm empfangenen Tones. In der Zeit τ , also während der Dauer einer Vollschwingung, legt die Schallquelle den Weg $v_s \tau$ zurück. Der Beobachter aber legt während des Empfanges der gleichen Vollschwingung den Weg $v_b \tau'$ zurück (Abb. 184). Die Laufzeit des ersten Scheitelwertes bis zum Beobachter sei t_1 , die des zweiten t_2 . Dann ist $t_1 + \tau' = \tau + t_2$, also $t_2 - t_1 = \tau' - \tau$. Der erste Scheitelwert legt den Weg $c t_1$, der zweite den Weg $c t_2$ zurück. Aus der Abb. 184 liest man ab:

$$v_s \tau + c t_2 = v_b \tau' + c t_1 \quad (18)$$

oder

$$\tau' (c + v_b) = \tau (c + v_s). \quad (19)$$

Wir haben nunmehr 4 Fälle zu unterscheiden, von denen in Abb. 184 nur einer gezeichnet ist, die aber alle der Gl. (19) gehorchen. Es kann nämlich sowohl v_s

wie v_b die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung haben wie c . Dabei wollen wir die Richtung von c , also von der Schallquelle zum Beobachter, stets positiv rechnen. Aus Gl. (19) ergibt sich dann das folgende Schema:

$$\left. \begin{array}{l}
 1. \quad v_b \uparrow \uparrow c, \quad v_s \uparrow \uparrow c; \quad \tau' = \tau \frac{c + v_s}{c + v_b} \\
 2. \quad v_b \uparrow \uparrow c, \quad v_s \downarrow \uparrow c; \quad \tau' = \tau \frac{c - v_s}{c + v_b} \\
 3. \quad v_b \downarrow \uparrow c, \quad v_s \uparrow \uparrow c; \quad \tau' = \tau \frac{c + v_s}{c - v_b} \\
 4. \quad v_b \downarrow \uparrow c, \quad v_s \downarrow \uparrow c; \quad \tau' = \tau \frac{c - v_s}{c - v_b}
 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Im 2. Fall ist stets $\tau' < \tau$, im 3. Fall stets $\tau' > \tau$. Im 1. Fall ist $\tau' \geq \tau$, je nachdem $v_s \geq v_b$. Umgekehrt ist im 4. Fall $\tau' \geq \tau$, je nachdem $v_s \leq v_b$. Allgemein ist, wie man leicht sieht, $\tau' > \tau$, wenn sich der Abstand zwischen Beobachter und Schallquelle vergrößert, andernfalls $\tau' < \tau$. Demnach ist bei wachsendem Abstand $\nu' < \nu$, d. h. der Beobachter empfängt einen Ton, dessen Schwingungszahl ν' kleiner ist als derjenige der Schallquelle. Bei abnehmendem Abstand dagegen ist die empfangene Schwingungszahl ν' größer.

Wir können nunmehr leicht die einfachen Fälle behandeln, in denen entweder der Beobachter ruht ($v_b = 0$) oder die Schallquelle ruht ($v_s = 0$), und die in diesen Fällen vom Beobachter empfangene Schwingungszahl $\nu' = 1/\tau'$ berechnen. Bei ruhendem Beobachter werden natürlich der 1. und der 3. Fall sowie der 2. und der 4. Fall, bei ruhender Schallquelle der 1. und der 2. Fall sowie der 3. und der 4. Fall identisch. Es ergibt sich dann das folgende Schema:

	Ruhender Beobachter $v_b = 0$	Ruhende Schallquelle $v_s = 0$
Abstand nimmt ab...	$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v_s}{c}}$	$\nu' = \nu \left(1 + \frac{v_b}{c} \right)$
Abstand nimmt zu...	$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v_s}{c}}$	$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_b}{c} \right)$

(21)

Beim Durchgang der Schallquelle bzw. des Beobachters durch den Ort des ruhenden Beobachters bzw. der ruhenden Schallquelle springt jeweils der obere Fall in den unteren um. Bei einer Lokomotive, die mit einer Geschwindigkeit von $30 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ (108 km in der Stunde) vorbeifährt, ist, mit $c = 340 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$, das Verhältnis der Schwingungszahlen beim Nähern und Entfernen etwa gleich 6:5. Der Ton springt also etwa um eine kleine Terz.

Im allgemeinen ist $v_s/c \ll 1$, so daß $\nu / (1 \pm v_s/c) \approx \nu (1 \mp v_s/c)$. Es macht also praktisch meist nur einen sehr kleinen Unterschied, ob sich der Abstand durch Bewegung der Schallquelle oder des Beobachters ändert. Es kommt fast nur auf die relative Geschwindigkeit beider an.

86. Reflexion von Wellen. Trifft eine Welle auf die Grenze zweier verschieden beschaffener Medien, so wird sie in verschiedener Hinsicht beeinflusst. Ein Teil der Wellenenergie — u. U. sogar die ganze Wellenenergie — *reflektiert*, d. h. in das erste Medium zurückgeworfen. Der andere Teil tritt in das zweite Medium ein und erfährt dort — sofern er nicht in unmittelbarer Nähe der Oberfläche absorbiert wird —, eine Richtungsänderung (*Brechung*). Das Verhältnis der

beiden Anteile kann je nach den Umständen sehr verschieden sein, es kann der eine den andern sehr stark überwiegen.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei einer glatten Grenzfläche. Eine solche ist als glatt zu bezeichnen, wenn sie keine Unregelmäßigkeiten besitzt, deren Abmessungen in die Größenordnung der Wellenlänge fallen. An einer solchen Grenzfläche tritt *reguläre Reflexion (Spiegelung)* ein, bei der die Wellenflächen auf breiter Front ihren Charakter als zusammenhängende Flächen behalten. Ist aber die Grenzfläche im obigen Sinne rau, so zerfallen die Wellenflächen an den verschieden orientierten Elementarflächen der Grenzfläche. Die Welle splittert in eine sehr große Zahl von Elementarwellen (Strahlen) auf, die sich von der Grenzfläche aus nach allen möglichen Richtungen ausbreiten (*diffuse Reflexion*).

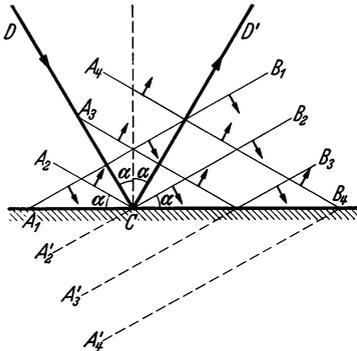


Abb. 185. Zur Reflexion einer Welle.

Bei der regulären Reflexion an einer ebenen Fläche liegen die Wellenflächen nach der Reflexion in jedem Augenblick spiegelbildlich zu derjenigen Lage, die sie ohne das Vorhandensein der Grenzfläche gehabt hätten (Abb. 185). Ein Stück $A_1 B_1$ einer ebenen Wellenfläche, das sich ohne Anwesenheit der Grenzfläche nach einer gewissen Zeit nach $A'_2 B_2$ verschoben hätte, erscheint infolge der Reflexion in C geknickt. Der Teil $A_2 C$ läuft bereits in das erste Medium zurück, während der Teil $C B_2$ sich noch auf die Grenzfläche hin bewegt.

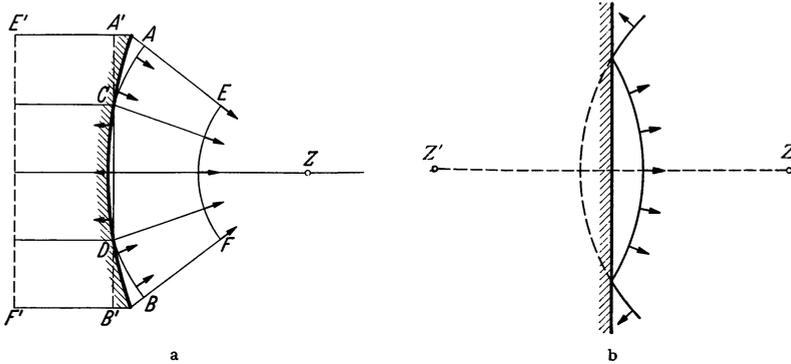


Abb. 186. a Reflexion einer ebenen Welle an einer Kugelfläche, b Reflexion einer Kugelwelle an einer Ebene.

Nach einiger Zeit ist der betrachtete Teil der Wellenfläche vollständig reflektiert ($A_4 B_4$). Die Ebenen $A_2 C$ und $A'_2 C$ liegen symmetrisch zur Grenzfläche, bilden also mit ihr den gleichen Winkel α (*Einfallswinkel*). Im allgemeinen bezieht man sich beim *Reflexionsgesetz* nicht auf die Wellenflächen, sondern auf die Wellennormalen (DC bzw. CD'), also auf die mit diesen zusammenfallenden Strahlen. Errichten wir z. B. in C Lote auf der einfallenden und der schon reflektierten Wellenfläche, so sind diese identisch mit dem in C einfallenden und dort wieder reflektierten Strahl. Aus Abb. 185 folgt ohne weiteres, daß der einfallende und der reflektierte Strahl mit dem in C auf der Grenzfläche errichteten Lot CE (*Einfallslot*) gleiche Winkel — und zwar den Einfallswinkel α — bilden, und daß sie mit dem Einfallslot in der gleichen Ebene liegen (Abb. 185). Das gilt auch dann, wenn die einfallende Welle nicht eben ist, sondern ihre Wellenflächen gekrümmt sind.

Die Reflexion einer Welle an einer gekrümmten Fläche erfolgt so, als werde jeder ihrer Strahlen an einer in seinem Auftreffpunkt an die Fläche gelegten Tangentialebene reflektiert. Die Gestalt der Wellenflächen erfährt bei der Reflexion an einer gekrümmten Fläche eine Änderung. Abb. 186a zeigt die Reflexion einer ebenen Welle an einer konkaven Kugelfläche. Die von rechts her eingefallene ebene Wellenfläche, die ohne Vorhandensein der reflektierenden Fläche bis $E'F'$ fortgeschritten wäre, bildet infolge der Reflexion die Wellenfläche EF . Sie ist in ihrem mittleren Teil näherungsweise eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt Z um den halben Radius der reflektierenden Fläche von dieser entfernt liegt (*Brennpunkt*, vgl. § 270). Die Wellenfläche, die ohne Reflexion bis $A'B'$ gelangt wäre, ist erst mit den Teilen AC und BD reflektiert. Bei der Reflexion an einer Ebene bleibt die Gestalt der Wellenflächen unverändert. Kugelwellen werden als Kugelwellen reflektiert (Abb. 186b). Der Mittelpunkt Z' der reflektierten Welle liegt symmetrisch zum Mittelpunkt (Ausgangspunkt) Z der einfallenden Welle. Die reflektierte Welle scheint also von Z' , dem Spiegelbild von Z , herzukommen.

Die reguläre Reflexion von Wasserwellen kann man leicht an steilen Ufermauern in nicht zu flachem Wasser beobachten. Allerdings wird die Erscheinung durch Interferenz der einfallenden und der reflektierten Welle kompliziert (§ 87, vgl. auch Abb. 206). Diffuse Reflexion von Wasserwellen kann man an zerklüfteten Steilküsten beobachten.

Besonders sinnfällig sind die Reflexionserscheinungen bei den Schallwellen. Sie werden an ebenen Wänden regulär, an Waldrändern u. dgl. mehr oder weniger diffus reflektiert. Darauf beruhen die Erscheinungen des *Echos* und des *Nachhalls*. Die *Hörsamkeit von Räumen* (*Raumakustik*) hängt außer von der geometrischen Gestalt des Raumes entscheidend von den Reflexionsverhältnissen an den Begrenzungsflächen des Raumes ab. Teppiche, Vorhänge, Wandbekleidungen, versammeltes Publikum absorbieren (dämpfen) den größten Teil des auffallenden Schalles, so daß nur ein geringer Bruchteil reflektiert wird. Sie vermindern also den von ein- oder mehrmaligen Reflexionen herrührenden Nachhall. Dieser ist in größeren Räumen deshalb so überaus störend, weil in ihnen die Laufzeiten des Schalles beträchtlich sind. Schon eine Laufzeitdifferenz von 0,1 sec (Wegdifferenz von rund 30 m) zwischen dem direkten und dem reflektierten Schall genügt, damit sie sich in sehr störender Weise überlagern und Gesprochenes mehr oder weniger unverständlich, der Eindruck musikalischer Darbietungen beeinträchtigt wird. Besonders störend ist der lange andauernde Nachhall infolge mehrfacher Schallreflexion an den nackten Wänden von Kirchen und ähnlichen Räumen. Er ist zwar ein nicht unwesentliches Moment für den feierlichen Eindruck, den solche Räume erwecken, stellt aber an die Kunst des Redners große Anforderungen. Auch Interferenzen zwischen dem direkten und dem reflektierten Schall können sich unangenehm bemerkbar machen. Die Raumakustik ist ein wichtiges und schwieriges architektonisch-physikalisches Problem, dessen befriedigende Lösung oft nicht vorausgesagt werden kann und auf ziemlich allgemeinen Erfahrungen beruht. Bestimmte Raumformen erzeugen oft eigentümliche Reflexionsverhältnisse. Geht Schall von dem einen Brennpunkt einer Ellipse aus, so läuft er auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Ellipse im zweiten Brennpunkt wieder zusammen. Darauf beruhen die früher beliebten Flüstergewölbe.

Beim *Echolot* dient die Reflexion des Schalles am Meeresboden zur Messung der Meerestiefe aus der Laufzeit des Schalles vom Schiff über den Meeresboden zum Schiff zurück. Die Schallgeschwindigkeit beträgt im Wasser rund 1450 m sec^{-1} . Zur Messung einer Wassertiefe von 9000 m bedarf es also nur einer Zeit von etwa 12 sec.

Abb. 187 ist ein nach der Schlierenmethode (§ 83) aufgenommenes Bild der Reflexion der Knallwelle eines Geschosses und zeigt die Wellenflächen der am Geschößkopf gebildeten Verdichtungswelle. Man erkennt, daß die ein-

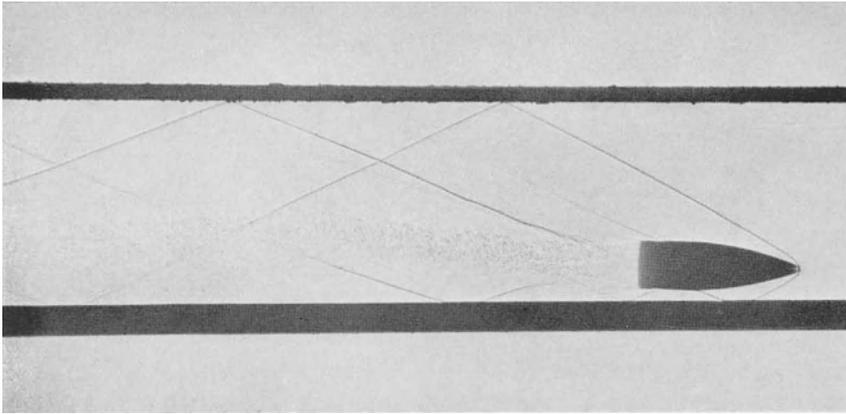


Abb. 187. Reflexion von Geschößknallwellen. (Nach CRANZ.)

fallende und die reflektierte Wellenfläche mit der reflektierenden Fläche gleiche Winkel bilden.

87. Interferenz. Stehende Wellen. Eine Welle von der Kreisfrequenz ω erzeuge an einem Orte eine Schwingung nach der Gleichung $\xi_1 = \xi_0 \sin \omega t$,

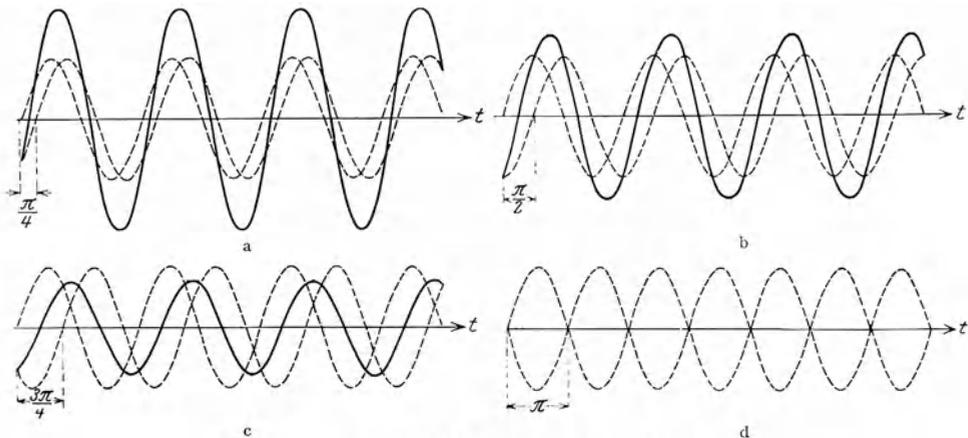


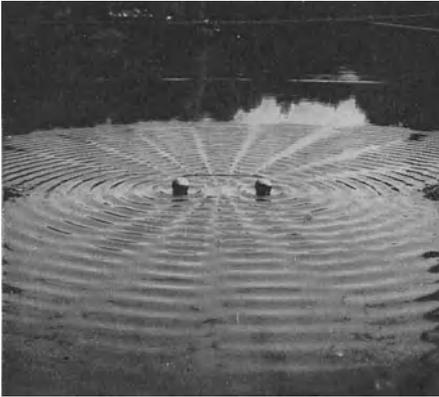
Abb. 188. Interferenz zweier Wellen bei verschiedenen Phasendifferenzen.

Ihr überlagere sich eine zweite Welle von gleicher Schwingungsweite und gleicher Kreisfrequenz, die für sich allein am gleichen Orte eine gleichgerichtete Schwingung nach der Gleichung $\xi_2 = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha)$ erzeugen würde. Die beiden Schwingungen ξ_1 und ξ_2 addieren sich zu einer Schwingung nach der Gleichung

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \sin \omega t + \xi_0 \sin(\omega t + \alpha) = 2 \xi_0 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right). \quad (22)$$

Da α zeitlich konstant ist, so ist $2 \xi_0 \cos \alpha/2$ die Schwingungsweite der Gesamtschwingung am betrachteten Ort. Ist die Phasendifferenz α der beiden Teilwellen ein ganzzahliges Vielfaches (n -faches) von 2π , $\alpha = 2n\pi$, also

$\cos \alpha/2 = \pm 1$, so hat die Schwingungsweite ihren größten möglichen Betrag $2\xi_0$. Die Schwingungen sind „in Phase“ und *verstärken* sich maximal. Ist aber $\alpha = (2n + 1)\pi$, also $\cos \alpha/2 = 0$, so findet zu jeder Zeit vollständige gegenseitige *Auslöschung* der beiden Schwingungen statt. Zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen alle möglichen Übergänge. Abb. 188 zeigt diese Erscheinung für zwei Wellen mit den Phasendifferenzen $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ und π . *Wirken also in einem Raumpunkt zwei Wellen von gleicher Kreisfrequenz (also auch gleicher Schwingungszahl) und gleicher Schwingungsweite (gleicher Intensität) gleichzeitig, so hängt es von ihrer Phasendifferenz in jenem Punkte ab, ob sie sich dort in ihrer Wirkung gegenseitig verstärken oder schwächen oder gar gegenseitig*



a



b

Abb. 189. Interferenz von Wasserwellen nach GRIMSEHL, b Teilvergrößerung von a.

aufheben. Die Überlagerung zweier Wellen heißt *Interferenz*. *Der Nachweis der Interferenzfähigkeit ist ein zwingender Beweis dafür, daß es sich um eine Wellenerscheinung handelt.*

Sind die Schwingungsweiten der beiden Teilwellen nicht gleich, also die Wellen verschieden stark, so kann natürlich keine vollständige gegenseitige Auslöschung eintreten. Sind die Schwingungen ξ_1 und ξ_2 nicht gleichgerichtet, so muß man sie in gleichgerichtete Komponenten zerlegen und deren Interferenz einzeln untersuchen.

Abb. 189 zeigt die Interferenz zweier Systeme von Wasserwellen, die durch zwei gleichzeitig periodisch im Wasser auf und ab bewegte Körper erregt werden. Längs gewisser Kurven löschen sich die Wellen gegenseitig vollkommen aus.

Man kann auch Wellenzüge, die in verschiedenen Richtungen von der gleichen Quelle ausgehen, zur Interferenz bringen, indem man sie durch geeignete Maßnahmen, z. B. Reflexionen, wieder am gleichen Ort zusammenführt. Haben sie bis zu diesem Ort im gleichen Stoff verschieden lange Wege s_1 und s_2 von der Quelle zurückgelegt, besitzen sie also einen *Gangunterschied* $s_1 - s_2$, so sind sie an jenem Ort nicht in gleicher Phase. Die eine Welle wird am betrachteten Ort durch die Gleichung $\xi_1 = \xi_0 \sin \omega(t - s_1/c)$ dargestellt, die andere durch die Gleichung $\xi_2 = \xi_0 \sin \omega(t - s_2/c)$. Ihre Phasendifferenz beträgt also $\omega(s_1 - s_2)/c$. Ist sie ein ganzzahliges Vielfaches $2n\pi$ von 2π , so findet maximale Verstärkung statt. In diesem Fall ist $s_1 - s_2 = 2n\pi c/\omega = n\lambda$ [Gl. (13)]. Maximale Verstärkung der beiden Wellenzüge findet also statt, wenn ihr Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Ist aber der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge, $s_1 - s_2 = (2n + 1)\lambda/2$, so

ist die Phasendifferenz gleich $(2n + 1)\pi$, und es findet vollständige gegenseitige Auslöschung statt.

Hierauf beruht ein Verfahren, um die Wellenlänge von Schallwellen zu messen. In das QUINCKESCHE Interferenzrohr (Abb. 190) tritt bei A eine Schallwelle ein und wird bei B abgehört. Sie verläuft in den beiden Zweigen C und D des Rohres, deren einer (C) posaunenartig ausziehbar ist, so daß die beiden Teilwellen einen Gangunterschied erhalten können. Der Auszug wird nacheinander auf zwei aufeinanderfolgende Tonminima eingestellt. Das entspricht einer Ver-

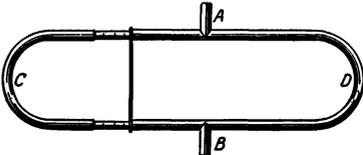


Abb. 190. QUINCKESCHES Interferenzrohr.

längerung des Weges durch C um eine ganze Wellenlänge, die auf diese Weise gemessen werden kann.

Wir wollen jetzt den Sonderfall betrachten, daß zwei ebene Wellen von gleicher Schwingungsweite und Kreisfrequenz *in entgegengesetzter Richtung* längs der x -Achse eines Koordinatensystems verlaufen. Ihre Phasendifferenz

wird sich dann von Punkt zu Punkt stetig ändern. Im Punkte $x = 0$ sollen sie die Phasendifferenz 0 haben, und die von jeder von ihnen allein dort erzeugte Schwingung soll durch die Gleichung $\xi_1 = \xi_2 = \xi_0 \sin \omega t$ dargestellt werden. Wir betrachten jetzt den Schwingungszustand in einem Punkte in der Entfernung x von jenem Punkt. Hier wird die

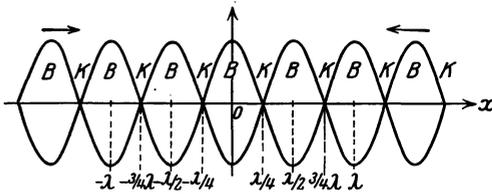


Abb. 191. Stehende Welle. Die beiden Sinuskurven bezeichnen die Grenzen, zwischen denen die Momentanwerte der Schwingung in den einzelnen Punkten x der Welle hin und her schwanken.

von der in der positiven x -Richtung verlaufenden Welle erregte Schwingung durch die Gleichung $\xi_1 = \xi_0 \sin \omega (t - x/c)$ dar gestellt, die von der in der negativen x -Richtung laufenden Welle erregte Schwingung durch die Gleichung $\xi_2 = \xi_0 \sin \omega (t + x/c)$. Denn die letzteren Schwingungen gehen ja den entsprechenden Schwingungen im

Punkte $x = 0$ um die Zeit x/c voraus. Die beiden Wellen interferieren, und ihre Überlagerung ergibt als Momentanwert der Gesamtschwingung im Punkte x

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \xi_0 \sin \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) = 2 \xi_0 \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t. \quad (23)$$

Die Schwingungsweite im Punkte x beträgt also $2 \xi_0 \cos \omega x/c$ und ist vom Ort abhängig. Ist $x = n \pi c / \omega$ (n ganze Zahl), also $\cos \omega x/c = \pm 1$, so hat sie ihren größten möglichen Betrag $2 \xi_0$. Die Schwingungen verstärken sich maximal, in x ist ein *Schwingungsbau*. Ist aber $x = (2n + 1) \pi c / 2 \omega$, also $\cos \omega x/c = 0$, so löschen sich die beiden Wellen in ihrer Wirkung im Punkte x zu jeder Zeit vollkommen aus, in x ist ein *Schwingungsknoten*. Für zwei aufeinanderfolgende Bäuche oder Knoten ist $\omega x_1/c - \omega x_2/c = \pi$ oder $x_1 - x_2 = \pi c / \omega = \lambda / 2$ [Gl. (13)], wenn λ die Wellenlänge ist. Der Abstand je zweier aufeinanderfolgender Knoten (K) oder Bäuche (B) beträgt also eine halbe Wellenlänge (Abb. 191). Die Knoten liegen in der Mitte zwischen den Bäuchen. Diese Erscheinung heißt eine *stehende Welle*.

Handelt es sich um eine longitudinale stehende Welle, z. B. um eine Schallwelle in Luft, so haben die Momentanwerte der Druckschwankungen nach § 83 gegenüber denen der Schwingung eine Phasendifferenz $\pi/2$. Bei Durchführung einer der obigen entsprechenden Rechnung für die Druckschwankungen tritt daher überall an die Stelle des \sin der \cos und umgekehrt. Das hat, wie man sofort einsieht, zur Folge, daß an den Orten der Schwingungsbäuche *Druckknoten* (Orte konstanten Drucks) und an den Orten der Schwingungsknoten

Druckbäuche (Orte maximaler Druckschwankung) auftreten. Das ist auch leicht daraus verständlich, daß in der unmittelbaren Umgebung der Schwingungsbäuche die Massenteilchen gleichsinnig schwingen, also keine Abstandsänderungen erfahren. Zu beiden Seiten eines Schwingungsknotens jedoch schwingen sie gegensinnig, erzeugen also im Knoten abwechselnde Zusammendrückungen und Dehnungen. Entsprechend verhält es sich mit den Bäuchen und Knoten in einer stehenden transversalen Welle.

Eine stehende Welle läßt sich z. B. durch Reflexion einer ebenen Welle an einer festen Wand erzeugen, indem sich dann die einfallende und die reflektierte Welle im Raume vor der Wand überlagern und miteinander interferieren.

In diesem Fall muß notwendig an der reflektierenden Wand ein Schwingungsknoten liegen, da die Anwesenheit der Wand Schwingungen der ihr anliegenden Massenteilchen unmöglich macht. Das kann nur durch Interferenz der einfallenden und der reflektierten Welle geschehen, die demnach an der Wand die Phasendifferenz π haben müssen. Es folgt daraus, daß die einfallende Welle an der Wand einen *Phasensprung* vom Betrage π , einem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge entsprechend, erleidet. Die weiteren Schwingungsknoten haben also von der Wand die Abstände $n\lambda/2$ (n ganze Zahl). Dem Schwingungsknoten an der Wand entspricht ein Druckbauch an der gleichen Stelle. Das ist leicht verständlich, da die Massenteilchen in der Nähe der Wand hin und her schwingen, an der Wand selbst aber ruhen, so daß dort Maxima und Minima der Druckschwankung auftreten müssen.

Daß eine Welle bei der Reflexion an einem festen Hindernis einen Phasensprung π , also eine sprunghafte Umkehr ihres Momentanwertes erleidet, kann man leicht auch bei Wellen erkennen, die längs eines gespannten Seils verlaufen. Erzeugt man an ihm durch einen kurzen Schlag eine Ausbiegung, so läuft diese am Seil entlang (Abb. 192a, 1). Bei der Reflexion am festen Ende schlägt sie nach der entgegengesetzten Seite um und läuft so am Seil zurück (Abb. 192a, 2). Läßt man aber ein Seil frei herabhängen und wiederholt den gleichen Versuch, so findet am freien Seilende ein solcher Sprung nicht statt. Die Welle wird auch am freien Ende reflektiert, aber die Ausbiegung ändert dabei ihre Richtung nicht (Abb. 193a). Daß bei einer stehenden Seilwelle am festen Seilende stets ein Schwingungsknoten, an einem freien Seilende stets ein Schwingungsbauch ist, erkennt man leicht, wenn man durch periodisches Hin- und Herbewegen des anderen Seilendes in ihm eine solche erzeugt (Abb. 192b und 193b, vgl. § 92 und 93).

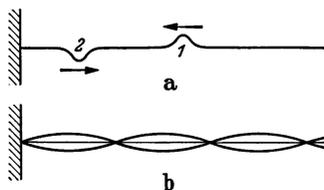


Abb. 192. Reflexion einer Seilwelle an einem festen Ende.

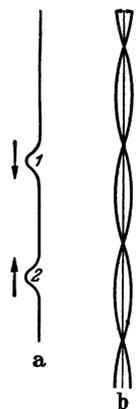


Abb. 193. Reflexion einer Seilwelle an einem freien Ende.

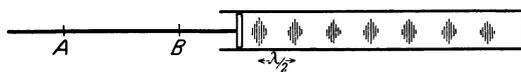


Abb. 194. Kundtsche Staubfiguren.

Durch Messung der Abstände der Knoten oder Bäuche in einer stehenden Welle kann man die Wellenlänge λ und daraus bei bekannter Schwingungszahl ν die Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) $c = \lambda\nu$ [Gl. (13)] in dem betreffenden Stoff ermitteln. Bei Gasen kann man nach KUNDT so verfahren, daß man den von einem eingespannten, geriebenen und dadurch zu longitudinalen Schwingungen angeregten Metallstab ausgehenden Schall auf das Innere einer mit dem Gase gefüllten, einseitig geschlossenen Röhre überträgt (Abb. 194).

Ist der Stab in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge eingespannt, so gerät er in longitudinale Schwingungen, deren Wellenlänge im Stab gleich der Stablänge ist (§ 92). In der Röhre befindet sich feines Korkpulver. Dieses wird, wenn sich in der Röhre eine stehende Welle ausbildet, von den Schwingungsbäuchen fortgeschleudert und sammelt sich in den Schwingungsknoten (KUNDTsche Staubfiguren). So kann deren Abstand und damit die Wellenlänge im Gase gemessen werden. Die Schwingungszahl ist im Gas und im Metallstab die gleiche. Daher verhalten sich nach Gl. (13) die Schallgeschwindigkeiten im Gas und im Metall wie die entsprechenden Wellenlängen. Für den Metallstab kann sie nach Gl. (14) berechnet werden. Das Verfahren kann z. B. dazu dienen, um bei einem Gase die Größe $c_p/c_v = \kappa$ aus der Schallgeschwindigkeit in ihm zu berechnen [Gl. (15)].

88. Schwebungen. Kombinationstöne. Steht ein Punkt im Raum unter der gleichzeitigen Wirkung von zwei Wellen mit den Schwingungszahlen ν_1 und ν_2 und gleicher Schwingungsweite ξ_0 , so überlagern sich die dort von den beiden Wellen erregten Schwingungen zu einer Schwingung nach der Gleichung

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \sin 2\pi \nu_1 t + \xi_0 \sin 2\pi \nu_2 t = 2 \xi_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t. \quad (24)$$

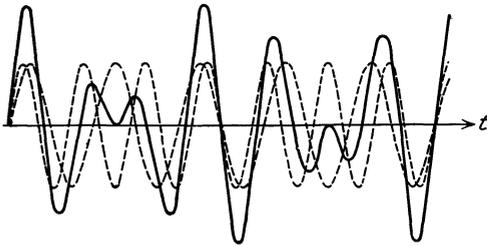


Abb. 195. Schwebung. $\nu_1 : \nu_2 = 6 : 5$.

(Allgemein wären noch Phasenkonstanten hinzuzufügen. Da solche zwar die momentane Schwingungsform beeinflussen, aber auf unsere weiteren Überlegungen keinen Einfluß haben, so lassen wir sie der Einfachheit halber fort). Sind ν_1 und ν_2 voneinander nur wenig verschieden, so ist $(\nu_1 - \nu_2)/2$ klein gegen $(\nu_1 + \nu_2)/2$, und daher ändert sich dann der Faktor $\cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2)t/2$

sehr viel langsamer als der Faktor $\sin 2\pi (\nu_1 + \nu_2)t/2$. Letzterer entspricht einer Schwingung mit der Frequenz $(\nu_1 + \nu_2)/2$, die von den Frequenzen ν_1 und ν_2 selbst nur wenig verschieden ist, wenn diese sich selbst nur wenig unterscheiden. Wir können deshalb die Gl. (24) so deuten, daß es sich um eine Schwingung von der Frequenz $(\nu_1 + \nu_2)/2$ handelt, deren Schwingungsweite gleich $2 \xi_0 \cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2)t/2$ und demnach periodisch veränderlich ist. Die Überlagerung der beiden Wellen erzeugt also im betrachteten Raumpunkt eine Schwingung mit der Frequenz $(\nu_1 + \nu_2)/2$, deren Stärke periodisch zu- und abnimmt. Ein solcher Vorgang heißt eine *Schwebung*.

Die Schwingungsweite schwankt zwischen den absoluten Beträgen $2 \xi_0$ und 0. Die *Schwebungsdauer* T , d. h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima der Intensität, ist also diejenige, in der sich $\cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2)t/2$ von $+1$ in -1 verwandelt, sein Argument also von $n\pi$ auf $(n+1)\pi$, d. h. um den Betrag π wächst. Hieraus berechnet man leicht $T = 1/(\nu_1 - \nu_2) = 1/\nu_s$. Die *Schwebungsfrequenz* ν_s , die Zahl der Schwebungen in 1 sec, beträgt also $1/T = \nu_s = \nu_1 - \nu_2 \text{ sec}^{-1}$.

Abb. 195 zeigt die Schwebung zweier Wellen, deren Frequenzen sich wie 6 : 5 verhalten. Man sieht, daß während der Dauer von 6 bzw. 5 Schwingungen der beiden Komponenten zwei Maxima der Schwingungsweite auftreten. Abb. 196 zeigt eine oszillographische Aufnahme der Schwebung zweier Wellen vom Frequenzverhältnis $\nu_1 : \nu_2 = 11 : 10$.

Schwebungen können sehr gut bei Schallwellen beobachtet werden. Ertönen gleichzeitig zwei nur wenig voneinander verschiedene Töne, z. B. von

zwei gleichen Stimmgabeln, deren eine durch ein angeklebtes Wachsstückchen verstimmt ist, so hört man deutlich ein regelmäßiges An- und Abschwellen der Tonstärke, ebenso beim Einstimmen zweier gleicher Seiten einer Mandoline. Je besser die Übereinstimmung der beiden Töne ist, um so langsamer sind die Schwebungen. Sie bilden daher ein Mittel zur Gleichstimmung, das dem rein musikalischen Tonunterscheidungsvermögen der meisten Menschen überlegen ist.

Der Mensch kann nur etwa 16 bis 20 gleiche Einzelvorgänge in 1 sec getrennt wahrnehmen. Ist ihre Zahl größer, so vermag er sie nicht zu trennen. Daher vermag auch das menschliche Ohr mehr als 16 bis 20 Schwebungen in 1 sec nicht einzeln aufzufassen. Ist also die Frequenzdifferenz zweier Töne kleiner als 16 bis 20 sec^{-1} , so verschmelzen die beiden Töne zu *einem* Ton, und es treten hörbare Schwebungen auf. Ist sie aber größer, so werden sie einzeln gehört, als ein Zweiklang empfunden, und Schwebungen sind nicht mehr hörbar. Statt dessen kann man aber nunmehr bei aufmerksamer Beobachtung einen *Differenzton* von der Frequenz $\nu_1 - \nu_2$ hören. Eine Schwingung von dieser Frequenz ist allerdings in der Schallwelle objektiv nicht enthalten, denn ihre FOURIER-Zerlegung ergibt nur die beiden Summenglieder der Gl. (24) mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 . Der Differenzton entsteht erst im Trommelfell des Ohres. Es setzt

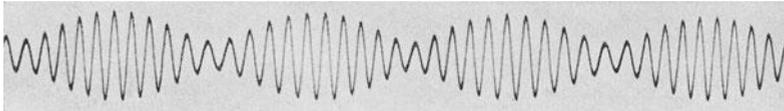


Abb. 196. Oszillographische Schwebungsaufnahme nach WAETZMANN. (Aus MÜLLER-POUILLET: Lehrbuch der Physik, Bd. 1, 3. Teil)

Ein- und Ausbiegungen nicht den gleichen elastischen Widerstand entgegen, und daher entsprechen seine Schwingungen nicht genau der Gl. (24). Aus diesem Grunde erregt eine Welle mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 in ihm nicht nur eine Schwingung mit diesen Frequenzen, sondern auch Schwingungen mit den Frequenzen $m\nu_1 \pm n\nu_2$ (m, n ganze Zahlen). Die dadurch erzeugten Töne heißen allgemein *Kombinationstöne*, im besonderen Summations- und Differenz-töne (SORGE 1744, fälschlich auch TARTINISCHE Töne genannt). Am stärksten tritt der 1. Differenzton $\nu_1 - \nu_2$ auf. Zum Beispiel hört man am Klavier bei gleichzeitigem Anschlagen der Töne c^2 ($\nu = 517,3$ Hz in temperierter Stimmung) und g^2 ($\nu = 775,0$ Hz) fast genau die zu c^2 nächsttiefere Oktave c^1 ($\nu = 775,0 - 517,3 = 257,7$ Hz statt 258,7 Hz), beim Anschlagen der Töne c^2 und fis^2 ($\nu = 731,4$ Hz) den Ton $214,1$ Hz, der dem Ton a^0 ($\nu = 217,5$ Hz) nahe liegt.

89. Brechung. Trifft eine Welle auf die Grenze zweier Medien, in denen ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit verschieden groß ist, so erleidet sie eine Richtungsänderung. Wie diese zustande kommt, zeigt Abb. 197 für die beiden Fälle $c_1 > c_2$ und $c_1 < c_2$ (c_1, c_2 Geschwindigkeit im ersten und im zweiten Medium). Sobald eine Wellenfläche bei ihrem Fortschreiten aus dem ersten in das zweite Medium übertritt, erleidet sie in diesem eine Verkleinerung (Abb. 197a) bzw. Vergrößerung (Abb. 197b) ihrer Geschwindigkeit im Verhältnis c_2/c_1 . Während die Wellenfläche im ersten Medium in der Zeit t die Strecke $c_1 t$ zurücklegt, legt sie im zweiten die Strecke $c_2 t$ zurück. Das hat eine Änderung ihres Neigungswinkels gegen die Grenzfläche der beiden Medien zur Folge. Daher erfahren die Wellennormalen, also die Richtung der Strahlen, beim Eintritt in das zweite Medium ebenfalls eine Richtungsänderung, die man als *Brechung* oder *Refraktion* bezeichnet (Abb. 198).

Es seien α_1 und α_2 die Neigungswinkel der Wellenflächen gegen die Grenzfläche, also auch die Winkel, die der einfallende bzw. der gebrochene Strahl

mit dem auf der Grenzfläche errichteten Einfallslot bildet. Aus Abb. 197 folgt $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = c_1 t : c_2 t$. Daraus ergibt sich das *Brechungsgesetz*,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = 1/n_{12}. \quad (25)$$

Das Verhältnis des sin des Einfallswinkels α_1 zum sin des Brechungswinkels α_2 ist also konstant. Die Größe $n_{21} = c_1/c_2$ heißt der *Brechungsindex* oder *Brechungskoeffizient* des zweiten Mediums gegen das erste, die

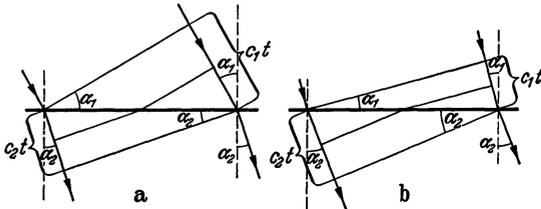


Abb. 197. Zum Brechungsgesetz. a) $c_1 > c_2$, b) $c_1 < c_2$.

Größe $n_{12} = c_2/c_1$ der des ersten gegen das zweite. Der einfallende und der gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallslot in der gleichen Ebene. Ist $c_1 > c_2$, so wird der Strahl zum Einfallslot hin gebrochen, ist $c_1 < c_2$, so wird er vom Einfallslot weg gebrochen. Der Brechungsindex kann von der Wellenlänge abhängen, und zwar dann, wenn die Geschwindigkeit in einem der Medien oder in beiden von der Wellenlänge abhängt. In diesem Falle wird eine Welle, die aus Teilwellen von verschiedener Wellenlänge besteht, bei der Brechung in Teilwellen aufgespalten, die sich im zweiten Medium nach verschiedenen Richtungen fortpflanzen. Es tritt eine *Dispersion* ein (§ 285). Es muß ausdrücklich betont werden, daß das Brechungsgesetz in der obigen einfachen Form ohne weiteres nur in isotropen Medien gilt, in denen sich eine Welle in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt (§ 302).

Die Brechung bei einer Änderung der Wellengeschwindigkeit läßt sich leicht bei Wasserwellen beobachten. Bei der Annäherung an ein Ufer suchen sich die Wellenfronten dem Ufer parallel zu stellen.

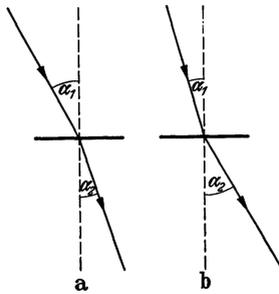


Abb. 198. Zum Brechungsgesetz. a) $c_1 > c_2$, b) $c_1 < c_2$.

Man kann das als eine Brechung ansehen, die darauf beruht, daß die Wellengeschwindigkeit bei der Annäherung an das Ufer wegen der abnehmenden Wassertiefe ständig abnimmt, so daß die Wellennormalen eine stetige Krümmung auf das Einfallslot hin erfahren (Abb. 199, vgl. § 271).

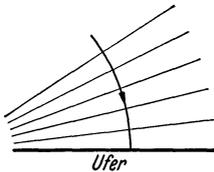


Abb. 199. Stetige Brechung von Wasserwellen.

Die Brechung von Schallstrahlen läßt sich — besonders bei kurzwelligem Schall — mittels Linsen und Prismen aus geeigneten Stoffen in der gleichen Weise nachweisen wie die Brechung von Lichtstrahlen (§ 273 und 274). Ändert sich die Beschaffenheit eines Stoffes und daher auch die Wellengeschwindigkeit in ihm stetig, so findet in ihm auch von Schicht zu Schicht eine stetige Brechung statt, analog zum obigen Beispiel der Wasserwellen. Eine solche Brechung von Schallwellen erfolgt offenbar in den höheren Atmosphärenschichten. Denn nur so sind die eigentümlichen Ausbreitungsverhältnisse von sehr starkem Schall (Kanonen Donner, schwere Explosionen) erklärbar. Man beobachtet nämlich, daß ein solcher Schall nicht nur in einem inneren Bereich um die Schallquelle mit einem Radius von 100—150 km hörbar ist, in den er auf unmittelbarem Wege gelangt, sondern auch in einen weiter entfernten Bereich, der von dem ersten durch die „*Zone des Schweigens*“ getrennt ist. Man erklärt

die Ausbreitung bis in diesen zweiten Bereich durch eine Brechung der Schallwellen in der Atmosphäre in 40—80 km Höhe. Die Schallstrahlen müssen beim Aufstieg stetig vom Einfallslot (der Vertikalen) weg gebrochen werden, damit sie eine zur Erde konkave Krümmung erleiden. Die Schallgeschwindigkeit muß also mit der Höhe zunehmen. Eine eindeutige Erklärung hierfür, die nur in einer Temperaturzunahme oder einer Abnahme des Molekulargewichts mit der Höhe liegen könnte [Gl. (15b)], hat man bisher noch nicht geben können.

90. Das FERMATSCHE PRINZIP. Wir betrachten einen Strahl, der auf seinem Wege beliebige Richtungsänderungen durch Reflexionen und Brechungen erfährt, und greifen zwei beliebige Punkte dieses Weges heraus. Das FERMATSCHE PRINZIP besagt, daß der Strahlenweg zwischen zwei solchen Punkten stets so beschaffen ist, daß zu seiner Zurücklegung ein Minimum oder ein Maximum an Zeit erforderlich ist. Das heißt, unter allen denkbaren, die Punkte verbindenden Strahlenwegen ist der tatsächlich befolgte derjenige, auf dem die Welle, der der Strahl angehört, in der kürzesten oder in der längsten möglichen Zeit von dem einen nach dem anderen Punkt gelangt. Im allgemeinen ist das erstere der Fall.

Wir wollen als Beispiel die Brechung betrachten. Es sei AB ein an der Grenzfläche zweier Medien gebrochener Strahl (Abb. 200). Unter allen möglichen Wegen, die von A nach B führen, greifen wir einen beliebigen Weg $AC + CB$ heraus. Durch die Wahl der Punkte A und B sind die von ihnen auf die Grenzfläche gefällten Lote $AD = a$ und $BE = b$, sowie der Abstand $DE = d$ der Fußpunkte fest gegeben. Offen bleibt zunächst nur das Verhältnis der Strecken z und $d - z$, in die C die Strecke DE teilt, bzw. der Einfallswinkel α_1 und damit der Brechungswinkel α_2 . Es sei $AC = x$, $CB = y$. Die Wellengeschwindigkeiten im ersten und zweiten Medium seien c_1 und c_2 . Dann benötigt die Welle zur Zurücklegung des Weges von A über C nach B die Zeit

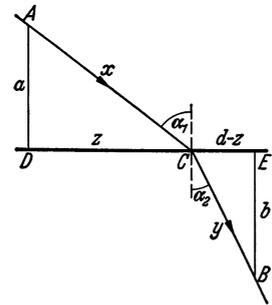


Abb. 200.
Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem FERMATSCHE PRINZIP.

$$t = \frac{x}{c_1} + \frac{y}{c_2} = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-z)^2 + b^2}}{c_2}.$$

Nach dem FERMATSCHE PRINZIP muß t ein Extremwert sein, es muß also $dt/dz = 0$ sein. Wir erhalten dann

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z}{c_1 \sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{d-z}{c_2 \sqrt{(d-z)^2 + b^2}} = \frac{z}{c_1 x} - \frac{d-z}{c_2 y} = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = 0, \quad (26)$$

in Übereinstimmung mit dem Brechungsgesetz [Gl. (25)], das damit auch aus dem FERMATSCHE PRINZIP abgeleitet ist.

91. Das HUYGENSSCHE PRINZIP. Beugung. Wie wir gesehen haben, führen die einzelnen im Zuge einer Welle liegenden Massenteilchen unter ihrer Wirkung Schwingungen aus. Auch die primäre Ursache für das Auftreten einer Welle ist die durch irgendeine äußere Ursache erregte Schwingung der am Ursprungs-ort der Welle befindlichen Massenteilchen. Es besteht demnach zwischen den hier primär erregten Massenteilchen und denjenigen, die sekundär durch die Welle zu Schwingungen erregt werden, kein grundsätzlicher Unterschied. Diese werden, genau wie jene, durch an ihnen angreifende Kräfte in Schwingungen versetzt. Aus diesem Grunde sind auch die Wirkungen, die die Schwingungen der im Zuge der Welle sekundär erregten Teilchen in ihrer Umgebung hervorrufen, grundsätzlich die gleichen wie diejenigen der schwingenden Teilchen, die die ganze Welle hervorrufen. Es ist hiernach selbstverständlich, daß wir

jedes im Zuge einer Welle liegende und von ihr ergriffene Massenteilchen als Zentrum einer neuen von ihm ausgehenden Welle (*Elementarwelle*) ansehen müssen. Jedes Massenteilchen entzieht der über es hinwegstreichenden Welle Energie und gibt gleichzeitig Energie in Gestalt einer Elementarwelle ab, so daß seine Schwingungsenergie konstant bleibt, sofern die Intensität der erregenden Welle konstant ist. Dies ist der Inhalt des HUYGENSSchen Prinzips (1690).

So einleuchtend aber auch die vorstehende Überlegung ist, so scheint ihr Ergebnis doch zunächst der Erfahrung, insbesondere der geradlinigen Ausbreitung der Energie in homogenen Medien, zu widersprechen. Denn es könnte scheinen, als müsse hiernach die Wellenenergie von jedem Punkt in der Welle nach allen Richtungen zerstreut werden. Das wäre auch richtig, wenn die Schwingungen der einzelnen Massenteilchen voneinander ganz unabhängig wären, wenn zwischen ihnen keine *Phasenbeziehungen* beständen. Solche sind aber tatsächlich vorhanden. Greifen wir z. B. im

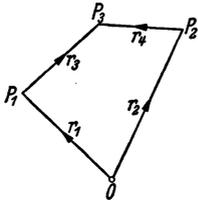


Abb. 201. Zum HUYGENSSchen Prinzip.

Wirkungsbereich einer von O ausgehenden Kugelwelle irgendwelche zwei Punkte P_1 , P_2 heraus (Abb. 201), so besteht zwischen den dort hervorgerufenen Schwingungen nach Gl. (3) eine durch die Größe $-r/c$ gegebene Phasenbeziehung.

Sind r_1 und r_2 die Abstände der beiden Punkte von O , so besteht zwischen den Schwingungen in ihnen eine Phasendifferenz $\omega(r_1 - r_2)/c$. Betrachten wir nun einen dritten Punkt P_3 , der von den Elementarwellen getroffen wird, die von P_1 und P_2 ausgehen, so wird ihre Wirkung in diesem Punkt erstens von ihren Intensitäten und zweitens von der Art abhängen, wie sie in P_3 interferieren, also von ihrer Phasendifferenz in P_3 . Diese ist aber erstens abhängig von der Phasendifferenz in P_1 und P_2 , zweitens von den Abständen r_3 und r_4 von P_1 und P_2 , wieder gemäß Gl. (3). Um demnach die Gesamtwirkung in irgendeinem Raumpunkt zu ermitteln, müssen wir die Summe der Wirkungen bilden, die die gesamten Elementarwellen dort hervorrufen, die von einer beliebigen, den Wellenursprung umschließenden Fläche, z. B. einer Wellenfläche, ausgehen. Die Gesamtwirkung wird dann davon abhängen, in welchem Grade sich die Elementarwellen dort durch Interferenz gegenseitig verstärken oder schwächen.

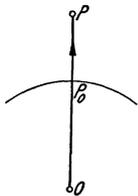


Abb. 202. Zur geradlinigen Fortpflanzung nach dem HUYGENSSchen Prinzip.

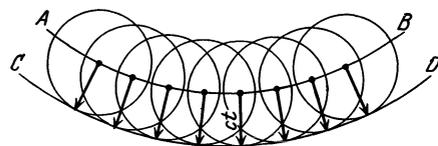


Abb. 203. Zum HUYGENSSchen Prinzip.

Die Durchführung dieser Rechnung (FRESNEL 1819) geht über den Rahmen dieses Buches hinaus. Wir müssen uns mit den folgenden einfachen Darlegungen begnügen. Berechnet man die Wirkung, die in einem Punkt P in jedem Augenblick durch die Gesamtheit der Elementarwellen hervorgerufen wird, die ihren Ursprung in den einzelnen Punkten einer um das Zentrum O der primären Welle beschriebenen Wellenfläche haben (Abb. 202), so ergibt sich, daß sich diese Elementarwellen in P in sämtlichen Richtungen gegenseitig durch Interferenz auslöschen, außer in der Richtung OP , die der geradlinigen Ausbreitung von O her über P_0 entspricht. Die geradlinige Fortpflanzung ist also mit dem HUYGENSSchen Prinzip in Einklang.

Ist AB (Abb. 203) ein Ausschnitt aus einer Wellenfläche einer Kugelwelle, so gehen von ihren sämtlichen Punkten Elementarwellen aus, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Die Lage der Wellenfläche nach der Zeit t findet man, indem man um jeden Punkt der Wellenfläche AB eine Kugelfläche mit dem Radius ct beschreibt. Die nunmehrige Wellenfläche CD ist die äußere

Einhüllende dieser Gesamtheit von Kugelflächen, also selbst wieder eine Kugelfläche, deren Radius um den Betrag ct größer ist, als derjenige der Wellenfläche AB .

Bei der Durchführung der Rechnung ergibt sich nun, daß die Wellenwirkung im Punkte P (Abb. 202) fast ausschließlich von einer sehr eng begrenzten Zone in der Umgebung des auf der Geraden OP liegenden Punktes P_0 herrührt. Der Radius dieser Zone ist von der Größenordnung der Wellenlänge. Nur die von dieser Zone ausgehenden Elementarwellen liefern, indem sie sich gegenseitig verstärken, einen merklichen Beitrag zu der in P auftretenden und sich dort in der Richtung OP geradlinig fortpflanzenden Energie. Die Elementarwellen, die von Bereichen außerhalb dieser Zone herrühren, liefern dazu infolge gegenseitiger Auslöschung durch Interferenz nur überaus geringe Beiträge, die um so kleiner sind, je weiter die Bereiche von P_0 entfernt sind. Es macht daher für die Wirkung in P sehr wenig oder nichts aus, wenn man aus der Welle durch eine bei P_0 angebrachte Blende BB einen Kegel ausblendet, vorausgesetzt, daß die Blendenöffnung so groß ist, daß die Elementarwellen jener inneren Zone in P ungestört zur Wirkung kommen können (Abb. 204). Die linearen Abmessungen der Blendenöffnung müssen also größer sein als die Größenordnung der Wellenlänge. In diesem Fall wird die geradlinige Fortpflanzung von O nach P nicht gestört.

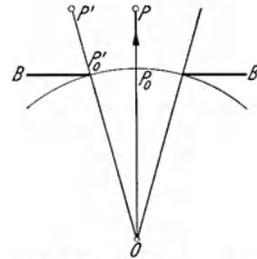


Abb. 204. Ausblendung eines Teils einer Kugelwelle.

Hingegen ist die geradlinige Fortpflanzung in den Randbezirken des ausgeblendeten Kegels, z. B. in der Richtung OP' , gestört. Denn durch den Blendenrand wird ein Teil der Elementarwellen abgeblendet, die von der Zone um P_0 ausgehen, und deren Wirkung für eine ungestörte Wellenwirkung in P' erforderlich ist.

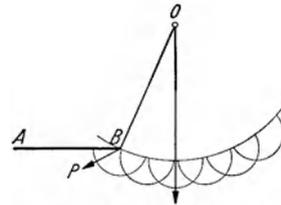


Abb. 205. Beugung an einer Kante.

Derartige Störungen der geradlinigen Fortpflanzung, die durch irgendwelche in den Weg einer Welle gebrachte Hindernisse hervorgerufen werden, heißen *Beugung* oder *Diffraction*. Abb. 205 zeigt das Zustandekommen der Beugung an der scharfen Kante B eines Schirmes AB . Die Elementarwelle, die sich unter der Wirkung einer von O kommenden Welle von B aus hinter dem Schirm ausbreitet, kann dort nur mit den Elementarwellen desjenigen Teils der um B liegenden Zone interferieren, der nicht durch den Schirm abgeblendet ist. Die Rechnung ergibt, daß sich die Welle dann auch in bestimmten Richtungen BP hinter dem Schirm ausbreitet, die nicht der geradlinigen Fortpflanzung in der Richtung OB entsprechen. Besonders deutlich sind die Beugungserscheinungen beim Durchgang einer Welle durch eine enge Öffnung, deren Abmessungen von der Größenordnung der Wellenlänge oder kleiner sind. Wir werden diese Verhältnisse eingehender bei der Beugung des Lichtes besprechen (§ 293).



Abb. 206. Beugung von Wasserwellen an einem Loch. (Nach GRIMSEHL.)

Wird in den Weg einer Welle ein Hindernis gebracht, das einen Teil der Welle *abblendet*, so ist die Beugungserscheinung hinter diesem Hindernis identisch mit derjenigen hinter der Öffnung in einem Schirm, die einen gleichen Teil aus einer Welle *ausblendet* (BABINETsches Theorem).

Für Oberflächenwellen gilt entsprechendes wie für die hier besprochenen räumlichen Wellen. Abb. 206 zeigt die Beugung von Wasserwellen an einem engen Loch. Dieses ist klein gegenüber der Wellenlänge. Es wirkt daher nahezu wie ein einzelner Punkt, von dem aus sich gemäß dem HUYGENSSchen Prinzip eine kreisförmige Elementarwelle hinter dem Schirm ausbreitet. (Man beachte auch die stehende Welle, die sich rechts von dem Schirm infolge von Interferenz der einfallenden und der reflektierten Welle ausbildet).

Eine ganz alltägliche Erscheinung ist die Beugung der Schallwellen. Es ist jedermann geläufig, daß der Schall „um die Ecke geht“, also an den Kanten von Hindernissen gebeugt wird.

Sobald Beugungserscheinungen in Frage kommen, ist bei der Anwendung des Strahlbegriffs mit Vorsicht zu verfahren. Insbesondere ist zu beachten, daß dort, wo Beugung auftritt, jeder Strahl in viele Strahlen aufspaltet, die sich in verschiedenen Richtungen fortpflanzen.

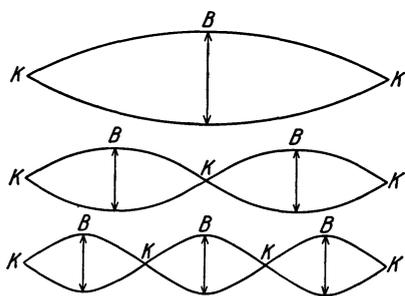


Abb. 207. Saitenschwingungen.

92. Schwingungen von Saiten, Stäben und Platten. Findet in irgendeinem Punkt eines Körpers eine periodische Störung statt, so pflanzt sie sich in ihm als Welle fort. Wird diese an den Begrenzungen des Körpers reflektiert, so kann sich unter geeigneten Bedingungen durch die Interferenz der hin- und rücklaufenden Welle eine stehende Welle zwischen den Begrenzungen des Körpers ausbilden (§ 87). Sofern hierbei der Welle keine Energie entzogen wird, entsteht eine stationäre ungedämpfte *Schwingung* des Körpers, d. h. seiner einzelnen Teile gegeneinander. Die

hier definierte *Schwingung eines Körpers* ist wohl zu unterscheiden von der *Schwingung eines Massenpunktes* oder der *Schwingung eines Körpers als Ganzes*. Bei letzterer bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers periodisch hin und her. Bei der hier definierten Schwingung eines Körpers bleibt aber der Schwerpunkt eines frei schwingenden, also nicht von außen festgehaltenen Körpers in Ruhe. Nur die einzelnen Massenelemente des Körpers führen Schwingungen um ihre Ruhelagen aus. Eine solche Körperschwingung besteht also aus der Gesamtheit der Schwingungen der Massenelemente des Körpers, zwischen denen, je nach ihrem Ort im Körper, bestimmte Intensitäts- und Phasenbeziehungen nach den Gesetzen der stehenden Wellen bestehen.

Die einfachsten Verhältnisse liegen bei solchen Körpern vor, die man als annähernd lineare Gebilde ansehen kann, deren Abmessungen also in einer bestimmten Richtung erheblich größer sind als in den dazu senkrechten Richtungen. Ein sehr einfaches Beispiel sind die Transversalschwingungen eines an seinen beiden Enden eingespannten Seils oder einer gespannten Saite. Einer stehenden Welle sind in diesem Fall durch die feste Einspannung an den Enden gewisse Bedingungen auferlegt. Sie muß in diesen Punkten, in denen das Seil oder die Saite am Schwingen verhindert ist, Schwingungsknoten haben. Daher sind nur solche stehende Wellen möglich, bei denen die Saitenlänge l ein ganzzahliges Vielfaches (n -faches) der halben Wellenlänge ist, $l = n \lambda_n/2$ (Abb. 207). In der Saite treten also nur solche stationären Schwingungen auf, deren Wellenlänge

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (27)$$

beträgt. Mit $n = 1$, also $\lambda_1 = 2l$, erhält man die *Grundschiwingung* der Saite, bei der sie nur einen Schwingungsbauch in ihrer Mitte besitzt. Die weiteren

nach Gl. (27) möglichen Schwingungen heißen *Oberschwingungen*. Grund- und Oberschwingungen heißen allgemein *Teil-* oder *Partialschwingungen*. Bei der 1. Oberschwingung ($n = 2$) treten drei Knoten und zwei Bäuche auf, allgemein bei der p -ten Oberschwingung $p + 2$ Knoten und $p + 1$ Bäuche. Im allgemeinen besteht die Schwingung einer Saite in einer Überlagerung ihrer Grundschwingung mit ihren Oberschwingungen.

Wird eine Saite oder ein Seil vom Querschnitt q und der Dichte ρ mit der Kraft k dyn gespannt, so beträgt die Wellengeschwindigkeit in der Saite bzw. dem Seil

$$c = \sqrt{\frac{k}{q\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \quad (28)$$

Die Schwingungszahlen der Teilschwingungen betragen nach Gl. (12) $\nu_n = c/\lambda_n$, also

$$\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{k}{q\rho}} = n \nu_1 \text{ Hz}. \quad (29)$$

Die Oberschwingungen sind also zur Grundschwingung *harmonisch*, d. h. ihre Schwingungszahlen ν_n sind ganzzahlige Vielfache derjenigen der Grundschwingung ν_1 .

Wird ein von einem Punkt frei herabhängendes Seil in Schwingungen versetzt (Abb. 208), so besitzt es an seinem freien Ende stets einen Schwingungsbauch. Es sind in ihm also alle Schwingungen möglich, bei denen die Seillänge l ein $(n + \frac{1}{2})$ -faches der halben Wellenlänge λ ist, so daß

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n + 1}. \quad (30)$$

Dabei kann n alle ganzzahligen Werte, von 0 aufwärts, annehmen. Die Wellenlänge der Grundschwingung ($n = 0$) beträgt $4l$, ihre Schwingungszahl $c/4l$. Die Wellenlänge der 1. Oberschwingung ($n = 1$) beträgt $4l/3$, die der 2. Oberschwingung ($n = 2$) $4l/5$, und die betreffenden Schwingungszahlen betragen $3c/4l$ bzw. $5c/4l$. Bei dem einseitig freien Seil treten also nicht alle harmonischen Oberschwingungen auf, wie bei beiderseitiger Einspannung, sondern nur ungerade harmonische Oberschwingungen, deren Schwingungszahlen das 3-, 5-, 7fache usw. der Schwingungszahl der Grundschwingung betragen.

Bei Saiten und Seilen handelt es sich um Transversalschwingungen. In analoger Weise kann man die Longitudinalschwingungen behandeln, in die ein Stab z. B. durch Reiben mit einem feuchten Tuch versetzt werden kann. Ist der Stab an beiden Enden fest eingespannt, so muß er hier stets Schwingungsknoten haben. In seiner Grundschwingung besitzt er nur diese Knoten und in seiner Mitte einen Schwingungsbauch. Die Wellenlänge seiner Grundschwingung ist also gleich der doppelten Stablänge $2l$, ihre Schwingungszahl $\nu_1 = c/2l$. Wie bei der gespannten Saite können alle harmonischen Oberschwingungen vorkommen. Ihre Wellenlängen betragen $2l/n$, ihre Schwingungszahlen $\nu_n = nc/2l = n\nu_1$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c kann nach Gl. (14) berechnet werden. Wird ein Stab in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge eingespannt, wie in Abb. 194, so besitzt er an diesen Stellen stets Schwingungsknoten und an seinen freien Enden stets Schwingungsbauche. In diesem Fall ist die Wellenlänge seiner Grundschwingung also gleich der Stablänge. Auch hier kommen alle harmonischen Oberschwingungen vor. Ein einseitig eingespannter Stab verhält sich wie ein Seil mit einem freien Ende. Die Wellenlänge seiner Grundschwingung ist gleich der vierfachen Stablänge, und es treten nur ungeradzählige harmonische Oberschwingungen auf.



Abb. 208.
Schwingungen
eines Seils mit
einem freien
Ende.

Sehr viel verwickelter sind die Schwingungen anderer Körper, z. B. von ebenen oder gebogenen Platten, Glocken usw. Ihre Oberschwingungen sind nicht harmonisch. An Stelle von Knotenpunkten treten bei ihnen *Knotenlinien* auf. Abb. 209 zeigt die Knotenlinien einer in ihrer Mitte befestigten quadratischen Platte bei verschiedenen Schwingungsformen (CHLADNISCHE Klangfiguren). Sie sind durch aufgestreuten Sand sichtbar gemacht, der bei der Schwingung von den Bäuchen weggeschleudert wird und sich in den ruhenden

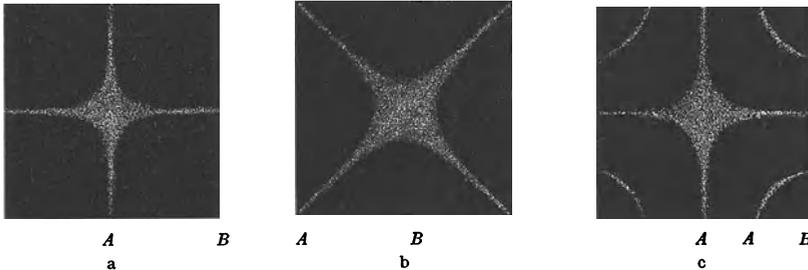


Abb. 209. Knotenlinien von quadratischen Platten. (Nach MÜLLER-POUILLET: Lehrbuch der Physik, Bd. 1, 3. Teil.)

Knotenlinien sammelt. Die verschiedenen Schwingungsformen treten auf, indem man die Platte in einem Punkt oder mehreren Punkten *A* mit dem Finger berührt und dadurch dort das Auftreten von Knoten erzwingt, und in verschiedenen Punkten *B* mit einem Geigenbogen anstreicht, so daß dort ein Schwingungsbauch entsteht. An homologen Stellen bilden sich dann von selbst weitere Knoten und Bäuche.

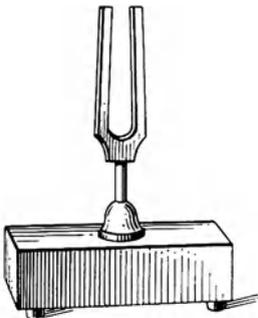


Abb. 210. Stimmgabel.

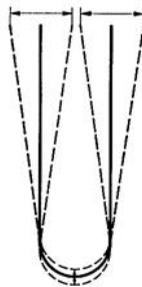


Abb. 211. Schema der Stimmgabelschwingung.

Eine Stimmgabel (Abb. 210) kann als ein gebogener Stab betrachtet werden, der eine transversale Schwingung ausführt. Bei ihrer Schwingung bilden sich beiderseits ihres unteren Endes Schwingungsknoten, an den freien Enden und in der Mitte Schwingungsbäuche (Abb. 211). Das untere Ende der Stimmgabel bewegt sich also ein

wenig auf und ab und kann so die Schwingung auf andere Körper, z. B. auf einen unter ihr angebrachten Resonanzkasten, übertragen.

Die verschiedenen Schwingungszahlen, die an einem schwingungsfähigen Gebilde auftreten können, nennt man seine *Eigenfrequenzen*.

93. Schwingungen von Luftsäulen. Die — natürlich stets longitudinalen — Schwingungen von Luftsäulen können wir analog zu den longitudinalen Stabschwingungen behandeln. Wir beschränken uns dabei auf Luftsäulen, die sich in länglichen Röhren von überall gleichem Querschnitt befinden. Ist die Röhre beiderseitig geschlossen, so können in ihr nur solche stehenden Wellen auftreten, die an den Röhrenenden Schwingungsknoten haben, da dies ja durch die feste Wand bedingt wird (§ 87). Die Schwingungen der in der Röhre enthaltenen Luft — es kann auch ein anderes Gas sein — entsprechen also denjenigen eines an seinen beiden Enden eingeklemmten Stabes. Die Wellenlänge der Grundschwingung ist gleich der doppelten Rohrlänge, $\lambda_1 = 2l$. Ihre Schwingungszahl beträgt $\nu_1 = c/2l$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c kann nach Gl. (15 a) oder (15 b) berechnet werden. Es können sämtliche harmonischen

Oberschwingungen auftreten, und die möglichen Schwingungszahlen betragen demnach

$$v_n = n \frac{c}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{p \kappa}{\rho}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{RT}{M}} \kappa \text{ Hz.} \quad (31)$$

Abb. 212a zeigt für die Grundschwingung ($n = 1$) die Schwingungsweiten der Luftteilchen in den einzelnen Teilen der Röhre unmittelbar, Abb. 212b in graphischer Darstellung. Abb. 212c zeigt graphisch die maximalen Druckschwankungen im Rohr. Die Knoten der Druckschwankungen liegen nach § 87 in den Bäuchen der Luftschwingung und umgekehrt.

Bei einer beiderseits offenen Röhre liegen die Verhältnisse genau umgekehrt. An einem offenen Ende (genauer gesagt, in seiner nächsten Umgebung) herrscht der konstante äußere Luftdruck. Infolgedessen muß hier stets ein Druckknoten, also auch ein Schwingungsbauch liegen (Abb. 213). Ein offenes Rohrende entspricht also einem freien Stabende. Die Wellenlängen und Schwingungszahlen einer beiderseits offenen Luftsäule sind also die gleichen wie die einer gleich langen beiderseits geschlossenen Luftsäule [Gl. (31)]. Eine einseitig offene Luftsäule entspricht einem einseitig eingeklemmten Stab (Abb. 213). Die Wellen-

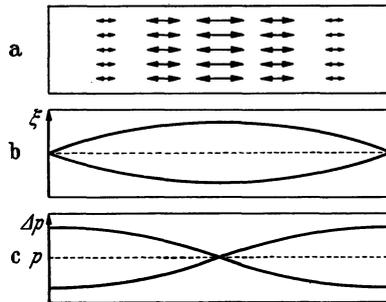


Abb. 212. Grundschwingung einer beiderseits geschlossenen Luftsäule. a Schema der Schwingungsweiten, b graphische Darstellung der Schwingungsweiten, c graphische Darstellung der maximalen Druckschwankungen.

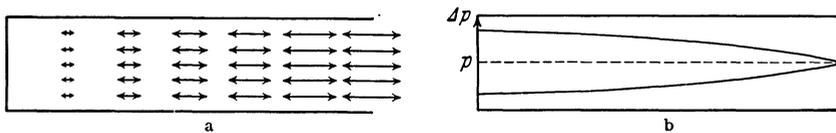


Abb. 213. Schwingungen einer einseitig geschlossenen Luftsäule. a Schwingungsweiten der Luftteilchen, b Druckschwankungen.

länge ihrer Grundschwingung beträgt das Vierfache der Rohrlänge l , und es treten nur ungeradzahlige Oberschwingungen auf,

$$v_n = \frac{(2n + 1)c}{4l} = (2n + 1) v_1 \text{ Hz.} \quad (32)$$

Verschließt man das eine Ende einer beiderseits offenen Röhre durch einen Schlag mit der Hand, so gibt sie einen Ton, der der Grundschwingung der einseitig offenen Luftsäule in ihr entspricht. Hebt man aber die Hand momentan wieder ab — so schnell, daß das Rohrende wieder frei ist, wenn die Druckwelle einmal im Rohr hin und her gelaufen ist —, so schwingt sie mit zwei offenen Enden und gibt einen um 1 Oktave höheren Ton. Durch geschicktes Anblasen einer Röhre kann man ihre Grundschwingung, unter Umständen auch ihre Oberschwingungen erregen (Pfeifen auf einem Schlüssel).

Auf der Schwingung von Luftsäulen beruhen die *Orgelpfeifen*. Die *Lippenpfeifen* (Abb. 214a) werden durch ihren Fuß h mit einem Luftstrom angeblasen. Dieser tritt durch die Luftkammer K und wird durch einen schmalen Spalt SS als Luftband gegen eine an der seitlichen Öffnung (Mund oder Maul) der Pfeife angebrachte Schneide gelenkt. An dieser beginnt das Luftband hin und her zu pendeln. Auf diese Weise erzeugt es in der Luftsäule innerhalb der Pfeife Druckschwankungen, durch die die Luftsäule zu ihren Eigenschwingungen, insbesondere zu ihrer Grundschwingung erregt wird. Die Periodizität dieser

Schwingungen überträgt sich wiederum auf die Bewegungen des Luftbandes. Auf diese Weise schaukelt sich die Pfeife zu einer kräftigen stationären Schwingung auf. Die durch Schallausstrahlung verlorene Energie wird ständig aus der Strömungsenergie des Luftbandes ersetzt. Der Pfeifenmund bildet ein offenes Ende, da hier maximale Schwingungsweiten der Luftteilchen bestehen. Ist also die Pfeife oben offen (offene Pfeife), so schwingt sie mit zwei offenen Enden. Ihre Grundschwingung (Grundton) ist $\nu_1 = c/2l$ Hz, und es können sämtliche harmonischen Oberschwingungen (Obertöne) auftreten. Ist die Pfeife aber oben geschlossen (gedackte Pfeife), so schwingt die Luftsäule mit einem offenen und einem geschlossenen Ende. Ihre Grundschwingung ist $\nu_1 = c/4l$, und ihr Grundton liegt um eine Oktave tiefer als bei einer gleich langen offenen Pfeife. Es kommen nur ungeradzahlige harmonische Oberschwingungen vor. Daher rührt die verschiedene Klangfarbe der beiden Pfeifentypen.

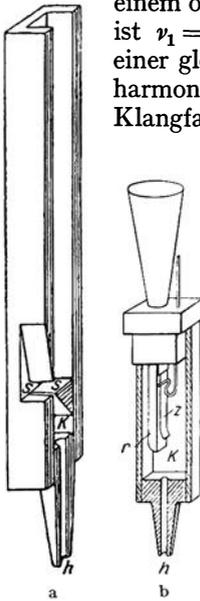


Abb. 214. Querschnitt durch a Lippenpfeife, b Zungenpfeife.

Eine Lippenpfeife gibt bei nicht zu starkem Anblasen am stärksten ihren Grundton, daneben viel schwächer und mit der Ordnungszahl n schnell abnehmend, die Obertöne. Durch geeignetes, insbesondere durch starkes Anblasen, das sog. *Überblasen*, können aber auch bestimmte Oberschwingungen maximal erregt werden.

Die *Zungenpfeifen* beruhen auf den Eigenschwingungen eines Metallblattes, der Zunge Z (Abb. 214b). Diese liegt auf einem Schlitz in einem Rohr r den sie nahezu verschließt. Die Schwingungen der Zunge werden durch einen Luftstrom erregt, der durch den Fuß h in die Luftkammer K tritt, und dem die Zungenschwingungen den Durchgang durch den Schlitz mit der Frequenz der Eigenschwingung der Zunge periodisch öffnen und verschließen. Der aufgesetzte Trichter dient dazu, eine bestimmte Partialschwingung der Zunge, auf die er abgestimmt ist, durch Resonanz (§ 94) besonders zu verstärken.

94. Erzwungene Schwingungen. Resonanz. Wirkt auf einen schwingungsfähigen Körper von der Eigenfrequenz ν_0 eine periodische Kraft, z. B. eine Welle, von der Frequenz ν , so gerät er — nach Durchlaufen eines *Einschwingvorganges*, bei dem auch seine Eigenfrequenz auftritt — in eine *erzwungene Schwingung* mit der Frequenz ν der Welle. Voraussetzung für das Auftreten einer stationären erzwungenen Schwingung ist, daß der Körper eine — wenn auch geringe — Dämpfung besitzt (§ 42), die seine Eigenschwingung zum Abklingen bringt. Andernfalls dauert der nichtstationäre Einschwingvorgang unendlich lange. Wie wir hier ohne Beweis mitteilen wollen, beträgt der Momentanwert der stationären Schwingung bei nicht sehr großer Dämpfung

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \xi_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{mit} \quad \text{tg } \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (33)$$

wenn $a \sin \omega t$ der Momentanwert der erregenden Schwingung, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ und $\omega = 2\pi\nu$ ist. β ist ein Maß für die Dämpfung (§ 42), φ die Phasendifferenz der erzwungenen Schwingung gegenüber der erregenden Kraft. Aus Gl. (33) erkennt man folgende Tatsachen. Die Schwingungsweite ξ_0 der erzwungenen Schwingung — der Faktor von $\sin(\omega t - \varphi)$ — ist am größten für eine bestimmte erregende Frequenz ν , die bei kleiner Dämpfung β fast genau mit der Eigenfrequenz ν_0 übereinstimmt ($\omega \approx \omega_0$). Diesen Fall maximaler Mitschwingungs-

weite bezeichnet man als *Resonanz*. Die Schwingungsweite hängt außerdem von der Dämpfung ab. Bei kleiner Dämpfung ist sie zwar im Resonanzfalle groß, fällt aber schon bei geringer Abweichung von der Resonanz schnell ab. Ein merkliches Mitschwingen erfolgt also nur in einem schmalen Bereich von Schwingungszahlen ν , die von ν_0 nur wenig verschieden sind (Abb. 215a). Die *Resonanzbreite*, die als die Breite der Resonanzkurve in ihrer halben Höhe definiert ist, ist in diesem Fall gering. Bei größerer Dämpfung ist die Schwingungsweite bei Resonanz geringer, aber die Resonanzbreite ist größer (Abb. 215b). Gl. (33) besagt ferner, daß zwischen der erregenden Welle und der erzwungenen Schwingung eine Phasendifferenz φ besteht. Ist $\nu < \nu_0$, so ist $\text{tg } \varphi > 0$, also auch $\varphi > 0$, und die erzwungene Schwingung eilt der erregenden Welle in Phase nach. Ist $\nu > \nu_0$, so eilt sie ihr in Phase vor. Die Phasendifferenz hat ihren größten Betrag, nämlich $\pm \pi/2$, wenn $\nu = \nu_0$, also im Fall der Resonanz. (Eine Schaukel muß man in ihrem Umkehrpunkt anstoßen!) Bei großer Differenz $\nu_0 - \nu$ nähert sich φ dem Betrage 0. Ist also ν sehr verschieden von ν_0 , so ist die erzwungene Schwingung mit der Welle in gleicher Phase.

Nicht nur die Grundschwingung, sondern auch alle Oberschwingungen eines Körpers können zum Mitschwingen und zur Resonanz erregt werden. Für jede dieser Schwingungen besteht eine der Abb. 215 entsprechende Resonanzkurve.

Die Abhängigkeit der Resonanzbreite von der Dämpfung kann man sich leicht an einem Pendel veranschaulichen. Schwingt es in Luft, ist also seine Dämpfung gering, so kann man es leicht in starke Schwingungen versetzen, wenn man es wenigstens nahezu mit der Frequenz seiner Eigenschwingung anstößt, aber auch nur dann (Kinderschaukel). Befindet sich aber das Pendel in einem zäheren, also stärker dämpfenden Stoff, z. B. in Wasser, so kann man es viel leichter mit jeder beliebigen anderen Frequenz hin und her bewegen. Aber seine Schwingungsweiten sind dann bei gleicher wirkender Kraft kleiner, als in Luft in der Nähe der Resonanz. Die größeren hemmenden Kräfte bewirken nämlich, daß nunmehr das für die schwach gedämpfte Schwingung fast allein maßgebende Richtmoment mehr in den Hintergrund tritt und seine frequenzbestimmende Wirkung kaum noch auszuüben vermag.

Bei sehr geringer Dämpfung kann die Schwingungsweite in der Nähe der Resonanz sehr beträchtlich sein. Bei Maschinen muß darauf geachtet werden, daß ihre Drehzahlen nicht mit den Eigenfrequenzen von schwingungsfähigen Gebäudeteilen übereinstimmen, da sonst das Gebäude gefährdet sein kann. Oft ist das Überschreiten von Brücken im Marschtritt verboten, weil dadurch eine Eigenfrequenz der Brücke erregt werden könnte.

Singt man in ein geöffnetes Klavier bei abgehobenem Pedal einen Ton, so klingt er infolge von Resonanz der betreffenden Seite wieder aus ihm heraus. Schwingungsfähige Gegenstände klirren, wenn der ihrer Eigenfrequenz entsprechende Ton erklingt. Eine wichtige Anwendung findet das Mitschwingen schwingungsfähiger Luftkörper bei den Resonanzkästen der Streichinstrumente. Stimmgabeln werden auf Resonanzkästen gesetzt (Abb. 210), deren Luftraum auf die Eigenschwingung der Stimmgabel abgestimmt ist. Der mitschwingende Luftraum entzieht der Stimmgabel Schallenergie und gibt sie viel besser an die umgebende Luft ab, als es die Stimmgabel allein tun würde. Oder man setzt den Fuß der Stimmgabel, um sie besser zu hören, auf eine Tischplatte oder

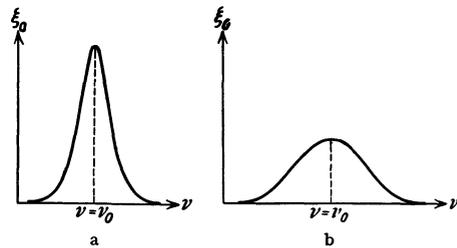


Abb. 215. Schwingungsweite ξ_0 erzwungener Schwingungen, a bei kleiner, b bei größerer Dämpfung.

auf den Resonanzkasten eines Streichinstruments, die dadurch in Mitschwingen geraten und den Schall an die Luft abgeben. (Dies entspricht der Ausstrahlung elektrischer Wellen durch eine mit einem elektrischen Schwingungskreis gekoppelte Antenne, § 255).

Ändert man in der in Abb. 216 dargestellten Vorrichtung die Länge der in der einen Röhre enthaltenen Luftsäule durch Heben oder Senken des Wasserspiegels, während sich eine schwingende Stimmgabel über der Röhre befindet, so hört man deren Ton infolge Resonanz am lautesten, wenn die Länge der Luftsäule gleich $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ usw. der Wellenlänge des ausgesandten Schalles ist (einseitig offenes Rohr, § 93). Auf diese Weise kann die Wellenlänge gemessen werden. Bei geeigneter Mundstellung beobachtet man eine Resonanz der Mundhöhle mit einer vor den Mund gehaltenen Stimmgabel von der Schwingungszahl



400—500 Hz. HELMHOLTZ benutzte die Resonanz von Luftkörpern zur *Klanganalyse*, d. h. zur Ermittlung der in einem Klange

enthaltenen reinen Teiltöne (§ 95). Er bediente sich dabei eines Satzes von abgestimmten *Resonatoren* (Abb. 217), unter denen er diejenigen ermittelte, die beim Ertönen des Klanges in Resonanz geraten.

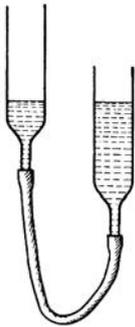


Abb. 216.
Resonanz einer
Luftsäule.

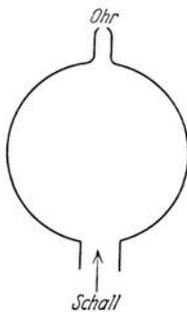


Abb. 217. HELMHOLTZ'scher Resonator.

95. **Geräusche. Klänge. Töne.** Der Schall, die Ursache unserer Gehörempfindungen, beruht auf Wellen, die durch die Luft in unser Ohr gelangen. Besteht eine solche Welle in schnellen, unregelmäßigen Druckschwankungen oder aus vielen periodischen Teilwellen von etwa gleicher Stärke, zwischen deren Schwingungszahlen keine einfachen (rationalen) Beziehungen bestehen, so vernehmen wir ein *Geräusch*. Ist aber die Schallwelle rein harmonisch,

ist also in ihr nur eine einzige Schwingungszahl enthalten, so vernehmen wir einen *reinen Ton*. Ein *Klang* ist ein Gemisch reiner Töne, das aus einem reinen Ton von (meistens) überwiegender Stärke (*Grundton*) und einer mehr oder weniger großen Zahl von weit schwächeren *Obertönen* von größerer Schwingungszahl besteht. Bei der Schwingung von schwingungsfähigen Körpern entsteht fast ausnahmslos kein reiner Ton, sondern ein Klang, da sie meist nicht nur mit ihrer Grundfrequenz schwingen, sondern — wenn auch meist schwächer — auch mit ihren höheren Frequenzen (*Oberschwingungen*). Sie besitzen ein *Frequenzspektrum*, in dem neben ihrer Grundschwingung die einzelnen Oberschwingungen in verschiedener Stärke vertreten sind. Abb. 218 zeigt das Schema des Frequenzspektrums der leeren Saiten einer Geige. Das Intensitätsverhältnis der einzelnen Obertöne relativ zum Grundton bestimmt die *Klangfarbe* eines Klanges, während der Eindruck der *Tonhöhe* des Klanges allein durch den Grundton bestimmt ist. Die charakteristische Verschiedenheit des Klanges der verschiedenen Musikinstrumente beruht auf solchen Intensitätsunterschieden ihrer Obertöne. Ein reiner Ton klingt leer und langweilig. Erst die Beimischung von Obertönen gibt ihm Klangreiz. Das gleichzeitige Erklängen mehrerer etwa gleich starker Töne oder Klänge heißt ein *Akkord*, wenn ihre Schwingungszahlen in einem einfachen rationalen Zahlenverhältnis zueinander stehen. Der psychologische Eindruck der *Tonhöhe* eines Akkords wird durch die Tonhöhe des *höchsten* in ihm enthaltenen Klanges bestimmt.

Zwei Klänge, die die gleichen Grundtöne und die gleichen Obertöne in gleicher Stärke enthalten, können sich physikalisch noch durch die Phasenbeziehungen ihrer Teiltöne unterscheiden, so daß die graphische Darstellung

der Schallschwingung noch sehr verschiedene Gestalten haben kann (vgl. Abb. 172). Das Ohr empfindet zwischen ihnen aber keinerlei Unterschied. Für den akustischen Eindruck eines Klanges kommt es also nur auf die Tonhöhe und die relative Intensität seiner Teiltöne an, nicht auf ihre Phasenbeziehungen (*OHMSches Gesetz*).

Der tiefste Ton, den das menschliche Ohr noch als Ton, nicht als Brummen empfindet, ist das Subkontra-c (c^{-3}) mit $\nu \approx 16$ Hz und einer Wellenlänge in Luft von etwa 20 m. Junge Menschen vermögen Töne bis etwa zur Schwingungszahl $\nu = 20000$ Hz (Wellenlänge rund 1,7 cm) zu hören. Doch sinkt die obere Hörgrenze meist schon in mittlerem Alter beträchtlich herab. In der Musik werden im allgemeinen nur Töne zwischen 16 und 4000 Hz verwendet.

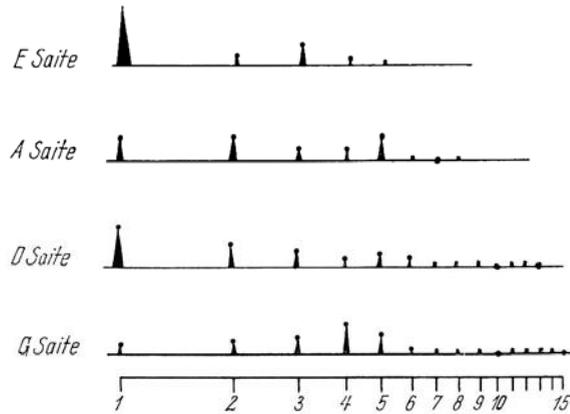


Abb. 218. Frequenzspektrum der leeren Saiten einer Geige nach MILLER. (Aus Handbuch der Physik, Bd. 8.)

Auf elektrischem Wege können unhörbare Schallwellen von großer Stärke mit Schwingungszahlen bis zur Größenordnung von 10^6 Hz erzeugt werden. Diese *Ultraschallwellen* bewirken äußerst heftige Erschütterungen des Gefüges der Stoffe, die sie durchlaufen. Auf kleinere Tiere können sie tödliche Wirkungen ausüben. Neuerdings beginnen sie technische Bedeutung zu gewinnen, z. B. zur Herstellung sehr fein verteilter Emulsionen (sehr feinkörniger photographischer Filme usw.).

Zur Messung von Schallschwingungszahlen kann u. a. die *Sirene* dienen (Abb. 219). Sie besteht aus einer Scheibe mit kreisförmigen Lochreihen, die in Drehung versetzt werden kann. Wird eine Lochreihe durch eine Düse mit einem Luftstrahl angeblasen, so entstehen an der Lochreihe periodische Druckschwankungen, die eine Schallwelle erzeugen. Ihre Grundfrequenz ist gleich der Zahl der Löcher, die in 1 sec an der Düse vorbeilaufen, und kann aus der Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe berechnet werden.

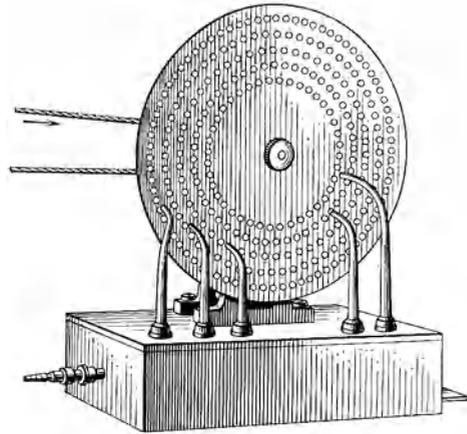


Abb. 219. Lochsirene.

96. Konsonanz und Dissonanz. Die Tonleiter. Erfahrungsgemäß ergibt sich bei gleichzeitigem Erklängen zweier Töne ein um so höherer Grad von Wohlklang (*Konsonanz*), je einfacher das Zahlenverhältnis ist, in dem ihre Schwingungszahlen stehen. Dieses Zahlenverhältnis heißt das *Intervall* der beiden Töne. Das einfachste Intervall ist $\frac{2}{1}$, die Oktave. Zwei reine Töne, die dieses Intervall besitzen, $\nu_2 : \nu_1 = 2 : 1$, unterscheiden sich für das Ohr lediglich durch die Eigenschaft, die man als *Tonhöhe* bezeichnet. Im übrigen werden sie als gleichwertig empfunden. Man bezeichnet einen Ton als um so höher, je größer seine

Schwingungszahl ist. Nächst der Oktave ist das einfachste Intervall die Quint $\frac{3}{2}$. Wenn wir zunächst im Bereich einer Oktave bleiben, so folgen die Quart $\frac{4}{3}$, die große Sexte $\frac{5}{3}$, die große Terz $\frac{5}{4}$ und die kleine Terz $\frac{6}{5}$. Die nun folgenden Intervalle, in denen die Zahl 7 auftritt, werden bemerkenswerterweise durchaus als *Dissonanzen* empfunden und finden in der praktischen Musik keine Verwendung. Das gleiche gilt für die Zahlen 11, 13, 14. Als gute Konsonanz wird noch die kleine Sexte $\frac{8}{5}$ empfunden. Bilden wir mit Hilfe der Zahlen 1 bis 16 alle zwischen 1 und 2, also innerhalb einer Oktave liegenden Intervalle, unter Auslassung der obigen vier Zahlen, so kommen zu den schon genannten Intervallen noch die folgenden hinzu: die kleine Septime $\frac{9}{5}$, der große Ganzton (Sekunde) $\frac{9}{8}$, der kleine Ganzton $\frac{10}{9}$, die große Septime $\frac{15}{8}$ und der kleine Halbton $\frac{16}{15}$. Die fünf letzten Intervalle werden beim Zusammenklang bereits als mehr oder weniger starke Dissonanzen empfunden, spielen aber in der praktischen Musik eine wichtige Rolle. Je nach dem Grade der Konsonanz, d. h. der Einfachheit des durch das Intervall ausgedrückten Schwingungszahlverhältnisses, spricht man von einer mehr oder weniger nahen *Tonverwandtschaft* zweier Töne.

Die Ursache für die Konsonanz oder Dissonanz zweier Töne liegt in der Anzahl der harmonischen Obertöne, in denen sie übereinstimmen. Diese erklingen nicht nur fast immer gleichzeitig mit dem Grundton, sondern sie entstehen — aus dem gleichen Grunde wie die Differenztöne (§ 88) — auch beim Erklingen eines reinen Tones im Trommelfell. Hierbei kommen vor allem die ersten Obertöne in Frage, da die höheren Obertöne meist sehr viel schwächer sind. In je mehr Obertönen ihres Grundtones zwei Klänge übereinstimmen, um so besser ist ihre Konsonanz. Hieraus läßt sich der Grad der Tonverwandtschaft für die einzelnen Intervalle sowie die Sonderstellung der vier oben genannten Zahlen leicht ableiten.

Die Gesamtheit der auf die obige Weise auf einen gegebenen Ton aufgebauten Intervalle, einschließlich der gleichen Intervalle in den höheren und tieferen Oktaven, heißt die zu dem betreffenden Ton gehörige *Tonleiter*. Dieser Ton heißt der *Grundton* der Tonleiter. Jedoch hat man in der neuzeitlichen europäischen Musik für jeden Grundton zwei *Tonarten* zu unterscheiden, die *Durtonart* und die *Molltonart*, bei denen jeweils nur ein Teil der obigen Intervalle Verwendung findet. Zur Durtonart gehören außer dem Grundton selbst der große Ganzton, die große Terz, die Quart, die Quint, die große Sexte, die große Septime und die Oktave. In der Molltonart treten an die Stelle der großen Terz, Sexte und Septime die kleine Terz, Sexte und Septime. Die Folgen der diesen Intervallen entsprechenden Töne heißen die *natürlich-harmonische Dur-* bzw. *Molltonleiter*. Gehen wir z. B. von dem Grundton c

	Intervall zum Grundton	Intervall der Tonschritte
Grundton c	$\frac{1}{1}$	
Sekunde d	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
Große Terz e . . .	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$
Quart f	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{15}$
Quint g	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$
Große Sexte a . .	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$
Große Septime h .	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{8}$
Oktave c ¹	$\frac{2}{1}$	$\frac{16}{15}$

aus, so besteht demnach die c-dur-Tonleiter innerhalb einer Oktave aus den in der nebenstehenden Tabelle verzeichneten Tönen.

Es kommen also in der Durtonleiter — ebenso in der Molltonleiter — zwischen aufeinanderfolgenden Tönen drei verschiedene Tonschritte vor, der große Ganztonschritt $\frac{9}{8}$, der kleine Ganztonschritt $\frac{10}{9}$ und der Halbtonschritt $\frac{16}{15}$.

Die Tonleiter mit den obigen einfachen Intervallen entspricht der absolut reinen, der *rein-harmonischen Stimmung*, wie sie ein musikalisches Ohr an sich verlangt. Sie kann bei den Streichinstrumenten, bei denen nur die leeren Saiten

fest gestimmt sind, weitgehend verwirklicht werden, aber nicht bei denjenigen Instrumenten, deren Töne sämtlich eine feste Stimmung haben, wie bei dem Klavier und der Orgel. Zwar ist es möglich, sie für eine bestimmte Tonart rein zu stimmen, z. B. so, daß die c-dur-Tonleiter und die c-moll-Tonleiter auf ihnen rein gespielt werden können. Aber die praktische Musik erfordert die Möglichkeit der *Modulation*, d. h. des Übergangs von einer Tonart in eine andere. Deshalb müssen auch die zu weiteren, auf andere Grundtöne aufgebauten Tonleitern gehörigen Töne vorhanden sein. Betrachten wir z. B. die auf die Quint g ($\frac{3}{2}$) von c aufgebaute g -dur-Tonleiter, so stellt man leicht fest, daß deren große Terz h , Quart c^1 , Quint d^1 und Sexte e^1 in der reinen c -dur-Tonleiter (die dann über die obige Tabelle hinaus zu verlängern ist, indem man die entsprechende Intervalle zur Oktave c^1 bildet) rein enthalten sind. Es fehlt aber erstens die große Septime fis^1 ($\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{45}{16} = 2 \cdot \frac{45}{32}$) zu g , die zwischen f^1 und g^1 liegt. Zweitens liegt zwar die Sekunde zu g ($\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$) sehr nahe am a ($\frac{5}{3}$) der c -dur-Tonleiter, ist aber um das Intervall $\frac{81}{80}$, das *Pythagoräische Komma*, höher als dieses. Je geringer die Tonverwandtschaft zweier Töne ist, um so größer ist die Zahl dieser Tonunterschiede in den auf ihnen aufgebauten Tonleitern.

Ein fest gestimmtes Instrument, das alle hiernach nötigen Töne in reiner Stimmung enthielte, ist schon wegen seiner Kompliziertheit für die praktische Musik nicht brauchbar. Überdies würde bei jeder Modulation eine sprunghafte Änderung gewisser Töne um ein Pythagoräisches Komma nötig sein, was aus ästhetischen Gründen unmöglich ist. Die Musik der Neuzeit erfordert, daß man bei fest gestimmten Instrumenten mit verhältnismäßig wenigen Tönen im Bereich einer Oktave auskommt, und daß mit diesen die Dur- und Molltonleiter zu jedem vorhandenen Ton als Grundton gespielt werden kann. Das ist nur durch ein Kompromiß auf Kosten der rein harmonischen Stimmung möglich. In der heute allgemein üblichen *temperierten Stimmung* (STIFEL 1544, WERCKMEISTER 1700) wird es dadurch geschaffen, daß der Bereich einer Oktave — da diese aus 5 (großen und kleinen) Ganztonschritten und 2 Halbtonschritten besteht — in 12 gleiche Intervalle geteilt wird, die an die Stelle der reinen Halbtonschritte treten. Bezeichnen wir dieses Intervall mit δ , so muß man durch 12 Tonschritte δ vom Grundton (1) zur Oktave (2) kommen. Es muß also $\delta^{12} = 2$ oder $\delta = \sqrt[12]{2} = 1,059$ sein. Der Unterschied zwischen dem großen und kleinen Ganzton verschwindet. Sie werden durch einen doppelten Halbtonschritt ersetzt, der $1,059^2 = 1,121$ beträgt und zwischen dem großen Ganzton ($\frac{9}{8} = 1,125$) und dem kleinen Ganzton ($\frac{10}{9} = 1,111$) liegt. Sämtliche Intervalle, außer den Oktaven, sind gegenüber den reinen Intervallen ein wenig verstimmt, aber so wenig, daß es, auch infolge von Gewöhnung, im allgemeinen nicht empfunden wird. Auf diese Weise unterscheidet sich keine der möglichen Tonleitern vor der anderen in der Reinheit ihrer Stimmung. Die Folge der Halbtonschritte in der temperierten Stimmung heißt die *chromatische* Tonleiter.

Die gesetzliche Grundlage der heutigen musikalischen Stimmung ist der Ton a^1 mit der Schwingungszahl 435 Hz (*Kammerton*).

Es ist eine sehr wichtige Tatsache, daß der musikalische Charakter des Intervalls zweier Töne nicht durch die Differenz, sondern durch das *Verhältnis ihrer Schwingungszahlen* bestimmt wird. Zwei Tonschritte in verschiedenen Tonhöhen werden also dann als gleichwertig empfunden, wenn sie nicht der gleichen absoluten, sondern der gleichen *relativen* Änderung der Schwingungszahl (Tonhöhe) entsprechen. Einem bestimmten Intervall ν_2/ν_1 entspricht ein bestimmter Betrag des $\log \nu_2/\nu_1$, also der Differenz $\log \nu_2 - \log \nu_1$, z. B. für eine Quint ($\frac{3}{2}$), unabhängig von ihrer Tonhöhe, in BRIGGSchen Logarithmen die Differenz 0,1761. Bei einer graphischen Darstellung der Tonskala ist es

daher zweckmäßig, nicht die Schwingungszahlen selbst, sondern ihre Logarithmen aufzutragen. Dann entsprechen in allen Lagen gleichen Intervallen gleiche Strecken. Die einzelnen Oktaven sind lediglich gegeneinander verschoben, nehmen aber gleiche Bereiche ein (Abb. 220).

In gewissem Grade wird die der Konsonanz zweier Töne außer von ihrem Intervall auch von der Differenz ihrer Schwingungszahlen beeinflusst. Zum Beispiel wird die große Terz, die in den mittleren und hohen Lagen des Klaviers eine sehr gute Konsonanz ergibt, in den tiefen Lagen mehr und mehr als Dissonanz empfunden. Das beruht auf den Schwebungen (§ 88). Ist nämlich — in den tieferen Lagen — die Differenz der Schwingungszahlen der beiden Töne so klein, daß hörbare Schwebungen auftreten, so tönt ihr Zusammenklang rau. Setzen wir z. B. die wohlklingende Terz c^3 — e^3 mit den (temperierten) Schwingungszahlen 1034,61 und 1303,53 Hz um vier Oktaven tiefer, so ergibt die Terz c^{-1} — e^{-1} mit den Schwingungszahlen 64,66 und 81,47 Hz einen recht unangenehmen Zusammenklang.

Das OHMSche Gesetz (§ 95) gilt natürlich nicht nur für die Teiltöne eines Klanges, sondern auch für den Zusammenklang mehrerer etwa gleich starker

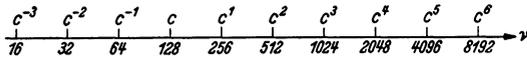


Abb. 220. Der musikalisch verwendete Tonbereich in logarithmischer Darstellung (rein harmonische Stimmung).

Töne. Der musikalische Charakter des Zusammenklangs, z. B. eines Akkords, ist unabhängig von den Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Tönen. Wäre das nicht

der Fall, so wäre eine polyphone Musik im heutigen Sinne undenkbar, da es praktisch wohl kaum möglich wäre, zwischen mehreren Musikinstrumenten bestimmte Phasenbeziehungen herzustellen.

97. Musikinstrumente. Über die Musikinstrumente kann hier nur einiges Grundsätzliche gesagt werden. In der Mehrzahl gehören sie zwei Gruppen an. Die Saiteninstrumente beruhen auf den Klängen gespannter Saiten, die Blasinstrumente und die Orgel auf den Klängen schwingender Luftsäulen. Andere Instrumente beruhen auf den Klängen tönender Stäbe, Platten oder Membrane (Xylophon, Glocken, Gong, Becken, Triangel, Trommel, Pauken).

Die *Saiteninstrumente* haben Saiten aus Darm, drahtumwickeltem Darm oder Stahldraht, die durch Streichen mit einem Bogen, durch Anschlagen oder Zupfen erregt werden. Ihre Klangfarbe (Tonspektrum) ist von Art und Ort der Erregung stark abhängig. Am günstigsten ist eine Erregung in $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{9}$ der Saitenlänge, weil dann die dissonanten Obertöne am wenigsten angeregt werden. Zu den Streichinstrumenten gehören die Geige, die Bratsche, das Violoncello und der Kontrabaß, ferner die in der modernen Musik nicht mehr verwendeten verschiedenen Formen der Violen oder Gamben. Die gewünschten Töne, außer denen der leeren Saiten, werden bei ihnen dadurch erzeugt, daß die Saiten mit dem Finger gegen das Griffbrett gedrückt und dadurch verkürzt werden. Legt man den Finger lose auf einen Schwingungsknoten einer Oberschwingung der leeren Saite, der kein Knoten einer tieferen Oberschwingung ist, so können ihre tieferen Teiltöne nicht auftreten, und der betreffende Oberton der Saite erklingt als Grundton des erzeugten Klanges (Flageolet-töne). Das Zupfen der Saite heißt Pizzicato. Die Saitenschwingungen werden durch den Steg auf den Resonanzkasten übertragen und von ihm an die Luft weitergegeben. Die Beschaffenheit des Resonanzkastens ist für die Klangschönheit des Instruments von größter Bedeutung. Denn er soll in allen vorkommenden Tonhöhen möglichst gleich stark mitschwingen. Seine traditionelle Form genügt dieser Bedingung in einer bisher nicht übertroffenen und in ihrer Ursache noch keineswegs klar erkannten Weise. Der Spürsinn der

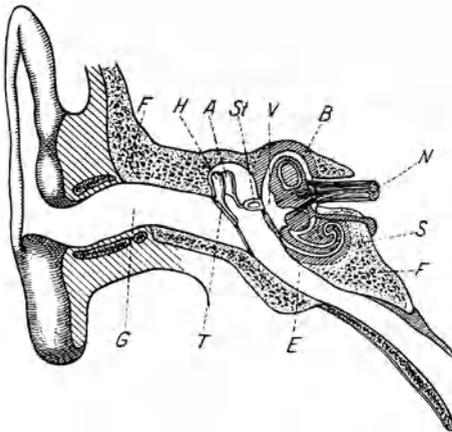
großen italienischen Geigenbauer, die diese Form rein empirisch entwickelten, verdient höchste Bewunderung.

Beim Flügel werden die Saiten mit befilzten Hämmern angeschlagen. Zahlreiche, besonders der volkstümlichen Musik dienende Saiteninstrumente werden durch Zupfen erregt (z. B. Laute, Gitarre, Mandoline, Zither). Zu den Saiteninstrumenten gehören ferner die Harfe, sowie die Vorläufer des Hammerklaviers, das Klavichord (Kielflügel) und das Klavicembalo.

Bei allen diesen Instrumenten erfüllt die Saite gleichzeitig zwei völlig verschiedene Aufgaben. Erstens bestimmt sie durch ihre Beschaffenheit und Spannung die Tonhöhe, zweitens hat sie die zur Schallerzeugung nötige Energie zu liefern. Zwischen diesen beiden Erfordernissen besteht kein befriedigender Einklang. Man ist daher dazu übergegangen, der Saite nur die erste Aufgabe zu überlassen, die Schallenergie aber aus anderer Quelle zu beziehen. Hierauf beruhen verschiedene sog. elektrische Musikinstrumente. Bei diesen Instrumenten steuert die Saite durch ihre Schwingungen die elektrische Spannung des Gitters einer Verstärkerröhre, deren Anodenstrom dadurch mit der Frequenz der Schwingungen verstärkt und geschwächt wird (§ 259). Der Anodenstrom wird nach Art der Rundfunkgeräte weiter verstärkt und auf einen Lautsprecher übertragen. Ein Resonanzkörper ist nicht vorhanden, da der Saite ja möglichst wenig Energie entzogen werden soll. Auf diese Weise wird ihre Schwingung auch nur sehr wenig durch Dämpfung beeinträchtigt. Andere elektrische Musikinstrumente erzeugen auch schon die ursprüngliche Schwingung auf elektrischem Wege. Alle diese Instrumente ergeben die Möglichkeit zu völlig neuen Klangwirkungen, haben aber in der praktischen Musik bisher leider erst wenig Verwendung gefunden.

Bei den *Blasinstrumenten* werden die Schwingungen von Luftsäulen durch Blasen mit dem Munde erregt. Man teilt sie nach ihrem Material in Holz- und Blechblasinstrumente ein. Mit Ausnahme der Flöte, die eine Lippenpfeife ist, sind sie sämtlich vom Typus der Zungenpfeife. Zu den Holzblasinstrumenten gehören Flöte, Oboe, Fagott, Klarinette und Schalmei. Die Grundschiwingung der Zunge liegt viel tiefer als die zu erzeugenden Töne, die hohen Oberschwingungen der Zunge entsprechen. Diese liegen sehr dicht beieinander, und es befindet sich unter ihnen die lückenlose Folge aller gewünschten Töne. Welcher von ihnen zum Ansprechen (Resonanz) gebracht wird, hängt von der wirksamen Länge der im Rohr des Instruments befindlichen Luftsäule ab. Um diese verändern zu können, haben die Holzblasinstrumente seitliche Löcher, die mit den Fingern oder durch Klappen verschlossen werden können. Wird eines von ihnen geöffnet, so entsteht dort ein offenes Rohrende, und der Ton wird mehr oder weniger erhöht. Weitere höhere Töne werden durch Überblasen erzeugt (§ 93). Spieltechnisch gehört zu den Holzblasinstrumenten auch das meist aus Blech hergestellte Saxophon, das der Klarinette nahe verwandt ist. Zu den Blechblasinstrumenten gehören Trompete, Horn, Posaune und Tuba. Bei ihnen wird die Zunge durch die in das trichterförmige Mundstück des Instruments gepreßten Lippen des Bläasers gebildet. Bei der Posaune und gewissen Trompeten wird die Länge der Luftsäule durch einen Auszug verändert. Beim Waldhorn werden die verschiedenen Töne nur durch Überblasen erzeugt. Seine Tonskala ist daher lückenhaft. Die Tonhöhe kann ferner durch Einführung der Hand in den Schallbecher (Stopfen) und die Art des Anblasens in geringem Umfange geändert werden. Die übrigen Blechblasinstrumente haben Ventile, mittels derer Seitenkanäle in den Luftweg eingeschaltet und der direkte Luftweg versperrt werden kann, wodurch die Länge der wirksamen Luftsäule verändert wird. Bei den Blechblasinstrumenten findet das Überblasen eine viel ausgedehntere Anwendung als bei den Holzblasinstrumenten.

Die *Orgel* besitzt eine sehr große Zahl von Lippen- und Zungenpfeifen. Bei sehr großen Orgeln reicht der Tonumfang vom Subkontra-c (c^{-3} , 16, 165 Hz) bis zum c^5 (4138, 440 Hz), also über acht Oktaven. Jeder Ton ist durch mehrere, verschieden geformte, offene und gedackte Pfeifen von verschiedener Klangfarbe vertreten. Schon hierdurch und durch die verschiedene Klangfarbe der offenen und der gedackten Pfeifen und der Zungenpfeifen erlaubt die Orgel, Musik in sehr verschiedenen Klangfarben wiederzugeben. Diese Möglichkeit wird aber durch die *Register* außerordentlich erweitert, eine Vorrichtung, mittels derer es möglich ist, zu den einzelnen Tönen weitere Töne, die gewissen Obertönen derselben entsprechen, leise mitklingen zu lassen und dadurch Klänge von den verschiedensten Klangfarben zu erzeugen.



Durch die Mannigfaltigkeit dieser Möglichkeiten und durch die Schönheit und Größe ihres Klanges erhält die Orgel ihre einzigartige Stellung unter den Musikinstrumenten. Das Harmonium ist eine kleine Orgel, die nur Zungenpfeifen hat. Auch die Hand- und die Mundharmonika haben Zungenpfeifen.

98. Gehör und Sprache. Das Ohr besteht aus drei Teilen, dem äußeren Ohr, dem Mittelohr und dem inneren Ohr oder Labyrinth (Abb. 221a). Das *äußere Ohr* wird durch die zum besseren Auffangen des Schalles dienende Ohrmuschel und



Abb. 221. Schema des menschlichen Ohrs. a Schematischer Querschnitt, b Querschnitt durch das Cortische Organ.

den im Felsenbein *F* liegenden Gehörgang *G* gebildet und ist hinten durch das Trommelfell *T*, eine häutige Membran, abgeschlossen. Das *Mittelohr* beginnt hinter dem Trommelfell und ist, zum Ausgleich des Luftdrucks, durch die Eustachische Röhre *E* mit dem Nasen-Rachenraum verbunden. Es enthält ein System von Knöcheln, Hammer *H*, Amboß *A* und Steigbügel *St*. Diese bilden ein Hebelwerk, durch das die Schwingungen des Trommelfells auf das ovale Fenster des inneren Ohrs übertragen werden. Dabei werden die Schwingungen des Trommelfells, die zwar eine verhältnismäßig große Schwingungsweite haben, aber wenig kräftig sind, in kräftigere Schwingungen des ovalen Fensters von kleinerer Schwingungsweite verwandelt. Das ist deshalb nötig, weil das innere Ohr mit einer Flüssigkeit, dem Labyrinthwasser, gefüllt ist, die weit weniger zusammendrückbar ist als die Luft. Das *innere Ohr* oder *Labyrinth* bildet einen Hohlraum im Felsenbein. Es besteht aus dem Vorhof *V*, den drei Bogengängen *B*, den Ampullen und der Schnecke *S*. Die Bogengänge haben wahrscheinlich (abgesehen von einer Mitwirkung beim Erkennen der Richtung, aus der ein Schall kommt) mit dem Gehör nichts zu tun, sondern bilden das menschliche Gleichgewichtsorgan. Dieses ist auch bei vielen Tieren mit dem Gehörorgan verbunden. Die Ampullen sind wahrscheinlich das Organ für die Wahrnehmung von Geräuschen, während die Schnecke das ton- und klangempfindliche Organ ist. Sie besteht aus $2\frac{1}{2}$ Windungen und wird durch ein knöchernes Spiralblatt in zwei Hälften geteilt. Sie endet in einem zweiten, dem runden Fenster, das sie gegen das Mittelohr abschließt. Längs der Schneckenwindungen erstreckt sich die Basilarmembran mit dem *CORTISCHEN Organ*.

Dieses besteht aus einer sehr großen Zahl von Fasern (Abb. 221b), die auf die Töne des menschlichen Hörbereichs abgestimmt sind, und die daher in Mitschwingungen geraten, wenn das Ohr von ihrem Eigentone getroffen wird (*Resonanztheorie des Hörens*, HELMHOLTZ 1867). Jeder Faser steht ein Nervenende gegenüber, das mechanisch gereizt wird, wenn die Faser in Schwingung gerät. Diese Reize werden durch die Nerven N auf das Hörzentrum im Hirn übertragen, wo die Tonempfindung entsteht.

Man kann die Richtung, aus der ein Schall kommt, im freien Gelände sehr genau erkennen. Besonders scharf wird die Richtung bei einem scharfen Knall empfunden. Jeder Kriegsteilnehmer weiß, daß man die Richtung nach einem feuernden Geschütz oder dem Ort eines Einschlags nach dem Gehöreindruck erstaunlich genau bezeichnen kann. Dieses *Richtungshören* beruht in der Hauptsache darauf, daß der Schall am Ort der beiden Ohren, die etwa 25 cm Abstand voneinander haben, eine von der Schallrichtung abhängige Phasendifferenz hat. Durch künstliche Vergrößerung des Ohrenabstandes kann die Richtungsempfindlichkeit vergrößert werden. Das kann so geschehen, daß man zwei in größerem Abstände voneinander befindliche Schalltrichter benutzt, die durch Schläuche mit den beiden Ohren verbunden sind.

Die Vokale der menschlichen Sprache verdanken ihren eigentümlichen Klangcharakter der Tatsache, daß in ihrem Klange stets gewisse Tonbereiche von ziemlich genau bestimmter *absoluter* Tonhöhe enthalten sind, die man die *Formanten* des betreffenden Vokals nennt (WILLIS, WHEATSTONE, HELMHOLTZ). Die Erzeugung eines bestimmten Vokals beruht auf einer bestimmten Einstellung der Mundhöhle und des Nasen-Rachenraums, und die Formanten sind Eigenfrequenzen des auf diese Weise abgegrenzten Luftkörpers. Sie haben eine erheblich größere Tonhöhe als der Stimmton, mit dem der Vokal gesprochen wird, und sind in ihm als höhere Obertöne enthalten. Durch die jeweilige Mundstellung werden diese Obertöne infolge von Resonanz besonders verstärkt und geben dem Vokal sein eigentümliches Gepräge. Spricht man bei abgehobenem Pedal einen Vokal in ein geöffnetes Klavier, so klingt er aus ihm wieder heraus, weil die Formanten die betreffenden Saiten zur Resonanz erregen. Läßt man eine besprochene Schallplatte mit merklich falscher Geschwindigkeit laufen, so verändern die Vokale wegen der Änderung der Schwingungszahl der Formanten ihren Charakter. Spricht man nach vorheriger Einatmung von Wasserstoff (Vorsicht!), so klingen die gewohnheitsmäßig gebildeten Vokale verkehrt. Die Wellenlängen λ der Formanten sind durch die Abmessungen der Mundhöhle gegeben, die natürlich in der gewohnten Weise geformt wird. Da die Schallgeschwindigkeit c in Wasserstoff sehr viel größer ist als in Luft, so sind die Schwingungszahlen $\nu = c/\lambda$ merklich zu groß.

Drittes Kapitel.

Wärmelehre.

I. Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie.

99. **Temperatur.** Der Begriff Temperatur ist ursprünglich von den Gefühlen warm und kalt abgeleitet, die wir beim Berühren von Körpern empfinden. Jedoch liefert unser Temperatursinn, der in der Haut und einzelnen, aber nicht allen inneren Körperteilen beheimatet ist, kein objektives und zuverlässiges Maß für die Temperatur der Körper. Für die Temperaturempfindung, die die Berührung mit einem Körper bei uns auslöst, sind außer der Temperatur selbst noch verschiedene andere Umstände mit maßgebend. So erscheint uns die Luft eines Zimmers warm oder kalt, je nachdem wir aus einer wärmeren oder kälteren Umgebung kommen. Auch die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmekapazität des betreffenden Körpers spielen eine Rolle. Ein Metall von 100° können wir nicht anfassen, Watte von 100° ohne weiteres. Auch vermag unser Wärmesinn eine sehr hohe Temperatur von einer sehr tiefen meist nicht zu unterscheiden. Die Temperatur kann daher nur mit objektiv anzeigenden Instrumenten (Thermometern) richtig gemessen werden.

Die Erfahrung zeigt, daß Körper, die miteinander in Wechselwirkung treten können, ihre Temperaturen im Laufe der Zeit ausgleichen und schließlich die gleiche Temperatur annehmen (§ 124). Man mißt daher Temperaturen im allgemeinen so, daß man einen Körper, aus dessen Zustand man seine Temperatur ohne weiteres ersehen kann — z. B. bei einem Quecksilberthermometer aus dem Stande des Quecksilberfadens — mit dem zu untersuchenden Körper in Berührung bringt.

Man bezeichnet die Temperatur des bei einem Druck von 760 mm Hg schmelzenden reinen Eises als die Temperatur 0° , die Temperatur des bei einem Druck von 760 mm Hg siedenden reinen Wassers als die Temperatur 100° . Dies sind die *Fundamentalpunkte der Celsiusskala*, die im Deutschen Reich und den meisten anderen Ländern als gesetzliche Temperaturskala festgelegt ist. Die Einteilung des Intervalls zwischen 0° und 100° beruht ursprünglich auf der Ausdehnung der idealen Gase mit der Temperatur. Ihr Volumen nimmt bei der Erwärmung von 0° auf 100° um $\frac{100}{273}$ ihres Volumens bei 0° zu (§ 103). Ein Schritt von 1° ist dann diejenige Temperaturerhöhung, bei der das Volumen eines idealen Gases um $\frac{1}{273}$ seines Volumens bei 0° zunimmt. Hiernach kann die Skala auch unter 0° und über 100° ohne weiteres fortgesetzt werden. Nach neuerer gesetzlicher Vorschrift geschieht dies heute jedoch nicht mehr unter Bezugnahme auf ein ideales Gas (*gasthermometrische Skala*), sondern auf gewisse Kreisprozesse (§ 126). Diese *thermodynamische Skala* hat den Vorzug, bei ihrer Verwirklichung von allen Eigenschaften der verwendeten Stoffe unabhängig zu sein, was bei der Verwirklichung der gasthermometrischen Skala, mangels eines wirklich idealen Gases, nicht der Fall ist. Im einzelnen können wir hier nicht näher darauf eingehen. In der Thermometrie finden außer den beiden Fundamentalpunkten folgende, besonders genau bestimmte Siedepunkte bei 760 mm Verwendung: Sauerstoff $-182,97^\circ$, Schwefel $444,60^\circ$, ferner die Schmelzpunkte: Silber $960,5^\circ$, Gold 1063° .

Aus Gründen, die bald ersichtlich sein werden, ist es bei theoretischen Überlegungen meist zweckmäßiger, an Stelle der Celsiuskala die von KELVIN eingeführte *absolute oder Kelvinskala* zu benutzen. Sie unterscheidet sich von der Celsiuskala nur dadurch, daß ihr Nullpunkt bei -273°C liegt. Es ist üblich, in der Celsiuskala gemessene Temperaturen mit t , in der absoluten Skala gemessene mit T zu bezeichnen und bei Zahlenangaben die beiden Skalen wenn nötig durch die Einheitsbezeichnung $^{\circ}\text{C}$ bzw. $^{\circ}\text{abs.}$ oder $^{\circ}\text{K}$ zu unterscheiden. Es besteht also zwischen den in den beiden Skalen gemessenen Temperaturen die Beziehung

$$T = 273 + t. \quad (1)$$

100. Mechanische Wärmetheorie. Wir haben schon früher mehrfach darauf hingewiesen, daß die kinetische Energie der Moleküle von der Temperatur abhängt. Tatsächlich unterscheiden sich zwei sonst gleiche Körper von verschiedener Temperatur nur dadurch, daß die Moleküle des wärmeren Körpers eine höhere Energie haben als die des kälteren. *In dieser Tatsache beruht das Wesen der Wärme. Einen Körper erwärmen heißt, daß man die Bewegungsenergie seiner Moleküle erhöht.* Diese Vorstellung findet sich zuerst bei BACON (1620) angedeutet und wurde durch DAVY und RUMFORD (1812) fester begründet. Ihren Ausbau zur *mechanischen Theorie der Wärme* vollendeten insbesondere KRÖNIG (1856), CLAUSIUS (1857), MAXWELL (1860) und BOLTZMANN (1866—1877).

Ein Molekül kann drei Arten von Bewegungsenergie besitzen. Erstens eine auf seiner Geschwindigkeit beruhende *kinetische Energie* (§ 23). Zweitens kann es rotieren, also *Rotationsenergie* (§ 36) besitzen. Drittens können die Bestandteile (Atome) des Moleküls Schwingungen gegeneinander ausführen, also *Schwingungsenergie* (§ 42) besitzen. Jede dieser Energiearten nimmt mit steigender Temperatur zu. Der Betrag der auf jede von ihnen bei gegebener Temperatur entfallenden Energie hängt von der Zahl der *Freiheitsgrade* ab, die das Molekül bezüglich der betreffenden Bewegungsart hat. Ein Körper, der sich in allen Richtungen des dreidimensionalen Raumes frei zu bewegen vermag, hat drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie. Ist seine Bewegung auf eine bestimmte Fläche beschränkt, so hat er deren zwei. Kann er sich nur längs einer bestimmten Kurve bewegen, so hat er nur einen Freiheitsgrad der kinetischen Energie. Beispiele für diese drei Fälle sind der im Raum bewegliche Freiballon, das an die Meeresoberfläche gebundene Schiff und der an das Gleis gebundene Eisenbahnzug. Die Moleküle eines Gases haben demnach drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie.

Entsprechendes gilt grundsätzlich für die Rotation. Da es sich bei den Molekülen nur um freie Drehachsen handeln kann, so kommen nur solche Achsen in Betracht, die durch den Schwerpunkt des Moleküls gehen (§ 39). Unterliegt im übrigen die Lage dieser Achse im Molekül keinen Beschränkungen, kann also das Molekül um jede beliebige Schwerpunktsachse rotieren, so hat es drei Freiheitsgrade der Rotation. Ist aber die Lage der Rotationsachse auf eine Ebene im Molekül beschränkt, so hat es deren nur zwei. Bei den mehratomigen Molekülen kommen noch Freiheitsgrade der Schwingungen der Atome im Molekül hinzu.

Das Grundgesetz der mechanischen Wärmetheorie, der *Gleichverteilungssatz* (Äquipartitionsprinzip), lautet: *Auf jeden Freiheitsgrad der Moleküle eines Körpers entfällt bei der absoluten Temperatur T im zeitlichen und räumlichen Durchschnitt die gleiche Energie E .* Und zwar ist

$$E = \frac{1}{2} k T \text{ erg.} \quad (2)$$

k ist die *BOLTZMANNsche Konstante*; sie beträgt $1,3708 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1}$. *Die auf jeden Freiheitsgrad entfallende mittlere Energie ist also der absoluten Temperatur*

proportional. (Über Abweichungen vom Gleichverteilungssatz bei sehr tiefen Temperaturen s. § 354.)

Hierdurch erhält die Einführung der absoluten Temperaturskala ihre Begründung. Der absolute Nullpunkt, $T = 0$, ist die Temperatur, bei der die Energie E verschwindet. Da man den Molekülen eines Körpers von der Temperatur $T = 0$ hiernach keine weitere Bewegungsenergie entziehen, die Temperatur also nicht weiter herabsetzen kann, so ist dies die tiefste überhaupt denkbare Temperatur.

Da die Moleküle der Gase drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie haben, so beträgt ihre mittlere kinetische Energie nach Gl. (2)

$$\frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T. \quad (3)$$

Es ist also das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\overline{v^2} = 3 k T / \mu$ und das Quadrat der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit $v_0^2 = 2 k T / \mu$ (§ 64, Gl. [9]). STERN hat die Geschwindigkeit von Molekülen auf folgende Weise unmittelbar gemessen.

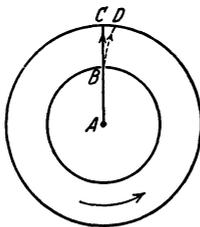


Abb. 222. Messung der Molekulargeschwindigkeit nach STERN.

In Abb. 222 ist A ein zur Zeichnungsebene senkrecht ausgespannter, elektrisch geglühter Silberdraht. Ihn umgeben zwei Kupferzylinder, deren innerer einen schmalen, dem Draht parallelen Spalt B hat. Der ganze Raum wird auf einen niedrigen Druck evakuiert, so daß die Strecke AC erheblich kleiner ist, als die freie Weglänge im Gase. Die beiden, miteinander fest verbundenen Zylinder können in schnelle Rotation versetzt werden. Von dem glühenden Draht gehen einatomige Silbermoleküle aus, deren mittlere kinetische Energie durch Gl. (3) gegeben ist, wenn T die absolute Temperatur des Drahtes ist. Wenn die Zylinder

nicht rotieren, so treten die Silbermoleküle durch den Spalt B und schlagen sich bei C als schmaler Silberstreifen nieder. Wenn aber die Zylinder rotieren, so legt der äußere Zylinder den Weg CD zurück, während sich die Moleküle durch ihren Zwischenraum bewegen, schlagen sich also bei D nieder. (Die gestrichelte Linie stellt die Bahn der Moleküle relativ zu den rotierenden Zylindern dar). Der Niederschlag erfolgt also jetzt an einer anderen Stelle D . Er ist verwaschener als der Niederschlag bei C , weil die Moleküle ja nach dem MAXWELLSchen Gesetz (§ 64) verschiedene Geschwindigkeiten haben. Sein Maximum liegt, wie die Theorie ergibt, bei der Geschwindigkeit $v_0 \sqrt{4/3}$ ($v_0 =$ wahrscheinlichste Geschwindigkeit). Ist v die Umfangsgeschwindigkeit des äußeren Zylinders, so ist $BC : CD = v_0 \sqrt{4/3} : v$. Hiernach kann die wahrscheinlichste Geschwindigkeit und daraus die BOLTZMANNsche Konstante k berechnet werden. Letztere ergab sich in guter Übereinstimmung mit anderweitigen Berechnungen.

Es sei sehr nachdrücklich darauf hingewiesen, daß man nicht etwa einem *einzelnen, als Ganzes bewegten Körper* gemäß Gl. (3) eine bestimmte Temperatur zuschreiben darf, indem man für $\overline{v^2}$ einfach das Quadrat v^2 seiner Geschwindigkeit einsetzt. Der Begriff der Temperatur hat überhaupt nur einen Sinn für eine sehr große Gesamtheit von Molekülen, die sich in völlig ungeordneter Bewegung befinden, und bezieht sich nur auf diese ungeordnete Bewegung. Setzt man einen Körper als Ganzes in Bewegung, addiert man also zu der ungeordneten Bewegung seiner sämtlichen Moleküle die gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit, so trägt dieser geordnete Geschwindigkeitsanteil zur Temperatur des Körpers nichts bei.

Wir betrachten nunmehr die Freiheitsgrade der Rotation. Wie wir in § 37 erwähnt haben, kann man jede Rotation eines Körpers in drei unabhängige

Rotationen um seine drei Hauptträgheitsachsen zerlegen. Aus Gründen, die durch die Quantentheorie geklärt werden (§ 354), kommen aber bei Molekülen Rotationen um solche Hauptträgheitsachsen nicht vor, bezüglich derer das Trägheitsmoment des Moleküls sehr klein ist. Da die Masse der Atome fast ganz in ihren Kernen konzentriert ist (§ 339), und da die Abmessungen der Kerne überaus klein sind (10^{-12} bis 10^{-13} cm), so ist auch das Trägheitsmoment einatomiger Moleküle äußerst klein. Rotationen treten also bei ihnen nicht auf, die Freiheitsgrade der Rotation treten bei ihnen nicht in die Erscheinung. Bei den zweiatomigen Molekülen gilt das gleiche bezüglich derjenigen Hauptträgheitsachse, die die beiden Atome des Moleküls verbindet. Hingegen kann ein zweiatomiges Molekül um jede Achse rotieren, die in der zur ersten senkrechten, durch den Schwerpunkt des Moleküls gehenden Ebene liegt. Bei den zweiatomigen Molekülen treten also zwei Freiheitsgrade der Rotation in die Erscheinung. Bei den drei- und mehratomigen Molekülen gibt es keine Achse mit extrem kleinem Trägheitsmoment. Es kommen alle möglichen Achsenrichtungen vor. Bei diesen Molekülen treten also alle drei Freiheitsgrade der Rotation in die Erscheinung.

Aus Gründen, die ebenfalls durch die Quantentheorie geklärt werden (§ 354), kommen Freiheitsgrade der inneren Molekülschwingungen bei den folgenden Überlegungen im allgemeinen nicht in Betracht. Da die Moleküle der Gase, wie schon gesagt, stets drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie haben, so beträgt die Zahl ihrer wirksamen Freiheitsgrade insgesamt

bei einatomigen Gasen	$3 + 0 = 3$	Freiheitsgrade,
bei zweiatomigen Gasen	$3 + 2 = 5$	Freiheitsgrade,
bei den übrigen Gasen	$3 + 3 = 6$	Freiheitsgrade.

Eine Sonderstellung nehmen unter den drei- und mehratomigen Molekülen diejenigen ein, bei denen die Atome auf einer Geraden angeordnet sind. Ein Beispiel hierfür ist das Molekül der Kohlensäure CO_2 ($\text{O}-\text{C}-\text{O}$). Diese Moleküle verhalten sich bezüglich der Rotationen wie zweiatomige Moleküle. In manchen Fällen, so bei der Kohlensäure, kommen aber bei solchen Molekülen auch schon Freiheitsgrade der Atomschwingungen mit in Betracht, so daß die Zahl der Freiheitsgrade erhöht.

101. Die Brownsche Bewegung. Schwankungserscheinungen. Wohl die eindruckvollste Bestätigung der mechanischen Wärmetheorie ist die *Brownsche Bewegung*. Beobachtet man eine verdünnte Lösung von chinesischer Tusche oder eine kolloidale Goldlösung bei starker Vergrößerung unter dem Mikroskop, so sieht man in der Tusche die Kohleteilchen, in der Goldlösung die Goldteilchen in einer heftigen, vollkommen ungeordneten Zickzackbewegung (Abb. 223). Das gleiche sieht man besonders schön an den festen Teilchen in Tabakrauch, wenn man diesen in einer geeigneten Kammer unter ein Mikroskop bringt (EHRENHAFT). Diese Erscheinung ist bereits 1827 von dem englischen Botaniker BROWN an organischen Flüssigkeiten beobachtet worden, aber erst viel später richtig gedeutet und gebührend beachtet worden.

Man denke sich einen großen, frei beweglichen Körper, an den rings herum eine große Zahl von Menschen in ganz ungeordneter Weise fortwährend stößt. Der Körper wird sich dabei nur sehr wenig hin und her bewegen, weil sich bei der großen Zahl von Stößen, die Unregelmäßigkeiten mit denen die einzelnen Stöße erfolgen, ausgleichen. Jetzt denke man sich den Körper wesentlich kleiner, die Dichte der Menschen, die gegen ihn stoßen, aber ebenso groß, so daß jetzt die Zahl der Stöße, seiner kleineren Oberfläche wegen, weit kleiner wird. Bei dieser kleinen Zahl von Stößen werden sich die Unregelmäßigkeiten nicht mehr in dem Maße ausgleichen wie vorher. Der Körper wird bald ein

wenig mehr nach der einen, bald ein wenig mehr nach der anderen Seite getrieben werden, er wird eine Zickzackbewegung ausführen, und zwar um so lebhafter, je kleiner und leichter er ist. (Man vergleiche etwa die Bewegungen eines Fußballs während einer längeren Zeit und stelle sich auch das Verhalten eines Fußballs vor, der bei gleicher mittlerer Dichte ein zehnmals größeres Volumen hätte als üblich.)

Die Teilchen, die wir bei der BROWNSchen Bewegung im Mikroskop beobachten, entsprechen einem solchen Körper, die Moleküle des Stoffes, in dem das Teilchen schwebt, den stoßenden Menschen. Die Teilchen sind so klein, daß die Zahl der Stöße, die sie erleiden, schon merklichen Schwankungen unterliegt. Und diese Unregelmäßigkeit der von den bewegten Molekülen



Abb. 223. BROWNSCHE BEWEGUNG.

herrührenden Stöße ist es, die die Zickzackbewegung der Teilchen hervorruft. Daß die Heftigkeit der Bewegung mit abnehmender Teilchengröße zunehmen muß, hat weiter seinen Grund darin, daß bei gleicher Gestalt die Masse des Teilchens mit der 3. Potenz, seine Oberfläche und damit die Zahl der ihn treffenden Stöße aber nur mit der 2. Potenz seiner Abmessungen (z. B. bei einer Kugel ihres Radius) abnimmt.

Abb. 223 zeigt eine im Mikroskop beobachtete BROWNSche Bewegung eines Teilchens. (Die eingezeichneten Knickpunkte sind die Orte, an denen

sich das Teilchen in gleichen Zeitabständen befand; die wirkliche Bewegung ist noch viel unregelmäßiger). Diese Bewegung ist natürlich rein zufällig und sieht in jedem einzelnen Falle wieder anders aus. Aber, wie in § 62 auseinandergesetzt, liefert die Beobachtung gehäufte Zufälligkeiten bei großer Zahl von Beobachtungen wieder Gesetzmäßigkeiten, die um so strenger gelten, je größer die Zahl der beteiligten Individuen oder der einzelnen Beobachtungen ist.

Die sichtbaren Teilchen, welche eine BROWNSche Bewegung ausführen, verhalten sich genau wie Moleküle von außerordentlich großer Masse. Auch für sie gilt, daß auf jeden ihrer Freiheitsgrade (fortschreitende Bewegung und Rotation) im Durchschnitt der Energiebetrag $\frac{1}{2} kT$ entfällt. Die mittlere kinetische Energie ihrer fortschreitenden Bewegung ist also $\frac{1}{2} m\bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$. Je höher die Temperatur T , desto heftiger ist ihre Bewegung.

Stellt man den Ort eines der BROWNSchen Bewegung unterliegenden Teilchens in gleichen Zeitabständen τ fest, so erfährt das Teilchen in jedem Zeitintervall τ eine Verschiebung Δx von ständig wechselnder Größe. Für den Mittelwert der einzelnen Beträge der Quadrate $(\Delta x)^2$, das *mittlere Verschiebungsquadrat* $\overline{(\Delta x)^2}$, ergibt die von EINSTEIN aufgestellte Theorie einen ganz bestimmten Wert, und zwar für kugelförmige Teilchen

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{k T \tau}{3 \pi \eta r}, \quad (4)$$

wenn k die BOLTZMANNsche Konstante, T die absolute Temperatur, η der Koeffizient der inneren Reibung des Gases oder der Flüssigkeit, r der Radius der Teilchen ist. Der Mittelwert $\overline{\Delta x^2}$ kann aus einer genügend großen Zahl von Messungen sehr genau ermittelt werden. Auch der Radius von nicht zu kleinen Teilchen kann bestimmt werden. Demnach kann nach Gl. (4) die wichtige Konstante k berechnet werden. Wir wollen schon hier bemerken, daß die leicht meßbare universelle Gaskonstante R (§ 103), die LOSCHMIDTSche Zahl N (§ 63) und die BOLTZMANNsche Konstante k miteinander in der Beziehung $R = Nk$ stehen. Mithin kann bei Kenntnis von k auch die Zahl N berechnet werden. Hierin liegt die große Wichtigkeit der Gl. (4).

Die BROWNSche Bewegung ist ein typisches Beispiel einer *Schwankungserscheinung*. Man versteht darunter Abweichungen vom statistischen Mittelwert, die dann eintreten, wenn die Zahl der beteiligten Individuen klein ist. (Man vergleiche hierzu wieder die Statistik der Bevölkerung eines einzelnen Hauses und einer großen Stadt). Je kleiner die Oberfläche eines Teilchens ist, um so kleiner ist auch die Zahl der Moleküle, die in einer bestimmten Zeit, z. B. in 1 sec, gegen das Teilchen stoßen. Um so größer werden dann die relativen Schwankungen ihrer Zahl und des Betrages und der Richtung ihrer Geschwindigkeiten sein.

Es ist klar, daß in sehr kleinen Volumelementen eines Gases oder einer Flüssigkeit auch die Zahl der in ihnen enthaltenen Moleküle solchen Schwankungen unterliegen muß. Daher führt auch die Dichte sehr kleiner Volumelemente unregelmäßige Schwankungen aus. Auf solchen Dichteschwankungen in der atmosphärischen Luft beruht die blaue Farbe des Himmelslichts (§ 295). Die Theorie der Schwankungen ist zuerst von VON SMOLUCHOWSKI entwickelt worden.

Bei drehbar aufgehängten Gebilden besteht die BROWNSche Bewegung in unregelmäßig schwankenden Drehbewegungen. Es gibt Vorrichtungen (z. B. Spiegelablesung), um sehr kleine Drehbewegungen beobachtbar zu machen. Von solchen macht man unter anderem bei der Messung von elektrischen Strömen Gebrauch. Es wird etwa die Drehung einer Magnetnadel unter der Wirkung eines elektrischen Stromes beobachtet. Auch die Magnetnadel führt unter der Wirkung des umgebenden Gases eine allerdings überaus schwache drehende BROWNSche Bewegung aus. Dies führt zu einer unteren Grenze für die Beobachtbarkeit elektrischer Ströme, die dann erreicht ist, wenn die unregelmäßigen Ausschläge, die die Nadel infolge BROWNScher Bewegung ausführt, von der gleichen Größenordnung sind, wie die Ausschläge unter der Wirkung des Stromes. Aber auch dann, wenn man die Magnetnadel in ein vollkommenes Vakuum brächte, würde diese Grenze nicht unterschritten werden können, weil auch ein elektrischer Strom Schwankungen ausführt, die von einer BROWNSchen Bewegung der Elektrizitätsträger herrühren.

102. Ausdehnung fester und flüssiger Körper durch die Wärme. Bei Erwärmung dehnen sich die festen und flüssigen Körper aus, ihre Abmessungen nehmen mit der Temperatur zu. Das ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, daß durch die thermische Bewegung der Moleküle natürlich der innere Zusammenhalt eines Körpers um so mehr gelockert wird, je heftiger sie ist (vgl. § 109). Ist l die Länge eines festen Körpers bei der Temperatur t , $l + \Delta l$ bei der Temperatur $t + \Delta t$, so ist

$$l + \Delta l = l(1 + \alpha \Delta t) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t. \quad (5)$$

Die Größe α ist der *lineare Ausdehnungskoeffizient* des Stoffes, aus dem der Körper besteht (Tabelle 5). Innerhalb nicht zu großer Temperaturbereiche

ist er meist nahezu konstant, die relative Längenänderung $\Delta l/l$ also der Temperaturänderung Δt proportional. α ist bei festen Stoffen von der Größenordnung 10^{-5} Grad $^{-1}$, bei manchen Stoffen, z. B. Diamant und Quarzglas, erheblich kleiner. Man kann daher ein Stück glühendes Quarzglas

Tabelle 5.
Ausdehnungskoeffizienten einiger fester und flüssiger Stoffe in Grad $^{-1}$.

linear		kubisch	
Blei	0,0000292	Diamant	0,0000013
Eisen	120	Graphit	080
Kupfer	165	Glas	081
Platin	090	Bergkristall \perp Achse	144
Invar (64 Fe + 36 Ni)	016	„ \parallel „	080
		Quarzglas	005
		Alkohol	0,00110
		Äther	163
		Olivenöl	072
		Quecksilber	018
		Wasser	018

in Wasser tauchen, ohne daß es wie Glas springt; denn seine plötzliche Zusammenziehung ist viel kleiner als die des Glases, dessen Gefüge einer solchen Beanspruchung nicht gewachsen ist. Nur bei isotropen Stoffen ist α für alle Richtungen gleich groß, bei den meisten anisotropen Stoffen nicht (vgl. den Bergkristall, Tabelle 5). Das Volumen eines isotropen rechteckigen Körpers, das bei der Temperatur t gleich $V = abc$ sei, beträgt bei der Temperatur $t + \Delta t$

$$V + \Delta V = abc(1 + \alpha \Delta t)^3 \approx V(1 + 3\alpha \Delta t), \quad (6)$$

da $\alpha \Delta t \ll 1$. Demnach ist die relative Volumänderung $\Delta V/V = 3\alpha \Delta t$. Der kubische Ausdehnungskoeffizient beträgt also 3α .

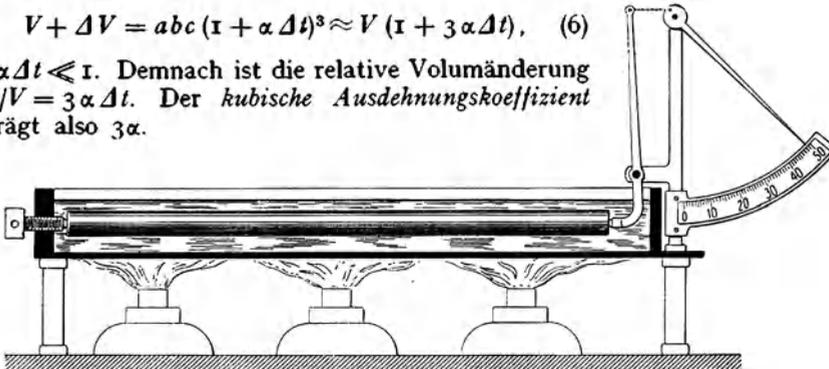


Abb. 224. Messung des Ausdehnungskoeffizienten von Stäben.

Abb. 224 zeigt ein ohne weiteres verständliches Gerät zur Messung des Ausdehnungskoeffizienten von Stäben. Eine erwärmte Kugel fällt durch einen Ring hindurch, nachdem sie sich entsprechend abgekühlt und der Ring sich erwärmt hat (Abb. 225). Eisenträger in Gebäuden müssen stets eine gewisse Bewegungsfreiheit haben, damit sie bei einem Brande nicht infolge ihrer Ausdehnung das Mauerwerk sprengen. Eisenbahnschienen haben kleine Abstände, um Raum für die Ausdehnung im Sommer zu lassen. Brückenträger legt man aus dem gleichen (und auch aus anderem) Grunde auf Walzen. Eisenreifen von Rädern und Eisenringe auf Achsen werden in heißem Zustande an ihren Ort gebracht, damit sie sich nach Abkühlung fest andrücken.

Die Rostpendel der Pendeluhrn (Abb. 226) bestehen aus Stäben aus zwei verschiedenen Metallen, z. B. Eisen (Fe) und Zink (Zn), die so bemessen sind, daß $l_{\text{Fe}}(1 + \alpha_{\text{Fe}} \Delta t) = l_{\text{Zn}}(1 + \alpha_{\text{Zn}} \Delta t)$. Da eine Verlängerung der Eisenstäbe eine Senkung, die der Zinkstäbe eine Hebung der Pendellinse bewirkt, so bleibt die Pendellänge bei Temperaturänderungen unverändert.

Lötet man zwei Metallstreifen von verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten ihrer Länge nach zusammen, so krümmt sich der Streifen bei einer Temperatur-

änderung (BREGUETSche Spirale). Dies wird bei manchen Temperaturmeßgeräten und Temperaturreglern benutzt. Auch die Unruhen der Taschenuhren (Abb. 227) bestehen aus einem solchen doppelten Metallring. Bei einer Temperaturerhöhung dehnt sich zwar die Unruhe als Ganzes aus, aber ihre freien Enden bei *a* und *b* biegen sich nach innen. Die Verhältnisse sind so bemessen, daß sich dann das Trägheitsmoment der Unruhe nicht ändert, ihre Schwingungsdauer also nicht von der Temperatur abhängt.

Bei den Flüssigkeiten spricht man nur von ihrem kubischen Ausdehnungskoeffizienten. Er ist von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} Grad⁻¹, also erheblich größer als bei den festen Stoffen (Tabelle 5). Bringt man ein Gefäß mit Steigrohr, in dem sich eine Flüssigkeit befindet, in heißes Wasser, so beobachtet man zuerst ein schwaches Sinken und erst dann ein Steigen der Flüssigkeit, ebenso auch bei dem Quecksilberfaden von Thermometern. Denn zuerst wird nur das Gefäß erwärmt, erst allmählich die in ihm enthaltene Flüssigkeit.

Einer der wenigen Stoffe, die sich in einem kleinen Temperaturbereich bei Erwärmung nicht ausdehnen, sondern zusammenziehen, ist das Wasser (Anomalie des Wassers). Bei Erwärmung von 0° bis 4° zieht es sich zusammen, seine Dichte nimmt also in diesem Bereich mit der Temperatur zu (Tabelle 6). Dieses Verhalten hängt mit molekularen Veränderungen des Wassers in diesem Bereich zusammen. Die Wahl von Wasser von 4° zur Definition des Gramms (§ 13) geschah deshalb, weil sich die Dichte des Wassers in der Nähe des bei 4° liegenden Dichtemaximums mit der Temperatur sehr viel weniger ändert, als bei irgendeiner anderen Temperatur, so daß Wasser von der betreffenden Dichte mit besonders großer Genauigkeit herzustellen ist.

Die Anomalie des Wassers ist von größter Bedeutung in der Natur. Da Wasser von 4° spezifisch schwerer ist als wärmeres und kälteres Wasser, so sinkt es nach unten. Hat also ein Gewässer im Winter eine Oberflächentemperatur von 4° erreicht, so beginnt das Oberflächenwasser nach unten zu sinken, und es wird durch wärmeres Wasser ersetzt, das nach Abkühlung auf 4° wiederum nach unten sinkt usw. So nimmt das

Wasser zunächst bis in größere Tiefe allmählich überall eine Temperatur von 4° an. Dann erst kann das Oberflächenwasser sich weiter abkühlen und schließlich gefrieren (Abb. 228). Während in der ersten Phase der Temperaturausgleich im Wasser durch die sehr wirksame Konvektion (Strömung) erfolgt, kann sie in der zweiten Phase nur durch die sehr viel langsamer wirkende Wärmeleitung erfolgen (§ 124). Ein Ausfrieren tieferer Gewässer bis auf den Grund kann daher nur sehr schwer eintreten, da ja auch von der wärmeren Erde her dem Tiefenwasser ständig Wärme zugeführt wird.

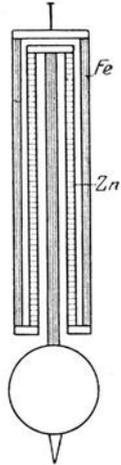


Abb. 226. Rostpendel.

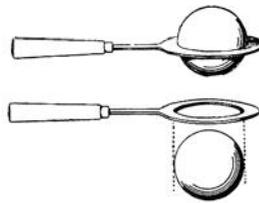


Abb. 225. Erwärmte Kugel fällt nach Abkühlung durch einen Ring.

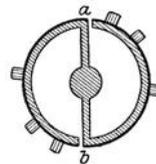


Abb. 227. Unruhe.

Tabelle 6. Dichte des Wassers.

0°	0,99987 g · cm ⁻³
2°	0,99997
4°	1,00000
6°	0,99997
8°	0,99988
10°	0,99973

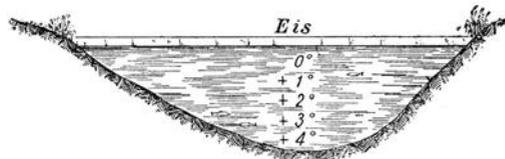


Abb. 228. Zur Anomalie des Wassers.

Das ist natürlich von größter Bedeutung für die Entstehung und Erhaltung organischen Lebens im Wasser.

103. Die allgemeine Zustandsgleichung der idealen Gase. Der Zustand eines Gases ist allgemein durch seinen *Druck* p , sein *Volumen* V und seine *Temperatur* T bestimmt. Bei einer gegebenen Gasmenge können zwei von diesen Zustandsgrößen unabhängig voneinander geändert werden. Die dritte ist dann durch die beiden anderen bestimmt. Demnach besteht zwischen diesen drei Größen eine funktionelle Beziehung von der allgemeinen Gestalt $f(p, V, T) = \text{const}$. Diese Funktion können wir bei einem idealen Gase leicht angeben. Nach § 66, Gl. (14), ist $p = n \mu \bar{v}^2/3$ und nach § 100 beträgt die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle $\mu \bar{v}^2/2 = 3 k T/2$. Demnach ist

$$p = n k T, \quad (7)$$

wobei n die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 bedeutet. Durch Gl. (7) ist wiederum das *AVOGADROSche Gesetz* (§ 62) bewiesen. Denn die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 , $n = p/kT$, ist für alle idealen Gase bei gleichem p und T gleich groß. Ist ρ die Dichte, $V_s = 1/\rho$ das spezifische Volumen des Gases, so ist nach § 62, Gl. (1), $\rho = n \mu = 1/V_s$ und daher

$$p V_s = \frac{k T}{\mu}. \quad (8)$$

Wir erweitern die rechte Seite mit der *LOSCHMIDTSchen Zahl* N und beachten, daß nach § 63, Gl. (6), $N \mu = M$ das Molekulargewicht des Gases ist. Wir setzen ferner $N k = R$. Dann folgt aus Gl. (8)

$$p V_s = \frac{R T}{M}. \quad (9)$$

Da 1 g des Gases das Volumen V_s hat, so ist $V_m = M V_s$ das Volumen von $M \text{ g}$, also von 1 Mol , das Molvolumen des Gases. Es gilt also auch

$$p V_m = R T. \quad (10)$$

Eine Gasmenge von der Masse m hat das Volumen $V = m V_s$. Demnach ergibt sich für eine beliebige Gasmenge aus Gl. (9)

$$p V = m \frac{R T}{M}. \quad (11)$$

Da für eine bestimmte Gasmenge $mR/M = \text{const}$ ist, so kann man statt dessen auch schreiben

$$\frac{p V}{T} = \text{const} \quad \text{oder} \quad p V = \text{const } T. \quad (12)$$

Mißt man die Temperatur in der Celsiuskala, so lautet die Gl. (11) $p V = mR(t + 273)/M$ oder $p V = \text{const}(1 + \alpha t)$, wobei $\alpha = 1/273$ ist. Ist $(pV)_0$ der Betrag des Produktes pV bei $t = 0^\circ \text{C}$, so folgt

$$p V = (pV)_0 (1 + \alpha t). \quad (13)$$

Die Gl. (9) bis (13) sind verschiedene Formen der *allgemeinen Zustandsgleichung* der idealen Gase, der von *GAY LUSSAC* (1802) angegebenen Erweiterung des *BOYLE-MARIOTTESchen Gesetzes* (§ 67) auf den Fall veränderlicher Temperaturen.

Die Größe $R = Nk$ ist, wie N und k , eine universelle, also für alle Stoffe gleiche Konstante, die *universelle Gaskonstante*. Ihr Zahlenwert beträgt $R = 0,83144 \cdot 10^8 \text{ erg} \cdot \text{grad}^{-1} = 1,9864 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1}$ (wegen $\text{cal} = \text{Kalorie}$ vgl. § 106). Die Größe R/M wird in der Technik als die *individuelle Gaskonstante* des betreffenden Gases bezeichnet. Im allgemeinen werden sich bei einer beliebigen Zustandsänderung eines Gases Druck, Volumen und Temperatur gleichzeitig ändern. In Sonderfällen kann aber eine von diesen Größen konstant bleiben.

Es sind drei Fälle möglich. Bei einer *isothermen* Zustandsänderung bleibt die Temperatur T konstant. Dann folgt aus Gl. (11) bzw. (13) $pV = \text{const}$, in Übereinstimmung mit § 66, Gl. (20). Bei einer *isobaren* Zustandsänderung wird der Druck p konstant gehalten. Dann nimmt Gl. (13) die Gestalt

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \tag{14}$$

an, wobei V_0 das Volumen des Gases bei $t = 0^\circ \text{C}$ bedeutet. In diesem Fall ist also α identisch mit dem kubischen *Ausdehnungskoeffizienten* der idealen Gase. Bei einer Temperaturänderung um 1° ändert sich das Volumen um den Betrag $\alpha V_0 = V_0/273$, also unabhängig von der Temperatur stets um den gleichen Betrag, um $1/273$ des Volumens, das das Gas bei 0°C einnimmt. Bei einer *isopyknen* oder *isochoren* Zustandsänderung wird das Volumen V (also auch die Dichte ρ) des Gases konstant gehalten. Dann leitet man entsprechend aus Gl. (13) ab

$$p = p_0 (1 + \alpha t), \tag{15}$$

wobei p_0 den Druck des Gases bei 0°C bedeutet. In diesem Sinne ist α der *Druck- oder Spannungskoeffizient* der idealen Gase. Wie das Volumen bei konstantem Druck, so nimmt also auch der Druck bei konstantem Volumen linear mit der Temperatur zu, und zwar für je 1° Temperaturerhöhung um $1/273$ des Druckes p_0 bei 0°C .

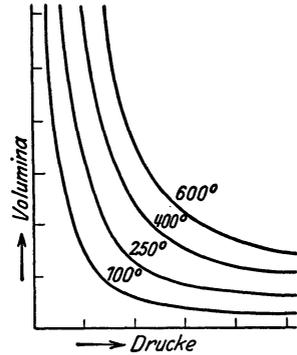


Abb. 229. Isothermen eines idealen Gases.

In Abb. 229 sind die Kurven $pV = \text{const}$, die *Isothermen* eines idealen Gases, für verschiedene Temperaturen dargestellt. Diese Kurven sind Hyperbeläste.

Wie ersichtlich, hängt der Wert von α mit der Lage des absoluten Nullpunkts in der Celsiusskala zusammen. Nach den neuesten Messungen liegt er bei $-273,16^\circ \text{C}$, so daß $\alpha = 0,003660$ ist. Je näher ein wirkliches Gas dem idealen Gaszustand ist, um so besser muß sein Ausdehnungs- bzw. Druck-

Tabelle 7. Druckkoeffizienten einiger Gase.

Wasserstoff	0,003663 Grad ⁻¹
Helium	3660
Stickstoff	3675
Sauerstoff	3674
Kohlenoxyd	3667
Kohlensäure	3726
Ammoniak	3802
Ideales Gas theoretisch $1/273,16$	3660

koeffizient diesem Wert entsprechen. Tabelle 7 gibt die Werte der Druckkoeffizienten einiger Gase. Man erkennt, wie weit die Übereinstimmung bei vielen Gasen geht. Größere Abweichungen zeigen diejenigen Gase, die sich, wie Kohlensäure und Ammoniak, schon bei Zimmertemperatur verhältnismäßig leicht verflüssigen lassen (§ 115).

104. Die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS. Die in § 103 abgeleitete Zustandsgleichung gilt nur für ideale Gase streng. Die wirklichen Gase zeigen alle mehr oder weniger große Abweichungen von ihr. Das ist ganz verständlich; denn wir haben bei der Definition der idealen Gase zwei Umstände vernachlässigt: die anziehenden sog. VAN DER WAALSSchen Kräfte zwischen den Molekülen und das endliche *Eigenvolumen* der Moleküle. VAN DER WAALS ist es 1873 gelungen, eine allgemeinere Zustandsgleichung zu finden, die diese Umstände berücksichtigt und die Verhältnisse bei den wirklichen Gasen richtig darstellt. Darüber hinaus aber hat sie auch Gültigkeit für den flüssigen Zustand. Unter p wollen wir stets den Druck verstehen, den das Gas auf seine Begrenzung ausübt. Wir haben den Druck p in § 103 auf die Weise in die

Zustandsgleichung eingeführt, daß wir $p = n\mu\bar{v}^2/3$ setzten. Bei den wirklichen Gasen gilt aber diese Gleichung nicht streng, denn die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist in der Nähe einer Begrenzung kleiner als im freien Gasraum. Das hat einen ganz analogen Grund wie die Oberflächenspannung (§ 60, Abb. 128). Moleküle, die sich der Grenze des Gases nähern, werden durch die von den weiter entfernten Molekülen ausgehenden VAN DER WAALSSchen Kräfte verlangsamt und haben an der Wand eine etwas kleinere kinetische Energie, als im freien Gasraum. Der Druck p gegen die Wand wird dadurch verkleinert, und es ist die kinetische Energie im freien Gasraum $\mu\bar{v}^2/2 > 3p/2n$. Um sie richtig zu erhalten, muß zu p ein additives Glied hinzugefügt werden. Die Theorie ergibt, daß an Stelle von p zu setzen ist $p + a/V_m^2$, wobei a eine von der Größe der VAN DER WAALSSchen Kräfte des Gases abhängige Konstante, V_m das Molvolumen des Gases ist. Das endliche Volumen der Moleküle wirkt wie eine Verkleinerung des Raumes, der jedem einzelnen Molekül zur Verfügung steht. Darum ist an Stelle von V_m zu setzen $V_m - b$. Die Konstante b ist nach der Theorie gleich dem vierfachen Kovolumen des Gases. Das ist dasjenige Volumen, das 1 Mol des Gases einnehmen würde, wenn seine Moleküle in der dichtesten möglichen Packung beieinander lägen. Demnach lautet die VAN DER WAALSSche Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT. \quad (16)$$

Hiernach wird ein wirkliches Gas dem idealen Gaszustand um so näher sein, je besser die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $V_m^2 \gg a/p$ und $V_m \gg b$. Das Molvolumen ist um so größer, je kleiner die Dichte des Gases ist. Aus beiden Bedingungen folgt daher, daß sich ein Gas bei gegebener Temperatur mit abnehmender Dichte dem idealen Gaszustand mehr und mehr annähert. Bei gegebener Dichte ist ferner der Druck p um so größer, je höher die Temperatur des Gases ist. Daher wird die erste Bedingung bei gegebener Dichte um so besser erfüllt sein, je höher die Temperatur des Gases ist. *Ein Gas ist also dem idealen Gaszustand um so näher, je geringer seine Dichte und je höher seine Temperatur ist.* Wir werden die VAN DER WAALSSche Gleichung in § 115 noch einmal eingehend besprechen und dort auch eine Darstellung in Kurvenform geben.

105. Temperaturmessung. Geräte zur Temperaturmessung heißen Thermometer, sofern es sich um Geräte handelt, welche mit dem betreffenden Körper in unmittelbare Berührung gebracht werden und dann die gleiche Temperatur annehmen wie dieser.

Die gebräuchlichsten Thermometer sind die Quecksilberthermometer, bei denen die Wärmeausdehnung des Quecksilbers zur Messung der Temperatur benutzt wird. Die Quecksilberthermometer haben die allbekannte Form: ein kugelförmiges oder zylindrisches Glasgefäß mit einer angesetzten feinen Kapillare, welches bis auf einen Teil der Kapillare mit Quecksilber gefüllt ist. Das von Quecksilber freie Ende ist möglichst gut luftleer gemacht. Erwärmt sich das Quecksilber, so steigt es in der Kapillare empor. Die Eichung von Thermometern erfolgt so, daß man sie in Bäder von genau bekannter Temperatur eintaucht. Nachdem auf der Skala des Thermometers diejenigen Punkte festgelegt sind, auf die das Ende des Quecksilberfadens sich bei 0° und bei 100° einstellt, wird das Zwischenstück in 100 gleiche Teile geteilt, und diese Skala gegebenenfalls noch über die beiden Fixpunkte hinaus verlängert. Dabei wird stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß sich das Quecksilber und das Glas in diesem ganzen Temperaturbereich gleichmäßig ausdehnt. Tatsächlich ist dies nicht genau der Fall. Weder der Ausdehnungskoeffizient des

Quecksilbers noch der des Glases ist zwischen 0° und 100° streng konstant. Der Fehler kann zwischen 0° und 100° an einzelnen Stellen den Betrag von $0,1^\circ$ ein wenig überschreiten. Das Glas der Thermometer zeigt eine der elastischen Nachwirkung analoge thermische Nachwirkung, d. h. es zieht sich nach erfolgter Erwärmung bei Abkühlung nicht sofort vollständig wieder auf sein früheres Volumen zusammen, sondern erst nach einiger Zeit. Bringt man ein vorher auf höhere Temperatur, etwa 100° , erwärmtes Thermometer sofort in schmelzendes Eis, so zeigt es daher anfänglich nicht auf 0° , sondern etwas tiefer (sog. Depression des Nullpunktes). Diese Nachwirkungserscheinungen sind bei frisch hergestelltem Glase besonders stark und verschwinden zum Teil, wenn man das Glas häufigen aufeinanderfolgenden Erwärmungen und Abkühlungen aussetzt (künstliche Alterung von Thermometern).

Der Meßbereich eines gewöhnlichen Quecksilberthermometers ist nach unten durch die Temperatur begrenzt, bei der das Quecksilber gefriert, $-38,87^\circ$. Die obere Grenze seiner Verwendbarkeit liegt bei etwa 150° , weil oberhalb dieser Temperatur bereits eine merkliche Verdampfung des Quecksilbers in den gasleeren Raum der Kapillare eintritt. Diese wird weitgehend eingeschränkt, wenn man die Kapillare mit einem Gase, meist Stickstoff, füllt. Mit Hilfe einer Stickstofffüllung von hohem Druck (30—50 Atm) kann man auch das Sieden des Quecksilbers bei höheren Temperaturen verhindern (§ 113). Derartige Thermometer aus besonderem Glase sind bis etwa 660° , solche aus Quarz bis etwa 750° benutzbar (Stickstoffthermometer). Für tiefe Temperaturen benutzt man statt des Quecksilbers Flüssigkeiten, die einen niedrigen Gefrierpunkt haben, z. B. Alkohol (Weingeistthermometer), Pentan oder Petroläther.

Für sehr genaue Messungen, namentlich zur Eichung anderer Thermometer, benutzt man ein Gas, welches dem idealen Zustand möglichst nahe ist, meist Wasserstoff, Stickstoff oder Helium, in einem Gefäß aus Platinrhodium. Man kann zur Bestimmung der Temperatur entweder die Volumänderung bei konstantem Druck [$V = V_0 (1 + \alpha t)$] oder die Druckänderung bei konstantem Volumen [$p = p_0 (1 + \alpha t)$] benutzen (§ 103). Meist geschieht das letztere.

In Abb. 230 ist ein einfaches Gasthermometer für konstantes Volumen dargestellt. Das Gas befindet sich im Gefäß G , das der zu messenden Temperatur ausgesetzt wird, und in der anschließenden Kapillare K . Der Raum ist durch Quecksilber abgeschlossen. Durch Regulieren des Quecksilberstandes wird dafür gesorgt, daß das Quecksilber genau eine feine Spitze S berührt, so daß das Volumen stets das gleiche ist. Der Druck des Gases ist gleich der Summe aus dem äußeren Luftdruck und dem der Höhendifferenz h entsprechenden Quecksilberdruck.

Außer den hier beschriebenen, auf der thermischen Volumänderung beruhenden Verfahren gibt es noch andere Arten der Temperaturmessung, welche auf dem thermoelektrischen Effekt (Thermoelemente), dem Einfluß der Temperatur auf den elektrischen Widerstand (Widerstandsthermometer) oder auf der Strahlung der Körper (Strahlungspyrometer) beruhen. Für sehr hohe Temperaturen kommt letzteres allein in Betracht.

106. Wärmemenge. Wärmekapazität. Spezifische Wärme. Atomwärme. Nach § 100 beruht die Temperatur eines Körpers auf seiner molekularen Energie. Es ist üblich, Energie, die als in einem Körper enthaltene Wärmeenergie auftritt, als eine *Wärmemenge* zu bezeichnen. Als praktische Einheit

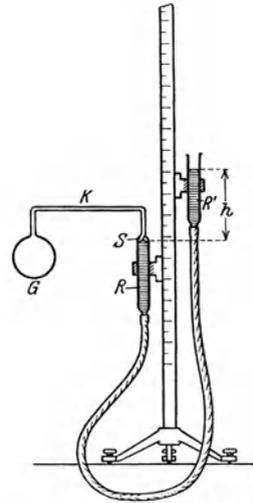


Abb. 230. Gasthermometer.

der Wärmemenge dient die *Kalorie* (cal). Das ist diejenige Wärmemenge, die man 1 [g] Wasser zuführen muß, um es um 1°, und zwar von 14,5° auf 15,5° zu erwärmen. (Die Angabe der Temperatur ist nötig, da die zur Temperaturerhöhung von Wasser um 1° nötige Wärmemenge, wenn auch nur sehr wenig, von der Temperatur abhängt.) In der Technik verwendet man als Einheit die große oder Kilokalorie, 1 kcal = 1000 cal. Als ein Energiebetrag kann die Wärmemenge 1 cal auch in den Energieeinheiten der Mechanik ausgedrückt werden (vgl. § 122).

Unter der *spezifischen Wärme* c eines einheitlichen Stoffes versteht man die Wärmemenge, die man 1 [g] des Stoffes zuführen muß, um ihn um 1° zu erwärmen. Für eine Temperaturänderung von t_1^0 auf t_2^0 ist daher für m [g] die

Wärmemenge $Q = cm(t_2 - t_1)$ cal, für eine solche um die Temperatur dt bzw. dT ($= dt$) die Wärmemenge $dQ = cm dt = cm dT$ cal erforderlich. Demnach kann die spezifische Wärme auch als der Differentialquotient

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt} \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (17)$$

definiert werden. Die Einheit der spezifischen Wärme ist demnach 1 cal · g⁻¹ · grad⁻¹. Um einen Körper von der Masse m [g] und der spezifischen Wärme c um 1° zu erwärmen, ist also die Wärmemenge $Q = mc = K$ cal erforderlich. Die Größe

$$K = mc \quad (18)$$

heißt die *Wärmekapazität* des Körpers. Sie ist gleich der Wärme-

menge, die man dem Körper zuführen muß, um ihn um 1° zu erwärmen. Die Einheit der Wärmekapazität ist 1 cal · grad⁻¹. Die Tabelle 8 gibt einige Zahlenwerte spezifischer Wärmen.

Wie man sieht, ist die spezifische Wärme des Wassers besonders groß. Diese Tatsache spielt im Wärmehaushalt der Natur eine sehr wichtige Rolle. Wasser muß eine große Wärmemenge aufnehmen oder abgeben, um seine Temperatur merklich zu ändern. Daher bleibt das Meerwasser im Frühjahr verhältnismäßig lange kühl, aber auch im Herbst verhältnismäßig lange warm. Es bewirkt daher in den Küstengegenden einen gewissen Ausgleich der jährlichen Temperaturschwankungen. Hierin liegt ein wesentlicher Grund für den typischen Unterschied zwischen dem Küstenklima und dem Kontinentalklima.

Unter der *Atomwärme* eines Elements versteht man die Wärmekapazität von 1 Grammatom desselben, unter der *Molwärme* diejenige von 1 Mol (§ 63). Ist α das Atomgewicht des Stoffes, so beträgt also die Atomwärme $c\alpha$. Aus der Tabelle 8 erkennt man, daß diese für die Metalle Beträge in der Nähe von 6 hat (Gesetz von DULONG-PETIT, 1819). Die Erklärung ist folgende. Die Metalle sind aus Kristalliten zusammengesetzt (§ 365). Diese bestehen aus raumgitterartig angeordneten Atomen, welche drei Freiheitsgrade besitzen, und deren mittlere kinetische Energie daher $3kT/2$ beträgt. Die Atome sind an Gleichgewichtslagen gebunden, und ihre thermische Bewegung besteht in Schwingungen um diese. Nach § 42 beträgt daher ihre mittlere potentielle

Tabelle 8. Spezifische Wärme einiger Stoffe.

	Spez. Wärme c in cal · grad ⁻¹ · g ⁻¹	Atom- gewicht α	Atom- wärme $c\alpha$
Aluminium	0,214	27,1	5,80
Eisen	0,111	55,84	6,29
Nickel	0,106	58,68	6,22
Kupfer	0,091	63,57	5,78
Silber	0,055	107,88	5,93
Antimon	0,050	120,2	6,00
Platin	0,032	195,2	6,25
Gold	0,031	197,2	6,12
Blei	0,031	207,2	6,42
Glas	0,19	—	—
Quarzglas	0,174	—	—
Diamant	0,12	—	—
Wasser	1,00	—	—
Äthyläther	0,56	—	—
Äthylalkohol	0,58	—	—
Schwefelkohlenstoff	0,24	—	—

Energie ebenfalls $3kT/2$ und demnach ihre Gesamtenergie $3kT$. Da 1 Gramm-atom nach § 63 N Atome enthält, so beträgt sein Wärmehalt $3NkT = 3RT$ cal ($R = Nk$, § 103), und die für eine Temperaturerhöhung um 1° nötige Wärmemenge $3R = 5,94$ cal ($R = 1,98$). Daß diese Beziehung nicht streng erfüllt ist, beruht darauf, daß die Verhältnisse in Wirklichkeit verwickelter sind, als wir hier angenommen haben. Immerhin ist sie recht gut erfüllt. Bei sehr tiefen Temperaturen treten ganz abweichende Verhältnisse ein (vgl. § 354).

Geräte zur Messung spezifischer Wärmen heißen *Kalorimeter*. Die einfachste Form eines solchen ist das Wasserkalorimeter. Es besteht aus einem Metallgefäß, welches mit Wasser gefüllt wird. Zur Vermeidung von Wärmeverlusten wird es meist mit einer für Wärme möglichst wenig durchlässigen Hülle (Watte, Luftmantel) umgeben.

Es sei m die Masse eines Körpers aus dem Stoff, dessen spezifische Wärme c man bestimmen will, als mc seine Wärmekapazität. m' sei die Masse, $c' = 1$ die spezifische Wärme des Wassers im Kalorimeter, m'' die Masse des Kalorimetergefäßes und c'' dessen spezifische Wärme, seine Wärmekapazität (sog. Wasserwert) also $c''m''$. Die Anfangstemperatur des Wassers und des Gefäßes sei t_1 . Der zu untersuchende Körper werde zunächst auf die Temperatur t_2 gebracht, z. B. indem man ihn in ein durch Wasserdampf von 100° erwärmtes Gefäß bringt, so daß $t_2 = 100^\circ$. Bringt man jetzt den Körper in das Wasser, so gleichen sich die Temperaturen aus, und die „Mischungstemperatur“ (Endtemperatur) sei t . Das Wasser und das Gefäß haben sich also um $(t - t_1)^\circ$ erwärmt, der Körper hat sich um $(t_2 - t)^\circ$ abgekühlt. Erstere haben dabei die Wärmemenge $(c'm' + c''m'') \cdot (t - t_1)$ aufgenommen, letzterer hat die Wärmemenge $cm \cdot (t_2 - t)$ abgegeben. Nach dem Energieprinzip (erster Hauptsatz, § 121) muß jene Wärmemenge gleich dieser sein, also

$$cm \cdot (t_2 - t) = (c'm' + c''m'')(t - t_1)$$

oder

$$c = \frac{c'm' + c''m''}{m} \frac{t - t_1}{t_2 - t}.$$

Die spezifische Wärme von Flüssigkeiten kann man mit dem gleichen Kalorimeter messen, indem man das Wasser durch die Flüssigkeit ersetzt und einen Körper von bekannter Wärmekapazität (Thermophor) benutzt. In diesem Falle ist dann c' die zu bestimmende unbekannte Größe. Eine andere Kalorimeterform, das Eiskalorimeter, s. § 110.

NERNST hat mehrere Kalorimeter angegeben, welche besonders zur Messung spezifischer Wärmen bei sehr tiefen Temperaturen dienen, und bei denen dem zu untersuchenden Körper eine bestimmte Wärmemenge durch elektrische Heizung zugeführt und dann seine Temperaturänderung gemessen wird.

107. Die spezifische Wärme der Gase. Wird die Temperatur eines Gases um 1° erhöht, so hängt die hierbei zugeführte Wärmemenge noch von den gleichzeitigen Änderungen des Druckes p und des Volumens V ab. Von besonderer Wichtigkeit sind die beiden Fälle, bei denen entweder das Volumen oder der Druck konstant gehalten wird. Wir denken uns zunächst 1 g eines idealen Gases in ein Gefäß von unveränderlichem Volumen eingeschlossen. Seine Temperatur betrage T° abs. Haben seine Moleküle z Freiheitsgrade und ist n die Zahl der Moleküle in 1 cm^3 , so beträgt die in dem Gase enthaltene Wärmeenergie nach § 100 $nz kT/2$ oder mit $n = N/M$ und $Nk = R$ (§ 63 und 103) $zRT/2M$. Bei einer Temperaturerhöhung um 1° muß also die Wärmemenge

$$c_v = \frac{z}{2} \frac{R}{M} \quad (19a)$$

zugeführt werden. c_v ist die *spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen*. Handelt es sich nicht um 1 g, sondern um 1 Mol des Gases, also um M g, so ist die M -fache Wärmemenge nötig. Demnach beträgt die *Molwärme des Gases bei konstantem Volumen*

$$C_v = M c_v = \frac{z}{2} R. \quad (19b)$$

Es gilt also mit $R = 1,98 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1}$ für

$$\text{einatomige Gase } (z = 3) \quad c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M}, \quad C_v = 2,97 \approx 3$$

$$\text{zweiatomige Gase } (z = 5) \quad c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{M}, \quad C_v = 4,95 \approx 5$$

$$\text{alle andern Gase } (z = 6) \quad c_v = 3 \frac{R}{M}, \quad C_v = 5,94 \approx 6.$$

Nunmehr betrachten wir 1 g eines idealen Gases, das in ein Gefäß mit einem dicht schließenden, verschiebbaren Stempel eingeschlossen ist. Sein Volumen (spezifisches Volumen) betrage V_s . Auf den Stempel wirke eine konstante Kraft, die im Gase einen konstanten Druck p aufrechterhält. Wird das Gas um ΔT° erwärmt, so ändert sich sein Volumen nach § 103, Gl. (9), um den Betrag $\Delta V_s = R \Delta T / M p$, und das Gas leistet dabei nach § 67 die Arbeit $p \Delta V_s = R \Delta T / M$ gegen den Stempel, bei einer Temperaturerhöhung um $\Delta T = 1^\circ$ also die Arbeit R/M . Die hierzu nötige Energie muß dem Gase — zusätzlich zur reinen Molekularenergie — in Form von Wärme zugeführt werden. Die *spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck* beträgt also

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} \quad (20a)$$

und seine *Molwärme bei konstantem Druck*

$$C_p = C_v + R. \quad (20b)$$

Es gilt also für

$$\text{einatomige Gase } c_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M}, \quad C_p = 4,95 \approx 5, \quad C_p/C_v = \frac{5}{3} = 1,67$$

$$\text{zweiatomige Gase } c_p = \frac{7}{2} \frac{R}{M}, \quad C_p = 6,93 \approx 7, \quad C_p/C_v = \frac{7}{5} = 1,40$$

$$\text{alle andern Gase } c_p = 4 \frac{R}{M}, \quad C_p = 7,96 \approx 8, \quad C_p/C_v = \frac{4}{3} = 1,33.$$

Natürlich ist eine gute Übereinstimmung hiermit nur bei solchen Gasen zu erwarten, die sich nahezu im idealen Gaszustand befinden. Tabelle 9 gibt einige Beispiele.

Man erkennt, daß die Annäherung an den idealen Gaszustand besonders gut bei den Edelgasen (He, A) ist. Auch bei den Gasen H_2 , N_2 , O_2 ist die Übereinstimmung noch recht gut, bei den anderen angeführten Gasen erheblich schlechter. Die ungefähre Übereinstimmung von C_p/C_v bei der Kohlensäure mit dem theoretischen Wert 1,33 ist ein Zufall. Die Kohlensäure ist unter gewöhnlichen Bedingungen vom idealen Gaszustand weit entfernt. Ihre Atome sind auf einer Geraden angeordnet, $C-O-C$, so daß sie sich wie ein zweiatomiges Gas ($C_p/C_v = 1,40$) verhalten sollte, wenn sie ein ideales Gas wäre (§ 100).

Im allgemeinen bildet aber die Bestimmung von c_p/c_v bzw. des ebenso großen Wertes von $C_p/C_v = \kappa$ bei nahezu idealen Gasen ein Mittel, um festzustellen,

Tabelle 9.
Molwärmern einiger Gase.

	C_p	C_v	$C_p - C_v$	C_p/C_v
He	5,00	3,02	1,98	1,66
A	4,99	3,01	1,98	1,66
H_2	6,83	4,85	1,98	1,41
N_2	6,98	4,99	1,99	1,40
O_2	6,97	4,99	1,98	1,40
Cl_2	8,50	6,25	2,25	1,36
CO_2	8,89	6,84	2,05	1,30
CH_4	8,64	6,60	2,04	1,31

ob ein Gas ein-, zwei- oder mehratomig ist. (Vgl. die Methode der KUNDTschen Staubfiguren, § 87, die zu diesem Zweck ersonnen wurde.)

108. Adiabatische Zustandsänderungen von Gasen. Wird m [g] eines Gases die Wärmemenge dQ zugeführt, so ändert sich dabei im allgemeinen seine innere molekulare Energie U , sein Druck p und sein Volumen V . Beträgt die Volumänderung dV , so leistet das Gas äußere Arbeit $p dV$, die ihm in Gestalt von Wärme zugeführt werden muß. Demnach ist

$$dQ = dU + p dV. \quad (21)$$

Die zugeführte Wärme verteilt sich auf den Zuwachs dU der inneren Energie und die äußere Arbeit $p dV$. Nach § 107 ist $dU = m c_v dT$. Dabei verstehen wir unter U hier stets nur die kinetische Energie der Translation und der Rotation der Moleküle.

Eine *adiabatische Zustandsänderung* ist eine solche, bei der *keine Energie in Form von Wärme* mit der Umgebung ausgetauscht wird, also

$$dQ = m c_v dT + p dV = 0 \quad (22)$$

ist. Da nach § 103, Gl. (11), $p = mRT/MV$ ist, so folgt

$$m c_v dT + m \frac{RT}{M} \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{bzw.} \quad c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dV}{V} = 0. \quad (23)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$c_v \log T + \frac{R}{M} \log V = \text{const}, \quad \text{oder} \quad \log T + (\kappa - 1) \log V = \text{const},$$

wenn wir noch $R/M = c_p - c_v$ und $c_p/c_v = \kappa$ setzen. Statt dessen kann man schreiben

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const}. \quad (24)$$

Indem wir noch $T = p \cdot V \cdot M/mR$ setzen und den konstanten Faktor mR/M in const einbeziehen, erhalten wir das *POISSONSche Gesetz*

$$p V^\kappa = \text{const} = p_0 V_0^\kappa. \quad (25)$$

Diese Gleichung tritt also bei adiabatischen Zustandsänderungen an Stelle des für isotherme Änderungen gültigen Gesetzes von BOYLE-MARIOTTE (§ 67).

Aus Gl. (24) liest man ab, daß bei einer adiabatischen Volumverminderung bzw. Druckerhöhung eines abgeschlossenen Gasvolumens die Temperatur des Gases steigt, im umgekehrten Falle sinkt. Man kann also Gase durch adiabatisches Zusammendrücken erwärmen, durch adiabatische Volumvergrößerung abkühlen. Die adiabatische Erwärmung der Luft kann man z. B. beim Aufpumpen von Fahrradreifen beobachten, denn sie vor allem bewirkt die oft beträchtliche Erwärmung der Pumpe.

Von der Ursache der Temperaturänderung bei einer adiabatischen Volumänderung eines idealen Gases kann man sich eine ganz anschauliche Vorstellung machen. Bei einer solchen Volumänderung muß immer ein Teil der Wandung des Gefäßes, in dem sich das Gas befindet, *bewegt* werden. Wenn nun Moleküle des Gases gegen diese bewegte Wand stoßen, so werden sie nicht, wie von einer ruhenden Wand, mit unveränderter Geschwindigkeit zurückgeworfen. Dies wird an dem Beispiel eines gegen eine bewegte Wand geworfenen Balles klar. Bewegt sich die Wand gegen die Richtung, in der der Ball geworfen wird, so fliegt dieser mit einer größeren Geschwindigkeit wieder zurück, als er vorher hatte (Zurückschlagen eines Balles mit einem Tennisschläger). Weicht aber die Wand vor dem Ball zurück, so verliert er bei der Reflexion an Geschwindigkeit. Im ersten Falle ist er von der bewegten Wand beschleunigt worden, im zweiten hat er auf Kosten seiner Bewegungsenergie die Wand beschleunigt.

Ebenso werden die Gasmoleküle von einer in das Gas hinein bewegten Wand, also bei Volumverkleinerung, beschleunigt. Die durchschnittliche Molekularenergie im Gase nimmt zu, seine Temperatur steigt. Im umgekehrten Falle werden die gegen die zurückweichende Wand stoßenden Moleküle verlangsamt, so daß die Temperatur des Gases sinkt.

Eine isotherme Volumänderung, die durch Verschieben eines Stempels nach außen erfolgt, ist daher nicht ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich. Bei einer solchen isothermen Volumvergrößerung muß zur Konstanthaltung der Temperatur Wärme von außen zugeführt werden, um dem Gase die durch Arbeitsleistung gegen den Stempel entzogene Energie zu ersetzen. Bei einer entsprechenden Volumverkleinerung hingegen muß dem Gase die Energie durch Wärmeabgabe wieder entzogen werden, die ihm durch Arbeitsleistung des Stempels am Gase zugeführt wurde.

Findet jedoch die Volumänderung nicht unter Bewegung einer begrenzenden Wand statt, sondern dadurch, daß dem Gase etwa durch Öffnen eines Hahns Zutritt zu einem bisher leeren Raum gestattet wird, so geschieht dies bei einem idealen Gase ohne Arbeitsleistung, die Moleküle strömen (diffundieren)

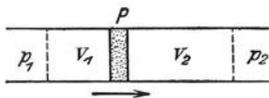


Abb. 231. Zum JOULE-THOMSON-Effekt.

einfach mit gleichbleibender Geschwindigkeit in den bisher leeren Raum, es findet dabei also auch keine Temperaturänderung statt (GAY LUSSAC).

Bei den wirklichen Gasen, für die die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS (§ 104) gilt, ist dies jedoch in mehr oder weniger hohem Maße der Fall, denn es muß auf Kosten der kinetischen Molekularenergie Arbeit gegen die zwischen den einzelnen Molekülen wirksamen VAN DER WAALSschen Kräfte geleistet werden, wenn sich die Moleküle weiter voneinander entfernen. Dies ist von JOULE und THOMSON durch folgenden Versuch zuerst nachgewiesen worden. Sie trieben ein Gas durch einen schwer durchlässigen Pfropf P in einem gegen Wärmeaustausch mit der Umgebung gut geschützten Rohr (Abb. 231), in dem auf der einen Seite des Pfropfs der Druck p_1 und auf der anderen der niedrigere Druck p_2 aufrechterhalten wurde. Es zeigt sich dann eine Abkühlung der durch den Pfropf getriebenen Luft. Wäre die Luft ein ideales Gas, so würde eine solche nicht eintreten, und es wäre $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Nun bewirken aber die VAN DER WAALSschen Kräfte, daß die Luft stärker zusammendrückbar ist, als ein ideales Gas. Denn je dichter die Moleküle einander durch eine Verkleinerung des Volumens kommen, um so stärker treten die anziehenden Kräfte in die Erscheinung und unterstützen die Wirkung der volumenvermindernden äußeren Kraft. Entsprechend dehnt sich aber auch die Luft bei einer Druckverkleinerung stärker aus als ein ideales Gas. Daher ist im Falle des JOULE-THOMSONschen Versuchs das Volumen V_2 größer, als es bei einem idealen Gase wäre, und daher $p_2 V_2 > p_1 V_1$. Nun ist aber (da das Volumen V_1 verschwindet, und das Volumen V_2 neu entsteht) nach § 67 $p_1 V_1$ die zum Durchdrücken des Gases durch den Pfropf aufzuwendende äußere Arbeit, $p_2 V_2$ die auf der anderen Seite neu gewonnene äußere Arbeit. Es wird also äußere Arbeit bei diesem Prozeß gewonnen. Dies kann nur auf Kosten der inneren Energie des Gases, also seiner Molekulargeschwindigkeit, geschehen. Das Gas kühlt sich durch Leistung äußerer Arbeit ab. Es kühlt sich aber ferner auch durch Leistung innerer Arbeit ab, weil die Gasmoleküle sich bei der Expansion weiter voneinander entfernen, ihre gegenseitige potentielle Energie also vermehrt wird, was wieder nur auf Kosten ihrer kinetischen Energie geschehen kann.

Der beschriebene Abkühlungseffekt tritt bei einem Gase aber erst unterhalb seiner *Inversionstemperatur* ein, die mit den Konstanten a und b der VAN DER WAALSschen Gleichung (§ 104) und der Gaskonstanten R in der Beziehung

$T = 2a/Rb$ steht. Diese Temperatur ist bei manchen Gasen ziemlich niedrig, so vor allem bei den Edelgasen. Beim Wasserstoff liegt sie bei -80°C .

Wir wollen die Überlegung, die wir in § 67 bezüglich der isothermen Kompressibilität der idealen Gase ausgeführt haben, hier für eine adiabatische Zustandsänderung wiederholen. Aus Gl. (25) folgt durch Differenzieren $\kappa p V^{\kappa-1} dV + V^{\kappa} dp = 0$ oder

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\kappa p}. \quad (26)$$

Wird die Volumänderung dV durch eine an einen beweglichen Stempel von der Fläche q wirkende Kraft $dk = -qdp$ bewirkt, so daß $dV/V = dk/q\kappa p$, so erkennt man durch Vergleich mit Gl. (17), § 67, daß bei einer adiabatischen Volumänderung das Produkt κp die gleiche Rolle spielt, wie der Druck p bei einer isothermen Volumänderung. Demnach ist κp der *adiabatische Kompressionsmodul* des idealen Gases. Er ist größer als der isotherme Kompressionsmodul. Denn da sich das Gas bei einer adiabatischen Zusammendrückung erwärmt, so ist sein Widerstand gegen eine solche Volumänderung größer als bei einer isothermen Volumänderung.

Die Tatsache, daß in der Formel für die Schallgeschwindigkeit in Gasen [Gl. (15), § 83] als „Elastizitätsmodul“ nicht der Druck p , sondern die Größe $p\kappa$ auftritt, erklärt sich daraus, daß die Druckänderungen und die damit verbundenen Temperaturänderungen in einer Schallwelle so schnell verlaufen, daß ein Ausgleich der Temperaturen zwischen den momentan erwärmten und den momentan abgekühlten Bereichen nicht stattfinden kann, die Änderungen also adiabatisch sind, so daß nicht das BOYLE-MARIOTTESCHE Gesetz, sondern die Gl. (25) gilt.

II. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen.

109. Änderungen des Aggregatzustandes. Erwärmt man einen (kristallinen) festen Stoff, so geht er bei einer bestimmten Temperatur in den flüssigen Zustand über, sofern nicht schon vorher chemische oder sonstige Veränderungen (Verbrennung u. dgl.) mit ihm vorgehen. Der Stoff schmilzt. Kühlen wir ihn jetzt von höherer Temperatur wieder ab, so wird er bei der gleichen Temperatur wieder fest. Diese Temperatur heißt die *Schmelztemperatur* oder der *Schmelzpunkt* des Stoffes. Da der Stoff bei Abkühlung bei der gleichen Temperatur fest wird, erstarrt, so nennt man sie auch *Erstarrungstemperatur*. Bei Stoffen, die bei gewöhnlichen Temperaturen flüssig sind, wie insbesondere das Wasser und wässrige Lösungen, ist im allgemeinen der Ausdruck *Gefrierpunkt* gebräuchlich.

Flüssige Stoffe gehen im allgemeinen bei jeder Temperatur allmählich in den gasförmigen Zustand über, sie *verdampfen*, und zwar um so schneller, je höher die Temperatur ist. Steigert man die Temperatur, so tritt schließlich ein Verdampfungsvorgang besonderer Art ein, indem die ganze Flüssigkeit unter heftiger Blasenbildung in ihrem Inneren schnell vollkommen in den gasförmigen Zustand übergeht. Die Flüssigkeit *siedet*. Die betreffende Temperatur heißt die *Siedetemperatur* oder der *Siedepunkt*. Der dem Verdampfen entgegengesetzte Vorgang heißt *Kondensation*. Es gibt auch einen der Verdampfung entsprechenden Übergang vom festen unmittelbar in den gasförmigen Zustand und umgekehrt. Dieser Vorgang heißt *Sublimation*.

Der Verlauf der Temperatur t eines Stoffes beim Schmelzen oder Sieden bei gleichmäßiger Zufuhr von Wärme Q ist in Abb. 232 schematisch dargestellt. Vor Erreichung des Schmelz- bzw. Siedepunktes t_s steigt die Temperatur des Stoffes gleichmäßig an. In dem Augenblick, wo diese Temperatur erreicht ist (A), hört der Anstieg auf, und die Temperatur bleibt, trotz dauernder Zufuhr

von Wärme, so lange konstant, bis der Schmelz- bzw. Siedevorgang vollständig beendet ist (*B*). Alsdann steigt sie wieder an. Diese Temperatur läßt sich also sehr scharf bestimmen. Beim Erstarren bzw. Kondensieren verläuft der Vorgang in der gleichen Weise rückwärts.

Einen bestimmten Schmelzpunkt haben aber nur die eigentlichen festen, also die kristallinen, aber nicht die amorphen Stoffe. Diese erweichen vielmehr bei steigender Temperatur allmählich, werden zunächst zähflüssig und schließlich dünnflüssig (Glas, Siegelack, Pech). Bei ihnen gibt es also keine scharfe Grenze zwischen fest und flüssig. Dieses verschiedene Verhalten der kristallinen und der amorphen Stoffe beruht darauf, daß jene eine Raumgitterstruktur haben (§ 314 und 365), diese aber nicht.

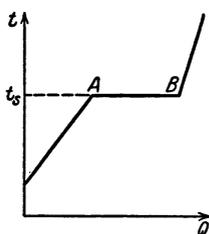


Abb. 232. Temperaturverlauf beim Schmelzen und beim Sieden. t Temperatur, Q zugeführte Wärmemenge, t_s Schmelz- bzw. Siedetemperatur.

Die drei Formen, in denen ein Stoff entsprechend den drei Aggregatzuständen auftreten kann, nennt man seine *Phasen* und spricht demnach von der festen, flüssigen und gasförmigen Phase. Ein Stoff kann bei gegebenem äußerem Druck nur bei einer ganz bestimmten Temperatur, nämlich der Schmelztemperatur, dauernd gleichzeitig in festem und flüssigem Zustande anwesend sein. Oberhalb des (vom Druck abhängigen, § 110) Schmelzpunktes ist er stets flüssig, unterhalb desselben fest. Oberhalb des (ebenfalls vom Druck abhängigen, § 113) Siedepunktes ist ein Stoff nur gasförmig, aber unterhalb des Siedepunktes, nicht nur beim Siedepunkt, kann er im flüssigen und gasförmigen Zustand gleichzeitig anwesend sein, ist dies sogar im Gleichgewichtszustand immer (§ 112). Auch unterhalb des Schmelzpunktes

sind die feste und die gasförmige Phase eines Stoffes nebeneinander beständig. In allen drei Phasen kann ein Stoff nur bei einem ganz bestimmten Druck der gasförmigen Phase und einer ganz bestimmten Temperatur, beim sog. *Tripelpunkt*, dauernd gleichzeitig anwesend sein. Beim Wasser entspricht dieser Punkt einem Druck $p = 4,6$ mm und einer Temperatur $t = + 0,0098^\circ$. Es gilt also folgendes Schema:

- Unterhalb des Schmelzpunktes: fest und gasförmig;
- im Tripelpunkt: fest, flüssig und gasförmig;
- zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt: flüssig und gasförmig;
- oberhalb des Siedepunktes: gasförmig.

Bei sehr vorsichtiger Behandlung einer Flüssigkeit läßt sie sich um einige Grade unter ihren Schmelzpunkt abkühlen, ohne zu erstarren (*Unterkühlung*). Schüttelt man sie dann oder wirft ein Körnchen der festen Phase hinein, so erstarrt sie sofort und erwärmt sich dabei bis auf ihren Schmelzpunkt. Ebenso kann man eine luftfreie Flüssigkeit durch ganz langsames Erwärmen einige Grade über ihren Siedepunkt erhitzen, ohne daß sie siedet. Sie wallt dann plötzlich heftig auf und kühlt sich dabei bis auf ihren Siedepunkt ab (*Siedeverzug*). Bei der Unterkühlung und beim Siedeverzug befindet sich die Flüssigkeit in einem sog. metastabilen Zustande, d. h. in einem sehr wenig stabilen inneren Gleichgewicht, aus dem sie durch eine kleine Störung herausgeworfen wird, um dann in ihren stabilsten Zustand überzugehen. Die amorphen Stoffe können als sehr stark unterkühlbare Flüssigkeiten betrachtet werden, deren Zähigkeit bei der Unterkühlung so groß wird, daß ihre Moleküle sich nicht mehr in die regelmäßige Raumgitterordnung der Kristalle umzulagern vermögen, sondern in der ungeordneten Lagerung verharren, die den Molekülen einer Flüssigkeit eigentümlich ist.

In der Tabelle 10 sind die Schmelzpunkte und Siedepunkte einiger Stoffe wiedergegeben.

Metalllegierungen haben einen niedrigeren Schmelzpunkt als die reinen Metalle, aus denen sie bestehen. Die ROSESche Legierung (2 Bi + 1 Pb + 1 Sn) schmilzt bei 95°, die WOODSche Legierung (1 Cd + 1 Sn + 2 Pb + 4 Bi) bei etwa 66°. Eine Legierung aus Kalium und Natrium ist bei Zimmertemperatur flüssig.

Die thermische Bewegung in den festen (kristallinen) Stoffen besteht in Schwingungen ihrer atomaren Bestandteile um feste Ruhelagen. Je höher die Temperatur ist, desto heftiger werden diese Schwingungen. Bei der Schmelztemperatur haben sie einen solchen Grad erreicht, daß der Zusammenhang des Stoffes gelockert wird. Die

regelmäßige Ordnung des festen Stoffes geht in den weitgehend ungeordneten Zustand der Flüssigkeit über. Zur Herbeiführung dieser Lockerung des Gefüges und der etwa noch mit diesem Vorgang verbundenen Änderungen an den atomaren Bestandteilen des Stoffes ist ein Aufwand von Arbeit in Gestalt der Zuführung thermischer Energie an diese Bestandteile notwendig.

Wärmemengen, die man einem Stoff zuführen muß, um eine innere Umwandlung in ihm hervorzubringen, ohne daß dabei seine Temperatur geändert wird — wie wir das eben beim Schmelzen geschildert haben —, bezeichnet man

(auf 1 g bezogen) als *Umwandlungswärmen*. Zeigt sich, wie beim Schmelzen und beim Sieden (Abb. 232), im Temperaturanstieg eines Körpers, dem man stetig Wärme zuführt, ein Haltepunkt, so ist das stets ein Zeichen dafür, daß die während der Dauer der Temperaturkonstanz zugeführte Wärmemenge zur Deckung des Energiebedarfs einer solchen inneren Umwandlung verbraucht wurde. Das ist oft ein wichtiges Anzeichen für eine äußerlich nicht ohne weiteres erkennbare innere Umwandlung.

110. *Schmelzen*. Unter der *Schmelzwärme* eines Stoffes versteht man die Umwandlungswärme beim Schmelzen, also diejenige Wärmemenge, die man 1 g des Stoffes zuführen muß, damit er bei der Schmelztemperatur aus dem festen in den flüssigen Zustand übergeht. Umgekehrt wird die gleiche Wärmemenge frei, wenn 1 g einer Flüssigkeit erstarrt. Sie gibt dann ihre Schmelzwärme an die kältere Umgebung ab und bleibt selbst während des Erstarrungsvorganges trotz dauernder Wärmeabgabe nach außen auf konstanter Temperatur.

Um die Schmelzwärme des Eises zu messen, kann man so verfahren, daß man ein Stück Eis von 0° in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter (§ 106) bringt. Die Anfangstemperatur des Wassers und des Kalorimetergefäßes sei t_1 ; nachdem das Eis geschmolzen ist, betrage sie t_2 . Die Masse des Eises sei m , die des Wassers m' . λ sei die in $\text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$ gemessene Schmelzwärme des Eises. Es sei ferner $c' = 1$ die spezifische Wärme des Wassers, c'' die spezifische Wärme des Kalorimetermaterials, m'' seine Masse, also die Wärmekapazität (Wasserwert) des Kalorimeters $K = c'' m''$. Um das Eis auf die Temperatur t_2 zu bringen,

Tabelle 10. Einige Schmelz- und Siedepunkte in Celsiusgraden.

	Schmelzpunkt	Siedepunkt
Aluminium . . .	+ 658	—
Argon	— 189,6	— 186
Blei	+ 327,4	+ 1625
Bor	+ 2300	—
Chlor	— 102	— 33,6
Gold	+ 1064	rd. + 2610
Helium	—	— 268,82
Iridium	+ 2340	—
Kohlenstoff . .	rd. + 4000	—
Kupfer	+ 1043	+ 2310
Natrium	+ 97,6	+ 877,5
Platin	+ 1767	rd. + 3800
Quecksilber . .	— 38,87	+ 357
Sauerstoff . . .	— 218,4	— 182,97
Stickstoff . . .	— 210,52	— 195,67
Wasserstoff . .	— 257,14	— 252,780
Wolfram	+ 2900	—

Die Siedepunkte beziehen sich auf einen Druck von 760 mm.

muß es erstens geschmolzen werden. Dazu ist die Wärmemenge λm nötig. Zweitens muß es als Wasser von 0° auf t_2° erwärmt werden. Die dazu nötige Wärmemenge beträgt $c' m t_2$ cal. Das Eis nimmt also insgesamt $m(\lambda + c' t_2)$ cal auf. Diese werden dem Wasser und dem Kalorimetergefäß entzogen. Das Wasser gibt die Wärmemenge $c' m' (t_1 - t_2)$, das Kalorimeter die Wärmemenge $c'' m'' (t_1 - t_2)$ ab. Nach dem Energieprinzip muß — vorausgesetzt, daß keine Wärme nach außen verloren wurde — die vom Wasser und Kalorimeter abgegebene Wärmemenge gleich der vom Eise aufgenommenen Wärmemenge sein, also

$$m(\lambda + c' t_2) = (c' m' + c'' m'') \cdot (t_1 - t_2)$$

oder

$$\lambda = \frac{c' m' + c'' m''}{m} (t_1 - t_2) - c' t_2.$$

Die Schmelzwärme des Eises beträgt $80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Tabelle 11 gibt die Schmelzwärmen einiger Stoffe.

Tabelle 11. Schmelzwärmen einiger Stoffe.

Aluminium	94 cal · g ⁻¹	Silber	26,0 cal · g ⁻¹
Blei	5,5	Kochsalz	124
Gold	15,9	Wasser	80
Kupfer	41		

Auf der Schmelzwärme des Eises beruht das Eiskalorimeter von LAVOISIER, bei dem die Messung von Wärmemengen durch Bestimmung derjenigen Eismenge (bzw. der aus ihr gebildeten Wassermenge) erfolgt, die bei Zufuhr der zu messenden Wärmemenge geschmolzen wird. Beim Eiskalorimeter von BUNSEN (Abb. 233) wird die gebildete Wassermenge aus der Volumabnahme beim Schmelzen ermittelt. Es besteht aus einem doppelwandigen Glasgefäß, welches zwischen den Wänden mit Wasser gefüllt ist. Der Zwischenraum setzt sich in eine mit Quecksilber (q) gefüllte Kapillare c fort. Zunächst umgibt man das innere Gefäß mit einem Eismantel b , indem man es durch schnelle Verdampfung von Äther oder mittels einer Kältemischung (§ 118) unter 0° abkühlt. Jetzt bringt man den auf eine höhere Temperatur t erwärmten Körper, dessen Masse m sei, in das nunmehr auf 0° befindliche innere Gefäß. Er gibt dort Wärme an das Eis ab und kühlt sich auf 0° ab. Dabei schmilzt eine gewisse Eismenge m' , und nach dem Energieprinzip muß sein

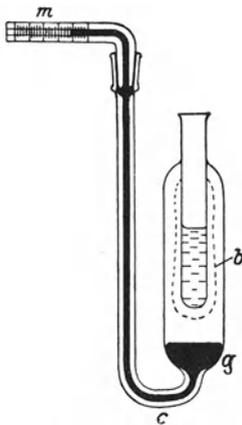


Abb. 233. Eiskalorimeter.

$$c m \cdot t = m' \lambda \quad (\lambda = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}).$$

Die Menge m' des geschmolzenen Eises wird aus der Volumabnahme berechnet, welche durch Messung der Verschiebung des Quecksilberfadens mittels der Skala m bestimmt werden kann, wenn man den Querschnitt der Kapillaren kennt. Auf diese Weise kann die spezifische Wärme c des hineingebrachten Körpers bestimmt werden. Da außer dem hineingebrachten Körper keiner der beteiligten Körper seine Temperatur bei einer solchen Messung ändert, spielt die Wärmekapazität des Gefäßes hierbei keine Rolle.

Da beim Schmelzen das molekulare Gefüge eines Stoffes gelockert wird, so ist es natürlich die Regel, daß die Körper beim Schmelzen eine Volumvergrößerung, also eine Dichteabnahme erfahren. Eine der seltenen Ausnahmen bildet das Wasser (Eis), dessen Dichte (0,9112) beim Schmelzen um etwa 10%

auf 0,99987 zunimmt. Die Ursache ist die gleiche wie bei der Dichtezunahme, die das Wasser noch bis 4°C zeigt (§ 102). Während also in der Regel der feste Stoff in seiner eigenen Schmelze zu Boden sinkt, schwimmt Eis auf Wasser, und zwar so, daß es zu etwa $\frac{9}{10}$ eintaucht. Diese Tatsache spielt im Zusammenhang mit der Dichteanomalie des Wassers eine sehr wichtige Rolle in der Natur. Die winterlichen Eisdecken der Gewässer sind also einem von der Regel gänzlich abweichenden Verhalten des Wassers zu verdanken.

Die Tatsache, daß Wasser sich beim Gefrieren ausdehnt, spielt in der Natur auch sonst eine wichtige Rolle. Wasser, welches in Gesteinritzen eingedrungen ist, kann das Gestein beim Gefrieren durch seine plötzliche Ausdehnung sprengen, so daß es beim Wiederauftauen im Frühjahr zerfällt (daher die erhöhte Gefahr von Steinschlag im Gebirge im Frühling). Dieses Ausfrieren des Gesteins ist eine der wichtigsten gebirgszerstörenden Ursachen. Mauerwerk muß gegen Eindringen von Wasser geschützt werden, damit es nicht den gleichen zerstörenden Wirkungen unterliegt.

Läßt man in einem Reagenzglas Paraffin erstarren, so kann man die Zusammenziehung, die bei diesem Stoff eintritt, deutlich erkennen. Das feste Paraffin ist in der Mitte ausgehöhlt, da es an den Wänden zuerst erstarrt.

Dehnt sich ein Stoff beim Schmelzen aus, so steigt sein Schmelzpunkt, wenn der äußere Druck erhöht wird; zieht er sich zusammen, so sinkt der Schmelzpunkt (*LE CHATELIERSches Prinzip*). Daher sinkt der Schmelzpunkt des Eises bei Druckerhöhung, und zwar um $0,0075^{\circ}$, wenn der Druck um 1 Atmosphäre erhöht wird. Bringt man ein Stück Eis von weniger als 0° unter erhöhten Druck, so tritt im ersten Augenblick ein Schmelzvorgang ein. Die hierzu nötige Schmelzwärme entzieht aber das Eis sich selbst, und es kühlt sich so auf eine etwas niedrigere Temperatur ab, so daß ein Fortschreiten des Schmelzvorganges unterbunden wird, solange dem Eis nicht Wärme von außen zugeführt wird. Auf dieser Tatsache beruht die sog. *Regelation* des Eises. Das Zusammenpressen des Schnees, der ja aus Eiskristallen besteht, im Schneeball bewirkt infolge der Druckzunahme, daß der Schnee an einzelnen Stellen schmilzt. Beim Nachlassen des Drucks gefriert er wieder, und die Schneekristalle backen zusammen. Die Glätte von Eis rührt sehr wesentlich auch davon her, daß es an einer Druckstelle schmilzt, so daß sich zwischen einem gleitenden Körper und dem Eise stets eine dünne Wasserschicht befindet, die wie ein Schmiermittel wirkt. Auf der Regelation beruht auch zum Teil die Plastizität des Gletschereises. Erhöht sich der Druck im Eise, weil der Eisstrom an einer engen Stelle zusammengedrückt wird, so tritt ein örtliches Schmelzen ein, welches den einzelnen Teilen des Eises eine Bewegung gegeneinander und eine Anpassung an den verfügbaren Raum gestattet. So kommt es, daß das Gletschereis wie eine äußerst zähe Flüssigkeit talwärts fließt.

Beim Eiskalorimeter beobachtet man die zunächst überraschende Tatsache, daß nicht das dem hineingebrachten warmen Körper nächstliegende Eis schmilzt, sondern das am weitesten außen befindliche Eis. Das im ersten Augenblick durch Schmelzen des dem inneren Gefäße nächsten Eises gebildete Wasser hat ein kleineres Volumen als das Eis, aus dem es entstand, daher entsteht an jener Stelle eine Druckverminderung, die den Gefrierpunkt des Wassers heraufsetzt. Dies bewirkt wieder ein Gefrieren des Wassers bei einer etwas über 0° liegenden Temperatur. Die hierbei freiwerdende Schmelzwärme teilt sich dem benachbarten Eise mit, wo sich der gleiche Vorgang wiederholt, und so fort, bis der Schmelzvorgang bis zur äußeren Begrenzung des Eismantels fortgeschritten ist, wo alsdann endgültiges Schmelzen erfolgt.

Für die Abhängigkeit des Schmelzpunkts vom Druck gilt die Gleichung von CLAUDIUS-CLAPEYRON

$$\Delta T = 0,0242 \frac{(V_1 - V_2) T}{\lambda} \Delta p. \quad (I)$$

Hierin bedeutet T die (absolute) Schmelztemperatur, ΔT ihre Änderung, wenn sich der Druck um den Betrag Δp ändert, V_1 das spezifische Volumen der flüssigen, V_2 das der festen Phase, λ die latente Schmelzwärme. Dabei ist Δp in $\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$, λ in $\text{erg} \cdot \text{g}^{-1}$ gemessen. Mißt man Δp in mm Hg, λ in $\text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$, so tritt vor die rechte Seite der Gl. (I) statt 0,242 der Faktor $3,184 \cdot 10^{-5}$. $\Delta T/\Delta p$ ist positiv oder negativ, je nachdem V_1 größer oder kleiner als V_2 ist. Für Wasser ist $V_1 < V_2$ (§ 102), also $\Delta T/\Delta p$ negativ.

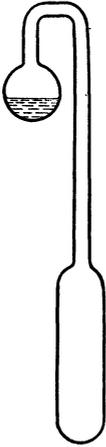


Abb. 234.
Kryophor.

III. Verdampfen. Damit eine Flüssigkeit verdampft bzw. siedet, müssen Moleküle aus dem Inneren durch die Flüssigkeitsoberfläche nach außen gelangen. Hierzu ist Arbeit gegen die gleichen Kräfte zu leisten, die die Oberflächenspannung hervorrufen (§ 60). Es gibt in den Flüssigkeiten, wie in den Gasen (§ 64), Moleküle mit allen möglichen Geschwindigkeiten. Von diesen werden die schnelleren am leichtesten die Oberfläche durchstoßen können. Die Flüssigkeit verarmt also durch die Verdampfung an ihren schnelleren Molekülen, die mittlere Molekulargeschwindigkeit und damit die Temperatur der Flüssigkeit sinkt. Jede sich selbst überlassene Flüssigkeit kühlt sich durch Verdampfung ab. Soll ihre Temperatur konstant gehalten werden, so muß man ihr Wärme zuführen. Die zur Verwandlung von 1 g einer Flüssigkeit von konstanter Temperatur in Dampf von gleicher Temperatur erforderliche Umwandlungswärme heißt ihre *Verdampfungswärme*. Das vorstehende gilt auch für den an eine konstante Temperatur gebundenen Siedevorgang, der ja nur eine besondere Form der Verdampfung ist.

Die *molare Verdampfungswärme* ist die zum Verdampfen von 1 Mol der Flüssigkeit erforderliche Wärmemenge. Sie ist also gleich der Arbeit, die aufzuwenden ist, um N -Moleküle aus dem Innern der Flüssigkeit aus ihrer Oberfläche hinaus zu befördern (N LOSCHMIDTSche Zahl).

Je größer die mittlere Molekulargeschwindigkeit in der Flüssigkeit ist, um so mehr Moleküle werden imstande sein, die Oberfläche zu durchstoßen. Die Verdampfungsgeschwindigkeit wächst daher mit der Temperatur.

Die Abkühlung von Flüssigkeiten durch Verdampfung kann man leicht am Wasser beobachten. Frei stehendes Wasser ist stets ein wenig kälter als seine Umgebung. Der menschliche Körper wird stark abgekühlt, wenn er naß ist, weil das Wasser auf ihm schnell verdampft (Erkältungsgefahr nach Schwitzen). Äther kann man durch Beschleunigung seiner Verdampfung (Hindurchblasen von Luft, wodurch die Oberfläche vergrößert und der gebildete Dampf immer wieder fortgeschafft wird) leicht erheblich unter 0° abkühlen. Die Beschleunigung der Abkühlung heißer Speisen durch Blasen beruht darauf, daß durch Fortschaffung des von ihnen gebildeten Wasserdampfes die Verdampfung des Wassers beschleunigt und dadurch die Temperatur der Speise herabgesetzt wird. Fette Suppen kühlen sich deshalb so schwer ab, weil die auf ihnen schwimmende Fettschicht die Verdampfung behindert.

Sehr eindrucksvoll wird die Abkühlung einer Flüssigkeit durch Verdampfung durch den Kryophor (Abb. 234) bewiesen. Er besteht aus zwei durch eine Röhre miteinander verbundenen und gut luftleer gemachten Glasgefäßen, in denen sich etwas Wasser befindet. Der übrige Raum des Gefäßes ist dann mit gesättigtem Wasserdampf gefüllt (§ 112). Man bringt das Wasser in die obere Kugel und umgibt das andere, leere Gefäß mit einer Kältemischung. In ihm

kondensiert sich jetzt der vorher bei Zimmertemperatur gesättigte Wasserdampf zu Eis. Da aber in der oberen Kugel eine höhere Temperatur herrscht, so verdampft dort weiteres Wasser. Dadurch kühlt sich das Wasser ab und kommt schließlich zum Gefrieren.

Man kann die Verdampfungswärme η des Wassers messen, indem man die Temperaturänderung einer in einem Kalorimetergefäß befindlichen Wassermenge m' mißt, wenn man eine Dampfmenge m , etwa durch Einleiten mittels eines Rohres aus einem Kessel mit siedendem Wasser, in ihm kondensieren läßt. Eine der in § 110 bezüglich der Schmelzwärme angestellten vollkommen gleiche Überlegung führt dann (bei gleicher Bedeutung der Buchstaben) zu der Gleichung

$$m [\eta + c' (t_2 - t)] = (c' m' + c'' m'') (t - t_1),$$

so daß

$$\eta = \frac{c' m' + c'' m''}{m} (t - t_1) - c' (t_2 - t).$$

Die Verdampfungswärme η des Wassers beträgt bei 100° $539,1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Sie ist wie die Verdampfungswärmen überhaupt, von der Temperatur abhängig.

Tabelle 12 gibt die Verdampfungswärmen einiger Stoffe bei ihrem normalen Siedepunkt, d. h. bei einem Druck von 760 mm Hg. Man beachte den äußerst hohen Wert beim Wasser.

Tabelle 12. Verdampfungswärme einiger Stoffe.

Alkohol	202 cal · g ⁻¹	Sauerstoff	51 cal · g ⁻¹
Ammoniak	321	Stickstoff	48
Äther	80	Schwefelkohlenstoff	85
Chlor	62	Wasser	539,1
Quecksilber	68	Wasserstoff	110

112. Gesättigter Dampf. Dampfdruck. Dampfdichte. Aus früherer Zeit ist die Gewohnheit geblieben, daß man ein Gas, welches in Berührung mit seiner eigenen Flüssigkeit steht, als *Dampf* bezeichnet. (Man unterschied früher Gase und Dämpfe. Letztere sollten verflüssigbar sein, erstere nicht. Man weiß heute, daß man alle Gase unter geeigneten Bedingungen verflüssigen kann, § 115). Dämpfe sind nichts anderes als Gase. Heute wird die Bezeichnung Dampf nur für solche Gase gebraucht, welche vom idealen Gaszustand merklich abweichen; denn diese lassen sich leichter verflüssigen, als solche, bei denen das nicht der Fall ist. Unrichtig ist die Bezeichnung von Wolken schwebender fester oder flüssiger Teilchen als Dampf (z. B. eine „dampfende“ Lokomotive). Solche Wolken sind richtig als Nebel zu bezeichnen. Wasserdampf ist unsichtbar.

Ein dicht geschlossenes Gefäß sei zum Teil mit einer Flüssigkeit gefüllt. Diese wird in den von ihr nicht angefüllten Raumteil hinein verdampfen. Nach Erreichung einer bestimmten Dichte hört die weitere Verdampfung auf. Es stellt sich ein stationärer Zustand — ein dynamisches Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf — her, derart, daß gleichzeitig ebensoviele Moleküle die Flüssigkeit verlassen (verdampfen) wie aus dem Dampf wieder in die Flüssigkeit eintreten (sich kondensieren). Da der Druck des Dampfes von seiner Dichte abhängig ist, so stellt sich im Laufe der Zeit ein ganz bestimmter Druck des Dampfes über der Flüssigkeit her, der *Dampfdruck* oder *Sättigungsdruck* der Flüssigkeit. Der Dampfdruck ist von der Temperatur abhängig und steigt mit ihr. Tabelle 13a zeigt diese Abhängigkeit für Wasser bzw. Eis, Tabelle 13b für Quecksilber, Tabelle 13c für Helium. Ein Dampf, der mit seiner Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, heißt *gesättigt*. Der Druck (Partialdruck, § 66) des gesättigten Dampfes über einer Flüssigkeit ist unabhängig davon, ob sich über der Flüssigkeit noch fremde Gase, z. B. Luft, befinden.

Zur Bestimmung des Dampfdruckes einer Flüssigkeit bei Zimmertemperatur kann man sich der Einrichtung bedienen, die für den Versuch von TORRICELLI verwandt wurde (Abb. 235). Man stellt zunächst in der Röhre, wie im § 70 angegeben, ein Vakuum über dem Quecksilber her. Dann läßt man in der Röhre von unten her etwas

Tabelle 13a. Dampfdruck des Wassers (Eises).

— 60°	0,007 mm	+ 40°	55,3 mm
— 40°	0,093 „	+ 60°	149,4 „
— 20°	0,77 „	+ 80°	355,1 „
+ 0°	4,6 „	+ 100°	760,0 „
+ 20°	17,5 „	+ 200°	11665,0 „

Tabelle 13b. Dampfdruck des Quecksilbers.
(Temperatur in Celsiusgraden.)

0°	0,0001846 mm	60°	0,0277 mm
15°	0,00081 „	100°	0,3006 „
30°	0,0027 „	356,7°	760,0 „

Tabelle 13c. Dampfdruck des Heliums.
(Absolute Temperaturen.)

1,475°	4,15 mm	4,9°	1329 mm
3,516°	359,5 „	5,16°	16680 „
4,205°	757,5 „	5,20°	17180 „

von der zu untersuchenden Flüssigkeit aufsteigen. Sofort sinkt die Quecksilbersäule, weil jetzt über ihr der Dampfdruck der Flüssigkeit herrscht. Dieser ist aus der Differenz der beiden Einstellungen der Quecksilbersäule zu entnehmen. Dabei muß, damit bestimmt Sättigung herrscht, stets noch etwas Flüssigkeit im Rohr vorhanden sein. Wir können jetzt auch schließen, daß bei dem TORRICELLISCHEN Versuch oben im Rohr tatsächlich kein vollkommenes Vakuum herrscht, sondern der Dampfdruck des Quecksilbers, der bei Zimmertemperatur etwa $\frac{1}{1000}$ mm Hg beträgt. Bei Einführung von Wasser sinkt das Quecksilber bei 15° um 12,8 mm, entsprechend einem Dampfdruck von 12,8 mm Hg, erheblich mehr bei Einführung von Alkohol oder Äther. Verkleinert oder vergrößert man den dem Dampf zur Verfügung stehenden Raum durch Heben, Senken oder Neigen des Rohres, so bleibt, solange noch Flüssigkeit vorhanden ist, der Dampfdruck der gleiche, und von dem Dampf wird ein Teil kondensiert, bzw. es bildet sich die entsprechende weitere Menge Dampf aus der Flüssigkeit.

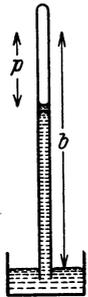


Abb. 235.
Messung des
Dampf-
drucks.
b Barometer-
stand,
p Dampf-
druck.

Die der Verdampfung entgegenwirkenden molekularen Kräfte hängen, wie bereits erwähnt, eng mit der Oberflächenspannung zusammen, also mit den einseitig gerichteten Kräften, die die an der Oberfläche einer Flüssigkeit befindlichen Moleküle in das Innere zu ziehen suchen. Die Kondensation einer Flüssigkeit wird daher erleichtert, wenn zu den normalen molekularen Kräften noch andere anziehende Kräfte hinzukommen. So wirken die in der Luft fast stets vorhandenen elektrisch geladenen Staubteilchen usw. infolge der von ihnen ausgehenden elektrischen Kräfte kondensationsfördernd auf Wasserdampf, sie bilden *Kondensationskerne*. Es tritt aber an ausgedehnten, festen, abgekühlten Flächen eine Kondensation des Wasserdampfes der Luft leichter ein als an kleinen Wassertröpfchen.

Das hängt damit zusammen, daß die Oberflächenspannung an kleinen Tröpfchen kleiner ist als an einer ebenen Flüssigkeitsfläche (§ 59). Daher verdampfen kleine Tröpfchen leichter als Flüssigkeiten mit ebener Oberfläche, und umgekehrt findet an ihnen schwerer eine Kondensation statt. Die Temperatur, bei der eine Kondensation von Wasser aus der Atmosphäre (Taubildung) an ausgedehnten Flächen eintritt, heißt *Taupunkt*. Er ist vom Partialdruck des Wasserdampfes, d. h. dem Sättigungsgrade der Luft, abhängig und kann daher dazu dienen, den *Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre* zu bestimmen.

Da nach dem Gesetz von AVOGADRO die Zahl der Moleküle in 1 cm³ bei allen idealen Gasen unter gleichen Bedingungen gleich groß ist, so verhalten

sich die Dichten von solchen Gasen wie die Massen ihrer einzelnen Moleküle, also auch wie ihre Molekulargewichte (§ 63). Die Dichten idealer Gase sind bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ihren Molekulargewichten proportional, und man kann letztere aus der Dichte berechnen.

Dieses Verfahren läßt sich auch bei festen und flüssigen Stoffen anwenden, welche man verdampfen kann. In diesen Fällen pflegt man die Dichte des in den idealen Gaszustand versetzten Stoffes bei 0°C und 760 mm Druck als seine *Dampfdichte* zu bezeichnen. Zwar läßt sich dieser Zustand bei den für gewöhnlich festen oder flüssigen Stoffen nicht verwirklichen. Hat man jedoch die Dichte eines Stoffes bei einer Temperatur und einem Druck bestimmt, bei denen er als im idealen Gaszustand befindlich anzusehen ist, so kann man aus den Gesetzen der idealen Gase leicht berechnen, wie groß seine Dichte wäre, wenn er unter den obigen Bedingungen im idealen Gaszustand wäre. Unter den verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Dampfdichten sei dasjenige von VICTOR MEYER erwähnt. Man füllt eine kleine, abgewogene Menge des zu untersuchenden Stoffes in ein Glasröhrchen *R*, das entweder offen oder mit einem Stöpsel verschlossen ist, der sich bei Überdruck von innen leicht öffnet. Das Röhrchen wird in einen Glaskolben *A* von der in Abb. 236 dargestellten Form geworfen, der bereits vorher auf eine so hohe Temperatur erhitzt wurde, daß der Stoff bei ihr nicht nur verdampft, sondern sich auch dem idealen Gaszustand ausreichend nahe befindet. Es ist nicht nötig, diese Temperatur genau zu kennen. Sie muß nur die vorstehende Bedingung erfüllen. Nach dem Einbringen in den Kolben, der alsdann sofort wieder mit einem Stopfen verschlossen wird, verdampft der Stoff und verdrängt die zu unterst im Kolben befindliche Luft. Das hat zur Folge, daß Luft aus dem oben am Kolben befindlichen Entbindungsrohr ausgetrieben wird. Diese wird in einem kalibrierten Meßzylinder *B* unter Wasser aufgefangen. Die ausgetriebene Luftmenge entspricht genau der Luftmenge, die im Kolben von dem verdampfenden Stoff verdrängt wurde, als dort das gleiche Volumen einnahm wie dieser. Da sich der verdampfte Stoff im Kolben wie ein ideales Gas verhält, und da ferner auch die Luft sich fast wie ein ideales Gas verhält, so würden sich beide Stoffe — vorausgesetzt, daß der verdampfte Stoff dabei seinen idealen Charakter behielte — bei allen Druck- und Temperaturänderungen gleichartig verhalten. Wäre also statt der Luft der verdampfte Stoff aus dem Kolben ausgetrieben und im Meßzylinder aufgefangen worden, so würde er unter der vorstehenden Voraussetzung mit einer für den Zweck der Messung genügenden Genauigkeit das gleiche Volumen einnehmen wie die tatsächlich ausgetriebene Luft. Man kann also das abgelesene Luftvolumen gleich demjenigen Volumen setzen, das der Stoff einnehmen würde, wenn er sich als ideales Gas unter den gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen befinden würde wie die ausgetriebene Luft. Indem man das vorher festgestellte Gewicht des Stoffes durch dieses Volumen dividiert, erhält man das spezifische Gewicht und die Dichte des Dampfes. Aus dieser kann dann nach den Gasgesetzen das Molekulargewicht berechnet werden.

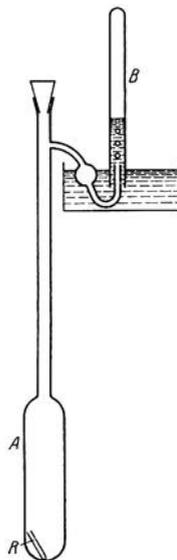


Abb. 236. Messung der Dampfdichte nach VICTOR MEYER.

113. Sieden. Das Sieden einer Flüssigkeit besteht in einer Verdampfung, welche nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Innern der Flüssigkeit, insbesondere an den Gefäßwänden, vor sich geht. Es bilden sich dort Dampfblasen, welche an die Oberfläche steigen. In diesen Dampfblasen herrscht der

Dampfdruck, welcher der Temperatur der Flüssigkeit entspricht. Es ist klar, daß das nur dann möglich ist, wenn dieser Dampfdruck nicht kleiner ist als der Druck, unter dem die Flüssigkeit steht. Denn wäre das der Fall, so würden die etwa spontan entstehenden Blasen durch den äußeren Druck zusammengedrückt und wieder zu Flüssigkeit kondensiert werden. Eine Flüssigkeit siedet daher bei derjenigen Temperatur, bei der der Druck ihres gesättigten Dampfes gleich dem äußeren Druck, bei freiem Sieden an der Luft also gleich dem Luftdruck ist. Dabei ist zu beachten, daß die Dampfblasen im Innern der Flüssigkeit auch noch unter deren hydrostatischem Druck stehen, sie also eine etwas höhere Temperatur haben müssen als Dampf bei Atmosphärendruck.

Die Siedetemperatur einer Flüssigkeit hängt also vom Druck ab. Auch hier gilt die Gleichung von CLAUDIUS-CLAPEYRON [Gl. (1)], in der nunmehr V_2 das spezifische Volumen der Flüssigkeit, V_1 dasjenige des Dampfes bedeutet, und in der die Verdampfungswärme η an die Stelle der Schmelzwärme λ tritt. Da stets $V_1 \gg V_2$, so ist bei der Verdampfung ΔT stets positiv, d. h. die Siedetemperatur wächst stets mit dem Druck.

Tabelle 14. Abhängigkeit des Siedepunktes des Wassers vom Druck.

Druck mm Hg	Siedepunkt °C
720	98,49
730	98,89
740	99,26
750	99,63
760	100,00
770	100,37
780	100,73
790	101,09
800	101,44

Tabelle 14 zeigt diese Abhängigkeit für Wasser in der Umgebung des normalen Atmosphärendrucks. Für einen größeren Druckbereich ergibt sie sich aus Tabelle 13a (§ 112). Bringt man Wasser von 90—95° in einen evakuierbaren Raum, so siedet das Wasser auf, wenn der Druck ausreichend gesunken ist. Bei ausreichend niedrigem Druck kann man sogar Wasser von Zimmertemperatur ohne Zufuhr von Wärme zum Sieden bringen. Der Versuch gelingt besonders gut, wenn man in dem Raum, in dem man den Druck erniedrigt, Schwefel-

säure aufstellt, welche den entstehenden Wasserdampf absorbiert, da man den Druck andernfalls nicht unter dessen Sättigungsdruck erniedrigen kann. Da die Verdampfungswärme in diesem Falle nicht schnell genug von außen zugeführt wird, muß sie auf Kosten der Wärme des Wassers selbst gehen. Das Wasser kann sich dabei bis auf 0° abkühlen und unter gleichzeitigem Sieden gefrieren. Die sich bildende Eisdecke wird von den Dampfblasen durchbrochen.

Da der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, so tut dies auch die Siedetemperatur des Wassers. Sie beträgt z. B. auf der Höhe des Montblanc (4800 m, Luftdruck rund 420 mm) nur etwa 84°. Man benutzt diese Abhängigkeit, um auf Expeditionen in hohen Gebirgen auf bequeme Weise Höhen zu messen (Siedebarmeter). Zur Beförderung des Garwerdens von Speisen benutzt man den PAPINSchen Topf, einen Kochtopf, der mit einem Deckel fest verschlossen ist. Dieser besitzt ein Ventil, das sich erst bei einem gewissen Überdruck des Wasserdampfes öffnet. Das Wasser siedet dann unter dem erhöhten Druck seines eigenen Dampfes und daher bei einer höheren Temperatur als dem äußeren Luftdruck entspricht.

Unter *Destillation* versteht man das Verdampfen einer Flüssigkeit und ihr erneutes Kondensieren aus ihrem Dampf bei Abkühlung. Im besonderen bezeichnet man als Destillation ein auf dieser Grundlage beruhendes Verfahren zur Gewinnung reiner Flüssigkeiten (Wasser, Alkohol usw.). Das Verfahren besteht darin, daß man die noch mit anderen Stoffen vermischte Flüssigkeit zum Sieden bringt und den Dampf in einem anderen Gefäß kondensiert. Handelt es sich z. B. um die wässrige Lösung eines Salzes, so verdampft beim Sieden nur das Wasser. Leitet man den Dampf durch eine Kühlschlange, so kondensiert er sich dort zu reinem Wasser (destilliertes Wasser). Beim Sieden eines

Gemisches mehrerer Flüssigkeiten ist der Dampf erheblich reicher an denjenigen Bestandteilen, welche einen niedrigeren Siedepunkt haben als die anderen. Kondensiert man den Dampf, so sind also im Destillat die ersteren angereichert. Diese Anreicherung kann man durch Wiederholung des Verfahrens weiter treiben (Gewinnung starker Alkoholika aus schwächeren).

114. Sublimation. Der Dampfdruck der meisten festen Stoffe ist überaus klein, und in der Tat zeigen sie fast durchweg keine meßbare zeitliche Abnahme ihrer Menge durch Verdampfung. Nur ziemlich wenige feste Stoffe zeigen eine deutlich beobachtbare *Sublimation* und haben infolgedessen auch einen merklichen, mit der Temperatur ansteigenden Dampfdruck, z. B. manche festen Duftstoffe. Wegen des Dampfdrucks über Eis siehe Tabelle 13a, § 112. Tabelle 15 gibt einige Zahlenangaben für Jod. Entsprechend der Schmelz- und der Verdampfungswärme haben die festen Stoffe auch eine *Sublimationswärme*, d. i. die Wärmemenge, die nötig ist, um 1 g des Stoffes zur Sublimation zu bringen.

Auch bei scharfem Frost beobachtet man ein allmähliches Schwinden des Schnees, der sich durch Sublimation unmittelbar in Wasserdampf verwandelt. Der umgekehrte Vorgang ist die unmittelbare Bildung von Rauhreif aus dem Wasserdampf der Luft sowie die Bildung der Schneekristalle in den kalten oberen Luftschichten, während der Hagel aus zunächst unterkühlten und danngefrorenen Wassertropfen besteht.

Tabelle 15. Dampfdruck über Jod.

— 48,3°	0,000050 mm	
— 32,3°	0,00052	„
— 20,9°	0,0025	„
0°	0,029	„
15°	0,131	„
30°	0,469	„
80°	15,9	„
114,5	90,0	„ (Schmelzpunkt)
185,3	760,0	„ (Siedepunkt)

Bringt man in ein luftleer gemachtes Glasgefäß einige Jodkristalle und kühlt eine Stelle der Gefäßwand ab, so schlägt sich dort aus dem im Gefäß gebildeten Joddampf festes Jod nieder. Frei an der Luft liegende Jodkristalle, gewisse Quecksilbersalze, darunter das „Sublimat“ (HgCl_2) u. dgl., verschwinden durch Sublimation.

115. Verflüssigung der Gase. Das Problem der Verflüssigung von Gasen besteht, vom molekularen Standpunkt aus gesehen, darin, die Moleküle in den Stand zu setzen, sich unter der Wirkung der zwischen ihnen bestehenden anziehenden Kräfte zu dem für den flüssigen Zustand charakteristischen engeren Verbände zusammenfinden. Daß diese Kräfte nicht bei jeder Temperatur zur Überführung des Gases in den flüssigen Zustand führen, liegt daran, daß bei höherer Temperatur die thermische Bewegung der Moleküle dem Zustandekommen eines engeren molekularen Verbandes zu stark entgegenwirkt.

Bei manchen Gasen ist es möglich, schon bei gewöhnlichen Temperaturen diese Wirkung der thermischen Bewegung dadurch aufzuheben, daß man die Moleküle durch Verminderung des Gasvolumens, d. h. Erhöhung des Drucks, auf so kleine Abstände bringt, daß die molekularen Anziehungskräfte ausreichen, um die Moleküle gegen die Wirkung der Molekularbewegung in den engeren Verband des flüssigen Zustandes zu bringen. Solche Gase, z. B. Chlor, Kohlensäure, Ammoniak, Schwefeldioxyd, können also bei gewöhnlicher Temperatur durch Anwendung hinreichend hoher Drucke verflüssigt werden. Bei anderen Gasen gelingt dies nicht. Bei ihnen ist es vielmehr erforderlich, zunächst ihre thermische Molekularenergie herabzusetzen, d. h. sie abzukühlen. Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Temperatur, oberhalb deren es unmöglich ist, es unter Anwendung noch so hoher Drucke zu verflüssigen. Diese Temperatur heißt die *kritische Temperatur* T_k des Gases (ANDREWS 1869). Ist das Gas auf diese Temperatur abgekühlt, so kann es durch Anwendung eines genügend hohen Drucks verflüssigt werden. Bei der kritischen Temperatur T_k ist dazu

ein Druck p_k erforderlich, der der *kritische Druck* genannt wird. Das spezifische Volumen des Gases in diesem sog. *kritischen Zustande* heißt sein *kritisches Volumen* V_k , sein reziproker Wert $\rho_k = 1/V_k$ seine *kritische Dichte*. Gase (Dämpfe), welche schon bei gewöhnlicher Temperatur durch Druck verflüssigt werden können, sind also solche, deren kritische Temperatur höher ist als die gewöhnliche Temperatur.

Da die Wirksamkeit der molekularen Anziehungskräfte für die Verflüssigung entscheidend ist, so müssen Gase bei Temperaturen, wo sie durch Druck verflüssigt werden können, erheblich vom idealen Gaszustand entfernt sein. Es gilt also für sie die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS [Gl. (16), § 104]. Je besser ein Gas den Gesetzen der idealen Gase gehorcht, um so weiter ist es von seinem kritischen Zustand entfernt. Ein wirklich ideales Gas, sofern es ein solches gäbe, könnte mangels VAN DER WAALSScher Kräfte nicht verflüssigt werden.

Die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS gibt uns Auskunft über den kritischen Zustand und die Verflüssigung der Gase. In Abb. 237a sind für den Fall der Kohlensäure, der für alle anderen Gase typisch ist, *Isothermen* nach der VAN DER WAALSSchen Gleichung gezeichnet, d. h. eine Anzahl von (p, V_s) -Kurven bei konstanten Temperaturen, wie sie sich aus jener Gleichung ergeben. (V_s = spezifisches Volumen.) Wir verfolgen jetzt den Zustand des Gases, indem wir — etwa bei $t = 10^\circ$ — bei großem Volumen (Punkt *A*, Abb. 237b) beginnen und nunmehr bei konstanter Temperatur (isotherm) das Volumen allmählich verkleinern, indem wir den Druck erhöhen. Dabei wird das Gas bis an den Punkt *B* gelangen, und zwar längs der gezeichneten Isothermen. Versucht man nun, den Druck bei konstanter Temperatur weiter zu erhöhen, so gelingt dies nicht. Auch bei weiterer Verkleinerung des Volumens nimmt der Druck nicht zu, sondern bleibt konstant. Die Zustandsänderung verläuft von *B* ab nicht mehr längs der Kurve, die der VAN DER WAALSSchen Gleichung entspricht, sondern längs der horizontalen Geraden *BC*, welche die VAN DER WAALSSche Kurve in *G* schneidet und in *C* erneut erreicht. Von hier ab verläuft die Zustandsänderung wieder auf der VAN DER WAALSSchen Isotherme. Abb. 237b zeigt den tatsächlichen Verlauf der Zustandsänderung.

Das horizontale Stück *BC* stellt diejenige Phase der isothermen Zustandsänderung dar, in welcher sich das Gas *verflüssigt*. Der Verflüssigungsvorgang beginnt in *B* und ist in *C* beendet. Rechts von *B* haben wir nur Gas, zwischen *B* und *C* Gas (gesättigten Dampf) und Flüssigkeit nebeneinander, jenseits von *C* nur Flüssigkeit. Entsprechend dem Unterschied der Zusammendrückbarkeit (Kompressibilität) der Gase und Flüssigkeiten steigt der Druck rechts von *B* mit abnehmendem Volumen schwach, jenseits *C* stark an.

Die Lage des horizontalen Kurvenstücks *BC* ist, wie die Theorie ergibt, durch die Bedingung gegeben, daß die beiden Flächen (f), die es mit der VAN DER WAALSSchen Kurve bildet, gleich groß sind. Daher wird, wie man aus den Kurven erkennt, das horizontale Stück um so kürzer, je höher die Temperatur ist. Bei der Kohlensäure z. B. schrumpft es bei der Isotherme von $31,3^\circ$ zu einem Punkt *K* zusammen (Abb. 237b). Steigt die Temperatur noch höher, so gibt es keine horizontale Gerade mehr, welche die VAN DER WAALSSche Kurve dreimal schneidet wie die Gerade *BC*. Es ist dann auch keine Verflüssigung mehr möglich. Die Isotherme bei $31,3^\circ$ entspricht also der höchsten Temperatur, bei der Kohlensäure noch verflüssigt werden kann; die kritische Temperatur der Kohlensäure beträgt $31,3^\circ$. *K* ist der *kritische Punkt*, seine Koordinaten sind der kritische Druck und das kritische Volumen.

Verbindet man die Endpunkte aller horizontalen Kurvenstücke der Isothermenschar nebst dem kritischen Punkt *K* durch eine Kurve (*DKE*, Abb. 237c), so teilt diese zusammen mit dem Stück *KF* der kritischen Isothermen

das „Zustandsgebiet“ in drei Bereiche. Im Bereich I ist der Stoff nur gasförmig, im Bereich II haben wir Gas und Flüssigkeit nebeneinander, im Bereich III ist der Stoff vollständig verflüssigt.

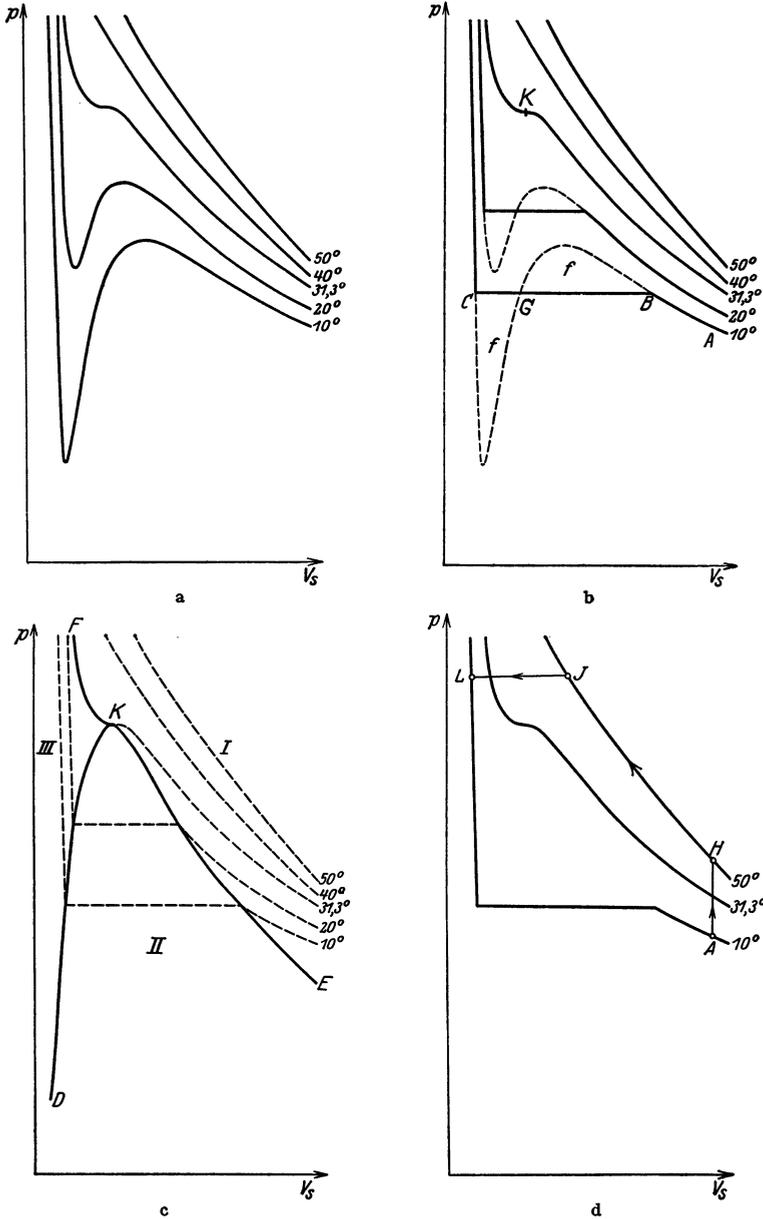


Abb. 237. Zustandsgleichung von VAN DER WAALS. Zur Verflüssigung der Gase.

Die Verwandlung eines Gases in eine Flüssigkeit ist auch möglich, ohne daß der Stoff dabei einen unstetigen Verflüssigungsvorgang durchmacht. So kann man z. B., vom Punkt A auf der 10°-Isotherme ausgehend, gasförmige Kohlensäure zunächst bei konstantem Volumen auf 50° erwärmen (Abb. 237d, Punkt H), sie alsdann bei konstanter Temperatur zusammendrücken bis zum Punkte J

und nunmehr bei konstantem Druck wieder auf 10° abkühlen (Punkt L), wie es die Pfeile andeuten. Der Stoff befindet sich jetzt im Gebiet III, ist also zweifellos flüssig geworden. Erwärmt man eine Flüssigkeit bei konstantem Volumen (in Abb. 237b senkrecht von unten nach oben fortschreitend) über ihre kritische Temperatur, so ist sie gasförmig geworden. In beiden Fällen erfolgt der Übergang zwischen den Aggregatzuständen nicht so, daß sich eine Zeitlang Gas und Flüssigkeit — durch die Oberfläche der letzteren deutlich getrennt — nebeneinander befinden. Vielmehr durchläuft der Stoff beim Überschreiten der kritischen Isothermen eine eigentümliche Verwandlung, bei der der gesamte Stoff durch und durch einheitlich in den anderen Aggregatzustand übergeht. Man kann diese Erscheinung sowie ihre Umkehrung leicht an flüssiger Kohlensäure beobachten, welche in ein Glasrohr eingeschlossen ist (NATTERERSche Röhre). Taucht man eine solche Röhre in warmes Wasser (eben über der kritischen

Tabelle 16. Einige kritische Daten.

	t_k	p_k	ρ_k
Wasserstoff . . .	— 241°	15 Atm.	0,033
Stickstoff . . .	— $147,0^\circ$	34	0,32
Sauerstoff . . .	— $118,8$	50	0,42
Helium	— 268°	2,3	0,065
Ammoniak	+ 130°	115,0	—
Wasser	+ $365,0^\circ$	200,5	0,329
Quecksilber . . .	rd. + 1200°	456	rd. 4

Temperatur von $31,3^\circ$), so verschwindet die Oberfläche der flüssigen Kohlensäure unter Schlierenbildung, und die Kohlensäure ist gasförmig geworden, ohne daß ein Verdampfungs- oder Siedevorgang stattgefunden hätte. (Vorsicht! Eine etwaige Explosion der Röhre ist sehr gefährlich.)

In Tabelle 16 sind die kritischen Daten (statt des kritischen Volumens V_k die kritische Dichte $\rho_k = 1/V_k$) einiger Gase angegeben. Am schwersten von allen Gasen läßt sich Helium verflüssigen. Seine Verflüssigung ist zuerst KAMERLINGH ONNES geglückt.

Läßt man flüssige Kohlensäure aus einer Bombe plötzlich in einen Stoffbeutel ausströmen, so kühlt sie sich durch heftige Verdampfung so stark ab, daß ein Teil von ihr zu *Kohlensäureschnee* sublimiert.

Das technische Problem bei der Verflüssigung zahlreicher Gase besteht also in der Abkühlung auf ihre niedrige kritische Temperatur. Heute wird *flüssige Luft* in großen Mengen für alle möglichen Verwendungszwecke technisch hergestellt, und zwar in Deutschland nach dem LINDESchen Verfahren. Das hierbei zur Abkühlung der Luft verwendete Verfahren beruht auf dem JOULE-THOMSON-Effekt (§ 108). Die Luft wird zunächst zusammengedrückt und die dabei eintretende Erwärmung durch Kühlung wieder rückgängig gemacht. Dann wird die Luft durch plötzliche Entspannung stark abgekühlt. Diese Luft umspült alsdann die Röhren, durch welche dem Kompressor weitere Luft zugeführt wird, die auf diese Weise vorgekühlt wird und sich, nachdem mit ihr in gleicher Weise verfahren ist, noch weiter abgekühlt als die zuerst abgekühlte Luft. In dieser Weise wird das Verfahren, bei dem die gleiche Luft stets im Kreise durch den Apparat geleitet wird, fortgesetzt, bis sich die Luft auf ihre kritische Temperatur von -141° abgekühlt hat und sich dann verflüssigt.

Abb. 238 zeigt das Schema der LINDESchen Luftverflüssigungsmaschine. Die von O kommende Luft tritt durch einen Waschturm W zur Beseitigung der Kohlensäure. In L wird die Luft auf etwa 200 Atm. zusammengedrückt. T ist eine Trockenvorrichtung, aus der die Luft nach A gelangt, wo sie durch eine Kältemaschine vorgekühlt wird. V_1 ist ein Ventil, in welchem die Luft entspannt wird, wobei sie sich abkühlt. Der hierbei verflüssigte Anteil sammelt sich in 4 , während die kalte, gasförmige Luft durch den „Gegenströmer“ G , in dem sie die neu ankommende Luft vorkühlt, wieder in den Kompressor

gelangt. Durch Öffnen des Ventils V_2 kann die verflüssigte Luft in das Vorratsgefäß 6 gelangen und durch den Hahn H abgezapft werden. Die beim Durchgang durch V_2 verdampfte Luft entweicht nach Ausnutzung ihrer tiefen Temperatur im Gegenströmer durch 7 in die Atmosphäre.

Die Verflüssigung des Wasserstoffs gelingt auf diese Weise erst unterhalb seiner Inversionstemperatur von -80° (§ 108). Man verfährt daher so, daß man den Wasserstoff zunächst mittels flüssiger Luft auf eine Temperatur von etwa -210° bringt. Diese tiefe Temperatur wird dadurch erreicht, daß man flüssige Luft in einem gegen Wärmezufuhr von außen gut geschützten Gefäß unter niedrigerem Druck — so daß ihr Siedepunkt sehr tief liegt — verdampfen läßt, wobei sie sich infolge der Abgabe von Verdampfungswärme stark unter ihre ursprüngliche Temperatur abkühlt. Erst mit dem so vorgekühlten Wasserstoff kann das bei der Verflüssigung der Luft beschriebene Verfahren vorgenommen werden, durch das sich der Wasserstoff bei seiner kritischen Temperatur von -241° und seinem kritischen Druck von 15 Atm. verflüssigt. Um Helium zu verflüssigen, verfährt man mit ihm ebenso, unter Verwendung von flüssigem Wasserstoff zur Vorkühlung.

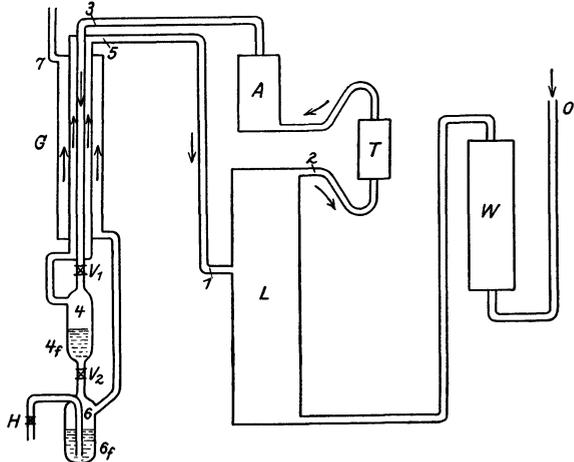


Abb. 238. Schema der LINDESchen Luftverflüssigungsmaschine.

Da der Siedepunkt des Stickstoffs tiefer liegt als der des Sauerstoffs, so siedet er aus flüssiger Luft schneller weg als dieser. Flüssige Luft, welche einige Zeit gestanden hat, ist daher ziemlich sauerstoffreich. Ein hineingesteckter glühender Span glimmt hell auf trotz der tiefen Temperatur. Quecksilber wird bei der Temperatur der flüssigen Luft fest und läßt sich hämmern, Gummi wird hart und brüchig, Bleidraht hochelastisch. Über die Verwendung flüssiger Luft zur Herstellung hoher Vakua siehe § 71.

116. Tiefste Temperaturen. Die Siedetemperatur des flüssigen Heliums beträgt bei Atmosphärendruck $-268,9^\circ\text{C} = 4,3^\circ\text{K}$. Läßt man es unter vermindertem Druck sieden, so kann seine Temperatur weiter gesenkt werden. Auf diese Weise ist eine Temperatur von etwa $0,7^\circ\text{K}$ erreicht worden (KAMERLINGH ONNES). Der Dampfdruck des Heliums beträgt dann nur noch $0,004\text{ mm Hg}$. Im flüssigen Helium beobachtet man dann bereits Kristalle von festem Helium. Ein anderes, von W. MEISSNER vorgeschlagenes, aber noch nicht praktisch durchgeführtes Verfahren beruht auf der Tatsache, daß der Ausdehnungskoeffizient des flüssigen Heliums unterhalb 2°K negativ ist (wie der des Wassers unterhalb 4°C). Stoffe, die diese Eigenschaft haben, kühlen sich bei adiabatischer Zusammendrückung ab, da sie die zu einer Volumverminderung erforderliche Wärme aus ihrem eigenen Bestande decken müssen.

Das zur Zeit wirksamste Verfahren zur Erzeugung allertiefster Temperaturen beruht darauf, daß gewisse paramagnetische Stoffe die Eigenschaft haben, daß ihre magnetische Suszeptibilität (§ 214) mit der Temperatur wächst (DEBYE, GIAUQUE). Das bewirkt, wie hier nur erwähnt werden kann, daß sie sich bei adiabatischer Entmagnetisierung abkühlen. Mit einem Gemisch von K-Cr-Alaun

und K-Al-Alaun hat DE HAAS die bisher tiefste Temperatur von $0,0044^{\circ}\text{K}$ erreicht.

Die Erreichung möglichst tiefer Temperaturen ist eine der wichtigsten Aufgaben der Physik. Denn die Eigenschaften der Stoffe (z. B. die spezifische Wärme, § 354, die elektrische Leitfähigkeit, § 158) sind in der Nähe des absoluten Nullpunktes von denen bei höheren Temperaturen zum Teil völlig verschieden. Von ihrer Erforschung sind äußerst wichtige Schlüsse auf die Grundgesetze der Materie zu erwarten.

117. Die Erdatmosphäre. Die Witterungserscheinungen. Die Zustände auf der Erdoberfläche werden durch die Vorgänge in der Erdatmosphäre entscheidend beeinflusst. Auf ihnen beruht das Wetter und das für die Menschheit so bedeutsame Klima. Wegen der mit Tag und Nacht und mit der jahreszeitlich wechselnden Stellung der Erde zur Sonne ständig schwankenden Stärke der Sonnenstrahlung kann sich in der Atmosphäre nie ein thermisches Gleichgewicht ausbilden. Sie ist deshalb der Sitz von unaufhörlichen Ausgleichsvorgängen, die in den Orkanen ihren Höhepunkt erreichen.

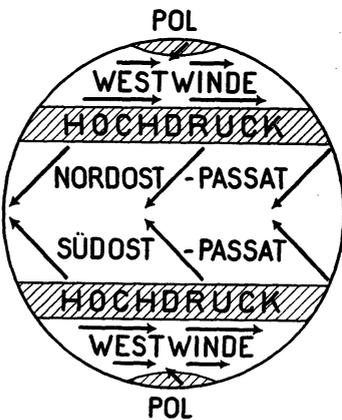


Abb. 239.
Schema des allgemeinen Luftkreislaufs.

Wie schon früher erwähnt, entspricht der Zustand der Atmosphäre daher auch in keiner Weise demjenigen eines in stationärem Zustand befindlichen und überall gleichmäßig temperierten Gases. Im ganzen gesehen, kann man sie in zwei Bereiche von sehr verschiedenem Verhalten einteilen. In den unteren Schichten, der *Troposphäre*, deren Höhe in Europa rund 10 km beträgt, nimmt die Temperatur nach oben hin allmählich ab, etwa um $0,5^{\circ}$ auf je 100 m. In den höheren Schichten, der *Stratosphäre*, findet dagegen keine wesentliche Temperaturänderung mit der Höhe mehr statt.

Die vertikalen und horizontalen Luftbewegungen, die *Winde*, werden durch Gleichgewichtsstörungen der Atmosphäre hervorgerufen, deren Ursache in der ungleichmäßigen Temperaturverteilung über Tag und Nacht, über die Festländer und die Meere, über hohe und niedere Breiten liegt. Die Atmosphäre kommt eben wegen der Erddrehung und der ständig wechselnden örtlichen Erwärmung durch die Sonnenstrahlung nie zur Ruhe. Indem die Luft in horizontaler Richtung von den Gebieten höheren Drucks in die Gebiete tieferen Drucks strömt, indem die bei Tage über dem festen Lande erwärmte Luft aufsteigt, an anderer Stelle kalte Luft zu Boden sinkt, befindet sich die Luft in dauernder Bewegung. In den mittleren und hohen Breiten haben diese Bewegungen einen weitgehend unregelmäßigen und durch viele Zufälligkeiten bedingten Charakter. Anders in den äquatorialen Gegenden. Hier besteht ein ständig in die Höhe gerichteter Strom von erwärmter Luft, die durch von Norden und Süden nachströmende kältere Luft ersetzt wird. Die emporgestiegene warme Luft strömt in den höheren Luftschichten nach Norden und Süden und sinkt nach Abkühlung dort wieder zu Boden. Es findet hier also eine Kreisströmung der Luft von gewaltigem Ausmaß statt. Infolge der Corioliskräfte (§ 41), die auf die dem Äquator zuströmenden Winde wirken, werden sie nach Westen abgelenkt und bilden so auf der Nordhalbkugel den Nordost-Passat, auf der Südhalbkugel den Südost-Passat (Abb. 239). In den höheren Breiten dagegen herrschen westliche Winde vor.

Die Erscheinungen in der Atmosphäre werden nun infolge der Anwesenheit von *Wasserdampf* noch weiter verwickelt. In der Luft spielen sich infolge der Auf- und Abstiegsbewegungen der Luftkörper ständig adiabatische Erwärmungs- und Abkühlungsvorgänge ab, und letztere führen, wenn die Abkühlung ausreichend groß ist, zur Sättigung des Wasserdampfes, zur Bildung von schwebenden

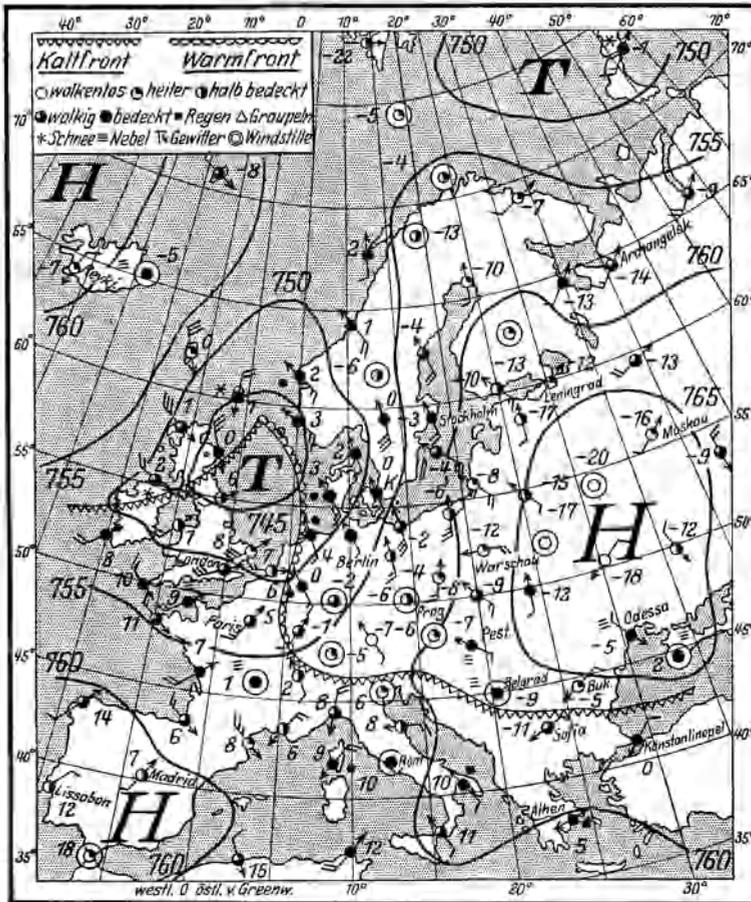


Abb. 240. Beispiel einer winterlichen Wetterkarte. (Nach W. KÖNIG.)

Die Wetterkarten veranschaulichen durch Isobaren für das Meeresniveau die Luftdruckverteilung eines bestimmten Zeitpunktes. Auf dem hier wiedergegebenen Beispiel ist ein gut entwickeltes Tiefdruckgebiet (auch Zyklone genannt) über Westeuropa, ein deutliches Hochdruckgebiet über Osteuropa zu erkennen. Die Winde an den einzelnen Beobachtungsstellen sind durch Pfeile dargestellt, deren Befiederung die Windstärke ablesen läßt, die Lufttemperaturen sind in Zahlen neben den Stationskreisen vermerkt. Eine durch den Kern der Zyklone *T* verlaufende gezackte Linie gibt die Grenze zwischen Luftkörpern verschiedener Herkunft und Temperatur an. Im Tiefdruckgebiet dringt die warme Luft im sog. warmen Sektor mit spitzwinkliger Begrenzung in die kalte Luftmasse hinein vor. Diese Anordnung der Temperatur in Verbindung mit den Strömungsverhältnissen ergibt wichtige Schlußfolgerungen über den vertikalen Aufbau der Atmosphäre im Tiefdruckgebiet, über Einzelheiten der Witterung an den Grenzflächen der Luftkörper und über das Verhalten der gesamten Zyklone.

Tröpfchen oder Kristallen, also von Wolken und Nebel, und schließlich zu Niederschlägen. An der Oberfläche der Meere hingegen findet, sobald die über ihnen befindliche Luft nicht mit Wasserdampf gesättigt ist, eine ständige Verdampfung von Wasser statt. Der hohe Betrag der Verdampfungswärme des Wassers bewirkt nun bei Verdampfung eine starke Abkühlung. Bei der Kondensation des Wasserdampfes dagegen wird ein erheblicher Betrag an Wärme frei

und wirkt auf die Luft temperaturerhöhend ein. So werden die Temperaturverhältnisse der Atmosphäre auch durch ihren Gehalt an Wasserdampf stark beeinflusst.

Die Kondensation des Wassers in der Atmosphäre erfolgt hauptsächlich an schwebenden Staubteilchen, über den Meeren auch an Salzteilchen (§ 112). Kondensiert es sich an festen Flächen, so entsteht Tau oder Reif. Die Kenntnis der *Luftfeuchtigkeit* ist von großer Wichtigkeit für die Wetterkunde. Man unterscheidet die *absolute* und die *relative Feuchtigkeit*. Unter der absoluten Feuchtigkeit versteht man die Masse des in 1 m³ vorhandenen Wasserdampfes. Viel wichtiger ist die relative Feuchtigkeit, das Verhältnis des wirklich herrschenden Wasserdampfdrucks zu dem Druck, der bei vollständiger Sättigung der Luft mit Wasser herrschen würde. Beträgt z. B. die Lufttemperatur 20° C und der Dampfdruck des Wassers 13,2 mm Hg, so beträgt die relative Feuchtigkeit 75 %, da der Sättigungsdruck des Wassers bei 20° C 17,5 mm Hg ist. Die Differenz von 4,3 mm Hg heißt das Sättigungsdefizit. Der herrschende Dampfdruck kann aus dem Taupunkt (§ 112) ermittelt werden. Man kühlt eine blanke Fläche so weit ab, bis sich an ihr Wasser niederschlägt. Dann ist ihre Temperatur gleich derjenigen, bei der der herrschende Dampfdruck dem Druck gesättigten Dampfes entspricht. Im obigen Falle wäre das eine Temperatur von 15,5° C. Es sind noch verschiedene andere Meßverfahren in Gebrauch, die meist auf der Verdampfungsgeschwindigkeit von Wasser beruhen, die natürlich um so größer ist, je weniger die Luft mit Feuchtigkeit gesättigt ist.

Die Wettervorhersage beruht auf Schlüssen, die an Hand einer langjährigen Erfahrung aus der allgemeinen Verteilung des Luftdrucks, der Lufttemperatur, der Windrichtung und Windstärke gezogen werden. Abb. 240 zeigt das Beispiel einer Wetterkarte. Jedoch weiß man heute, daß für eine zuverlässige Wettervorhersage auch eine Kenntnis des Zustandes höherer Luftschichten nötig ist, die durch Flugzeuge oder Pilotballone mit Registriergeräten erforscht werden. Bei dem heutigen Stand der wetterkundlichen Forschung und Organisation sind sehr zuverlässige Vorhersagen in unserem Bereich auf 1—2 Tage möglich. Der Versuch, Vorhersagen auf längere Sicht zu machen, ist in aussichtsreichem Fortschritt.

118. Lösungen. Lösungen sind Flüssigkeiten oder Mischkristalle, die aus zwei oder mehreren verschiedenen Bestandteilen (Komponenten) bestehen, deren Mengenverhältnis *stetig veränderlich* ist. Dieses Mengenverhältnis ist bei einem Teil der Lösungen an keine Grenze gebunden, z. B. bei der Lösung Wasser—Alkohol. Bei anderen Lösungen, z. B. bei den Lösungen von Salzen in Wasser, gibt es eine obere Grenze der Löslichkeit des einen Bestandteiles in dem anderen. Bei Lösungen dieser Art bezeichnet man den in seiner Menge unbeschränkten Anteil als das Lösungsmittel, den in seiner Menge beschränkten Teil als den gelösten Stoff. Eine Lösung, die die größte mögliche Menge eines Stoffes gelöst enthält, heißt *gesättigt*. Die Menge des gelösten Stoffes ist sehr häufig, aber nicht immer, klein gegenüber der Menge des Lösungsmittels, auch im gesättigten Zustande. Seine Konzentration in einer gesättigten Lösung hängt von der Temperatur ab.

Ein Beispiel einer festen Lösung ist das Messing (Lösung Kupfer—Zink). Unter den flüssigen Lösungen besitzen die Lösungen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe in Wasser (wässrige Lösungen) die größte Bedeutung, und nur mit ihnen werden wir uns im folgenden beschäftigen. Wasser löst die überwiegende Mehrzahl aller Stoffe, wenn auch zum Teil nur in sehr geringen Mengen. Daher rührt die Schwierigkeit, chemisch reines Wasser herzustellen.

Ein gelöster Stoff verhält sich im Lösungsmittel in vielen Beziehungen wie ein Gas (§ 120). Löst man einen festen Stoff in einer Flüssigkeit oder eine

Flüssigkeit in einer anderen, so ist dies in gewisser Hinsicht mit einer Sublimation bzw. Verdampfung des gelösten Stoffes in den vom Lösungsmittel eingenommenen Raum zu vergleichen. Daher kommt es, daß wenigstens in vielen Fällen bei der Lösung Wärme verbraucht wird, es tritt Abkühlung ein. Doch ist dies nicht immer der Fall, sondern es kann durch das Hinzutreten anderer Umstände auch Erwärmung eintreten, und zwar dann, wenn bei der Lösung eine exotherme chemische Reaktion (§ 129) stattfindet. Die *Lösungswärme* kann also positiv oder negativ sein. Zum Beispiel ist die Lösungswärme von Kochsalz in Wasser negativ, es tritt bei Lösung Abkühlung ein.

In den gewöhnlichen Lösungen ist der gelöste Stoff in molekularer Verteilung enthalten oder sogar noch weiter unterteilt (Dissoziation, § 168). In den *kolloidalen Lösungen* dagegen ist der gelöste Stoff in Gestalt größerer schwebender Teilchen enthalten, die allerdings noch weit unterhalb der gewöhnlichen Sichtbarkeitsgrenze liegen. Es ist üblich, als kolloidal solche Lösungen zu bezeichnen, bei denen die Teilchen Durchmesser von 10^{-5} bis 10^{-7} cm haben, während man Lösungen mit noch größeren Teilchen als *Suspensionen* bezeichnet. Die Lösungen erscheinen klar, z. B. eine kolloidale Goldlösung. Doch können die Teilchen oft noch mit dem Ultramikroskop (§ 298) sichtbar gemacht werden. Kolloidale Lösungen unterscheiden sich von Suspensionen unter anderem dadurch, daß der gelöste Stoff durch Filtrierpapier und auch durch noch feinere Filter fast nie vom Lösungsmittel getrennt werden kann. Auch in den mit Gold gefärbten Gläsern (Rubingläser) befindet sich das Gold in kolloidaler Form. Kolloidale Stoffe spielen unter anderem in der Physiologie eine wichtige Rolle.

Man unterscheidet lyophile (hydrophile) und lyophobe (hydrophobe) kolloidale Lösungen. In den ersteren bestehen die gelösten Teilchen aus Zusammenballungen von verhältnismäßig wenigen großen Molekülen (z. B. bei den kolloidalen Eiweißlösungen und vielen anderen kolloidalen Lösungen organischer Stoffe) in den letzteren aus Mikrokristallen des gelösten Stoffes. Diese beiden Gruppen zeigen in verschiedenen Beziehungen ein verschiedenes physikalisch-chemisches Verhalten.

119. RAOULTSches Gesetz. Siedepunkt und Gefrierpunkt von Lösungen. Der Dampfdruck einer Flüssigkeit sinkt, wenn in ihr ein Stoff gelöst wird. Er ist über der Lösung kleiner als über dem reinen Lösungsmittel. Es sei p der Dampfdruck des reinen Lösungsmittels, p' sein Dampfdruck über der Lösung. In dieser seien in n Mol des Lösungsmittels n' Mol des gelösten Stoffes enthalten. Das Verhältnis $n'/n = \mu$ bezeichnet man als den *Molenbruch* der Lösung. Dann gilt das RAOULTSche Gesetz,

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{n'}{n} = \mu. \quad (2)$$

Die Dampfdruckerniedrigung ist also der Zahl der gelösten Mole proportional. Da der Dampfdruck über der Lösung niedriger ist als über dem reinen Lösungsmittel, so bedarf erstere zum Sieden einer höheren Temperatur als letzteres (§ 113). Durch die Lösung eines Stoffes tritt also eine *Siedepunktserhöhung* Δt_s ein, welche der Dampfdruckerniedrigung proportional ist,

$$\Delta t_s = \text{const} \frac{n'}{n} = \text{const} \mu.$$

Beträgt die Masse des Lösungsmittels bzw. des gelösten Stoffes m bzw. m' g, und ist das Molekulargewicht des Lösungsmittels M , das des gelösten Stoffes M' , so ist $n = m/M$ und $n' = m'/M'$, und demnach der Molenbruch $\mu = m' M / m M'$. Wir können also schreiben

$$\Delta t_s = A_s \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{M'}. \quad (3)$$

Dabei haben wir das Molekulargewicht M des Lösungsmittels mit in die Konstante A_s einbezogen. Diese ist nur von der Art des Lösungsmittels, nicht von der des gelösten Stoffes abhängig. Als molekulare Siedepunktserhöhung pflegt man diejenige zu bezeichnen, die eintritt, wenn 1 Mol des gelösten Stoffes in 100 g des Lösungsmittels enthalten ist. Sie ist also nach Gl. (3) gleich $A_s/100$.

Auf der gleichen Grundlage beweist man durch etwas verwickeltere Überlegungen — es geht sowohl der Dampfdruck über der flüssigen Lösung, wie über ihrer festen Phase ein —, daß der Gefrierpunkt einer Lösung niedriger liegt als der des reinen Lösungsmittels. Es tritt eine *Gefrierpunktserniedrigung* Δt_g ein, für die ein der Gl. (3) ganz analoges Gesetz, aber mit negativem Vorzeichen, gilt,

$$\Delta t_g = -A_g \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{M}. \quad (4)$$

Auch die Konstante A_g ist nur vom Lösungsmittel, nicht vom gelösten Stoff, abhängig, und man bezeichnet meist die Größe $A_g/100$ als molekulare Gefrierpunktserniedrigung. Für Wasser ist $A_s = 511 \text{ grad} \cdot \text{Mol}^{-1}$, $A_g = 1850 \text{ grad} \cdot \text{Mol}^{-1}$.

Sowohl die Siedepunktserhöhung wie die Gefrierpunktserniedrigung liefern sehr bequeme Verfahren zur *Bestimmung der Molekulargewichte* gelöster Stoffe. Ist für ein Lösungsmittel die molekulare Siedepunktserhöhung bzw. Gefrierpunktserniedrigung einmal bekannt, so ergibt sich das Molekulargewicht eines gelösten Stoffes nach Gl. (3) oder (4), wenn man feststellt, welche Änderung des Siede- oder Gefrierpunktes bei einer Lösung von m' g in m g des Lösungsmittels eintritt.

Scheinbare Abweichungen von den Gl. (3) und (4) erklären sich dadurch, daß viele Stoffe bei der Lösung dissoziieren (§ 168). Es wirkt dann jedes Bruchstück wie ein Molekül, und die Zahl n' [Gl. (2)] wird erhöht, der Dampfdruck noch weiter erniedrigt.

Kühlt man eine Lösung unter ihren Gefrierpunkt ab, so scheidet sich in vielen Fällen zunächst nur das Lösungsmittel in fester Form ab, also bei wässrigen Lösungen reines Eis. Bei Fortsetzung der Abkühlung gelangt man schließlich an einen Punkt, bei dem die Lösung gesättigt ist. Entzieht man der Lösung noch mehr Wärme, so bleibt die Temperatur konstant, und aus der Lösung scheiden sich nunmehr sowohl gelöster Stoff wie Lösungsmittel in fester Form in bestimmtem Mengenverhältnis, bei wässrigen Lösungen als sog. *Kryohydrat*, aus. Die hierbei abgegebene Wärme entstammt sowohl der Schmelzwärme des Lösungsmittels als auch — bei negativer Lösungswärme (§ 118) — der letzteren, geht also auf Kosten von Umwandlungswärmen. Die Zusammensetzung der Lösung ändert sich dann nicht mehr, und die Temperatur bleibt bei weiterem Entzug von Wärme konstant.

Mischt man Eis von 0° mit Kochsalz, so tritt ein Lösungsvorgang ein, indem sich konzentrierte, flüssige Kochsalzlösung bildet. Hierbei wird einmal Schmelzwärme zum Schmelzen des Eises verbraucht, andererseits ist auch zum Lösen des Salzes Wärme erforderlich, da Kochsalz eine negative Lösungswärme hat. Diese Wärme wird der Eis-Salz-Mischung entzogen, die sich infolgedessen abkühlt, und zwar bis zu derjenigen Temperatur, bei der das Kryohydrat auszufallen beginnt. Bei Eis und Kochsalz ist das günstige Mischungsverhältnis 3:1. Hierbei wird eine Temperatur von etwa -22° erreicht. Derartige Mischungen heißen *Kältemischungen*.

120. Osmose. Es gibt Stoffe, durch welche aus einer Lösung zwar das Lösungsmittel diffundiert, z. B. das Wasser, aber nicht der gelöste Stoff. Es sei H (Abb. 241a) eine solche halbdurchlässige (semipermeable) Wand. Auf der rechten Seite befinde sich z. B. eine wässrige Lösung L von Kupfersulfat, auf der linken reines Wasser R , und zwar seien anfänglich beide Schenkel des

Gefäßes gleich hoch gefüllt. Nach einiger Zeit zeigt sich, daß das reine Wasser gesunken, die Kupfersulfatlösung gestiegen ist, und zwar ist der Unterschied h der Höhen um so größer, je konzentrierter die Lösung ist. Bei einer 6%igen Zuckerlösung beträgt der Überdruck rund 4 Atmosphären. Dieser Vorgang heißt *Osmose*, der Überdruck auf der Seite der Lösung *osmotischer Druck*. VAN'T HOFF hat gezeigt, daß dieser Druck ebenso groß ist, wie wenn der gelöste Stoff den Raum, den er in der Lösung einnimmt, als ideales Gas erfüllte.

Ähnliche Erscheinungen zeigen sich auch, wenn eine Scheidewand zwar für die auf beiden Seiten befindlichen Stoffe durchlässig ist, aber für die eine mehr als für die andere; z. B. für Wasser und Alkohol, die durch eine Schweinsblase getrennt sind.

Für Versuche eignen sich Niederschläge von Kupferferrozyanid oder gewissen anderen Stoffen auf porösem Ton. Eine einfache Versuchsanordnung zum Nachweis der Osmose besteht in einem Gefäß mit leicht angesäuertem Wasser, in welches man ein zweites, unten mit einer Schweinsblase verschlossenes und oben mit einem Steigrohr versehenes Gefäß mit konzentrierter Kupfersulfatlösung stellt. Die Lösung steigt allmählich im Steigrohr empor, da nur das Wasser, aber nicht das Kupfersulfat, durch die Membran hindurch diffundiert.

In der Physiologie spielt die Osmose durch die Zellwände der Organismen eine überaus wichtige Rolle.

Die Gl. (2) (§ 119) gibt uns die Möglichkeit, im Anschluß an VAN'T HOFF und ARRHENIUS eine Berechnung des osmotischen Drucks zu geben. Am Boden eines abgeschlossenen Gefäßes (Abb. 241b) befinde sich reines Lösungsmittel (R), darüber, von ihm durch eine halbdurchlässige Wand getrennt und mit ihm im Gleichgewicht, die Lösung (L) eines Stoffes in dem gleichen Lösungsmittel.

Der Raum über den Flüssigkeiten sei mit dem gesättigten Dampf des Lösungsmittels erfüllt. Seine Dichte sei ρ_1 , die Dichte der Lösung, die derjenigen des reinen Lösungsmittels fast genau gleich ist, ρ_2 . Der Druck des Dampfes über dem reinen Lösungsmittel sei p , über der Lösung p' , der osmotische Druck in der Lösung P . Wir betrachten das obere Niveau der Lösung. In dieser Höhe muß im ganzen Gase der Druck p' herrschen, während im Niveau des reinen Lösungsmittels der Druck p herrscht. Nach § 69, Gl. (26e), ist (wegen des nur kleinen Höhenunterschiedes h) $p = p' + \rho_1 g h$. Von unten her wirkt auf das obere Niveau, durch die Lösung wie durch einen Stempel übertragen, der Druck p , abzüglich des hydrostatischen Drucks $\rho_2 g h$ der Lösung, zuzüglich des osmotischen Druckes P , insgesamt also der Druck $p + P - \rho_2 g h$, der bei Gleichgewicht dem Druck p' gleich sein muß. Setzt man auf Grund der ersten Gleichung $g h = (p - p')/\rho_1$, so folgt $P = (p - p') (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, oder, da $\rho_1 \ll \rho_2$,

$$P = \frac{p - p'}{p} \cdot \frac{p}{\rho_1} \cdot \rho_2 = \frac{n'}{n} \cdot \frac{p}{\rho_1} \rho_2$$

[s. Gl. (2)]. Nun können wir nach § 103 setzen $p/\rho_1 = p V_s = p V_m/M$, wobei V_m das Volumen eines Mols des Lösungsmittels im Gaszustand und M sein Molekulargewicht bedeutet. Wir erhalten dann

$$P = \frac{n'}{n} \cdot \frac{p V_m}{M} \rho_2.$$

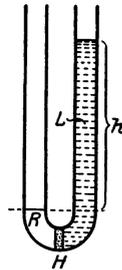


Abb. 241a.
Schema der Osmose.

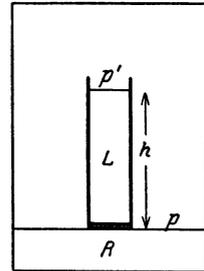


Abb. 241b.
Zur Berechnung des osmotischen Drucks.

Nun ist aber nM die Masse des Lösungsmittels in Gramm, daher nM/ρ_2 das Volumen V des Lösungsmittels und sehr nahezu auch der Lösung. Folglich ist $nM/\rho_2 n' = V/n' = V_M$ dasjenige Volumen, welches 1 Mol des gelösten Stoffes in der Lösung einnimmt. Es ergibt sich dann

$$PV_M = pV_m = RT. \quad (5)$$

Der osmotische Druck folgt also dem Gesetz der idealen Gase.

121. Absorption und Adsorption. Unter Absorption versteht man allgemein die Aufsaugung von Gasen durch feste und flüssige Körper. Jedoch handelt es sich hier um ein Gebiet, das sehr verschiedenartige Erscheinungen umfaßt. Besonders wichtig ist folgendes.

Tabelle 17 a.

1 l Wasser absorbiert bei 760 mm Druck		
	bei 20° ccm	bei 0° ccm
H ₂	21,1	18,1
O ₂	48,9	31,0
N ₂	23,5	15,4
He	9,7	10,0
CO ₂	1800	900
NH ₃	1,2 × 10 ⁶	0,7 × 10 ⁶

Flüssigkeiten sind imstande, Gase zu absorbieren, unter Umständen in sehr großen Mengen. Es handelt sich dabei um eine Lösung des Gases in der Flüssigkeit, bei der es, wie bei anderen Lösungen, eine Sättigung gibt. Die Gasmenge aber, die maximal gelöst werden kann, hängt nicht nur von der Temperatur, sondern auch von dem Partialdruck des betreffenden

Gases über der Flüssigkeit ab. Die Löslichkeit nimmt in der Regel mit der Temperatur ab. Zum Beispiel entweicht die Kohlensäure aus Mineralwasser oder Bier beim Erwärmen. Die bei Sättigung gelöste Menge ist ferner dem Partialdruck des Gases über der Flüssigkeit proportional (*HENRYsches Gesetz*, 1803). Bei Verdoppelung des Partialdruckes wird also die doppelte Menge gelöst. Aus diesem Grunde entweicht Kohlensäure aus kohlensäurehaltigen Getränken, wenn man durch Öffnen der Flasche den Gasdruck in ihr erniedrigt. Sie werden schal, wenn sie einige Zeit an der Luft stehen, deren Kohlensäuregehalt äußerst klein ist. Da bei idealen Gasen das Volumen dem Druck umgekehrt proportional ist, so lösen sich von einem Gas, das dem idealen Gaszustand ausreichend nahe ist, unabhängig vom Druck bei gleicher Temperatur stets gleiche Volumina des über der Flüssigkeit befindlichen Gases. In manchen Fällen ist die gelöste Gasmenge außerordentlich groß. So löst 1 l Wasser bei 0° mehr

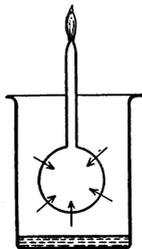


Abb. 242. Scheinbare Diffusion von Ätherdampf durch eine Seifenblase.

als 1 cbm Ammoniakgas. Die Lösung ist der Salmiakgeist. Sauerstoff wird von Wasser stärker gelöst als Stickstoff. Das ist wichtig für die im Wasser lebenden Organismen, die ihren Sauerstoffbedarf aus der im Wasser gelösten Luft decken. Tabelle 17 a gibt einige Zahlenangaben über die Löslichkeit von Gasen in Wasser.

Ätherdampf wird von einer Seifenblase absorbiert, wie der folgende Versuch zeigt (Abb. 242). Eine Seifenblase an einem zur Spitze ausgezogenen Rohr wird in ein zugedecktes Gefäß gebracht, an dessen Boden sich etwas Äther befindet. Nach einiger Zeit kann man an der Spitze eine Flamme von Ätherdampf entzünden. Im Gefäß entwickelt sich Ätherdampf, der von der Seifenblase absorbiert wird. Da im Inneren der Blase anfänglich der Partialdruck des Ätherdampfes Null ist, so gibt sie solchen nach innen ab. Gleichgewicht würde erst eintreten, wenn der Partialdruck des Ätherdampfes innen und außen gleich groß ist. Da aus der Spitze ständig Ätherdampf ausströmt, so findet auch eine ständige Wanderung desselben durch die Seifenblase statt. Der Vorgang erscheint wie eine Diffusion, ist aber von einer solchen durchaus verschieden.

Ein zweiter wichtiger Fall ist die *Adsorption* von Gasen an festen Flächen. Sie besteht in der Anlagerung von Gasmolekülen an diese und beruht jedenfalls zum Teil auf VAN DER WAALSschen Kräften zwischen den Molekülen des Gases und des festen Körpers, zum Teil auf unabgesättigten Restvalenzen der Oberflächenmoleküle des letzteren. Die adsorbierte Schicht ist nur von molekularer Dicke, die Gasdichte in ihr kann aber beträchtlich sein. Ein besonders großes Adsorptionsvermögen zeigen natürlich solche festen Stoffe, die eine große Oberfläche haben, also feinkörnige und pulverförmige Stoffe. Poröse Stoffe, bei denen auch die Wände der Poren im Inneren zu adsorbieren vermögen, können Gas in ihrem ganzen Volumen aufsaugen, so daß der Vorgang wie eine Absorption erscheint und auch meist als solche bezeichnet wird. Die auf diese Weise absorbierte Gasmenge ist bei Kohle um so größer, je niedriger die Temperatur ist. Die Absorption von Gasen durch Kokosnuß- oder Buchsbaumkohle bei der Temperatur der flüssigen Luft ist ein wichtiges Mittel zur Erzielung höchster Vakua. Tabelle 17 b gibt einige Zahlenbeispiele für die Absorption der Buchsbaumkohle.

Tabelle 17b.

Buchsbaumkohle absorbiert bei -183° das nachstehende Vielfache ihres Volumens	
H ₂	135
O ₂	230
N ₂	155
He	15
CO ₂	190

III. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit.

122. Der erste Hauptsatz der Wärmelehre. Da die Wärme Molekularenergie ist, so gilt für sie das *Energieprinzip*. Das bedeutet, daß Wärmeenergie nicht verloren gehen oder aus nichts entstehen, sondern sich nur in eine andere Energieform verwandeln oder aus Energie anderer Art entstehen kann. Von dieser Erkenntnis haben wir bereits mehrfach Gebrauch gemacht. Das auf Wärmemengen angewandte Energieprinzip bezeichnet man als den *ersten Hauptsatz der Wärmelehre*. Er wurde zuerst von dem deutschen Arzt JULIUS ROBERT MAYER (1840) ausgesprochen. Bald danach erkannten HELMHOLTZ, JOULE und andere die Gültigkeit des Energieprinzips für die Gesamtheit der Naturerscheinungen. Es war dies eins der wichtigsten Ereignisse in der Geschichte der Physik. Der geniale Gedanke MAYERS, der sich auf physiologische Beobachtungen gründete, ist für die weitere Entwicklung von Physik, Chemie und Technik von ausschlaggebender Bedeutung gewesen. Man beachte, daß zu jener Zeit die mechanische Natur der Wärme noch nicht erkannt war. Vielmehr konnte diese Erkenntnis erst auf dem Boden des Energieprinzips wachsen.

Der erste Hauptsatz findet seine mathematische Formulierung in der Gleichung

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Sie besagt, daß sich die einem Körper zugeführte Wärmemenge Q restlos wiederfindet in der Änderung ΔU seiner inneren Energie U und der von ihm geleisteten Arbeit A . Einen Sonderfall der Gl. (1) bildet die Gl. (21) (§ 108), bei der dU die Änderung der molekularen kinetischen Energie und $p dV$ die bei der Volumänderung dV geleistete äußere Arbeit bedeutet. Die Bedeutung der Gl. (1) geht aber über diesen Sonderfall weit hinaus. Unter ΔU ist jede Art von Änderung der inneren Energie zu verstehen. Darunter fällt nicht nur die Änderung der molekularen Bewegungsenergie, sondern auch jede andere Art von Energieänderungen der Moleküle, z. B. die verschiedenen Arten von Umwandlungswärmen (Schmelzwärme, Verdampfungswärme usw.), sowie die mit chemischen Veränderungen der Moleküle verbundenen Wärmetönungen (§ 129).

Da eine Wärmemenge einen bestimmten Energiebetrag darstellt, so muß zwischen der für sie üblichen Einheit, der Kalorie, und den andern Energieeinheiten, dem erg und dem mkg*, ein festes Umrechnungsverhältnis bestehen. Die in 1 cal enthaltene Zahl von erg heißt das *mechanische Wärmeäquivalent*, ihr reziproker Wert das kalorische Äquivalent der Energie. Es ist zuerst von JOULE experimentell ermittelt, dann von MAYER berechnet worden. JOULE benutzte ein mit Wasser gefülltes Kalorimetergefäß, in dem sich ein drehbares Flügelrad *a* und feste Scheidewände *b* befinden (Abb. 243). Bei einer Drehung des Rades wird das Wasser durch die enge Spalte zwischen *a* und *b* hindurchgedrückt und erleidet dabei eine starke Reibung. Das Rad wird durch zwei fallende Körper in Bewegung gesetzt. Infolge der Bremsung durch das Flügelrad ist ihre Fallgeschwindigkeit so gering, daß sie keine nennenswerte kinetische Energie gewinnen. Ihre potentielle Energie wird also durch die Reibung im Wasser nahezu vollständig in Wärme des Wassers und des Gefäßes verwandelt. Ist *m* die Gesamtmasse der Körper, so beträgt nach Durchfallen der Höhe *h* ihr Verlust an potentieller Energie mgh erg. Ist ferner *K* die Wärmekapazität des Wassers und des Gefäßes, Δt ihre Temperaturerhöhung, so beträgt ihr Zuwachs an Wärmeenergie $K\Delta t$ cal. Nach dem Energieprinzip ist daher

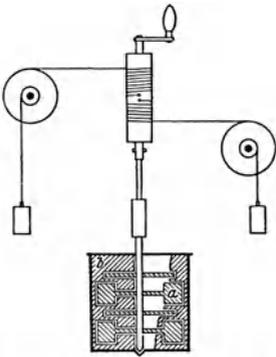


Abb. 243. Messung des mechanischen Wärmeäquivalents nach JOULE.

$$mgh \text{ erg} = K\Delta t \text{ cal} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ cal} = \frac{mgh}{K\Delta t} \text{ erg.} \quad (2)$$

MAYER berechnete das Wärmeäquivalent auf folgende Weise. Ein Mol eines Gases vom Anfangsvolumen V_m befindet sich in einem Gefäß mit einem verschiebbaren Stempel, auf den eine konstante Kraft wirkt, so daß in dem Gase ein konstanter Druck p aufrecht erhalten wird. Da der Druck p konstant gehalten wird, so folgt bei einer Temperaturerhöhung ΔT aus Gl. (10) (§ 103) $p\Delta V_m = R\Delta T$. Die linke Seite dieser Gleichung ist die bei der Volumänderung ΔV_m von dem Gase durch Verschiebung des Stempels gegen die äußere Kraft geleistete mechanische Arbeit [§ 67, Gl. (22)]. Berechnen wir sie, indem wir den Druck p in $\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ ausdrücken, so erhalten wir diese Arbeit in der Einheit 1 erg. Drücken wir auf der rechten Seite R mit Hilfe der Einheit 1 cal aus, setzen also $R = 1,98 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1}$, so erhalten wir die rechte Seite in der Einheit 1 cal. Dann ist also $p\Delta V_m \text{ erg} = R\Delta T \text{ cal}$ oder $1 \text{ cal} = p\Delta V_m/R\Delta T \text{ erg}$. Nun folgt aus Gl. (10) (§ 103), wenn, wie vorausgesetzt, der Druck p konstant gehalten wird, $\Delta V_m/\Delta T = V_m/T$, und wir erhalten schließlich

$$1 \text{ cal} = \frac{pV_m}{RT} \text{ erg.} \quad (3)$$

Da bei einem idealen Gase $pV_m/T = \text{const}$ ist, so können wir zur Berechnung irgendwelche zusammengehörigen Werte von p , V_m und T wählen, z. B. diejenigen bei Normalbedingungen, $p = 760 \text{ mm Hg} = 1,0133 \cdot 10^6 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ (§ 70), $T = 273^\circ \text{K}$ ($= 0^\circ \text{C}$), $V_m = 22400 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ (§ 63). Damit ergibt sich dann $1 \text{ cal} = 4,19 \cdot 10^7 \text{ erg}$. Nach den zuverlässigsten Messungen ist.

$$1 \text{ cal} = 4,186 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4,186 \text{ Joule} = 0,427 \text{ mkg}^*$$

(§ 23). Es folgt daraus $1 \text{ Joule} = 0,239 \text{ cal}$ (*elektrisches Wärmeäquivalent*, § 163). Um 1 cal zu erzeugen, z. B. um 1 g Wasser um 1° zu erwärmen, ist also eine

Energie erforderlich, die gleich der kinetischen Energie ist, die ein Körper von der Masse 1 kg beim Durchfallen von 42,7 cm gewinnt.

123. Verwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme. Reibung. Die Möglichkeit der Verwandlung von Arbeit in Wärme ist bereits seit Urzeiten bekannt (Reiben kalter Hände, Erzeugung von Feuer durch Reiben oder Schlagen, Heißlaufen von Achsen usw.). Der Energieverlust eines bewegten Körpers durch Reibung besteht zum überwiegenden Teil in einer Verwandlung seiner kinetischen Energie in Wärme, also der *gleichgerichteten* Bewegung seiner Moleküle in *ungeordnete* Molekularbewegung. Es kann aber auch jede andere Energieform in Wärme übergehen, so elektrische Energie (z. B. in den Glühlampen) und chemische Energie (z. B. bei Verbrennungen).

Eine besonders große Rolle spielt im täglichen Leben die Reibung zwischen festen Flächen. In den meisten Fällen bildet sie eine Quelle höchst unerwünschten und unwirtschaftlichen Verlustes an mechanischer Arbeit. Andererseits aber liefert die Reibung das einfachste Mittel zur Vernichtung kinetischer Energie, wo dies erforderlich, z. B. beim Bremsen von Fahrzeugen. Von unmittelbaren Zerstörungswirkungen — Abnutzung der reibenden Flächen — abgesehen, wird bei der Reibung zwischen festen Flächen die relative Geschwindigkeit der reibenden Körper vermindert und schließlich beseitigt, indem kinetische Energie der Körper als Ganzes in ungeordnete kinetische Energie ihrer Moleküle, also in Wärme verwandelt wird.

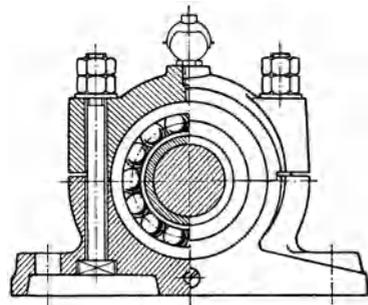


Abb. 244. Kugellager.

Die von der Reibung zwischen festen Flächen herrührende hemmende Kraft wächst mit der Kraft, mit der die Flächen aufeinandergedrückt sind. Jedoch ist es eine Eigentümlichkeit der Reibung zwischen festen Flächen, daß eine *endliche* Kraft notwendig ist, um einen Körper gegen die Wirkung der Reibung in Bewegung zu setzen. Liegt ein Körper auf einer schiefen Ebene, so setzt er sich unter der Wirkung der Schwere nicht in Bewegung, wenn die Neigung der Ebene nicht einen bestimmten, von den Umständen abhängenden Betrag (Reibungswinkel) überschreitet. (Sonst wäre es z. B. unmöglich, auf einem schrägen Wege zu gehen.) Bei kleiner Neigung bleibt er in Ruhe und setzt sich erst in Bewegung, wenn die Neigung diesen Grenzwert überschritten hat. Die charakteristischen Böschungswinkel aufgeschütteten körnigen Materials (Sand, Erde, Steine usw.) und ihre Abhängigkeit von der Art desselben haben zum Teil hier ihren Ursprung. Die Reibung zwischen zwei ebenen Flächen hängt bei gleicher zwischen ihnen wirkender Kraft von der Größe dieser Flächen nicht oder nur wenig ab. Dies erklärt sich so, daß die Flächen sich wegen der unvermeidlichen kleinen Unebenheiten fast immer nur in wenigen Punkten berühren, in denen also der Hauptsitz der Reibungskraft ist. Die Reibung zwischen festen Flächen ist der Kraft, mit der die reibenden Flächen aufeinandergedrückt sind, ungefähr proportional. Sie wird aber von allen möglichen Zufälligkeiten stark beeinflusst, so daß die Aufstellung streng gültiger Gesetze nicht möglich ist.

Man kann die gleitende Reibung durch Anwendung von Schmiermitteln erheblich herabsetzen. Ihre Wirkung besteht darin, daß sie eine unmittelbare Berührung und Reibung der festen Flächen verhindern, und daß sich die Reibung hauptsächlich innerhalb des flüssigen Schmiermittels abspielt, wo sie weit geringer ist (innere Reibung).

Viel kleiner als die gleitende Reibung ist die rollende Reibung, die auftritt, wenn ein Körper auf einem andern rollt. Darauf beruht zum Teil der Nutzen der Räder. In den Achsen der Räder findet allerdings gleitende Reibung statt. Diese aber kann durch geeignete Bauart (Kugellager, Abb. 244) und durch Schmierung stark herabgesetzt werden.

124. Umkehrbare und nicht umkehrbare Vorgänge. Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre. Als *umkehrbar* oder *reversibel* bezeichnet man Naturvorgänge, die in allen Einzelheiten rückgängig gemacht werden können, ohne daß an anderer Stelle in der Natur Veränderungen übrig bleiben. Tatsächlich kommen aber makroskopische Vorgänge dieser Art in der Natur nicht vor, wenngleich auch in vielen Fällen eine sehr große Näherung an die vollständige Umkehrbarkeit besteht. In Wirklichkeit sind alle makroskopischen Naturvorgänge *nicht umkehrbar* oder *irreversibel*. Das heißt, es ist unmöglich, irgendeine Veränderung eines Körpers vollständig wieder rückgängig zu machen, ohne daß irgendwo sonst in der Natur eine Veränderung zurückbleibt.

Gibt man irgendwelchen Körpern von beliebiger Beschaffenheit Gelegenheit, miteinander in Wechselwirkung zu treten, so ändern sich die Zustandsgrößen aller Körper dieses Systems in einem ganz bestimmten Sinne in Richtung auf einen Endzustand, ein *thermisches Gleichgewicht*. Der Ablauf des durch die Wechselwirkungen der Körper eingeleiteten Vorganges erfolgt also von selbst in einem ganz bestimmten Sinne und niemals von selbst im umgekehrten Sinne. Zum Beispiel nehmen zwei anfänglich verschieden warme Körper, wenn sie miteinander in Wechselwirkung treten, stets von selbst die gleiche Temperatur an, indem Wärme von dem wärmeren auf den kälteren Körper übergeht. Niemals tritt das umgekehrte von selbst ein. Soll der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt werden, so ist das nicht möglich, ohne daß anderweitig in der Natur Veränderungen zurückbleiben. Zieht man demnach den Gesamtbereich der Natur in Betracht, so ergibt sich, daß die Natur als Ganzes ständig in einer einseitig gerichteten Veränderung begriffen ist, und daß ein Zustand der Welt, der der Vergangenheit angehört, sich grundsätzlich nie wieder einstellen kann.

Es gelang CLAUSIUS, aus den Zustandsgrößen eines Körpers eine Größe, die *Entropie*, zu definieren, deren Verhalten in unmittelbarer Beziehung zu dieser einseitigen Richtung des Ablaufs der Naturvorgänge steht. Wir wollen die thermodynamische Definition der Entropie hier nicht hinschreiben, da ihre Anwendung doch über den Rahmen dieses Buches hinausgehen würde. Der *zweite Hauptsatz der Wärmelehre* sagt nun aus: *Die Entropie eines abgeschlossenen Systems von Körpern, die miteinander in Wechselwirkung stehen, kann nur zunehmen, niemals abnehmen*. Der Endzustand, dem das Körpersystem zustrebt, ist derjenige, bei dem seine Entropie den größten möglichen Wert hat (CLAUSIUS 1850, KELVIN 1851).

Nach PLANCK kann man den zweiten Hauptsatz auch so aussprechen, daß es *unmöglich ist, eine periodisch wirkende, arbeitleistende Kältemaschine (Perpetuum mobile zweiter Art) zu bauen*. Darunter ist eine Vorrichtung zu verstehen, die nichts weiter täte, als einem Körper, z. B. dem Meerwasser, ständig Wärme zu entziehen und diese restlos in mechanische Arbeit zu verwandeln, was durch den ersten Hauptsatz nicht ausgeschlossen wird.

Wir können hier auf die thermodynamische Betrachtungsweise der Entropie um so eher verzichten, als BOLTZMANN eine überaus anschauliche molekulare Deutung ihres Wesens gegeben hat. Wir betrachten als besonders einfachen Fall ein in ein Gefäß eingeschlossenes ideales Gas. Seine innere, molekulare Energie sei U , aber die Verteilung dieser Energie auf die einzelnen Moleküle, die Richtung der Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle und ihre Verteilung

im Raum sei zunächst noch ganz beliebig. Es sei z. B. noch möglich, daß die Energie U sich auf ganz wenige Moleküle oder auf alle gleichmäßig verteilt, oder daß die Zahl der Moleküle in den einzelnen Raumbereichen merklich verschieden ist. Bei gegebener Energie U , gegebenem Volumen V und gegebener Zahl von Molekülen sind noch unendlich viele Arten möglich, wie sich die Energie auf die Moleküle verteilen kann, wie sich die Geschwindigkeiten der Moleküle auf die verschiedenen Richtungen im Raume verteilen und wie die Moleküle selbst im Volumen V verteilt sein können. Man denke zum Vergleich an die Einwohner des Deutschen Reiches und stelle sich vor, daß es eine ungeheure Zahl von Möglichkeiten gibt, wie etwa das Gesamtvermögen des Volkes auf die einzelnen Deutschen verteilt sein kann, und unendlich viele Möglichkeiten, wie die einzelnen Deutschen im Gebiet des Reiches verteilt sein können.

Wir denken uns jetzt den augenblicklichen Zustand eines Gases etwa dadurch gekennzeichnet, daß wir angeben, daß das erste Molekül die Energie E_1 , das zweite die Energie E_2 usw. hat, wobei die Summe aller dieser Energien gleich der vorgeschriebenen Gesamtenergie U sein muß, daß wir ferner bei jedem Molekül die Richtung seiner Geschwindigkeit angeben und den Ort, an dem es sich im Volumen V befindet. Dadurch ist der augenblickliche Zustand des Gases vollständig gegeben. Man nennt eine solche Zuordnung bestimmter Energiebeträge, Richtungen und Orte im Raum zu jedem Molekül eine *Komplexion*. Wir bekommen aber offenbar einen vollkommen identischen makroskopischen Zustand, wenn wir zwei oder mehrere der Moleküle miteinander in jeder Beziehung vertauschen, sie also ihre Energie, ihre Bewegungsrichtung und ihren Ort vertauschen lassen. Ein bestimmter makroskopischer Zustand kann also durch mehrere Komplexionen, die durch Vertauschung auseinander hervorgehen, verwirklicht werden.

Infolge der Wechselwirkungen der Moleküle, insbesondere ihrer Zusammenstöße, ändert sich nun der Zustand eines Gases, wenn wir seine einzelnen Moleküle individuell betrachten, fortwährend; in jedem Augenblick finden wir eine andere Verteilung der Energie auf die Moleküle, die einzelnen Moleküle ändern fortgesetzt ihre Bewegungsrichtung, ihre Geschwindigkeit und ihren Ort. Wir haben also in jedem Augenblick eine andere Komplexion vor uns. Es läßt sich nun beweisen, daß jede derartige *Komplexion*, die mit den gegebenen Bedingungen (Zahl der Moleküle, Gesamtenergie, Volumen) verträglich ist, genau gleich wahrscheinlich ist, d. h. daß jede von ihnen im Laufe einer ausreichend langen Zeit im Durchschnitt gleich oft vorkommt. Nun haben wir eben gesehen, daß der *gleiche Zustand* durch *mehrere Komplexionen* verwirklicht werden kann. Die einzelnen mit den gegebenen Bedingungen verträglichen *Zustände* sind also nicht gleich wahrscheinlich, sondern es werden im Laufe einer längeren Zeit diejenigen Zustände am häufigsten auftreten, welche durch die größte Zahl von Komplexionen verwirklicht werden. Wenn wir wieder unser grobes Beispiel heranziehen, so sehen wir z. B., daß eine Verteilung des ganzen deutschen Volksvermögens auf die Bevölkerung, derart, daß ein Deutscher das ganze Vermögen und alle anderen nichts besitzen, durch 65 Millionen (Einwohnerzahl) verschiedene Komplexionen verwirklicht werden kann, eine Verteilung aber, bei der je zwei Menschen gerade die Hälfte des Volksvermögens besitzen, durch $\frac{1}{2} \cdot (65 \text{ Millionen})^2 \approx 2100$ Billionen Komplexionen, und andere Verteilungsarten lassen sich noch auf viel mehr Weisen verwirklichen. Wechselt also die Vermögensverteilung fortgesetzt in ganz zufälliger Weise, so wird unter allen möglichen Zuständen derjenige der häufigste sein, der durch die größte Zahl von Komplexionen verwirklicht werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun weiter, daß, wenn es sich um eine sehr große Zahl von Individuen handelt, in unserm Falle die Moleküle eines Gases,

die Zahl der Komplexionen für einen ganz engen Bereich von Zuständen, praktisch für einen ganz bestimmten makroskopischen Zustand, ungeheuer viel größer ist, als für irgendwelche Zustände außerhalb dieses Bereichs. Dieser Zustand ist also der praktisch allein vorkommende. Ein nur ganz wenig von ihm abweichender Zustand tritt nur mit verschwindender Häufigkeit als eine momentane, winzige Zustandsschwankung auf. Dies ist also der Zustand, der sich infolge der Wechselwirkungen zwischen den Molekülen nach kürzester Zeit herstellt, wie auch der Anfangszustand sein mag. Aus solchen Überlegungen läßt sich auch das MAXWELLSche Gesetz über die Molekulargeschwindigkeiten (§ 64) ableiten. Die durch das Gesetz gegebene Geschwindigkeitsverteilung ist diejenige, welche der größten Zahl von Komplexionen entspricht.

Die Zahl der Komplexionen, durch die ein bestimmter Zustand verwirklicht wird, nennt man die *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* W des Zustandes. Sie ist bei großer Individuenzahl auch eine sehr große Zahl. BOLZMANN (1866) zeigte, daß die Entropie S eines Körpers oder eines Systems von Körpern mit dieser thermodynamischen Wahrscheinlichkeit durch die Gleichung

$$S = k \log W \quad (4)$$

zusammenhängt. Hierbei ist $k = 1,3708 \cdot 10^{-16}$ erg · grad⁻¹, und, wie PLANCK gezeigt hat, mit der bereits in § 100 eingeführten BOLZMANNschen Konstanten identisch. (Der log ist der natürliche Logarithmus.) Die Entropie eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist also um so größer, je größer die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W seines Zustandes ist, und der zweite Hauptsatz besagt, daß bei allen in der Natur vorkommenden Vorgängen die Entropie, d. h. die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustandes der an dem Vorgange beteiligten Körper, insgesamt zunimmt, höchstens im Grenzfalle konstant bleibt. Jeder Vorgang verläuft von selbst so, daß unwahrscheinlichere Zustände sich in wahrscheinlichere verwandeln, nie umgekehrt. Dies ist also der eigentliche Kern des zweiten Hauptsatzes.

Zustände, bei denen eine gewisse molekulare Ordnung herrscht, sind in diesem Sinne sehr unwahrscheinlich. Die Vorgänge in der Natur sind also so gerichtet, daß sie bestehende Ordnungen zu zerstören suchen, z. B. die Ansammlung aller Moleküle eines Gases in einer Ecke des verfügbaren Raumes, gleichgerichtete Bewegung vieler Moleküle usw. Der Zustand, dem die Natur zustrebt, ist der Zustand der *idealen Unordnung*. Niemals kommt es in der Natur vor, daß ein ungeordneter Zustand sich in einen solchen größerer Ordnung verwandelt, ohne daß an anderer Stelle in der Natur dafür als Ausgleich der umgekehrte Vorgang eintritt. Besonders wichtige Beispiele für die Gültigkeit des 2. Hauptsatzes sind die Reibungs- und Diffusionsvorgänge und der Ausgleich der Temperaturen zwischen verschiedenen warmen Körpern. In allen diesen Fällen ist der Endzustand stets durch eine größere thermodynamische Wahrscheinlichkeit vor dem Anfangszustand ausgezeichnet. Den Zustand idealer Unordnung finden wir am vollständigsten bei den Gasen verwirklicht. Bei den Flüssigkeiten und noch mehr bei den festen Körpern, insbesondere den Kristallen, sind zwischen den elementaren Bausteinen Bindungskräfte wirksam, die — unbeschadet der strengen Gültigkeit des 2. Hauptsatzes — eine mehr oder weniger weitgehende räumliche Ordnung dieser Bausteine sicherstellen.

Wir wollen das Wesen der Entropie noch an einem einfachen Beispiel erläutern. Ein Gefäß bestehe aus zwei Abteilungen, welche durch eine Öffnung mit einem Hahn verbunden sind. Zunächst sei der Hahn geschlossen. Die eine Abteilung sei vollkommen leer, in der andern befinden sich 1000 Moleküle. Wir öffnen jetzt den Hahn, und die Moleküle verteilen sich infolge ihrer thermischen Bewegung auf beide Abteilungen. Im weiteren Verlauf wird sich jedes einzelne

Molekül gelegentlich durch die Öffnung hindurchbewegen und sich bald in der einen, bald in der andern Abteilung befinden. Da sich die einzelnen Moleküle vollkommen unabhängig voneinander bewegen, so ist es natürlich an sich möglich, daß im Laufe der Zeit einmal wieder zufällig alle Moleküle gleichzeitig in der einen Abteilung sind. Das ist aber ein überaus unwahrscheinliches Ereignis. Es ist schon sehr unwahrscheinlich, daß je wieder ein Zustand eintritt, bei dem die Moleküle nicht mit einigermaßen gleicher Dichte auf beide Abteilungen verteilt sind. In noch viel höherem Maße gilt dies, wenn wir die ungeheuer großen Zahlen von Molekülen in Betracht ziehen, um die es sich in praktischen Fällen immer handelt. Je größer diese Zahl ist, um so geringer wird die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekülsystem je einmal einen Zustand einnimmt, bei dem die Molekülverteilung in den beiden Gefäßabteilungen von der wahrscheinlichsten Verteilung irgendwie merklich abweicht, die dann vorhanden ist, wenn die Moleküle in den Abteilungen im Durchschnitt gleich dicht verteilt sind. Dieses Beispiel zeigt uns an einem einfachen Fall, wie ein Zustand kleinerer Wahrscheinlichkeit von selbst in einen solchen größerer Wahrscheinlichkeit übergeht. Diese Tatsachen haben ja ihr grobes Gegenstück im täglichen Leben. Auch an den uns umgebenden Gegenständen erkennen wir die unter der Wirkung der mit ihnen vorgenommenen zufälligen Hantierungen bestehende Neigung, aus geordneten Zuständen in ungeordnete überzugehen. Der Zustand, in dem sich z. B. die Gegenstände auf einem Schreibtisch nach längerer Arbeit an demselben zu befinden pflegen, ist nicht nur eine äußere Analogie zu den beschriebenen molekularen Vorgängen, sondern ist in ähnlicher Weise wie sie durch Wahrscheinlichkeitsgesetze beherrscht.

Der Unterschied zwischen umkehrbaren und nicht umkehrbaren Zustandsänderungen ist nunmehr deutlich. Da sich bei einem System von Körpern, z. B. den Molekülen eines Gases, stets von selbst der Zustand idealer Unordnung als wahrscheinlichster Zustand herstellt, so ist das Ergebnis jeder Wechselwirkung zwischen den Körpern eines abgeschlossenen Systems stets die Ablösung eines weniger wahrscheinlichen Anfangszustandes durch einen wahrscheinlicheren Endzustand, und dieser Vorgang kann nicht von selbst im umgekehrten Sinne verlaufen. Er kann nur durch einen *äußeren Eingriff* wieder rückgängig gemacht werden, d. h. das Körpersystem muß mit weiteren Körpern in Wechselwirkung gebracht werden, und es kann natürlich durch geeignete Maßnahmen bewirkt werden, daß dadurch das ursprüngliche Körpersystem wieder in seinen alten Zustand versetzt wird. Nunmehr aber handelt es sich gar nicht mehr um das ursprüngliche, sondern um das durch weitere Körper vergrößerte System, das nunmehr als Ganzes wieder aus einem weniger wahrscheinlichen in einen wahrscheinlicheren Zustand übergeht. Dabei müssen also notwendig Veränderungen mit den Körpern vor sich gehen, die wir zwecks Umkehrung des ersten Vorganges neu in das System einbezogen haben. Es bleiben also bei der Umkehrung des Vorganges bezüglich der zuerst betrachteten Körper Änderungen an andern Körpern zurück. Der zuerst betrachtete Vorgang ist nicht umkehrbar. Umkehrbar wäre demnach nur ein Vorgang, bei dem sich die Wahrscheinlichkeit des Zustandes der beteiligten Körper nicht ändert. Bei makroskopischen Zustandsänderungen, die ja gerade der Tendenz zum Übergang in den wahrscheinlichsten Zustand entspringen, kann das nie der Fall sein. Wohl aber können die molekularen Zustandsänderungen in einem abgeschlossenen, im stationären Zustand befindlichen Gase als umkehrbar angesehen werden. Es ist zwar überaus unwahrscheinlich, aber grundsätzlich möglich, daß einmal alle Moleküle für einen Augenblick zufällig in einen Zustand zurückkehren, in dem sie sich früher schon einmal befunden haben, ohne daß darum irgendeine Veränderung an andern Körpern in der Natur einzutreten braucht. Jedoch

bedeutet auch dies bereits eine Idealisierung, da es ein von allen Wechselwirkungen mit der Umwelt abgeschlossenes Gas in Wirklichkeit nicht geben kann.

Betrachten wir das Weltall als ein einziges System von Körpern, die miteinander in ständiger Wechselwirkung stehen, so muß nach dem heutigen Stande unseres Wissens der zweite Hauptsatz auch hierfür gelten. Das Weltall strebt also infolge der Wechselwirkungen der in ihm enthaltenen Körper einem wahrscheinlichsten Endzustand zu, von dem es zum Glück noch überaus weit entfernt ist. Sofern aber der zweite Hauptsatz in Raum und Zeit allgemeine Geltung hat, muß doch schließlich eine immer größere Annäherung an diesen wahrscheinlichsten Zustand erfolgen. Er ist durch ein Schwinden aller Differenzierungen und durch einen Ausgleich aller Temperaturen im Weltraum gekennzeichnet. Diesen Zustand bezeichnet man als den *Wärmetod* der Welt. Denn mit dem Schwinden aller makroskopischen Differenzierungen hören auch alle makroskopischen Vorgänge an unterscheidbaren und beobachtbaren Körpern auf. Ein Mensch, dem es gelänge, sich dem allgemeinen Schicksal zu entziehen, würde nichts mehr erleben als ein unendliches Einerlei, unter dessen Oberfläche für ihn unbeobachtbar, die Bewegung der Moleküle in einem mit Strahlung gleichmäßig erfüllten Raume allein ein ewiges Leben führt. Es fehlt nicht an Versuchen die Voraussage des Wärmetodes zu widerlegen. Doch finden sie in unserem heutigen gesicherten Wissen bisher keine Grundlage.

Hierzu muß allerdings folgendes bemerkt werden. Der zweite Hauptsatz liefert das *einzigste objektive, physikalische Merkmal für eine Richtung des Ablaufs der Zeit* (EDDINGTON). Es wäre auch dann vorhanden, wenn es keine Wesen mit einem subjektiven Bewußtsein von dieser Richtung — also von dem Begriff der „Entwicklung“ — gäbe. In diesem Sinne besteht das einzige objektive Merkmal für ein „früher“ oder „später“ im Betrage der Entropie eines noch nicht im stationären Zustand befindlichen Körpersystems. Von zwei Zeitpunkten ist derjenige der frühere, in dem die Entropie dieses Körpersystems die kleinere ist. Nähert sich aber das Weltall seinem Zustand größter Entropie, also dem Wärmetode, so kann schließlich eine solche Feststellung gar nicht mehr getroffen werden, da keine Entropieänderungen mehr stattfinden. Damit wäre der Begriff der Zeit aus dem Weltall verschwunden, und die Behauptung, daß der Wärmetod „irgendwann“ einmal eintreten wird, entbehrt in einer solchen zeitlosen Welt jeden Sinnes.

125. Temperaturnausgleich. Eine unmittelbare Folge aus dem zweiten Hauptsatz ist der Temperaturnausgleich, der innerhalb eines Körpers eintritt, dessen einzelne Teile sich anfänglich auf verschiedenen Temperaturen befinden. Im Laufe der Zeit stellt sich immer derjenige Zustand her, bei dem in allen Teilen des Körpers die mittlere Molekularenergie, also auch die Temperatur, die gleiche ist. Bei diesem Temperaturnausgleich, den man als *Wärmeleitung* bezeichnet, strömt also Wärmeenergie innerhalb des Körpers von einem Ort zum andern, es besteht in dem Körper ein *Wärmestrom*. Denken wir uns innerhalb des Körpers irgendeinen Querschnitt, der zwei Bereiche von verschiedener Temperatur trennt, so geben die auf der einen Seite des Querschnittes befindlichen Moleküle ständig Energie an die auf der andern Seite befindlichen Moleküle ab, bis die Temperatur auf beiden Seiten die gleiche geworden ist. Bei den Flüssigkeiten und Gasen kann man die verschieden warmen Bereiche auch wie verschiedene Flüssigkeiten oder Gase betrachten, die sich durch einen Diffusionsvorgang vermischen.

Je höher die Temperaturdifferenzen innerhalb eines Körpers sind, um so stärker wird auch der Wärmeausgleich sein. Betrachten wir irgendeinen Punkt innerhalb des Körpers, so wird es unter allen von ihm ausgehenden Richtungen im allgemeinen eine bestimmte Richtung geben, in der die Temperatur sich

mit der Entfernung von dem Punkt am schnellsten ändert. Es sei dies z. B. die x -Richtung. Ändert sich dann die Temperatur beim Fortschreiten um die Strecke dx um den Betrag dT , so heißt dT/dx das *Temperaturgefälle* im betrachteten Punkt. Die Wärmeströmung erfolgt in isotropen Stoffen stets in Richtung des Temperaturgefälles von höherer zu tieferer Temperatur. Denken wir uns innerhalb eines Körpers eine zur Richtung des Temperaturgefälles senkrechte Fläche vom Querschnitt q , so ist die in der Zeit dt durch die Fläche strömende Wärmemenge dQ der Größe q der Fläche, der Zeit dt und dem Temperaturgefälle dT/dx proportional und hängt im übrigen nur von der Stoffart des Körpers ab. Es ist also

$$dQ = -kq \frac{dT}{dx} dt \text{ cal.} \quad (5)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Wärmeströmung in Richtung abnehmender Werte der Temperatur T erfolgt. k ist eine Materialkonstante, die *Wärmeleitfähigkeit* des Körpers. Ihre Einheit ist $1 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$. Tabelle 18 gibt einige Zahlenwerte. Die Wärmeleitfähigkeit ist gleich derjenigen Wärmemenge, die in 1 sec durch eine ebene Platte von 1 cm Dicke und 1 cm^2 Querschnitt fließt, wenn zwischen den beiden Plattenoberflächen eine Temperaturdifferenz von 1° aufrechterhalten wird. Die in der Technik gebräuchliche *Wärmeleitzahl* ist entsprechend definiert, nur tritt an die Stelle des cm das m, an die Stelle der sec die Stunde, an die Stelle der cal die kcal.

Gl. (5) hat eine formale Ähnlichkeit mit dem OHMSchen Gesetz für elektrische Ströme (§ 152). Besteht längs einer Strecke l ein gleichmäßiges Temperaturgefälle $dT/dx = (T_2 - T_1)/l$, wobei T_2 und $T_1 < T_2$ die Temperaturen an den Enden der Strecke l sind, so folgt aus Gl. (5)

$$\frac{dQ}{dt} = -k \frac{q}{l} (T_2 - T_1). \quad (6)$$

Bei konstanter Wärmeströmung ist dQ/dt die in 1 sec durch den Querschnitt q strömende Wärmemenge, der *Wärmestrom* durch q . Man kann nun folgende Größen miteinander in formale Parallele setzen: Die Wärmemenge mit einer Elektrizitätsmenge, also den Wärmestrom mit einem elektrischen Strom i , die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ mit einer elektrischen Potentialdifferenz (Spannung) U und die Wärmeleitfähigkeit k mit der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma = 1/\rho$. Dann entspricht der Faktor kq/l auch formal dem reziproken Wert des elektrischen Widerstandes R eines Leiters von der Länge l und dem Querschnitt q . Aus diesem Grunde bezeichnet man l/kq auch als den *Wärmewiderstand* und seine Einheit als 1 Wärmeohm .

Die Verhältnisse liegen besonders einfach, wenn in einem Körper konstante Temperaturdifferenzen künstlich aufrecht erhalten werden. Wir wollen einen homogenen Stab von überall gleichem Querschnitt betrachten, dessen Enden auf konstanten, verschieden hohen Temperaturen gehalten werden. Dann findet ein dauernder Strom von Wärme durch den Stab statt. Da nirgends im Stabe eine Temperaturänderung stattfindet, die in jedem Volumelement enthaltene Wärmemenge also konstant bleibt, so muß durch jeden Querschnitt des Stabes in gleichen Zeiten dt die gleiche Wärmemenge dQ fließen. Dann folgt aus

Tabelle 18. Wärmeleitfähigkeiten einiger Stoffe.

	cal · grad ⁻¹ cm ⁻¹ sec ⁻¹
Aluminium . . .	0,48
Blei	0,08
Eisen	0,14—0,17
Kupfer	0,90
Silber	1,01
Schiefer	0,00081
Holz	0,0003—0,0009
Glas	0,0014—0,0018
Wasser	0,0014
Luft	0,000057
Helium	0,00034
Wasserstoff . . .	0,00032

Gl. (5) $dT/dx = \text{const.}$ Sind T_2 und T_1 die Endtemperaturen des Stabes und l seine Länge, so ergibt sich für den Abstand x vom wärmeren Ende die Temperatur $T = T_2 - (T_2 - T_1)x/l$. Die Temperatur fällt also im Stabe linear ab (Abb. 245, Kurve a). Dabei ist vorausgesetzt, daß der Stab gegen Wärmeabgabe nach den Seiten geschützt ist. Ist das nicht der Fall, so sinkt die Temperatur erst schneller, dann langsamer als im ersten Fall (Abb. 245, Kurve b). Man kann diesen Temperaturverlauf etwa vergleichen mit dem Druckverlauf in einem seitlich undichten, wasserdurchströmten Rohr.

Die Theorie ergibt, daß die Wärmeleitfähigkeit k der idealen Gase ihrem Reibungskoeffizienten η proportional ist,

$$k = \text{const} \cdot \eta \quad (7)$$

(§ 76). Ebenso wie η ist k bei gegebener Temperatur von der Dichte des Gases unabhängig. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Art des Gases ab. Die Proportionalität von k und η ist leicht verständlich. Es handelt sich bei der Wärmeleitung wie bei der inneren Reibung in Gasen um Diffusionsvorgänge.

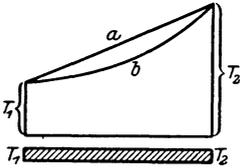


Abb. 245. Zur Wärmeleitung in einem Stabe.

Die Unabhängigkeit von der Dichte besteht aber nur dann, wenn die Abmessungen des dem Gase zur Verfügung stehenden Raumes beträchtlich größer als die mittlere freie Weglänge sind. Ist das nicht der Fall, so nimmt die Wärmeleitfähigkeit mit der Dichte ab. Es ist klar, daß sie mit der Annäherung an ein ideales Vakuum überhaupt verschwinden muß. Die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Dichte bei sehr geringer Dichte bildet ein Mittel, um sehr kleine Gasdrucke zu messen.

Zwischenräume, die auf einen niedrigen Druck evakuiert sind, liefern einen guten Schutz gegen einen Temperatúrausgleich, wie z. B. bei den WEINHOLDSchen oder DEWAR-Gefäßen (Thermosflaschen). Wie die innere Reibung, so nimmt auch die Wärmeleitfähigkeit der Gase mit der Temperatur zu.

In den meisten Kristallen — außer denen des kubischen Systems — ist die Wärmeleitfähigkeit von der Richtung des Wärmestroms abhängig. Holz leitet besser in der Faserrichtung als senkrecht dazu. Sehr schlechte Wärmeleiter sind poröse Stoffe. Sie enthalten viel Luft, und diese ist, wie alle Gase, ein äußerst schlechter Wärmeleiter. Unter den Gasen ist der Wasserstoff wegen der großen Geschwindigkeit seiner Moleküle ein besonders guter Wärmeleiter.

Auf dem geringen Wärmeleitvermögen des Wasserdampfs beruht das bekannte LEIDENFROST-Phänomen. Ein auf eine über 100°C erwärmte Metallplatte gebrachter Wassertropfen schwebt längere Zeit dicht über ihr, anstatt sofort zu verdampfen. Denn er wird zunächst durch ein sich sofort bildendes Polster von Wasserdampf gegen Wärmezufuhr von der Platte her weitgehend geschützt. Er erwärmt sich nur langsam auf 100° und zerspritzt plötzlich erst in dem Augenblick, wo dies erreicht ist.

Bei den Flüssigkeiten und Gasen gibt es noch eine zweite Art des Temperatúrausgleichs, die von der Wärmeleitung durchaus verschieden und sehr viel wirksamer ist, den *Temperatúrausgleich durch Strömung*, meist *Konvektion* genannt. Diese beruht darauf, daß in einer Flüssigkeit oder einem Gase, in dem Temperaturunterschiede bestehen, auch Druckunterschiede auftreten, da die Temperaturunterschiede auch Dichteunterschiede hervorrufen und das Gleichgewicht stören. Infolgedessen setzen sich ganze Bereiche der Flüssigkeit oder des Gases in Bewegung. Das großartigste irdische Beispiel für Konvektionen bilden die *Winde*, bei denen sich infolge von Druckunterschieden, die durch Temperatureinflüsse hervorgerufen werden, gewaltige Luftkörper in Bewegung setzen. Auch in den Ozeanen finden solche Konvektionen in großem Ausmaß

statt. Ein Beispiel hierfür ist der Golfstrom. In den Zentralheizungen strömt das im Kessel erhitzte Wasser in die Höhe, kühlt sich in den Heizkörpern ab und sinkt dann wieder in den Kessel zurück. Konvektionsströme von gigantischem Ausmaß finden zweifellos innerhalb der Sonne und der Fixsterne statt. Hierher gehören die Sonnenflecken, die ungeheure Wirbel an der Sonnenoberfläche sind.

Die wärmende Wirkung der Kleidung beruht darauf, daß sie eine Konvektion der den Körper umgebenden Luft weitgehend verhindert. Die schlechte Wärmeleitfähigkeit von Stoffen und Pelzen spielt dabei nur eine sehr geringe Rolle.

Eine dritte Art des Temperatúrausgleichs ist diejenige durch *Strahlung*. Diese werden wir in § 318 behandeln.

126. Der dritte Hauptsatz der Wärmelehre. Zu den beiden ersten Hauptsätzen ist später der von NERNST aufgestellte *dritte Hauptsatz*, das NERNSTsche *Wärmeththeorem*, getreten. Es sagt aus, daß sich die Entropie aller Körper bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt dem Betrage Null beliebig nähert. Die Folgerungen aus diesem Satz, der seine Begründung durch die Quantentheorie findet, sind besonders für die Theorie der chemischen Reaktionen wichtig. Wir erwähnen als eine weitere Folgerung nur, daß die spezifische Wärme der Stoffe bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt sinkt und gegen Null konvergiert. Aus diesem Grunde kann der absolute Nullpunkt nur asymptotisch, niemals streng erreicht werden. Denn da ein Körper, der sich genau auf dieser Temperatur befände, die spezifische Wärme Null hätte, so genügte die Zufuhr einer beliebig kleinen Wärmemenge, um seine Temperatur um einen endlichen Betrag zu erhöhen. Da nun der Körper notwendig mit wärmeren Körpern in Berührung sein muß, so läßt sich eine solche Wärmezufuhr nie verhindern, und es ist deshalb auch unmöglich, dem Körper den letzten Rest von Wärme vollständig zu entziehen.

127. CARNOTScher Kreisprozeß. Wir wenden uns jetzt der *Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit* zu. Für diese ist ein von CARNOT erdachtes Gedankenexperiment wichtig, der *CARNOTSche Kreisprozeß* (1824). In einen Behälter von veränderlichem Volumen denken wir uns 1 g eines idealen Gases eingeschlossen, welches zunächst die Temperatur T_1 und das Volumen V_1 habe. Mit diesem Gase denken wir uns nacheinander folgende Veränderungen vorgenommen:

1. Das Gas wird adiabatisch (§ 108) komprimiert, bis es die höhere Temperatur T_2 angenommen hat. Sein Volumen sei jetzt V_2 .

2. Das Gas wird mit einem sehr großen Wärmespeicher von der gleichen Temperatur T_2 in Verbindung gebracht und nunmehr bei konstanter Temperatur (isotherm) auf das Volumen V'_2 ausgedehnt. Da es dabei äußere Arbeit leistet, so muß ihm zur Konstanthaltung seiner Temperatur eine Wärmemenge Q_2 aus dem Speicher von der Temperatur T_2 zugeführt werden.

3. Das Gas wird von dem Wärmespeicher getrennt und nunmehr adiabatisch ausgedehnt, bis es durch Abkühlung wieder seine alte Temperatur T_1 erhalten hat. Sein Volumen sei jetzt V'_1 . (V'_1 ist größer als V_1).

4. Nunmehr wird das Gas mit einem zweiten sehr großen Wärmespeicher von der Temperatur T_1 , seiner Ausgangstemperatur, verbunden und isotherm auf sein ursprüngliches Volumen V_1 zurückgeführt, also komprimiert. Dabei gibt es eine Wärmemenge Q_1 an den kälteren Wärmespeicher von den Temperatur T_1 ab.

Nach Vollendung dieses Kreisprozesses ist das Gas wieder vollkommen in seinem Anfangszustand. Dagegen hat der eine Wärmespeicher die Wärmemenge Q_2 abgegeben, der andere die Wärmemenge Q_1 aufgenommen. Ferner ist bei jedem der vier Teilvorgänge Arbeit geleistet worden.

Bei jedem einzelnen Teilvorgang leistet das Gas eine Arbeit $\int p dV$, welche im Falle 2 und 3 positiv, in den Fällen 1 und 4 negativ ist. Die einzelnen Phasen des Kreisprozesses sind in Abb. 246 dargestellt.

Bezeichnen wir mit A die insgesamt vom Gase geleistete Arbeit, so ergibt sich diese, da sie für jeden Teilvorgang durch das Integral $\int p dV$ dargestellt ist, zu

$$A = \int_{V_1, T_1}^{V_2, T_2} p dV + \int_{V_2, T_2}^{V_2', T_2} p dV + \int_{V_2', T_2}^{V_1', T_1} p dV + \int_{V_1', T_1}^{V_1, T_1} p dV. \quad (8)$$

Dabei verläuft also der erste und dritte Vorgang adiabatisch ($dQ = 0$), der zweite und vierte isotherm. Für erstere beide gilt daher $p dV = -c_v dT$ [§ 108, Gl. (22), mit $m = 1 \text{ g}$]. Bei den beiden anderen können wir nach § 103 $p = \frac{RT}{MV}$ setzen (da es sich um 1 g handelt, so ist $V = V_s$), so daß wir erhalten

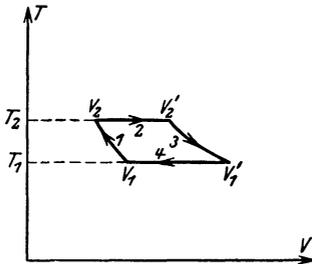


Abb. 246. CARNOTScher Kreisprozeß.

$$A = -c_v \int_{T_1}^{T_2} dT + \frac{R}{M} \int_{V_2}^{V_2'} T_2 \frac{dV}{V} - c_v \int_{T_2}^{T_1} dT + \frac{R}{M} \int_{V_1'}^{V_1} T_1 \frac{dV}{V}.$$

Das erste und dritte Integral unterscheiden sich lediglich durch die Vertauschung der Integrationsgrenzen, sie sind also entgegengesetzt gleich und heben sich gegenseitig auf. Die Ausführung der beiden anderen Integrale ergibt

$$A = \frac{R}{M} \left[T_2 \log \frac{V_2'}{V_2} + T_1 \log \frac{V_1'}{V_1} \right]. \quad (9)$$

Da nun die Vorgänge, durch die der Zustand (V_2, T_2) aus (V_1, T_1) und der Zustand (V_1', T_1) aus (V_2', T_2) entstanden ist, adiabatisch verliefen, so bestehen nach Gl. (24), § 108, die Beziehungen

$$T_2 V_2^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1} \quad \text{und} \quad T_2 V_2'^{\kappa-1} = T_1 V_1'^{\kappa-1},$$

($\kappa = c_p/c_v$), aus denen ohne weiteres folgt $V_2'/V_2 = V_1'/V_1$, so daß

$$A = \frac{R}{M} \log \frac{V_1'}{V_1} \cdot (T_2 - T_1). \quad (10)$$

Da $T_2 > T_1$ und $V_1' > V_1$, so ist dieser Ausdruck positiv, das Gas hat äußere Arbeit geleistet, und zwar auf Kosten der von dem wärmeren Speicher an das Gas abgegebenen Wärme Q_2 . Diese Wärme ist aber nicht vollständig in Arbeit verwandelt worden, sondern nur der Anteil $Q_2 - Q_1$, denn das Gas hat ja im vierten Teilvorgang die Wärmemenge Q_1 an den kälteren Speicher abgegeben.

Die Einzelbeträge Q_1 und Q_2 lassen sich leicht berechnen. Da beim zweiten Teilvorgang keine Erwärmung des Gases stattgefunden hat, so findet sich die zugeführte Wärme restlos in der geleisteten äußeren Arbeit $\int_{V_1, T_1}^{V_2', T_2} p dV$ wieder, und

diese beträgt, wie oben bereits bewiesen, $\frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2}$, so daß $Q_2 = \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2} = \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_1'}{V_1}$. Und entsprechend ist Q_1 , die an den zweiten Speicher abgegebene

Wärme, $Q_1 = \frac{R}{M} T_1 \log \frac{V_1'}{V_1}$. Aus diesen Beziehungen ergibt sich wieder leicht die Gleichung $A = Q_2 - Q_1$, welche nichts anderes bedeutet als die Gültigkeit des Energieprinzips. Denn die vom Gase geleistete mechanische Arbeit A muß sich, da sonst Energie weder zu- noch abgeführt wurde, darstellen als der Überschuß der vom Gase aufgenommenen Wärme über die von ihm wieder abgegebene Wärme.

Wir sehen also, daß, um durch einen solchen Kreisprozeß die mechanische Arbeit A zu gewinnen, die Wärmeenergie $Q_2 > A$ aufgewendet werden muß,

und daß mit der Gewinnung mechanischer Arbeit der Übergang eines Teils Q_1 dieser Wärmeenergie von einem Wärmespeicher der höheren Temperatur T_2 auf einen anderen von der tieferen Temperatur T_1 verbunden ist. Der mechanische Wirkungsgrad η des Prozesses ist also kleiner als 1, nämlich

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (11)$$

Der Wirkungsgrad η hängt also lediglich von der Temperatur der beiden Wärmespeicher ab, er ist unabhängig von den Einzelheiten der gedachten Teilvorgänge, die zur Gewinnung der mechanischen Arbeit A führten. Das Ergebnis gilt zunächst für ideale Gase. Der Wirkungsgrad kann auf keine Weise verbessert, nur durch mangelhafte Versuchsbedingungen — Reibung, Wärmeabgabe an andere Körper der Umgebung usw. — verschlechtert werden.

Bisher liegt den Überlegungen, außer den Gesetzen der idealen Gase, nur der erste Hauptsatz zugrunde. Unter Heranziehung des zweiten Hauptsatzes kann man aber nachweisen, daß die durch Gl. (11) ausgesprochene Gesetzmäßigkeit auch dann gilt, wenn der „arbeitende“ Stoff kein ideales Gas, sondern irgendein wirklicher Stoff ist. Wir kommen damit zu der wichtigen Folgerung, daß eine Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit auf dem Wege eines Kreisprozesses einen beschränkten mechanischen Wirkungsgrad hat. Wird bei einem solchen mechanische Arbeit auf Kosten der Wärmeenergie eines Wärmespeichers geleistet, so geht notwendig ein Übergang einer bestimmten Wärmemenge von dem wärmeren Speicher auf einen kälteren daneben her. Aus Gl. (11) erkennt man, daß der Wirkungsgrad eines solchen Vorganges um so größer ist, je kleiner das Verhältnis T_1/T_2 der Temperaturen der beiden Wärmespeicher, je höher also die Temperatur des wärmeren und je niedriger die des kälteren Speichers ist. Nur im idealen Grenzfall $T_1 = 0^\circ \text{K}$ wird der mechanische Wirkungsgrad gleich 1 oder gleich 100%. Dieser Fall kann aber nie auch nur annähernd praktisch verwirklicht werden.

Man beachte bei den vorstehenden Überlegungen, daß es sich um die Gewinnung von Arbeit mit Hilfe eines *Kreisprozesses* handelt, also eines Vorganges, bei dem die benutzte Vorrichtung — das Gefäß nebst dem eingeschlossenen Gase — sich am Ende des Vorganges wieder im gleichen Zustand befindet wie am Anfang, und bei dem die einzige Veränderung darin besteht, daß der wärmere Speicher die Wärmemenge Q_2 verloren, der kältere die Wärmemenge Q_1 aufgenommen hat. Der begrenzte Wirkungsgrad, den wir berechnet haben, ist eine Eigentümlichkeit eines solchen Kreisprozesses. Lassen wir aber die Forderung der Wiederkehr des benutzten Systems in den Anfangszustand fallen, so ist auch eine restlose Verwandlung von Wärme in Arbeit mittels eines idealen Gases wenigstens theoretisch möglich. Ein Beispiel hierfür liefert der zweite Teilvorgang des CARNOTSchen Kreisprozesses, bei dem die Temperatur des Gases konstant gehalten wird und die zugeführte Wärmemenge Q_2 restlos zur Leistung der Arbeit $\int p dV$ dient, also zur Fortbewegung des den Gasraum schließenden Stempels gegen eine äußere Kraft, die dem Gasdruck das Gleichgewicht hält.

Der CARNOTSche Kreisprozeß ist nur ein Sonderfall unter unendlich vielen, die mittels zweier Wärmespeicher von verschiedener Temperatur vorgenommen werden können. Ihr Wirkungsgrad ist jedoch immer durch Gl. (11) gegeben. Eine besondere Bedeutung hat noch der CLAPEYRONsche *Kreisprozeß*, bei dem an die Stelle der beiden adiabatischen Teilvorgänge solche bei konstantem Volumen treten. Auf diesen Kreisprozeß gründet sich die heutige gesetzliche *thermodynamische Temperaturskala*.

128. **Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit.** Für die praktische Verwandlung von Wärme in Arbeit kommen nur solche Vorrichtungen in Frage,

welche periodisch arbeiten, in denen also Kreisprozesse vor sich gehen. Eine praktisch verwendbare Maschine, welche sich im Laufe der Zeit dauernd verändert, also nicht periodisch wieder in ihren Anfangszustand zurückkehrt, ist nicht gut denkbar. Für die Wärmekraftmaschinen gilt daher die Gl. (11), und zwar nur als eine obere, tatsächlich nie erreichbare Grenze für den Wirkungsgrad. Der Arbeitsbetrag, der in der gewünschten Form gewonnen wird, bleibt stets unter dieser Grenze. Ein oft nicht unerheblicher Teil wird durch Reibung der Maschinenteile aufgezehrt. Ferner wird nicht nur Wärme an den kälteren Wärmespeicher abgegeben, sondern auch an andere, wärmere Teile der Umgebung, wodurch sich der Wirkungsgrad weiter verschlechtert.

Jedenfalls ergibt sich aber aus Gl. (11) die Forderung, daß man die Temperaturen T_2 und T_1 , zwischen denen die Maschine arbeitet, so wählen muß, daß T_2 möglichst groß, T_1 möglichst klein ist. Bezüglich T_1 sind wir aus praktischen Gründen an die gewöhnlichen Temperaturen unserer Umgebung gebunden (Kühlung durch Wasser oder Luft). Das Ziel bleibt daher, die Temperatur T_2 möglichst hoch zu machen.

Bei den *Dampfmaschinen* ist der Wärmespeicher von höherer Temperatur (T_2) der Kessel, in dem aus siedendem Wasser Dampf erzeugt wird. Er hat eine Temperatur von mehr als 100° , da man zur Erhöhung des Wirkungsgrades das Wasser stets unter erhöhtem Druck sieden läßt (§ 113). Der kältere Wärmespeicher ist der Kondensator, ein wassergekühlter Behälter, in dem sich der Dampf nach erfolgter Arbeitsleistung unter Abgabe seiner Verdampfungswärme kondensiert.

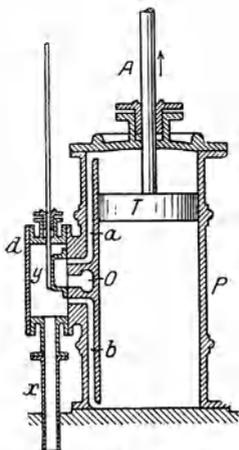


Abb. 247. Zylinder der Kolbendampfmaschine.

Der Hauptteil der von JAMES WATT (Vorläufer u. a. PAPIN) erfundenen *Kolbendampfmaschine* ist der Zylinder P (Abb. 247), in dem sich ein dicht schließender Kolben T mit der Kolbenstange A hin- und herbewegen kann. Diese Hin- und Herbewegung wird dadurch

hervorgerufen, daß der vom Kessel kommende Dampf bald von oben, bald von unten her gegen den Kolben drückt. In der Abb. 247 ist der Kolben noch in Aufwärtsbewegung begriffen gedacht, der Dampf strömt von dem Kessel her durch das Rohr x , den Schieberkasten d und das Rohr b in den unteren Teil des Zylinders. Der obere Teil des Zylinders, der sich bei der Abwärtsbewegung des Kolbens mit Dampf gefüllt hatte, ist aber durch das Rohr a und das im Querschnitt gezeichnete Rohr O mit dem Kondensator verbunden. Infolgedessen besteht in dem oberen Zylinderteil ein sehr niedriger Druck, der Kolben wird durch den Druck im unteren Teil nach oben getrieben. Durch die Bewegung des Kolbens wird die Steuerung betätigt. Diese bewirkt, daß sich, sobald der Kolben das obere Ende des Zylinders erreicht hat, der Schieber y derart nach unten verschiebt, daß nunmehr eine Verbindung der unteren Zylinderhälfte durch b mit O und dem Kondensator und eine Verbindung der oberen Hälfte durch a und x mit dem Kessel hergestellt wird. Infolgedessen kehrt sich die Bewegung nunmehr um, und das Spiel wiederholt sich stets von neuem. Die Kolbenstange überträgt die geleistete mechanische Arbeit. Dabei wird fast stets ihre hin- und hergehende Bewegung zunächst in drehende Bewegung umgesetzt. Bei manchen Dampfmaschinen strömt der Dampf nicht sofort in den Kondensator, sondern erst in einen zweiten, manchmal sogar noch in einen dritten Zylinder, wobei sein Druck ständig abnimmt. Man unterscheidet dann Hochdruck- und Niederdruckzylinder. Eine solche Maschine heißt Verbundmaschine.

Die *Dampf turbinen* haben gegenüber der Kolbendampfmaschine den Vorteil, daß sie keine hin- und hergehende, sondern sofort eine drehende Bewegung hervorrufen. Bei einer Dampfturbine strömt der Dampf gegen die sehr zahlreichen Schaufeln eines Rades (Abb. 248). Der Raum, in den der Dampf vom Rade abströmt, steht wieder mit einem Kondensator in Verbindung, so daß in ihm ein sehr niedriger Druck herrscht. So wird das Rad durch den einseitigen Druck des dagegen strömenden Dampfes (genauer: durch die bei der Änderung der Strömungsrichtung des Dampfes übertragene Bewegungsgröße) in Drehung versetzt.

Die Drehzahl der Dampfturbinen ist sehr groß. Bei der Verwendung als Schiffsmaschinen muß man zwischen Schiffswelle und Turbine eine Übersetzung einschalten, um eine langsamere Drehung der Welle zu erzielen, da die Drehzahl einer Schiffsschraube im Wasser einen bestimmten Betrag nicht überschreiten darf. Für den Antrieb von Dynamomaschinen aber ist die hohe Drehzahl ein besonderer Vorteil.

Man ist bei Dampfmaschinen schon bis zu Kesseldrücken von 200 at gegangen. Die Siedetemperatur des Wassers beträgt dann $265^{\circ}\text{C} = 538^{\circ}\text{abs.}$ Rechnet man die Temperatur des Kondensators sehr günstig zu 40° , also 313°abs. , so ergibt sich nach § 127, Gl. (11), als günstigster theoretischer Wirkungsgrad einer Dampfmaschine $235/538 = 0,44 = 44\%$. Doch wird ein so großer Wirkungsgrad tatsächlich nie erreicht. Es geht also bei einer Dampfmaschine der weitaus größte Teil der zugeführten Wärmeenergie an den Kondensator über. Neuerdings wird diese Wärme (Abwärme) bei größeren Dampfmaschinenanlagen für Heizungszwecke nutzbar gemacht (Fernheizwerke).

Sehr viel günstiger ist der Wirkungsgrad der *Explosionsmotore*. Sie beruhen auf der Bewegung eines Kolbens in einem Zylinder durch die Verbrennungsgase des mit Luft gemischten, verdampften Brennstoffs, die sich infolge der bei der Explosion auftretenden großen positiven Wärmetönung (§ 129) sehr stark auszudehnen suchen. Arbeit wird nur bei der einen Bewegungsrichtung des Kolbens geleistet, und zwar bei den Zweitaktmotoren einmal bei jedem Hin- und Hergang, bei den Viertaktmotoren einmal bei jedem zweiten Hin- und Hergang. In den dazwischenliegenden Bewegungsphasen läuft der Motor infolge der Trägheit der mit ihm verbundenen Teile, meist auch eines Schwungrads, weiter.

Die Temperaturen, zwischen denen ein Explosionsmotor arbeitet — nämlich die Temperatur der Verbrennungsgase einerseits und der Außenluft oder des Kühlwassers andererseits — liegen viel weiter auseinander als bei der Dampfmaschine. Daher ist der theoretische und der praktische Wirkungsgrad dieser Motore viel größer als der der Dampfmaschinen. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Indem man das Prinzip der Wärme kraftmaschinen gewissermaßen umkehrt, kommt man zu den *Kältemaschinen*. Es sind dies Maschinen, in denen auch Wärme in Arbeit verwandelt wird, aber nicht mit der Absicht auf die Gewinnung

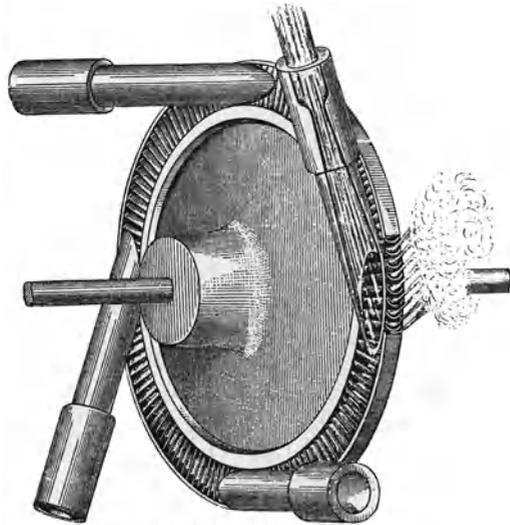


Abb. 248. Dampfturbine.

der Arbeit, sondern auf die Abkühlung eines Körpers, auf Kosten von dessen Wärmeenergie die Arbeit gewonnen wird. Solche Maschinen dienen z. B. zur Eisgewinnung. Auch die LINDESche Luftverflüssigungsmaschine (§ 115) ist ein Beispiel einer solchen Maschine.

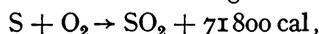
129. Wärmequellen. Thermochemie. Die wichtigste Quelle thermischer Energie ist für uns die Sonne. Sie strahlt in 1 sec etwa 10^{26} cal aus. Dies entspricht einer Leistung von rund $0,4 \cdot 10^{22}$ Kilowatt. Hätte die Erde keine Atmosphäre, so würden bei senkrechtem Einfall der Sonnenstrahlung auf 1 cm^2 der Erdoberfläche etwa $1,94 \text{ cal} \cdot \text{min}^{-1}$ fallen (*Solarkonstante*). Wegen der Absorption der Sonnenstrahlung in der Atmosphäre ist der wirklich auf die Erdoberfläche gelangende Betrag an Strahlung jedoch geringer.

Technisch ist heute noch immer die Wärmeerzeugung aus Kohle am wichtigsten. Daneben gewinnt die Wärmeerzeugung auf elektrischem Wege, möglichst unter Ausnutzung der Wasserkräfte, leider durch hohe Kosten behindert, allmählich an Bedeutung. Alle diese Arten der Wärmeerzeugung gehen letzten Endes auf die Sonnenenergie zurück, denn die in den Kohlen aufgespeicherte Energie ist von den Pflanzen, aus denen die Kohle entstanden ist, aus der Sonnenstrahlung aufgenommen worden, und die Wasserkräfte verdanken ihren Ursprung ebenfalls der Sonnenstrahlung, welche diejenigen atmosphärischen Vorgänge hervorruft, die die Hebung des Wassers auf ein höheres Niveau bewirken.

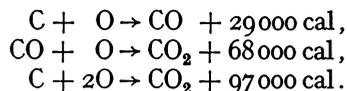
Die Wärmeerzeugung durch Verbrennung von Kohle ist nur ein Beispiel für viele andere chemische Vorgänge, bei denen Wärme frei wird. Man unterscheidet *endotherme* und *exotherme chemische Vorgänge*. Ein endothermer Vorgang ist ein solcher, der nur vor sich geht, wenn den beteiligten Stoffen von außen Wärme zugeführt wird, also nur unter Aufnahme von Wärme. Bei den exothermen Vorgängen dagegen wird nach außen hin Wärme abgegeben. Hierher gehören die gewöhnlichen Verbrennungen mit dem Sauerstoff der Luft.

Ob ein Vorgang endotherm oder exotherm verläuft, richtet sich danach, ob die Bindungsenergie der Atome in den Molekülen, welche bei dem chemischen Vorgang neu gebildet werden, größer (endotherme Vorgänge) oder kleiner (exotherme Vorgänge) ist als diejenige der Atome in den Molekülen, aus denen sie entstanden.

Man kann den Wärmeumsatz bei einem chemischen Vorgang in Gleichungsform darstellen. Z. B. bedeutet die Gleichung



daß bei der chemischen Verbindung von 1 Grammatom Schwefel mit 2 Grammatomen (1 Mol) Sauerstoffgas zu Schwefeldioxyd 71800 cal frei werden. Diese Wärmemenge heißt die *Wärmetönung* des betreffenden chemischen Vorganges. Sie ist bei exothermen Vorgängen positiv, bei endothermen negativ und unabhängig von dem Wege, auf dem eine chemische Verbindung aus ihren Bestandteilen zustande kommt. So ist z. B.



Man sieht, daß man die letzte Gleichung auch durch Addition der beiden ersten erhalten kann. Es ist also, wie es auch das Energieprinzip (1. Hauptsatz) verlangt, energetisch gleichgültig, ob man zunächst aus Kohlenstoff und Sauerstoff Kohlenoxyd und dann aus diesem und Sauerstoff Kohlendioxyd herstellt oder gleich aus Kohlenstoff und Sauerstoff Kohlendioxyd.

Alle von selbst ablaufenden chemischen Umwandlungen sind nicht umkehrbar, denn sie verlaufen stets in dem Sinne, daß die Entropie der beteiligten Stoffe zunimmt. Die drei Hauptsätze der Wärmetheorie bilden die wichtigsten Grundlagen der theoretischen Chemie.

Viertes Kapitel. Elektrostatik.

Die *Elektrostatik* ist die Lehre von den zwischen ruhenden elektrischen Ladungen wirkenden Kräften und von den durch diese Kräfte bedingten Gleichgewichtszuständen.

Zur Elektrizitätserzeugung bedienen wir uns bei den in diesem Kapitel zu besprechenden Versuchen meist mit Vorteil des bekannten Reibungsverfahrens, von dem in § 164 genauer die Rede sein wird.

130. Positive und negative Elektrizität. Elektrizitätsmenge. An einem gut trockenen Seidenfaden sei ein leichter Körper (Papierzylinder, Holundermarkkugel od. dgl.) aufgehängt (Abb. 249). Eine Stange aus Hartgummi oder Schwefel werde mit einem weichen Fell, am besten Katzenfell, gerieben und dem aufgehängten Körper genähert. Man beobachtet alsdann folgendes:

1. Der Körper wird von der Hartgummistange angezogen.

2. Nachdem der Körper die Hartgummistange berührt hat, vor allem aber, wenn man den Körper mit der Stange bestrichen hat, verwandelt sich die Anziehung in eine Abstoßung.

Man überstreiche nunmehr den Körper mit der Hand (Entladung) und wiederhole den Versuch mit einer Glasstange, die vorher mit einem Seidenlappen oder einem amalgamierten Lederlappen gerieben wurde. Man beobachtet wieder die gleichen Erscheinungen wie mit der geriebenen Hartgummistange.

3. Der mit der geriebenen Glasstange bestrichene Körper wird von der Glasstange abgestoßen, von der geriebenen Hartgummistange aber angezogen. Wird aber der Körper mit der geriebenen Hartgummistange bestrichen, so ist das Umgekehrte der Fall.

Den Zustand, in den die Stangen durch das Reiben versetzt werden, bezeichnet man bekanntlich als den elektrischen Zustand, das an den geriebenen Körpern auftretende Etwas als *Elektrizität*. (Der Name stammt von GILBERT, 1600.) Von ihrem Wesen wird später die Rede sein. Hier sei nur so viel gesagt, daß wir sie wie eine *Substanz* betrachten können. Stellt man den gleichen Versuch mit anderen geriebenen Stoffen an, so zeigt sich, sofern auf die angegebene Weise überhaupt eine Wirkung erzielt wird, daß die Elektrizität sich entweder wie die des geriebenen Glases oder wie die des geriebenen Hartgummis verhält. Ein Drittes gibt es nicht.

Man bestreiche den aufgehängten Körper erst mit der geriebenen Hartgummistange, dann, ohne vorher wieder zu entladen, mit der geriebenen Glasstange oder umgekehrt. Man beobachtet,

4. daß sich die Wirkungen der Glas- und der Hartgummielektrizität gegenseitig aufheben können. Durch das Hinzutreten der einen Art von Elektrizität wird die Wirkung der anderen herabgesetzt, aufgehoben oder in ihr Gegenteil verwandelt, je nach dem Mengenverhältnis, in dem die beiden Elektrizitäten auf den Körper übertragen wurden.

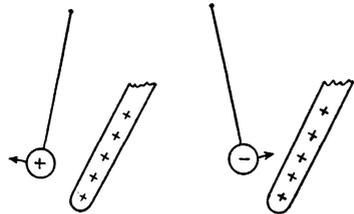


Abb. 249. Elektrostatistischer Grundversuch.

Das berechtigt dazu, die beiden Arten der Elektrizität als ihrem Wesen nach gleiche Größen zu betrachten, die sich durch ihr Vorzeichen, + oder —, voneinander unterscheiden. Es ist üblich, die Glaselektrizität als *positive Elektrizität*, die Hartgummielektrizität als *negative Elektrizität* zu bezeichnen (LICHTENBERG 1777). Diese Wahl ist völlig willkürlich und zufällig; man hätte genau so gut, ja sogar besser, auch umgekehrt verfahren können. Der Unterschied der beiden Elektrizitäten wurde 1734 von DUFAY entdeckt.

Indem wir uns von vornherein auf den Boden der Auffassung der Elektrizität als einer Substanz stellen — eine Auffassung, die später näher zu erklären sein wird — sind wir berechtigt, von der Menge der auf einem Körper befindlichen Elektrizität zu sprechen, also den Begriff der *Elektrizitätsmenge* einzuführen. Man bezeichnet die auf einem Körper befindliche Elektrizitätsmenge (genauer den Überschuß der auf ihm vorhandenen positiven Elektrizitätsmenge über die auf ihm vorhandene negative Elektrizitätsmenge) als die *elektrische Ladung* des Körpers.

Man wird naturgemäß zwei Elektrizitätsmengen als gleich bezeichnen, wenn sie, am gleichen Orte befindlich, sowohl nach Betrag wie nach Richtung unter gleichen Verhältnissen genaue gleiche Wirkungen auf eine bestimmte andere Ladung hervorbringen. Als entgegengesetzt gleich wird man sie bezeichnen, wenn ihre Wirkungen auf eine bestimmte andere Ladung unter gleichen Verhältnissen dem Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Ein mit gleichen Mengen positiver und negativer Elektrizität geladener Körper wirkt bei gleicher Verteilung beider Ladungsarten wie ein gar nicht geladener Körper. Einen Körper, der nach außen keine elektrischen Wirkungen zeigt, nennen wir *elektrisch neutral*.

Als *Raumdichte* einer elektrischen Ladung bezeichnet man den Betrag an Ladung, der sich in 1 cm^3 eines Raumes befindet, also die Ladung der Volumeneinheit. Häufig befindet sich eine elektrische Ladung lediglich innerhalb einer äußerst dünnen Schicht an der Oberfläche eines Körpers. In diesem Falle bezeichnet man die auf je 1 cm^2 der Oberfläche entfallende Elektrizitätsmenge als die elektrische *Flächendichte*.

131. Das COULOMBSche Gesetz. Einheit der Elektrizitätsmenge. Indem wir die Beobachtung 1, § 130, einer späteren Besprechung vorbehalten, ergeben die Beobachtungen 2 und 3 folgenden allgemeinen Schluß:

Ladungen gleichen Vorzeichens (gleichnamige Ladungen) stoßen sich ab, Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens (ungleichnamige Ladungen) ziehen sich an.

Dieses allgemeine Ergebnis wird durch das *Gesetz von COULOMB* (1785, Vorläufer DANIEL BERNOULLI, CAVENDISH) genauer ausgesprochen:

Die zwischen zwei punktförmigen Elektrizitätsmengen (Punktladungen, § 133) e und e' wirkende Kraft k ist dem Betrage jeder der beiden Elektrizitätsmengen proportional, dem Quadrat ihres Abstandes r umgekehrt proportional.

$$k = \text{const} \frac{e e'}{r^2}. \quad (1)$$

Die Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Man sieht, daß sich, in Übereinstimmung mit dem Experiment, bei gleichem Vorzeichen von e und e' Abstoßung (positives Vorzeichen von k , d. h. Vergrößerung des Abstandes r), bei entgegengesetztem Vorzeichen Anziehung ergibt, wenn die Konstante des Gesetzes positiv gewählt wird.

Handelt es sich um die Kräfte zwischen räumlich ausgedehnten Ladungen, so muß man sich diese im allgemeinen in so kleine Ladungselemente unterteilt denken, daß man diese als Punktladungen ansehen kann. Die zwischen den Ladungen wirkende Kraft ergibt sich dann als die Vektorsumme (das Integral)

über die zwischen den einzelnen Ladungselementen wirkenden Kräfte. In manchen Fällen aber kann man eine räumlich ausgedehnte Ladung durch eine einzige Punktladung ersetzt denken und die Gl. (1) unmittelbar auf diese anwenden (§ 133).

Die Gültigkeit des COULOMBSchen Gesetzes wurde von COULOMB durch genaue Versuche mittels einer elektrischen Drehwaage bewiesen (Abb. 250). An einem horizontalen, an einem dünnen Faden drehbar und isoliert aufgehängten Balken befindet sich eine Kugel aus Holundermark, in gleicher Höhe mit ihr und in veränderlichem Abstände von ihr eine zweite, gleiche Kugel. Beiden Kugeln können elektrische Ladungen erteilt werden. Die Größe der anziehenden oder abstoßenden Kraft wird aus der Drehung des Balkens ermittelt.

Man beachte die völlige formale Gleichheit des COULOMBSchen Gesetzes mit dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz (§ 45). Die Proportionalität der Kraft mit $1/r^2$, die in beiden Gesetzen auftritt, hat zur Folge, daß für die Bewegung zweier frei beweglicher elektrischer Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens unter der Wirkung der gegenseitigen Anziehung die gleichen Gesetze gelten wie für zwei sich anziehende Massen. Diese Bewegungen gehorchen also auch dem 1. und 2. KEPLERSchen Gesetz, ebenso wie die Planetenbewegungen. Das 3. KEPLERSche Gesetz gilt jedoch nur dann, wenn für mehrere, das gleiche Anziehungszentrum („Sonne“) umkreisende Ladungen („Planeten“) das Verhältnis e/m aus ihrer Ladung e und ihrer Masse m gleich groß ist. Das Verhältnis e/m tritt in diesem Falle an die Stelle des Verhältnisses der schweren zur trägen Masse (§ 27 und 48). Letzteres ist für alle Körper gleich groß, nämlich gleich 1. Das Verhältnis e/m kann aber sehr verschiedene Werte annehmen.

In Gl. (1) ist noch die Konstante unbestimmt. Dies rührt daher, daß wir noch keine Festsetzung über die *Maßeinheit der Elektrizitätsmenge* getroffen haben. Das *elektrostatische Maßsystem* beruht auf der Festsetzung, daß die Einheit der Elektrizitätsmenge so gewählt werden soll, daß die Konstante im COULOMBSchen Gesetz den Wert 1 erhält und eine reine Zahl ist, also aus dem Gesetz überhaupt verschwindet, wenn wir als Kräfteinheit das dyn und als Längeneinheit das cm, also die Einheiten des CGS-Systems, wählen. Dies ist eine natürlich erlaubte, aber völlig willkürliche Festsetzung, für die nur praktische Gesichtspunkte maßgebend sind. Wir werden später noch andere Maßsysteme kennenlernen. Man beachte, daß beim NEWTONSchen Gravitationsgesetz diese Freiheit der Festsetzung nicht besteht, weil die Masseneinheit bereits anderweitig festgelegt ist, und weil die schwere Masse gleich der trägen Masse gesetzt ist. Daher kann das Gravitationsgesetz im CGS-System nicht ohne die allgemeine Gravitationskonstante G geschrieben werden.

Wir schreiben also nunmehr das COULOMBSche Gesetz in folgender einfacher Form:

$$k = \frac{e e'}{r^2} \text{ dyn.} \quad (2a)$$

Wenn wir der Vektornatur der Kraft Rechnung tragen wollen, so können wir, indem wir die rechte Seite mit dem Einheitsvektor \mathbf{r}/r multiplizieren (§ 8), das COULOMBSche Gesetz auch als Vektorgleichung schreiben:

$$\mathbf{f} = \frac{e e'}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2b)$$

Dabei ist \mathbf{r} (Betrag r) der von e nach e' weisende Radiusvektor, wenn es sich um die von e auf e' wirkende Kraft handelt, im umgekehrten Fall der von e' nach e weisende Radiusvektor. \mathbf{f} und \mathbf{r} sind gleichgerichtet (Abstoßung), wenn

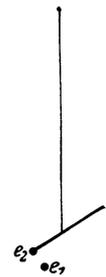


Abb. 250.
Versuch von
COULOMB.
Drehwaage.

e und e' gleiches Vorzeichen haben, andernfalls einander entgegengerichtet (Anziehung). [Vgl. die Ausführungen zu Gl. (2), § 45.]

Aus Gl. (2a) ergibt sich dann zwangsläufig die Definition der Einheit der Elektrizitätsmenge im elektrostatischen System:

Eine Elektrizitätsmenge ist gleich der (elektrostatischen) Einheit, wenn sie auf eine ihr gleiche im Abstände 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt.

Die elektrostatische Einheit (abgekürzt e.s.E.) der Elektrizitätsmenge eignet sich nicht für die Bedürfnisse der Technik. (So fließen z. B. durch eine elektrische 25 Watt-Glühlampe bei einer Spannung von 220 Volt in 1 sec rund $0,3 \cdot 10^9$ e.s.E.) Man benützt als *internationales praktisches Maß* der Elektrizitätsmenge das *Coulomb*, auch *Amperesekunde* genannt. Es ist

$$1 \text{ Coulomb} = 3 \cdot 10^9 \text{ e.s.E.}$$

Vom Standpunkt der Elektrostatik aus ist 1 Coulomb eine sehr große Elektrizitätsmenge. Durch Einsetzen in das COULOMBSche Gesetz berechnet man leicht, daß zwei Ladungen von je 1 Coulomb, die sich in 1 km Abstand voneinander befinden, mit einer Kraft von $9 \cdot 10^8$ dyn oder rund 900 kg* aufeinander wirken.

Wir wollen uns in diesem Kapitel durchweg des elektrostatischen Maßsystems bedienen, wie dies in der theoretischen Physik üblich ist. Die Gleichungen gestalten sich dann einfacher und übersichtlicher. Eine Umrechnung der wichtigsten Gleichungen in die Einheiten des internationalen Maßsystems wird in § 146 gegeben werden.

132. Das Wesen der Elektrizität. Wir haben bisher von der Elektrizität als einem substanzartigen Etwas gesprochen, das sich im Innern oder an der Oberfläche von Körpern befinden und unter Umständen auch in ihnen fließen kann. Tatsächlich ist die Elektrizität eine Eigenschaft der Materie. *Es gibt keine Elektrizität, die nicht mit einer Masse untrennbar verknüpft ist.* Jedes Atom ist aus elektrisch geladenen Bestandteilen aufgebaut. Daß uns die unserer unmittelbaren Beobachtung zugänglichen Körper im gewöhnlichen Zustande unelektrisch erscheinen, liegt daran, daß sie positive und negative atomare Ladungen in gleicher Menge und gleichmäßig verteilt enthalten, so daß sich die Wirkungen dieser Ladungen nach außen hin aufheben. Über den Bau der Atome wollen wir hier nur das nötigste sagen (näheres s. 9. Kap., II. Teil).

Jedes Atom besteht aus einem *Atomkern*, in dem der überwiegende Anteil der Masse des Atoms enthalten ist, und der eine *positive elektrische Ladung* trägt. Diese Ladung ist stets ein ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Elektrizitätsmenge, des *elektrischen Elementarquantums*. Ein Atomkern trägt soviel positive elektrische Elementarquanten, wie die Ordnungszahl des betreffenden Elements im periodischen System angibt (§ 343), also ein Atomkern des Wasserstoffes 1, des Heliums 2, des Lithiums 3, des Urans 92 Elementarquanten. Die Atomkerne sind von einer Hülle von *Elektronen* umgeben. (Der Name stammt von STONEY, 1881). Die Masse der Elektronen beträgt nur rund $\frac{1}{1840}$ der Masse eines Wasserstoffatoms. Die Ladung eines Elektrons beträgt immer ein *negatives Elementarquantum*. (Über Teilchen mit gleicher Masse wie das Elektron, aber mit einem positiven Elementarquantum, die *Positronen*, vgl. § 359). In der Elektronenhülle eines elektrisch neutralen Atoms müssen sich also so viele Elektronen befinden, wie seine Ordnungszahl beträgt. Denn dann ist der Betrag seiner positiven Kernladung ebenso groß wie der seiner negativen Elektronenladung, so daß sich ihre Wirkungen nach außen aufheben. Verliert ein Atom oder Molekül ein oder mehrere Elektronen, so ist es positiv geladen. Treten in die Hülle eines neutralen Atoms oder Moleküls weitere Elektronen ein, so ist es negativ geladen. Solche geladenen Atome und

Moleküle heißen zum Unterschied von neutralen Atomen und Molekülen *Ionen* (Atomionen, Molekülionen).

Das elektrische Elementarquantum beträgt

$$\varepsilon = 4,770 \cdot 10^{-10} \text{ e.s.E.} = 1,591 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb.} \quad (3a)$$

(§ 338.) Die Masse des Elektrons beträgt

$$\mu = 0,9033 \cdot 10^{-27} \text{ g.} \quad (3b)$$

Aus dem vorstehenden folgt, daß, wo immer auch Elektrizität auftritt, dies nur in Gestalt der Ladung von Ionen oder Elektronen der Fall sein kann. Wir werden diese atomaren elektrischen Gebilde künftig oft kurz als *Ladungsträger* bezeichnen. Eine Ortsänderung, *ein Fließen der Elektrizität*, ist demnach nicht möglich ohne Bewegung der Ladungsträger.

Es ist uns zwar geläufig, von der Erzeugung von Elektrizität, z. B. durch Reibung, zu sprechen. Tatsächlich aber handelt es sich in allen solchen Fällen nur darum, daß die in jedem Körper in ungeheurer großer Zahl enthaltenen Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens zu einem (stets überaus geringen) Teil so voneinander getrennt werden, daß sich ihre Wirkungen nicht mehr nach außen hin aufheben. Man kann also auch niemals eine Ladung eines Vorzeichens allein erzeugen, sondern immer nur gleich große Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens voneinander *trennen*. Es gilt also für die Elektrizität ein *Erhaltungssatz* in dem Sinne, daß die Summe der in der Welt enthaltenen positiven und negativen Ladungen unveränderlich (wahrscheinlich Null) ist. In diesem Sinne haben wir von der Elektrizität als von einer *Substanz* gesprochen.

133. Schwerpunkt elektrischer Ladungen. Elektrischer Dipol. Elektrische Ladungen sind im allgemeinen auf Körpern räumlich verteilt. Genau wie man bei räumlich verteilten Massen (ausgedehnter Körper, System mehrerer Körper) einen Schwerpunkt definieren kann, in dem man sich in vielen Fällen die Einzelmassen vereinigt denken kann, so kann man auch einen *elektrischen Schwerpunkt* einer räumlich verteilten elektrischen Ladung definieren, sofern es sich um Ladung *eines* Vorzeichens handelt. Sind positive und negative Ladungen gleichzeitig vorhanden, so ist für jede der Schwerpunkt besonders zu bestimmen. Man gewinnt so den gleichen Vorteil, wie im Falle von Massen, indem man sich, in Analogie zur Vorstellung des Massenpunktes, eine räumlich verteilte elektrische Ladung einheitlichen Vorzeichens oft durch eine gleich große, im elektrischen Schwerpunkt der Ladung befindliche *Punktladung* ersetzt denken kann.

Für die Bestimmung des Schwerpunktes einer elektrischen Ladung gelten die gleichen Gesetze wie für den Schwerpunkt einer räumlich verteilten Masse (§ 19). Der Schwerpunkt einer gleichmäßig über eine Kugelfläche verteilten Ladung liegt im Mittelpunkt der Kugel.

Ein Gebilde, das aus einer Punktladung $+e$ und einer gleich großen Punktladung $-e$ besteht (Abb. 251), die den Abstand l haben, oder ein Gebilde, das durch zwei solche Punktladungen ersetzt gedacht werden kann, nennt man einen *elektrischen Dipol*, die Größe $el = M$ das *elektrische Moment* des Dipols. Die Verbindungslinie der beiden Punktladungen eines Dipols nennt man seine *elektrische Achse*. Das elektrische Moment eines Dipols ist ein Vektor, der in der Richtung der Dipolachse von der negativen zur positiven Ladung weist.

134. Leiter und Nichtleiter. Es ist eine bekannte Erfahrungstatsache, daß die verschiedenen Stoffe sich in elektrischer Beziehung äußerst verschieden verhalten. In den einen vermag sich die Elektrizität verhältnismäßig leicht zu bewegen; sie fließt in ihnen, wenn eine Kraft an den Ladungsträgern angreift. In anderen Stoffen aber läßt sich ein solches Fließen der Elektrizität praktisch

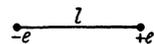


Abb. 251. Elektrischer Dipol.

kaum hervorrufen. Stoffe der ersten Art heißen *Leiter*, weil sie die Elektrizität zu leiten vermögen, Stoffe der zweiten Art *Nichtleiter*, *Isolatoren* oder *Dielektrika*. Es gibt aber zwischen diesen Stoffen keine scharfe Trennung, sondern alle möglichen Zwischenstufen zwischen den besten Leitern und den vollkommensten Nichtleitern. Stoffe von noch deutlicher, aber verhältnismäßig geringer Leitfähigkeit nennt man *Halbleiter*.

Die besten Leiter sind die Metalle, unter diesen Silber und Kupfer. Zu den vollkommensten Nichtleitern gehören Quarz und Glimmer, auch Bernstein, Hartgummi, Seide, ferner die Gase. Ganz reine Flüssigkeiten (ausgenommen die flüssigen Metalle) sind sehr schlechte Leiter. Der einzige absolute Nichtleiter ist das Vakuum.

Aus den Ausführungen des § 132 ergibt sich ohne weiteres der Grund für das verschiedene Verhalten der Stoffe. Da ein Fließen von Elektrizität nicht möglich ist ohne eine Verschiebung von Ladungsträgern (Elektronen, Ionen), so kann ein Stoff nur dann ein Leiter sein, wenn er frei bewegliche, also nicht fest an einen Ort gebundene Ladungsträger enthält. Je mehr solche Ladungsträger er enthält, und je leichter sie beweglich sind, ein um so besserer Leiter ist der Stoff. Weiteres über Leitfähigkeit und eine Tabelle siehe § 152.

Unter Berücksichtigung des vorstehend Gesagten und ferner auf Grund von § 132 folgt schon aus der täglichen Erfahrung, daß beim Fließen elektrischer Ladungen durch die bekanntesten und besten festen Leiter, nämlich die Metalle, eine Bewegung positiver Elektrizität nicht stattfindet. Mit einem Fließen positiver Elektrizität ist notwendig stets eine Verschiebung der sie tragenden Atome verbunden. Das müßte sich aber z. B. bei den Drähten in allen elektrischen Leitungen bemerkbar machen. So müßte allmählich das Lötzinn aus den Lötstellen der Drähte an andere Stellen wandern und durch zugewandertes Kupfer ersetzt werden. Die Wolfram-Drähte der Glühlampen würden sich im Laufe der Zeit verändern usw. Von derartigen Wirkungen ist nichts zu bemerken. Es folgt, daß das Fließen elektrischer Ladungen in festen metallischen Leitern, wenigstens unter gewöhnlichen Verhältnissen, immer nur in einer Bewegung von Elektronen, also negativen Ladungen, besteht, während die positiven Ladungen an ihren Plätzen bleiben.

Die Elektronen sind in den Metallen frei beweglich. Eine noch so kleine Kraft, die auf sie wirkt, setzt sie in Bewegung.

Demnach ist die positive Aufladung eines metallischen Leiters so zu verstehen, daß ihm Elektronen entzogen werden, so daß sich die in ihm enthaltenen positiven und negativen Elektrizitätsmengen nicht mehr, wie im gewöhnlichen, elektrisch neutralen Zustande, in ihrer Wirkung nach außen gegenseitig aufheben. Vielmehr besteht nunmehr ein positiver Überschuß, der nach außen hin wirksam wird. Die Entladung eines positiv geladenen metallischen Leiters besteht in dem Hinüberfließen einer so großen Zahl von Elektronen auf ihn, daß dadurch sein positiver Ladungsüberschuß ausgeglichen wird.

135. Einige Versuche mit dem Elektroskop. Zum Nachweis von Elektrizitätsmengen kann das *Elektroskop* oder *Elektrometer* dienen. Die einfachste Bauart ist das Blättchenelektroskop (Abb. 252). In ein Metallgehäuse *A* (bei einfachen Geräten auch wohl ein Glasgefäß) ist isoliert (etwa durch einen Verschluß aus Hartgummi, Bernstein oder Siegellack) eine Metallstange eingeführt, welche oben einen Knopf, eine Klemmschraube oder eine Platte und unten, in der Mitte des Gehäuses, zwei im ungeladenen Zustand unmittelbar aneinander herabhängende Blättchen *K* aus Aluminiumfolie oder Blattgold trägt. Wird eine elektrische Ladung auf den Knopf übertragen, so verteilt sie sich über die Stange und die Blättchen. Diese werden also beide mit Ladung gleichen Vorzeichens geladen

und stoßen sich infolgedessen ab (eine genauere Beschreibung s. § 139, letzter Absatz und § 142). Sie spreizen sich auseinander, und zwar um so stärker, je größer ihre Ladung ist.

Wir können mit dem Elektroskop unter anderen die folgenden lehrreichen Versuche anstellen.

1. Man nähere dem Knopf bzw. der Platte des Elektroskops eine geriebene Hartgummi- oder Glasstange, ohne zu berühren. Das Elektroskop zeigt einen Ausschlag, der beim Entfernen der Stange wieder verschwindet.

2. Man berühre den Knopf des Elektroskops mit einer geriebenen Hartgummistange. Gibt dies einen zu großen Ausschlag, so übertrage man durch Bestreichen erst etwas von der Ladung der Stange auf eine an einem Hartgummi- oder Glasgriff isoliert befestigte Metallkugel von 1—2 cm Durchmesser und übertrage deren Ladung durch Berühren des Knopfes auf das Elektroskop. Dieses zeigt einen Ausschlag, der auch nach Entfernen der Stange bzw. der Kugel bestehen bleibt. Das Elektroskop ist negativ geladen. Ebenso kann man mittels des geriebenen Glasstabes das Elektroskop positiv laden.

3. Man füge zu einer bereits vorhandenen positiven (negativen) Ladung negative (positive) hinzu. Der Ausschlag des Elektroskopes wird kleiner oder verschwindet oder es stellt sich nach Durchgang durch die Nullage wieder ein Ausschlag ein.

4. Man nähere dem positiv geladenen Elektroskop die geriebene Glasstange, *ohne zu berühren*. Der Ausschlag wird größer, solange der Glasstab in der Nähe ist, und geht bei Entfernen wieder auf seinen alten Wert zurück. Nähert man die geriebene Hartgummistange, so wird der Ausschlag kleiner, solange die Stange in der Nähe ist. Nähert man das Fell, mit dem die Hartgummistange gerieben wurde, so wird der Ausschlag größer. Das Fell ist also positiv geladen, denn es wirkt wie der geriebene Glasstab. Ebenso erweist sich der Seidenlappen, mit dem der Glasstab gerieben wurde, als negativ geladen.

5. Man schlage den Knopf des Elektroskops leicht mit einem trockenen Seidenlappen. Das Elektroskop zeigt einen Ausschlag, der sich bei Prüfung durch Annäherung einer geriebenen Glasstange als negativ erweist.

Die Deutung von Versuch 1 und 4 kann erst später (§ 139) erfolgen; jedoch beweist der zweite Teil von 4, daß das Reibzeug die entgegengesetzte Ladung erhält wie der geriebene Stab, denn es hat auf das Elektroskop die entgegengesetzte Wirkung wie dieser. Die Versuche 2 und 3 sind nach dem bereits früher gesagten ohne weiteres verständlich. Versuch 5 beweist, daß auch das Metall des Elektroskopknopfes durch Reiben elektrisch wird. Diese Elektrisierung kann hier beobachtet werden, weil das geriebene Metall isoliert ist, die erzeugte Ladung also nicht abfließen kann, wie sie es sofort tun würde, wenn man den Metallstab in der Hand hielte. Man kann auf diese oder ähnliche Weise den Nachweis führen, daß alle Stoffe durch Reiben elektrische Ladungen annehmen (vgl. § 164).

136. Das elektrische Feld. Feldstärke. Nach dem COULOMBSchen Gesetz (§ 131) erfährt jede elektrische Ladung in der Umgebung einer anderen Ladung eine Kraft, die von ihrem Ort in dem diese Ladung umgebenden Raume abhängt. Entsprechend verhält es sich, wenn eine Ladung unter der Wirkung mehrerer räumlich getrennter Ladungen steht. Die auf sie wirkende Kraft ergibt sich dann als die Vektorsumme der Einzelkräfte und ist im allgemeinen von Ort

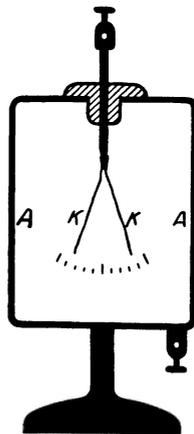


Abb. 252.
Blättchenelektroskop.

zu Ort verschieden. In der Umgebung von elektrischen Ladungen besteht also ein Kraftfeld, ein *elektrisches Feld*. Wir haben die allgemeinen Gesetze der Kraftfelder bereits in § 26 besprochen. Die für ein elektrisches Feld charakteristische Körpereigenschaft, die wir dort allgemein mit w bezeichnet haben, ist die Ladung e des in einem elektrischen Felde befindlichen und seinen Kraftwirkungen unterworfenen Körpers. Als *elektrische Feldstärke* in einem Raumpunkt definieren wir demnach einen Vektor \mathfrak{E} , der der Vektorgleichung

$$\mathfrak{k} = e \mathfrak{E} \quad (4a)$$

genügt [vgl. § 26, Gl. (61)]. Dabei ist k die Kraft, die die Ladung e an dem betrachteten Ort erfährt. Die Feldstärke \mathfrak{E} ist also ein Vektor, dessen Richtung in jedem Raumpunkt mit derjenigen der Kraft übereinstimmt, die eine *positive* Ladung e dort erfährt, und dessen Betrag E gleich dem Betrage der Kraft ist, die die Ladungseinheit dort erfährt. Hingegen ist die auf eine *negative* Ladung wirkende Kraft der Feldstärke entgegengerichtet. Für die Beträge der Kraft und der Feldstärke gilt die Gleichung

$$k = e E. \quad (4b)$$

Wird die Kraft in der Einheit 1 dyn gemessen, die Ladung in der elektrostatischen Einheit, so erhält man die Feldstärke in der Einheit 1 dyn/elektrostatische Ladungseinheit = 1 elektrostatische Einheit der Feldstärke.

Zur anschaulichen Darstellung elektrischer Felder kann man sich nach FARADAY (1852) der elektrischen *Kraftlinien* oder *Feldlinien* bedienen. Es sind dies Kurven, für die folgende Festsetzungen gelten:

1. Die Richtung der Kraftlinien, oder genauer die Richtung der in den einzelnen Raumpunkten an sie gelegten Tangenten, zeigt die Richtung des Feldstärkenvektors \mathfrak{E} in dem betreffenden Punkt an.

2. Durch jede zur Richtung der Feldstärke senkrechte Fläche von 1 cm² treten so viele Kraftlinien, wie der Maßzahl E der Feldstärke in jener Fläche entspricht. Ist also n die Zahl dieser Kraftlinien, die Kraftliniendichte, so ist $n = |\mathfrak{E}|$.

Wir wollen als Beispiel das Feld einer positiven Punktladung e betrachten. Wir erhalten den Betrag E der Feldstärke im Abstände r von der Ladung e , indem wir in Gl. (2a) die Ladung e' gleich der elektrostatischen Ladungseinheit machen, also

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad (5a)$$

oder in vektorieller Schreibweise, indem wir die rechte Seite mit dem Einheitsvektor r/r multiplizieren,

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3} \mathfrak{r}. \quad (5b)$$

Dabei ist \mathfrak{r} der von der Ladung e nach dem betrachteten Punkt weisende Fahrstrahl. Durch jedes cm² einer im Abstände r cm um die Punktladung e gelegten Kugelfläche treten also e/r^2 Kraftlinien, und durch die ganze Kugelfläche von der Größe $4\pi r^2$ cm² treten

$$4\pi r^2 \frac{e}{r^2} = 4\pi e \quad (6)$$

Kraftlinien. Die Zahl der durch irgendeine die Punktladung einhüllende Kugelfläche, demnach auch jede beliebige andere sie einhüllende Fläche, tretenden Kraftlinien ist also von deren Radius unabhängig, d. h. die Zahl dieser Kraftlinien nimmt mit der Entfernung weder zu noch ab. Da die Richtung des elektrischen Feldes überall radial von der positiven Punktladung weg weist, so verlaufen auch die Kraftlinien radial von der Punktladung weg,

gehen also von ihr aus. Es folgt, daß die Zahl der von einer Ladung e ausgehenden Kraftlinien der Ladung proportional und gleich $4\pi e$ ist. Handelt es sich um eine negative Ladung, so kehrt sich nur die Richtung der Feldstärke um, und die Kraftlinien ändern ihr Bild nicht. Nur muß man jetzt sagen, daß sie radial auf die negative Ladung hin verlaufen. In elektrischen Feldern, die nicht von einer Punktladung, sondern von mehreren solchen oder von räumlich ausgedehnten Ladungen herrühren, ergibt sich die Feldstärke in den einzelnen Punkten durch Vektoraddition der von den einzelnen Ladungen herrührenden Feldanteile.

Aus dem vorstehenden folgt, daß *elektrische Kraftlinien* nie blind im Raum beginnen oder endigen, sondern *ihren Anfang in einer positiven, ihr Ende in*

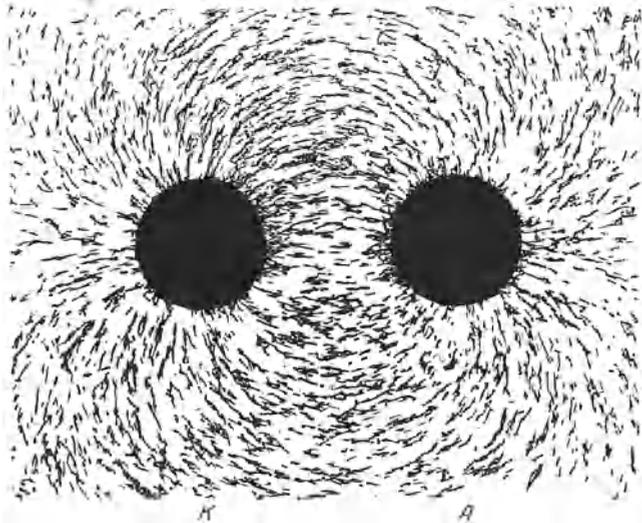


Abb. 253. Kraftlinienbild im Felde zweier gleich großer, entgegengesetzter elektrischer Ladungen.
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

einer negativen Ladung haben. Wir werden später sehen, daß es auch in sich zurücklaufende, geschlossene elektrische Kraftlinien gibt, die aber dann nicht von dem Vorhandensein elektrischer Ladungen herrühren (§ 208).

Man kann die allgemeine Richtung der Kraftlinien sichtbar machen, indem man in das Feld eine Glasplatte bringt und sie mit kleinen Gipskristallen bestreut. Bei ausreichend hoher Feldstärke ordnen diese sich (wie die Eisenfeilspäne im magnetischen Felde) in Ketten, die in der Feldrichtung verlaufen. Ein Beispiel zeigt Abb. 253. Es handelt sich um das Feld zweier Kreisplatten mit gleich großen Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen. Man sieht deutlich, daß alle Kraftlinien von der einen zur anderen Ladung verlaufen, also Anfang und Ende nur in diesen Ladungen haben.

137. Elektrische Spannung. Elektrisches Potential. Durch die Angabe von Betrag und Richtung der Feldstärke in den einzelnen Punkten eines elektrischen Feldes ist dieses vollständig beschrieben. Es gibt aber eine zweite Art der Beschreibung, nämlich durch das *Potential* in den einzelnen Raumpunkten. Wir haben den Begriff des Potentials in einem Raumpunkt eines Kraftfeldes bereits in § 26 allgemein definiert als die potentielle Energie, die einem Körper (Massenpunkt), der die für das Feld charakteristische Eigenschaft w im Betrage ihrer Einheit besitzt, in jenem Punkt zukommt. Hiernach ist das *elektrische Potential* in einem Raumpunkt definiert als die potentielle Energie, die ein mit

der positiven Ladungseinheit geladener Massenpunkt infolge seiner Anwesenheit an jener Stelle des Feldes besitzt. Wie wir mehrfach erwähnt haben, ist die Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie stets willkürlich und ohne physikalische Bedeutung, da in die physikalischen Gesetze immer nur Potentialdifferenzen eingehen und diese von der Wahl des Nullpunktes nicht abhängen. Man darf daher irgendeinem beliebigen Raumpunkt oder irgendeinem Raumbereich konstanten Potentials das Potential Null zuschreiben und kann diesen Punkt oder Bereich nach Gründen der Zweckmäßigkeit wählen. In der experimentellen und technischen Praxis ist es im allgemeinen üblich, der Erde das Potential Null zuzuschreiben und die Potentiale in elektrischen Feldern auf die Erde zu beziehen. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes heißt die *Spannung* U zwischen diesen Punkten. Sie ist gleich der Differenz der potentiellen Energien, die die positive Einheitspunktladung in den beiden Punkten besitzt.

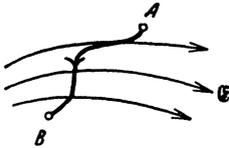


Abb. 254. Zur Einführung des Begriffs der Spannung.

Wird ein Massenpunkt mit der positiven Ladung e von einem Punkte A nach einem Punkte B verschoben (Abb. 254), so ist an ihm Arbeit zu leisten bzw. es wird Arbeit gewonnen, je nachdem ob die Richtung der Verschiebung einen stumpfen oder einen spitzen Winkel mit der Richtung der Feldstärke bildet. Da an der Ladung die Kraft $e\mathcal{E}$ des Feldes angreift, so ist zu ihrer Verschiebung eine Kraft $-e\mathcal{E}$ erforderlich. Sind $d\mathbf{r}$ die einzelnen Elemente des Verschiebungsweges, so beträgt die zur Verschiebung von A nach B erforderliche Arbeit (§ 23)

$$A = -e \int_A^B \mathcal{E} d\mathbf{r} = \Delta P = eU. \quad (7)$$

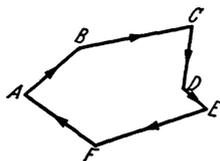


Abb. 255. Die Summe der Teilspannungen längs eines geschlossenen Weges ist im wirbelfreien Felde Null.

Dabei ist ΔP die Änderung der potentiellen Energie des Ladungsträgers, da sich diese Energie bei reiner

Verschiebungsarbeit um den Betrag der geleisteten Arbeit ändert. Gemäß der obigen Definition der Spannung U ist $\Delta P = eU$. Daher beträgt die Spannung zwischen den Punkten A und B , oder genauer gesagt die Spannung von B gegen A ,

$$U = - \int_A^B \mathcal{E} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Die Spannung von B gegen A ist positiv, wenn die Verschiebung überwiegend gegen die Feldrichtung erfolgt, im anderen Falle negativ.

In Feldern, die von der Anwesenheit elektrischer Ladungen herrühren, gibt es, wie schon erwähnt, keine in sich zurücklaufenden, geschlossenen Kraftlinien. Solche Felder sind *wirbelfrei*. In ihnen hängt der Betrag des Integrals der Gl. (8) nicht von dem Wege ab, auf dem wir uns die Einheitsladung von A nach B verschoben denken. Die Spannung zwischen zwei Punkten eines wirbelfreien Feldes ist also eindeutig bestimmt. In nicht wirbelfreien Feldern ist das nicht der Fall. Führen wir in einem wirbelfreien Felde eine Punktladung von einem Punkte A auf beliebigem Wege, etwa über die Punkte B, C, D, E, F (Abb. 255) wieder nach A zurück, so ist ihre potentielle Energie wieder die gleiche, wie zu Beginn. Die Summe der an ihr geleisteten Arbeiten ist gleich Null. Daher muß auch die Summe der Teilspannungen längs des in sich geschlossenen Weges Null sein, $U_{AB} + U_{BC} + \dots = 0$. Also gilt nach Gl. (8) in einem wirbelfreien Felde

$$\oint \mathcal{E} d\mathbf{r} = 0, \quad (9)$$

wobei die Integration längs irgendeiner geschlossenen Kurve bis zum Ausgangspunkt zurück auszuführen ist.

Alle Punkte in einem Felde, in denen das gleiche Potential herrscht, zwischen denen also die Spannung Null besteht, liegen auf einer oder mehreren geschlossenen Flächen, welche die das Feld erzeugenden Ladungen einhüllen, den *Flächen gleichen Potentials* oder *Äquipotential-* oder *Niveauflächen*. Da sich die potentielle Energie eines Ladungsträgers bei einer Verschiebung längs einer solchen Fläche nicht ändert, so ist hierzu auch keine Arbeit erforderlich, analog zur Verschiebung einer Masse längs einer reibungslosen horizontalen Ebene. Da für jede beliebig kleine Verschiebung dr längs einer Äquipotentialfläche $dU = 0$ ist, so ist dann auch das skalare Produkt $\mathfrak{E} dr = 0$. Nach § 23, Gl. (41), bedeutet das, daß die Feldstärke \mathfrak{E} und die Verschiebung dr , also auch die Äquipotentialfläche, stets aufeinander senkrecht stehen. *Die Äquipotentialflächen stehen also überall zur Feldrichtung senkrecht*, sie werden von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt.

Will man die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten A und B berechnen, so kann man demnach, und da es auf die Wahl des Verschiebungsweges nicht ankommt, folgendermaßen verfahren. Man denkt sich die Einheitsladung zunächst von A aus längs der durch A gehenden Kraftlinie, also stets in der Feldrichtung bzw. ihr entgegen, bis zu derjenigen Äquipotentialfläche verschoben, auf der B liegt, alsdann längs dieser Fläche nach B . Da der zweite Verschiebungsanteil ohne Arbeitsleistung erfolgt, so liefert der erste Anteil bereits die gesuchte Spannung. Allgemein folgt ja überhaupt aus der Definition der Äquipotentialflächen, daß die Spannung zwischen A und B gleich der Spannung zwischen irgendwelchen Punkten der zu ihnen gehörigen Äquipotentialflächen ist.

Wir betrachten zwei beliebig nahe benachbarte Punkte in einem Felde. Die Beträge der Komponenten der Feldstärke \mathfrak{E} in den drei Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems seien E_x, E_y, E_z . Zur Berechnung der Spannung dU zwischen den beiden Punkten können wir die Einheitsladung auf einem beliebigen Wege von dem einen nach dem anderen Punkte verschoben denken und wählen den folgenden. Wir verschieben die Ladung zunächst um die Strecke dx in der x -Richtung dann um die Strecke dy in der y -Richtung, schließlich um die Strecke dz in der z -Richtung. Die dabei geleistete Arbeit setzt sich dann aus den drei Anteilen $-E_x dx, -E_y dy$ und $-E_z dz$ zusammen. Dabei ändert sich die potentielle Energie der Einheitsladung, also die Spannung U , um die Summe dieser Arbeiten,

$$dU = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (10)$$

Durch partielle Differentiation folgt hieraus

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (11a)$$

Diese drei Gleichungen werden in vektorieller Schreibweise in der einen Gleichung

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } U \quad (11b)$$

zusammengefaßt. Da die Wahl der Koordinatenrichtungen willkürlich ist, gilt auch für eine beliebige Richtung $E_s = -\partial U/\partial s$. Fällt diese Richtung mit der Feldrichtung zusammen, so ist

$$dU = -E ds \quad \text{und} \quad E = -\frac{dU}{ds}. \quad (12)$$

Handelt es sich um ein homogenes Feld, d. h. ein solches, in dem die Feldstärke \mathfrak{E} überall die gleiche Richtung und gleichen Betrag hat, so beträgt, wie man durch

Integration der Gl. (12) erkennt, die Spannung zwischen den Enden einer in der Feldrichtung liegenden Strecke s

$$U = -E s. \quad (13)$$

Die Maßzahl der Feldstärke ist also in einem homogenen Felde gleich der Maßzahl des Spannungsabfalles längs einer in der Feldrichtung liegenden Strecke von 1 cm Länge. Darum heißt die Feldstärke auch das Spannungsgefälle.

Als ein einfaches, aber wichtiges Beispiel eines elektrischen Feldes wollen wir dasjenige einer positiven Punktladung e betrachten. Die Feldstärke im Abstände r von der Ladung ist durch Gl. (5) gegeben. Bei einer Punktladung ist es zweckmäßig, den Nullpunkt des Potentials in die Entfernung $r = \infty$ zu legen. Nach Gl. (12) ändert sich das Potential bei einer Verschiebung dr in radialer Richtung um den Betrag $dU = -E dr$, oder nach Gl. (5) um

$dU = -e dr/r^2$. Demnach ergibt sich für das Potential im Abstände r von der Ladung e durch Berechnung der Arbeit, die erforderlich ist, um die positive Einheitspunktladung aus dem Abstände $r = \infty$ bis in den endlichen Abstand r zu verschieben, also

$$U = -e \int_{\infty}^r \frac{dr}{r} = \frac{e}{r}. \quad (14)$$

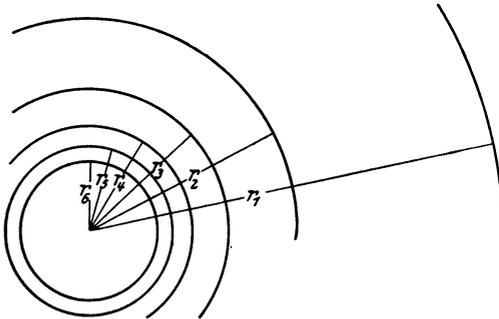


Abb. 256. Äquipotentialflächen im Felde einer Punktladung.

Das Potential im Felde einer positiven Ladung ist also überall positiv, im Felde einer negativen Ladung ($-e$) negativ. Abb. 256 zeigt eine Schar von Äquipotentialflächen im Felde einer Punktladung, zwischen denen je die gleiche Potentialdifferenz (Spannung) besteht. Es ist selbstverständlich, folgt auch aus Gl. (14), daß diese Flächen hier Kugelflächen sind ($U = \text{const}$, $r = \text{const}$). Man erkennt an diesem Beispiel die allgemein gültige Tatsache, daß die Äquipotentialflächen bei konstanter Potentialdifferenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Flächen um so dichter liegen, je größer die Feldstärke ist. Das folgt allgemein aus Gl. (12).

Da Potential und Spannung durch eine an der Ladungseinheit geleistete Verschiebungsarbeit gemessen werden, so ist ihre Einheit im elektrostatischen Maßsystem 1 elektrostatische Spannungseinheit = 1 erg/elektrostatische Ladungseinheit. Als *internationale Spannungseinheit*, also in der elektrischen Meßtechnik, wird das Volt benutzt. Es ist 1 Volt = $\frac{1}{300}$ elektrostatische Spannungseinheiten. Entsprechend ist die *internationale Einheit der Feldstärke* 1 Volt \cdot cm⁻¹ (Volt pro cm). Sie liegt in einem homogenen Felde dann vor, wenn die Spannung zwischen den Enden einer in der Feldrichtung liegenden Strecke von 1 cm Länge 1 Volt beträgt.

Eine in einem elektrischen Felde frei bewegliche Ladung erfährt eine Beschleunigung. Diese erfolgt bei einer positiven Ladung in Richtung der Feldstärke, also in Richtung abnehmender Spannung, bei einer negativen Ladung in entgegengesetzter Richtung. Der Zuwachs der kinetischen Energie erfolgt auf Kosten der potentiellen Energie der Ladung. Hat ein Ladungsträger die Spannung U frei durchlaufen, also die potentielle Energie eU verloren, so hat seine kinetische Energie um den gleichen Betrag zugenommen. Betrug sie anfänglich $mv_0^2/2$, so beträgt sie nach freiem Durchlaufen der Spannung U

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + eU. \quad (15)$$

138. Feldstärke, Potential und Ladungsverteilung in Leitern. Da die Ladungsträger in den Leitern jeder auf sie wirkenden elektrischen Kraft folgen, also in Bewegung bleiben, solange eine solche Kraft besteht, und sei sie noch so klein, so kann auf einem Leiter elektrisches Gleichgewicht, d. h. Ruhe der elektrischen Ladungen, nur bestehen, wenn in ihm kein elektrisches Feld herrscht. Es befinde sich eine (aus sehr vielen gleichnamigen, beweglichen Ladungsträgern ϵ bestehende) Überschußladung an der in der Abb. 257 bezeichneten Stelle eines Leiters. Diese Ladungsträger üben aufeinander abstoßende Kräfte aus; es besteht also im Innern des Leiters ein elektrisches Feld, dem die Ladungsträger folgen. Sie werden durch dieses Feld auseinander, also an die Oberfläche des Körpers getrieben. Hier findet ihre Beweglichkeit insofern eine Grenze, als sie im allgemeinen nicht aus der Oberfläche austreten können. Wohl aber können sie sich noch längs der Oberfläche bewegen, solange die herrschende Feldstärke eine Komponente parallel zur Oberfläche hat, also nicht senkrecht auf ihr steht. Die Bewegung der Ladungsträger hört daher erst dann auf, wenn



Abb. 257.
Zum Potential auf
einem Leiter.

1. die Feldstärke im Innern des Leiters überall den Wert Null angenommen hat, und wenn

2. die Feldstärke an der Oberfläche senkrecht auf dieser steht.

Dieser Zustand stellt sich nun in Leitern, die nicht mit einer Stromquelle z. B. den beiden Klemmen eines Akkumulators, in Verbindung stehen, durch die Bewegung der Ladungsträger stets von selbst her, indem sich die Ladungsträger derart auf dem Leiter verteilen, daß durch die Überlagerung der Felder, die von den einzelnen Ladungsträgern herrühren, erstens in jedem Punkte im Inneren des Leiters die Feldstärke Null entsteht, zweitens die Richtung des äußeren elektrischen Feldes überall senkrecht zur Leiteroberfläche steht. Befindet sich irgendwo in einem Metall positive Ladung im Überschuß, so übt diese Ladung Kräfte auf die im Metall befindlichen Elektronen aus (allerdings auch auf die positiven Ladungen, die sich aber in den Metallen nicht bewegen können). Das führt zu einer Änderung der Ladungsverteilung, die sich dann wieder so einstellt, daß die vorstehenden Bedingungen erfüllt sind. Die Ladungsverteilung ist schließlich genau die gleiche wie bei einem negativen Ladungsüberschuß, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Also:

Im Innern eines im elektrostatischen Gleichgewicht befindlichen Leiters herrscht die Feldstärke $\mathcal{E} = 0$.

Ist dieser Gleichgewichtszustand erreicht, so kann man eine im Innern des Leiters gedachte Ladung beliebig verschieben, ohne daß dazu ein Aufwand an Arbeit gegen elektrische Kräfte erforderlich wäre, denn das Produkt Kraft \times Weg ist immer Null. (Wir denken uns hierbei die verschobene Ladung so klein, daß sie das elektrische Gleichgewicht nicht merklich beeinflußt.) Eine im Innern des Leiters befindliche Ladung hat also, wenn sich der Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht befindet, überall die gleiche potentielle Energie. Auf die Ladungseinheit bezogen, bedeutet dies, daß das Potential im Inneren eines im elektrischen Gleichgewicht befindlichen Leiters überall das gleiche ist.

Das Innere eines im elektrostatischen Gleichgewicht befindlichen Leiters ist immer ein Bereich konstanten Potentials. Alle Punkte eines solchen Leiters sind auf gleicher Spannung.

Infolgedessen gilt auch:

Die Oberfläche eines im elektrostatischen Gleichgewicht befindlichen Leiters ist immer eine Fläche konstanten Potentials (Äquipotentialfläche). Denn auch zur Verschiebung einer Ladung längs der Oberfläche, also senkrecht zur dort herrschenden Kraft, ist Arbeit nicht erforderlich.

Herrscht im Innern eines Leiters überall die Feldstärke Null, so bedeutet das, daß die Kraftlinien, welche von etwa auf seiner Oberfläche befindlichen Ladungen ausgehen, sämtlich in den Raum *außerhalb* des Leiters austreten, aber nicht in das Innere. Und zwar stehen sie, wie gesagt, senkrecht auf der Oberfläche des Leiters. Diese ist ja eine Fläche gleichen Potentials. An diesem Zustande ändert sich nichts, wenn wir uns einen solchen Leiter ausgehöhlt denken, so daß er etwa aus einem rings geschlossenen Hohlkörper aus Blech besteht. Auch in dem von dem leitenden Hohlkörper umschlossenen Hohlraum herrscht überall die Feldstärke Null und infolgedessen überall das gleiche Potential, wie es an der Oberfläche des umschließenden Leiters besteht.

Diese Tatsache findet eine wichtige praktische Anwendung. Man schützt empfindliche Meßgeräte vor elektrischen Störungen, indem man sie mit einem

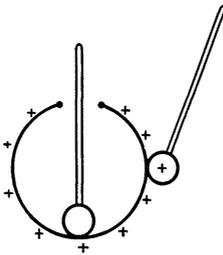


Abb. 258. Nachweis, daß die Ladung eines Leiters nur auf der Außenseite sitzt.

rings geschlossenen oder höchstens mit kleinen Beobachtungs- und Zuführungsöffnungen versehenen Metallkasten (FARADAY-Käfig) umgibt, den man mit der Erde leitend verbindet, so daß sein Potential gleich dem der Erde, also konstant ist. Es können dann etwaige äußere elektrische Felder nicht störend in das Innere des Kastens bis zu dem geschützten Gerät vordringen (elektrostatischer Schutz). In vielen Fällen genügt es auch schon, wenn man das Gerät mit einem nicht zu weitmaschigen Käfig aus Drahtnetz umgibt. In diesem Falle treten zwar einzelne Kraftlinien durch die Maschen des Netzes, biegen aber in nächster Nähe des Netzes auf dieses zurück, so daß das Innere von elektrischen Feldern frei bleibt.

Wenn im Inneren eines geladenen Leiters im Gleichgewichtszustand keine Kraftlinien verlaufen, sondern solche erst von der Oberfläche nach außen hin ausgehen, so bedeutet dies, daß seine *Ladung* (genauer ein Überschuß von Ladung eines Vorzeichens über solche entgegengesetzten Vorzeichens) *sich lediglich an der Oberfläche befindet*. Denn befänden sich Ladungen eines Vorzeichens an einer Stelle im Inneren im Überschuß, so müßten auch Kraftlinien von ihnen ausgehen und im Innern verlaufen.

Zum Nachweis der Tatsache, daß die Ladung eines Leiters nur auf dessen Oberfläche sitzt, bedient man sich z. B. eines metallischen Gefäßes mit einer engen Öffnung, durch die eine isolierte Metallkugel gerade frei eingeführt werden kann¹ (Abb. 258). Das Gefäß wird isoliert aufgestellt und geladen. Berührt man das Gefäß von außen mit der isolierten Metallkugel und bringt diese dann in Berührung mit einem Elektroskop, so erweist sie sich als geladen. Führt man jedoch die Probekugel ins Innere und berührt die Innenwand des Gefäßes, so ist die Kugel nach dem Herausziehen ungeladen. Ist umgekehrt anfänglich die Probekugel geladen, der hohle Metallkörper aber nicht, so kann man durch Berühren der Außenseite des letzteren mit der geladenen Kugel deren Ladung nicht vollständig auf ihn überführen, da die Kugel bei der Berührung einen Teil seiner äußeren Oberfläche bildet, also ein Teil der Ladung auf ihr sitzen bleibt. Um die Kugel an dem hohlen Metallkörper völlig zu entladen, muß man sie in das Innere desselben bringen.

Man stelle ein Blättchenelektroskop in das Innere eines isoliert aufgestellten Drahtkäfigs und verbinde die Blättchen durch einen Draht mit dem Käfig. Bei noch so großer Ladung des Käfigs zeigen die Blättchen keinen Ausschlag. Ebensowenig zeigt ein isoliert aufgestelltes, mit einem Metallgehäuse ver-

¹ Die Öffnung darf keine scharfen Kanten haben, da sonst beim Hindurchführen der Kugel die Ladung auf diese überströmt (s. u.).

sehenes geladenes Elektroskop einen Ausschlag, wenn man die Blättchen mit dem Metallgehäuse leitend verbindet. In beiden Fällen gelangt, auch bei hoher Aufladung des Ganzen, keine Ladung auf die Blättchen.

Besitzt ein geladener leitender Körper scharfe Kanten und Spitzen, so ist klar, daß sich die Ladungsträger in ihrem Bestreben, sich möglichst weit voneinander zu entfernen, an solchen Stellen in besonders großer Dichte ansammeln werden. Allgemein ist die Ladungsdichte an nach außen gewölbten Stellen der Oberfläche größer als an ebenen Stellen, an nach innen gewölbten Stellen kleiner. Da die von der Ladung des Körpers ausgehenden Kraftlinien sämtlich in den Außenraum verlaufen, so ist die elektrische Feldstärke in der Nähe des Leiters um so größer, je größer dort die Dichte seiner Oberflächenladung ist. Sie ist also besonders groß an scharfen Spitzen und Kanten. Sie kann dort so groß werden, daß eine Entladung des Körpers durch die umgebende Luft eintritt (Korona, Spitzenwirkung, § 182). Abb. 259 zeigt die Äquipotentialflächen in der Umgebung einer Spitze, die aus einer ebenen Fläche herausragt. Der Verdichtung der Flächen in der Nähe der Spitze entspricht die dort herrschende erhöhte Feldstärke.

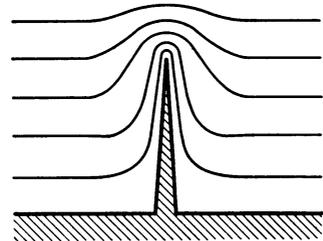


Abb. 259. Flächen gleichen Potentials an einer Spitze.

Denkt man sich an den Ort einer Äquipotentialfläche einer Punktladung (Abb. 256) eine metallische Kugelfläche gebracht, auf der die Punktladung gleichmäßig verteilt wird, so ändert sich an dem Felde außerhalb der Kugelfläche nichts.

Denn aus der geladenen Kugelfläche treten jetzt ebenso viele Kraftlinien aus, wie vorher durch die entsprechende Äquipotentialfläche hindurchtraten. Umgekehrt kann also die Ladung einer Kugel für alle Entfernungen, die größer als der Kugelradius sind, durch eine im Kugelzentrum befindliche, gleich große Punktladung ersetzt gedacht werden.

139. Influenz. Wird ein ungeladener Leiter in ein elektrisches Feld gebracht, z. B. durch Annähern an eine Ladung e (Abb. 260), so gilt wegen der Beweglichkeit der Ladungsträger nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung des § 138. Das Innere eines Leiters ist bei elektrischem Gleichgewicht auch jetzt ein Bereich gleichen Potentials. Es tritt zwar zunächst im Innern ein elektrisches Feld auf, da die einzelnen



Abb. 260. Influenz durch eine Ladung.

Teile des Leiters sich in Gebieten verschiedenen Potentials befinden. Infolgedessen erfahren aber die in ihm enthaltenen Ladungsträger Verschiebungen, die das elektrostatische Gleichgewicht, welches durch das Feld gestört wurde, sofort wieder herstellen. Die Ladungsverteilung im Innern des Leiters stellt sich derart ein, daß das von ihr herrührende Feld das äußere Feld in jedem Punkt im Inneren des Leiters, indem es sich ihm überlagert, gerade aufhebt, und die Kraftlinien des Feldes überall auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen. Die Summe der Ladungen ist auf dem anfänglich ungeladenen Leiter auch nach Herstellung der neuen Ladungsverteilung noch Null, aber die positiven und negativen Ladungen sind jetzt anders verteilt als ohne das Vorhandensein des äußeren Feldes. In einem Teil des Körpers befindet sich positive, im anderen negative Ladung e' im Überschuß. Der Betrag von e' hängt davon ab, wieviele von den Kraftlinien des äußeren Feldes auf dem Leiter endigen. Diese Erscheinung heißt *Influenz*. Abb. 260 zeigt die Influenz, die an einem Leiter im Felde einer Ladung $+e$ eintritt. Der Leiter wird durch die Influenzwirkung zu einem *elektrischen Dipol* (§ 133); er wird *polarisiert*.

Wird das linke Ende des Leiters (Abb. 260), in dem die Influenzwirkung stattfindet, leitend mit der Erde verbunden, so strömt die an diesem Ende angesammelte Ladung zur Erde ab (bzw. es strömen Elektronen von der Erde

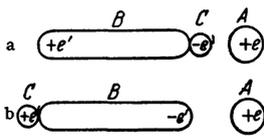


Abb. 261. Zum Nachweis der Influenz.

her in den Leiter und neutralisieren die Ladung $+e'$), und der Leiter hat nach Trennung der leitenden Verbindung mit der Erde einen, im Falle der Abb. 260 negativen, Ladungsüberschuß. Wir lernen hier ein wichtiges Verfahren kennen, um elektrische Ladungen zu trennen (in etwas nachlässiger Ausdrucksweise: zu erzeugen, § 132). Man trennt die Ladungen in einem Leiter durch Influenz und läßt die Ladung eines

Vorzeichens durch eine vorübergehend hergestellte leitende Verbindung zur Erde oder auf irgendeinen anderen Leiter überfließen, so daß die Ladung des anderen Vorzeichens allein auf dem Leiter zurückbleibt.

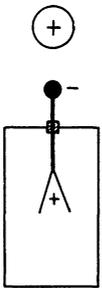


Abb. 262. Influenz im Elektroskop.

Eine isoliert aufgestellte metallische Kugel A werde etwa positiv geladen (Abb. 261). Alsdann nähere man ihr einen gleichfalls isolierten Metallzylinder B. In diesem wird sich dann die in Abb. 260 dargestellte Ladungsverteilung herstellen. Jetzt bringe man eine isolierte Metallkugel C an das der geladenen Kugel A zugekehrte Ende des Zylinders B (Abb. 261a). C bildet jetzt mit B zusammen einen zusammenhängenden Leiter, und die negative Ladung fließt in die Kugel C. Man kann mittels eines Elektroskops nachweisen, daß sie, wenn A positiv ist, negativ geladen ist. Ebenso kann man zeigen, daß sich nunmehr auf B eine positive Ladung befindet. Entlädt man jetzt den Zylinder B und wiederholt den gleichen Versuch aber so, daß man das von A abgewandte Ende von B mit der Kugel C

berührt (Abb. 261b), so hat C eine positive und B eine negative Ladung.

Nähert man einen geladenen Körper, z. B. eine geriebene Glasstange, einem ungeladenen Elektroskop, ohne zu berühren, so zeigen die Blättchen einen Ausschlag, der bei Entfernung des geladenen Körpers wieder verschwindet. Dies ist eine Wirkung der Influenz auf die Stange mit den Blättchen (Abb. 262). Hiermit ist die Erklärung der Versuche 1 und 4 in § 135 gegeben.

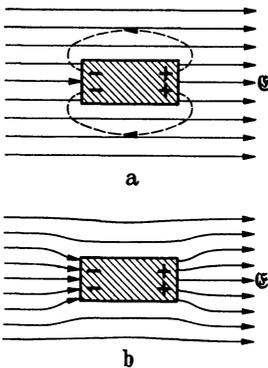


Abb. 263. Überlagerung der Kraftlinien in der Umgebung eines Leiters im homogenen Felde.

Indem so im Innern eines in ein elektrisches Feld gebrachten Leiters das Feld durch die neu entstehende Ladungsverteilung zum Zusammenbrechen gebracht, d. h. durch das Feld der Influenzladungen genau aufgehoben wird, überlagern sich auch im Außenraum die Wirkungen des influenzierenden Feldes mit denen des Feldes der Influenzladungen. Das hat eine Verzerrung des Feldes in der Umgebung des Leiters zur Folge, die daher rührt, daß Kraftlinien an der Oberfläche des Leiters beginnen bzw. endigen und durch den Leiter auf einer gewissen Strecke unterbrochen sind. Abb. 263a zeigt, wie im Inneren eines Leiters im Felde \mathcal{E} ein feldfreier Raum besteht, und wie im Außenraum die Kraftlinien

des Feldes der Influenzladungen an den Enden des Leiters mit denen des äußeren Feldes gleichsinnig verlaufen und das Feld dort verstärken, während sie ihnen an den Seiten des Leiters entgegenlaufen und das Feld schwächen. Abb. 263b zeigt den durch die Überlagerung beider Felder tatsächlich entstehenden Feldverlauf.

Wir können jetzt auch die Wirkungsweise des Elektroskops etwas strenger fassen, als es früher geschehen ist. Bringt man auf den inneren, isolierten

Teil des Elektroskops eine Ladung, so erzeugt sie durch Influenz eine Influenzladung entgegengesetzten Vorzeichens auf der Innenwand des leitenden und mit der Erde verbundenen Gehäuses. Es verlaufen also alle von den Blättchen ausgehenden Kraftlinien auf das Gehäuse hin, und im Raum innerhalb desselben besteht ein elektrisches Feld. Die Kraft dieses Feldes ist es, die die geladenen Blättchen in der Richtung auf das Gehäuse, also auseinander, treibt.

140. Kraftwirkungen elektrischer Felder auf Dipole und auf ungeladene Leiter. Befindet sich ein elektrischer Dipol in einem *homogenen* elektrischen Felde E , so wirken auf seine beiden „Pole“, d. h. auf seine beiden entgegengesetzt gleichen Ladungen gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, $+eE$ und $-eE$. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar, welches ein Drehmoment auf den Dipol ausübt, so daß er sich mit seiner elektrischen Achse in die Richtung des Feldes einzustellen sucht (Abb. 264a). Ist l der Abstand (der Schwerpunkte) seiner beiden Ladungen $+e$ und $-e$, also sein elektrisches Moment (§ 133) $M = el$, so ist dieses Drehmoment $N = elE \sin \varphi = ME \sin \varphi$ oder in vektorieller Schreibweise $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M} \mathfrak{E}]$. Ein homogenes Feld hat also auf einen Dipol lediglich eine *richtende*, keine beschleunigende Wirkung.

Ist aber das Feld, in dem sich ein elektrischer Dipol befindet, *inhomogen*, so ist die Feldstärke am Ort seiner positiven und negativen Ladung im allgemeinen sowohl nach Größe wie nach Richtung verschieden (Abb. 264b). Die

Summe der auf den Dipol wirkenden Einzelkräfte ergibt dann im allgemeinen ein Kräftepaar und eine resultierende Einzelkraft R . Die letztere treibt den Dipol nach derjenigen Seite — wenn auch im allgemeinen nicht genau in diejenige Richtung — nach der die größere Feldstärke weist. Er bewegt sich in Richtung wachsender Feldstärke; er wird, wie man sagt, *in das Feld hineingezogen*.

Wir wollen den einfachen Fall betrachten, daß das Feld am Ort des Dipols überall die gleiche Richtung (x -Achse eines Koordinatensystems) habe, und daß der Dipol mit seiner Achse bereits in der Feldrichtung liege (Abb. 264c). Die Stärke des Feldes nehme in der positiven Feldrichtung zu. Es sei E der Betrag der Feldstärke am Orte der negativen Dipolladung $-e$. Dann ist bei nicht zu schneller örtlicher Änderung der Feldstärke am Orte der Dipolladung $+e$ der Betrag der Feldstärke $E + l \frac{dE}{dx}$. Die Resultierende der beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte liegt dann in Richtung des Feldes und hat den Betrag

$$+e \left(E + l \frac{dE}{dx} \right) - eE = el \frac{dE}{dx} = M \frac{dE}{dx} \text{ dyn.} \tag{16}$$

Maßgebend für die auf den Dipol wirkende Kraft ist daher erstens nicht die Feldstärke selbst, sondern ihr Differentialquotient, ihr örtliches Gefälle. Die Kraft ist um so größer, je größer dieses, also je inhomogener das Feld ist. Zweitens hängt sie nicht von den Ladungen e an sich, sondern wieder von dem elektrischen Moment M des Dipols ab. Wir sehen, daß für das Verhalten von Dipolen stets das *Moment*, nicht die Polstärke, die maßgebende Größe ist.

Bringt man einen *ungeladenen* Leiter in ein elektrisches Feld, so wird er wie wir gesehen haben, durch Influenz zu einem elektrischen Dipol (Abb. 263). Es muß daher auch für einen solchen das vorstehend Gesagte gelten. Ist

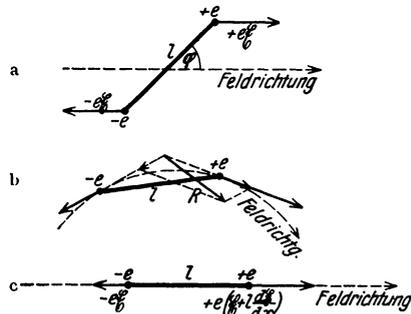


Abb. 264. Dipol a im homogenen, b und c im inhomogenen Felde.

das Feld homogen, so kann es nur eine drehende Wirkung auf den Leiter ausüben. Bei jedem länglich geformten Leiter muß das zur Folge haben, daß er sich mit seiner Längsachse in die Feldrichtung einzustellen sucht. Im inhomogenen Felde muß sich ein durch Influenz zu einem Dipol gewordener Leiter genau so verhalten wie der oben betrachtete Dipol. Auch er wird in Richtung wachsender Feldstärke getrieben, in das Feld hineingezogen. Sehr inhomogene Felder haben wir im allgemeinen in der Nähe nicht sehr ausgedehnter geladener Körper. Die Feldstärke nimmt mit der Entfernung mehr oder weniger schnell ab. Die Folge ist, daß jeder ungeladene Leiter in Richtung auf die das Feld erzeugende Ladung getrieben wird, *ein geladener Körper zieht einen ungeladenen Leiter an*. Damit haben wir jetzt auch die Erklärung für die Beobachtung 1 in § 130 gefunden.

Die Anziehung zwischen einem geladenen und einem ungeladenen Körper ist natürlich eine gegenseitige (Wechselwirkungsgesetz, § 16). Steht daher eine Ladung einem ungeladenen leitenden Körper gegenüber, z. B. einer Metallplatte,

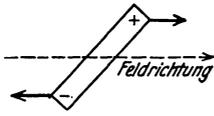


Abb. 265. Ungeladener Leiter im homogenen Felde.

so wird sie von diesem angezogen. Man kann zeigen, daß diese Kraft so groß ist, wie wenn sich eine Ladung von entgegengesetztem Vorzeichen *hinter* der Oberfläche des Körpers befände, und zwar im Falle einer Ebene eine gleich große Ladung am Orte des Spiegelbildes der Ladung. Man spricht daher von dem *elektrischen Bild* einer Ladung und nennt die anziehende Kraft die *Bildkraft*.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß es zur Anstellung von quantitativ einwandfreien elektrostatischen Versuchen nötig ist, alle beteiligten Ladungen von leitenden Körpern und auch vom Erdboden möglichst entfernt zu halten, damit nicht durch die Bildkräfte störende Einflüsse auftreten.

141. Kapazität. Kondensatoren. Es seien A und B zwei Leiter, die sich von anderen Leitern weit entfernt, in einem gewissen Abstände voneinander befinden. Auf A befinde sich eine positive Ladung $+e$, auf B eine ebenso große negative Ladung $-e$. Alle von A ausgehenden elektrischen Kraftlinien endigen dann auf B , und es besteht zwischen A und B ein elektrisches Feld. Daraus folgt, daß zwischen A und B auch eine Spannung herrschen muß.

Denn wir erhalten, wenn wir nach § 137 das Integral $U = -\int_A^B \mathfrak{E} dr$ für irgend-

einen die Leiter verbindenden Weg ausführen, einen bestimmten endlichen Wert der Spannung U . Und zwar hat der positiv geladene Leiter A gegenüber B eine positive Spannung. Nun ist aber die Feldstärke in jedem Punkt des die Leiter umgebenden Raumes dem Absolutbetrag e der auf ihnen befindlichen Ladungen proportional, so daß wir setzen können $\mathfrak{E} = -e \cdot \mathfrak{R}$, wobei der Vektor \mathfrak{R} lediglich eine Funktion der Raumkoordinaten ist, d. h. er hängt in jedem Raumpunkt nur von den geometrischen Verhältnissen des Systems — von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der beiden Leiter — ab. Es ist daher

$$U = e \int_A^B \mathfrak{R} dr = \frac{e}{C}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{C} = \int_A^B \mathfrak{R} dr.$$

Für die durch vorstehende Gleichung definierte Größe C gilt das gleiche, was über den Vektor \mathfrak{R} gesagt wurde, sie ist lediglich durch die geometrischen Verhältnisse des Leitersystems gegeben. Man nennt C die *Kapazität* des Leitersystems AB . Es ist also

$$\text{die Spannung zwischen } A \text{ und } B: U = \frac{e}{C} \quad (17a)$$

$$\text{bzw. der Betrag der Ladungen auf } A \text{ und } B: e = CU. \quad (17b)$$

Es besteht demnach zwischen zwei Leitern, welche gleich große, entgegengesetzte Ladungen tragen, eine dem Betrage dieser Ladungen proportionale Spannung [Gl. (17a)]. Durch Umkehrung der vorstehenden Überlegungen folgt aber auch, daß auf zwei einzelnen Leitern, zwischen denen eine Spannung herrscht, gleich große Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens sitzen müssen, deren Betrag der Spannung proportional ist [Gl. (17b)], sofern Kraftlinien nur zwischen den beiden Leitern verlaufen, aber nicht auch von ihnen nach anderen Körpern in der Umgebung.

Ein System von zwei Leitern besitzt die *elektrostatische Einheit der Kapazität*, wenn die zwischen den beiden Leitern herrschende Spannung U und die infolgedessen auf ihnen befindlichen Ladungen e die gleiche Maßzahl im elektrostatischen Maßsystem haben. Diese Einheit der Kapazität heißt 1 cm. Daß hier eine Länge als Einheit auftreten muß, kann man sich leicht klarmachen, wenn man bedenkt, daß $U = e/C$ als Spannung die gleiche Dimension hat wie das Potential e/r in Gl. (14). Die Kapazität C muß also die gleiche Dimension haben, wie die Länge r .

Die *internationale Einheit der Kapazität* ergibt sich, wenn man in der vorstehenden Definition die elektrostatischen durch die internationalen Einheiten (Volt, Coulomb) ersetzt. Sie heißt 1 Farad (F) bzw. 1 Mikrofarad (μF). Es ist

$$1 \text{ Farad} = 10^6 \text{ Mikrofarad} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm.}$$

Wir wollen die Kapazität in einem Sonderfall berechnen, und zwar für eine Kugel vom Radius R , die von einer konzentrischen Kugelfläche vom Radius R' umgeben ist. Die innere Kugel trage eine Ladung $+e$, die äußere eine Ladung $-e$. Alle von $+e$ ausgehenden Kraftlinien endigen auf $-e$. Die radial gerichtete Feldstärke beträgt im Abstände r vom Kugelzentrum $E = e/r^2$ [Gl. (5a) und § 138], und wir erhalten für die zwischen den Kugelflächen herrschende Spannung

$$U = \frac{e}{C} = - \int_{R'}^R \frac{e dr}{r^2} = e \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right); \quad C = \frac{R' R}{R' - R}.$$

Ist $R' \gg R$, so ergibt sich

$$U = \frac{e}{R} = \frac{e}{C}; \quad C = R \text{ cm,} \quad (18)$$

wie man durch Vergleich mit Gl. (17a) erkennt. Die Kapazität einer leitenden Kugel gegenüber einer weit entfernten leitenden Umgebung ist also im elektrostatischen Maßsystem gleich ihrem in Zentimeter gemessenen Radius. Das gilt z. B. schon recht genau für eine metallische Kugel gegenüber den Wänden eines Zimmers, wenn sie nur ausreichend weit von ihnen entfernt ist.

Der Radius der Erde beträgt 6370 km. Demnach hat die Erde gegenüber den anderen Himmelskörpern eine Kapazität von $6,37 \cdot 10^8$ cm oder rund 700 Mikrofarad. In der Erdatmosphäre besteht ein radial auf die Erde hin gerichtetes elektrisches Feld (Erdfeld), das in der Nähe der Erde etwa $1,3 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}$ beträgt, und dessen Stärke nach oben hin abnimmt. Die Erde besitzt also eine negative Ladung. Die Spannung gegen die Erde nimmt mit der Höhe zu und beträgt in den höchsten erforschten Atmosphärenschichten (etwa 35 km) rund 200000 Volt. Aus der Feldstärke an der Erdoberfläche berechnet sich die negative Erdladung nach (Gl. 5a) zu rund 600000 Coulomb.

Vorrichtungen, welche ihrer Kapazität wegen hergestellt und benutzt werden, bezeichnet man als *Kondensatoren*. In einzelnen einfachen Fällen kann man die Kapazität eines Kondensators leicht berechnen. Eine praktisch besonders wichtige Kondensatorform ist der Plattenkondensator. Er besteht aus zwei im Abstände d voneinander befindlichen, meist gleich großen Metallplatten,

deren Fläche F sei (Abb. 266). Legt man an die beiden Platten eine Spannung U und ist C die Kapazität des Kondensators, so befindet sich auf der einen Platte die Ladung $e = +CU$, auf der anderen eine gleich große negative Ladung. Ist der Plattenabstand d klein gegen die Abmessungen der Flächen F , so verlaufen die Kraftlinien zwischen diesen beiden Ladungen praktisch sämtlich senkrecht von einer Platte zur anderen¹. Auf der Flächeneinheit der Platten befinden sich die Ladungen $+e/F$ bzw. $-e/F$. Es laufen also von jedem Quadratcentimeter der positiven Platte $4\pi e/F$ Kraftlinien zur negativen Platte [Gl. (6)]. Daher

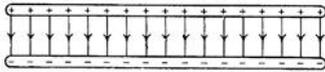


Abb. 266. Plattenkondensator.

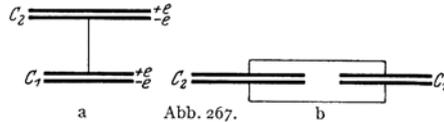
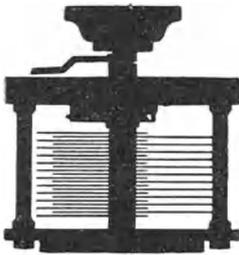


Abb. 267. a Kondensatoren in Reihenschaltung, b in Parallelschaltung.

ist die Feldstärke im Innern des Kondensators auch $E = 4\pi e/F$. Zwischen U und E besteht nach Gl. 10, von dem hier bedeutungslosen Vorzeichen abgesehen, die Beziehung $U = Ed$. Es ergibt sich also

$$U = \frac{4\pi d}{F} e = \frac{e}{C}, \quad \text{und die Kapazität beträgt} \quad C = \frac{F}{4\pi d}. \quad (19)$$



Man kann mehrere Kondensatoren durch geeignete Verbindung ihrer Platten in verschiedener Weise zusammenschalten und dadurch andere Kapazitätsbeträge herstellen. Eine einfache Rechnung ergibt, daß die Kapazität zweier hintereinander geschalteter Kondensatoren C_1 und C_2 gleich $C_1 C_2 / C_1 + C_2$, also stets kleiner als C_1 und C_2 ist (Abb. 267a). Die Kapazität zweier parallel geschalteter Kondensatoren beträgt $C_1 + C_2$ (Abb. 267b).

Kondensatoren von größerer Kapazität kann man so herstellen, daß man zwei voneinander isolierte Systeme von unter sich verbundenen parallelen Platten ineinandergreifen läßt. Macht man das eine Plattensystem drehbar, so daß es sich mehr oder weniger weit zwischen die Platten des anderen Systems hineinschieben läßt, so erhält man einen Drehkondensator (Abb. 268) von stetig veränderlicher Kapazität. Solche finden zu Meßzwecken und insbesondere auch in der elektrischen Schwingungstechnik (Rundfunkgeräte usw.) Verwendung.

Technische Kondensatoren werden vielfach so hergestellt, daß man zwei lange Stanniolstreifen durch Streifen aus paraffingetränktem Papier gegeneinander isoliert und zwecks größerer Handlichkeit aufrollt. Man kann auf diese Weise große Flächen F und kleine Abstände d , also große Kapazitäten, erzielen. Der Einfluß, den das paraffinierte Papier (Dielektrikum) hat — bisher haben wir stets Luft als zwischen den Platten befindlich angenommen —, wird im § 144 erörtert werden.

Die Summe der Ladungen, die sich auf den beiden Platten eines Kondensators befinden, ist wegen der gleichen Größe der positiven und negativen Ladung Null. Es ist aber üblich, als Ladung eines Kondensators den Betrag der Elektrizitätsmenge zu bezeichnen, welche sich auf jeder einzelnen seiner Platten befindet.

¹ Tatsächlich sind bei einem Plattenkondensator die Kraftlinien am Rande ein wenig nach außen gekrümmt. Dies bewirkt eine geringe Vergrößerung der Kapazität, die aber um so weniger ins Gewicht fällt, je kleiner der Plattenabstand d gegenüber dem Durchmesser der Plattenflächen ist. Auch ist hier vorausgesetzt, daß sich in der nächsten Umgebung des Kondensators keine anderen Leiter befinden.

Man sagt also, daß ein Kondensator die Ladung e trägt, wenn sich auf seinen Platten die Ladungen $+e$ und $-e$ befinden.

142. Das Elektrometer als Spannungsmesser. Wir sind nunmehr in der Lage, die Wirkungsweise der Elektrometer genauer zu verstehen. Dabei sei vorweg bemerkt, daß man zwar mit ihnen, wie in § 135 besprochen, Elektrizitätsmengen nachweisen und unter Umständen auch messen kann, daß aber ihr wichtigster Verwendungszweck die Messung von Spannungen ist.

Wenn man mit dem Elektrometer eine Spannung messen will, so legt man diese zwischen das isolierte bewegliche System (z. B. die Blättchen) und das Gehäuse des Elektrometers (Abb. 269). Letzteres wird stets mit der Erde leitend verbunden (geerdet). Damit ist das Innere des Elektrometers vor äußeren elektrischen Störungen geschützt (§ 138). Das Elektrometer mit seinen beiden voneinander isolierten Teilen (Blättchen einerseits, Gehäuse andererseits) bildet eine Leiterkombination von der in § 140 betrachteten Art und hat als solche eine bestimmte Kapazität C , die durch seine geometrischen Verhältnisse bedingt ist. Demnach befindet sich auf dem isolierten Teil nach Anlegen einer Spannung U gegen das Gehäuse eine Ladung $e = CU$ und auf dem Gehäuse eine entgegengesetzt gleichgroße Ladung. Ein Teil der Ladung des isolierten Teiles sitzt auf den beweglichen Blättchen, und da wegen der Spannung zwischen Blättchen und Gehäuse in dessen Innern ein elektrisches Feld besteht, so werden die geladenen Blättchen von diesem in Richtung auf das Gehäuse getrieben. (Es liegt hier ein ganz analoger Fall zu der in § 143 zu besprechenden Anziehung der Platten eines Kondensators vor.) Nun wächst das elektrische Feld im Innern mit der angelegten Spannung U , und das gleiche gilt für die Ladung der Blättchen. Die auf die Blättchen wirkende Kraft ist dem Produkt aus Feldstärke und Ladung proportional, der Ausschlag wächst also mit der angelegten Spannung.

Ist das Elektrometer einmal mit Hilfe bekannter Spannungen geeicht, so kann es zur *Messung von Spannungen* dienen. Und zwar bleibt die einmal vorgenommene Spannungseichung auch dann noch gültig, wenn die Kapazität der außen an das Elektrometer angeschlossenen Gebilde (Zuleitungen usw.) sich ändert. Es geht zwar dann beim Anlegen einer Spannung eine andere Elektrizitätsmenge auf die Meßvorrichtung als Ganzes über, aber an den Verhältnissen innerhalb des Gehäuses ändert sich bei gleichbleibender Spannung nichts.

Natürlich kann man ein Elektrometer auch auf Elektrizitätsmengen eichen. Diese Eichung gilt aber nur, solange sich die Kapazität der mit den Blättchen leitend verbundenen Gebilde nicht ändert. Ist einmal eine bestimmte Elektrizitätsmenge auf das Elektrometer gebracht, so verteilt sie sich dort auf den Blättchentträger und die Zuleitungen im Verhältnis der betreffenden Kapazitäten. Ändert man nun dieses Verhältnis, so ändert sich auch die Verteilung und infolgedessen auch der Ausschlag, der nur von der Größe desjenigen Ladungsanteils abhängt, der auf die Blättchen entfällt.

Man verbinde die eine Platte eines Plattenkondensators, dessen Plattenabstand man verändern kann, oder das eine Plattensystem eines Drehkondensators mit den Blättchen eines Elektroskops, die andere Platte, bzw. das andere Plattensystem, mit dessen Gehäuse (Abb. 270), so daß die Kapazitäten des Kondensators und des Elektroskops parallel geschaltet sind, sich also addieren, und bringe auf den Kondensator eine Ladung, deren Vorhandensein durch

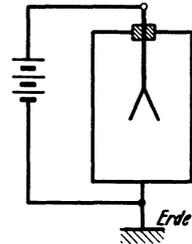


Abb. 269. Schema der Spannungsmessung mit dem Elektrometer.

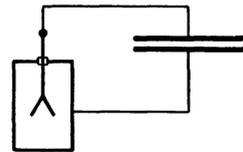


Abb. 270. Nachweis der Veränderlichkeit einer Kapazität.

einen Ausschlag des Elektroskops angezeigt wird. Ändert man jetzt die Kapazität des Kondensators durch Änderung des Plattenabstandes bzw. Drehen des einen Plattensystems, so ändert sich auch der Ausschlag. Je kleiner die Kapazität des Kondensators ist, um so größer ist der Ausschlag. Denn die Ladung auf dem ganzen, aus Kondensator und Elektroskop bestehenden System, dessen Kapazität C sei, ist konstant, daher auch nach Gl. (17b) das Produkt UC . Die vom Elektroskop angezeigte Spannung U ist also bei gegebener Ladung e der Kapazität C des Systems umgekehrt proportional.

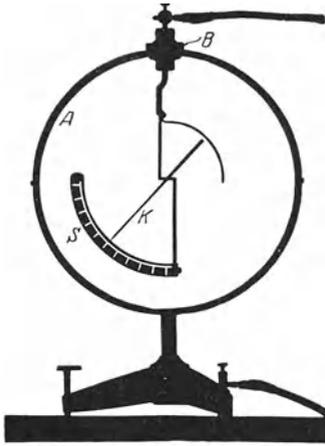


Abb. 271. BRAUNSCHEs Elektrometer
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

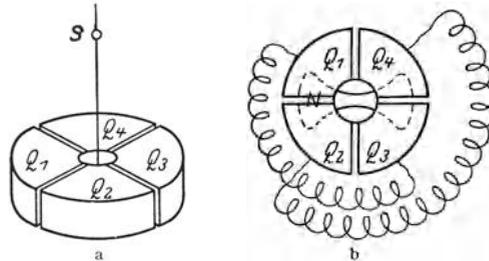


Abb. 272. Quadrantelektrometer. Schema.

Wir wollen im folgenden noch einige wichtigere Elektrometertypen kurz besprechen. Von dem Blättchenelektrometer ist bereits in § 135 die Rede gewesen. Zum gleichen Typus gehört auch das BRAUNSCHE Elektrometer (Abb. 271).

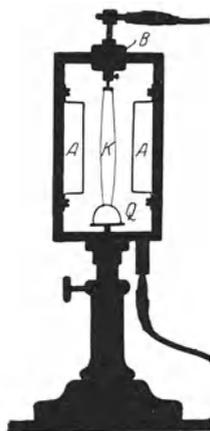


Abb. 273. Schema eines
Zweifaden-Elektrometers.
(Aus POHL: Elektrizitäts-
lehre.)

Das Quadrantelektrometer besteht aus einer in vier Quadranten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 geteilten kreisförmigen metallischen Schachtel. Die Quadranten sind isoliert und durch schmale Zwischenräume voneinander getrennt (Abb. 272). Innerhalb der Schachtel hängt an einem sehr dünnen Metalldraht, Metallband oder metallisierten Quarzfaden der bewegliche Teil N des Elektrometers, den man als Nadel zu bezeichnen pflegt, ein lemniskatenförmiges Gebilde aus Aluminiumblech oder metallisiertem Papier. Das Ganze ist in ein metallisches Gehäuse eingeschlossen. Die Quadranten sind zu je zwei kreuzweise leitend verbunden. Bei der Spannungsmessung kann man z. B. so verfahren, daß man ein Quadrantenpaar mit dem geerdeten Gehäuse verbindet, an das zweite Quadrantenpaar eine konstante Hilfsspannung legt und die Nadel auf die zu messende Spannung bringt. Dann besteht zwischen den Quadrantenpaaren ein elektrisches Feld; und da die Nadel infolge ihrer Spannung (und ihrer Kapazität gegenüber den Quadranten) eine Ladung trägt, so wird sie durch dieses Feld um so stärker gedreht, je größer ihre Ladung, also auch je größer die an

ihr liegende Spannung ist. Die Drehungen werden meist mittels Spiegelablesung, d. h. mit Hilfe eines mit der Nadel fest verbundenen Spiegelchens S gemessen. Es gibt noch eine größere Zahl verwandter Ausführungsformen und einige andere Schaltungen.

Bei den Saiten- oder Fadenelektrometern besteht der bewegliche Teil aus einem oder zwei feinen Platindrähten. Abb. 273 zeigt das Schema eines Zweifaden-Elektrometers. Den beiden Fäden K , welche zwecks Regelung der Emp-

findlichkeit unten an einem verstellbaren Quarzbügel Q befestigt sind, stehen zwei mit dem Gehäuse verbundene Drahtbügel A gegenüber. Legt man zwischen Gehäuse und Fäden eine Spannung, so spreizen sich die Fäden um so weiter auseinander, je höher diese Spannung ist. Ihr Abstand wird mit einem Mikroskop mit Okularmikrometer abgelesen.

143. Die Energie eines geladenen Kondensators. Die Anziehung der Kondensatorplatten. Elektrische Energiedichte. Um die in einem geladenen Kondensator aufgespeicherte Energie zu berechnen, verfährt man am einfachsten so, daß man die Arbeit berechnet, die notwendig ist, um die Ladung des Kondensators schrittweise herzustellen. Dazu kann folgendes Gedankenexperiment dienen. Es herrsche an dem Kondensator bereits die Spannung U , seine Ladung sei also $e = CU$. Wir wollen jetzt seine Ladung um den sehr kleinen Betrag de vergrößern, indem wir der negativen Platte noch eine positive Ladung $+de$ entziehen und sie gegen die Richtung des im Kondensator bereits herrschenden Feldes $E = U/d$ auf die positive Platte bringen. (Oder richtiger: indem wir der positiven Platte Elektronen im Betrage de entziehen und sie gegen die Kraft des Feldes auf die negative Platte bringen. Die dazu nötige Arbeit ist natürlich die gleiche.) Dazu ist nach Gl. (7) die Arbeit $dA = Ude$ erg aufzuwenden. Wir erhalten demnach die Arbeit, die insgesamt notwendig ist, um den anfangs ungeladenen Kondensator bis zur Ladung e aufzuladen, durch Integration,

$$A = \int_0^e U de = \frac{1}{C} \int_0^e e de = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} e U \text{ erg.} \quad (20)$$

Auf der rechten Seite bedeutet jetzt U die Endspannung des Kondensators, $U = e/C$. A ist also der Betrag der in dem geladenen Kondensator aufgespeicherten Energie. Sie wird bei der Entladung wieder frei.

Zwischen den Platten des geladenen Kondensators besteht wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Ladung seiner beiden Platten eine anziehende Kraft k , die wir aus Gl. (20) berechnen können. Es sei x der Abstand der beiden Platten eines Plattenkondensators. Wir vergrößern ihn jetzt um den Betrag dx . Dann ist die dabei zu leistende Arbeit $dA = k \cdot dx$ erg. Wir erhalten also k , indem wir aus Gl. (20) $k = dA/dx$ bilden,

$$k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{C} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} U^2 C \right) \text{ dyn.} \quad (21a)$$

Führen wir aus Gl. (19) (unter Ersetzung von d durch x), den Ausdruck für die Kapazität $C = F/4\pi x$ ein, so ist $A = e^2 \frac{2\pi x}{F}$ und

$$k = \frac{2\pi e^2}{F} = \frac{2\pi C^2 U^2}{F} = \frac{F}{8\pi x^2} \cdot U^2 = \frac{F}{8\pi} \cdot E^2 \text{ dyn,} \quad (21b)$$

da $U/x = E$ die Feldstärke im Kondensator ist.

Daß die Kraft k bei *gegebener Ladung* e ($k = 2\pi e^2/F$) nicht vom Plattenabstande abhängt, erklärt sich ohne weiteres dadurch, daß sich ja bei einer Änderung des Abstandes die nur von der Ladung e abhängige Zahl der im Kondensator verlaufenden Kraftlinien, also die Feldstärke im Kondensator, nicht ändert. Und diese ist es, die die Kraft auf die Ladungen der Platten hervorruft. (Dabei ist allerdings von der Randwirkung (§ 141, Fußnote) abgesehen, die bewirkt, daß die Kraft bei Vergrößerung des Abstandes tatsächlich allmählich abnimmt.) Die Spannung zwischen den Platten wächst bei konstanter Ladung proportional mit dem Abstände. Bei *konstanter Spannung* U dagegen ($k = F U^2 / 8\pi x^2$) nimmt die Kraft mit zunehmendem Abstände wie

$1/x^2$ ab. Denn je größer der Abstand ist, um so kleiner ist die Kapazität und um so kleiner sind dann auch die Ladungen und die zwischen ihnen wirkenden Kräfte.

Die zwischen den Platten eines geladenen Plattenkondensators wirkende Kraft kann dazu dienen, Spannungen auf mechanischem Wege zu messen. Man verfährt dabei so, daß man die eine Platte an eine Waage hängt und ihr die andere fest gegenüberstellt. Die Anziehung der ersten Platte durch die zweite wird gemessen, indem man sie durch Gewichte auf der anderen Seite der Waage kompensiert (Potentialwaage, absolutes Elektrometer von W. THOMSON). Es ist dann nach Gl. (21b) $U^2 = 8\pi x^2 k/F$, wobei k in dyn gemessen werden muß, um U in elektrostatischen Einheiten zu erhalten.

Bei der obigen Ableitung der in einem Kondensator aufgespeicherten Energie haben wir uns vorgestellt, daß Ladungsträger von der einen Platte des Kondensators zur anderen überführt werden. An den Ladungsträgern an sich ist dabei keinerlei Veränderung vorgegangen. Was sich geändert hat, ist die Feldstärke im Kondensator, hier liegt also die eigentliche Veränderung, und es ist demnach folgerichtig, als Sitz der im Kondensator aufgespeicherten Energie das elektrische Feld zwischen seinen Platten zu betrachten. (Ebenso wie die Energie, die in einem aus zwei durch eine gespannte Feder verbundenen Massen bestehenden System enthalten ist, ihren wirklichen Sitz in der Feder hat.) Setzen wir in Gl. (20) $C = F/4\pi d$, so ist die Feldenergie im Kondensator $A = FU^2/8\pi d$ erg. Ist E die Feldstärke im Kondensator, so ist $U = Ed$ und $A = \frac{1}{8\pi} E^2 \cdot Fd$ erg. Nun ist aber Fd das Volumen des felderfüllten Raumes zwischen den Kondensatorplatten. Demnach ist der auf die Volumeinheit des Feldes entfallende Energiebetrag, die *Energiedichte* des Feldes,

$$\rho_e = \frac{1}{8\pi} E^2 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (22)$$

Diese Gleichung gilt allgemein für jedes elektrische Feld im Vakuum [vgl. aber § 144, Gl. (29)].

144. Dielektrika. Polarisation. Dielektrische Verschiebung. Wenn man die in Abb. 270 dargestellte Vorrichtung, wie dort beschrieben, auflädt und alsdann zwischen die Platten des Kondensators eine Platte aus einem nicht leitenden Stoff (Dielektrikum, § 134) einschiebt oder den geladenen Kondensator in eine nicht leitende Flüssigkeit taucht, so sinkt der Ausschlag des Elektrometers, also auch die Spannung am Kondensator. Das beweist, daß die Kapazität des Kondensators durch die Einführung des Dielektrikums vergrößert wird. Denn die Ladung des Systems bleibt unverändert, wie man erkennt, wenn man das Dielektrikum wieder entfernt. Also muß die Kapazität $C = e/U$ größer geworden sein.

Diese Erscheinung erklärt sich auf folgende Weise. Die Dielektrika sind, wie alle Stoffe, aus atomaren Ladungsträgern aufgebaut. Diese sind in ihnen aber, im Gegensatz zu den Leitern, nicht frei beweglich. Man muß hier verschiedene Fälle unterscheiden. Unter den festen Dielektrika gibt es eine Gruppe von Stoffen, die aus positiven und negativen Ionen aufgebaut sind (z. B. die Steinsalzkristalle, § 314). Diese Ionen haben bestimmte Gleichgewichtslagen, aus denen sie ein elektrisches Feld zwar ein wenig verschieben, aber nicht völlig entfernen kann. Daher werden die positiven Ionen *in* der Feldrichtung, die negativen ihr *entgegen* verschoben, und zwar um so mehr, je größer die Feldstärke ist. Infolgedessen tritt an derjenigen Endfläche des Körpers, aus der die Kraftlinien des Feldes austreten, eine positive Oberflächenladung auf, an der andern Endfläche eine negative Oberflächenladung, wie Abb. 274 schematisch zeigt. Diese Erscheinung heißt *dielektrische Polarisation* (FARADAY 1837).

Unter den übrigen Dielektrika gibt es solche, deren Moleküle *von Natur* elektrische Dipole sind. Da aber alle Atome und Moleküle aus elektrisch geladenen Bausteinen bestehen, so werden auch die Moleküle anderer Dielektrika im elektrischen Felde zu Dipolen. Denn ihre positiven und negativen Ladungen werden durch das Feld nach entgegengesetzten Richtungen gezogen, und es tritt am Molekül ein elektrisches Moment auf. Die natürlichen molekularen Dipole suchen sich in die Feldrichtung einzustellen, die Dipole der zweiten Art sind schon an sich dem Felde gleichgerichtet. Die Wirkung dieser Ausrichtung ist offensichtlich die gleiche, wie sie in Abb. 274 dargestellt ist, da die eine Endfläche mit positiven, die andere mit negativen Dipolenden besetzt ist.

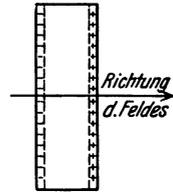


Abb. 274. Schema der dielektrischen Polarisation.

Befindet sich ein Dielektrikum zwischen den Platten eines geladenen Kondensators, so wird es durch das Feld im Kondensator polarisiert. Auf der Endfläche, die der positiven Platte zugekehrt ist, entsteht eine negative Oberflächenladung $-e'$, auf der andern Endfläche eine positive Oberflächenladung $+e'$ (Abb. 275). Der Kondensator werde auf konstanter Spannung U gehalten, so daß sich auf seinen Platten eine bestimmte Ladung $e_0 = U/C_0$ befindet, wenn er kein Dielektrikum enthält, und wenn C_0 seine Kapazität in diesem Zustande ist. Wird nunmehr ein Dielektrikum eingeführt, so erzeugen die an ihm auftretenden Polarisationsladungen e' an den Platten gleich große, zusätzliche Influenzladungen entgegengesetzten Vorzeichens, die also die Ladungen der Platten verstärken. Diese betragen nunmehr $e_0 + e'$. Es gehen von ihnen jetzt $4\pi(e_0 + e')$ Kraftlinien aus, von denen aber $4\pi e'$ so gleich wieder an den anliegenden Polarisationsladungen enden, so daß nur $4\pi e_0$ Kraftlinien in das Dielektrikum eintreten. Das Feld E bleibt also das gleiche wie vor Einführung des Dielektrikums.

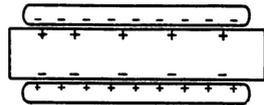


Abb. 275. Dielektrikum im Kondensator.

Die Fläche der Kondensatorplatten betrage F , die auf deren Flächeneinheit entfallende Polarisationsladung, die *Polarisation*, betrage P , so daß $e' = FP$. Von der Ladung e_0 gehen $4\pi e_0$ Kraftlinien aus. Von 1 cm^2 der Platten gehen also $4\pi e_0/F$ Kraftlinien in das Innere des Dielektrikums, und es ist daher $E = 4\pi e_0/F$ oder $e_0 = FE/4\pi$. Demnach beträgt die Ladung des Kondensators mit Dielektrikum

$$e = e_0 + e' = F \left(\frac{E}{4\pi} + P \right) = F \frac{E + 4\pi P}{4\pi} = F \frac{D}{4\pi}. \tag{23}$$

Die hierdurch definierte Größe

$$D = E + 4\pi P \tag{24}$$

heißt die *dielektrische Verschiebung*. Sie ist, wie die Feldstärke, ein Vektor \mathfrak{D} vom Betrage D . Auch die Polarisation ist als ein Vektor \mathfrak{P} vom Betrage P aufzufassen (s. unten).

Die Polarisation P ist der Feldstärke E proportional. Außerdem ist sie um so größer, je größer die Zahl n der Moleküle in 1 cm^3 des Dielektrikums ist. Wir setzen daher

$$P = n \gamma E. \tag{25}$$

Dann folgt aus Gl. (24)

$$D = (1 + 4\pi n \gamma) E = \epsilon E \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}. \tag{26}$$

Die Größe

$$\epsilon = (1 + 4\pi n \gamma) \tag{27}$$

heißt die *Dielektrizitätskonstante* des Dielektrikums. Sie ist bei allen Stoffen größer als 1, für das Vakuum ($n = 0$) gleich 1. Tabelle 19 gibt einige Zahlenwerte. Die Dielektrizitätskonstanten der Gase sind von 1 nur sehr wenig verschieden, weil bei ihnen die Zahl n klein und deshalb auch $4\pi n\gamma \ll 1$ ist.

Tabelle 19. Dielektrizitätskonstanten.

Paraffinöl	2,2	Glimmer	6—8
Petroleum	2,0	Hartgummi	2,7
Wasser	81	Luft	1,0006
Bernstein	2,8	Vakuum	1,0000
Glas	5—7		

Es macht daher nur einen sehr geringen Unterschied, ob sich ein Kondensator in Luft oder im Vakuum befindet.

Da $e = FD/4\pi$, $e_0 = FE/4\pi$, so ist $e/e_0 = D/E = \varepsilon$. Die Ladung des Kondensators ist also bei gleicher Spannung mit Dielektrikum um den Faktor ε größer als ohne Dielektrikum, und das gleiche gilt demnach auch für seine Kapazität. Sie beträgt mit Dielektrikum

$$C = \varepsilon C_0. \quad (28)$$

Die Kapazität des Kondensators wird also durch das Dielektrikum auf das ε -fache erhöht.

Wie man leicht berechnet, beträgt die Polarisationsladung e' des Dielektrikums $e' = e(1 - 1/\varepsilon)$.

Abb. 276.
Leidener
Flasche.

Durch die Polarisation wird das Dielektrikum zu einem elektrischen Dipol mit den Ladungen $+PF$ und $-PF$, deren Abstand gleich dem Plattenabstand d ist. Es besitzt also das elektrische Moment $M = PFd = PV$, wenn $V = Fd$ das Volumen des im Kondensator befindlichen Dielektrikums ist. Daher ist die Polarisation $P = M/V$, also gleich dem auf die Volumeinheit des Dielektrikums entfallenden elektrischen Moment, und sie ist wie dieses ein Vektor. Aus Gl. (25) folgt, daß γE der Betrag ist, den jedes einzelne Molekül bei der Feldstärke E zum elektrischen Moment des Dielektrikums beiträgt. γ ist also die Größe dieses Beitrages bei der Feldstärke $E = 1$ elektrostatische Einheit.

Es ist hiernach leicht ersichtlich, daß γ und damit auch die Dielektrizitätskonstante ε bei denjenigen Stoffen, deren Moleküle von Natur Dipole sind, mit steigender Temperatur abnehmen muß. Denn je höher die Temperatur ist, um so mehr wird die Ausrichtung der Dipole in die Feldrichtung durch die Molekularbewegung gestört. Zur Polarisation aber tragen nur die in der Feldrichtung gelegenen Komponenten der elektrischen Momente bei, während die dazu senkrechten Komponenten über alle möglichen Richtungen im Durchschnitt gleichmäßig verteilt sind und sich gegenseitig aufheben.

Die Vergrößerung der Kapazität von Kondensatoren durch ein Dielektrikum findet vielfache Anwendung. Schon die älteste Kondensatorform, die *Leidener Flasche* (erfunden 1745 von VON KLEIST, Abb. 276), ist ein Kondensator mit Glas als Dielektrikum. Große technische Kondensatoren erhalten oft eine Ölfüllung. Die Anwesenheit eines Dielektrikums hat auch den Vorteil, daß ein Funkenüberschlag zwischen den Platten erst bei höherer Spannung eintreten kann. Da jeder Stoff zum mindesten eine schwache Spur von Leitfähigkeit besitzt, und da ferner in den meisten Stoffen gewisse Nachwirkungen einer vorhergegangenen Polarisation kürzere oder längere Zeit zurückbleiben, so sind die einzelnen Dielektrika für Kondensatoren verschieden gut geeignet.

Die Ladung, die ein Kondensator mit Dielektrikum bei gegebener Spannung aufnimmt, ist um den Faktor ε größer als ohne Dielektrikum. Daher ist auch die im Kondensator aufgespeicherte Energie um den gleichen Faktor größer. An Stelle der Gl. (22) ist also die allgemeinere Gleichung für die elektrische Energiedichte

$$Q_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon} D^2 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (29)$$

zu setzen.

Ein Körper mit der Ladung e sei in ein Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstante ε eingebettet. Genau wie beim Kondensator [Gl. (28)] bildet sich an der Grenzfläche des geladenen Körpers und des Dielektrikums durch Polarisation des letzteren im Felde der Ladung eine Ladung $-e(1-1/\varepsilon)$, deren Feld sich im Dielektrikum demjenigen der Ladung e überlagert und es schwächt. Das Feld ist im Dielektrikum also gleich demjenigen einer Ladung $e - e(1-1/\varepsilon) = e/\varepsilon$. Demnach bildet Gl. (2) nur den Sonderfall des COULOMBSchen Gesetzes für das Vakuum. Für zwei Ladungen e und e' , die sich in einem Dielektrikum befinden, muß es allgemein lauten

$$k = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e e'}{r^2}. \quad (30)$$

Daß auch die zweite Ladung von einer Hülle von Polarisationsladung umgeben ist, hat auf die sie ausgeübte Kraft natürlich keinen Einfluß.

Befindet sich ein dielektrischer Körper in einem elektrischen Dipol, so wird er durch die dielektrische Polarisation zu einem elektrischen Dipol. Es gilt daher das gleiche, was in § 140 über die Wirkung elektrischer Felder auf Dipole gesagt ist, sofern sich der dielektrische Körper im Vakuum befindet. Ist er jedoch in ein anderes Dielektrikum eingebettet, so hängt der Betrag und die Richtung der auf ihn wirkenden drehenden oder beschleunigenden Kräfte davon ab, ob seine Dielektrizitätskonstante größer oder kleiner ist als die des ihn umgebenden Dielektrikums. Ist sie größer, so bestehen qualitativ die gleichen Verhältnisse wie bei einem ungeladenen Leiter im elektrischen Felde. Im homogenen Felde stellt er sich mit seiner Längsachse *in die Feldrichtung* ein, im inhomogenen Felde bewegt er sich in Richtung *wachsender* Feldstärke. Ist jedoch seine Dielektrizitätskonstante die kleinere, so stellt er sich im homogenen Felde mit seiner Längsachse *senkrecht zur Feldrichtung*, im inhomogenen Felde wird er in Richtung *abnehmender* Feldstärke beschleunigt.

Die Kristalle bestehen aus raumgitterartig angeordneten Atomen oder aus Ionen entgegengesetzter Ladung (§ 314 und 365). Wir haben bereits bei der dielektrischen Polarisation gesehen, daß eine durch elektrische Kräfte hervorgerufene Verschiebung der positiven und negativen Ladungen eines solchen Gitters das Auftreten von Ladungen an den Grenzflächen eines Kristalls bewirkt. Das gleiche kann auch durch mechanische Einwirkungen geschehen. Es gibt Kristalle, z. B. Quarz, bei denen an der Oberfläche eine Polarisation auftritt, wenn man sie durch Druck verformt. Die Polarisation ist dem Druck proportional. Diese Erscheinung heißt *Piezoelektrizität*. Eine ähnliche Wirkung kann auch eine Erwärmung eines Kristalls haben (*Pyroelektrizität*). Zum Nachweis dieser Ladungen bestäubt man den Kristall z. B. mit einem Gemisch von Schwefel und Mennigepulver. In einem solchen ist durch Berührung (Reibung, § 164) der Schwefel negativ, die Mennige positiv elektrisch. Daher haftet das gelbe Schwefelpulver an den positiv elektrischen, das rote Mennigepulver an den negativ elektrischen Stellen der Kristalloberfläche.

Die Piezoelektrizität hat eine Umkehrung. Nicht nur bewirkt bei piezoelektrischen Körpern eine elastische Verformung eine Polarisation, sondern umgekehrt bewirkt auch eine durch ein elektrisches Feld, also durch eine an den Körper gelegte Spannung, erzwungene Polarisation eine elastische Verformung

des Körpers (*Elektrostriktion*), und zwar bei allen festen Dielektrika. Legt man an den Körper eine Wechsellspannung, deren Frequenz gleich einer mechanischen Schwingungsfrequenz des Körpers ist, so gerät er in mechanische Resonanz. Ein technisch wichtiges Beispiel hierfür ist der Quarz. Diese Erscheinung findet Anwendung zur Konstanthaltung der Wellenlänge von Rundfunksendern (*Schwingkristall*, *Quarzresonator*) und für die zur Zeit genauesten Zeitmessungen (*Quarzuhren*).

145. Elektrophor. Influenzmaschinen. Der Elektrophor ist ein Gerät zur Erzeugung (Trennung) elektrischer Ladungen. Er besteht aus einer Platte aus einer durch Reibung leicht zu elektrisierenden Masse¹ (dem „Kuchen“) und einer Metallplatte (dem „Deckel“) mit einem isolierenden Handgriff (Abb. 277). Der Kuchen wird durch Reiben oder Schlagen mit einem Katzenfell negativ elektrisiert. Stellt man den Deckel auf ihn, so tritt an seiner Unterseite durch Influenz positive, an seiner Oberseite negative Ladung auf. Leitet man letztere durch Berühren mit dem Finger zur Erde ab, so bleibt auf dem Deckel positive Ladung übrig, die man nun auf andere Körper übertragen kann. Da hierbei die Ladung des Kuchens kaum vermindert wird (sie befindet sich in der obersten Schicht und kann aus ihr nur sehr schwer austreten), so kann man diesen Versuch sehr oft wiederholen, ohne daß die Wirkung merklich abnimmt.

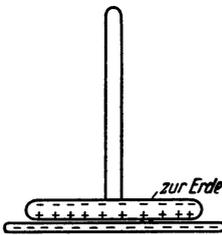


Abb. 277. Elektrophor.

Weit wirksamer als der Elektrophor sind die Influenzmaschinen. Die modernen Influenzmaschinen sind sehr verwickelt. Es soll daher lediglich eine einfache Vorrichtung besprochen werden, die praktisch nicht in Gebrauch ist, aber das Grundsätzliche gewisser Arten von Influenzmaschinen zu erläutern gestattet. Zunächst sei ein einfaches Gedankenexperiment (POHL) vorausgeschickt (Abb. 278).

Zwei isolierte Metallplatten α und β werden im Felde eines geladenen Kondensators (A , K) miteinander in Berührung gebracht (a) und laden sich durch Influenz entgegengesetzt auf. Alsdann werden sie voneinander getrennt (b) und ihre Ladungen z. B. auf den Blättchenträger und die Außenhülle eines isoliert aufgestellten Elektroskops gebracht (c), welches die Ladungen durch einen Ausschlag anzeigt. Da aber die beiden Metallstücke bei dieser Berührung einen Teil der Oberflächen des Elektroskops bilden, geht ihre Ladung nicht vollständig auf dieses über (§ 138). Man entlädt nunmehr die beiden Metallstücke vollends, indem man sie in die beiden, an den Kondensatorplatten befestigten Blechtaschen F_1 und F_2 steckt (d). Dabei wird die Ladung des Kondensators vergrößert. Man beachte, daß seine Ladung sich vorher noch nicht verändert hatte. Wiederholt man jetzt das gleiche Verfahren, so sind die Influenzladungen der beiden Metallstücke ein wenig größer als beim ersten Mal, da ja die Feldstärke im Kondensator gewachsen ist. So kann man die Ladung des Elektrometers durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens weiter und weiter steigern.

Abb. 279 zeigt die gleichen Phasen in etwas größerer Annäherung an die Wirklichkeit bei einem rotierenden Gerät. A und K bilden den Kondensator. Die beiden Metallstücke α und β sitzen auf einer nichtleitenden Speiche und werden, wenn sie A und K gegenüberstehen, durch eine metallische Querverbindung in leitende Berührung miteinander gebracht (a). (Die Pfeilspitzen bedeuten gleitende Kontakte, etwa Büschel aus feinen Metallfäden.) Beim Weiterdrehen im Sinne des Uhrzeigers sind α und β durch Influenz entgegengesetzt geladen (b).

¹ Besonders empfohlen wird eine Mischung aus 2 Teilen Kolophonium und 1 Teil fein gepulvertem Gips.

Sie berühren dann zwei weitere Schleifkontakte, die zum Elektrometer führen (c) und geben schließlich (d) ihre noch verbleibende Restladung an die metallischen Verlängerungen F_1 und F_2 von A und K , die den Blechtaschen des vorhergehenden Versuchs entsprechen, ab. Der Erfolg ist eine Aufladung des Elektrometers

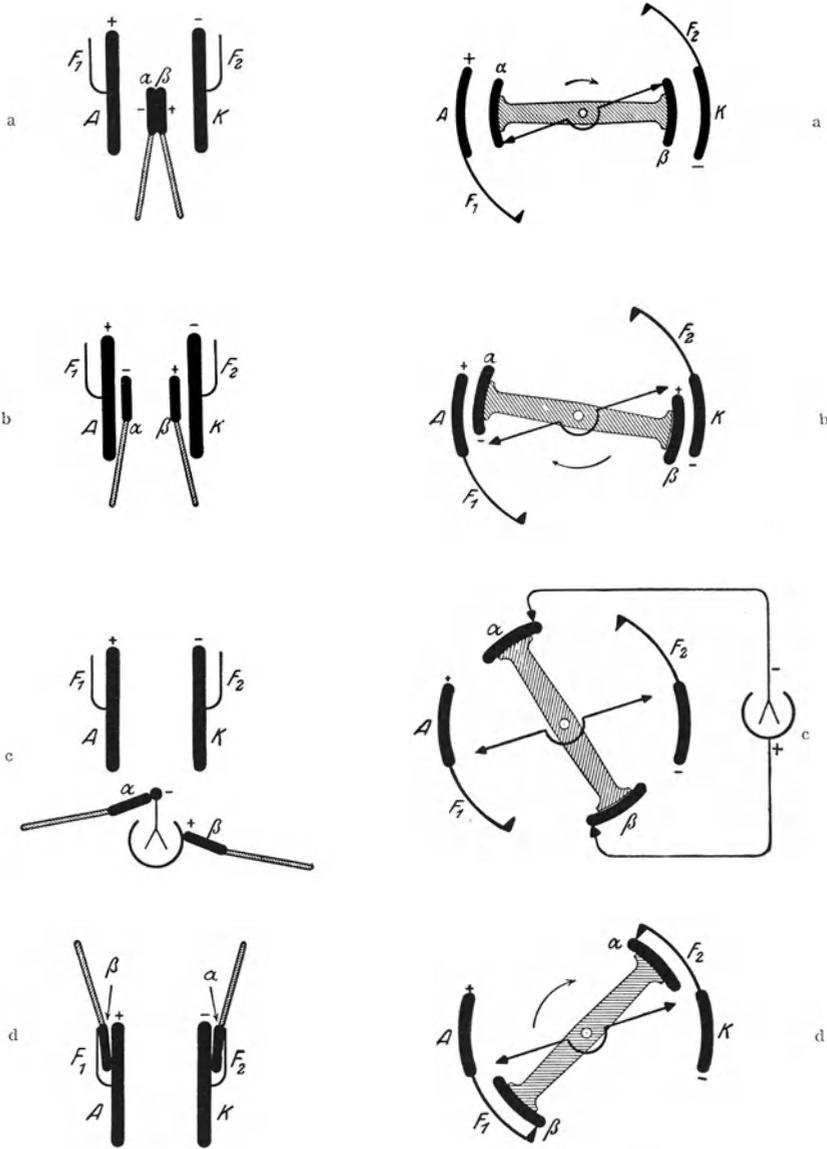


Abb. 278.

Abb. 279.

Wirkungsweise einer Influenzmaschine nach dem Multiplikatorverfahren. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

und eine Erhöhung der Ladungen auf A und K . Die bei der nächsten Umdrehung auftretende Wirkung ist dementsprechend stärker usw.

Der letzte Versuch gibt das auf eine ganz einfache Form gebrachte Schema einer gewissen Art von Influenzmaschinen. Andere Arten arbeiten nach einem etwas anderen Verfahren. Damit die Maschine zu arbeiten beginnt,

genügt es, wenn auf einer der Platten eine winzige Anfangsladung sitzt. Das ist fast stets von selbst der Fall. Die Maschinen erregen sich also selbst, aber das Vorzeichen der Ladungen ist vom Zufall abhängig. Die Spannung der Influenzmaschinen steigt so lange, bis die Ladungsverluste durch mangelhafte Isolation, insbesondere infolge von Entladungen durch die Luft, der neu erzeugten Ladung gleich werden. Man läßt daher meist die Ladungen in die beiden Belegungen eines Kondensators (Leidener Flasche) fließen, dessen Kapazität die Ansammlung größerer Ladungen ohne zu schnellen Spannungsanstieg erlaubt. Man kann mit solchen Maschinen Spannungen von vielen tausend Volt erzeugen.

146. Die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik in Einheiten des internationalen Maßsystems. Wir haben uns bei der Behandlung der Elektrostatik der Einheiten des elektrostatischen Maßsystems bedient, welches gemäß § 131 durch die Festsetzung begründet wird, daß die Konstante des COULOMBSchen Gesetzes für das Vakuum eine reine Zahl vom Betrage 1 sein und die Kraft in dyn gemessen werden soll. Die Verwendung dieses Maßsystems gestaltet im allgemeinen die Formeln übersichtlicher und einfacher, und deshalb wird es auch in der theoretischen Physik meist benutzt. Bei praktischen Anwendungen benutzt man aber stets das *internationale Maßsystem* mit den Einheiten Coulomb (Amperesekunde), Volt, Ampere, Farad (oder Mikrofarad) usw. Wir wollen deshalb hier die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik auch noch in den Einheiten des internationalen Maßsystems ausdrücken. Zwischen den Einheiten der beiden Systeme bestehen die folgenden Beziehungen:

Tabelle 20. Elektrostatische und internationale Einheiten.

Elektrizitätsmenge.	1 el. stat. Einh. =	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Coulomb (Amperesek.).
Stromstärke (vgl. § 150)	„	= $\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Ampere.
Spannung	„	= 300 Volt.
Feldstärke	„	= 300 Volt · cm ⁻¹ .
Kapazität	„	= $\frac{1}{3} \cdot 10^{-11}$ Farad = $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ Mikrofarad.
Widerstand (vgl. § 152)	„	= $9 \cdot 10^{11}$ Ohm.

Als Einheit der Energie dient im internationalen Maßsystem die Wattsekunde (Joule) = 10^7 erg, und dem entspricht es, daß als Krafteinheit die Kraft 10^7 dyn auftritt. Die Einheit der Feldstärke ist daher so definiert, daß ein Körper mit der Ladung 1 Coulomb im Felde $E = 1$ Volt · cm⁻¹ die Kraft 10^7 dyn erfährt.

Bei Benutzung des internationalen Maßsystems ist es zur Vereinfachung der Schreibweise nützlich, die Konstante

$$K = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} = 8,84 \cdot 10^{-14}$$

einzuführen. Wir erhalten damit die folgende Schreibweise für die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik im internationalen Maßsystem:

$$\text{§ 131, Gl. (2a) } k = \frac{1}{4\pi K} \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot 10^7 \text{ dyn.}$$

$$\text{§ 136, Gl. (4b) } k = e E \cdot 10^7 \text{ dyn.}$$

$$\text{Gl. (5a) } E = \frac{1}{4\pi K} \frac{e}{r^2} \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Gl. (6) Von der Ladung e Coulomb gehen e/K Kraftlinien aus. Dabei soll der Feldstärke 1 Volt · cm⁻¹ eine Kraftlinie auf die Fläche 1 cm² entsprechen.

§ 137, Gl. (7) $A = eU \cdot 10^7 \text{ erg} = eU \text{ Joule (Wattsec)}$.

Gl. (8) gilt auch im internationalen Maßsystem.

$$\text{Gl. (14)} \quad U = \frac{1}{4\pi K} \frac{e}{r} \text{ Volt.}$$

§ 141, Gl. (17a, b) gelten auch im internationalen Maßsystem.

$$\text{Gl. (19)} \quad C = K \frac{F}{d} \text{ Farad.}$$

§ 143, Gl. (20) $A = \frac{1}{2} eU \cdot 10^7 \text{ erg} = \frac{1}{2} eU \text{ Joule (Wattsec)}$.

$$\begin{aligned} \text{Gl. (21b)} \quad k &= \frac{e^2}{FK} \cdot 10^7 \text{ dyn} = \frac{1}{2} \frac{C^2 U^2}{FK} \cdot 10^7 \text{ dyn} = \frac{1}{2} FK \frac{U^2}{x^2} \cdot 10^7 \text{ dyn} \\ &= \frac{1}{2} FKE^2 \cdot 10^7 \text{ dyn.} \end{aligned}$$

§ 144, Gl. (24 u. 28) gelten auch im internationalen Maßsystem.

$$\text{Gl. (26)} \quad D = K \epsilon E.$$

$$\text{Gl. (30)} \quad k = \frac{1}{4\pi K \epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot 10^7 \text{ dyn.}$$

Die Konstante K wird auch als die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet, die Produkte $K \epsilon$ als die absoluten Dielektrizitätskonstanten der Stoffe [s. Gl. (26)].

147. Die Dimensionen der elektrischen Größen im elektrostatischen Maßsystem. Durch die Art der Festsetzung der elektrostatischen Einheiten wird eine formale Verknüpfung dieser Einheiten mit denen des CGS-Systems hergestellt, und die elektrischen Größen erhalten daher auch eine Dimension im CGS-System (§ 44). Jedoch ist diese Verknüpfung willkürlich, und wir werden später (§ 198) eine andere Art der Verknüpfung kennenlernen, die zu anderen Dimensionen führt.

Da die Größe $e_1 e_2 / r^2$, also auch e^2 / r^2 , die Dimension einer Kraft, also $|m l t^{-2}|$, hat, so folgt für die Elektrizitätsmenge e die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}|$. Das Produkt Ue aus Spannung und Elektrizitätsmenge ist eine Arbeit, hat also die Dimension $|m l^2 t^{-2}|$, so daß für die Spannung U die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}|$ folgt und für die elektrische Feldstärke E die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}|$. Die Kapazität C hat, wie wir bereits erwähnten, im elektrostatischen System die Dimension einer Länge, also $|l|$. Der Vollständigkeit halber nehmen wir sogleich auch noch die später zu besprechende Stromstärke i und den Widerstand R hinzu. Die Stromstärke hat nach § 150 die Dimension Elektrizitätsmenge/Zeit, also $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}|$. Der Widerstand ist nach § 152 definiert als das Verhältnis U/i von Spannung und Strom, seine Dimension ist also $|t^{-1} l|$.

Diese Dimensionsbeziehungen sind in der Tabelle 21 noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 21. Dimensionen im elektrostatischen Maßsystem.

Elektrizitätsmenge	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1} $	Kapazität	$ l $
Spannung	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1} $	Stromstärke	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2} $
Feldstärke	$ m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} $	Widerstand	$ l^{-1} t $

Fünftes Kapitel.

Elektrische Ströme.

I. Elektrische Ströme in festen Leitern.

148. Stromquellen. Im folgenden müssen wir vorläufig als bekannt voraussetzen, daß es Geräte, *Strommesser*, gibt, die den Betrag der in 1 sec durch sie fließenden Elektrizitätsmenge, die elektrische Stromstärke in ihnen, anzeigen. Einen *Spannungsmesser* haben wir bereits im Elektrometer in seinen verschiedenen Gestalten kennengelernt. Bei den Spannungsmessungen, die uns hier zunächst beschäftigen werden, benutzt man aber meist Spannungsmesser, die nach dem gleichen Prinzip arbeiten, wie die Strommesser. Wir werden diese Geräte in § 235—240 näher besprechen.

Ferner müssen wir voraussetzen, daß es Vorrichtungen, *Stromquellen*, gibt, mittels derer man in einem zusammenhängenden System von Leitern eine dauernde Elektrizitätsbewegung aufrechterhalten kann. Hierher gehören insbesondere die Elemente, Akkumulatoren und Generatoren, die wir in § 173 und 244 besprechen werden. Eine Stromquelle besitzt zwei Pole, die in Klemmen endigen, und hat die Eigenschaft, daß zwischen diesen Klemmen eine dauernde Spannung besteht. Das beruht darauf, daß die Stromquelle an ihrem einen, dem positiven Pol, Elektronen in sich einzusaugen sucht, während sie an ihrem andern, dem negativen Pol Elektronen aus sich herauszudrücken sucht. Wir können eine Stromquelle etwa mit einer Zirkulationspumpe vergleichen, die an einer Stelle Wasser ansaugt und es an einer andern Stelle wieder aus sich herausdrückt, so daß es in einer an die Pumpe angeschlossenen Rohrleitung zirkulieren kann. Diese Zirkulation kommt bei der Pumpe dadurch zustande, daß sie zwischen den Enden der Rohrleitung eine Druckdifferenz, also in der Rohrleitung ein Druckgefälle aufrecht erhält, welches das Wasser in Bewegung hält. Entsprechend hält die Stromquelle an den Enden eines angeschlossenen Leiters eine Spannung (*Klemmenspannung*) und im Leiter ein Spannungsgefälle, also ein elektrisches Feld, aufrecht, das die Ladungsträger im Leiter in Bewegung hält. Man sagt, daß eine Stromquelle der Sitz einer *elektromotorischen Kraft* \mathcal{E} ist¹, d. h. einer Kraft, die Ladungsträger in Leitern in dauernder Bewegung zu halten vermag. Je stärker die Wasserströmung ist, die eine Zirkulationspumpe erzeugt, um so niedriger ist die Druckdifferenz zwischen den Enden der Rohrleitung. Man könnte die Leistungsfähigkeit einer solchen Pumpe daher z. B. dadurch kennzeichnen, daß man angibt, wie groß die höchste Druckdifferenz ist, die sie zu erzeugen vermag. Sie ist dann vorhanden, wenn die Rohrleitung einen unendlich hohen Strömungswiderstand hat, bzw. wenn die beiden Enden der Pumpe dicht verschlossen werden. Entsprechend hat die Klemmenspannung einer Stromquelle ihren größten Betrag, wenn keine Zirkulation der Elektronen stattfinden kann, die Klemmen also nicht leitend verbunden sind, wenn die Stromquelle, wie man sagt, *offen* ist (§ 161). Aus diesem Grunde dient die Klemmenspannung einer offenen Stromquelle unmittelbar als Maß ihrer elektromotorischen Kraft \mathcal{E} . Diese wird demnach — wie die Spannung — im internationalen Maßsystem in der Einheit 1 Volt gemessen.

¹ Die EMK wird meist mit dem Symbol E bezeichnet. Wir wählen das Symbol \mathcal{E} , um eine Verwechslung mit dem Betrag E einer elektrischen Feldstärke \mathcal{E} zu verhüten.

149. Elektrischer Strom. Ein geladener Kondensator C von großer Kapazität, — z. B. eine Batterie von großen, parallel geschalteten Leidener Flaschen —, sei durch Kupferdrähte mit den beiden Enden a , b eines gut getrocknenen Holzstabes S (schlechter Leiter) von 1—2 m Länge verbunden (Abb. 280). Das Ende a sei durch einen Kupferdraht mit dem Gehäuse eines Elektrometers E verbunden. Ein weiterer Draht ist mit dem Blättchensystem des Elektrometers verbunden und kann an dem Holzstab entlang geführt werden. Auf diese Weise kann mit dem Elektrometer die Spannung zwischen a und den andern Punkten des Stabes gemessen werden. Beginnt man bei a und schreitet mit dem Draht in Richtung auf b fort, so nimmt der Ausschlag des Elektrometers, also die Spannung gegen a , stetig zu. Es besteht also längs des Stabes ein Spannungsfälle, im Stabe also ein elektrisches Feld. Da sich aber die Ladungen am Kondensator mit der Zeit durch den Stab hindurch ausgleichen, so sinkt allmählich seine Spannung auf Null, und entsprechend sinken auch die Spannungen längs des Drahtes. Dieser Versuch bietet uns nichts grundsätzlich Neues. Er liefert nur ein Beispiel dafür, daß sich Spannungen, die anfänglich in einem zusammenhängenden Leitersystem bestehen, auszugleichen suchen, indem sich die Ladungsträger in dem System entsprechend verschieben. Uns interessiert hier aber gerade diese Verschiebung. Wir haben einen schlechten Leiter gewählt, damit sie langsam erfolgt, also über eine längere Zeit beobachtbar ist.

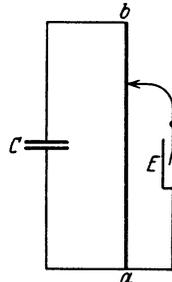


Abb. 280. Spannungsfälle in einem stromdurchflossenen Holzstab.

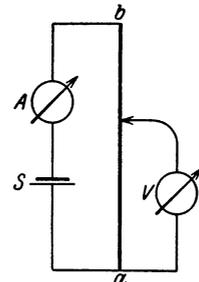


Abb. 281. Spannungsfälle in einem stromdurchflossenen Metalldraht.

War etwa anfänglich der Kondensator in Abb. 280 unten positiv, oben negativ geladen, so kann der Ladungsausgleich grundsätzlich entweder durch eine Wanderung positiver Ladungsträger in Richtung von a nach b oder durch eine Wanderung negativer Ladungsträger in entgegengesetzter Richtung oder durch beides zugleich bewirkt worden sein. Die Wirkung wäre immer die gleiche. Auf jeden Fall ist eine Wanderung von Ladungsträgern durch den Holzstab erfolgt. Dieser Vorgang heißt ein *elektrischer Strom*.

Wir wiederholen den Versuch auf andere Weise. Wir ersetzen die geladene Batterie durch eine Stromquelle S , den Holzstab durch einen etwa 2 m langen dünnen Eisendraht, das Elektrometer durch einen der in § 148 erwähnten Spannungsmesser V (Abb. 281). Außerdem schalten wir einen Strommesser A in die Zuleitung zum Eisendraht. Ist etwa a mit der positiven, b mit der negativen Klemme der Stromquelle verbunden, so zeigt der Spannungsmesser, wenn wir mit dem Laufdraht von a in Richtung auf b fortschreiten, stetig wachsende Spannungsbeträge an. Der Versuch unterscheidet sich grundsätzlich nicht von dem obigen, denn die Stromquelle hat auf das angeschlossene Leitersystem die gleiche Wirkung, wie der geladene Kondensator. Sie ruft an den Enden des Systems eine Spannung hervor. Nur bleibt jetzt diese Spannung konstant. Dafür sorgt die elektromotorische Kraft der Stromquelle. Auch in diesem Fall fließt also durch den Draht ein elektrischer Strom; gleichzeitig besteht längs des stromdurchflossenen Drahtes ein Spannungsfälle. Da es sich hier um einen metallischen Leiter handelt, in dem es nur Elektronen als frei bewegliche Ladungsträger gibt, so besteht der Strom in diesem Fall aus Elektronen, die sich in Richtung von der negativen Klemme zur positiven Klemme der Stromquelle durch den Draht bewegen.

Ein Strom negativer Ladungsträger ist in seinen äußeren Wirkungen von einem gleich starken Strom positiver Ladungsträger, die sich in entgegengesetzter

Richtung bewegen, auf keine Weise zu unterscheiden. Es ist üblich, als *Richtung eines elektrischen Stromes* stets diejenige zu bezeichnen, in der sich positive Ladungsträger bewegen würden, also die Stromrichtung von der positiven zur negativen Klemme der Stromquelle. In den Metallen ist also die Bewegung der Elektronen der so definierten Stromrichtung gerade entgegengerichtet.

In einem stromdurchflossenen Leiter besteht also ein Spannungsgefälle, ein elektrisches Feld. Dieses Feld ist es ja auch, das die Ladungsträger im Leiter in Bewegung setzt und dadurch bei unserm ersten Versuch schließlich den Spannungsausgleich herbeiführt. Besteht in einem Leiterelemente von der Länge dl die Feldstärke E , so besteht zwischen seinen Enden nach § 137, Gl. (12), die Spannung

$$dU = E dl. \quad (1)$$

(Auf das Vorzeichen kommt es uns hier nicht an.) Ist U die Spannung zwischen den Enden eines überall gleich beschaffenen Drahtstücks von der Länge l und konstantem Querschnitt, E die Feldstärke in ihm, so ist

$$U = El. \quad (2)$$

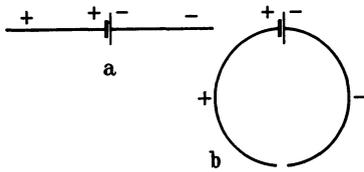


Abb. 282. Zur Entstehung der Spannungsverteilung in einem stromdurchflossenen Leitersystem.

Es ist nützlich, sich das Zustandekommen der Spannungsverteilung und des elektrischen Feldes in einem stromdurchflossenen Leiter einmal genauer klar zu machen. Zunächst denken wir uns an die beiden Klemmen einer Stromquelle S (Abb. 282a) gerade Drähte angeschlossen. Diese nehmen die Spannungen der Klemmen an, und der eine erhält eine positive, der andere eine negative Ladung. Nunmehr denken wir uns die Drahtenden einander auf einen kleinen Abstand genähert (Abb. 282b). An der Spannung zwischen den Drähten ändert sich dadurch nichts. Zwischen den Drahtenden herrscht die volle, der elektromotorischen Kraft der Stromquelle gleiche Spannung, und im Raum zwischen ihnen besteht ein elektrisches Feld, das dieser Spannung entspricht. In den Drähten hingegen besteht kein Feld. Denken wir uns die beiden Drahtenden mit den beiden Klemmen eines geöffneten Schalters (Stromschlüssel) verbunden, so ist Abb. 282b das Schema eines offenen Stromkreises, den wir durch Betätigen des Schalters ohne weiteres schließen können, indem wir jetzt die Drähte zur Berührung bringen. Tun wir das, so kann eine Spannung zwischen den Enden nicht mehr bestehen, und auch das vorher verhältnismäßig starke Feld zwischen ihnen bricht zusammen. Statt dessen verteilt sich nunmehr das Spannungsgefälle, das vorher nur im Raum zwischen den Drahtenden bestand, stetig über den ganzen Leiterkreis von der einen Klemme der Stromquelle zur anderen. Gemäß Gl. (1) tritt im ganzen Kreise ein elektrisches Feld auf. Dieses Feld wird nunmehr durch die elektromotorische Kraft der Stromquelle dauernd aufrechterhalten und hält seinerseits wieder die Wanderung der Ladungsträger, den elektrischen Strom, aufrecht.

Man beachte, daß ein stromdurchflossener metallischer Leiter nicht etwa elektrisch geladen ist. Denn durch die Wanderung der Ladungsträger wird ja die Zahl der in jedem cm^3 enthaltenen Ladungsträger nicht geändert. Für diejenigen Elektronen, die in einem Zeitelement dt aus dem Leiter in die positive Klemme der Stromquelle eintreten, treten im Durchschnitt in der gleichen Zeit ebenso viele Elektronen aus der negativen Klemme in den Leiter ein. Die Dichte der Elektronen, die durch die elektromotorische Kraft der Stromquelle im Leiter zum Kreisen gebracht werden, wird dadurch ebenso wenig geändert wie die einer Wassermenge in einem ringförmig geschlossenen Rohrsystem,

wenn das Wasser durch eine Pumpe zum Kreisen gebracht wird. In den nichtmetallischen Leitern liegen die Verhältnisse häufig nicht so einfach.

Allerdings können Ladungsüberschüsse an Stromleitern dort auftreten, wo Teile des Leitersystems, die sich auf verschiedener Spannung befinden, einander nahe sind, z. B. bei den parallel geführten Hin- und Rückleitungen der Stromnetze. Dann wirken diese Leiterteile wie die beiden Platten eines auf eine Spannung aufgeladenen Kondensators. Diese Kapazitätswirkungen sind aber rein elektrostatischer Natur und berühren die vorstehenden Ausführungen nicht.

150. Elektrische Stromstärke. Als Maß der Stärke eines elektrischen Stromes, kurz *Stromstärke* i genannt, dient die in der Zeiteinheit durch irgendeinen Querschnitt des Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Diese Menge ist im stationären Zustand in allen Querschnitten des Leiters dieselbe, ganz gleich, ob der Querschnitt an verschiedenen Stellen verschieden groß ist oder nicht; denn es findet nirgends in einem stromdurchflossenen Leiter eine dauernde Ansammlung elektrischer Ladungen, d. h. keine ständig wachsende Aufladung des Leiters, statt. Betrachten wir ein durch zwei beliebige Querschnitte q_1 und q_2 begrenztes Stück eines Leiters, so muß demnach stets durch den einen Querschnitt in das Leiterstück ebensoviel Elektrizität eintreten, wie durch den andern in der gleichen Zeit aus ihm austritt.

Fließt durch einen zur Stromrichtung senkrechten Querschnitt q eines Leiters der Strom i , so entfällt auf je 1 cm^2 des Querschnitts der Strom

$$\frac{i}{q} = j. \quad (3)$$

Diese Größe heißt *Stromdichte*.

Es sei de die in der Zeit dt durch einen Querschnitt eines Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Dann ist gemäß der vorstehend gegebenen Definition der Stromstärke

$$i = \frac{de}{dt}, \quad (4)$$

die in 1 sec durch den Querschnitt fließende Elektrizitätsmenge, also die Stromstärke im Leiter. Es fließt daher in der Zeit t die Elektrizitätsmenge

$$e = \int_0^t i dt, \quad (5)$$

bzw. bei konstanter Stromstärke i die Elektrizitätsmenge

$$e = it \quad (6)$$

durch jeden Querschnitt des Leiters.

Je nachdem wir der Messung der Stromstärke die elektrostatische oder die internationale Ladungseinheit (das Coulomb) zugrunde legen, kommen wir zur elektrostatischen oder zur internationalen *Einheit der Stromstärke*. Die elektrostatische Einheit der Stromstärke kommt einem Strome zu, bei dem in der Sekunde 1 elektrostatische Ladungseinheit durch einen Querschnitt des Leiters fließt. Fließt in der Sekunde 1 Coulomb durch einen solchen Querschnitt, so ist die Stromstärke gleich der internationalen Einheit, welche 1 *Ampere* (abgek. A) heißt. Entsprechend dem Umrechnungsverhältnis zwischen elektrostatischer Ladungseinheit und Coulomb (§ 146) ist $1 \text{ Ampere (A)} = 3 \cdot 10^9$ elektrostatischen Einheiten der Stromstärke. Eine viel benutzte, vom Ampere abgeleitete Einheit ist 1 Milliampere (mA) = 10^{-3} A.

Da ein Strom von i A in t sec die Elektrizitätsmenge $e = it$ Coulomb durch jeden Querschnitt des Leiters führt, so nennt man 1 Coulomb, d. h. die vom Strome 1 A in 1 sec durch jeden Leiterquerschnitt geförderte Elektrizitätsmenge, auch 1 *Amperesekunde*. Als größere Einheit dient die auf die Stunde als Zeiteinheit bezogene Amperestunde (Ah) = 3600 Amperesekunden oder Coulomb.

151. Elektrizitätsleitung in Metallen. Zahlreiche Gesetzmäßigkeiten der Elektrizitätsleitung in den Metallen können auf Grund einer einfachen Vorstellung beschrieben werden, die wir uns hier zunutze machen wollen, obgleich es sich nur um ein etwas grobes Modell handelt. Nach dieser Vorstellung bewegen sich die Elektronen durch das Gefüge eines Metalles unter der Wirkung eines elektrischen Feldes wie in einem reibenden Stoff, also etwa so wie kleine Körper beim Fall durch die Luft. Wir haben im § 76 gesehen, daß solche Körper schnell eine Geschwindigkeit annehmen, bei der die der Geschwindigkeit v proportionale Reibungskraft αv der treibenden Kraft gleich und ihr entgegen gerichtet ist, so daß diese beiden Kräfte sich gegenseitig aufheben und der Körper mit konstanter Geschwindigkeit fällt. Wir übertragen diese Verhältnisse auf die Elektronen in einem Metall, indem wir als treibende Kraft die vom elektrischen Felde E auf die die Ladung ϵ (Elementarquantum, § 132) tragenden Elektronen ausgeübte Kraft ϵE setzen. Wir erhalten demnach die Beziehung

$$\alpha v = \epsilon E \quad \text{oder} \quad v = \frac{\epsilon}{\alpha} E. \quad (7)$$



Abb. 283. Zum Mechanismus des elektrischen Stromes.

(Tatsächlich wird ein Elektron keine geradlinige Bahn im Metall beschreiben, sondern infolge fortgesetzter Zusammenstöße mit den Metallatomen [bzw. Metallionen] eine Zickzackbahn. Hier kommt aber nur die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung des elektrischen Feldes in Frage. Ihr Betrag wird zwar ständig wechseln, aber, über eine größere Zeit genommen, einen konstanten Mittelwert v haben.) Die Größe ϵ/α nennt man die *Beweglichkeit* der Elektronen, denn je größer sie ist, um so größer ist bei gegebener Feldstärke E die Geschwindigkeit v .

Wir betrachten ein Stück eines stromdurchflossenen Leiters (Abb. 283) von der Länge l und dem Querschnitt q und nehmen an, daß in jedem Kubikzentimeter dieses Leiters n Elektronen für den Strom verfügbar sind. Die Bewegung der Elektronen erfolge von rechts nach links. Durch den linken Querschnitt q treten in der Zeit dt so viele Elektronen nach links aus, wie sich rechts von ihm in einem Stück von der Länge $v dt$ befinden, also $n q v dt$. Denn $v dt$ ist der von den Elektronen in der Zeit dt zurückgelegte Weg. Demnach tritt durch den Querschnitt q in der Zeit dt die Elektrizitätsmenge $de = n \epsilon q v dt$. Dann folgt aus Gl. (4)

$$i = n \epsilon q v. \quad (8)$$

Zwischen den Enden des ganzen Leiterstücks von der Länge l herrsche die Spannung U . Denn ist nach Gl. (2) die Feldstärke im Leiter

$$E = \frac{U}{l}. \quad (9)$$

Aus den Gl. (7), (8) und (9) erhält man

$$i = \frac{n \epsilon^2}{\alpha} \cdot \frac{q}{l} \cdot U. \quad (10)$$

Wird an einen Leiter eine Spannung angelegt, so breitet sich längs des Leiters das die Elektronen antreibende elektrische Feld etwa mit Lichtgeschwindigkeit (§ 208) aus. Der Strom in einem Leiter setzt also praktisch sofort beim Einschalten in allen Teilen des Leiters ein. Die Geschwindigkeit der Elektronen im Leiter dagegen, die eigentliche Strömungsgeschwindigkeit, ist — entgegen einem weit verbreiteten Irrtum — sehr klein. (Ebenso pflanzt sich das *Einsetzen* einer Flüssigkeitsströmung in einem mit Flüssigkeit gefüllten Rohr — die die Strömung einleitende Druckwelle — mit der Geschwindigkeit des Schalls in der Flüssigkeit fort, während die *Strömungsgeschwindigkeit* durch ganz andere Ursachen bedingt und viel kleiner ist. Vgl. § 257.)

Einen Begriff von der Größenordnung dieser Geschwindigkeit erhält man durch folgende Überschlagsrechnung. In einem Kupferdraht von 1 mm² Querschnitt fließe ein Strom von 1 A = 1 Coulomb · sec⁻¹. Wir wollen, was jedenfalls der Größenordnung nach richtig ist, annehmen, daß auf jedes Kupferatom ein „Leitungselektron“ entfällt. Dann ist die Zahl der in 1 cm³ enthaltenen Leitungselektronen rund $n = 8,52 \cdot 10^{22}$, denn so groß ist die Zahl der Atome in 1 cm³ Kupfer. Dann ergibt sich, unter Einsetzung von $\epsilon = 4,770 \cdot 10^{-10}$ e.s.E. = 1,591 · 10⁻¹⁹ Coulomb, in Gl. (8)

$$v = 0,739 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad \text{oder} \quad \text{rund} \quad \frac{1}{100} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

152. Das OHMSche Gesetz. Widerstand. In der Gl. (9) ist das OHMSche Gesetz (1827) ausgesprochen, dem man die folgende Form geben kann:

$$i = \frac{U}{R} \quad \text{oder} \quad U = iR. \tag{11}$$

Die Größe R bezeichnet man als den *Widerstand* des betreffenden Leiterstücks. Nach Gl. (10) und (11) ist

$$R = \frac{\alpha}{n \epsilon^2} \cdot \frac{l}{q} = \rho \frac{l}{q}. \tag{12}$$

Der Widerstand setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Der eine, $\rho = \alpha/n\epsilon^2$, ist durch den Stoff, aus dem der Leiter besteht, bedingt; denn die Zahl n der für den Strom verfügbaren Elektronen und die ihrer Bewegung widerstehenden Kräfte (von α abhängig) sind in den verschiedenen leitenden Stoffen sehr verschieden. Der zweite Teil, der „Formfaktor“ l/q , hängt von der Gestalt des Leiterstücks ab. ρ bezeichnet man als den *spezifischen Widerstand* des Leiterstoffes. Es ist das derjenige Widerstand, den ein Leiterstück des betreffenden Stoffes von 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt hat. Der reziproke Wert $\sigma = 1/\rho$ des spezifischen Widerstandes heißt das *Leitvermögen*. Ist der Querschnitt q nicht überall der gleiche, so ergibt sich der Widerstand durch ein der Gl. (12) entsprechendes Integral

$$R = \int_0^l \rho \frac{dl}{q}. \tag{13}$$

Die *Einheit des Widerstandes* im internationalen Maßsystem heißt 1 *Ohm* (Ω). Das Ohm ist gesetzlich festgelegt als der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 mm² Querschnitt und 106,3 cm Länge bei 0° C (§ 198).

Tabelle 22. Spezifische Widerstände in Ohm · cm.

Metalle	$\rho \cdot 10^4$	$a \cdot 10^3$	λ	$\rho \cdot \lambda \cdot 10^4$	Sehr schlechte Leiter	ρ
Ag	0,016	+ 4,1	1,01	0,0162	Schiefer	10 ⁸
Cu	0,017	4,3	0,90	0,0153	Marmor	10 ¹⁰
Zn	0,060	4,2	0,27	0,0162	Glas	5 · 10 ¹³
Fe	0,086	6,6	0,16	0,0155	Quarz Achse . . .	10 ¹⁴
Pt	0,107	3,92	0,17	0,0228	Siegellack	8 · 10 ¹⁵
Bi	1,20	4,5	0,019	0,0182	Quarz ⊥ Achse . . .	3 · 10 ¹⁶
Manganin . . .	0,43	± 0,02	—	—	Glimmer	5 · 10 ¹⁶
Konstantan . .	0,50	± 0,05	0,027	0,0270	Quarzglas	< 5 · 10 ¹⁸

In Tabelle 22 sind die spezifischen Widerstände ρ einiger Metalle bei 0° C nebst einigen anderen, weiter unten zu erörternden Daten wiedergegeben. Ferner enthält sie Angaben über die Widerstände einiger besonders schlechter Leiter, also praktischer Isolatoren. (Wegen der weiteren Angaben s. weiter unten und § 158.) Bemerkenswert ist, daß der Widerstand des Quarzes von der

Richtung des Stromes abhängt. Das gleiche gilt für alle Kristalle, außer denen des kubischen Systems. Der bei den Metallen angegebene Wert $\rho \cdot 10^4$ ist der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt.

Zur Prüfung des OHMSchen Gesetzes bzw. zur Messung von Widerständen kann man sich der in Abb. 284 dargestellten Schaltung¹ bedienen. Durch Verwendung von Stromquellen von verschiedener elektromotorischer Kraft kann man die Enden des Widerstandes R auf verschieden hohe Spannungen gegeneinander bringen. Man findet dann, daß das Verhältnis $U/i = R$, d. h. der Widerstand des Leiters, stets den gleichen Wert hat, den man auf diese Weise bestimmen kann. (Bei der Ausführung des Versuchs muß darauf geachtet werden, daß der Widerstand R groß ist gegenüber dem inneren Widerstand der Stromquelle, und daß keine merkliche Erwärmung des Leiters stattfindet.)

Bei den Metallen beruht nicht nur die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 1/\rho$, sondern auch die Wärmeleitfähigkeit λ auf der Bewegung der Elektronen.

Auch sie wird also durch deren Anzahl und Beweglichkeit bestimmt. Nach der Theorie sollte sein

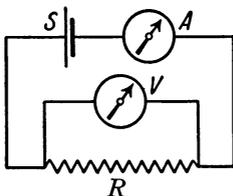


Abb. 284. Prüfung des OHMSchen Gesetzes bzw. Widerstandsmessung. S Stromquelle, A Strommesser, V Spannungsmesser, R Widerstand.

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \rho \lambda = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{e} \right)^2 T. \quad (14)$$

Dabei ist h die BOLTZMANNsche Konstante (§ 100), e das elektrische Elementarquantum, T die absolute Temperatur. Das Verhältnis der beiden Leitfähigkeiten sollte also bei gleicher Temperatur für alle Metalle den gleichen Wert haben (WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz).

Aus der Tabelle 22 entnimmt man, daß dies für die angeführten Metalle zwar nicht genau, aber doch der Größenordnung nach erfüllt ist, obgleich die Leitfähigkeiten selbst sehr verschieden groß sind.

Bei den nichtmetallischen Stoffen besteht zwischen der elektrischen und der Wärmeleitfähigkeit keine so einfache Beziehung. Doch sinkt im allgemeinen die elektrische Leitfähigkeit mit der Wärmeleitfähigkeit. Gute Isolatoren sind daher schlechte Wärmeleiter. Das wirkt sich bei isolierten Kabelleitungen ungünstig aus. Denn es verhindert eine schnelle Ableitung der Stromwärme (§ 163) und bewirkt eine technisch ungünstige Erhöhung des Kabelwiderstandes (§ 158). Es ist daher eine wichtige Aufgabe, Stoffe zu finden, die bei gutem elektrischen Isolationsvermögen ein möglichst niedriges Wärmeisolationsvermögen haben.

153. Die KIRCHHOFFSchen Sätze. Für die Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse in einem zusammenhängenden Leitersystem gelten die beiden KIRCHHOFFSchen Sätze:

I. KIRCHHOFFScher Satz. *In jedem Punkt eines Leitersystems ist die Summe der ankommenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.* Besonders wichtig ist dies im Fall von Stromverzweigungen, d. h. wenn in einem Punkt drei oder mehr Leiterzweige zusammenstoßen. Ein Beispiel ist in Abb. 285 dargestellt. In diesem Falle ist $i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$. Gibt man den auf einen Verzweigungspunkt hinfließenden positiven Strömen positives Vorzeichen, den

¹ In den Schaltungsskizzen bedienen wir uns folgender Bildzeichen:

 Strom- oder Spannungsmesser.

 Akkumulator oder sonstige konstante Stromquelle.

 Leiter mit merklichem Widerstand.

 Leiter mit so kleinem Widerstand, daß er vernachlässigt werden kann (Drahtverbindungen).

von ihm fortfließenden positiven Strömen negatives Vorzeichen, so kann man den 1. KIRCHHOFFSchen Satz auch in der Form

$$\sum i_k = 0 \tag{15}$$

schreiben, wo die i_k die in den einzelnen Leiterzweigen fließenden Ströme bedeuten.

Der 1. KIRCHHOFFSche Satz folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß nirgends in einem stromdurchflossenen Leitersystem eine dauernde Ansammlung elektrischer Ladungen stattfindet. Demnach muß von jedem Punkt des Leitersystems die gleiche Elektrizitätsmenge abfließen, wie ihm in der gleichen Zeit zuströmt.

2. KIRCHHOFFScher Satz. Es seien R_k die Widerstände der verschiedenen Teile eines Leitersystems, i_k die Stromstärken in diesen.

Dann ist für jeden beliebig herausgegriffenen, in sich geschlossenen Teil des Leitersystems sowie auch für das System als Ganzes die Summe aller Teilspannungen $U_k = i_k R_k$ gleich der Summe der in diesem Teil des Systems enthaltenen elektromotorischen Kräfte \mathcal{E} ,

$$\sum \mathcal{E} = \sum i_k R_k = \sum U_k. \tag{16}$$

Bei der Bildung der Summe über die Teilspannungen ist an einem beliebigen Punkt des Leitersystems zu beginnen, und dieses ist auf einer geschlossenen Bahn bis zum Ausgangspunkt zu durchlaufen. Bei Stromverzweigungen kann jeder beliebige Weg gewählt werden, es darf auch das gleiche Teilstück mehrmals durchlaufen werden. Das Produkt $i_k R_k$ ist mit positivem Vorzeichen zu versehen, wenn das betreffende Leiterstück im Sinne der positiven Stromrichtung durchlaufen wird, im entgegengesetzten Fall mit negativem Vorzeichen.

Wir bemerken schon hier, daß die KIRCHHOFFSchen Sätze auch für Wechselstrom gelten, und daß in diesem Falle in die Summe der Teilspannungen nicht nur die Produkte $i_k R_k$, sondern auch die Spannungen an im Stromkreise befindlichen Kondensatoren einzubeziehen sind.

Für einen unverzweigten Leiterkreis, der die beiden Klemmen einer Stromquelle verbindet, folgt der 2. KIRCHHOFFSche Satz ohne weiteres aus der Definition der elektromotorischen Kraft. Er gilt aber auch für jeden in sich zurücklaufenden Teil eines beliebig verzweigten Leitersystems. Für den Fall, daß das betreffende geschlossene Leitersystem keine elektromotorische Kraft enthält ($\mathcal{E} = 0$), besagt der Satz, daß in einem solchen Leitersystem die Summe der Teilspannungen gleich Null ist. Ein Beispiel zeigt Abb. 286. Wir betrachten das zwischen den Punkten 1 und 2 eingeschlossene, aus den Widerständen R_1 und R_2 bestehende, in sich geschlossene Leitersystem. Wegen des Vorhandenseins der Stromquelle fließen in R_1 und R_2 Ströme, das betrachtete Leitersystem enthält aber selbst keine elektromotorische Kraft. Umlaufen wir das Leiterstück, bei 1 beginnend, im Sinne des Uhrzeigers, und bedenken wir, daß wir dabei R_1 im Sinne von i_1 , R_2 gegen den Sinn von i_2 durchlaufen, so folgt $i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$ oder $i_1 R_1 = i_2 R_2$, eine Tatsache, die wir in § 154 auch aus dem OHMSchen Gesetz ableiten werden. Das gleiche Ergebnis erhalten wir übrigens, wenn wir den 2. KIRCHHOFFSchen Satz auf das ganze in Abb. 286 dargestellte Leitersystem anwenden, wobei wir vom inneren Widerstand der Stromquelle (§ 161) absehen. Da es uns freisteht, ob wir von 1 nach 2 über den Widerstand R_1 oder über den Widerstand R_2 gehen wollen, so erhalten wir $\mathcal{E} = i_1 R_1$ und

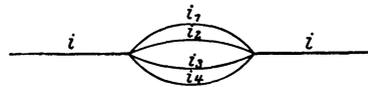


Abb. 285. Stromverzweigung.

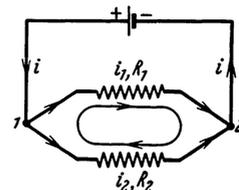


Abb. 286. Zum 2. KIRCHHOFFSchen Satz.

$\mathcal{E} = i_2 R_2$, wenn wir, etwa bei 1 beginnend, einen geschlossenen Umlauf in der Stromrichtung um das ganze Leitersystem ausführen, der über die Stromquelle und über R_1 oder R_2 führt.

154. Reihen- und Parallelschaltung von Leitern. Spannungsteilung. Zwei Leiter mit den Widerständen R_1 und R_2 seien hintereinander (in Reihe) geschaltet (Abb. 287). Liegt an ihren Enden eine Spannung U , so fließt in ihnen ein Strom, der nach dem I. KIRCHHOFFSchen Satz in beiden Leitern die gleiche Stärke i hat. Der Widerstand der Leiterfolge sei R , die an den Enden von R_1 und R_2 herrschenden Teilspannungen seien U_1 und U_2 . Wenden wir das OHMSche Gesetz einmal auf die ganze Leiterfolge, dann auf jedes Teilstück an, so folgt

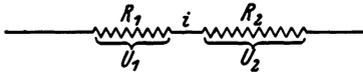


Abb. 287. Reihenschaltung.

$$U = iR, \quad U_1 = iR_1, \quad U_2 = iR_2.$$

Ferner ist
$$U = U_1 + U_2.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt durch einfache Rechnung

$$R = R_1 + R_2 \tag{17}$$

und

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2 \tag{18}$$

sowie
$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U \frac{R_1}{R} \quad \text{und} \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{R_2}{R}. \tag{19}$$

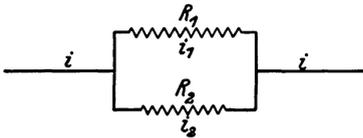


Abb. 288. Parallelschaltung.

Demnach ist der Widerstand zweier in Reihe geschalteter Leiter gleich der Summe ihrer Widerstände. Die Teilspannungen an den Enden der Teilwiderstände verhalten sich wie diese Widerstände. Sie verhalten sich zur Gesamtspannung U wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand R . Wie

man leicht zeigen kann, gilt das gleiche auch bei der Reihenschaltung von mehr als zwei Widerständen R_k . Es ist also allgemein bei Reihenschaltung

$$R = \sum R_k, \quad U_k = U \frac{R_k}{R}. \tag{20} \text{ u. } (21)$$

Wie betrachten jetzt eine aus zwei Leitern mit den Widerständen R_1 und R_2 bestehende Stromverzweigung (Abb. 288). An ihren Enden liege die Spannung U , und in den Zuleitungen zu den Verzweigungspunkten herrsche die Stromstärke i , in den Zweigen die Stromstärken i_1 und i_2 . Dann ist nach dem I. KIRCHHOFFSchen Satz

$$i = i_1 + i_2.$$

Der Widerstand der Leitung zwischen den Verzweigungspunkten sei R . Wenden wir jetzt das OHMSche Gesetz einmal auf die ganze Leitung, dann auf jeden Leiterzweig einzeln an, so folgt

$$U = iR = (i_1 + i_2)R, \quad U = i_1 R_1 = i_2 R_2.$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad i_1 : i_2 = R_2 : R_1. \tag{22} \text{ u. } (23)$$

Es ist also der reziproke Wert des Widerstandes zweier parallel geschalteter Leiter gleich der Summe der reziproken Werte ihrer Einzelwiderstände. Die Überlegung läßt sich leicht auf mehr als zwei parallel geschaltete Leiter R_k übertragen, und es ergibt sich dann

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}. \tag{24}$$

Gl. (23) besagt, daß sich die Stromstärken in den beiden Zweigen einer aus zwei Leitern bestehenden Stromverzweigung umgekehrt wie die betreffenden Widerstände verhalten.

Die Gl. (19) führt zu einer wichtigen praktischen Anwendung, der *Spannungsteilung* (Potentiometerschaltung). Es kommt sehr oft vor, daß man eine Spannung benötigt, die kleiner ist als die gerade verfügbare elektromotorische Kraft. Es gibt z. B. keine Stromquellen von zuverlässig konstanter elektromotorischer Kraft unterhalb der Größenordnung von etwa 1 Volt. In diesem Fall verwendet man die in Abb. 289 dargestellte Schaltung und bemißt die Widerstände R_1 und R_2 so, daß die an den Enden des Widerstandes R_1 herrschende Teilspannung die gewünschte Größe hat. Diese Spannung wird dann an den Enden von R_1 abgegriffen, indem diese Enden sozusagen die Klemmen einer Stromquelle von der gewünschten elektromotorischen Kraft bilden.

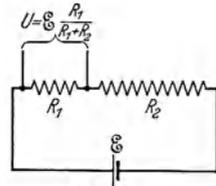


Abb. 289. Spannungsteilung.

155. Widerstandsgeräte. Widerstandsgeräte oder Rheostate sind Geräte, welche ihres Widerstandes wegen hergestellt und benutzt werden. Häufig ist ihr Widerstand veränderlich, gegebenenfalls in meßbarer Weise. Sie dienen vor allem

1. zur Regelung der Stromstärke, indem man sie in den betreffenden Stromkreis einschaltet und ihren Widerstand so lange verändert, bis die gewünschte Stromstärke erreicht ist,

2. als Vergleichsnormale zur Messung unbekannter Widerstände und zu sonstigen Meßzwecken.

Zur Regelung von Stromstärken benutzt man vor allem die Schiebewiderstände (Abb. 290). Durch einen Schieber G , welcher längs eines als Widerstand dienenden spulenförmigen Drahtes verschoben werden kann, wird ein mehr oder weniger großer Teil dieses Drahtes in den Stromkreis eingeschaltet. Solche Widerstände werden meist aus Manganindraht hergestellt. Das eine Ende A oder K des Drahtes und die den Schieber tragende Metallschiene \mathcal{L} werden mit dem Stromkreise verbunden. Durch den Schieber wird also, je nach seiner Stellung, eine mehr oder weniger große Zahl von Windungen des Drahtes in den Stromkreis eingeschaltet. Legt man eine Spannung U an die Endklemmen A und K , so kann man z. B. zwischen A und \mathcal{L} einen je nach der Stellung des Schiebers G verschieden großen Bruchteil von U am Widerstande abgreifen (Spannungsteilung, § 154).

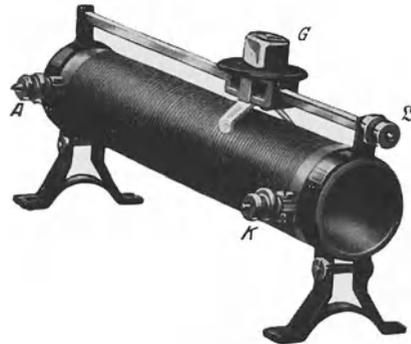


Abb. 290. Schiebewiderstand.

Als Vergleichsnormale benutzt man meist *Stöpselwiderstände* (Präzisionswiderstandssätze). Diese bestehen aus einer größeren Zahl von Widerständen aus auf Spulen aufgewickelm Manganindraht, die meist an der Unterseite des aus Hartgummi bestehenden Deckels eines geschlossenen Kastens angebracht sind (Abb. 291). Die Größe dieser Widerstände ist meist so abgestuft wie die Gewichte in einem Gewichtssatz (etwa 0,1, 0,2, 0,2, 0,5; 1, 2, 2, 5; 10, 20, 20, 50; 100, 200, 200, 500 Ohm usw., häufig auch 1, 2, 3, 4 Ohm usw.). Die Enden jedes dieser Widerstände führen an Messingklötze auf dem Kastendeckel und zwar je ein Ende je zweier aufeinanderfolgender Widerstände an denselben Messingklötz. Diese Messingklötze können durch Messingstöpsel leitend miteinander verbunden werden. Läßt man einen Strom am einen Ende der Reihe

der Messingklötze ein- und am andern Ende austreten und sind die Klötze nicht durch Stöpsel verbunden, so muß der Strom sämtliche Teilwiderstände nacheinander durchlaufen. Verbindet man jedoch zwei Messingklötze durch

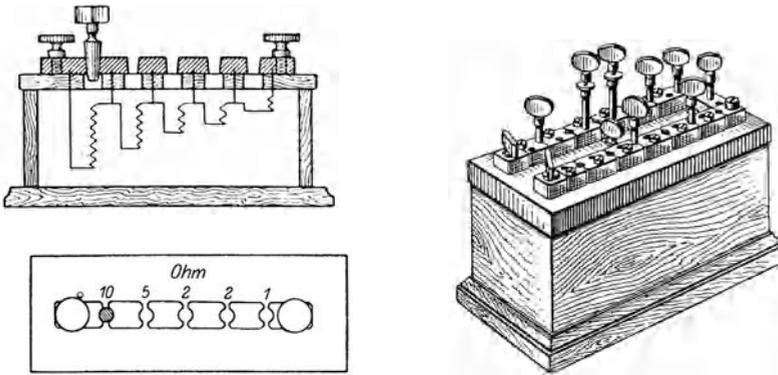


Abb. 291. Stöpselwiderstand.

einen Messingstöpsel, so fließt praktisch der gesamte Strom an dieser Stelle durch den so gut wie widerstandslosen dicken Stöpsel, und es ist so, als wenn der Widerstand, dessen beide Enden an diesen beiden Klötzen liegen, gar nicht vorhanden wäre. Der betreffende Widerstand ist „kurz geschlossen“. Wirksam sind daher nur diejenigen Widerstände, deren Stöpsel herausgezogen sind.

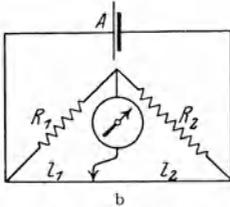
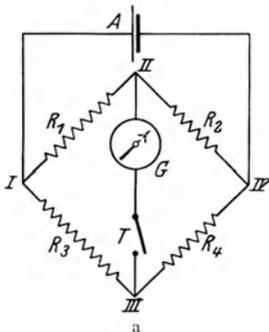


Abb. 292. Widerstandsmessung in der WHEATSTONESCHEN Brückenschaltung.

156. Messung von Widerständen und Kapazitäten in der Brückenschaltung. Ein Verfahren zur Messung des Widerstandes eines Leiters besteht in der unmittelbaren Anwendung des OHMSCHEN Gesetzes, indem man erstens mit einem Strommesser den durch den Leiter fließenden Strom, zweitens mit einem Spannungsmesser die zwischen seinen Enden bestehende Spannung mißt und $R = U/i$ berechnet. Das ist genau die in Abb. 284 dargestellte Schaltung.

Die gebräuchlichste Art der Widerstandsmessung ist die Messung in der WHEATSTONESCHEN *Brückenschaltung*. Es seien R_1 , R_2 , R_3 und R_4 vier in der aus Abb. 292a ersichtlichen Weise miteinander verbundene Widerstände. Mindestens einer dieser Widerstände muß meßbar veränderlich sein. Zwei gegenüberliegende Ecken (II, III) der Schaltung sind durch einen empfindlichen Strommesser G (Galvanometer) miteinander verbunden. Zwischen den beiden anderen Ecken (I, IV) liegt ein Akkumulator oder Element A . In der das Galvanometer enthaltenden Leitung, der „Brücke“, ist ein

Taster T angebracht, d. h. ein Schalter, mit dem man diese Leitung leicht für ganz kurze Zeit schließen kann.

Ist die Brücke geschlossen, so wird im allgemeinen auch in ihr ein Strom fließen und sich durch einen Ausschlag des Meßgerätes bemerkbar machen, nämlich immer dann, wenn nicht gerade die beiden Enden dieser Leitung (II, III) auf gleicher Spannung sind. Durch Verändern der Widerstände, mindestens des einen von ihnen, kann man es aber stets erreichen, daß dies der Fall ist. Dann fließt in der Brücke kein Strom; das Meßgerät (das hier

als sog. Null-Instrument dient) zeigt beim Schließen des Tasters T keinen Ausschlag.

Fließt in der Brücke bei geschlossenem Taster kein Strom, so folgt aus dem 1. KIRCHHOFFSchen Satz für die Teilströme i_1, i_2, i_3 und i_4 in den Widerständen R_1, R_2, R_3 und R_4 $i_1 = i_2, i_3 = i_4$. Durchlaufen wir jetzt das linke Teilstück der Verzweigung, von I beginnend über II und III nach I zurück, so ergibt der 2. KIRCHHOFFSche Satz $i_1 R_1 - i_3 R_3 = 0$. Ebenso folgt für das rechte Teilstück $i_2 R_2 - i_4 R_4 = i_1 R_2 - i_3 R_4 = 0$. Oder

$$i_1 R_1 = i_3 R_3, \quad i_1 R_2 = i_3 R_4.$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, so ergibt sich

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4 \quad \text{bzw.} \quad R_1 : R_3 = R_2 : R_4.$$

Sind also drei dieser Widerstände bekannt, so kann man den vierten berechnen. Es genügt sogar, um z. B. R_1 zu berechnen, wenn nur einer der an R_1 angrenzenden Widerstände, etwa R_2 , bekannt ist und ferner das Verhältnis R_3/R_4 der beiden anderen Widerstände.

Für genaue Widerstandsmessungen benutzt man zum Vergleich Stöpselwiderstände. Für Messungen, bei denen es nur auf geringere Genauigkeit ankommt, bedient man sich oft an Stelle von R_3 und R_4 eines auf einer Millimeterteilung ausgespannten Manganindrahtes, auf dem eine Metallschneide verschoben werden kann, von der aus ein Draht zum Meßgerät in der Brücke führt (Abb. 292b). Die hierdurch abgegrenzten beiden Teile des Drahtes von den Längen l_1 und l_2 bilden die Widerstände R_3 und R_4 . Den Widerstand R_2 bildet ein Stöpselwiderstand, R_1 ist der zu messende Widerstand. Nach erfolgter Abgleichung (durch Verschieben der Schneide) ist $R_1 = R_2 \cdot R_3/R_4$. Das Verhältnis R_3/R_4 aber ist gleich dem Verhältnis, in dem die Metallschneide den Meßdraht teilt, denn die Widerstände der beiden Teile des Drahtes verhalten sich, vorausgesetzt, daß er überall gleich dick und gleich beschaffen ist, wie die Längen dieser Teile, so daß einfach $R_1 = R_2 \frac{l_1}{l_2}$.

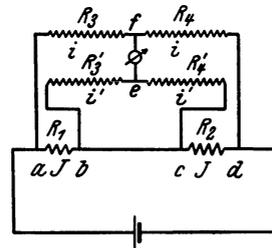


Abb. 293. THOMSONSche Brückenschaltung.

Man kann in der WHEATSTONESchen Brückenschaltung Stromquelle und Galvanometer miteinander vertauschen. Dabei ändert sich im allgemeinen die Empfindlichkeit der Meßanordnung. Welche Schaltungsart zweckmäßig ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Der große Vorzug der WHEATSTONEschen Methode beruht darin, daß man keine geeichten Strom- oder Spannungsmesser braucht, und daß man bei Verwendung eines Meßdrahtes mit einem einzigen Stöpselwiderstand auskommt.

Die einfache Schaltung der Abb. 292a oder b ist nur dann anwendbar, wenn die zu vergleichenden Widerstände sämtlich groß gegen die Widerstände der sie verbindenden Drähte sind, so daß man diese gegen jene vernachlässigen kann. Zur Messung von sehr kleinen Widerständen verwendet man die THOMSONSche Brückenschaltung (Abb. 293). Die Abzweigungen an den Punkten a, b, c, d müssen unmittelbar an den Enden der beiden zu vergleichenden, sehr kleinen Widerstände R_1 und R_2 liegen. Die Widerstände R_3, R_4 und R'_3, R'_4 werden nun so lange verändert, bis gleichzeitig erstens $R_3 : R'_3 = R_4 : R'_4$ ist und zweitens das Galvanometer in der Brücke $e-f$ keinen Strom mehr anzeigt. Ist letzteres erreicht, so sind die durch R_1 und R_2 , durch R_3 und R_4 und durch R'_3 und R'_4 fließenden Ströme, die mit J, i und i' bezeichnet seien, einander paarweise gleich.

Durchlaufen wir jetzt das linke Teilstück der Verzweigung, bei a beginnend, über b, e, f nach a zurück, so ergibt sich aus dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz

$J R_1 + i' R'_3 - i R_3 = 0$, und ebenso für das rechte Teilstück $J R_2 + i' R'_4 - i R_4 = 0$, oder nach einfacher Umformung

$$J R_1 = R_3 \left(i - i' \frac{R'_3}{R_3} \right), \quad J R_2 = R_4 \left(i - i' \frac{R'_4}{R_4} \right).$$

Da nun stets dafür gesorgt wird, daß $R_3/R'_3 = R_4/R'_4$, so sind die Klammerausdrücke in beiden Gleichungen einander gleich. Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so folgt

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4,$$

genau wie bei der WHEATSTONESchen Brückenschaltung. Der Widerstand der Drahtverbindung zwischen b und c , der unter Umständen viel größer ist, als die Widerstände R_1 und R_2 , geht also in die Rechnung nicht ein. Die Vergleichswiderstände R_3, R'_3, R_4, R'_4 werden so groß gewählt, daß man den Widerstand ihrer Zuleitungen ihnen gegenüber vernachlässigen kann.

Die WHEATSTONESche Brückenschaltung kann auch zur Messung von Kapazitäten verwendet werden. Neben anderen Verfahren (§ 249) ist hier dasjenige von MAXWELL zu erwähnen. In der Brückenschaltung wird einer der vier Widerstände durch einen pendelnden Kontakt K und die zu messende Kapazität C in Parallelschaltung ersetzt (Abb. 294). Der Kontakt bewege sich n mal in 1 sec zwischen den beiden Anschlägen hin und her, und in dem betreffenden Zweige der Schaltung herrsche die Spannung U . Dann lädt sich der Kondensator n mal in 1 sec auf die Spannung U auf, nimmt also n mal die Ladung $e = CU$ auf und wird nach jeder Aufladung durch Kurzschluß wieder entladen. Insgesamt nimmt er

also in 1 sec die Elektrizitätsmenge $ne = nCU$ auf, die ihm durch die Zuleitungen zufließen muß. Dies entspricht aber einer durchschnittlichen Stromstärke in diesem Zweige vom Betrage $i = ne = nCU$. Man sieht, daß, wenn man rein formal $i/nC = R$ setzt, diese Beziehung zwischen i und U dem OHM'schen Gesetz entspricht. Der Kondensator von der Kapazität C entspricht in seiner Wirkung bei n maliger Auf- und Entladung in 1 sec einem Widerstande von der Größe $1/nC$. Man kann daher, wenn man n kennt, die Kapazität C aus den anderen Widerständen berechnen, $C = R_2/nR_1R_3$.

157. Der JOHNSEN-RAHBK-Effekt. Auf dem Spannungsgefälle längs eines stromdurchflossenen Leiters beruht der JOHNSEN-RAHBK-Effekt, auch elektrische Klebkraft genannt. Eine ebene Platte aus einem Halbleiter, z. B. Solnhofener Schiefer, wird auf der einen Seite mit einer Metallfolie belegt; mit ihrer

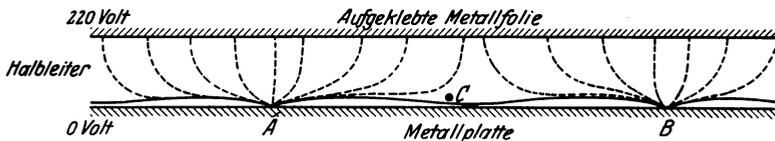


Abb. 295. Schema zum JOHNSEN-RAHBK-Effekt.

anderen Fläche liegt sie auf einer Metallplatte. Legt man an diese beiden Metallbelegungen eine Spannung, etwa die Spannung von 220 Volt eines Lichtnetzes, so haftet die Metallplatte mit sehr großer Kraft an dem Halbleiter. Die Erklärung ist folgende: Wegen der unvermeidlichen kleinen Unebenheiten der Halbleiterplatte berühren sich diese und die Metallplatte nur in ganz wenigen Punkten (A, B , Abb. 295) so, daß zwischen ihnen ein Strom übergehen kann. Der sehr schwache Strom, der durch den Halbleiter fließt, strömt daher in Bahnen, wie sie Abb. 295 zeigt. Längs dieser „Stromlinien“ liegt das ganze Spannungsgefälle

von 220 Volt. Es herrschen daher an einzelnen Punkten der unteren Halbleiterfläche, z. B. in C, Spannungen von beträchtlicher Größe gegen die Metallplatte. So bilden die sich außerordentlich nahe gegenüberstehenden Flächen einen Kondensator von sehr kleinem Plattenabstand, der auf eine Spannung von der Größenordnung von 100 Volt aufgeladen ist, und dessen Platten sich daher mit sehr großer Kraft anziehen (§ 143). Diese Erscheinung hat auch technische Bedeutung (z. B. zum Bau von Relais für die Zwecke der Telegraphie).

158. Temperaturkoeffizient des Widerstandes. Supraleitfähigkeit. Hat man in einer WHEATSTONESCHEN Brückenschaltung den Widerstand z. B. eines Eisendrahtes gemessen und erwärmt man jetzt den Draht etwa mit einer Flamme, so bemerkt man, daß sein Widerstand sich ändert (LENZ 1835). Der Widerstand der metallischen Leiter ist von der Temperatur abhängig, und zwar steigt er mit wachsender Temperatur. Für Kupfer ist z. B. der Widerstand bei 100° 1,4mal so groß wie bei 0° , bei -190° nur noch $1/7$ des Widerstandes bei 0° .

Sehr deutlich erkennt man die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur, wenn man einen Stromkreis aus einigen Akkumulatoren, einer Metallfadenlampe und einem Strommesser von geeigneter Empfindlichkeit bildet. Beim Einschalten ist der Ausschlag wegen des kleineren Anfangswiderstandes zuerst größer und geht dann beträchtlich zurück, weil die Temperatur des Lampenfadens sich durch den Strom erhöht (§ 163) und daher sein Widerstand bei Stromdurchgang größer ist als ohne Strom. Bei Kohlefadenlampen ist das Gegenteil der Fall. Der Widerstand des Kohlefadens sinkt bei steigender Temperatur. Daher kommt es auch, daß Metallfadenlampen beim Einschalten sofort hell aufleuchten, während Kohlefadenlampen ihre volle Lichtstärke erst kurze Zeit (etwa 1 sec) nach dem Einschalten zeigen. Bei gleichzeitigem Einschalten einer Metallfadenlampe und einer gleich hellen, parallelgeschalteten Kohlefadenlampe ist dies gut zu beobachten.

Im Bereiche gewöhnlicher Temperaturen t ändert sich der Widerstand der Metalle ungefähr nach der Formel

$$R = R_0 (1 + at), \quad (25)$$

wobei R_0 der Widerstand bei 0° C ist. a ist in einem nicht allzu großen Temperaturbereich nahezu konstant. Sein Zahlenwert (Tab. 22, § 152) ist im gewöhnlichen Temperaturbereich für die Metalle von der Größenordnung $4 \cdot 10^{-3} = 1/250$, also ungefähr ebenso groß wie der Ausdehnungskoeffizient der idealen Gase $1/273$ (§ 103), dem er sich um so mehr nähert, je reiner das Metall ist. Es ist also der Widerstand der Metalle bei gewöhnlicher Temperatur der absoluten Temperatur ungefähr proportional. a heißt der *Temperaturkoeffizient des Widerstandes*. Es gibt auch Stoffe mit negativem Temperaturkoeffizienten, bei denen also der Widerstand mit steigender Temperatur abnimmt, z. B., wie schon oben erwähnt, die Kohle in den Kohlefadenlampen. Für größere Temperaturbereiche reicht die einfache Gl. (25) nicht aus; es kommen weitere Glieder mit höheren Potenzen der Temperatur hinzu.

Die Legierungen Manganin und Konstantan haben einen sehr kleinen Temperaturkoeffizienten. Daher wird namentlich das Manganin bevorzugt zur Herstellung von Präzisionswiderständen benutzt.

Die Steigerung des Widerstandes mit wachsender Temperatur findet wenigstens qualitativ ihre Erklärung auf Grund der im § 151 entwickelten Vorstellungen. Denn es ist verständlich, daß der Bewegung der Elektronen um so größere hemmende Kräfte entgegenwirken, je heftiger die thermische Bewegung in dem Metall ist.



Abb. 296.
Widerstands-
thermometer
aus
Platindraht.

Von der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes macht man unter anderem Gebrauch beim *Widerstandsthermometer* (Abb. 296). Es besteht aus einer dünnen Platindrahtspirale, die sich in einer Quarzröhre befindet. Ist der Temperaturkoeffizient des Widerstandes des Platindrahtes bekannt, so kann man, indem man seinen Widerstand in der WHEATSTONESchen Schaltung mißt, die Temperatur berechnen, auf der er sich befindet.

Bei sehr tiefen Temperaturen ist der Widerstand der Metalle also außerordentlich klein. Bei einigen Metallen treten in der Nähe des absoluten Nullpunktes noch besondere Verhältnisse ein, indem dort ihr Widerstand *völlig verschwindet*. Diese Erscheinung heißt *Supraleitfähigkeit* (KAMERLINGH ONNES 1911). Der Übergang in den supraleitenden Zustand erfolgt *sprunghaft* bei einer bestimmten, für das betreffende Metall charakteristischen Temperatur, der *Sprungtemperatur* (Tabelle 23).

Tabelle 23. Sprungtemperaturen.

Ga	Th	Ti	Tl	In	Sn	Hg	Ta	Pb	Nb
1,1°	1,43°	1,77°	2,49°	3,40°	3,71°	4,12°	4,36°	7,26°	8,40° abs.

Auch einzelne Karbide und Nitride zeigen Supraleitfähigkeit. Eine befriedigende Theorie der Supraleitfähigkeit, die jedenfalls nur auf dem Boden der Quantentheorie gegeben werden kann, ist noch nicht gefunden worden.

159. Elektrolytische Leitung in festen Körpern. Während die Leitfähigkeit der Metalle auf der Bewegung der in ihnen enthaltenen Elektronen beruht, sind in gewissen anderen festen Stoffen, vor allem in vielen Salzen, die Ladungsträger *positive und negative Ionen*, also die mit einem oder mehreren Elementarquanten ϵ geladenen Atome. Diese Art der Leitfähigkeit, bei der also eine Wanderung der Atome selbst stattfindet, bezeichnet man als *elektrolytische Leitfähigkeit* (vgl. § 166).

Ein Beispiel dieser Art ist das Glas bei höherer Temperatur. Man versehe ein Stück Glasrohr mit zwei Zuleitungen aus Kupferdraht, indem man die Drähte einige Male so um das Rohr wickelt, daß die beiden Zuleitungen etwa $\frac{1}{2}$ cm Abstand voneinander haben, und verbinde die Drähte unter Zwischenschaltung einer Glühlampe mit dem Lichtnetz, am besten Wechselstrom. Dann erwärme man das Glasrohr zwischen den Drähten mit einer Flamme. Nach kurzer Zeit, noch ehe das Rohr glüht, bemerkt man das Auftreten kleiner weißer Fünkchen an den Zuleitungen; gleichzeitig beginnt die Glühlampe erst schwach, dann hell zu leuchten. Das Glasrohr gerät infolge der Erwärmung durch den hindurchgehenden Strom ebenfalls ins Glühen, und man kann nach Kurzschließen der Glühlampe sogar die Flamme entfernen, ohne daß der Stromdurchgang aufhört. Meist schmilzt das Glasrohr nach einiger Zeit durch.

WARBURG hat gezeigt, daß man Natrium auf elektrolytischem Wege durch Glas hindurchtreiben kann. Man benutzt diese Erscheinung dazu, um ganz reines Natrium im Innern eines evakuierten Glasgefäßes niederzuschlagen (für gewisse elektrische und optische Untersuchungen). Man taucht das untere Ende des Glasgefäßes in eine Schale, welche ein geschmolzenes Natriumsalz (Natronsalpeter, elektrolytisch leitend) enthält, und erhitzt dieses und damit den eingetauchten Teil des Glasgefäßes auf etwa 300°. Man verbindet den positiven Pol einer Stromquelle von hoher Spannung mit der Salzschnmelze, den negativen mit einer im Innern des Glasgefäßes befindlichen Glühkathode. Dann fließt durch das Gefäß eine Entladung (§ 183) zwischen der Glühkathode und der als Anode wirkenden erhitzten Stelle der Glaswand, und es geht ein Strom durch das bei dieser Temperatur leitend gewordene Glas hindurch. Positive Ladungsträger sind hier die im Glase (im wesentlichen

Natriumsilikat) enthaltenen Na-Ionen. Diese wandern also in der Richtung auf das Innere des Gefäßes und scheiden sich auf der inneren Glaswand als metallisches Natrium ab. Als Ersatz treten neue Natriumionen aus der Schmelze in das Glas über, das infolgedessen in seiner Zusammensetzung nicht verändert wird. (Vgl. den ganz analogen Fall der Leitung durch eine CuSO_4 -Lösung mit einer Cu-Anode § 170.) Die Leitfähigkeit des aus Verbindungen von seltenen Erden bestehenden Glühstifts der Nernstlampe ist ebenfalls eine elektrolytische.

Bei sehr starken Strömen ist auch bei den Metallen eine ganz schwache elektrolytische Leitung beobachtet worden.

160. Charakteristik von Leitern. Trägt man die Stromstärke i in einem Leiter als Funktion der angelegten Spannung auf, so erhält man eine Kurve, die man die *Charakteristik* oder *Kennlinie des Leiters* nennt. Wenn R konstant ist, ist die Charakteristik nach dem OHMSchen Gesetz eine Gerade. In Wirklichkeit ist dies schon deshalb nie genau der Fall, weil der Strom jeden Leiter erwärmt und der Widerstand so wenigstens mittelbar eine Funktion der Stromstärke i ist, $R = R(i)$. Bei vielen Leitern ist aber der Widerstand auch an sich schon eine Funktion von i , nämlich dann, wenn die Zahl der Ladungsträger im Leiter von der Stromstärke abhängt. Wir werden einen solchen Fall bei den ionisierten Gasen kennen lernen (§ 181). Das OHMSche Gesetz ist dann zu verallgemeinern und lautet

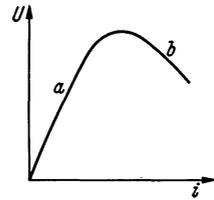


Abb. 297. Charakteristik eines Leiters, der bei geringer Belastung (a) eine steigende, bei höherer Belastung (b) eine fallende Charakteristik hat.

$$U = iR(i). \tag{26}$$

Man spricht von einer steigenden oder fallenden Charakteristik, je nachdem der Differentialquotient dU/di positiv oder negativ ist. Allgemein ist

$$\frac{dU}{di} = R(i) + i \frac{dR(i)}{di}. \tag{27}$$

Es gibt Fälle, in denen die Funktion $R(i)$ eine derartige Gestalt hat, daß dU/di bei genügend hoher Stromstärke i negativ wird (Abb. 297).

Bei fallender Charakteristik treten im Leiter labile Zustände ein. Jede zufällige kleine Erhöhung der Stromstärke bewirkt ein Sinken des Widerstandes und damit eine weitere Steigerung der Stromstärke, mit der ein erneutes Sinken des Widerstandes verbunden ist, so daß die Stromstärke, soweit die sonst im Stromkreise enthaltenen Widerstände es zulassen, weiter und weiter ansteigt.

161. Innerer Widerstand, Reihen- und Parallelschaltung von Stromquellen. In einem geschlossenen, eine Stromquelle (Akkumulator, Element usw.) enthaltenden Stromkreise durchfließt der Strom nicht nur die an die Stromquelle angeschlossenen Leiter, sondern auch die Stromquelle selbst. Und zwar fließt er innerhalb der Stromquelle von der negativen zur positiven, außerhalb von der positiven zur negativen Klemme der Stromquelle (Richtung des positiven Stromes! § 149). Es kommt daher für die Berechnung der Stromstärke im Kreise nicht nur der Widerstand R_a des äußeren Leiterkreises, sondern auch der innere Widerstand R_i der Stromquelle in Betracht. Die elektromotorische Kraft der Stromquelle sei \mathcal{E} , und es fließe im Stromkreise der Strom i . Dann ist nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz

$$\mathcal{E} = i(R_a + R_i) = U_a + U_i, \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_a + R_i}. \tag{28}$$

Folglich ist ferner

$$U_a = \mathcal{E} \frac{R_a}{R_a + R_i} \quad \text{und} \quad U_i = \mathcal{E} \frac{R_i}{R_a + R_i}. \tag{29}$$

Die an dem äußeren Widerstand R_a liegende Spannung U_a ist also kleiner als die elektromotorische Kraft der Stromquelle, nähert sich ihr aber um so mehr,

je kleiner R_i gegenüber R_a ist. Ist $R_i \ll R_a$, so wird $U_a \approx \mathcal{E}$. Da U_a auch die Spannung zwischen den Klemmen der belasteten Stromquelle ist, so bezeichnet man sie als die *Klemmenspannung* der Stromquelle. Sie ist bei sehr großem äußeren Widerstand gleich der elektromotorischen Kraft der Stromquelle. Deshalb kann man letztere an der sonst unbelasteten Stromquelle mittels eines Spannungsmessers von großem Widerstand messen. Sonst ist die Klemmenspannung stets kleiner als die elektromotorische Kraft. Bei Strombelastung liegt stets ein Teil des Spannungsabfalls, nämlich U_i , im Innern der Stromquelle. Man sieht, daß es im allgemeinen vorteilhaft sein wird, wenn eine Stromquelle einen möglichst kleinen inneren Widerstand R_i hat. Hierin liegt, neben vielem andern, der große Vorzug der Akkumulatoren gegenüber den Elementen.

Verbindet man die Klemmen einer Stromquelle durch einen sehr kleinen Widerstand ($R_a \ll R_i$), so tritt ein *Kurzschluß* der Stromquelle ein. Aus Gl. (28) folgt, daß die Stärke des alsdann fließenden Stromes $i \approx \mathcal{E}/R_i$ beträgt. Ein stärkerer Strom kann der Stromquelle nicht entnommen werden. In der Regel dürfen ihr aber nur weit schwächere Belastungen zugemutet werden, wenn

sie nicht Schaden leiden soll. So hat z. B. ein Akkumulator, der bis zu 3 A belastet werden darf, einen inneren Widerstand R_i von etwa 0,02 Ohm. Er liefert also bei einer elektromotorischen Kraft \mathcal{E} von etwa 2 Volt einen Kurzschlußstrom von etwa 100 A.

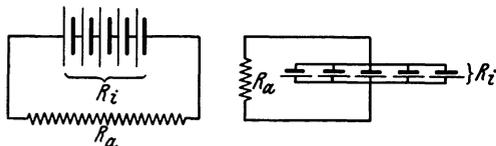


Abb. 298. a Reihenschaltung, b Parallelschaltung von Stromquellen.

Stehen für die Erzeugung eines Stromes mehrere gleichartige Stromquellen zur Verfügung, so ist von Fall zu Fall zu entscheiden, in welcher Weise diese am besten zur Erzeugung eines möglichst starken Stromes verwendet werden. Es seien n gleiche Stromquellen je vom inneren Widerstande R_i und der elektromotorischen Kraft \mathcal{E} verfügbar.

1. Diese Stromquellen werden alle hintereinander geschaltet (Abb. 298a). Dann hat diese „Batterie“ die elektromotorische Kraft $n\mathcal{E}$, und der gesamte innere Widerstand der Stromquelle ist nR_i . Es ist daher die Stromstärke $i = n\mathcal{E}/(nR_i + R_a)$. Ist $R_a \gg nR_i$, so ist die Stromstärke angenähert gleich $n\mathcal{E}/R_a$; man erreicht also mit n hintereinander geschalteten Stromquellen annähernd die n -fache Wirkung einer einzigen Stromquelle. Ist dagegen $R_a \ll nR_i$, so ist, fast unabhängig von n , die Stromstärke sehr angenähert $i \approx \mathcal{E}/R_i$. Man gewinnt in diesem Falle durch die Reihenschaltung mehrerer Stromquellen keinen nennenswerten Vorteil. Die Reihenschaltung ist also immer dann von Nutzen, wenn der äußere Widerstand groß gegen den inneren Widerstand ist.

2. Die n gleichen Stromquellen werden alle parallel geschaltet (Abb. 298b). Dann hat die Batterie die gleiche elektromotorische Kraft \mathcal{E} wie die einzelnen Stromquellen, und der gesamte innere Widerstand ist (§ 154) R_i/n . Die Stromstärke beträgt daher $i = \mathcal{E}/(R_i/n + R_a)$. Ist $R_a \gg R_i/n$, so ist sehr angenähert $i \approx \mathcal{E}/R_a$, also unabhängig von der Zahl n der Stromquellen. Ist aber $R_a \ll R_i/n$, so ist $i \approx n\mathcal{E}/R_i$, unabhängig von R_a und proportional der Zahl der parallelgeschalteten Stromquellen. Die Parallelschaltung empfiehlt sich also in denjenigen Fällen, in denen es auf große Stromstärke bei kleinem äußeren Widerstand ankommt.

Es sind natürlich noch andere Schaltungsarten von n Stromquellen möglich (teils parallel, teils hintereinander). Wie eine einfache Rechnung zeigt, wird in einem gegebenen äußeren Widerstand und bei gegebener Art und Zahl der Stromquellen die größte Stromstärke erzielt, wenn der innere Widerstand der Batterie gleich dem äußeren Widerstand ist.

162. Berechnung der Stromstärke in verzweigten Systemen. Von der Gl. (28) kann man eine in manchen Fällen sehr nützliche Anwendung machen, die wir an zwei Beispielen erläutern wollen. Gegeben sei ein Stromkreis, wie er in Abb. 299a dargestellt ist. Die Batterie habe die elektromotorische Kraft \mathcal{E} . Die äußeren Widerstände seien so groß, daß der innere Widerstand der Batterie dagegen vernachlässigt werden, ihre Klemmenspannung also stets ihrer elektromotorischen Kraft gleichgesetzt werden kann. Wir wollen die Stromstärke berechnen, die im Widerstand R_1 herrscht. Natürlich können wir das auf Grund des OHMSchen Gesetzes und der KIRCHHOFFSchen Regeln tun. Viel einfacher kommen wir auf folgende Weise zum Ziel. Wir betrachten die Punkte A und B , an denen die Enden von R_1 liegen, wie die Klemmen einer Stromquelle, von der aus ein Strom durch R_1 fließt. Wir berechnen zunächst die elektromotorische Kraft \mathcal{E}' dieser Stromquelle. Sie ist offenbar gleich der Spannung, die derjenigen einer offenen wirklichen Stromquelle entspricht, also der Spannung, die zwischen A und B herrschen würde, wenn diese Punkte nicht durch R_1 als äußeren Widerstand verbunden wären. Aus Gl. (19) ergibt sich $\mathcal{E}' = \mathcal{E} R_2 / (R_2 + R_3)$. Der äußere Widerstand ist $R_a = R_1$. Zur Berechnung des inneren Widerstandes müssen wir bedenken, daß die Punkte A und B — von R_1 abgesehen — auf doppelte Weise miteinander verbunden sind, nämlich durch R_2 und (über die Batterie, deren Widerstand wir vernachlässigen) durch R_3 . Diese beiden Widerstände *in Parallelschaltung* bilden also den inneren Widerstand der „Stromquelle“ AB , und es ist nach Gl. (22) $R_i = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$. Setzen wir die Werte von \mathcal{E}' , R_a und R_i in Gl. (28) ein, so folgt ohne weiteres

$$i = \frac{\mathcal{E} \frac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

Diese Gleichung kann man bei einiger Übung ohne jede Zwischenrechnung einfach hinschreiben. Durch Vertauschung von R_2 und R_1 erhalten wir den durch R_2 fließenden Strom. Weit deutlicher noch wird der Vorzug der vorstehenden Betrachtungsweise bei dem folgenden Beispiel. Gegeben sei die WHEATSTONESche Brückenschaltung (§ 156). Es ist eine häufig vorkommende Aufgabe, den Strom zu berechnen, der in der Brücke fließt, wenn die Widerstände nicht abgeglichen sind. Als „Stromquelle“ haben wir die beiden Verzweigungspunkte A und B (Abb. 299b) zu betrachten, an denen das Meßgerät, dessen Widerstand R_g Ohm betrage, liegt. Wir berechnen zunächst die elektromotorische Kraft dieser Stromquelle, wenn die elektromotorische Kraft der wirklichen Stromquelle \mathcal{E} ist. Zwischen A und C herrscht, wenn die Brücke nicht geschlossen ist, die Spannung $\mathcal{E} R_1 / (R_1 + R_2)$, zwischen B und C die Spannung $\mathcal{E} R_3 / (R_3 + R_4)$. Zwischen A und B besteht daher bei offener Galvanometerleitung die Spannung $\mathcal{E} [R_1 / (R_1 + R_2) - R_3 / (R_3 + R_4)]$. Dies ist die „elektromotorische Kraft“ der Stromquelle AB . Ihr innerer Widerstand setzt sich aus den Widerständen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 auf folgende Weise zusammen. Von A ausgehend, sind R_1 und R_2 parallel geschaltet und an ihren anderen Enden bei C und D durch die Batterieleitung kurz geschlossen (den inneren Widerstand der Batterie vernachlässigen wir hier wieder). Von den kurz geschlossenen Punkten C und D ab setzt sich der innere Widerstand in den parallel geschalteten

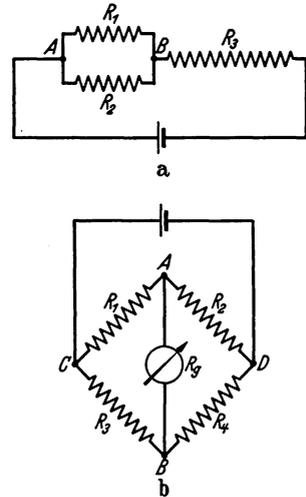


Abb. 299. Zur Berechnung der Stromstärke bei Stromverzweigungen.

Widerständen R_3 und R_4 fort, die mit ihren anderen Enden an B liegen. Der innere Widerstand der Stromquelle AB beträgt demnach $R_i = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$. Der äußere Widerstand ist derjenige der Brücke, $R_a = R_g$. Durch Anwendung der Gl. (28) folgt nunmehr für die Stromstärke in der Brücke

$$i = \frac{\mathcal{E} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)}{R_g + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

Die Berechnung dieses verwickelten Ausdrucks aus dem OHMSchen Gesetz und den KIRCHHOFFSchen Regeln wäre außerordentlich viel zeitraubender gewesen als die vorstehende einfache Überlegung, bei der lediglich die Berechnung des inneren Widerstandes der „Stromquelle“ einiges Nachdenken erfordert.

163. Stromwärme. Stromleistung. Fließt in einem Leiter, dessen Widerstand R ist und an dessen Enden eine Spannung U liegt, ein Strom $i = U/R$, so werden fortgesetzt Ladungsträger von dem einen Ende des Leiters nach dem andern über den Bereich der Spannung U verschoben. Wäre die Bewegung dieser Ladungsträger keinen hemmenden Kräften unterworfen, so würden sie beschleunigt werden, und zwar wäre der Energiezuwachs eines einzelnen Ladungsträgers auf dem ganzen Wege durch den Leiter gleich Ue , wenn e die Ladung des Ladungsträgers ist. Tatsächlich aber unterliegen die Ladungsträger reibungsartigen Kräften und bewegen sich mit im Durchschnitt konstanter Geschwindigkeit, indem sie ihren Energiegewinn bei den Zusammenstößen mit den Molekülen oder Atomen des Leiters an diese abgeben (§ 151) und in thermische Molekularbewegung im Leiter umwandeln. Ist insgesamt die Ladung e durch den Leiter geflossen, so ist die an ihr geleistete Arbeit $A = Ue$ in Form von Wärme (JOULESche Wärme oder Stromwärme) auf den Leiter übergegangen. Die Leistung (§ 22) des Stromes beträgt demnach $L = dA/dt = U de/dt$. Nun ist aber $de/dt = i$ die Stromstärke im Leiter (§ 150), und wir erhalten

$$L = U i \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ bzw. Watt,} \quad (30)$$

je nachdem wir U und i in Einheiten des elektrostatischen oder des internationalen Maßsystems messen (s. unten).

Die vom Strome in der Zeit t geleistete Arbeit ergibt sich nach § 22, Gl. (46a) zu

$$A = \int_0^t L dt = \int_0^t U i dt \text{ erg bzw. Wattsekunden.} \quad (31)$$

Bei konstanter Stromstärke und Spannung können wir statt dessen schreiben

$$A = U i t \text{ erg bzw. Wattsekunden.} \quad (32)$$

Unter Benutzung des OHMSchen Gesetzes lassen sich die vorstehenden Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$L = U i = \frac{U^2}{R} = i^2 R \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ bzw. Watt,} \quad (33)$$

$$A = \int_0^t U i dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt = \int_0^t i^2 R dt \text{ erg bzw. Wattsekunden,} \quad (34)$$

oder bei konstanter Stromstärke und Spannung (JOULESches Gesetz)

$$A = U i t = \frac{U^2}{R} t = i^2 R t \text{ erg bzw. Wattsekunden.} \quad (35)$$

Es ist $1 \text{ Watt} = 10^7 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$ und $1 \text{ Wattsekunde} = 10^7 \text{ erg}$ (§ 22). Auf Grund von § 146 stellt man leicht fest, daß

$$1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampere} \times 1 \text{ sec} = 10^7 \text{ erg} = 1 \text{ Wattsekunde}$$

ist. Für 1 Wattsekunde ist auch die Bezeichnung 1 Joule in Gebrauch.

Setzt man nach § 122 $1 \text{ Wattsekunde} = 0,239 \text{ cal}$, so erhält man die in der Zeit t im Leiter in der Form von Wärme entwickelte Arbeit in Kalorien,

$$Q = 0,239 U i t \text{ cal.} \quad (36)$$

Aus dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz folgt, daß die Leistung eines Stromes i in einem geschlossenen, unverzweigten Leiterkreise

$$L = i^2 \sum R_k = i \sum U_k = \mathcal{E} i \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ bzw. Watt} \quad (37)$$

ist.

Den Betrag von $0,239 \text{ cal}$ nennt man auch das *elektrische Wärmeäquivalent*.

Für die Zwecke der Technik ist die Wattsekunde meist zu klein. Man verwendet daher bei der technischen Messung elektrischer Leistung statt des Watt das *Kilowatt* (kW) = 1000 Watt ; als technische Einheit der Arbeit dient die *Kilowattstunde* (kWh), d. h. die von 1 kW in 1 Stunde geleistete Arbeit. Es ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ kWh} &= 1000 \cdot 60 \cdot 60 \text{ Wattsekunden} = 3600000 \text{ Wattsekunden} \\ &= 3,6 \cdot 10^{13} \text{ erg} = 3,67 \cdot 10^5 \text{ mkg}^* = 8,6 \cdot 10^5 \text{ cal.} \end{aligned}$$

Ein Kilowatt ist gleich $1,36$ (oder rund $\frac{4}{3}$) Pferdestärken (§ 22).

Die vorstehenden Gleichungen gelten nicht nur dann, wenn die Ladungsträger sich *innerhalb eines Leiters* bewegen und die an ihnen geleistete Beschleunigungsarbeit immer unmittelbar, d. h. nach Durchlaufen sehr kleiner Wegstrecken, wieder an den Leiter als Wärme abgeben. Sie gelten auch dann, wenn die Ladungsträger beliebig lange Wege in einem beschleunigenden elektrischen Felde *frei durchlaufen*, also die ganze längs dieses Weges an ihnen geleistete Arbeit zunächst als kinetische Energie aufspeichern und sie erst dann beim Auftreffen auf ein Hindernis an dieses abgeben. Das ist bei den Entladungen durch stark verdünnte Gase der Fall (§ 183). Dann verwandelt sich ihre Energie an diesem Hindernis (z. B. an der Glaswand eines Entladungsrohrs oder an der Anode einer Röntgenröhre, § 313) in Wärme, deren Betrag sich ebenfalls aus der durchlaufenen Spannung U und der Stromstärke i gemäß Gl. (36) ergibt.

In der elektrischen Glühlampe (EDISON) wird ein dünner Draht aus Wolfram durch den elektrischen Strom zur Weißglut erhitzt. Er befindet sich in einem möglichst weitgehend luftleer gemachten Glasgefäß oder in einem solchen, das mit reinem Stickstoff (Druck rund $\frac{1}{2} \text{ Atm.}$) gefüllt ist, wodurch ihr optischer Wirkungsgrad etwa verdoppelt wird, da man solche Lampen stärker belasten kann als gasleere Lampen (vgl. § 322). (Der Stickstoff wirkt der sonst bei hoher Temperatur eintretenden Verdampfung des Wolframfadens entgegen.) Die Leistung einer normalen Metallfadenlampe beträgt zwischen $0,5$ und 1 Watt je Kerze ihrer Lichtstärke (§ 265). Bei den vor allem in der elektrischen Schwingungstechnik benützten Verstärkerröhren (§ 259) wird die Kathode — ein Wolframdraht — durch einen elektrischen Strom zum Glühen gebracht. Auch für Heizwecke wird die JOULEsche Wärme ausgenutzt. Die Schmelzsicherungen in den elektrischen Anlagen bestehen aus einem dünnen Metalldraht, der bei Überschreitung der zulässigen Stromstärke durchschmilzt und dadurch die Leitung gefahrlos unterbricht. In allen Fällen, in denen es nicht gerade auf die Wärmewirkung des Stromes abgesehen ist (elektrische Heizung usw.), bedeutet das Auftreten JOULEscher Wärme einen unerwünschten und oft sehr lästigen Energieverlust.

Eine weitere Anwendung findet die JOULESche Wärme in den Hitzdrahtstrommessern. Hier wird die Längenänderung, die ein Draht infolge seiner Erwärmung durch den elektrischen Strom erfährt, in die Bewegung eines Zeigers auf einer Skala übersetzt, an der man die Stromstärke abliest (Abb. 300). Die Erwärmung des Drahtes ist nach Gl. (33) proportional i^2 . Die Längenänderung des Drahtes hängt also nicht von der Stromrichtung, d. h. von dem Vorzeichen

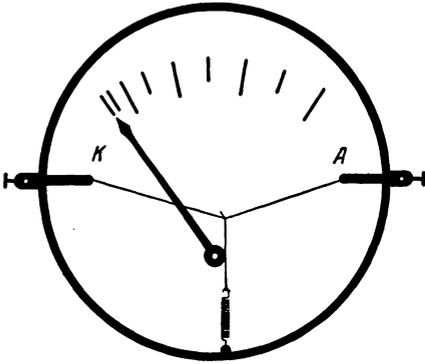


Abb. 300. Hitzdrahtstrommesser. Schema.
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

von i , ab. Daher zeigt ein Hitzdrahtstrommesser nicht nur Gleichstrom, sondern auch Wechselstrom (§ 246) an. Der Ausschlag eines Hitzdrahtstrommessers wächst etwa mit dem Quadrat der Stromstärke. Allgemein gilt, daß Strommesser, deren Ausschlag proportional i^2 ist, sowohl für Gleichstrom wie für Wechselstrom verwendet werden können, während mit solchen, deren Ausschlag proportional i ist, unmittelbar nur Gleichstrom gemessen werden kann.

man z. B. zwei an isolierenden Handgriffen befestigte sehr gut ebene Platten aus Kupfer und Zink aufeinander (Abb. 301), so bilden sie einen Kondensator mit sehr kleinem Plattenabstand, also sehr großer Kapazität, und die zwischen den Platten herrschende Spannung bewirkt eine merkliche Aufladung der Platten. Reißt man sie schnell (ohne zu kippen) auseinander, so kann man mit einem Elektrometer nachweisen, daß sie entgegengesetzte Ladung besitzen. Diese Erscheinung (*Berührungsspannung*, *VOLTA-Effekt*) wurde 1793 von VOLTA entdeckt.

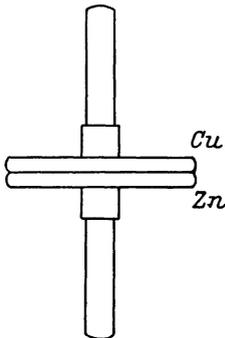
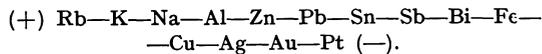


Abb. 301. Zum Nachweis der Berührungsspannung von Metallen.

Man kann die Metalle in eine Reihe, die *Spannungsreihe*, derart ordnen, daß irgendein Metall aus der Reihe negativ elektrisch wird, wenn es mit einem weiter links stehenden, positiv elektrisch, wenn es mit einem weiter rechts stehenden Metall in Berührung ist, z. B.



Befinden sich in einem geschlossenen Leiterkreis mehrere verschiedene Metalle, so wirken die zwischen ihnen auftretenden Berührungsspannungen als elektromotorische Kräfte im Kreise. Vorausgesetzt, daß sich alle Teile des Kreises auf gleicher Temperatur befinden (§ 165), ist jedoch die Summe dieser elektromotorischen Kräfte stets gleich Null, und es fließt im Kreise kein Strom, z. B. $\mathcal{E}(\text{Cu—Al}) + \mathcal{E}(\text{Al—Cu}) = 0$ bzw. $\mathcal{E}(\text{Cu—Al}) = -\mathcal{E}(\text{Al—Cu})$ oder $\mathcal{E}(\text{Al—Sn}) + \mathcal{E}(\text{Sn—Cu}) + \mathcal{E}(\text{Cu—Al}) = 0$.

Eine der Berührungsspannung entsprechende Neigung zum Übertritt von Ladungsträgern von einem Stoff zu einem ihn berührenden, chemisch verschiedenen Stoff besteht aber nicht nur bei den Metallen, sondern bei allen Stoffen, auch bei den Nichtleitern. Jedoch genügt bei den letzteren die bloße Berührung oft noch nicht, um wirklich einen Übertritt der in ihnen sehr fest gebundenen Ladungsträger zu bewirken. Dazu ist ein wesentlich engerer Kon-

takt nötig, der am wirksamsten durch Reiben der Stoffe aneinander erzeugt werden kann. Das ist die Ursache der sog. *Reibungselektrizität*, von der wir im 4. Kapitel schon häufig Gebrauch gemacht haben.

Die Reibungselektrizität ist die älteste, und war bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts die allein bekannte elektrische Erscheinung. Schon im Altertum war bekannt, daß geriebener Bernstein (*ἤλεκτρον*) leichte Körper anziehen vermochte. Erst GILBERT entdeckte um 1600, daß die gleiche Eigenschaft auch vielen anderen Stoffen zukommt. Er war es auch, der der Erscheinung den Namen Elektrizität gab. Die erste brauchbare Elektrisiermaschine baute im 17. Jahrhundert OTTO VON GUERICKE. Quantitativ ist über die Reibungselektrizität nicht allzuviel bekannt. Nach COEHN läßt sich ein Stoff mit höherer Dielektrizitätskonstante gegenüber einem solchen mit kleinerer Dielektrizitätskonstante positiv auf.

Eine gewisse Verwandtschaft mit der Berührungsspannung hat folgende Erscheinung. In der Umgebung von Wasserfällen zeigt die Luft eine negative Ladung (*Wasserfallelektrizität*, *Balloelektrizität*, *LENARD-Effekt*). Wie LENARD gezeigt hat, rührt dies davon her, daß Wassertropfen infolge von molekularen Kräften zwischen dem Wasser und der umgebenden Luft stets polarisiert sind, indem ihre Oberfläche eine negative, ihr Inneres eine positive Ladung trägt. Wird beim Aufprall die Oberfläche abgerissen, so bildet sie in der Luft schwebende, negativ geladene Tröpfchen, während das abfließende Wasser einen positiven Ladungsüberschuß besitzt. Gelöste Stoffe vermindern die Wirkung und können sogar ihr Vorzeichen umkehren. Es ist möglich, daß ein durch starke Turbulenz der Luft an Regentropfen erzeugter LENARD-Effekt an der Entstehung der Gewitter beteiligt ist. Der LENARD-Effekt tritt auch an andern Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, auf.

165. Thermoelektrische Erscheinungen. Die Berührungsspannung zwischen zwei Metallen ist von der Temperatur der Berührungsstelle abhängig. Hält man die beiden Verbindungsstellen zweier zu einem Kreise geschlossener Stücke aus verschiedenen Metallen auf verschiedenen Temperaturen (Abb. 302), so überwiegt die Berührungsspannung an der einen Lötstelle diejenige an der anderen, und es besteht im Kreise eine elektromotorische Kraft, die man als *Thermokraft* bezeichnet (*Thermoeffekt*, SEEBECK 1821). Den von einer Thermokraft im Kreise erzeugten Strom nennt man *Thermostrom*. Die Thermokraft ist besonders groß bei der Folge Wismut-Antimon ($1 \cdot 10^{-4}$ Volt \cdot Grad $^{-1}$). Häufig benutzt werden unter anderem die Folgen Konstantan-Kupfer ($0,42 \cdot 10^{-4}$ Volt \cdot Grad $^{-1}$) und Platin-Platinrhodium ($0,06 \cdot 10^{-4}$ Volt \cdot Grad $^{-1}$). Zur Messung der Thermokraft schaltet man einen Spannungsmesser in den Leiterkreis. Damit die Messung nicht verfälscht wird, müssen seine beiden Klemmen auf gleicher Temperatur sein, da dort sonst zusätzliche Thermokräfte auftreten können.

Vorrichtungen der beschriebenen Art heißen *Thermoelemente*. Sie finden eine wichtige Anwendung bei der Temperaturmessung, denn aus der Größe der Thermokraft kann die Temperaturdifferenz der beiden Verbindungsstellen, also bei bekannter Temperatur der einen die Temperatur der zweiten, ermittelt werden. Wegen der großen Genauigkeit, mit der elektrische Messungen ausgeführt werden können, sind solche Temperaturmessungen viel genauer als solche mit den sonst üblichen Thermometern. Außerdem besteht der große Vorteil, daß man Thermoelemente aus dünnen Drähten herstellen und in enge Öffnungen einführen kann. Solche Thermoelemente haben auch eine viel kleinere Wärmekapazität als z. B. Quecksilberthermometer. Sie wirken also weit

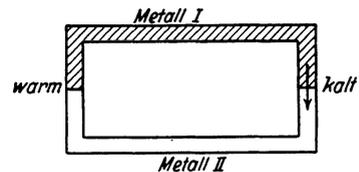


Abb. 302. Zum Thermoeffekt.

weniger störend als diese auf die Temperatur des zu untersuchenden Körpers ein. Daher finden Thermoelemente nicht nur in der Physik, sondern auch in der Physiologie sehr zahlreiche Anwendungen.

In der elektrischen Meßtechnik können Thermokräfte und Thermoströme Fehlerquellen bilden, wenn es sich um die Messung von niedrigen Spannungen oder schwachen Strömen handelt. Denn in einem größeren Stromkreise, der verschiedene Metalle enthält (oft genügt auch schon eine etwas verschiedene Beschaffenheit von Teilen aus dem gleichen Metall), können leicht Temperaturdifferenzen auftreten, die Thermokräfte hervorbringen. Man kann dieser Fehlerquelle begegnen, indem man zwei Messungen mit entgegengesetzten Richtungen des Meßstromes anstellt und die Ergebnisse mittelt.

Die Umkehrung des Thermoeffektes ist der *PELTIER-Effekt*. Fließt durch die Verbindungsstelle zweier Metalle ein Strom, so tritt je nach der Stromrichtung eine Erwärmung oder Abkühlung der Verbindungsstelle ein. Das ist

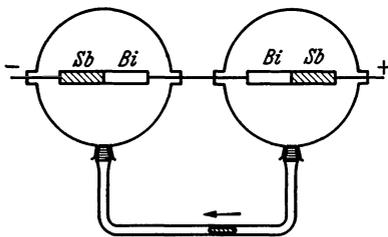


Abb. 303. Zum Nachweis des PELTIER-Effekts.

leicht verständlich. Ist der Strom so gerichtet, daß zum Übertritt der Elektronen aus dem ersten in das zweite Metall Arbeit zu leisten ist, besitzt also das zweite Metall gegenüber dem ersten eine negative Berührungsspannung, so werden die Elektronen verlangsamt, im umgekehrten Fall aber beschleunigt. Mit einer Verlangsamung der Elektronen ist aber eine Abnahme, mit einer Beschleunigung der Elektronen eine Zunahme ihrer thermischen Energie verbunden.

Im ersten Falle, z. B. beim Übertritt der Elektronen von Antimon (Sb) in Wismut (Bi), tritt also Abkühlung, bei entgegengesetzter Stromrichtung Erwärmung der Verbindungsstelle ein. Da die Elektronenbewegung der positiven Stromrichtung entgegengerichtet ist, so wird die Verbindungsstelle zwischen Antimon und Wismut erwärmt, wenn der Strom die Richtung Antimon→Wismut hat, und abgekühlt, wenn er entgegengesetzt gerichtet ist. Abb. 303 zeigt ein doppeltes Luftthermometer zum Nachweis des PELTIER-Effekts. Fließt der Strom von rechts nach links, so bewegt sich der die Verbindungsröhre sperrende Quecksilbertropfen ebenfalls von rechts nach links, ein Beweis, daß sich die rechte Verbindungsstelle erwärmt, die linke abgekühlt hat.

II. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern.

166. Leitfähigkeit von Flüssigkeiten. Elektrolyse. Abgesehen von flüssigen Metallen und geschmolzenen Salzen, sind die meisten Flüssigkeiten, vorausgesetzt, daß sie chemisch sehr rein sind, sehr schlechte Leiter, zum großen Teil sogar ganz vorzügliche Isolatoren. Es ist in vielen Fällen, in denen sich bei einer reinen Flüssigkeit eine schwache Leitfähigkeit zeigt, zweifelhaft, ob sie nicht von ganz kleinen Resten von Verunreinigungen herrührt. So ist auch chemisch reines Wasser ein außerordentlich schlechter Leiter. Auf Grund der bereits früher entwickelten Vorstellungen ist klar, daß die Leitfähigkeit einer Flüssigkeit davon abhängt, ob sich in ihr frei bewegliche Ladungsträger (Ionen, Elektronen) befinden.

Man verbinde zwei Stücke Platinblech *A* und *K*, welche sich in einem mit destilliertem Wasser gefüllten, vorher gut gereinigten Glasgefäß befinden, unter Einschaltung eines Strommessers mit den beiden Klemmen einer Akkumulatoren-batterie (4–10 Volt, Abb. 304). Das Meßgerät zeigt einen schwachen Strom an, ein Beweis, daß das Wasser (das keineswegs chemisch rein ist) eine schwache

Leitfähigkeit hat. Bringt man jetzt in das Wasser einen Tropfen einer Säure oder ein wenig von der Lösung irgendeines Salzes, so steigt die Stromstärke sofort an und erreicht bei größerer Konzentration beträchtliche Werte. Die Leitfähigkeit des Wassers rührt also fast ausschließlich von in ihm gelösten Stoffen her. Es haben aber nicht alle gelösten Stoffe diese Eigenschaft, sondern nur die Salze, Basen und Säuren; so erhöht z. B. gelöster Zucker die Leitfähigkeit des Wassers nicht. Ähnliche Erscheinungen, wenn auch nicht in so hohem Maße, zeigen Lösungen in anderen Flüssigkeiten. Die spezifische Leitfähigkeit von Lösungen reicht in keinem Falle an die der Metalle heran.

Man bezeichnet die beiden in die Flüssigkeit getauchten, zur Stromzuführung dienenden Bleche als *Elektroden*. Die mit dem positiven Pol der Batterie verbundene nennt man die *Anode*, die mit dem negativen Pol verbundene die *Kathode*. Der (positive) Strom fließt also in der Flüssigkeit von der Anode zur Kathode. Eine durch gelöste Stoffe leitend gemachte Flüssigkeit nennt man einen *Elektrolyten*, die mit der Elektrizitätsleitung durch solche Flüssigkeiten verbundenen Erscheinungen *Elektrolyse*.

Außer bei den wässrigen Lösungen ist die elektrolytische Leitfähigkeit besonders ausgeprägt bei den Schmelzen mancher Salze. Das ist besonders leicht

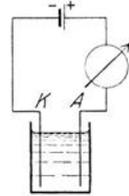


Abb. 304.
Leitfähigkeit
von Wasser.

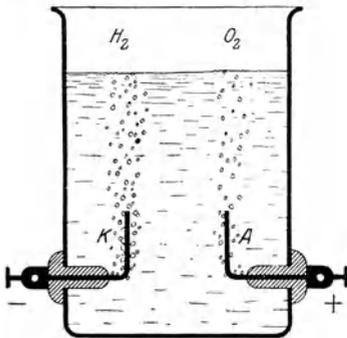


Abb. 305. Zersetzung des Wassers.
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

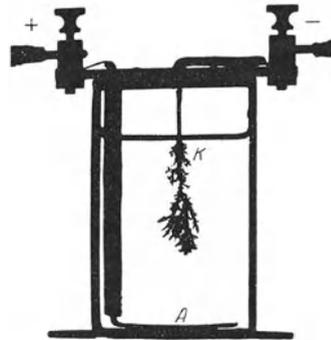


Abb. 306. Bleibaum.
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

bei denjenigen Salzen zu verstehen, deren Kristalle schon aus Ionen bestehen, die beim Schmelzen zum Teil als solche bestehen bleiben und freie Beweglichkeit erlangen. Es gibt aber Ionenkristalle, deren Ionen sich beim Schmelzen sämtlich zu elektrisch neutralen Molekülen vereinigen. Es zeigen also nicht alle Salze, die Ionenkristalle bilden, in der Schmelze eine elektrolytische Leitfähigkeit.

167. Abscheidungen an den Elektroden. Läßt man mittels Platinelektroden einen Strom durch eine wässrige Lösung einer Säure, z. B. Schwefelsäure, gehen, so bemerkt man an den Elektroden eine lebhafte Gasentwicklung (Abb. 305). Zur genaueren Untersuchung dieser Erscheinung bedient man sich eines *Vollmeters* (nicht mit einem Voltmeter zu verwechseln!), bei dem sich die an den beiden Elektroden gebildeten Gasmengen in getrennten Röhren sammeln. Es zeigt sich, daß an der Kathode etwa doppelt soviel Gas erscheint wie an der Anode. Die Untersuchung dieser Gase ergibt, daß sich an der Anode Sauerstoff (bringt glimmenden Span zum hellen Glühen oder zum Brennen), an der Kathode Wasserstoff (verbrennt mit bläulicher Flamme) gebildet hat. (Daß nicht genau doppelt soviel Wasserstoff wie Sauerstoff, sondern weniger

Sauerstoff erscheint, liegt daran, daß von dem Sauerstoff ein nicht unbedeutender Teil im Wasser gelöst wird.) Sammelt man jedoch die ganze gebildete Gasmenge ungetrennt, so erhält man eine Mischung von 1 Teil Sauerstoff und 2 Teilen Wasserstoff, d. h. Knallgas. Dies kann man durch die unter lebhaftem Knall erfolgende Verbrennung feststellen, wenn man das Gas unter Wasser in einem Reagenzglas auffängt oder es durch Seifenlösung perlen läßt und die Blasen anzündet (Vorsicht!).

Eine hübsche Erscheinung zeigt sich, wenn man einen Strom durch eine wässrige Bleiazetatlösung leitet und als Kathode einen Bleidraht, als Anode eine Bleiplatte benutzt. Es scheidet sich dann an der Kathode Blei in kristallinischer Form als baumartiges Gebilde ab (Bleibaum, Abb. 306).

168. Elektrolytische Dissoziation. Wo eine Verschiebung elektrischer Ladungen stattfindet, also ein elektrischer Strom fließt, müssen, wie schon oben betont, stets bewegliche Ladungsträger vorhanden sein, welche diese Ladung mit sich führen, wie es in den Metallen die Elektronen tun. Bei der Stromleitung durch einen Elektrolyten sind es die atomistischen Bestandteile der gelösten Stoffe, welche als Ladungsträger auftreten. Diese Ladungsträger werden nicht erst durch die an die Flüssigkeit gelegte Spannung erzeugt, sondern sind in jedem Elektrolyten stets vorhanden. Wird z. B. Kochsalz, NaCl, in Wasser gelöst, so befindet sich dieses im Wasser nicht in molekularer Form als NaCl-Moleküle, sondern die Na-Atome und die Cl-Atome sind, jedenfalls bei nicht zu hoher Konzentration, voneinander getrennt, und außerdem tragen die Na-Atome eine positive, die Cl-Atome eine negative elektrische Ladung. In diesem Zustande bezeichnet man die Atome und überhaupt alle elektrisch geladenen atomistischen oder molekularen Gebilde, wie schon des öfteren erwähnt, als *Ionen*. (Weshalb das Na in Gestalt von Ionen nicht, wie metallisches Na, mit dem Wasser reagiert, wird später, § 344, erörtert werden.) Den Zerfall eines Moleküls oder eines kristallinischen Stoffes in Ionen bei der Lösung nennt man *elektrolytische Dissoziation*. Bei der Lösung von Schwefelsäure, H_2SO_4 , entstehen aus jedem H_2SO_4 -Molekül zwei positive H-Ionen und ein negatives SO_4 -Ion, ebenso bei der Lösung von Kupfersulfat, $CuSO_4$, je ein positives Cu-Ion und ein negatives SO_4 -Ion. Da es sich um atomistische Gebilde handelt, so kann die auf den Ionen auftretende Ladung nur ein *kleines* ganzzahliges Vielfaches des elektrischen Elementarquantums sein. Und zwar zeigt sich, daß die Zahl dieser Elementarquanten mit der Wertigkeit übereinstimmt, welche das betreffende Atom oder die Atomgruppe (z. B. das Radikal SO_4) in der vorliegenden chemischen Verbindung besitzt. Von den Elementen tragen die in den linken Gruppen des periodischen Systems stehenden Elemente, also insbesondere der Wasserstoff und die Metalle, positive Ladungen, die in den rechten Gruppen stehenden fast immer negative Ladungen. Säurereste (Radikale), wie SO_4 , tragen negative Ladungen, und zwar so viele Elementarquanten, wie ihrer chemischen Wertigkeit entspricht, das SO_4 -Ion also zwei negative Elementarquanten (vgl. § 344).

Daß das Wasser auf gelöste Stoffe eine besonders starke dissoziierende Wirkung hat, beruht darauf, daß die Wassermoleküle ganz besonders große elektrische Momente haben (§ 344). Diese erzeugen in der nächsten Umgebung der einzelnen Wassermoleküle sehr starke lokale elektrische Felder, und diese sind die unmittelbare Ursache der Dissoziation. Auf den großen elektrischen Momenten der Wassermoleküle beruht ebenfalls die ungewöhnlich hohe Dielektrizitätskonstante des Wassers ($\epsilon = 81$).

169. Das Wesen der Elektrizitätsleitung in Elektrolyten. Die FARADAYSchen Gesetze. Legt man an zwei in einem Elektrolyten befindliche Elektroden eine Spannung, so entsteht im Elektrolyten genau wie in einem metallischen Leiter

ein elektrisches Feld, welches die in ihm vorhandenen Ladungsträger in Bewegung setzt, und zwar die positiven Ionen *in* Richtung des Feldes, also auf die Kathode *K* hin, die negativen *gegen* die Richtung des Feldes, auf die Anode hin (Abb. 307). Für die Bewegung der Ionen kann man genau die gleichen Überlegungen anstellen, wie es in § 151 für die Elektronen in den Metallen geschehen ist, sogar mit noch größerem Recht, denn sie entsprechen in diesem Falle der Wirklichkeit wohl noch besser. Es gilt also auch für Elektrolyte das OHMSche Gesetz.

Die auf die verschiedenen Ionenarten wirkenden bewegungshemmenden Kräfte sind verschieden groß, z. B. für das Cl-Ion fünfmal so groß wie für das H-Ion. Infolgedessen sind die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen verschieden. Die Geschwindigkeit, die ein Ion bei der Feldstärke 1 Volt · cm⁻¹ hat, nennt man seine *Beweglichkeit* (vgl. § 151).

Da die positiven Ionen zur Kathode, die negativen zur Anode wandern, nennt man erstere auch *Kationen*, letztere *Anionen*.

Da bei der Leitung durch Elektrolyte die an die Elektroden gelangenden Ladungen auf den Ionen des gelösten Stoffes sitzen, so müssen diese zugleich mit den Ladungen an die Elektroden gelangen und dort in die Erscheinung treten. Tatsächlich beobachtet man in vielen Fällen die hier nach zu erwartenden *Abscheidungen an den Elektroden*. (In den Fällen, wo sie nicht auftreten, liegt das an gewissen chemischen Vorgängen an den Elektroden, § 170.)

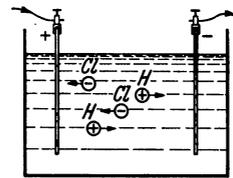


Abb. 307. Schema der Ionenwanderung in einer HCl-Lösung.

Es sei *n* die Zahl der in 1 sec an einer der beiden Elektroden abgeschiedenen Ionen (geladene Atome oder Atomgruppen), *μ* die Masse eines Ions, *z* seine chemische Wertigkeit, *ε* das elektrische Elementarquantum, also *zε* die Ladung jedes Ions. Denn, wie bereits oben erwähnt, trägt ein Ion so viele Elementarquanten, wie seine Wertigkeit beträgt. Dann ist die Stromstärke, d. h. die in 1 sec an die Elektrode gelangende Elektrizitätsmenge,

$$i = n z \epsilon. \tag{1}$$

Gleichzeitig wird in 1 sec an der Elektrode die Masse *nμ* abgeschieden, also in der Zeit *t* die Masse

$$m = n \mu t. \tag{2}$$

Aus Gl. (1) und (2) folgt, daß die in der Zeit *t* durch einen Strom *i* abgeschiedene Masse

$$m = \frac{\mu}{z \epsilon} i t = A i t = A e \tag{3}$$

ist, wobei

$$A = \frac{\mu}{z \epsilon} \tag{4}$$

und *e = it* die mit der Masse *m* beförderte Elektrizitätsmenge ist [§ 150, Gl. (6)]. Die Gl. (3) und (4) enthalten die beiden FARADAYSchen Gesetze der *Elektrolyse* (1833). Gl. (3) (erstes FARADAYSches Gesetz) besagt: *Die abgeschiedenen Mengen m sind der Stromstärke i und der Zeit t des Stromdurchganges, also der mit der Masse m beförderten Elektrizitätsmenge e, und einer Konstanten A proportional*, die das *elektrochemische Äquivalent* heißt und von der Art der Ionen abhängt, denn sie enthält nach Gl. (4) die Ionenmasse *μ* und die Wertigkeit *z*. Multiplizieren wir auf der rechten Seite von Gl. (4) Zähler und Nenner mit der Zahl der Atome im Grammatom, der LOSCHMIDTSchen Zahl *N* (§ 63), so ist der Zähler *Nμ* gleich dem Atomgewicht *α* des Ions bzw. bei Ionen, die aus mehreren Atomen bestehen (z. B. SO₄), gleich der Summe der Atomgewichte ihrer Bestandteile, und wir können schreiben:

$$A = \frac{N \mu}{z N \epsilon} = \frac{\alpha}{z C}, \tag{5}$$

wobei

$$C = N \varepsilon \quad (6)$$

die FARADAYSche Konstante ist. Gl. (5) enthält das zweite FARADAYSche Gesetz: *Die elektrochemischen Äquivalente der Ionen verhalten sich wie die Quotienten aus Atomgewicht α und Wertigkeit z , d. h. wie ihre chemischen Äquivalentgewichte.* An die Stelle des Atomgewichtes tritt bei Gebilden, die aus mehreren Atomen bestehen (wie z. B. SO_4), die Summe der Atomgewichte ihrer Bestandteile. Das elektrochemische Äquivalent A ist nach Gl. (3) die Anzahl Gramm der betreffenden Ionenart, die zugleich mit der Ladung $e = 1$ Coulomb (also z. B. bei der Stromstärke $i = 1$ Amp. in der Zeit $t = 1$ sec) an die Elektrode gelangt.

Die FARADAYSche Konstante C ist, als Produkt zweier universeller, d. h. nicht von der Stoffart abhängiger Konstanten ebenfalls eine solche und von der Art des betreffenden Ions und allen äußeren Bedingungen unabhängig. Sie beträgt

$$C = N \varepsilon = 96494 \text{ Coulomb/Grammatom bzw. Mol.} \quad (7)$$

Tabelle 24. Elektrochemische Äquivalente.

	$A \cdot 10^4$	α	z	α/A	$C = \alpha/zA$
H	0,01045	1,008	1	96459	96459
Ag	1,118	107,88	1	96494	96494
O	0,0829	16,00	2	193004	96502
Cu	0,3294	63,57	2	192987	96494
N	0,0484	14,00	3	289256	96419
Al	0,0936	27,1	3	289530	96510
Sn	0,3083	119,0	4	386000	96500
V	0,1057	51,0	5	482498	96500
U	0,4119	238,5	6	578784	96464

(Dieser Wert ergibt sich rechnermäßig aus der gesetzlichen Definition des Ampere, also auch des Coulomb, § 198.) Die von einem Grammatom oder Mol z -wertiger Ionen getragene Ladung beträgt demnach $z N \varepsilon$, z. B. beim zweiwertigen Cu oder beim zweiwertigen SO_4 $2 N \varepsilon$.

Die FARADAYSche Konstante hat eine große Bedeutung

für die Atomphysik, denn sie erlaubt, wenn eine der beiden atomistischen Größen N und ε bekannt ist, die andere zu berechnen. So erhalten wir z. B. unter Zugrundelegung des Wertes $\varepsilon = 1,591 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, für N den bereits in § 63 angeführten Wert der LOSCHMIDTSchen Zahl $N = 6,065 \cdot 10^{23}$.

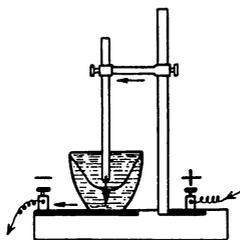


Abb. 308. Silbervoltmeter.

In der Tab. 24 sind die gemessenen elektrochemischen Äquivalente A einiger Elemente zusammengestellt, ferner deren Atomgewichte α , ihre Wertigkeit z und das Verhältnis α/A , welches nach Gl. (5) gleich $z \cdot C$ sein muß, und $C = N \varepsilon = \alpha/zA$. Die Tabelle zeigt, daß die Messungen die Konstanz von C mit großer Genauigkeit bestätigen.

Wegen der großen Genauigkeit, mit der derartige Messungen (außer der Messung der Stromstärke nur Wägung und Zeitmessung!) ausgeführt werden können, ist die *internationale Einheit der Stromstärke* auf das elektrochemische Äquivalent des Silbers gegründet. Das internationale Ampere ist diejenige Stromstärke, bei der aus einer wässrigen Lösung von Silbernitrat in 1 sec 1,118 mg Silber abgeschieden werden (vgl. § 198). Für diese Messungen bedient man sich eines Silbervoltameters (Abb. 308), in dem das Silber auf einer Platinelektrode niedergeschlagen wird. Genaue Eichungen von Strommessern werden durch Vergleich mit dem Silbervoltmeter ausgeführt.

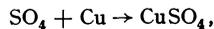
170. Chemische Umsetzungen an den Elektroden. In sehr zahlreichen Fällen werden aus einer wässrigen Lösung nicht die Bestandteile des gelösten Stoffes an den Elektroden abgeschieden, z. B. aus verdünnter Schwefelsäure nicht Wasserstoff und der Säurerest SO_4 , sondern die Bestandteile des Wassers,

Sauerstoff und Wasserstoff. Diese Erscheinung erklärt sich daraus, daß an den Elektroden chemische Umsetzungen vor sich gehen (DANIELL 1839). Wir betrachten den Fall der verdünnten Schwefelsäure, H_2SO_4 , in der sich auf je zwei positive H-Ionen ein negatives SO_4 -Ion befindet. Die H-Ionen wandern an die Kathode, nach welcher von der anderen Seite, von der Stromquelle her, Elektronen durch die Zuleitung fließen. An der Kathodenoberfläche vereinigt sich jedes H-Ion mit einem Elektron und verwandelt sich so in ein elektrisch neutrales H-Atom. (Man beachte folgendes: Der — im Sinne unserer Stromrichtungsdefinition — positive Strom wird an der Kathode innerhalb des Elektrolyten durch positive Ionen gebildet, die auf die Kathode zulaufen, jenseits der Kathode aber, im Draht, durch die in entgegengesetzter Richtung auf die Kathode zu laufenden negativ geladenen Elektronen.) Je zwei H-Atome verbinden sich zu einem H_2 -Molekül. So entstehen an der Kathode Blasen von Wasserstoffgas, die aufsteigen und abgeschieden werden. Hier wird also der eine Bestandteil des gelösten Stoffes unmittelbar ausgeschieden. Anders an der Anode. Hier gibt jedes zweiwertige SO_4 -Ion zwei Elektronen an die Elektrode ab und wird dadurch elektrisch neutral. In diesem Zustande aber kann es mit dem Wasser reagieren (vorausgesetzt, daß es nicht mit dem Metall der Elektrode reagiert, s. unten). Über den Grund dafür, daß ein Ion erst nach Neutralisation seiner Ladung chemisch reagiert, siehe § 344. Die Reaktion geht nach folgender Gleichung vor sich:



Es werden also Sauerstoffatome frei, die sich zu Molekülen vereinigen und, wie an der Kathode der Wasserstoff, an der Anode ausgeschieden werden. Die gebildete Schwefelsäure geht in Lösung und dissoziiert von neuem. Da auf ein SO_4 -Ion zwei Wasserstoffionen entfallen, so entspricht der Ausscheidung von einem O_2 -Molekül diejenige von zwei H_2 -Molekülen. Es werden also tatsächlich die Bestandteile des Wassers im richtigen Verhältnis abgeschieden, und der Vorgang erscheint als eine Wasserzersetzung.

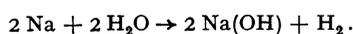
Besteht die Anode aus Kupfer oder einem anderen unedlen Metall, so reagiert das SO_4 -Ion nicht mit dem Wasser, sondern mit diesem Metall. Es bildet sich z. B.



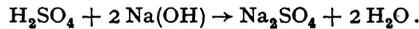
also Kupfersulfat, welches in Lösung geht und in Cu und SO_4 dissoziiert, und es findet keine Ausscheidung an der Anode statt. An der Kathode wird nach wie vor Wasserstoff abgeschieden. Ersatz für diesen Verlust erhält die Lösung aber aus der Anode in Gestalt von je einem doppelt geladenen Cu-Ion auf je zwei ausgeschiedene einfach geladene H-Ionen. Dabei wird die Anode allmählich aufgelöst. An die Stelle der H_2SO_4 -Lösung tritt allmählich eine CuSO_4 -Lösung, aus der dann auch Cu an der Kathode abgeschieden wird.

War von Anfang an der Elektrolyt eine CuSO_4 -Lösung, so ändert sich an den Betrachtungen nichts; nur wird jetzt an der Kathode sofort Cu aus der Lösung abgeschieden und der Lösung an der Anode aus dem Cu der Elektrode wieder ersetzt, so daß die Lösung unverändert bleibt. Es wandert also das Kupfer der Anode durch die Lösung an die Kathode.

Wieder etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man z. B. einen Strom mittels Platinelektroden durch eine verdünnte Lösung von Natriumsulfat, Na_2SO_4 , leitet. Die Na-Ionen wandern zur Kathode und erlangen dort nach Aufnahme eines Elektrons aus der Kathode chemische Reaktionsfähigkeit. Es tritt eine Reaktion mit dem Wasser ein:



Der Wasserstoff, H_2 , wird ausgeschieden, in der Lösung bleibt Natronlauge, $NaOH$. An die Anode wandern die SO_4 -Ionen, und hier tritt durch den schon besprochenen Vorgang eine Reaktion mit dem Wasser ein, welche zur Bildung von Sauerstoff, der abgeschieden wird, und Schwefelsäure, die in Lösung bleibt, führt. Die Schwefelsäure und die Natronlauge diffundieren wieder in die Lösung zurück, mischen sich und reagieren miteinander. Es entsteht wieder Natriumsulfat und Wasser, nach der Gleichung



Die Lösung bleibt also in ihrer chemischen Zusammensetzung unverändert, und das Endergebnis ist wieder die Zersetzung des Wassers. Die Lösung nimmt allmählich an Konzentration zu, weil nur die Bestandteile des Wassers ausgeschieden werden.

171. Elektrolytische Polarisation. Leitet man einen Strom mittels zweier gleich beschaffener Elektroden durch einen Elektrolyten, so zeigen die beiden

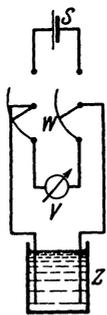


Abb. 309.
Nachweis der
Polarisations-
spannung.

Elektroden nach dem Abschalten der Stromquelle eine Spannung gegeneinander, die man *Polarisationsspannung* nennt, und die der Spannung entgegengerichtet ist, die vorher bei Stromdurchgang an den Elektroden lag. Stellt man nunmehr zwischen den Elektroden eine äußere leitende Verbindung her, so fließt durch sie während einer mehr oder weniger langen Zeit ein Strom von der positiven Elektrode, der Anode der Zelle, zur negativen Elektrode, der Kathode, der innerhalb der Flüssigkeit durch einen Strom von der Kathode zur Anode geschlossen wird. Die Zelle ist durch den vorhergehenden Stromdurchgang zum Sitz einer *elektromotorischen Kraft*, zu einer *Stromquelle*, geworden. Sind die Elektroden außen leitend verbunden, so verschwindet die elektromotorische Kraft nach einiger Zeit. Zum Nachweis der Polarisationsspannung verbinde man zwei in einem Elektrolyten stehende Platinelektroden zunächst mit einer Stromquelle S (Abb. 309), lasse den Strom

eine Zeitlang fließen und schalte die Zelle dann mittels einer Wippe W auf einen Spannungsmesser V um.

Die elektrolytische Polarisation wurde von VOLTA (1792) im Anschluß an den bekannten Froschschkelversuch von GALVANI (1786) entdeckt. Sie zeigt sich immer dann, wenn die *Grenzflächen zwischen Elektrode und Flüssigkeit* an den beiden Elektroden eine *verschiedene Beschaffenheit* haben. Bei dem oben beschriebenen Versuch wird eine solche Verschiedenheit dadurch erzeugt, daß bei Stromdurchgang an den beiden Elektroden verschiedene Stoffe abgeschieden werden. Ist der Elektrolyt z. B. verdünnte Schwefelsäure, so belädt sich die Anode mit Sauerstoff, die Kathode mit Wasserstoff. Man kann aber die gleiche Polarisationsspannung ohne vorhergehenden Stromdurchgang dadurch erzeugen, daß man die Anode mit Sauerstoffgas, die Kathode mit Wasserstoffgas bespült. Eine Polarisationsspannung tritt ohne vorherigen Stromdurchgang auch dann auf, wenn die beiden Elektroden aus verschiedenen Metallen bestehen, die in die gleiche Flüssigkeit tauchen, oder wenn sie aus dem gleichen Metall bestehen, aber die Flüssigkeit an den Orten der beiden Elektroden verschieden beschaffen ist, indem sie einen gelösten Stoff in verschiedener Konzentration oder verschiedene gelöste Stoffe enthält. (Das kann man z. B. dadurch verwirklichen, daß man die Zelle durch einen porösen Tonzylinder in zwei getrennte Bereiche teilt, so daß sich die beiden verschiedenen Flüssigkeiten nur sehr langsam mischen können. Einen Stromdurchgang verhindert der Tonzylinder nicht.)

Die Entstehung der Polarisationsspannung ist nach NERNST auf folgende Weise zu verstehen. Befindet sich ein Metall in einer Flüssigkeit, so tritt an

ihm ein Vorgang ein, der vollkommen einer Verdampfung entspricht. Wie aus der Oberfläche einer Flüssigkeit so lange Flüssigkeitsmoleküle austreten, bis ihre gasförmige Phase über der Flüssigkeit eine bestimmte Dichte (Dampfdichte) erreicht hat — gesättigt ist —, so gehen aus dem Metall positive Metallionen in die Flüssigkeit, und zwar so lange, bis auch hier ein bestimmter Sättigungszustand eingetreten ist. Die Verdampfung eines Metalls in den Raum einer Flüssigkeit ist ganz außerordentlich viel lebhafter, als seine (praktisch meist überhaupt nicht nachweisbare) Verdampfung in ein Vakuum oder einen gaserfüllten Raum. Das liegt daran, daß zwischen der Flüssigkeit und den Metallionen Kräfte wirksam sind, die die *Austrittsarbeit* der Metallionen außerordentlich stark herabsetzen. Man bezeichnet das als eine Affinität zwischen den Metallionen und der Flüssigkeit.

Wir wollen zunächst einmal annehmen, daß keine positiven Metallionen, sondern *ungeladene* Metallatome in Lösung gehen. Dieser Vorgang wird so lange andauern, bis diejenige Dichte der Metallatome in der Lösung erreicht ist, bei der die Zahl der in der Zeiteinheit durch Diffusion wieder an das Metall gelangenden und wieder in das Metall eintretenden Atome ebensogroß ist, wie die Zahl der verdampfenden Atome, genau wie bei einer verdampfenden Flüssigkeit (§ 112). Der dann erreichten Dichte würde ein bestimmter osmotischer Druck (§ 119) der gelösten Metallatome entsprechen, den man als ihren *Lösungsdruck* bezeichnet. Nun handelt es sich aber tatsächlich um Metallionen. Infolgedessen läßt sich das Metall mit wachsender Ionenabgabe negativ, die Flüssigkeit also positiv auf, und es entsteht in der Grenzschicht zwischen Metall und Flüssigkeit ein elektrisches Feld, das die positiven Ionen auf das Metall zurückzutreiben sucht, und das um so stärker ist, je höher bereits die Ionendichte in der Flüssigkeit ist. Dieses Feld verstärkt also die Wirkung der Rückdiffusion der Ionen an das Metall und bewirkt, daß ein stationärer Zustand bereits bei geringerer Ionendichte in der Flüssigkeit eintritt, als wenn es sich um ungeladene Metallatome handelte. Der stationäre Endzustand ist also dann erreicht, wenn die Zahl der in der Zeiteinheit in Lösung gehenden Metallionen gleich der Zahl derjenigen Metallionen ist, die unter der Wirkung der Rückdiffusion und des rücktreibenden Feldes in der Grenzschicht wieder in das Metall eintreten. Dieser Zustand ist erreicht, wenn die Spannung zwischen Flüssigkeit und Metall, die eine Folge ihrer Aufladung ist, einen bestimmten Wert erreicht hat. Er hängt von der Temperatur ab. In der Grenzschicht zwischen Metall und Flüssigkeit findet also ein *Potentialsprung* statt. Solche Potentialsprünge sind die Ursache der elektrolytischen Polarisation.

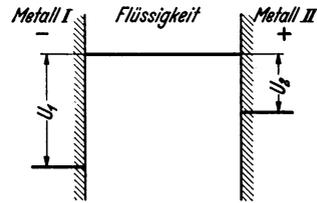


Abb. 310. Zur elektrolytischen Polarisation.

Befinden sich nun in einer Flüssigkeit zwei Metallelektroden mit verschiedenen beschaffenen Grenzflächen — sei es daß das Material der Elektroden oder die Art der Flüssigkeit oder beides verschieden ist —, so sind diese Potentialsprünge verschieden groß. Beträgt der eine U_1 , der zweite $U_2 \ll U_1$ (Abb. 310), so ist die zweite Elektrode gegenüber der ersten auf positiver Spannung. Sie wird zur Anode, die erste Elektrode zur Kathode der als Stromquelle betrachteten Zelle. Diese besitzt demnach im offenen Zustand eine Spannung $U_1 - U_2$ zwischen den Elektroden und daher nach § 148 auch eine *elektromotorische Kraft* $\mathcal{E} = U_1 - U_2$. Diese stellt sich also als die Differenz zweier Potentialsprünge dar.

Stellt man eine äußere leitende Verbindung zwischen den Elektroden her, so fließt durch diese ein Strom von der Anode zur Kathode und durch die Flüssigkeit

von der Kathode zur Anode. Dieser Strom befördert die positiven Metallionen von der Kathode weg zur Anode. Zum Ausgleich können nunmehr weitere Ionen des Kathodenmaterials in Lösung gehen, während an der Anode Ionen des Kathodenmaterials abgeschieden werden. Der Strom fließt solange, bis entweder die Kathode vollständig in Lösung gegangen ist, oder bis sich die Anode vollständig mit dem Material der Kathode bedeckt hat, so daß die Verschiedenheit der Elektroden beseitigt ist.

Ganz ähnlich wie Metalle können sich auch Gasbeladungen der Elektroden verhalten, sofern sie sich erstens merklich im Elektrodenmetall lösen und sie zweitens mit merklicher Geschwindigkeit Ionen in Lösung senden. Das ist z. B. bei Wasserstoff an einer Platinelektrode der Fall, der sich dann genau wie metallischer Wasserstoff verhält. In gewissem Grade erfüllen auch die Halogene die obigen Bedingungen, Sauerstoff beträchtlich weniger gut, viele andere Gase überhaupt nicht. Gase, die jenen Bedingungen genügen, können als Elektroden dienen. Die *Wasserstoffelektrode* spielt in der Elektrochemie als *Normalelektrode* eine höchst wichtige Rolle.

Die Polarisation einer elektrolytischen Zelle mit anfänglich gleich beschaffenen Grenzflächen beider Elektroden bei Stromdurchgang ist nun leicht verständlich. Die Abscheidungen an ihren Elektroden rufen eine Verschiedenheit ihrer Grenzflächen hervor. Ebenso ist es verständlich, daß die Polarisationsspannung allmählich wieder verschwinden muß, wenn man die polarisierte Zelle als Stromquelle verwendet. Der von ihr gelieferte Strom ist immer so gerichtet, daß er die Verschiedenheit der Grenzflächen zu beseitigen sucht. Bei einer elektrolytischen Zelle mit Platinelektroden, die z. B. in verdünnte Schwefelsäure tauchen, beruht die Polarisation auf den bei Stromdurchgang auf den Elektroden gebildeten Häuten aus Wasserstoff- und Sauerstoffgas. Man kann die Polarisationsspannung sofort zum Verschwinden bringen, wenn man diese Häute mechanisch entfernt.

Die Erscheinungen werden recht verwickelt, wenn die Flüssigkeit bereits andere, den Elektroden fremde Stoffe gelöst enthält, z. B. die Lösung einer Säure oder eines Salzes ist. Doch können wir darauf hier nicht näher eingehen.

172. Widerstand elektrolytischer Leiter. Auch für elektrolytische Leiter gilt das OHMSche Gesetz. Das hängt, wie bereits erwähnt, damit zusammen, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen der auf sie wirkenden elektrischen Kraft proportional ist und die Zahl der Ladungsträger nicht von der Stromstärke abhängt. Die Größe des Widerstandes hängt von der Beweglichkeit der Ionen, von ihrer Anzahl (Konzentration) und Ladung (Wertigkeit) ab, außerdem natürlich von den geometrischen Verhältnissen des vom Strome durchflossenen Flüssigkeitsvolumens und schließlich von der Temperatur. Und zwar haben die Elektrolyte, im Gegensatz zu den Metallen, einen negativen Temperaturkoeffizienten. Ihr Widerstand *sinkt* bei Erwärmung.

Wegen der *Polarisation* der Elektroden kann man den Widerstand eines Elektrolyten nicht ohne weiteres mit Gleichstrom messen. Die Polarisationsspannung täuscht, indem sie der angelegten Spannung entgegenwirkt, einen höheren Widerstand vor, als tatsächlich vorhanden ist. Die Polarisation braucht aber zu ihrer Ausbildung eine gewisse Zeit. Deshalb benutzt man zur Widerstandsmessung Wechselstrom, dessen Richtung so schnell wechselt, daß die Polarisationsspannung keine Zeit hat, sich in merklicher Größe auszubilden. Im übrigen verfährt man ebenso wie bei anderen Widerstandsmessungen (WHEATSTONESche Brückenschaltung.) An Stelle des Galvanometers in der Brücke benutzt man ein Telephon, welches den Wechselstrom durch einen summenden Ton anzeigt und zum Schweigen kommt, wenn die Widerstände gemäß § 156 abgeglichen sind.

In einem bestimmten Gefäß ist der Widerstand eines Elektrolyten $R = \rho K$, wenn ρ den spezifischen Widerstand (§ 152) des Elektrolyten bedeutet. K ist eine durch die geometrischen Verhältnisse bedingte Gerätkonstante, die Widerstandskapazität des Gefäßes, welche dem Formfaktor l/q in Gl. (12), § 152, entspricht. Es ist in der Regel am besten, ihre Größe mittels eines Elektrolyten von bekanntem spezifischen Widerstand empirisch zu bestimmen.

173. Galvanische Elemente. Akkumulatoren. Stromquellen, bei denen die elektrolytische Polarisation zur Erzeugung von elektromotorischen Kräften und von elektrischen Strömen benutzt wird, heißen *Elemente*. Ein einfaches Element wird z. B. durch eine Zink- und eine Kupferplatte gebildet, die in verdünnte Schwefelsäure tauchen. Elemente dieser einfachen Art haben den Nachteil, daß ihre elektromotorische Kraft bei Stromdurchgang sinkt, weil bei ihnen der eigene Strom eine zusätzliche Polarisation hervorruft, die der ursprünglichen Polarisation entgegengerichtet ist. Um das zu verhindern, ist eine sehr große Zahl von Zusammenstellungen erfunden worden, die jedoch heute fast

durchweg nur noch historisches Interesse haben. Elemente finden heute hauptsächlich noch Verwendung als Trockenelemente. Diese sind tatsächlich nicht trocken, sondern der Elektrolyt ist in ihnen in irgendeinem Stoff, der den Raum zwischen den Elektroden ausfüllt (Sägespäne u. dgl.), als Tränkung enthalten, so daß die Elemente besser handlich sind.

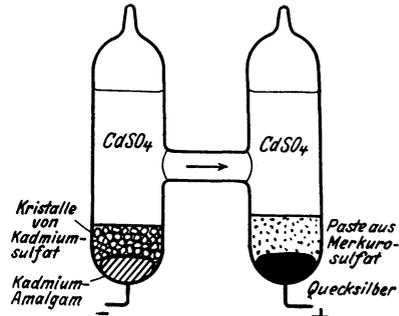


Abb. 311. WESTON-Element.

Für die physikalische Meßtechnik wichtig sind die *Normalelemente*, deren Zusammensetzung so gewählt ist, daß sie eine sehr konstante elektromotorische Kraft haben, die außerdem nur wenig von der Temperatur abhängt. Beim WESTON-Element besteht die eine Elektrode aus Quecksilber, daran schließt sich eine Paste aus Merkursulfat, Hg_2SO_4 . Der Elektrolyt ist Kadmiumsulfatlösung und die andere Elektrode Kadmium oder Kadmiumamalgam. Im Elektrolyten befinden sich Kadmiumsulfatkristalle im Überschuß, so daß die Lösung stets konzentriert ist (Abb. 311). Die elektromotorische Kraft des WESTON-Elements beträgt bei $20^\circ 1,01830$ Volt.

Normalelemente dürfen — wie alle Elemente — nicht mit Strom belastet werden, wenn ihre Klemmenspannung konstant und gleich ihrer elektromotorischen Kraft sein soll. Sie werden daher in der Meßtechnik nur so verwendet, daß sie eine Spannung kompensieren, ohne selbst Strom zu liefern. Das Schema einer einfachen Schaltung dieser Art zeigt Abb. 312 (POGGENDORFF).

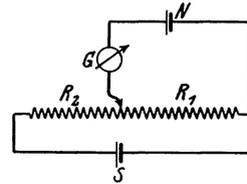
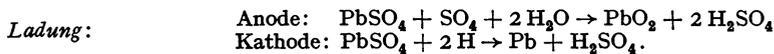


Abb. 312. Schema einer Kompensationsschaltung.

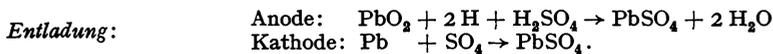
Das Normalelement N habe die elektromotorische Kraft \mathcal{E}_n . Gemessen werden soll die Klemmenspannung U der Stromquelle S . G ist ein empfindlicher Strommesser (Galvanometer). S und N müssen mit gleichnamigen Klemmen an dem einen Ende des Widerstandes R_1 liegen. Die Widerstände R_1 und R_2 werden so abgeglichen, daß das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt. Dann ist die das Normalelement enthaltende Abzweigung stromlos. Durch die Widerstände R_1 und R_2 fließt ein gleich starker Strom $i = U/(R_1 + R_2)$, da ja die Abzweigung zum Galvanometer stromlos ist. In dem das Normalelement N enthaltenden Kreis führt nur der Widerstand R_1 Strom. Demnach ist nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz $\mathcal{E}_n = iR_1$. Es folgt $U = \mathcal{E}_n (R_1 + R_2)/R_1$. Für

genaue Messungen der beschriebenen Art dienen die Kompensationsapparate. Mit ihnen kann man auch Spannungen messen, die niedriger sind als die des Normalelements, während die obige Schaltung auf höhere Spannungen beschränkt ist.

Während die gewöhnlichen Elemente den Nachteil haben, daß sie bei längerer Strombelastung durch Veränderung oder Zerstörung ihrer Elektroden, schließlich unbrauchbar werden, kann man bei den Akkumulatoren auf einfache Weise den ursprünglichen Zustand nach längerer Strombelastung wieder herstellen, also den in ihnen abgelaufenen chemischen Vorgang umkehren. Das Wesen eines Akkumulators zeigt der folgende einfache Versuch: In verdünnter Schwefelsäurelösung H_2SO_4 befinden sich zwei Bleielektroden, die sich in der Lösung mit einer Schicht von Bleisulfat, $PbSO_4$, überziehen. Legt man an eine solche elektrolytische Zelle eine Spannung, etwa 6 Volt, so findet eine Polarisation der Elektroden statt. Aus der Lösung wandern negative SO_4 -Ionen an die Anode, positive H-Ionen an die Kathode. Dort treten nunmehr folgende Reaktionen ein:



Es bildet sich also an der Anode Bleidioxid (PbO_2), an der Kathode metallisches Blei. Gleichzeitig verschwindet aus der Lösung Wasser, und es bildet sich Schwefelsäure. Der Elektrolyt wird konzentrierter. Unterbricht man nach einiger Zeit den Strom, so liefern die jetzt chemisch verschieden gewordenen Elektroden eine elektromotorische Kraft von etwas über 2 Volt. Die Zelle ist „geladen“. Man kann sie nunmehr genau wie ein Element als Stromquelle benutzen. Bei der Entladung, bei der der Strom in entgegengesetzter Richtung fließt wie bei der Ladung, wandern aus der Lösung negative SO_4 -Ionen an die Bleielektrode (die Kathode), positive H-Ionen an die PbO_2 -Elektrode (die Anode). Dabei spielen sich folgende chemischen Reaktionen ab:



Die Elektroden nehmen also ihren ursprünglichen Zustand wieder an. Die bei der Ladung gebildete Schwefelsäure verschwindet wieder, das verschwundene Wasser wird wieder neu gebildet. Die bei der Ladung aufgetretenen Veränderungen werden also, wenn man den Entladestrom hinreichend lange fließen läßt, bei der Entladung wieder rückgängig gemacht und umgekehrt.

Die bei dem geschilderten Vorgang benutzte Einrichtung ist ein einfacher *Bleiakkumulator*. Für praktische Zwecke wird er in mannigfacher Weise verändert. Die Elektrizitätsmenge (das Produkt *it*, meist in Amperestunden angegeben und als Ladungskapazität bezeichnet), die er als Strom umzusetzen vermag, ist offenbar um so größer, je größer der chemische Umsatz bei der Ladung ist. Man benutzt daher gitterförmige Bleielektroden, in die Blei bzw. Bleidioxid in poröser Form hineingepreßt wird. Das hat den Vorteil, daß die chemischen Reaktionen nicht nur an der äußeren Oberfläche, sondern auch im Inneren der Elektroden, an der Oberfläche der zahlreichen Poren, vor sich gehen.

Läßt man bei der Ladung den Strom noch länger fließen, als zur Beendigung der chemischen Reaktionen nötig ist, so findet an der Kathode Wasserstoffabscheidung statt. Diese kündigt also die Beendigung der Ladung an.

Die Mindestspannung, die zum vollständigen Aufladen eines Akkumulators erforderlich ist, beträgt 2,6 Volt. Er hat nach der Ladung eine elektromotorische Kraft von etwa 2,05 Volt. Der Stromwirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der bei Entladung und Ladung durch den Akkumulator gehenden Elektrizitätsmengen,

beträgt etwa 95%. Hingegen liefert er von der bei der Ladung in ihn hineingesteckten *Energie* bei Entladung nur höchstens 85%. Der Energieverlust beruht zum Teil darauf, daß der Akkumulator einen inneren Widerstand besitzt (§ 161), und daß daher sowohl bei Ladung wie bei Entladung ein Teil der Energie in Stromwärme im Innern des Akkumulators verwandelt wird.

Ein großer Nachteil des Bleiakkumulators ist sein hohes Gewicht. Es gibt eine Reihe anderer Ausführungsformen mit leichteren Metallen. In erster Linie ist noch der EDISON- oder Nife-Akkumulator zu nennen. Seine Elektroden bestehen in ungeladenem Zustande aus $\text{Fe}(\text{OH})_2$ und $\text{Ni}(\text{OH})_2$. Bei der Ladung verwandeln sie sich in Fe und Ni_2O_3 . Als Elektrolyt dient Kalilauge. Die elektromotorische Kraft beträgt etwa 1,25 Volt.

Das Auftreten elektrischer Energie an Elementen oder Akkumulatoren wird, wie wir gesehen haben, durch chemische Vorgänge verursacht, welche die Elektroden verändern. Nach dem Energieprinzip kann die auftretende Energie nicht aus nichts entstanden sein. Ihre Quelle haben wir in den sich abspielenden chemischen Vorgängen zu suchen. Tatsächlich sind dies auch stets exotherme Vorgänge (§ 129), d. h. solche, bei denen Energie frei wird (z. B. Erwärmung beim Auflösen von Zink in Schwefelsäure). Man könnte zunächst vermuten, daß diese chemische Energie bei den Elementen und Akkumulatoren ganz in elektrische Energie übergeht. Das ist auch unter Umständen der Fall. In den meisten Fällen geht aber ein Teil der chemischen Energie in Wärme über, das Element erhitzt sich bei Strombelastung. In anderen Fällen kommt es aber auch vor, daß die erzeugte elektrische Energie größer ist als die chemische Energie. In solchen Fällen kühlt sich das Element bei Strombelastung gegen seine Umgebung ab. Es wird dann also ein Teil der elektrischen Energie von der Wärme geliefert, die aus der Umgebung dauernd in das abgekühlte Element strömt.

Einen der seltenen Fälle, bei denen sich die elektromotorische Kraft eines Elements unmittelbar aus der aufgewandten chemischen Energie richtig berechnen läßt, bildet das DANIELL-Element, dessen Anode aus Kupfer in Kupfersulfatlösung und dessen Kathode aus Zink in Zinksulfatlösung besteht. Die Lösungen sind durch einen porösen Tonzylinder, durch den der Strom hindurchtreten kann, voneinander getrennt. Bei Strombelastung geht Zink in Lösung, und an der Anode wird Kupfer ausgeschieden. Die Wärmetönung bei der Lösung von 1 Mol Zn beträgt $4,40 \cdot 10^5$ Wattsekunden. Bei der Abscheidung von 1 Mol Kupfer ist Arbeit aufzuwenden, und zwar $2,34 \cdot 10^5$ Wattsekunden. Es bleiben also $2,06 \cdot 10^5$ Wattsekunden im Überschuß verfügbar. Die elektromotorische Kraft des Elements sei \mathcal{E} . Die Kupfer- und Zinkionen sind zweiwertig, tragen also je zwei Elementarquanten ϵ . Je ein Mol trägt demnach die Ladung $2 N \epsilon = 2 \cdot 96494$ Coulomb (§ 169). Bei der Überführung dieser Ladung von einer Elektrode zur anderen, also über die Spannung $U = \mathcal{E}$, wird die Arbeit $2 N \epsilon \mathcal{E} = 1,93 \cdot 10^5 \mathcal{E}$ geleistet. Setzen wir diese Arbeit der verfügbaren chemischen Energie gleich, so folgt $\mathcal{E} = 1,07$ Volt, was fast genau mit dem wirklichen Wert der elektromotorischen Kraft übereinstimmt.

174. Lokalströme. Sehr reine Metalle, z. B. reines Zink und Eisen, reagieren bekanntlich nur sehr schwer mit Säuren, während chemisch unreine Metalle weit leichter reagieren. Hierbei ist die Elektrolyse im Spiel. Befinden sich nämlich in dem betreffenden Metall kleine Einschlüsse eines anderen Metalls oder auch Rostteilchen u. dgl., so besteht zwischen den verschiedenen Bestandteilen eine Polarisationsspannung, sie bilden miteinander und mit der Säure winzig kleine, kurzgeschlossene Elemente. Ist z. B. in Zink etwas Kupfer enthalten, so fließen in verdünnter Schwefelsäure zwischen dem Zink und dem Kupfer Ströme, sog. *Lokalströme*, welche fortgesetzt SO_4 -Ionen an das Zink schaffen,

so daß die Reaktion $\text{Zn} + \text{SO}_4 \rightarrow \text{ZnSO}_4$ sehr lebhaft erfolgen kann, während ohne derartige Lokalströme die Zufuhr von SO_4 -Ionen an das Zink lediglich durch die weit langsamer wirkende Diffusion erfolgen würde.

Ähnliche Erscheinungen treten auch sonst auf, wenn sich verschiedene einander berührende Metalle in Säure- oder Salzlösungen befinden. Man muß daher an Schiffen, insbesondere im Meerwasser, das Vorhandensein verschiedener blanker Metalle an der Außenseite des Schiffskörper vermeiden, da Lokalströme sonst leicht zur schnellen Zerstörung desjenigen dieser Metalle führen können, welches sich gegen die anderen negativ auflädt.

175. Die Elektrolyse in der Technik. Die elektrolytische Abscheidung von Stoffen findet sehr zahlreiche und wirtschaftlich wichtige Anwendungen. Im großen wird sie in der *Elektrometallurgie* zur Herstellung sehr reiner Metalle benutzt. Dabei ist die Tatsache wichtig, daß die Polarisationsspannungen für die Ionen verschiedener Metalle verschieden groß sind. Durch geeignete Wahl der an eine elektrolytische Zelle gelegten Spannung kann man bewirken, daß sich nur das gewünschte Metall aus der Lösung ausscheidet, aber nicht diejenigen Verunreinigungen, deren Polarisationsspannung höher als die Zellenspannung ist. Von größter technischer Bedeutung ist die Gewinnung von *Elektrolytkupfer*, die mehr als die Hälfte der Welterzeugung an reinem Kupfer liefert. Als Anode dient das unreine Rohkupfer, als Elektrolyt eine schwefelsaure Kupfersulfatlösung. Das Elektrolytkupfer ist rein bis auf einen Gehalt von 0,1 bis 0,2% an Beimengungen. Von ständig wachsender Bedeutung ist auch die Gewinnung von *Elektrolyteisen*, das einen ähnlichen Reinheitsgrad hat. Es hat eine große magnetische Permeabilität und eine geringe Hysterese (§ 214 und 219) und ist aus diesem Grunde ein wichtiger Werkstoff der Elektrotechnik. *Aluminium* wird im großen durch elektrolytische Abscheidung aus einer Schmelze von reiner Tonerde mit einem Zusatz von Natriumfluorid bei etwa 950° gewonnen. Die *Gewinnung von Wasserstoff*, der in der chemischen Industrie, beim autogenen Schweißverfahren, zum Schneiden von metallischen Werkstücken mit dem Knallgasgebläse, sowie zur Füllung von Luftschiffen in großen Mengen benötigt wird, geschieht überwiegend durch elektrolytische Zersetzung von Wasser. Benutzt wird eine Lösung von Natronlauge oder Kaliumkarbonat, als Elektrodenmaterial dient Eisen.

Die Herstellung von dünnen Metallüberzügen auf anderen Metallen (Verkupferung, Vernickelung usw.) geschieht in der Technik überwiegend auf elektrolytischem Wege (*Galvanostegie*). Ähnlich werden in der *Galvanoplastik* Abdrucke von Formen hergestellt, indem man Metall in dicker Schicht elektrolytisch auf der als Kathode dienenden, nötigenfalls durch Kohlepulver u. dgl. leitend gemachten Form niederschlägt.

In der Chemie benutzt man die elektrolytische Abscheidung von Stoffen zur quantitativen Analyse (*Elektroanalyse*). Die Trennung der verschiedenen in der Lösung enthaltenen Stoffe geschieht, indem man die Zellenspannung schrittweise steigert, so daß sich jeweils nur der Stoff abscheidet, der unter den noch vorhandenen die niedrigste Polarisationsspannung hat.

176. Elektrokinetische Erscheinungen. Bringt man in eine Flüssigkeit einen dielektrischen Körper, so lädt sich dessen Oberfläche gegenüber der Flüssigkeit auf. Zum Beispiel erhält eine Paraffinkugel im Wasser eine negative Ladung, und die sie umgebenden Wassermoleküle laden sich positiv. Diese Erscheinung beruht auf der innigen Berührung zwischen der Oberfläche des Dielektrikums und dem Wasser und hat die gleiche Ursache wie die sog. Reibungselektrizität (§ 164). Befindet sich ein auf diese Weise aufgeladener Körper zwischen zwei Elektroden entgegengesetzten Vorzeichens, so wird er durch das zwischen ihnen bestehende elektrische Feld nach der einen Elektrode getrieben, wie die Ionen

in einem Elektrolyten. Man nennt diesen Vorgang *Elektrophorese*. Sie tritt z. B. häufig bei kolloidalen Teilchen auf, die in einer Flüssigkeit schweben (§ 117). Die geladenen Flüssigkeitsteilchen, die sich an der Oberfläche der Teilchen befinden, werden dabei in entgegengesetzter Richtung getrieben wie die Teilchen. Die Aufladung kann auch an geeigneten porösen Stoffen stattfinden, die einen mit Flüssigkeit gefüllten Raum in zwei Teile scheiden. In diesem Falle findet bei Stromdurchgang nur eine Bewegung der Flüssigkeit statt, die dann auf der einen Seite der porösen Scheidewand höher steht als auf der anderen (*Elektromose*). Läßt man Glaskugeln od. dgl. in einem mit Wasser gefüllten Gefäß herabfallen, das oben und unten je eine Elektrode trägt, die miteinander über ein Galvanometer verbunden sind, so zeigt dieses während des Falles der Kugeln einen Strom an (Abb. 313). Denn die fallenden Kugeln sind wegen ihrer Aufladung im Wasser Ladungsträger und stellen wegen ihrer Bewegung einen elektrischen Strom dar, der sich außen durch das Galvanometer hindurch schließt. Derartige Ströme heißen *Strömungsströme*, der ganze Erscheinungsbereich *Elektrokinetik*.

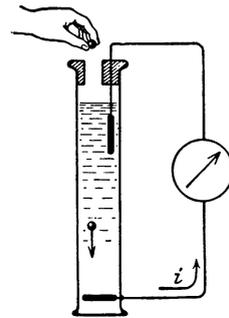


Abb. 313. Zum Nachweis eines Strömungsstromes. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

III. Elektrische Ströme in Gasen.

177. Das Wesen der Elektrizitätsleitung in Gasen. Ein Gas besteht in seinem natürlichen Zustand aus elektrisch neutralen Molekülen und enthält demnach an sich keine freien, beweglichen Ladungsträger. So ist auch die atmosphärische Luft bekanntlich ein vorzüglicher Isolator. Eine Leitfähigkeit erhält ein Gas erst, wenn in ihm freie bewegliche Ladungsträger erzeugt oder solche von außen in das Gas hineingebracht werden. Auf die zweite Art kann auch ein so gut wie möglich gasfrei gemachter Raum, ein Vakuum, Leitfähigkeit erlangen. Legt man an zwei Elektroden, die sich in einem auf diese Weise leitfähig gemachten Gase befinden, eine Spannung, so bewegen sich die positiven Ladungsträger an die negative Elektrode, die Kathode, die negativen an die positive Elektrode, die Anode, und es fließt ein Strom, den man als eine *Gasentladung* bezeichnet.

Bei der Elektrizitätsleitung durch Gase unterscheidet man die unselbständige und die selbständige Entladung. Bei der *unselbständigen Entladung* befinden sich aus irgendeiner vom Stromdurchgang selbst unabhängigen Ursache Ladungsträger im Gase, und diese werden durch ein im Gase herrschendes elektrisches Feld an die Anode bzw. Kathode befördert, bilden also einen elektrischen Strom. Bei der *selbständigen Entladung* dagegen werden die den Stromdurchgang vermittelnden Ladungsträger in ihrer überwiegenden Mehrzahl durch den Mechanismus der Entladung selbst erzeugt, und zwar durch den Vorgang der *Stoßionisation*. Dieser besteht darin, daß schon vorhandene Ladungsträger durch das elektrische Feld so stark beschleunigt werden, daß sie imstande sind, Moleküle des Gases bei Zusammenstößen mit ihnen in positive und negative Ionen (bzw. Elektronen) zu zerspalten, das Gas zu *ionisieren* (§ 346). Die auf diese Weise erzeugten neuen Ladungsträger können durch das Feld so beschleunigt werden, daß auch sie wieder Ladungsträger erzeugen usw. Damit eine selbständige Entladung überhaupt einsetzen kann, müssen natürlich schon von Anfang an einige Ladungsträger im Gase vorhanden sein. Das ist stets der Fall und läßt sich überhaupt nie ganz vermeiden, schon deshalb nicht, weil sich überall stets Spuren von radioaktiven Stoffen befinden, welche ionisierend wirken. Die Entladung beginnt stets mit einer schwachen unselbständigen

Entladung, dem sog. *TOWNSEND-Strom*, und schlägt in eine selbständige Entladung um, nachdem durch Stoßionisation eine genügende Zahl von Ionen geschaffen wurde.

Hierzu reichen die durch Stoß der primären Ionen im Gase gebildeten Ionen in der Regel nicht aus. Vielmehr ist es zur Zündung einer selbständigen Entladung nötig, daß die letzteren ihrerseits durch Stoß weitere Ionen schaffen. Die Fähigkeit dazu erlangen sie dadurch, daß sie durch das im Gase herrschende elektrische Feld in Richtung auf die Elektroden beschleunigt werden. Es ist aber nötig, daß sie die zur Stoßionisation erforderliche Energie in der Zeit zwischen zwei Zusammenstößen mit einem Gasmolekül erlangen. Daher muß die Feldstärke im Gase von solcher Größenordnung sein, daß die Ionen längs einer in der Feldrichtung zurückgelegten freien Weglänge eine Mindestspannung ΔU durchlaufen, die dadurch gegeben ist, daß $\epsilon \Delta U$ die zur Stoßionisation nötige Energie ist (ϵ Ladung des Ions). Je größer die freie Weglänge, je geringer also die Dichte des Gases ist, bei um so kleinerer angelegter Spannung wird eine selbständige Entladung zur Zündung kommen. Daher setzt auch eine selbständige Entladung bei gegebenem Elektrodenabstand bei einer um so niedrigeren Spannung ein, je geringer der Gasdruck ist. Im Augenblick der Zündung der selbständigen Entladung steigt die Stromstärke steil an (Abb. 314).

Je nach der Spannung und dem Gasdruck sowie je nach der Art des Gases und der Elektroden und der Gestalt des Entladungsraumes gibt es sehr mannigfache Erscheinungsformen der selbständigen Entladung. Bei Veränderung der Bedingungen gehen diese verschiedenen Entladungsformen im allgemeinen stetig ineinander über, so daß eine scharfe Grenzziehung nicht möglich ist. Man unterscheidet aber folgende Hauptarten: bei höherem Druck die Korona- und Spitzenentladung, die Funkenentladung und den Lichtbogen, bei niedrigem Druck die Glimmentladung.

178. Unselbständige Entladung. Die für eine unselbständige Entladung erforderliche Ionisation kann in einem Gase auf verschiedene Arten entstehen. Bei der *Volumionisation* werden die Ladungsträger *im Gase selbst* durch eine auf seine Moleküle wirkende Ursache erzeugt, bei der *Oberflächenionisation* werden sie *von außen her*, im allgemeinen aus der Oberfläche der einen Elektrode, in das Gas hineingebracht.

Eine Volumionisation besteht also darin, daß die Ladungsträger durch Zerspaltung der Gasmoleküle in positive und negative Ionen (bzw. Elektronen) erzeugt werden. Das kann z. B. durch Bestrahlung des Gases mit Röntgenstrahlen oder durch die Strahlen radioaktiver Stoffe geschehen, ferner durch eine ausreichend hohe Temperatur des Gases (§ 180). Da die Ladungsträger durch Spaltung der elektrisch neutralen Moleküle entstehen, so ist die Summe der so erzeugten positiven Ladungen stets ebenso groß wie diejenige der negativen, und der Strom durch ein so ionisiertes Gas besteht immer aus einer gleichzeitigen Bewegung positiver Ladungsträger zur Kathode und negativer Ladungsträger zur Anode.

Eine Oberflächenionisation kann vor allem durch Bestrahlen der Kathode mit kurzwelligem Licht (lichtelektrischer Effekt, § 333) oder durch Glühen der Kathode (§ 179) erzeugt werden. In diesen Fällen besteht der Strom durch das Gas — sofern keine Stoßionisation eintritt — nur aus Elektronen.

Besteht in einem Gase, an dem keine Spannung liegt, eine Volumionisation, so stellt sich ein Gleichgewicht ein zwischen der durch äußere Einwirkung erzeugten Ionisation und der *Wiedervereinigung (Rekombination)* der Ladungsträger, so daß in der Zeiteinheit ebenso viele Ladungsträger neu erzeugt werden, wie durch Vereinigung positiver und negativer Ladungsträger zu neutralen Molekülen wieder verschwinden. Auch bei niedriger Spannung spielt die Wieder-

vereinigung noch eine wesentliche Rolle. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist dann so klein, daß ein großer Teil von ihnen auf dem Wege zur Elektrode durch Wiedervereinigung verloren geht und deshalb zum Strom nichts beiträgt. Je höher die Spannung ist, um so kleiner wird die Zahl der auf diese Weise verschwindenden Ladungsträger. Daher steigt die Stromstärke i in einem ionisierten Gase mit wachsender Spannung U zunächst an (Abb. 314). Bei einer gewissen Spannung aber hört die Wiedervereinigung praktisch auf, d. h. sämtliche erzeugten Ladungsträger erreichen tatsächlich die Elektroden. Damit ist ein Grenzwert der Stromstärke erreicht, die *Sättigung*, und über diesen Wert kann die Stromstärke ohne das Hinzukommen einer neuen ionisierenden Ursache nicht ansteigen. Das ist erst dann der Fall, wenn die Spannung so weit gesteigert wird, daß Stoßionisation eintritt. Es kann vorkommen, daß das bereits erfolgt, ehe Sättigung eingetreten ist. Dann fehlt das horizontale Kurvenstück in Abb. 314. Der steile Anstieg des Stromes entspricht dem Eintritt einer selbständigen Entladung.

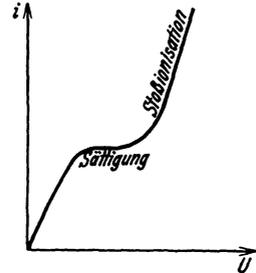


Abb. 314. Abhängigkeit der Stromstärke in einem Gase von der Spannung.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch bei Oberflächenionisation. Natürlich gibt es hier keine Wiedervereinigung, weil ja nur Ladungsträger eines Vorzeichens vorhanden sind. In diesem Fall bewirkt die thermische Bewegung der Ladungsträger eine *Rückdiffusion* an die Elektrode und damit ein Verschwinden von Ladungsträgern. Je höher die Spannung ist, um so geringer ist die Anzahl dieser verschwindenden Ladungsträger, um so größer also die Stromstärke. Sättigung tritt ein, wenn alle an der einen Elektrode erzeugten Ladungsträger die andere Elektrode erreichen. Auch hier kann schließlich Stoßionisation eintreten. Einen wesentlichen Einfluß auf die Stromstärke haben bei kleiner Spannung auch die *Raumladungen* (§ 181), die im Gase auftreten, da es sich ja nur um Ladungsträger eines Vorzeichens handelt.

Abb. 315 zeigt eine einfache Anordnung zur Untersuchung von Strömen durch Gase. Das Gas befindet sich in dem Metallkasten K , der mit der Erde leitend verbunden ist und gleichzeitig als elektrischer Schutzkäfig dient. Im Gasraum befinden sich zwei isoliert eingeführte Elektroden P und P' , an die eine Spannung gelegt werden kann. Mit einem Strommesser G (Galvanometer) kann man die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung untersuchen, wenn das Gas ionisiert wird.

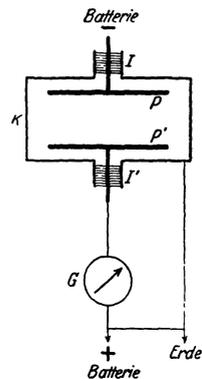


Abb. 315. Anordnung zur Untersuchung der Entladung durch ein Gas.

179. Glühelektronen. Thermionen. Nähert man einem geladenen Elektroskop ein glühendes Metallstück, so verliert es seine Ladung ziemlich schnell, ein Beweis dafür, daß durch die Anwesenheit des glühenden Metalls die umgebende Luft leitend geworden, d. h. Ladungsträger in der Luft aufgetreten sind. Die Wirkung ist um so stärker, je stärker das Metall glüht. Die Ladungsträger stammen aus dem glühenden Metall und sind überwiegend Elektronen (*Glühelektronen*). So kommt es, daß stark glühende Metalle als *Anode* den Durchgang eines Stromes durch einen Gasraum nicht merklich ermöglichen, weil die austretenden Elektronen durch das elektrische Feld wieder an die Anode zurückgetrieben werden, also nicht durch das Gas wandern, während sie, wenn das glühende Metall *Kathode* ist, von dieser fort zur Anode wandern. Es liegt hier also der Fall vor, daß ein Strom in der einen Richtung weit besser geleitet wird als in der andern, in der ein Stromdurchgang praktisch

kaum auftritt (unipolare Leitung). Eine besonders starke Elektronenemission zeigen gewisse glühende Oxyde (WEHNELT-Kathode).

Für die Stromdichte j des Elektronenstromes, den eine glühende Oberfläche bei der absoluten Temperatur T aussendet, gilt das RICHARDSONSche Gesetz

$$j = A T^2 e^{-\frac{b}{T}}.$$

A ist eine universelle Konstante, für die die Theorie den Wert $60,2 \text{ Amp} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Grad}^{-2}$ ergibt, b eine Materialkonstante, die mit der *Austrittsarbeit* der Elektronen aus dem Metall zusammenhängt.

Der Austritt von Elektronen aus Metallen ist ein Vorgang, den man treffend mit der Verdampfung von Wasser aus einem erhitzten Schwamm verglichen hat. Aus einem kalten Metall können die in ihm, wie ein Gas in einem Gefäß, eingeschlossenen freien Elektronen nicht austreten, weil dies durch rücktreibende Kräfte verhindert wird, die in der Metalloberfläche auf sie wirken, wie die Oberflächenspannung auf die Moleküle einer Flüssigkeit. Mit steigender Temperatur wächst aber die thermische Geschwindigkeit der Elektronen. Schließlich wird ihre kinetische Energie so groß, daß sie in einer mit der Temperatur wachsenden Zahl die notwendige *Austrittsarbeit* leisten und aus dem Metall heraustreten können, wie die Moleküle einer Flüssigkeit bei der Verdampfung.

Aus nicht sehr reinen Metallen treten bei höherer Temperatur auch Ionen aus (*Thermionen*). Besonders wirksam sind Spuren von Alkalimetallen.

180. Temperaturionisation. Bei hohen Temperaturen wird die thermische Molekularbewegung so heftig, daß sich die Moleküle bei ihren Zusammenstößen in Ionen zerspalten. Bei ausreichend hohen Temperaturen sind daher mehratomige Moleküle nicht mehr beständig. Darum treten auch Molekülspektren nur an den Oberflächen der kältesten Fixsterne auf, auf der Sonne z. B. schon nicht mehr. Im Innern der Fixsterne, wo Temperaturen bis 20 Millionen Grad herrschen, sind die Atome sogar noch weiter gespalten und eines mehr oder weniger großen Teils ihrer Elektronenhüllen (§ 340) beraubt, also sehr stark ionisiert. Die starke Ionisation der Sonnenmaterie ergibt sich auch aus der Beobachtung, daß von den Sonnenflecken starke magnetische Felder ausgehen. Das beruht darauf, daß die Sonnenflecken Wirbel von ionisiertem Gase sind, die elektrische Kreisströme darstellen (§ 191).

Auch in Flammen sind die Gase zum Teil ionisiert. Infolgedessen sind Flammen leitend. Die Berührung eines Drahtes, welcher mit dem Träger des Blättchens eines geladenen Elektroskops verbunden ist, mit einer zur Erde abgeleiteten Leuchtgasflamme entlädt das Elektroskop sofort. Das beste Mittel zur sofortigen Entladung von elektrisierten Glasstangen oder anderen Isolatoren besteht darin, daß man sie einige Male durch eine Leuchtgasflamme zieht.

181. Widerstand und Charakteristik eines leitenden Gases. Raumladungen. Auch bei einer leitenden Gasstrecke kann man, wie bei festen und flüssigen Leitern, die Größe $R = U/i$ als den Widerstand der Gasstrecke definieren. Während aber bei den festen und flüssigen Leitern diese Größe bei konstant gehaltener Temperatur konstant und von Stromstärke und Spannung unabhängig ist, ist dies bei den Gasen keineswegs der Fall. Abb. 316 zeigt noch einmal eine der Abb. 314 entsprechende Kurve, die *Charakteristik* eines leitenden Gases (§ 160), und es ist gleichzeitig der Verlauf von $R = U/i$ als Funktion der Spannung dargestellt. Im ersten, geradlinig ansteigenden Teil ist R konstant, steigt im Bereich der Sättigung an und fällt im Bereich der Stoßionisation wieder ab. Demnach gilt das OHMSche Gesetz für ein ionisiertes Gas nur bei kleiner Spannung, aber aus einem anderen Grunde als bei den festen und flüssigen Leitern. Bei den letzteren ist die Zahl der in der Volum-

einheit für die Stromleitung verfügbaren Ladungsträger konstant. Das lineare Anwachsen der Stromstärke mit steigender Spannung beruht darauf, daß bei ihnen die durchschnittliche Geschwindigkeit der Ladungsträger der Spannung proportional ist (§ 151). Bei einem ionisierten Gase hingegen wird in jeder Sekunde in der Volumeinheit die gleiche Zahl von Ladungsträgern $n \cdot u$ erzeugt, bzw. es wird bei Oberflächenionisation in jeder Sekunde die gleiche Zahl neu in das Gas gebracht, und die Stromstärke müßte im stationären Zustande, unabhängig von der angelegten Spannung, gleich der Summe der in 1 sec neu erzeugten Ionenladungen sein — da ja die erzeugte Ladung wieder aus dem Gase entfernt werden muß — wenn letzteres nicht auch durch die Vorgänge der Wiedervereinigung, der Rückdiffusion an die Elektroden usw. mit besorgt würde. Bei kleiner Spannung überwiegt die Wirkung dieser Vorgänge. Je schneller aber bei wachsender Spannung die Ladungsträger an die Elektroden geschafft werden, um so mehr von ihnen entgehen der Wiedervereinigung und der Rückdiffusion, um so mehr Ladungsträger sind für den Strom verfügbar. In einem ionisierten Gase steigt also die Stromstärke zunächst deshalb für den Strom verfügbaren Ladungsträger der Spannung proportional ist.

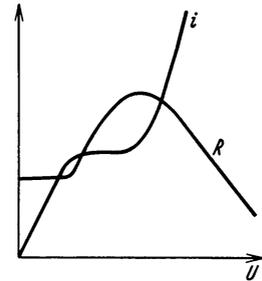


Abb. 316. Charakteristik und Widerstand einer leitenden Gasstrecke.

Ist jedoch Sättigung erreicht, so kann diese Zahl nicht weiter wachsen, eine Steigerung der Spannung kann die Stromstärke nicht mehr anwachsen lassen. Erst wenn bei Eintritt der Stoßionisation weitere Ladungsträger gebildet werden, ist dies möglich.

Die Gase unterscheiden sich von den festen und flüssigen Leitern auch dadurch, daß gleich lange Teile einer homogenen Gasstrecke, die überall gleichen Querschnitt hat, keineswegs immer den gleichen Widerstand haben, wenn man diesen als den Quotienten U/i aus der überall gleichen Stromstärke und den Teilspannungen U berechnet. Das liegt daran, daß in ionisierten Gasen im Gegensatz zu den festen und flüssigen Leitern, im allgemeinen *Raumladungen* auftreten, d. h. daß die positiven und negativen Ladungen in der Volumeinheit nicht gleich groß sind, und daß infolge dieser Raumladungen die Feldstärke im Gase nicht überall die gleiche ist. Eine solche Raumladung ist z. B. vorhanden, wenn eine reine Oberflächenionisation mit Glühelctronen vorliegt, also nur negative Ladungsträger im Gase sind. Bei reiner Volumionisation entsteht sie u. a. dadurch, daß die im ganzen Raum erzeugten positiven bzw. negativen Ladungsträger zur Kathode bzw. Anode wandern und infolgedessen in dem einen Teil der Entladung die positiven, im anderen Teil die negativen Ladungen überwiegen. Eine Raumladung kann also sowohl durch ruhende, wie durch bewegte Ladungsträger erzeugt werden. Im Fall einer stationären Entladung bleiben auch die Raumladungen konstant, weil dann in jedes Volumelement des Gases gleich viele Ladungsträger in 1 sec eintreten, wie aus ihm austreten.

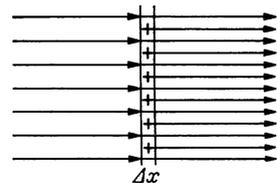


Abb. 317. Zur Ableitung der Poissonschen Gleichung.

In Abb. 317 ist eine zum elektrischen Felde senkrechte positive Raumladungsschicht vom Querschnitt 1 cm^2 und der Dicke Δx dargestellt. Der Betrag der zur Schicht senkrechten Feldstärke sei links von ihr E . Nach dem TAYLORSchen Satz beträgt sie dann rechts $E + \Delta x dE/dx$. Ist ρ die *Raumladungsdichte*, also der Betrag der Ladung in 1 cm^3 der Schicht, so treten rechts aus der Schicht nach § 136, Gl. (6), $4\pi\rho\Delta x$ neue Kraftlinien

aus, und um diesen Betrag ist das Feld rechts stärker als links. Es ist also $E + \Delta x dE/dx = E + 4\pi\rho\Delta x$ oder, wenn wir zum Differentialquotient übergehen,

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2} = 4\pi\rho. \quad (1)$$

(POISSONSche Gleichung), da nach § 137, Gl. (12), $E = -dU/dx$, wenn U die Spannung in den einzelnen Punkten des Feldes bedeutet. Die Spannung U ändert sich also nicht linear mit dem Abstände von den Elektroden. ρ ist je nach dem Vorzeichen der Raumladung positiv oder negativ.

Besonders verwickelt werden die Verhältnisse, wenn es sich um verdünnte Gase handelt, in denen die Ionen oder Elektronen große freie Weglängen haben und zwischen zwei Zusammenstößen mit Gasmolekülen erhebliche Beschleunigungen im elektrischen Felde erfahren. Sie werden noch verwickelter durch die beim Einsetzen der Stoßionisation erzeugten weiteren Ionen. Bei genügend hoher Feldstärke können auch diese Ionen wieder eine ausreichende Geschwindigkeit erlangen, die sie zur Stoßionisation befähigt usw. Auf diese Weise kann die Zahl der für den Strom verfügbaren Ionen lawinenartig anwachsen. Das Gas bekommt eine fallende Charakteristik (§ 160), und es tritt, wenn es nicht durch ausreichenden Vorschaltwiderstand verhindert wird, Kurzschluß durch das Gas ein.

182. Formen der selbständigen Entladung bei höherem Druck. Wir haben in § 138 gesehen, daß in der Nähe von geladenen Leitern eine besonders große elektrische Feldstärke dort besteht, wo ihre Oberfläche einen kleinen Krümmungsradius hat, ganz besonders an herausragenden Spitzen. Diese hohe Feldstärke kann dazu führen, daß in dem umgebenden Gase Stoßionisation eintritt und eine Entladung des Leiters erfolgt. Diese Entladung zeigt in Luft ein rötlich-violettes Licht. Ihre Gestalt ist büschelförmig und bei positiver und negativer Ladung ein wenig verschieden. Diese Entladungsform heißt *Korona*, bei einer Spitze auch *Spitzenentladung*.

Koronaerscheinungen kann man oft an Hochspannungsleitungen beobachten (Sprühen), an denen ja Spannungen von vielen Kilovolt bestehen. Diese Entladung bedeutet einen sehr unerwünschten Energieverlust. Da sie um so leichter eintritt, je kleiner der Durchmesser der Leitung ist, benutzt man häufig keine gewöhnlichen Drähte, sondern Hohlseile von größerem Durchmesser. An scharfen Spitzen tritt eine Spitzenentladung schon bei Spannungen von 1000—1500 Volt auf. (Auf den Abstand der zweiten Elektrode kommt es dabei verhältnismäßig wenig an, da der überwiegende Teil des Spannungsabfalls immer in nächster Nähe der Spitze liegt.) Die Spannung eines geladenen Elektroskops sinkt ziemlich schnell auf 1000—1500 Volt, wenn sein Blättchenträger mit einer scharfen Spitze versehen ist. Im Dunkeln sieht man die Spitzenentladung deutlich an Influenzmaschinen und Induktoren. Auch das Elmsfeuer, das vor Gewittern, also wenn in der Atmosphäre besonders hohe Spannungen bestehen, an metallischen Spitzen und Schiffsmasten beobachtet wird, ist eine Spitzenentladung.

Während es sich bei der Spitzenentladung immer nur um die Entladung verhältnismäßig geringfügiger Elektrizitätsmengen, also um schwache Ströme handelt, besteht die Funkenentladung in einem schlagartigen Übergang größerer Elektrizitätsmengen bei hoher Spannung. Sie tritt im allgemeinen, wie die Spitzenentladung, nur bei Gasdrucken von der Größenordnung des Atmosphärendrucks und darüber auf. Ihre großartigste Erscheinungsform ist der Blitz, als eine unter der Wirkung von Spannungen von Millionen von Volt zwischen zwei Wolken oder einer Wolke und der Erde übergehende Funkenentladung. Jeder Funke ist von einem heftigen Knall begleitet, der davon herührt, daß die JOULESche Wärme des momentan sehr starken Funkenstroms eine außerordentliche Erwärmung des Gases in der Strombahn hervorruft.

Der dadurch entstehende sehr hohe Druck gleicht sich in Form einer als Knall bemerkbaren Druckwelle im Gase aus. Auf diese Weise entsteht auch der Donner. Man kann diese Entladungsform z. B. so erzeugen, daß man zwei Metallkugeln (Funkenstrecke) mit den beiden Polen einer mit Leidener Flaschen versehenen Influenzmaschine oder mit den beiden Klemmen der Sekundärspule eines Funkeninduktors verbindet. Mittels Hochspannungstransformatoren kann man Funken von mehreren Metern Länge erzeugen. Die Farbe der Funken ist in Luft rötlichviolett, kann aber durch die Art der Elektroden, von denen unter der Wirkung der Funken ein wenig verdampft, stark verändert werden. Die Spannung, bei der ein Funke einsetzt, hängt von der Form und dem Abstand der Elektroden, außerdem von Gasdruck und Gasart ab. Die Spannungen, die zum Überschlag des Funkens zwischen zwei Elektroden, z. B. zwei Kugeln oder einer Platte und einer Spitze, erforderlich sind, sind durch Messungen bekannt. Man kann daher auch umgekehrt die Schlagweite von Funken zwischen zwei Elektroden dazu benutzen, um die an den Elektroden liegende Spannung zu messen. Auch kann man mit Hilfe einer Funkenstrecke verhindern, daß die Spannung zwischen zwei Punkten eines Leitersystems einen bestimmten vorgeschriebenen Wert überschreitet. Man legt die Funkenstrecke an die beiden Punkte und bemißt ihre Länge so, daß ihre Durchschlagsspannung gleich der gewünschten Höchstspannung ist. Sobald die angelegte Spannung diesen Betrag erreicht, tritt Entladung über die Funkenstrecke ein, und die Spannung sinkt wieder. Dieses Verfahren kommt natürlich nur für hohe Spannungen in Frage.

Abb. 318 zeigt eine Aufnahme eines Funkens auf einer schnell bewegten photographischen Platte. Die zeitliche Folge ist von links nach rechts. Man sieht, wie sich der Funke allmählich ausbildet und sich anfänglich sozusagen erst seinen Weg sucht. Entsprechende Erscheinungen kann man auch bei Blitzen beobachten.

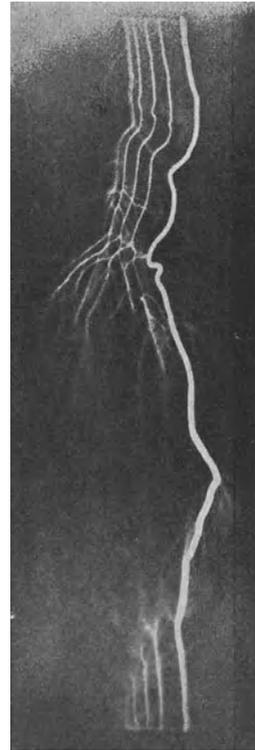


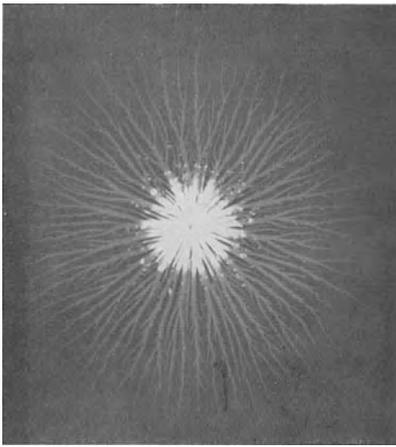
Abb. 318. Aufnahme eines Funkens auf schnell bewegter Platte nach B. WALTER.

Liegt in der Bahn eines Funkens ein festes oder flüssiges Dielektrikum, so kann es bei ausreichender Spannung vom Funken durchschlagen werden. In festen Körpern entsteht dabei ein feines Loch. Andernfalls verläuft der Funke als *Gleitfunke* längs der Oberfläche des Dielektrikums.

Sowohl bei der Spitzen- wie bei der Funkenentladung treten in der Luft chemische Wirkungen auf. Es bilden sich aus dem Luftsauerstoff (O_2) Ozon (O_3) und aus Sauerstoff und Stickstoff Stickoxyde. Diese Gase, deren Einatmen in größeren Mengen *schädlich* ist, erzeugen den bekannten sog. Ozongeruch in der Nähe von elektrischen Maschinen mit hohen Spannungen.

Die Blitzableiter (FRANKLIN) wirken nicht, wie vielfach angenommen wird, blitzschlagverhindernd, indem sie die hohen atmosphärischen Spannungen auf dem Wege einer Spitzenentladung abschwächen. Dazu sind die in Frage kommenden Ladungen viel zu groß. Vielmehr sorgen sie dafür, daß einem Blitz ein für das Gebäude ungefährlicher Weg dargeboten wird. Denn das an der Spitze des Blitzableiters herrschende starke Feld begünstigt natürlich den Einschlag gerade dort, und dies kann noch durch eine an der Spitze einsetzende Spitzenentladung befördert werden.

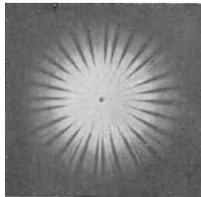
Trifft eine Funken- oder Spitzenentladung auf ein festes, nichtleitendes Hindernis, z. B. eine Glasplatte, so breitet sie sich auf ihm in eigentümlicher Weise aus. Man kann diese Bahnen auf verschiedene Weise sichtbar machen,



a

Abb. 319

a positive, b negative LICHTENBERGSche Figur auf photographischer Platte.



b

z. B. durch nachträgliche Bestäubung mit Schwefelblumenpulver, welches in diesen Bahnen besser haftet als an anderen Stellen, oder durch ihre Wirkung auf eine photographische Platte. Diese Erscheinung nennt man *elektrische* oder *LICHTENBERGSche Figuren*. Die Bahnen haben ein verschiedenes Aussehen, je nachdem die erzeugende Elektrode positiv oder negativ ist (Abb. 319).

Legt man an zwei Kohlenstäbe eine Spannung von mindestens 60 Volt, bringt sie (unter Vorschaltung eines Widerstandes, zur Vermeidung von Kurzschluß) zur Berührung und zieht

sie dann wieder auseinander, so entsteht zwischen ihnen in der Luft und auch in anderen Gasen, wenn ihr Druck nicht erheblich kleiner ist als 1 Atm., ein *Lichtbogen*.

Während der Berührung, während derer ja an der stets kleinen Berührungsstelle ein großer Übergangswiderstand besteht, geraten die Kohlen dort ins Glühen, so daß die negative Kohle Elektronen aussendet (wie ein glühendes Metall, § 179). Hierdurch wird die Aufrechterhaltung einer selbständigen Entladung nach der Trennung der Kohlen ermöglicht. Dabei werden die Kohlen durch die Entladung weiter erhitzt, und zwar die positive weit stärker als die negative. Es bildet sich an ihr eine Aushöhlung, ein Krater, der die Quelle eines intensiven weißen Lichtes ist (Abb. 320). Auch die Gasstrecke zwischen den Kohlen leuchtet weißlich durch die von der Entladung mitgerissenen glühenden Kohlenteilchen, und man sieht eine von der Verbrennung der Kohle herrührende bläuliche Flamme. Im Lichtbogen können Ströme von vielen Ampere fließen. Es

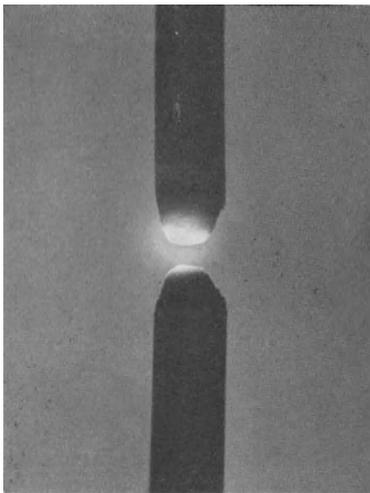


Abb. 320. Lichtbogen.

herrschen in ihm unter geeigneten Bedingungen Temperaturen bis zu rund 4000°. Der Lichtbogen findet in Gestalt der Bogenlampe ausgedehnte technische Verwendung. Auch wird er zum Schweißen und zum Schneiden von metallischen Werkstücken benutzt.

Wichtig ist weiter der Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden in Quecksilberdampf in von anderen Gasen möglichst befreiten Gefäßen (Abb. 321). Die Entladung erhitzt die Quecksilberelektroden stark, so daß in dem Rohr ein

Quecksilberdampfdruck von etwa 10 mm Hg herrscht, durch den der Lichtbogen, wie in Luft zwischen den Kohlen, übergehen kann. Dieser Lichtbogen leuchtet selbst sehr stark und ist eine Quelle intensiver ultravioletter Strahlung, die aus dem Rohre austreten kann, wenn es nicht aus gewöhnlichem Glas, sondern aus geschmolzenem Quarz oder aus besonderen, für Ultraviolett durchlässigen Glasarten hergestellt ist. Derartige Lampen (Quarzquecksilberlampen) finden unter anderem wegen der starken physiologischen Wirkung der ultravioletten Strahlung Verwendung, z. B. in der Medizin als „künstliche Höhensonne“. Auch bei der Straßenbeleuchtung beginnen die Quecksilberlampen eine Rolle zu spielen.

Auch der Quecksilberlichtbogen muß zunächst gezündet werden. Das geschieht häufig so, daß man das Entladungsrohr soweit kippt, daß das Quecksilber eine leitende Verbindung zwischen Kathode und Anode herstellt, die man sofort durch Zurückkippen wieder unterbricht. Beim Abreißen der Verbindung zündet der Lichtbogen.

Ein Quecksilberlichtbogen kann zwischen einer Quecksilber- elektrode und einer Eisenelektrode nur brennen, wenn jene Kathode diese Anode ist. Beschickt man ein solches Entladungsrohr mit Wechselstrom, so wird er demnach nur in derjenigen Periodenhälfte hindurchgelassen, wo die obige Bedingung erfüllt ist. In der andern Periodenhälfte wird der Strom nicht hindurchgelassen. Diese Möglichkeit zur *Gleichrichtung von Wechselstrom*, die auch bei sehr großen Stromstärken anwendbar ist, findet in der Elektrotechnik bei den *Großgleichrichtern*, z. B. für den Betrieb elektrischer Eisenbahnen, eine wichtige Anwendung.

Ein Lichtbogen hat eine fallende Charakteristik (§ 181). Es ist daher notwendig, ihm stets einen Widerstand vorzuschalten, um den Strom in den gewünschten Grenzen zu halten und Kurzschluß durch den Bogen zu vermeiden.

183. Glimmentladung. Kathodenstrahlen. Kanalstrahlen. Legt man an die Elektroden in einem Glasrohr, z. B. von der in Abb. 322 dargestellten Form, eine Spannung von mehreren hundert oder tausend Volt, so geht durch das darin befindliche Gas bei Atmosphärendruck noch keine Entladung. Verringert man aber durch Auspumpen den Druck des Gases, so setzt, wenn der Elektrodenabstand von der Größenordnung 10—100 cm ist, bei einem Gasdruck von einigen cm Hg eine Entladung ein, die der Funkenentladung sehr ähnlich ist. Zwischen Kathode und Anode erstreckt sich ein geschlängelter Lichtfaden. Wird der Gasdruck weiter verringert, so verbreitert sich der Lichtfaden, bis er den Rohrquerschnitt vollkommen erfüllt. Dabei teilt sich die Leuchterscheinung in deutlich verschiedene helle und dunkle Teile auf (Abb. 322). Die Kathode (rechts), welche eine Platte oder ein Stift sein kann, ist mit einer dünnen, in Luft rötlich-gelben Lichthaut bedeckt, der ersten Kathodenschicht (1), auf die ein lichtloser Raum, der CROOKESsche oder HITTORFSche Dunkelraum (2) folgt. Dieser wird durch das negative Glimmlicht (3) scharf begrenzt, das in Luft bläulich ist. An seine diffuse Grenze schließt sich ein zweiter lichtloser Raum

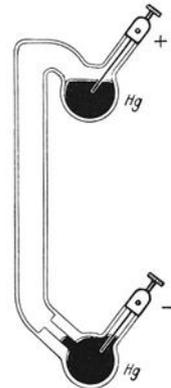


Abb. 321. Quecksilberlampe aus Glas. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

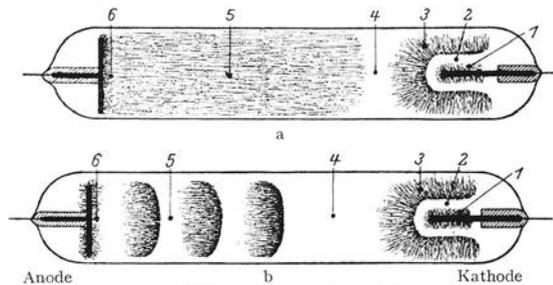


Abb. 322. a ungeschichtete, b geschichtete Glimmentladung.

Die Kathode (rechts), welche eine Platte oder ein Stift sein kann, ist mit einer dünnen, in Luft rötlich-gelben Lichthaut bedeckt, der ersten Kathodenschicht (1), auf die ein lichtloser Raum, der CROOKESsche oder HITTORFSche Dunkelraum (2) folgt. Dieser wird durch das negative Glimmlicht (3) scharf begrenzt, das in Luft bläulich ist. An seine diffuse Grenze schließt sich ein zweiter lichtloser Raum

an, der FARADAYSche Dunkelraum (4). Den ganzen übrigen Teil des Rohres füllt die in Luft rötlichviolette positive Säule (5) aus, die entweder als zusammenhängende leuchtende Säule erscheint, wie in Abb. 322a, oder in leuchtende Schichten mit nichtleuchtenden Zwischenräumen aufgelöst ist (Abb. 322b). Die Oberfläche der Anode (links) ist oft mit der in Luft rötlich leuchtenden Anodenglimmhaut (6) bedeckt. Die Farbe der Lichterscheinungen im Gase ist von der Art der Gasfüllung abhängig. Ihr Spektrum ist für das betreffende Gas charakteristisch.

Die im vorstehenden beschriebene Entladungsform (*Glimmentladung*) stellt sich bei einem Gasdruck von der Größenordnung 1 mm Hg ein. Wird der Druck weiter erniedrigt, so wachsen zunächst die kathodischen Entladungsteile (2 und 3) und der FARADAYSche Dunkelraum (4) umgekehrt proportional zum Druck. Die positive Säule verkürzt sich mehr und mehr, zieht sich auf die Anode hin zusammen und verschwindet schließlich ganz. Ein solches Verschwinden der positiven Säule erfolgt auch dann, wenn bei konstantem Druck in einem Rohr mit beweglicher Anode oder Kathode der Abstand zwischen Anode und Kathode mehr und mehr verkleinert wird. Die kathodischen Entladungsteile bleiben dabei völlig unverändert. Wird der Druck so niedrig oder der Abstand zwischen Anode und Kathode so klein, daß die Anode in das negative Glimmlicht (3) eintaucht, so erlischt die Entladung, falls man nicht die Spannung an den Elektroden erhöht. Man erkennt hieraus, daß die für die Entladung in erster Linie wesentlichen Teile der CROOKESSche Dunkelraum und das negative Glimmlicht sind.

Hält man die Spannung am Rohr so hoch, daß die Entladung auch bei weiter abnehmendem Druck nicht erlischt, so verschwinden die bei ihrer Ausbreitung immer lichtschwächer werdenden Lichterscheinungen bei einem Druck von 10^{-3} bis 10^{-4} mm Hg ganz. Aber an den der Kathode gegenüber liegenden Glaswandungen tritt dann ein grünes oder blaues Fluoreszenzlicht auf.

Zum Verständnis der Glimmentladung wollen wir uns denken, daß an ein Entladungsrohr von der Art von Abb. 322, das ein Gas von einem Druck von einigen mm Hg enthält, eine stetig wachsende Spannung gelegt wird. Wir haben bereits in § 178 gesehen, daß infolge der stets in Spuren vorhandenen Volumionisation auch schon bei einer sehr niedrigen Spannung ein, allerdings sehr schwacher, Strom durch das Gas fließt (Abb. 314). Der Stromanstieg nach erfolgter Sättigung erfolgt durch Stoßionisation, beruht also auf der Fähigkeit schnell bewegter Ladungsträger, neutrale Gasmoleküle bei einem Zusammenstoß in zwei Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens zu spalten. Mit wachsender Spannung wächst die Zahl dieser Ladungsträger, und es wandern immer mehr positive Ionen zur Kathode und negative Ionen zur Anode. Wenn nun die schnell bewegten positiven Ladungsträger auf die Kathode treffen, so können sie aus ihr Elektronen freimachen. Diese bewegen sich ihrerseits in Richtung auf die Anode und erzeugen auf ihrem Wege neue Ladungsträger, so daß der Strom zuerst lawinenartig anwächst. Bei gegebener, ausreichend hoher Spannung stellt sich aber sehr schnell ein stationärer Zustand ein, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die Zahl der in der Zeiteinheit von den positiven Ionen an der Kathode freigemachten Elektronen genau ausreicht, damit diese ihrerseits in der Zeiteinheit die hierzu nötige Zahl von positiven Ionen neu erzeugen. Damit ist der Stromdurchgang von jeder äußeren ionisierenden Ursache — die nur zur ersten Zündung nötig ist — unabhängig geworden. Es liegt eine *selbständige Entladung* vor, zu deren Aufrechterhaltung die angelegte Spannung genügt. Die zur Zündung einer solchen Entladung nötige Mindestspannung heißt die *Zündspannung*.

Die Entladung hat nunmehr eine der in Abb. 322 dargestellten Formen angenommen. Wir betrachten jetzt den Potentialverlauf in dieser Entladung. Er kann gemessen werden, indem man einen feinen Draht, eine *Sonde*, in die verschiedenen Entladungsteile führt und seine Spannung U gegen die Kathode mit einem Elektrometer mißt. In Abb. 323 ist dieser Potentialverlauf für eine ungeschichtete Entladung dargestellt. Unmittelbar an der Kathode, bis an den Glimmsaum reichend, besteht ein steiler Potentialanstieg. Die Spannung zwischen Kathode und Glimmsaum heißt der *Kathodenfall*. Einem ziemlich flachen Potentialanstieg im negativen Glimmlicht folgt dann ein etwas steilerer Anstieg in der positiven Säule, der bei einer geschichteten positiven Säule treppenförmig ist. An der Anode findet noch einmal ein steilerer, aber kurzer Potentialanstieg statt, der *Anodenfall*.

Wir haben bereits gesehen, daß die kathodischen Entladungsteile offenbar die für die Aufrechterhaltung der Glimmentladung wesentlichen Teile sind. Das wird jetzt verständlich. Die auf die Kathode treffenden positiven Ionen verdanken den größten Teil ihrer Energie dem Kathodenfall, und das gleiche gilt für die von der Kathode wegfliegenden Elektronen. Es ist daher auch der Kathodenfall, dessen Größe für die Aufrechterhaltung der stationären Entladung maßgebend ist. In der positiven Säule wandern mit nicht sehr hoher Geschwindigkeit positive Ionen in der einen und negative Ionen in der andern Richtung. Dabei spielen sich allerlei Wiedervereinigungs- und Anregungsvorgänge ab (§ 178 und 346). In jedes Raumelement treten in der gleichen Zeit

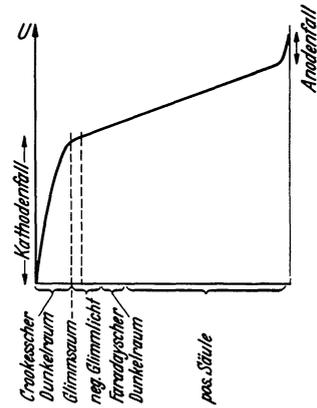


Abb. 323. Potentialverlauf in der Glimmentladung.

ebenso viele Ladungsträger eines Vorzeichens ein, wie aus ihm wieder heraus-treten, und die Feldstärke — der Potentialgradient — braucht hier nicht größer zu sein als nötig ist, um diese Wanderung aufrechtzuerhalten. An der Anode aber würde durch die ständige Abwanderung von positiven Ionen eine Verarmung an solchen eintreten, wenn nicht durch eine genügend hohe Feldstärke im Anodenfall dafür gesorgt wäre, daß hier noch einmal eine kräftigere Stoßionisation erfolgt.

Das negative Glimmlicht bedeckt bei kleiner Stromstärke nur einen kleinen Teil der Kathode; bei zunehmender Stromstärke breitet es sich porportional der Stromstärke aus, so daß die Stromdichte konstant bleibt. Der Kathodenfall ändert sich hierbei nicht (*normaler Kathodenfall*). Steigt aber nach völliger Bedeckung der Kathode die Stromstärke infolge einer Erhöhung der Spannung weiter an, so wächst auch der Kathodenfall (*anormaler Kathodenfall*). Der normale Kathodenfall ist abhängig von der Art des Gases und dem Kathodenmetall. Er ist am kleinsten für Edelgase und elektropositive Metalle und beträgt z. B. für eine Natriumkathode in Neon 75 Volt. Die käuflichen Glimmlampen haben meist Eisenelektroden und eine Neonfüllung. Der Kathodenfall beträgt dann etwa 150 Volt, so daß sie am Lichtnetz (220 Volt) betrieben werden können. Bei den übrigen Metallen und Gasen liegt der normale Kathodenfall zwischen 200 und 450 Volt. Er kann aber sehr weit herabgesetzt werden, wenn man eine Glühkathode verwendet (§ 179). Das ist begreiflich; denn da eine solche schon von selbst Elektronen liefert, genügt eine kleinere kinetische Energie der positiven Ionen, um eine stationäre Entladung aufrechtzuerhalten.

Beim Aufprall der positiven Ionen auf die Kathode können aus ihr atomare Metallteilchen herausgeschlagen werden, die sich dann auf den Wänden des

Rohres niederschlagen (*Kathodenerstäubung*). Das ist von Bedeutung für die Herstellung sehr fein verteilter und dünner metallischer Schichten (halbdurchlässige Spiegel usw.).

Wir können nunmehr auch die bei sehr niedrigem Gasdruck auftretenden Erscheinungen verstehen. Nach wie vor — wenn auch in viel geringerer Zahl — treffen positive Ionen auf die Kathode und machen dort Elektronen frei. Von diesen gelangt aber nur ein mit dem Druck ständig abnehmender Bruchteil zur Stoßionisation im Gase, sobald die freie Weglänge der Elektronen mit der Länge des Rohres vergleichbar oder gar größer als diese geworden ist. Die meisten Elektronen durchlaufen das ganze Rohr frei und treffen mit ihrer

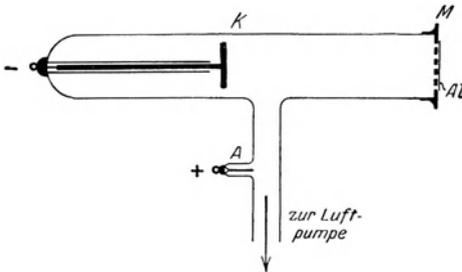


Abb. 324. LENARD-Rohr. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

vollen Energie auf die gegenüberliegende Wandung, an der sie eine Fluoreszenz erregen. Diese senkrecht von der Kathode fortfliegenden Elektronenstrahlen nennt man *Kathodenstrahlen*. Sie wurden von PLÜCKER (1858) entdeckt und von HITORFF zuerst näher untersucht. Nicht nur die Glaswand, sondern auch sehr viele andere Stoffe, insbesondere Mineralien und Salze, werden durch Kathodenstrahlen zur Fluoreszenz erregt.

In den Kathodenstrahlen steckt trotz ihrer geringen Masse wegen ihrer großen Geschwindigkeit eine beträchtliche kinetische Energie. Treffen sie auf ein Hindernis, an dem sie ihre Geschwindigkeit verlieren, so wird es erwärmt und kann sogar zum Glühen gebracht werden (Kathodenstrahlöfen).

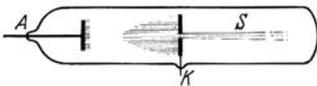


Abb. 325. Kanalstrahlen.

Die Kathodenstrahlen bewirken auch in vielen Fällen chemische Umsetzungen. Sie wirken z. B. auf die photographische Platte. Wo eine solche von Kathodenstrahlen getroffen wird, zeigt sie nach Entwicklung eine Schwärzung.

Kathodenstrahlen können in Gasen von niedrigem Druck Strecken von vielen Metern durchlaufen. Aber auch feste und flüssige Stoffe durchdringen sie in dünnen Schichten (H. HERTZ). LENARD hat dies benutzt, um Kathodenstrahlen aus dem Entladungsrohr heraustreten zu lassen (Abb. 324). Er brachte dort, wo die von der Kathode *K* herkommenden Kathodenstrahlen die Rohrwand treffen, ein Metallsieb *M* an, welches er mit einer dünnen, luftdicht aufliegenden Aluminiumfolie *Al* bedeckte. Durch diese können die Kathodenstrahlen nach außen dringen. Man nennt solche aus dem Entladungsrohr befreiten Kathodenstrahlen *LENARD-Strahlen*. Über die elektrische und magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen s. § 194.

Benutzt man eine durchbohrte Kathode, so sieht man an ihrer Rückseite aus den „Kanälen“ feine leuchtende Pinsel (*S*) austreten, die von GOLDSTEIN (1886) entdeckten *Kanalstrahlen* (Abb. 325). Sie werden von den auf die Kathode zu fliegenden positiven Ionen gebildet, die durch die Kanäle hindurchfliegen. Sie bestehen also aus positiven Ionen des im Rohr enthaltenen Gases und haben eine Masse gleich der der Moleküle oder der Atome des betreffenden Gases. Ihre spezifische Ladung (§ 194) kann wie diejenige der Kathodenstrahlen durch elektrische und magnetische Ablenkung bestimmt werden (W. WIEN 1897/98). Die hierzu erforderlichen Felder sind viel stärker als bei den Kathodenstrahlen, weil die träge Masse der Kanalstrahlteilchen viel größer ist. Die Kanalstrahlen sind nicht auf ihrem ganzen Wege positiv geladen, da sie infolge ihrer Zusammenstöße mit Gasmolekülen mancherlei Umladungserscheinungen unter-

liegen. Sie können zeitweilig ungeladen oder auch negativ geladen sein. Ihre Ladung kann ein mehrfaches des elektrischen Elementarquantums betragen. Elektrische und optische Untersuchungen an Kanalstrahlen spielen in der heutigen Physik eine höchst wichtige Rolle.

Bringt man auf eine erhitzbare Anode gewisse Metallsalze, insbesondere solche von Alkalimetallen, so sendet sie bei einer Temperatur von etwa 1000° bis 1500° positive Ionen des salzbildenden Metalls in geringer Menge aus (*Anodenstrahlen*). Die in § 179 erwähnte Emission von positiven Teilchen beruht im wesentlichen auf der Verunreinigung des betreffenden Metalles mit solchen Stoffen.

184. Atmosphärische Elektrizität. Wir haben bereits in § 141 erwähnt, daß die Erde eine negative Ladung von etwa $6 \cdot 10^5$ Coulomb trägt, und daß in der Erdatmosphäre demnach ein auf die Erde hin gerichtetes elektrisches Feld besteht, dessen Stärke in der Nähe des Erdbodens etwa $1,3 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}$ beträgt und nach oben hin abnimmt. Nun befinden sich in der Erdatmosphäre aus verschiedenen Ursachen (radioaktive Strahlungen, Ultrastrahlung, Wirkungen des ultravioletten Sonnenlichtes) ständig Ionen beiderlei Vorzeichens in nicht unbeträchtlicher Zahl. Diese werden durch das elektrische Erdfeld in Bewegung gesetzt, und die positiven Ionen wandern zur Erde, die negativen in die Höhe. Sie bilden also einen elektrischen Strom, dessen Stärke, auf die ganze Erdoberfläche bezogen, rund 1500 Ampere beträgt. Man kann berechnen, daß durch diesen Strom die Ladung der Erde in sehr kurzer Frist beseitigt, das Erdfeld vernichtet werden müßte, wenn sie nicht durch andere Vorgänge ständig aufrechterhalten würden. Diese Vorgänge können nur in den Gewittern erblickt werden. Diese müssen ständig negative Ladungen wieder nach unten befördern. Wenngleich die Gewitter meist örtlich eng begrenzt sind, so sind sie doch auf der Erde weit häufiger, als man gemeinhin annimmt, und die in ihnen umgesetzten Energien sind ungeheuer groß. Man schätzt die Zahl der jährlichen Gewitter auf 16 Millionen, die Durchschnittszahl der Blitze auf etwa 100 in jeder Sekunde. Die Größenordnung der Spannungen, zwischen denen sich die Blitze entladen, beträgt 10^9 Volt, und es treten dabei Feldstärken von rund $10^4 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}$ auf. Die Stromstärke in einem Blitz, dessen Dauer etwa 10^{-3} sec beträgt, ist auf etwa $2 \cdot 10^4$ Ampere zu schätzen. Die in einem Blitz durchschnittlich entladene Elektrizitätsmenge beträgt also nur $2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} = 20$ Coulomb, die in ihm umgesetzte Energie jedoch $2 \cdot 10^4 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{10}$ Joule oder rund 5000 kWh. (Die Energie eines Blitzes würde also, nach dem Berliner Lichtstromtarif berechnet, etwa 1000 RM kosten.) Versuche, die Entstehung der hohen Spannungen der Gewitterwolken und die Aufrechterhaltung des normalen Erdfeldes durch die Gewitter zu erklären, liegen in Theorien von SIMPSON und von C. R. T. WILSON vor.

Die Ionisation der Atmosphäre zeigt Schwankungen, die insbesondere von den Änderungen des Luftdrucks herrühren. Bei sinkendem Luftdruck treten aus der Erde mit der Bodenluft gasförmige radioaktive Emanationen (§ 357) aus und bewirken eine erhöhte Ionisation.

Das Erdfeld und seine Richtung kann man durch folgenden Versuch leicht nachweisen. Man befestigt einen mit Spiritus getränkten Wattebausch an einem längeren, mit einem Elektrometer verbundenen Draht, den man nach Entzündung des Spiritus etwa 2 m weit aus einem Fenster hinausstreckt. Das Elektrometer zeigt dann eine positive Spannung gegen die Erde an. (Die Äquipotentialflächen des Erdfeldes werden durch das Gebäude verbogen, da dieses das Potential der Erde hat. Sie verlaufen deshalb in der nächsten Nähe der Hauswand etwa parallel zu dieser). Die Spannung steigt also mit der Entfernung von der Erde, d. h. das normale Erdfeld ist von oben nach unten gerichtet.

Sechstes Kapitel.

Magnetismus und Elektrodynamik.

I. Magnetische Felder im Vakuum.

Vorbemerkung. Wir haben gesehen, daß die elektrostatischen Wirkungen in Luft (wegen $\varepsilon = 1$) von denen im Vakuum nur äußerst wenig verschieden sind. Dasselbe gilt aus einem ähnlichen Grunde auch für die magnetischen Wirkungen. Wenn daher in diesem Abschnitt auch vorausgesetzt wird, daß sich die Gebilde, zwischen denen magnetische Wechselwirkungen stattfinden, im Vakuum befinden, so können die beschriebenen Versuche genau so gut auch in Luft ausgeführt gedacht werden. Der Einfluß raumerfüllender Stoffe wird im II. Abschnitt behandelt werden.

185. Magnete. Magnetische Dipole. Ein Magnet ist bekanntlich ein Stück Eisen, welches zwei in die Augen fallende Eigenschaften besitzt. Erstens wirkt es anziehend auf Eisen, zweitens richtet es sich, wenn es länglich und frei drehbar ist, ungefähr in die Nord-südrichtung.

Untersucht man das gegenseitige Verhalten zweier Magnete, so zeigt sich, daß die beiden Enden eines Magneten sich nicht gleich verhalten. Das eine Ende des einen Magneten wird von dem einen Ende des anderen angezogen, vom anderen aber abgestoßen, und mit dem anderen Ende des ersten Magneten ist es gerade umgekehrt. Die einem Magneten innewohnende besondere Eigenschaft bezeichnet man als *Magnetismus*. Sie ist bereits im Altertum an gewissen Eisen-erzen (natürlichen Magneten) beobachtet worden, und man hat schon früh derartige Magnete für die Schifffahrt benutzt (Kompass).

Die magnetischen Kräfte gehen bei länglichen Magneten meist ungefähr von deren Enden aus. Diese Stelle bezeichnet man als die *Pole* des Magneten. Ein Magnet hat im allgemeinen zwei solche Pole, nie weniger als zwei. Denjenigen Pol eines Magneten, der sich nach Norden einstellt, nennt man den *Nordpol* oder *positiven Pol* des Magneten, den anderen den *Südpol* oder *negativen Pol*. [In manchen Ländern ist die Bezeichnung aus später (§ 189) zu erörternden Gründen umgekehrt.] Bei Stabmagneten sind die Pole um etwa $\frac{1}{12}$ der Stablänge von den Enden entfernt.

Teilt man einen Körper, der zwei *elektrische* „Pole“ besitzt, einen elektrischen Dipol (§ 133), so in zwei Stücke, daß jedes Stück einen dieser beiden Pole enthält, so findet man, daß das eine Stück positiv elektrisch, das andere negativ geladen ist (§ 139). Man kann also positive und negative elektrische Ladungen voneinander trennen, sie voneinander frei machen. Das beweist, daß es wahre elektrische Ladungen gibt.

Macht man den gleichen Versuch mit einem Magneten, so ist das Ergebnis ein völlig anderes. Man magnetisire eine durch Ausglühen und Abschrecken gehärtete Stricknadel durch Bestreichen mit einem Magneten. Sie hat dann am einen Ende einen positiven, am anderen Ende einen negativen Pol. In ihrer Mitte verhält sie sich wie gewöhnliches Eisen. Zerbricht man jetzt die Nadel in zwei Teile, so zeigt sich, daß jeder dieser Teile wieder einen vollständigen Magneten, mit je einem positiven und einem negativen Pol von etwa gleicher Polstärke wie die ganze Nadel, bildet. Es sind also in der ehemaligen Mitte der Stricknadel neue entgegengesetzte Pole aufgetreten. Dieses Verfahren kann mit dem

gleichen Erfolg durch weiteres Zerteilen der Stricknadel fortgesetzt werden. Niemals gelingt es, positiven und negativen Magnetismus zu trennen, sie voneinander frei zu machen. Positiver und negativer Pol bilden ein untrennbares Paar, und zwar sind die beiden jeweils zusammengehörigen Pole immer von gleicher Stärke. *Es gibt daher keinen wahren Magnetismus*, d. h. keine für sich allein bestehenden Magnetismusk mengen positiven und negativen Vorzeichens, wie die Elektrizitätsmengen. Das ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Elektrizität.

In vollkommener Analogie zum elektrischen Dipol definiert man das *magnetische Moment* M eines Magneten, also eines *magnetischen Dipols*, als das Produkt ml seiner Polstärke m und des Abstandes l seiner beiden Pole.

$$M = ml. \quad (1)$$

(Über die Definition und Einheit der Polstärke s. § 186.) Die Verbindungslinie der beiden Pole heißt die *magnetische Achse* des Magneten. Sie ist vom Südpol zum Nordpol gerichtet. Streng genommen ist das magnetische Moment als ein Vektor \mathfrak{M} vom Betrage M anzusehen, der dem vom negativen nach dem positiven Pol weisenden Vektor l vom Betrage l gleichgerichtet ist, so daß $\mathfrak{M} = ml$.

In Wirklichkeit gibt es also keine einzelnen Magnetpole. Auch geht, wie wir sehen werden, in die genaue Beschreibung der Naturvorgänge nie die Polstärke, sondern stets das Dipolmoment ein. Trotzdem ist es häufig nützlich, sich der Hilfsvorstellung einzelner Magnetpole zu bedienen.

186. Das COULOMBSche Gesetz für Magnetpole. Die Untersuchung der Kraftwirkung einzelner Magnetpole aufeinander hat insofern Schwierigkeiten, als es ja einzelne Pole nicht gibt, man es also immer mit der Kraftwirkung der *beiden* Pole eines Magneten auf die *beiden* Pole eines anderen zu tun hat. Dieser Schwierigkeit kann man aber z. B. dadurch Herr werden, daß man die Pole sehr langer Magnete benutzt, von denen man zwei einander ganz nahe bringt, während die anderen so weit entfernt sind, daß sie auf diese beiden Pole keine merkliche Kraftwirkung ausüben. (Außerdem kann man dieser Störung durch Rechnung Geltung tragen). Zum Beispiel kann man einen langen Stabmagneten vertikal an eine Waage hängen, sein Gewicht austarieren und nunmehr den gleichnamigen Pol eines zweiten langen, vertikalen Stabmagneten von unten her seinem unteren Pole nähern. Die Abstoßung kann man durch Gewichte ausgleichen und so den Betrag der magnetischen Kraft messen. Eine Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt darin, daß man ohne besondere Messungen die genaue Lage der Pole im Magneten nicht angeben kann. Auf Grund ähnlicher Versuche fand COULOMB (1785) das nach ihm benannte Gesetz für die zwischen Magnetpolen wirkenden Kräfte, welches dem COULOMBSchen Gesetz für elektrische Ladungen völlig gleicht. Die Kraft, mit der zwei im Abstände r voneinander befindliche Magnetpole von den Stärken m und m' aufeinander wirken, ist

$$k = \text{const} \frac{m m'}{r^2}.$$

Die Konstante hängt von der Wahl der Maßeinheit für die Polstärke ab. Man wählt diese, ganz analog dem Verfahren bei elektrischen Ladungen (elektrostatische Ladungseinheit, § 131) meist so, daß die Konstante eine reine Zahl vom Betrage 1 ist, wenn sich die Pole im Vakuum befinden (vgl. auch § 229) und die Kraft k in dyn gemessen wird, so daß

$$k = \frac{m m'}{r^2} \text{ dyn}, \quad (2a)$$

bzw. in vektorieller Schreibweise [vgl. § 131, Gl. (2b)]

$$\mathfrak{k} = \frac{m m'}{r^3} \mathfrak{r}. \quad (2b)$$

Die Einheit der magnetischen Polstärke ist daher so definiert, daß ein Magnetpol die Stärke 1 hat, wenn er im Vakuum oder, was nur einen winzigen Unterschied macht, in Luft auf einen ihm gleichen in der Entfernung $r = 1$ cm die Kraft $k = 1$ dyn ausübt. Damit ist die Einheit der Polstärke an das CSG-System angeschlossen. Die Kraft ist positiv (abstoßend) oder negativ (anziehend), je nachdem die beiden Pole gleichnamig oder ungleichnamig sind, also genau ebenso wie bei elektrischen Ladungen.

Wegen der formalen Gleichheit der Gl. (2a u. b) mit dem COULOMBSchen Gesetz für elektrische Ladungen ergibt sich für die Polstärke die gleiche Dimension im CGS-System, wie für eine elektrische Ladung (im elektrostatischen Maßsystem) nämlich $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}|$.

187. Das magnetische Feld. Da in der Umgebung eines Magnetpols jeder andere Pol eine Kraft erfährt, so besteht in diesem Raum ein Kraftfeld, ein *magnetisches Feld*. Die für dieses Feld maßgebende Körpereigenschaft (§ 26) ist die magnetische Polstärke m . Demnach ist die *magnetische Feldstärke* \mathfrak{H} in einem Raumpunkt ein Vektor vom Betrage H , der gleich der Kraft ist, die ein positiver magnetischer Einheitspol in jenem Punkt erfährt. Ein Pol von der Stärke m erfährt also im Felde \mathfrak{H} eine Kraft

$$\mathfrak{k} = m \mathfrak{H} \text{ vom Betrage } k = mH \text{ dyn.} \quad (3)$$

Diese Kraft ist der Feldstärke \mathfrak{H} gleichgerichtet, wenn m ein positiver Pol, ihr entgegengerichtet, wenn m ein negativer Pol ist. Die *Einheit der magnetischen Feldstärke* heißt 1 Oersted. Die ältere Einheitsbezeichnung Gauß wird neuerdings der magnetischen Induktion \mathfrak{B} vorbehalten (§ 214). Ein magnetisches Feld hat die Feldstärke 1 Oersted, wenn in ihm ein Einheitspol die Kraft 1 dyn erfährt.

Wie im elektrischen Felde elektrische Kraftlinien, so können wir auch im magnetischen Felde *magnetische Kraftlinien* oder *Feldlinien* definieren. Sie sind Kurven, die in jedem Raumpunkt in Richtung der magnetischen Feldstärke verlaufen, und deren Dichte so bemessen ist, daß die Zahl der durch 1 cm² einer zur Feldrichtung senkrechten Fläche tretenden Kraftlinien gleich der Maßzahl der in jener Fläche herrschenden Feldstärke ist. Bei Magneten treten die Kraftlinien aus dem positiven (Nord-)Pol aus, in den negativen (Süd-)Pol ein und verlaufen stets von einem Pol nach einem anderen. Nie beginnen oder endigen Kraftlinien frei im Raum.

Aus Gl. (2a) und (3) folgt, indem wir m' als positiven Einheitspol wählen, für das Feld im Abstände r von einem Pol m

$$H = \frac{m}{r^2} \text{ Oersted.} \quad (4a)$$

Wenn wir unter r den vom Pol nach einem Punkt im Raum weisenden Radiusvektor verstehen, so können wir, indem wir die rechte Seite mit dem Einheitsvektor r/r multiplizieren, bzw. auf Grund von Gl. (3a), in vektorieller Darstellung dafür genauer schreiben

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^3} \mathfrak{r}. \quad (4b)$$

Denn der Vektor \mathfrak{H} ist dem Vektor r gleichgerichtet, wenn m positiv, ihm entgegengerichtet, wenn m negativ ist. Gl. (4a) ergibt den Betrag der Feldstärke \mathfrak{H} nach Gl. (4b).

Wie bei den elektrischen Ladungen (§ 136) kann man aus Gl. (4a) leicht berechnen, daß die Zahl der von einem Pol m ausgehenden Kraftlinien gleich $4\pi m$ ist.

Der allgemeine Verlauf der Kraftlinien in einem magnetischen Felde läßt sich leicht mit Eisenfeilspänen sichtbar machen. Man legt auf einen Magneten ein in einen Rahmen gespanntes Blatt Papier und bestreut es mit Eisenfeilspänen.

Bei leichtem Klopfen des Papiers ordnen sich die Späne kettenartig in der Feldrichtung. Die Abb. 326 u. 327 zeigen deutlich den Verlauf der Kraftlinien von dem einen Pol eines Magneten nach dem anderen. Man erkennt aber auch, daß ein solcher Pol kein Punkt, sondern ein ziemlich ausgedehnter Bereich im Magneten ist. Die Erklärung für die Kettenbildung geben wir in § 228.

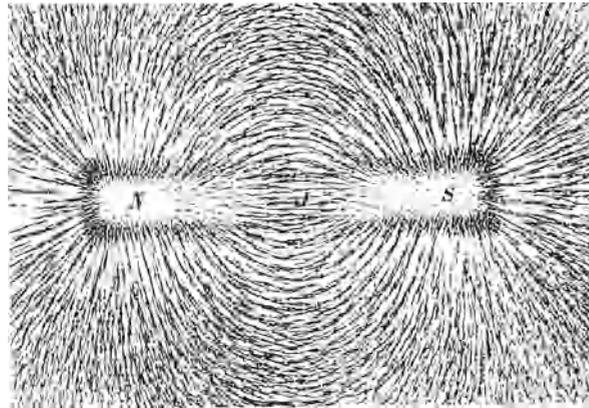


Abb. 326. Kraftlinienbild eines Stabmagneten.

Das magnetische Feld der Erde (§ 189) beträgt einige Zehntel Oersted, die stärksten Felder, die man mit Elektromagneten längere Zeit aufrechterhalten kann, betragen einige 10^4 Oersted. Für äußerst kurze Zeiten kann man aber auch Felder von mehr als 10^6 Oersted erzeugen (KAPITZA).

188. Kraftwirkungen magnetischer Felder auf magnetische Dipole.

Da ein magnetischer Dipol formal einem elektrischen Dipol vollkommen entspricht, so gilt für die Kraftwirkungen magnetischer Felder auf einen solchen, also auch auf Magnete, alles, was früher über die Wirkung elektrischer Felder auf elektrische Dipole gesagt worden ist (§ 140). Die dort abgeleiteten Gleichungen sind ohne weiteres auf magnetische Dipole zu übertragen, indem wir an die Stelle der Ladungen e die Polstärken m , an die Stelle der elektrischen Feldstärke E die magnetische Feldstärke H setzen. Es beträgt daher das auf einen magnetischen Dipol vom Moment M im *homogenen* Felde H wirkende Drehmoment

$$N = MH \sin \varphi \text{ dyn} \cdot \text{cm}, \quad (5a)$$

wenn φ den Winkel bedeutet, den seine Achse mit der Feldrichtung einschließt, oder in vektorieller Schreibweise $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M} \mathfrak{H}]$.

$$(5b)$$

Im *inhomogenen* Felde wirkt auf ihn eine in Richtung wachsender Feldstärke treibende Kraft

$$k = M \frac{dH}{dx} \text{ dyn}, \quad (6)$$

wobei vorausgesetzt ist, daß seine Achse bereits in der Feldrichtung (x -Richtung) liegt und die Feldrichtung am Orte seines positiven und negativen Pols die

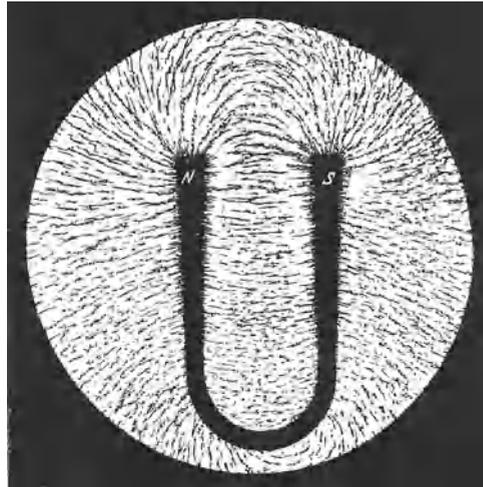


Abb. 327. Kraftlinienbild eines Hufeisenmagneten. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

gleiche ist (Abb. 264 c, § 140). Es ist also auch hier wieder nicht die Polstärke, sondern das *magnetische Moment* maßgebend.

Das magnetische Moment eines Magneten kann durch Messung des Drehmomentes N in einem Felde bekannter Stärke nach Gl. (5 a) bestimmt werden.

189. Erdmagnetismus. Die Tatsache, daß auf der Erde ein magnetisches Feld besteht, welches die Bewegung der Erde mitmacht, beweist, daß die Erde sich wie ein Magnet verhält, also ein magnetischer Dipol ist. Es ist möglich und sogar wahrscheinlich, daß dies damit zusammenhängt, daß der Erdkörper zum größten Teil aus Eisen besteht. Im übrigen ist aber der Ursprung der Magnetisierung der Erde noch weitgehend in Dunkel gehüllt. (Es ist gelegentlich vermutet worden, daß die Magnetisierung mit der Rotation der Erde um ihre

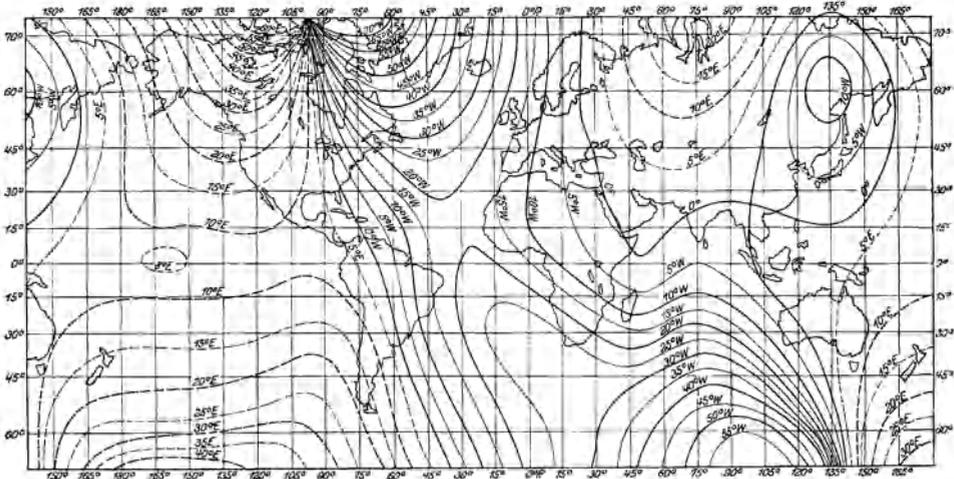


Abb. 328. Linien gleicher Deklination für 1922.

Achse zusammenhängt. In diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, daß auch die Sonne eine Magnetisierung zeigt, deren Pole mit den Enden der Rotationsachse der Sonne zusammenfallen, vgl. § 221.) Die Magnetpole der Erde liegen bekanntlich in der Nähe der Erdpole (magnetischer Nordpol bei den Melville-Inseln in $70^{\circ}5' \text{ n. Br.}, 96^{\circ}46' \text{ w. L.}$, magnetischer Südpol auf dem antarktischen Kontinent in $72^{\circ}25' \text{ s. Br.}, 154^{\circ} \text{ ö. L.}$). Ihre Bezeichnung ist nicht folgerichtig. Denn da der im Norden gelegene Pol den Nordpol einer Magnetnadel (nach der bei uns üblichen Bezeichnungsweise) anzieht, muß er selbst im magnetischen Sinne ein Südpol sein, und umgekehrt. (Aus diesem Grunde ist die Bezeichnung der Pole eines Magneten in manchen Ländern die umgekehrte.)

Schon die Tatsache, daß die magnetischen Pole nicht genau mit den geographischen Polen zusammenfallen, bedingt, daß eine Magnetnadel im allgemeinen nicht genau nordsüdlich weist. An einzelnen Stellen der Erdoberfläche, z. B. in Ostpreußen und bei Kursk in Rußland, sind sehr große Anomalien des erdmagnetischen Feldes vorhanden, welche die Richtung der Magnetnadel dort vollkommen verändern. Solche örtlichen Anomalien dürften in allen Fällen auf größere Eisenmassen zurückzuführen sein, welche in geringer Tiefe in die äußere Erdkruste eingebettet sind. Bei Kursk hat die Untersuchung der Anomalie tatsächlich zur Aufdeckung gewaltiger Eisenerzlager geführt. Die Abweichung der Magnetnadel von der genauen geographischen Nordsüdrichtung nennt man *Deklination*, in der Seemannssprache auch *Mißweisung*. Abb. 328 zeigt die Linien gleicher Deklination für das Jahr 1922. Die beigefügten Grad-

zahlen geben die Abweichung von der geographischen Nord-Südrichtung an. Die erdmagnetischen Pole sind in ständiger, langsamer Wanderung begriffen. Daher ist auch die Deklination langsam zeitlich veränderlich.

Da die Kraft auf jeden der beiden Pole eines Magneten sich aus der von den beiden erdmagnetischen Polen herrührenden Kraft nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzt, so ist die Richtung des erdmagnetischen Feldes an jedem Punkte der Erde mehr oder weniger gegen die Erdoberfläche geneigt. An den beiden erdmagnetischen Polen weist die Magnetnadel senkrecht nach unten, etwa am Äquator steht sie zur Erdoberfläche tangential. Den Neigungswinkel gegen die Horizontale bezeichnet man als *Inklination*. Die Magnetnadeln der Kompass usw. baut man stets so, daß die durch die Inklination hervorgerufene Kippneigung durch ein geringes Übergewicht der einen Seite ausgeglichen wird. Auf der nördlichen Halbkugel muß die den Südpol tragende Seite ein wenig schwerer sein. Auf diese Weise wird aber die erdmagnetische Kraft nicht in ihrer vollen Größe wirksam, sondern es wirkt auf die Magnetnadel nur die *Horizontalkomponente* (Horizontalintensität) der Feldstärke. Sie beträgt in unseren Breiten etwa 0,2 Oersted. Die zur Erdoberfläche senkrechte Komponente heißt die *Vertikalkomponente*.

Das erdmagnetische Feld unterliegt mancherlei Schwankungen. Einmal ist, wie schon erwähnt, die Lage der Pole nicht völlig konstant. Außerdem bestehen gewisse tägliche, jährliche und noch langfristige periodische Schwankungen. Ferner treten Störungen auf, welche, ebenso wie die Polarlichter, mit der Sonnenfleckenaktivität zeitlich und ursächlich zusammenhängen.

Der Erdmagnetismus bildet ein wichtiges Mittel zur Orientierung auf der Erdoberfläche mit Hilfe des *Kompasses*. Bei eisernen Schiffen sind besondere Maßnahmen nötig, um die störenden Wirkungen des Schiffskörpers aufzuheben. Daher der Vorteil des Kreiselkompasses (§ 40).

190. Magnetisches Feld eines geradlinigen Stromes. Durch einen horizontal ausgespannten Draht fließe ein Gleichstrom von einigen Ampere (Abb. 329).

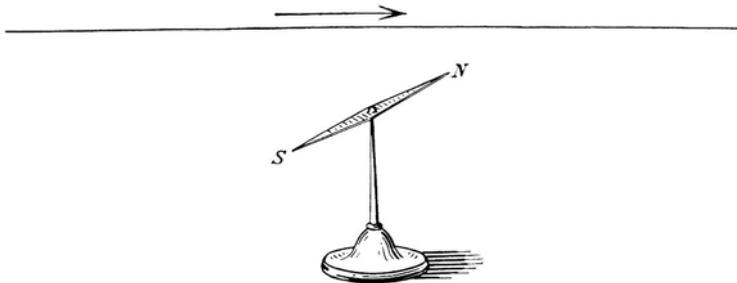


Abb. 329. Zum OERSTEDSchen Versuch.

Bringt man in die Nähe dieses Drahtes eine Magnetnadel, so bemerkt man, daß sie eine Ablenkung aus der Nord-Süd-Richtung erfährt, solange der Strom fließt, und daß sich die Richtung dieser Ablenkung umkehrt, wenn man die Richtung des Stromes umkehrt (OERSTED 1820).

Der Versuch beweist zunächst ganz allgemein, daß in der Umgebung eines elektrischen Stromes ein magnetisches Feld besteht. Die genauere Untersuchung zeigt, daß die magnetischen Kraftlinien bei einem geraden stromdurchflossenen Draht Kreise sind, deren Zentrum im Drahte liegt. Eine nach allen Seiten frei drehbare Magnetnadel stellt sich überall senkrecht zur senkrechten Verbindungslinie ihrer Mitte mit dem Drahte. Führt man sie auf einem Kreise einmal um den Draht herum, so dreht sie sich dabei einmal um sich selbst. (Dabei ist

natürlich vorausgesetzt, daß das erdmagnetische Feld sehr schwach gegenüber dem vom Strom erzeugten Feld ist, da dieses sonst durch jenes merklich verändert wird. Die genannten Erscheinungen zeigen sich also rein nur bei Verwendung eines nicht zu schwachen Stromes.)

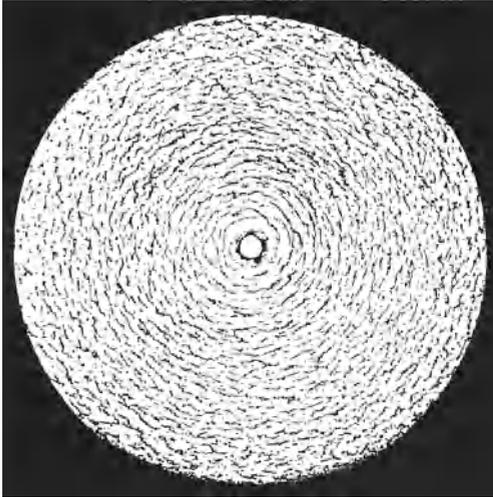


Abb. 330. Magnetisches Feld eines geradlinigen Stromes.
(Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Wie jedes andere magnetische Feld, so kann man auch die magnetischen Felder von Strömen durch Eisenfeilspäne sichtbar machen. Die Späne ordnen sich bei einem geraden Draht deutlich auf Kreisen, deren Mittelpunkt im Drahte liegt (Abb. 330; der

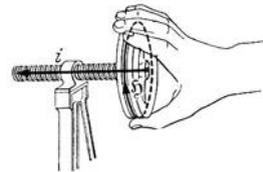


Abb. 331. Zur Schraubenregel des magnetischen Feldes eines Stromes.

Stromleiter ist bei der Herstellung des Bildes durch das Loch geführt). Man beachte, daß die hier auftretenden magnetischen Kraftlinien nirgends in „Polen“ beginnen oder endigen, sondern in sich selbst zurücklaufen. Es sind in sich *geschlossene Kraftlinien*.

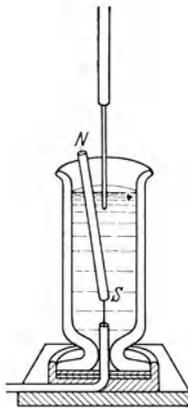


Abb. 332.
Ein Magnetpol kreist um einen Stromleiter.

Die Richtung des magnetischen Feldvektors kann in jedem Einzelfall aus der Einstellung einer Magnetnadel erkannt werden, da ja ihr Nordpol in die positive Feldrichtung weist. Die Versuche ergeben dann folgendes: Blickt man in Richtung des (positiven) Stromes, so umkreisen die magnetischen Kraftlinien den Stromleiter im Umlaufsinn des Uhrzeigers.

Am einfachsten merkt man sich die Richtung des magnetischen Feldes nach der *Schraubenregel*: Die magnetischen Kraftlinien umlaufen einen Strom in demjenigen Drehsinn, in dem man eine rechtsgängige Schraube drehen muß, damit sie sich in der positiven Stromrichtung verschiebt (Abb. 331).

Das Bestehen eines einen Stromleiter ringförmig umschließenden magnetischen Feldes zeigt sehr hübsch der folgende, von AMPÈRE stammende Versuch (Abb. 332). Ein Gefäß ist mit Quecksilber gefüllt, durch das mit Hilfe einer oberen und einer unteren Zuführung ein Strom geschickt werden kann. Am Boden des Gefäßes ist, allseitig drehbar, ein Magnet befestigt, dessen Nordpol *N* oben aus dem Quecksilber herausragt. Fließt ein Strom, so kreist der Nordpol, den ringförmigen magnetischen Kraftlinien dieses Stromes folgend, um den Strom. Kehrt man die Stromrichtung um, so kehrt sich gleichzeitig der Drehsinn des Magnetpols um.

191. Magnetische Felder von Stromschleifen und Spulen. Stellt man entsprechende Versuche mit Drähten an, welche zu Kreisen oder Rechtecken usw. gebogen sind, so ergeben sich entsprechende Wirkungen. Die magnetischen Kraftlinien sind wieder geschlossene Kurven um den Draht, aber keine Kreise.

Abb. 333 zeigt die durch Eisenfeilspäne sichtbar gemachten Kraftlinien einer kreisförmigen Stromschleife in einer zur Schleife senkrechten Ebene. Die Kraft-

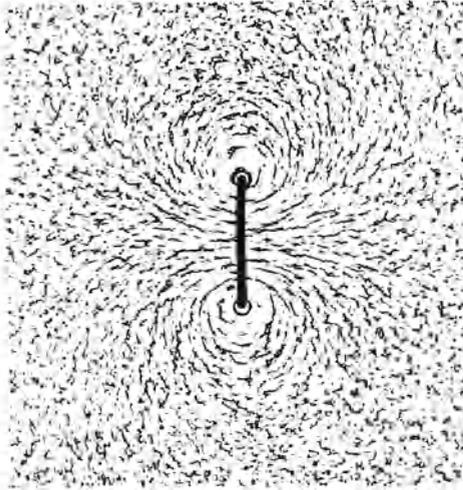


Abb. 333. Magnetisches Feld einer Stromschleife.
(Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

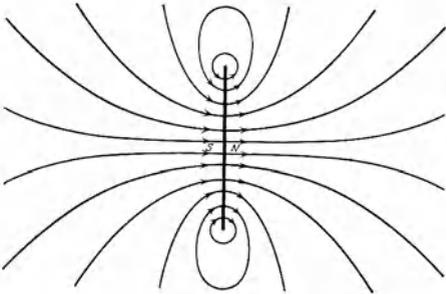


Abb. 334. Magnetisches Feld einer magnetischen Doppelschicht.

welche so magnetisiert ist, daß sie auf ihrer einen Fläche einen Nordpol, auf ihrer anderen Fläche einen Südpol trägt (Abb. 334). Wir wollen eine solche Eisenscheibe eine *magnetische Doppelschicht* nennen. Eine Stromschleife verhält sich magnetisch ebenso wie eine magnetische Doppelschicht.

Die von einem Stromkreis eingeschlossene Fläche nennt man seine *Windungsfläche*. Wird die gleiche Fläche F vom gleichen Strom in n Windungen umflossen, so ist die Windungsfläche gleich nF .

Einen Stabmagneten können wir uns aus einer großen Zahl von magnetischen Doppelschichten, immer eine auf die andere gelegt, hergestellt denken. Entsprechend können wir auf rein elektrischem Wege ein Gebilde herstellen, das einem Stabmagneten bezüglich seines magnetischen Feldes weitestgehend ähnlich ist, indem wir eine größere Zahl von Stromschleifen übereinanderlegen. Am einfachsten geschieht dies so, daß man einen Draht zu einer länglichen *Spule* aufwickelt, so daß alle Windungen vom gleichen Strome durchflossen werden. Das magnetische Feld einer Spule ist so gestaltet, daß die Kraftlinien im Innern parallel zur Achse der Spule verlaufen und auf einem mehr oder weniger langen Wege außen herum in sich selbst zurücklaufen (Abb. 335).

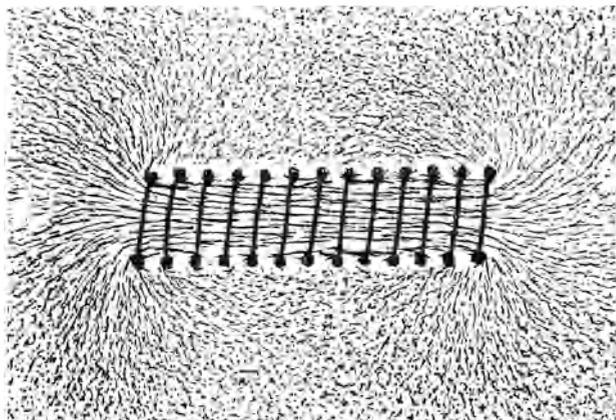


Abb. 335. Magnetisches Feld einer Spule. (Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Das äußere Feld einer gestreckten Spule gleicht also demjenigen eines Stabmagneten (Abb. 325), ihre Enden wirken wie Magnetpole. Die Richtung des magnetischen Feldes ergibt sich auch bei Stromschleifen und bei Spulen aus der *Schraubenregel* (§ 190). Mit ihrer Hilfe leitet man leicht die folgende neue Schraubenregel ab: *Die Richtung des magnetischen Feldes in einer Spule ist diejenige, in der eine rechtsgängige Schraube fortschreitet, wenn man sie in dem Sinne dreht, in dem der Strom die Spule umfließt* (Abb. 336).

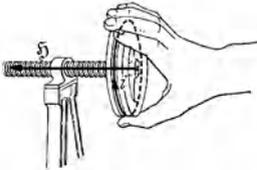


Abb. 336. Zur Schraubenregel des magnetischen Feldes in einer Spule.

Da die Kraftlinien einer stromdurchflossenen Spule in sich geschlossen sind, so verlaufen im Innern der Spule ebenso viele Kraftlinien in der einen Richtung, wie außen in der entgegengesetzten Richtung. Ist die Spule eng und lang, so ist die Dichte der Kraftlinien im Innern sehr viel größer als außen, wo die Kraftlinien zum größten Teil in einem weiten Bogen von einem Spulenende zum anderen verlaufen. Das bedeutet, daß im Innern der Spule ein sehr viel stärkeres magnetisches Feld herrscht als im Außenraum. Denkt man sich einen einzelnen magnetischen Nordpol einmal längs einer Kraftlinie gegen die Krafrichtung bis zum gleichen Punkt wieder zurückgeführt, so wirkt auf ihn im Innern der Spule eine viel größere Kraft als im Außenraum. Es ist daher bei dieser Verschiebung Arbeit hauptsächlich auf dem Wegstück im Spulenninneren zu leisten, auf dem äußeren Wegstück ist sie bei einer langen und engen Spule sehr viel kleiner.

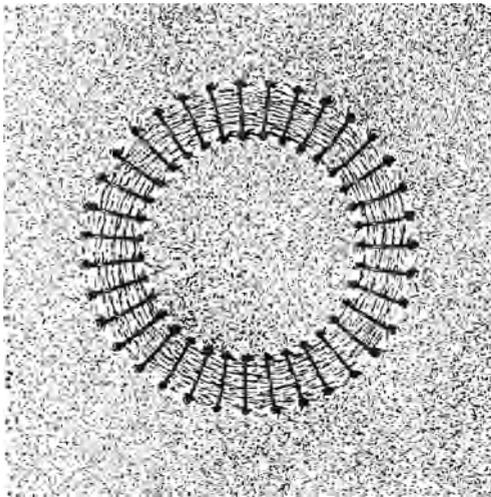


Abb. 337. Magnetisches Feld einer ringförmigen Spule. (Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Einen besonders wichtigen Fall zeigt Abb. 337, das magnetische Feld einer ringförmig geschlossenen Spule. In diesem Fall verlaufen die magnetischen Kraftlinien *vollständig* im Innern der Spule. Der Außenraum ist bei einer ausreichend eng gewickelten Spule vollkommen feldfrei.

192. Das elektrodynamische Grundgesetz. Das magnetische Feld eines Stromes kann nur von die Summe von Wirkungen

sein, die von den einzelnen im Strome bewegten Ladungsträgern ausgehen. Wir wollen daher zunächst das magnetische Feld eines einzelnen Ladungsträgers betrachten, der die Ladung ε und die Geschwindigkeit v habe. Es sei P (Abb. 338a) ein beliebiger Punkt im Raum, r (Betrag r) der von dem bewegten Ladungsträger nach P weisende Fahrstrahl und \mathfrak{H} die in P durch den bewegten Ladungsträger erzeugte magnetische Feldstärke. Dann lautet das *elektrodynamische Grundgesetz*:

$$\mathfrak{H} = \text{const} \frac{\varepsilon}{r^3} [v r], \quad (7a)$$

wobei $[v r]$ ein Vektorprodukt ist (§ 10). *Das magnetische Feld steht also senkrecht auf der durch die Bahn des Ladungsträgers und durch den Fahrstrahl r*

gebildeten Ebene und weist in diejenige Richtung, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man den Vektor v in die Richtung des Vektors r dreht (Schraubenregel, Abb. 339), sofern es sich um einen positiven Ladungsträger handelt, bei einem negativen Ladungsträger in entgegengesetzter Richtung. Aus dieser Regel lassen sich die Schraubenregeln der § 190 und 191 ohne weiteres ableiten.

Mißt man die Ladung ϵ in elektrostatischen Einheiten, so schreibt man die Konstante der Gl. (7a) in der Form $1/c$. Dabei hat die Größe c die Dimension einer Geschwindigkeit und den Betrag $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Sie ist mit der Lichtgeschwindigkeit identisch. In der Regel wählt man aber in der theoretischen Elektrodynamik eine andere Einheit für die elektrische Ladung und auch andere Einheiten für die anderen elektrischen Größen, als die elektrostatischen. Man mißt sie im *elektromagnetischen Maßsystem* (§ 198), wie wir das auch im folgenden tun wollen. Die elektromagnetische Einheit (e.m.E.) der Elektrizitätsmenge ist $3 \cdot 10^{10}$ mal größer als die elektrostatische. Dann erhält die Konstante der Gl. (7a) den Zahlenwert 1 und das Grundgesetz lautet:

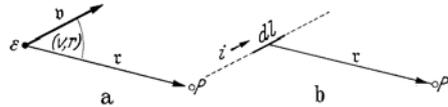


Abb. 338. a Zum elektrodynamischen Grundgesetz, b zum Gesetz von LAPLACE.

$$\mathfrak{H} = \frac{\epsilon}{r^3} [\mathbf{v} \mathbf{r}]. \tag{7b}$$

Wollen wir das Grundgesetz durch die Beträge der vorkommenden Vektoren ausdrücken, so lautet es

$$H = \frac{\epsilon v}{r^2} \sin(v, r) \text{ Oersted}, \tag{7c}$$

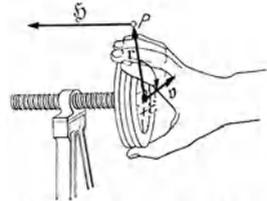


Abb. 339. Schraubenregel zum elektrodynamischen Grundgesetz.

wobei (v, r) den Winkel bedeutet, den die Richtungen von v und r miteinander bilden.

In internationalen Einheiten ist die elektromagnetische Einheit der Elektrizitätsmenge 10 Coulomb, die der Stromstärke 10 Ampere, die der Spannung 10^{-8} Volt, die des Widerstandes 10^{-9} Ohm (§ 198).

Aus Gl. (7c) können wir nun den Anteil berechnen, den ein Längenelement dl eines von einem Strom i durchflossenen Leiters vom Querschnitt q zum Felde in einem im Abstande r befindlichen Punkte beiträgt. An die Stelle des einzelnen Ladungsträgers haben wir sämtliche im Leiterelement bewegten Ladungsträger zu setzen. Enthält $1 \text{ cm}^3 n$ solche Ladungsträger, so enthält ein Längenelement dl vom Querschnitt q deren $nqdl$, und die gesamte in ihm bewegte Ladung beträgt $\epsilon nqdl$. Nun ist aber nach § 151 $n\epsilon qv = i$ die Stromstärke im Leiter. Infolgedessen erhalten wir für den Anteil dH dieses Stromelementes am Felde des ganzen Leiters im Punkte P (Abb. 338b) aus Gl. (7c)

$$dH = \frac{i dl}{r^2} \sin(i, r) \text{ Oersted}. \tag{8}$$

Dabei haben wir noch (i, r) an die Stelle von (v, r) gesetzt, da ja die Stromrichtung mit der Bewegungsvorrichtung positiver Ladungsträger identisch ist. Dies ist das Gesetz von LAPLACE [1821, oft fälschlich als BIOT-SAVARTSches Gesetz bezeichnet, s. Gl. (9)]. Das magnetische Feld eines vollständigen, geschlossenen Stromkreises findet man, indem man die Anteile seiner einzelnen Längenelemente nach den Gesetzen der Vektoraddition addiert (integriert). Das läßt sich aber nur in ganz einfachen Fällen in geschlossener Form ausführen. Wir berechnen

die Feldstärke im Mittelpunkt einer aus *einer einzigen Drahtwindung* bestehenden, kreisförmigen Schleife vom Radius r . In diesem Falle ist r konstant, $(i, r) = 90^\circ$, also $\sin(i, r) = 1$, die Richtung aller $d\mathcal{S}$ die gleiche, und die Summe über alle Längenelemente dl ist der Kreisumfang $2\pi r$. Es ergibt sich dann das Gesetz von BIOT-SAVART (1820)

$$H = \frac{2\pi i}{r} \text{ Oersted.} \quad (9)$$

Durch eine einfache Integration ergibt sich die Feldstärke in der Entfernung r von einem *unendlich langen geraden Draht* zu

$$H = \frac{2i}{r} \text{ Oersted.} \quad (10)$$

Für eine Spule von großer Windungszahl n , deren Länge l groß gegen ihren Durchmesser ist, ergibt sich für das Feld im Innern der Spule

$$H = \frac{4\pi n i}{l} \text{ Oersted.} \quad (11)$$

n/l ist die auf 1 cm der Spulenlänge entfallende Zahl von Windungen, l/n die Ganghöhe der Spulenwindungen. Die Feldstärke ist bis dicht an die Spulenden konstant und fällt dann nach außen hin allmählich ab (Abb. 335). Gl. (11) gilt auch für Ringspulen (Abb. 337). Man beachte, daß in den vorstehenden Gleichungen i in elektromagnetischen Einheiten gemessen ist.

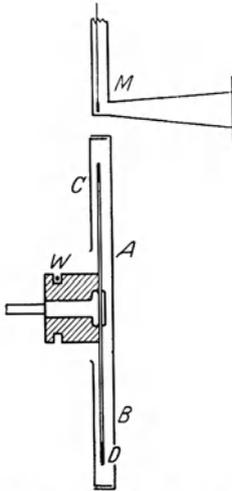


Abb. 340. Der ROWLANDSche Versuch in der Anordnung von EICHENWALD.

Das magnetische Feld einer bewegten Ladung hängt nur von der Bewegung der Ladung ab, aber nicht davon, auf welche Weise diese Bewegung zustande kommt. Man muß also erwarten, daß auch ein elektrischer Ladungsüberschuß der sich an einem festen Ort innerhalb eines beliebigen Körpers befindet, eine magnetische Wirkung ausübt, wenn er *mitsamt diesem Körper* bewegt wird. Daß dies zutrifft, und daß die Größe der magnetischen Wirkung der Theorie entspricht, ist durch Versuche, unter denen in erster Linie diejenigen von ROWLAND, RÖNTGEN und EICHENWALD zu nennen sind, bewiesen worden. Abb. 340 gibt das Schema eines solchen Versuchs, und zwar des ROWLANDSchen in der Ausführungsform von EICHENWALD. Am Rande einer auf einer Achse befestigten Hartgummischeibe D befindet sich ein Stanniobelag, der mittels Schleifbürsten und eines Schleifringes W auf eine Spannung U gegen Erde aufgeladen werden kann. ABC ist ein geerdeter Metallkasten, der mit dem Stanniobelag einen Kondensator der Kapazität C bildet. Infolgedessen entsteht auf dem Belag eine Ladung $e = UC$, und auf je 1 cm des Umfangs der Scheibe, deren Radius r sei, entfällt die Ladung $UC/2\pi r$. Ist v die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, so entspricht die bewegte Ladung einem Strom von der Stärke $i = vUC/2\pi r$. Die magnetische Wirkung dieses Stromes wird mit Hilfe eines Magnetometers M gemessen, d. h. einer an einem Faden drehbar aufgehängten Magnetnadel, die in ihrer natürlichen Ruhelage mit der rotierenden Scheibe in gleicher Ebene liegt, und die durch das auf dieser Ebene senkrecht stehende magnetische Feld des Stromes i in die dazu senkrechte Richtung abgelenkt wird, wie die Magnetnadel beim OERSTEDSchen Versuch durch den Strom in einem Draht.

Bei weiteren Versuchen bestand die rotierende Scheibe aus einem Dielektrikum, das sich zwischen den Platten eines geladenen Kondensators befand,

und dessen beide Flächen daher infolge dielektrischer Polarisation (§ 144) entgegengesetzt gleiche Ladungen trugen. Die durch die Bewegung dieser beiden Ladungen dargestellten Ströme haben zwar gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung. Ist aber das Dielektrikum hinreichend dick, so macht sich seitlich neben der Scheibe doch die Differenz ihrer magnetischen Wirkungen bemerkbar. Auch hier haben die Versuche Übereinstimmung mit der Theorie ergeben.

193. Kraftwirkung magnetischer Felder auf bewegte Ladungsträger. Jeder Stromkreis ist, wie wir gesehen haben, einem magnetischen Dipol äquivalent. Da nun ein solcher in einem magnetischen Felde Kräfte erfährt, so ist zu erwarten, daß auch auf stromdurchflossene Leiter im magnetischen Felde Kräfte wirken. Das ist tatsächlich der Fall. Da jeder Strom aus einzelnen bewegten Ladungsträgern besteht, so berechnen wir zunächst die Kraft, die ein solcher im magnetischen Felde erfährt.

Ein Ladungsträger mit der positiven Ladung ϵ bewege sich mit der Geschwindigkeit v . Er erzeugt dann im Abstände r nach Gl. (7b) ein magnetisches Feld $\epsilon [v r]/r^3$. Dieses übt auf einen dort befindlichen Magnetpol m eine Kraft

$$\mathfrak{k}_m = \frac{\epsilon m}{r^3} [v r] = -\epsilon \left[\frac{m r}{r^3} v \right] \quad (12)$$

aus. Nun sind aber nach dem Wechselwirkungsgesetz (§ 16) Kraft und Gegenkraft gleich groß und entgegengesetzt gerichtet. Demnach muß der vom bewegten Ladungsträger her auf den Magnetpol wirkende Kraft \mathfrak{k}_m eine vom Magnetpol her auf den

bewegten Ladungsträger wirkende Kraft $\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}_m$ entsprechen. Der Vektor $-m r/r^3 = \mathfrak{H}$ ist aber nach Gl. (4b) das magnetische Feld, das der Magnetpol am Ort des bewegten Ladungsträgers erzeugt. (Hier im Gegensatz zu Gl. (4b) mit negativem Vorzeichen, weil der Vektor r hier so definiert ist, daß er auf den Pol m hinweist.) Demnach erfährt der Ladungsträger im Felde \mathfrak{H} eine Kraft

$$\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}_m = -\epsilon [\mathfrak{H} v] = \epsilon [v \mathfrak{H}], \quad (13a)$$

deren Betrag nach § 10 gleich

$$k = \epsilon v H \sin(v, H) \text{ dyn} \quad (13b)$$

ist, wenn (v, H) der Winkel ist, den die Richtungen der Geschwindigkeit v und des Feldes \mathfrak{H} miteinander bilden. Da es nun natürlich für die Kraftwirkung eines magnetischen Feldes auf einen bewegten Ladungsträger nur auf Betrag und Richtung des Feldes am Ort des Ladungsträgers ankommt, nicht auf die Art seiner Entstehung, so gelten Gl. (13a) und (13b) in jedem beliebigen magnetischen Felde.

Nach Gl. (13a) und § 10 steht der Vektor \mathfrak{k} senkrecht auf der durch die Vektoren v und \mathfrak{H} gebildeten Ebene. Seine Richtung ergibt sich aus der Schraubenregel für Vektorprodukte. Liegen die Vektoren v und \mathfrak{H} in der Zeichnungsebene (Abb. 341), so weist die Kraft \mathfrak{k} bei einem positiven Ladungsträger $+\epsilon$ senkrecht nach hinten, bei einem negativen Ladungsträger $-\epsilon$ senkrecht nach vorn.

Da die Kraft \mathfrak{k} zur Geschwindigkeit v senkrecht steht, so erzeugt sie keine Bahnbeschleunigung des Ladungsträgers. Seine Geschwindigkeit bleibt also konstant, nur seine Richtung ändert sich stetig. Die Kraft \mathfrak{k} wirkt als Zentripetalkraft (§ 33) und bewirkt nur eine Krümmung der Bahn. *Eine Arbeit wird von einem magnetischen Felde an einem bewegten Ladungsträger nie geleistet.* Denken wir uns die Geschwindigkeit v in den Abb. 341 in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zum Felde \mathfrak{H} , zerlegt, so bleibt die erstere unverändert.

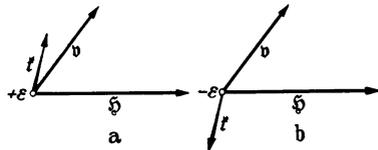


Abb. 341. Kraftwirkung eines magnetischen Feldes a auf einen positiven, b auf einen negativen Ladungsträger.

Die letztere kreist in der zur Richtung des Feldes senkrechten Ebene. Ist die Geschwindigkeit v schon an sich zur Richtung von ξ senkrecht, so beschreibt der Ladungsträger eine Kreisbahn um eine zur Feldrichtung parallele Achse. Ist sie es nicht, so überlagert sich dieser Bewegung eine fortschreitende Bewegung in der Richtung oder gegen die Richtung des Feldes (je nach der Richtung von v). Der Ladungsträger beschreibt dann eine schraubenförmige Bahn, deren Achse in der Feldrichtung liegt. Der Betrag der zur Feldrichtung senkrechten Komponente beträgt $v_1 = v \sin(v, H)$, die zur Kreisbewegung nötige Zentripetalkraft nach § 33 $\mu v_1^2/r$, wenn μ die Masse des Ladungsträgers, r der Radius seiner Kreisbahn ist. Diese Kraft wird vom magnetischen Felde geliefert; ihren Betrag gibt Gl. (13b). Es ist also

$$\frac{\mu v_1^2}{r} = \frac{\mu v^2 \sin^2(v, H)}{r} = \varepsilon v H \sin(v, H), \quad (14)$$

so daß

$$r = \frac{\mu v \sin(v, H)}{\varepsilon H} \text{ cm}, \quad (15)$$

wobei ε in elektromagnetischen Einheiten zu messen ist. Steht die Geschwindigkeit v senkrecht zum Felde ξ , ist also $\sin(v, H) = 1$, so ergibt sich

$$r = \frac{\mu v}{\varepsilon H} \text{ cm}. \quad (16)$$

194. Ablenkung von Kathodenstrahlen.
BRAUNSCHE RÖHRE. Elektronenmikroskop. Die Bahnkrümmung frei beweglicher Ladungsträger, ihre *Ablenkung* aus ihrer geradlinigen

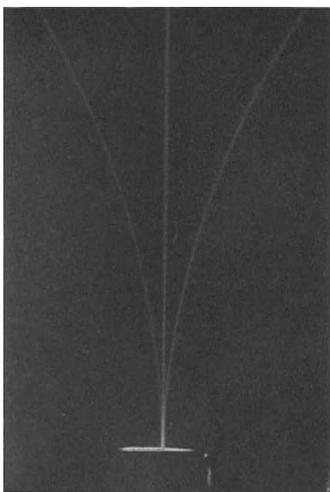


Abb. 342. Magnetische Ablenkung eines Kathodenstrahls.



Abb. 343. Elektrische Ablenkung eines Kathodenstrahls.

Bahn, im magnetischen Felde läßt sich besonders leicht an Kathodenstrahlen (§ 183) beobachten, da die Masse μ der Elektronen klein, also ihre Ablenkbarkeit groß ist (§ 132). Daher ist auch nach Gl. (16) der Krümmungsradius ihrer Bahn im magnetischen Felde klein, sie erfahren eine starke Ablenkung. Abb. 342 zeigt ein feines Bündel von Kathodenstrahlen (*Fadenstrahl*), das von einem Oxydfleck auf einer Glühkathode ausgeht. In der Mitte ist das Bündel unabgelenkt. Erregt man ein zur Strahlrichtung senkrecht magnetisches Feld, so wird der Strahl, je nach der Richtung dieses Feldes, nach rechts oder links gekrümmt.

Wegen seiner elektrischen Ladung unterliegt ein Elektron, wie jeder Ladungsträger, auch einer ablenkenden Wirkung in einem elektrischen Felde. Bewegt sich ein Elektron oder auch ein aus vielen Elektronen bestehender Kathodenstrahl durch einen Kondensator (Abb. 343), in dem die Feldstärke E herrscht, anfänglich parallel zu dessen Platten, so wird jedes Elektron, je nach der Richtung des Feldes, nach der einen oder anderen Seite aus seiner geradlinigen Bahn abgelenkt. Die auf das Elektron wirkende Kraft ist, wenn wir von dem hier belanglosen Vorzeichen absehen, gleich $\varepsilon E = \mu b$ (b = Beschleunigung durch das Feld, ε und E beide in elektrostatischen oder beide in elektromagnetischen Einheiten gemessen), also seine Beschleunigung $b = \frac{\varepsilon}{\mu} E$. Es legt daher in der Zeit t in

Richtung senkrecht zu seiner ursprünglichen Bewegung den Weg $x = \frac{1}{2} b t^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\mu} E t^2$

zurück. Ist v seine Geschwindigkeitskomponente parallel zu den Platten, also seine ursprüngliche Geschwindigkeit, y die Länge des im Felde zwischen den Kondensatorplatten zurückgelegten Weges, so ist $t = y/v$, also $x = \epsilon E y^2/2 \mu v^2$ oder

$$\frac{\mu v^2}{\epsilon} = \frac{E y^2}{2 x}. \tag{17a}$$

(Dieser Vorgang ist der Bewegung eines waagrecht geworfenen Körpers im Schwerfeld der Erde vollkommen analog. Wie ein solcher Körper unter der Wirkung dieses Feldes auf gekrümmter Bahn zu Boden fällt, so fällt das Elektron im elektrischen Felde des Kondensators in Richtung auf dessen positiv geladene Platte.) Aus den Gl. (16) und (17a) kann man das Verhältnis ϵ/μ und die Geschwindigkeit v einzeln berechnen. Man kann also aus der Ablenkung eines Kathodenstrahles im magnetischen und elektrischen Felde diese beiden Größen ermitteln. An die Stelle der elektrischen (nicht der magnetischen) Ablenkung kann auch die Messung der vom Elektron durchlaufenen Spannung U , der es seine Geschwindigkeit v verdankt, treten. Die an ihm geleistete Arbeit beträgt ϵU erg (ϵ und U beide in elektrostatischen oder beide in elektromagnetischen Einheiten gemessen), und diese findet sich in seiner kinetischen Energie $\frac{1}{2} \mu v^2$ wieder, so daß gilt

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \epsilon U \quad \text{oder} \quad \frac{\mu v^2}{\epsilon} = 2 U. \tag{17b}$$

Diese Gleichung kann Gl. (17a) ersetzen, denn sie enthält wie diese als Unbekannte die Größen ϵ/μ und v^2 .

Die Geschwindigkeit v ist natürlich von Fall zu Fall verschieden. Die Größe ϵ/μ hingegen ist eine für die Elektronen charakteristische Konstante. Man nennt sie die *spezifische Ladung* des Elektrons, weil sie die Ladung angibt, die 1 g Elektronen besitzen. Die besten Messungen haben ergeben

$$\frac{\epsilon}{\mu} = 5,280 \cdot 10^{17} \text{ e.s.E./g} = 1,768 \cdot 10^8 \text{ Coulomb/g.}$$

In Verbindung mit dem Betrage der Ladung des Elektrons (§ 132) ergibt sich daraus die Masse μ des Elektrons zu $0,9033 \cdot 10^{-27}$ g (vgl. § 338).

Auf die hier beschriebene Weise kann man durch elektrische und magnetische Ablenkung auch die spezifische Ladung anderer schnell bewegter Ladungsträger, insbesondere der Kanalstrahlen (§ 183) und der α - und β -Strahlen der radioaktiven Stoffe (§ 357) bestimmen.

Die magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen kann man mit einem geeigneten Entladungsrohr und einem starken Magneten ohne weiteres an der Veränderung des Entladungsbildes erkennen. Um die elektrische Ablenkung nachzuweisen, muß man im Innern des Entladungsrohres zwei Kondensatorplatten anbringen, an die eine ausreichend hohe Spannung gelegt wird, und zwischen denen der Kathodenstrahl hindurchgeht. Man macht die Ablenkung sichtbar, indem man am Ende des Rohrs einen Schirm a mit einem fluoreszierenden Stoff anbringt (BRAUNSCHE Röhre, Abb. 344) und ein möglichst feines Bündel von Kathodenstrahlen verwendet. Dieses erzeugt auf dem Schirm einen feinen leuchtenden Fleck, aus dessen Verschiebung man die Ablenkung messen kann. Die BRAUNSCHE Röhre kann zur Analyse des zeitlichen Verlaufs von Strom und Spannung bei Wechselströmen und auch bei schnelleren Schwingungen dienen. Zur Analyse des Stromes läßt man diesen durch eine nahe an das Rohr, senkrecht zur Kathodenstrahlbahn, gestellte Spule \mathfrak{F} von

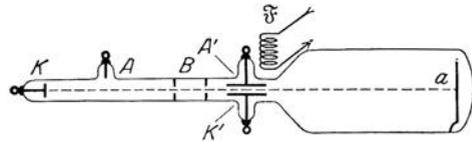


Abb. 344. BRAUNSCHE Röhre. (AUS POHL: Elektrizitätslehre.)

kleinem Widerstand gehen, deren magnetisches Feld das Kathodenstrahlbündel ablenkt. Dieses folgt jeder, auch der schnellsten Änderung des Feldes. Der Lichtfleck erscheint bei schnellen Änderungen in eine Lichtlinie auseinandergezogen. Betrachtet man diese z. B. in einem rotierenden Spiegel, so sieht man

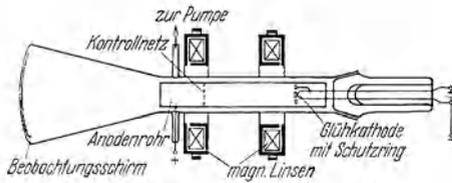


Abb. 345. Elektronenmikroskop. (Nach KNOLL, HOUTERMANS und SCHULZE.)

eine Kurve, die das zeitliche Nacheinander in räumlichem Nebeneinander, also die Stromstärke als Funktion der Zeit, darstellt. Zur Spannungsmessung kann man entweder die elektrische Ablenkung benutzen, indem man die zu messende Spannung an die Platten eines im Rohr befindlichen Kondensators legt, oder man legt die Spannung an die Enden einer Spule \mathfrak{F} von

großem Widerstand und verfährt sonst wie bei der Strommessung. Der große Vorzug der BRAUNschen Röhre gegenüber anderen dem gleichen Zweck dienenden Meßgeräten (Oszillographen) ist der, daß die Kathodenstrahlen wegen

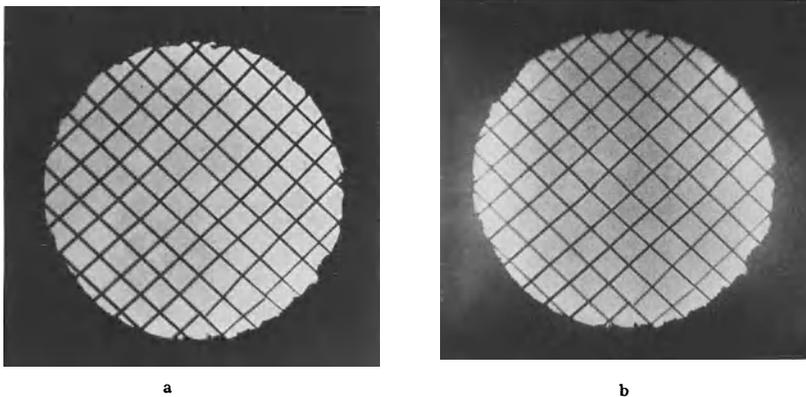


Abb. 346. a elektronenoptische, b ichtoptische Vergrößerung eines Drahtnetzes 12fach. (Nach KNOLL und RUSKA.)

der sehr kleinen Masse der Elektronen praktisch trägheitslos sind. Die BRAUNsche Röhre spielt unter anderem als ein Bestandteil der Fernsehgeräte eine wichtige Rolle.

Elektronenstrahlen, welche nahezu axial das magnetische Feld einer flachen Spule durchlaufen, erfahren Ablenkungen, welche denen eines Lichtstrahles in einer Linse weitestgehend entsprechen. Ein solches Feld kann also als „Linse“ für Elektronenstrahlen dienen (BUSCH), und man kann mit seiner Hilfe die Oberfläche eines Elektronen aussendenden Körpers abbilden, wenn man die Elektronenstrahlen auf einen Fluoreszenzschirm fallen läßt, genau wie man mit einer Linse eine Licht aussendende Fläche abbilden kann. Bei Verwendung zweier Spulen als „Linsen“ kann man beträchtliche Vergrößerungen erzielen (*Elektronenmikroskop*). Die Abbildungsgesetze entsprechen durchaus denjenigen bei einer optischen Abbildung mit einer Linse (§ 275). Bild- und Gegenstands Entfernung stehen mit einer Größe, die man als die Brennweite der „Linse“ bezeichnen kann, im gleichen Zusammenhange, wie beim Licht. Diese Brennweite ist von der magnetischen Feldstärke abhängig, kann also stetig geändert werden.

Abb. 345 zeigt das Schema eines *Elektronenmikroskops* mit zwei magnetischen Linsen, Abb. 346a die elektronenoptische, 346b die lichtoptische Abbildung eines Drahtnetzes. Man sieht, daß sie sich in der Güte der Abbildung kaum

unterscheiden. Das Elektronenmikroskop gibt theoretisch die Möglichkeit für sehr viel stärkere Vergrößerungen als das optische Mikroskop. (Das liegt an der sehr kleinen Wellenlänge der mit der Elektronenbewegung verbundenen Materiewellen, § 355, vgl. § 282). Übrigens ist eine elektronenoptische Abbildung auch mit Hilfe elektrischer Felder möglich.

Da bewegte Ladungsträger sich auf einer Schraubenbahn um die magnetischen Kraftlinien bewegen, so folgen sie, wenn ihre Geschwindigkeit ausreichend gering ist, weitgehend auch der Richtung der Kraftlinien. Eine solche Einwirkung erfahren auch die Elektronen, die von den Sonnenflecken, insbesondere in Zeiten erhöhter Sonnenfleckenaktivität, ausgeschleudert werden und in die Nähe der Erde, in den Bereich des erdmagnetischen Feldes, gelangen. Da die Kraftlinien dieses Feldes von Pol zu Pol verlaufen, so werden diese Elektronenstrahlen zum größten Teil auf die Pole hin abgelenkt. Beim Einfall in die oberen Schichten der Atmosphäre erregen sie die Luft zum Leuchten und erzeugen die *Polarlichter*. Daß diese nur in hohen nördlichen und südlichen Breiten auftreten, ist also eine Wirkung des erdmagnetischen Feldes.

195. Kraftwirkung magnetischer Felder auf Ströme. Die für einzelne Ladungsträger gültigen Gesetze können wir nunmehr leicht auf die Gesamtheit der Ladungsträger eines Stromes übertragen. Da die Ladungsträger den Stromleiter nicht verlassen können, so übertragen sie die an ihnen angreifende Kraft auf diesen. Es treten also im magnetischen Felde Kraftwirkungen an den Stromleitern auf. Dabei ist es gleichgültig, ob ein bestimmter Strom i aus positiven Ladungsträgern besteht oder aus negativen Ladungsträgern, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Denn das Vorzeichen der rechten Seite von Gl. (13a), also auch die Richtung der Kraft \mathfrak{k} , ändert sich nicht, wenn sowohl ε wie v entgegengesetztes Vorzeichen annehmen. Wir dürfen also auch bei den Strömen in Metallen, die ja aus Elektronen bestehen, immer so rechnen, als handle es sich um einen entgegengesetzt gerichteten Strom positiver Ladungsträger.

Es sei n die Zahl der an einem Strom beteiligten Ladungsträger in 1 cm^3 eines Leiters, ε die Ladung der einzelnen Ladungsträger, q der Querschnitt eines Leiterelementes dl . Dann beträgt die in diesem enthaltene bewegte Ladung $n\varepsilon q dl$. Demnach ist der Betrag der auf ein solches Leiterelement im Felde H wirkenden Kraft nach Gl. (13b) $dk = n\varepsilon q dl vH \sin(v, H)$. Nach § 151, Gl. (8), ist aber $n\varepsilon qv = i$ die Stromstärke im Leiterelement. Setzen wir noch, da die Richtung der Geschwindigkeit v der Ladungsträger mit der Richtung des Stromes übereinstimmt, $(v, H) = (i, H)$, so folgt

$$dk = i dl H \sin(i, H) \text{ dyn.} \quad (18)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Stromstärke i hier im elektromagnetischen Maßsystem (Einheit 10 Ampere) gemessen werden muß, um die Kraft in dyn zu erhalten. Die Kraft dk steht senkrecht zu der durch das Leiterelement dl und die Feldstärke H gebildeten Ebene, sucht also das Leiterelement senkrecht zur Stromrichtung zu bewegen. Sie hat ihren größten Wert für $\sin(i, H) = 1$, wenn also Strom- und Feldrichtung aufeinander senkrecht stehen, und verschwindet, wenn sie einander parallel sind.

Aus Gl. (13a) läßt sich ohne weiteres die *Schraubenregel* ableiten, die für die in einem magnetischen Felde auf einen Strom wirkende Kraft gilt: *Die Kraft weist in diejenige Richtung, in der sich eine rechtsgängige Schraube bewegt, wenn man sie in dem Sinne dreht, der einer Drehung der (positiven) Stromrichtung in die Feldrichtung entspricht* (Abb. 347). Der besonders wichtige Fall, daß Stromrichtung und Feld aufeinander senkrecht stehen, ist noch einmal in anderer Weise in Abb. 348 dargestellt.

Um die Wirkung auf ein endliches Leiterstück oder auf einen ganzen geschlossenen Stromkreis zu finden, muß man die Vektorsumme über die an den einzelnen Leitelementen dl wirkenden Kräfte dk bilden. Bei einem geschlossenen Stromkreis ergibt sich dabei in einem homogenen Felde nie eine resultierende Einzelkraft, sondern stets ein Kräftepaar. Das heißt, auf einen

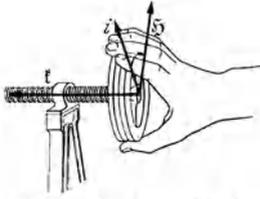


Abb. 347. Schraubenregel für die im magnetischen Feld auf einen Stromleiter wirkende Kraft.

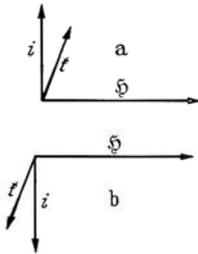


Abb. 348. Kraftwirkung auf einen zur magnetischen Feldrichtung senkrechten Strom.

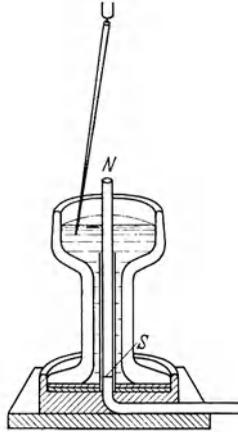


Abb. 349. Bewegung eines Stromleiters im magnetischen Felde.

geschlossenen Stromkreis wirkt im homogenen magnetischen Felde *nur ein Drehmoment, keine beschleunigende Kraft*, genau wie auf einen Magneten.

Die auf einen stromdurchflossenen Leiter im magnetischen Felde wirkende, zur Strom- und Feldrichtung senkrechte Kraft zeigt in einfachster Form ein von AMPÈRE angegebener Versuch (Abb. 349). Aus einem mit Quecksilber gefüllten Gefäß ragt der Nordpol N eines Magneten heraus, durch den von unten ein Strom in das Quecksilber eintreten kann. Dieser tritt oben durch einen allseitig drehbar aufgehängten Draht wieder aus. Der Draht kreist um den Magneten

unter der Wirkung des von diesem erzeugten magnetischen Feldes. Der Drehsinn kehrt sich mit der Stromrichtung um. Dieses ist, wie leicht ersichtlich, die Umkehrung des in Abb. 332 dargestellten Versuches.

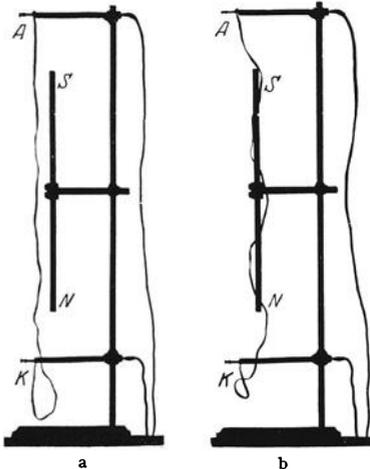


Abb. 350. Ein Stromleiter wickelt sich schraubenartig um einen Magneten. (Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

Das Bestreben bewegter Ladungsträger, die Kraftlinien eines magnetischen Feldes auf einer Schraubenbahn zu umlaufen, läßt sich auch bei den Ladungsträgern in einem Leiter zeigen, wenn dieser biegsam ist, z. B. von einem dünnen Metallband AK (Abb. 350) gebildet wird. Die Kraftlinien verlaufen innerhalb eines Magneten, wie wir noch sehen werden, vom Süd- zum Nordpol. Daher wickelt sich der anfänglich dicht neben einem vertikalen Stabmagneten herabhängende Leiter schraubenförmig auf den Magneten auf. Bei Umkehrung der Stromrichtung wickelt er sich ab und mit umgekehrtem Drehsinn wieder auf.

Eine stromdurchflossene Spule stellt sich bei ausreichend hoher Stromstärke in die Richtung des erdmagnetischen Feldes ein. Denn sie ist natürlich auch in dieser Hinsicht einem Stabmagneten äquivalent.

196. Das magnetische Moment von Stromkreisen. Da ein geschlossener Stromkreis einem Magneten äquivalent ist, eine lange Spule einem Stabmagneten, ein flacher, nur aus einer oder wenigen Windungen bestehender Stromkreis einer magnetisierten Scheibe, so hat auch ein solcher Stromkreis

ein *magnetisches Moment*. Abb. 351 stellt eine rechteckige Stromschleife dar, deren Seitenlängen l_1 und l_2 cm seien. Die Seiten l_1 seien zum homogenen magnetischen Felde \mathfrak{H} senkrecht, die Seiten l_2 zu ihm parallel. Dann wirkt eine Kraft nur auf die ersteren, und zwar nach Gl. (18) auf jede die Kraft $k = il_1H$ dyn. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet, weil der Strom die beiden Seiten in entgegengesetztem Sinne durchfließt. Daher wirkt auf den Leiter ein Drehmoment

$$N = kl_2 = il_1l_2H = MH \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

Durch Vergleich mit Gl. (5a), § 188, (mit $\varphi = 90^\circ$) erkennt man, daß die durch vorstehende Gleichung definierte Größe M die gleiche Bedeutung hat wie das magnetische Moment eines Magneten. Sie stellt also das magnetische Moment des Stromkreises dar. Da $l_1l_2 = F$ die Fläche des Stromkreises ist, so ist

$$M = iF. \tag{19a}$$

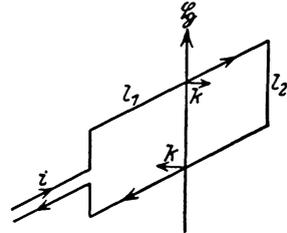


Abb. 351. Zur Ableitung des magnetischen Moments einer Stromschleife.

Diese Gleichung gilt allgemein, nicht nur für den vorliegenden Sonderfall eines Rechteckes. Für eine kreisförmige Stromschleife ist daher

$$M = \pi r^2 i. \tag{19b}$$

Auch ein einzelner, auf einer Kreisbahn vom Radius r umlaufender Ladungsträger bildet einen Kreisstrom. Seine Ladung sei ϵ , seine Winkelgeschwindigkeit $u = 2\pi n$. Dann durchläuft der Ladungsträger jeden Querschnitt seiner Bahn in 1 sec n -mal, so daß in 1 sec die Ladung $n\epsilon$ durch jeden Querschnitt tritt, und seine Bewegung bildet gemäß der Definition der Stromstärke einen Strom von der Stärke $i = \epsilon u / 2\pi$. Demnach ist das magnetische Moment eines solchen elementaren Kreisstromes

$$M = \pi r^2 \cdot \frac{\epsilon u}{2\pi} = \frac{1}{2} \epsilon u r^2. \tag{20}$$

197. Kraftwirkungen zwischen Strömen.

Da elektrische Ströme einerseits Träger magnetischer Felder sind, andererseits aber in magnetischen Feldern Kraftwirkungen erfahren, so müssen auch zwei Ströme auf Grund ihrer magnetischen Felder Kräfte aufeinander ausüben. Es seien i_1 und i_2 zwei parallele und gleichgerichtete, zur Zeichnungsebene senkrecht nach hinten gerichtete Ströme (Abb. 352a). Die Kreise sind die durch die Ströme gehenden Kraftlinien je des zweiten Stromes. Da die Ströme gleichgerichtet, die Felder aber

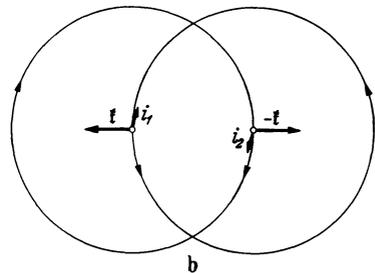
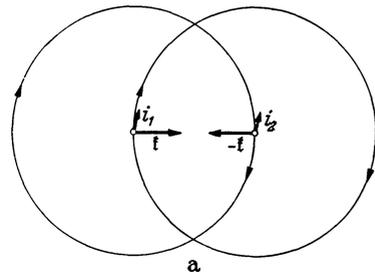


Abb. 352. a Anziehung paralleler, b Abstoßung antiparalleler Ströme.

in den beiden Punkten entgegengesetzt gerichtet sind, so erfahren die Stromleiter entgegengesetzt gerichtete Kräfte f und $-f$. Mit Hilfe der Schraubenregel (§ 195) stellt man leicht fest, daß die beiden Stromleiter durch diese Kräfte aufeinander hin getrieben werden, sich also anziehen. Ebenso stellt man fest, daß *beide* Kräfte ihre Richtung umkehren, wenn man die Richtung des *einen* Stromes, z. B. von i_2 , umkehrt (Abb. 352b). Denn dadurch kehrt sich gleichzeitig am Ort von i_1 die Feldrichtung um. Wir erhalten also das wichtige Gesetz:

Parallele und gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, parallele und entgegengesetzt gerichtete Ströme stoßen sich ab. Zum Nachweis kann die in Abb. 353 dargestellte Vorrichtung (AMPÈRESches Gestell) dienen. Die in Abb. 354 dargestellte ROGUETSche Spirale taucht unten in Quecksilber. Sobald man in ihr einen Strom einschaltet, zieht sie sich infolge der Anziehung der in ihren Windungen fließenden parallelen Ströme zusammen. Dadurch wird der Strom unterbrochen, die Spirale dehnt sich wieder, taucht erneut in das Quecksilber ein, und das Spiel wiederholt sich in regelmäßiger Folge. Die Spirale ist also ein besonders einfacher selbsttätiger Stromunterbrecher.

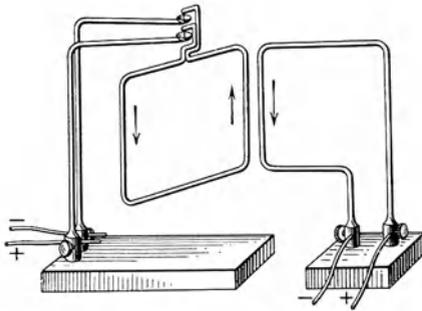


Abb. 353.
Anziehung und Abstoßung paralleler Ströme.

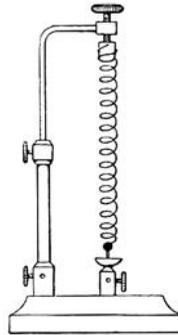


Abb. 354.
ROGUETSche Spirale.

Unterbrochen, die Spirale dehnt sich wieder, taucht erneut in das Quecksilber ein, und das Spiel wiederholt sich in regelmäßiger Folge. Die Spirale ist also ein besonders einfacher selbsttätiger Stromunterbrecher.

In Abb. 355 ist i_1 wieder ein zur Zeichnungsebene senkrecht nach hinten gerichteter Strom, i_2 ein in der Zeichnungsebene verlaufender Strom. Wir

greifen in diesem zwei Punkte heraus, die auf der gleichen Kraftlinie des vom Strom i_1 erzeugten Feldes liegen. Mit Hilfe der Schraubenregel stellt man fest, daß die in den beiden Punkten auf i_2 wirkenden, gleich großen, zur Zeichnungsebene senkrechten Kräfte f und $-f$ einander entgegen-

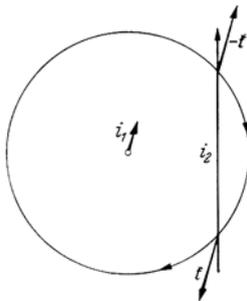


Abb. 355. Zwei Ströme suchen sich parallel zu stellen.

gerichtet sind, also ein Kräftepaar bilden. Dieses sucht den Strom i_2 so zu drehen, daß er dem Strom i_1 parallel und gleichgerichtet ist. Ein entsprechendes, aber entgegengesetztes Drehmoment tritt nach dem Wechselwirkungsgesetz (§ 16) natürlich auch an i_1 auf. Es folgt: *Zwei frei bewegliche Stromleiter suchen sich so zu stellen, daß die in ihnen fließenden Ströme parallel und gleichgerichtet sind.*

Das allgemeine Gesetz für die zwischen zwei von den Strömen i_1 und i_2 durchflossene Leiterteile dl_1 und dl_2 wirkende Kraft dk lautet, wenn r der Abstand der Leiterteile ist,

$$dk = -\frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2}{r^2} \left(\cos(i_1, i_2) - \frac{3}{2} \cos(i_1, r) \cdot \cos(i_2, r) \right). \quad (21a)$$

(AMPÈRE 1825). Sind die beiden Ströme parallel bzw. antiparallel, so ist $\cos(i_1, i_2) = +1$ bzw. -1 und $\cos(i_1, r) = -\cos(i_2, r)$ bzw. $= +\cos(i_2, r)$. Dann folgt aus Gl. (21a)

$$dk = \mp \frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2(i_1, r) \right) \quad (21b)$$

(— für parallele, + für antiparallele Ströme). Die Summe dieser Kräfte für endliche Leiterteile ist nach den Gesetzen der Vektoraddition zu bilden.

Bei großer Stromstärke, z. B. in elektrischen Maschinen und Umspannern, sind die Kräfte, die zwischen den einzelnen Teilen von Spulen (Wicklungen) auftreten, sehr erheblich. Benachbarte Windungen, in denen parallele Ströme fließen, ziehen sich mit großer Kraft an, und es muß dafür gesorgt werden, daß die Isolation diesem Druck standhält. Die einander diametral gegenüber-

liegenden Teile jeder Windung führen entgegengesetzt gerichtete Ströme und stoßen sich ab. Daher besteht bei großer Stromstärke ferner die Gefahr, daß die Wicklung auseinandergesprengt wird.

198. Das elektromagnetische und das internationale Maßsystem. Es ist bereits in § 192 gesagt worden, daß die Normierung der Konstanten des elektrodynamischen Grundgesetzes als eine reine Zahl vom Betrage 1 die Einführung eines neuen Maßsystems, des *elektromagnetischen Maßsystems*, und damit neuer Maßeinheiten, der elektromagnetischen Einheiten, bedingt. Und nicht nur dies. Die elektrischen Größen haben im elektromagnetischen Maßsystem auch eine andere Dimension als im elektrostatischen System (§ 147).

Zur Ableitung dieser Dimensionen gehen wir zweckmäßig vom AMPÈRESCHEN Gesetz, Gl. (21), aus. Da sich auf der rechten Seite dieser Gleichung die vorkommenden Längen dimensionsmäßig aufheben, sieht man sofort, daß das Produkt zweier Stromstärken, also auch das Quadrat einer Stromstärke, die Dimension einer Kraft haben muß. Es gilt also die Dimensionsgleichung $|i| = |\sqrt{k}| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}|$. Die Dimension einer Elektrizitätsmenge e ergibt sich wegen $i = de/dt$ (§ 150) zu $|e| = |i \cdot t| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}|$. Das Produkt Ue aus einer Spannung und einer Ladung ist nach § 137 eine Arbeit, so daß $|Ue| = |m l^2 t^{-2}|$ und die Dimension der Spannung $|U| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}|$. Und schließlich folgt aus dem OHMSCHEN Gesetz für den Widerstand $|R| = |U/i| = |l t^{-1}|$. In Tabelle 25 sind diese Beziehungen nebst einigen weiteren zusammengestellt.

Tabelle 25. Dimensionen im elektromagnetischen Maßsystem.

Stromstärke	$ i = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1} $,	Induktivität	$ L = l $.
Elektrizitätsmenge.	$ e = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} $,	Widerstand	$ R = l t^{-1} $,
Spannung	$ U = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2} $,	Kapazität	$ C = l^{-1} t^2 $.
Elektr. Feldstärke	$ E = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-2} $,		

Es sei e_s eine bestimmte Elektrizitätsmenge elektrostatisch gemessen, e_m die gleiche Elektrizitätsmenge elektromagnetisch gemessen. Dann ist nach § 192 $e_s = c \cdot e_m$, wobei die Maßzahl der Konstanten c gleich $3 \cdot 10^{10}$ ist. Daß ihre Dimension gleich der einer Geschwindigkeit, $|l t^{-1}|$, ist, ergibt sich leicht durch Vergleich der Dimensionen der Elektrizitätsmenge in beiden Maßsystemen. Da in jedem Falle die Stromstärke als Elektrizitätsmenge/Zeiteinheit definiert ist, so stehen die *Maßzahlen* der Stromstärke in beiden Maßsystemen im gleichen Verhältnis wie diejenigen der Elektrizitätsmenge, $i_s = c i_m$. Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist demnach $3 \cdot 10^{10}$ mal größer als die elektrostatische Einheit. Auf Grund der zwischen den verschiedenen elektrischen Größen bestehenden Beziehungen lassen sich entsprechende Umrechnungen auch für die übrigen elektrischen Größen anstellen. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$i_s = c i_m, \quad e_s = c e_m, \quad U_s = U_m/c, \quad E_s = E_m/c, \quad R_s = R_m/c^2, \quad C_s = C_m c^2.$$

Hiernach und mit Hilfe der Tabelle 20, § 147, kann man leicht die elektromagnetischen Einheiten in die *internationalen Einheiten* umrechnen (Tabelle 26).

Die Konstante $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, meist als *Lichtgeschwindigkeit* bezeichnet, wird auch die *kritische Geschwindigkeit* genannt. Daß sie bei der Fortpflanzung des Lichtes eine Rolle spielt, rührt daher, daß das Licht ein elektromagnetischer Vorgang ist. Die Identität dieser elektrischen Konstante mit der Lichtgeschwindigkeit wurde 1843 von WILH. WEBER erkannt.

Die Einheiten des internationalen elektrischen Maßsystems (Coulomb, Ampere, Volt, Ohm usw.) sind ursprünglich aus den Einheiten des elektromagnetischen Maßsystems abgeleitet, und zwar auf Grund der in Tabelle 26 niedergelegten Beziehungen. Die der Tabelle 26 *streng* entsprechenden Einheiten nennt man die *absoluten elektrischen Einheiten*. Mit Rücksicht auf die große wirtschaftliche Bedeutung der elektrischen Einheiten sind diese aber in allen Kulturstaaen *gesetzlich festgelegt*. Ein solches Gesetz muß *Meßvorschriften* enthalten, die angeben, wie die einzelnen Einheiten praktisch verwirklicht werden sollen, und die hierzu nötigen Messungen müssen verhältnismäßig einfach ausführbar sein. Dabei genügt es, wenn solche Meßvorschriften für zwei Einheiten gegeben werden. Die übrigen Einheiten lassen sich dann auf Grund elementarer physikalischer Gesetze und Definitionen leicht verwirklichen. Aus diesem Grunde gibt das Gesetz Meßvorschriften nur für das Ampere und

Tabelle 26.

Es ist die elektromagnetische Einheit:

der Stromstärke	10 Ampere,
der Elektrizitätsmenge	10 Coulomb,
der Spannung	10^{-8} Volt,
des Widerstandes	10^{-9} Ohm,
der Kapazität	10^9 Farad,
der Induktivität	10^{-9} Henry.

das Ohm. Sie entsprechen dem Stande der Meßtechnik zur Zeit der Gesetzgebung (1898). Die so definierten Einheiten heißen die *gesetzlichen oder internationalen Einheiten*.

Das Deutsche Reichsgesetz über die elektrischen Einheiten vom 1. Juni 1898 lautet:

1. „Die gesetzlichen Einheiten für elektrische Messungen sind das Ohm, das Ampere und das Volt.“

2. „Das Ohm ist die Einheit des elektrischen Widerstandes. Es wird dargestellt durch den Widerstand einer Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises, deren Länge bei durchweg gleichem, einem Quadratmillimeter gleich zu achtenden Querschnitt 106,3 cm und deren Masse 14,4521 g beträgt.“

3. „Das Ampere ist die Einheit der elektrischen Stromstärke. Es wird dargestellt durch den unveränderlichen elektrischen Strom, welcher bei dem Durchgange durch eine wässerige Lösung von Silbernitrat in einer Sekunde 0,001118 g Silber niederschlägt.“

4. „Das Volt ist die Einheit der elektromotorischen Kraft. Es wird dargestellt durch die elektromotorische Kraft, welche in einem Leiter, dessen Widerstand 1 Ohm beträgt, einen elektrischen Strom von 1 Ampere erzeugt.“

Es folgen weitere Bestimmungen über die Einheiten der Elektrizitätsmenge, der elektrischen Leistung und Arbeit, der Kapazität und Induktivität.

Mit dem Fortschritt der Meßtechnik hat sich ergeben, daß die internationalen Einheiten von den absoluten Einheiten ein wenig abweichen. Es ist 1 int. Ohm = 1,00046 abs. Ohm, 1 int. Amp. = 0,99993 abs. Amp., 1 int. Volt = 1,00039 abs. Volt. Zu Ziff. 3 des Gesetzes vgl. § 169. Zur Zeit schweben Erwägungen, die derzeit gültigen internationalen Einheiten durch die genauen absoluten Einheiten zu ersetzen, die obigen kleinen Abweichungen also zu beseitigen.

199. Elektrische Messung der Lichtgeschwindigkeit. Die Lichtgeschwindigkeit (kritische Geschwindigkeit) c kann aus rein elektrischen Messungen ermittelt werden. Es genügt dazu, daß man die Maßzahl der gleichen elektrischen Größe einmal im elektrostatischen, dann im elektromagnetischen Maßsystem bestimmt. Man kann dann c aus einer der in § 198 gegebenen Umrechnungsgleichungen berechnen. Ein Verfahren benutzt die Beziehung $C_s = c^2 C_m$. Man verwendet dazu einen Kondensator (Kugel-, Zylinder- oder Plattenkondensator), dessen Kapazität man aus seinen Abmessungen im elektrostatischen Maß genau berechnen kann, und erhält so C_s . Dann wird die Kapazität des gleichen Kondensators, z. B. nach der MAXWELLSchen Methode (§ 156), *gemessen*, und man erhält sie nunmehr, da sie ja aus derjenigen eines in internationalen Ohm geeichten Widerstandes berechnet wird, in internationalen Farad. Dieser Wert ist wegen des kleinen Unterschiedes zwischen dem internationalen und dem

absoluten Ohm in absolute Farad umzurechnen. Hieraus erhält man dann die Kapazität C_m im elektromagnetischen Maßsystem durch Multiplikation mit 10^9 gemäß Tabelle 26, § 198. Dann ist $c = \sqrt{C_s/C_m}$.

Die besten Messungen dieser Art haben $c = 2,9978 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ ergeben, in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem zuverlässigsten auf optischem Wege gewonnenen Wert (§ 264).

200. Magnetische Spannung. Magnetisches Potential. In Analogie zur elektrischen Spannung ist die *magnetische Spannung* U_m zwischen zwei Punkten A und B eines magnetischen Feldes definiert als die Arbeit, die zu leisten ist, um einen magnetischen Einheitspol von dem einen nach dem anderen Punkt zu befördern. Für einen Pol von der Stärke m ist also hierzu die Arbeit

$$A = m \cdot U_m \text{ erg} \quad (22)$$

erforderlich. Da aber auf den Pol m im Felde \mathfrak{H} die Kraft $\mathfrak{k} = m\mathfrak{H}$ wirkt, so ist diese Arbeit, wenn $d\mathbf{r}$ die einzelnen Elemente des zurückgelegten Weges

bedeuten, $A = -m \int_A^B \mathfrak{H} d\mathbf{r}$. (Das negative Vorzeichen rührt daher, daß ja positive

Arbeit zu leisten ist, wenn ein positiver Pol *gegen* die Feldrichtung bewegt wird.) Es folgt also, ganz analog zu Gl. (8) (§ 137), als magnetische Spannung zwischen den Punkten A und B

$$U_m = - \int_A^B \mathfrak{H} d\mathbf{r} \text{ Oersted} \cdot \text{cm}. \quad (23)$$

Dabei ist $\mathfrak{H} d\mathbf{r}$ das skalare Produkt der Vektoren \mathfrak{H} und $d\mathbf{r}$, also gleich $H dr \cos(H, dr)$, wenn (H, dr) der Winkel ist, den die Vektoren \mathfrak{H} und $d\mathbf{r}$ miteinander bilden (§ 21).

Wir betrachten einen geraden Draht, in dem ein Strom i fließt, und denken uns einen Magnetpol m einmal auf einem Kreise vom Radius r um den Draht herumgeführt. Die Feldstärke längs dieses Kreises beträgt nach Gl. (10), § 192, $H = 2i/r$, der vom Pol zurückgelegte Weg ist $2\pi r$. Es wird daher bei dieser Bewegung die Arbeit

$$A = \pm \frac{2i}{r} \cdot 2\pi r \cdot m = \pm 4\pi m i \text{ erg}$$

geleistet, + oder —, je nachdem, ob der Pol in der einen oder andern Richtung herumgeführt wird. Bei n -facher Umföhrung beträgt die Arbeit $A = \pm n \cdot 4\pi m i$. Die Arbeit ist also vom Radius des Kreises unabhängig, und sie ist überhaupt vom Wege unabhängig, auf dem man den Pol n -mal um den Strom herumführt. Denn man kann sich jeden beliebigen Weg aus beliebig kleinen Wegstücken zusammengesetzt denken, die entweder Teile von Kreisen um den Draht sind oder radial oder parallel zum Draht verlaufen. Arbeit wird aber nur auf den ersteren Anteilen geleistet. Auch von der geometrischen Gestalt des Leiters ist die Arbeit unabhängig.

Aus dieser Überlegung folgt aber, daß die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten im magnetischen Felde eines Stromes keine eindeutig bestimmte Größe ist. Sie ist davon abhängig, ob der Weg, längs dessen die Spannung gemessen wird, den Strom nicht oder ein oder mehrere Male umfaßt. Es sei U_m^0 die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten, gemessen auf einem beliebigen Wege, der den Strom i nicht umfaßt ($n = 0$). Dann ist bei n -facher Umfassung des Stromes die magnetische Spannung

$$U_m = U_m^0 \pm 4\pi i \cdot n. \quad (24)$$

(Vorzeichen je nach der Umlaufsrichtung). Enthält der Raum mehrere stromführende Leiter oder erfüllen gar Ströme ausgedehnte Raumteile stetig, so wird die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten in noch höherem Grade unbestimmt.

Die Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung ist eine Folge der Tatsache, daß die magnetischen Kraftlinien stets in sich geschlossen sind. Man sieht das am leichtesten, wenn man bedenkt, daß man die Überführung eines Magnetpols von einem Ort des Feldes nach einem anderen an einem beliebigen Punkte unterbrechen, hier einen ein- oder mehrmaligen Umlauf um einen oder mehrere Ströme einlegen und dann den Weg zum Endpunkte fortsetzen kann.

Als *magnetisches Potential* in einem Punkt eines magnetischen Feldes definiert man, analog zum elektrischen Potential, die magnetische Spannung, die dieser Punkt gegen einen andern Punkt besitzt, dem man willkürlich das Potential 0 zuschreibt. Infolge der Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung ist auch das Potential im magnetischen Felde eines Stromes vieldeutig gemäß Gl. (24). Man kann es jedoch eindeutig machen, wenn man durch Festsetzung einer „Sperrfläche“ das Umfassen der vorhandenen Ströme verbietet. So kann man z. B.

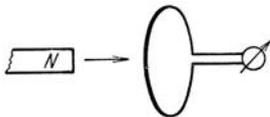


Abb. 356. Induktion im Felde eines Magneten.

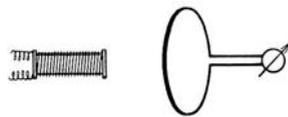


Abb. 357. Induktion im Felde einer Spule.

bei einer einfachen Stromschleife vorschreiben, daß eine von der Schleife berandete Fläche nicht durchschritten werden darf. Bei den Feldern von Dauermagneten ist die Eindeutigkeit des Potentials durch die Undurchdringlichkeit der Magnete von selbst erreicht.

Ein Verfahren zur Messung magnetischer Spannungen s. § 210.

201. Grundtatsachen der elektromagnetischen Induktion. Wird einem geschlossenen Leiterkreise, in den ein Galvanometer eingeschaltet ist, der eine Pol eines Magneten genähert (Abb. 356), so erkennt man an einem Ausschlag des Galvanometers, daß *während der Dauer der Bewegung* im Kreise ein elektrischer Strom fließt. Entfernt man den Magnetpol wieder, so fließt ein Strom in umgekehrter Richtung. Genau die gleichen Erscheinungen treten ein, wenn man den Leiterkreis relativ zum Magnetpol bewegt. Auch kann man sich statt eines Magneten einer stromdurchflossenen Spule bedienen (Abb. 357), deren Enden ja den Polen eines Stabmagneten magnetisch äquivalent sind.

Diese von FARADAY im Jahre 1831 entdeckte Erscheinung heißt *elektromagnetische Induktion* oder auch kurz Induktion, ein infolge von Induktion auftretender Strom ein *Induktionsstrom*. Wenn in einem Leiterkreise, in dem Induktion auftritt, und in dem sich keine Stromquelle der uns bisher bekannten Art befindet, ein Strom fließt, so haben wir einen solchen Leiterkreis als den Sitz einer elektromotorischen Kraft von uns bisher unbekannter Art, einer *induzierten elektromotorischen Kraft*, anzusehen.

Bei der Bewegung eines Magnetpols relativ zu einem Leiterkreise tritt am Ort des letzteren nichts anderes ein, als eine *zeitliche Änderung des magnetischen Feldes*. Diese zeitliche Änderung ist also offenbar für das Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft verantwortlich. Dementsprechend ist es bei Benutzung der in Abb. 357 dargestellten Vorrichtung gar nicht nötig, Spule und Leiterkreis relativ zueinander zu bewegen. Eine Induktionswirkung tritt im Leiterkreise auch dann auf, wenn er selbst und die Spule ruhen, aber die Stromstärke und damit das magnetische Feld der Spule in ihrem Betrage ver-

ändert oder in ihrer Richtung umgekehrt wird. Verstärken des Stromes wirkt wie Annähern der Spule, Schwächen oder Umkehren wie Entfernen. Beim Einschalten des Stromes ist der Ausschlag des Galvanometers ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet, wie beim Ausschalten; beim Umkehren ist der Ausschlag doppelt so groß wie beim einfachen Ein- und Ausschalten.

Bei den bisher besprochenen Induktionsversuchen lag stets der Fall vor, daß sich der Leiterkreis, in dem Induktion stattfindet, im Bereiche des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes befindet. Denn von dem Magnetpol und von der stromdurchflossenen Spule gehen magnetische Kraftlinien aus, die den ganzen umgebenden Raum erfüllen. Nunmehr wollen wir einen Fall kennenlernen, bei dem sich dieser Leiterkreis in einem Gebiet befindet, das nach unserer bisherigen Kenntnis frei von magnetischen Feldern ist. In Abb. 358 ist eine ringförmig geschlossene Spule dargestellt, in der ein zeitlich veränderlicher Strom fließt. Das Feld innerhalb dieser Spule können wir nach Gl. (11), § 192, berechnen. Es ist auch zeitlich veränderlich, wie der Strom in der Spule. Nach unserer bisherigen Kenntnis ist der Außenraum der Spule feldfrei (§ 191). Aber auch in diesem Falle tritt bei jeder Änderung der Stärke oder Richtung des in der Spule fließenden Stromes in einer außen um die Ringspule gelegten Induktionsspule ein Induktionsstrom auf. Es sieht zunächst so aus, als liege hier eine Fernwirkung des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes vor. Daß dies nicht der Fall ist, werden wir in § 208 sehen.

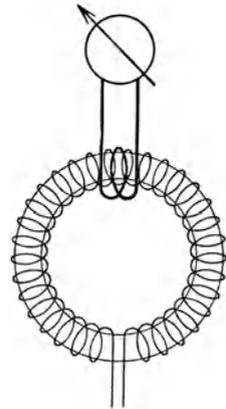


Abb. 358. Induktion durch eine ringförmig geschlossene Spule.

Mit den besprochenen Fällen ist die Zahl der verschiedenen Arten von Induktion noch nicht erschöpft. Induktion findet auch statt, wenn sich die Größe der von einem Leiterkreis umrandeten Fläche ändert, während sich dieser in einem zeitlich konstanten magnetischen Felde befindet, oder wenn der Leiterkreis in einem magnetischen Felde gedreht wird. Wir werden diese beiden Fälle in § 203 genauer erörtern.

Für die Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft gilt das **LENZsche Gesetz**: *Die induzierte elektromotorische Kraft ist stets so gerichtet, daß das magnetische Feld eines durch die elektromotorische Kraft erzeugten Induktionsstromes der Ursache der Induktion entgegenwirkt.*

Wird die Induktion durch die Bewegung von Leitern oder Leiterteilen im magnetischen Felde eines Magneten oder einer stromdurchflossenen Spule hervorgerufen, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes so gerichtet, daß es diese Bewegung hemmt. Wird ein Pol auf eine Drahtschleife hin bewegt, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes so gerichtet, daß der Pol von der Schleife abgestoßen, seine Bewegung also gehemmt wird. Umgekehrt wird der Pol, wenn er sich von der Drahtschleife entfernt, durch das magnetische Feld des Induktionsstromes in Richtung auf die Schleife angezogen, also auch wieder in seiner Bewegung gehemmt. Dem entspricht es, daß die Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft beim Nähern des Poles das umgekehrte Vorzeichen hat wie beim Entfernen. Nachdem man so die Richtung des magnetischen Feldes des Induktionsstromes ermitteln kann, kann man durch Umkehrung der Schraubenregel des § 191 auch die Richtung des Induktionsstromes bestimmen.

Ist die Ursache der Induktion die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes innerhalb der von dem Leitersystem umrandeten Fläche, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes stets so gerichtet, daß es diese zeitliche Änderung

verlangsamt. Wird das induzierende magnetische Feld verstärkt oder z. B. durch Einschalten des Stromes in einer Spule überhaupt erst erzeugt, so ist das Feld des Induktionsstromes dem induzierenden Feld entgegengerichtet; wird das induzierende Feld geschwächt, so ist das Feld des Induktionsstromes ihm gleichgerichtet, so daß wieder die zeitliche Änderung verlangsamt wird.

Das LENZsche Gesetz ist eine Folge aus dem *Energieprinzip*. Fließt ein Induktionsstrom, so tritt in dem von ihm durchflossenen Leiter Stromwärme auf, und diese Energie kann nur auf Kosten der die Induktion bewirkenden Ursachen gehen. Liegt diese in der Bewegung eines Körpers (Magnet, Spule), so muß dieser kinetische Energie verlieren, also in seiner Bewegung gehemmt werden. Liegt die Ursache der Induktion lediglich in der zeitlichen Änderung der magnetischen Feldstärke, so müssen wir zur Erklärung die erst später (§ 231) zu behandelnde Tatsache vorwegnehmen, daß jedes magnetische Feld der Sitz magnetischer Energie ist. Um ein magnetisches Feld zu erzeugen, muß man Energie aufwenden, und diese Energie wird beim Verschwinden des Feldes wieder frei. Wird ein magnetisches Feld z. B. durch Einschalten eines Stromes in einer Spule erzeugt, und befindet sich im Raum ein Leitersystem, in dem Induktion stattfinden kann, so kommt die von dem Spulenstrom gelieferte

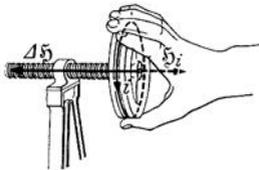


Abb. 359. Ermittlung der Richtung des Induktionsstromes aus der Schraubenregel und dem LENZschen Gesetz.

Energie nicht nur dem magnetischen Felde zugute, sondern ein Teil dieser Energie wird durch Vermittlung des Feldes zur Erzeugung des Induktionsstromes verbraucht, geht also dem Felde verloren, das infolgedessen langsamer anwächst, als es ohne das Auftreten des Induktionsstromes anwachsen würde. Wird der Spulenstrom ausgeschaltet, so geht ein Teil der Energie des zusammenbrechenden magnetischen Feldes in das Leitersystem über und liefert die Energie für den Induktionsstrom.

Abb. 359 zeigt die Anwendung unserer Schraubenregel auf das LENZsche Gesetz. Ist ΔH die Zunahme der magnetischen Feldstärke in der Zeit Δt , so fließt in einem die Kraftlinien des Feldes umschlingenden Stromkreis ein Induktionsstrom i , der so gerichtet sein muß, daß sein eigenes magnetisches Feld H_i der Feldzunahme ΔH entgegengerichtet ist. Dann folgt aus der Schraubenregel (Abb. 336) die in Abb. 359 dargestellte Richtung des Induktionsstromes.

Aus dem LENZschen Gesetz folgt ohne weiteres, daß beim Einschalten oder Verstärken des Stromes in einem Draht in einem ihm parallelen Draht ein Induktionsstrom auftritt, der dem induzierenden Strom entgegengerichtet ist, beim Ausschalten oder Schwächen ein solcher, der ihm gleichgerichtet ist.

202. Das FARADAYSche Induktionsgesetz. Die Fülle der soeben aufgezählten Induktionserscheinungen scheint zunächst verwirrend. Trotzdem kann ihre Gesamtheit durch ein einfaches Gesetz, das *FARADAYSche Induktionsgesetz*, ausgedrückt werden. Wir betonen dabei noch einmal ausdrücklich, daß sich alle Vorgänge *im Vakuum* abspielen sollen. Es sei H der Betrag der jeweils herrschenden magnetischen Feldstärke, F die von einem Leiterkreis umrandete Fläche, dF ein Element dieser Fläche, (dF, H) der Winkel, den die am Ort von dF herrschende Feldstärke mit dF bildet. Dabei ist unter F die *Windungsfläche* des Leiterkreises zu verstehen. Besteht der Leiterkreis aus n Windungen, so ist F n -mal so groß, als wenn er nur aus einer Windung besteht. Dann ist die im Leiterkreis induzierte elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \int H \sin(dF, H) dF = \frac{d\Phi}{dt} \text{ e.m.E.} \quad (26)$$

Dabei ist das Integral über den ganzen Bereich der Fläche F zu erstrecken. Der Betrag der Größe

$$\Phi = \int H \sin(dF, H) dF \quad (27)$$

ist, wie man leicht sieht, gleich der Zahl der Kraftlinien des Feldes H , die durch die Fläche F hindurchtreten. Unter der Voraussetzung, daß sich alle Vorgänge im Vakuum (bzw. in Luft) abspielen, ist Φ der *magnetische Fluß*, der durch die Fläche F hindurchtritt. Wir können deshalb das Induktionsgesetz in der einfachen Form aussprechen: *Die induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Windungsfläche des Leiterkreises.* Eine solche zeitliche Änderung des Flusses tritt in der Tat bei allen oben beschriebenen Versuchen ein.

Wir wollen aus der Gl. (26) einige Sonderfälle ableiten.

1. Ein ebener Leiterkreis befinde sich in einem zeitlich konstanten, homogenen Felde H , d. h. H hat in der ganzen Fläche F gleichen Betrag und gleiche Richtung, und $\sin(dF, H)$ hat überall den gleichen Wert $\sin(F, H)$. Dann folgt aus Gl. (26)

$$\mathcal{E} = H \sin(F, H) \frac{dF}{dt} \text{ e.m.E.} \quad (28a)$$

Es ist dies der Fall, daß sich ein Leiterkreis in einem zeitlich konstanten, homogenen magnetischen Felde befindet und daß sich die Größe seiner Windungsfläche zeitlich ändert.

2. Ein ebener Leiterkreis drehe sich in einem zeitlich konstanten und homogenen Felde H . Dann ist lediglich $\sin(dF, H) = \sin(F, H)$ zeitlich veränderlich, und es folgt

$$\mathcal{E} = FH \frac{d}{dt} \sin(F, H) \text{ e.m.E.} \quad (28b)$$

3. Ein ebener Leiterkreis befinde sich in einem zeitlich veränderlichen, homogenen Felde H . Dann folgt entsprechend

$$\mathcal{E} = F \sin(F, H) \frac{dH}{dt} \text{ e.m.E.} \quad (28c)$$

Bei der Ableitung der Gl. (28a) und (28b) haben wir die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß der unter der Wirkung der induzierten elektromotorischen Kraft \mathcal{E} fließende Induktionsstrom nicht selbst Ursache eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes von merklicher Stärke ist. Denn dann würde dieses Feld zum Felde H hinzukommen, und das Gesamtfeld wäre nicht mehr zeitlich konstant. Es muß also entweder dF/dt bzw. $d \sin(F, H)/dt$ zeitlich konstant sein, oder der Widerstand des Leiterkreises muß so groß sein, daß der Induktionsstrom schwach und sein magnetisches Feld gegenüber dem Felde H zu vernachlässigen ist. Unter dieser Voraussetzung wollen wir nunmehr wenigstens einen Teil der Induktionserscheinungen auf uns bereits bekannte Erscheinungen zurückführen. (Die Rückwirkungen des eigenen Feldes des Induktionsstromes auf diesen selbst fallen unter den Begriff *Selbstinduktion*, § 211.)

203. Induktion in bewegten Leitern und Leiterteilen im konstanten, homogenen magnetischen Feld.

1. *Fall.* Wir betrachten ein rechteckiges Drahtsystem (Abb. 360), dessen eine Seite, der „Läufer“, mittels Gleitkontakten längs der beiden angrenzenden Seiten verschoben werden kann. Die Länge des Läufers sei l , die jeweilige Länge der beiden angrenzenden Seiten sei x . Am Ort des Leitersystems herrsche ein zur Leiterfläche senkrechtes, konstantes und homogenes magnetisches Feld H . Wir bewegen jetzt den Läufer mit der Geschwindigkeit v nach rechts. Auf einen positiven Ladungsträger ϵ im Läufer wirkt infolge der Bewegung des Läufers

im magnetischen Felde eine beschleunigende Kraft $\mathfrak{f} = \varepsilon [v \mathfrak{H}]$ [Gl. (13a)] senkrecht nach unten, wenn das magnetische Feld nach vorn gerichtet ist (Abb. 360a). Es entsteht also im Läufer ein senkrecht nach unten gerichteter Strom i (Abb. 360b) und infolgedessen im Leitersystem ein Kreisstrom von der Stärke i , der ihn im Sinne des Uhrzeigers umfließt.

Das Vorhandensein dieses Stromes im Läufer bewirkt aber, daß das magnetische Feld \mathfrak{H} an ihm eine der Bewegung entgegengerichtete Kraft \mathfrak{f}' erzeugt (Abb. 360b), entsprechend dem LENZschen Gesetz. Um die Geschwindigkeit v aufrechtzuerhalten, muß demnach am Läufer eine Kraft $-\mathfrak{f}'$ angreifen, die ihn gegen die Kraft \mathfrak{f}' verschiebt. Der Betrag der Kraft \mathfrak{f}' ist nach Gl. (18) (mit $\sin(i, H) = 1$) $k' = iHl$.

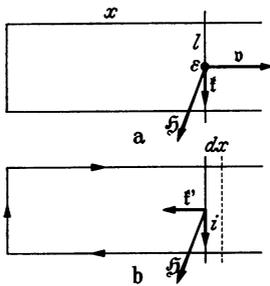


Abb. 360. Induktion in bewegten Leiterteilen.

Bei der Verschiebung des Läufers um die Strecke dx wird also die Arbeit $dA = iHl dx$ geleistet. Da der Betrag v der Geschwindigkeit v gleich $v = dx/dt$ ist, können wir statt dessen schreiben $dA = iHlv dt$. Diese am Läufer geleistete mechanische Arbeit muß sich in der Stromarbeit des Stromes i im Leitersystem wiederfinden. Diese beträgt in der Zeit dt nach § 163, Gl. (37), $\mathfrak{E}idt$, wobei \mathfrak{E} die elektromotorische Kraft im Stromkreise ist. Dann folgt $iHlv dt = i\mathfrak{E}dt$ oder

$$\mathfrak{E} = lvH \text{ e.m.E.}$$

Es tritt also infolge der Bewegung des Läufers im magnetischen Felde im Leitersystem eine elektromotorische Kraft auf. Nun ist $v = dx/dt$ und lx die jeweils vom Leitersystem umrandete Fläche F , also $lv = l dx/dt = dF/dt$. Damit erhalten wir schließlich

$$\mathfrak{E} = H \frac{dF}{dt} \text{ e.m.E.} \tag{29}$$

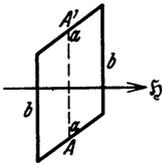


Abb. 361. Induktion in einem rotierenden Leitersystem.

Diese Gleichung ist ein Sonderfall der Gl. (28a) [mit $\sin(F, H) = 1$].

2. Fall. Wir betrachten ein rechteckiges Drahtsystem mit den Seiten a und b (Abb. 361), das sich in einem zeitlich konstanten, homogenen magnetischen Felde H befindet, und das um eine Achse AA' drehbar ist, die dem Seitenpaar b des Rechtecks parallel ist, die Seiten a halbiert und senkrecht auf der Feldrichtung steht. Der jeweilige Winkel, den die Fläche $F = ab$ des Rechtecks mit der Feldrichtung bildet, sei $(F, H) = \varphi$. Auf jede der Seiten b , in denen ein Induktionsstrom i fließt, wirkt nach Gl. (18) [mit $\sin(i, H) = 1$] die Kraft $k = iHb$ senkrecht zur Zeichnungsebene der Abb. 361. Die Komponente dieser Kraft in der jeweiligen Verschiebungsrichtung der Seiten b beträgt $k_s = iHb \cos \varphi$. Die Verschiebung in der Zeit dt beträgt $a/2 \cdot d\varphi$, da $a/2$ der Radius der Kreisbahn der Seiten b ist. Demnach beträgt die in der Zeit dt an beiden Seiten zusammen geleistete Arbeit

$$dA = 2 iHb \cos \varphi \cdot \frac{a}{2} d\varphi = abiH \frac{d \sin \varphi}{dt} dt.$$

Da nun wieder, wie oben, $dA = \mathfrak{E} i dt$ sein muß, so folgt mit $ab = F$ und $\varphi = (F, H)$

$$\mathfrak{E} = FH \frac{d \sin(F, H)}{dt} \text{ e.m.E.} \tag{30}$$

Wie man sieht, ist dies mit der Gl. (28b) identisch.

204. Unipolare Induktion. In allen bisher betrachteten Induktionsfällen haben wir unter der Fläche F die vom Leiterkreis umrandete Fläche, unter dF/dt die zeitliche Änderung der Größe dieser Fläche verstanden. Es gibt jedoch eine Induktionserscheinung, bei der zwar auch das FARADAYsche Induktions-

gesetz gilt, die Größe dF/dt jedoch anders zu deuten ist. Wir knüpfen an den Fall 1, § 203, Abb. 360, an, denken uns aber das Drahtrechteck um 90° gedreht, so daß seine Fläche senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Den Läufer ersetzen wir durch ein in der Zeichnungsebene liegendes Blech, das zwischen Gleitkontakten in dieser Ebene verschoben werden kann (Abb. 362). Senkrecht zur Zeichnungsebene herrsche ein konstantes magnetisches Feld H . Es besteht also, da die Fläche des Drahtrechtecks nicht von Kraftlinien durchsetzt wird [$\sin(F, H) = 0$], kein magnetischer Fluß in dieser Fläche. Wird jetzt das Blech mit der Geschwindigkeit v in seiner eigenen Ebene bewegt, so unterscheidet sich dieser Fall in keiner Weise von dem früher behandelten Fall des bewegten Läufers, und die gleichen Überlegungen wie oben führen auch hier zu der Gl. (29). Nur bedeutet hier dF/dt nicht die Änderung der vom Leiterkreis umrandeten Fläche, sondern dF ist das Stück der Fläche des bewegten Blechs, das in der Zeit dt an den Gleitkontakten vorbeistreicht. Man bezeichnet diesen Sonderfall als *unipolare Induktion* (ein Beispiel s. § 212). Auf der hier behandelten Erscheinung beruht eine ältere Form der Dynamomaschine, die *Unipolármáschine*.

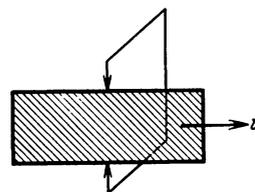


Abb. 362. Zur unipolaren Induktion.

205. Induktion in bewegten Leitern im zeitlich konstanten, inhomogenen magnetischen Felde. Ein kreisförmig geschlossener Drahtring vom Radius ρ liege so im Felde eines einzelnen Magnetpols m , daß seine Achse auf den Pol hin gerichtet ist (Abb. 363). Wir haben es jetzt mit einem zwar zeitlich konstanten, aber inhomogenen Felde zu tun, dessen Stärke und Richtung sich also von Ort zu Ort ändert. Die Koordinate des Kreismittelpunktes, gemessen vom Magnetpol ab auf der in der Achse liegenden Geraden, sei x , der Abstand der einzelnen Punkte des Kreises von m sei r . Wir wollen voraussetzen, daß x sehr groß gegen den Kreisradius sei, so daß der Öffnungswinkel des durch den Ring hindurchtretenden Bündels von Kraftlinien sehr klein ist.

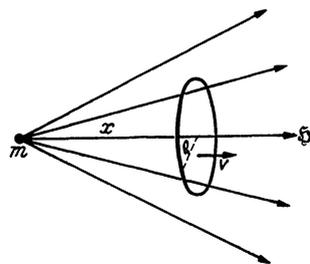


Abb. 363. Induktion bei Bewegung im inhomogenen magnetischen Felde.

Der Ring werde in Richtung seiner Achse mit der Geschwindigkeit $v = dx/dt$ bewegt. Auf ein Linienelement ds des alsdann im Kreisumfang fließenden Induktionsstromes i wirkt im Felde H die Kraft $dk = iH ds$, deren Komponente in der Verschiebungsrichtung, der x -Richtung, $dk_x = iH \sin(v, r) ds$ beträgt, wenn (v, r) der Winkel zwischen v und r ist. Die zur Verschiebungsrichtung senkrechten Kraftkomponenten heben sich am Kreisumfang auf. Am Umfang $2\pi\rho$ wirkt daher eine der Verschiebungsrichtung entgegengerichtete Kraft $k = 2\pi\rho iH \sin(v, r)$. Die Verschiebung in der Zeit dt beträgt $dx = vdt$, und demnach beträgt die in der Zeit dt geleistete Arbeit $dA = 2\pi\rho i v H \sin(v, r) dt$. Da wiederum $dA = \mathcal{E} i dt$ sein muß, so folgt

$$\mathcal{E} = 2\pi\rho v H \sin(v, r) \text{ e.m.E.} \tag{31}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Betrag von \mathcal{E} gleich dem Betrage der zeitlichen Änderung des Flusses Φ , also gleich $d\Phi/dt$ ist, wie es das Induktionsgesetz verlangt. Zur Berechnung des Flusses Φ durch den Ring können wir jede beliebige Fläche verwenden, die durch den Ring begrenzt wird. Im vorliegenden Falle ist hierzu die mit dem Radius $r = \sqrt{x^2 + \rho^2}$ um m beschriebene Kugelkalotte am besten geeignet, weil in ihr überall die gleiche Feldstärke $H = m/r^2$ herrscht. Die Fläche der Kalotte beträgt $F = 2\pi r^2 [1 - \cos(v, r)]$, und demnach ist $\Phi = FH = 2\pi r^2 H [1 - \cos(v, r)] = 2\pi m [1 - \cos(v, r)]$.

Nun ist $\sin(v, r) = \rho/r$, $\cos(v, r) = x/r = x/\sqrt{x^2 + \rho^2}$ und $d \cos(v, r)/dt = dx/dt \cdot \rho^2/(x^2 + \rho^2)^{3/2} = v \rho^2/r^3$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= -2\pi m \frac{d \cos(v, r)}{dt} = -2\pi m \frac{v \rho^2}{r^3} = -2\pi \rho v H \cdot \frac{\rho}{r} \\ &= -2\pi \rho v H \sin(v, r) \text{ e.m.E.} \end{aligned}$$

Das ist, vom Vorzeichen abgesehen, in Übereinstimmung mit Gl. (31). Das Vorzeichen ist für uns hier belanglos. Die Richtung des durch die induzierte elektromotorische Kraft erzeugten Induktionsstromes wird durch das LENZsche Gesetz bestimmt (§ 201).

Die Gl. (31) gilt, wie man leicht zeigen kann, nicht nur für kreisförmige, sondern für beliebig geformte Leitersysteme.

206. Induktion in ruhenden Leitern im zeitlich veränderlichen magnetischen Felde. Die von uns zuletzt betrachteten Induktionserscheinungen bezogen sich sämtlich auf solche Fälle, in denen sich ein Leiterkreis oder Teile eines solchen in einem *zeitlich konstanten*, homogenen oder inhomogenen Felde *bewegen*. Wir haben aber in § 201 gesehen, daß Induktion auch eintritt, wenn sich ein Leiterkreis in einem *zeitlich veränderlichen* magnetischen Felde *in Ruhe befindet*. Es ist dort bereits gesagt worden, daß eine Bewegung eines Magnetpols gegenüber einem Leiterkreis in diesem die gleiche Wirkung hervorruft wie eine entsprechende Bewegung des Leiterkreises gegenüber dem Magnetpol. Es kommt also nur auf die *relative Bewegung* der beiden an, eine Tatsache, die auch aus dem Relativitätsprinzip (Kap. 8) folgt. Wir schließen daraus, daß die Gl. (31) nicht nur dann gilt, wenn, wie in § 205 angenommen, der Leiterkreis im Magnetfelde bewegt wird, sondern auch dann, wenn der Magnetpol gegenüber dem ruhenden Leiterkreis bewegt wird. An die Stelle eines Magnetpols können wir uns als Ursache des magnetischen Feldes auch eine stromdurchflossene Spule gesetzt denken, die wir gegenüber einem ruhenden Leiterkreis bewegen. Auch dann kann das Auftreten einer Induktionswirkung, genau wie bei der Bewegung eines Magnetpols aus dem LAPLACESchen Gesetz hergeleitet werden. In diesen Fällen liegt dann eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldes innerhalb der von dem ruhenden Leiterkreis umrandeten Fläche vor, d. h. es handelt sich um den Anteil dH/dt in der zeitlichen Änderung $d\Phi/dt$ des Flusses. Wir können nun aber noch einen Schritt weiter gehen, indem wir diese zeitliche Änderung nicht dadurch eintreten lassen, daß wir eine stromdurchflossene Spule und einen Leiterkreis relativ zueinander bewegen, sondern indem wir beide an ihrem Ort lassen und die Stromstärke in der Spule und damit die magnetische Feldstärke verändern. Hier stehen wir vor einer ganz neuen Tatsache, die wir nicht mehr aus dem LAPLACESchen Gesetz herleiten können. Wir sehen also, daß das Induktionsgesetz für diejenigen Fälle, bei denen es sich um eine relative Bewegung von Leitern oder Leiterteilen gegenüber einem magnetischen Felde bzw.

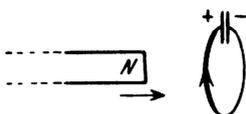


Abb. 364. Induktion im offenen Kreis.

dem Träger eines solchen handelt, aus dem LAPLACESchen Gesetz abgeleitet werden kann, daß es aber in seiner Geltung über diesen Bereich hinausgeht. Wir werden hierauf in § 208 zurückkommen.

207. Induktion im offenen Kreis. Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, daß eine Induktion in einem geschlossenen Leitersystem stattfindet, in dem dann unter der Wirkung der induzierten elektromotorischen Kraft ein während der ganzen Dauer des Induktionsvorganges fließender Induktionsstrom bestehen kann. Es findet aber Induktion auch in offenen Kreisen statt. In Abb. 364 ist eine Drahtschleife dargestellt, die durch einen eingeschalteten Kondensator

unterbrochen ist. Nähert man z. B. der Schleife den einen Pol eines Magneten, so tritt auch hier selbstverständlich eine Kraftwirkung auf die einzelnen Ladungsträger im Draht, also eine elektromotorische Kraft auf. Es fließt zunächst ein Induktionsstrom, und das hat zur Folge, daß der Kondensator sich aufzuladen beginnt. Das dauert so lange, bis die Spannung zwischen den Platten des Kondensators ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist wie die induzierte elektromotorische Kraft. Dann hört der Induktionsstrom auf zu fließen, aber der Kondensator behält seine Spannung, solange die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes konstant bleibt. Hört diese auf, so entlädt sich der Kondensator wieder, und es fließt ein Strom von umgekehrter Richtung.

208. Überblick über die Induktionserscheinungen. Das elektromagnetische Feld. Die Tatsache, daß das FARADAYSche Induktionsgesetz die Gesamtheit der Induktionserscheinungen deckt, darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß es zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Induktionserscheinungen gibt.

1. *Ein Leiterkreis oder Teile eines solchen bewegen sich in geeigneter Weise in einem zeitlich konstanten, homogenen oder inhomogenen magnetischen Felde.* Diesen Typus konnten wir ohne zusätzliche Annahmen auf Grund des LAPLACEschen Gesetzes erklären.

2. *Ein ruhender Leiterkreis wird von den Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes durchsetzt.* Wenn wir auch das Eintreten von Induktionswirkungen in einem Sonderfall dieser Art im Anschluß an die Erscheinungen der 1. Art einleuchtend machen konnten (§ 206), so ist doch eine allgemeine Zurückführung dieser Erscheinungen auf uns bisher bekannte Tatsachen nicht möglich. Hier liegt eine *ganz neue physikalische Tatsache* vor. Am deutlichsten wird dies an Hand des in Abb. 358 dargestellten Versuchs mit der ringförmig geschlossenen Spule. Die primäre Ursache der Induktion in einer um die Ringspule gelegten Drahtschleife ist die zeitliche Veränderung der Stromstärke in der Ringspule und das von diesem Strom unmittelbar erzeugte zeitlich veränderliche magnetische Feld. Dieses aber erstreckt sich lediglich über den Innenraum der Ringspule. In den Außenraum, in dem sich die Drahtschleife befindet, treten keine Kraftlinien dieses Feldes. Trotzdem erfolgt in diesem Raumbereich eine Induktionswirkung, in Übereinstimmung mit dem FARADAYSchen Induktionsgesetz. Denn dieses verlangt für das Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft lediglich eine Änderung des magnetischen Flusses durch die vom Leiter umrandete Fläche und läßt dabei auch den Fall zu, daß sich der Leiter selbst in einem feldfreien Raum befindet.

Wir sehen also, daß die Wirkung eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes nicht auf den Raum beschränkt ist, in dem dieses Feld besteht, sondern sich auch auf benachbarte Raumbereiche erstreckt. Damit stehen wir vor einer grundlegend wichtigen Erkenntnis.

Wenn wir von dem Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft sprechen, so ist das nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß die elektrischen Ladungsträger bei der Induktion eine Beschleunigung erfahren, die von einer an ihrer Ladung angreifenden Kraft herrührt. Als Ursache solcher Beschleunigungen kennen wir bereits das *elektrische Feld* (§ 136). Nach dem Grundsatz, daß wir aus der gleichen Wirkung auch auf die gleiche Ursache zu schließen haben, folgt, daß bei der Induktion in dem betroffenen Leiter ein *induziertes elektrisches Feld* auftritt. Dieses elektrische Feld unterscheidet sich aber in einem wesentlichen Punkte von den uns bisher bekannten elektrischen Feldern, den elektrostatischen Feldern von Ladungen. Die Kraftlinien dieser Felder beginnen auf einer positiven und endigen auf einer negativen Ladung, sind also nicht geschlossen und haben Anfang und Ende. In einem Leiterkreis jedoch, in dem eine induzierte elektromotorische Kraft besteht, haben die

elektrischen Kraftlinien weder Anfang noch Ende, sie laufen in sich selbst zurück. Die Kraftlinien eines induzierten elektrischen Feldes sind *ringförmig geschlossen*, und zwar umschlingen sie die Kraftlinien des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes, wie man besonders deutlich an dem in Abb. 363 dargestellten Versuch erkennt. Aus dieser Tatsache hat MAXWELL den folgenden allgemeinen Schluß gezogen:

Die Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes sind stets von geschlossenen elektrischen Kraftlinien ringförmig umgeben.

Diese Behauptung gilt ganz allgemein, nicht nur in dem Fall, daß ein Leiterkreis vorhanden ist, in dem wir das Auftreten des Feldes am Fließen eines Induktionsstromes nachweisen können. Die elektrischen Kraftlinien sind stets vorhanden, auch in Dielektrika und im leeren Raum. Damit ist jetzt auch der Induktionsversuch mit der Ringspule (Abb. 358) verständlich gemacht. Das zeitlich veränderliche magnetische Feld des Spulenstroms selbst ist zwar auf das Spulenninnere beschränkt, aber der Außenraum ist trotzdem nicht feldfrei. Er ist erfüllt von den elektrischen Kraftlinien, die das zeitlich veränderliche magnetische Feld ringförmig umgeben, und diese elektrischen Kraftlinien sind die unmittelbare Ursache für die Induktionswirkung im Außenraum.

Nach MAXWELL besteht nun zwischen zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern ein vollkommener Parallelismus. In Umkehrung des obigen Satzes gilt auch der folgende:

Die Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes sind stets von geschlossenen magnetischen Kraftlinien ringförmig umgeben.

Betrachten wir einen zeitlich veränderlichen elektrischen Strom mit seinem zeitlich veränderlichen magnetischen Feld und den geschlossenen elektrischen Kraftlinien, die dessen Kraftlinien umschlingen, so wird in der Regel auch dieses induzierte elektrische Feld zeitlich veränderlich sein, also selbst wieder zum Auftreten neuer zeitlich veränderlicher magnetischer Felder Veranlassung geben usw. Der zeitlich veränderliche Strom erzeugt also in seiner Umgebung ein zeitlich veränderliches elektrisches und magnetisches Feld, ein *elektromagnetisches Feld*, dessen elektrische und magnetische Anteile in einer gegenseitigen Wechselwirkung stehen (§ 232).

Ändert sich irgendwo im Raum ein elektrisches oder magnetisches Feld, so wollen wir von einer *elektromagnetischen Störung* sprechen. Wie wir gesehen haben, macht sich das Vorhandensein einer solchen Störung auch außerhalb des ursprünglichen Raumbereichs bemerkbar, und streng genommen wird der ganze umgebende Raum bis in beliebige Entfernung von dieser Störung betroffen, wenn auch die Stärke der Wirkung mit der Entfernung abnimmt. Das vom Störungsbereich ausgehende *elektromagnetische Feld*, bestehend aus den sich gegenseitig ringförmig umschlingenden Kraftlinien des elektrischen und magnetischen Feldes, breitet sich also im Raume aus, und zwar erfolgt diese Ausbreitung *mit endlicher Geschwindigkeit*. Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Störung beträgt im leeren Raum fast genau $3 \cdot 10^{10}$ cm · sec⁻¹*, sie ist also gleich der in § 192 eingeführten Konstanten *c*, der *Lichtgeschwindigkeit* oder *kritischen Geschwindigkeit*. Ihre Identität mit der Lichtgeschwindigkeit hat zuerst auf die Tatsache hingewiesen, daß das Licht nichts anderes ist als die Ausbreitung einer elektromagnetischen Störung (§ 262).

Im Gegensatz zu den elektrostatischen Feldern, die man als wirbelfreie Felder bezeichnet, sind elektrische Felder mit geschlossenen Kraftlinien *nicht wirbelfrei* (vgl. § 74). Infolgedessen gelten hier die gleichen Überlegungen, die wir in § 200 bezüglich des Potentials in einem magnetischen Felde angestellt haben. *Das elektrische Potential in den Punkten eines nicht wirbelfreien elektrischen Feldes ist also nicht eindeutig definiert.*

209. Verschiebungsströme. Wir betrachten einen Kondensator, der die Ladung e trägt und dessen Platten nunmehr über einen Widerstand R verbunden werden (Abb. 365). Dann tritt zweierlei ein: Der Kondensator entlädt sich über den Widerstand, in dem also ein Strom fließt, den wir als Leitungsstrom i_l bezeichnen wollen, und es tritt eine zeitliche Änderung der elektrischen Feldstärke E im Kondensator ein. Der Leitungsstrom i_l ist nicht geschlossen, sondern hat Anfang und Ende auf den beiden Platten des Kondensators. Gemäß der Definition der Stromstärke (§ 150) ist $i_l = de/dt$. Bei einem Plattenkondensator von der Fläche F beträgt die Kapazität $C = \epsilon F/4\pi d$ (§ 141 und 144), die Ladung bei der Spannung $U = Ed$, also $e = \frac{\epsilon F}{4\pi} E$, wenn E der Betrag der Feldstärke \mathfrak{E} im Kondensator ist. Daher ist $i_l = \frac{\epsilon F}{4\pi} dE/dt$ e.s.E.

Mit der Entladung des Kondensators sind aber zweitens magnetische Wirkungen verbunden. Nicht nur der Leitungsstrom i_l ist Träger eines magnetischen Feldes, dessen Kraftlinien den Leiter ringförmig umschließen, sondern auch die elektrischen Kraftlinien des zeitlich veränderlichen Feldes im Kondensator sind von magnetischen Kraftlinien ringförmig umgeben. Der Kondensator bildet also, trotz der Unterbrechung des Leitungsstromes i_l , keine Unterbrechung des Feldes der ringförmigen magnetischen Kraftlinien. Es setzt sich auch durch den vom Kondensator eingenommenen Raum hindurch fort. Das zeitlich veränderliche elektrische Feld hat also eine Wirkung, die derjenigen des Leitungsstromes ganz analog ist. Diese Tatsache veranlaßte MAXWELL, den Begriff des elektrischen Stromes zu erweitern, indem er den Begriff des *Verschiebungsstromes* einführte. Danach soll es ungeschlossene Ströme überhaupt nicht geben, und der an den Kondensatorplatten beginnende und endigende Leitungsstrom i_l soll im Innern des Kondensators durch einen ihm an Stärke gleichen Verschiebungsstrom i_v fortgesetzt gedacht werden. Nach dem oben Gesagten ist demnach

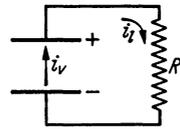


Abb. 365. Zur Einführung des Begriffs Verschiebungsstrom.

$$i_v = i_l = \frac{\epsilon F}{4\pi} \frac{dE}{dt} \text{ e.s.E.} \tag{32a}$$

Der Verschiebungsstrom im Kondensator ist also der zeitlichen Änderung der elektrischen Feldstärke im Kondensator proportional. Er ist um so größer, je schneller diese Änderung erfolgt. Der Begriff des Verschiebungsstromes gemäß Gl. (32a) ist jedoch nicht auf den Kondensator beschränkt, sondern findet in allen Fällen Anwendung, wo ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld besteht, also auch dann, wenn die Kraftlinien dieses Feldes nicht, wie im Kondensator, Anfang und Ende haben, sondern wenn sie, wie bei der Induktion, ringförmig geschlossen sind. In diesem Falle besteht dann ein ringförmig in sich geschlossener Verschiebungsstrom.

In der Gl. (32a) sind Stromstärke und elektrische Feldstärke beide in elektrostatischen Einheiten gemessen. Messen wir sie in elektromagnetischen Einheiten, so stellt man mit Hilfe der in § 198 angegebenen Beziehungen leicht fest, daß wir statt Gl. (32a) zu schreiben haben ($c =$ Lichtgeschwindigkeit)

$$i_v = \frac{\epsilon F}{4\pi c^2} \cdot \frac{dE}{dt} \text{ e.m.E.} \tag{32b}$$

Statt der Feldstärke \mathfrak{E} können wir nach § 144 auch die elektrische Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ (Betrag $D = \epsilon E$) einführen. Wir erhalten dann

$$i_v = \frac{F}{4\pi c^2} \cdot \frac{dD}{dt} \text{ e.m.E.} \tag{32c}$$

Als *Dichte des Verschiebungsstromes* bezeichnet man den Betrag von i_v , der durch 1 cm^2 einer zur Richtung des Verschiebungsstromes senkrechten Fläche hindurchtritt, $j_v = i_v/F$, so daß

$$j_v = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{dD}{dt} \text{ e.m.E.} \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (32d)$$

Abb. 366 stellt einen Kondensator dar, in dessen Innern sich ein zu den elektrischen Kraftlinien paralleler Leiter befindet. Ist der Kondensator geladen, so wird der Leiter durch Influenz zu einem elektrischen Dipol. Ändert sich die Ladung des Kondensators, so ändert sich auch das elektrische Moment des Dipols, und es fließt in ihm ein Strom, weil die Ladung an seinen Enden zu- oder abnimmt. Genau wie dieser Leitungsstrom von ringförmig geschlossenen magnetischen Kraftlinien umgeben ist, so ist es auch der im Kondensator herrschende Verschiebungsstrom, wenn der Leiter nicht vorhanden ist.

Eine entsprechende Erscheinung tritt immer dann auf, wenn sich ein Leiter im Bereiche eines Verschiebungsstroms befindet. Ein Verschiebungsstrom, den man durch Hineinbringen eines Leiters unterbricht, wird durch einen Leitungsstrom im Leiter geschlossen.

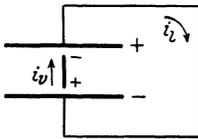


Abb. 366. Leiter im Verschiebungsstrom.

210. Messung magnetischer Feldstärken und Spannungen.

Mit Hilfe der Induktionswirkungen sind wir imstande, die Stärke eines homogenen magnetischen Feldes zu messen. Man bringt zu diesem Zweck eine mit einem ballistischen Galvanometer verbundene Induktionsspule so in das Feld, daß ihre Windungsfläche F senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes steht. Dann wird sie mit einem Ruck aus dem Felde herausgezogen. Das ballistische Galvanometer zeigt einen Ausschlag, der der Feldstärke proportional ist, die am ursprünglichen Ort der Spule herrscht.

Für den hier vorliegenden Fall gilt die Gl. (28c) (§ 202) mit $\sin(F, H) = 1$. Integrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} dt = F \int_{H_1}^{H_2} dH = F (H_2 - H_1).$$

Dabei sollen die Indizes 1 und 2 den Anfangs- und den Endzustand des Vorganges bezeichnen. Nun ist H_1 gleich der zu messenden Feldstärke H und $H_2 = 0$. Abgesehen von dem uns hier nicht interessierenden Vorzeichen erhalten wir also

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} dt = FH.$$

Der Widerstand von Spule und Galvanometer sei R . Die momentane Stromstärke in diesem Kreise sei $i = de/dt$, wobei de die in der Zeit dt durch jeden Querschnitt desselben hindurchtretende Elektrizitätsmenge bedeutet (§ 150). Dann ist $\mathcal{E} = Ri$ und

$$FH = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} dt = R \int_{t_1}^{t_2} i dt = R \int_{t_1}^{t_2} de = eR \quad \text{oder} \quad H = \frac{eR}{F}. \quad (33)$$

Hier bedeutet e die gesamte während des Induktionsvorganges durch das Galvanometer geflossene Elektrizitätsmenge. Dieser Elektrizitätsmenge ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers proportional (§ 236), sie kann also nach erfolgter Eichung des Galvanometers gemessen werden. Sind ferner F und R bekannt, so ergibt Gl. (33) die Feldstärke H in Oersted, wenn e und R in elektromagnetischen Einheiten gemessen werden. In den Einheiten des inter-

nationalen Maßsystems (§ 234) ergibt sich statt Gl. (33)

$$H = \frac{1}{\mu_0} \frac{eR}{F} \text{ Amp. W.} \cdot \text{cm}^{-1}$$

(e in Coulomb, R in Ohm gemessen, $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-9}$).

Auch die magnetische Spannung (§ 200) zwischen zwei Punkten eines magnetischen Feldes kann mit einer Induktionsspule, dem *magnetischen Spannungsmesser* von ROGOWSKI, und einem ballistischen Galvanometer gemessen werden. Der Spannungsmesser besteht aus einer langen Spule, die zur bequemeren Handhabung auf einen Lederriemen aufgewickelt ist (Abb. 367). Die Zuleitungen befinden sich in der Mitte, und der Draht ist nach beiden Seiten hin- und hergewickelt. Der Querschnitt der einzelnen Windungen sei F , und es entfallen auf jedes Zentimeter der Spulenlänge n Windungen. In Abb. 367 ist die Messung der magnetischen Spannung zwischen zwei Punkten des Feldes eines Elektromagneten dargestellt. Die Enden der Spulen werden an die betreffenden Punkte gebracht. Dann läßt man das Feld durch plötzliches Entfernen des Magneten verschwinden. Die hierbei in der Spule eintretende Induktion bewirkt einen Ausschlag in dem mit der Spule verbundenen ballistischen Galvanometer, der der magnetischen Spannung zwischen den Enden der Spule proportional ist.

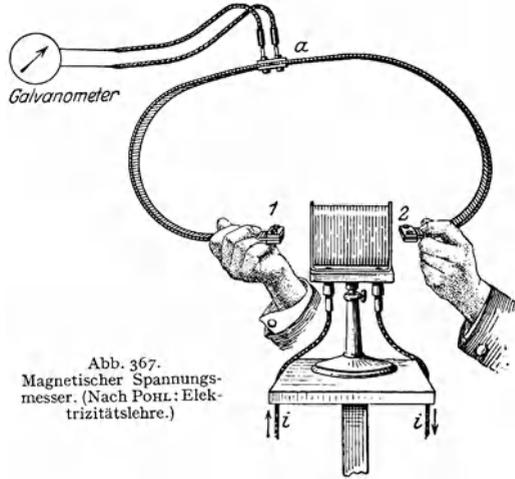


Abb. 367.
Magnetischer Spannungsmesser. (Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Wir denken uns die Spule in kleine Elemente der Länge Δs_1 , Δs_2 , usw. eingeteilt und bezeichnen die in der Achsenrichtung dieser Elemente

liegenden Komponenten der magnetischen Feldstärke mit H_1 , H_2 usw. Die Windungsfläche jedes Elementes beträgt $nF \Delta s_k$. Dann beträgt für jedes Element das Integral $\int \mathcal{E} dt$ beim Verschwinden des Feldes $nFH_k \Delta s_k$ und für die ganze Länge der Spule

$$\int \mathcal{E} dt = nF (H_1 \Delta s_1 + H_2 \Delta s_2 + \dots) = nF \sum H_k \Delta s_k$$

oder in Integralform

$$\int \mathcal{E} dt = nF \int H_s ds,$$

wobei das rechte Integral über die ganze Länge der Spule zu erstrecken ist.

Nun ist aber nach § 200 $-\int H_s ds = -\int \mathcal{H} dx = U_m$ die magnetische Spannung zwischen den Enden der Spule, so daß

$$\int \mathcal{E} dt = -nF U_m. \quad (34)$$

Ist nF — die Windungsfläche der Spule auf 1 cm ihrer Länge — bekannt, so kann man aus dem Betrage von $\int \mathcal{E} dt$, der, wie oben angegeben, aus dem Ausschlag des Galvanometers zu ermitteln ist, die magnetische Spannung berechnen.

In entsprechender Weise kann man die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten des magnetischen Feldes eines elektrischen Stromes messen. Man kann die in diesem Fall bestehende Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung

(§ 200) nachweisen, indem man den Spannungsmesser ein oder mehrere Male um den stromführenden Leiter herumlegt. In dem Sonderfall, daß sich die Enden des Spannungsmessers berühren, beträgt die Spannung bei n -facher Umschlingung des Leiters das n -fache von $4\pi i$ [Gl. (24)].

211. Induktivität. Die Stärke des von einem Strom i_1 erzeugten magnetischen Feldes H ist der Stromstärke i_1 proportional. Daher ist auch dH/dt proportional di_1/dt , wenn i_1 zeitlich veränderlich ist. Befindet sich in der Umgebung des den Strom i_1 führenden Leiters ein zweiter Leiter, so wird demnach in diesem eine elektromotorische Kraft \mathcal{E}_2 induziert, die nach dem FARADAYSchen Gesetz proportional di_1/dt ist,

$$\mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (35)$$

Das negative Vorzeichen wird deshalb gesetzt, weil beim Anwachsen der Stromstärke i_1 die Richtung von \mathcal{E}_2 der Spannung, die den Strom i_1 erzeugt, entgegengerichtet ist (§ 201). Den Koeffizienten L_{12} nennt man die *Gegeninduktivität* der beiden Leiter. Er ist durch ihre gegenseitige Lage und ihre geometrischen Verhältnisse bedingt. (Außerdem hängt er von der Permeabilität des Stoffes ab, in dem sich die beiden Leiter befinden, § 214.) Er ist nur in einfachen Fällen in geschlossener Form berechenbar.

Je nach der Größe der Gegeninduktivität L_{12} (in der Technik mit dem Symbol M bezeichnet) spricht man von enger oder loser *Koppelung* der beiden Leiterkreise. Sie ist um so stärker, je näher die beiden Kreise einander liegen, insbesondere bei paralleler Lage der Drähte in ihnen, am stärksten bei ineinander gewickelten Spulen.

Die Einheit der Gegeninduktivität im internationalen Maßsystem ist 1 *Henry* = 10^9 e.m.E. der Gegeninduktivität. Sie liegt dann vor, wenn eine gleichmäßige zeitliche Änderung von i_1 um 1 Amp \cdot sec $^{-1}$ im zweiten Leiter eine elektromotorische Kraft von 1 Volt erzeugt.

Wenn eine Änderung der Stromstärke in einem Stromkreis in einem benachbarten Leiter eine elektromotorische Kraft induziert, so geschieht das gleiche natürlich auch in den einzelnen Teilen des Stromkreises selbst. Das veränderliche eigene magnetische Feld des Stromkreises wirkt induzierend auf den Stromkreis selbst zurück (FARADAY 1835). Es tritt in ihm eine elektromotorische Kraft auf, die wir mit \mathcal{E}_i bezeichnen wollen. Nach dem LENZschen Gesetz (§ 201) ist sie stets so gerichtet, daß sie die zeitliche Änderung des im Stromkreise fließenden Stromes zu verlangsamen sucht. Sie ist daher bei einem Anwachsen der Stromstärke sowie beim Einschalten des Stromes, der an sich im Stromkreise herrschenden elektromotorischen Kraft (z. B. eines Akkumulators) entgegen-, beim Abnehmen der Stromstärke ihr gleichgerichtet. Wie bei der gegenseitigen Induktion, so ist auch bei dieser *Selbstinduktion* die induzierte elektromotorische Kraft \mathcal{E}_i der zeitlichen Änderung der Stromstärke proportional,

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt}. \quad (36)$$

Die Größe L heißt die *Induktivität* des Stromkreises. Sie ist von der Gestalt desselben abhängig, außerdem wie die Gegeninduktivität von dem Stoff, in den der Stromkreis eingebettet ist. Hier betrachten wir jedoch zunächst nur den Fall, daß sich der Stromkreis im Vakuum befindet. Die Induktivität ist besonders groß, wenn die einzelnen Teile des Stromkreises einander nahe und auf längere Strecken einander parallel sind, und wenn der Strom in diesen benachbarten Teilen in gleicher Richtung fließt, also besonders bei eng gewickelten Spulen.

Infolge der Selbstinduktion bildet sich in einem Stromkreis vom Widerstande R , in dem sich eine Stromquelle von der elektromotorischen Kraft \mathcal{E} befindet, nicht sofort die dem OHMSchen Gesetz entsprechende Stromstärke $i = \mathcal{E}/R$ aus. Vielmehr gilt nach dem zweiten KIRCHHOFFSchen Satz

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = iR. \tag{37}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet bei konstantem \mathcal{E} , wenn wir für $t = 0$ $i = 0$ setzen,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = i_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \tag{38}$$

Die Stromstärke ist also im ersten Augenblick, beim Einschalten ($t = 0$), gleich Null und steigt dann mit wachsendem t im allgemeinen außerordentlich schnell zum Endwert $i_0 = \mathcal{E}/R$, der dem OHMSchen Gesetz entspricht, an (Abb. 368a).

Ebenso verschwindet ein Strom i_0 nicht sofort beim Verschwinden der elektromotorischen Kraft \mathcal{E} , sofern man dafür sorgt, daß der Stromkreis auch dann noch geschlossen bleibt, sondern er klingt nach der Gleichung

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{39}$$

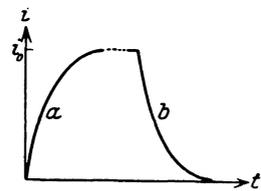


Abb. 368. Wirkung der Selbstinduktion.

ab (Abb. 368b), wobei jetzt t die Zeit seit dem Verschwinden der elektromotorischen Kraft bedeutet.

Die internationale Einheit der Induktivität ist die gleiche, wie die der Gegeninduktivität, das *Henry*. Ein Leiter hat die Induktivität 1 Henry, wenn eine in 1 sec gleichmäßig erfolgende Änderung der Stromstärke um 1 Ampere ($di/dt = 1 \text{ Amp} \cdot \text{sec}^{-1}$) in ihm eine induzierte elektromotorische Kraft von 1 Volt hervorruft.

Die Induktivität läßt sich nur in einfachen Fällen in geschlossener Form berechnen. Als Beispiel und zwecks späterer Anwendung berechnen wir die Induktivität einer langen, geraden Spule von der Länge l und dem Querschnitt q , die insgesamt n Windungen besitzt. $F = nq$ ist die Windungsfläche der Spule. Fließt in der Spule ein Strom i , so herrscht in ihr die magnetische Feldstärke $H = \frac{4\pi n i}{l}$ Oersted [§ 192, Gl. (11)]. Bei einer zeitlichen Änderung der Stromstärke wird daher in ihr nach § 202 eine elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E}_i = nq \frac{dH}{dt} = \frac{4\pi n^2 q}{l} \frac{di}{dt} \text{ e.m.E.}$$

induziert. Vergleichen wir dies mit der Definitionsgleichung der Induktivität, Gl. (36), so ergibt sich (auf das Vorzeichen kommt es hier nicht an)

$$L = \frac{4\pi q n^2}{l} \text{ e.m.E.} \tag{40}$$

(1 e.m.E. = 10^{-9} Henry). Der gleiche Ausdruck gilt auch für eine Ring-spule (Abb. 336).

In Schaltungsskizzen zeichnen wir eine Induktivität als eine verschlungene Linie zum Unterschied von einem durch eine Zickzacklinie dargestellten reinen OHMSchen Widerstand. Leiter, die sowohl Induktivität als auch OHMSchen Widerstand haben, zeichnen wir als eine Induktivität mit einem damit in Reihe geschalteten Widerstand.

212. Wirbelströme. Hautwirkung. Unter Wirbelströmen versteht man Induktionsströme in ausgedehnten Metallmassen, die von veränderlichen magnetischen Feldern erzeugt werden. Diese Induktionsströme können z. B. in den Eisenteilen elektrischer Maschinen beträchtliche Stärke haben. Zum Nachweis der Wirbelströme eignet sich das WALTENHOFENSche Pendel (Abb. 369). Eine dicke Kupferscheibe kann zwischen den Polen eines starken Elektromagneten frei hin- und herschwingen. Erregt man jetzt den Elektromagneten, so bleibt die Kupferscheibe infolge der Wirkung des magnetischen Feldes auf die in der Scheibe auftretenden Induktionsströme zwischen den Polen wie in einer sehr zähen Flüssigkeit stecken (Hemmung der Bewegung gemäß dem LENZschen Gesetz, § 201). Die kinetische Energie des Pendels geht in Stromwärme in der Kupferscheibe über. Diese läßt sich nur langsam zwischen den Polen herausziehen.

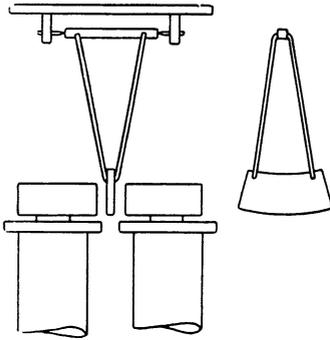


Abb. 369. WALTENHOFENSches Pendel.

Die Vermeidung der nutzlos Energie verbrauchenden Wirbelströme in den Eisenteilen elektrischer Maschinen ist eine wichtige technische Aufgabe. Man erreicht dies bis zu einem gewissen Grade, indem man diese Teile aus einzelnen voneinander isolierten Streifen aus Weicheisenblech herstellt, die so liegen, daß die Wirbelströme möglichst senkrecht zur Ebene dieser Bleche verlaufen. Vollkommen lassen sich aber Wirbelströme bei elektrischen Maschinen nicht vermeiden.

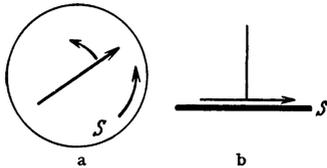


Abb. 370. Sog. Rotationsmagnetismus.

Abb. 370 stellt eine Kupferscheibe S dar, über der eine Magnetnadel drehbar aufgehängt ist. Wird die Kupferscheibe in Drehung versetzt, so wird die Magnetnadel im Sinne der Drehung mitgenommen. Die Erscheinung — von ihrem Entdecker ARAGO als *Rotationsmagnetismus* bezeichnet — beruht darauf, daß in der Scheibe infolge ihrer Bewegung im Felde der Magnetnadel Wirbelströme induziert werden, und zwar handelt es sich hier um einen Fall von *unipolarer Induktion* (§ 204). Nach dem LENZschen Gesetz muß die relative Drehung der Scheibe gegenüber der Magnetnadel, die ja die Ursache der Induktion bildet, durch das magnetische Feld der Wirbelströme gehemmt werden. Wird die Drehung der Scheibe konstant gehalten, so muß demnach die Magnetnadel die Neigung zeigen, der rotierenden Scheibe zu folgen.

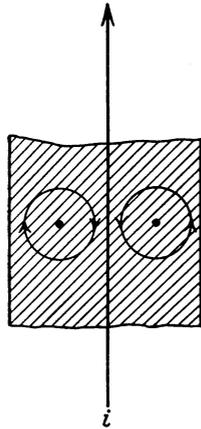


Abb. 371. Zur Theorie der Hautwirkung.

Sehr schnelle elektrische Schwingungen erzeugen auch in dem Leiter, den sie selbst durchfließen, merkliche Wirbelströme. Wir denken uns den durch einen Draht fließenden Strom in lauter einzelne parallele Stromfäden zerlegt. Jeder dieser Stromfäden ist von ringförmigen magnetischen Kraftlinien umschlossen, die auch im Innern des Leiters vorhanden sind. Ein solcher Stromfaden ist in Abb. 371 durch den geraden Pfeil dargestellt; die zwei Durchstoßpunkte einer seiner ringförmigen Kraftlinien durch die Zeichnungsebene sind durch zwei Punkte angedeutet. Ändert der Strom seine Stärke und Richtung, so ändert sich auch die Stärke und Richtung seines magnetischen Feldes. Infolgedessen ist jede magnetische Kraftlinie von induzierten elektrischen

Kraftlinien umgeben, die im Leiter elektrische Kreisströme um die Kraftlinien erzeugen. Der Umlaufssinn dieser Ströme ergibt sich an Hand der früher erwähnten Gesetzmäßigkeiten so, wie dies in der Abb. 371 dargestellt ist. Sie laufen an der Oberfläche des Leiters gleichsinnig mit der jeweiligen Stromrichtung, im Innern sind sie ihr entgegengerichtet. Daher ist die Stromdichte im Leiter nicht wie bei Gleichstrom überall die gleiche; sie wird in der Achse des Leiters geschwächt, an seiner Oberfläche verstärkt. Bei technischem Wechselstrom ist diese Wirkung nur sehr schwach. Dagegen ist sie außerordentlich stark bei schnellen Schwingungen. Bei diesen wird der Strom fast vollkommen in die äußersten Schichten des Drahtes verdrängt, daher die Bezeichnung als *Hautwirkung* oder *Skinneffekt*. Die inneren Teile des Drahtes werden zur Stromleitung kaum ausgenutzt, der Widerstand des Drahtes erscheint außerordentlich vergrößert (wie bei jeder Art von Selbstinduktion, um die es sich in einem allgemeinen Sinne hier auch handelt). Die Hautwirkung ist daher in jeder Hinsicht unerwünscht. Man schränkt sie dadurch ein, daß man Litzen aus dünnen, voneinander durch einen Lacküberzug isolierten Drähten verwendet, die derart verdreht sind, daß jeder Draht abwechselnd im Innern und an der Außenseite der Litze liegt (Hochfrequenzlitze).

II. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe.

213. Para-, Dia- und Ferromagnetismus. In Abb. 372 ist eine mit einer Stromquelle verbundene Spule dargestellt, welche von einer zweiten, mit einem Galvanometer verbundenen Spule umgeben ist. Das Ganze befindet sich zunächst im leeren Raum, so daß die Bedingungen vorhanden sind, die wir bisher vorausgesetzt haben. Wird der Stromkreis der ersten Spule geschlossen, so wird durch das in ihr entstehende magnetische Feld in der zweiten Spule eine elektromotorische Kraft induziert, die zu einem Ausschlag des Galvanometers führt, aus dem man wie in § 210, Gl. (33), die Feldstärke H in der Spule berechnen kann. Nunmehr werde in die erste Spule ein Kern aus irgendeinem Stoff eingeführt und der Versuch wiederholt. Dann ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers größer oder kleiner als vorher, und demnach erhalten wir auf Grund der gleichen Berechnung für das Feld im Innern der Spule einen größeren oder kleineren Wert als im leeren Raum. Wir müssen also daraus den Schluß ziehen, daß die Einführung des Stoffes in das Innere der Spule das Auftreten eines zusätzlichen Feldes zur Folge hat, das dem nach Gl. (II), § 192, berechneten Felde der Spule je nachdem gleich- oder entgegengerichtet ist, es entweder verstärkt oder schwächt. (Der vorstehende Versuch ist nur als ein Gedankenexperiment anzusehen. Bei den meisten Stoffen ist der Unterschied gegen das Vakuum zwar tatsächlich vorhanden, aber so außerordentlich klein, daß er durch den geschilderten Versuch nicht festzustellen wäre.)

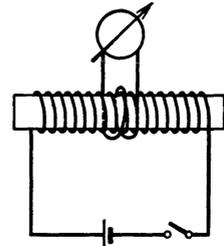


Abb. 372. Zur Einführung der Induktion \mathfrak{B} .

Je nach ihrem Verhalten in dieser Beziehung teilt man die Stoffe in drei Gruppen ein. Bei den *diamagnetischen* Stoffen tritt eine *Schwächung*, bei den *paramagnetischen* Stoffen eine *Verstärkung* des Feldes ein. Eine ganz besondere Stellung haben schließlich die *ferromagnetischen* Stoffe, zu denen das Eisen gehört, welche ebenfalls eine *Verstärkung* hervorrufen, die aber außerordentlich viel größer ist als bei den paramagnetischen Stoffen, und bei denen die Verhältnisse überhaupt viel verwickelter sind.

214. Induktion, Permeabilität, Suszeptibilität. Wir wollen das durch das Einbringen des Stoffes hervorgerufene zusätzliche magnetische Feld mit \mathfrak{S}'

bezeichnen. Unter \mathfrak{H} verstehen wir nach wie vor dasjenige Feld, welches in der Spule ohne das Vorhandensein des Stoffes herrschen würde [Gl. (11), § 192]. Tatsächlich besteht also im Innern der stoffgefüllten Spule das magnetische Feld $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$. In den para- und ferromagnetischen Stoffen hat \mathfrak{H}' die gleiche Richtung wie \mathfrak{H} , in den diamagnetischen Stoffen entgegengesetzte Richtung. Der Betrag H' von \mathfrak{H}' ändert sich gleichsinnig mit demjenigen von \mathfrak{H} , d. h. die Stärke des zusätzlichen Feldes wächst, wenn das Feld \mathfrak{H} wächst, und umgekehrt. Man setzt daher

$$\mathfrak{H}' = 4\pi\kappa\mathfrak{H} \quad \text{bzw.} \quad H' = 4\pi\kappa H. \quad (1)$$

Die Materialkonstante κ heißt die *Suszeptibilität* des Stoffes. Sie hat bei den para- und ferromagnetischen Stoffen positives, bei den diamagnetischen Stoffen negatives Vorzeichen, für das Vakuum den Betrag 0. Bei den para- und diamagnetischen Stoffen ist sie von der erregenden Feldstärke \mathfrak{H} unabhängig. Bei den diamagnetischen Stoffen ist sie fast temperaturunabhängig, bei den meisten paramagnetischen Stoffen der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Ihre Zahlenwerte sind bei diesen Stoffen, wie man aus der Tabelle 27 sieht, außerordentlich klein, von der Größenordnung 10^{-6} . Die Suszeptibilität der ferromagnetischen Stoffe ist außerordentlich viel größer, außerdem ist sie eine Funktion der erregenden Feldstärke \mathfrak{H} und hängt von der magnetischen Vorgeschichte des Stoffes ab. Besonders klein ist die Suszeptibilität der Gase.

Tabelle 27. Suszeptibilität κ und Massensuszeptibilität χ einiger Stoffe.

Diamagnetisch			Paramagnetisch		
	$\kappa \cdot 10^6$	$\chi \cdot 10^6$		$\kappa \cdot 10^6$	$\chi \cdot 10^6$
Wismut, 15° C. . .	— 15	— 1,47	Zinn, weiß	+ 0,3	+ 0,03
Wismut, flüssig . .	— 0,1	— 0,01	Aluminium, fest, 18° C.	+ 1,8	+ 0,65
Antimon, 18° C . .	— 6	— 0,9	Aluminium, flüssig,		
Quecksilber, 18° C .	— 2,6	— 0,19	1000° C		+ 0,5
Wasserstoff, Gas . .	— 0,00018	— 2	Sauerstoff, 0° C, 1 Atm.	+ 0,15	+ 105
Wasserstoff, flüssig.	— 0,19	— 2,7	Sauerstoff, flüssig,		
Kohlensäure, Gas . .	— 0,00084	— 0,42	— 185° C		+ 241
Argon, Gas	— 0,00164	— 0,45	Sauerstoff, fest, —253° C		+ 375

Wegen der Bedeutung von χ s. § 216.

Das beruht auf ihrer geringen Dichte (§ 216). Daher unterscheiden sich die magnetischen Erscheinungen in Luft, wie in der Vorbemerkung zu diesem Kapitel erwähnt, nur äußerst wenig von denjenigen im Vakuum.

Das gesamte magnetische Feld in einem magnetisierten Stoff beträgt also $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$. Man bezeichnet es mit dem Symbol \mathfrak{B} (Betrag B) und nennt es die *Induktion* in dem betreffenden Stoff. Es ist also

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}' = (1 + 4\pi\kappa)\mathfrak{H} = \mu\mathfrak{H} \quad \text{bzw.} \quad B = \mu H \quad (2)$$

wobei

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa. \quad (3)$$

Die Größe $\mu = 1 + 4\pi\kappa$ nennt man die *Permeabilität*. Bei den para- und diamagnetischen Stoffen unterscheidet sich μ nur sehr wenig von 1, und es ist bei den paramagnetischen Stoffen $\mu > 1$, bei den diamagnetischen Stoffen $\mu < 1$. Hingegen ist bei den ferromagnetischen Stoffen $\mu \gg 1$ und, wie κ , eine Funktion der erregenden Feldstärke \mathfrak{H} und von der magnetischen Vorgeschichte des Stoffes abhängig. Die Permeabilität des Vakuums ist gleich 1. Bei den anisotropen Stoffen, insbesondere den Kristallen hängen μ und κ von der Orientierung des Körpers im Felde ab.

Da wir die Induktion \mathfrak{B} als die wahre Feldstärke im magnetisierten Stoff betrachten, so könnten wir auch sie in der Einheit 1 Oersted angeben. Es ist aber üblich, sie in der Einheit 1 Gauss anzugeben, die die gleiche Dimension und Größe wie die Einheit 1 Oersted hat. Demnach sind die Größen μ und κ reine Zahlen. (Vgl. hierzu § 234.)

Zur Gl. (2) ist folgendes zu bemerken. Die Auffassung der Induktion \mathfrak{B} als Summe des Feldes \mathfrak{H} , wie es im Vakuum herrschen würde, und des zusätzlichen Feldes \mathfrak{H}' ist in allen Fällen erlaubt, in denen die Permeabilität μ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, also bei den para- und diamagnetischen Stoffen. Bei den großen Werten von μ , die bei den ferromagnetischen Stoffen auftreten, sind die Verhältnisse sehr viel verwickelter und können im einzelnen hier nicht behandelt werden (vgl. § 220). Aber auch in diesen Fällen bleibt die Auffassung von \mathfrak{B} als wahre Feldstärke im magnetisierten Stoff zutreffend.

215. Para- und Diamagnetismus. Der Para- und Diamagnetismus kann verhältnismäßig einfach gedeutet werden, wenn man den Atomen der Stoffe die Eigenschaft zuschreibt, Träger von atomaren Kreisströmen zu sein. Diese Vorstellung wurde zuerst von AMPÈRE, WEBER u. a. zur Deutung der Eigenschaften der ferromagnetischen Stoffe entwickelt. Bei den Atomen der diamagnetischen Elemente sind die Kreisströme so beschaffen, daß sich ihre magnetischen Momente an jedem Atom gegenseitig aufheben. Diese Atome besitzen also kein natürliches magnetisches Moment. Bei den Atomen der paramagnetischen Stoffe hingegen findet eine solche gegenseitige Kompensation der magnetischen Momente der einzelnen Kreisströme nicht statt, ihre Atome besitzen also ein natürliches magnetisches Moment. Sie sind von Natur magnetische Dipole. (Über die Größe der magnetischen Momente der Atome vgl. § 353.)

Dieser Tatsache zufolge beruht auch das Verhalten para- und diamagnetischer Stoffe im magnetischen Felde auf ganz verschiedenen Ursachen. Das Verhalten der *diagramagnetischen Stoffe* kann man auf Grund der Induktionsgesetze verstehen. Die atomaren Kreisströme, die ja dauernd ungeschwächt fließen, können wir uns als in widerstandslosen Strombahnen verlaufend denken. Ein diamagnetischer Körper befindet sich zunächst in einem feldfreien Raum. Wird jetzt in diesem Raum ein magnetisches Feld erregt, so entstehen in den gedachten widerstandslosen Strombahnen zusätzliche Induktionsströme, deren magnetisches Feld nach dem LENZschen Gesetz (§ 201) dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Genauer läßt sich der Vorgang dahin beschreiben, daß an einem Atom diejenigen Kreisströme, deren magnetisches Feld dem äußeren Feld entgegengerichtet ist, verstärkt, diejenigen, deren magnetisches Feld ihm gleichgerichtet ist, geschwächt werden, d. h. die in ersteren kreisenden Elektronen werden beim Entstehen des Feldes beschleunigt, die in letzteren kreisenden verlangsamt (vgl. § 307). Während sich nun die Wirkungen der ganz regellos gelagerten Kreisströme vorher aufhoben, ist das jetzt nicht mehr der Fall. Es überwiegt die Wirkung derjenigen Atome, deren magnetisches Moment *gegen* die Richtung des magnetisierenden Feldes weist. Dieses wird also durch das zusätzliche Feld der atomaren Kreisströme geschwächt. Beim Verschwinden des magnetischen Feldes treten natürlich Induktionswirkungen auf, welche den beim Entstehen des Feldes erzeugten dem Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, sie also genau wieder aufheben, so daß der Stoff wieder vollkommen in seinen alten Zustand zurückkehrt.

Da die Atome der *paramagnetischen Stoffe* ein natürliches magnetisches Moment haben, so suchen sie sich mit diesem *in* die Feldrichtung einzustellen, so daß die atomaren Kreisströme ein zusätzliches Feld erzeugen, das dem erregenden Feld gleichgerichtet ist, es also verstärken. Jedoch muß die bei den

diamagnetischen Stoffen beschriebene Feldwirkung auch bei ihnen eintreten. Bezeichnet man daher als paramagnetisch, wie wir es getan haben, nur die Stoffe, bei denen $\kappa > 0$ ist, so sind das also diejenigen, bei denen der Einfluß des natürlichen magnetischen Moments die nie fehlenden diamagnetischen Wirkungen überwiegt.

Wir können uns nunmehr von der Entstehung des zusätzlichen Feldes \mathfrak{H}' eine ganz anschauliche Vorstellung machen. In allen Fällen überwiegen infolge der Wirkung des erregenden Feldes \mathfrak{H} Kreisströme eines bestimmten Drehsinns, und wir können uns die Betrachtung dadurch vereinfachen, daß wir nur die Wirkung in Rechnung setzen, die von dem Überschuß der Wirkung der verstärkten Kreisströme über die der entgegengesetzt gerichteten geschwächten Kreisströme herrührt. Diese Wirkung können wir uns aber von Kreisströmen herrührend denken, die in einer zur Richtung des Feldes \mathfrak{H} senkrechten Ebene verlaufen. Sie umlaufen in den paramagnetischen Stoffen die Kraftlinien des Feldes \mathfrak{H} , in Richtung des Feldes betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers, liefern also ein dem Felde \mathfrak{H} gleichgerichtetes zusätzliches Feld \mathfrak{H}' (§ 191). In den diamagnetischen Stoffen aber ist ihr Umlaufsinns und daher die Richtung des Feldes \mathfrak{H}' die umgekehrte.

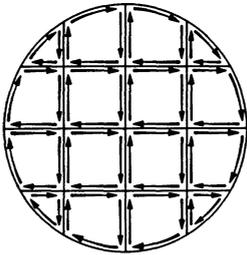


Abb. 373. Zur Entstehung des zusätzlichen Feldes in einem magnetisierten Stoff.

Man kann sich das auch ganz grob so veranschaulichen. Wir denken uns den Bereich der einzelnen Atome durch Quadrate dargestellt (Abb. 373), deren Seiten von den atomaren Kreisströmen umlaufen werden. Dann heben sich im Innern des Körpers die einander entgegenlaufenden Ströme an jeder Quadratseite in ihrer magnetischen Wirkung (jedenfalls außerhalb eines Bereichs von atomaren Dimensionen) gegenseitig auf. Nur die an der äußeren Berandung

eines Körperquerschnitts fließenden Ströme werden nicht aufgehoben und bilden in ihrer Gesamtheit einen den Körper umfließenden Ringstrom, der, genau wie der Strom in einer Spule, im Innern des Körpers das zusätzliche Feld \mathfrak{H}' hervorbringt. Betrachtet man einen zylindrischen in seiner Achsenrichtung magnetisierten Körper wie eine stromdurchflossene Spule mit unendlich vielen Windungen, so kann man leicht berechnen, daß die Größe ni/l in Gl. (11), § 192, die auf 1 cm Länge des Zylindermantels entfallende Stromstärke, die Flächendichte j des Oberflächenstromes, ist, so daß sich aus der genannten Gleichung und Gl. (1) diese Flächendichte zu $j = H'/4\pi = \kappa H$ ergibt. Man findet dann z. B., daß der Oberflächenstrom bei einem Wismutzylinder von 10 cm Länge ($\kappa = -15 \cdot 10^{-6}$) bei einer magnetisierenden Feldstärke $H = 10000$ Gauß 15 Ampere beträgt.

Zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen besteht ja eine weitgehende Analogie, und das gilt formal auch für die Beziehungen $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ (§ 144). In der Bedeutung dieser beiden Gleichungen besteht aber insofern ein grundsätzlicher Unterschied, als das wahre magnetische Feld in einem magnetisierten Stoff $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, das wahre elektrische Feld in einem dielektrisch polarisierten Stoff $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}/\epsilon$ ist.

216. Magnetisierung. Durch die Ausrichtung der atomaren Dipole in einem magnetischen Felde wird ein Körper zu einem magnetischen Dipol. Es treten an seinem einen Ende Kraftlinien des zusätzlichen Feldes aus, am anderen Ende wieder ein. Der Körper erhält also an seinen beiden Enden Pole. Ist der Betrag des zusätzlichen Feldes $H' = B - H$ und ist die Größe der zum Felde senkrecht gedachten Endflächen q , so treten durch seine Enden $q(B - H)$ Kraftlinien des zusätzlichen Feldes, und er hat, da nach § 187 von

einem Magnetpol der Stärke m $4\pi m$ Kraftlinien ausgehen, eine Polstärke q $(B-H)/4\pi$. Davon entfällt auf die Flächeneinheit der Anteil $J = (B-H)/4\pi$. Aus Gl. (2) ergibt sich, daß wir dafür setzen können

$$J = \kappa H. \quad (4)$$

J nennt man die *Magnetisierung* des Körpers.

Die Magnetisierung hat eine anschauliche Bedeutung. Ein magnetisierter Körper habe die Länge l und den Querschnitt q . Dann beträgt die Polstärke an seinen beiden Enden $\pm Jq$, und der ganze Körper bildet einen magnetischen Dipol vom Moment $M = Jql$ (§ 185). ql ist aber das Volumen des Körpers, und es folgt, daß J das magnetische Moment der Volumeinheit des magnetisierten Körpers ist. Aus den Gl. (2) und (4) folgt die Beziehung

$$B = H + 4\pi J. \quad (5)$$

Da die Magnetisierung als magnetisches Moment ein Vektor ist, so haben wir J als den Betrag eines dem zusätzlichen Felde \mathfrak{H}' gleichgerichteten Vektors \mathfrak{J} zu betrachten.

Aus Gl. (4) folgt, daß die Suszeptibilität κ das vom Felde $\mathfrak{H} = 1$ Oersted in der Volumeinheit eines Stoffes erzeugte magnetische Moment ist. Dividieren wir demnach κ durch die Dichte ρ des Stoffes, so erhalten wir das im Felde 1 Oersted auf 1 g des Stoffes entfallende magnetische Moment, die *Massensuszeptibilität*

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho}. \quad (6a)$$

Multiplizieren wir diese mit dem Molekulargewicht M , so ergibt sich das magnetische Moment von 1 Mol, die *Molekularsuszeptibilität*,

$$\chi_m = \chi \cdot M. \quad (6b)$$

Entsprechend ergibt sich bei einem elementaren Stoff die Suszeptibilität von 1 Grammatom, die *Atomsuszeptibilität*,

$$\chi_a = \chi \cdot A \quad (6c)$$

durch Multiplikation mit dem Atomgewicht A . Da im Mol bzw. Grammatom stets die gleiche Zahl von Molekülen bzw. Atomen enthalten ist (§ 63), so ergeben die durch die Zahl N (LOSCHMIDT'sche Zahl) dividierten Werte von χ_m und χ_a das auf jedes einzelne Molekül bzw. Atom im Felde 1 Oersted entfallende magnetische Moment.

In Tabelle 27 (§ 214) sind einige Zahlenwerte angegeben. Man beachte den hohen Wert von χ für den Sauerstoff. Daß trotzdem die Permeabilität der Luft fast genau gleich 1 ist, beruht darauf, daß trotz des hohen Wertes von χ die Suszeptibilität $\kappa = \chi \cdot \rho$ des Sauerstoffs wegen seiner kleinen Dichte ρ sehr klein ist.

217. Ferromagnetismus. Die ferromagnetischen Stoffe, deren wichtigster Vertreter das Eisen ist, unterscheiden sich in ihrem magnetischen Verhalten in mehreren wesentlichen Punkten von allen übrigen Stoffen. Während die Permeabilitäten der para- und diamagnetischen Stoffe vom Wert 1 nur äußerst wenig abweichen, nehmen sie bei den ferromagnetischen Stoffen sehr große Werte, bis zu mehreren 1000, an. Zweitens besteht nicht, wie bei den übrigen Stoffen, eine eindeutige Zuordnung zwischen der äußeren Feldstärke \mathfrak{H} und der Induktion \mathfrak{B} . Zwar wird die Beziehung $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ zur Definition der Permeabilität auch hier aufrechterhalten. Aber die Permeabilität ist nicht einmal annähernd eine Konstante, sondern ihr Betrag hängt von der erregenden Feldstärke \mathfrak{H} und von der magnetischen Vorgeschichte des Stoffes ab. Damit hängt

es auch zusammen, daß bei diesen Stoffen bei verschwindendem äußeren Feld \mathfrak{H} doch die Induktion \mathfrak{B} und die Magnetisierung \mathfrak{J} einen endlichen Wert haben können, daß sie eine *bleibende (permanente) Magnetisierung* annehmen können, wie bei den *Dauermagneten*. Und schließlich zeigen die Ferromagnetika die Erscheinung der *magnetischen Sättigung*, d. h. ihre Magnetisierung strebt mit wachsender Feldstärke einem Grenzwert zu, während sich bei den übrigen Stoffen auch bei den höchsten erreichbaren Feldstärken keine Spur einer solchen Sättigung zeigt.

Außer dem Eisen, bei dem die ferromagnetischen Eigenschaften weitaus am stärksten ausgeprägt sind, gehören zu den ferromagnetischen Stoffen die ihm chemisch sehr nahe verwandten Metalle Nickel und Kobalt. Auch manche ihrer Legierungen unter sich und gewisse chemische Verbindungen dieser Metalle, sowie auch ihre Legierungen mit gewissen anderen Stoffen, insbesondere mit Mangan, Aluminium, Chrom und Silizium, die an sich nicht ferromagnetisch sind, zeigen ferromagnetische Eigenschaften. Besonders interessant ist es, daß gewisse Legierungen aus den an sich nicht ferromagnetischen Metallen Kupfer, Mangan und Aluminium, die *HEUSLERSschen Legierungen*, ferromagnetisch sind.

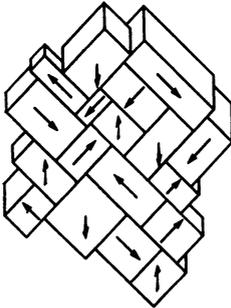


Abb. 374. Schema eines Eisenkristalllits mit WEISS'schen Bezirken, nicht magnetisiert. Die Pfeile weisen in Richtung der drei Kanten.

Unter den ferromagnetischen Verbindungen ist der Magnetkieserit oder Magnetit (Fe_3O_4) besonders zu erwähnen, der ein weitverbreitetes Eisenerz ist (im schwedischen Lappland und im östlichen Rußland). Am Magnetit ist der Magnetismus schon im Altertum entdeckt worden, und aus ihm (*natürliche Magnete*) wurden die ersten Kompassnadeln hergestellt.

Ein Ferromagnetikum zeigt im magnetischen Felde kleine Änderungen seiner Abmessungen. Zum Beispiel nimmt die Länge eines Eisenstabes in einem longitudinalen Felde bis zu etwa 30 bis 100 Oersted an Länge zu. Die Längenänderung wird bei weiter wachsender Feldstärke geringer und verschwindet bei höheren Feldstärken. Wächst die Feldstärke noch weiter an, so tritt Verkürzung ein (sog. JOULE-Effekt). Man bezeichnet diese Erscheinungen, die eine gewisse Analogie zur Elektrostriktion bilden, als *Magnetostriktion*.

Die Längenänderung wird bei weiter wachsender Feldstärke geringer und verschwindet bei höheren Feldstärken. Wächst die Feldstärke noch weiter an, so tritt Verkürzung ein (sog. JOULE-Effekt). Man bezeichnet diese Erscheinungen, die eine gewisse Analogie zur Elektrostriktion bilden, als *Magnetostriktion*.

218. Das Wesen des Ferromagnetismus. Die Nullkurve. Der Ferromagnetismus beruht auf dem Vorhandensein von elementaren magnetischen Dipolen, die aber von ganz anderer Art sind, als die atomaren magnetischen Dipole der übrigen Stoffe. Wie alle Metalle, so bestehen auch die Ferromagnetika in ihrem gewöhnlichen Zustande aus winzigen, einheitlichen Kristalliten (Mikrokristallen, § 365), die dicht gepackt nebeneinander liegen, und deren kristallographische Achsen ganz regellos über alle räumlichen Richtungen verteilt sind. Die Kristallite wiederum sind bei den ferromagnetischen Stoffen in die sog. WEISS'schen Bezirke unterteilt, die immer noch aus sehr vielen Molekülen bestehen, und die die *elementaren magnetischen Dipole* der Ferromagnetika bilden. Denn innerhalb jedes WEISS'schen Bezirkes sind die atomaren magnetischen Dipole gleichsinnig gerichtet, und zwar parallel zu drei gleichwertigen kristallographischen Richtungen des Kristalllits (§ 364), beim Eisen parallel zu seinen Würfelkanten. Im nichtmagnetisierten Ferromagnetikum kommen alle sechs hiernach innerhalb eines Kristalllits möglichen Richtungen des magnetischen Moments der WEISS'schen Bezirke durchschnittlich gleich oft vor, so daß sich ihre Wirkungen nach außen hin aufheben (Abb. 374). Die genannten Lagen der magnetischen Dipole sind Lagen kleinster potentieller Energie (§ 24) und sind bedingt durch die *inneren Spannungen im Ferromagnetikum*, die in der Theorie des Ferromagnetismus eine höchst wichtige Rolle spielen.

Wird nunmehr im ferromagnetischen Stoff ein magnetisches Feld erregt, das die magnetischen Momente in die Feldrichtung zu drehen sucht, so wider- setzen sich dem zunächst die inneren Spannungen. Damit überhaupt eine Wirkung eintritt, muß die Feldstärke zunächst einen für jeden WEISSschen Bezirk von seiner magnetischen Orientierung abhängigen Betrag erreichen. Ist aber diese Feldstärke erreicht, so klappt das magnetische Moment *des Bezirks als Ganzes sprunghaft* aus der ursprünglichen Lage (Abb. 375, 1) in diejenige Lage kleinster potentieller Energie um, in der das magnetische Moment den kleinsten möglichen Winkel mit der Feldrichtung bildet (Abb. 375, 2). Auf diese Weise überwiegen mit wachsender Feldstärke mehr und mehr die Richtungen der magnetischen Momente, die mit der Feldrichtung einen spitzen Winkel bilden, der Körper wird als Ganzes magnetisiert. Nachdem die magnetischen Momente in die neue Richtung umgeklappt sind, drehen sie sich mit weiter wachsender Feldstärke *stetig* mehr und mehr in die Feldrichtung (Abb. 375, 3), bis nach vollständiger Ausrichtung aller Bezirke der höchste Grad von Magnetisierung, die *Sättigung J_s* , erreicht ist.

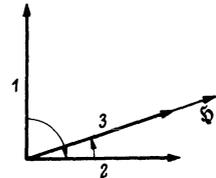


Abb. 375. Die Phasen der Magnetisierung eines Weiss'schen Bezirks.

Trägt man die Magnetisierung J eines anfänglich unmagnetischen Ferromagnetikums als Funktion der Feldstärke \mathfrak{H} im Bereich kleiner Feldstärken auf, so ergibt sich für drei verschiedene Eisensorten das in Abb. 376 dargestellte Bild. Im Bereich *a* beruht die Magnetisierung im wesentlichen auf den spontanen Umklappvorgängen ($1 \rightarrow 2$), im Bereich *b* macht sich mehr und mehr die stetige Drehung ($2 \rightarrow 3$) in die Feldrichtung bemerkbar. Im Feldstärkenbereich der Abb. 376 verhalten sich die drei Eisensorten sehr verschieden, obgleich sie schließlich alle etwa bei der gleichen Feldstärke von 4—5000 Oersted ungefähr die gleiche Sättigungsmagnetisierung erreichen. Bei zweimal geglähtem Dynamostahl erfolgt das spontane Umklappen schon bei sehr viel kleinerer Feldstärke, als beim ungeglähten Dynamostahl oder gar beim Gußstahl. Man bezeichnet ein Ferromagnetikum als *magnetisch weich oder hart*, je nachdem seine Magnetisierung bei kleinen Feldstärken schnell oder langsam anwächst. Die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens liegt in der Verschiedenheit der inneren Spannungen.

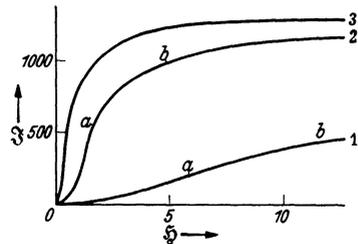


Abb. 376. Anfangsmagnetisierung, 1. bei Gußstahl, 2. bei ungeglähtem Dynamostahl, 3. bei zweimal geglähtem Dynamostahl.

Die Magnetisierungskurve eines anfänglich unmagnetischen Stoffs, bis zur vollen Sättigung, von der Abb. 376 nur den ersten kleinen Teil, die *Anfangsmagnetisierung*, zeigt, nennt man die *Nullkurve* oder *jungfräuliche Kurve*.

219. Hysteresc. Remanenz. Koerzitivkraft. Läßt man nach erfolgter Sättigung eines Ferromagnetikums die magnetisierende Feldstärke stetig wieder abnehmen, so kehrt sich die zweite Phase der Magnetisierung der WEISSschen Bezirke, die stetige Drehung in die Feldrichtung, wieder um ($3 \rightarrow 2$, Abb. 375). Hingegen haben die Bezirke die Neigung bei weiter sinkender und verschwindender Feldstärke teilweise im Zustand 2 der Abb. 375) zu verbleiben, da dieser einem stabilen Gleichgewicht entspricht. Demnach verschwindet die Magnetisierung nicht restlos mit dem magnetisierenden Felde, sondern es bleibt eine *Restmagnetisierung* oder *Remanenz J_r* zurück (Abb. 377). Der Körper behält also ein magnetisches Moment, er ist zu einem *Dauermagneten* geworden.

Läßt man nunmehr die Feldstärke, vom Betrage Null beginnend, in entgegengesetzter Richtung wieder anwachsen, so wiederholt sich auch der

Magnetisierungsvorgang in umgekehrter Richtung. Ehe aber eine Magnetisierung in der neuen Feldrichtung erfolgen kann, muß zunächst die Restmagnetisierung beseitigt werden, indem ein Teil der WEISSschen Bezirke durch das Feld zum spontanen Umklappen gebracht wird, bis der Körper als Ganzes wieder unmagnetisch ist. Hierzu ist ein bei den einzelnen Eisensorten und Ferromagnetika verschiedener Betrag der Feldstärke nötig, den man *Koerzitivkraft* \mathfrak{H}_k nennt (Abb. 377). Je magnetisch weicher der Stoff ist, je leichter also die Umklappvorgänge bei ihm eintreten, um so geringer ist die Koerzitivkraft. Nachdem der Körper auf diese Weise unmagnetisch geworden ist, wächst seine Magnetisierung bei weiterer Steigerung der Feldstärke wieder an und erreicht schließlich Sättigung.

Läßt man nunmehr die Feldstärke wieder auf Null abnehmen, dann in entgegengesetzter Richtung wieder bis zur Sättigung anwachsen, so bleibt beim Felde Null wiederum eine Restmagnetisierung übrig, die erst verschwindet, wenn die Feldstärke den Betrag der Koerzitivkraft erreicht hat. Demnach besteht die Magnetisierungskurve bei einer solchen *zyklischen Magnetisierung* aus zwei Ästen, die beiderseits in die der Sättigung entsprechenden Geraden auslaufen. Der ganze Erscheinungsbereich heißt *Hysterese* (WARBURG 1880), die in Abb. 377 dargestellte Kurve *Hysteresschleife*.

Ein ferromagnetischer Körper besitzt also, nachdem er der Einwirkung eines magnetischen Feldes ausgesetzt gewesen ist, unter allen Umständen eine Restmagnetisierung. Will man diese wieder beseitigen, so kann man so verfahren, daß man den Körper in eine Spule bringt, in der Wechselstrom fließt, so daß er eine zyklische Magnetisierung erfährt. Wenn man die Stärke des Wechselstroms stetig auf Null abnehmen läßt, oder den Körper langsam aus der Spule herauszieht, so wird die von der Hysteresschleife

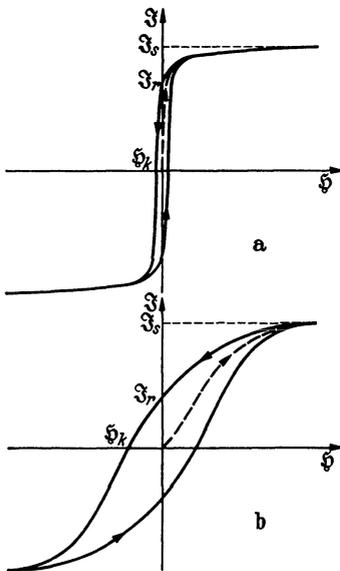


Abb. 377. Hysteresschleifen, a gezogener Schmiedestahl, b gehärteter Werkzeugstahl.

umrandete Fläche immer kleiner und schrumpft schließlich auf ihren Schwerpunkt zusammen, der dem unmagnetischen Zustand des Körpers entspricht.

Auch in bezug auf die Hysterese verhalten sich die verschiedenen Ferromagnetika sehr verschieden. Abb. 377a bezieht sich auf gezogenen Schmiedestahl, Abb. 377b auf gehärteten Werkzeugstahl. Das verschiedene magnetische Verhalten beruht außer auf der Vorbehandlung, die die elastischen Spannungen beeinflusst, in erster Linie auf den im Eisen enthaltenen Beimengungen, einmal auf dem Kohlenstoffgehalt. Aber auch durch Legieren mit andern Metallen (Kobalt, Nickel usw.) lassen sich die magnetischen Eigenschaften des Eisens in sehr weiten Grenzen beeinflussen. Z. B. kann die Koerzitivkraft zwischen 0,4 Oersted und mehr als 40 Oersted liegen. Auf diese Weise können die sehr verschiedenen Ansprüche der Technik an die magnetischen Eigenschaften des Eisens (große oder kleine Koerzitivkraft, große oder kleine Remanenz) weitgehend befriedigt werden. Für Dauermagnete ist neben hoher Remanenz auch eine hohe Koerzitivkraft erforderlich, damit nicht die Restmagnetisierung durch schwache äußere Felder stark beeinflusst wird. Am günstigsten sind hierfür Eisensorten, bei denen das Produkt aus Remanenz und Koerzitivkraft, die *Güteziffer*, einen möglichst hohen Wert hat. Für Elektromagnete hingegen ist

eine möglichst kleine Remanenz erwünscht, damit die Magnetisierung beim Ausschalten des magnetisierenden Stromes möglichst weitgehend verschwindet.

Man kann an Stelle der Magnetisierung J auch die Induktion $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J} = \mu\mathfrak{H}$ als Funktion von \mathfrak{H} auftragen. Es ergeben sich dann, bei geeigneter Wahl der Maßstabsverhältnisse, ganz ähnliche Kurven für die Anfangsmagnetisierung und bei zyklischer Magnetisierung ebenfalls Hysteresisschleifen. Nur laufen diese nach erfolgter Sättigung nicht in eine horizontale Gerade aus, da ja \mathfrak{B} , wenn \mathfrak{J} nicht mehr wächst, mit weiter wachsendem \mathfrak{H} um die gleichen Beträge wie \mathfrak{H} wächst. Bei gleichem Maßstab von \mathfrak{B} und \mathfrak{H} verläuft die Gerade unter 45° gegen die Achsen. Aus praktischen Gründen ($\mathfrak{B} \gg \mathfrak{H}$) ist man aber stets gezwungen, den Maßstab von \mathfrak{B} sehr viel kleiner zu wählen, als den von \mathfrak{H} , so daß dann die Kurve praktisch auch in eine horizontale Gerade ausläuft.

Um die Ausrichtung der magnetischen Momente im magnetisierten Ferromagnetikum zu bewirken, ist Arbeit gegen die molekularen Kräfte zu leisten, die die natürlichen Gleichgewichtslagen der molekularen Dipole bedingen. Bei einer zyklischen Magnetisierung wird ein Teil dieser Arbeit in Wärme verwandelt. Diese Arbeit ist proportional der Fläche, die die Hysteresisschleife einschließt, welche \mathfrak{B} als Funktion von \mathfrak{H} darstellt. Je schmaler also die Hysteresisschleife ist (vgl. Abb. 377 a und b), desto weniger Arbeit wird bei zyklischer Magnetisierung in Wärme verwandelt. Das ist besonders wichtig bei Eisen teilen elektrischer Geräte und Maschinen, die einer ständigen zyklischen Magnetisierung unterworfen sind.

Aus den zusammengehörigen Werten von B und H läßt sich natürlich stets eine Permeabilität $\mu = B/H$ errechnen. Das hat aber einen eigentlichen Sinn nur für die vom unmagnetischen Zustand ausgehende Nullkurve. Im übrigen hängt der bei irgendeiner Feldstärke \mathfrak{H} erreichte Betrag von \mathfrak{B} von der dem Körper bereits vorher anhaftenden Magnetisierung, also von seiner magnetischen Vorgeschichte ab. Zum Beispiel gehören zu jedem Wert von \mathfrak{H} in den Abb. 377 je zwei verschiedene Werte von \mathfrak{B} und demnach auch von μ . Und es können noch alle möglichen weiteren Werte auftreten, wenn man die Magnetisierung nicht bis zur Sättigung durchgeführt hat. In der Tabelle 28 sind die zusammengehörigen Beträge von B und H , sowie die daraus errechnete Permeabilität μ für die Nullkurven von zwei sehr verschiedenen Eisensorten wiedergegeben. Der zweimal gegläute Dynamostahl hat eine Koerzitivkraft von etwa 1,4 Oersted, das Gußeisen eine solche von etwa 12 Oersted. Wie man aus der Tabelle sieht, nimmt die Permeabilität bei kleiner Feldstärke zunächst mit

Tabelle 28. a) Dynamostahl, zweimal gegläut, b) Gußeisen.

a)	B	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,5	10	50	100	1000	4000	4500
	H	240	600	1150	2300	6050	9300	14100	16830	17980	22350	25410	25920
	μ	960	1200	1530	2300	4030	3720	1410	335	170	22,4	6,35	5,75
b)	B	2,5	5	10	20	50	100	1000	2000	4000	5500	6500	
	H	235	570	1960	4700	7520	9320	15900	17840	20350	21920	22920	
	μ	94	114	196	235	150	93,2	15,9	8,9	5,1	4,0	3,5	

dieser zu, später wieder ab. Die anfängliche Zunahme erklärt sich u. a. dadurch, daß, sobald eine Magnetisierung überhaupt da ist, auch ein dem magnetisierenden Felde gleichgerichtetes zusätzliches Feld \mathfrak{H}' besteht, das die Wirkung des ersteren verstärkt. Auch die Abnahme der Permeabilität bei hoher Feldstärke ist leicht verständlich. Nach erfolgter Sättigung wächst \mathfrak{B} , wie schon erwähnt, nur noch um die gleichen Beträge wie \mathfrak{H} . Demnach muß sich das Verhältnis $\mu = B/H$ für sehr große Werte von H dem Grenzwert 1 nähern. Die Höchstwerte der

Permeabilität sind bei den beiden in der Tabelle angeführten Stoffen mit 4030 beim Dynamostahl und 235 beim Gußeisen überaus verschieden.

220. Entmagnetisierung. Wir haben bisher noch nicht in Betracht gezogen, ob die Gestalt eines magnetisierten Körpers etwa einen Einfluß auf die Magnetisierung hat. Das ist tatsächlich der Fall. Um dies zu verstehen, wollen wir uns zuerst ein Bild davon machen, welchen Einfluß es auf das Feld in einer Spule hat, wenn sie nicht, wie bei Gl. (11), § 192, vorausgesetzt, sehr lang gegenüber ihrem Durchmesser ist. Wir können uns eine unendlich lange Spule ersetzt denken durch eine Spule von endlicher Länge und zwei unmittelbar an sie anschließende unendlich lange Spulen, die alle von gleich starken Strömen gleichsinnig durchflossen werden (Abb. 378a). Das Feld H_0 in der mittleren Spule entsteht dann durch Überlagerung des

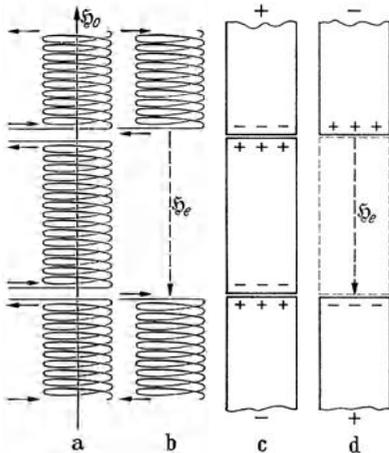


Abb. 378. Zur Erläuterung der Entmagnetisierung.

Feldes H des in ihr selbst fließenden Stromes und der von den beiden andern Spulen ausgehenden Streufelder H_1 und H_2 , $H_0 = H + H_1 + H_2$. Jetzt können wir aber die Felder H_1 und H_2 beseitigen, wenn wir uns die beiden Endspulen noch mit zwei weiteren, gleichen Spulen bewickelt denken, welche von einem Strom von gleicher Stärke, aber entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, wie die ersten Spulen (Abb. 378b). Dann bleibt das Feld der mittleren Spule allein übrig, $H = H_0 - (H_1 + H_2)$. Nun hängt der Bruchteil $(H_1 + H_2)/H_0$, den die Felder H_1 und H_2 zum Felde H_0 beitragen, nur von der geometrischen Gestalt der mittleren Spule ab, nicht von der Stärke der Felder selbst. Es ist also $H_1 + H_2 = \alpha H_0$, wobei die Konstante α nur von der Gestalt der mittleren Spule abhängt. Demnach ist das

Feld der mittleren Spule allein $H = H_0(1 - \alpha)$. Man kann das rein formal so auffassen, als überlagere sich bei einer Spule von endlicher Länge dem für eine Spule von unendlicher Länge nach Gl. (11), § 192, berechneten Felde H_0 ein *entmagnetisierendes Feld* $H_e = -\alpha H_0$ von entgegengesetzter Richtung, durch das es um einen nur von der Gestalt der Spule abhängigen Bruchteil geschwächt wird, der um so kleiner ist, je länger die Spule ist.

Nunmehr ersetzen wir das obige Spulensystem durch einen unendlich langen Stab mit einer permanenten Magnetisierung, den wir uns entsprechend unterteilt denken, so daß das mittlere Stück der mittleren Spule entspricht (Abb. 378c). Wenn wir im Fall der Spulen mit Hilfe zweier weiterer Spulen das Feld der beiden äußeren Spulen beseitigen, so war das physikalisch gleichwertig mit der Entfernung dieser beiden Spulen. Denken wir uns nun die beiden Endstücke des magnetisierten Stabes beseitigt, so tritt eine ganz analoge Wirkung ein. Es fehlt nunmehr die Feldwirkung, die vorher von den Oberflächenströmen (Abb. 373) der Endstücke ausgingen, und das wirkt, genau wie bei den Spulen, wie die Erzeugung eines entmagnetisierenden Feldes H_e . Man kann dies aber auch noch anders betrachten. Solange die drei Stücke des Stabes ein zusammenhängendes Ganzes bildeten, besaß der Stab an den Trennstellen keine Pole; bzw. die magnetischen Doppelschichten, die man sich an den Trennstellen vorhanden denken konnte (Abb. 378c), hatte keine magnetische Wirkung. Wird nunmehr an jeder Trennstelle durch Entfernen der Endstücke die eine Belegung der Doppelschicht entfernt, so ist das gleichwertig mit der

Heranbringung einer Belegung von entgegengesetztem Vorzeichen (Abb. 378d). Und von solchen gedachten magnetischen Belegungen können wir uns das entmagnetisierende Feld ausgehend denken, das hier genau so auftritt, wie bei der Spule. Tatsächlich entsteht ja auch beim Entfernen der Endstücke eine solche magnetische Belegung, die Magnetisierung J der Enden, und das Entfernen der Endstücke wirkt daher so, als führe man an das vorher polfreie Mittelstück von außen her magnetische Belegungen heran, deren Flächendichten gleich der Magnetisierung J sind, die das Mittelstück schließlich tatsächlich besitzt. Das entmagnetisierende Feld H_e ist also dem Betrage J des Vektors \mathfrak{J} proportional und ihm entgegengerichtet, $H_e = -\beta J$, wobei, wie im Falle der Spulen, der Faktor β nur von der Gestalt des magnetisierten Körpers abhängt. An diesen Überlegungen ändert sich nichts, wenn die Magnetisierung durch ein äußeres Feld H hervorgerufen wird. In jedem Falle erzeugt die jeweils vorhandene Magnetisierung J ein entmagnetisierendes Feld $H_e = -\beta J$. Dadurch wird das äußere Feld im Innern des Körpers geschwächt. Es beträgt nur noch $H - H_e = H - \beta J$ und kann demnach auch nur in dieser Stärke magnetisierend wirken. Nach Gl. (4), § 216, beträgt daher die Magnetisierung des Körpers $J = \kappa (H - H_e) = \kappa (H - \beta J)$ oder

$$J = H \frac{\kappa}{1 + \beta \kappa}. \quad (7)$$

β heißt der *Entmagnetisierungsfaktor*. Er beträgt für eine Kugel $4\pi/3 = 4,18$. Bei einem in Richtung seiner Achse magnetisierten zylindrischen Stab ist er natürlich von der Länge abhängig und um so kleiner, je länger der Stab ist. Ist seine Länge 10mal größer als seine Dicke, so beträgt er 0,204, ist sie 100mal größer, so beträgt er nur noch 0,0042. Ein Kreisring hat den Entmagnetisierungsfaktor 0, da er ja keine Pole besitzt. Darum ist ein solcher für magnetische Untersuchungen besonders geeignet. Bei den dia- und paramagnetischen Körpern ist κ stets so klein gegen 1, daß bei ihnen die Entmagnetisierung unmerklich klein ist. Sie spielt daher nur bei den ferromagnetischen Körpern eine Rolle, bei denen κ sehr groß gegen 1 ist.

Der durch die Entmagnetisierung beeinflusste Verlauf der Magnetisierungskurve kann bei Kenntnis des Entmagnetisierungsfaktors in den entmagnetisierungsfreien Verlauf umgerechnet werden (*Scherung* der Magnetisierungskurve).

Man spricht oft von einer entmagnetisierenden Wirkung der Enden eines Körpers und rechnet rein formal so, als ob innerhalb des magnetisierten Körpers Kraftlinien vom positiven zum negativen Pol verliefen. Tatsächlich aber verlaufen alle Kraftlinien im Innern vom negativen zum positiven Pol. In Wirklichkeit rührt das entmagnetisierende Feld gar nicht von den Polen her, sondern vom Fehlen der Verlängerungen des Körpers ins Unendliche. Es ist überhaupt nichts als ein bequemes gedankliches Hilfsmittel, um die für unendlich lange Körper gültigen einfacheren Gesetze auf Körper von endlicher Länge anwenden zu können. Eine physikalische Wirklichkeit kommt dem entmagnetisierenden Felde nicht zu. Es ist lediglich eine Rechengröße. Wäre es wirklich vorhanden, so besäße es ungeschlossene magnetische Kraftlinien, und solche gibt es nicht.

221. BARKHAUSEN-Effekt. Der Versuch von EINSTEIN und DE HAAS. Das spontane Umlappen der Dipolachsen der Elementarbezirke wird sehr eindrucksvoll durch eine von BARKHAUSEN gefundenen Erscheinung bewiesen. Über einen Eisendraht ist eine Spule geschoben. Wird nun der Draht, etwa durch Annähern eines Magnetpols, magnetisiert, so vergrößert das Umlappen jedes einzelnen Elementarbezirks die Induktion \mathfrak{B} im Draht und erzeugt dadurch einen momentanen Induktionsstrom in der Spule. Dieser kann durch eine

Verstärkereinrichtung (§ 259) so sehr verstärkt werden, daß jeder einzelne Induktionsstoß als ein Knacken in einem Lautsprecher gehört werden kann, wenn die Magnetisierung langsam genug erfolgt. Bei schneller Änderung hört man ein prasselndes Rauschen.

Das Vorhandensein der molekularen magnetischen Momente und ihre Einstellung in die Feldrichtung bei der Magnetisierung haben EINSTEIN und DE HAAS durch folgenden schönen Versuch bewiesen. Ein Eisenstab hängt vertikal in einer Spule. Beim Einschalten eines Stromes in der Spule, also bei der Magnetisierung des Eisens, erhält dieses einen Drehimpuls um die Feldrichtung als Achse. Die ursprüngliche Erklärung ist folgende. Im unmagnetisierten Eisen liegen die molekularen Kreisströme völlig ungeordnet, keine Richtung ihrer Dipolachsen ist bevorzugt. Jeder einzelne Kreisstrom besitzt wegen der Rotation der Elektronen einen mechanischen Drehimpuls. Die Vektorsumme aller Drehimpulse im unmagnetischen Eisen ist jedoch wegen ihrer völligen Unordnung gleich Null. Tritt nun beim Erregen eines magnetisierenden Feldes eine Ausrichtung der Dipolachsen ein, so besteht nunmehr eine Vorzugsrichtung der molekularen Drehimpulse und ihre Vektorsumme ist nicht mehr Null, sondern hat einen endlichen Wert. Nun gilt aber für den Drehimpuls ein Erhaltungssatz (§ 35) und da dem Eisenstab als Ganzes kein Drehimpuls zugeführt wurde, so muß die Summe der in ihm enthaltenen Drehimpulse nach wie vor verschwinden. Infolgedessen erhält der Stab als Ganzes einen Drehimpuls, der die entgegengesetzte Richtung hat wie die Resultierende der Drehimpulse der in ihm umlaufenden molekularen Kreisströme.

Das magnetische Moment eines elementaren Kreisstromes ist nach § 196 Gl. (20), $M = \frac{1}{2} \varepsilon r^2 u$. Der Drehimpuls eines auf einer Kreisbahn vom Radius r mit der Winkelgeschwindigkeit u umlaufenden Elektrons von der Masse μ bezüglich seiner Drehachse ist nach § 37, $q = \mu r^2 u$. Demnach sollte das Verhältnis von magnetischem Moment zu Drehimpuls für jedes einzelne umlaufende Elektron $M/q = \varepsilon/2\mu$ sein, also gleich der halben spezifischen Ladung (§ 193) des Elektrons. Das gleiche Verhältnis muß dann auch für die Summe aller ausgerichteten Kreisströme und demnach für das magnetische Moment und den Drehimpuls des ganzen Eisenstabes gelten. Das Verhältnis M/q wurde von EINSTEIN und DE HAAS und später genauer von andern gemessen. Dabei ergab sich ein um das Doppelte zu großer Wert des Verhältnisses M/q . Dieser Widerspruch gegen die Theorie konnte jedoch später aufgeklärt werden (§ 353).

Wenn die Magnetisierung eines Körpers an ihm einen Drehimpuls erzeugt, so muß umgekehrt ein Körper, wenn ihm ein Drehimpuls erteilt wird, ein magnetisches Moment erhalten. Ein rotierender Körper, der ja durch Erteilung eines Drehimpulses in Drehung versetzt worden sein muß, muß deshalb eine — wenn auch sehr schwache — Magnetisierung aufweisen. Das ist durch Versuche von BARNETT auch nachgewiesen worden. Es ist nicht ausgeschlossen, daß es hiermit zusammenhängt, daß sowohl die Erde wie die Sonne in ihrer Drehachse etwa gleichgerichtetes magnetisches Moment haben.

222. Der CURIE-Punkt. Die Magnetisierung, die gleichsinnige Ausrichtung der magnetischen Dipolmomente in einem Stoff, bedeutet eine Erhöhung der molekularen Ordnung in ihm. Ihr entgegen wirkt, wie in allen analogen Fällen, die thermische Bewegung der Moleküle, die eine solche Ordnung zu beseitigen sucht. Infolgedessen nimmt die Suszeptibilität der Ferromagnetika mit wachsender Temperatur allmählich ab und wird schließlich bei einer bestimmten Temperatur, dem CURIE-Punkt oder magnetischen Umwandlungspunkt, sprunghaft von sehr viel kleinerer Größenordnung, als bei tieferer Temperatur. Eisen unterhalb des CURIE-Punktes (769°C) nennt man α -Eisen, oberhalb desselben β -Eisen. α - und β -Eisen sind einander kristallographisch gleich.

Aber das β -Eisen ist paramagnetisch. Bei 900°C verwandelt es sich in das γ -Eisen, und seine Suszeptibilität sinkt noch einmal sprunghaft. Das γ -Eisen ist ebenfalls paramagnetisch, aber kristallographisch vom α - und β -Eisen verschieden. Der CURIE-Punkt des Nickels liegt bei 356° , der des Kobalts bei 1075° , der der HEUSLERSchen Legierungen zwischen 60° und 380° .

Man sieht, daß der Ferromagnetismus keine Eigenschaft der Atome der ferromagnetischen Stoffe an sich ist, sondern auf der Art ihrer Bindung beruht.

223. Das Feld in der Umgebung eines magnetisierten Körpers. Brechung der Kraftlinien. Bringt man einen ferromagnetischen Körper in ein vorher homogenes Feld, so überlagert sich diesem Felde das Feld des magnetisierten Körpers und verzerrt es (Abb. 379). Denn an den Seiten des Körpers laufen die von seinem Nordpol nach seinem Südpol verlaufenden Kraftlinien dem magnetisierenden Felde entgegen und schwächen es dort. An den Endflächen aber laufen sie mit dem magnetisierenden Felde gleichsinnig und verstärken es (Abb. 380a u. b). Der Einfluß des überlagerten Feldes verschwindet in größerer Entfernung von dem Körper.

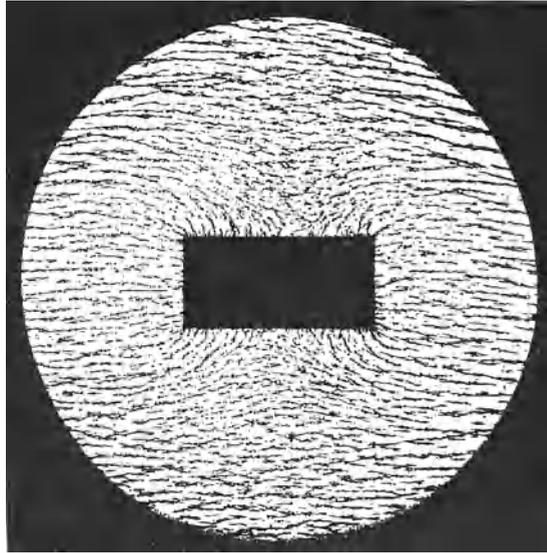


Abb. 379. Eisen im magnetischen Felde.
(Aus POHL: Elektrizitätslehre.)

Es ist sehr lehrreich, die Abb. 380 mit der ganz entsprechenden Abb. 263 zu vergleichen, die das elektrische Gegenstück zu ihr bildet. Die beiden Fälle gleichen sich im Außenraum des Körpers qualitativ völlig. Hingegen ist im elektrischen Fall der Innenraum des Körpers (eines Leiters) feldfrei, die Kraftlinien des äußeren Feldes sind durch den Körper unterbrochen, endigen und beginnen an dessen Enden. Im magnetischen Fall aber ist das Innere des magnetisierten Körpers nicht feldfrei. Im Gegenteil ist die Feldstärke in ihm größer als im Außenraum, sogar sehr viel größer als in Abb. 380 angedeutet ist, die nur ein Schema geben soll. Die Gesamtzahl der Kraftlinien des Feldes wird aber durch den Körper nicht verändert.

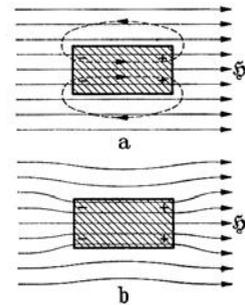


Abb. 380.
Zur Deutung der Abb. 379.

Sie werden nur gewissermaßen in den Körper hineingesogen, so daß ihre Zahl innen zunimmt und in der näheren seitlichen Umgebung abnimmt.

Bei den paramagnetischen Körpern treten entsprechende Verhältnisse ein, wenn auch in einem gegenüber den Ferromagnetika verschwindenden Maße. Bei den diamagnetischen Körpern ist die Richtung des zusätzlichen Feldes die umgekehrte. Bei ihnen werden die Kraftlinien sozusagen aus dem Körper herausgedrückt und das Feld ist im Innern geschwächt an den Seiten des Körpers in der näheren Umgebung verstärkt.

Treten magnetische Kraftlinien aus einem Stoff unter einem beliebigen Einfallswinkel in einen anderen Stoff über, so gilt folgende Grenzbedingung an der Grenzfläche der beiden Stoffe: Die zur Grenzfläche senkrechte Komponente der Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ bleibt konstant, und die zur Grenzfläche parallele Komponente der Feldstärke \mathfrak{H} bleibt konstant. Es gilt also (Abb. 381)

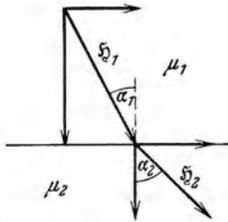


Abb. 381. Zur Brechung der magnetischen Kraftlinien.

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2 \quad \text{und} \quad H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2.$$

Hieraus folgt $\text{tg } \alpha_1 : \text{tg } \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2.$ (8)

Die Kraftlinien erfahren also eine Richtungsänderung (*Brechung der Kraftlinien*), und zwar werden sie vom Einfallslot weggebrochen, wenn die Permeabilität des zweiten Stoffes größer ist als die des ersten. Natürlich ist die Wirkung nur bei den Ferromagnetika beträchtlich.

Abb. 382 nebst der entsprechenden schematischen Abb. 383 zeigen als Beispiel die Wirkung der Kraftlinienbrechung in einem Eisenring. Die von der einen Seite in den Ring eintretenden Kraftlinien verlaufen weiter im Innern des Ringes und treten erst am spiegelbildlich gelegenen Punkt der anderen Ringhälfte wieder

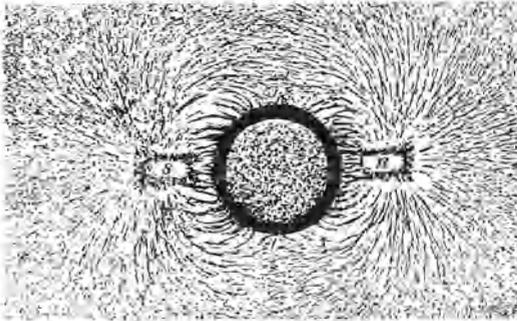


Abb. 382. Schirmwirkung von weichem Eisen.

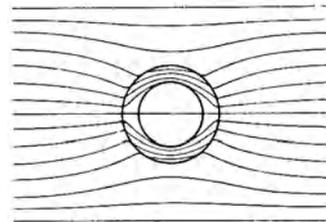


Abb. 383. Brechung magnetischer Kraftlinien in einem Eisenring.

aus dem Ringes aus. Das Innere des Ringes ist feldfrei. Was hier an einem zwei-dimensionalen Beispiel gezeigt ist, gilt auch im räumlichen. Das Innere einer Hohlkugel aus weichem Eisen, die sich in einem magnetischen Felde befindet, ist weitgehend feldfrei. Man benutzt diese Tatsache, um Teile von Meßgeräten gegen die störende Wirkung äußerer magnetischer Felder, z. B. des erdmagnetischen Feldes, zu schützen (*Schirmwirkung des Eisens*).

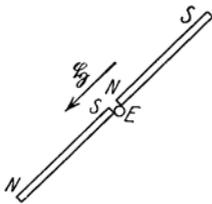


Abb. 384. Magnetisierung im Erdfelde.

224. Magnetisierung im erdmagnetischen Felde.

Infolge des erdmagnetischen Feldes ist jedes Stück Eisen auf der Erde stets ein wenig magnetisiert. Man kann diese Wirkung mit der in Abb. 384 dargestellten Vorrichtung leicht nachweisen. Zwei etwa 1 m lange Stangen aus weichem Eisen von quadratischem Querschnitt sind an einem Gestell drehbar so angeordnet, daß man sie in die Richtung des erdmagnetischen Feldes \mathfrak{H} , also in die Richtung der Inklination, einstellen kann. (Die Stangen müssen lang sein, damit nicht durch die Entmagnetisierung das Feld zwischen ihren zugewandten Enden zu sehr geschwächt wird, vgl. § 220). Ihre einander zugekehrten Enden haben einen Abstand von etwa $\frac{1}{2}$ cm. Sind sie einigermaßen in Richtung des Feldes orientiert, so kann man ein zylindrisches Stück weichen Eisens E von etwas größerem Durchmesser als der Abstand

der Stäbe zwischen ihnen anhängen, ohne daß es abfällt. An den Enden der Eisenstäbe entstehen im Erdfelde Pole, welche das Eisenstück festhalten. Bewegt man die Stäbe in eine andere Lage, so fällt das Eisenstück ab.

Man beobachtet ferner, daß stählerne Gegenstände, insbesondere Werkzeuge, Feilen, Hämmer u. dgl., welche regelmäßig in einer bestimmten Orientierung im Raume — etwa nordsüdlich oder vertikal — benutzt werden und dabei Erschütterungen ausgesetzt sind, stets in der gleichen Weise magnetisiert sind. Hämmer haben auf der nördlichen Halbkugel fast stets an dem beim Schlagen nach unten gerichteten Ende einen Nordpol, Feilen einen Nordpol an dem Ende, das bei der Benutzung am häufigsten gegen Norden gerichtet ist, die Eisenstangen von Regenschirmen an ihrem unteren Ende. Man kann eine Stange aus Eisen von nicht zu geringer Remanenz magnetisieren, indem man sie in die Richtung des erdmagnetischen Feldes — schräg nach unten und nach Norden — hält und einige kräftige Hammerschläge auf ihr eines Ende ausführt. Am unteren Ende entsteht dann ein Nordpol. Wiederholt man den Versuch nach Umdrehung der Stange, so kehren sich die Pole um. In allen diesen Fällen erleichtern die mit den betreffenden Gegenständen vorgehenden Erschütterungen durch die dabei vorübergehend eintretende Lockerung der inneren Spannungen im Eisen die Magnetisierung. Eiserne Schiffe werden infolge der ständigen Erschütterungen während ihres Baues durch das Erdfeld magnetisiert. Daher dreht man sie nach Ablauf der halben Bauzeit um 180° , damit diese Wirkungen ungefähr wieder aufgehoben werden.

225. Magnetische Kraftlinien sind immer geschlossen. Wir haben früher gesehen, daß die Kraftlinien des durch einen Strom erzeugten magnetischen Feldes stets geschlossene Kurven sind, die den stromführenden Leiter umschließen. Bei den durch Magnetpole erzeugten Feldern haben wir aber bisher meist nur davon gesprochen, daß Kraftlinien von dem positiven Pol eines magnetischen Dipols ausgehen und auf den negativen Pol hin verlaufen. Nachdem wir nun wissen, daß die Magnetisierung eines Magneten auf der gleichsinnigen Orientierung seiner molekularen Dipole beruht, diese selbst aber ihre Dipoleigenschaft molekularen Kreisströmen verdanken, so folgt, daß auch diese Kraftlinien in sich geschlossen sind. Sie verlaufen nach ihrem Eintritt in den Südpol des Magneten in der Richtung vom Südpol zum Nordpol und treten dort wieder aus (vgl. dazu die schematische Abb. 380). *Magnetische Kraftlinien sind immer in sich geschlossen.* Es gibt also keine wirbelfreien magnetischen Felder.

Hier liegt ein grundlegender Unterschied zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern vor. Elektrische Kraftlinien können zwar auch in sich geschlossen sein (§ 208), aber in den rein elektrostatischen Feldern haben sie stets ihren Anfang auf einer positiven, ihr Ende auf einer negativen Ladung. Daß das möglich ist, beruht auf der Tatsache, daß es wahre Elektrizitätsmengen gibt. Bei magnetischen Feldern ist es nicht möglich, weil es keinen wahren Magnetismus, sondern nur magnetische Dipole gibt.

226. Magnetischer Fluß. Magnetischer Widerstand. Es sei dF ein Flächenelement innerhalb eines magnetisierten Körpers, B die durch ein Feld H hervorgerufene Induktion am Ort von dF und (dF, B) der Winkel zwischen dF und B . Dann bezeichnet man die Größe

$$d\Phi = B \sin(dF, B) dF \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2 \quad (9a)$$

als den *magnetischen Fluß* durch das Flächenelement dF . Den Fluß durch eine endliche Fläche F erhält man durch Integration der Gl. (9a) über diese Fläche,

$$\Phi = \int B \sin(dF, B) dF \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2. \quad (9b)$$

Neben der Einheitsbezeichnung 1 Gauß · cm² ist die Bezeichnung 1 *Maxwell* in Gebrauch. Da im Vakuum $B = H$ ist, so durften wir in § 202, wo angenommen wurde, daß sich die Vorgänge im Vakuum abspielen, den Fluß $\Phi = \int H \sin(\alpha F, H) dF$ setzen.

In einem länglichen und längs seiner Achse homogen magnetisierten Körper vom Querschnitt q herrsche der Fluß $\Phi = Bq = \mu Hq$. Ist l die Länge des Körpers, so beträgt die magnetische Spannung des magnetisierenden Feldes H zwischen den Enden des Körpers (vom hier bedeutungslosen Vorzeichen abgesehen) $U_m = Hl$ (§ 200). Wir können demnach schreiben

$$\Phi = \mu \frac{q}{l} U_m. \quad (10)$$

Diese Gleichung ist dem OHMSchen Gesetz (§ 152) ganz analog; der magnetische Fluß entspricht der Stromstärke, die magnetische Spannung der elektrischen, und die Größe $\mu \frac{q}{l}$ setzt sich wie der reziproke Wert des elektrischen Widerstandes aus einer Materialkonstante μ und dem Formfaktor q/l zusammen. Man nennt daher

$$\frac{l}{\mu q} = R_m \quad (11)$$

den *magnetischen Widerstand* des Körpers. Man beachte, daß es sich hier lediglich um eine äußere Ähnlichkeit handelt. Denn während ein elektrischer Strom tatsächlich eine Bewegung elektrischer Ladungen gegen reibungsartige Kräfte bildet, ist der magnetische Fluß keineswegs ein Strom magnetischer Ladungen, da es ja solche gar nicht gibt. Daher hat der Begriff des magnetischen Widerstandes nur formale Bedeutung. Seine Einführung ist aber namentlich für die Technik nützlich. Denn in einfacheren Fällen gilt mit ziemlich weitgehender Genauigkeit der Satz, daß sich der magnetische Widerstand eines Systems von mehreren aneinander grenzenden (hintereinander geschalteten) Körpern, wie derjenige von elektrischen Widerständen, additiv aus deren Einzelwiderständen zusammensetzt.

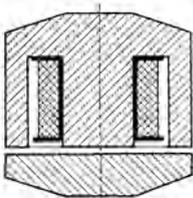


Abb. 385. Topfmagnet.

227. Eisenkerne in Spulen. Elektromagnete. Wir haben in § 191 gesehen, daß eine stromdurchflossene Spule einem Stabmagneten äquivalent ist. Indem aus ihrem einen Ende Kraftlinien austreten und in das andere Ende wieder eintreten, entsprechen diese Enden den Polen eines Magneten. Die magnetischen Wirkungen einer solchen Spule sind jedoch im Außenraum verhältnismäßig schwach. Sie können aber außerordentlich verstärkt werden, wenn man das Innere der Spule mit einem ferromagnetischen Stoff, insbesondere mit Eisen, erfüllt. An die Stelle der Feldstärke \mathfrak{H} im Innern der Spule tritt jetzt die sehr viel größere Induktion \mathfrak{B} , und die Zahl der aus den Enden der Spule austretenden Kraftlinien wird im Verhältnis $B/H = \mu$ vergrößert. Die im Eisenkörper auftretende Magnetisierung \mathfrak{S} macht das Eisen in der stromdurchflossenen Spule zu einem sehr starken Magneten, einem *Elektromagneten*. Diese Tatsache ist von größter technischer Bedeutung, ja man kann sie als die Grundlage der gesamten Elektrotechnik bezeichnen.

Abb. 385 zeigt einen Topfmagneten, bei dem sich die Spule in der zylindrischen Ausbohrung eines Weicheisenkörpers befindet. Befindet sich der Anker dicht am Magneten, so bildet er zusammen mit diesem einen fast vollkommen geschlossenen magnetischen Kreis, dessen magnetischer Widerstand um so kleiner ist, je dünner der verbleibende Zwischenraum ist. Infolgedessen ist der magnetische Fluß Φ und die Induktion B im Kreise und damit auch die Magneti-

sierung und die Anziehung des Ankers durch den Magneten in diesem Falle besonders groß. Man kann das auch so ausdrücken, daß der Topfmagnet bei angelegtem Anker keine oder nur sehr schwache Pole besitzt und daher auch keine merkliche Entmagnetisierung aufweist. Die gegenseitige Anziehung des Ankers und des Magneten bildet das magnetische Gegenstück zur Anziehung der Platten eines geladenen Kondensators. In Abb. 386 ist ein großer Elektromagnet für Laboratoriumszwecke dargestellt. Solche Elektromagnete können bei Verwendung einer Wasserkühlung mit sehr starken Strömen beschickt werden, und man erreicht zwischen ihren Polen, insbesondere wenn sie konisch geformt sind, wenigstens in kleinen Bereichen Feldstärken von vielen zehntausend Oersted.

228. Kraftwirkungen magnetischer Felder auf para-, dia- und ferromagnetische Körper. Jeder Körper, sei er para-, dia- oder ferromagnetisch, wird in einem magnetischen Felde zu einem magnetischen Dipol und erfährt infolgedessen drehende oder beschleunigende Kraftwirkungen, je nachdem, ob das Feld homogen oder inhomogen ist.

Ebenso wie bei den Dielektrika die Kraftwirkungen eines elektrischen Feldes nach Größe und Richtung davon abhängen, ob ihre Umgebung eine größere oder kleinere Dielektrizitätskonstante hat, als sie selbst (§ 140), so gilt das gleiche für *ferro-* und *paramagnetische* Körper, wenn wir an die Stelle des elektrischen das magnetische Feld, an die Stelle der Dielektrizitätskonstanten ϵ die Permeabilität μ setzen. Indem wir die bei den Dielektrika gemachten Ausführungen auf unseren Fall übertragen, können wir folgende Schlüsse ziehen. Im *homogenen* Felde stellt sich ein länglicher *ferro-* oder *paramagnetischer* Körper mit seiner Längsachse in die Feldrichtung ein, wenn seine Permeabilität größer ist als die seiner Umgebung. (Hierbei ist von den nicht kubischen Kristallen abgesehen, die ein kompliziertes Verhalten zeigen.) Im *inhomogenen* Felde wird er im gleichen Falle in Richtung wachsender Feldstärke gezogen. Ist jedoch seine Permeabilität kleiner als die seiner Umgebung, so stellt er sich im homogenen Felde mit seiner Längsachse senkrecht zur Feldrichtung. Im inhomogenen Felde wird er in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben. Durch Vorstehendes findet die Anziehung unmagnetischen Eisens durch einen Magneten (inhomogenes Feld) seine Erklärung.

Diamagnetische Körper verhalten sich in *inhomogenen* Feldern wie die paramagnetischen Körper. Hat ihre Umgebung eine größere Permeabilität als sie selbst, so werden sie in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben, andernfalls in Richtung wachsender Feldstärke. Hieraus ergibt sich aber ein unterschiedliches Verhalten im Vakuum (und bei Stoffen von nicht allzu kleiner Suszeptibilität auch in Luft). Die Permeabilität der paramagnetischen Stoffe ist größer, die der diamagnetischen kleiner als die des Vakuums. Daher werden paramagnetische Körper im inhomogenen Felde im Vakuum in Richtung wachsender, diamagnetische Körper in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben. Zur Untersuchung von Stoffen auf Para- oder Diamagnetismus ist das sehr inhomogene Feld in der Nähe eines spitzen Polschuhes eines starken Magneten besonders geeignet. Paramagnetische Stoffe werden, sofern ihre Suszeptibilität größer als die der umgebenden Luft ist, genau wie ein Stück

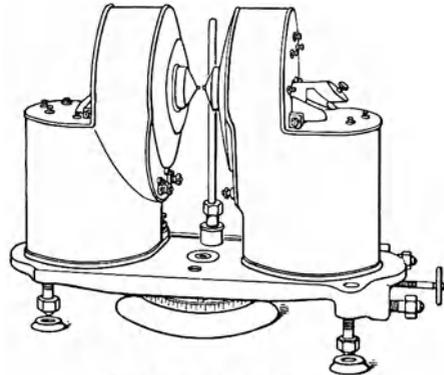


Abb. 386. Großer Elektromagnet.

Eisen, nur sehr viel schwächer, vom Pol angezogen, diamagnetische Stoffe werden abgestoßen (Abb. 387).

In *homogenen* Feldern aber verhalten sich para- und diamagnetische Körper (wenn wir wieder von den komplizierteren Verhältnissen bei den nicht kubischen Kristallen absehen) gleich. Dieses auf den ersten Blick überraschende Verhalten wird durch Abb. 388 erläutert. Die Ursache liegt in der Brechung der Kraftlinien. Diese werden beim Übergang von Vakuum in einen paramagnetischen Stoff, ebenso wie beim Eisen, vom Einfallslot weg, beim Übergang in einen diamagnetischen Stoff aber zum Einfallslot hin gebrochen [Gl. (8)]. Nun entstehen an den Eintritts- und Austrittsflächen des Körpers magnetische Belegungen, und diese sind bei den paramagnetischen und den diamagnetischen Körpern in entgegengesetztem Sinne zur Feldrichtung gegeneinander verschoben. In der Abb. 388 ist beim paramagnetischen Körper der Schwerpunkt der positiven Flächenbelegung nach rechts, der der negativen Flächenbelegung nach links verschoben. Bei dem diamagnetischen Körper

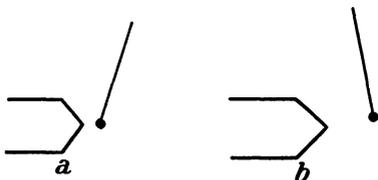


Abb. 387. a Paramagnetischer, b diamagnetischer Körper im *inhomogenen* Felde.

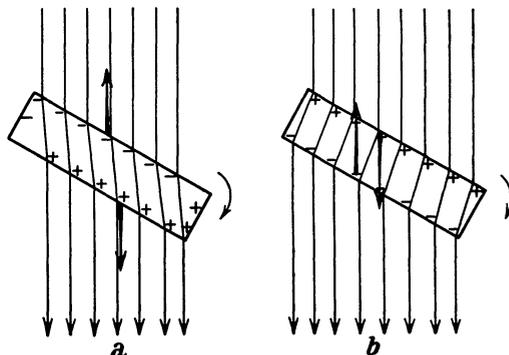


Abb. 388. a Paramagnetischer, b diamagnetischer Körper im *homogenen* Felde.

ist es ebenso. Aber die Belegungen der entsprechenden Flächen haben in den beiden Fällen wegen des entgegengesetzten Vorzeichens von κ verschiedenes Vorzeichen. Beim paramagnetischen Körper bildet sich auf der der Feldrichtung entgegengewandten Fläche eine negative, auf der anderen Fläche eine positive Belegung. Beim diamagnetischen Körper ist es umgekehrt. Denkt man sich nun die vom äußeren Felde herrührenden Kräfte in den Schwerpunkten der beiden entgegengesetzten Ladungen angreifend, so sieht man aus der Abb. 388, daß in beiden Fällen ein gleichsinniges Drehmoment auftritt, das den Körper mit seiner Längsachse in die Richtung des Feldes einzustellen sucht.

Die Kraftwirkung inhomogener Felder wird zum Nachweis der magnetischen Natur von Stoffen und zur Messung ihrer Permeabilität benutzt. Für Flüssigkeiten ist die Steighöhenmethode in Gebrauch. Man bringt die Flüssigkeit in ein U-förmiges Glasrohr, dessen einen Schenkel man zwischen die Pole eines Magneten setzt. Der andere Schenkel befindet sich außerhalb des Feldes des Magneten. Ist die Flüssigkeit para- oder ferromagnetisch, so steigt sie in dem im Felde befindlichen Schenkel empor, ist sie diamagnetisch, so sinkt sie dort herab. Aus der Größe der Wirkung kann man die Suszeptibilität berechnen.

Wenn auch die Kräfte, die in magnetischen Feldern auf para- und diamagnetische Stoffe wirken, klein sind gegenüber den auf Eisen ausgeübten Kräften, so ist es doch gelungen, sie dazu zu benutzen, um in technischem Maßstabe Stoffe verschiedenen magnetischen Verhaltens voneinander zu trennen. Das ist heute ein wichtiges Erzscheidungsverfahren.

229. Das allgemeine COULOMBSche Gesetz für Magnetpole. Das COULOMBSche Gesetz für Magnetpole in der Form der Gl. (2), § 186, bezog sich auf den Fall, daß sich die beiden Pole im Vakuum ($\mu = 1$), oder, was nahezu das

gleiche ist, in Luft befinden, und gilt streng nur für diesen Fall. Ist aber $\mu > 1$ oder < 1 , so gelten Überlegungen der gleichen Art, wie wir sie bezüglich des COULOMBSchen Gesetzes für elektrische Ladungen, die in ein Dielektrikum eingebettet sind, angestellt haben (§ 144). Unter der Wirkung des von den Polen ausgehenden magnetischen Feldes wird die Umgebung magnetisch polarisiert, und es bilden sich auf der Oberfläche der Pole magnetische Belegungen (eine Magnetisierung \mathfrak{J}) aus, deren Wirkung auf den zweiten Pol sich der Wirkung des ersten überlagert. Diese magnetische Belegung hat bei einem para- oder ferromagnetischen Stoff das entgegengesetzte Vorzeichen, wie der Pol selbst, bei einem diamagnetischen Stoff aber das gleiche Vorzeichen. In einer para- oder ferromagnetischen Umgebung wird daher die Anziehung der beiden Pole gegenüber derjenigen im Vakuum verringert, in einer diamagnetischen Umgebung aber vergrößert. Durch eine Überlegung, wie wir sie bei dem COULOMBSchen Gesetz für elektrische Ladungen angestellt haben, folgt, daß das allgemeine COULOMBSche Gesetz für Magnetpole lautet:

$$k = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ dyn.} \quad (12)$$

Die zwischen zwei Polen wirkende Kraft ist also in einer para- oder ferromagnetischen Umgebung kleiner, in einer diamagnetischen Umgebung größer als im Vakuum.

230. Das Induktionsgesetz im stoffgefüllten Raum. Wir haben gesehen, daß die wahre magnetische Feldstärke in einem magnetisierten Stoff nicht das magnetisierende Feld H , sondern die Induktion $B = \mu H$ ist, und es ist schon in § 213 gesagt worden, daß die elektromagnetische Induktion nicht von der Änderung von H , sondern von derjenigen von B abhängt. Denn die Wirkungen des in § 214 eingeführten zusätzlichen Feldes H' addieren sich zu denjenigen des magnetisierenden Feldes H . Das FARADAYSche Induktionsgesetz in der Form der Gl. (26) (§ 202) gilt deshalb nur im Vakuum, wo $B = H$ ist, in allen Stoffen ist B an die Stelle von H zu setzen, so daß wir das FARADAYSche Induktionsgesetz allgemein in der Form

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \int B \sin(dF, B) dF \text{ e.m.E.} \quad (13)$$

zu schreiben haben. Hingegen bleibt die Gleichung

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} \text{ e.m.E.} \quad (14)$$

(§ 202) erhalten, denn sie ist auf Grund der allgemeinen Definition des magnetischen Flusses Φ [§ 226, Gl. (9b) mit Gl. (13)] identisch.

Da in einer Umgebung von der Permeabilität μ die induzierte elektromotorische Kraft μ mal größer ist als im Vakuum, so wird auch die Induktivität und die Gegeninduktivität (§ 211) μ mal größer, wenn wir die betreffenden Leiter aus dem Vakuum in eine Umgebung der Permeabilität μ bringen. An Stelle der nur im Vakuum — sehr nahezu auch in Luft — gültigen Gl. (40), § 211, gilt allgemein für die Induktivität einer langen Spule bzw. einer Ringspule

$$L = \mu \frac{4\pi q n^2}{l}. \quad (15)$$

Für Spulen mit Eisenkernen (§ 227) gilt Gl. (15) bereits dann, wenn der Eisenkern in sich ringförmig geschlossen ist. Die Induktivität ist merklich kleiner, wenn ein hufeisenförmiger Eisenkern mit je einer Spule bewickelt ist, noch kleiner, wenn eine gerade Spule nur in ihrem Innern mit Eisen erfüllt ist. Die Ursache hierfür liegt in der Entmagnetisierung (§ 220).

Bei allen para- und diamagnetischen Stoffen ist der Unterschied von μ gegen 1 so klein, daß er bei der Induktion praktisch zu vernachlässigen ist. Hingegen bewirkt die Anwesenheit eines ferromagnetischen Stoffes, insbesondere von Eisen, eine sehr beträchtliche Vergrößerung der Induktionswirkungen.

Durch das Hinzutreten der Permeabilität μ ergibt sich jetzt zu den drei in § 202 erörterten Möglichkeiten eine vierte mögliche Ursache von Induktionswirkungen, nämlich die Veränderung von μ . In einer Spule, die, wie in § 213 (Abb. 372) beschrieben, von einer zweiten, mit einem Galvanometer verbundenen Spule umgeben ist, fließe ein konstanter Strom, so daß auch das Spulenfeld H konstant ist. Wird in die Spule nunmehr ein Eisenkern hineingeschoben, so zeigt ein starker Ausschlag des Galvanometers eine Induktionswirkung an, die während des Hineinschiebens des Eisenkerns andauert und erst verschwindet, wenn der Eisenkern zur Ruhe gekommen ist. Die Induktionswirkung hat ihren Grund darin, daß beim Einschieben des Eisenkernes zu dem Spulenfelde \mathfrak{H} das sehr viel stärkere zusätzliche Feld \mathfrak{H}' hinzugekommen ist, wodurch der die zweite Spule durchsetzende magnetische Fluß außerordentlich vermehrt wird.

231. Die Energie des magnetischen und des elektromagnetischen Feldes. Wir haben bereits in § 201 erwähnt, daß ein magnetisches Feld der Sitz magnetischer Energie ist. Zur Berechnung dieser Energie wollen wir von dem Felde im Innern einer Ringspule ausgehen. Die in ihr in der Zeit dt geleistete Stromarbeit ist, wenn \mathfrak{E} die elektromotorische Kraft der Stromquelle, $\mathfrak{E}_i = -L di/dt$ die induzierte elektromotorische Kraft der Induktivität (§ 211), also die Summe der Teilspannungen im Stromkreis $\sum U_k = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i$ ist,

$$dA = (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_i) i dt = \left(\mathfrak{E} - L \frac{di}{dt} \right) i dt = \mathfrak{E} i dt - L i di$$

(§ 163). In einem praktisch selbstinduktionsfreien Leiter, also einem solchen, der nur ein sehr schwaches magnetisches Feld hat (z. B. in einem geraden Draht), ist die Stromarbeit, die erzeugte JOULESche Wärme, gleich $dA = \mathfrak{E} i dt$, also um den Betrag $L i di$ größer. Die Stromquelle jedoch liefert bei der Stromstärke i stets die Energie $\mathfrak{E} i dt$. Die Differenz $L i di$ tritt in unserem Falle nicht als JOULESche Wärme im Leiter in die Erscheinung, sondern sie dient zum *Aufbau des magnetischen Feldes*. Es wächst also in der Zeit dt die Feldenergie um den Betrag

$$dA_m = L i di \text{ erg.}$$

Durch Integration ergibt sich hieraus, wenn wir über die Zeit vom Einschalten des Spulenstromes ($i = 0$) bis zum praktischen Konstantwerden des Stromes $i = \mathfrak{E}/R$ (§ 211) integrieren,

$$A_m = \frac{1}{2} L i^2 \text{ erg.}$$

Wenn wir nach Gl. (15) noch den Ausdruck für die Induktivität L einführen und berücksichtigen, daß die Induktion in der Spule $B = \mu H = 4\pi n i \mu/l$ ist, erhalten wir schließlich

$$A_m = \frac{1}{8\pi\mu} B^2 q l = \frac{\mu}{8\pi} H^2 q l \text{ erg.} \quad (16)$$

Das Feld ist auf den Innenraum der Ringspule beschränkt, dessen Volumen gleich $q l$ ist. Demnach entfällt auf die Volumeinheit die Energie

$$\varrho_m = \frac{1}{8\pi\mu} B^2 = \frac{\mu}{8\pi} H^2 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (17)$$

Dies ist die *Energiedichte* des magnetischen Feldes. Die Gl. (17) gilt für jedes magnetische Feld unter der Voraussetzung daß B und H einander proportional, also μ eine Konstante ist. Bei den Ferromagnetika ist das nicht der Fall, und bei diesen tritt deshalb an die Stelle der Gl. (17) ein komplizierterer Ausdruck.

Es ist daher die Gesamtenergiedichte eines *elektromagnetischen* Feldes [§ 144, Gl. (29)]

$$e = e_e + e_m = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (18)$$

Dabei haben wir E im elektrostatischen Maße, H in Oersted angesetzt.

232. Die MAXWELLSchen Gleichungen. Abb. 389 zeigt ein in der Zeichnungsebene (xy -Ebene) liegendes rechteckiges Flächenelement mit den Seiten dx und dy , das von einem elektrischen Felde \mathfrak{E}_z (Betrag E_z) senkrecht durchsetzt werde. Ist dieses zeitlich veränderlich, so tritt durch das Flächenelement ein Verschiebungsstrom (§ 209) $i_v = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} dx dy$. Ist $\frac{\partial E_z}{\partial t}$ positiv, i_v also in Richtung der z -Achse nach vorn gerichtet, so umlaufen die magnetischen Kraftlinien des Verschiebungsstromes das Flächenelement gegen den Uhrzeigersinn, wie man an Hand der Schraubenregel des § 190 feststellt. Die Komponenten

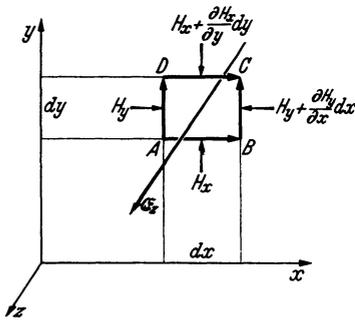


Abb. 389. Zur Ableitung der 1. MAXWELLSchen Gleichung.

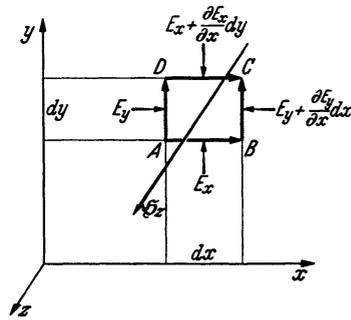


Abb. 390. Zur Ableitung der 2. MAXWELLSchen Gleichung.

der magnetischen Feldstärke längs der Strecken AB und AD seien H_x und H_y . Dann sind nach dem TAYLORSchen Satz die Komponenten längs der Strecken DC und BC gleich $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy$ und $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$. Wir bilden die Summe der magnetischen Spannungen $H_s ds$ längs des Umfanges des Rechtecks, indem wir bei A beginnend, das Rechteck einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen. Dabei sind diejenigen Anteile, die in der positiven Koordinatenrichtung durchlaufen werden, positiv, die übrigen negativ zu rechnen. Wir erhalten so die bei einem vollen Umlauf um den Verschiebungsstrom i_v durchlaufene magnetische Spannung, und diese beträgt nach § 200, Gl. (24), (mit $n = 1$) $4\pi i_v = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} dx dy$.

Demnach ist

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} dx dy &= H_x dx + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx - H_y dy \\ &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Dividieren wir durch die Fläche $dx dy$ des Rechtecks, so folgt die

I. MAXWELLSche Gleichung:
$$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (19)$$

Nummehr stellen wir eine entsprechende Überlegung für ein die Fläche senkrecht durchsetzendes, zeitlich veränderliches magnetisches Feld \mathfrak{H}_z (Betrag H_z) an (Abb. 390). Die Kraftlinien dieses Feldes sind nach § 208 von elektrischen Kraftlinien ringförmig umgeben. Diese umlaufen bei positiven dH_z/dt das Flächenelement $dx dy$, wie man mit Hilfe der früher angegebenen

Regeln feststellt, im Uhrzeigersinne. Die elektrische Feldkomponente längs AB sei E_x , längs AD E_y . Entsprechend den obigen Betrachtungen ergeben sich dann die Komponenten längs der beiden anderen Seiten wie in Abb. 390 angegeben. Nunmehr bilden wir, indem wir das Rechteck einmal im Uhrzeigersinn umlaufen und wie oben die Vorzeichen beachten, die Summe der elektrischen Teilspannungen $E_s ds$. Diese ist aber gleich der im Rechtecksumfang vom zeitlich veränderlichen Felde H_z induzierten elektromotorischen Kraft, und diese wieder ist im vorliegenden Falle nach Gl. (13) $\frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} dx dy$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} dx dy &= E_y dy + \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx - \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy - E_x dx \\ &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Dividieren wir wieder durch die Fläche $dx dy$, so folgt die

$$2. \text{ MAXWELLSche Gleichung: } \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (20)$$

Den Gl. (19) und (20) entsprechende Gleichungen gelten auch für die übrigen Koordinaten und entstehen aus ihnen durch zyklische Vertauschung der Veränderlichen x, y, z . Man erhält so 6 Gleichungen, die man in vektorieller Schreibweise zu zwei Gleichungen zusammenfassen kann:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = e^2 \text{ rot } \mathfrak{H}, \quad (21a)$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = - \text{ rot } \mathfrak{E}. \quad (21b)$$

$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ist die dielektrische Verschiebung (§ 144). Alle Größen sind hier im elektromagnetischen Maß gemessen. Mißt man aber \mathfrak{E} und \mathfrak{D} im elektrostatischen Maß, so ergibt sich die in den elektrischen und magnetischen Größen bis auf das Vorzeichen symmetrische Form

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = c \text{ rot } \mathfrak{H}, \quad (22a)$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = - c \text{ rot } \mathfrak{E}. \quad (22b)$$

Tritt durch die betrachtete Fläche noch ein Leitungsstrom von der Stromdichte j_i , so ist, wie man ohne Mühe ableiten kann, zur linken Seite der Gl. (21a) noch $4\pi c^2 j_i$, zur linken Seite der Gl. (22a) noch $4\pi j_i$ zu addieren.

Die MAXWELLSchen Gleichungen bilden die Grundgleichungen der Elektrodynamik und beherrschen auch die Wellentheorie des Lichtes.

233. Thermomagnetische und galvanomagnetische Erscheinungen. Unter dieser Bezeichnung faßt man eine Reihe von Erscheinungen zusammen, die durch Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen elektrischen oder Wärmestrom in Metallen eintreten. Je zwei dieser Effekte, ein thermischer und ein elektrischer, bilden ein sich entsprechendes Paar.

1a. HALL-Effekt. Die in Abb. 391 dargestellte Metallplatte werde in Richtung des Pfeils von einem elektrischen Strom i durchflossen. A und B seien zwei Punkte gleichen Potentials, was etwa dadurch festgestellt wird, daß durch einen sie verbindenden Stromkreis mit Galvanometer kein Strom fließt. Wird ein auf der Metallplatte senkrecht stehendes magnetisches Feld erregt, so entsteht zwischen A und B eine elektrische Spannung, die der magnetischen Feldstärke proportional ist.

1 b. NERNST-(ETTINGSHAUSEN-)Effekt. Thermisches Gegenstück zum Effekt 1 a. Der Pfeil in Abb. 391 stellt jetzt einen Wärmestrom dar. Zwei Punkte *A* und *B*, welche ohne magnetisches Feld keine Temperaturdifferenz zeigten, zeigen eine solche bei Erregung eines zur Platte senkrechten Feldes.

2. *Thermomagnetische Transversaleffekte*. a) Bei der gleichen Anordnung wie beim HALL-Effekt entsteht zwischen *A* und *B* auch eine Temperaturdifferenz (RIGHI-LEDUC-Effekt).

b) Thermisches Gegenstück: Bei der gleichen Anordnung wie bei 1 b entsteht zwischen *A* und *B* auch eine elektrische Spannung (ETTINGSHAUSEN-Effekt).

3. *Änderung des Leitvermögens*. a) Erregung eines magnetischen Feldes vermindert das elektrische Leitvermögen eines Metalles (THOMSON-Effekt).

b) Erregung eines magnetischen Feldes vermindert das Wärmeleitvermögen des Metalles (MAGGI-RIGHI-LEDUC-Effekt).

4. *Thermomagnetische Longitudinaleffekte*. a) Fließt durch die Platte ein Wärmestrom, so entsteht in ihr eine dem Wärmestrom entgegengerichtete Spannung (ETTINGSHAUSEN-NERNST-Effekt).

b) Das elektrische Gegenstück zu diesem Effekt besteht in dem Auftreten eines Temperaturgefälles längs eines stromdurchflossenen Leiters (NERNST-Effekt).

Diese Erscheinungen können zum Teil durch die Einwirkung des magnetischen Feldes auf die im Metall bewegten Elektronen erklärt werden. Doch fehlt es bis heute noch an einer vollständigen Theorie.

Die genannten Effekte sind beim Wismut besonders ausgeprägt und nur bei ihm sämtlich beobachtet worden. Nach LENARD benutzt man die Widerstandsänderung einer flachen *Wismutspirale* zur *Messung der Stärke magnetischer Felder* (Effekt 3 a).



Abb. 391. Zu den thermomagnetischen und galvanomagnetischen Effekten.

234. Die magnetischen Größen im CGS-System und im internationalen Maßsystem. Da die magnetische Polstärke *m* im COULOMBSchen Gesetz des Magnetismus in der gleichen Weise mit Kraft und Länge verbunden auftritt wie die Elektrizitätsmenge *e* im COULOMBSchen Gesetz der Elektrostatik, so ergibt sich für *m* die gleiche Dimension im CGS-System wie für *e* im elektrostatischen Maßsystem. Das gleiche gilt für die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} und die magnetische Spannung U_m bezüglich der entsprechenden elektrischen Größen \mathfrak{E} und U im elektrostatischen Maßsystem. Die Permeabilität μ und die Suszeptibilität κ sind reine Zahlen. Die Induktion \mathfrak{B} ist eine Feldstärke; die gleiche Dimension hat die Magnetisierung \mathfrak{J} , wie man aus Gl. (4), § 216, erkennt. Es ergibt sich daher die nachstehende Tabelle 29.

Tabelle 29. Dimensionen der magnetischen Größen.

Polstärke <i>m</i>	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1} $,
Magnetisches Moment \mathfrak{M}	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{5}{2}} t^{-1} $,
Feldstärke \mathfrak{H} , Induktion \mathfrak{B} , Magnetisierung \mathfrak{J}	$ m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} $,
Magnetische Spannung U_m	$ m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1} $,
Permeabilität μ , Suszeptibilität κ	$ m^0 l^0 t^0 $.

Die von uns bisher benutzten Definitionen und Einheiten für die magnetischen Größen sind diejenigen, die in der Physik, insbesondere in der theoretischen Physik, im allgemeinen üblich sind. In der Technik liegt aber der Definition dieser Größen ein vollkommen anderer Gedankengang zugrunde. Da die technischen Definitionen und Einheiten neuerdings auch in physikalische Lehrbücher Eingang gefunden haben, so entstehen für den Anfänger zunächst beträchtliche

Schwierigkeiten, und er gerät leicht in Verwirrung. Aus diesem Grunde soll hier zunächst noch einmal der von uns verfolgte Gedankengang in kurzen Zügen dargelegt werden, um anschließend den Gedankengang auseinanderzusetzen, der zur Aufstellung der technischen Definition der magnetischen Größen und ihrer technischen Einheiten geführt hat.

Wir sind von dem Begriff der Polstärke ausgegangen und haben ihre Einheit durch die Festsetzung definiert, daß die Konstante des COULOMBSchen Gesetzes für Magnetpole im Vakuum eine reine Zahl vom Betrage 1 sein soll (§ 186). Daran schloß sich die Definition der magnetischen Feldstärke als die in einem magnetischen Felde auf den Einheitspol wirkende Kraft, wobei die Kraft in dyn gemessen wird. Die Einheit der Feldstärke haben wir 1 Oersted genannt. Weiter haben wir die elektromagnetische Einheit der Stromstärke dadurch definiert, daß die Konstante des LAPLACESchen Gesetzes ebenfalls eine reine Zahl vom Betrage 1 sein soll (§ 192). Auf Grund dieser Festsetzungen ergab sich, was für das Folgende anzumerken wichtig ist, der Betrag der magnetischen Feldstärke im Innern einer langen, gestreckten Spule zu

$$H = \frac{4\pi n i}{l} \text{ Oersted} \quad (23)$$

(§ 192). Wir definierten schließlich die Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ als das wahre Feld in einem magnetisierten Stoff und maßen sie in der Einheit 1 Gauß. Die Permeabilität μ ist nach unseren Festsetzungen eine reine Zahl, ebenso die Suszeptibilität κ .

Das *technische magnetische Maßsystem* beruht unmittelbar auf dem internationalen elektrischen Maßsystem, also auf den Einheiten Ampere, Volt usw. Der Definition der magnetischen Feldstärke und der Festsetzung ihrer Einheit wird die praktisch wichtigste und einfachste Feldform zugrunde gelegt, das Feld in einer langen, gestreckten Spule. Das magnetische Feld in einer solchen Spule ist nach der obigen Gl. (23) der Stromstärke i , der Zahl n der Spulenwindungen und der reziproken Länge $1/l$ der Spule, also der Größe ni/l , proportional. Man nennt das Produkt ni , wenn i in Ampere gemessen wird, die *Amperewindungszahl* oder *Durchflutung* der Spule, und die Größe ni/l hat also die Bedeutung *Amperewindungszahl/cm*. Im technischen magnetischen Maßsystem wird nun festgesetzt, daß die Feldstärke H in einer Spule unmittelbar durch die Größe ni/l gemessen werden soll, und daher gilt als Einheit der Feldstärke H die Einheit dieser Größe, i in Ampere gemessen, also 1 Amperewindungszahl/cm oder meist kürzer 1 *Amperewindung/cm*. Es ist also die Feldstärke in einer langen gestreckten Spule hiernach

$$H = \frac{n i}{l} \text{ Amperewindungen/cm}, \quad (24)$$

wobei n/l die auf 1 cm der Spulenlänge entfallende Windungszahl ist. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Gl. (23) nur durch das Fehlen des Zahlenfaktors 4π . Aber es ist zu beachten, daß als Stromeinheit in Gl. (23) die elektromagnetische Einheit gleich 10 Ampere, in Gl. (24) das Ampere zu verwenden ist. Führen wir in Gl. (23) statt der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke das Ampere ein, so ist die rechte Seite mit dem Faktor $1/10$ zu multiplizieren, wenn wieder der richtige Wert der Feldstärke in Oersted herauskommen soll. Es folgt also, wenn wir das gleiche Feld einmal in Oersted, einmal in Amperewindungen/cm ausdrücken, und die Stromstärke in *beiden* Fällen in Ampere messen

$$H = 0,4 \pi n i / l \text{ Oersted} = n i / l \text{ Amperewindungen/cm}$$

oder

$$1 \text{ Amperewindung/cm} = 0,4 \pi \text{ Oersted} = 1,257 \text{ Oersted.}$$

Die technische Einheit der magnetischen Feldstärke ist also rund 26% größer als das Oersted.

Die Induktion B wird im technischen Maßsystem durch die Induktionswirkung definiert. Nach § 230 ist die elektromotorische Kraft, die in einer senkrecht zum veränderlichen magnetischen Fluß stehenden Spule induziert wird,

$$\mathcal{E} = F \cdot \frac{dB}{dt}, \quad \text{also} \quad B = \frac{1}{F} \int \mathcal{E} dt \text{ Volt} \cdot \text{sec} \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (25)$$

Mißt man die elektromotorische Kraft \mathcal{E} in Volt, so wird das Integral $\int \mathcal{E} dt$ in Volt \times sec gemessen oder, wie man kürzer sagt, in *Voltsekunden*. Auf Grund der Gl. (25) wird nun die Induktion B im technischen Maßsystem in den gleichen Einheiten gemessen wie die rechte Seite dieser Gleichung, also in *Voltsekunden/cm²*. Die Gl. (25) gilt auch in dem von uns benutzten Maßsystem, nur wird die linke Seite in Gauß, die rechte in elektromagnetischen Spannungseinheiten $\times \text{sec} \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessen. Da nun 1 Volt = 10^8 elektromagnetischen Spannungseinheiten ist, so ist, wenn wir B in Gauß ausdrücken, die elektromotorische Kraft \mathcal{E} aber in Volt messen,

$$B \text{ Gauß} = 10^{-8} B \text{ Voltsekunden} \cdot \text{cm}^{-2}$$

oder

$$1 \text{ Gauß} = 10^{-8} \text{ Voltsekunden} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Die Beziehung $B = \mu H$ wird auch im technischen Maßsystem aufrecht erhalten. Daraus ergibt sich aber, daß die Permeabilität μ in diesem System keine reine Zahl mehr ist und auch einen anderen Betrag hat als im elektromagnetischen System. Wir wollen zur Unterscheidung die im technischen Maßsystem gemessenen Größen hier mit dem Index t bezeichnen. Dann ist also $B_t = \mu_t H_t$. Im elektromagnetischen Maßsystem gilt $B = \mu H$. Es folgt

$$\mu_t = \mu \frac{H}{H_t} \frac{B_t}{B} \frac{\text{Voltsekunden} \cdot \text{cm}^{-2}}{\text{Amperewindungen} \cdot \text{cm}^{-1}}.$$

Nun ist aber $H/H_t = 0,4 \pi = 1,257$ und $B_t/B = 10^{-8}$, so daß

$$\mu_t = 0,4 \pi \mu \cdot 10^{-8} = \mu \cdot 1,257 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Voltsekunden} \cdot \text{cm}^{-2}}{\text{Amperewindungen} \cdot \text{cm}^{-1}}.$$

Demnach sind die im technischen Maßsystem gemessenen Permeabilitäten aller Stoffe um den Faktor $1,257 \cdot 10^{-8}$ von denjenigen im elektromagnetischen Maßsystem verschieden. Die Permeabilität des Vakuums, die im letzteren System den Betrag 1 hat, hat im technischen Maßsystem den Betrag $1,257 \cdot 10^{-8}$. Vom Standpunkt des technischen Maßsystems erscheinen die Permeabilitäten des elektromagnetischen Systems als relative, d. h. auf das Vakuum bezogene Größen.

Da die magnetische Spannung nach § 200, Gl. (24), die gleiche Dimension hat, wie ein elektrischer Strom, so wird sie technisch in der Einheit 1 Ampere gemessen.

III. Elektromagnetische Geräte und Maschinen.

235. **Tangentenbussole. Nadelgalvanometer.** Eine Tangentenbussole besteht aus einer kreisförmigen, vertikal aufgestellten Stromschleife, oder aus einer kleinen Zahl von dicht nebeneinanderliegenden Schleifen, in deren Mitte sich eine meist auf einer Spitze drehbare Magnetnadel befindet, deren Einstellung man auf einer Kreisteilung ablesen kann (Abb. 392). Die Tangentenbussole wird so aufgestellt, daß die Ebene der Stromschleife in der Richtung der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes liegt, die Magnetnadel also in dieser Ebene steht, wenn kein Strom fließt. Fließt ein Strom durch die Schleife, so entsteht ein zusätzliches, senkrecht zur Schleifenebene gerichtetes

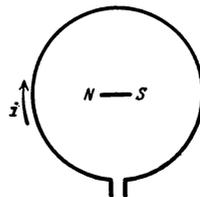


Abb. 392. Schema der Tangentenbussole.

magnetisches Feld, welches den Magneten ablenkt. Die Feldstärke in der Mitte der Schleife beträgt nach Gl. (9), § 192, $H_i = 2\pi i/r$ bzw. bei n Windungen $H_i = 2\pi ni/r$ Oersted (i in elektromagnetischen Einheiten gemessen). Der Betrag der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes sei H_e . Dann addieren sich die beiden senkrecht aufeinanderstehenden Felder vektoriell zum Felde \mathcal{H} (Abb. 393). In der Richtung dieses Feldes stellt sich die Magnetnadel ein. Man entnimmt aus der Abbildung, daß der Ablenkungswinkel der Magnetnadel durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H_i}{H_e} = \frac{2\pi ni}{r H_e}$$

gegeben ist.

Ist die Stärke des erdmagnetischen Feldes und sind die geometrischen Abmessungen der Stromschleife bekannt, so kann man hieraus den Strom i berechnen. Das Gerät könnte daher als Strommesser dienen. Jedoch ist es viel zu unempfindlich, zu unbequem zu handhaben und zu vielen Störungen ausgesetzt. Verwendung findet es nur zur Messung der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes.

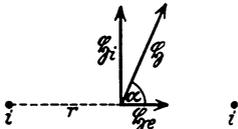


Abb. 393.
Zur Tangentenbussole.

Die *Nadelgalvanometer* (erste Konstruktion durch SCHWEIGGER und POGGENDORFF 1820, Multiplikator) unterscheiden sich von der Tangentenbussole vor allem in zwei Punkten: 1. Die Empfindlichkeit ist erheblich größer; dies wird erreicht durch Verwendung von Spulen mit zahlreichen Windungen statt einer oder weniger Stromschleifen. 2. Die Störungen infolge der Schwankungen des erdmagnetischen Feldes müssen beseitigt werden. Man darf also nicht, wie bei der

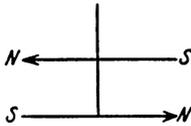


Abb. 394.
Astatisches Nadelpaar.

Tangentenbussole, das Richtmoment des erdmagnetischen Feldes für die Magnetnadel benutzen, sondern diese wird an einem Faden, z.B. einem Kokon- oder Quarzfaden, aufgehängt, dessen Torsionselastizität das erforderliche Richtmoment liefert. Um die Wirkung des erdmagnetischen Feldes auszuschalten, werden zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Der eine besteht darin, daß man ein *astatisches Nadelpaar* verwendet. Das drehbare System besteht in diesem Falle nicht aus einer, sondern aus zwei möglichst gleichen, starr miteinander verbundenen und entgegengesetzt gerichteten Magnetnadeln (Abb. 394). Auf ein solches Nadelpaar kann das Erdfeld (soweit es homogen, d. h. am Orte der beiden Nadeln gleich stark und gleich gerichtet ist) kein Drehmoment ausüben, weil es die beiden Magnete gleich stark nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen strebt. Die untere Magnetnadel hängt zwischen zwei flachen, parallelen Spulen mit horizontalen Achsen so, daß sie in ihrer Ruhelage senkrecht zur Spulenchse steht; die obere Nadel hängt über den Spulen. Fließt durch die Spulen ein Strom, so sucht sich die untere Nadel in Richtung der Spulenchse einzustellen. (Bei manchen Galvanometern befinden sich auch beide Nadeln im Innern von zwei gleichgebauten Spulen, die vom Strome in entgegengesetztem Sinne durchflossen werden.) Auf die obere Nadel wirkt ein allerdings sehr viel schwächeres Drehmoment im *gleichen* Sinne, da die Richtung des magnetischen Feldes der Spulen außen derjenigen im Innern entgegengesetzt ist. Mit dem Nadelssystem ist ein Spiegel zur Ablesung der Drehungen fest verbunden. Die Drehung aus der Ruhelage ist um so größer, je stärker der Strom ist. Und zwar ist die Gleichgewichtslage der Nadel dadurch gegeben, daß sich das vom magnetischen Felde herrührende Drehmoment und das von dem Richtmoment der Aufhängung herrührende Drehmoment aufheben. Galvanometer dieser Art sind zuerst von THOMSON angegeben worden. Abb. 395 zeigt als Beispiel ein Nadelgalvanometer nach NERNST. Das astatische Nadelpaar M besteht aus

zwei Magnetchen, von denen sich das eine innerhalb, das zweite dicht oberhalb der von dem zu messenden Strom durchflossenen Spule befindet.

Der andere Weg, der zur Beseitigung der erdmagnetischen und sonstigen magnetischen Störungen eingeschlagen wird, besteht darin, daß man sie von der Nadel nach Möglichkeit überhaupt fernhält. Das geschieht bei den Panzergalvanometern nach DU BOIS, RUBENS und PASCHEN. Diese besitzen kein astatisches Nadelpaar, aber das ganze Meßwerk ist in einen dreifachen Panzer aus etwa 1 cm dickem weichen Eisen eingeschlossen. Dieses hält das äußere erdmagnetische Feld vom Innern so gut wie vollständig fern (Abb. 382). Zur Erzielung eines kleinen Trägheitsmomentes (kleine Schwingungsdauer) ohne Einbuße an magnetischem Moment benutzt man als Nadel ein System von mehreren kurzen, parallel und gleichsinnig gerichteten Magnetchen. Mit den besten Nadelgalvanometern kann man Ströme bis etwa 10^{-12} Amp. messen.

Die Nadelgalvanometer werden nur in solchen Fällen verwendet, wo es auf die mit ihnen erreichbare hohe Empfindlichkeit ankommt, also zur Messung schwächster Ströme. Im übrigen kommt die Verwendung von Nadelgalvanometern für die Meßtechnik heute überhaupt nicht mehr in Betracht.

236. Drehpulvergeräte für Gleichstrom. Die heutigen genauen Meßgeräte für Ströme und Spannungen beruhen durchweg auf dem *Drehspulprinzip* (DEPREZ-D'ARSONVAL, 1881), einer Umkehrung des den Nadelgalvanometern zugrunde liegenden Prinzips. Die Meßgeräte bestehen aus einem starken Hufeisenmagneten *M*, zwischen dessen Polschuhen *P* sich eine drehbare, von dem zu messenden Strom durchflossene Spule *S* befindet. Zwischen den zylindrisch ausgedrehten Polschuhen befindet sich ortsfest (nicht etwa mit der Spule drehbar) ein zylindrischer Weicheisenkern *E*, der nur einen schmalen Luftspalt für die Drehung der Spule frei läßt (Abb. 396). Er bewirkt, daß in dem Luftspalt ein radial gerichtetes, bei jeder Spulenstellung in der Spulenebene liegendes und überall gleich starkes magnetisches Feld herrscht. So wird eine nahezu vollkommene Unschädlichmachung der magnetischen Störungen erreicht, da das magnetische Feld im Luftspalt ganz außerordentlich viel stärker ist als das erdmagnetische Feld und etwaige andere äußere Störfelder, so daß deren Wirkungen, insbesondere ihre Schwankungen im allgemeinen nicht mehr ins Gewicht fallen.

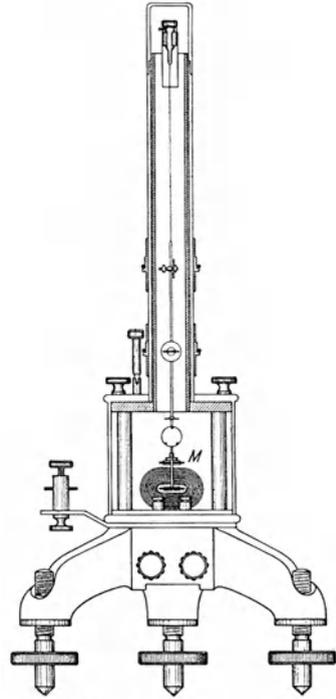


Abb. 395. Nadelgalvanometer nach NERNST.

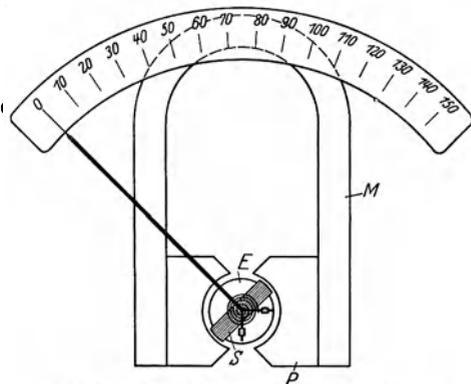


Abb. 396. Drehpulgalvanometer mit Zeigerablesung.

Die Drehspule ist bei weniger empfindlichen Meßgeräten auf Spitzen gelagert und mit einem Zeiger versehen, der die Drehung der Spule auf einer Skala anzeigt. Solche Geräte können mit einer festen Eichung versehen werden. Die Ruhelage der Spule ist durch eine Spiralfeder bestimmt. Bei empfindlichen Geräten (Galvanometern) ist die Spule an einem dünnen Metallband aufgehängt. Die Stromzuführung erfolgt durch dünne Metallbänder oder durch Metallfedern,

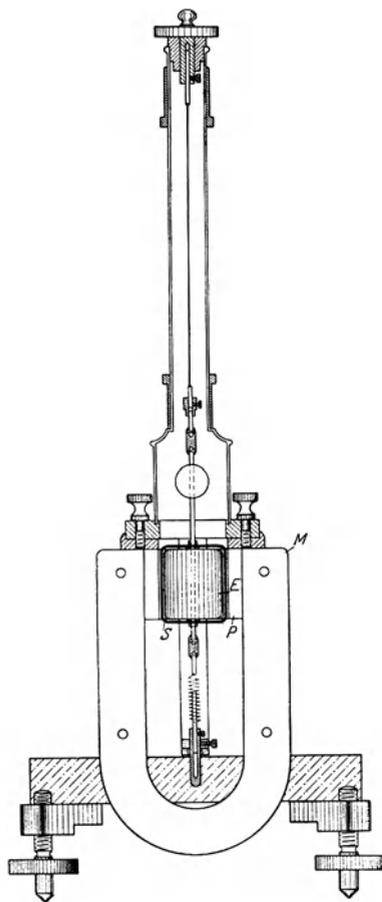


Abb. 397. Drehspulgalvanometer mit Spiegelablesung.

gegebenenfalls auch durch die Aufhängung. Mit der Spule ist ein Spiegel zur Ablesung der Drehungen verbunden (Abb. 397, *M* Magnet, *P* Polschuhe, *E* Eisenkern, *S* Spule).

Bei Stromdurchgang greifen an den beiden zum Felde senkrechten Spulenseiten, die in entgegengesetzter Richtung vom Strome durchflossen werden, gleich große, entgegengesetzte Kräfte \pm , $-\pm$ an (Abb. 398), die auf die Spule ein Drehmoment ausüben. Es ist der Stromstärke proportional und kehrt seine Richtung mit der Stromrichtung um. Daher sind solche Meßgeräte *nur für Gleichstrom* verwendbar.

Gleichstromgalvanometer können auch zur Messung von *Elektrizitätsmengen*, welche in sehr kurzer Zeit durch sie entladen werden, benutzt werden, wenn die Dauer eines solchen Stromstoßes klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometersystems ist. Die Spule erhält durch den Stromstoß, wie ein kurz angestoßenes Pendel, einen Drehimpuls und schwingt bis zu einem bestimmten, von

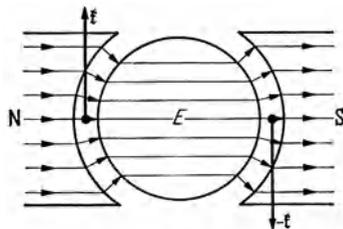


Abb. 398. Zum Drehspulgalvanometer.

der Stärke und Dauer des Stromstoßes — dem Integral $\int i dt$, also der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge — abhängigen Umkehrpunkt aus. Dieser ballistische Ausschlag ist also (unter der Voraussetzung gleichbleibender Dämpfung) der bei dem Stromstoß durch die Spule geflossenen Elektrizitätsmenge proportional. Für diese Verwendungsart besonders gebaute Galvanometer heißen *ballistische Galvanometer*.

237. Schwingung und Dämpfung von Galvanometern. Wird die Drehspule durch irgendeinen Anstoß aus ihrer natürlichen Ruhelage entfernt, so bewirkt die Torsion ihrer Aufhängung, daß sie in diese zurückzukehren sucht. Wäre die Spule frei von jeder Dämpfung, so würde sie unter dieser Wirkung eine ungedämpfte Schwingung um ihre Ruhelage ausführen [§ 42, Gl. (128)]. Es besteht aber eine Dämpfung, die von zwei Ursachen herrührt. Erstens erfährt

die Spule in dem engen Luftspalt, in dem sie sich dreht, eine Dämpfung durch Luftreibung. Außerdem aber entsteht in der Spule infolge ihrer Drehung im magnetischen Felde eine induzierte elektromotorische Kraft. Sind nun die Klemmen des Galvanometers, wie es bei seiner Benutzung fast immer der Fall ist, durch einen äußeren Widerstand leitend verbunden, so tritt in dem durch die Spule und diesen Widerstand gebildeten Leiterkreis ein Induktionsstrom auf. Infolgedessen erfährt die Spule im magnetischen Felde Kräfte, und diese sind nach dem LENZschen Gesetz so gerichtet, daß sie die Bewegung der Spule hemmen, also ein der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit der Spule entgegengerichtetes Drehmoment an ihr erzeugen. Hierdurch entsteht also eine weitere *elektromagnetische Dämpfung* der Spule, die im gleichen Sinne wirkt, wie die Luftreibung. Das Auftreten dieser Dämpfung ist auch sonst leicht verständlich. Wenn in dem Leiterkreis ein Induktionsstrom fließt, so erzeugt er Stromwärme, die nur auf Kosten der Schwingungsenergie der Spule entstehen kann; diese muß also mit der Zeit abnehmen, die Bewegung der Spule muß gedämpft sein. Und zwar ist die elektromagnetische Dämpfung um so größer, je kleiner der äußere Widerstand ist, durch den das Galvanometer geschlossen ist, denn um so stärker ist der Induktionsstrom. *Die Dämpfung eines Galvanometers nimmt mit abnehmendem äußeren Widerstand zu.*

Wir haben in § 42 die verschiedenen Bewegungsformen eines gedämpften schwingungsfähigen Systems ausführlich besprochen. Dem entsprechend führt auch die Spule eines Galvanometers bei kleiner Dämpfung, also bei größerem äußeren Widerstand, eine *periodische, gedämpfte Schwingung* aus (Abb. 399a), bei großer Dämpfung, also bei kleinem äußeren Widerstand, eine *aperiodische Kriechbewegung* (Abb. 399b). Diese beiden Bewegungen gehen bei einem bestimmten Dämpfungsbetrage, also bei einem bestimmten äußeren Widerstand, dem *Grenzwiderstand* des Galvanometers, ineinander über (*aperiodischer Grenzfall*, Abb. 399c). Bei periodischer gedämpfter Schwingung besitzt das Galvanometer ein *logarithmisches Dekrement* Λ (§ 42), das als Differenz der natürlichen Logarithmen je zweier auf der gleichen Seite aufeinanderfolgender Schwingungsweiten seines Ausschlages α definiert ist, $\Lambda = \log \alpha_n - \log \alpha_{n+1} = \log \alpha_n / \alpha_{n+1}$ (§ 42).

Die vorstehenden Ausführungen gelten nicht nur bezüglich der Rückbewegung der Spule in ihre natürliche Ruhelage, sondern auch für ihr Einschwingen in eine neue Ruhelage, wenn eine konstante äußere elektromotorische Kraft in ihr einen konstanten Strom erzeugt. Die jeweilige Ruhelage erreicht die Spule am schnellsten im aperiodischen Grenzfall. Aus diesem Grunde sucht man bei der Arbeit mit dem Galvanometer diesen Fall durch passende Wahl des äußeren Widerstandes stets nach Möglichkeit zu verwirklichen. Ist der äußere Widerstand zu groß, so daß noch der periodische Fall vorliegt, so legt man parallel zum Galvanometer einen passenden Nebenschluß. Ist der äußere Widerstand zu klein, so daß die Spule kriecht, so erhält das Galvanometer einen passenden Vorwiderstand. In beiden Fällen geschieht dies mit einem Opfer an Empfindlichkeit der Meßanordnung, die aber durch die erhöhte Sicherheit der Messung mehr als ausgeglichen wird.

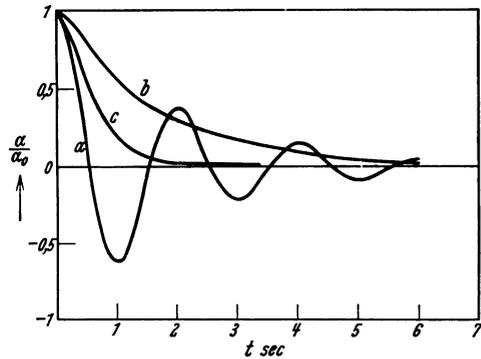


Abb. 399. Schwingungsformen des Galvanometers, a gedämpft periodisch, b aperiodisch, c aperiodischer Grenzfall.

238. Weicheisenmeßgeräte. An Stelle der ziemlich kostspieligen Drehspulgeräte verwendet man für technische Zwecke, bei denen es nicht auf große Meßgenauigkeit ankommt, Weicheisengeräte. Abb. 400 dient zur Veranschaulichung des dabei verwendeten Prinzips. Der zu messende Strom durchfließt eine Spule S , vor deren einem Ende sich ein z. B. durch eine Feder F festgehaltenes Stück weichen Eisens befindet. Das magnetische Feld des in der Spule fließenden Stroms ist an den Enden der Spule inhomogen und nimmt nach außen hin an Stärke ab. Deshalb wird das weiche Eisen in Richtung wachsender Feldstärke, d. h. in die Spule hinein, gezogen (§ 228). Und zwar ist die Richtung dieser Bewegung *von der Stromrichtung unabhängig*. Weicheiseninstrumente können daher nicht nur für *Gleichstrom*, sondern auch für *Wechselstrom* verwendet werden. (Ihre Eichung entspricht der effektiven Stromstärke, § 248.) Das magnetische Feld ist dem Spulenstrom proportional. Die auf das Eisen wirkende Kraft rührt daher, daß das Eisen im Felde zu einem magnetischen Dipol wird, dessen magnetisches Moment der Feldstärke annähernd proportional ist. Die Kraft aber ist dem Produkt aus Feldstärke und magnetischem Moment, also dem Quadrat der Feldstärke und somit schließlich dem Quadrat der Stromstärke in der Spule proportional. Die Skala eines solchen Instruments zeigt daher keine Teilung in gleichmäßige Intervalle, denn der Ausschlag steigt etwa mit dem Quadrat der Stromstärke an.

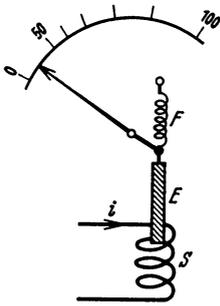


Abb. 400. Schema der Wirkung eines Weicheisenmeßgerätes.

239. Allgemeines über Strom- und Spannungsmesser.

Jede der vorstehend beschriebenen Arten von Strommessern kann auch als *Spannungsmesser* verwandt werden. Denn da ihr Widerstand R_g eine feste Größe hat, so ist das Verhältnis U/i nach dem OHMSchen Gesetz für ein gegebenes Gerät konstant. Einem bestimmten Ausschlag entspricht also nicht nur eine bestimmte Stromstärke i , sondern auch eine bestimmte, an den Klemmen des Meßgerätes liegende Spannung $U = iR_g$. Der Ausschlag kann daher sowohl als Maß für die Stromstärke, als auch für die angelegte Spannung gelten. In ihrer praktischen Ausführung unterscheiden sich indessen Strom- und Spannungsmesser in einem wesentlichen Punkt. Sowohl bei Strom- wie bei Spannungsmessung ist es natürlich wichtig, daß für die Zwecke der Messung möglichst wenig Energie aufgewandt wird. Ein Strommesser muß mit der Leitung, in der der Strom gemessen werden soll, in Reihe geschaltet sein, er wird also vom gleichen Strom i durchflossen, der in der Leitung fließt. Die Stromleistung im Meßgerät ist gleich i^2R_g (§ 163), wenn R_g den inneren Widerstand des Meßgerätes bedeutet. Bei der Verwendung als Spannungsmesser muß man aber der Berechnung die zu messende Spannung U zugrunde legen. Die Stromleistung beträgt dann also U^2/R_g . Um in jedem dieser Fälle die Stromleistung im Meßgerät möglichst niedrig zu halten, muß also ein Strommesser einen möglichst kleinen, ein Spannungsmesser einen möglichst großen Widerstand R_g haben.

Bei Meßgeräten mit fester Eichung (Amperemeter, Voltmeter) wird dies auf folgende Weise erreicht: Das eigentliche Meßwerk ist ein ziemlich empfindliches Zeigergalvanometer. Mit seiner Hilfe können nun Strom- und Spannungsmesser von jeder gewünschten Empfindlichkeit, die kleiner als diejenige des Meßwerks ist, hergestellt werden. Der Widerstand des Meßwerks betrage R_1 , sein Meßbereich, d. h. der Strom, der es zum Ausschlag über die ganze Skala bringt, sei i_1 , die entsprechende Spannung am Meßwerk also $U_1 = i_1R_1$. Soll das Meßwerk für einen Strommesser verwendet werden, der Ströme bis zu i Ampere anzeigt, so erhält es einen *Nebenwiderstand* (*shunt*, Abb. 401a), dessen

Widerstand R_2 so bemessen sein muß, daß durch das Meßwerk ein Strom i_1 fließt, wenn durch das ganze System ein Strom i fließt. Es muß also nach § 154, Gl. (23), $R_1 : R_2 = i_2 : i_1 = (i - i_1) : i_1$ sein, also $R_2 = R_1 i_1 / (i - i_1)$. Der Widerstand R_g des aus Meßwerk und Nebenschluß bestehenden Strommessers berechnet sich dann nach § 154, Gl. (22), zu $R_g = R_1 i_1 / i$. Der Widerstand (und die Empfindlichkeit) des Strommessers ist also im Verhältnis i_1 / i kleiner als der des Meßwerks. Soll das Meßwerk aber als Spannungsmesser verwendet werden, der bei größtem Ausschlag eine Spannung U anzeigt, so erhält es einen *Vorwiderstand* R_2 (Abb. 401 b), der so abgeglichen ist, daß $U : U_1 = (R_1 + R_2) : R_1$ ist (Spannungsteilung, § 154). Dann ist $R_2 = R_1 (U - U_1) / U_1$ und der Widerstand des ganzen Spannungsmessers $R_g = R_1 + R_2 = R_1 U / U_1$. Der Widerstand des Spannungsmessers ist also im Verhältnis U / U_1 größer (und seine Empfindlichkeit im gleichen Verhältnis kleiner) als der des Meß-

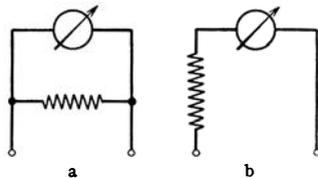


Abb. 401. Schema a des Strommessers, b des Spannungsmessers.

werks. Häufig versieht man Meßwerke der obigen Art mit auswechselbaren Neben- und Vorwiderständen, so daß man sie nach Wahl sowohl als Strom-, wie als Spannungsmesser verwenden und ihren Meßbereich beliebig wählen kann.

240. Wechselstrommesser mit Drehspulen. Leistungsmesser. Will man das Drehspulprinzip auch für Wechselstrommesser benutzen, so muß dafür gesorgt werden, daß sich mit dem Wechsel der Stromrichtung in der Drehspule jeweils auch die Richtung des magnetischen Feldes umkehrt. Das geschieht auf die Weise, daß man dieses Feld nicht durch einen Dauermagneten, sondern durch den zu messenden Strom selbst mittels einer oder zweier Spulen erzeugt, z. B. indem man die Drehspule S im Innern einer festen Spule oder zwischen zwei Feldspulen F von kleinem Widerstand aufhängt, an denen die gleiche Spannung liegt, wie an der Drehspule. Drehspule und Feldspulen sind also parallelgeschaltet (*Dynamometerprinzip*, Abb. 402). Die Windungsfläche der Feldspulen steht senkrecht zur Zeichnungsebene. Der Ausschlag eines solchen Meßgerätes ist von der Stromrichtung unabhängig und dem Quadrat der Stromstärke proportional.

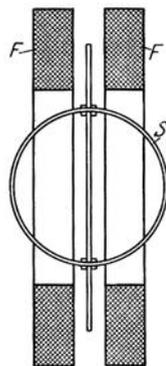


Abb. 402. Schema eines Wechselstrommessers mit Drehspule.

Nach dem gleichen Prinzip kann man mit Drehspulgeräten die Leistung $L = U i$ eines Stromes in einem Leiter messen. Man schaltet in diesem Falle die Feldspulen, welche kleinen Widerstand haben müssen, in Reihe mit dem betreffenden Leiter. Die Drehspule S , der man einen großen Widerstand vorschaltet, wird mit den beiden Enden des Leiters verbunden, in dem die Leistung gemessen werden soll. Dann ist der die feste Spule durchfließende Strom gleich dem den Leiter durchfließenden Strom i , das magnetische Feld der Spule ist also dem Strom i proportional. Der die Drehspule durchfließende Strom ist nach dem OHMSchen Gesetz der an ihr, d. h. der an den Enden des Leiters liegenden Spannung U proportional. Das auftretende Drehmoment ist daher dem Produkt $U i$, d. h. der Stromleistung im Leiter proportional.

241. Elektromagnetische Relais. Unter einem Relais versteht man eine Vorrichtung, durch die mit Hilfe eines Stromes die Stärke oder Richtung eines anderen Stromes geändert, ein anderer Strom *gesteuert* werden kann. Im einfachsten Falle handelt es sich um das Unterbrechen oder Schließen eines Stromkreises durch einen anderen Strom.

Ein elektromagnetisches Relais einfachster Art besteht aus einem Elektromagneten, vor dessen Polen sich ein an einer Blattfeder befestigtes Stück weichen

Eisens (Anker) befindet, das, solange der Elektromagnet nicht erregt ist, einen kleinen Abstand vom Elektromagneten hat. Wird der Elektromagnet durch einen Strom erregt, so zieht er den Anker an, und diese Bewegung kann dazu benutzt werden, um einen Kontakt K zu betätigen, der einen anderen Strom öffnet oder schließt, wie das beispielsweise aus Abb. 403 zu ersehen ist. Derartige Relais gibt es in den mannigfachsten Ausführungsformen. Auch der JOHNSEN-RAHBEK-Effekt (§ 157) ist zum Bau von Relais benutzt worden.

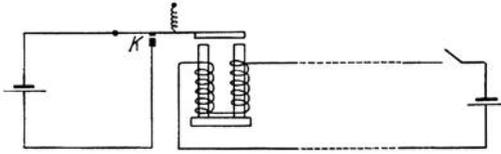


Abb. 403. Schema eines elektromagnetischen Relais. Erregung des Elektromagneten bewirkt Stromschluß.

ursprünglichen Form ist eine Zeichensprache, welche aus kurzen oder langen Signalen besteht, die in bestimmter Anordnung und Zahl Buchstaben und in deren Zusammenhang Worte und Sätze bedeuten (MORSE-Alphabet). Sie beruht auf der Verwendung von Relais. Im Prinzip besteht ein Telegraph aus einem

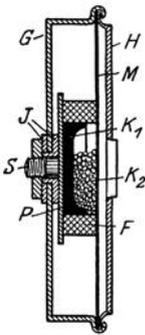


Abb. 404. Körnermikrophon.

am Empfangsort befindlichen Relais, welches dort unter der Wirkung von Stromstößen, die mittels der Fernleitung vom Sendeort her übertragen werden, einen Stromkreis öffnet und schließt. Diese Stromstöße werden am Sendeort mittels eines Schalters (Tasters) als kurze oder lange Stromschlüsse entsprechend der im MORSE-Alphabet zu übertragenden Nachricht erzeugt. Der am Empfangsort auf diese Weise im gleichen Tempo geöffnete und geschlossene Strom bewegt auf elektromagnetischem Wege Schreibvorrichtungen, welche die MORSE-Zeichen zu Papier bringen, so daß sie abgelesen werden können. (Erster elektrischer Telegraph von GAUSS und WEBER in Göttingen 1833.) Moderne Telegraphen sind viel verwickelter. Hier sei nur erwähnt, daß solche Telegraphen die zu vermittelnde Nachricht meist unmittelbar in Druckschrift wiedergeben (Typendruker). Über die drahtlose Telegraphie s. § 258.

Die Telephonie auf Leitungen, die elektrische Übertragung des Schalles, beruht darauf, daß man einem Strom, der zwischen Sendeort und Empfangsort fließt, Schwankungen aufprägt, die ein Abbild der Druckschwankungen der Luft in dem zu übertragenden Schall sind. Man nennt dieses Verfahren *Modulation*. Bei der drahtlosen Telephonie (Rundfunk) wird die Energie der sich rings im Raum um eine Antenne ausbreitenden elektrischen Wellen in entsprechender Weise moduliert (§ 259). Am Sendeorte befinden sich Geräte, welche die Druckschwankungen des Schalles in elektrische Energieschwankungen übersetzen, am Empfangsorte Geräte, welche das Umgekehrte bewirken, also wieder Schallschwingungen erzeugen.

Wir befassen uns hier zunächst nur mit der Leitungstelephonie. Bei dieser, wie bei der drahtlosen Telephonie, dient als Sender ein Mikrophon, als Empfänger ein Telephon.

Ein Mikrophon ist ein Gerät, das den Widerstand in dem die beiden Orte verbindenden Stromkreise und damit die Stärke des Stromes entsprechend den zu übertragenden Schallschwingungen verändert. Eine der vielen verschiedenen Ausführungsformen zeigt Abb. 404. In einem Metallgehäuse G befindet

Man kann es auch so einrichten, daß der durch den Elektromagneten fließende Strom sich selbst unterbricht. Auf diesem Gedanken beruht die elektrische Klingel. (Vgl. auch den WAGNER-schen Hammer, § 243.)

242. Telegraphie und Telephonie.

Die Telegraphie in ihrer ursprünglichen Form ist eine Zeichensprache, welche aus kurzen oder langen Signalen besteht, die in bestimmter Anordnung und Zahl Buchstaben und in deren Zusammenhang Worte und Sätze bedeuten (MORSE-Alphabet). Sie beruht auf der Verwendung von Relais. Im Prinzip besteht ein Telegraph aus einem am Empfangsort befindlichen Relais, welches dort unter der Wirkung von Stromstößen, die mittels der Fernleitung vom Sendeort her übertragen werden, einen Stromkreis öffnet und schließt. Diese Stromstöße werden am Sendeort mittels eines Schalters (Tasters) als kurze oder lange Stromschlüsse entsprechend der im MORSE-Alphabet zu übertragenden Nachricht erzeugt. Der am Empfangsort auf diese Weise im gleichen Tempo geöffnete und geschlossene Strom bewegt auf elektromagnetischem Wege Schreibvorrichtungen, welche die MORSE-Zeichen zu Papier bringen, so daß sie abgelesen werden können. (Erster elektrischer Telegraph von GAUSS und WEBER in Göttingen 1833.) Moderne Telegraphen sind viel verwickelter. Hier sei nur erwähnt, daß solche Telegraphen die zu vermittelnde Nachricht meist unmittelbar in Druckschrift wiedergeben (Typendruker). Über die drahtlose Telegraphie s. § 258.

sich, durch Scheiben J isoliert, eine Metallplatte P mit der Schraube S . Die Platte P trägt eine aus Kohle bestehende Schale K_1 , die von einem Filzring F umgeben ist. Auf diesem liegt eine Kohlenmembran M , die durch den Deckel H gegen das Gehäuse gedrückt und mit ihm leitend verbunden ist. Zwischen M und K_1 liegt eine lose Füllung von Kohlekörnern K_2 . Die Stromzuleitung geht durch die Schraube S und durch das Gehäuse. Der Strom muß also durch die Kohlekörnerfüllung fließen. Wird gegen die Kohlemembran M gesprochen, so werden die Körner mit der Frequenz der Schallschwingungen geschüttelt. Dabei ändern sich die Übergangswiderstände zwischen den einzelnen Körnern, der Widerstand des Mikrophons schwankt, und zwar in gewisser Annäherung entsprechend den auftretenden Schallschwingungen. Mit der gleichen Frequenz schwankt also auch der das Mikrophon durchfließende Strom. Er ist in der gewünschten Weise moduliert.

Der modulierte Strom fließt am Empfangsort durch ein Telefon (Hörer der Fernsprecher, Lautsprecher). Abb. 405 zeigt eine Bauart, die bei den Kopfhörern üblich ist. In einer Dose D befindet sich ein Dauermagnet mit den Polen N und S , auf dessen Schenkeln Spulen s_1 und s_2 sitzen, die von dem modulierten Strome durchflossen werden. Dicht vor den Polen liegt eine durch Ringe R_1 und R_2 gehaltene Eisenmembran. Die Dose ist oben durch die Kappe K mit der Schallöffnung O geschlossen. Die Stromzuleitung erfolgt durch die Klemmen K_1 und K_2 . Infolge der Modulation des Stromes schwankt die Stärke der Pole und damit die Durchbiegung der Membran mit der Frequenz der dem Gleichstrom aufgeprägten Modulation. Die Membran gerät in entsprechende Schwingungen und überträgt diese wieder als hörbare Schallschwingungen an die Luft. Die Verwendung eines Dauermagneten ist aus folgendem Grunde nötig. Würden die Spulen einen Weicheisenkern haben, so würde dieser während einer vollen Schwingung des Stromes zweimal, je einmal in jeder Richtung, magnetisiert werden. Die Anziehung der Weicheisenmembran hängt aber von der Richtung der Magnetisierung nicht ab. Sie würde also während einer vollen Stromschwingung zwei Vollschrwingungen ausführen und einen um eine Oktave zu hohen Ton geben. In dem Dauermagneten tritt nur eine periodische Schwächung und Verstärkung der Magnetisierung, aber keine Umkehr ihrer Richtung ein. Daher ist die Dauer einer Membranschwingung hier gleich der Dauer einer Stromschwingung.

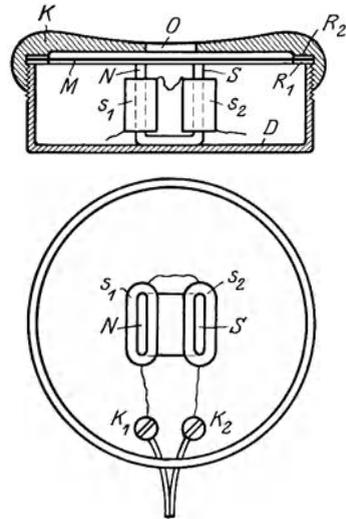


Abb. 405. Telefon.

Bei den Lautsprechern der Rundfunkgeräte besteht der schwingende Teil heute meist aus einer leichten, vom modulierten Strom durchflossenen Spule, die sich zwischen den Polen eines Dauermagneten befindet, und die mit der Modulationsfrequenz des Stromes schwingt (dynamischer oder Schwingenspule-Lautsprecher). Die Spulenschwingungen werden auf eine in besonderer Weise geformte Papiermembran übertragen und von dieser als Schall ausgestrahlt.

243. Induktor. Der Induktor dient dazu, mittels einer Gleichstromquelle von niederer Spannung hohe Spannungen zu erzeugen. Er besteht aus einer Primärspule S_1 mit wenigen (meist einigen 100) Windungen aus dickem Draht, die umschlossen wird von einer Sekundärspule S_2 aus sehr vielen (bis zu 100000)

Windungen aus dünnem Draht (in Abb. 406 der Deutlichkeit halber nebeneinander gezeichnet). Im Innern der Primärspule befindet sich zur Verstärkung der Induktionswirkung ein Eisenkern F , der sie ganz ausfüllt, und der, zur Unterdrückung der Wirbelströme, aus voneinander isolierten (lackierten) Eisendrähten hergestellt ist.

Zum Betriebe eines Induktors ist ferner eine Vorrichtung erforderlich, welche den Primärstrom selbsttätig sehr oft in der Sekunde schließt und wieder öffnet, ein selbsttätiger Unterbrecher H . Die einfachste Unterbrecherform ist der WAGNERSche Hammer (Abb. 407),

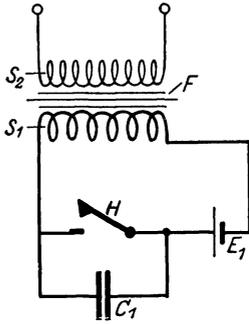


Abb. 406. Schaltungsdiagramm des Induktors, S_1 Primärspule, S_2 Sekundärspule, F Eisenkern, H Unterbrecher, E_1 Stromquelle, C_1 Kondensator. In Wirklichkeit liegt die Primärspule innerhalb der Sekundärspule.

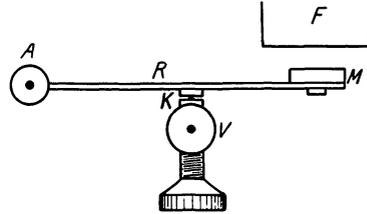


Abb. 407. Prinzip des WAGNERSchen Hammers. F Eisenkern des Induktors, M Eisenstück, R Blattfeder, K Platinkontakt (Unterbrechungsstelle), A und V Zuleitungen zum Unterbrecher.

dessen Prinzip dem der elektrischen Klingel entspricht. Als Elektromagnet dient der Eisenkern F der Primärspule. Innerhalb der die Spulen tragenden Kastens befindet sich schließlich noch ein Kondensator C_1 , dessen beide Belegungen mit den beiden Kontaktstellen des Unterbrechers verbunden sind.

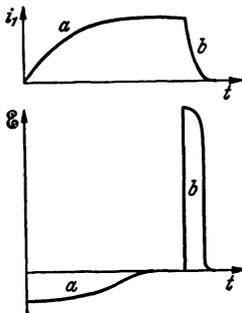


Abb. 408. Primärstrom i_1 (oben) und induzierte elektromotorische Kraft \mathcal{E} (unten) am Induktor. a Stromschluß, b Stromöffnung.

Legt man an die Primärspule eine Gleichspannung, so entsteht in ihr ein Strom i_1 , der infolge der Selbstinduktion den in Abb. 368, § 211, dargestellten Verlauf zeigt. Hierdurch wird in der Sekundärspule eine elektromotorische Kraft \mathcal{E} induziert, die der Änderungsgeschwindigkeit von i_1 , also di_1/dt , proportional und entgegengesetzt gerichtet ist wie die Spannung in der Primärspule (Abb. 408). Nach sehr kurzer Zeit aber wird der Primärstrom unterbrochen. Geschehe dies momentan, wäre also di_1/dt unendlich groß, so würde in der Sekundärspule unendlich kurze Zeit eine unendlich große induzierte elektromotorische Kraft bestehen. Die Unterbrechung ist aber nicht momentan, da an der Kontaktstelle des Unterbrechers stets ein Funke auftritt, der noch für kurze Zeit nach Aufhebung des metallischen Kontaktes eine

Stromleitung durch die Luft zuläßt. Um die Dauer dieses Funkens abzukürzen und auf diese Weise die Unterbrechung möglichst plötzlich, d. h. di_1/dt recht groß zu machen, besitzt der Induktor den Kondensator C_1 . Vor Beginn der Unterbrechung ist der Kondensator kurzgeschlossen, also ungeladen. In dem Augenblick aber, wo sich der Kontakt K abzuheben beginnt, liegt an den Belegungen des Kondensators nahezu die volle Betriebsspannung U des Induktors. Er nimmt also die Elektrizitätsmenge $e = C U$ auf und entzieht sie dem Stromkreis. Sobald sich der Kontakt wieder schließt, wird der Kondensator durch Kurzschluß wieder entladen. Die bei Stromöffnung in der Sekundärspule auftretende elektromotorische Kraft hat daher den in der Abb. 408 (Kurve b unten) dar-

gestellten Verlauf. Man erkennt, daß die beim Öffnen des Stromes auftretende elektromotorische Kraft zwar kürzere Zeit andauert als die beim Schließen auftretende, daß sie aber erheblich größer ist als diese. Ist die Sekundärspule an ihren Enden offen, so erzeugt die elektromotorische Kraft eine gleich große Spannung zwischen den offenen Enden. Sind diese einander nahe genug, so kann diese Spannung zu einer Büschel- oder Funkenentladung durch die Luft führen. Mit großen Induktoren kann man Funken von mehr als 1 m Länge erzeugen. Die erzeugte Spannung ist um so größer, je größer das Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen ist.

Die Flächen a und b der Abb. 408 (unten) sind gleich dem Integral $\int \mathcal{E} dt$, genommen über die Zeit des Schließens und des Öffnens des Primärstromes. Dieses ist aber nach § 230, Gl. (14), gleich der Gesamtänderung des magnetischen Flusses Φ , der die Sekundärspule durchsetzt. Da beim Öffnen der gleiche magnetische Fluß verschwindet, der beim Schließen entsteht, so müssen die beiden Flächen inhaltsgleich sein. Dem entspricht, daß die induzierte elektromotorische Kraft um so größer ist, über eine je kürzere Zeit sich der Öffnungs- oder Schließungsvorgang erstreckt. Wegen der Induktivität im Primärkreis ist jedoch die Dauer des Schließungsvorgangs stets erheblich größer als die des Öffnungsvorganges, die induzierte elektromotorische Kraft also beim Öffnen beträchtlich größer als beim Schließen.

Bei großen Induktoren bedient man sich nicht des WAGNERSchen Hammers, sondern anderer Unterbrecher. Bei den rotierenden Unterbrechern werden rotierende Kontakte durch einen Motor abwechselnd geöffnet und geschlossen. Beim WEHNELT-Unterbrecher (Abb. 409a) befindet sich in einem Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure eine Bleiplatte als Kathode und ein nur wenig aus einem Porzellanrohr herausragender Platinstift als Anode. Durch dieses Gefäß fließt der primäre Gleichstrom. Am Platinstift ist die Stromdichte sehr groß; es tritt daher dort, außer einer Elektrolyse, ein sehr hoher Betrag an JOULEScher Wärme in der Lösung auf, der zur Bildung einer Dampfblase um den Platinstift führt, die nunmehr den Strom unterbricht. Bei der sehr schnell eintretenden Abkühlung bricht die Dampfblase mit scharfem Knall wieder zusammen, und der Strom fließt von neuem. Der WEHNELT-Unterbrecher gibt sehr häufige und plötzliche Stromunterbrechungen und hat daher besonders starke Induktionswirkungen zur Folge. Beim Lochunterbrecher (Abb. 409b) wird die gleiche Wirkung dadurch erzielt, daß der Strom im Elektrolyten durch ein enges Loch hindurchtreten muß.

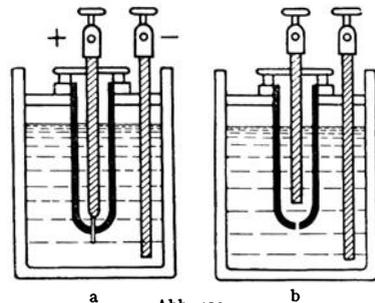


Abb. 409. a WEHNELT-Unterbrecher, b Lochunterbrecher.

244. Generatoren. Die Generatoren oder Dynamomaschinen dienen zur Umwandlung mechanischer Arbeit in elektrische Energie. Die Zahl der Ausführungsformen ist sehr groß. Wir müssen uns hier auf das Grundsätzliche beschränken. Je nach der Art des erzeugten Stromes unterscheidet man Gleichstrom-, Wechselstrom- und Drehstromgeneratoren.

Als ein sehr einfaches Schema zum Verständnis der Wirkung eines Gleichstromgenerators kann die in Abb. 410 dargestellte (tatsächlich veraltete) Vorrichtung dienen. Sie besteht aus zwei Feldmagneten (Ständer), die einander entgegengesetzte Pole (N , S) zuehren. In dem zylindrischen Raum zwischen ihnen kann der Anker (Läufer) gedreht werden, der in unserm Schema aus einem Eisenring besteht, der mit einer Ringspule bewickelt ist (GRAMMEScher

Ring). Diese ist an verschiedenen Stellen durch Drahtleitungen angezapft, die je zu einem Metallsegment führen. Diese Segmente sind auf der Achse des Ankers, voneinander isoliert, angebracht. Bei jeder Stellung des Ankers werden nur je zwei einander gegenüberstehende Segmente von zwei festen Schleifbürsten (B_1, B_2) aus Metallgaze oder Kohle berührt, die die elektrischen Pole des Generators bilden und zur Nutzleitung (Lichtnetz usw.) führen.

Wird der Anker im Sinne des Uhrzeigers gedreht, so ändert sich in jeder einzelnen Ankerwindung der magnetische Fluß Φ . Da die Kraftlinien, die von N nach S laufen, fast vollständig innerhalb des Eisenringes verlaufen (vgl. Abb. 383), so ist der Fluß durch die Flächen der Ankerwindungen oben und unten im Ringe am größten und in der horizontalen Symmetrieachse Null. Daher wird bei der Drehung des Ankers in seinen Windungen eine elektromotorische Kraft induziert, die einen in der Richtung der Pfeile fließenden Strom erzeugt, wenn der bei $B_1 B_2$ angeschlossene äußere Stromkreis geschlossen ist. Dieser Strom tritt also bei B_2 ein, bei B_1 aus. B_1 ist positiver, B_2 negativer Pol des Generators. Dies kann man durch

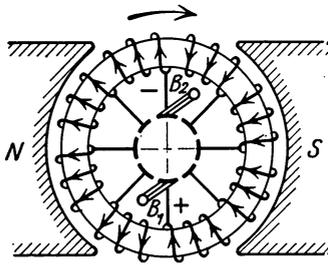


Abb. 410. Schema eines Gleichstromgenerators mit GRAMMESCHEM Ring.

Anwendung des LENZschen Gesetzes (§ 201) leicht beweisen. Das von dem Strome im Eisenring erzeugte magnetische Feld bzw. die Induktion \mathfrak{B} , verläuft nach § 191 in beiden Ankerhälften von oben nach unten. Das ist aber im Innern eines magnetischen Dipols — und zu einem solchen wird der Ring durch den ihn umfließenden Strom — die Richtung vom Südpol zum Nordpol. Der Ring erhält demnach durch den induzierten Strom oben einen Südpol, unten einen Nordpol. Das Feld der Feldmagnete sucht, wie man leicht sieht, den Ring *gegen* den Uhrzeigersinn zu drehen. Das magnetische Moment, das durch den induzierten Strom im Anker erzeugt wird, hemmt die dem Anker aufgezwungene Drehung im Uhrzeigersinn, wie es das LENZsche Gesetz verlangt. Die zur Überwindung dieses hemmenden Drehmoments aufgewandte Arbeit findet sich in Gestalt der im Stromkreis verbrauchten Energie wieder. Soll diese Energie während einer Umdrehung konstant sein, also Gleichstrom erzeugt werden, so muß dafür gesorgt werden, daß das hemmende Drehmoment konstant bleibt, d. h. die beiden Ankerpole müssen stets an der gleichen Stelle im Raum bleiben. Das wird durch die Anzapfung der Ankerwicklung an verschiedenen Stellen erreicht. Wirksam sind stets nur die beiden Anzapfungen, deren zugehörige Segmente mit den beiden festen Bürsten in Verbindung stehen. Sie treten also eine nach der anderen in Tätigkeit. Sobald der Anker ein wenig gedreht, die Pole ein wenig mit ihm verschoben sind, schiebt sich das folgende Segmentenpaar unter die Bürsten, die Pole springen ein wenig zurück, und das Spiel beginnt von neuem. Die Maschine erzeugt also einen Gleichstrom, der in seiner Stärke um so weniger schwankt, an je mehr Stellen die Ankerwicklung angezapft ist.

Die Feldmagnete sind in Wirklichkeit stets Elektromagnete, die beim Gleichstromgenerator durch den im Anker erzeugten Strom erregt werden. Im Eisen der Feldmagnete bleiben stets Spuren von Magnetisierung zurück (Remanenz, § 219). Diese erzeugen beim Anlassen zunächst einen schwachen Induktionsstrom. Dieser erregt die Feldmagnete stärker, damit steigt die Induktionswirkung usw. Die Maschine erregt sich selbst (dynamoelektrisches Prinzip, WERNER VON SIEMENS, 1867).

Durch eine geringfügige Änderung können wir aus unserm Schema des Gleichstromgenerators dasjenige eines Wechselstromgenerators machen (Abb. 411).

Wir entfernen die Anzapfungen der Ankerwicklung bis auf zwei einander gegenüberliegende und führen diese an zwei auf der Ankerachse sitzende konzentrische Metallringe (Schleifringe), auf denen je eine Bürste (B_1 , B_2) schleift. In der Stellung der Abb. 411a liegen die Verhältnisse genau wie beim Gleichstromgenerator in der Abb. 410. Bei weiterer Drehung aber bleiben die Ankerpole nicht an ihrer Stelle, sondern wandern mit dem Ringe, denn sie liegen ja immer an den beiden Stellen, welche durch die Anzapfung mit den Bürsten verbunden

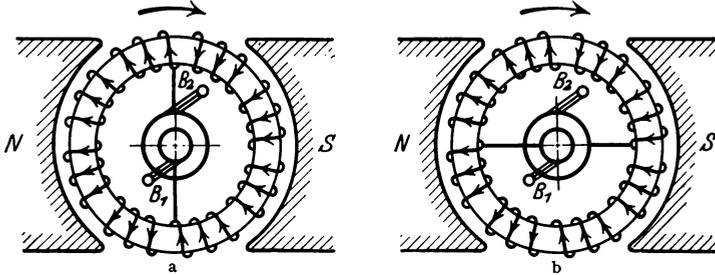


Abb. 411. Schema eines Wechselstromgenerators mit GRAMMESCHEM Ring.

sind. Mit fortschreitender Drehung wird der induzierte Strom immer schwächer und damit die Stärke der Ankerpole immer geringer. Man erkennt dies aus der in Abb. 411b dargestellten, gegenüber der ersten um 90° verdrehten Stellung. Man sieht, daß in jeder Hälfte der beiden durch die Anzapfungen gebildeten Ankerhälften die induzierten elektromotorischen Kräfte einander entgegengerichtet sind und sich gegenseitig aufheben. In dieser Stellung fließt also kein Strom im Anker und daher auch nicht im angeschlossenen Stromkreise. Bei weiterer Drehung steigt der Strom wieder an, aber wegen der Vertauschung der Stellung der beiden Ankerhälften in umgekehrter Richtung, erreicht ein Maximum nach Drehung um weitere 90° usw. Der Generator erzeugt also Wechselstrom. Die Feldmagnete werden in diesem Falle meist durch einen kleinen, mit dem Anker auf gleicher Achse sitzenden Gleichstromgenerator erregt.

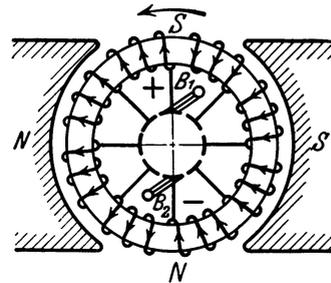


Abb. 412. Schema des Gleichstrommotors mit GRAMMESCHEM Ring.

Versieht man die Maschine mit drei konzentrischen Schleifringen, die mit drei um je 120° gegeneinander verschobenen Stellen der Ankerwicklung verbunden sind, und verwendet drei Schleifbürsten, so liefert die Maschine Drehstrom (§ 250).

Die hier beschriebene Bauart ist veraltet, aber besonders übersichtlich, und soll nur den Grundgedanken erläutern.

245. Elektromotore. Der Zweck der Elektromotore ist dem der Generatoren gerade entgegengesetzt. Sie verwandeln elektrische Energie in mechanische Arbeit. Dem entspricht es, daß jeder Generator grundsätzlich, unter Umkehrung seiner Verwendungsart, als Motor laufen kann. Anstatt durch Drehung des Ankers einen Strom zu erzeugen, den man aus ihm entnimmt, schickt man einen Strom durch seinen Anker, der eine Drehung bewirkt. Um diesen Zusammenhang deutlich zu machen, verwenden wir ein Schema eines *Gleichstrommotors*, welches dem des Generators (Abb. 410) völlig entspricht (Abb. 412).

Verbindet man die Schleifbürste B_1 mit dem positiven, B_2 mit dem negativen Pol einer Gleichstromquelle, so teilt sich der Strom bei B_1 und durchfließt die beiden Hälften der Ankerwicklung, genau wie der Induktionsstrom beim Generator, in der durch die Pfeile bezeichneten Richtung. Wie beim Generator

entsteht demnach oben im Anker ein Südpol, unten ein Nordpol. Das infolgedessen am Anker im Felde der Feldmagneten auftretende Drehmoment — das beim Generator die hemmende Wirkung hervorbringt — hat hier zur Folge, daß der Anker sich *gegen* den Sinn des Uhrzeigers dreht. Da wegen der Anzapfung der Ankerwicklung an verschiedenen Stellen die Pole mit kleinen Schwankungen stets an der gleichen Stelle bleiben, so bleibt der Anker in ständiger Drehung. (Man vergleiche damit eine Treitmühle, die durch einen in ihr laufenden Hund in Gang gehalten wird. Der Hund bleibt im umlaufenden Rade stets etwa an der gleichen Stelle. Der auf den Hund wirkenden Schwerkraft entspricht beim Motor das magnetische Feld der Feldmagnete, dem Hunde die beiden Ankerpole.)

Grundsätzlich kann man das Schema des Wechselstromgenerators (Abb. 411) auch als dasjenige eines *Wechselstrommotors* betrachten. Wir zeigen hier ein anderes einfaches Modell (Abb. 413). Der Anker trägt Magnete mit paarweise wechselnder Polrichtung, die bei der praktischen Ausführung Elektromagnete sind, die von einem Gleichstrom erregt werden. Diesen Magneten entspricht eine gleiche Zahl von Feldmagneten, die derart vom Wechselstrom umflossen werden, daß auch ihre Pole paarweise abwechseln, indem sie jeweils im einen oder anderen Sinne vom Strome umflossen werden. Der Anker bleibt in Bewegung, wenn er einmal in so schnelle Umdrehung gebracht ist, daß seine Pole während der Zeit zwischen zwei Polwechseln der Feldmagnete gerade von einem Feldmagneten zum nächsten gelangen. Der Anker drehe sich im Sinne des Uhrzeigers, und der linke obere Pol des Stators verwandele sich gerade aus einem Südpol in einen Nordpol. Dann wird der ihm gegenüberstehende Nordpol des Ankers auf den Südpol des rechten oberen

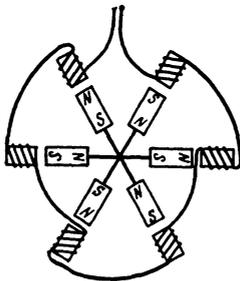


Abb. 413.
Schema eines Wechselstrom-
Synchronmotors.

Feldmagneten hingetrieben. Erreicht er ihn gerade in dem Augenblick, in dem wieder ein Polwechsel eintritt, so wiederholt sich das gleiche Spiel usw. Der Motor läuft aber nur, wenn er bereits die richtige Drehzahl hat. Solche Motore heißen Synchronmotore. Sie müssen erst durch eine besondere Anlaufvorrichtung auf die richtige Drehzahl gebracht werden. Auf die Einzelheiten kann auch hier nicht näher eingegangen werden. Über Drehstrommotore s. § 250.

Sobald sich ein Motor dreht, wirkt er auch als Generator. Da bei gleichem Drehsinn die am Anker eines Motors liegende Spannung die umgekehrte Richtung hat wie die induzierte elektromotorische Kraft in einem ihm gleichen Generator, so ist die durch die Drehung des Motors induzierte elektromotorische Kraft der Betriebsspannung entgegengerichtet; sie schwächt sie. Wenn man einen kleinen Motor unter Einschaltung eines Strommessers mit einer zu seinem Betriebe ausreichenden Stromquelle verbindet und seinen Anker festhält, so fließt durch ihn ein weit stärkerer Strom, als wenn er läuft. Die bei Drehung ohne andere Arbeitsleistung, als Überwindung der Reibung und Lieferung der geringen JOULEschen Wärme im Motor selbst, verbrauchte Energie ist äußerst gering. Wird ein anfänglich unbelasteter Motor belastet, d. h. zur Leistung äußerer Arbeit gezwungen, so hat das im ersten Augenblick ein Sinken seiner Drehzahl zur Folge. Dies bewirkt aber im gleichen Augenblick ein Sinken der im Anker induzierten, der Betriebsspannung entgegengerichteten elektromotorischen Kraft. Infolgedessen steigt die Stromstärke im Anker sofort an und treibt die Drehzahl wieder in die Höhe. Diese ist daher in gewissen Grenzen von der Belastung verhältnismäßig wenig abhängig. Die bei Belastung des Motors erforderliche Arbeitsleistung hat ihre Quelle in der durch den oben angedeuteten Vorgang bewirkten Erhöhung der Stromstärke und der damit verbundenen Vergrößerung der Stromleistung im Motor.

IV. Wechselstrom. Elektrische Schwingungen und Wellen.

246. Wechselstrom. Ein Wechselstrom ist ein elektrischer Strom, dessen Stärke i eine *periodische Funktion der Zeit* t ist. Ein *einwelliger* Wechselstrom ist ein solcher, bei dem diese Funktion einfach harmonisch ist. Seine Stromstärke wird also durch die Gleichung

$$i = i_0 \sin(\omega t + \beta) \quad (1)$$

dargestellt (Abb. 414). i_0 ist der Höchstwert, der *Scheitelwert* des Wechselstroms. ω ist die *Kreisfrequenz* des Wechselstroms, $\tau = 2\pi/\omega$ seine *Periode*, d. h. die Zeit, in der die Stromstärke i alle ihre Phasen einmal durchläuft. $\nu = 1/\tau$ ist die *Frequenz* des Wechselstroms, d. h. die Zahl der Perioden in 1 sec. Unter der *Wechselzahl* versteht man die Anzahl der Durchgänge der Stromstärke durch den Wert $i = 0$ in 1 sec; sie ist also doppelt so groß wie die Frequenz. Technischer Wechselstrom hat meist die Frequenz $\nu = 50$, also die Wechselzahl 100, nur im elektrischen Schnellbahnbetrieb meist die Frequenz $\nu = 16^{2/3}$. Die Einheit der Frequenz ist 1 Hertz (Hz) = 1 sec⁻¹ (vgl. § 42).

Die Größe β der Gl. (1) ist die *Phasenkonstante* des Wechselstroms. Sie hängt von der Wahl des Nullpunktes der Zeit t ab und kann durch geeignete Wahl desselben zum Verschwinden gebracht werden.

Damit in einem Widerstand ein dauernder Wechselstrom fließt, muß in ihm eine elektromotorische Kraft bestehen, die auch eine periodische Funktion der Zeit ist. Die Spannung U , die zwischen den Enden des Widerstandes besteht, ist dann gleichfalls eine periodische Funktion der Zeit und gehorcht bei einwelligem Wechselstrom der Gleichung

$$U = U_0 \sin(\omega t + \gamma) \quad (2)$$

U_0 ist der Scheitelwert der Spannung. Die Phasenkonstante γ der Spannung ist im allgemeinen von der des Stromes verschieden, es besteht zwischen Strom und Spannung eine *Phasendifferenz* $\beta - \gamma = \varphi$. Ist $\varphi > 0$, so eilt der Strom der Spannung voraus, ist $\varphi < 0$, so eilt der Strom der Spannung nach.

Die einen Wechselstrom darstellende Gl. (1) entspricht vollkommen derjenigen einer Schwingung (§ 42). In der Tat handelt es sich hier auch um einen Schwingungsvorgang, nämlich um eine *elektrische Schwingung*. Ein Strom, der periodisch Stärke und Richtung ändert, ist ja nichts anderes als eine periodische Hin- und Herbewegung der Ladungsträger im Leitersystem, also eine erzwungene Schwingung dieser Ladungsträger unter der Wirkung des periodisch „schwingenden“ elektrischen Feldes im Leiter. Auf Grund der am Schluß von § 151 gemachten Angaben kann man leicht berechnen, daß die Elektronen in einem Kupferdraht vom Querschnitt 1 mm² bei einem Wechselstrom mit $i_0 = 1$ Amp. und $\nu = 50$ Hz eine Schwingung mit einem Scheitelwert von rund $0,25 \cdot 10^{-4}$ cm ausführen. Man unterscheidet zwischen Niederfrequenz (Frequenzen des technischen Wechselstroms bis zur Größenordnung von etwa $\nu = 1000$ Hz), Hoch- und Höchstfrequenz (insbesondere die sehr hohen Frequenzen, wie sie bei der drahtlosen Telegraphie und Telephonie in Anwendung kommen, bis etwa zur Größenordnung von $\nu = 10^7$ bis 10^9 Hz).

Ein in einen Stromkreis eingeschalteter Kondensator bildet für Gleichstrom einen unendlich hohen Widerstand, verhindert also das Fließen eines Gleichstroms. Denn der Kondensator lädt sich sehr schnell auf eine Spannung auf, die der angelegten Gleichspannung dem Betrage nach gleich und ihr entgegengerichtet ist. Liegt jedoch am Kreise eine Wechselspannung, so ändert sich

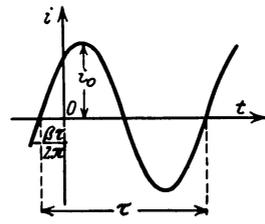


Abb. 414. Zeitlicher Verlauf eines Wechselstroms.

auch die am Kondensator liegende Spannung und damit seine Ladung ständig, es fließen in den Zuleitungen zum Kondensator periodische Ladungs- und Entladungsströme. Ein eingeschalteter Kondensator verhindert also das Fließen eines Wechselstroms nicht. Man kann das auch so ausdrücken, daß der Wechselstrom durch die im Kondensator fließenden Verschiebungsströme (§ 209) geschlossen wird.

247. Wechselstromwiderstand. Wir betrachten ein System, welches einen Widerstand R , eine Induktivität (Spule) L und einen Kondensator der Kapazität C , sämtlich in Reihe geschaltet, enthält (Abb. 415). Der Widerstand R besteht aus dem Widerstand der Spule und den etwa sonst noch im Kreise vorhandenen Widerständen. An den Enden des Systems liege eine Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

Dann fließt im System ein Wechselstrom

$$i = i_0 \sin (\omega t + \varphi), \quad (4)$$

wobei φ die Phasendifferenz des Stromes gegen die Spannung ist. Da der Strom i seine Stärke und Richtung ständig ändert, so tritt infolge der Induktivität (§ 211) eine elektromotorische Kraft $\mathcal{E} = -L di/dt$ auf, die der Spannung U entgegengerichtet ist. Ist die jeweilige Ladung des Kondensators e , so liegt am Kondensator eine Spannung vom Betrage e/C (§ 141). Dann folgt

$$U_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt} = iR + \frac{e}{C}.$$

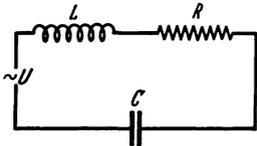


Abb. 415. Reihenschaltung von Widerstand, Induktivität und Kapazität.

Wir differenzieren diese Gleichung nach der Zeit. Dabei bedenken wir, daß de/dt die zeitliche Änderung der Ladung des Kondensators bedeutet. Und da diese nur durch den im System fließenden Strom verändert wird, so ist nach § 150 $de/dt = i$. Wir erhalten also

$$U_0 \omega \cos \omega t = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}. \quad (5)$$

Setzen wir in diese Gleichung den Wert von i aus Gl. (4) ein, so können wir die Größen i_0 und φ bestimmen und erhalten durch einfache Rechnung

$$i_0 = \frac{U_0}{Z}, \quad (6)$$

wobei

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (7)$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (8)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -\arctg \frac{X}{R}, \quad (9)$$

so daß

$$i = \frac{U_0 \sin (\omega t + \varphi)}{Z}. \quad (10)$$

Dann ist nach Gl. (9)

$$\sin \varphi = -\frac{X}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X}{R}. \quad (11)$$

Wie man aus Gl. (6) sieht, ist Z das Verhältnis der Scheitelwerte von Spannung und Strom, spielt also bezüglich dieser Größen die gleiche Rolle, wie bei Gleichstrom der reine Widerstand R . Darum heißt Z der *Wechselstromwiderstand*, auch der *Scheinwiderstand* oder die *Impedanz* des Systems. Er hängt

von der Kreisfrequenz ω des Wechselstroms ab und setzt sich aus zwei Anteilen, dem reinen Widerstand R , auch *Wirkwiderstand* genannt, und dem *Blindwiderstand* X [Gl. (7)] zusammen, jedoch nicht in additiver Weise. Vielmehr bilden in graphischer Darstellung R und X die Katheten, Z die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Die Phasendifferenz φ zwischen Strom und Spannung ist negativ, wenn $\omega L > 1/\omega C$. In diesem Falle eilt der Strom der Spannung nach. Er eilt ihr voran, wenn $\omega L < 1/\omega C$.

Enthält das System keine Kapazität, so fällt in Gl. (5) das Glied i/C fort. (Das gleiche ist der Fall für $C = \infty$.) Wir erhalten dann statt der Gl. (7), (8) und (9)

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad X = \omega L, \quad (12)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{\omega L}{R}. \quad (13)$$

In diesem Fall eilt der Strom stets der Spannung nach.

Enthält das System keine Induktivität ($L = 0$), so wird

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad X = \frac{1}{\omega C}, \quad (14)$$

$$\varphi = +\arctg \frac{1}{R \omega C}. \quad (15)$$

In diesem Fall eilt der Strom der Spannung stets voraus.

Ist schließlich der Widerstand R verschwindend klein ($R^2 \ll X^2$), so wird

$$Z = X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Der Strom eilt der Spannung um ein Viertel der Periode nach, wenn $\omega L > 1/\omega C$, er eilt der Spannung um den gleichen Betrag vor, wenn $\omega L < 1/\omega C$.

Aus Gl. (7) folgt, daß der Einfluß der Induktivität auf den Wechselstromwiderstand mit steigender Frequenz ω zunimmt, der Einfluß der Kapazität mit steigender Frequenz abnimmt. Bei sehr großer Frequenz wirkt ein Kondensator nahezu wie ein Kurzschluß.

Die soeben erwähnte Wirkung der Induktivität findet eine wichtige praktische Anwendung. Es kommt in der Technik vor, daß in einer mit Gleichstrom oder mit niederfrequentem Wechselstrom beschickten Leitung hochfrequente Schwingungen auftreten oder sogar absichtlich (zur elektrischen Zeichengebung) erzeugt werden, deren Übertritt in benachbarte Leiterteile unerwünscht ist. Man verhindert dies, indem man vor die zu schützenden Leiterteile *Drosselspulen* legt, d. h. Spulen mit hoher Induktivität (Eisenkern) und kleinem Widerstand. Diese bilden für die hochfrequenten Schwingungen einen sehr großen Widerstand, während sie den Gleichstrom bzw. den niederfrequenten Wechselstrom nur sehr wenig schwächen.

Man beachte, daß man bei Wechselstrom den reinen Widerstand R nicht ohne weiteres gleich dem durch das OHMSche Gesetz für Gleichstrom definierten Widerstand des betreffenden Leiters setzen darf, da bei hoher Frequenz ein starker Hauteffekt mit den in § 212 beschriebenen Wirkungen eintritt. R ist also bei schnellen Schwingungen größer als der reine OHMSche Widerstand.

Es sei nicht unterlassen, zu bemerken, daß die Gl. (10) nicht die allgemeine Lösung der Gl. (5) ist, sondern den stationären Zustand darstellt, der sich in dem System in sehr kurzer Zeit nach dem Anschalten der Spannung U einstellt, nachdem die *Einschwingvorgänge* abgeklungen sind, bei denen auch gedämpfte Schwingungen mit der Eigenfrequenz des Systems (s. u.) auftreten (vgl. § 94).

Wir betrachten zwei in Reihe geschaltete Wechselstromwiderstände Z_1 und Z_2 (Abb. 416). Der Wechselstromwiderstand der Reihe läßt sich leicht berechnen. Sie enthält den Widerstand $R = R_1 + R_2$ und die Induktivität $L = L_1 + L_2$. Für die hintereinander geschalteten Kapazitäten gilt nach § 141 $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Daher ist $X = \omega L_1 - 1/\omega C_1 + \omega L_2 - 1/\omega C_2 = X_1 + X_2$. Demnach beträgt der Wechselstromwiderstand der Reihe

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Mit Hilfe von Gl. (11) bringt man dies leicht in die Form

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + 2 Z_1 Z_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (17)$$

Diese Gleichung entspricht dem cos-Satz für Dreiecksseiten. Der Wechselstromwiderstand Z ist also gleich der einen Seite eines Dreiecks, dessen beiden anderen Seiten gleich den Wechselstromwiderständen der beiden Anteile sind, welche unter sich den Winkel $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ bilden (Abb. 417). Man kann das auch so ausdrücken, daß für die Summe von Wechselstromwiderständen die Gesetze der Vektoraddition gelten (§ 8).

In ähnlicher Weise, wie wir es hier für eine Reihenschaltung durchgeführt haben, kann die Rechnung auch für die Parallelschaltung zweier

Wechselstromwiderstände durchgeführt werden (Abb. 418). Wir wollen hier nur das Ergebnis der Berechnung bringen. Unter Benutzung der gleichen Symbole wie oben ergibt sich

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} + \frac{2}{Z_1 Z_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (18)$$

Der reziproke Wert $1/Z$ des Widerstandes ist also bei Parallelschaltung in der Regel kleiner als die Summe $1/Z_1 + 1/Z_2$ der reziproken Teilwiderstände. Nur wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ wird $1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2$.

Der Wechselstromwiderstand Z hat bei gegebenem Widerstand R nach Gl. (7) seinen kleinsten Betrag, wenn der Blindwiderstand verschwindet, also für

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (19)$$

Dieser Fall tritt also bei einer Frequenz des Wechselstroms

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (20)$$

ein. Der Scheitelwert der Stromstärke hat dann nach Gl. (6) bei gegebener Scheitelspannung U_0 den größten möglichen Wert, nämlich $i_0 = U_0/R$. Dieser Fall entspricht demjenigen eines schwingungsfähigen Körpers, der mit der Frequenz seiner Eigenschwingung erregt wird, also der mechanischen Resonanz (§ 94). Man bezeichnet ihn daher als *elektrische Resonanz*, und nennt die Frequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ die *elektrische Eigenfrequenz* des Systems. Enthält das System eine stetig veränderliche Kapazität (Drehkondensator, § 141) oder Induktivität, so kann man es auf die Frequenz der erregenden Wechselspannung *abstimmen*, wie das bei den Rundfunkgeräten bekannt ist.

248. Wechselstromleistung. Effektivwerte von Strom und Spannung. Die Momentanleistung eines Wechselstroms ist, wie diejenige eines Gleichstroms

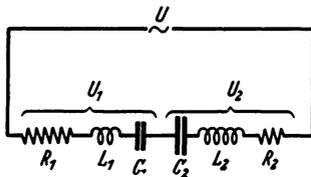


Abb. 416. Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen.

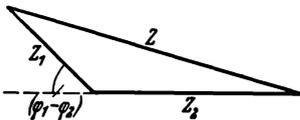


Abb. 417. Wechselstrom-Widerstandsdiagramm einer Reihenschaltung.

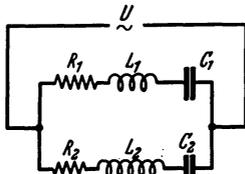


Abb. 418. Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen.

(§ 163), durch das Produkt $U i$ aus der Stromstärke und der an den Enden des Stromkreises liegenden Spannung gegeben. Bei Wechselstrom ändert die Leistung periodisch ihren Betrag und, sofern es sich nicht um einen reinen Widerstand handelt, sogar ihr Vorzeichen. Tatsächlich beobachtet wird der Mittelwert der Momentanleistungen über eine längere Zeit. Da sich jeweils nach einer Periode τ alle Vorgänge genau wiederholen, so findet man den Mittelwert \bar{L} der Leistung durch Mittelung über die Dauer einer Periode (§ 22), wobei wir $U = U_0 \sin \omega t$ und $i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$ setzen.

$$\bar{L} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} U_0 i_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} U_0 i_0 \cos \varphi. \quad (21)$$

φ ist die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung. Die Leistung ist also um so größer, je größer $\cos \varphi$, je kleiner also φ ist. Ihren größten Wert erreicht sie, wie man aus Gl. (11) abliest, für $R = Z$, also erstens im Fall eines reinen Widerstandes, zweitens im Fall der Resonanz. Sie nähert sich dem Betrage Null, wenn R gegenüber Z verschwindend klein wird. Dieser Fall eines sog. *wattlosen Stromes* kann bei Verwendung einer Spule von kleinem Widerstande und nicht zu kleiner Induktivität sehr weitgehend angenähert werden.

Zwischen den Scheitelwerten U_0 und i_0 von Strom und Spannung besteht nach den Gl. (6) und (11) die Beziehung $U_0 = i_0 R / \cos \varphi$. Demnach können wir statt Gl. (21) auch schreiben

$$L = \frac{1}{2} i_0^2 R. \quad (22)$$

Diese Gleichung besagt, daß, über eine Periode gemittelt, ein Leistungsverbrauch nur im Wirkwiderstand R stattfindet, und zwar genau entsprechend dem JOULEschen Gesetz (§ 163). Denn $i_0^2/2$ ist ja der zeitliche Mittelwert von i^2 bei einem Wechselstrom vom Scheitelwert i_0 . Natürlich wird die jeweilige Stärke des Stromes durch Kapazität und Induktivität, also durch den Blindwiderstand X , mitbestimmt. In diesem geht aber im zeitlichen Mittel keine Energie verloren. Denn die in einem Augenblick zum Aufbau des elektrischen Feldes im Kondensator bzw. des magnetischen Feldes in der Induktivität verbrauchte Energie wird nach einer halben Periode wieder abgegeben. Die momentane Leistung eines Wechselstroms setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, der *Wirkleistung* im Wirkwiderstand R und der im zeitlichen Mittelwert verschwindenden *Blindleistung* im Blindwiderstand X . Ein Wechselstrom mit dem Scheitelwert i_0 liefert also die gleiche Leistung wie ein Gleichstrom von der Stromstärke $i = i_0 / \sqrt{2}$. Man nennt dies die *effektive Stromstärke*

$$i_{\text{eff.}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0,707 i_0. \quad (23a)$$

Ebenso ist die *effektive Spannung* definiert als

$$U_{\text{eff.}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0,707 U_0. \quad (23b)$$

Aus Gl. (22) folgt dann

$$\bar{L} = i_{\text{eff.}}^2 R. \quad (23c)$$

249. Messung von Induktivitäten und Kapazitäten in der Brückenschaltung. Wechselstromwiderstände können wie Gleichstromwiderstände in der WHEATSTONEschen Brückenschaltung verglichen werden (§ 156). An die Stelle der Gleichstromquelle tritt eine Wechselstromquelle, an die Stelle des Galvanometers im Brückenweig meist ein Telefon, sonst ein anderes empfindliches, wechselstromanzeigendes Meßgerät. Wird ein Telefon verwendet, so benutzt

man einen Wechselstrom, dessen Frequenz derjenigen eines im akustischen Hörbereich liegenden Tones entspricht, und man erkennt die Stromlosigkeit des Brückenzweiges am Verstummen des Telephons.

Die zu vergleichenden Induktivitäten oder Kapazitäten werden in zwei aneinanderstoßende Zweige der Brückenschaltung geschaltet (Abb. 419, 420). Außerdem muß, jedenfalls bei Induktivitäten, in einen dieser Zweige, — in welchen, zeigt sich erst im Verlauf der Messung —, ein stetig veränderlicher Zusatzwiderstand geschaltet sein. Die beiden anderen Zweige bestehen aus veränderlichen reinen OHMSchen Widerständen R_3 und R_4 . Die Spannung der Wechselstromquelle sei U , die Teilspannungen an den Enden der vier Zweige seien U_1, U_2, U_3, U_4 . Dann ist Bedingung für Stromlosigkeit im Brückenzweig, daß die Endpunkte des Brückenzweiges auf gleicher Spannung sind, und zwar *zu jeder Zeit*. Das ist nur dann möglich, wenn die Teilspannungen U_1 und U_2 mit den Teilspannungen U_3 und U_4 in gleicher Phase sind. Da die Zweige 3 und 4 reine Widerstände enthalten, so sind die an ihnen liegenden Teilspannungen stets in gleicher Phase mit der Betriebsspannung U , und infolgedessen müssen es die Teilspannungen U_1 und U_2 auch sein. Sie müssen daher auch unter sich in gleicher Phase sein, d. h. es muß $\varphi_1 = \varphi_2$ sein. Dann folgt aus Gl. (II)

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}. \quad (24)$$

D. h. die Wirkwiderstände R_1 und R_2 müssen sich wie die Blindwiderstände X_1

und X_2 verhalten [Gl. (II)]. Um dies zu erreichen, ist der oben erwähnte veränderliche Zusatzwiderstand vorhanden. Nur mit seiner Hilfe erreicht man bei Induktivitäten ein scharfes Tonminimum im Telephon und eine richtige Messung.

Bei Stromlosigkeit der Brücke werden die beiden Wechselstromwiderstände vom gleichen Strom mit dem gleichen Scheitelwert i_0 durchflossen. Daher gilt für die Scheitelspannungen U_1^0 und U_2^0 an ihnen nach Gl. (6) $U_1^0/Z_1 = U_2^0/Z_2$. Ebenso gilt für die Scheitelspannungen an den Widerständen R_3 und R_4 $U_3^0/R_3 = U_4^0/R_4$. Bei Stromlosigkeit der Brücke muß wegen $U_1/U_2 = U_3/U_4$ auch $U_1^0/U_2^0 = U_3^0/U_4^0$ sein. Dann ergibt sich

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{R_1^2 + X_1^2}}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} = \frac{R_3}{R_4}, \quad (25)$$

und mit Hilfe von Gl. (24)

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (26)$$

Für Induktivitäten, $X_1 = \omega L_1$, $X_2 = \omega L_2$, bzw. Kapazitäten, $X_1 = 1/\omega C_1$, $X_2 = 1/\omega C_2$, folgt dann im besonderen

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{R_4}{R_3}. \quad (27)$$

Bei der Messung von Kapazitäten, deren Dielektrikum keine merkliche Leitfähigkeit besitzt, ist der Zusatzwiderstand nicht erforderlich. Dann kann die Berechnung ohne weiteres nach Gl. (27) erfolgen.

250. Drehstrom. Der heute technisch vorwiegend verwendete Drehstrom ist ein Sonderfall *verketteter Mehrphasenströme*. Er wird auf drei Leitern übertragen, welche gegen einen geerdeten vierten Leiter (Nulleiter) die Spannungen

$$U_1 = U_0 \sin \omega t, \quad U_2 = U_0 \sin (\omega t + 120^\circ), \quad U_3 = U_0 \sin (\omega t + 240^\circ) \quad (28)$$

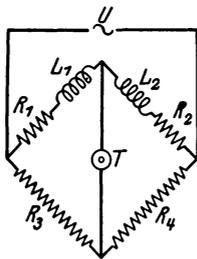


Abb. 419. Vergleich von Induktivitäten in der Brückenschaltung.

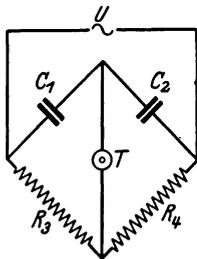


Abb. 420. Vergleich von Kapazitäten in der Brückenschaltung.

haben. Verbindet man nur zwei Enden des Dreileitersystems durch einen Stromkreis, so erhält man in diesem einen gewöhnlichen Wechselstrom. Die so erzeugbaren Spannungen U_1-U_2 , U_2-U_3 , U_3-U_1 haben, ebenso wie die Spannungen U_1 , U_2 , U_3 selbst gegen den Nulleiter, unter sich eine Phasendifferenz von je 120° , sie sind aber um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als diese. Denn es ist z. B. $U_2-U_1 = U_0 [\sin(\omega t + 120^\circ) - \sin \omega t] = 2 U_0 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot \sin 60^\circ = U_0 \sqrt{3} \cos(\omega t + 60^\circ) = 1,73 U_0 \cos(\omega t + 60^\circ)$.

Hat man daher, wie das in den großen Netzen meist üblich ist, einen Drehstrom, dessen Wechselstromkomponenten (Phasen) eine Effektivspannung von 220 Volt gegen den Nulleiter haben, so kann man, wenn man nicht alle drei Phasen verwenden will, was ja z. B. zum Betriebe elektrischer Beleuchtung nicht in Frage kommt, entweder nur *eine* der Phasen des Drehstroms und den Nulleiter benutzen und hat dann eine Effektivspannung von 220 Volt zur Verfügung, wie sie für Hausanschlüsse üblich ist. Oder man schließt an *zwei* Phasen des Drehstromnetzes an und hat zwischen ihnen eine Effektivspannung von etwa 380 Volt zur Verfügung, die für viele technische Zwecke vorteilhafter ist.

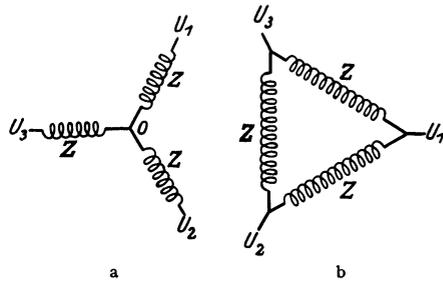


Abb. 421. a Sternschaltung, b Dreieckschaltung.

Will man das Drehstromnetz symmetrisch belasten, so verwendet man entweder die Sternschaltung oder die Dreieckschaltung (Abb. 421). Die drei Wechselstromwiderstände Z müssen einander gleich sein.

Stellt man drei gleiche Spulen unter einem Winkel von 120° gegeneinander geneigt auf und legt an die eine die Spannung U_1-U_2 , an die zweite die Spannung U_2-U_3 , an die dritte die Spannung U_3-U_1 , so überlagern sich in der Mitte des Raumes zwischen den drei Spulen die magnetischen Felder der drei Stromkreise derart, daß ein magnetisches Feld entsteht, welches konstanten Betrag hat, und dessen Richtung sich während einer Periode des Drehstroms mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um 360° dreht (*Drehfeld*).

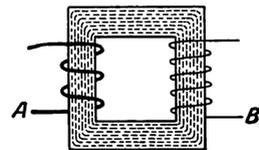


Abb. 422. Schema eines Umspanners.

Auf der Wirkung dieses Drehfeldes beruhen die *Drehstrommotore*. Ihre Spulen haben Eisenkerne, und zwischen ihnen befindet sich der Anker, der im einfachsten Falle aus einem drehbaren Kupferkäfig mit Eisenkern oder einer oder mehreren in sich geschlossenen auf einen Eisenkern gewickelten Windungen bestehen kann. Unter der Wirkung des Drehfeldes entstehen im Anker Wirbelströme. Diese erfahren durch das Drehfeld ein Drehmoment, welches den Anker im Drehungssinn des Feldes dreht. Umschaltung der Stromrichtung in einer der drei Feldspulen bewirkt Umkehrung des Drehungssinns.

251. Umspanner. Ein Umspanner (Transformator) verwandelt einen Wechselstrom von gegebener Spannung in einen Wechselstrom von anderer Spannung. Abb. 422 zeigt das Schema eines Umspanners. Er besteht aus einem ringförmig geschlossenen Kern aus weichem Eisen (Eisenblechen), auf den die Primärspule A und die Sekundärspule B aufgewickelt sind. Fließt durch die Primärspule ein Wechselstrom, so erzeugt er im Eisenkern einen mit der Frequenz des Wechselstroms veränderlichen magnetischen Fluß, dessen Kraftlinien fast sämtlich im Innern des Kerns ringförmig in sich zurücklaufen. Dieser zeitlich veränderliche Fluß wirkt induzierend auf die Sekundärspule und erzeugt in ihr eine induzierte elektromotorische Kraft, die die gleiche Frequenz hat wie

der primäre Wechselstrom. Es sei n_1 die Windungszahl der Primärspule, n_2 die der Sekundärspule, q der Querschnitt des Eisenkerns, l die Länge der Primärspule, i der Momentanwert des Primärstroms, U_1 der Scheitelwert der Primärspannung, μ die Permeabilität des Eisenkerns. Es sei ferner Z der Wechselstromwiderstand der Primärspule; ihr Widerstand R sei sehr klein. Dann ist nach Gl. (12) $Z \approx L\omega$, wenn L die Induktivität der Primärspule bedeutet. Bei geeigneter Wahl des Nullpunktes der Zeit t (§ 246) können wir schreiben $i = U_1 \sin \omega t / Z$. Dann ist bei Leerlauf, d. h. wenn in der Sekundärspule kein Strom fließt, die Induktion im Kern

$$B = \frac{4\pi\mu n_1}{l} i = \frac{4\pi\mu n_1}{l} \frac{U_1}{Z} \sin \omega t = \frac{4\pi\mu n_1}{l} \frac{U_1}{L\omega} \sin \omega t,$$

und daher die zeitliche Änderung der Induktion

$$\frac{dB}{dt} = \frac{4\pi\mu n_1}{lL} U_1 \cos \omega t.$$

Nun ist nach § 230 $L = \frac{4\pi\mu n_1^2 q}{l}$, und wir erhalten

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{n_1 q} U_1 \cos \omega t.$$

Da die Sekundärspule n_2 Windungen hat, so ist die in ihr induzierte elektromotorische Kraft

$$\mathcal{E} = n_2 q \frac{dB}{dt} = \frac{n_2}{n_1} U_1 \cos \omega t = \mathcal{E}_2 \cos \omega t.$$

Es verhält sich daher der Scheitelwert \mathcal{E}_2 der sekundären elektromotorischen Kraft zum Scheitelwert der Primärspannung wie die sekundäre zur primären Windungszahl

$$\mathcal{E}_2 : U_1 = n_2 : n_1.$$

(Übersetzungsverhältnis des Umspanners.) Wird der Umspanner belastet, fließt also in seiner Sekundärwicklung ein Strom, so sinkt das Übersetzungsverhältnis, weil der induzierte Sekundärstrom den magnetischen Fluß herabsetzt (LENZ'sches Gesetz). Es besteht hier eine gewisse Analogie zum Sinken der Klemmenspannung eines Elementes bei steigender Belastung. Man kann einen Wechselstrom sowohl auf höhere wie auf niedrigere Spannung umspannen.

Bei Leerlauf, d. h. wenn die Sekundärspule nicht geschlossen ist, sind wegen der hohen Induktivität und des kleinen Widerstandes der Primärspule Strom und Spannung in dieser nahezu um 90° gegeneinander verschoben, und es fließt in ihr ein nahezu wattloser, keine Energie verbrauchender Strom (§ 248). Wird die Sekundärspule durch einen Stromkreis geschlossen, so wird die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung in der Primärspule infolge der induzierenden Rückwirkung der jetzt stromdurchflossenen Sekundärspule auf sie kleiner. Die Leistung des sekundären Wechselstroms ist dann derjenigen des primären Stromes fast genau gleich, nur sehr wenig kleiner. Bei der Umspannung tritt also nur ein sehr geringer Energieverlust ein.

In dieser Möglichkeit einer beliebigen, fast verlustlosen Änderung der Spannung, die bei Gleichstrom nicht besteht, liegt der große technische Vorteil des Wechselstroms, der dazu geführt hat, daß er in der Starkstromtechnik den Gleichstrom fast ganz verdrängt hat. Dieser Vorteil macht sich besonders bemerkbar, seitdem man dazu übergegangen ist, die Erzeugung elektrischer Energie möglichst an die Orte zu verlegen, wo die elektrische Energie am billigsten erzeugt werden kann, also in die Nähe von Kohlenfeldern oder Wasserkraften. Der Leistungsverlust in einer Leitung vom Widerstande R beträgt

i^2R , ist also bei gegebenem Widerstand um so kleiner je kleiner die Stromstärke ist. Bei vorgeschriebener übertragener Leistung L ist aber die Stromstärke um so kleiner, je höher die Spannung ist, $i = L/U$. Daher ist die Wahl einer möglichst hohen Spannung wirtschaftlich vorteilhaft. Denn sie erlaubt mit erheblich dünneren Leitungen auszukommen, wodurch der Bau der Fernleitungen beträchtlich verbilligt wird. Die Energieverluste durch Sprühen (§ 182) sind diesem Vorteil gegenüber geringfügig. Man spannt daher die Energie am Erzeugungsort auf hohe Spannung um (100000 Volt und mehr) und bringt sie erst am Verbrauchsort auf die jeweils gewünschte Spannung.

252. Schwingungen von elektrischen Schwingungskreisen. Ein Kondensator von der Kapazität C sei geschlossen durch den Widerstand R und die Induktivität L (Abb. 423). Am Kondensator bestehe in einem bestimmten Augenblick eine Spannung, so daß seine eine Belegung eine positive, seine andere Belegung eine gleich große negative Ladung trägt. Diese Ladungen werden sich nunmehr durch R und L auszugleichen suchen. Es entsteht ein Strom, dessen Stärke zeitlich veränderlich ist, und gleichzeitig sinkt die Spannung am Kondensator. Zur Zeit t sei die Spannung am Kondensator U , die Stromstärke i , die Ladung des Kondensators $e = UC$. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit des Stromes i besteht im System eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion $\mathcal{E}_i = -L di/dt$, die der Spannung U entgegengerichtet ist.

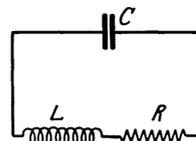


Abb. 423. Schwingungskreis.

Dann folgt aus dem OHMSCHEN Gesetz

$$U - L \frac{di}{dt} = iR. \tag{29}$$

Die Stromstärke i rührt von der *Abnahme* $-de$ der Kondensatorladung e her. Deshalb müssen wir in diesem Falle $i = -de/dt = -C dU/dt$ setzen. Führen wir dies in Gl. (29) ein, so erhalten wir nach Division durch LC

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = 0. \tag{30}$$

Jetzt setzen wir

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \tag{31}$$

und können dann statt Gl. (30) schreiben

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \tag{32}$$

Dies ist, wie ein Vergleich mit § 42, Gl. (131) zeigt, die Gleichung einer gedämpften Schwingung der Spannung U . Zur Zeit $t = 0$ sei $U = U_0$ und $i = 0$. Dann lautet, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft, die Lösung der Gl. (32)

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \tag{33}$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist, analog zu derjenigen einer gedämpften mechanischen Schwingung (§ 42), $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Ferner folgt

$$i = -C \frac{dU}{dt} = C U_0 e^{-\beta t} (\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t).$$

Setzen wir jetzt noch $\omega/\omega_0 = \sin \varphi$, $\beta/\omega_0 = \cos \varphi$, was wegen der obigen Definition von ω zulässig ist, so ergibt eine einfache Umformung

$$i = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi). \tag{34}$$

Der Strom ist also gegen die Spannung in Phase verschoben, er eilt ihr um den Phasenwinkel φ nach. Da in allen praktisch wichtigen Fällen $\beta \ll \omega_0$ ist,

so folgt, daß φ fast genau gleich $\pi/2$ ist. Im Schwingungskreis fließt ein Wechselstrom, bei dem die Maxima der Spannung sehr nahezu mit den Minima der Stromstärke zusammenfallen und umgekehrt. Ein solcher Vorgang heißt eine *elektrische Schwingung*. Die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind mit dem Faktor $e^{-\beta t}$ behaftet. Es liegt also eine *gedämpfte Schwingung* vor (§ 42). Die Dämpfung ist um so geringer, je kleiner β , also je kleiner der Widerstand R ist. Das ist ohne weiteres verständlich, denn die Dämpfung beruht auf einem Verlust an Schwingungsenergie, also auf der Leistung des Wechselstroms, und die für den Verlust allein in Frage kommende Wirkleistung ist

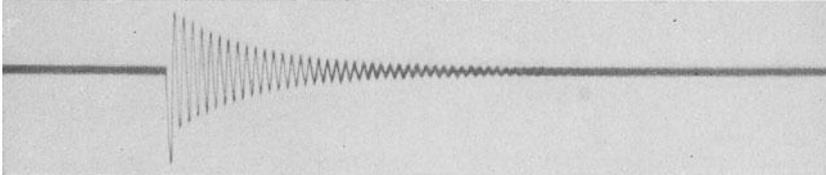


Abb. 424. Gedämpfte elektrische Schwingung.

dem Widerstand R proportional. Die Kreisfrequenz ω der Schwingung ist bei kleinem β nahezu gleich ω_0 . Das aber ist die Größe, die wir bereits in § 247 als das 2π -fache der *Eigenfrequenz* ν_0 eines solchen Systems erkannt hatten.

Die Maxima der Stromstärke entsprechen den Maxima der magnetischen Feldenergie in der Induktivität, die Maxima der Spannung den Maxima der elektrischen Feldenergie im Kondensator. Da diese Maxima gegeneinander nahezu um $\pi/2$ in Phase verschoben sind, so pendelt die Feldenergie periodisch zwischen dem magnetischen und elektrischen Felde hin und her und verwandelt sich allmählich in JOULEsche Wärme. Man kann auch sagen, daß die Energie sich während der Maxima der Spannung als potentielle Energie der Elektronen im geladenen Kondensator befindet, während der Maxima der Stromstärke als kinetische Energie der Elektronen im Stromkreise. Es liegt eine Analogie zu einem in einem reibenden Medium schwingenden Pendel vor, bei dem auch ein ständiger Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie stattfindet, und bei dem sich die Schwingungsenergie allmählich durch Reibung verzehrt. In Abb. 424 ist der Verlauf einer gedämpften elektrischen Schwingung, aufgenommen mit der BRAUNschen Röhre (§ 194), dargestellt.

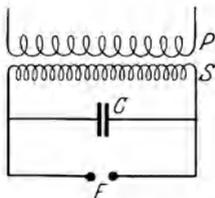


Abb. 425.
Erzeugung elektrischer
Schwingungen.

Aus Gl. (31) folgt die Schwingungsdauer τ und die Schwingungszahl ν einer ganz ungedämpften Schwingung,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (35)$$

Zur Erzeugung elektrischer Schwingungen kann z. B. ein Schwingungskreis dienen, der aus der Sekundärspule S eines Induktors, einer Batterie C von Leidener Flaschen als Kondensator und einer Funkenstrecke F zwischen Metallkugeln besteht, die in der aus Abb. 425 ersichtlichen Weise miteinander verbunden sind. Beim Betrieb des Induktors entsteht bei jedem Stromschluß und jeder Stromöffnung des primären Stromes in der Sekundärspule eine induzierte elektromotorische Kraft, welche den Kondensator auflädt. Dieser entlädt sich dann in den Pausen zwischen den einzelnen Induktionsvorgängen durch die Sekundärspule bzw. die Funkenstrecke. Diese tritt jedesmal in Tätigkeit, wenn der Kondensator sich auf die zum Durchschlag zwischen den

Kugeln nötige Spannung aufgeladen hat. Betrachtet man die Funken in einem rotierenden Spiegel, welcher die zeitlich nacheinander am gleichen Ort stattfindenden Erscheinungen räumlich getrennt nebeneinander zu beobachten ermöglicht, so sieht man, daß jeder scheinbare Einzelfunke aus einer Anzahl von schnell aufeinanderfolgenden Teilfunken besteht, welche von den einzelnen Hin- und Herschwingungen des Kreises herrühren. Die Schwingung ist in diesem Falle stark gedämpft, weil viel Energie in der Funkenstrecke in Wärme verwandelt wird.

253. TESLA-Schwingungen. Hochfrequente Schwingungen von hoher Spannung können erzeugt werden, indem man die nach Art der Abb. 425 erzeugten Schwingungen durch einen Umspanner (TESLA-Transformator, Abb. 426) auf eine noch höhere Spannung umspannt. Die Induktivität L_1 des Schwingungskreises besteht nur aus wenigen Windungen und bildet die Primärspule des TESLA-Transformators, dessen Sekundärspule L_2 sehr viel mehr Windungen hat und am einen Ende geerdet ist. Der Primärkreis enthält einen oder aus Symmetriegründen oft zwei Kondensatoren C , zu denen eine Funkenstrecke F parallel geschaltet ist. Der Schwingungskreis ist mit einem Hochspannungstransformator T (oder der Sekundärspule eines Induktors) verbunden, der mit Wechselstrom gespeist wird.

Der Transformator lädt die Kapazität des Schwingungskreises auf, bis Durchschlag der Funkenstrecke erfolgt. Alsdann entlädt sich der Schwingungskreis, wie bei Abb. 424, in Gestalt einer gedämpften Schwingung. Wegen des großen Übersetzungsverhältnisses des TESLA-Transformators und der hohen Frequenz der Schwingungen werden dann in der Sekundärspule sehr hohe Spannungen und hochfrequente Ströme induziert. Diese erzeugen im umgebenden Raum sehr starke Induktionswirkungen. Elektrodenlose Entladungsröhren leuchten noch in einer Entfernung von einigen Metern auf. Berührt man das obere Ende der Sekundärspule mit dem einen Zuführungsdraht einer gewöhnlichen Glühlampe, deren zweiten Zuführungsdraht man in der Hand hält, so leuchtet die Glühlampe. Es handelt sich hier in der Hauptsache um Ladungs- und Entladungsströme, die zwischen der Sekundärspule und dem als Kapazität wirkenden Körper des Experimentators fließen.

Es ist bemerkenswert, daß die starken und hochgespannten Ströme im Sekundärkreis dem menschlichen Körper, der Gleichstrom von mehr als etwa 5 Milliampere nicht verträgt, nicht schaden. Das liegt nach NERNST daran, daß es sich hier um sehr hochfrequente Ströme handelt. Die Schädigungen des menschlichen Körpers durch Gleichstrom rühren davon her, daß die Leitung im Körper eine elektrolytische ist, bei der also Ionen wandern. Wenn dabei Ionen in merklicher Zahl durch die Zellwände hindurchtreten, so erfolgt eine Schädigung der Zellen, deren Flüssigkeitsinhalt dabei Veränderungen in seiner Zusammensetzung erfährt. Bei sehr hochfrequentem Strom aber ändert sich die Stromrichtung fortgesetzt so schnell, daß die Ionen nur ganz kurze Hin- und Herbewegungen ausführen, die sie nicht aus dem Bereich ihrer Zelle hinausführen.

254. Elektrische Wellen. Wir betrachten als einfachsten Fall eines elektrischen Schwingungskreises einen geraden Draht. Daß in einem solchen Draht Schwingungen möglich sind, werden wir sogleich sehen. Wir gehen davon aus, daß der Draht aus irgendeinem Grunde momentan polarisiert ist, d. h. daß sich

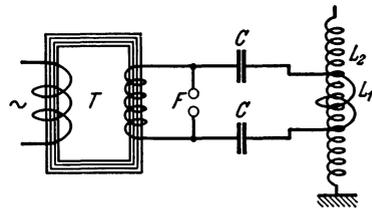
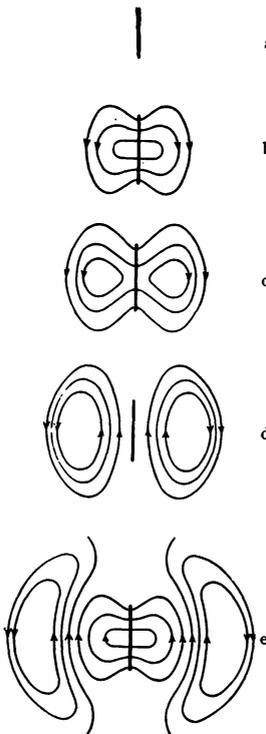


Abb. 426. Erzeugung von TESLA-Schwingungen.

in ihm an einem bestimmten Augenblick am einen Ende ein Überschuß positiver, am andern Ende ein gleich großer Überschuß negativer Ladung befindet, so daß der Draht einen elektrischen Dipol bildet. Sobald die polarisierende Ursache, z. B. ein äußeres elektrisches Feld, zu wirken aufhört, suchen sich die Überschußladungen auszugleichen, indem die am negativen Ende im Überschuß vorhandenen Elektronen nach dem andern Ende des Drahtes hin strömen. Es entsteht also im Draht ein elektrischer Strom, der zunächst so lange andauert, bis ein Ausgleich der positiven Überschußladung am positiven Pol eingetreten ist. Der Strom ist aber Träger eines magnetischen Feldes, dessen Kraftlinien den Draht ringförmig umschlingen. Dieses Feld wirkt



a induzierend auf den Draht zurück und bewirkt nach dem LENZschen Gesetz, solange der Elektronenstrom noch anwächst, eine Schwächung des Elektronenstroms. In dem Augenblick aber, wo der Ausgleich der Ladungen vollzogen ist, also die primäre Ursache für den Strom, das elektrische Feld im Draht, verschwunden ist, beginnt das magnetische Feld zu verschwinden, und dabei bewirkt es, ebenfalls nach dem LENZschen Gesetz, ein weiteres Andauern des Stroms in der ursprünglichen Richtung. Es fließen also weitere Elektronen an das ursprünglich positive Ende des Drahtes, und dieser erhält nunmehr einen negativen Ladungsüberschuß. Sobald das magnetische Feld vollkommen zusammengebrochen ist, wiederholt sich das gleiche Spiel mit umgekehrtem Vorzeichen. Im Draht besteht eine elektrische Schwingung, er ist ein *schwingender elektrischer Dipol*, ein *Oszillator*.

Abb. 427. Elektrisches Feld eines schwingenden Dipols. (Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Wir wollen uns jetzt ein Bild von den elektrischen und magnetischen Feldern in der Umgebung des Oszillators machen. Zu Beginn des Vorganges und jedesmal bei der Umkehr der Stromrichtung besteht in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators lediglich ein elektrisches Feld, dessen Kraftlinien vom positiven Pol des Dipols zum negativen hin verlaufen. Das wiederholt sich mit jeweiliger Umkehrung der Feldrichtung in Zeitabständen von einer halben Vollschwingung. In zeitlichem Abstand von einer Viertelschwingung von diesen Zuständen, wenn der Ausgleich

der Ladungen gerade vollzogen ist, besteht in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators kein elektrisches Feld. In diesen Zeitpunkten ist aber die Stromstärke im Oszillator am größten, sein magnetisches Feld also am stärksten. In den zwischen diesen Zuständen liegenden Zeiten besteht in der nächsten Umgebung des Oszillators gleichzeitig ein elektrisches und ein magnetisches Feld, von denen das eine anwächst, wenn das andere abnimmt. Es liegt also die gleiche Pendelung der elektrischen und magnetischen Feldenergie vor, die wir beim Schwingungskreis kennengelernt haben.

Nunmehr wollen wir aber die weitere Umgebung des Oszillators betrachten. Der ständige Wechsel des elektrischen und magnetischen Feldes in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators ist das, was wir in § 208 eine *elektromagnetische Störung* genannt haben, und wir haben dort gesehen, daß sich solche Störungen mit Lichtgeschwindigkeit im Raume fortpflanzen, indem die Kraftlinien zeitlich veränderlicher magnetischer Felder von elektrischen Kraftlinien, die Kraftlinien zeitlich veränderlicher elektrischer Felder

von zeitlich veränderlichen magnetischen Kraftlinien ringförmig umschlungen sind. Demnach ist der Raum um den Oszillator von einem zeitlich und örtlich periodisch veränderlichen elektromagnetischen Felde erfüllt, dessen Energie vom Oszillator fortwandert. *Der Oszillator strahlt elektromagnetische Feldenergie in den Raum aus.* In Abb. 427 ist ein axialer Querschnitt durch das elektrische Feld des Oszillators S gegeben, und zwar beginnend mit dem elektrisch neutralen Zustand des Oszillators (a). Nach einer Viertelschwingung ist maximale Aufladung der Enden eingetreten, die Zahl der vom Dipol ausgehenden elektrischen Kraftlinien ist am größten (b). Nunmehr nimmt die Zahl der Kraftlinien wieder ab, gleichzeitig beginnen sie weiter in den Raum hinauszuwandern, und es bilden sich ringförmig geschlossene elektrische Kraftlinien um die zeitlich veränderlichen magnetischen Kraftlinien (c). Die Kraftlinien schnüren sich sozusagen vom Dipol ab und wandern wie selbständige Gebilde von ihm fort. Nach Ablauf einer Halbschwingung sind alle elektrische Kraftlinien vom Dipol losgelöst und bilden fortwandernde ringförmige Gebilde (d). Und so wiederholt sich ständig das gleiche Spiel (e). Abb. 428 zeigt noch einmal das Kraftlinienbild in größerer Entfernung vom Oszillator.

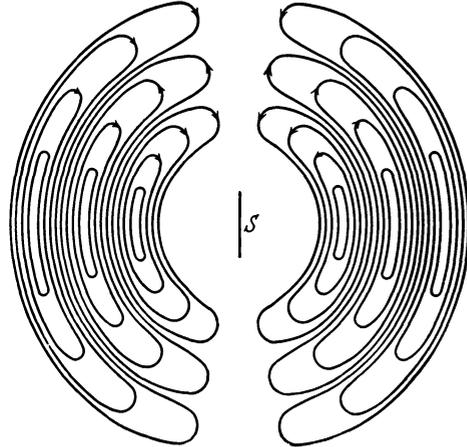


Abb. 428. Elektrisches Feld eines schwingenden Dipols.
(Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Das Gegenstück zu diesem elektrischen Kraftlinienbild ist der äquatoriale Querschnitt durch die magnetischen Kraftlinien in Abb. 429. Denkt man sich diese unter 90° in die Abb. 429 eingefügt, so sieht man, wie die zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Kraftlinien sich gegenseitig umschlingen.

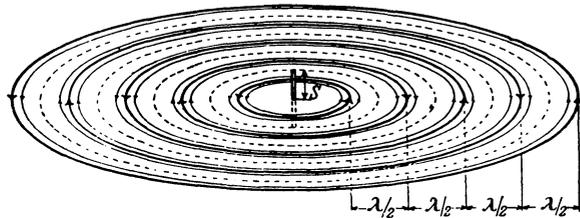


Abb. 429. Magnetisches Feld eines schwingenden Dipols.
(Nach POHL: Elektrizitätslehre.)

Die Schwingungen unseres Oszillators sind aus zwei Gründen stark gedämpft. Erstens wird in ihm Energie durch JOULEsche Wärme verzehrt. Zweitens muß aber der Oszillator die in den Raum hinauswandernde Feldenergie liefern, und zwar auf Kosten seiner Schwingungsenergie. Diesen Anteil der Dämpfung nennt man *Strahlungsdämpfung*.

Die periodischen Schwingungen der elektromagnetischen Feldenergie bezeichnet man als *elektromagnetische Wellen* oder *HERTZsche Wellen* (HEINRICH HERTZ 1888), auch kurz als elektrische Wellen. Unser Oszillator ist die einfachste Form eines *Senders elektromagnetischer Wellen*.

Es darf nicht übersehen werden, daß der Oszillator ebenso wie unser früher besprochener Schwingungskreis eine allerdings sehr kleine Kapazität und Induktivität besitzt, die seine Eigenfrequenz ν nach Gl. (35) bestimmen. Denn zu jedem Betrage des Ladungsüberschusses e an seinen Enden gehört eine bestimmte Spannung U zwischen den Enden, so daß $e/U = C$. Seine

Induktivität L ist dadurch gegeben, daß zu jedem Betrage von di/dt im Draht eine bestimmte Rückwirkung des magnetischen Feldes gehört, die zum Auftreten einer elektromotorischen Kraft $-L di/dt$ Veranlassung gibt.

Wie die mechanischen Wellen (§ 82), so haben auch die elektromagnetischen Wellen eine bestimmte *Schwingungszahl* ν , die durch die Frequenz des Oszillators bestimmt wird, und eine bestimmte *Wellenlänge* λ , die mit der Schwingungszahl und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c durch die Gleichung $\lambda = c/\nu$ zusammenhängt. Nach Gl. (35) ist daher bei einer ungedämpften Schwingung $\lambda = c/\nu = 2\pi c \sqrt{LC}$ (Abb. 427 u. 428), wenn L und C die Induktivität und die Kapazität des Oszillators bedeuten. Die Wellenlänge ist also um so größer, je größer die Kapazität und die Induktivität des Oszillators sind.

Man beachte wohl, daß die Bezeichnung dieser elektromagnetischen Ausbreitungsvorgänge als Wellen in keiner Weise ihre Wesensgleichheit mit den mechanischen Wellen bedeutet. Sie bedeutet lediglich, daß die mathematischen Begriffe und Gleichungen der mechanischen Wellenlehre auf diese Vorgänge angewendet werden können. Die elektromagnetischen Wellen werden als *transversale Wellen* bezeichnet (§ 85). Das bedeutet aber nicht etwa, wie bei den mechanischen Wellen, daß sich irgendwelche Teilchen im Zuge einer solchen Welle senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle periodisch bewegen. Es bedeutet vielmehr, daß in jedem von der Welle getroffenen Raumpunkt ein elektrisches und magnetisches Feld besteht, das, wie man aus den Abb. 428 u. 429 erkennt, senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gerichtet ist, und daß dieses Feld „schwingt“, d. h. daß der elektrische und der magnetische Feldvektor in jedem Raumpunkt periodisch ihren Betrag und ihre Richtung ändert.

255. Offene und geschlossene Schwingungskreise. Empfang elektrischer Wellen. Ein Oszillator der eben beschriebenen Art ist ein Beispiel eines *offenen* Schwingungskreises, der in § 252 besprochene Schwingungskreis ist ein *geschlossener* Schwingungskreis. Ein geschlossener Schwingungskreis ist ein solcher, bei dem die magnetische Feldenergie in der Induktivität beim Zusammenbrechen des Feldes zum größten Teil auf induktivem Wege wieder in den Schwingungskreis zurückströmt und zum Wiederaufbau des elektrischen Feldes der Kapazität dient, während nur ein geringer Teil der Energie als elektromagnetische Welle in den Außenraum ausgestrahlt wird. Ein geschlossener Kreis hat daher nur eine geringe Strahlungsdämpfung. Ein offener Schwingungskreis dagegen sendet einen großen Teil seiner Feldenergie in Form elektromagnetischer Wellen in den Raum. Die induktive Rückwirkung des magnetischen Feldes auf den Kreis ist gering und die Strahlungsdämpfung stark.

Zum Senden elektromagnetischer Wellen braucht man daher offene Schwingungskreise. Die *Antennen* der Sender für drahtlose Telegraphie und Telephonie bilden die Oszillatoren solcher offener Schwingungskreise. Um eine dauernde Ausstrahlung zu erzielen, koppelt man einen geschlossenen Schwingungskreis, in dem man durch dauernde Energiezufuhr eine Schwingung aufrechterhält, mit einem offenen, in dem durch den ersteren Schwingungen erzwungen werden. Der zweite Schwingungskreis strahlt dann die ihm von dem ersten gelieferte Energie als Wellen in den Raum aus.

Durch Verwendung besonders geformter oder mehrerer Antennen kann man es bei kurzen Wellen erreichen, daß eine merkliche Strahlung nur innerhalb eines begrenzten räumlichen Winkels ausgesandt wird (*Richtstrahler* für Kurzwellen), indem die Strahlung in allen andern Richtungen durch Interferenz (§ 87) ausgelöscht wird.

In jedem Punkt des Raumes, der von einer elektrischen Welle getroffen wird, sind wegen der wechselnden Stärke des elektrischen Feldes Verschiebungsströme vorhanden. Wird in diese ein Leiter gebracht, so entstehen in ihm nach § 209

Leitungsströme, die mit gleicher Frequenz Stärke und Richtung wechseln. Er vollführt *erzwungene elektrische Schwingungen*, die in ihrem zeitlichen Ablauf denjenigen im Sender entsprechen. Er wirkt als Empfänger der elektrischen Welle (Empfangsantenne). Statt des geraden Leiters kann man auch eine große, flache Spule (Rahmenantenne) verwenden, die so aufgestellt wird, daß die Windungsebene in Richtung der ankommenden Wellen liegt. In diesem Falle sind auch die magnetischen Felder der Welle wirksam. Indem die Spule von einem magnetischen Fluß durchsetzt wird, der fortwährend seine Stärke und Richtung ändert, wird in ihr eine elektromotorische Kraft induziert, deren Verlauf ein Abbild der ausgesandten Schwingung ist.

Koppelt man eine Empfangsantenne mit einem geschlossenen Schwingungskreis, der auf die Frequenz der einfallenden Welle abgestimmt ist, so gerät er in Mitschwingung (Resonanz). Hierauf beruht der Wellenempfang bei der drahtlosen Telegraphie und Telephonie (Rundfunk).

256. Die Versuche von HEINRICH HERTZ. HEINRICH HERTZ (1888) benutzte bei der Entdeckung der elektrischen Wellen kleine Sender, welche aus einem in der Mitte durch eine kurze Funkenstrecke unterbrochenen geraden Draht bestanden (Oszillator). Die beiden Drahthälften waren mit den beiden Sekundärklemmen eines Funkeninduktors verbunden. Ein solcher Sender schwingt, wenn der Induktor in Betrieb ist und zwischen seinen beiden Hälften Funken überspringen, genau so, wie unser in § 254 betrachteter einfacher Dipol, aber auch mit sehr starker Dämpfung. (Er wird, wie eine Glocke durch den Klöppel, durch die einzelnen Spannungsstöße des Induktors zu seinen Eigenschwingungen angeregt. Die zeitliche Folge der einzelnen Spannungsstöße hat dabei mit der Frequenz der Schwingung ebensowenig zu tun, wie die zeitlichen Abstände der einzelnen Glockenschläge mit der Schwingungszahl [Frequenz] des Glockentones.) Zum Nachweis der von diesem Oszillator ausgehenden Wellen im Raum benutzte HERTZ ein ganz ähnliches Gebilde, wieder einen durch eine winzige Funkenstrecke unterbrochenen geraden Draht oder Drahtbügel (Resonator) von gleicher Eigenfrequenz. Stellt man den Draht in die Richtung der elektrischen Kraftlinien des Senders, so treten in ihm unter der Wirkung des Feldes Spannungen auf, welche sich darin zeigen, daß zwischen den beiden Drahthälften Fünkchen überspringen.

Den Anstoß zu den Versuchen von HERTZ gab die elektromagnetische Theorie des Lichtes von MAXWELL, nach der das Licht ein elektromagnetischer Wellenvorgang ist (§ 262). Ist dies richtig, so müssen auch die mit Hilfe elektrischer Schwingungskreise erzeugten elektrischen Wellen diejenigen allgemeinen Eigenschaften haben, die wir beim Licht kennen, also namentlich Reflexion, Brechung, Beugung, Polarisation usw. zeigen. In der Tat konnte HERTZ nachweisen, daß diese Erscheinungen in der erwarteten Weise bei den elektrischen Wellen auftreten. Damit war der elektromagnetischen Lichttheorie eine feste Stütze gegeben. Über die Einordnung der elektrischen Wellen in das gesamte elektromagnetische Spektrum s. § 308.

257. Stehende elektromagnetische Wellen. Abb. 430 stellt einen Schwingungskreis dar, dessen Induktivität durch die Sekundärspule eines Induktors gebildet wird, und der zwei Kondensatoren und eine die beiden Enden der Spule verbindende Funkenstrecke enthält. Die Vorrichtung (LECHER) ist im allgemeinen der in Abb. 426 dargestellten sehr ähnlich. Jedoch ist der Kreis durch zwei lange, parallele Drähte verlängert. Beim Betriebe des Induktors lädt jeder einzelne Spannungsstoß die Kondensatoren bis zur Durchschlagsspannung der Funkenstrecke auf, und dabei beobachtet man längs der Doppeldrähte bei geeigneter Drahtlänge folgende Erscheinung. Legt man quer über die beiden Drähte ein elektrodenloses, mit einem verdünnten Edelgas, z. B. Neon, gefülltes

Entladungsröhr und verschiebt es längs des Drahtsystems, so leuchtet es an gewissen Stellen hell auf, wird bei weiterem Verschieben wieder dunkler, erlischt schließlich, wird dann wieder heller usw. Es zeigt sich, daß sich die Lagen maximaler Helligkeit in gleichmäßigen Abständen wiederholen, und daß die Lagen, in denen das Röhr verlöscht, in der Mitte zwischen den Lagen größter Helligkeit liegen. An den Stellen, wo das Röhr verlöscht, kann man die beiden Drähte durch aufgelegte Drähte verbinden, ohne daß dadurch die Erscheinung gestört wird.

Zum Verständnis dieser Erscheinungen müssen wir noch einmal auf unseren einfachen Oszillator (§ 254, Abb. 427) zurückkommen. Wir haben in § 92 und 93 die mechanischen Schwingungen von Körpern als stehende Wellen in ihnen aufgefaßt. In entsprechender Weise können wir die elektrische Schwingung unseres Oszillators als eine stehende Stromwelle auffassen, die an seinen Enden (die bezüglich der Stromschwingung natürlich wie die geschlossenen Enden einer Luftsäule anzusehen sind) Stromknoten und in seiner Mitte einen Strombauch hat. Diese entsprechen den Knoten und dem Bauch der Teilchenschwingungen in einer zu ihrer Grundschwingung erregten, beiderseits geschlossenen Luftsäule (Abb. 212a und b). Dem Knoten und den beiden Bäuchen der Druck-

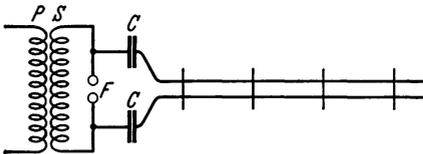


Abb. 430. LECHERSCHES Drahtsystem.

schwankungen einer solchen Luftsäule aber entsprechen beim Oszillator ein Spannungsknoten in der Mitte und Spannungsbäuche an seinen beiden Enden (Abb. 212c).

Nun kann aber ein solcher Oszillator durch Erregung von außen nicht nur in seine Grundschwingung, sondern auch

in eine seiner Oberschwingungen versetzt werden. Auch dann hat er an seinen Enden stets Spannungsbäuche, zwischen denen in gleichen Abständen weitere Spannungsbäuche liegen. In der Mitte zwischen je zwei Spannungsbäuchen liegt ein Spannungsknoten. Den Spannungsbäuchen entsprechen Stromknoten, den Spannungsknoten Strombäuche. Die periodisch veränderlichen Spannungen an den beiden Enden haben in jedem Augenblick entgegengesetztes Vorzeichen, und das gleiche gilt für je zwei aufeinander folgende Spannungsbäuche. Dagegen ist in allen Spannungsknoten in jedem Augenblick die Spannung gleich Null.

Wir können nun unser Drahtsystem als einen in seiner Mitte geknickten, mit seinen beiden Hälften parallel gestellten und zu einer höheren Oberschwingung erregten Oszillator betrachten. Wegen der periodisch wechselnden Spannungen zwischen seinen gegenüberliegenden Teilen herrscht aber in dem Raum zwischen den Drähten ein periodisch veränderliches elektrisches Feld. Die Schwingungswerte des elektrischen Feldvektors ist am größten in den Spannungsbäuchen, von denen ja die sich jeweils gegenüberliegenden auf entgegengesetzter Spannung sind. In den Spannungsknoten verschwindet das elektrische Wechselfeld. Eine zwischen die Drähte gebrachte Entladungsröhre wird daher in den Spannungsbäuchen am stärksten zum Leuchten gebracht und verlöscht in den Spannungsknoten. Eine leitende Überbrückung in den Spannungsknoten beeinflusst das Leuchten einer Entladungsröhre in einem Spannungsbauch nicht, da ja eine Verbindung zweier Punkte gleicher Spannung den elektrischen Vorgang in den Drähten nicht stört (vgl. die WHEATSTONESCHE BRÜCKE, § 156). Man kann auf diese Weise die Spannungsknoten längs der Drähte leicht feststellen.

Die elektrischen Feldschwingungen und die mit ihnen stets verknüpften magnetischen Feldschwingungen (§ 208) können nun vollkommen beschrieben werden als eine *stehende elektromagnetische Welle* im Raum zwischen den beiden Drähten, die dadurch entsteht, daß eine Welle in Richtung auf die Drahtenden verläuft, dort wie an einem festen Ende reflektiert wird und mit sich selbst

interferiert (§ 87). Dann ergeben sich die beschriebenen Knoten und Bäuche der Feldschwingung genau wie bei einer stehenden Schallwelle an einer festen Wand. Der Abstand je zweier Knoten oder Bäuche ist auch hier gleich der halben Wellenlänge λ . Kennt man die Frequenz ν der im Drahtsystem erregten Schwingung, so kann man die Geschwindigkeit der Wellen, $c = \lambda \nu$, berechnen. Sie ergibt sich bei sehr schnellen Schwingungen genau gleich der Lichtgeschwindigkeit. Bei langsameren Schwingungen setzen Einflüsse des Widerstandes die Geschwindigkeit merklich herab.

Wenn die Wellengeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, so muß das auch für die ihr parallel laufende Stromwelle im Draht gelten. Das ist natürlich nicht so zu verstehen, daß die Ladungsträger im Draht sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen; vielmehr breitet sich die periodische Störung der Ladungsverteilung im Draht mit Lichtgeschwindigkeit aus, während die Geschwindigkeit der Ladungsträger nur sehr klein ist (§ 151).

258. Drahtlose Telegraphie. In der ersten Zeit der drahtlosen Telegraphie benutzte man zum Erzeugen der Wellen Schwingungskreise etwa von der Art, wie sie im § 252 beschrieben sind, in Verbindung mit einer Antenne. Von einem solchen Schwingungskreis geht bei jedem der sehr schnell aufeinanderfolgenden Funken eine Welle aus, welche wegen der großen Dämpfung im Funken schnell abklingt. Sie ist bereits innerhalb eines sehr kleinen Bruchteils der Zeit zwischen zwei Funken vollkommen erloschen. Durch einen Taster wird der Primärkreis des Induktors im Tempo der zu übertragenden Morsezeichen geöffnet und geschlossen, so daß die Wellen in Folgen ausgesandt werden, die diesen Zeichen entsprechen. Durch gewisse Einrichtungen am Empfangsorte konnte dann die im Empfangskreise erregte Schwingung dazu benutzt werden, um diese Zeichen hörbar zu machen oder anderweitig aufzunehmen.

Diese Art der Telegraphie mit gedämpften Wellen hat unter anderem den großen Übelstand, daß eine gedämpfte Welle nicht nur einen genau auf sie abgestimmten Schwingungskreis erregt, sondern mehr oder weniger stark auch solche, welche auf benachbarte Wellenlängen abgestimmt sind. Dieser Nachteil machte sich mit zunehmender Dichte des funkentelegraphischen Netzes immer mehr bemerkbar und führte neben allen sonstigen Übelständen zu schweren gegenseitigen Störungen. Die heutigen Anlagen für drahtlose Telegraphie bedienen sich ausschließlich ungedämpfter Wellen.

Ein Verfahren zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen besteht darin, daß man sie nicht als Eigenschwingungen eines Schwingungskreises erzeugt, sondern mittels eines Generators als Wechselstrom von hoher Frequenz. Es gibt ferner Einrichtungen, um die Frequenz der auf diese Weise erzeugten Schwingungen noch zu verdoppeln oder zu vervierfachen.

Eine andere Art, ungedämpfte Schwingungen zu erzeugen, stammt von POULSEN. Den Grundgedanken — nicht die technische Ausführungsform — zeigt Abb. 431. Die beiden Kohlen eines elektrischen Lichtbogens A , der mit Gleichstrom (Stromquelle B) betrieben wird, sind durch eine Induktivität L und einen Kondensator C verbunden. Diese bilden mit dem Lichtbogen A einen Schwingungskreis.

Für das Auftreten von Schwingungen im POULSEN-Kreis ist die Tatsache entscheidend, daß ein Lichtbogen eine *fallende Charakteristik* (§ 181) hat. Das läßt sich in großen Zügen auf folgende Weise verstehen. Die Betriebsspannung des Bogens, also auch die am Kondensator des Kreises liegende Spannung, führt stets kleine Schwankungen aus. Angenommen, sie steige momentan

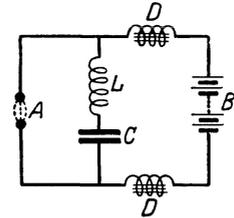


Abb. 431.
POULSEN-Schaltung.

um einen kleinen Betrag und sinke alsbald wieder auf ihren alten Wert. Der Überschuß an Ladung, den der Kondensator beim Anstieg aufgenommen hat, entlädt sich dann wieder durch den Lichtbogen, und zwar in Form einer Schwingung mit der Eigenfrequenz des Kreises. In denjenigen Phasen dieser Schwingung, in der der Schwingungsstrom mit dem Betriebsstrom des Bogens *gleichsinnig* verläuft, ihn also verstärkt, bewirkt diese Stromverstärkung wegen der fallenden Charakteristik eine Widerstandsverminderung des Bogens, also ein *weiteres Anwachsen* der Stromstärke. In den Phasen, wo die beiden Ströme einander *entgegengesetzt* verlaufen, die Schwingung den Strom im Bogen also schwächt, hat diese Schwächung ein *weiteres Sinken* der Stromstärke zur Folge. Die Schwingungen werden also durch diese Eigenschaft der Bogenentladung verstärkt. Mit jeder Vergrößerung ihrer Schwingungsweite wächst ihre Wirkung auf den Bogen weiter. Der Verstärkung ist erst dann eine Grenze gesetzt, wenn der Energieverlust des Kreises durch JOULEsche Wärme und Ausstrahlung gleich der Energiezufuhr aus der Gleichstromquelle geworden ist. Diese Energiezufuhr bewirkt, daß die Schwingungen des Kreises andauern, d. h. ungedämpft sind. Die in die Zuleitungen eingeschalteten Drosselspulen *D*, die für die Schwingungen wegen ihrer hohen Induktivität (Eisenkern) einen sehr großen Widerstand bilden (§ 247), während sie wegen ihres sehr kleinen OHMSchen Widerstandes den Gleichstrom kaum schwächen, verhindern ein Eindringen der Schwingungen in das Gleichstromnetz. Damit die Schwingungen gleichmäßig erfolgen, ist es günstig, den Bogen in einer Wasserstoffatmosphäre brennen zu lassen. Man kann die Induktivität und Kapazität eines solchen Schwingungskreises so bemessen, daß die Schwingungszahl in den Bereich der akustisch hörbaren Frequenzen fällt. Die Morsezeichen können dann am Empfangsorte mit dem Telephon abgehört werden (Hörfrequenzen).

Da der durch den Lichtbogen fließende Strom alle Schwankungen der Schwingung mitmacht, so schwankt die Temperatur im Lichtbogen mit der Frequenz der Schwingung. Infolgedessen erfährt die ihn umgebende Luft Schwankungen ihrer Temperatur, die sich als Druckschwankungen bemerkbar machen. Diese Wellen pflanzen sich als Schall fort, der Lichtbogen tönt.

Die hier besprochenen Einrichtungen können große Energien liefern und werden deshalb zur Telegraphie mit sehr langen Wellen auf große Entfernungen benutzt. Andernfalls bedient man sich stets der Röhrensender (§ 259).

259. Drahtlose Telephonie. In § 242 ist auseinandergesetzt worden, daß es für die Zwecke der Telephonie darauf ankommt, die Intensität elektrischer Energie, die vom Sende- zum Empfangsort übertragen wird, entsprechend den zu übertragenden Klängen zu modulieren. Wie bei der gewöhnlichen Leitungstelephonie der Gleichstrom, so wird bei der drahtlosen Telephonie die Energie einer elektrischen Welle durch einen ihr aufgeprägten Klang moduliert. Die Art, wie dies geschieht, wird unten erörtert werden. Eine modulierte elektrische Schwingung bzw. die von ihr ausgehende Welle hat z. B. den in Abb. 432 schematisch dargestellten Intensitätsverlauf. (Tatsächlich entfallen auf eine Schwebung, denn einer solchen ist dieser Vorgang ähnlich, sehr viel mehr Einzelschwingungen, beim Rundfunk z. B. etwa zwischen 100 und 20000.) Man beachte, daß der Abstand zweier Maxima einer vollen Wellenlänge des aufgeprägten Schalles entspricht. Eine solche Modulierung ist natürlich nur bei ungedämpften Wellen möglich, da gedämpfte Wellen ja schon an sich in ihrer Stärke schwanken.

Für den Empfang kommt es darauf an, die Intensitätsschwankungen der in der Welle übertragenen elektrischen Energie in gleichartige Schwingungen einer Telephonmembran zu übersetzen. Das ist aber nicht auf die Weise möglich, daß man die in einem abgestimmten Schwingungskreise auftretenden Schwingungen

einfach durch ein Telephon leitet. Dieses würde ja nur die einzelnen Schwingungen der *elektrischen Welle* mitmachen, wenn es nicht überhaupt zu träge wäre, um so schnellen Schwingungen zu folgen. Es bliebe also tatsächlich in Ruhe und brächte keinen Ton von der der Modulation entsprechenden Schwingungszahl hervor. Um dies zu erreichen, muß man die im empfangenden Schwingungskreis entstehende Schwingung erst „gleichrichten“, d. h. man muß zwischen dem Telephon und dem Schwingungskreis eine Vorrichtung anbringen, welche nur die in der einen Richtung erfolgenden Stromschwankungen hindurchläßt, die anderen aber nicht. Abb. 433 zeigt eine so gleichgerichtete modulierte Schwingung. Eine solche Schwingung

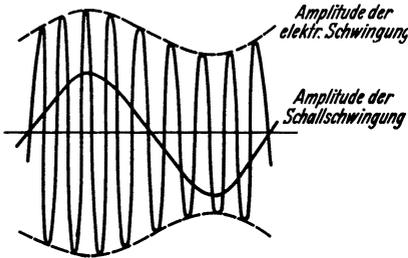


Abb. 432. Modulierte elektrische Schwingung.

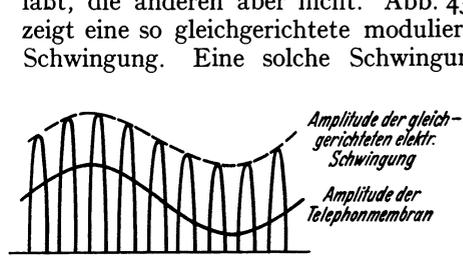


Abb. 433. Gleichgerichtete modulierte Schwingung.

wirkt auf ein Telephon auf folgende Weise: Wegen der Trägheit der Telephonmembran folgt sie nicht jeder Einzelschwingung, sondern dem jeweiligen Mittelwert einer großen Zahl der nunmehr einseitig erfolgenden Einzelschwingungen. Dieser Mittelwert aber schwankt entsprechend der den Schwingungen aufgeprägten Modulation. Die Membran erfährt Durchbiegungen von wechselnder Stärke mit der Frequenz der Schallschwingung, und zwar ist jetzt die auf sie wirkende Kraft wegen der erfolgten Gleichrichtung stets nach der gleichen Seite gerichtet. Die Bewegung der Membran wird also etwa durch die Sinuskurve in Abb. 433 dargestellt.

Um eine Schwingung gleichzurichten, bedarf es einer Vorrichtung, die in der einen Richtung den Strom möglichst gut leitet, in der andern dagegen so gut wie gar nicht, die also wirkt wie ein sich einseitig öffnendes Ventil auf einen pulsierenden Wasserstrom. Man nennt solche Vorrichtungen daher auch *elektrische Ventile*.

Ein besonders einfacher Gleichrichter ist der *Kristalldetektor*. Er besteht aus einem Kristall — besonders geeignet sind unter anderem Molybdänglanz, Bleiglanz, Zinkblende, Pyrit —, der an einer Stelle von der Spitze eines dünnen Drahtes berührt wird. Diese Kontaktstelle hat die Eigenschaft, einen Strom in der einen Richtung verhältnismäßig gut, in der andern sehr schlecht zu leiten (einseitiger Widerstand). Hiernach ergibt sich die in Abb. 434 dargestellte Schaltung für einen mit Detektor arbeitenden Empfänger. Der aus Induktivität L und Kapazität C bestehende, durch Veränderung der Kapazität auf die einfallende Welle abstimmbare Schwingungskreis wird durch die von der Welle in der mit ihm verbundenen Antenne A erregten Schwingungen zum Mischwingen gebracht. Die Spannungsschwankungen am Kondensator bewirken, daß durch das Telephon T ein Wechselstrom von der Frequenz der modulierten Schwingung fließt, der aber während der einen Hälfte jeder Periode durch den Detektor D unterdrückt wird und daher gleichgerichtet und gleichfalls moduliert ist. (Eine Kapazität mit einem Pfeil bedeutet einen Drehkondensator, also eine stetig veränderliche Kapazität.) E ist eine Drahtverbindung zur Erde, die Erdung.

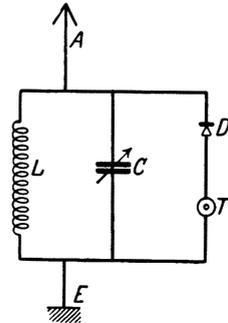
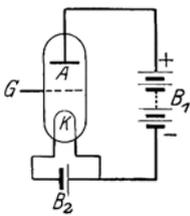


Abb. 434. Empfang mit Detektor.

Da die Erregung des Telephons lediglich durch die geringe Energie erfolgt, welche mittels der Antenne aus der einfallenden Welle entnommen wird, so ist der Detektorempfang auf verhältnismäßig kleine Entfernungen beschränkt.



Im Gegensatz zum Detektorempfang dient beim Empfang mit der Elektronenröhre die von der Antenne aufgenommene Schwingungsenergie lediglich zur Steuerung der viel größeren Energiebeträge, die von Batterien oder dem Lichtnetz geliefert werden. Eine Elektronenröhre (Abb. 435) besteht aus einem evakuierten Glasgefäß. In diesem befinden sich, mit Zuleitungen von außen, erstens ein dünner, mittels der Batterie B_2 elektrisch heizbarer, Elektronen aussendender Draht K (§ 179) als *Kathode*, zweitens das *Gitter* G , bei der praktischen Ausführung (Abb. 436) ein wendelförmiger Draht, in dessen Windungsachse die Kathode liegt, drittens die *Anode* A , bei der praktischen Ausführung meist ein die Kathode und das Gitter umgebender Metallzylinder oder ebenfalls eine Drahtwendel.



Abb. 436.
Elektronenröhre.

Zwischen Kathode und Anode wird die Spannung einer Batterie B_1 (100—200 Volt) gelegt. Wäre das Gitter nicht vorhanden, so würden die Elektronen, die aus dem glühenden Draht austreten, durch das elektrische Feld in der Röhre ungehindert zur Anode getrieben. Legt man aber an das Gitter, durch dessen Öffnungen die Elektronen an sich hindurchtreten können, eine Spannung, so hängt es ganz von Betrag und Vorzeichen der Spannung zwischen Gitter und Kathode ab, ob und wieviele Elektronen durch das Gitter hindurch an die Anode gelangen.

Hat das Gitter gegenüber der Kathode eine ausreichend hohe negative Spannung U_g , so gelangen überhaupt keine Elektronen an die Anode, denn sie werden sämtlich durch das zwischen Kathode und Gitter herrschende, verzögernde Feld wieder zur Kathode zurückgetrieben. Der zur Anode gelangende Strom ist $i_a = 0$. Jedoch beginnt schon bei einer bestimmten negativen Gitterspannung ein Anodenstrom zu fließen, und zwar hängt die Höhe der Gitterspannung, bei der dies geschieht, von der Höhe der

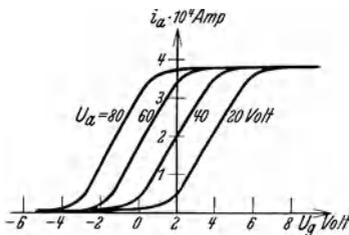


Abb. 437. Gittercharakteristik einer Elektronenröhre bei verschiedenen Anodenspannungen U_a .

Anodenspannung U_a ab. Abb. 437 zeigt die *Gittercharakteristik* einer Elektronenröhre, und zwar bei verschiedenen Anodenspannungen U_a . Man sieht, daß der Anodenstrom von einer gewissen Gitterspannung U_g ab ansteigt und schließlich einen konstanten Sättigungswert annimmt. Ferner sieht man, daß sich die Charakteristik bei steigender Anodenspannung U_a nach höheren Werten der Gitterspannung verschiebt.

Daß ein Anodenstrom bereits fließen kann, wenn die Spannung des Gitters gegenüber der Kathode negativ ist, erscheint zunächst auffällig.

Die Erscheinung rührt daher, daß wegen der Bauart des Gitters eine mehr oder weniger große Zahl von Kraftlinien unmittelbar von der Anode zur Kathode verläuft, und längs dieser Kraftlinien kann ein Elektronenstrom von der Kathode zur Anode fließen. Die Zahl dieser Kraftlinien ist um so größer, je höher die Anodenspannung ist. Deshalb setzt der Anodenstrom schon bei um so niedrigerer Gitterspannung ein, je höher die Anodenspannung ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als *Durchgriff*. Neben dem Durchgriff sind die Eigenschaften einer

Elektronenröhre vor allem durch die *Steilheit* der Gittercharakteristik und die Elektronenemission (den *Sättigungsstrom*, § 178) der Kathode gegeben.

Die Elektronenröhre kann nun sowohl zur *Gleichrichtung* wie zur *Verstärkung* einer modulierten Schwingung dienen. Wir betrachten zunächst die Wirkung als *Verstärker*. In diesem Fall wählt man die Anodenspannung U_a und die Gitterspannung U_g so, daß die letztere einem Punkt etwa in der Mitte des geradlinig ansteigenden Teils der Gittercharakteristik entspricht und dieser im negativen Gitterspannungsbereich liegt. Dieser Gitterspannung werden die Spannungsschwankungen ΔU_g der zu verstärkenden modulierten Schwingung überlagert (Abb. 438a). Die Gitterspannung schwankt also mit der Frequenz und mit der Schwingungsweite der überlagerten Schwingung. Da mit jeder

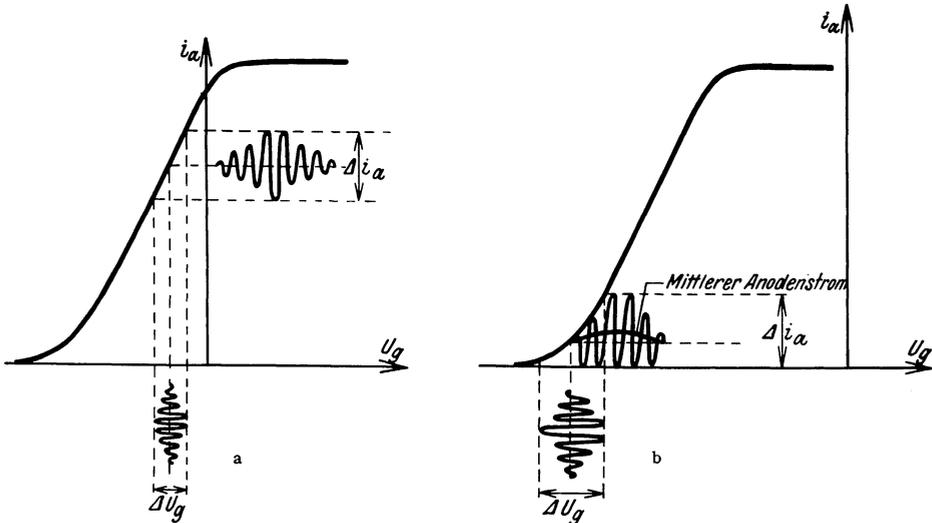


Abb. 438. Wirkung der Elektronenröhre, a als Verstärker, b als Gleichrichter.

Änderung der Gitterspannung eine Änderung des Anodenstroms verbunden ist, so schwankt der Anodenstrom i_a ebenfalls mit der Frequenz der Schwingung und mit einer Schwingungsweite, die derjenigen von ΔU_g proportional ist. Die Schwankungen Δi_a des Anodenstroms sind sehr viel stärker als die Schwankungen der schwachen, der empfangenen Schwingung entnommenen Ströme, die die periodischen Spannungsschwankungen des Gitters veranlassen. Die Schwingung ist also bedeutend verstärkt. Man kann die Schwankungen des Anodenstroms ohne weiteres wieder dazu benutzen, um dem Gitter einer zweiten Verstärker- röhre Spannungsschwankungen aufzuprägen, und die Schwingung auf diese Weise weiter verstärken.

Zur Gleichrichtung einer Schwingung mittels der Elektronenröhre sind mehrere Verfahren in Gebrauch. Wir beschränken uns hier auf das leicht verständliche Verfahren der *Richtverstärkung*. In diesem Fall wird die Gitterspannung so gewählt, daß sie dem unteren Knick der Gittercharakteristik entspricht (Abb. 438b). Die gleichzurichtende Schwingung wird wieder der Gitterspannung überlagert, und diese führt Schwankungen ΔU_g mit der Frequenz und mit der Schwingungsweite der gleichzurichtenden Schwingung aus. Der Anodenstrom i_a schwankt demnach auch hier wieder mit der Frequenz der Schwingung. Aber da wir jetzt nicht im geradlinigen Teil der Charakteristik arbeiten, so sind die Schwankungen Δi_a des Anodenstroms den Schwankungen ΔU_g nicht proportional, wie aus Abb. 438b zu ersehen ist, sondern es entspricht

den positiven Ausschlägen der Gitterspannung eine größere Änderung des Anodenstroms, als den negativen Ausschlägen. Die Schwingungen des Anodenstroms erfolgen mehr oder weniger einseitig, und der mittlere Anodenstrom zeigt während einer Schwingung der Modulation eine einseitige Schwingung, deren Dauer genau derjenigen der aufgeprägten Schwingung entspricht. Die Schwingung ist also in gewünschter Weise gleichgerichtet, und außerdem ist sie, wie beim reinen Verstärker, auch verstärkt. Daher der Name Richtverstärker. Die erzielte Einseitigkeit der Ausschläge des Anodenstroms bleibt erhalten, wenn man die Schwingung mittels einer Verstärkerröhre weiter verstärkt. Die Schwingung bleibt gleichgerichtet.

Abb. 439 zeigt das Schema einer einfachen Empfangsschaltung mit einem Richtverstärker F_r und einem Verstärker F_v (Ortsempfänger). Die von der Antenne A aufgenommene Schwingung erregt den aus Kapazität C und Induktivität L bestehenden abstimmbaren Schwingkreis, der an seinem einen Ende

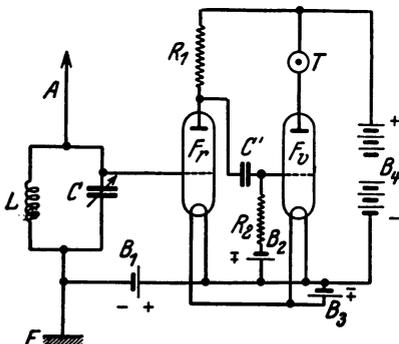


Abb. 439. Einfache Empfangsschaltung mit einem Richtverstärker und einem Verstärker.

zur Erde abgeleitet ist. Die Spannungsschwankungen am Kondensator werden unmittelbar auf das Gitter des Richtverstärkers F_r übertragen, das zur Verwirklichung der Verhältnisse der Abb. 438 b mittels der Batterie B_1 auf dem Wege über L die erforderliche negative Spannung gegen die Kathode von F_r erhält. Die Anode von F_r ist über einen großen Widerstand R_1 (einige Megohm) mit dem positiven Pol der Batterie B_4 von 100—200 Volt Spannung verbunden, deren negativer Pol an der Kathode von F_r liegt. Von der Anode führt eine Verbindung zum Kondensator C' . Es sei U die Spannung der Batterie B_4 , U_a

die Anodenspannung, i_a der Anodenstrom. Dann ist $U = U_a + i_a R_1$, oder $U_a = U - i_a R_1$. Die Anodenspannung und damit die Spannung am Kondensator C' schwankt also mit der gleichen Frequenz wie der gleichgerichtete, verstärkte Anodenstrom i_a , und diese Spannungsschwankungen werden über den Kondensator C' auf das Gitter der Verstärkerröhre F_v übertragen, wo die Schwingungen weiter verstärkt werden. Das Gitter von F_v wird durch eine Batterie B_2 über den Widerstand R_2 auf einer so hohen negativen Spannung gehalten, daß die Verhältnisse der Abb. 438 a verwirklicht sind. Die Anode ist über das Telefon T (Lautsprecher) mit dem positiven Pol der Batterie B_4 verbunden. Die Batterie B_3 dient zum Heizen der Kathoden. Das Telefon wird von dem verstärkten und gleichgerichteten Anodenstrom durchflossen. Seine Membran ist viel zu träge, um den Einzelschwingungen der modulierten und gleichgerichteten Schwingung folgen zu können. Sie folgt nur den Schwankungen des mittleren Anodenstromes (Abb. 433), und diese entsprechen bei verzerrungsfreier Verstärkung genau den Schallschwingungen, mittels derer die empfangene Schwingung moduliert wurde. Der modulierende Schall wird also vom Telefon wiedergegeben.

260. Schwingungserzeugung mit der Elektronenröhre. Das heute überwiegend benutzte Verfahren zur Schwingungserzeugung (A. MEISSNER) beruht auf der Verwendung von Elektronenröhren, die im Prinzip den zum Empfang gebrauchten gleichen, aber von viel größeren Ausmaßen sind. Die größeren Rundfunksender arbeiten heute mit einer ausgestrahlten Antennenleistung von 100—200 kW. Eine einfache Sendeschaltung zeigt Abb. 440. Das Gitter einer Senderöhre ist durch eine Induktivität L_1 und die Sekundärspule eines Transformators T_r , der

ein Kondensator C_1 parallel liegt, mit der Kathode verbunden. Mit der Anode ist ein aus der Induktivität L_2 und der Kapazität C_2 bestehender, abstimbarer Schwingungskreis verbunden, der mit dem positiven Pol einer Batterie B_2 in Verbindung steht. Mit der Induktivität L_2 ist die Induktivität L_3 des Schwingungskreises der Antenne induktiv gekoppelt (in der Abbildung nur schematisch angedeutet), der außerdem noch den zur Abstimmung dienenden Kondensator C_3 enthält und an seinem einen Ende geerdet ist. Die Spule L_2 ist aber auch mit der Spule L_1 gekoppelt, steht ihr also dicht gegenüber (in der Abbildung durch den Pfeil angedeutet und nur der Übersichtlichkeit wegen räumlich getrennt gezeichnet). Die Primärspule des Transformators im Gitterkreis ist durch ein Mikrophon M und eine Batterie B_1 geschlossen.

Die geschilderte Vorrichtung gerät stets von selbst — durch Selbsterregung — in Schwingungen. Von der Kathode fließt ein Elektronenstrom zur Anode.

Ein solcher Strom ist stets kleinen Schwankungen unterworfen, durch die die Spannung an den Belegungen des im Schwingungskreise gelegenen Kondensators C_2 über oder unter ihren normalen Wert sinkt. Nach der ersten zufälligen Schwankung sucht sich der alte Zustand am Kondensator wiederherzustellen. Das geschieht aber, wie wir wissen, bei ausreichend kleiner Dämpfung stets in Gestalt einer Schwingung des Schwingungskreises. Diese zuerst sehr kleinen Schwingungen übertragen sich induktiv von L_2 über L_1 auf das Gitter, dessen Spannungsschwankungen den Elektronenstrom mit der Frequenz der Schwingung steuern. Dadurch aber gerät nunmehr der Schwingungskreis (L_2C_2), der ja von diesem Strom durchflossen wird, in stärkere Schwingung. Je heftiger er schwingt, desto stärker wird auch die auf das Gitter übertragene Wirkung. Die Verstärkung der Schwingung findet ihre Grenze erst, wenn die dem Schwingungskreis durch Ausstrahlung usw. entzogene Energie ebenso groß ist, wie die ihm durch den Elektronenstrom zugeführte Energie, bzw. wenn die Schwingungsweite der Spannungsschwankungen des Gitters der Anodenspannung nahekommt. Es entstehen also im Anodenkreise ungedämpfte Schwingungen, die induktiv von L_2 auf L_3 und so auf den Antennenkreis übertragen und dort ausgestrahlt werden.

Zur Modulierung der Schwingung dient das Mikrophon M . Durch die beim Auftreffen von Schall auf das Mikrophon erzeugten Stromschwankungen in der Primärspule des Transformators werden in der Sekundärspule, und damit am Gitter, Spannungsschwankungen induziert, die den Elektronenstrom in der Röhre und infolgedessen die Schwingungsweite im Schwingungskreise mit der Frequenz der Schallschwingungen steuern. Die ausgesandte Welle ist also in der gewünschten Weise moduliert. Die dargestellte Schaltung gibt nur das Grundsätzliche des Verfahrens wieder. Die Schaltungen der Rundfunksender sind wesentlich verwickelter.

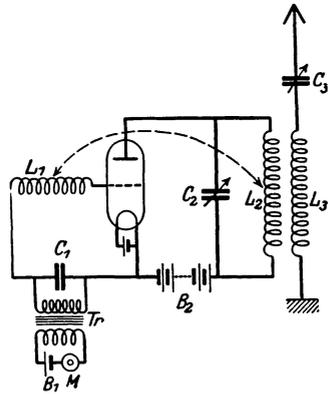


Abb. 440. Schema einer einfachen Sendeschaltung.

Optik und allgemeine Strahlungslehre.

I. Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung.

261. **Inhalt der Strahlungslehre. Lichtquellen.** Den Inhalt der *Strahlungslehre* im engeren Sinne, auch *Optik* genannt, bildet die Lehre vom Licht, also von den physikalischen Erscheinungen, die die Sinneseindrücke des Auges hervorrufen. Es gibt jedoch physikalisch gleichartige Erscheinungen, welche von unserem Auge nicht wahrgenommen werden. Die Optik im engeren Sinne spielt also in der Strahlungslehre etwa die gleiche Rolle wie die Akustik im Rahmen der Lehre von den mechanischen Schwingungen. Sie bildet ein lediglich physiologisch abgegrenztes Teilgebiet der *allgemeinen Strahlungslehre*. Da die allgemeinen Gesetze und Begriffe der gesamten Strahlungslehre gemeinsam sind, so werden sie im folgenden zunächst auf dem unserer Anschauung unmittelbar zugänglichen Gebiet der Lehre vom Licht oder Optik im engeren Sinne eingeführt und erläutert. Wir verstehen daher unter Licht im folgenden zunächst solche Strahlung, welche auf unser Auge unmittelbar wirkt, also Licht im Sinne des Sprachgebrauchs.

Die ursprüngliche Quelle jeglichen Lichts ist ein lichtaussendender (selbstleuchtender) Körper. Die Ursache der Lichtaussendung kann verschieden sein. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle liegt sie in der Temperatur der Körper. Es gibt aber noch andere Ursachen, die ein Leuchten eines Körpers veranlassen können, z. B. elektrische Entladungen in Gasen, Fluoreszenz, Phosphoreszenz, chemische Umwandlungen usw. Manche Organismen haben die Fähigkeit, Licht auszusenden (die Glühwürmchen, die Organismen, die das Meerleuchten hervorrufen usw.). Diese letzteren Lichterscheinungen rühren nicht von der Temperatur der Lichtquellen, sondern von anderen Ursachen her. Das Licht aber, welches alle diese Lichtquellen aussenden, ist seiner physikalischen Natur nach wesensgleich und gehorcht den gleichen allgemeinen Gesetzen.

Körper, die selbst kein Licht erzeugen (nichtselbstleuchtende Körper), können trotzdem leuchten, wenn Licht auf sie fällt, das sie wenigstens zum Teil wieder zurückwerfen. Von solchen, sozusagen im erborgten Licht strahlenden Lichtquellen sind wir rings umgeben. Jeder von unserem Augen erblickte Gegenstand, der nicht selbst eine ursprüngliche Lichtquelle ist, verhält sich so, die von der Sonne beleuchtete Natur, Wände und Gegenstände im Zimmer usw., am Himmel der Mond und die Planeten.

262. **Lichttheorien.** Die ersten genaueren Vorstellungen über das Wesen des Lichtes bildeten sich in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts. ISAAC NEWTON stellte 1669 die *Emanationstheorie* des Lichtes auf. Er nahm an, daß das Licht aus winzig kleinen Teilchen besteht, die von den Lichtquellen ausgeschleudert werden, und denen er gewisse Eigenschaften zuschrieb, die geeignet waren, die damals bekannten optischen Erscheinungen zu erklären. Dieser Theorie stellte HUYGENS 1677 (Vorläufer DESCARTES 1637, HOOKE 1665) die *Wellen-* oder *Undulationstheorie* entgegen. Hiernach ist das Licht ein Wellenvorgang.

Wir haben im VI. Abschnitt des 3. Kapitels die charakteristischen Eigenschaften der Wellen, insbesondere die Interferenz, kennengelernt. Interferenz-

erscheinungen waren beim Licht auch zu NEWTONS Zeiten bereits bekannt. Die Verfechter der Emanationstheorie haben nichts unterlassen, um die Interferenzerscheinungen des Lichtes auf Grund ihrer Theorie zu erklären. Erst 1802 gelang THOMAS YOUNG der erste entscheidende Beweis zugunsten der Wellentheorie auf Grund der Beugungerscheinungen des Lichtes. In der Folge wurde erkannt, daß eine Beschreibung der damals bekannten Eigenschaften des Lichtes überhaupt nur auf dem Boden der Wellentheorie möglich ist. Schließlich lieferte die Entdeckung der Polarisierbarkeit des Lichtes den Beweis, daß *das Licht ein transversaler Wellenvorgang* ist (§ 84). Entsprechend dem mechanischen Weltbild des 19. Jahrhunderts betrachtete man als Träger der Lichtwellen einen das ganze All erfüllenden, unwägbaren Stoff, den Welt- oder Lichtäther (§ 26).

Während es in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts demnach noch als selbstverständlich angesehen wurde, daß das Licht letzten Endes von der Mechanik her verstanden werden müsse, erkannte 1871 MAXWELL mit genialem Blick, daß die Eigenschaften des Lichtes sich verstehen lassen, wenn man es als einen *elektromagnetischen Wellenvorgang* auffaßt, der den MAXWELLSchen Gleichungen gehorcht (§ 232). Wohlbermerkt, elektromagnetische Wellen waren zu jener Zeit experimentell überhaupt noch nicht bekannt. Ihre durch MAXWELLS *elektromagnetische Lichttheorie* angeregte Entdeckung durch H. HERTZ (1888, § 256) bedeutet eine der glänzendsten Taten in der Geschichte der Physik. Erst durch sie erhielt die MAXWELLSche Lichttheorie ihre endgültige Bestätigung.

Bis zum Jahre 1900 schien hiermit der Bau der Lichttheorie beendet zu sein. Dann aber erwuchs auf Grund der PLANCKSchen Strahlungstheorie die Erkenntnis, daß die Wellentheorie allein zum Verständnis der Lichterscheinungen nicht ausreicht, sondern daß *an ihre Seite — nicht an ihre Stelle —* die *Quantentheorie des Lichts* zu treten hat. Die Wellentheorie beherrscht alle Erscheinungen, die die Ausbreitung des Lichts betreffen. Über die Energieumsetzungen bei der Entstehung und Vernichtung des Lichtes gibt aber allein die Quantentheorie eine richtige Auskunft. Die letztere werden wir im 9. Kapitel behandeln. In diesem Kapitel werden wir uns im wesentlichen nur mit der Ausbreitung des Lichtes beschäftigen, für die die Wellentheorie uneingeschränkt anwendbar ist.

Eine Lichtwelle ist also eine elektromagnetische Welle von der gleichen Art, wie wir sie in § 254 behandelt haben. Sie besteht im einfachsten Fall in einfach periodischen Schwingungen in den einzelnen von der Lichtwelle getroffenen Raumpunkten. Und zwar ist es der elektrische und magnetische Feldvektor, der „schwingt“, d. h. periodisch seinen Betrag und seine Richtung ändert (§ 302). Demnach kommt einer Lichtwelle außer ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit c eine bestimmte Schwingungszahl ν und Wellenlänge λ zu, die miteinander in der Beziehung $c = \lambda \nu$ stehen (§ 82). Von den mit groben Geräten erzeugten elektromagnetischen Wellen, wie wir sie § 254 behandelt haben, unterscheiden sich die Lichtwellen nur durch ihre viel größere Schwingungszahl und demnach viel kleinere Wellenlänge. Ihre Geschwindigkeit ist — wenigstens im Vakuum — die gleiche wie die jener Wellen.

Die *Wellenlänge* des Lichts bestimmt seine *Farbe*. Sie beträgt für die rote Grenze des sichtbaren Spektrums (§ 308) rund $800 \mu\mu$, für die violette Grenze rund $400 \mu\mu$. Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ beträgt (§ 264), so liegen die *Schwingungszahlen* des sichtbaren Lichtes zwischen rund $4 \cdot 10^{14}$ und $8 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$. In der Spektrometrie ist es vielfach üblich, die Wellenlängen in der Einheit 1 Ångström = $0,1 \mu\mu$ anzugeben (§ 5). Neuerdings gibt man statt dessen meist die Zahl der im Vakuum auf 1 cm entfallenden

Wellen, die *Wellenzahl* $N = 1/\lambda \text{ cm}^{-1}$ an, wobei die Wellenlänge also in cm gemessen ist. Da $N = 1/\lambda = \nu/c$, so ist die Wellenzahl der Schwingungszahl proportional und beim sichtbaren Licht von der Größenordnung $2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$.

263. Die Ausbreitung des Lichtes. Lichtstrahlen. Geradlinige Fortpflanzung. Für die Ausbreitung des Lichts und seine Wechselwirkungen mit den Körpern, die in seinen Weg treten, gelten sinngemäß alle Überlegungen, die wir bei den mechanischen Wellen angestellt haben. Wie in einer mechanischen Welle, so pflanzt sich in einer Lichtwelle, die sich in einem homogenen Stoff oder im Vakuum ausbreitet, Energie geradlinig fort. Wie bei den mechanischen Wellen wird diese geradlinige Ausbreitung gestört, es tritt *Beugung* ein (§ 91), wenn in den Weg des Lichts Hindernisse treten, deren Abmessungen von der Größenordnung der Wellenlänge sind. Wegen der kleinen Wellenlänge des Lichts machen sich aber bei ihm Beugungserscheinungen erst bei sehr kleinen Abmessungen solcher Hindernisse deutlicher bemerkbar. Sofern wir also zunächst von allen Wechselwirkungen, bei denen eine merkliche Beugung eintritt, absehen, können wir auf das Licht den in § 80 eingeführten Strahlbegriff anwenden

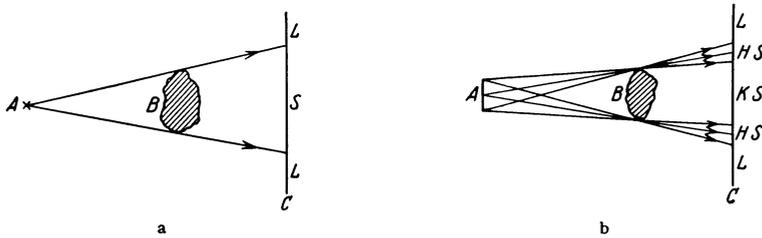


Abb. 441. a Schattenbildung bei punktförmiger Lichtquelle, b Kernschatten und Halbschatten.

und von *Lichtstrahlen* als den Bahnen des Lichts sprechen. Wir verstehen darunter einen Lichtkegel von so kleinem Öffnungswinkel, daß wir ihn uns praktisch durch eine Linie dargestellt denken können, längs derer sich das Licht fortpflanzt. Einen Lichtkegel von endlicher Öffnung denken wir uns als aus unendlich vielen, vom gleichen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen bestehend.

Den Verlauf der Lichtstrahlen kann man unmittelbar erkennen, wenn ein schmaler Lichtkegel durch ein trübes oder mit kleinen schwebenden Teilchen erfülltes Medium tritt. Jeder kennt die „Lichtstrahlen“, die durch ein enges Loch in einen dunklen Raum treten oder die die Sonne am Rande von Wolken in einer trüben Atmosphäre erzeugt. Sie entstehen dadurch, daß das Licht auf kleine Teilchen — Staub, Wassertropfen u. dgl. — trifft und sie beleuchtet. Man sieht also in Wirklichkeit nicht die Lichtstrahlen selbst, sondern eine Folge von Punkten, in denen die den Lichtkegel bildenden Strahlen enden, und die in ihrer Gesamtheit den Lichtkegel leuchtend erfüllen.

Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes erkennt man am deutlichsten an den *Schatten* der undurchsichtigen Körper. Es sei *A* (Abb. 441a) eine als punktförmig gedachte Lichtquelle, *B* ein in den Weg ihres Lichtes gebrachter Körper, *C* eine das Licht auffangende Fläche (Schirm), etwa eine weiße Wand. Infolge der geradlinigen Ausbreitung des Lichts fällt Licht nur an die mit *L* bezeichneten Stellen des Schirmes, dagegen nicht an die mit *S* bezeichnete Stelle. Diese bildet den Schatten des Körpers.

Lichtquellen sind nie streng punktförmig, wenn man auch z. B. mit einer Bogenlampe mit dünnen Kohlen dieser Grenze praktisch nahekommt. Man kann sich aber die strahlende Fläche einer Lichtquelle immer als aus strahlenden Punkten (genauer sehr kleinen strahlenden Flächenelementen) zusammen-

gesetzt denken und die Lichtwirkung auf einer Fläche als die Summe der Wirkungen dieser einzelnen Punkte berechnen. Es zeigt sich dann folgendes. Ein schattenwerfender Körper (Abb. 441 b) schirmt das Licht nur von dem Teil KS der hinter ihm stehenden Fläche vollkommen ab, den man mit *keinem* Punkte der Lichtquelle durch eine Gerade verbinden kann, ohne durch das Innere des Körpers zu gehen. In diesem *Kernschatten* herrscht vollständige Dunkelheit. Die Helligkeit in weiteren, außen liegenden Teilen L der Fläche wird durch die Anwesenheit des Körpers überhaupt nicht berührt. Es sind dies diejenigen Teile der beleuchteten Fläche, welche man mit *jedem* Punkte der Lichtquelle durch eine Gerade verbinden kann, ohne durch das Innere des Körpers zu gehen. Zwischen diesen beiden Gebieten liegt der *Halbschatten* HS , dessen Punkte man nur mit einzelnen Teilen der Lichtquelle so verbinden kann, mit anderen nicht. Auf diesen Teil der Fläche fällt zwar Licht, aber nur von einem Teil der Lichtquelle, und zwar um so weniger, je mehr man sich der Grenze des Kernschattens nähert. Die Beleuchtung einer Stelle der Fläche ist um so schwächer, einen je kleineren Teil der Lichtquelle man von dieser Stelle aus noch sehen kann. Im Halbschatten findet also ein stetiger Übergang von voller Dunkelheit zu voller Helligkeit statt. Der Schatten hat eine unscharfe Begrenzung. Ist der Querschnitt des schattenwerfenden Körpers kleiner als die Fläche der Lichtquelle, so entsteht in größerer Entfernung von dem Körper kein Kernschatten mehr, sondern nur ein Halbschatten.

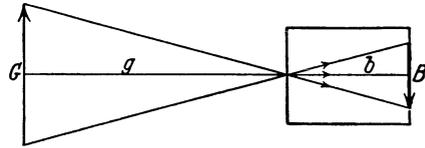


Abb. 442. Lochkamera.

Eine Sonnenfinsternis entsteht, wenn der Mond zwischen Sonne und Erde tritt, so daß der Schatten des Mondes auf die Erde fällt. Der Kernschatten des Mondes ist im Verhältnis zur Erdoberfläche sehr klein. Daher ist eine totale Sonnenfinsternis immer nur auf kleine Bereiche der Erde beschränkt. Bei einer Mondfinsternis steht die Erde zwischen Sonne und Mond und wirft auf diesen ihren Schatten, dessen Kern zufällig der Größe der Mondfläche fast genau gleich ist. Auch die Monde der anderen Planeten erleiden entsprechende Verfinsternungen. Bei gewissen Doppelsternen, d. h. Systemen von zwei sehr nahe benachbarten Fixsternen, welche umeinander rotieren, beobachtet man periodische Helligkeitsschwankungen, die davon herrühren, daß bald der eine, bald der andere der beiden Fixsterne in regelmäßigen Zeitabständen zwischen die Erde und den anderen Stern tritt und dessen Licht abschirmt (visuelle Doppelsterne).

Eine Lochkamera (Abb. 442) ist ein Kasten, der in seiner Vorderwand ein feines Loch und in seiner Rückwand eine Mattscheibe, wie ein Lichtbildgerät, trägt. Vor dem Loch befindet sich ein lichtaussendender Körper G . Jedes Flächenelement der Mattscheibe empfängt durch das feine Loch nur Licht von einem bestimmten Flächenelement der Lichtquelle. Die Beleuchtung auf der Scheibe liefert also ein getreues Abbild der Verteilung von Helligkeit und Farbe des von den einzelnen Flächenelementen der Lichtquelle herkommenden Lichtes. Es entsteht auf ihr ein *Bild* B der Lichtquelle G (des Gegenstandes), und zwar ist dieses umgekehrt, und es ist rechts und links vertauscht, wenn man es von der Rückseite her betrachtet. Ist g die Entfernung des leuchtenden Gegenstandes vom Loch, b die Entfernung der Rückwand vom Loch, G die wahre Größe des Gegenstandes, B die Größe des Bildes, so verhält sich

$$B : G = b : g. \quad (1)$$

Das Verhältnis B/G , der *Abbildungsmaßstab*, kann größer oder kleiner als 1 sein. Ist das Loch ausreichend fein, so hängt die Schärfe des Bildes nur wenig vom

Abstände g ab. Man kann eine solche Lochkamera zum Photographieren benutzen, indem man an die Stelle der Mattscheibe eine photographische Platte bringt. Man benötigt dabei eine wesentlich längere Aufnahmezeit als mit einem gewöhnlichen Lichtbildgerät. Solange das Loch klein ist gegenüber derjenigen Struktur des Gegenstandes, auf deren scharfe Abbildung man Wert legt, spielt die Gestalt des Loches für die Güte der Abbildung keine Rolle.

264. Die Geschwindigkeit des Lichts. Die Geschwindigkeit des Lichts beträgt im leeren Raum (Vakuum, Weltraum) fast genau $3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} = 300\,000 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}$ (vgl. auch § 208). Das Licht legt demnach eine Strecke gleich dem $7\frac{1}{2}$ -fachen des Erdumfangs in 1 sec zurück. Von der Sonne zur Erde braucht das Licht 500 sec, vom Mond zur Erde etwas mehr als 1 sec, von dem Stern α -Zentauri, dem der Sonne nächsten Fixstern, 4,3 Jahre. Man kennt Spiralnebel, deren Entfernung so groß ist, daß das Licht mehrere hundert Millionen Jahre braucht, um bis zur Erde zu gelangen. In allen Stoffen ist die Lichtgeschwindigkeit kleiner als im leeren Raum (vgl. § 271).

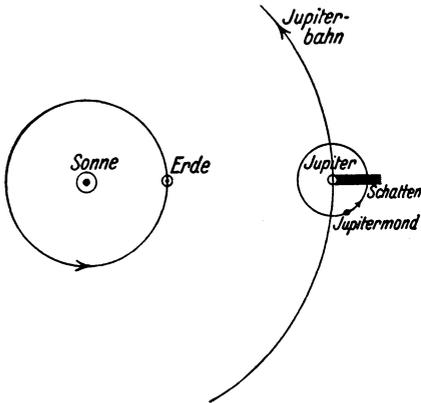


Abb. 443. Zur Methode von OLAF RÖMER.

Die erste Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit hat OLAF RÖMER (1676) ausgeführt, indem er die Zeiten zwischen zwei Verfinsterungen eines Jupitermondes beobachtete. Diese finden natürlich in gleichen Zeitabständen statt, werden aber auf der Erde nicht in gleichen Zeitabständen wahrgenommen. Das liegt daran, daß Erde und Jupiter die Sonne in sehr verschiedenen Zeiten umlaufen, so daß ihr Abstand ständig wechselt. Daher wechselt auch die Laufzeit des Lichtes vom Jupitermond bis zur Erde. In denjenigen Phasen, in denen Sonne, Erde und Jupiter auf der gleichen Geraden liegen (Abb. 443), in denen also der Abstand Erde—Jupiter für kurze Zeit praktisch konstant bleibt, wird der Zeitabstand zweier Verfinsterungen in richtiger Größe beobachtet. In den Phasen aber, in denen sich die Erde dem Jupiter nähert, die Erde also dem vom Jupitermond kommenden Licht entgegenläuft, beobachtet man die Verfinsterungen in kürzeren Zeitabständen, als sie wirklich erfolgen, in den Phasen, in denen sich die Erde vom Jupiter entfernt, in größeren Zeitabständen. Aus den Radien der Erd- und Jupiterbahn und diesen Schwankungen des Zeitabstandes konnte RÖMER schon einen recht guten Wert der Lichtgeschwindigkeit berechnen.

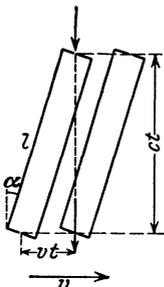


Abb. 444.
Zur Methode von
BRADLEY.

Eine zweite astronomische Methode stammt von BRADLEY (1727). Man denke sich, man wolle senkrecht herabfallende Regentropfen durch ein Rohr hindurchfallen lassen, welches nur oben und unten eine kleine Öffnung hat (Abb. 444). Befindet sich das Rohr in Ruhe, so muß man das Rohr senkrecht halten, damit der gewünschte Erfolg erreicht wird. Bewegt sich aber das Rohr in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v , so darf das Rohr nicht mehr senkrecht gehalten werden. Ist die Länge des Rohres l , die Fallgeschwindigkeit der Tropfen c , so brauchen diese zum Durchlaufen des senkrecht gestellten Rohres die Zeit $t = l/c$. Während dieser Zeit aber hat sich das Rohr um eine Strecke $x = vt$ verschoben. Die Tropfen fallen also nicht mehr durch das untere Loch. Um dies wieder zu erreichen, muß man das Rohr gegen die

Fallrichtung der Tropfen um einen Winkel α neigen, für den sich aus Abb. 444 die Beziehung $\operatorname{tg} \alpha = v/c$ ergibt. Aus dem Winkel α und der Geschwindigkeit v könnte man dann die Fallgeschwindigkeit der Tropfen berechnen.

Bei der Methode von BRADLEY tritt nun an die Stelle des Tropfens das Licht, welches von irgendeinem Fixstern herrührt, an die Stelle des Rohrs mit den Löchern ein Fernrohr. (Man könnte dazu grundsätzlich auch genau die gleiche Einrichtung benutzen wie für den gedachten Versuch mit den Tropfen.) v ist jetzt die Bahngeschwindigkeit der Erde. An den angestellten Überlegungen ändert sich nichts. Sie besagen jetzt, daß man, um das Licht eines Fixsterns durch die Achse eines Fernrohrs hindurchtreten zu lassen, ihn also in der Mitte des Gesichtsfeldes zu sehen, das Fernrohr um einen gewissen Winkel in Richtung der Erdbewegung vorwärtsneigen muß. Das heißt, das Licht trifft den bewegten Beobachter aus einer etwas anderen Richtung als einen gedachten ruhenden Beobachter, der Ort des Fixsterns scheint ein wenig verschoben. Sterne, die nahe am Himmelspol stehen, beschreiben daher im Laufe eines Jahres scheinbar einen kleinen Kreis, dessen halber Winkeldurchmesser $\alpha = 20,6''$ beträgt, in der Ebene der Ekliptik liegende Fixsterne führen eine kleine scheinbare, geradlinige Hin- und Herbewegung am Himmel aus, dazwischen liegende Sterne beschreiben scheinbar kleine Ellipsen, deren große Achsen unter dem gleichen Winkel α erscheinen. Man bezeichnet diese Erscheinung als *Aberration*. Aus α und der Erdgeschwindigkeit $v \approx 30 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}$ berechnet sich die Lichtgeschwindigkeit zu $300\,000 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}$.

Viel genauer als die astronomischen Methoden sind die auf der Erde ausführbaren Messungen. Von diesen führen wir als wichtigste die Methode von FOUCAULT an. Der Grundgedanke dieser Methode ist der folgende (Abb. 445): Durch eine Blende B tritt ein Lichtbündel und fällt nach dem Durchgang durch eine planparallele Glasplatte P auf einen ebenen Spiegel S_1 , der in sehr schnelle Drehung um eine zur Zeichnungsebene senkrechte Achse versetzt werden kann. Dort wird das Licht reflektiert und durch eine Linse L so auf einen Hohlspiegel S_2 vereinigt, daß die Blende B auf dem Hohlspiegel abgebildet wird. Dann läuft das Licht nach der Reflexion am Hohlspiegel auf genau dem gleichen Wege wieder zurück bis zum Spiegel S_1 und wird von diesem wieder reflektiert. Beim Auftreffen auf die planparallele Glasplatte P wird ein Teil des Lichtes reflektiert, und es entsteht, wenn der Spiegel S_1 nicht rotiert, ein Bild der Blende B im Punkte A . Wenn aber S_1 rotiert, so findet das zurückkehrende Licht den Spiegel nicht mehr genau in seiner alten Lage vor, der Rückweg des Lichtes erfolgt von hier ab nicht mehr in der alten Bahn, sondern unter einem kleinen Winkel gegen diese. Daher ist jetzt auch das Bild der Blende gegenüber demjenigen bei ruhendem Spiegel ein wenig verschoben, und zwar nach A' um die Strecke AA' . (Zur Verdeutlichung sind die Maßverhältnisse in Abb. 445 stark übertrieben.)

Nach dem Grundgedanken von FOUCAULT hat in jüngerer Zeit MICHELSON mehrfach sehr genaue Messungen der Lichtgeschwindigkeit durchgeführt. Er verwendete dazu nicht einen einfachen Spiegel als Drehspiegel, sondern die hochversilberten Seitenflächen eines Glaskörpers, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Vieleck war, bei den letzten Messungen ein 32seitiges Vieleck. Man regelt nun die Drehzahl des Drehspiegels derart, daß während der Laufzeit

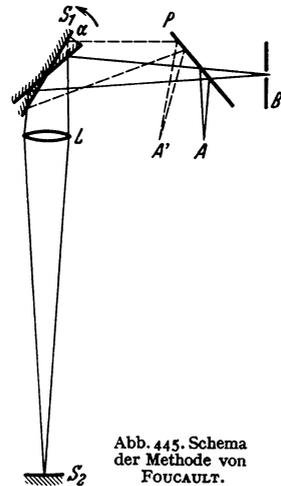


Abb. 445. Schema der Methode von FOUCAULT.

des Lichtes vom Drehspiegel zum Hohlspiegel und zurück genau die folgende Spiegelfläche an die Stelle der vorhergehenden getreten ist, was bei n Spiegelflächen einer Drehung um $360^0/n$ entspricht. In diesem Fall erscheint das Bild an der gleichen Stelle, wie bei ruhendem Spiegel. Es sei l der Abstand des Hohlspiegels vom Drehspiegel, also $2l$ der Weg des Lichtes, τ die für eine volle Umdrehung des Spiegels nötige Zeit, also τ/n die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichwertigen Spiegelstellungen. Dann muß die Laufzeit des Lichtes $t = 2l/c = \tau/n$ sein, also $c = 2l n/\tau$. Die Zeit τ läßt sich aus der Drehzahl des Spiegels sehr genau ermitteln.

Seine ersten Messungen führte MICHELSON auf einer etwa 35 km langen Strecke zwischen zwei Bergspitzen in Kalifornien aus, die auf 5 cm genau vermessen war. Sein Ergebnis betrug $c = 2,99796 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ mit einer geschätzten Genauigkeit von 0,001%. Dieser Wert ist aber erst durch eine Umrechnung aus dem in Luft gemessenen Wert gewonnen. (Dieser muß, um die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu erhalten, mit dem Brechungsindex der Luft multipliziert werden, der um einen sehr kleinen Betrag von 1 abweicht, § 271.) Da hier eine gewisse Unsicherheit vorliegt, nahm MICHELSON später eine neue Messung in einem etwa 1500 m langen Rohrsystem in Angriff, das auf einen Druck von 0,01 bis 0,001 Atm. evakuiert werden konnte. In dem Rohrsystem wurde das Licht acht- bis zehnmal hin und her reflektiert, ehe es zum zweiten Male an den Drehspiegel gelangte, so daß der Lichtweg 12 bis 15 km betrug. Die nach MICHELSON'S Tode von seinen Mitarbeitern durchgeführten rund 1900 Einzelmessungen ergaben in sehr naher Übereinstimmung mit dem früheren Wert $c = 2,99774 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, und zwar mit etwa der gleichen geschätzten Genauigkeit. Als zuverlässigsten Wert der Lichtgeschwindigkeit wird heute der Wert

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

angesehen. Über die elektrische Messung der Lichtgeschwindigkeit siehe § 199.

Da die FOUCAULT'Sche Methode auch schon bei kleinen Entfernungen recht gute Werte liefert, so kann sie dazu benutzt werden, um die Lichtgeschwindigkeit in Stoffen, z. B. in Flüssigkeiten, zu messen. In diesem Fall verläuft der Weg $S_1 S_2 S_1$ zum Teil in dem betreffenden Stoff. Von besonderer Wichtigkeit sind solche Messungen in bewegten Stoffen, z. B. in strömenden Flüssigkeiten (§ 292 und 328).

265. Lichtmessung. Da Licht Energie ist, so kann man von der *Lichtmenge* sprechen, die eine Lichtquelle aussendet. Man versteht darunter denjenigen Betrag an Energie, der von der Lichtquelle in einer bestimmten Zeit in Form von sichtbarem Licht ausgesandt wird. Die gesamte in alle Richtungen in 1 sec von einer Lichtquelle ausgesandte Lichtmenge, den von ihr ausgehenden Energiestrom (§ 79), nennt man den *Lichtstrom* Φ der Lichtquelle. Die Dichte dieses Lichtstroms ist im allgemeinen nicht in allen Richtungen die gleiche, d. h. eine Lichtquelle strahlt im allgemeinen nicht nach allen Richtungen gleich viel Licht aus.

Unter der *Lichtstärke* einer Lichtquelle innerhalb eines elementaren räumlichen Winkels $d\Omega$ versteht man die Größe

$$J = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (2)$$

Es ist also der Lichtstrom innerhalb des räumlichen Winkels $d\Omega$ gleich $d\Phi = J d\Omega$. Strahlt die Lichtquelle nach allen Richtungen gleich stark, so ist der gesamte Lichtstrom $\Phi = 4\pi J$. Die Einheit der Lichtstärke ist in Deutschland die HEFNER-Kerze (HK). Das ist die Lichtstärke, die eine mit Amylzetat gespeiste Lampe von gesetzlich vorgeschriebener Bauart und Brennweise in horizontaler Richtung besitzt.

Die Einheit des Lichtstromes heißt 1 *Lumen*. Sie ist gleich dem Lichtstrom, den eine punktförmige Lichtquelle von 1 HK innerhalb eines räumlichen Winkels $\Omega = 1$ ausstrahlt, und entspricht einem Energiestrom von 0,00145 Watt.

Unter der *Beleuchtungsstärke* einer Fläche versteht man die in ihr herrschende Lichtstromdichte, d. h. den auf 1 cm² oder auf 1 m² der Fläche fallenden Lichtstrom. Ihre Einheit ist demnach 1 Lumen · cm⁻² = 1 *Phot* bzw. 1 Lumen · m⁻² = 1 *Lux*.

Die *Leuchtdichte* einer Fläche (selbstleuchtend oder nichtselbstleuchtend) ist die Lichtstärke von 1 cm² dieser Fläche in der zur Fläche senkrechten Richtung. Ihre Einheit ist demnach 1 HK · cm⁻² = 1 *Stilb*.

In vielen Fällen gilt in weitgehender Annäherung das LAMBERTSche Kosinusetz, welches besagt, daß die von einer Fläche unter dem Winkel φ gegen das Lot auf die Fläche ausgestrahlte Lichtmenge $\cos \varphi$ proportional ist. Bei strenger Gültigkeit dieses Gesetzes erscheint eine selbstleuchtende Fläche, unabhängig von ihrer Orientierung zur Blickrichtung, stets von gleicher Flächenhelligkeit. Ein diesem Gesetz streng gehorchender selbstleuchtender Körper erscheint daher als eine mit überall gleicher Helligkeit leuchtende Scheibe. Mit einiger Annäherung, aber nicht streng, gilt dies z. B. für die Sonne.

Da die Beleuchtungsstärke einer Fläche gleich der auf sie fallenden Lichtstromdichte ist, diese aber gleich der in § 79, Gl. (4), definierten Energiestromdichte j ist, so gilt auch für die Beleuchtungsstärke einer Fläche das dort abgeleitete *Entfernungsgesetz*. Die Beleuchtungsstärke einer Fläche ist dem Quadrat ihres Abstandes von der Lichtquelle umgekehrt proportional. Denken wir uns eine Kugelfläche um eine Lichtquelle L (Abb. 446), deren Radius einmal r_1 , dann r_2 sei, so verhalten sich ihre Beleuchtungsstärken im einen und im anderen Fall wie

$$j_1 : j_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} = r_2^2 : r_1^2. \quad (3)$$

Ist die Lichtstärke der Lichtquelle nicht nach allen Richtungen die gleiche, so gilt Gl. (3) für jede Richtung gesondert.

Bildet die Richtung des auf eine Fläche fallenden Lichts den Winkel φ (Einfallswinkel) mit dem Lot (Einfallslot) auf der Fläche, so läßt sich leicht nachweisen, daß alsdann die Beleuchtungsstärke im Verhältnis $\cos \varphi$ kleiner ist als bei senkrechtem Einfall des Lichtes (LAMBERTSches Gesetz).

Nach Gl. (2) ist die von einer im räumlichen Winkel Ω gleichmäßig leuchtenden Lichtquelle von der Lichtstärke J auf einer in nicht zu kleinem Abstände r befindlichen, zu r senkrechten Fläche F erzeugte Beleuchtungsstärke $E = \frac{J\Omega}{F} = \frac{J}{r^2}$ (§ 5). Bringen zwei Lichtquellen von den Lichtstärken J_1 und J_2 in den Abständen r_1 und r_2 jede für sich allein auf der gleichen Fläche die gleiche Beleuchtungsstärke hervor, ist also $J_1/r_1^2 = J_2/r_2^2$, so verhalten sich die Lichtstärken wie

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2. \quad (4)$$

Da der von einer leuchtenden Fläche her in die Pupille des Auges gelangende Lichtstrom dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist, das gleiche aber auch für die scheinbare Größe der leuchtenden Fläche gilt, so erscheint uns ein leuchtender Körper, unabhängig von seiner Entfernung, stets in gleicher Flächenhelligkeit, aber natürlich nur dann, wenn auf dem Wege des Lichtes keine Absorption stattfindet.

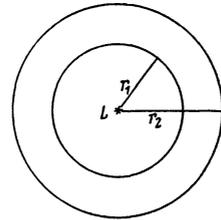


Abb. 446.
Zum Entfernungsgesetz.

Für die Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden gilt das *psycho-physische Grundgesetz* (W. WEBER 1825, FECHNER 1856), welches besagt, daß der absolute Helligkeitsunterschied, der eben noch als ein solcher bemerkt wird, der Helligkeit proportional ist. Daraus folgt, daß ein Helligkeitsunterschied, der an zwei sehr schwachen Lichterscheinungen gerade noch bemerkt wird, bei gleichem absoluten Betrage an zwei stärkeren Lichterscheinungen nicht mehr bemerkt wird.

Die *Photometrie*, d. h. die Messung von Lichtstärken, erfolgt so, daß man die zu messende Lichtquelle mit einer anderen vergleicht, deren Lichtstärke durch Vergleich mit einer HEFNER-Kerze bekannt ist, gegebenenfalls mit einer HEFNER-

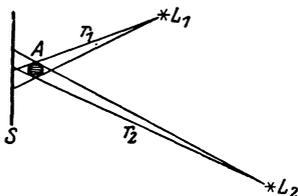


Abb. 447. Schattenphotometer.

Kerze selbst. Die meisten photometrischen Verfahren beruhen auf der Anwendung der Gl. (4). Es wird dabei von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß das Auge Helligkeitsunterschiede, besonders bei geringer Helligkeit, ziemlich genau erkennt.

Schattenphotometer. Die zu messende und die Vergleichslichtquelle stehen vor einem weißen Schirm S. Dicht vor dem Schirm steht ein Stab A (Abb. 447). Beide Lichtquellen werfen einen Schatten dieses Stabes auf den Schirm. Sie werden so aufgestellt,

daß die beiden Schatten dicht nebeneinanderliegen. Die Schatten sind nicht vollkommen dunkel, sondern bilden auf der sonst von beiden Lichtquellen beleuchteten Wand Stellen, welche jeweils nur von einer der beiden Lichtquellen

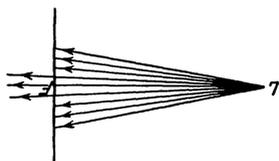


Abb. 448. Zum Fettfleckphotometer.

beleuchtet werden. Die Beleuchtungsstärke in jedem der beiden Schatten rührt also nur von je einer der beiden Lichtquellen her. Die Lichtquellen werden nun so lange verschoben, bis die beiden Schatten gleich hell erscheinen, also in ihnen die gleiche Beleuchtungsstärke herrscht. Dann verhalten sich nach Gl. (4) die Lichtstärken der beiden Lichtquellen wie die Quadrate ihrer Abstände von der Fläche.

Fettfleckphotometer von BUNSEN. In der Mitte eines in einen Rahmen gespannten Blattes Schreibpapier befindet sich ein kleiner Fettfleck F (z. B. ein wenig Stearin durch Erwärmen einziehen lassen). Es falle zunächst nur von einer Seite her Licht auf das Photometer. Dieses wird vom Papier zurückgeworfen, vom Fettfleck aber zum großen Teil hindurchgelassen und tritt dort auf der Rückseite aus (Abb. 448). Infolgedessen erscheint, von der beleuchteten Seite aus gesehen, der Fettfleck dunkel auf hellem Grunde, von der anderen Seite her gesehen, hell auf dunklem Grunde. Bringt man jetzt auf der anderen Seite ebenfalls eine Lichtquelle an, so kann man durch Wahl geeigneter Abstandsverhältnisse die Beleuchtungsstärke auf den beiden Flächen so einrichten, daß z. B. von der rechten Seite her betrachtet das von links her durch den Fettfleck hindurchtretende Licht auf der rechten Seite gerade den Ausfall an Licht ersetzt, der dadurch entsteht, daß Licht der rechten Lichtquelle durch den Fettfleck nach links hindurchtritt. In diesem Falle erscheint der Fettfleck ebenso hell wie seine Umgebung. Das gleiche ist dann auch der Fall, wenn man von der anderen Seite beobachtet. In diesem Falle gilt wieder Gl. (4). Um genaue Ergebnisse zu erzielen, muß man die beiden zu vergleichenden Lichtquellen nacheinander mit der gleichen Hilfslichtquelle vergleichen und den Fettfleck jedesmal aus der gleichen Richtung beobachten. Denn das Verschwinden des Fleckes tritt nicht für alle Beobachtungsrichtungen gleichzeitig ein.

Für genauere Messungen dient das LUMMER-BRODHUNSCHE Photometer. Sein wesentlicher Teil ist der *Photometerwürfel* (Abb. 449). Er besteht aus zwei

rechtwinkligen Glasprismen, von denen das eine, bis auf ein mittleres ebenes Stück, an seiner Hypotenusenfläche rund geschliffen ist. Die beiden Prismen berühren sich in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Das Licht der beiden zu vergleichenden Lichtquellen fällt in eine der Kathetenflächen je eines der beiden Prismen senkrecht ein. Wie in § 272 näher ausgeführt werden wird, findet in diesem Falle dort, wo das Licht an die Grenze des Glases gegen Luft tritt, vollständige Zurückwerfung (Totalreflexion) des Lichts statt, während es durch die Berührungsebene der beiden Prismen hindurchtritt. Aus der Prismenfläche BC tritt daher in der Mitte des Gesichtsfeldes nur Licht aus, welches von der Lichtquelle L_2 herrührt, während aus den Randbezirken nur Licht der Lichtquelle L_1 austritt. Die Prismenfläche AB spielt also etwa die gleiche Rolle wie die Papierfläche des Fettfleckphotometers. Das von ihr herkommende Licht rührt teils von der einen, teils von der anderen Lichtquelle her. Die Berührungsebene entspricht dabei dem Fettfleck. Sie ist ebenso hell, wie ihre Umgebung, wenn die Beleuchtungsstärke der Fläche AB durch beide Lichtquellen gleich groß ist.

Andere Photometer beruhen darauf, daß man bei feststehenden Lichtquellen die Beleuchtungsstärke, die die stärkere von ihnen auf einer Fläche erzeugt, um einen meßbaren Betrag schwächt und derjenigen gleich macht, die die andere Lichtquelle dort hervorruft. Die meßbare Schwächung kann erfolgen, indem man einen grauen Glaskeil oder zwei NICOLSche Prismen (§ 303), die gegeneinander gedreht werden können, in den Strahlengang bringt.

Bei allen diesen Photometern liefert das menschliche Auge die Entscheidung über die zu beurteilenden Helligkeitsverhältnisse, und daher sind diese Methoden mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, die von der begrenzten Empfindlichkeit des Auges und von den Unterschieden im Sehvermögen verschiedener Beobachter herrühren. Von solchen Fehlern sind die Verfahren frei, welche die Beleuchtungsstärke auf elektrischem Wege messen, insbesondere mit Hilfe der lichtelektrischen Zelle oder der Selenzelle (§ 333). Für die Messung sehr geringer Helligkeiten kommen überhaupt nur solche Verfahren in Betracht, z. B. für die Messung der Helligkeit von Sternen. Auch die Schwärzung einer photographischen Platte kann unter gewissen Vorsichtsmaßregeln — die Schwärzung ist der Menge des absorbierten Lichtes nicht proportional — zu Lichtmessungen benutzt werden.

Genaue Lichtmessungen auf rein optischem Wege sind nur dann möglich, wenn die zu vergleichenden Lichtquellen nahezu gleiche Farbe haben. Eine weißglühende Glühlampe kann mit der gelblich leuchtenden HEFNER-Kerze nicht unmittelbar verglichen werden.

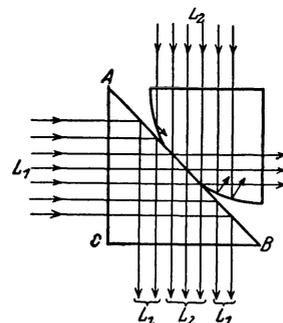


Abb. 449. Photometerwürfel nach LUMMER-BRODHUN.

II. Geometrische Optik.

266. **Grundtatsachen der geometrischen Optik.** Bei allen Fragen der Ausbreitung des Lichtes, bei denen Beugungs- und Interferenzerscheinungen keine merkliche Rolle spielen, brauchen wir vorläufig keine Anwendung von der Wellentheorie des Lichts zu machen. Zur Darstellung der Gesetzmäßigkeiten auf diesem Gebiet genügt die Vorstellung von den Lichtstrahlen als den Bahnen, längs derer sich die Lichtenergie fortpflanzt. Die Wechselwirkungen zwischen dem Licht und den Körpern, die ihm auf seinem Wege begegnen, äußern sich dann lediglich in Richtungsänderungen, die die Lichtstrahlen in bestimmten

Punkten ihrer Bahn durch Reflexion oder Brechung erfahren. Diese Behandlungsweise der Lichterscheinungen heißt *geometrische* oder *Strahlenoptik*. Hingegen sind die Beugungs- und Interferenzerscheinungen nur auf Grund der Wellentheorie des Lichtes beschreibbar (*Wellenoptik*, III. Abschnitt).

Ein wichtiger Satz der geometrischen Optik ist der Satz von der *Umkehrbarkeit des Strahlenganges*. Er besagt, daß ein Lichtstrahl, der irgendwo in genau entgegengesetzter Richtung verläuft wie ein anderer Lichtstrahl, dies auch in seinem weiteren Verlauf stets tut. Er erfährt also in den gleichen Punkten wie dieser die gleichen Reflexionen und Brechungen, aber in umgekehrter Reihenfolge. Ein zweiter wichtiger Satz ist das auf das Licht angewandte *FERMATSCHE PRINZIP* (§ 90), das man in diesem Fall auch den *Satz vom ausgezeichneten Lichtweg* nennt. Greift man auf einem Lichtstrahl irgend zwei Punkte heraus, so verläuft das Licht zwischen ihnen stets auf demjenigen Wege, auf dem es seinen Weg in der kürzesten, in selteneren Fällen auch in der längsten möglichen Zeit zurücklegt.

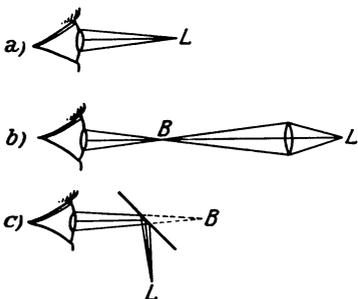


Abb. 450. Zur Wahrnehmung von Gegenständen und Bildern. a unmittelbares Sehen, b reelles, c virtuelles Bild.

267. Allgemeines über optische Bilder. Wir sagen, daß wir einen Gegenstand, im einfachsten Fall einen leuchtenden Punkt *L*, *unmittelbar* sehen, wenn die von ihm herkommenden Strahlen ohne Änderung ihrer Richtung in unser Auge gelangen. In diesem Falle befindet sich der Punkt an der Spitze eines Kegels von divergenten Strahlen, dessen Basis die Pupille unseres Auges bildet, und er ist der *unmittelbare* Ausgangspunkt dieser Strahlen (Abb. 450a). Der Sinneseindruck eines im

Raume befindlichen Gegenstandes beruht also auf dem Einfall divergenter Lichtstrahlen, die geradlinig von den einzelnen Punkten des Gegenstandes herkommen, in unser Auge.

Wir werden aber Fälle kennenlernen, wo auch ein in genau der gleichen Weise divergierendes Strahlenbüschel von jedem Punkte eines Gegenstandes her in das Auge fällt, aber diese Strahlen nicht geradlinig von dem Gegenstand herkommen. Für den Sinneseindruck des Auges ist aber lediglich der Verlauf der Strahlen unmittelbar vor dem Auge maßgebend, und wir sehen den Gegenstand alsdann dort, von wo die Strahlen divergieren oder zu divergieren scheinen. Eine solche Erscheinung heißt ein *Bild* des Gegenstandes. Hier sind zwei Fälle möglich. Entweder ist der Verlauf der von den einzelnen Punkten eines Gegenstandes herkommenden Strahlen durch irgendwelche optische Vorrichtungen derart verändert, daß sie zur Konvergenz in einen Punkt gebracht werden, durch den sie dann geradlinig weiter verlaufen, von wo sie also wie von den Punkten eines wirklichen Gegenstandes divergieren. Man nennt dann den betreffenden Punkt *B* im Raum ein *reelles Bild* des zugehörigen Punktes des Gegenstandes (Abb. 450b, Brechung durch eine Linse, § 274). Ein reelles Bild kann man auf einem Schirm auffangen. Bringt man an den Ort *B* des Schnittpunktes der Strahlen eine weiße Fläche, so entspricht ihre Beleuchtung punktweise dem von den einzelnen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Lichte. Der Gegenstand wird auf der Fläche abgebildet. Es kann aber auch sein, daß der Divergenzpunkt *B* der Strahlen nur ein scheinbarer ist, d. h. daß die in das Auge fallenden Lichtstrahlen sich in ihm nicht wirklich schneiden, sondern nur ihre rückwärtigen Verlängerungen. In diesem Falle haben wir ein *virtuelles Bild* (Abb. 450c, Reflexion an einem ebenen Spiegel). Ein solches Bild kann man nicht auf einem Schirm auffangen, weil der geometrische Schnittpunkt *B* der in das Auge

fallenden Lichtstrahlen tatsächlich gar kein Punkt ist, in dem die Strahlen vereinigt sind.

Reelle oder virtuelle Bilder von Gegenständen entstehen, wenn die Bilder der einzelnen Punkte des Gegenstandes in räumlich richtiger Reihenfolge im Bilde nebeneinanderliegen. Sie können größer oder kleiner als der Gegenstand sein. Ferner können sie die gleiche Lage im Raum haben oder um irgendeinen Winkel gegen die Lage des Gegenstandes verdreht erscheinen. Von besonderem Interesse ist nur der Fall, daß das Bild entweder ebenso oder genau umgekehrt steht wie der Gegenstand. Man hat also noch zu unterscheiden, ob ein *Bild vergrößert* oder *verkleinert*, und ob es *aufrecht* oder *umgekehrt* ist. Es kann auch vorkommen, daß ein Bild dem Gegenstande nicht geometrisch ähnlich, daß es *verzerrt* ist.

Das Verhältnis der Abmessungen des Bildes B zu denjenigen des Gegenstandes G heißt der *Abbildungsmaßstab* $\gamma = B/G$. Hiervon ist streng die *Vergrößerung* bei optischen Geräten zu unterscheiden, von der in § 280f. die Rede sein wird.

268. Reflexion des Lichts. Licht, welches auf eine Fläche fällt, wird von dieser mehr oder weniger stark zurückgeworfen. Diese Erscheinung heißt *Reflexion* des Lichts. Sie ist die Ursache dafür, daß wir nichtselbstleuchtende Körper sehen können. Flächen, die überhaupt kein Licht zurückwerfen, gibt es nicht. Das Licht erfährt also bei der Reflexion eine Richtungsänderung. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist diese Richtungsänderung nicht für alle Teile eines Lichtbündels die gleiche; es wird bei der Reflexion nach allen möglichen Richtungen auseinandergesplittert. Die vom Licht getroffene Fläche wird zum Ausgangspunkt einer nach allen Richtungen gehenden Strahlung. Das Licht wird also bei dieser *diffusen Reflexion* nach allen Richtungen zerstreut, ein paralleles Strahlenbündel löst sich in sehr viele verschieden gerichtete Teilstrahlen auf.

An sehr glatten Flächen aber, insbesondere an blanken Metallflächen, an Glas- und Kristallflächen, Flüssigkeitsflächen usw., wird ein Strahl nicht zerstreut, sondern er ändert nur seine Richtung. Man nennt dies *reguläre* oder *regelmäßige Reflexion* oder *Spiegelung*. Für die reguläre Reflexion gilt das bereits im § 86 besprochene *Reflexionsgesetz*: Einfallender und reflektierter Strahl bilden mit dem im Auftreffpunkte errichteten Lot (Einfallslot) auf der reflektierenden Fläche gleiche Winkel α , und der reflektierte Strahl liegt mit dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot in der gleichen Ebene (Einfallsebene, Abb. 451).

Sehr gute Spiegel für sichtbares Licht sind ganz reine Silberflächen, z. B. die Silberbelegungen der gewöhnlichen Spiegel. Auch die Grenzflächen durchsichtiger Körper, z. B. Glas, Wasser, reflektieren stets einen Teil des auf sie treffenden Lichts, und zwar sowohl beim Eintritt als auch beim Austritt aus dem Körper (z. B. Spiegelung der Sonne in Fenstern und an Wasserflächen, doppelte Bilder bei dicken Glasspiegeln, bei denen das schwächere Bild von der vorderen Glasfläche herrührt).

Fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel α (Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot) auf eine regulär reflektierende Fläche, so wird er um den Winkel $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ aus seiner Richtung abgelenkt (Abb. 451). Wird der Spiegel um den Winkel γ gedreht, so ändert sich die Richtung des reflektierten Strahls um den Winkel $\delta = 2\gamma$ (Abb. 452). Denn es ist $\gamma = (\alpha_2 - \alpha_1)$,

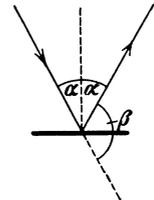


Abb. 451. Reguläre Reflexion.

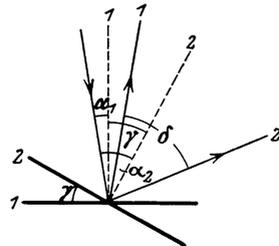


Abb. 452. Richtungsänderung des reflektierten Strahls bei Drehung des Spiegels.

$\delta = 2\alpha_2 - 2\alpha_1$. Die Richtungsänderung der reflektierten Strahlen bei einer Drehung des Spiegels wird bei empfindlichen Meßgeräten (z. B. Spiegelgalvanometern) zur genauen Messung von Drehungen ausgenutzt (*Lichtzeiger*).

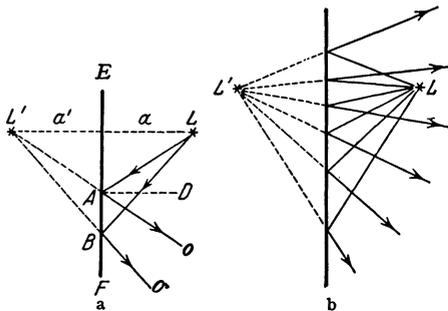


Abb. 453. Bild eines Punktes am ebenen Spiegel.

Es ist nämlich 1. $\sphericalangle LAE = \sphericalangle L'AE$, also auch $\sphericalangle LAB = \sphericalangle L'AB$, 2. $\sphericalangle LBA = \sphericalangle L'BA$, 3. $AB = AB$. Daher ist $\triangle ABL \cong \triangle ABL'$, $a = a'$ und $LL' \perp EF$.

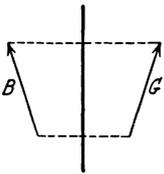


Abb. 454. Bild eines Gegenstandes am ebenen Spiegel.

Den gleichen Beweis kann man ebenso für jeden anderen Strahl führen. Die Strahlen haben also nach der Reflexion sämtlich die Richtung von L' her, denn dort schneiden sich ihre rückwärtigen Verlängerungen (Abb. 453b). L' ist also ein virtuelles Bild des Punktes L .

Indem man dies auf die einzelnen Punkte eines Gegenstandes G überträgt, kommt man für das Bild B eines solchen an einem ebenen Spiegel ohne weiteres zu der in Abb. 454 dargestellten Konstruktion. Ebene Spiegel liefern demnach virtuelle, dem Gegenstand an Größe gleiche, „spiegelsymmetrische“ Bilder. Bei der Abbildung in einem ebenen Spiegel erscheint, wie ohne weiteres verständlich ist, die rechte und linke Seite des Gegenstandes vertauscht, denn

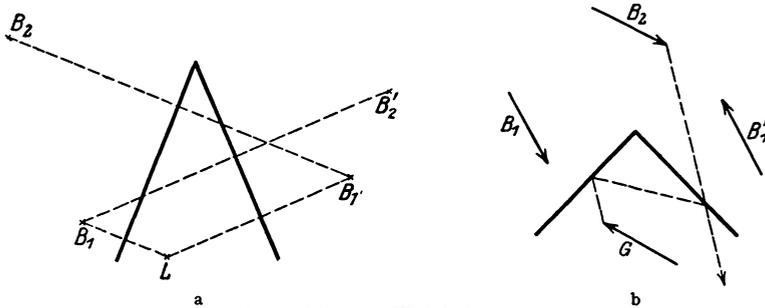


Abb. 455. Bilder am Winkelspiegel.

was rechts ist, bleibt zwar auch im Bilde rechts, was links ist, links, aber die dem Spiegel zugekehrte Fläche des Gegenstandes erscheint im Bilde gegenüber der Wirklichkeit um 180° gedreht.

Stellt man zwei ebene Spiegel unter irgendeinem Winkel aneinander, so kommt bei geeigneter Stellung des Beobachters das von einem Punkte herkommende Licht erst dann in sein Auge, nachdem es ein oder mehrere Male an beiden Spiegeln reflektiert worden ist. Es entstehen dann mehrere, im allgemeinen unendlich viele Bilder. Man kann die durch zweimalige Reflexion entstehenden Bilder (B_2, B_2') auffassen und konstruieren als die Bilder der durch die erste Reflexion entstandenen Bilder (B_1, B_1') usw. (Abb. 455a). Sämtliche

269. Bilder an ebenen Spiegeln. In Abb. 453a sei L ein leuchtender Punkt im Abstände a von einem ebenen Spiegel EF . Das von ihm auf den Spiegel fallende Licht wird, je nach dem Einfallswinkel, in verschiedene Richtungen reflektiert, und zwar so, daß alle einzelnen Strahlen nach der Reflexion wieder von einem Punkte L' herzukommen scheinen, der hinter dem Spiegel liegt, und zwar auf dem von L auf den Spiegel gefällten Lot und im Abstände a vom Spiegel.

Bilder sowie der abgebildete Punkt selbst liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Scheitel des Winkelspiegels liegt.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Winkel der beiden Spiegel ein ganzzahliger Bruchteil von 360° ist. Denn es fallen dann immer gewisse Bilder zusammen. Hierauf beruhen die im Kaleidoskop durch mehrfache Spiegelung ganz unregelmäßig geformter Gegenstände entstehenden regelmäßigen Figuren. Die einfachsten Verhältnisse liefert der Winkelspiegel mit einer Spiegelneigung von 90° . Abb. 455 b zeigt das in einem solchen Spiegel durch zweimalige Reflexion entstehende Bild B_2 eines Gegenstandes G . Das Bild liegt umgekehrt wie bei einem einfachen, ebenen Spiegel. Eine in einen solchen Winkelspiegel hineinschauende Person sieht also ihr getreues, d. h. seitenrichtiges Bild. Es entstehen in diesem Falle zwei Bilder B_1 und B'_1 durch erste Reflexion. Die beiden durch zweite Reflexion entstehenden Bilder fallen zusammen, und auf die gleiche Stelle fallen die durch die vierte, sechste und achte usw. Reflexion entstehenden Bilder. Die durch die dritte, fünfte, siebente usw. Reflexion entstehenden Bilder fallen mit den von der ersten Reflexion herrührenden zusammen.

270. Sphärische Spiegel. Unter den gekrümmten Spiegeln spielen die sphärischen Spiegel eine besonders wichtige Rolle. Das sind Spiegel, deren Fläche einen Teil einer Kugelfläche bildet. Je nachdem die spiegelnde Fläche nach innen

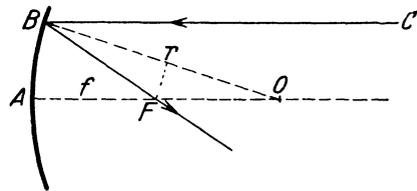


Abb. 456. Zur Reflexion am Hohlspiegel.

oder nach außen gewölbt ist, unterscheidet man *Konkav-* oder *Hohlspiegel* und *Konvex-* oder *Wölbspiegel*. Für die folgenden Überlegungen gilt stets die Voraussetzung, daß die Spiegel nur kleine Teile von Kugelflächen bilden, d. h. daß die Abmessungen des Spiegels klein sind gegen seinen Krümmungsradius. Das in der Mitte der Spiegelfläche auf ihr errichtete Lot heißt die *Achse* des Spiegels. Ein auf einen Hohlspiegel fallender Strahl wird so reflektiert, als wenn er an der in diesem Punkte an die Kugelfläche gelegten Tangentialebene regulär reflektiert würde. Bei senkrechtem (radialem) Einfall verläuft er also in sich selbst zurück.

In der Richtung CB , parallel zur Achse, falle ein Strahl in B auf einen Spiegel vom Krümmungsradius r und werde nach F reflektiert (Abb. 456). O sei der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Nach dem Reflexionsgesetz ist $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FBO$, ferner ist aber $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FOB$. Es ist also $\triangle BFO$ gleichschenkelig. Daher ist weiter $FO = r/2 \cdot \cos \sphericalangle FOB$. Wegen der oben gemachten Annahme über die Abmessungen des Spiegels kann $\sphericalangle FOB$ nur sehr klein sein. In diesem Falle ist $\cos \sphericalangle FOB \approx 1$, so daß man ohne merklichen Fehler setzen kann $FO = r/2$. Daraus folgt weiter

$$AF = FO = f = \frac{r}{2}. \quad (1)$$

Das gilt für jeden anderen der Achse parallelen Strahl unter den genannten Voraussetzungen. Es folgt, daß sich alle der Achse parallelen Strahlen im Punkte F , dem *Brennpunkt*, schneiden. Er liegt auf der Achse in der Mitte zwischen dem Spiegel und seinem Krümmungsmittelpunkt. Die Strecke $AF = f = r/2$ nennt man die *Brennweite* des Hohlspiegels. Sie ist gleich dem halben Krümmungsradius r . Die durch F gehende, zur Spiegelachse senkrechte Ebene heißt die *Brennebene* des Hohlspiegels.

Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (§ 266) verläuft ein Strahl, welcher vom Brennpunkt F her auf den Spiegel fällt, genau umgekehrt wie der soeben betrachtete Strahl. Ein Strahl, der aus der Richtung des Brennpunktes kommt, verläuft also nach der Reflexion zur Achse parallel.

Die Strahlen, welche von einem sehr fernen, in der Achse des Spiegels gelegenen Punkte herkommen, sind mit großer Näherung unter sich und mit der Achse parallel. Sie gehen alle nach der Reflexion durch den Brennpunkt und divergieren wieder von ihm. Im Brennpunkt entsteht daher ein reelles Bild eines solchen, sehr entfernten (oder, wie man auch oft sagt, unendlich fernen) Punktes. Ein in sehr großer Ferne seitlich neben der Spiegelachse liegender Punkt wird in der Brennebene seitlich neben dem Brennpunkt abgebildet. Aber auch von allen anders gelegenen Punkten liefert ein Hohlspiegel entweder ein reelles oder ein virtuelles Bild.

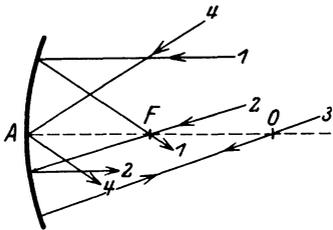


Abb. 457. Die vier wichtigsten Fälle von Reflexion am Hohlspiegel.

In Abb. 457 sind die vier für die Konstruktion von Bildern am Hohlspiegel wichtigsten Fälle dargestellt:

1. Ein zur Achse parallel einfallender Strahl verläuft nach der Reflexion durch den Brennpunkt;
2. ein durch den Brennpunkt einfallender Strahl verläuft nach der Reflexion zur Achse parallel;
3. ein durch den Krümmungsmittelpunkt gehender, also senkrecht auf den Spiegel fallender Strahl läuft in sich selbst zurück;

4. ein im Scheitel des Spiegels einfallender Strahl bildet vor und nach der Reflexion mit der Achse den gleichen Winkel.

Mit Hilfe der obigen Sätze läßt sich die Konstruktion der von einem Hohlspiegel erzeugten Bilder durchführen. Es ist dabei vorauszuschicken, daß, solange die

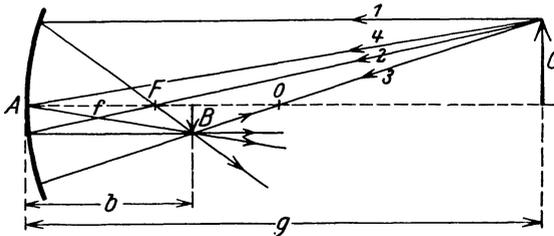


Abb. 458. Bildkonstruktion am Hohlspiegel. Reelles Bild.

aufgestellten Bedingungen über die Spiegelabmessungen innegehalten werden, die von einem Punkte des Gegenstandes herkommenden Strahlen sich tatsächlich, soweit sie über den Spiegel verlaufen, alle mit sehr großer Annäherung wieder in einem Punkte schneiden (reelles Bild) oder zu schneiden scheinen (virtuelles Bild). Zur Auffindung

dieses Schnittpunktes, des Bildes eines Punktes, genügen also schon zwei Strahlen. Beim Hohlspiegel stehen uns sogar vier leicht konstruierbare Strahlen zur Verfügung. Es sei der Pfeil G der abzubildende Gegenstand (Abb. 458). Um den Ort zu finden, an dem das Bild seiner Spitze entsteht, zeichnen wir von ihr aus: 1. den zur Achse parallelen Strahl, der nach der Reflexion durch den Brennpunkt geht, 2. den durch den Brennpunkt gehenden Strahl, der nach der Reflexion parallel zur Achse verläuft, 3. den durch den Krümmungsmittelpunkt gehenden Strahl, der in sich selbst zurückreflektiert wird. Wir können auch noch 4. den Strahl zeichnen, der in den Scheitel A des Spiegels fällt und unter gleichem Winkel gegen die Achse reflektiert wird. Im gemeinsamen Schnittpunkt dieser Strahlen (von denen zur Konstruktion schon zwei genügen) entsteht das reelle Bild der Pfeilspitze. Ebenso kann man sich alle anderen Punkte des Gegenstandes abgebildet denken. Das Bild des auf der Achse liegenden Fußpunktes liegt natürlich ebenfalls auf der Achse. So entsteht das in der Abb. 457 gezeichnete Bild B im Abstände b . Dieses ist: 1. reell, denn die Strahlen schneiden sich in den Bildpunkten tatsächlich, 2. verkleinert, 3. umgekehrt, 4. liegt es außerhalb der Brennweite und auf der gleichen Seite wie der Gegenstand.

Liegt der abzubildende Gegenstand an der Stelle, wo in Abb. 458 das Bild gezeichnet ist, so ergibt sich aus dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (Umkehrung der Pfeilrichtung aller Strahlen) ohne weiteres, daß sein Bild jetzt dort liegen muß, wo vorher der Gegenstand lag, nämlich in G . Man kann also Bild und Gegenstand vertauschen. In diesem Falle ist das Bild reell, vergrößert und umgekehrt. Das Bild eines in der Brennebene befindlichen Punktes, dessen Strahlen ja nach der Reflexion alle parallel zueinander verlaufen, entsteht in unendlicher Ferne. Rückt ein Gegenstand aus unendlicher Ferne immer näher an den Spiegel heran, so rückt sein zuerst in der Brennebene liegendes, unendlich kleines Bild immer weiter vom Spiegel ab. Ist der Gegenstand bis zum Krümmungsmittelpunkt vorgerückt, so liegt sein Bild, welches stets umgekehrt ist, in der gleichen Entfernung vom Spiegel und ist mit ihm von gleicher Größe. Rückt der Gegenstand noch weiter, bis zur Brennebene, an den Spiegel vor, so rückt sein Bild in unendliche Ferne und wird unendlich groß. Bei weiterer Annäherung an den Spiegel entsteht kein reelles Bild mehr. Ist der Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite, so ist also das Bild verkleinert, befindet er sich gerade in der doppelten Brennweite, so sind Gegenstand und Bild gleich groß, befindet er sich innerhalb der doppelten, bis zur einfachen Brennweite, so ist das Bild vergrößert.

Befindet sich aber der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, so entsteht ein virtuelles Bild *hinter* dem Spiegel. Die Konstruktion, die nach den gleichen Grundsätzen, wie oben beschrieben, erfolgt, zeigt Abb. 459. Diese Bilder sind virtuell, aufrecht und stets vergrößert. Bei der Konstruktion ist zu beachten, daß es für den Verlauf der Strahlen nach der Reflexion gleichgültig ist, ob die Strahlen tatsächlich vom Brennpunkt bzw. vom Krümmungsmittelpunkt oder nur aus der betreffenden Richtung kommen, also ihre rückwärtigen Verlängerungen durch einen dieser Punkte gehen.

Bei den Scheinwerfern benutzt man Hohlspiegel, um das Licht einer Lichtquelle in eine bestimmte Richtung zu werfen. Man setzt die Lichtquelle in die Brennebene, so daß die auf den Spiegel fallenden Strahlen parallel zur Achse austreten. Der Bruchteil des auf diese Weise in eine Richtung geworfenen Lichts ist um so größer, je größer der Öffnungskegel des auf den Spiegel fallenden Lichts ist. Diesem ist aber, wenn die vorstehenden Gesetzmäßigen noch einigermaßen streng gelten sollen, durch die eingangs genannte Abmessungsbedingung eine ziemlich enge Grenze gesetzt. Von dieser Beschränkung frei sind parabolische Spiegel. Bringt man eine Lichtquelle in den Brennpunkt eines solchen, so reflektiert der Spiegel, unabhängig von seinen Abmessungen, alles auf ihn fallende Licht parallel zur Achse, wie man auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Parabel nachweisen kann.

Wir wollen nunmehr die folgende Festsetzung treffen: Liegt das Bild auf der gleichen Seite wie der Gegenstand (reelles Bild), so soll die Entfernung des Bildes vom Spiegel positives Vorzeichen haben. Liegt es auf der entgegengesetzten Seite (virtuelles Bild), so erhält sie negatives Vorzeichen.

In Abb. 460a ist die Konstruktion eines reellen Bildes mit Hilfe derjenigen beiden Strahlen durchgeführt, welche durch den Krümmungsmittelpunkt O bzw. über den Scheitel A verlaufen. Wegen $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle QAQ'$ und $\sphericalangle AP'P = \sphericalangle AQQ' = 90^\circ$ sind die Dreiecke APP' und AQQ' ähnlich. Es sei G die Größe des Gegenstandes, B die des Bildes, g die Entfernung des Gegenstandes, b die des Bildes vom Spiegelscheitel A . Dann ist

$$B : G = b : g. \quad (2)$$

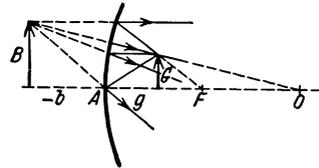


Abb. 459. Bildkonstruktion am Hohlspiegel. Virtuelles Bild.

Es sind aber auch die Dreiecke $OQ'Q'$ und OPP' ähnliche Dreiecke. Es folgt

$$B : G = (r - b) : (g - r).$$

Es ist also

$$b : g = (r - b) : (g - r) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}. \quad (3)$$

Durch eine einfache Umformung erhält man

$$(g - f) \cdot (b - f) = f^2. \quad (4)$$

Die Brennweite f ist also das geometrische Mittel aus den Längen $g - f$ und $b - f$.

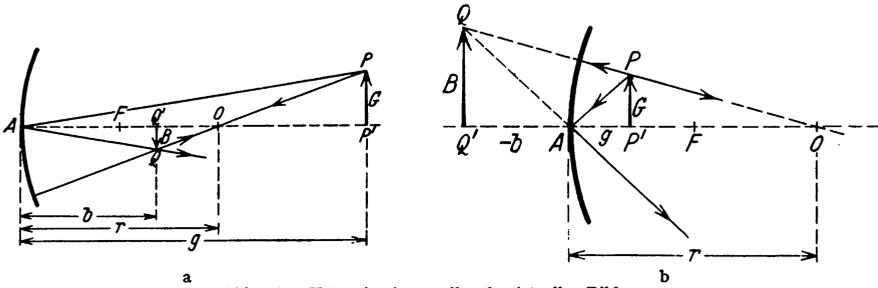


Abb. 460. Hohlspiegel. a reelles, b virtuelles Bild.

Das Verhältnis $\gamma = B/G$ ist der Abbildungsmaßstab (§ 267)

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (5)$$

Gl. (3) bzw. (4) erlaubt den Ort des Bildes zu berechnen, wenn die Gegenstands-entfernung g und die Brennweite f bekannt sind, oder f bzw. r durch Messung von g und b zu bestimmen. Eine wellenoptische Ableitung der Gl. (3) und (5) geben wir in § 297.

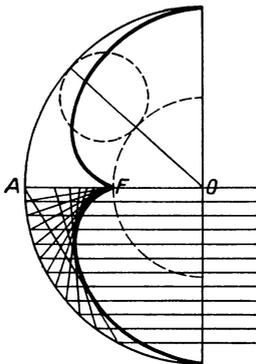


Abb. 461. Katakaustik am Hohlspiegel.

Liegt der Gegenstand innerhalb der Brennweite, so erhalten wir ein virtuelles Bild, und die Bildentfernung b ist nunmehr nach unserer obigen Festsetzung negativ. Aus der Abb. 460b liest man die Proportionen

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{r - b}{r - g} \quad (6)$$

ab, die wieder zu der Gl. (3) führen. Diese ist demnach für alle Arten der Abbildung am Hohlspiegel gültig. Führen wir jedoch an Stelle von b seinen absoluten Betrag $|b| = -b$ in Gl. (6) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}. \quad (7)$$

Als Abbildungsmaßstab ergibt sich für das virtuelle Bild

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \quad (8)$$

Das virtuelle Bild ist stets aufrecht und größer als der Gegenstand.

Ist die oben eingeführte Bedingung bezüglich der Spiegelabmessungen nicht erfüllt, so schneiden sich achsenparallel einfallende Strahlen nach der Reflexion nicht mehr alle in einem Punkte. Sie haben ein Einhüllende, die *Katakaustik*. Man kann sich den in Abb. 461 dargestellten Querschnitt dieser Fläche so konstruiert denken, daß ein Kreis vom Radius $r/4$ auf einem um den Mittelpunkt des Hohlspiegels beschriebenen Kreise vom Radius $r/2$ abrollt. Die Katakaustik

wird alsdann von jenem Punkte des kleineren Kreises beschrieben, der den größeren Kreis im Achsenpunkte F — dem Brennpunkt nach der früheren Definition — berührt. Die Katakaustik ist also eine Epizykloide. Die parallel einfallenden Strahlen werden nach der Reflexion in den zwischen Spiegel und Katakaustik eingeschlossenen Raum zusammengedrängt.

Bei *Konvexspiegeln* ergibt sich durch eine der obigen entsprechende Überlegung, daß alle Strahlen, die parallel zur Achse einfallen, so reflektiert werden, als ob sie von einem Punkte F herkommen, der *hinter* dem Spiegel auf dessen Achse liegt, und der um die halbe Länge des Krümmungsradius, $-f = r/2$, vom Scheitel entfernt ist (Abb. 462). Dieser Punkt ist sozusagen ein virtueller Brennpunkt, und $-f$ ist die (negative) Brennweite des Hohlspiegels. Strahlen, welche in der Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt, also senkrecht, auf den Spiegel fallen, werden in sich selbst reflektiert; bei im Scheitel einfallenden Strahlen ist der Winkel gegen die Achse vor und nach der Reflexion gleich. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Bilder genau wie beim Hohlspiegel.

Aus der Abb. 462 liest man die folgenden Proportionen ab:

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{r+b}{r+g}. \tag{9}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f}, \tag{10}$$

also dieselbe Gleichung, wie beim Hohlspiegel [Gl. (3)]. Führen wir jedoch für die negative Brennweite und die negative Bildentfernung deren absolute Beträge $|f| = -f$ und $|b| = -b$ ein, so folgt

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{|f|}. \tag{11}$$

Für den Abbildungsmaßstab folgt aus Abb. 462 wieder

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \tag{12}$$

Die Bilder am Konvexspiegel sind stets virtuell, aufrecht und verkleinert.

271. Brechung des Lichts. Optische Weglänge. Ebenso wie die mechanischen Wellen erfahren auch die Lichtwellen beim Übergang von einem Stoff in einen anderen, in dem sie eine andere Geschwindigkeit haben, im allgemeinen eine Richtungsänderung, eine *Brechung* (§ 89). Die Richtung der Lichtstrahlen ist im zweiten Stoff eine andere als im ersten. Handelt es sich um isotrope Stoffe, die wir vorerst allein betrachten wollen, so gilt das *Brechungsgesetz*, wie wir es in § 89 [Gl. (25)] abgeleitet haben, auch für das Licht (SNELLIUS 1615). Sind α und β die Winkel, die ein Strahl im ersten und im zweiten Stoff mit dem Einfallslot bildet (Abb. 463), und sind c_1 und c_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts im ersten und im zweiten Stoff, so gilt erstens auch hier

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}}. \tag{13}$$

Zweitens liegt der gebrochene Strahl mit dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot in der gleichen Ebene. Die durch Gl. (13) definierten Größen n_{21} bzw. n_{12} sind die relativen Brechungsindizes der beiden Stoffe. Es ist $\beta < \alpha$, wenn $c_1 > c_2$ (Abb. 463 a), und $\beta > \alpha$, wenn $c_1 < c_2$ (Abb. 463 b).

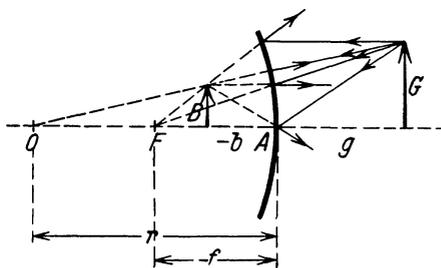


Abb. 462. Bildkonstruktion am Konvexspiegel.

Bei den mechanischen Wellen gibt es keinen von der Natur ausgezeichneten Stoff, auf den die Brechungsindizes der übrigen Stoffe aus einem natürlichen Grunde bezogen werden könnten. Beim Licht aber ist ein solches ausgezeichnetes Medium vorhanden, das Vakuum. Die Lichtgeschwindigkeit ist im Vakuum größer als in allen Stoffen. Wir wollen sie mit c_0 bezeichnen, die Lichtgeschwindigkeiten in den einzelnen Stoffen mit c . Die auf das Vakuum bezogenen Brechungsindizes der Stoffe bezeichnen wir mit n . Dann folgt für die Brechung eines Lichtstrahls, der aus dem Vakuum in einen Stoff einfällt,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_0}{c} = n. \tag{14}$$

Da $c_0 > c$, so liegt hier also stets der Fall der Abb. 463a vor. Ein aus dem Vakuum in einen Stoff eintretender Strahl wird zum Einfallslot hin gebrochen. Dementsprechend wird ein aus einem Stoff in das Vakuum austretender Strahl vom Einfallslot fort gebrochen (Abb. 463b). Da die Lichtgeschwindigkeit in der Luft, überhaupt in allen Gasen, von derjenigen im Vakuum nur äußerst wenig

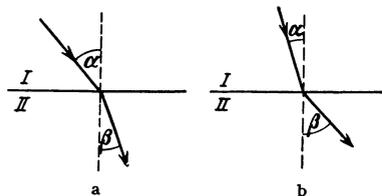


Abb. 463. Brechung des Lichts. a) $c_1 > c_2$, b) $c_1 < c_2$.

verschieden ist, so gilt (Gl. 14) mit einer fast immer ausreichenden Genauigkeit auch für den Durchgang durch eine Grenzfläche zwischen Luft und einem festen oder flüssigen Stoff.

Man nennt einen Stoff *optisch dichter* bzw. *optisch dünner* als einen anderen, wenn sein Brechungsindex größer bzw. kleiner ist als der des anderen. Man verwechsle die optische Dichte nicht mit der stofflichen Dichte (§ 14). Jedoch geht bei dem *gleichen* Gase die optische Dichte parallel mit der stofflichen Dichte. Der Brechungsindex eines Gases ist seiner Dichte proportional.

Nach Gl. (14) sind die Brechungsindizes aller Stoffe (von Fällen anormaler Dispersion abgesehen, § 309) größer als 1. Tabelle 30 gibt einige Zahlenwerte,

Tabelle 30. Brechungsindex einiger Stoffe.

Wasser	1,3332	Flintglas, leicht	1,6085
Eis	1,31	Flintglas, schwer	1,7515
Kassiaöl	1,605	Flintglas, schwerstes	1,9
Schwefelkohlenstoff	1,6291	Phosphor in CS_2	1,97
Kronglas, leicht	1,5153	Diamant	2,4173
Kronglas, schwer	1,6152		

die sich auf das Licht der gelben Natriumlinie (*D*-Linie) beziehen. Diese Angabe ist nötig, da der Brechungsindex von der Wellenlänge (Farbe) des Lichts abhängt (§ 285).

Der Brechungsindex des Vakuums ist definitionsgemäß gleich 1. Aus Gl. (13) und (14) folgt, daß der relative Brechungsindex n_{12} eines Stoffes mit dem Brechungsindex n_1 gegen einen solchen mit dem Brechungsindex n_2 gleich n_1/n_2 ist. Ferner folgt

$$n_1 : n_2 = c_2 : c_1. \tag{15}$$

Fällt ein Lichtstrahl schräg auf eine planparallele Glasplatte, so wird er beim Eintritt und beim Austritt gebrochen und erfährt eine Parallelverschiebung (Abb. 464). Die seitliche Verschiebung beträgt $\delta = AB \sin(\alpha - \beta)$. Ist d die Dicke der Platte, so ist $AB = d/\cos \beta$. Demnach ist $\delta = d(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)/\cos \beta$, oder da $\sin \beta = \sin \alpha/n$,

$$\delta = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right). \tag{16}$$

Die bekannte Erscheinung, daß schräg in Wasser getauchte Gegenstände in der Oberfläche geknickt erscheinen, ist aus Abb. 465 ohne weiteres verständlich, ebenso die Tatsache, daß der Boden eines Gewässers gehoben, das Gewässer also flacher erscheint, als es tatsächlich ist.

Die Schwingungszahl ν (Farbe) einer Lichtwelle ändert sich natürlich bei ihrem Übergang von einem Stoff in einen anderen ebensowenig, wie z. B. die Schwingungszahl (Tonhöhe) eines Schalles. Ist λ_1 die Wellenlänge des Lichts in einem Stoff vom Brechungsindex n_1 , λ_2 diejenige in einem Stoff vom Brechungsindex n_2 , so ist $\lambda_1 = c_1/\nu$, $\lambda_2 = c_2/\nu$ (§ 262) oder nach Gl. (15)

$$\lambda_1 : \lambda_2 = n_2 : n_1 \quad \text{oder} \quad n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2. \quad (17)$$

Gl. (17) ist insbesondere wichtig zur Umrechnung einer in Luft (Brechungsindex n) gemessenen Wellenlänge λ in die entsprechende Wellenlänge λ_0 im Vakuum, $\lambda_0 = n \lambda$. Obgleich n bei Luft von 1 nur äußerst wenig abweicht, ist diese Korrektur bei der großen Genauigkeit der Wellenlängenmessungen doch oft durchaus nötig.

In der Zeit t legt das Licht in einem Stoff den Weg $s = ct$, im Vakuum den Weg $s_0 = c_0 t$ zurück. Es ist also $s/c = s_0/c_0$ oder nach Gl. (14)

$$ns = s_0. \quad (18)$$

Das Produkt ns aus Brechungsindex n und geometrischer Weglänge s zwischen zwei Punkten heißt die *optische Weglänge* zwischen diesen Punkten. Da $t = s/c = ns/c_0 = s_0/c_0$, so folgt, daß die Zeit, die das Licht zur Zurücklegung des Weges zwischen zwei

Punkten benötigt, der optischen Weglänge zwischen ihnen proportional ist. Gleich große optische Weglängen durchmißt das Licht in gleichen Zeiten.

Grenzen zwei Schichten des gleichen Stoffes aneinander, in denen dieser einen verschiedenen Brechungsindex hat, so findet auch an einer solchen Grenze eine Brechung statt. Das kann dann der Fall sein, wenn sich die (stoffliche) Dichte und mit ihr die optische Dichte des Stoffes von Ort zu Ort ändert, z. B. in der Luft infolge einer Änderung der Temperatur und des Druckes mit der Höhe. Ist die Änderung des Brechungsindex stetig, so hat dies eine Krümmung eines Lichtstrahls zur Folge, wie sie Abb. 466 schematisch darstellt. Solche Ursachen rufen z. B. die sog. Luftspiegelungen (Fata morgana u. dgl.) hervor. Von heißem Boden aufsteigende Luft ist infolge ihrer thermischen Inhomogenität auch optisch inhomogen. Infolgedessen erfährt das durch sie hindurchgehende Licht ganz unregelmäßige und fortwährend veränderliche Brechungen, welche die durch diese Luft gesehenen Gegenstände verzerrt und flimmernd erscheinen lassen. Die gleiche, als *Schlieren* bezeichnete Erscheinung beobachtet man auch in Lösungen, in denen die Konzentration noch nicht überall ausgeglichen ist. Ebenso beruht auf solchen optischen Störungen in der Atmosphäre das Flimmern der Fixsterne. Der Kegel von Licht, der von einem Fixstern in unser Auge gelangt, ist wegen der ungeheuren Entfernung dieser Sterne auch

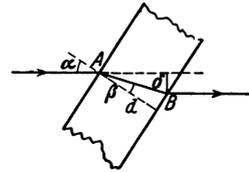


Abb. 464. Brechung in einer planparallelen Glasplatte.

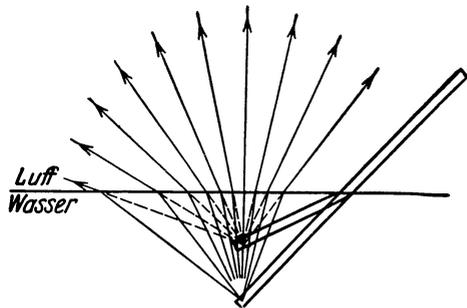


Abb. 465. Lichtbrechung im Wasser.

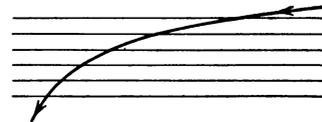


Abb. 466. Schema der Krümmung eines Lichtstrahls bei örtlich veränderlichem Brechungsindex. n nimmt von oben nach unten zu.

Der Kegel von Licht, der von einem Fixstern in unser Auge gelangt, ist wegen der ungeheuren Entfernung dieser Sterne auch

in den höchsten Schichten der Erdatmosphäre nur wenig breiter als unsere Pupille. Kleine örtliche optische Störungen in der Atmosphäre bewirken daher schon eine Störung der Lichtausbreitung bis zum Auge. Bei den viel näheren Planeten hat der Kegel des von ihnen in unser Auge kommenden Lichts in den oberen Atmosphärenschichten bereits einen beträchtlichen Durchmesser, z. B. beim Mars rund 10 m. Kleine örtliche optische Ungleichmäßigkeiten in der Atmosphäre gleichen sich daher gegenseitig aus und bewirken keine wesentlichen Helligkeitsschwankungen des Sterns. Die Planeten flimmern nicht.

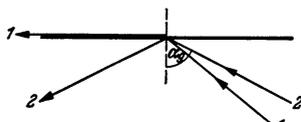


Abb. 467. Totalreflexion.

272. Totalreflexion. Fällt ein Lichtstrahl unter dem Winkel α von einem optisch dichteren Stoff (n_1) her auf eine Grenzfläche gegen einen optisch dünneren Stoff ($n_2 < n_1$, Abb. 463 b), so ist nach Gl. (13) der Brechungswinkel β gegeben durch $\sin \beta = n_{12} \sin \alpha$, wobei $n_{12} = n_1/n_2$. Der größte Wert, den $\sin \beta$ annehmen kann, ist 1. Dann ist $\beta = 90^\circ$, der gebrochene Strahl tritt streifend in den zweiten Stoff ein (Abb. 467, Strahl 1). Der zugehörige Einfallswinkel α_g ist dann durch die Gleichung

$$\sin \alpha_g = \frac{1}{n_{12}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (19a)$$

gegeben. Handelt es sich um die Grenzfläche eines Stoffes vom Brechungsindex n gegen das Vakuum (oder Luft), so folgt aus Gl. (19a)

$$\sin \alpha_g = \frac{1}{n}. \quad (19b)$$

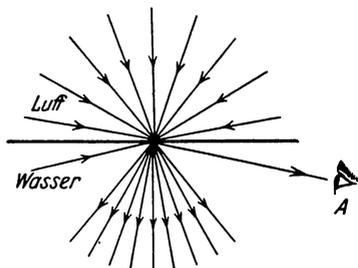


Abb. 468. Zur Brechung und Totalreflexion im Wasser.

Bei größerem Einfallswinkel α kann ein Übertritt des Lichtes in den zweiten Stoff bzw. das Vakuum nicht mehr erfolgen (KEPLER 1611). Es wird an der Grenzfläche regulär reflektiert, es tritt *Totalreflexion* ein (Abb. 467, Strahl 2). Der durch Gl. (19a) bzw. (19b) definierte Einfallswinkel α_g heißt der *Grenzwinkel der Totalreflexion* des ersten Stoffes gegen den zweiten bzw. gegen das Vakuum.

Totalreflexion kann nur eintreten, wenn das Licht die Grenzfläche *vom optisch dichteren Stoff her* trifft ($n_2 < n_1$).

Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (§ 266) wird ein Lichtstrahl, der von einem optisch dünneren Stoff her streifend auf die Oberfläche eines optisch dichteren Stoffes, z. B. von Luft auf Wasser, trifft, unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion (beim Wasser etwa $48\frac{1}{2}^\circ$) in das Wasser hineingebrochen. Fällt auf einen Punkt einer Wasseroberfläche von allen Richtungen her Licht (z. B. das diffuse Tageslicht), so wird das in das Wasser eintretende Licht durch die Brechung in einen Kegel gesammelt, dessen Öffnung doppelt so groß ist wie dieser Grenzwinkel (Abb. 468). Zu dem Auge A eines Beobachters gelangt in der gezeichneten Blickrichtung durch das Wasser hindurch kein Licht aus dem Raum oberhalb der Wasseroberfläche. In das Auge kann bei dieser Blickrichtung von der Oberfläche her nur Licht treten, welches eine Totalreflexion an der Oberfläche erlitten hat, das also von einem Punkt innerhalb des Wassers herkommt. Daher erscheint die Wasseroberfläche spiegelnd, wenn man sie von unten her unter einem Einfallswinkel betrachtet, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion. Aus dem Wasser „hinaussehen“ kann man nur innerhalb des durch den Grenzwinkel der Totalreflexion gegebenen räumlichen Winkels. Bei großen Aquarien mit seitlichen Schaufenster kann man im allgemeinen nicht sehen, was sich oberhalb des Wassers befindet, und ihr Inhalt erscheint an der Wasserfläche gespiegelt.

Der Silberglanz, den mit Luftblasen bedeckte Gegenstände unter Wasser zeigen, rührt von der an den Luftblasen eintretenden Totalreflexion her. Ein in Wasser getauchtes, zum Teil mit Quecksilber gefülltes Reagensglas erscheint dort, wo es leer ist, stärker spiegelnd als an dem mit Quecksilber gefüllten Teil, weil die Totalreflexion an der Luft vollkommener ist als die Reflexion am Quecksilber.

Der Grenzwinkel der Totalreflexion von Glas gegen Luft ist kleiner als 45° (zwischen 25° und 42° , je nach der Glassorte). Läßt man daher einen Lichtstrahl in der in Abb. 469a oder b dargestellten Weise in ein rechtwinkliges Glasprisma treten, so wird er im Innern

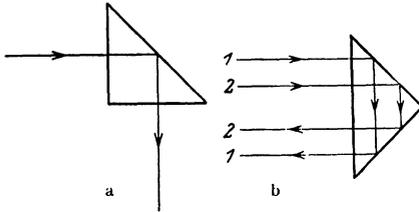


Abb. 469. Totalreflektierendes Prisma.

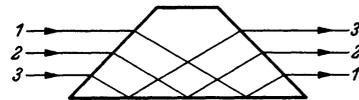


Abb. 470. Umkehrprisma von AMICI.

total reflektiert und tritt unter 90° (a) bzw. 180° (b) gegen seine ursprüngliche Richtung aus dem Prisma wieder aus. Hiervon wird unter anderem bei den Prismenfernrohren und den Entfernungsmessern Gebrauch gemacht (§ 282). Abb. 470 zeigt ein einfaches *Umkehrprisma* (AMICI). Die Reihenfolge der Strahlen wird infolge der Brechung an den Kathetenflächen und der Totalreflexion an der Hypothenusenfläche umgekehrt. Solche Prismen können deshalb zur Umkehrung von optischen Bildern dienen.

Da der Grenzwinkel der Totalreflexion in einfacher Weise mit dem Brechungsindex zusammenhängt, so kann er zu dessen Bestimmung benutzt werden. Hierzu dienende Meßgeräte heißen *Refraktometer* (ABBE, PULFRICH u. a.). Abb. 471 zeigt als Beispiel das Grundprinzip des für Flüssigkeiten verwandten Eintauchrefraktometers. Das Glasprisma P , das am unteren Ende eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs sitzt, taucht in die zu untersuchende Flüssigkeit. In diese fällt von unten diffuses Licht, von dem wir nur die Strahlen gezeichnet haben, die streifend in die Hypothenusenfläche des Prismas einfallen. Die Strahlen bilden im Prisma mit dem Einfallslot den Grenzwinkel der Totalreflexion α_g , der außer vom Brechungsindex des Prismas von dem der Flüssigkeit abhängt [Gl. (19a)]. Nach dem Austritt aus dem Prisma werden sie durch eine Linse L (Objektiv des Fernrohrs) in der Ebene AA vereinigt, in der eine Skala angebracht ist, die mit dem (nicht gezeichneten) Okular betrachtet wird. In den Bereich rechts vom Schnittpunkt B der Strahlen kann von unten her kein Licht gelangen, sondern nur in den Bereich links von ihm, in dem die übrigen, nicht streifend in das Prisma einfallenden Strahlen vereinigt werden. Man erblickt also durch das Okular ein Lichtband, das bei B abbricht. Die Lage von B hängt von α_g ab. Daher kann nach erfolgter Eichung der Brechungsindex der Flüssigkeit aus der Lage von B berechnet werden. Die Begrenzung des Lichtbandes ist nur dann scharf, wenn einfarbiges Licht verwendet wird. Bei Verwendung von weißem Licht ist noch eine Vorrichtung nötig, um sie auch hier scharf zu machen.

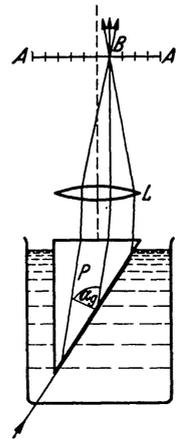


Abb. 471. Prinzip des Eintauchrefraktometers.

273. Prismen. Ein Prisma ist ein Körper aus einem brechenden Stoff, meist aus Glas, für besondere Zwecke auch aus Quarz (Bergkristall), Flußspat, Steinsalz

usw. von dreieckigem Querschnitt. Mindestens zwei seiner Mantelflächen müssen sehr gut eben geschliffen sein. Den Winkel, den diese miteinander bilden, nennt man den brechenden Winkel des Prismas (γ). Abb. 472 zeigt die Brechung eines Strahles durch ein Prisma. Für die Berechnung der Ablenkung δ eines unter dem Winkel α_1 auf eine Prismenfläche fallenden Strahles gelten außer dem Brechungsgesetz die beiden aus Abb. 472 ablesbaren Beziehungen $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$ und $\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$, wobei δ den Winkel bedeutet, um den der Strahl nach dem Wiederaustritt aus seiner anfänglichen Richtung abgelenkt ist. Die kleinste Ablenkung erfolgt, wenn der Strahl symmetrisch durch das Prisma hindurchtritt, also $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist. In diesem Falle ist $\beta_1 = \beta_2 = \gamma/2$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = (\delta + \gamma)/2$ und daher nach dem Brechungsgesetz

$$\sin \frac{\delta + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (20)$$

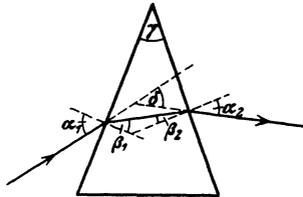


Abb. 472. Brechung im Prisma.

Diese Beziehung kann dazu benutzt werden, um aus dem Winkel kleinster Ablenkung den Brechungsindex n des Prismas zu berechnen.

Ist der brechende Winkel γ sehr klein und n nicht sehr groß, so ist auch der Ablenkungswinkel δ sehr klein. Man kann dann die \sin durch die Winkel ersetzen und erhält aus Gl. 20

$$\delta = (n - 1) \gamma.$$

Über die Farberscheinungen bei der Brechung s. § 285.

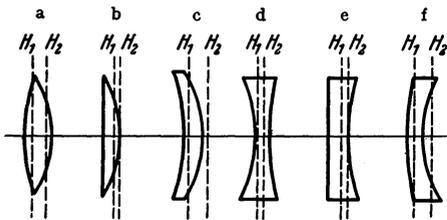


Abb. 473. a–c Sammellinsen. d–f Zerstreuungslinsen.

274. Sphärische Linsen. Eine sphärische Linse ist ein Körper aus einem brechenden Stoff, meist aus Glas, welcher von zwei koaxialen Kugelflächen begrenzt ist. Eine dieser Flächen kann auch eine Ebene sein. Nach den dadurch gegebenen verschiedenen Möglichkeiten unterscheidet man folgende Arten von Linsen (Abb. 473):

1. *Sammellinsen*, a) bikonvex, b) plankonvex, c) konkavkonvex. Diese Linsen sind in der Mitte *dicker* als am Rande.

2. *Zerstreuungslinsen*, d) bikonkav, e) plankonkav, f) konvexkonkav. Diese Linsen sind in der Mitte *dünnere* als am Rande. (Über die Bedeutung von H_1 , H_2 s. § 276.)

Bei der Ableitung der folgenden Gesetzmäßigkeiten werden die gleichen einschränkenden Voraussetzungen gemacht wie beim Hohlspiegel, nämlich daß die Abmessungen der Linse klein sind gegen die Krümmungsradien ihrer Begrenzungsflächen, und daß es sich nur um Strahlen handelt, die einen kleinen Winkel mit der Achse bilden. Die bei den Linsen anzustellenden Überlegungen entsprechen den bei den Hohlspiegeln angestellten weitgehend und werden daher hier kürzer gefaßt. Als *Achse* einer Linse bezeichnet man die Gerade, die die Krümmungsmittelpunkte ihrer Flächen verbindet.

Vom Punkte A her (Abb. 474) treffe unter dem Winkel α_1 gegen die Linsenachse ein Strahl auf die Linse und schneide nach zweimaliger Brechung die Achse unter dem Winkel α_2 auf der anderen Seite in B . O_1 und O_2 seien die Krümmungsmittelpunkte der beiden Linsenflächen, r_1 und r_2 die dazugehörigen Krümmungsradien. Vorausgesetzt wird, daß der Strahl sich nur wenig von der

Achse entfernt, die Winkel α_1 und α_2 also klein sind, und daher die Eintrittsstelle und die Austrittsstelle des Strahls an der Linse nur sehr wenig verschiedene Abstände von der Linsenachse haben.

Es sei δ der Winkel, um den der von A kommende Strahl aus seiner Richtung abgelenkt wird. Diesen Winkel kann man auf zwei Weisen ausdrücken. Einmal ist $\delta = \alpha_1 + \alpha_2$, als Außenwinkel des die Winkel α_1 und α_2 enthaltenden Dreiecks. Da ferner die Linse auf den Strahl wie ein schmales Prisma wirkt (§ 273), so ist $\delta = (n - 1) \gamma = (n - 1) (\beta_1 + \beta_2)$. Wegen der Kleinheit der Winkel kann man weiter setzen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_1}{a}, \\ \alpha_2 &\approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_2}{b}, \\ \beta_1 &\approx \sin \beta_1 = \frac{h_1}{r_1}, \\ \beta_2 &\approx \sin \beta_2 = \frac{h_2}{r_2}. \end{aligned}$$

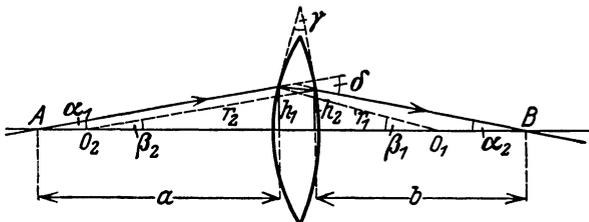


Abb. 474. Zur Ableitung der Linsenformel.

Setzt man diese Ausdrücke in die beiden Gleichungen für δ ein, so folgt $h_1/a + h_2/b = (n - 1) (h_1/r_1 + h_2/r_2)$. Nun sind h_1 und h_2 nach Voraussetzung sehr wenig verschieden, so daß man ohne merklichen Fehler $h_1 = h_2$ setzen darf. Alsdann folgt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}, \tag{21}$$

wobei

$$f = \frac{1}{(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n - 1) (r_1 + r_2)}. \tag{22a}$$

Ist 2ρ der Durchmesser, d die Dicke der Linse an ihrem Scheitel, so ist mit den hier zulässigen Vernachlässigungen $1/r_1 + 1/r_2 = 2d/\rho^2$, also

$$f = \frac{1}{n - 1} \frac{\rho^2}{2d}. \tag{22b}$$

Bei Kenntnis von n (bei Glas rund 1,5) kann man also f aus den Abmessungen einer Sammellinse leicht berechnen, sofern sie nicht am Rande zylindrisch abgeschliffen ist.

Für eine Linse mit einer ebenen Fläche ($r_1 = r, r_2 = \infty$) ergibt sich aus Gl. (22a)

$$f = \frac{r}{n - 1}, \tag{23a}$$

für eine solche mit zwei Flächen von gleicher Krümmung ($r_1 = r_2 = r$)

$$f = \frac{r}{2(n - 1)}. \tag{23b}$$

Die Größe f ist die für eine Linse charakteristische Konstante. Rückt der Punkt A in unendliche Ferne, so daß $a = \infty$, fallen also alle von A her kommenden Strahlen parallel auf die Linse, so folgt aus Gl. (21) $b = f$, d. h. Strahlen, welche parallel zur Achse auf die Linse fallen, gehen alle durch einen Punkt F auf der Achse, der den Abstand f von der Linse hat. Genau wie beim Hohlspiegel bezeichnet man daher F als den *Brennpunkt*, f als die *Brennweite* der Linse. Aus dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlengangs folgt, daß jeder vom Brennpunkt her auf die Linse fallende Strahl hinter der Linse parallel zur Achse verläuft. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, auf jeder Seite einen. Sie liegen auf der Linsenachse und haben beide den gleichen Abstand f von der Linse.

Die Gl. (21), die hier für eine Sammellinse abgeleitet wurde, gilt ebenso für Zerstreuungslinsen. Dabei ist aber der Krümmungsradius von konkaven Flächen mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Es ergibt sich dann für alle Arten von *Sammellinsen* (Abb. 473a—c) eine *positive*, für alle Arten von *Zerstreuungslinsen* (Abb. 473d—f) eine *negative* Brennweite.

Statt der Brennweite gibt man bei Linsen oft ihre *Brechkraft* $D = 1/f$ *Dioptrien* an, wobei f in m gemessen wird. Eine Linse von z. B. 20 cm Brennweite hat demnach eine Brechkraft von 5 Dioptrien. Sammellinsen haben positive, Zerstreuungslinsen negative Brechkräfte.

Fällt ein Strahl schräge durch die Linsenmitte, durchsetzt er also die Linsenflächen an zwei Stellen, wo diese einander parallel sind, so erfährt er keine Ablenkung, sondern nur eine seitliche Parallelverschiebung (§ 271). Diese ist aber bei der vorausgesetzten geringen Dicke der Linse so klein, daß man sie vernachlässigen kann. Man zeichnet daher bei einer dünnen Linse einen solchen Strahl so, als ob er ungebrochen geradlinig durch die Linsenmitte ginge.

In der Gl. (21) kommt der Winkel α_1 , den der von A ausgehende Strahl mit der Linsenachse bildet, nicht vor. Diese Gleichung gilt also für jeden beliebigen

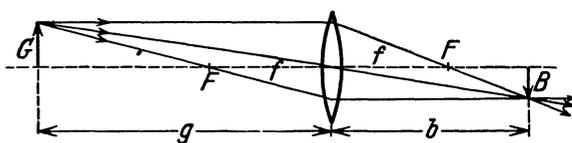


Abb. 475. Reelle Bilder bei Sammellinsen.

von A ausgehenden und durch die Linse hindurchgehenden Strahl. Alle diese Strahlen schneiden sich in B , d. h. B ist ein reelles Bild von A . (Über die wellenoptische Betrachtung der Linsengesetze s. § 297.)

275. Abbildung durch Linsen. Strahlen, die von einem Punkt eines Gegenstandes her auf eine Sammellinse fallen, schneiden sich nach dem Durchgang durch die Linse entweder in einem auf der vom Gegenstand abgekehrten Seite der Linse gelegenen Punkt, auf den hin sie von der Linse her konvergieren, oder sie divergieren von einem Punkte her, der auf der dem Gegenstand zugekehrten Seite der Linse liegt und von dem sie tatsächlich nicht herkommen, aber herzukommen scheinen. Im ersten Falle liefert die Linse also ein reelles, im zweiten Fall ein virtuelles Bild des Punktes. Zur Konstruktion des Bildpunktes genügen zwei Strahlen. Nach § 274 haben wir deren sogar drei zur Verfügung: 1. den von dem Gegenstandspunkt parallel zur Achse auf die Linse fallenden Strahl, welcher auf der anderen Seite durch den Brennpunkt geht, 2. den Strahl, der vom Gegenstandspunkt durch den auf der gleichen Seite gelegenen Brennpunkt geht und auf der anderen Seite achsenparallel austritt, 3. den Strahl, welcher durch die Mitte der Linse tritt und nur ein wenig parallel verschoben wird, also praktisch ungebrochen bleibt. Bei der Konstruktion, die ja eine dünne Linse voraussetzt, sehen wir von der zweimaligen Brechung der beiden ersten Strahlen ab und zeichnen sie nur einmal in der Linse geknickt.

Auf diese Weise ergibt sich die in Abb. 475 dargestellte Konstruktion des Bildes B eines außerhalb der Brennweite gelegenen Gegenstandes G . Das Bild ist reell, umgekehrt und im vorliegenden Falle verkleinert. Betrachten wir aber jetzt umgekehrt B als den Gegenstand, G als dessen Bild, so ist die Konstruktion genau die gleiche. In diesem Falle ist das Bild vergrößert.

Aus Abb. 475 liest man ab, daß

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{f}{g-f}.$$

Dies liefert zwei Gleichungen zur Berechnung von b bei gegebenen g und f , während wir deren nur eine benötigen. Tatsächlich ergeben beide Gleichungen

das gleiche, ein Beweis dafür, daß sich die drei zur Konstruktion benutzten Strahlen tatsächlich in einem Punkt schneiden. Es folgt dann durch einfache Rechnung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{24}$$

also dieselbe Gleichung wie für die Abbildung an gekrümmten Spiegeln. Ebenso wie dort folgt ferner

$$(g - f) \cdot (b - f) = f^2 \tag{25}$$

und für den Abbildungsmaßstab

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \tag{26}$$

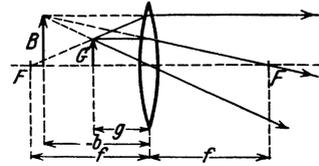


Abb. 476. Virtuelle Bilder bei Sammellinsen.

Wie bei den gekrümmten Spiegeln schreiben wir dem Bilde eine positive Bildweite b zu, wenn es sich um ein reelles Bild handelt, das aber bei einer Linse auf der entgegengesetzten Seite liegt, wie der Gegenstand. Virtuelle Bilder liegen auf der gleichen Seite wie der Gegenstand und haben eine negative Bildweite.

Liegt der Gegenstand in der zur Linsenachse senkrechten, durch den Brennpunkt gehenden Ebene, der *Brennebene*, so verlaufen die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Strahlen hinter der Linse parallel. Rückt er noch näher an die Linse, so divergieren sie hinter der Linse, und ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt auf der Gegenstandsseite der Linse. In diesem Fall entsteht also ein virtuelles Bild, und die Bildentfernung b wird negativ. Die Konstruktion des Bildes zeigt Abb. 476. Beachtet man, daß b jetzt eine negative Größe ist, so liest man aus Abb. 476 ab, daß

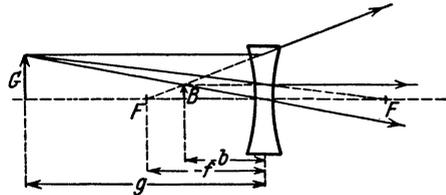


Abb. 477. Bilder bei Zerstreuungslinsen.

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{-b + f}{f} = \frac{f}{f - g} = \gamma. \tag{27}$$

Hieraus folgen auch für die virtuellen Bilder die Gl. (24) und (25). Bezeichnen wir jedoch den absoluten Betrag der Bildentfernung mit $|b|$, so ist $|b| = -b$, und es folgt

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = \frac{1}{f}. \tag{28}$$

Der Abbildungsmaßstab γ ist stets größer als 1. Die virtuellen Bilder sind daher bei Sammellinsen stets vergrößert, außerdem sind sie stets aufrecht.

Für die Brechung in Zerstreuungslinsen gelten entsprechende Überlegungen wie für Sammellinsen. Gl. (22a) ist, wie bereits erwähnt, unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Krümmungsradien auch für Zerstreuungslinsen gültig. Parallel zur Achse einfallende Strahlen divergieren hinter der Linse, und ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich in einem vor der Linse liegenden Punkt, den man wie bei den Sammellinsen als Brennpunkt bezeichnet. Im Brennpunkt wird also ein unendlich ferner, auf der Linsenachse gelegener Punkt virtuell abgebildet. Man schreibt daher, wie den virtuellen Bildern eine negative Bildentfernung, so einer Zerstreuungslinse eine *negative Brennweite* f zu.

Mit Hilfe der Brennpunkte und unter Benutzung des die Linsenmitte ungebrochen durchlaufenden Strahls lassen sich die Bilder bei den Zerstreuungslinsen ebenso wie bei Sammellinsen konstruieren. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen von b und f liest man aus Abb. 477 die folgenden Proportionen ab:

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{-f + b}{-f} = \frac{-f}{g - f}. \tag{29}$$

Auch aus diesen Gleichungen folgen wieder die Gl. (24) und (25), welche demnach für jede Art von Abbildung für alle Linsenarten gültig sind. Führen wir die absoluten Beträge der Brennweite und Bildentfernung $|f| = -f$ und $|b| = -b$ in Gl. (29) ein, so folgt

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = -\frac{1}{|f|}. \tag{30}$$

Für den Abbildungsmaßstab ergibt sich

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \tag{31}$$

Die Bilder sind bei Zerstreuungslinsen stets virtuell, aufrecht und verkleinert.

Ist bei einer Sammellinse der Abstand $a = g + b$ zwischen Gegenstand und Bild fest gegeben, etwa dadurch, daß ein fest aufgestellter Gegenstand auf eine feste Wand abgebildet werden soll, so ergeben sich aus Gl. (24) zwei Wertpaare

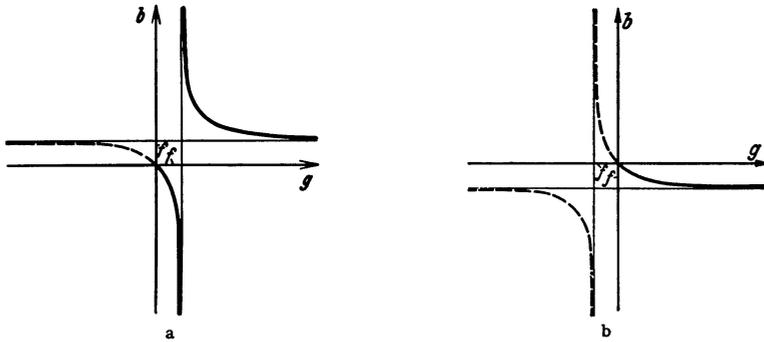


Abb. 478. Abbildungsverhältnisse a bei Sammellinsen (Hohlspiegeln), b bei Zerstreuungslinsen (Konvexspiegeln).

g_1, b_1 und g_2, b_2 , derart, daß $b_2 = g_1, g_2 = b_1$. Es gibt also zwischen Schirm und Gegenstand zwei Linsenstellungen, bei denen scharfe Abbildung erfolgt. Sie liegen symmetrisch zur Mitte von a , und die eine gibt ein vergrößertes, die andere ein verkleinertes Bild. Ist $a = 4f$, so fallen beide Stellungen zusammen, Bild und Gegenstand sind einander an Größe gleich. Wird $a < 4f$, so ist eine reelle Abbildung nicht mehr möglich. Durch Messung von g und b kann man die Brennweite einer Sammellinse nach Gl. (24) bestimmen.

Wir fassen die Abbildungsverhältnisse bei Linsen und Hohlspiegeln noch einmal in der folgenden Tabelle zusammen, die die Abhängigkeit der Bildweite b und des Abbildungsmaßstabes γ von der Gegenstandsweite g in ihren wesentlichen Zügen darstellt.

Sammellinse und Konkavspiegel	$\begin{cases} g = \infty \rightarrow f \rightarrow 0 \\ b = f \rightarrow \pm \infty \rightarrow -0 \\ \gamma = 0 \rightarrow \infty \rightarrow 1 \end{cases}$
Zerstreuungslinse und Konvexspiegel . .	$\begin{cases} g = \infty \rightarrow 0 \\ b = -f \rightarrow -0 \\ \gamma = 0 \rightarrow 1. \end{cases}$

Abb. 478 stellt dies Verhalten graphisch dar, indem b als Funktion von g aufgetragen ist. Bei der Sammellinse ergeben sich die beiden Äste einer Hyperbel, deren Asymptoten die Geraden $g = +f$ und $b = +f$ sind. Der rechte Ast entspricht den reellen Bildern, der linke den virtuellen. Dieser hat jedoch nur für positive Werte von g physikalische Bedeutung, da g definitionsgemäß nur positiv sein kann. Auch bei der Zerstreuungslinse ergibt sich eine Hyperbel, deren Asymptoten die Geraden $g = -f$ und $b = -f$ sind. Von dieser aber hat nur die

Hälfte des rechten Astes, die zu den positiven Werten von g gehört, physikalische Bedeutung.

Die Brennweite einer Sammellinse und ebenso auch eines Hohlspiegels läßt sich aus b und g auf folgende Weise leicht graphisch ermitteln (Abb. 479). Man trage vom Punkt O aus zusammengehörende Werte von g und b rechtwinklig zueinander ab, verbinde ihre Endpunkte durch eine Gerade, zeichne von O aus eine unter 45° gegen g und b verlaufende Gerade und fälle vom Schnittpunkt P der beiden gezeichneten Geraden Lote auf b und g . Die Seiten des so entstehenden Quadrats haben die Länge f . Denn man liest aus der Abb. 479 ab, daß $(g - f) : f = f : (b - f)$, was Gl. (25) entspricht. Umgekehrt kann man bei Kenntnis der Lage von P zu jedem Wert von g den zugehörigen Wert von b finden.

276. Dicke Linsen. Bei Linsen, deren Dicke man nicht, wie bisher vorausgesetzt, als klein gegen den Linsendurchmesser ansehen darf, sind die einfachen, im vorstehenden beschriebenen Bildkonstruktionen nicht mehr anwendbar. Es

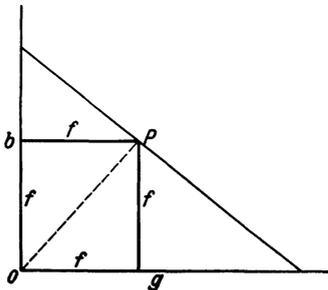
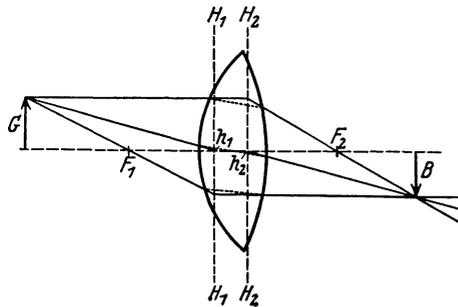
Abb. 479. Graphische Ermittlung von f aus b und g .

Abb. 480. Bildkonstruktion bei einer dicken Linse.

lassen sich aber bei einer solchen Linse stets zwei zur Linsenachse senkrechte Ebenen H_1 und H_2 (Abb. 473 und 480) angeben, die *Hauptebenen*, deren Schnittpunkte h_1 und h_2 mit der Linsenachse die *Hauptpunkte* heißen, und welche in nachstehender Weise die Konstruktion der Bilder ermöglichen. Die Linse hat wieder zwei Brennpunkte F_1 und F_2 , welche von den beiden Hauptpunkten den gleichen Abstand haben, $F_1 h_1 = F_2 h_2 = f$. Die Länge f ist die Brennweite der Linse. Die Bildkonstruktion erfolgt nunmehr, wie aus der Abb. 480 ersichtlich. Ein zur Achse paralleler, von der Seite von F_1 kommender Strahl wird bis zur Hauptebene H_2 geradlinig durchgezeichnet und verläuft von da ab nach F_2 . Ein durch den Brennpunkt F_1 gehender Strahl wird geradlinig bis zur Hauptebene H_1 durchgeführt und von da ab parallel zur Achse weitergeführt. Ein auf den Hauptpunkt h_1 hinlaufender Strahl wird in gleicher Richtung, seitlich verschoben, durch den Hauptpunkt h_2 weitergeführt. Der wirkliche Strahlengang in der Linse ist punktiert angedeutet. Entsprechendes gilt für Zerstreuungslinsen. Die Lage der Hauptebenen bei den verschiedenen Linsenarten ist in Abb. 473, § 274, eingezeichnet.

Die für die Abbildung durch Linsen abgeleiteten Gesetze gelten in gleicher Weise auch hier. Die bei dünnen Linsen gemachten Voraussetzungen kann man jetzt auch so ausdrücken, daß bei diesen der Abstand der beiden Hauptebenen voneinander so klein ist, daß man ihn vernachlässigen kann.

277. Linsenfehler. Einfache Linsen zeigen eine Reihe von Fehlern, d. h. störende Abweichungen von den vorstehend abgeleiteten einfachen Gesetzmäßigkeiten, die ihren Grund erstens darin haben, daß die Linsen nicht unendlich dünn sind und daß nicht nur sehr achsennahe Strahlen zur Verwendung kommen, und daß zweitens die verschiedenen Farben, aus denen weißes Licht besteht, verschieden stark gebrochen werden (Dispersion, § 285). Infolge der letzteren

Erscheinung hat eine Linse für verschiedene Farben eine etwas verschiedene Brennweite. Diese Fehler wirken sich hauptsächlich in folgenden Richtungen aus:

a) *Sphärische Aberration*. Die äußeren Linsenzonen haben eine kleinere Brennweite als die Linsenmitte. Von einem Bündel parallel zur Achse einfallender Strahlen schneiden die durch die äußeren Zonen der Linse tretenden die Achse in einem der Linse näheren Punkte, als die der Linsenachse nahe einfallenden Strahlen (Abb. 481a, vgl. Abb. 461).

b) *Chromatische Aberration*. Der Brechungsindex des Glases ist für die verschiedenen Farben verschieden groß, für Rot am kleinsten, für Violett am größten.

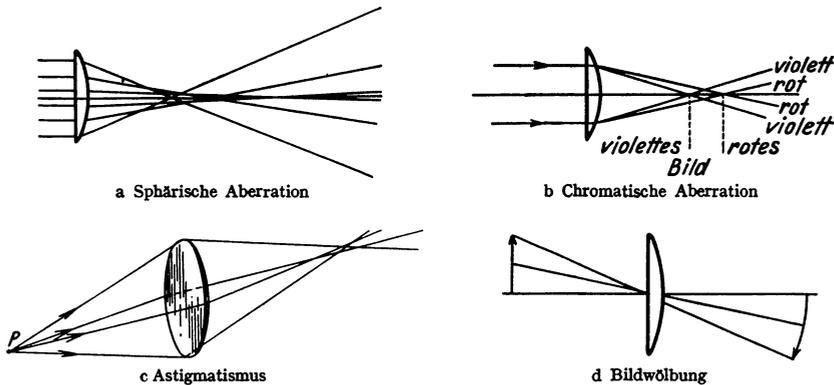


Abb. 481. Darstellung der wichtigsten Linsenfehler.

Daher schneiden sich die roten Anteile des von einem Gegenstand ausgehenden weißen Lichts in Punkten, die der Linse ferner liegen, als die Schnittpunkte der violetten Anteile (Abb. 481 b).

c) *Astigmatismus*. Für außerhalb der Achse liegende Punkte des Gegenstandes ist die Brennweite der Linse in den verschiedenen durch die Linsenachse gehenden Ebenen verschieden groß (Abb. 481 c, die Linse ist perspektivisch gezeichnet). Anastigmaten sind Linsensysteme, bei denen dieser Fehler ausgeglichen ist. Astigmatismus macht sich bei photographischen Objekten durch Unschärfe und Verzerrungen in den Bildecken bemerkbar.

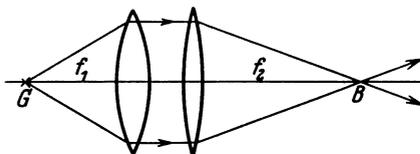


Abb. 482. Zur Ableitung der Brennweite eines Linsensystems.

d) *Bildwölbung*. Das Bild einer zur Linse parallelen, ebenen Fläche ist nicht eben, sondern gewölbt (Abb. 481 d).

278. Linsensysteme. Die vorstehend geschilderten Linsenfehler kann man sehr weitgehend durch Kombination mehrerer Linsen von geeigneten Krümmungsradien aus Glas von verschiedenem Brechungsindex (Kronglas, Flintglas, siehe Tabelle 30, § 271) beheben (Anastigmaten, Achromate usw.). Auch für ein solches System gelten die abgeleiteten Formeln. Zur Berechnung der Brennweite f eines Linsensystems, das aus zwei Linsen von den Brennweiten f_1 und f_2 bestehe, denken wir uns einen leuchtenden Punkt G , der sich im Brennpunkt der einen der beiden Linsen befindet (Abb. 482). Man sieht ohne weiteres, daß er im Brennpunkt B der zweiten Linse abgebildet wird. Wendet man jetzt auf das System die Gl. (24) der Einzellinsen an, so folgt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad (32)$$

d. h. man erhält die Brechkraft $1/f$ eines Linsensystems durch Addition der Brechkräfte der Einzellinsen. Dabei ist die Brennweite einer Zerstreuungslinse negativ zu rechnen. Bei einem solchen Linsensystem können die beiden Hauptebenen auch beträchtlich außerhalb des Systems liegen. Abb. 483 zeigt einen besonders krassen Fall.

279. Bildwerfer. Ein Bildwerfer besteht aus einer starken Lichtquelle A (einer Bogenlampe oder einer hochkerzigen Metallfadenlampe mit kleiner leuchtender Fläche), dem Kondensator K , vor dem sich der abzubildende Gegenstand G (Glasbild, Film usw.) befindet, und der Linse L (Objektiv, meist ein Linsensystem)

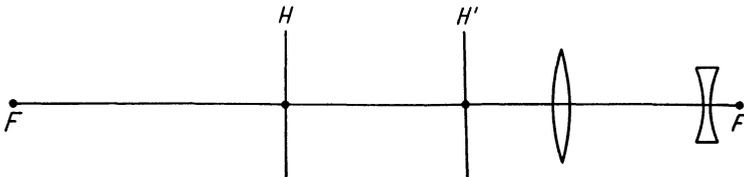


Abb. 483. Brennpunkte und Hauptebenen eines besonderen Linsensystems (Teleobjektiv).

(Abb. 484). Der Kondensator ist ein System aus zwei oder drei Linsen von ziemlich kleiner Brennweite, welches die Lichtquelle in der Linse L abbildet, so daß kein Licht an dieser vorbeifällt. Es ergeben sich daher zwei Bedingungen für die vorkommenden Brennweiten und Abstände. In der Regel wird man den Abstand l des Bildwerfers von der Bildwand sowie den Abbildungsmaßstab γ als gegeben anzusehen haben. Dann ist also dieser Abstand $l = g + b$

sowie $\gamma = b/g$ vorgeschrieben, und b und g können einzeln berechnet werden. Hieraus ergibt sich weiter aus Gl. (24) die Brennweite f_1 der Linse L . Ist ferner a der Abstand der Lichtquelle vom Kondensator, g die schon festgelegte Entfernung zwischen Glasbild (Kondensator) und Linse, so folgt die für den Kondensator notwendige Brennweite f_2 aus der Linsenformel $1/a + 1/g = 1/f_2$.

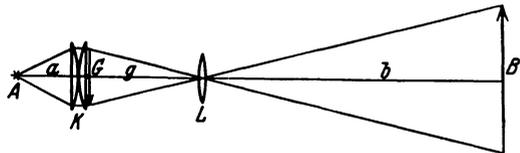


Abb. 484. Bildwerfer.

280. Allgemeines über Vergrößerung bei Lupe, Mikroskop und Fernrohr. Bei den im folgenden zu besprechenden optischen Geräten, Lupe, Fernrohr und Mikroskop, betrachtet das Auge ein virtuelles Bild des Gegenstandes. Dieses kann größer oder kleiner als der Gegenstand sein. Bei Lupe und Mikroskop ist es größer, beim Fernrohr kleiner als dieser. Der Zweck dieser Geräte ist an sich gar nicht die Erzeugung eines Bildes von veränderten Abmessungen, sondern die Verdeutlichung der Struktur oder der Umrisse von Gegenständen, welche ohne diese Geräte der Auflösung durch unser Auge nicht mehr zugänglich sind. Entweder sind wir nicht in der Lage, uns ihnen so weit zu nähern, daß wir diese Struktur deutlich sehen; dann bedienen wir uns des Fernrohrs. Oder es genügt auch die größtmögliche Annäherung des Auges (Nahepunkt etwa 15 cm, § 283) nicht, um eine Auflösung zu bewirken; dann benutzen wir eine Lupe oder ein Mikroskop. Um das Problem auf einen möglichst einfachen Fall zurückzuführen, betrachten wir zwei nahe benachbarte Punkte, die sich in einem gewissen Abstand vom Auge befinden. Die Augenlinse entwirft von ihnen ein Bild auf der Netzhaut, auf der die beiden Punktbilder sehr dicht beieinanderliegen. Diese werden vom Auge nur dann als zwei getrennte Erscheinungen wahrgenommen, wenn sie nicht auf das gleiche lichtempfindliche Organ (Zäpfchen oder Stäbchen, § 284) der Netzhaut fallen. Damit

das nicht der Fall ist, dürfen die beiden Punkte, vom Auge aus gesehen, keinen kleineren *Winkelabstand* als etwa α' haben. Dies entspricht bei einer Entfernung von 100 m etwa einem Punktabstand von 3,3 cm und bei einer Entfernung von 15 cm einem Abstand von $5 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = \frac{1}{20} \text{ mm}$. Wir können also eine Struktur dadurch deutlicher machen, daß wir *den Winkel vergrößern*, unter dem wir die einzelnen Elemente der Struktur bzw. den ganzen Gegenstand sehen. Das natürliche Maß für die Wirkung dieser optischen Geräte ist daher das Verhältnis des Winkels β , unter dem wir mit ihrer Hilfe das virtuelle Bild eines Gegenstandes sehen, zu dem Winkel α , unter dem wir den Gegenstand selbst bei unmittelbarer Betrachtung mit bloßem Auge tatsächlich sehen (Fernrohr) oder unter den günstigsten Umständen sehen könnten (Lupe, Mikroskop). Die *Vergrößerung* dieser Geräte wird daher als $v = \beta/\alpha$ definiert. Bei den folgenden Rechnungen können wir die Winkel α und β stets als sehr klein annehmen, so daß wir setzen dürfen $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ und $\sin \beta \approx \text{tg } \beta \approx \beta$.

281. Die Lupe. Eine Lupe ist eine Sammellinse von ziemlich kleiner Brennweite f , welche zur Erzeugung vergrößerter virtueller Bilder dient. Man

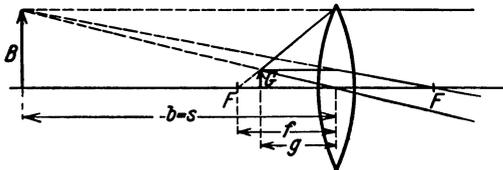


Abb. 485. Lupe.

bringt also den Gegenstand G so unter die Lupe, daß er *innerhalb* der Brennweite f liegt (Abb. 485). Das Auge wird bei der Betrachtung am wenigsten angestrengt, wenn das Bild etwa in der *deutlichen Sehweite* liegt, die beim normalen oder richtig korrigierten

Auge etwa bei $s = 25 \text{ cm}$ liegt. Zur Berechnung der Vergrößerung muß man die Frage stellen, wie sich der Winkel α , unter dem man den Gegenstand mit bloßem Auge in der Entfernung s sehen würde, zu dem Winkel β bei Anwendung der Lupe verhält. Im ersten Falle wäre $\text{tg } \alpha \approx \alpha = G/s$. Bei Betrachtung durch die Lupe ist der Winkel gegeben durch $\text{tg } \beta \approx \beta = B/s$. Es ist also die Vergrößerung $v = \beta/\alpha = B/G$. Nun ist nach § 275 $B/G = -b/g$. Da man das Auge dicht an die Lupe bringt, so ist sehr nahezu $|b| = -b = s$, also $v = s/g$. Aus $1/g - 1/|b| = 1/g - 1/s = 1/f$ folgt schließlich

$$v = 1 + \frac{s}{f}. \quad (33)$$

Dieser Ausdruck ist etwa gleich s/f , da meist die Brennweite f klein ist gegen die deutliche Sehweite s . Daher ist auch g nur sehr wenig kleiner als f .

Die gleichen Überlegungen gelten auch, wenn G nicht ein wirklicher Gegenstand, sondern das reelle Bild eines Gegenstandes ist, wie bei den *Okularen* der Fernrohre und Mikroskope. Wir kommen in § 282 auf sie zurück.

Natürlich kann man bei der Lupe (und beim Okular) auch das Auge mit in die optische Vorrichtung einbezogen denken. Dann ist die Heranziehung der virtuellen Bilder zum Verständnis der Abbildung nicht erforderlich. Vielmehr kann man dann die Lupe nebst den brechenden Gebilden im Auge als ein Linsensystem betrachten, das auf der Netzhaut des Auges ein reelles Bild des betrachteten Gegenstandes entwirft.

282. Fernrohr und Mikroskop. Das astronomische Fernrohr und das Mikroskop stimmen darin überein, daß sie aus zwei Sammellinsen bzw. Linsensystemen zusammengesetzt sind, dem *Objektiv* und dem *Okular* (Abb. 486). Wir zeichnen beide im folgenden als einfache Linsen und sehen von der Wirkung der Feldlinse (s. unten) zunächst ab. Das Objektiv entwirft ein umgekehrtes reelles Bild des Gegenstandes ein klein wenig innerhalb der Brennebene des Okulars, und dieses Bild wird durch das als Lupe wirkende Okular betrachtet. Das Auge sieht

also ein virtuelles Bild dieses ersten, reellen Bildes. Wir wollen hier zunächst für die besonderen Verhältnisse, die beim Fernrohr und beim Mikroskop vorliegen, eine gemeinsame Grundlage schaffen, indem wir den Abbildungsmaßstab γ eines solchen aus zwei Sammellinsen (oder Linsensystemen) von den Brennweiten f_1 (Objektiv) und f_2 (Okular) bestehenden Systems berechnen. Es sei G die Gegenstandsgröße, B' die Größe des vom Objektiv entworfenen reellen Bildes, B die Größe des vom Okular erzeugten virtuellen Bildes. Es seien ferner g_1 und b_1 bzw. g_2 und b_2 Gegenstands- und Bildentfernung beim Objektiv bzw. Okular, wobei der durch das Okular abgebildete „Gegenstand“ das vom Objektiv entworfene reelle Bild ist. b_2 ist, da es sich um ein virtuelles Bild handelt, negativ. Dann ist nach § 275 $B/B' = -b_2/g_2$ und $B'/G = b_1/g_1$, also der Abbildungsmaßstab

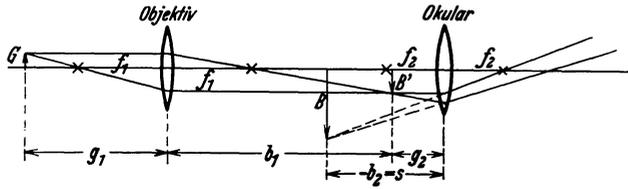


Abb. 486. System mit Objektiv und Okular.

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{B'}{G} \cdot \frac{B}{B'} = \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{-b_2}{g_2} = \gamma_1 \gamma_2. \quad (34)$$

Ferner ist nach § 275

$$\frac{b}{g} = \frac{f}{g-f} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f}.$$

Wir betrachten zunächst die Okularwirkung. Bezüglich dieser besteht beim Fernrohr und Mikroskop kein grundsätzlicher Unterschied. Wie schon bei der Lupe erwähnt, wird das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite $s = -b_2 \approx 25$ cm erzeugt, und wir erhalten für den Anteil des Okulars aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen $-b_2/g_2 = (s - f_2)/f_2$. Da stets s groß gegen f_2 ist, begnügt man sich meist mit der Näherung $-b_2/g_2 = s/f_2$. Demnach erhalten wir, je nachdem wir für das Objektiv die eine oder die andere der beiden obigen Gleichungen für b/g wählen,

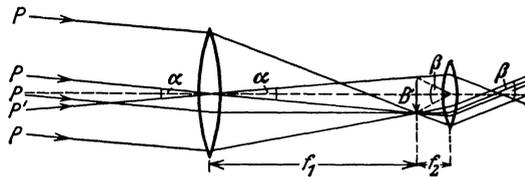


Abb. 487. Astronomisches Fernrohr.

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{f_1}{g_1 - f_1} \cdot \frac{s}{f_2} \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{B}{G} = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{s}{f_2}. \quad (35 \text{ a u. b})$$

Der wesentliche Unterschied zwischen dem astronomischen Fernrohr und dem Mikroskop besteht nun darin, daß bei ersterem $g_1 \gg f_1$, bei letzterem $b_1 \gg f_1$ ist, so daß für jenes zweckmäßig Gl. (35a), für dieses Gl. (35b) benutzt wird.

Der Strahlengang in einem *astronomischen Fernrohr* ist in Abb. 487 dargestellt. Da der Gegenstand sehr weit entfernt ist, ist er selbst nicht gezeichnet, sondern nur die Strahlen P und P' , die von den Enden des als Pfeil gedachten Gegenstandes herkommen. Nun ist $\text{tg } \alpha/2 = G/2g_1$, $\text{tg } \beta/2 = B/2(-b_2)$. Da die Winkel sehr klein sind, können wir die tg durch die Winkel ersetzen und erhalten für die Vergrößerung

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{G} \cdot \frac{g_1}{-b_2}.$$

Nunmehr wenden wir die Gl. (35a) an und vernachlässigen im Nenner f_1 gegen die sehr große Gegenstandsentsfernung g_1 . Ferner setzen wir wieder $-b_2 = s$. Dann ergibt sich

$$v = \frac{f_1}{f_2}. \quad (36)$$

Beim astronomischen Fernrohr ist also die Vergrößerung um so stärker, je größer die Brennweite des Objektivs und je kleiner die Brennweite des Okulars ist.

Diese Überlegung trifft auf die Betrachtung der Sonne, des Mondes, der Planeten oder irdischer (allerdings umgekehrt erscheinender) Gegenstände ohne

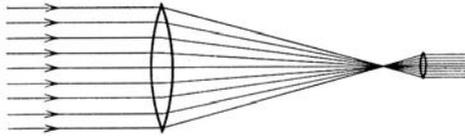


Abb. 488. Vergrößerung der Helligkeit eines Sterns durch das astronomische Fernrohr.

weiteres zu. Bei der Betrachtung von Fixsternen handelt es sich dagegen gar nicht um eine Vergrößerung, sondern lediglich um eine Erhöhung der scheinbaren *Helligkeit*. Bei der großen Entfernung der Fixsterne genügen nämlich selbst die stärksten Fernrohre nicht, um den Winkel,

unter dem sie gesehen werden, auch nur annähernd gleich r' zu machen (§ 280). Sie erscheinen daher auch bei stärkster Vergrößerung nur als Lichtpunkte oder

richtiger als kleine Beugungsscheibchen. Die Wirkung des Fernrohrs besteht vielmehr in diesem

Falle darin, daß das breite Bündel paralleler Strahlen, das, von einem fernen Stern kommend, in die große Öffnung des Objektivs eintritt, durch die Wirkung von Objektiv und Okular zu einem schmalen

Bündel von der Weite der Augenpupille zusammengedrängt wird (Abb. 488). Daher besteht die Wirkung in einer Vermehrung der Helligkeit eines

Fixsterns im Verhältnis der Fläche des Objektivs zu der des Okulars bzw. der Augenpupille. Auf diese Weise können mit großen Fernrohren noch

Sterne etwa der 18. Größe gesehen werden, während das bloße Auge im besten Falle noch Sterne

5.—6. Größe sehen kann. Das entspricht aber einem Verhältnis der Lichtstärken von 1:10000.

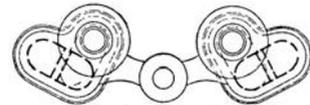


Abb. 489. Prismenfernrohr.

Das einfache astronomische Fernrohr ist für den Gebrauch an irdischen Gegenständen im allgemeinen nicht geeignet, weil es umgekehrte Bilder liefert,

was für die Astronomie gleichgültig ist. Diesen Übelstand vermeidet das *Prismenfernrohr*. Bei diesem

läuft das Licht zwischen Objektiv und Okular in der aus Abb. 489 ersichtlichen Weise über zwei totalreflektierende Prismen (Abb. 469 b),

von denen das eine eine Umkehrung des Bildes bewirkt. Das andere Prisma dient dazu, die Umkehrung der Fortschreitungsrichtung des Lichts durch das andere rückgängig zu machen.

Es bewirkt aber ferner, daß der Strahlengang seitlich verschoben wird. Das Prismenfernrohr wird meist als Doppelfernrohr benutzt, und man gewinnt durch die seitliche Verschiebung des Strahlengangs den Vorteil, daß der Abstand der beiden Objektive größer ist als der Augenabstand (Okularabstand). Ein Doppelfernrohr ohne künstlich vergrößerten Objektivabstand liefert einen falschen Eindruck von den Tiefenverhältnissen des Gesehenen, indem die Seitenvergrößerung nicht von einer entsprechenden Tiefenvergrößerung begleitet ist. Der Tiefeneindruck, den wir beim Betrachten der Umwelt erhalten, rührt von der durch den Augenabstand bedingten kleinen Verschiedenheit der in unseren beiden Augen erzeugten Bilder her (§ 284). Je näher ein Gegenstand ist, um so verschiedener sind seine beiden Bilder. Bringen wir uns die Gegen-

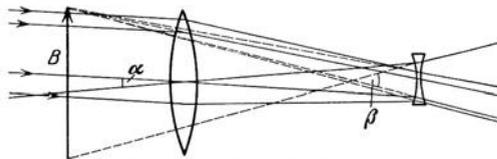


Abb. 490. Holländisches Fernrohr.

des Bildes bewirkt. Das andere Prisma dient dazu, die Umkehrung der Fortschreitungsrichtung des Lichts durch das andere rückgängig zu machen.

Es bewirkt aber ferner, daß der Strahlengang seitlich verschoben wird. Das Prismenfernrohr wird meist als Doppelfernrohr benutzt, und man gewinnt durch die seitliche Verschiebung des Strahlengangs den Vorteil, daß der Abstand der beiden Objektive größer ist als der Augenabstand (Okularabstand). Ein Doppelfernrohr ohne künstlich vergrößerten Objektivabstand liefert einen falschen Eindruck von den Tiefenverhältnissen des Gesehenen, indem die Seitenvergrößerung nicht von einer entsprechenden Tiefenvergrößerung begleitet ist. Der Tiefeneindruck, den wir beim Betrachten der Umwelt erhalten, rührt von der durch den Augenabstand bedingten kleinen Verschiedenheit der in unseren beiden Augen erzeugten Bilder her (§ 284). Je näher ein Gegenstand ist, um so verschiedener sind seine beiden Bilder. Bringen wir uns die Gegen-

stände mit dem Fernrohr scheinbar näher, so müssen wir diese Verschiedenheit auch entsprechend steigern, um die Seiten- und Tiefenverhältnisse wieder miteinander in Einklang zu bringen. Das läßt sich durch den vergrößerten Objektivabstand, der an die Stelle des natürlichen Augenabstandes tritt, erreichen.

Andere Maßnahmen zur Umkehrung des Bildes beruhen auf der Verwendung eines aus zwei Linsen bestehenden Okulars, von denen die eine vom reellen Bilde ein zweites reelles und nunmehr aufrechtes Bild erzeugt, das durch die zweite Linse als Lupe betrachtet wird (terrestrisches Fernrohr). Beim *holländischen Fernrohr* (LIPPERHEY 1608, Opernglas) kommt ein reelles Bild gar nicht erst zustande, sondern das Okular ist eine Zerstreuungslinse und liegt innerhalb der Brennweite des Objektivs, so daß in der aus Abb. 490 ersichtlichen Weise ein virtuelles Bild des Gegenstandes entsteht. Das Okular des holländischen Fernrohrs ist also keine Lupe. Jedoch gilt auch hier die Gl. (36).

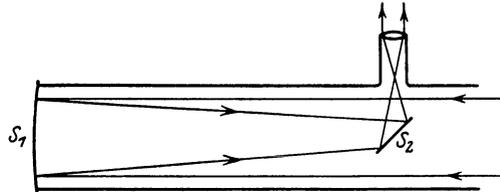


Abb. 491. Spiegelfernrohr.

Neuerdings werden im steigenden Maße wieder große astronomische Fernrohre gebaut, deren Objektiv keine Linse, sondern ein Hohlspiegel ist. Ein solches mit einem Spiegel von 5 m Durchmesser nähert sich zur Zeit in den Vereinigten Staaten seiner Vollendung. Die Spiegelfernrohre haben vor allem den Vorzug, daß durch das Objektiv keine Farbenzerlegung und keine Absorption im Ultraviolett hervorgerufen wird. Eine der Ausführungsformen eines solchen Spiegelfernrohrs zeigt Abb. 491. Das Licht, welches von einem Stern herkommt, wird von dem Hohlspiegel S_1 auf den Planspiegel S_2 geworfen und gelangt von da in das seitlich angebrachte Okular.

Das *Mikroskop* dient zur Sichtbarmachung sehr kleiner Gegenstände bzw. sehr feiner Strukturen. Es besteht aus einem Objektiv von sehr kleiner Brennweite und einem als Lupe wirkenden Okular. Der Gegenstand G wird in einer die Brennweite f_1 des Objektivs nur wenig überschreitenden Entfernung g von diesem angebracht (Abb. 492). Der größeren Deutlichkeit halber ist das Verhältnis der Brennweiten von Objektiv und Okular nicht so gezeichnet, wie es in Wirklichkeit ist. Tatsächlich ist die Vergrößerung durch das Objektiv viel stärker als die weitere durch das Okular.

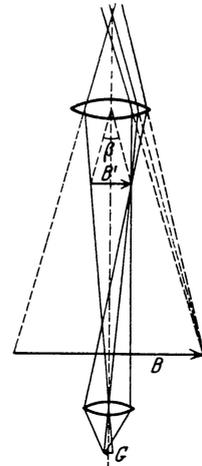


Abb. 492. Mikroskop.

Die Vergrößerung des Mikroskops ist nach einem anderen Gesichtspunkt zu beurteilen als die des Fernrohrs. Da man ja den Gegenstand zur Betrachtung mit unbewaffnetem Auge in die deutliche Sehweite bringen würde, so vergleicht man den Gesichtswinkel β , unter dem sein virtuelles Bild im Mikroskop in der deutlichen Sehweite erscheint, mit dem Winkel α , unter dem er bei unmittelbarer Betrachtung in gleicher Entfernung erscheinen würde. Diese Winkel ergeben sich aus $\text{tg } \alpha/2 = G/2s$ und $\text{tg } \beta/2 = B/2s$, so daß, da wieder α und β sehr klein sind,

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{G}.$$

Die Vergrößerung des Mikroskops ist also unmittelbar gleich dem Abbildungsmaßstab γ . Wir wenden nunmehr die Gl. (35b) an und vernachlässigen im

Zähler die sehr kleine Brennweite f_1 gegenüber der Bildentfernung b_1 , die nahezu gleich der Tubuslänge l des Mikroskops ist. Wir erhalten dann als Vergrößerung

$$v = \frac{l s}{f_1 f_2}. \quad (37)$$

Ein Fernrohr oder Mikroskop würde aber so, wie es in den Abb. 486 und 491 dargestellt ist, noch keine brauchbaren Bilder liefern. Da man ja bei ihnen mit unbewegtem Auge beobachten will, hat es keinen Zweck, ihre Okularlinse, die *Augenlinse*, größer zu machen, als die Öffnung der menschlichen Augenpupille. In eine so kleine Linse würden aber die von achsenferneren Teilen

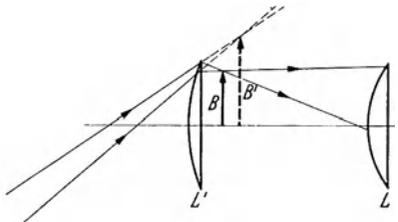


Abb. 493. Schema eines Okulars mit Feldlinse (Kollektiv).

des Gegenstandes herkommenden Strahlen nach dem Schema der Abb. 486 und 491 gar nicht gelangen, sondern sie würden seitlich daran vorbeigehen. Diesen Fehler beseitigt man durch eine *Feldlinse (Kollektiv)* L' , die ein wenig weiter von der *Augenlinse* L des Okulars entfernt ist als die Ebene, in der das reelle Bild B' entstehen würde, wenn die Feldlinse nicht vorhanden wäre (Abb. 493). Die Größe des reellen Bildes B wird dadurch in Wirklichkeit

nur wenig verändert. Der erzielte Vorteil besteht darin, daß die Strahlen nunmehr die Ebene der Augenlinse L viel näher der Achse schneiden, als wenn die Feldlinse nicht vorhanden wäre. Die Spitze des Pfeils würde ohne Feldlinse vom Auge überhaupt nicht mehr erblickt werden. (Man rechnet die Feldlinse

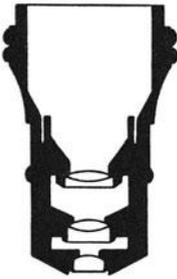


Abb. 494. Beispiel eines Mikroskop-Objektivs.

zum Okular, mit dem sie stets fest verbunden ist. In gewissem Sinne bildet sie aber eigentlich mit dem Objektiv ein Linsensystem, welches das reelle Bild B vor der Augenlinse entwirft.)

Die Objektive und Okulare der Mikroskope sind zwecks Vermeidung der Linsenfehler stets Systeme aus mehreren Linsen. Abb. 494 zeigt ein Beispiel eines Objektivs.

Sieht man mittels des Okulars eines optischen Gerätes das vom Objektiv erzeugte reelle Bild scharf, so kann man gleichzeitig *wirkliche* Gegenstände scharf sehen, welche sich in der gleichen Ebene befinden. So bringt man am Orte des reellen Bildes stets ein Blende an, eine kreisrunde Öffnung, durch welche das Gesichtsfeld scharf begrenzt wird. Viele optische Geräte besitzen am Ort des reellen Bildes eine Vorrichtung, welche es ermöglicht, einen Punkt des Bildes genau in die Achse des Gerätes einzustellen. Meist dient dazu ein Fadenkreuz aus zwei senkrecht zueinander am Ort des Bildes ausgespannten feinen Fäden oder auch aus zwei zueinander senkrechten Ritzen auf einer in der Bildebene befindlichen planparallelen Glasplatte. Man kann auch in der Bildebene eine auf Glas geritzte Teilung anbringen (Okularmikrometer), welche mit dem Bilde gleichzeitig scharf und mit ihm in gleicher Ebene liegend gesehen wird, so daß man Messungen an dem reellen Bilde vornehmen kann.

Die strenge Theorie des Mikroskops erfordert eine Berücksichtigung der Beugung (§ 293 f.). Wie schon FRAUNHOFER erkannte und HELMHOLTZ und ABBE ausführlich begründet haben, ist der kleinste Abstand zweier Punkte, die man bei stärkster Vergrößerung im Mikroskop noch getrennt sehen kann, von der Größenordnung $\delta = \lambda/n \sin \omega$. Hierin bedeutet ω den halben Öffnungswinkel des Kegels von Strahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes in das Objektiv gelangen, n den Brechungsindex des Stoffes, der den Raum zwischen Gegenstand und

Objektiv ausfüllt, λ die Wellenlänge des benutzten Lichts. Die Größe $n \sin \omega$ heißt die *numerische Apertur* des Objektivs. Befindet sich also zwischen Gegenstand und Objektiv nicht Luft, sondern ein Stoff von größerem Brechungsindex n , so wird dadurch die numerische Apertur vergrößert, also der noch auflösbare Abstand δ verkleinert. Nach ABBE benutzt man als sog. Immersionsflüssigkeit Zedernholzöl, dessen Brechungsindex gleich dem des Objektivs ist (homogene Immersion). Man erreicht dann eine numerische Apertur bis zu 1,4, bei Verwendung von Monobromnaphthalin sogar bis zu 1,6. Man kann also mit dem Mikroskop noch Strukturen auflösen, die von der Größenordnung der Wellenlänge des sichtbaren Lichts — rund $5 \cdot 10^{-5}$ cm — sind. Auch durch Anwendung kleinerer Wellenlängen λ , d. h. von ultraviolettem Licht (§ 312), kann man δ verkleinern. Doch ist man dann, da das Auge dieses Licht nicht sieht, auf photographische Aufnahmen angewiesen. Ferner muß eine Optik aus Quarz oder anderen für ultraviolettes Licht durchlässigen Stoffen verwendet werden. (Über das Ultramikroskop s. § 298.)

283. Das Auge. Der Bau des menschlichen Auges ist in seinen Hauptzügen in Abb. 495 dargestellt. Der nahezu kugelförmige Augapfel besitzt zum Eintritt des Lichts vorn die Hornhaut H , hinter der die mit einer Flüssigkeit gefüllte vordere Augenkammer Kw liegt. Es folgt die Regenbogenhaut oder Iris mit der Pupille und die Kristalllinse L . Das Innere des Auges ist mit dem gallertartigen Glaskörper G erfüllt. Die Wandung des Augapfels ist auf ihrer Innenseite von der Netzhaut N bedeckt, welche lichtempfindliche Organe enthält, die durch den Sehnerv mit dem Sehzentrum im Gehirn in Verbindung stehen. Außen liegt die Sehnenhaut S .

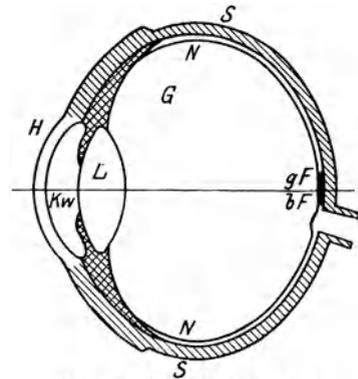


Abb. 495. Querschnitt durch das menschliche Auge.

Die Augenlinse entwirft bei richtiger Einstellung ein reelles, verkleinertes, umgekehrtes Bild der betrachteten Umwelt auf die Netzhaut. In der Achse der Augenlinse liegt die Zentralgrube (fovea centralis) oder der gelbe Fleck gF , der bei Tage empfindlichste Teil der Netzhaut, auf den wir beim Sehen das Bild desjenigen Gegenstandes fallen lassen, welchen wir genau sehen (fixieren) wollen.

Das Auge hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Lichtbildgerät. Es unterscheidet sich aber z. B. dadurch von ihm, daß die Augenlinse nicht zwecks Einstellung der richtigen Bildweite verschiebbar, sondern die Bildweite durch den Bau des Auges gegeben ist. Um daher trotz ständig wechselnder Gegenstands Entfernung scharfe Bilder zu erzielen, muß die Brennweite der Augenlinse veränderlich sein. Da ihr Brechungsindex n unveränderlich ist, kann das nur durch Änderung ihrer Krümmung geschehen. Die Linse ist daher mit einem Muskel, dem Ziliarmuskel, versehen, der ihre Krümmung zu ändern gestattet. Bei entspanntem Muskel ist ein normalsichtiges Auge auf unendlich eingestellt, sieht also ferne Gegenstände scharf. Zur Betrachtung naher Gegenstände muß der Muskel die Augenlinse krümmen. Man nennt diesen Vorgang *Akkommodation*. Er geschieht unbewußt. Bei normalen Augen bezeichnet man eine Entfernung von 25 cm als die *deutliche Sehweite*, da ein normales Auge etwa in dieser Entfernung kleinere Gegenstände (Schrift u. dgl.) bereits gut sehen kann, ohne stark akkommodieren zu müssen. Auf weniger als etwa 15 cm Abstand (*Nahepunkt*) kann ein normales Auge nicht akkommodieren. Ein kurzsichtiges, aber sonst gesundes Auge vermag dagegen noch näher

gelegene Gegenstände scharf zu sehen. Da die Gegenstände dann wegen ihrer kleineren Entfernung größer und daher deutlicher erscheinen, so bringt das Übel der Kurzsichtigkeit in diesem Falle einen Vorteil mit sich.

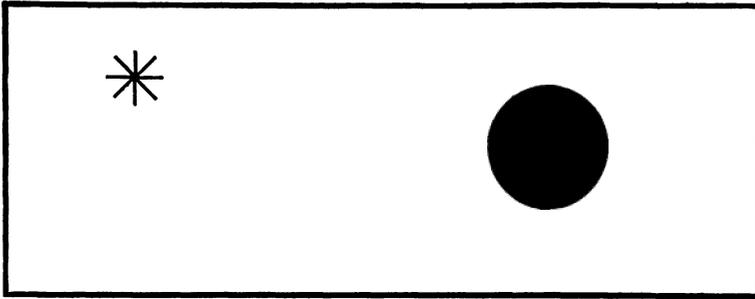


Abb. 496. Zur Erkennung des blinden Flecks.

Die Iris dient dazu, die Menge des in das Auge gelangenden Lichts zu regeln. Die Pupille bildet eine Blende, die sich von selbst mehr oder weniger öffnet, je nach der herrschenden Helligkeit.

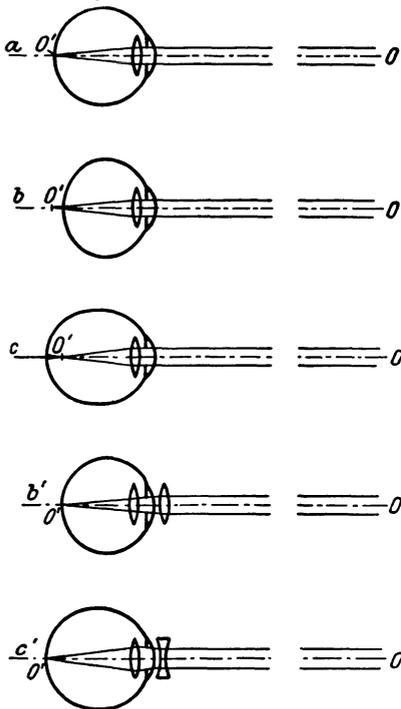


Abb. 497. a Normalsichtiges, b weitsichtiges, c kurzsichtiges Auge; b' korrigiertes weitsichtiges, c' korrigiertes kurzsichtiges Auge.

An der Eintrittsstelle des Sehnervens bF fehlen auf der Netzhaut die lichtempfindlichen Organe. Das Auge ist an dieser Stelle blind. Der blinde Fleck liegt im Bereich des Gesichtsfeldes, aber der Ausfall an dieser Stelle wird uns einerseits aus Gewöhnung, dann aber auch deshalb nicht bewußt, weil er in den beiden Augen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes liegt. Man kann den blinden Fleck mittels der Abb. 496 erkennen. Fixiert man den Stern bei geschlossenem linken Auge mit dem rechten Auge, so ist bei kleinem Abstand vom Auge der schwarze Kreis deutlich zu sehen. Entfernt man das Bild weiter, so verschwindet der Kreis, weil sein Bild auf den blinden Fleck fällt, um bei noch größerem Abstand wieder zu erscheinen.

Die Tatsache, daß uns die Außenwelt, trotz der Umkehrung des Bildes im Auge, aufrecht erscheint, enthält nichts Verwunderliches. Die Zuordnung der Lichteindrücke zu den räumlichen Gebilden hat mit der Stellung des Bildes im Auge nichts zu tun, sondern ist das Ergebnis einer in der allerersten Lebenszeit durch

gleichzeitiges Tasten und Sehen erworbenen Erfahrung. Ein Forscher hat den Versuch gemacht, längere Zeit vor den Augen Umkehrprismen zu tragen, welche das Netzhautbild umkehren, und hat nach einer Zeit der Gewöhnung mit den Prismen aufrecht gesehen. Es ist dies keine physikalische, sondern eine psychologische Angelegenheit.

Bei kurzsichtigen Augen fällt das von der entspannten Augenlinse entworfene Bild *vor* die Netzhaut, ferne Gegenstände können also nicht scharf gesehen werden. Die deutliche Sehweite ist kleiner als 25 cm. Die Linse hat also im Verhältnis zur Tiefe des Auges eine zu kleine Brennweite. Man gleicht diesen Augenfehler durch eine Brille mit Zerstreuungslinsen aus, deren negative Brechkraft die Wirkung der zu großen positiven Brechkraft der Linse aufhebt (Abb. 497c und c').

Bei weitsichtigen Augen würde das von der entspannten Augenlinse entworfene Bild *hinter* die Netzhaut fallen, die Linse hat also eine im Verhältnis zur Tiefe des Auges zu große Brennweite, und zum scharfen Sehen ferner Gegenstände ist eine Akkommodation notwendig, die das Auge fortgesetzt anstrengt. Der Nahepunkt und die deutliche Sehweite liegen weiter ab als 15 cm bzw. 25 cm. Gewöhnliche Schrift muß zum bequemen Lesen weiter ab vom Auge gehalten werden und ist dann wegen der geringeren Bildgröße schwerer zu erkennen. Das Auge wird also beim Sehen ermüdet. Dieser Fehler wird durch eine Brille mit Sammellinsen ausgeglichen, die der Augenlinse das an Brechkraft ersetzt, was ihr fehlt (Abb. 497b und b').

Anatomisch liegt der Fehler kurz- und weitsichtiger Augen meist nicht in einer fehlerhaften Brennweite der Augenlinse, sondern in einer zu großen Länge (Kurzsichtigkeit) oder zu kleinen Länge (Weitsichtigkeit) der Augennachse.

Astigmatische Augen sind solche, bei denen entweder die an der Abbildung auch beteiligte gewölbte Hornhaut oder die Augenlinse nicht genau sphärisch ist. Solche Augen können z. B. von einem System von zueinander senkrechten Strichen nur die in der einen Richtung liegenden gleichzeitig scharf sehen. Dieser Augenfehler kann durch zylindrisch geschliffene Linsen ausgeglichen werden.

284. Theorie des Sehens. Auf der Netzhaut befinden sich zwei Arten von lichtempfindlichen Organen, die *Zäpfchen* und die *Stäbchen*. Erstere dienen zum Sehen bei hellem Licht, letztere zum Sehen bei sehr schwacher Beleuchtung. Die Zäpfchen sind nicht nur überhaupt lichtempfindlich, sondern vermitteln auch die Farbeindrücke. Näheres über Farbensehen s. § 316. Die Stäbchen sind außerordentlich viel lichtempfindlicher als die Zäpfchen, aber sie sind nicht farbertüchtig.

Das Licht bewirkt eine chemische Umwandlung des in den Zäpfchen und Stäbchen enthaltenen Sehpurpurs. Die Produkte dieser Umwandlung wirken auf die in den Zäpfchen und Stäbchen endenden Nervenfasern und bewirken durch deren Vermittlung das Bewußtwerden des Lichteindrucks im Gehirn. Bei sehr starker Lichteinwirkung wird der Sehpurpur schneller verbraucht, als er neu gebildet werden kann, so daß die betroffene Netzhautstelle zeitweilig wenig oder gar nicht mehr lichtempfindlich ist. Dies ist die Ursache für die Blendung durch zu grelles Licht und für die Nachbilder, z. B. nach Betrachten der Sonne oder heller Lampen.

Bei Tageslicht sind die sehr empfindlichen Stäbchen durch Ermüdung ganz ausgeschaltet. Wir sehen bei Tage also ausschließlich mit den Zäpfchen. Bei sehr geringer Helligkeit aber erholen sich die Stäbchen nach einiger Zeit (man muß sich erst ans Dunkel gewöhnen!) und arbeiten noch, wenn die weit weniger empfindlichen Zäpfchen längst keinen Lichteindruck mehr vermitteln. Da die Stäbchen nicht farbertüchtig sind, so kann man im Dunkeln keine Farben unterscheiden („bei Nacht sind alle Katzen grau“). Die Stäbchen sind so empfindlich, daß bereits einige wenige Lichtquanten (§ 334) genügen, um bei völlig ausgeruhtem Auge einen Lichteindruck zu erzeugen.

Die Zäpfchen sind im gelben Fleck, also im Zentrum des Bildes, gehäuft vorhanden, an den anderen Stellen sind sie spärlicher. Dagegen fehlen im gelben

Fleck die Stäbchen fast ganz und sind auf den anderen Teilen der Netzhaut zahlreich. Das hat zur Folge, daß wir erstens im Dunkeln, wie man leicht beobachten kann, ein erheblich größeres Gesichtsfeld haben als bei Tage, zweitens daß wir im Dunkeln in der Mitte des Gesichtsfeldes fast ganz blind sind. Versucht man, was nach einiger Übung gelingt, bei Nacht einen Stern genau so anzuschauen, wie wir es beim Fixieren bei Tage tun würden — was wir von selbst ganz unbewußt nicht tun —, so verschwindet der Stern, weil sein Bild auf den jetzt blinden gelben Fleck fällt, ja, es gelingt sogar, den Mond zum größten Teil zum Verschwinden zu bringen.

Die Augen vermitteln uns nicht nur Licht- und Farbeindrücke, sondern auch Raumeindrücke, nicht nur das Nebeneinander, sondern auch das Hintereinander der Dinge. Letzteres verdanken wir dem Besitz zweier Augen. Wegen ihres Abstandes sehen wir mit beiden Augen nicht genau das gleiche Bild. Diese Ungleichheit wird uns aber im allgemeinen — außer bei sehr kleiner Gegenstands-entfernung — nicht bewußt. Das uns bewußt werdende Bild stammt stets nur von dem einen unserer Augen, bei der Mehrzahl der Menschen von dem rechten.

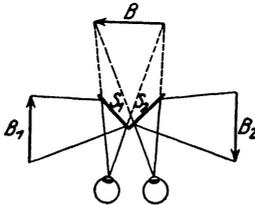


Abb. 498. Stereoskop.

Das im Unterbewußtsein bleibende Bild des anderen Auges und seine Verschiedenheit vom Bild des ersten aber sind es, die uns die Raumeindrücke vermitteln, denn bei der Betrachtung flächenhafter Gebilde sind die Bilder nicht verschieden. Einäugige Menschen vermögen Entfernungen schwer zu beurteilen.

Das Stereoskop (WHEATSTONE), von dem Abb. 498 eine einfache Ausführung zeigt, vermittelt räumliche Eindrücke mit Hilfe von Bildern. Es werden von dem gleichen Gegenstande zwei Aufnahmen von ein wenig verschiedenen Standorten aus gemacht, so daß die beiden Bilder ein wenig verschieden sind. Das geschieht mit einem doppelten Lichtbildgerät, dessen beide Objektive einen gewissen Abstand voneinander haben. Diese beiden Bilder B_1 und B_2 werden so vor die beiden Spiegel S_1 und S_2 des Stereoskops gebracht, daß jedes Auge nur eines dieser Bilder sieht, und daß die beiden Bilder am Orte B scheinbar räumlich zusammenfallen. Das Gehirn deutet den so entstehenden Eindruck in gewohnter Weise als die Folge eines räumlichen Hintereinander der dargestellten Gegenstände.

285. Dispersion. Während sich das Licht im Vakuum unabhängig von seiner Beschaffenheit (Schwingungszahl, Farbe) stets mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzt, hängt seine Geschwindigkeit in den Stoffen von seiner Schwingungszahl ab. Bei sichtbarem Licht nimmt — von Ausnahmen abgesehen (§ 309) —, die Lichtgeschwindigkeit mit wachsender Schwingungszahl, also in der Richtung von Rot über Gelb, Grün, Blau bis Violett, stetig ab. (Dabei sind mit diesen Farben hier stets die reinen Spektralfarben gemeint, § 316.) Daher nimmt nach Gl. (14) (§ 271) der Brechungsindex n in der gleichen Richtung stetig zu; rotes Licht wird am wenigsten, violettes Licht am stärksten gebrochen. Diese Erscheinung heißt *Dispersion*.

Weißes Licht kann als eine Mischung aller Spektralfarben betrachtet werden. Erfährt es eine Brechung, so werden seine Anteile verschieden stark gebrochen. Es treten, wie wir schon erwähnt haben, Farberscheinungen auf. Es sei $S\phi$ (Abb. 499) ein zur Zeichnungsebene senkrechter schmaler Spalt in einem Schirm, der von links her beleuchtet wird, und der in der Brennebene einer Linse (Kollimatorlinse) L_1 steht. Das durch den Spalt tretende Licht wird durch L_1 parallel gemacht und fällt auf ein Prisma P . Dort wird es infolge der verschieden großen Brechbarkeit seiner Anteile nach Farben zerlegt (punktiert rot, ausgezogen grün, gestrichelt violett). Nach dem mit erneuter Brechung verbundenen Austritt

aus dem Prisma fällt das Licht auf eine zweite Linse L_2 . Bis hierher sind die jeweils zur gleichen Farbe (Schwingungszahl) gehörigen Strahlen unter sich parallel geblieben. Infolgedessen werden sie auf einem in der Brennebene von L_2 befindlichen weißen Schirm zu einem Bilde des Spaltes Sp wieder vereinigt, und zwar entspricht jeder Farbe der im weißen Licht enthaltenen stetigen Farbfolge ein Spaltbild. Die stetige Folge dieser Spaltbilder, von denen in Abb. 499 nur je eines im Rot, Grün und Violett angedeutet ist, bildet ein von Rot über Gelb, Grün, Blau bis Violett verlaufendes farbiges Band, ein *kontinuierliches Spektrum*.

Man kann diese Farben auch wieder zu Weiß zusammenmischen, z. B. dadurch, daß man das Prisma sehr schnell um einen kleinen Winkel hin und her bewegt. Dann fallen die verschiedenen Farben fortgesetzt auf andere Stellen des Schirms, und ihre Mischung durch Auge und Gehirn ergibt wieder den Eindruck des Weiß. Besser noch verfährt man so, daß man an der Eintrittsstelle des Lichts in das Prisma, wo das Licht also noch weiß ist, eine Blende anbringt und hinter dem Ort des Spektrums eine Linse, mittels derer man die Blende auf einen Schirm abbildet. Hierdurch werden die von den einzelnen Punkten der Blende ausgehenden, verschiedenfarbigen Strahlen jeweils wieder in einen Punkt vereinigt, also gemischt, und bilden zusammen wieder Weiß.

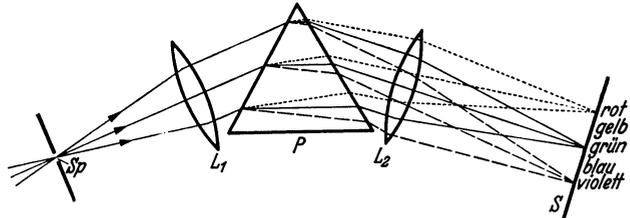


Abb. 499. Dispersion von weißem Licht.

Bringt man bei dieser Anordnung an diejenige Stelle des Spektrums, wo dieses scharf erscheint, ein spitzwinkliges Prisma, das das Licht nur ablenkt, ohne daß eine wesentliche Dispersion eintritt, und zwar so, daß nur ein Teil des im Spektrum vertretenen Lichts durch dieses Prisma hindurchgeht, so entstehen auf dem Schirm zwei Bilder der Blende nebeneinander. Jedes dieser Bilder entsteht durch eine Mischung der Farben je des einen der beiden Bereiche, in die das Spektrum durch das schmale Prisma zerlegt wurde. Sie sind daher farbig; und zwar sind die Farben der beiden Bilder zueinander komplementär (§ 316), d. h. ihre Mischung ergibt Weiß. Durch Ablendung verschiedener und verschieden großer Teile des Spektrums kann man diese Farbenpaare beliebig verändern. Die Farben des Spektrums, die *reinen Spektralfarben*, sind nicht weiter zerlegbar. Blendet man aus dem Spektrum durch einen zum ersten Spalt parallelen zweiten Spalt einen schmalen Bereich aus und bildet diesen Spalt unter Einschaltung eines Prismas durch eine Linse auf einem Schirm ab, so zeigt sich dort lediglich die durch den Spalt ausgeblendete Farbe.

Handelt es sich nicht um weißes Licht, sondern um solches, das nur einige wenige Spektralfarben enthält, so entsteht kein kontinuierliches Spektrum, sondern eine Folge getrennter Spaltbilder in den vorhandenen Farben. Wegen der Liniengestalt dieser Spaltbilder spricht man von den *Spektrallinien* in einem solchen Spektrum (§ 341 f.).

Die Dispersion in den einzelnen brechenden Stoffen ist verschieden. Schon die einzelnen Glassorten (Kronglas, Flintglas usw.) zeigen eine verschieden starke Dispersion, d. h. die verschiedenfarbigen Spektralgebiete werden beim Durchgang durch Prismen von gleichem brechenden Winkel verschieden weit voneinander getrennt.

Man kann durch Verwendung zweier Prismen aus verschiedenen brechenden Stoffen (Kronglas Kr und Flintglas Fl) Prismensysteme herstellen, bei denen

die Dispersion des ersten Prismas durch diejenige des zweiten gerade aufgehoben wird, während noch eine Ablenkung des nunmehr unzerlegten Lichts übrigbleibt (*achromatisches Prisma*, Abb. 500). Von größter Bedeutung für die praktische Optik ist aber die entsprechende Möglichkeit, durch Verwendung mehrerer Linsen aus verschiedenen brechenden Glassorten Linsensysteme herzustellen, die von den durch die Dispersion hervorgerufenen Linsenfehlern (§ 277) praktisch frei sind (*Achromate*).

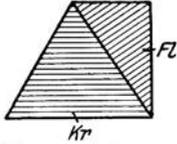


Abb. 500. Achromatisches Prisma aus Kron- und Flintglas.

Geräte zur Beobachtung von Spektren heißen *Spektrometer* oder *Spektroskope*. Die Bauart eines einfachen Spektrometers ist auf Grund von Abb. 499 ohne weiteres zu verstehen. Natürlich muß der Zutritt fremden Lichts durch Röhren, innerhalb derer die Strahlen verlaufen, und durch sonstige Maßnahmen verhindert werden. Die Linse L_2 ist das Objektiv eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs, dessen Okular so angebracht ist, daß seine Brennebene dort liegt, wo in Abb. 499 der Schirm S ist. Dann entstehen dort reelle, farbige Spaltbilder, die mit dem Okular betrachtet werden können. Zur photographischen Aufnahme von Spektren wird eine photographische Platte an die Stelle des Schirmes gebracht (*Spektrograph*).

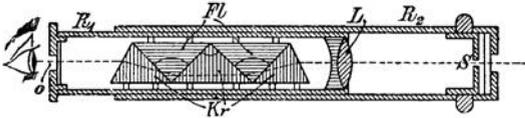


Abb. 501. Taschenspektroskop. R_1, R_2 ausziehbares Rohr, L Linse, S Spalt, Kr Kronglas, Fl Flintglas, O Okular.

welche zwar eine Dispersion zeigen, mit denen also ein Spektrum erzeugt werden kann, bei denen aber der mittlere Teil des Spektrums unabgelenkt ist. Derartige *geradsichtige Prismen* haben den großen Vorteil, daß man mit ihnen den bei

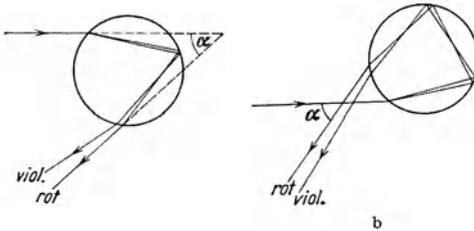


Abb. 502. Zur Entstehung des Regenbogens.

gewöhnlichen Prismen eintretenden Knick des Strahlenganges vermeidet. Sie finden z. B. bei den einfachen Taschenspektroskopen Verwendung (Abb. 501).

Ein Regenbogen entsteht durch die in den Regentropfen eintretende Brechung und Reflexion des Sonnenlichts (Abb. 502). Da die verschiedenen Farben verschieden stark gebrochen werden, so erfährt der violette Anteil des Sonnenlichts die größte, der rote Anteil die kleinste Ablenkung $360^\circ - \alpha$. Die Strahlen häufen sich bei einem Winkel α von etwa 41° , wobei die violetten Strahlen etwas mehr, die roten etwas weniger abgelenkt sind. Wir sehen daher das Licht aus denjenigen Richtungen kommen, die hierdurch und durch den jeweiligen Sonnenstand gegeben sind. Diese Richtungen bilden einen Kegelmantel. Der Regenbogen ist also ein kreisbogenförmiges Band an der von der Sonne abgekehrten Seite des Himmels (in Wahrheit kommt das Licht aus ziemlich nahen Schichten der Atmosphäre, nämlich aus den fallenden Tropfen), der die Farben des Spektrums zeigt, Rot außen, Violett innen (Abb. 502a). Durch zweimalige Reflexion in den Tropfen kann ein zweiter Regenbogen entstehen, in dem, wie man aus Abb. 502b erkennt, die Farbenfolge umgekehrt ist. Eine strenge Theorie des Regenbogens ist nur auf Grund der Wellentheorie des Lichts möglich.

III. Wellenoptik.

286. **Interferenz des Lichts.** Wir wenden uns nunmehr zu denjenigen optischen Erscheinungen, die nur auf dem Boden der Wellentheorie des Lichts beschrieben werden können (§ 262). Wir wollen dabei noch einmal betonen, daß die Bezeichnung des Lichts als elektromagnetische „Welle“ lediglich die Bedeutung hat, daß es sich um eine *periodische Störung* handelt, die sich im Raume ausbreitet, und auf die wir die Gleichungen und allgemeinen Begriffe der mechanischen Wellenlehre formal anwenden dürfen, aber nicht um periodische *Bewegungsvorgänge* im mechanischen Sinne (§ 254). Auf die besondere Art dieser periodischen Vorgänge brauchen wir aber im folgenden zunächst keine Rücksicht zu nehmen.

Für die Annahme einer Wellennatur des Lichts gibt es nur einen einzigen, aber vollkommen entscheidenden Grund, die *Interferenzerscheinungen*, welche auftreten können, wenn zwei Lichtwellen von gleicher Schwingungszahl sich im gleichen Raumpunkt überlagern. Genau wie bei den mechanischen Schallwellen hängt dann die Lichterregung in diesem Punkt von den Phasenbeziehungen zwischen den beiden Wellen ab (§ 87). Bei Phasengleichheit verstärken sie sich gegenseitig maximal, bei einer Phasendifferenz π (180°) und gleicher Intensität löschen sie sich gegenseitig vollkommen aus.

Die Interferenz des Schalles kann z. B. mit zwei genau gleich gestimmten Stimmgabeln nachgewiesen werden. Man könnte demnach vermuten, daß man Lichtinterferenzen durch ähnliche Versuche mit zwei ganz gleichen Lichtquellen hervorrufen könnte. Das ist aber nicht der Fall. Andernfalls stünde es schlimm um die künstliche Beleuchtung von Räumen. Interferenzen treten nur bei *kohärentem Licht* auf, d. h. nur dann, wenn man Licht, welches gleichzeitig von dem gleichen Punkt einer Lichtquelle ausgegangen ist, in einem Punkt des Raumes wieder zum Zusammentreffen bringt. Die Aussendung von Licht durch einen Körper beruht auf gewissen Vorgängen in den einzelnen Atomen (§ 340). Zum Zustandekommen von Interferenzen müssen zwischen den zusammentreffenden Wellenzügen während einer gegen ihre Schwingungsdauer $\tau = 1/\nu$ langen Zeit konstante Phasenbeziehungen bestehen, und das ist bei nichtkohärentem Licht nie der Fall, sondern nur bei Wellenzügen, die dem gleichen elementaren Ausstrahlungsakt ihren Ursprung verdanken.

Diese Ausstrahlungsakte verlaufen aber in sehr kurzen Zeiten, zwischen denen beim einzelnen Atom viel längere Pausen liegen. Die Atome senden also Wellenzüge von begrenzter Länge (*Interferenzlänge*) aus. Wegen der begrenzten Länge der Wellenzüge genügt daher die Herkunft zweier Strahlen von demselben Punkt einer Lichtquelle allein noch nicht. Hat der eine der beiden Wellenzüge bis zu dem Punkt, in dem Interferenz stattfinden soll, einen Weg zurückzulegen, der um mehr als die Länge eines Wellenzuges größer ist als der Weg des anderen, so finden ihre Wirkungen in diesem Punkte gar nicht gleichzeitig statt, und sie können nicht miteinander interferieren, wie das Abb. 503a schematisch andeutet. Ist die Wegdifferenz kleiner als die (von der Wellenlänge abhängige) Länge eines Wellenzuges, so tritt um so stärkere Interferenz ein, je weniger sich die beiden Wege unterscheiden.

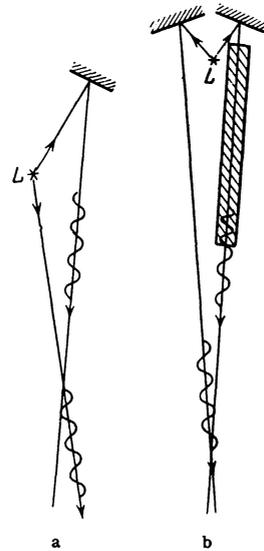


Abb. 503. Zur Interferenz von Wellenzügen.

An ihrem gemeinsamen Ursprungsort befinden sich zwei kohärente Wellenzüge naturgemäß in gleicher Phase. Auf ihren weiteren Wegen bis zum erneuten Zusammentreffen sollen sie durch zwei verschiedene Stoffe verlaufen, in denen sie die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 haben, denen also verschiedene Brechungsindizes n_1 und n_2 zukommen. Sei λ die Wellenlänge, die das betreffende Licht im Vakuum haben würde, so beträgt seine Wellenlänge in den beiden Stoffen $\lambda_1 = \lambda/n_1$ bzw. $\lambda_2 = \lambda/n_2$ (§ 271). Der bis zum erneuten Zusammentreffen zurückgelegte Weg betrage bei der ersten Welle s_1 und sei das z_1 -fache der Wellenlänge λ_1 , $s_1 = z_1\lambda_1$, bei der zweiten Welle $s_2 = z_2\lambda_2$, oder $s_1 = z_1\lambda/n_1$, $s_2 = z_2\lambda/n_2$ oder schließlich $n_1s_1 = z_1\lambda$, $n_2s_2 = z_2\lambda$. Letzteres sind aber nach § 271 die optischen Weglängen der beiden Wellen von ihrem Ursprung bis zu ihrem Wiederversammentreffen. Die Differenz der optischen Weglängen beträgt also $\delta =$

$n_1s_1 - n_2s_2 = (z_1 - z_2)\lambda$. Sollen die beiden Wellen sich maximal verstärken, also in gleicher Phase sein, so muß die Differenz der Anzahlen der auf die beiden Wege entfallenden Wellenlängen eine ganze Zahl z sein, also $z_1 - z_2 = z$. Sollen sie sich aber maximal schwächen, also eine Phasendifferenz π haben, so muß $z_1 - z_2 = z + 1/2 = (2z + 1)/2$ sein. Wir erhalten also

maximale Verstärkung, wenn $\delta = z\lambda$,

maximale Schwächung, wenn $\delta = \frac{2z + 1}{2} \lambda$.

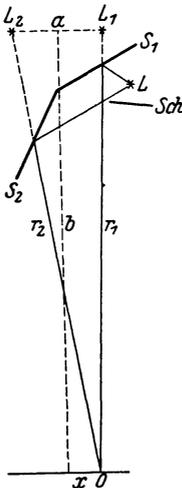


Abb. 504.
Zum FRESNELSchen
Spiegelversuch.

Maßgebend für die Interferenz ist also die Differenz δ der optischen Weglängen, der *Gangunterschied* der beiden Wellen. Bei gleicher geometrischer Weglänge kann eine Interferenz dann nicht erfolgen, wenn die Brechungsindizes der von den beiden Wellenzügen durchlaufener Wege sehr verschieden sind, so daß der eine Wellenzug gegenüber dem anderen um mehr als die Interferenzlänge zurückbleibt (Abb. 503 b). Im Vakuum ($n = 1$) ist die optische Weglänge gleich der geometrischen Weglänge und der Gangunterschied durch die Differenz der geometrischen Weglängen bestimmt.

Man unterscheidet FRESNELSche und FRAUNHOFERSche *Interferenzen*. Bei den ersteren liegt die Lichtquelle in endlicher Entfernung, und die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen sind divergent. Bei den FRAUNHOFERSchen Interferenzen liegt die Lichtquelle optisch im Unendlichen, d. h. die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen sind zunächst parallel gemacht.

287. FRESNELS Interferenzversuche. Als Quellen kohärenten Lichts benutzte FRESNEL (1821) die beiden Spiegelbilder L_1 und L_2 einer monochromatischen Lichtquelle L , die mit Hilfe zweier unter einem sehr kleinen Winkel gegeneinander geneigter Spiegel erzeugt wurden (Abb. 504). Die eigentliche Lichtquelle wurde durch einen Schirm Sch abgedeckt. Als Lichtquelle kann eine mit Natrium (Kochsalz) gefärbte Flamme dienen. Der aus dem Reflexionsgesetz berechenbare Abstand von L_1 und L_2 sei a . Bringt man in einiger Entfernung von dem Winkelspiegel eine Lupe in den Weg des von den beiden Spiegelbildern kommenden Lichts, so sieht man das Gesichtsfeld von hellen und dunklen Streifen durchzogen. Diese erklären sich durch die Interferenz des von L über L_1 und L_2 herkommenden Lichts.

Es seien r_1 und r_2 (Abb. 504) die Abstände eines Raumpunktes O vom Ort der beiden Spiegelbilder (also auch, längs des Lichtweges gerechnet, von der Lichtquelle selbst), b der senkrechte Abstand des betreffenden Punktes von a , x sein Abstand von der Mittellinie zwischen L_1 und L_2 . Dann ist

$$r_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2, \quad r_2^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2,$$

also
$$r_2^2 - r_1^2 = 2ax \quad \text{oder} \quad r_2 - r_1 = \frac{2ax}{r_2 + r_1}.$$

Da b , also auch r_1 und r_2 , groß sein sollen gegen a und x , so kann man ohne erheblichen Fehler $r_2 + r_1$ durch $2b$ ersetzen, so daß der Unterschied der beiden Lichtwege $r_2 - r_1 = ax/b$ ist. Im § 286 ist gesagt worden, daß zwei Wellen sich durch Interferenz aufheben, wenn ihr Gangunterschied δ ein ganzzahliges, ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge ist. Wir erhalten also Auslöschung des Lichtes, wenn $\delta =$

$\frac{ax}{b} = \frac{2z+1}{2} \lambda$, wobei z Null oder irgendeine ganze Zahl ist. Die Gleichung ergibt die Lage x der

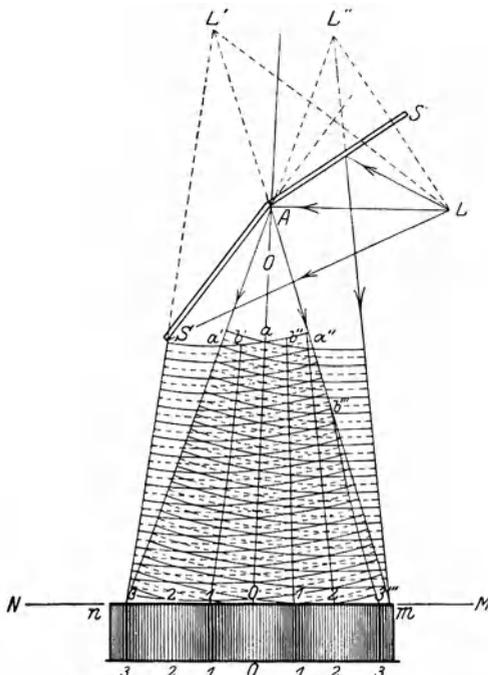


Abb. 505. Zum FRESNELSchen Spiegelversuch.

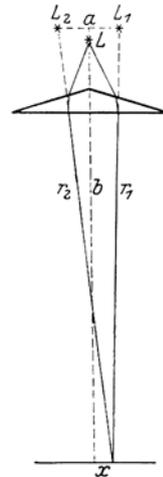


Abb. 506. FRESNELSches Doppelprisma.

einzelnen dunklen Streifen. Aus dem Abstand je zweier Streifen, $\Delta = \lambda \frac{b}{a}$, kann man λ berechnen. Abb. 505 zeigt schematisch die Lichterscheinung auf einem in den Weg des Lichts gestellten Schirm.

Ist das Licht nicht monochromatisch, so liegen die Orte, an denen Auslöschung der einzelnen in dem Licht enthaltenen Spektralfarben eintritt, nicht an gleichen Stellen. Die Lichtwirkung in jedem Punkt rührt her von allen in der Lichtquelle vertretenen Farben, abzüglich derjenigen, für die gerade Auslöschung eintritt. Es erscheinen daher in diesem Falle farbige Streifen (Mischfarben, § 316), bei Benutzung weißen Lichts Folgen von schmalen kontinuierlichen Spektren. Diese bestehen aber nicht, wie beim Prisma, aus den reinen Spektralfarben, sondern ebenfalls aus Mischfarben und entstehen durch das Fehlen der jeweils ausgelöschten Farbe im weißen Licht, d. h. man sieht in jedem Punkt die Komplementärfarbe zu der dort gerade ausgelöschten Farbe.

Statt des Winkelspiegels benutzte FRESNEL auch ein Doppelprisma (Abb. 506). Es bewirkt, wie man ohne nähere Erklärung sieht, daß das Licht der Lichtquelle L von L_1 und L_2 herzukommen scheint, liefert also, genau wie der Winkelspiegel, zwei kohärente Lichtquellen.

288. **FRAUNHOFERSche Interferenzen in einer planparallelen Platte.** Als besonders lehrreiches Beispiel soll hier der folgende Fall in allen Einzelheiten erörtert werden. Abb. 507 stelle eine dünne, planparallele Schicht von Brechungsindex n dar, auf die von außen her (aus der Luft bzw. dem Vakuum) ein Bündel paralleler, kohärenter Strahlen falle, die wir uns von einem Punkt einer unendlich fernen Lichtquelle herrührend denken können. Bei der Ausführung des Versuchs wird man die Lichtquelle in die Brennebene einer Sammellinse bringen, aus der die von den einzelnen Punkten der Lichtquelle herkommenden Strahlen parallel austreten. Es handelt sich hier also um eine **FRAUNHOFERSche Interferenzerscheinung** (§ 286). Die Dicke der Schicht sei d .

Fällt ein Strahl auf eine solche Platte, so wird von ihm ein gewisser Bruchteil an der Oberfläche reflektiert. Der Rest tritt unter Brechung in die Platte ein. An der anderen Oberfläche wird wieder ein Bruchteil ins Innere der Platte reflektiert, der Rest tritt unter Brechung aus. Der ins Innere reflektierte Anteil wird im Innern der Platte immer wieder hin- und herreflektiert, erfährt aber bei jeder Reflexion einen Verlust durch Austritt eines Teils seiner Energie nach außen.

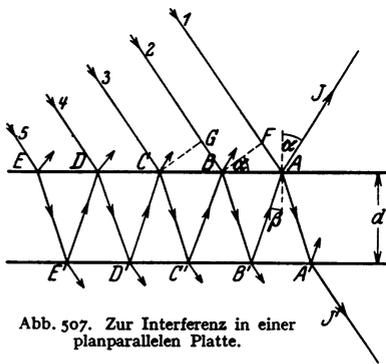


Abb. 507. Zur Interferenz in einer planparallelen Platte.

Wir betrachten jetzt den vom Punkte A ausgehenden Strahl J . Seine Energie setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen. Erstens aus dem an der Oberfläche regulär reflektierten Anteil des Strahls $\mathbf{1}$. Zu diesem kommen noch die Anteile der Strahlen $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ usw. hinzu, die nach mehrfachen Reflexionen im Innern der Platte den Punkt A erreichen und dort austreten. Die in der Richtung des Strahls J auftretende Lichtintensität hängt

von den Phasenbeziehungen der Anteile der Strahlen $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ usw., die bei A austreten, ab. Wir wollen zunächst nur die Anteile der Strahlen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{2}$, ohne Rücksicht auf ihre Intensitäten, ins Auge fassen. Diese beiden Strahlen sind in der Ebene BF in gleicher Phase. Sie haben aber bis zum Punkte A verschiedene optische Wege zu durchlaufen, so daß in A und daher auch im Strahle J zwischen ihnen ein Gangunterschied besteht, von dessen Größe es abhängt, ob sie sich im Strahle J gegenseitig verstärken oder schwächen. Die optische Weglänge des aus dem Strahl $\mathbf{1}$ stammenden Anteils von der Ebene BF bis A ist gleich der Strecke FA , diejenige des Anteils des Strahls $\mathbf{2}$ gleich der Strecke $BB' + B'A$, multipliziert mit dem Brechungsindex n der Platte. Ferner ist aber folgendes zu beachten: Ein Strahl erleidet bei der Reflexion an einem optisch dichteren Stoff einen *Phasensprung* um den Betrag π , also die gleiche Änderung seiner Phase, die er beim Durchlaufen eines Weges von der Länge $\lambda/2$ erfahren würde. Die Phase des Anteils des Strahls $\mathbf{1}$ ist also gegenüber der Phase im Punkte F nach der Reflexion in A so verändert, als habe der Strahl nicht nur den Weg FA , sondern den Weg $FA + \lambda/2$ durchlaufen. Bei der Reflexion an einem optisch dünneren Mittel tritt ein solcher Phasensprung nicht auf. (Vgl. die Reflexion an einem festen und einem freien Ende, § 87.)

Aus der Abb. 507 liest man leicht ab, daß $AB = 2d \operatorname{tg} \beta$ und $FA = AB \sin \alpha$, so daß die optische Weglänge (zuzüglich des Phasensprungs) des aus dem Strahl $\mathbf{1}$ stammenden Anteiles auf dem Wege FA gleich $s_1 = 2d \sin \alpha \operatorname{tg} \beta + \lambda/2$ ist, oder da nach dem Brechungsgesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$,

$$s_1 = \frac{2n d \sin^2 \beta}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{Ia})$$

Wir gehen jetzt zu dem in J vorhandenen Anteil des Strahls 2 über. Seine geometrische Weglänge ist gleich $BB' + B'A = 2d/\cos\beta$, seine optische Weglänge auf dem Wege BA daher gleich

$$s_2 = \frac{2nd}{\cos\beta}. \quad (1b)$$

Demnach beträgt der Gangunterschied dieser beiden Strahlenteile

$$\delta = s_2 - s_1 = 2nd \cos\beta - \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Wir erhalten also nach § 286, wenn wir noch gemäß dem Brechungsgesetz $n \cos\beta = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$ setzen

$$\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \begin{cases} \left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2d} & \text{(maximale Verstärkung)} \\ z \frac{\lambda}{2d} & \text{(maximale Auslöschung).} \end{cases} \quad (3)$$

$(z = 0, 1, 2 \dots)$

Hieraus lassen sich die Einfallswinkel α berechnen, bei denen einer dieser beiden Grenzfälle eintritt. Die zwischen diesen Werten von α liegenden Einfallswinkel ergeben Übergänge zwischen diesen beiden Grenzfällen.

Wir betrachten nunmehr noch den Anteil des Strahls 3. Für den Gangunterschied, den er in A gegenüber dem Anteil des Strahls 2 hat, gelten genau die gleichen Überlegungen, die wir soeben bezüglich der Anteile der Strahlen 1 und 2 angestellt haben. Der Unterschied der geometrischen Wege ist in beiden Fällen genau der gleiche, und so würde auch der in A auftretende Gangunterschied dieser beiden Strahlenteile genau der gleiche sein, wie für die Strahlen 1 und 2, wenn nicht in diesem Falle der Phasensprung um den Betrag π fortfiel, weil keiner der beiden Strahlenteile je am optisch dichteren Medium reflektiert wird. Hierdurch verschieben sich die Verhältnisse, wie man ohne weiteres sieht, derart, daß die Strahlen 2 und 3 sich bei denjenigen Einfallswinkeln α , bei denen sich die Strahlen 1 und 2 gegenseitig maximal verstärken, gerade maximal schwächen, und umgekehrt. Eine wesentliche Änderung der oben betrachteten Verhältnisse tritt jedoch hierdurch nicht ein, denn in allen praktisch in Betracht kommenden Fällen ist die Energie im Strahlenteil 2 von J sehr viel größer als die im Strahlenteil 3, so daß die Schwächung bzw. Verstärkung des Strahls 2 durch den Strahl 3 nur äußerst geringfügig ist. Betrachten wir noch die Wirkung der weiteren Strahlen 4, 5 usw., so zeigt eine einfache Überlegung, daß sich in dem Falle, daß der Anteil des Strahls 2 den Anteil des Strahls 1 maximal verstärkt, dies auch die Anteile der Strahlen 4, 6, 8 usw. tun, während die Anteile der Strahlen 3, 5, 7 usw. den Anteil des Strahls 1 in J schwächen. Bei denjenigen Einfallswinkeln α aber, bei denen der Anteil des Strahls 2 den Anteil des Strahls 1 in J maximal schwächt, wirken auch die Anteile der Strahlen 3, 4, 5 usw. alle schwächend auf den Anteil des Strahls 1, unterstützen also die Interferenzwirkung des Strahls 2. Allerdings beruht die Hauptwirkung stets auf dem Anteil des Strahls 2, da die Intensitäten der verschiedenen Anteile sehr schnell abnehmen. (Näheres über die Intensitätsfragen s. § 289.)

Die in der Abb. 507 nicht gezeichneten, zwischen den Strahlen 1, 2, 3 usw. verlaufenden parallelen Strahlen, erzeugen in den übrigen Punkten der Oberfläche der planparallelen Platte entsprechende Erscheinungen. Es gehen also von der Platte parallel zu J Strahlen aus, in denen sich die einzelnen Anteile, aus denen sie entstehen, je nach der Größe des Einfallswinkels α mehr oder weniger stark schwächen oder verstärken. Bringt man in den Weg dieser parallelen Strahlen eine Linse, so werden diese Strahlen in deren Brennpunkt

vereinigt, und in diesem tritt Helligkeit oder Dunkelheit auf, je nachdem die Bedingungen für Verstärkung oder Schwächung erfüllt sind. Das gleiche erkennt man durch Beobachtung mit dem Auge. Kommt das Licht von einer ausgedehnten Lichtquelle, deren Strahlen vor dem Einfall durch eine Linse parallel gemacht sind, so fallen die von den einzelnen Punkten dieser Lichtquelle herkommenden parallelen Strahlen unter verschiedenen Einfallswinkeln auf die Platte. Das von der zweiten Linse entworfene Bild der Lichtquelle ist dann von hellen und dunklen Streifen durchzogen. Jedes Maximum oder Minimum der Helligkeit rührt von Strahlen her, die unter dem gleichen Einfallswinkel auf die Platte fielen. Man spricht daher in diesem Falle von *Interferenzen gleicher Neigung*.

Ist das von der Lichtquelle kommende Licht nicht einfarbig, sondern enthält es Licht verschiedener Wellenlängen, so ergeben sich auch für die einzelnen Farben verschiedene Einfallswinkel α für maximale Verstärkung und Auslöschung. Benutzen wir z. B. weißes Licht, das eine stetige Folge von Wellenlängen enthält, so sind in einer bestimmten Richtung jeweils nur bestimmte Wellenlängen maximal ausgelöscht bzw. maximal verstärkt. Daß dies in der gleichen Richtung für mehr als eine Wellenlänge eintreten kann, rührt daher, daß ja die Zahl z jeden beliebigen ganzzahligen Wert annehmen kann bzw. daß durch den Betrag von α noch nicht die maximal verstärkte oder geschwächte Wellenlänge λ , sondern die Größe $(z + \frac{1}{2}) \lambda / 2d$ (maximale Verstärkung) bzw. $z \lambda / 2d$ (maximale Schwächung) gegeben ist. Daraus ergibt sich für jeden Wert von z (der *Ordnungszahl* der Interferenz) ein anderer Wert von λ . Nun kann man aus Gl. (3) leicht herleiten, daß z bei maximaler Auslöschung den Betrag $\sqrt{n^2 - 1} \cdot 2d / \lambda$ nicht unterschreiten kann, so daß z mindestens von der Größenordnung von d/λ ist. Ist also die Dicke der Platte groß gegen die vorkommenden Wellenlängen, so ist z auch groß, und diejenigen Wellenlängen, die bei einem bestimmten Einfallswinkel α maximal geschwächt werden, sind einander sehr nahe benachbart, z. B. im Falle, daß der Mindestwert von z etwa gleich 1000 ist ($d \approx 1$ mm). Dann ergeben sich, wenn wir $z = 1000, 1001, 1002$ usw. setzen, bei gegebenen d und α Werte von λ , die sich nur sehr wenig unterscheiden. Ebenso ergibt sich dann auch, daß für die gleiche Wellenlänge benachbarte Winkel maximaler Auslöschung nur äußerst wenig voneinander verschieden sind, so daß der kleine Winkelunterschied eine Auflösung durch das Auge nicht mehr zuläßt (§ 280). In dem von uns hier behandelten Fall erscheint dann also eine flächenhafte, überall gleichmäßig leuchtende Lichtquelle dem Auge auch im reflektierten Lichte gleichmäßig leuchtend. Deshalb treten Interferenzstreifen bei einer gegen die Wellenlänge des Lichts großen Plattendicke in unserem Fall nicht auf, sondern nur dann, wenn die Dicke so gering ist, daß sie mit der Wellenlänge des Lichts vergleichbar ist.

Wird eine sehr dünne Schicht mit weißem Licht beleuchtet, so fallen in jeder Richtung gewisse Wellenlängen (Farben) durch Interferenz aus. Betrachtet man einen Punkt der Oberfläche einer solchen Schicht, so fehlen diese Farben in dem dort reflektierten Licht. Dieses zeigt daher durch Mischung des nicht ausgelöschten Restes, der vom weißen Licht nach Ausfall des ausgelöschten Anteils übrig bleibt, die Komplementärfarbe des ausgelöschten Anteils. Da man die einzelnen Punkte der Oberfläche einer solchen Schicht unter verschiedenen Winkeln sieht, so wechselt die Wellenlänge der ausgelöschten Farbe und damit die Farbe des ins Auge gelangenden Lichts von Ort zu Ort. Die Schicht schillert in allen möglichen Farben (*Farben dünner Blättchen*). Das bekannteste Beispiel dieser Art sind die Seifenblasen. Auch die schillernden Farben von Ölschichten und von dünnen Oxydschichten auf Metallen (Anlaßfarben) haben den gleichen Ursprung.

Besondere Erscheinungen treten bei *sehr* geringen Schichtdicken auf. Ist die Dicke d merklich kleiner als die Wellenlänge λ , so wird der Gangunterschied δ der interferierenden Strahlenteile fast ausschließlich durch den Phasensprung des einen unmittelbar reflektierten Strahls um π (s. oben) bewirkt, und ist vom Einfallswinkel praktisch unabhängig. In diesem Falle besteht also stets ein Gangunterschied $\lambda/2$, und es erfolgt stets und unabhängig von Einfallrichtung und Farbe Auslöschung. Daher verschwindet die Interferenzerscheinung, auch die Farbe dünner Blättchen, bei Schichtdicken, die die Wellenlänge des Lichts merklich unterschreiten. Läßt man eine in einen runden Metallrahmen gespannte Seifenlamelle schnell um die zu ihrer Fläche senkrechte Achse rotieren, so wird sie infolge der Zentrifugalkraft und der Verdunstung in der Mitte allmählich dünner, der Abstand der farbigen Ringe, die ständig ihre Farbe wechseln, immer größer. Schließlich verschwinden in der Mitte die Farben, und es bildet sich ein scharf begrenzter farbloser Kreis, der im reflektierten Licht schwarz erscheint (*schwarzer Fleck*). Bringt man jetzt die Lamelle zum Stillstand, so löst sich der Fleck in zahlreiche kleine schwarze Flecke auf, die eine merkwürdige Beständigkeit zeigen und sogar dazu neigen, von selbst weiterzuwachsen.

Bisher haben wir nur das von einer dünnen Schicht *reflektierte* Licht auf Interferenzerscheinungen untersucht. Wir gehen nunmehr zu denjenigen Anteilen der Strahlen 1, 2, 3 usw. über, die im Punkte A' (Abb. 507) aus der Platte *austreten*. Auf Grund der vorstehenden Überlegungen können wir die im Strahl J' herrschenden Verhältnisse leicht ohne weitere Rechnung ermitteln. Der Strahl J' setzt sich aus Anteilen aller Strahlen 1, 2, 3 usw. zusammen, und zwar aus solchen, die mehr oder weniger häufig im Innern der Platte reflektiert worden sind. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß der Gangunterschied der von je zwei benachbarten einfallenden Strahlen herrührenden Anteile im Punkte A' genau ebenso groß ist, wie bei zwei benachbarten Strahlen im reflektierten Strahl J , abgesehen von den beiden Strahlanteilen 1 und 2. Denn bei dem reflektierten Strahlanteil 1 ist eine Reflexion am optisch dichteren Medium im Spiel. Eine solche findet aber bei den durch die Platte hindurchtretenden Anteilen nirgends statt. Die Strahlanteile, die den austretenden Strahl J' bilden, verhalten sich also so zueinander wie die Strahlanteile, die den Strahl J bilden, unter Fortlassung des reflektierten Strahls 1. Nun haben wir oben gesehen, daß sich im Falle maximaler Verstärkung in der Reflexion die Strahlen 2, 3, 4 usw. paarweise schwächen, indem sich zwar die geradzahigen Strahlanteile in J gegenseitig verstärken, und ebenso die ungeradzahigen — vom Strahlanteil 1 abgesehen — diese beiden Gruppen sich aber gegenseitig schwächen. Das gleiche muß also in diesem Falle auch im durchgelassenen Strahl der Fall sein. Haben wir demnach maximale Verstärkung im reflektierten Strahl, so haben wir gerade maximale Schwächung im durchgehenden Strahl. Tritt aber im reflektierten Strahl J maximale Schwächung ein, so wirken, wie wir oben gesehen haben, die Strahlen 2, 3, 4 usw. sämtlich gleichsinnig und schwächen alle den Strahlanteil 1. Im durchgehenden Anteil wirken deshalb jetzt alle Strahlanteile gleichsinnig, d. h. sie verstärken sich maximal. Daraus folgt, daß die Lichtwirkung im durchgehenden Strahl bei denjenigen Einfallswinkeln ein Maximum hat, bei denen sie im reflektierten Strahl ein Minimum hat, und umgekehrt. Diese Tatsache könnte an sich schon daraus gefolgert werden, daß die einfallende Energie doch restlos wieder aus der Platte austreten muß, da nirgends Lichtenergie verloren geht. Je weniger Licht also im reflektierten Anteil enthalten ist, um so mehr Licht muß im durchgehenden Anteil enthalten sein. Auch im durchgehenden Licht treten Farberscheinungen nur bei sehr dünnen Platten auf.

Bei den vorstehenden Überlegungen war vorausgesetzt worden, daß die betrachtete Platte einen höheren Brechungsindex als ihre Umgebung hat. Grundsätzlich ändert sich nichts, wenn es sich um eine planparallele Schicht eines Stoffes handelt, der in einen Stoff von höherem Brechungsindex eingebettet ist. Dieser Fall liegt z. B. bei einer Luftschicht vor, die von zwei parallelen, ebenen Glasflächen begrenzt wird. Wie man leicht feststellen kann, tritt in diesem Falle in Gl. (3) an die Stelle von n der reziproke Wert $1/n$, wobei n jetzt den Brechungsindex des die Luftschicht begrenzenden Glases bedeutet. Die Abb. 507 wäre dahin abzuändern, daß die Strahlen beim Eintritt in die Luftschicht vom Einfallslot weggebrochen, beim Austritt zum Einfallslot hingebrochen werden. Außerdem sind jetzt alle Reflexionen *im Innern* der Luftschicht solche am optisch dichteren Medium. Alle Folgerungen aber bleiben erhalten.

289. Intensitätsverhältnisse bei der Interferenz an planparallelen Platten.

Wir wollen nunmehr die Intensitäten in den Strahlen J und J' berechnen und diese Intensitäten ebenfalls mit den Buchstaben J und J' bezeichnen. Die einfallenden Strahlen 1, 2, 3 usw. sollen alle die gleiche Intensität J_0 haben. Wir bezeichnen denjenigen Bruchteil der Intensität eines Strahls, der jeweils an einer der Grenzflächen reflektiert wird, mit ρ . Dieser Bruchteil (Reflexionskoeffizient) ist für beide Grenzflächen gleich groß. Der durch die Fläche hindurchtretende Bruchteil beträgt alsdann $1 - \rho$. Betrachten wir als Beispiel den Strahl 2. Seine Intensität beträgt ursprünglich J_0 . Im Punkte B geht durch Reflexion in Richtung des kurzen Pfeils (Abb. 507) die Intensität $J_0 \rho$ verloren. Der in die Platte eintretende Strahlanteil hat nur noch die Intensität $J_0 (1 - \rho)$. Er erfährt bei der Reflexion bei B' eine weitere Schwächung auf den Bruchteil ρ und hat daher auf dem Wege $B'A$ nur noch die Intensität $J_0 (1 - \rho) \rho$. Bei A tritt eine erneute Schwächung dieses Anteils ein, da von ihm nur der Bruchteil $1 - \rho$ austritt. Im Strahl J ist daher von dem Strahl 2 nur noch der Betrag $J_0 (1 - \rho)^2 \rho$ von der ursprünglichen Intensität J_0 übriggeblieben. In entsprechender Weise findet man leicht die Intensitäten, mit denen die einzelnen, aus den Strahlen 1, 2, 3 usw. stammenden Anteile in die Strahlen J und J' eintreten. Wir wollen sie mit J_1, J_2, J_3 usw. J'_1, J'_2, J'_3 bezeichnen. Es ergibt sich dann:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= J_0 \rho, & J_2 &= J_0 (1 - \rho)^2 \rho, & J_3 &= J_0 (1 - \rho)^4 \rho^3, & J_4 &= J_0 (1 - \rho)^6 \rho^5 \text{ usw.} \\ J'_1 &= J_0 (1 - \rho)^2, & J'_2 &= J_0 (1 - \rho)^4 \rho^2, & J'_3 &= J_0 (1 - \rho)^6 \rho^4, & J'_4 &= J_0 (1 - \rho)^8 \rho^6 \text{ usw.} \end{aligned} \right\} (4)$$

Nun folgt aus der elektromagnetischen Theorie des Lichts, daß man in dem hier vorliegenden Falle der Kohärenz die Intensität der Strahlen J und J' nicht durch Addition der Intensitäten der Strahlen 1, 2, 3 usw. erhält, sondern man muß die Wurzeln aus den Einzelintensitäten bilden und diesen Wurzeln je nachdem ob sie den stärksten vorhandenen Strahlanteil verstärken oder schwächen, positives oder negatives Vorzeichen geben. Alsdann erhält man die resultierende Intensität, indem man die Summe dieser Wurzeln quadriert. (Die Erklärung hierfür liegt darin, daß die Lichtintensität dem Quadrat der Schwingungsweite des Lichts proportional ist. Um die Summe der Intensitäten mehrerer Lichtschwingungen zu finden, muß man aber zunächst ihre Schwingungsweiten addieren. Die Gesamtintensität ist dann dem Quadrat der Summe proportional.) Hiernach ergeben sich die Intensitäten J und J' folgendermaßen. (Dabei nehmen wir jetzt die Zahl der einfallenden Strahlen als unendlich groß an.)

I. Maximale Verstärkung im reflektierten Strahl. Wie in § 288 ausgeführt, verstärken die Strahlanteile 2, 4, 6 usw. den Strahlanteil 1 in J , die Strahlanteile 3, 5, 7 usw. schwächen ihn. Es ist demnach

$$\begin{aligned} J &= (\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2} - \sqrt{J_3} + \sqrt{J_4} - \sqrt{J_5} + \dots)^2 \\ &= J_0 \rho [1 + (1 - \rho) (1 - \rho + \rho^2 - \rho^3 + \dots)]^2 = J_0 \frac{4 \rho}{(1 + \rho)^2}. \end{aligned}$$

Im Strahl J' verstärken sich die Strahlenteile 1, 3, 5 usw. und 2, 4, 6 usw. unter sich, aber diese beiden Gruppen wirken einander entgegen, daher ist

$$\begin{aligned} J' &= (\sqrt{J'_1} - \sqrt{J'_2} + \sqrt{J'_3} - \sqrt{J'_4} \dots)^2 \\ &= J_0 (1 - \varrho)^2 (1 - \varrho + \varrho^2 - \varrho^3 + \dots) = J_0 \left(\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho} \right)^2. \end{aligned}$$

Man stellt leicht fest, daß $J + J' = J_0$ ist. Das ist auch zu erwarten, da keine Energie verloren geht, und da, wenn wir alle von der Platte ausgehenden Strahlen berücksichtigen, auf jeden einfallenden Strahl je ein reflektierter und ein durchgehender Strahl entfällt.

II. *Maximale Schwächung im reflektierten Strahl.* Hier wirken, wie in § 288 ausgeführt, in J die Strahlenteile 2, 3, 4 usw. sämtlich dem Strahlenteil 1 entgegen. Daher ist jetzt

$$\begin{aligned} J &= (\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2} - \sqrt{J_3} - \sqrt{J_4} - \dots)^2 \\ &= J_0 \varrho [1 - (1 - \varrho) (1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \dots)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Im Strahl J' wirken alle Strahlenteile gleichsinnig und es ergibt sich

$$\begin{aligned} J' &= (\sqrt{J'_1} + \sqrt{J'_2} + \sqrt{J'_3} + \sqrt{J'_4} + \dots)^2 \\ &= J_0 (1 - \varrho)^2 (1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \dots)^2 = J_0. \end{aligned}$$

Es tritt also in diesem Falle vollkommene Auslöschung in der Reflexion ein, und die gesamte einfallende Intensität findet sich im durchgehenden Licht wieder. Man sieht aus den vorstehenden Gleichungen, daß die reflektierte Intensität je nach dem Einfallswinkel zwischen den Bruchteilen $4\varrho/(1 + \varrho)^2$ und 0 der einfallenden Intensität J_0 schwankt. Der relative Intensitätsunterschied ist also sehr groß, genau gesagt unendlich groß. Im durchgehenden Licht hingegen verhalten sich die Intensitäten in den beiden Grenzfällen wie $\left(\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho} \right)^2$. Nun ist ϱ in den meisten praktisch in Frage stehenden Fällen eine sehr kleine Zahl, z. B. für Glas etwa gleich 0,025. Demnach schwankt J etwa zwischen den Intensitäten 0 und $0,1 \cdot J_0$, J' zwischen den Intensitäten $0,9 \cdot J_0$ und J_0 . Gegenüber dem Wechsel zwischen Helligkeit und vollständiger Dunkelheit im reflektierten Licht zeigt also das durchgehende Licht in dem gedachten Falle nur eine maximale Schwankung um etwa 10%. Die Interferenzerscheinung ist daher im reflektierten Licht weit stärker ausgeprägt als im durchgehenden Licht. Das ist z. B. bei einer Seifenlamelle zu sehen. Sie zeigt ihre Interferenzfarben nur im reflektierten Licht deutlich. Im durchgehenden Licht erscheint sie nahezu farblos.

Wie man aus der Gl. (4) erkennt, ist bei kleinen Werten von ϱ der Strahl J_2 der einzige, dessen Intensität von der gleichen Größenordnung ist, wie die des Strahles J_1 . Es ist daher auch ganz überwiegend der Strahl J_2 , der durch sein Zusammenwirken mit dem Strahl J_1 die betrachteten Interferenzerscheinungen bewirkt. Aus diesem Grunde kann man sich im allgemeinen bei der Betrachtung derartiger Erscheinungen mit diesen beiden Strahlen begnügen und das Vorhandensein der weiteren schwachen Strahlenteile vernachlässigen.

290. **FRESNELSche Interferenzen an einer planparallelen Platte.** Wir betrachten nunmehr den Fall, daß die Lichtquelle in endlicher Entfernung von einer planparallelen Platte liegt, die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen also divergent auf die Platte fallen. L sei eine punktförmige Lichtquelle bzw. ein Punkt einer ausgedehnten Lichtquelle (Abb. 508). Wir wollen nun das von einem Punkte A der oberen Fläche der Platte ausgehende, von L herrührende Licht betrachten. Wir sehen, daß in dem von A ausgehenden

Licht Anteile ganz bestimmter Strahlen 1, 2, 3 usw. enthalten sind, die infolge von Reflexion bzw. Brechung im Innern der Platte auf dem Wege von L nach A verschieden lange optische Wege zurückgelegt haben, also Gangunterschiede besitzen, ähnlich wie wir dies bei dem Fall parallelen Lichts besprochen haben. Aber diese Strahlanteile vereinigen sich nicht wie im letzteren Fall zu einem einzigen Strahl, sondern bilden ein Strahlenbündel von endlicher Öffnung. Blicken wir auf den Punkt A , so vereinigen sich diese Strahlen auf der Netzhaut zu einem Bilde des Punktes A , und dieses Bild erscheint hell oder dunkel je nach den Phasenbeziehungen (Gangunterschieden) in den von A ausgehenden Anteilen der Strahlen 1, 2, 3 usw. Im Punkte A , in dem sich die betrachteten Strahlen schneiden, findet tatsächlich Interferenz statt, genau wie bei den sich schneidenden Strahlen im Falle des FRESNELSchen Spiegelversuchs (§ 287).

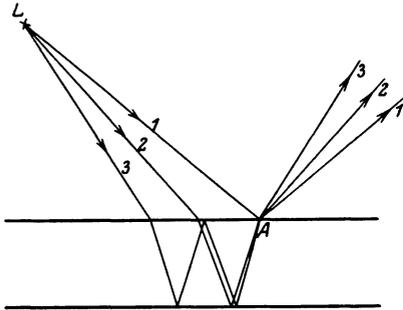


Abb. 508. FRESNELSche Interferenzen an einer planparallelen Platte.

Aus dem am Schluß von § 289 angegebenen Grund genügt es, wenn wir nur die Wirkung der Strahlen 1 und 2 betrachten. Solange die Entfernung der Lichtquelle groß bleibt gegen die Dicke der Platte, ergeben sich dann für die in A

auf tretende Interferenzerscheinung genau die gleichen Bedingungen wie bei parallel einfallendem Licht im reflektierten Strahl [§ 288, Gl. (3)].

Handelt es sich um eine ausgedehnte Lichtquelle, so wird bei gegebener Stellung des betrachtenden Auges das von ihren einzelnen Punkten herrührende

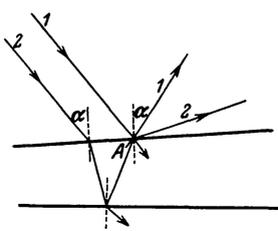


Abb. 509. Zur Interferenz in einer keilförmigen Schicht.

Licht unter verschiedenen Einfallswinkeln α auf die Platte fallen. Betrachtet man daher die Platte, so wechseln auf ihr Stellen, an denen das auffallende Licht durch Interferenz ausgelöscht wird, mit solchen ab, an denen Verstärkung stattfindet, je nach dem für die betreffende Stelle durch die gegenseitige Stellung der Lichtquelle, des Auges und der Platte gegebenen Winkel α .

Der bei einer solchen Interferenzerscheinung erzeugte Sinneseindruck ist ein doppelter. Richtet man die Aufmerksamkeit auf die Lichtquelle selbst, indem man auf ihr Spiegelbild in der Platte akkommodiert, so sieht man dieses Spiegelbild an der durch das Reflexionsgesetz bestimmten Stelle hinter der Platte, aber im Falle einer monochromatischen Lichtquelle durchzogen mit dunklen Streifen. Diese jedoch liegen nicht am Ort der Lichtquelle, sondern in der Platte, denn der Ort, an dem die Interferenz stattfindet, von dem aus die interferierenden Strahlen in unser Auge divergieren, liegt ja in der Plattenoberfläche. Daß die Interferenzerscheinung tatsächlich in der Platte selbst liegt, erkennt man am deutlichsten daran, daß man auf sie bei zu kleiner Augentfernung nicht mehr akkommodieren kann, während man das Spiegelbild der entfernteren Lichtquelle noch scharf sieht.

Bei nichtmonochromatischen Lichtquellen, insbesondere bei weißem Licht, ergeben sich wieder Farberscheinungen, die denjenigen, die in § 288 besprochen wurden, entsprechen.

291. Interferenzen an keilförmigen Schichten. NEWTONSche Ringe. Auf eine schwach keilförmige, von zwei ebenen Flächen begrenzte dünne Schicht eines brechenden Stoffes falle paralleles Licht (Abb. 509). Wir betrachten einen

Punkt A an der Oberfläche dieser Schicht. Sehen wir von Strahlen, die mehr als eine Reflexion im Innern der Schicht erlitten haben, ab (vgl. die Bemerkung am Schluß von § 289), so treten bei A nur Anteile von zwei ganz bestimmten Strahlen 1 und 2 des einfallenden Strahlenbündels aus, nämlich ein unmittelbar reflektierter Anteil von 1 und ein zweimal gebrochener und einmal im Innern reflektierter Anteil des Strahls 2. Wegen der Keilform der Schicht verlaufen diese beiden Strahlanteile nicht wie im Fall der planparallelen Schicht und parallelen einfallenden Lichts in der gleichen Richtung, sondern divergieren von A aus. Es treten also im reflektierten Licht Erscheinungen auf, die denen bei einer planparallelen Platte bei endlicher Entfernung der Lichtquelle gleichen (§ 290). Man sieht, daß die beiden Strahlen im Punkt A interferieren und einander je nach ihren Phasenbeziehungen (ihrem Gangunterschied) gegenseitig verstärken oder schwächen. Der Ort der Interferenzerscheinung liegt also in der Schichtoberfläche.

Bei geringer Dicke des Keils und kleinem Keilwinkel gelten auch hier für das Auftreten von Helligkeit oder Dunkelheit im Punkt A die gleichen Bedingungen wie bei einer Planplatte [Gl. (3), § 288]. Da sich nun die Dicke d der Schicht von Ort zu Ort ändert, so ändert sich auch von Ort zu Ort der Gangunterschied der miteinander interferierenden Strahlen. Man erblickt bei parallelem, monochromatischem einfallenden Licht ein System von hellen und dunklen Streifen. Diese sind um so weiter voneinander entfernt, d. h. um so breiter, je kleiner der Keilwinkel ist.

Jeder Streifen entspricht gleicher Dicke des Keils an den Stellen, wo der Streifen zu sehen ist. Man spricht deshalb in diesem Falle von *Interferenzen gleicher Dicke*.

Ein besonderer Fall derartiger Interferenzen liegt bei den NEWTONSchen *Farbenringen* vor. Sie haben historische Bedeutung, denn sie wurden schon 1500 von LEONARDO DA VINCI beschrieben. 1665 schloß GRIMALDI aus ihnen, daß Licht zu Licht gefügt auch Dunkelheit geben könne. HOOKE (1665) und NEWTON (1676) beschäftigten sich genauer mit ihnen. 1802 erkannte TH. YOUNG in ihnen einen entscheidenden Beweis für die Interferenz des Lichtes, also für die Wellentheorie. Die NEWTONSchen Ringe entstehen, wenn man Licht auf eine Luftschicht fallen läßt, die sich zwischen einer ebenen Glasplatte und einer scharf auf diese gedrückten, schwach gekrümmten Linse befindet. Die einzelnen Segmente dieser Luftschicht kann man nahezu als keilförmig ansehen. Man sieht dann bei Verwendung monochromatischen Lichts helle und dunkle Kreise, deren Mittelpunkt im Berührungspunkt von Platte und Linse liegt. Bei ausreichend enger Berührung erscheint im reflektierten Licht in der nächsten Umgebung der Berührungsstelle wegen der äußerst geringen Dicke der Luftschicht der „schwarze Fleck“ (§ 288). Die Breite der hellen und dunklen Kreise nimmt wegen der zunehmenden Dicke der Luftschicht von innen nach außen immer mehr ab (Abb. 510).

Bei Verwendung von weißem Licht treten farbige Interferenzkreise auf. Die Farben rühren davon her, daß an jeder Stelle bestimmte Wellenlängen

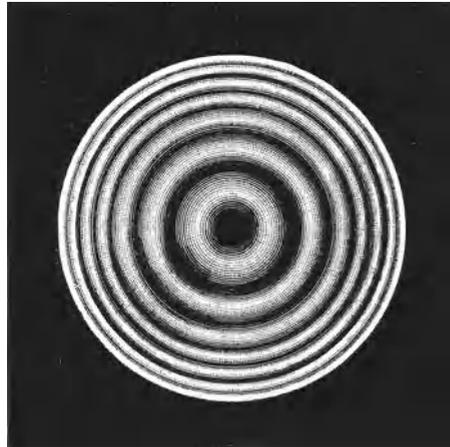


Abb. 510. NEWTONSche Ringe im reflektierten Licht.

durch Interferenz ausgelöscht werden, so daß durch Ausfall der betreffenden Farben an Stelle von Weiß die zugehörige Komplementärfarbe entsteht.

292. Interferometer. Die Interferometer beruhen auf der Interferenz kohärenter Lichtstrahlen. Als Beispiel betrachten wir das Interferometer von JAMIN. Es kann unter anderem dazu dienen, sehr kleine Unterschiede oder Änderungen im Brechungsindex von Stoffen zu messen. Es besteht in der Hauptsache aus zwei sehr gut planparallelen Glasplatten P_1 und P_2 , welche um einen außerordentlich kleinen und deshalb in der Abb. 511 nicht angedeuteten Winkel gegeneinander geneigt sind. Der auf die Oberfläche I von P_1 fallende Strahl spaltet sich in einen reflektierten und einen gebrochenen Anteil S_1 und S_2 , welche in ihrem weiteren aus der Abbildung ersichtlichen Verlauf in gleicher Weise an der Oberfläche III der Platte P_2 noch einmal zerlegt werden. So entstehen aus dem einen einfallenden Strahl vier kohärente Strahlen, von denen S'_1 und S'_2 abgeblendet werden. Die beiden durch die Blende austretenden Strahlen S_2 und S'_1 würden zusammenfallen und hätten seit der ersten Spaltung

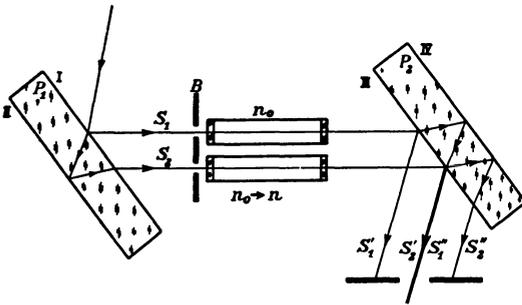


Abb. 511. Interferometer nach JAMIN.

gleich lange optische Wege durchlaufen (von den übrigen Teilen der Anordnung zunächst abgesehen), wenn die Platten keine Neigung gegeneinander hätten. Die kleine vorhandene Neigung bewirkt, daß ihre optischen Wege ein wenig verschieden lang sind, und daß sie selbst ein wenig gegeneinander geneigt verlaufen, genau wie die von den beiden sekundären Lichtquellen beim FRESNELSchen

Spiegelversuch herkommenden Strahlen. Infolgedessen entsteht ein System von Interferenzstreifen, genau wie bei jenem Versuch. Die Lage der Interferenzstreifen ist von der Differenz der optischen Weglängen abhängig. Bringt man nun in den Weg der beiden Strahlen S_1 und S_2 je eine Röhre, die gleich lang und zunächst mit dem gleichen Stoff (Brechungsindex n_0) gefüllt sind, z. B. mit einem Gase, so ändert sich bei gleicher Röhrenlänge an der Differenz der optischen Weglängen, also auch an der Interferenzerscheinung nichts. Ändert man aber jetzt den Brechungsindex in der einen der beiden Röhren von n_0 auf n , etwa durch Veränderung des Drucks, so ändert sich die Differenz der optischen Weglängen, und dies hat zur Folge, daß sich die Interferenzstreifen verschieben. Aus der Größe dieser Verschiebung kann man die Änderung des Brechungsindex berechnen.

Ändert man auf irgendeine andere Weise die Lichtgeschwindigkeit in der einen der beiden Röhren, so wirkt dies genau wie eine Änderung des Brechungsindex bzw. der optischen Weglänge. Das kann z. B. so geschehen, daß man in beide Röhren die gleiche Flüssigkeit bringt, die aber in der einen ruht, in der anderen längs des Rohres strömt. Man muß erwarten, daß das Licht das Rohr schneller durchläuft, wenn die Strömung in der Richtung der Lichtfortpflanzung erfolgt, langsamer, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Die Strömung sollte also im ersten Falle die optische Weglänge verkürzen, im zweiten verlängern. Die Größe dieser *Mitführung des Lichts* kann demnach mit dem Interferometer gemessen werden. Der von FRESNEL experimentell gefundene *Mitführungskoeffizient* hat seine quantitative Deutung durch die Relativitätstheorie gefunden und bildet eine wichtige Stütze dieser Theorie (§ 328). Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die Geschwindigkeit des Lichts nicht,

wie man erwarten sollte, gleich der Summe der Strömungs- und der Lichtgeschwindigkeit ist, sondern kleiner als diese Summe.

Von den sonstigen Interferometern sei noch dasjenige von LUMMER und GEHRCKE erwähnt (Abb. 512). Das zu untersuchende Licht fällt von links her durch das rechtwinklige Glasprisma in eine sehr genau planparallele Glasplatte, an deren Seitenflächen es zum Teil nach außen gebrochen, zum Teil wieder ins Innere reflektiert wird (vgl. § 288). Auf diese Weise entstehen aus einem Strahl Bündel paralleler, kohärenter Strahlen, die unter sich, wie man leicht sieht, einen sehr großen Gangunterschied haben. Der Austrittswinkel aus der Platte hängt von der Wellenlänge ab. Die Linse vereinigt die austretenden parallelen Strahlen in ihrer Brennebene. Dieses Interferometer dient in erster Linie zur Untersuchung der Feinstruktur von Spektrallinien.

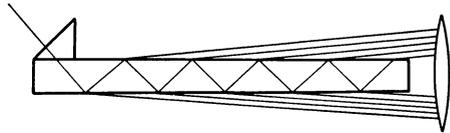


Abb. 512. Interferometer nach LUMMER und GEHRCKE.

293. Beugung des Lichts. Das im § 91 erläuterte HUYGENSSche Prinzip findet für die Lichtwellen genau die gleiche Anwendung wie für andere Wellen. Es besagt in diesem Falle also, daß man jeden von Licht getroffenen Punkt im Raum als Ausgangspunkt einer von ihm rings in den Raum gehenden Lichtstrahlung betrachten kann. Breitet sich Licht aus, ohne auf Körper zu treffen, oder sind die in den Weg des Lichts tretenden Körper oder Öffnungen in solchen groß gegen die Wellenlänge des Lichts, so ergibt sich die geradlinige Fortpflanzung des Lichts, indem das in allen anderen Richtungen von einem Raumpunkt ausgehende Licht durch Interferenz mit Licht, das von anderen Raumpunkten ausgeht, ausgelöscht wird und nur das der geradlinigen Fortpflanzung entsprechende Licht übrigbleibt. Zur Hervorrufung von deutlichen Beugungserscheinungen (§ 91) muß man daher Körper oder Öffnungen verwenden, deren Abmessungen mit der Wellenlänge des Lichts vergleichbar sind. Man unterscheidet, je nachdem es sich um divergentes oder paralleles Licht handelt, FRESNELSche und FRAUNHOFERSche Beugungserscheinungen (§ 286).

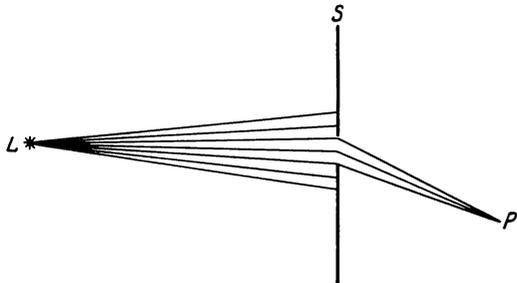


Abb. 513. FRESNELSche Beugungserscheinung an einer engen Blende.

Eine als punktförmig gedachte Lichtquelle L befinde sich in einigem Abstände von einem Schirm S , in dem sich eine enge Blende, z. B. eine kleine kreisförmige Öffnung befindet (Abb. 513), deren Durchmesser nicht groß gegen die Wellenlänge des von L ausgehenden Lichts ist. Nach dem HUYGENSSchen Prinzip wird diese Öffnung zu einer Lichtquelle, von der aus nach allen Richtungen Licht ausgeht. Sie unterscheidet sich aber von einer selbstleuchtenden Fläche dadurch, daß die von ihren sämtlichen Punkten ausgehenden Lichtstrahlen wegen ihres Ursprungs von der gleichen punktförmigen Lichtquelle L unter sich kohärent, also interferenzfähig sind. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P in dem Raum hinter der Öffnung. In ihm schneiden sich Strahlen, welche von allen einzelnen Punkten der Öffnung herkommen und die auf ihrem Wege von L über die Öffnung nach P verschieden lange Wege durchlaufen, also Gangunterschiede gegeneinander gewonnen haben. Die Lichtwirkung in P hängt davon ab, ob diese einzelnen Strahlen sich auf Grund ihrer Gangunterschiede im Durchschnitt gegenseitig verstärken oder schwächen, und zwar wird

sich dies von Ort zu Ort anders verhalten, je nach der Lage des Punktes P . Im Raume hinter der Öffnung wird beim Fortschreiten in einer bestimmten Richtung, z. B. in einer zu S parallelen Ebene, die Helligkeit periodisch schwanken. Hier liegt eine FRESNELSche Beugungsercheinung vor.

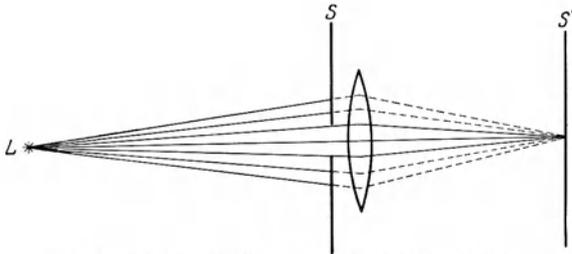


Abb. 514. Erzeugung FRESNELScher Beugungsercheinungen.

Diese Erscheinung wird am besten sichtbar gemacht, indem man die Lichtquelle zunächst durch eine Linse auf einen Schirm S' scharf abbildet und dann die beugende Öffnung zwischen Lichtquelle und Linse bringt

(Abb. 514). Man verwendet als Lichtquelle am besten einen Spalt, der von einer Bogenlampe beleuchtet wird, und als beugende Öffnung ebenfalls einen zum ersten parallelen Spalt. Man sieht dann nach Anbringung des zweiten Spaltes auf dem Schirm S' kein scharfes Bild des ersten Spaltes mehr, sondern eine ziemlich verwaschene Lichterscheinung von zueinander parallelen Streifen, deren Helligkeit von der Mitte aus nach beiden Seiten abfällt. Sendet die Lichtquelle monochromatisches Licht aus, so wechselt im Beugungsbild hell und dunkel. Sendet sie weißes Licht aus, so erblickt man Streifen in wechselnden Farben, die, wie z. B. bei den Farben dünner Blättchen, dadurch entstehen, daß an jeder Stelle ein bestimmter Farbanteil durch Interferenz maximal geschwächt wird, so daß die dazugehörige Komplementärfarbe auftritt.

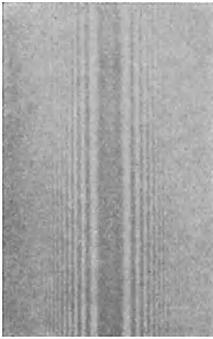


Abb. 515. Beugung an einem Haar.

Ganz entsprechende Erscheinungen zeigen sich, wenn man an Stelle des Spaltes ein ganz schmales Hindernis in den Weg des Lichts bringt. Dieses wirft dann keinen scharfen Schatten, sondern es zeigt sich wieder eine verwaschene, aus hellen und dunklen (bzw. farbigen) Streifen

bestehende Lichterscheinung (Abb. 515). Die Beugungsercheinungen an einem Hindernis, z. B. einem kreisförmigen Schirm, sind (von der zentralen Richtung abgesehen) genau die gleichen wie an einer Öffnung in einem Schirm, die die gleiche Form und Größe hat wie jener (*Theorem von BABINET*).

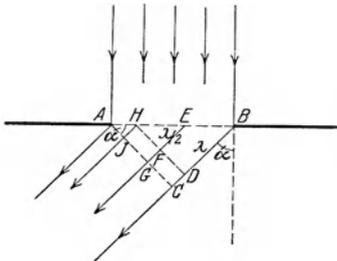


Abb. 516. Erzeugung von FRAUNHOFERSchen Beugungsercheinungen.

Die Verhältnisse bei der Beugung gestalten sich viel einfacher und übersichtlicher, wenn die auf das beugende Objekt auffallenden kohärenten Strahlen unter sich parallel sind, und wenn diejenigen von dem beugenden Objekt ausgehenden Strahlen, die unter sich parallel sind, durch eine Linse auf einem Schirm wieder zur Vereinigung gebracht werden (FRAUNHOFERSche Beugungsercheinungen, Abb. 516).

In der Ebene des Spaltes AB ist das einfallende parallele Licht bei senkrechtem Einfall überall in gleicher Phase. Wir greifen jetzt aus dem gebeugten Licht ein Strahlenbündel heraus, welches den Winkel α mit der Richtung der einfallenden Strahlen bildet, und fällen das Lot AC . In dieser Ebene befinden sich die einzelnen Strahlen des Bündels nicht mehr in gleicher Phase, wie in

der Spaltebene. Denn sie haben von dort bis zur Ebene AC verschieden lange Wege zurückzulegen, so daß zwischen ihnen Gangunterschiede bestehen. Sei z. B. BD gleich der Wellenlänge λ des Lichtes, EF gleich $\lambda/2$, so besteht zwischen den beiden durch C und G gehenden Strahlen ein Gangunterschied $\lambda/2$; sie löschen sich also gegenseitig aus, wenn man sie im Brennpunkt einer Linse vereinigt. Ebenso kann man für jeden zwischen den Geraden BC und EG verlaufenden Strahl einen solchen zwischen den Geraden EG und HJ finden, für den das gleiche gilt. Bringt man also in den Strahlengang eine Linse, die die parallelen Strahlen in ihrer Brennebene vereinigt, so löschen sich alle Strahlen des gedachten Bereichs gegenseitig durch Interferenz aus, und es bleibt nur eine Lichtwirkung derjenigen Strahlen übrig, welche aus dem Bereich zwischen A und der Geraden HJ herkommen. Bei größerer Neigung gibt es mehrere Bereiche, deren Strahlen sich gegenseitig auslöschen. Demnach findet vollständige Auslöschung durch Interferenz in denjenigen Richtungen statt, bei denen zwischen den durch A und B gehenden Randstrahlen ein Gangunterschied besteht, der gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge ist. Denn in diesem Falle ist kein Restgebiet (AH) mehr vorhanden, dessen Strahlen nicht ausgelöscht werden, sondern es gibt zu jedem in solcher Richtung verlaufenden Strahl einen zweiten, der einen um $\lambda/2$ verschiedenen Weg bis zur Ebene AC zurückzulegen hat. Wie man aus der Abb. 516 entnimmt, sind diese Richtungen durch die Bedingung

$$\sin \alpha = \frac{z \lambda}{a} \quad (5)$$

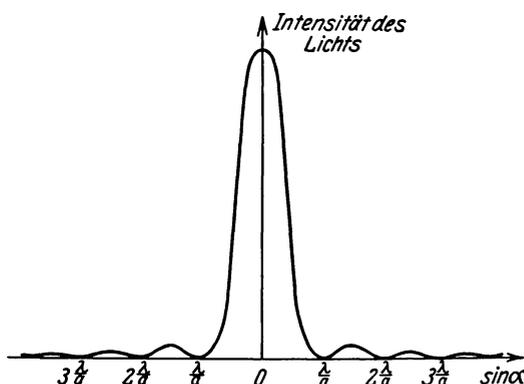


Abb. 517. Helligkeitsverteilung bei der Beugung monochromatischen Lichts am Spalt.

gegeben, wobei $\alpha = AB$ die Breite des Spaltes und z irgendeine ganze Zahl bedeutet. In der Richtung der einfallenden Strahlen ($\alpha = 0$) findet natürlich maximale Verstärkung statt, da ja die in dieser Richtung verlaufenden Strahlen in allen zur Strahlrichtung senkrechten Ebenen in gleicher Phase sind. Es geht also auch Licht geradlinig durch den Spalt, und zwar mehr als in jeder anderen Richtung. Abb. 517 zeigt die Verteilung der Helligkeit im Beugungsbild eines Spaltes bei monochromatischem Licht.

Man erkennt aus Gl. (5), daß α , also die Ablenkung, um so größer ist, je größer die Wellenlänge λ ist. Es wird also im sichtbaren Gebiet Rot am stärksten, Violett am wenigsten gebeugt. Da z , α und a leicht zu bestimmen sind, kann man mittels der Beugung am Spalt die Wellenlänge λ des benutzten Lichts messen. Bei weißem Licht überlagern sich die Beugungsbilder der einzelnen Spektralfarben, und es entstehen ebenso wie beim FRESNELSchen Spiegelversuch farbige Bänder. Je nach dem Wert von z in Gl. (5) spricht man von Interferenzen erster, zweiter usw. Ordnung.

294. Beugung am Gitter. Die Lichtstrahlen, welche an einem Spalt zur Interferenz gelangen, bilden ein zusammenhängendes Bündel kohärenter Strahlen. Bei den Beugungsgittern (FRAUNHOFER 1817) haben wir es dagegen mit der Interferenz einer großen Zahl überaus schmaler Strahlenbündel zu tun, die alle unter sich kohärent sind. Ein Beugungsgitter besteht in der Regel aus einer planparallelen Glasplatte, auf deren eine Seite mittels eines Diamanten eine sehr große Zahl feiner Striche geritzt ist, bis zu 2000 auf 1 mm. Nur durch

die zwischen den Strichen stehengebliebenen, überaus schmalen Teile der Glasfläche kann das Licht ungestört hindurchtreten, an den anderen Stellen wird es zerstreut. So bildet ein solches Gitter gewissermaßen eine große Zahl von sehr schmalen und sehr dicht beieinanderliegenden Spalten (Abb. 518). Man kann das Gitter auch auf eine spiegelnde, hohlspiegelförmig geschliffene Metallfläche ritzen; dann wirken die allein regulär reflektierenden Stellen zwischen den Strichen ebenso wie die unzerstörten Stellen eines Glasgitters, wenn Licht auf sie fällt. Die Hohlspiegelform eines solchen Konkavgitters hat den Vorteil, daß man bei der Aufnahme von Spektren mit dem Gitter die Verwendung einer Linse vermeidet.

Wir betrachten jetzt als wichtigsten Fall die FRAUNHOFERSCHEN Beugungserscheinungen am Gitter, d. h. wir lassen paralleles, kohärentes monochromatisches Licht senkrecht auf das Gitter fallen und betrachten die auf der Rückseite parallel austretenden Strahlen, die dann zwecks Beobachtung der Interferenzerscheinungen durch eine Linse vereinigt werden müssen. (Es genügt schon die

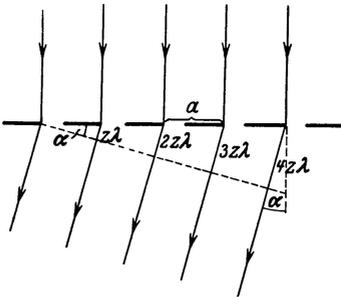


Abb. 518. Zur Beugung am Gitter.

Augenlinse, also die Betrachtung mit bloßem Auge.) Aus dem einfallenden Bündel greifen wir jetzt homologe Strahlen heraus, z. B. diejenigen, die in Abb. 518 gerade durch den linken Rand der einzelnen Gitterspalte treten. Hinter diesen wird sich das Licht nach dem HUYGENSschen Prinzip wie beim einfachen Spalt nach allen Richtungen ausbreiten. Wir betrachten nun die von den einzelnen Spalten in einer bestimmten Richtung ausgehenden Strahlen. Es ist ohne weiteres klar, daß sich die von zwei benachbarten Gitterspalten herkommenden Strahlen gegenseitig maximal verstärken werden, wenn ihr Gang-

unterschied in der betrachteten Richtung ein ganzzahliges Vielfaches (z -faches) ihrer Wellenlänge ist. Ist diese Bedingung für die obengenannten Strahlen erfüllt, so ist sie in der gleichen Richtung — gleiche Breite der Gitterspalte und gleichen Gitterabstand a vorausgesetzt — auch für alle anderen durch die Spalte tretenden Strahlen erfüllt. Aus der Abb. 518 liest man ab, daß die Richtungen maximaler Verstärkung durch die Bedingung

$$\sin \alpha = z \frac{\lambda}{a} \quad (6)$$

gegeben sind, wobei a der Abstand zweier benachbarter homologer Gitterpunkte, die *Gitterkonstante*, und z irgendeine ganze Zahl ist. Je nach der Größe von z unterscheidet man Interferenzen 1., 2. usw. Ordnung. Die strenge Theorie des Beugungsgitters, auf die hier nicht eingegangen werden kann, ergibt, daß, je größer die Zahl der Gitterstriche ist, die durchgehende Lichtintensität um so mehr ausschließlich auf die durch Gl. (6) gegebenen Richtungen beschränkt ist. Es entstehen also bei Verwendung monochromatischen Lichts nach Vereinigung durch eine Linse scharfe Spektrallinien. Weißes Licht ergibt ein Spektrum mit reinen Spektralfarben.

Man beachte, daß die Interferenzerscheinungen beim Gitter auf völlig andere Weise zustande kommen als beim einzelnen Spalt. Das ist schon daran zu erkennen, daß zwar die Gl. (5) und (6) formal identisch sind, daß aber die auf den Spalt bezügliche Gl. (5) die Richtung maximaler Auslöschung, die auf das Gitter bezügliche Gl. (6) die Richtung maximaler Verstärkung angibt, und daß a in Gl. (5) die Spaltbreite, in Gl. (6) die Gitterkonstante bedeutet.

Befindet sich hinter dem Gitter ein Stoff vom Brechungsindex n , so ist, wenn λ die Wellenlänge im Vakuum bedeutet, statt λ in Gl. (6) die Wellenlänge λ/n in diesem Stoff einzusetzen (§ 271), so daß dann die Bedingung gilt

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} \frac{z \lambda}{a}. \tag{7}$$

Betrachtet man eine nahezu punktförmige Lichtquelle durch einen engmaschigen Stoff, z. B. eine entfernte Straßenlaterne durch den Stoff eines Regenschirmes hindurch, so erblickt man Spektralfarben, welche von einer Beugung des Lichts an den Öffnungen im Stoffe herrühren. Der Stoff bildet ein Kreuzgitter, wie ein Glasgitter mit zwei zueinander senkrechten Strichsystemen.

Ein Beugungsgitter kann, ebenso wie ein Prisma, zur Aufnahme der Spektren von Lichtquellen dienen. Je höher die Ordnung des Spektrums ist, um so größer ist die Dispersion, d. h. der Abstand zweier Spektrallinien von bestimmter Wellenlängendifferenz. Da es sich in praktischen Fällen meist um kleine Ablenkungen α handelt, so kann man statt Gl. (6) auch schreiben $\alpha \approx z\lambda/a$. Die Ablenkung des Lichts beim Gitter ist also der Wellenlänge nahezu proportional, während dies beim Prismenspektrum keineswegs der Fall ist (Abb. 519). Man nennt daher das Gitterspektrum auch Normalspektrum. Kennt man die Gitterkonstante a , so kann man aus der Ablenkung α des Lichtes die Wellenlänge berechnen. Aus Gl. (6) folgt, daß im Gegensatz zum Prismenspektrum beim Gitter die Ablenkung um so größer ist, je größer λ ist. Im sichtbaren Gebiet wird also das rote Licht am stärksten, das violette Licht am wenigsten abgelenkt.

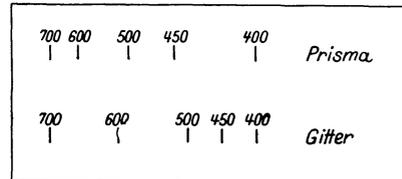


Abb. 519. Vergleich eines Gitter- und eines Prismenspektrums. Wellenlängen in $m\mu$. Die Spektren sind so gezeichnet, daß sie bei 400 und 700 $m\mu$ zusammenfallen.

Die Intensität der Gitterspektren nimmt im allgemeinen mit steigender Ordnungszahl schnell ab. Doch kann man es durch Wahl eines geeigneten Profils der Gitterstriche (Furchenform) erreichen, daß die Intensität einer bestimmten Ordnung besonders groß ist.

Mit dem gewöhnlichen Strichgitter kommt man wegen der geringen Lichtstärke der höheren Ordnungen über die dritte Ordnung meist nicht hinaus, auch überdecken sich die höheren Ordnungen in stets zunehmendem Maße. Interferenzen sehr viel höherer Ordnung erzielt man mit dem Stufengitter und der LUMMER-GEHRCKE-Platte (§ 292). Beiden ist gemeinsam, daß bei ihnen ein großer Gangunterschied der Strahlen dadurch erzielt wird, daß die einzelnen Teile eines Strahlenbündels sehr verschieden lange Wege in Glas zurückzulegen haben.

Beim Gitter ist zwischen der *Dispersion* und dem *Auflösungsvermögen* wohl zu unterscheiden. Die Dispersion ist um so größer, je größer die Differenz der Winkel α für irgend zwei verschiedene Wellenlängen, je kleiner also die *Gitterkonstante* a ist. Das Auflösungsvermögen aber ist die Fähigkeit, zwei nahe benachbarte Spektrallinien noch getrennt sichtbar zu machen. Es ist also zwar von der Dispersion abhängig, aber nicht allein von dieser, sondern auch von der Schärfe der Spektrallinien. Denn bei gleicher Dispersion können zwei nahe benachbarte Spektrallinien noch zusammenfließen, wenn sie ausreichend breit sind. Die Spektrallinien sind aber um so schärfer, je größer die *Zahl der Gitterstriche* ist. Demnach hängt das Auflösungsvermögen eines Gitters von dieser Zahl entscheidend ab.

295. Beugung und Streuung an kleinen Teilchen. Wie bereits in § 293 erwähnt, bewirken nicht nur kleine Öffnungen, sondern auch Hindernisse, deren Abmessungen nicht groß gegen die Wellenlängen sind, eine Beugung des Lichts. Durch sie erklärt sich zum großen Teil die Unschärfe der durch Nebel, Rauch u. dgl. gesehenen Gegenstände, ebenso die gelegentlich sichtbaren „Höfe“ (Halo) um Sonne und Mond, die von einer Beugung an feinen, in hohen Atmosphärenschichten schwebenden Eisnadeln herrühren. Jedes einzelne beugende Teilchen ergibt ein *Beugungsscheibchen*, d. h. es wirft keinen scharf begrenzten Schatten. An dessen Stelle treten unscharfe, aus Systemen von hellen und dunklen Ringen bestehende Lichterscheinungen.

Bildet man eine beleuchtete kreisförmige Blende mit einer Linse auf einem Schirm ab und bringt zwischen die Blende und die Linse eine behauchte oder noch besser eine mit Lycopodium bestreute Glasplatte, so zeigt das Bild die gleichen Erscheinungen wie die Höfe um Sonne und Mond.

Von der Beugung an kleinen Teilchen, die von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichts sind, ist die *Streuung* des Lichts an noch kleineren Teilchen zu unterscheiden, bei der das Licht aus seiner Richtung abgelenkt wird, ohne daß zwischen den einzelnen abgelenkten Strahlen Phasenbeziehungen bestehen, die zu Interferenzerscheinungen Veranlassung geben. Hierauf beruht die Trübheit mancher Stoffe, in denen ein Lichtkegel, trotzdem sie völlig durchsichtig sind, doch auf seiner ganzen Bahn deutlich sichtbar ist.

Auch die *blaue Farbe des Himmelslichts* ist nach Lord RAYLEIGH die Folge einer Lichtstreuung in der Atmosphäre. Sie beruht auf der BROWNSchen Bewegung der Luftmoleküle (§ 101) und den mit ihr verknüpften Dichteschwankungen der Luft (EINSTEIN). In den äußerst kleinen Bereichen, in denen sich solche Dichteschwankungen bemerkbar machen, ist der Brechungsindex der Luft verschieden groß. Diese optischen Inhomogenitäten der Luft wirken auf das Licht um so stärker ein, je kleiner seine Wellenlänge ist, auf den kurzwelligen Teil des Sonnenlichts weit mehr als auf den langwelligen. Daher wird ersterer erheblich stärker aus seiner geraden Bahn abgelenkt, nach allen Richtungen zerstreut, als der letztere. Die sonnenbeschienene Atmosphäre wird also überall zum Ausgangspunkt einer Streustrahlung, in der das kurzwellige Licht stark überwiegt. Das Himmelsgewölbe erscheint blau. Dem unmittelbaren Sonnenlicht wird dieser gestreute Anteil entzogen. Es erscheint röter, als es im freien Weltraum ist, und zwar um so mehr, einen je längeren Weg es durch die Atmosphäre zurückgelegt hat. Darum erscheinen Sonne und Mond bei Auf- und Untergang besonders stark rötlich, denn dann ist der Lichtweg durch die Atmosphäre besonders lang. Durch Staub, Wassertröpfchen und Eisnadeln kann diese Wirkung noch verstärkt werden.

Da die Beugung und Streuung des Lichts um so stärker ist, je kurzwelliger es ist, so verwendet man für Kraftfahrzeuge bei Nebel eine rötlichgelbe Beleuchtung. Noch viel günstiger liegen die Verhältnisse bei dem noch langwelligeren Ultrarot (§ 311). Nachdem es gelungen ist, photographische Platten auch für ultrarotes Licht ausreichend empfindlich zu machen, ist man in der Lage, photographische Aufnahmen von Gebirgen aus Entfernungen bis zu mehreren 100 km zu machen, d. h. aus Entfernungen, bei denen die natürliche Trübheit der Atmosphäre eine Sicht mit dem Auge in der Regel nicht gestattet.

296. Stehende Lichtwellen. Einen der schönsten Beweise für die Wellentheorie des Lichts bildet der Nachweis stehender Lichtwellen (§ 87) durch WIENER (1890). Er ließ paralleles Licht senkrecht auf einen Spiegel *S* fallen, so daß das einfallende und das reflektierte Licht stehende Wellen bildete

(Abb. 520). Vor den Spiegel brachte er ein unter einem sehr kleinen Winkel gegen ihn geneigtes Kollodiumhäutchen H (photographische Schicht). Diese zeigte sich nach Entwicklung streifig geschwärzt, und zwar lagen die Schwärzungsmaxima an den Knoten K , die Minima an den Bäuchen B der stehenden Welle.

Die Existenz stehender Lichtwellen war schon 1868 von ZENKER vermutet worden, der damit die Tatsache richtig erklärte, daß eine photographische Platte gelegentlich im reflektierten Licht die Farbe des Lichts zeigt, mit dem sie belichtet wurde. Die in der Schicht auftretenden stehenden Lichtwellen erzeugen in regelmäßigen Abständen dünne geschwärzte Schichten von reduziertem Silber, an denen einfallendes Licht reflektiert wird. Von weißem Licht wird aber derjenige Anteil am stärksten reflektiert werden, dessen Wellenlänge gleich dem doppelten Abstand dieser Schichten, also gleich der Wellenlänge des Lichts, das die stehenden Wellen bildete. Denn dann ist der Gangunterschied zwischen den von zwei aufeinanderfolgenden Schichten reflektierten Strahlen gerade gleich der Wellenlänge, und es findet maximale Verstärkung statt. Auf dieser Erscheinung beruht ein älteres Verfahren der Farbenphotographie (LIPPMANN).

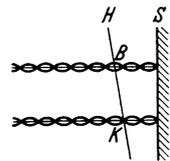


Abb. 520.
Nachweis stehender
Lichtwellen.

297. Wellentheorie der optischen Abbildung. Wir haben im II. Abschnitt dieses Kapitels die Entstehung von reellen und virtuellen Bildern nach der Methode der geometrischen Optik behandelt. Ein volles Verständnis der bei der optischen Abbildung auftretenden Erscheinungen ist aber nur auf wellenoptischer Grundlage möglich. Als besonders einfaches Beispiel betrachten wir

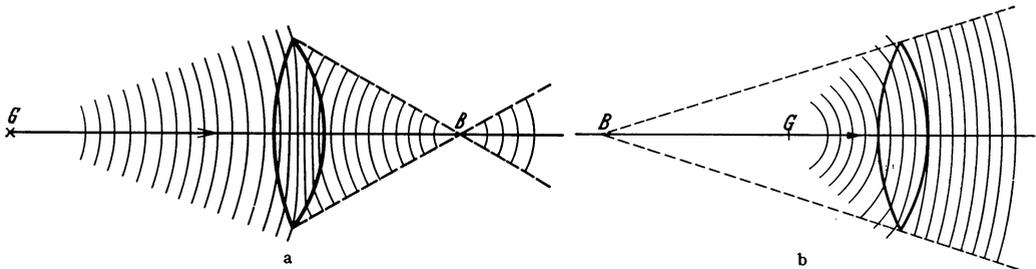


Abb. 521. a reelles, b virtuelles Bild eines Punktes bei einer Sammellinse.

das reelle Bild B eines auf der Achse einer Sammellinse außerhalb ihrer Brennweite liegenden Punktes G (Abb. 521a). Statt der Strahlen zeichnen wir aber jetzt eine Schar von zu ihnen senkrechten Wellenflächen. Zwischen je zwei aufeinander folgenden Wellenflächen soll der Gangunterschied λ bestehen, so daß sie im gleichen Medium gleichen Abstand haben. Da die Lichtgeschwindigkeit in der Linse kleiner ist, als in der umgebenden Luft, so ist ihr Abstand in der Linse kleiner als außen. Die Wellenflächen treten dort kurz und erfahren eine um so größere Verzögerung, je größer ihr Weg durch die Linse ist. Daher haben die Teile einer Wellenfläche, die durch die Linsenmitte gehen, nach dem Wiederaustritt die größte Verzögerung erlitten, diejenigen, die durch die Ranteile der Linse gehen, die geringste. Liegt G außerhalb einer bestimmten Entfernung von der Linse (ihrer Brennweite), so sind die Wellenflächen nach dem Austritt aus der Linse umgeklappt. Ihr Mittelpunkt liegt nicht mehr auf der Gegenstandsseite der Linse, sondern auf der anderen Seite in B . Sie schrumpfen also bei weiterem Fortgang in B zusammen, um sich alsdann von B aus, wie vorher von G , wieder auszubreiten. B ist also ein reelles Bild von G . Bei einem bestimmten Abstand von G von der Linse (der Brennweite) sind die aus der Linse austretenden Wellenflächen Ebenen, und B liegt im Unendlichen. Rückt

aber G noch dichter an die Linse heran, so bleibt der Mittelpunkt B der Wellenflächen nach dem Austritt auf der Gegenstandsseite der Linse (Abb. 521b). Sie scheinen jetzt von B herzukommen, B ist ein virtuelles Bild von G .

Denkt man sich nun die zu den Wellenflächen senkrechten Strahlen von G nach B gezeichnet, so erkennt man, daß beim reellen Bild (Abb. 521a) auf jeden Strahl die gleiche Anzahl von Wellenlängen λ entfällt, und daß daher die Zeit, die das Licht längs irgendeines durch die Linse verlaufenden Strahls zur Zurücklegung des Weges von G nach B benötigt, stets die gleiche ist. Bild und Gegenstand sind einander also durch die Bedingung zugeordnet, daß die Zeit, die das Licht für diesen Weg benötigt, von dem Wege, den es über die Linse von G nach B nimmt, unabhängig ist. Das bedeutet aber, daß die optische Weglänge für jeden von G über die Linse nach B verlaufenden Strahl die gleiche sein muß (§ 271). Zwischen einem Gegenstand und seinem Bild gibt es also keinen ausgezeichneten Lichtweg (§ 266), sondern alle möglichen Lichtwege über die Linse sind optisch gleich lang. Beim virtuellen Bilde (Abb. 521b)

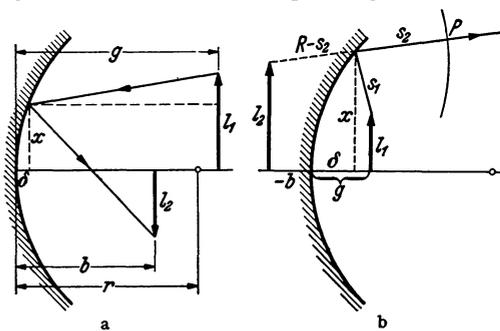


Abb. 522. Zur Wellentheorie der Abbildung bei einem Hohlspiegel. a reelles, b virtuelles Bild.

nicht durch Interferenz gegenseitig schwächen. Das ist aber nur dann nicht der Fall, wenn sie von G nach B gleiche optische Weglängen zurückzulegen haben. Ebenso wird man ein virtuelles Bild nur dann erblicken, wenn sich die aus der Linse austretenden Strahlen nach ihrer Wiedervereinigung im Auge nicht durch Interferenz auslöschen. Dann müssen sie aber in allen Punkten einer Wellenfläche in gleicher Phase sein, d. h. die optischen Weglängen von G bis zu jeder Wellenfläche müssen gleich groß sein.

Wir wollen diese Verhältnisse an einem besonders einfachen Fall, dem Hohlspiegel, betrachten. Abb. 522a stellt einen Hohlspiegel dar, der von dem Gegenstand l_1 ein reelles Bild l_2 entwirft. Wir betrachten die Abbildung der Pfeilspitze und greifen einen beliebigen von der Spitze des Gegenstandes über den Spiegel zur Spitze des Bildes verlaufenden Strahl heraus. Es seien b und g die Entfernungen der Fußpunkte des Gegenstandes und des Bildes vom Spiegelscheitel, r der Krümmungsradius des Spiegels. Der senkrechte Abstand des Reflexionspunktes von der Spiegelachse sei x , sein senkrechter Abstand von der den Scheitel berührenden Tangentialebene sei δ . Wir setzen gemäß den bereits in § 270 gemachten Einschränkungen voraus, daß x und daher erst recht δ sehr klein gegen g , b und r sind. Dann ergibt sich aus den geometrischen Eigenschaften des Kreises durch eine einfache Rechnung, daß $\delta \approx x^2/2r$ ist.

Zunächst kann man aus der Abb. 522a folgendes entnehmen. Die Bedingung, daß alle Lichtwege von der einen Pfeilspitze zur anderen gleich lang sind, kann bei einem sphärischen Spiegel nie streng erfüllt sein. Sie wäre auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Ellipse nur bei einem Spiegel erfüllt, dessen Querschnitt eine Ellipse ist, deren Brennpunkte in den beiden Pfeilspitzen liegen.

greifen wir irgendeine Wellenfläche nach dem Durchgang durch die Linse heraus. Dann gilt die Bedingung, daß die optischen Weglängen von dem Gegenstand G nach allen Punkten einer solchen Wellenfläche gleich groß sein müssen.

Diese Bedingungen sind wellenoptisch ohne weiteres zu verstehen. Damit in B (Abb. 521a) eine maximale Lichtwirkung entsteht, dürfen sich die durch B gehenden kohärenten Strahlen

Je nach der Lage dieser Punkte hätte auch die Ellipse bei festgehaltenem Spiegelscheitel eine andere Gestalt und eine andere Achsenrichtung. Die Abbildung durch einen sphärischen Spiegel muß daher notwendig unvollkommen sein. Sie wird um so vollkommener, ein je kleineres Stück einer Kugelfläche der Spiegel bildet, denn um so besser läßt er sich durch ein Rotationsellipsoid annähern. Für die vollkommene Abbildung eines auf der Spiegelachse unendlich fern gelegenen Punktes müßte der Spiegel parabolischen Querschnitt haben.

Wir wollen nunmehr den in Abb. 522a dargestellten Lichtweg s berechnen. Es ist

$$s = \sqrt{(g - \delta)^2 + (l_1 - x)^2} + \sqrt{(b - \delta)^2 + (l_2 + x)^2}.$$

Nun sind $l_1 - x$ und $l_2 + x$ nach den oben gemachten Voraussetzungen klein gegen g und b . Eine Reihenentwicklung, bei der wir nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen und ferner Glieder, die mit der sehr kleinen Größe δ^2 multipliziert sind, vernachlässigen, ergibt dann

$$s = g - \delta + \frac{(l_1 - x)^2}{2g} + b - \delta + \frac{(l_2 + x)^2}{2b}.$$

Setzen wir nun noch $\delta = x^2/2r$, so folgt

$$s = g + b + \frac{l_1^2}{2g} + \frac{l_2^2}{2b} - x \left(\frac{l_1}{g} - \frac{l_2}{b} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{2}{r} \right).$$

Nun sollen die optischen Weglängen für alle über den Spiegel von einer Spitze zur anderen verlaufenden Strahlen einander gleich sein. Das bedeutet, daß s von x unabhängig sein muß. Das ist nur dann möglich, wenn die Klammerausdrücke, mit denen x und x^2 multipliziert sind, gleich Null sind. Daraus folgt

$$1) \quad \frac{l_1}{g} = \frac{l_2}{b}, \quad 2) \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}.$$

Das aber sind die Gleichungen 1. für den Abbildungsmaßstab beim Hohlspiegel [§ 270, Gl. (5)] und 2. für die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildentfernung [§ 270, Gl. (3)]. Damit sind die Gesetze der Abbildung durch einen Hohlspiegel restlos wellentheoretisch gedeutet.

Es sei zweitens l_2 (Abb. 522b) das von einem Hohlspiegel erzeugte virtuelle Bild eines Gegenstandes l_1 , P ein beliebiger Punkt auf einer mit dem Radius R um die Spitze von l_2 beschriebenen Kugelfläche, also einer Wellenfläche der reflektierten Welle. Der Lichtweg von der Spitze von l_1 bis P beträgt dann $s_1 + R - s_2$, wenn s_2 der längs R gemessene Abstand des Bildes vom Spiegel ist. Da R für alle Punkte der Wellenfläche gleich groß ist, so muß nunmehr $s_1 - s_2$ für alle Lichtwege, die von der Spitze von l_1 über den Spiegel senkrecht auf die Wellenfläche führen, gleich groß, also unabhängig von x sein. Rechnen wir, wie früher festgesetzt, die Bildentfernung negativ ($-b$), so ergeben sich wieder die richtigen Gleichungen wie oben.

In der gleichen Weise lassen sich die Linsengesetze wellenoptisch ableiten. In diesem Fall ist noch der vom Licht in der Linse zurückgelegte Weg mit seiner optischen Weglänge zu berücksichtigen.

Eine Lichtwirkung tritt aber nicht nur bei genau gleichen optischen Weglängen auf, sondern — wenn auch schwächer — auch an anderen Orten, sofern die kohärenten Wellenzüge sich überhaupt noch dort treffen, die optischen Weglängen sich also um weniger als die Länge eines Wellenzuges unterscheiden. Im allgemeinen wird dann aber wegen der auftretenden Phasenunterschiede teilweise oder vollständige Auslöschung durch Interferenz eintreten. Daher wird in Wirklichkeit ein Punkt des Gegenstandes nicht in einen einzelnen Punkt abgebildet, sondern das Bild besteht aus einem Punkt, der sehr eng von einer Anzahl

konzentrischer, mit der Entfernung schnell an Helligkeit abnehmender Interferenzringe umgeben ist. Es ist ein *Beugungsscheibchen*. Wir haben das bereits bei der Abbildung der Fixsterne im Fernrohr erwähnt (§ 282).

298. Beugung im Mikroskop. Ultramikroskop. Für die Auflösung von Strukturen durch ein optisches Gerät folgt aus diesen Überlegungen, daß die Größe der noch auflösbaren Strukturen durch die Beugung nach unten hin beschränkt wird. Wir wollen dies im einzelnen hier nicht durchführen, sondern uns mit einer einfachen Überlegung begnügen. Man denke sich ein Beugungsgitter unter einem Mikroskop. Damit von seiner Struktur im Tubus ein reelles Bild entsteht, ist es notwendig, daß außer dem ungebeugt durch das Gitter hindurchgehenden mittleren Strahl noch mindestens der Strahl erster Ordnung durch das Objektiv des Mikroskops hindurchtritt. Ist die Gitterkonstante aber sehr klein, also die Ablenkung sehr groß, so ist dies nicht mehr der Fall. Das Mikroskop gibt kein Bild der Struktur des Gitters mehr, es löst die Struktur nicht auf. Die gleiche Überlegung kann man auf alle anderen Arten von Strukturen, die mit einem Mikroskop betrachtet werden, übertragen. In dieser Tatsache liegt der Grund für die im § 282 besprochene Grenze des Auflösungsvermögens eines Mikroskops. Bringt man zwischen Objekt und Objektiv einen Stoff von großem Brechungsindex n (Immersionsflüssigkeit), so wird der Ablenkungswinkel, wie man aus Gl. (7), § 294, abliest, kleiner, und es können noch feinere Strukturen aufgelöst werden. Der Ausdruck für die numerische Apertur in § 282 wird jetzt durch Vergleich mit Gl. (7) ohne weiteres verständlich.

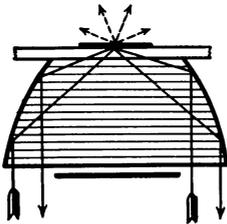


Abb. 523. Kondensor für Dunkelfeldbeleuchtung.

Handelt es sich darum, sehr kleine Gebilde, z. B. sehr kleine Bakterien, Goldteilchen in kolloidaler Goldlösung bei der BROWNSchen Bewegung (§ 102) u. dgl. unter *Verschleierung auf eine Abbildung ihrer Gestalt* wenigstens noch *sichtbar* zu machen, so kann man so verfahren, daß man das Objekt nicht senkrecht von unten her, sondern schräge von unten stark beleuchtet. Abb. 523 zeigt eine Vorrichtung, welche dies bewirkt. Dann gelangen nicht die Strahlen niederer Ordnung in das Mikroskop, sondern die viel dichter beieinanderliegenden gebeugten Strahlen höherer Ordnung. In diesem Falle erscheinen die bei gewöhnlichen Mikroskopen unter der Sichtbarkeitsgrenze liegenden Gebilde — bis zu einer unteren Grenze von etwa $4 \cdot 10^{-6}$ mm — als leuchtende, runde *Beugungsscheibchen* von je nach ihrer Größe verschiedener Farbe auf dunklem Grunde (Dunkelfeld). Zu diesem Zwecke eingerichtete Mikroskope heißen *Ultramikroskope*.

299. Der optische DOPPLER-Effekt. Wie bei jedem anderen Wellenvorgang, so tritt auch beim Licht ein DOPPLER-Effekt, d. h. eine Änderung der Schwingungszahl ein, wenn sich die Lichtquelle relativ zum Beobachter bewegt (§ 299). Die Größe der Wirkung, die sich in einer Verschiebung der Spektrallinien der Lichtquelle nach Rot oder Violett äußert, hängt von dem Verhältnis v/c der Geschwindigkeit v der Lichtquelle und der Lichtgeschwindigkeit c ab (vgl. hierzu § 327). Beobachtbare Wirkungen sind daher bei Geschwindigkeiten unter einigen $\text{km} \cdot \text{sec}^{-1}$ nicht zu erwarten. Solche Geschwindigkeiten können wir ausgedehnten Lichtquellen auf der Erde nicht erteilen. Hingegen haben die leuchtenden Atome in den Kanalstrahlen (§ 183) ganz erheblich größere Geschwindigkeiten, und bei diesen sind die zu erwartenden Linienverschiebungen in der richtigen Größe gefunden worden. Auch die thermische Bewegung leuchtender Atome macht sich in einem optischen DOPPLER-Effekt als eine Verwaschenheit der Spektrallinien bemerkbar. Diese ist daher, wie STARK entdeckt hat, bei den sehr leichten und daher besonders schnell bewegten Wasserstoffatomen besonders ausgeprägt.

Von großer Bedeutung für die Astronomie ist der DOPPLER-Effekt im Licht der Fixsterne. Es gibt nur äußerst wenige Fixsterne, die uns so nahe sind und deren Geschwindigkeit so groß ist, daß man eine meßbare Ortsänderung am Himmel im Laufe längerer Zeiten beobachten kann. Die Verschiebung der Spektrallinien, die von einer Bewegung der Fixsterne relativ zur Erde herrührt, ist aber in vielen Fällen meßbar. Wirksam ist dabei allerdings nur die Komponente der Geschwindigkeit, die in der Verbindungslinie Fixstern—Erde liegt (Radialgeschwindigkeit). Die Lage der Spektrallinien der Elemente ist im Fixsternspektrum nach Violett oder Rot gegenüber ihrer Lage bei einer auf der Erde ruhenden Lichtquelle verschoben, je nachdem der Fixstern sich der Erde nähert oder sich von ihr entfernt. Man hat auf diese Weise auch das Vorhandensein einer großen Zahl von Doppelsternen, welche umeinander rotieren, an einer periodischen Änderung ihrer Linienverschiebung erkennen können (vgl. auch § 332).

300. Polarisation durch Reflexion. Es bleibt nunmehr die Frage zu klären, ob das Licht eine longitudinale oder eine transversale Welle ist. Im § 84 ist auseinandergesetzt, daß die Polarisierbarkeit über diese Frage entscheidet. Die nachstehend beschriebene, zuerst von MALUS (1808) beobachtete Erscheinung entscheidet sie zugunsten der *Transversalität*.

Ein Lichtstrahl falle unter einem Einfallswinkel von 57° auf eine ebene Glasplatte (Kronglas) S_1 und werde von ihr auf eine zweite Glasplatte S_2 reflektiert, welche um eine in der Richtung des auf sie fallenden Strahls liegende Achse A gedreht werden kann, und auf welche das reflektierte Licht ebenfalls unter 57° falle (Abb. 524). Zum Auffangen des von der zweiten Glasplatte reflektierten Lichts ist in seiner jeweiligen Richtung ein Schirm angebracht. Dreht man nun die zweite Glasplatte um ihre Drehungsachse A , wobei der Einfallswinkel von 57° stets erhalten bleibt, der von S_2 reflektierte Lichtstrahl sich also auf einem Kegelmantel bewegt, so zeigt sich, daß der Lichtfleck auf dem Schirm maximale Helligkeit zeigt, wenn die beiden Platten entweder parallel stehen oder die zweite Platte um 180° gegen die Parallelstellung gedreht ist. Ist sie aber nach einer der beiden Seiten um 90° gegen die Parallelstellung gedreht, so verschwindet der Lichtfleck, die zweite Glasplatte reflektiert das auf sie fallende Licht nicht. Dies beweist erstens, daß mit dem Licht bei der Reflexion an der ersten Glasplatte eine Veränderung vor sich gegangen sein muß. Es beweist aber weiter, daß es sich hierbei um eine Veränderung des Lichts handelt, welche nur bei einer *transversalen Welle* auftreten kann, wie dies bei dem mechanischen Beispiel in § 84 auseinandergesetzt ist. Denn die zweite Glasplatte erweist sich durch diesen Versuch als ein Gebilde, welche ohne Änderung ihrer Orientierung gegen die *Richtung* des Lichtstrahls seine Fortpflanzung bei einer *Drehung* um diese Richtung als Achse verschieden beeinflusst. Der unter 57° an S_1 reflektierte Anteil des einfallenden Lichts ist *linear polarisiert*, d. h. seine Schwingungen erfolgen nach der Reflexion nur noch in einer bestimmten Ebene und senkrecht zur Lichtfortpflanzung.

Demnach beruht also das Licht auf der periodischen Änderung eines Vektors, der in jedem Raumpunkt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts gerichtet ist. Wir brauchen uns hier zunächst noch keine Vorstellung vom Wesen dieses Vektors zu machen. Es genügt vorläufig, den Begriff eines *Lichtvektors* zu definieren, von dem wir festsetzen wollen, daß er bei Licht, welches durch Reflexion linear polarisiert wurde, senkrecht zur Einfallsebene liegt, in

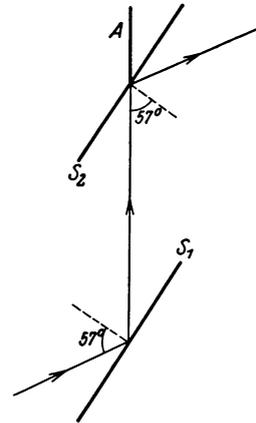


Abb. 524. Zum Nachweis der Polarisation durch Reflexion.

Abb. 524 also senkrecht zur Zeichnungsebene (§ 306). Man nennt diese Ebene die *Polarisationsebene* des linear polarisierten Lichts.

Bei Einfall unter 57° , dem *Polarisationswinkel* des Glases, wird an Glas von dem einfallenden Licht nur solches reflektiert, dessen Polarisationsebene in der Einfallsebene, dessen Lichtvektor also senkrecht zu dieser liegt. Das an der ersten Platte nicht reflektierte Licht wird von dieser durchgelassen. Es enthält außer der zur Einfallsebene senkrecht schwingenden Komponente auch noch Licht der anderen Komponente, wenn auch weniger. Es ist daher *teilweise (partiell) polarisiert*. Durch Anwendung mehrerer Glasplatten hintereinander (Glasplattensatz) kann man auch das hindurchgehende (gebrochene) Licht weitgehend linear polarisieren.

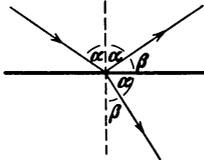


Abb. 525. Zum BREWSTER-schen Gesetz.

Stehen bei dem beschriebenen Versuch die beiden Platten einander parallel oder unter 180° verdreht, so liegt bei der zweiten Platte die Polarisationsebene des einfallenden Lichts in der Einfallsebene, es wird also reflektiert, in den beiden dazu senkrechten Stellungen aber enthält das einfallende Licht keinen Anteil, dessen Polarisationsebene in der Einfallsebene liegt, es kann also nicht reflektiert werden. Die erste Glasplatte nennt man auch den *Polarisator*, die zweite den *Analysator*.

Dieser Versuch beweist, daß das Licht ein transversaler Wellenvorgang ist.

Der Polarisationswinkel eines Stoffes ist durch die Bedingung gegeben, daß der an der Oberfläche reflektierte Strahl und der in den Stoff gebrochene Strahl aufeinander senkrecht stehen (*BREWSTERsches Gesetz*, Abb. 525). Da dann $\sin \beta = \cos \alpha$, so folgt aus dem Brechungsgesetz

$$\operatorname{tg} \alpha = n. \quad (8)$$

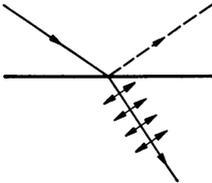


Abb. 526. Zum BREWSTER-schen Gesetz.

Dieses Gesetz läßt sich auf folgende Weise begründen. Liegt der Lichtvektor (der elektrische Feldvektor, § 306) der einfallenden Welle in der Einfallsebene, so erregt er die Elektronen im brechenden Stoff zu Schwingungen, die ebenfalls in der Einfallsebene liegen (Abb. 526). Diese Elektronenschwingungen erzeugen aber eine Strahlung nach außen, eben die reflektierte Welle. Linear hin und her

schwingende Elektronen strahlen am stärksten senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung, aber gar nicht in ihrer Bewegungsrichtung. Daher kann, wie man aus Abb. 526 erkennt, in der zum gebrochenen Strahl senkrechten Richtung kein Licht reflektiert werden. Liegt aber der Lichtvektor senkrecht zur Einfallsebene, so findet in jener Richtung maximale Reflexion statt. Enthält also eine einfallende Welle Licht beider Polarisationsrichtungen, so wird nur die letztere reflektiert.

Auch gestreutes Licht ist stets mehr oder weniger stark polarisiert (*TYNDALL-Phänomen*). Daher ist auch das zerstreute Himmelslicht (§ 295) teilweise polarisiert. Nur an zwei vom Sonnenstand abhängigen Punkten des Himmels ist das Licht nicht polarisiert (*ARAGOScher* und *BABINETScher Punkt*). Die Polarisation des Himmelslichts spielt eine gewisse Rolle in der Wetterkunde.

301. Natürliches und polarisiertes Licht. Bei *natürlichem Licht*, wie es von den Lichtquellen ausgeht, besteht zwischen den zeitlich aufeinanderfolgenden Phasen des Lichtvektors keinerlei gesetzmäßiger Zusammenhang. Betrachten wir den Lichtvektor in irgendeinem Raumpunkt, so ändert er ständig in völlig unregelmäßiger Weise seinen Betrag und seine Richtung innerhalb der zur Lichtfortpflanzung senkrechten Ebene. Bei konstanter Lichtintensität schwankt aber der Betrag um einen festen *Mittelwert* und die einzelnen, zur Fortpflanzungs-

richtung senkrechten Richtungen kommen im *zeitlichen Durchschnitt gleich häufig* vor. Es besteht hier nicht nur eine Analogie, sondern auch ein tieferer Zusammenhang mit dem Zustand der *idealen Unordnung* bei den Molekülen eines Gases (§ 62), deren Geschwindigkeitsbetrag ständig um einen festen Mittelwert schwankt, und deren Geschwindigkeitsrichtung sich ebenfalls ständig ganz regellos ändert, aber so, daß im zeitlichen Durchschnitt alle räumlichen Richtungen gleich oft vorkommen.

Polarisiertes Licht unterscheidet sich von natürlichem Licht dadurch, daß sich Betrag und Richtung des Lichtvektors *periodisch* ändern, daß also zwischen seinen aufeinanderfolgenden Phasen ein *gesetzmäßiger Zusammenhang* besteht. Wir haben die Begriffe der *elliptischen, zirkularen und linearen Polarisation* bereits in § 84 eingeführt und brauchen sie hier nur auf das Licht zu übertragen, indem wir den in Abb. 182 dargestellten Vektor r mit dem Lichtvektor identifizieren. Bei *linear polarisiertem Licht* bleibt also der Lichtvektor ständig in derselben Geraden (Abb. 182 b) und ändert nur zwischen zwei festen Grenzen seinen Betrag und sein Vorzeichen. Bei *elliptisch polarisiertem Licht* läuft die Richtung des Lichtvektors mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit in einer zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts senkrechten Ebene um (Abb. 182 a). Dabei ändert sich sein Betrag mit der doppelten Frequenz derart, daß die Spitze des Vektorpfeils eine Ellipse beschreibt. Elliptisch polarisiertes Licht kann als Überlagerung zweier senkrecht zueinander linear polarisierter Lichtwellen (ξ, η , Abb. 182 a) von verschiedener Schwingungsweite (ξ_0, η_0) aufgefaßt werden, die eine Phasendifferenz $\pi/2$ besitzen. *Zirkular polarisiertes Licht* (Abb. 182 c) ist ein Sonderfall der elliptischen Polarisation, bei dem die Schwingungsweiten dieser beiden Komponenten gleich groß sind. Man spricht von *rechts- oder linkszirkular* polarisiertem Licht, je nachdem der Lichtvektor die Fortpflanzungsrichtung im Sinne des Uhrzeigers oder ihm entgegen umkreist. Die Dauer einer Hin- und Herschwingung bei linear polarisiertem Licht und eines Umlaufs bei elliptisch oder zirkular polarisiertem Licht ist gleich der Schwingungsdauer $\tau = 1/\nu = \lambda/c$ des Lichts.

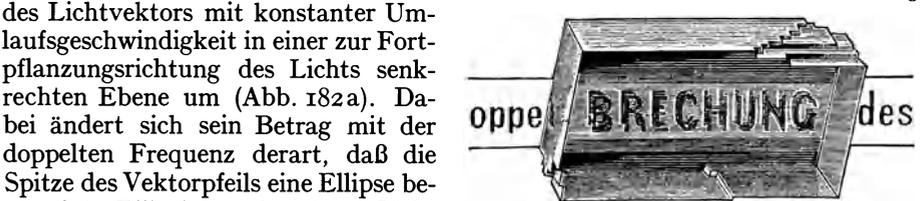


Abb. 527. Doppelbrechung im Kalkspat.

Transversale Wellen können sich nur dann durch Interferenz auslöschen, wenn sie in der gleichen Ebene schwingen. Daher können zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen, auch wenn sie kohärent sind, also aus der gleichen Welle natürlichen Lichts erzeugt wurden, nicht miteinander interferieren. Auch dies ist ein Beweis für die transversale Natur der Lichtwellen. Man vermeide es, *linear* polarisiertes Licht einfach als polarisiertes Licht zu bezeichnen, da man zwischen den verschiedenen Arten der Polarisation wohl unterscheiden muß.

302. **Doppelbrechung.** Betrachtet man einen Gegenstand, z. B. Schrift, durch ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls, so erscheint der Gegenstand doppelt. Die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes kommenden Strahlen werden also beim Durchgang durch den Kristall in je zwei Strahlen zerlegt, welche eine verschiedene Brechung erleiden (Abb. 527). Diese zuerst von HUYGENS (1690) beschriebene Erscheinung heißt *Doppelbrechung*. Das Wesen der Doppelbrechung wird durch folgenden Versuch deutlich.

Man vermeide es, *linear* polarisiertes Licht einfach als polarisiertes Licht zu bezeichnen, da man zwischen den verschiedenen Arten der Polarisation wohl unterscheiden muß.

302. **Doppelbrechung.** Betrachtet man einen Gegenstand, z. B. Schrift, durch ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls, so erscheint der Gegenstand doppelt. Die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes kommenden Strahlen werden also beim Durchgang durch den Kristall in je zwei Strahlen zerlegt, welche eine verschiedene Brechung erleiden (Abb. 527). Diese zuerst von HUYGENS (1690) beschriebene Erscheinung heißt *Doppelbrechung*. Das Wesen der Doppelbrechung wird durch folgenden Versuch deutlich.

Auf einem Schirm sei eine von hinten beleuchtete kreisförmige Blende mittels einer Linse abgebildet. Bringt man zwischen Linse und Schirm in den Weg des Lichts ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls, so entsteht an Stelle des

einen ein doppeltes Bild, und zwar steht das eine Bild, wenn die Spaltflächen des Kristalls senkrecht zu den Lichtstrahlen sind, an alter Stelle, das andere ist seitlich verschoben. Dreht man den Kristall um den Lichtstrahl als Achse, so bleibt das erste Bild stehen, das zweite dreht sich um das erste. Verwendet man linear polarisiertes Licht, indem man z. B. in den Strahlengang noch eine unter dem Polarisationswinkel gegen das Licht geneigte Glasplatte als Polarisator einschaltet, so haben die beiden Bilder im allgemeinen verschiedene Helligkeit (Abb. 528). Bei zwei um 180° auseinanderliegenden Stellungen (1 und 5) des



Abb. 528. Zur Brechung in Kalkspat.

Kristalls ist nur das eine, bei den beiden um 90° dagegen verdrehten Stellungen (3 und 7) nur das andere Bild vorhanden, dazwischen liegen alle möglichen Übergänge von hell zu dunkel.

Dieser Versuch beweist, daß die beiden Bilder, die mit Hilfe des Kalkspat-

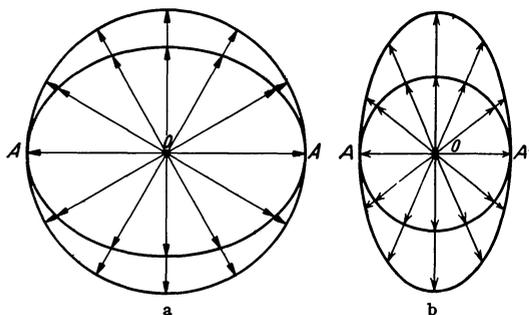


Abb. 529. Zur Doppelbrechung, a positiv, b negativ einachsiger Kristall.

kristalls entstehen, linear polarisiertem Licht ihren Ursprung verdanken, derart, daß das Licht, welches das eine Bild erzeugt, senkrecht zu dem das andere Bild erzeugenden Lichte polarisiert ist. Er zeigt ferner, daß das natürliche Licht, welches von der Lichtquelle kommt, im Kalkspat in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Anteile zerspalten wird, welche in verschiedener Weise gebrochen werden.

Isotrope amorphe Stoffe, wie Glas, sowie die Kristalle des kubischen Systems (§ 365), wie das Steinsalz, zeigen keine Doppelbrechung.

Bei allen anderen Kristallen ist sie vorhanden. Aus der verschieden starken Brechung der beiden linear polarisierten Strahlenteile folgt, daß diese im Kristall eine verschiedene Geschwindigkeit haben (§ 271). Diese ist zudem für den einen Strahlenteil von der Richtung im Kristall abhängig. Die beiden zueinander senkrechten Richtungen, nach denen die Strahlenteile linear polarisiert sind, werden durch die kristallographische Struktur des Kristalles bestimmt. Trägt man von einem Punkt O innerhalb eines Kristalls in allen Richtungen Strecken ab, deren Länge den Lichtgeschwindigkeiten der beiden senkrecht zueinander linear polarisierten Anteile entspricht, in die jeder Strahl beim Eintritt in einen doppelbrechenden Kristall zerfällt, so zeigt sich folgendes. Bei den *einachsigen* Kristallen liegen die Enden dieser Strecken für den einen Anteil auf einer Kugelfläche, für den anderen Anteil auf einem Rotationsellipsoid, das die Kugelfläche an den Enden des Durchmessers AA' berührt (Abb. 529). Der Anteil, für den die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen die gleiche ist, heißt der *ordentliche Strahl*. Der zweite Anteil aber, der *außerordentliche Strahl*, hat in den verschiedenen Richtungen im Kristall verschiedene Geschwindigkeiten. Nur in Richtung der Geraden AA' , der *optischen Achse* des Kristalls, haben beide Anteile gleiche Geschwindigkeit. (Man beachte, daß die optische Achse keine feste Gerade im Kristall ist, sondern nur eine feste Richtung in ihm bezeichnet.) Ein Kristall heißt *positiv einachsig*, wenn die optische Achse

mit der großen Halbachse des Rotationsellipsoids zusammenfällt, wenn also die Geschwindigkeit des außerordentlichen Strahls kleiner als die des ordentlichen ist (Abb. 529a), andernfalls *negativ einachsig* (Abb. 529b).

Nach § 271, Gl. (14), kann bei der Brechung ein konstantes Sinusverhältnis nur dann gelten, wenn der Brechungsindex n eine Konstante ist, wenn also die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen die gleiche ist. Demnach verhält sich bei der Brechung in einem doppeltbrechenden Stoff nur der ordentliche Strahl so, wie in einem isotropen Stoff, der außerordentliche hingegen nicht. Ebenso verbleibt auch nur der ordentliche Strahl nach der Brechung in der Einfallsebene, der außerordentliche aber im allgemeinen nicht. Das läßt sich aus dem FERMATSchen Prinzip ableiten (§ 266). Für den ordentlichen Strahl kann man also einen vom Einheitswinkel unabhängigen Brechungsindex n_0 angeben. Der Brechungsindex n_a des außerordentlichen Strahls aber hängt von der Richtung des gebrochenen Strahls im Kristall und daher mittelbar vom Einfallswinkel ab.

Schleift man eine Kristallplatte so, daß ihre Begrenzungsflächen *senkrecht* zur optischen Achse liegen, und läßt Licht senkrecht auf den Kristall fallen, so findet keine Brechung statt, und beide Anteile pflanzen sich gleich schnell durch den Kristall fort. Sind dagegen zwei Begrenzungsflächen *parallel* zur optischen Achse geschliffen, so findet bei senkrechtem Einfall des Lichts zwar ebenfalls keine Brechung statt, aber die beiden Anteile pflanzen sich verschieden schnell durch den Kristall fort, es treten also Gangunterschiede zwischen ihnen auf. Denn ihre optischen Weglängen (§ 271) sind im Kristall verschieden groß.

Dies kann dazu dienen, um aus linear polarisiertem Lichte zirkular polarisiertes Licht herzustellen. Man benutzt dazu eine parallel zur optischen Achse geschnittene, doppeltbrechende Kristallplatte. Ihre Dicke wird so bemessen, daß der ordentliche und der außerordentliche Strahl bei senkrechtem Durchtritt einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erhalten. Man läßt senkrecht auf die Platte linear polarisiertes Licht fallen, dessen Polarisationssebene unter 45° gegen die Polarisationssebenen des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls im Kristall geneigt ist. Der einfallende Strahl zerfällt dann in zwei gleich starke Anteile, welche beim Eintritt in gleicher Phase sind. Beim Austritt vereinigen sie sich wieder, haben aber nicht mehr die gleiche Phase, sondern einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge. Sie bilden, da ihre Schwingungsweiten gleich groß sind, nach dem Austritt eine zirkular polarisierte Welle. Bei anderer Orientierung der Polarisationssebene des einfallenden Lichts sind die Schwingungsweiten nicht gleich, die austretende Welle ist elliptisch polarisiert. Man benutzt zu diesem Zweck meist Glimmerblättchen von geeigneter Dicke (Viertelwellenlängenblättchen).

Bei den Kristallen des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems (§ 365) ist die Lichtgeschwindigkeit für *beide* senkrecht zueinander polarisierten Anteile von der Richtung abhängig. Es gibt in ihnen zwei Richtungen, in denen sich die beiden Anteile gleich schnell fortpflanzen. Diese Kristalle haben also zwei optische Achsen; man nennt sie *zweiachsige Kristalle*.

Die gebrochenen Strahlen können nach FRESNEL im Falle der Doppelbrechung auf folgende Weise konstruiert werden. Wir beschränken uns dabei auf die einachsigen Kristalle und auf zwei besonders einfache Fälle, nämlich auf diejenigen, in denen auch der außerordentliche Strahl in der Einfallsebene verbleibt.

1. *Die optische Achse liegt in der Einfallsebene* (Zeichnungsebene, Abb. 530a). Der Querschnitt der einen Wellenfläche im Kristall ist ein Kreis, der der anderen eine den Kreis in der optischen Achse berührende Ellipse. Von B aus werden

die Tangenten BD_1 und BD_2 an Kreis und Ellipse gelegt. AD_1 ist der ordentliche, AD_2 der außerordentliche Strahl. Je nachdem die Ellipse außerhalb, wie in der Abb. 530a, oder innerhalb des Kreises liegt, ist der außerordentliche Strahl schwächer oder stärker gebrochen als der ordentliche.

2. Die optische Achse liegt senkrecht zur Einfallsebene (Zeichnungsebene, Abb. 530b). In diesem Falle sind die Querschnitte der beiden Wellenflächen Kreise.

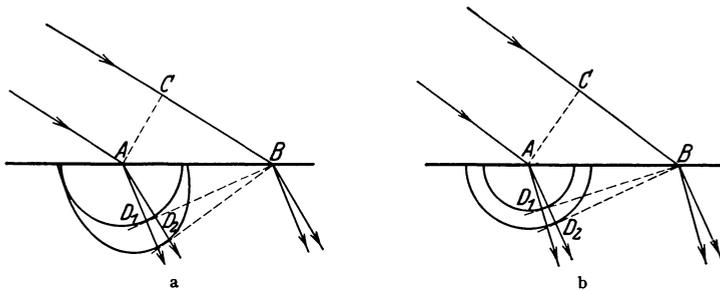


Abb. 530. FRESNELSche Konstruktion der Doppelbrechung.

Man beachte, daß nur beim ordentlichen Strahl die Wellennormalen mit den Strahlen identisch sind, wie in den einfach brechenden Stoffen. Beim außerordentlichen Strahl hingegen stehen die Wellenflächen nicht senkrecht auf den Strahlen, also der Fortpflanzungsrichtung des Lichts.

Manche doppeltbrechenden Kristalle haben die Eigenschaft, daß sie den einen der beiden linear polarisierten Anteile stärker absorbieren als den anderen. Dieser *Dichroismus* ist z. B. beim Turmalin sehr stark ausgeprägt. In nicht zu dünnen Schichten läßt er von dem einen Anteil so gut wie nichts hindurch, während der andere weit weniger geschwächt wird. Eine parallel zur optischen Achse geschnittene Turmalinplatte kann daher zur Herstellung linear polarisierten Lichts sowie als Analysator dienen und wird dazu insbesondere in der Mineralogie und Kristallographie viel benutzt.

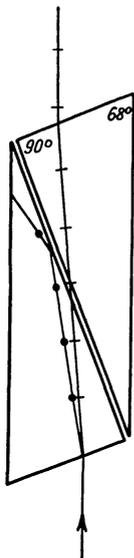


Abb. 531.
NICOLSches
Prisma.

303. Das NICOLSche Prisma. Das NICOLSche Prisma dient zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht aus natürlichem Licht. Ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls wird unter einem bestimmten Winkel in zwei gleiche Teile zerschnitten (Abb. 531) und mit Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Außerdem werden seine beiden Endflächen angeschliffen, so daß sie mit den Seitenflächen einen Winkel von 68° bilden. Fällt natürliches Licht in der aus Abb. 531 ersichtlichen Weise in das Prisma, so wird es in einen ordentlichen, in diesem Fall stärker gebrochenen, und einen schwächer gebrochenen außerordentlichen Strahl zerlegt. Beide treffen auf die Schicht von Kanadabalsam. Für den ordentlichen Strahl ist der Brechungsindex des Kalkspats ($n = 1,66$) größer als der des Kanadabalsams ($n = 1,54$), und da er unter einem Winkel einfällt, der größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist, so wird er seitlich reflektiert und tritt nicht durch das Prisma hindurch. Für den außerordentlichen Strahl hingegen ist der Brechungsindex des Kalkspats in der betreffenden Richtung ($n = 1,49$) kleiner als der des Kanadabalsams, es findet keine Totalreflexion statt, und der außerordentliche Strahl tritt auf der anderen Seite des Prismas als linear polarisiertes Licht aus. Das NICOLSche Prisma wirkt also, wie eine unter 57° gestellte Glasplatte, als Polarisator.

Es kann aber auch als Analysator, d. h. zum Nachweis linearer Polarisation, dienen. Läßt man Licht nacheinander durch zwei NICOLSche Prismen gehen,

so wird das vom ersten, dem Polarisator, durchgelassene Licht vom zweiten, dem Analysator, nur dann ungeschwächt durchgelassen, wenn beide Prismen gleiche Orientierung im Raum haben oder um 180° gegen diese Lage gegeneinander gedreht sind (parallele Nicols). Sind sie um 90° gegeneinander verdreht (gekreuzte Nicols), so läßt das zweite Prisma kein Licht hindurch. Bei anderen Lagen findet eine mehr oder weniger starke Schwächung des vom ersten Prisma durchgelassenen Lichts durch das zweite Prisma statt.

Wie in § 302 erwähnt, tritt linear polarisiertes Licht, welches durch einen doppeltbrechenden Kristall fällt, in der Regel als elliptisch polarisiertes Licht aus ihm wieder aus. Bringt man einen solchen Kristall zwischen gekreuzte Nicols, so tritt an Stelle der vorherigen Dunkelheit Aufhellung ein, weil ja das in den Analysator fallende Licht nicht mehr linear polarisiert ist. Benutzt man zu diesem Zweck weißes Licht, so ist der Grad der Aufhellung wegen der Verschiedenheit des Brechungsindex des Kristalls für die einzelnen Spektralfarben verschieden. Dies hat das Auftreten von Farben zur Folge. Bildet man die zwischen gekreuzten Nicols befindliche Kristallplatte mittels einer Linse auf einen Schirm ab, so erscheint sie im parallelen Licht je nach ihrer Dicke in verschiedenen Farben, im konvergenten Licht auch von dunklen Streifen durchzogen. Die Erscheinung ist von der Lage der optischen Achse zur Polarisationsebene des Lichts abhängig, ändert sich also bei Drehung des Kristalls um eine in der Lichtrichtung liegende Achse. Auf die genaue Theorie muß hier verzichtet werden.

Diese Erscheinungen können dazu dienen, die Lage der optischen Achsen von Kristallen festzustellen. Auch kann man auf diese Weise z. B. die Doppelbrechung in Gläsern nachweisen, welche infolge schneller Kühlung oder eines Drucks innere Spannungen haben und daher nicht mehr isotrop sind.

304. Flüssige Kristalle. Elektrische Doppelbrechung. Die Doppelbrechung der Kristalle hängt auf das engste mit der regelmäßigen räumlichen Anordnung der elementaren Bausteine der Kristalle (§ 314 und 365) zusammen. In den Flüssigkeiten und Gasen sind die Moleküle vollkommen regellos gelagert, können daher im allgemeinen keine Doppelbrechung hervorrufen. Eine Ausnahme bilden gewisse organische Flüssigkeiten, deren Moleküle einen sehr verwickelten Bau und vermutlich langgestreckte Form haben oder sich zu langgestreckten Gebilden aneinander legen. Diese haben, wenn sie sich zwischen zwei nahe benachbarten Begrenzungswänden befinden (z. B. in einer dünnen Schicht zwischen Objektträger und Deckglas, wie man sie beim Mikroskop verwendet), die Neigung, sich senkrecht zur Begrenzung einzustellen und so die gleiche Richtung anzunehmen. Bei solchen Flüssigkeiten tritt dann ebenfalls Doppelbrechung auf (*flüssige Kristalle*, O. LEHMANN).

Auch ein elektrisches Feld kann die Moleküle einer Flüssigkeit oder eines Gases, sofern sie von Natur elektrische Dipole sind (§ 344), gleichsinnig richten. Solche Stoffe zeigen eine *elektrische Doppelbrechung* (KERR-Effekt, 1875), d. h. sie werden doppeltbrechend, wenn in ihnen ein elektrisches Feld herrscht. Die Wirkung ist beim Nitrobenzol besonders ausgeprägt, das daher für die KERR-Zellen bevorzugt verwendet wird. Diese spielen eine wichtige Rolle beim Tonfilm und bei der Fernübertragung von Bildern. Eine solche Zelle besteht aus einem mit Nitrobenzol gefüllten Kondensator, zwischen dessen beiden Platten Licht hindurchfallen kann. Vor und hinter der Zelle befindet sich eine NICOLSsche Prisma. Wenn diese beiden Prismen gekreuzt sind, so kann kein Licht durch die Vorrichtung hindurchgehen. Wird jedoch durch eine am Kondensator liegende Spannung im Nitrobenzol ein elektrisches Feld erzeugt, so bewirkt die nunmehr vorhandene Doppelbrechung, wie in § 303 erläutert, eine Aufhellung. Die Wirkung ist dem Quadrat der Feldstärke proportional.

305. Drehung der Polarisationssebene. Manche Stoffe, z. B. Zuckerlösung, Quarz, haben die Eigenschaft, daß sie die Polarisationssebene linear polarisierten Lichts, welches durch sie hindurchtritt, drehen (*optisch aktive Stoffe*). Bringt man einen solchen Stoff zwischen gekreuzte NICOLSche Prismen, so tritt eine Aufhellung des Gesichtsfeldes ein. Damit wieder Dunkelheit eintritt, muß der Analysator um einen bestimmten Winkel gedreht werden. Jedoch darf man diesen Winkel nicht ohne weiteres mit dem Drehungswinkel in dem Stoff gleichsetzen, denn eine Drehung der Polarisationssebene um $z \cdot 180^\circ + \alpha$ oder $-(z \cdot 180^\circ - \alpha)$ würde durch eine Drehung des Analysators um den Winkel $-\alpha$ ebenso ausgeglichen werden wie eine Drehung der Polarisationssebene um den Winkel α selbst ($z =$ ganze Zahl). Eine Entscheidung über die wirkliche Drehung kann nur durch Änderung der Schichtdicke getroffen werden.

Die einfallende, linear polarisierte Welle schwinde in der x -Richtung; der Momentanwert des Lichtvektors sei also an der Eintrittsstelle etwa durch die Gleichung $x = a \sin \omega t$ dargestellt. Die gleiche Welle können wir uns aber auch durch Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle entstanden denken:

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin \omega t, \quad y_1 = \frac{a}{2} \cos \omega t, \quad x_2 = \frac{a}{2} \sin \omega t, \quad y_2 = -\frac{a}{2} \cos \omega t.$$

Bei Addition ergeben die beiden x -Komponenten der Schwingung gerade den obigen Wert, und die beiden y -Komponenten heben sich gegenseitig auf. Die Drehung der Polarisationssebene rührt daher, daß sich in den optisch drehenden Stoffen rechts- und linkszirkular polarisierte Wellen verschieden schnell fortpflanzen. Die Geschwindigkeiten seien c_1 und c_2 . Ist die Dicke der von den beiden Wellen durchsetzten Schicht d , so sind die Wellen an der Austrittsstelle zur Zeit t nach § 82 dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{a}{2} \sin \omega \left(t - \frac{d}{c_1} \right), & y'_1 &= \frac{a}{2} \cos \omega \left(t - \frac{d}{c_1} \right), \\ x'_2 &= \frac{a}{2} \sin \omega \left(t - \frac{d}{c_2} \right), & y'_2 &= -\frac{a}{2} \cos \omega \left(t - \frac{d}{c_2} \right). \end{aligned}$$

Die Komponenten der Gesamtschwingung ergeben sich durch Addition der Einzelschwingungen zu

$$\begin{aligned} x' &= x'_1 + x'_2 = a \sin \omega \left[t - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right] \cdot \cos \omega \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right), \\ y' &= y'_1 + y'_2 = a \sin \omega \left[t - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right] \cdot \sin \omega \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right). \end{aligned}$$

Dies ist wieder eine linear polarisierte Schwingung, welche nach der Gleichung

$$z = \sqrt{x'^2 + y'^2} = a \sin \omega \left[t - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right]$$

verläuft. Der Winkel δ , um den die Polarisationssebene gegen ihre ursprüngliche Richtung gedreht ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \omega \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \quad \text{oder} \quad \delta = \omega \frac{d}{2} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right). \quad (9)$$

Der Drehungssinn hängt davon ab, ob c_1 größer oder kleiner als c_2 ist (Rechts- und Linksdrehung). Alle optisch drehenden Stoffe können in der Natur sowohl in der rechtsdrehenden wie in der linksdrehenden Modifikation vorkommen, z. B. Rechtsquarz und Linksquarz. Die Drehung beruht auf einer Asymmetrie der Moleküle, das Vorkommen beider Modifikationen darauf, daß zu jedem asymmetrischen Molekül auch sein Spiegelbild möglich ist. Bei den zahlreichen drehenden organischen Stoffen beruht die Asymmetrie auf dem Vorhandensein

eines sog. *asymmetrischen Kohlenstoffatoms*, d. h. eines Kohlenstoffatoms, dessen vier Valenzen an vier unter sich verschiedene Gebilde gebunden sind, wie z. B. bei der Milchsäure an die Gebilde COOH, OH, CH₃ und H. Wird ein Stoff mit asymmetrischen Molekülen aus seinen nicht drehenden Bestandteilen auf gewöhnlichem chemischen Wege aufgebaut, so entstehen von beiden Modifikationen stets gleiche Mengen. Dann erscheint der Stoff optisch inaktiv, weil sich die durch die beiden Modifikationen hervorgerufenen Drehungen aufheben. Ein solcher Stoff heißt ein *Razemat*. Hingegen wird von den Organismen bei biochemischen Reaktionen oft nur die eine der beiden Modifikationen erzeugt. Es scheint, daß die optische Aktivität ein besonderes Merkmal zahlreicher für den Ablauf der Lebensvorgänge besonders wichtiger organischer Stoffe ist.

Die Drehung der Polarisationssebene findet Anwendung bei der Untersuchung von Lösungen auf Zuckergehalt und bei vielen anderen chemischen Analysen. Die hierzu dienenden Geräte heißen Saccharimeter.

Stoffe, welche an sich die Polarisationssebene nicht drehen, tun dies, wenn sie in ein starkes magnetisches Feld gebracht werden, dessen Kraftlinien in der gleichen Richtung verlaufen wie das Licht (*magnetische Drehung der Polarisationssebene*, FARADAY-Effekt). Der Winkel, um den das Licht der gelben Linie des Natriums (*D-Linie*) auf 1 cm Weg durch ein Feld von der Stärke 1 Örsted gedreht wird, heißt die VERDETSche Konstante des betreffenden Stoffes.

306. Das Licht als elektromagnetische Welle. Die elektromagnetische Lichttheorie MAXWELLS gründet sich auf die Tatsache, daß die MAXWELLSchen Gleichungen (§ 232) Lösungen besitzen, die einer im Raume fortschreitenden elektromagnetischen Welle entsprechen. Wir wollen annehmen, daß eine solche Welle eine elektrische Feldkomponente nur in der *x*-Richtung, eine magnetische Feldkomponente nur in der *y*-Richtung besitzt, also die Komponenten E_x und H_y . Dann folgt aus den Gl. (19) und (20) (§ 232) durch zyklische Vertauschung

$$\frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (10)$$

Dabei haben wir hier c_0 statt c gesetzt, um zu bezeichnen, daß es sich um die Vakuumlichtgeschwindigkeit handelt. Unter c verstehen wir jetzt die Lichtgeschwindigkeit in dem vorliegenden Stoff mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ . Eine Lösung dieser Gleichungen lautet

$$E_x = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad H_y = H_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (11)$$

Man stellt durch Einsetzen in Gl. (10) leicht fest, daß Gl. (11) eine Lösung der Gl. (10) ist, wenn

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c_0}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (12)$$

Gl. (11) stellt nach § 82 in der Tat eine in der *z*-Richtung fortschreitende transversale Welle dar, und zwar sowohl für die elektrische, wie für die magnetische Feldstärke. Die Geschwindigkeit dieser Welle ist nach § 82, Gl. (12), gleich c . Da c_0/c nach § 271 gleich dem Brechungsindex n ist, so haben wir diesen durch Gl. (12) auf die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität des betreffenden Stoffes zurückgeführt. (Über die Bestätigung dieser MAXWELLSchen Beziehung s. § 309.)

Die durch Gl. (11) dargestellte Welle ist linear polarisiert bezüglich des elektrischen und des magnetischen Feldvektors. Und zwar schwingen diese beiden Vektoren in zueinander senkrechten Ebenen. Die Theorie ergibt, daß in Licht,

welches unter dem Polarisationswinkel reflektiert wurde, nur solche Wellen enthalten sind, deren elektrischer Vektor zur Einfallsebene senkrecht liegt (§ 300). Demnach ist der von uns in § 300 definierte Lichtvektor mit dem elektrischen Feldvektor identisch. Tatsächlich sind auch diesem die unmittelbaren Wirkungen des Lichts, z. B. seine chemischen Wirkungen, zuzuschreiben. Einen Beweis dafür liefern die Versuche mit stehenden Lichtwellen (§ 296). Nach der Theorie muß die elektrische Feldstärke am Spiegel einen Knoten haben, wie in Abb. 520 gezeichnet, die magnetische Feldstärke dagegen einen Bauch. Der elektrische und der magnetische Anteil in einer stehenden Lichtwelle sind also um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge gegeneinander verschoben. Die Schwärzung des Häutchens tritt an denjenigen Stellen auf, die einem Bauch, also einem Maximum, der elektrischen Feldstärke entsprechen.

Der Scheitelwert der elektrischen Feldstärke erreicht in stärkster Sonnenstrahlung auf der Erde Beträge von der Größenordnung $15 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}$.

307. Magnetooptik. Elektrooptik. Wie die elektromagnetischen Wellen der Technik ihre Ursache in zeitlich veränderlichen Strömen in elektrischen Schwingungskreisen haben, so rühren die elektromagnetischen Lichtwellen von Zustandsänderungen der Elektronen an den Atomen her. Die

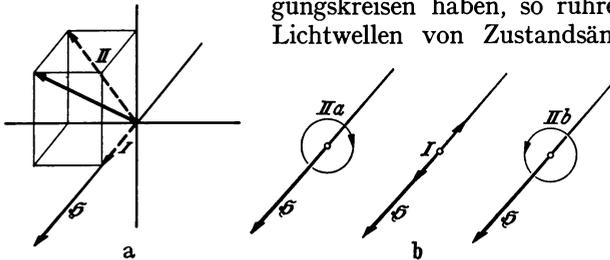


Abb. 532. Zum ZEEMAN-Effekt.

Atome wirken also wie winzig kleine „Oszillatoren“ (§ 254). Für viele Fälle genügt die Vorstellung, daß die Elektronen die Atomkerne umkreisen. Wir haben von ihr schon bei der Deutung

des Diamagnetismus (§ 215) Gebrauch gemacht. Ein solches kreisendes, also bewegtes Elektron erfährt in einem magnetischen Felde eine Kraft (§ 193). Hierauf beruhen die *magnetooptischen Erscheinungen*.

Die wichtigste magnetooptische Erscheinung ist der *ZEEMAN-Effekt* (ZEEMAN 1896). Er kann in einfacheren Fällen auf Grund einer von H. A. LORENTZ stammenden Vorstellung gedeutet werden. LORENTZ nimmt an, daß ein Elektron durch eine quasielastische Kraft an eine bestimmte Ruhelage im Atom gebunden ist, d. h. daß die auf das Elektron wirkende Kraft seinem Abstand von der Ruhelage proportional und auf sie hin gerichtet ist. Ein solches Elektron kann also lineare Schwingungen um diese Ruhelage ausführen. Das Atom mit dem Elektron befinde sich in einem magnetischen Felde \mathfrak{H} . Wir zerlegen nun zunächst die lineare Schwingung des Elektrons in zwei Komponenten, deren eine (I) parallel und deren andere (II) senkrecht zum Felde erfolgt (Abb. 532a). Die zweite Komponente können wir, ebenso wie die Lichtschwingung in § 306, in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Komponenten (IIa , IIb) zerlegt denken (Abb. 532b). Die zum Felde parallele Komponente I wird von ihm nicht beeinflusst [§ 193, Gl. (13a), $[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = 0$]. Dagegen erfahren die beiden anderen Komponenten eine Kraft, die bei IIa radial nach außen, bei IIb radial nach innen gerichtet ist. (Die Kräfte haben die entgegengesetzte Richtung wie das Vektorprodukt $[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$, weil die Ladung ϵ des Elektrons negativ ist.) Da \mathfrak{v} und \mathfrak{H} aufeinander senkrecht stehen, so betragen diese Kräfte nach § 193, Gl. (13b), $\pm \epsilon v H$.

Ist u die Winkelgeschwindigkeit der beiden Kreiskomponenten ohne Anwesenheit des Feldes, r ihr Bahnradius, so wirkt eine quasielastische Zentripetalkraft $\mu r u^2$ (§ 34, μ Masse des Elektrons). Unter der Wirkung des magnetischen Feldes ändert sich nun, wie die Theorie ergibt, der Bahnradius nicht,

wohl aber die Winkelgeschwindigkeit von u in $u + \Delta u$. Zur quasielastischen Kraft $\mu r u^2$ kommt jetzt die vom Felde herrührende Kraft $\pm \epsilon v H = \pm \epsilon r (u + \Delta u) H$ hinzu. Die gesamte Zentripetalkraft beträgt daher jetzt $\mu r u^2 \pm \epsilon r (u + \Delta u) H = \mu r (u + \Delta u)^2$. Wir setzen jetzt voraus, daß $\epsilon r \Delta u H$ klein gegen $\mu r u^2$ ist. Dann ist auch die Änderung Δu klein gegen u , und es folgt aus der obigen Gleichung durch einfache Rechnung, unter Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder mit Δu^2 und $H \Delta u$, $\Delta u = \pm \epsilon H / 2 \mu$.

Nach der hier verwendeten Vorstellung muß nun die Frequenz ν des von dem schwingenden Elektron ausgesandten Lichts gleich der Umlauffrequenz (Drehzahl, § 12) des Elektrons sein. Diese beträgt im magnetischen Felde $\nu = (u + \Delta u) / 2 \pi$. Es ist also die durch das magnetische Feld hervorgerufene Änderung der Schwingungszahl $\Delta \nu = \Delta u / 2 \pi$ oder

$$\Delta \nu = \pm \frac{1}{4 \pi} \frac{\epsilon}{\mu} H \text{ sec}^{-1}, \tag{13}$$

positiv bei der Komponente IIb , negativ bei IIa . Erstere Komponente erfährt also eine Erhöhung ihrer Schwingungszahl, eine Verschiebung nach Violett, letztere eine Verminderung ihrer Schwingungszahl, eine Verschiebung nach Rot. Die Schwingungszahl der zum Felde parallelen Komponente bleibt unverändert. Eine Spektrallinie erfährt also im magnetischen Felde eine *Aufspaltung* in drei Komponenten (normales *LORENTZ-Triplett*).

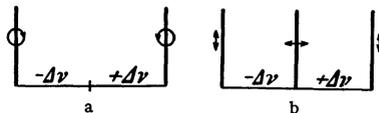


Abb. 533. Schema a des longitudinalen, b des transversalen normalen ZEEMAN-Effekts.

Jedoch hängt die Beobachtbarkeit und der Polarisationszustand dieser drei Komponenten von dem Winkel gegen die Feldrichtung ab, unter dem man die Lichtquelle betrachtet. Ein auf einer Geraden hin- und herschwingendes Elektron sendet in Richtung dieser Geraden kein Licht aus. In allen anderen Richtungen ist das von ihm ausgesandte Licht linear polarisiert. Ein rotierendes Elektron sendet in der zu seiner Bahnebene senkrechten Richtung zirkular polarisiertes Licht aus, in den in seiner Bahnebene liegenden Richtungen aber linear polarisiertes Licht. Aus diesen Gründen bietet der *ZEEMAN-Effekt* ein verschiedenes Bild, je nachdem man eine in ein magnetisches Feld gebrachte Lichtquelle *in Richtung* der magnetischen Kraftlinien (longitudinal) oder *senkrecht* zu ihnen (transversal) beobachtet. Beim *longitudinalen ZEEMAN-Effekt* ist die unverschobene Komponente *nicht* sichtbar. Rechts und links vom Ort der unverschobenen Linie erscheinen zwei verschobene Linien, deren eine rechts- und deren andere linkszirkular polarisiert ist (Abb. 533a). Beim *transversalen ZEEMAN-Effekt* erscheinen drei Komponenten. Die eine ist unverschoben und parallel zur Feldrichtung linear polarisiert. Die beiden anderen sind wieder nach rot bzw. violett verschoben und senkrecht zur ersten linear polarisiert (Abb. 533b).

Ein dieser Theorie entsprechender *normaler ZEEMAN-Effekt*, also das Auftreten eines normalen *LORENTZ-Triplets*, ist in der Tat in manchen Fällen beobachtet worden. Im allgemeinen aber ist die Aufspaltung verwickelter. Eine mit der gesamten Erfahrung übereinstimmende Theorie des *ZEEMAN-Effekts* kann nur auf dem Boden der Quantentheorie gegeben werden.

Aus $\Delta \nu$ und H kann man nach Gl. (13) die spezifische Ladung ϵ / μ (§ 194) der Ladungsträger berechnen, deren Bewegung die Lichtaussendung veranlaßt. Sie ergibt sich in der Tat gleich derjenigen der Elektronen. Das war der erste eindeutige Beweis dafür, daß die Lichtaussendung ihren Ursprung in Zustandsänderungen von an die Atome gebundenen Elektronen hat (H. A. LORENTZ).

HALE hat gefunden, daß das von den Sonnenflecken kommende Licht einen *ZEEMAN-Effekt* zeigt, der das Auftreten starker magnetischer Felder in den

Flecken beweist. Diese Felder rühren davon her, daß die Sonnenflecken Wirbel von Sonnenstoff bilden, die eine starke elektrische Ladung mitführen.

Die *elektrooptischen Erscheinungen* rühren davon her, daß die Elektronen auch im elektrischen Felde eine Kraft erfahren. Sendet ein in einem elektrischen Felde befindliches Atom Licht aus, so tritt eine dem *ZEEMAN-Effekt* ähnliche Aufspaltung der Spektrallinien ein. Man kann diesen *STARK-Effekt* (J. STARK 1913, LO SURDO) an Kanalstrahlen (§ 183) beobachten, welche in einem starken elektrischen Felde verlaufen. Diese Erscheinung kann nur mit Hilfe der Quantentheorie erklärt werden. Hier kann nur so viel gesagt werden, daß die Bahnen der um ein Atom kreisenden Elektronen durch die Kraftwirkung des elektrischen Feldes verzerrt werden. Dadurch wird, ähnlich wie in einem magnetischen Felde, die Frequenz der einzelnen Komponenten, in die man sich die Elektronenbewegung zerlegt denken kann, in verschiedener Weise beeinflusst.

Eine weitere elektrooptische Erscheinung haben wir schon im *KERR-Effekt* kennengelernt.

IV. Das elektromagnetische Spektrum.

308. Übersicht über das gesamte Spektrum. Das Licht, welches unser Auge als solches wahrnimmt, ist nur ein sehr kleiner Ausschnitt aus dem gesamten elektromagnetischen Spektrum, dessen Grenzen durch den engen Empfindlichkeitsbereich des Auges gegeben sind. Mittels geeigneter Vorrichtungen ist es

aber möglich, auch in die dem Auge verschlossenen Spektralgebiete vorzudringen, und es zeigt sich dann, daß sich das Spektrum sowohl über das rote wie über das violette Ende des sichtbaren Bereichs hinaus noch außerordentlich weit ausdehnt. Es liegt ja auch nach der Wellentheorie kein Grund vor, daß nicht alle Licht-

schwingungen zwischen den Grenzen $\nu = 0$ ($\lambda = \infty$) und $\nu = \infty$ ($\lambda = 0$) in der Natur vorkommen sollten. Das langwelligere Gebiet, welches sich an das rote Ende des sichtbaren Spektrums anschließt, bezeichnet man als das *ultra-rote Spektrum*. Es überdeckt sich an seinem langwelligsten Ende mit den kürzesten auf elektrischem Wege erzeugten Wellen, die wir bereits in § 254 behandelten. Jenseits des Violetten erstreckt sich das *ultraviolette Spektrum*, und an dieses wieder schließen sich die *Röntgenstrahlen* und die *Gammastrahlen* der radioaktiven Stoffe an. Tabelle 31 gibt eine Übersicht über die Ausdehnung der einzelnen Spektralbereiche, Abb. 534 eine entsprechende graphische Darstellung. Als Abszisse ist nicht die Wellenlänge selbst gewählt, sondern der \log der in Ängström-Einheiten ausgedrückten Wellenlänge. Dies entspricht einer Einteilung des Spektrums, die der Einteilung der Tonleiter in Oktaven analog ist (§ 96, Abb. 220).

Wo sich zwei verschieden benannte Bereiche überschneiden, bedeutet dies nur eine verschiedene Erzeugungsart gleichartiger Strahlung. Aus Abb. 534 erkennt man, wie eng begrenzt der Empfindlichkeitsbereich des menschlichen Auges ist.

Grundsätzlich gelten die bisher besprochenen optischen Gesetze im ganzen Bereich des elektromagnetischen Spektrums. Die Auswirkung dieser Gesetze ist jedoch vielfach eine andere als im sichtbaren Gebiet, unter anderem deshalb,

Tabelle 31. Das gesamte Spektrum.

Art der Strahlen	Wellenlänge in ÅE
Kürzeste Gammastrahlen	$0,57 \cdot 10^{-2}$
Röntgenstrahlen	$1,58 \cdot 10^{-1} - 6,6 \cdot 10^2$
Ultraviolett	$1,36 \cdot 10^2 - 3,6 \cdot 10^3$
Sichtbares Gebiet	$3,6 \cdot 10^3 - 7,8 \cdot 10^3$
Ultrarot	$7,8 \cdot 10^3 - 3,4 \cdot 10^6$
Elektrische Wellen	$2 \cdot 10^6 - \infty$

weil die schon im Bereiche des Sichtbaren mit der Wellenlänge veränderlichen optischen Eigenschaften der Stoffe (Reflexionsvermögen, Brechungsindex, Durchlässigkeit) sich mit größeren Änderungen der Wellenlänge durchweg außerordentlich stark ändern. Daher ist es auch in der Regel notwendig, für die Untersuchung von Strahlung, die außerhalb des sichtbaren Gebietes liegt, Linsen, Prismen usw. aus anderen Stoffen als Glas zu gebrauchen. Je weiter man sich vom sichtbaren Gebiet entfernt, desto andersartiger werden auch die zur Untersuchung des Spektrums anzuwendenden Geräte. Die Art der Wellenlängenmessung ist jedoch durchweg die gleiche. Sie beruht stets unmittelbar oder mittelbar auf der Interferenz.

Da die Grenzen des sichtbaren Spektrums nur physiologisch bedingt sind, jedoch keine physikalische Bedeutung haben, so wird, um die einheitliche Natur des ganzen elektromagnetischen Spektrums zu betonen, häufig jede elektromagnetische Strahlung (mit Ausnahme der technischen elektrischen Wellen),

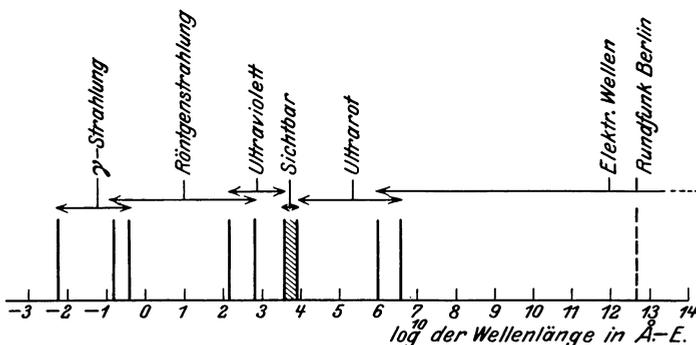


Abb. 534. Das gesamte Spektrum.

ganz gleich ob sichtbar oder unsichtbar, als Licht bezeichnet, und man spricht von ultrarotem und ultraviolettem Licht, Röntgenlicht usw.

309. Dispersion, Absorption und Reflexion im gesamten Spektrum. Wie in § 285 auseinandergesetzt wurde, steigt im sichtbaren Gebiet im allgemeinen der Brechungsindex n eines Stoffes beim Übergang von längeren zu kürzeren Wellen (von Rot nach Violett). Es gibt aber Fälle von *anomaler Dispersion*, die dieser Regel widersprechen. Jeder Stoff hat mindestens ein, meistens mehrere Gebiete anomaler Dispersion, die aber, wegen der Schmalheit des sichtbaren Spektralgebietes, meist außerhalb desselben im Ultrarot oder Ultraviolett liegen. Auf Grund der älteren Lichttheorie lassen sich diese Tatsachen als eine Resonanzerscheinung an den Atomen oder Molekülen deuten. Resonanz eines schwingungsfähigen Gebildes erfolgt dann, wenn es mit einer Frequenz erregt wird, die einer seiner Eigenfrequenzen gleich ist (§ 194, s. dort auch über den Einfluß der Dämpfung). Die Gebiete anomaler Dispersion sind danach die Gebiete, in denen eine Eigenfrequenz der Atome oder Moleküle des betreffenden Stoffes liegt. Läßt man die Dämpfung dieser Gebilde außer Betracht, so führen Überlegungen auf Grund der MAXWELLSchen Theorie zu dem Ergebnis, daß sich der Brechungsindex n eines Stoffes, dessen Permeabilität $\mu \approx 1$ ist, für alle Wellenlängen λ durch die Formel von KETTELER-HELMHOLTZ,

$$n^2 = \varepsilon + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{M_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \dots, \tag{I}$$

ausdrücken läßt. Hierin bedeutet ε die Dielektrizitätskonstante des Stoffes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ usw. sind die Wellenlängen der Eigenschwingungen der Atome oder

Moleküle, und M_1, M_2 usw. sind für jeden Stoff bestimmte Konstanten, die unter anderem von der Zahl der schwingungsfähigen Gebilde in 1 cm^3 abhängen.

In § 306 haben wir die MAXWELLSche Beziehung $n^2 = \epsilon \mu$ abgeleitet. Durchsichtige Stoffe mit einer von $\mu = 1$ merklich verschiedenen Permeabilität gibt es nicht. Daher lautet die MAXWELLSche Beziehung für alle wirklich vorkommenden Fälle $n^2 = \epsilon$. Man erkennt, daß dies für den Grenzfall sehr langer Wellen, d. h. wenn λ sehr groß gegen jede Eigenwellenlänge λ_s des Stoffes ist, auch aus

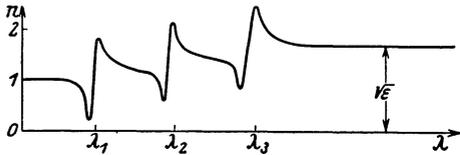


Abb. 535. Schema der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge für den Fall dreier Eigenfrequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Nach Gl. (1) müßte der Brechungsindex n für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ usw. jedesmal auf $+\infty$ steigen, beim Durchgang durch diese Werte auf $-\infty$ fallen, dann zunächst anwachsen, um mit weiter steigender Wellenlänge bis zur nächsten Resonanzstelle wieder langsam zu fallen. Infolge von Dämpfung verläuft jedoch n etwa so, wie es in Abb. 535 schematisch dargestellt ist. Die Resonanzgebiete bei λ_1, λ_2 und λ_3 sind die Gebiete anomaler Dispersion, die dazwischenliegenden Gebiete, in denen n mit steigender Wellenlänge abnimmt, diejenigen normaler Dispersion.

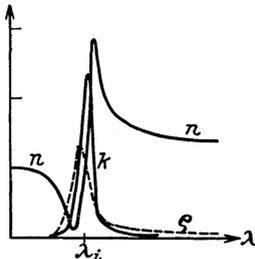


Abb. 536. Verlauf des Brechungsindex n , der Absorption k und des Reflexionsvermögens ρ in einem Resonanzgebiet.

Für sehr kurze Wellen nähert sich der Brechungsindex aller Stoffe dem Wert 1. Es folgt daher aus Gl. (1), indem man $\lambda = 0$ setzt, daß die Dielektrizitätskonstante $\epsilon = 1 + M_1/\lambda_1^2 + M_2/\lambda_2^2 + M_3/\lambda_3^2 + \dots$ ist.

In den Resonanzgebieten liegt auch jedesmal ein *Maximum der Absorption* und der *Reflexion* (Abb. 536). Bei geringer Dämpfung kann das Reflexionsvermögen hier bei einem sonst durchlässigen Stoff so groß werden, wie es sonst nur bei den Metallen ist (metallische Reflexion), während es in den unmittelbar benachbarten Gebieten sehr viel kleiner ist (vgl. § 311, Reststrahlen).

In den Gebieten anomaler Dispersion sinkt der Brechungsindex n unter den Wert 1. Das bedeutet nach § 271, daß die Lichtgeschwindigkeit größer wird als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Das ist jedoch nicht so zu verstehen, daß sich die *Lichtenergie* mit einer Geschwindigkeit fortpflanzt, die größer ist als $3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Wie aus der

Relativitätstheorie folgt, kann sich weder ein Körper noch Energie mit einer die Lichtgeschwindigkeit übersteigenden Geschwindigkeit fortpflanzen. Das, was sich im vorliegenden Fall mit größerer Geschwindigkeit fortpflanzt, ist die *Phase* der Lichtschwingungen. Daß sich die Phase in einer Welle längs einer Strecke mit jeder beliebigen Geschwindigkeit fortpflanzen kann, möge folgendes mechanische Beispiel erläutern. Wir betrachten Wasserwellen, die sich mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen und die unter dem Winkel φ das Ufer treffen. Dann ist die Geschwindigkeit u , mit der sich eine bestimmte Phase, etwa die Wellenmaxima, längs der Uferlinie AB (Abb. 537) fortpflanzen, $u = v/\sin \varphi$. Sie kann also beliebig große Werte annehmen. Eine Energiefortpflanzung findet aber längs der Uferlinie nicht statt, sondern nur in Richtung der Wellengeschwindigkeit v .

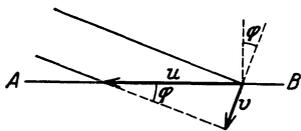


Abb. 537. Zur Phasengeschwindigkeit.

310. Strahlungsmeßgeräte. Das wichtigste Gerät zur Messung der Intensität (Energie) einer Strahlung ist die *Thermosäule* (Abb. 538). Sie beruht auf dem thermoelektrischen Effekt (§ 165) und besteht aus einer größeren Zahl von hintereinander geschalteten Thermoelementen aus feinem Draht, die derart angeordnet sind, daß die 1., 3., 5. usw. Lötstelle von der Strahlung getroffen wird, während die dazwischen liegenden Lötstellen gegen die Strahlung geschützt sind. Die bestrahlten Lötstellen sind berußt und werden von der Strahlung erwärmt, so daß eine Thermokraft entsteht, die mit einem Galvanometer gemessen wird und als Maß der Strahlungsintensität dient.

Ein weiteres Strahlungsmeßgerät ist das *Bolometer*. Es besteht aus einer dünnen, einseitig berußten Metallfolie, auf deren berußte Seite die zu messende Strahlung fällt. Diese erwärmt den Streifen und erhöht dadurch seinen Widerstand (§ 158). Die Widerstandsänderung wird in der WHEATSTONschen Brückenschaltung gemessen. Sie ist bei nicht zu großer Intensität der Strahlung dieser proportional.

Eine für Strahlungsmessungen viel verwandte Form des Thermoelements ist das *Mikroradiometer* von BOYS und RUBENS (Abb. 539), ein Drehspulgalvanometer, dessen Spule aus einer einzigen Drahtwindung W besteht, in die ein Thermoelement aus zwei verschiedenen Wismutlegierungen unmittelbar eingefügt ist. Die eine Lötstelle T_1 ist berußt und wird der zu messenden Strahlung ausgesetzt, die anderen, T_2, T_3 , sind vor ihr geschützt. Infolge der Temperaturdifferenz zwischen den Lötstellen entsteht in der Spulenwindung ein Strom, der eine Drehung der Spule hervorruft, die ein Maß für die Strahlung ist.

Auch das *Radiometer* (CROOKES, Abb. 540) wird zur Strahlungsmessung benutzt. Es besteht aus zwei an einem dünnen Quarz- oder Kokonfaden aufgehängten dünnen Metallflügeln, deren einer einseitig berußt ist und der zu messenden Strahlung ausgesetzt wird. Das Ganze befindet sich in einem Glasgefäß, in dem ein Luftdruck von $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{100}$ mm Hg herrscht. Fällt Strahlung auf den berußten Flügel, so erwärmt er sich, und die dadurch hervorgerufene Störung des Temperaturgleichgewichts zwischen dem Flügel und dem Gase hat eine Drehung des Flügels zur Folge, die mit Hilfe eines Spiegelchens abgelesen werden kann. Auf der gleichen Radiometerwirkung beruhen die sich im Sonnenlicht ständig drehenden Lichtmühlen, die man gelegentlich in den Schaufenstern optischer Geschäfte sieht. Die Theorie dieser Erscheinung ist sehr verwickelt.

311. Das ultrarote Spektralgebiet. Man entwerfe auf einem Schirm ein Spektrum einer Bogenlampe, oder noch besser der Sonne, und bringe in dieses Spektrum eine mit einem Galvanometer verbundene Thermosäule. Führt man die Thermosäule vom violetten Ende her durch das Spektrum bis zum roten Ende hin, so bemerkt man, daß der im Violetten sehr kleine Galvanometerausschlag bei Annäherung an das rote Ende immer größer wird. Die auf das

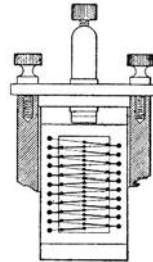


Abb. 538.
Thermosäule
für Strahlungsmessungen.

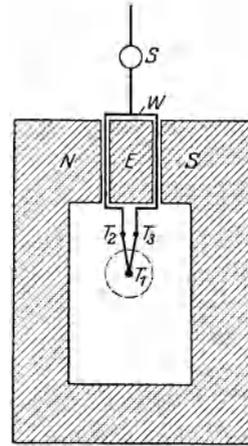


Abb. 539. Schema des Mikroradiometers. N, S Pole des Elektromagneten, E Eisenkern, W Spule, S Spiegel, T_1, T_2, T_3 Lötstellen.

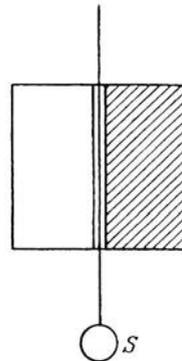


Abb. 540. Radiometer.
 S Spiegel.

Thermoelement fallende Energie ist also im Rot größer als im Violett. (Zum Teil hat dies seinen Grund auch darin, daß bei Benutzung eines Prismas das Spektrum im Rot zusammengedrängt, im Violett auseinandergezogen ist, vgl. § 294.) Geht man nun über das rote Ende hinaus, so verschwindet der Ausschlag nicht etwa, sondern steigt zunächst noch an, um erst in einiger Entfernung vom roten Ende zu verschwinden. Dies beweist, daß sich das Spektrum über das Rot hinaus erstreckt, daß es also ein ultrarotes Spektralgebiet gibt (WOLLASTON und HERSCHEL 1800). Die Abnahme der Wirkung in Richtung längerer Wellen

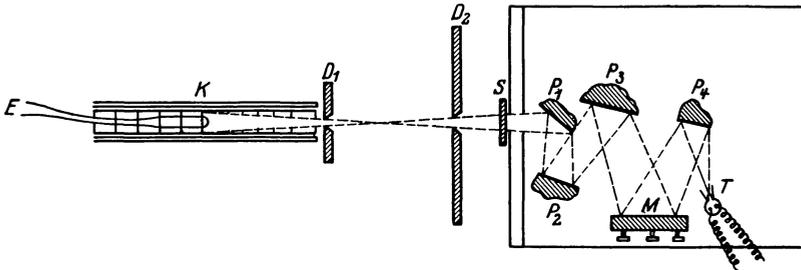


Abb. 541. Reststrahlenmethode nach RUBENS. *T* Thermosäule, *M* Metallhohlspiegel, *P*₁—*P*₄ Platten, an denen die Reststrahlen isoliert werden, *S* Schirm, *D*₁, *D*₂ Blenden, *K* schwarzer Körper als Strahlungsquelle, *E* Thermoelement zur Messung der Temperatur des schwarzen Körpers.

rührt nicht etwa daher, daß die Energie dort allmählich abnimmt, sondern vor allem daher, daß die im Strahlengang befindlichen Linsen und Prismen aus Glas die langwelligere ultrarote Strahlung nicht mehr durchlassen. Man benutzt daher zur Untersuchung des ultraroten Spektralgebietes Linsen und Prismen

Tabelle 32. Die wichtigsten Reststrahlen (Lage der Energiemaxima).

Kalkspat	CaCO ₃	6,65 μ
Flußspat	CaF ₂	22 und 32 μ
Aragonit	CaCO ₃	39 μ
Steinsalz	NaCl	52,8 μ
Sylvin	KCl	63 μ
Bromkalium	KBr	83 μ
Thalliumchlorür	TlCl	92 μ
Jodkalium	KJ	94 μ
Thalliumbromür	TlBr	117 μ
Thalliumjodür	TlJ	152 μ

aus anderen Stoffen, nämlich bis zur Wellenlänge 4 μ Quarz, bis 8,5 μ Flußspat, bis 14 μ Steinsalz, bis 20, höchstens 23 μ Sylvin. Bis zu dieser Wellenlänge kann noch eine Zerlegung des ultraroten Spektrums durch Spektrometer erfolgen. Zur Aufnahme der Spektren kann man bis etwa 11 μ noch besonders sensibilisierte photographische Platten benutzen, darüber hinaus ist man auf die oben erwähnten Meßgeräte angewiesen.

Für die Aussonderung und Untersuchung eng begrenzter Wellenlängenbereiche jenseits von 23 μ ist man auf die *Reststrahlenmethode* von RUBENS angewiesen. Sie beruht darauf, daß viele Stoffe im Ultrarot Gebiete metallischer Reflexion haben, d. h. daß sie ziemlich schmale Gebiete des Spektrums sehr stark reflektieren, die benachbarten Gebiete aber viel weniger (§ 309). Die Strahlung einer Lichtquelle, etwa eines schwarzen Körpers *K* (§ 319), wird in der aus Abb. 541 ersichtlichen Weise mehrfach an Flächen des betreffenden Stoffes reflektiert. Von einem Strahlungsanteil, welcher an jeder Fläche z. B. zu 95% reflektiert wird, ist nach viermaliger Reflexion noch der Bruchteil 0,95⁴ oder 82% vorhanden. Ein Strahlungsanteil aber, der etwa nur zu 50% reflektiert wird, ist dann auf 6,25% geschwächt. Während sich die beiden Strahlungsanteile vorher etwa wie 2 : 1 verhielten, verhalten sie sich nach vier Reflexionen wie 13 : 1. Der Wellenlängenbereich wird bei jeder Reflexion schmaler, also einer scharfen Spektrallinie immer ähnlicher. Diese Strahlung kann dazu dienen, um die optischen Eigenschaften der Stoffe, z. B. ihre Durchlässigkeit,

in diesem Wellenlängenbereich zu untersuchen. Tabelle 32 gibt eine Übersicht über die für die Aussonderung von Reststrahlen hauptsächlich in Betracht kommenden Stoffe.

Zur Messung der Wellenlängen im langwelligen Ultrarot bedient man sich eines Interferometers (§ 292) von besonderer Bauart.

Je weiter man zu längeren Wellen vorrückt, desto schwieriger wird die Aussonderung und Untersuchung eng begrenzter Wellenlängenbereiche, schon wegen der geringen Energie der langwelligen Strahlung in den verfügbaren Strahlungsquellen. Zur Trennung langwelliger und kurzwelliger ultraroter Strahlung bediente RUBENS sich folgender Eigenschaft des Quarzes. Quarz ist im kurzwelligsten Ultrarot durchlässig, dann folgt bei längeren Wellen ein breites Gebiet anomaler Dispersion (§ 309), in dem er stark absorbiert, um schließlich für ganz langwellige Strahlung wieder durchlässig zu werden. In diesem langwelligen Gebiet hat er einen viel höheren Brechungsindex als im kurzwelligen Ultrarot (vgl. Abb. 535). Hierauf beruht die *Quarzlinsenmethode*

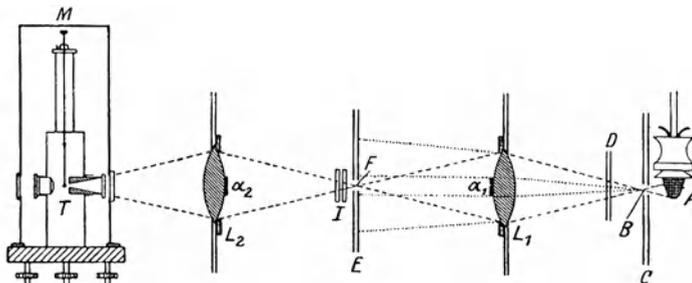


Abb. 542. Quarzlinsenmethode nach RUBENS und WOOD. *A* Auerbrenner, *B, F* Blendenöffnungen in den Diaphragmen *C* und *E*, *L*₁, *L*₂ Quarzlinzen, *D, J* Schirme zum Abbilden der Strahlung, α_1 , α_2 Papierblättchen, *M* Mikroradiometer als Meßgerät.

(Abb. 542). Die von einer Strahlungsquelle, z. B. einem Auerglühstrumpf *A*, kommende Strahlung fällt durch eine enge Blende *B* auf eine Quarzlinse *L*₁, welche den stark brechbaren langwelligen Strahlungsanteil auf eine zweite Blende *F* vereinigt, durch welche sie hindurchtritt, während der schwach brechbare kurzwellige Strahlungsanteil zum größten Teil auf die Wand der Blende fällt. Um auch die auf die Öffnung fallende kurzwellige Strahlung auszusondern, wird sie durch ein auf der Linse angebrachtes Stück schwarzen Papiers α_1 , welches für die langwellige Strahlung fast völlig durchlässig ist, absorbiert. Mittels einer zweiten Linse *L*₂ wird die Reinigung der Strahlung wiederholt, so daß nur noch langwellige Strahlung übrigbleibt.

Die langwelligste bisher beobachtete ultrarote Strahlung ist von RUBENS und VON BAEYER in der Strahlung der Quarzquecksilberlampe entdeckt worden. Diese Strahlung umfaßt ein breites Spektralgebiet und hat zwei Energiemaxima, eines bei 218 μ , das andere bei 343 μ . Sie fällt also bereits mit den kürzesten elektrischen Wellen zusammen. Tatsächlich zeigen diese langwelligen Strahlen schon alle Eigenschaften der elektrischen Wellen. So kann man sie z. B. durch feine Drahtgitter in gleicher Weise linear polarisieren, wie das HERTZ für elektrische Wellen nachgewiesen hat.

Die größte Wellenlänge, die im Sonnenspektrum nachweisbar ist, beträgt 5,3 μ (LANGLEY). Die größeren Wellenlängen werden im Wasserdampf der Atmosphäre vollkommen absorbiert.

312. Das ultraviolette Spektralgebiet. Hält man in das Spektrum einer Bogenlampe einen mit Zinkblende bedeckten Schirm derart, daß er über das violette Ende hinausragt, so bemerkt man, daß der Schirm ein beträchtliches Stück jenseits dieses Endes grünlich leuchtet (phosphoresziert, § 323). Dies ist eine

Wirkung des für das Auge nicht sichtbaren ultravioletten Lichts. Daß das auf diese Weise beobachtbare ultraviolette Gebiet nicht weiter ausgedehnt ist und in der Regel sogar nur aus einer oder wenigen Linien zu bestehen scheint, liegt lediglich an der Verwendung von Glas im Strahlengange, welches unmittelbar hinter dem violetten Ende des sichtbaren Spektrums undurchlässig zu werden beginnt. Zur Untersuchung ultravioletter Spektren muß man daher andere Stoffe für Prismen und Linsen verwenden, vor allem Steinsalz, Quarz oder Flußspat. Die meisten Stoffe sind im kurzwelligen Ultraviolett undurchlässig auch die Gase, die hier ihre Bereiche anomaler Dispersion haben. Zur Untersuchung kurzwelligster, ultravioletter Strahlung (SCHUMANN, MILLIKAN) muß daher die ganze Versuchsanordnung luftleer gemacht werden (Vakuumspektrograph).

Die Sonnenstrahlung enthält ultraviolettes Licht in großer Menge. Doch wird dieses in der Erdatmosphäre sehr stark absorbiert, vor allem in einer in 20—30 km Höhe vorhandenen Ozonschicht. Daher bricht das Sonnenspektrum etwa bei der Wellenlänge 2900 Å ziemlich plötzlich ab, und die Menge des bis in das Meeresniveau gelangenden ultravioletten Lichts ist gering. In den Hochgebirgen ist sie bereits beträchtlich größer. Hierauf beruht zum Teil die biologische Wirkung des Hochgebirgsklimas. Ultraviolettes Licht hat sehr starke Wirkungen auf die Haut (Gletscherbrand).

Starke ultraviolette Strahlung liefert die Quarzquecksilberlampe (§ 313), desgleichen Quecksilberlampen aus Uviolglas, einer für ultraviolettes Licht weitgehend durchlässigen Glassorte. Auch eine Funkenstrecke zwischen Elektroden aus Zink und manchen anderen Metallen sowie der Kohlelichtbogen sind reich an ultravioletter Strahlung. Die Sehorgane mancher Tiere sind auch noch im langwelligen Ultraviolett empfindlich. Zum Beispiel ist dies für die Bienen nachgewiesen worden.

Die Elementarvorgänge an den Atomen, die die Erzeugung ultravioletten Lichtes veranlassen, sind von der gleichen Art wie die, durch welche sichtbares und kurzwelliges ultrarotes Licht entsteht. Man faßt daher diese drei Spektralbereiche unter dem Namen *optisches Spektrum* zusammen.

313. Röntgenstrahlen. Gammastrahlen. Die nach RÖNTGEN benannten Strahlen sind von diesem im Jahre 1895 bei Gelegenheit von Versuchen mit dem LENARD-Rohr (§ 183) entdeckt und von ihm selbst X-Strahlen genannt worden. Auch hat er selbst die neuen Strahlen sofort nach ihrer Entdeckung so gründlich erforscht, daß in den nächsten 17 Jahren kaum irgendein wesentlicher Fortschritt darüber hinaus erzielt werden konnte. Diese Entdeckung bildet einen Markstein auf dem Wege von der klassischen Physik des 19. Jahrhunderts zur Physik der Jetztzeit. Röntgenstrahlen vermögen bekanntlich alle Stoffe mehr oder weniger stark zu durchdringen, und zwar um so leichter, je geringer ihre Dichte ist. Im großen und ganzen steigt das Durchdringungsvermögen der Strahlen mit fallender Wellenlänge. Doch zeigen alle Stoffe an gewissen Stellen des Röntgenspektrums selektive Eigenschaften, insbesondere haben sie bestimmte Gebiete besonders starker Absorption. Die Röntgenstrahlen haben starke chemische Wirkung. Gase werden durch Röntgenstrahlen ionisiert. Die Wellenlängen der Röntgenstrahlen sind so klein, daß sie bei allen Stoffen schon weit unterhalb der kürzesten Resonanzwellenlänge liegen, also in Abb. 535 links von λ_1 , dort wo der Brechungsindex schon fast genau gleich 1 geworden ist. Wie man aber sieht, ist n für die Röntgenstrahlen stets *kleiner* als 1, wenn auch nur äußerst wenig. Die Brechung der Röntgenstrahlen ist daher überaus gering.

Auf dem starken, aber für verschiedene Stoffe (Knochen, Muskelgewebe usw.) verschieden großen Durchdringungsvermögen beruht auch die Möglichkeit der „Durchleuchtung“ des menschlichen Körpers, bei der dessen einzelne

Bestandteile sich wegen ihrer verschiedenen Durchlässigkeit schattenartig voneinander abheben, und bei der insbesondere die Knochen, aber auch einzelne innere Organe, besonders deutlich hervortreten (Röntgendiagnostik). Die Sichtbarmachung der Schattenbilder erfolgt dadurch, daß man die Strahlen nach dem Durchgang durch den Körper auf einen mit Bariumplatinzyanür oder dergleichen bedeckten Schirm (Leuchtschirm) fallen läßt. Dieser fluoresziert unter der Wirkung der Röntgenstrahlen. Die photographische Aufnahme von Röntgenbildern erfolgt meist so, daß man auf die lichtempfindliche Schicht einen Leuchtschirm legt und die Röntgenstrahlen durch diesen hindurchtreten läßt. Die photographische Wirkung wird dadurch sehr verstärkt.

Die biologischen Wirkungen der Röntgenstrahlen sind noch erheblich stärker als die des ultravioletten Lichts. Auch erstrecken sie sich bis in die Tiefe des Körpers. Sie finden eine ausgedehnte Anwendung zur Erzielung von Heilwirkungen der verschiedensten Art, z. B. zur Bekämpfung von bösartigen Geschwülsten (Röntgentherapie). Andererseits aber bilden sie bei unvorsichtigem Verhalten eine große Gefahr für den Menschen und bewirken die in schweren Fällen tödlichen Röntgenverbrennungen (Röntgenkrebs).

Röntgenstrahlen entstehen, wenn Kathodenstrahlen, also schnell bewegte Elektronen, auf ein Hindernis fallen. Da jede bewegte elektrische Ladung einen elektrischen Strom darstellt, so entspricht der Bremsung ihrer Bewegung eine sehr plötzliche Änderung der Stromstärke. Das hat das Auftreten einer nichtperiodischen elektromagnetischen Welle (etwa einem Knall vergleichbar) zur Folge, eben der ausgesandten Röntgenstrahlung (*Bremsstrahlung*). Daneben entsteht aber, wie BARKLA (1905) entdeckte, noch eine weitere, periodische Strahlung, deren Wellenlängen *für den Stoff charakteristisch* sind, auf den die Elektronen auftreffen (§ 347).

An Stelle der älteren gasgefüllten Röntgenröhren benutzt man heute nur noch Röhren, in denen ein möglichst vollkommenes Vakuum hergestellt ist, und bei denen die zur Erzeugung der Röntgenstrahlen dienenden Kathodenstrahlen (Elektronen) aus einer Glühkathode stammen (§ 179). Die von der Glühkathode *K* (Abb. 543) ausgehenden Kathodenstrahlen werden durch die elektrostatische Wirkung eines mit der Kathode verbundenen Metallzylinders (WEHNELT-Zylinder *W*) auf die Wolframanode *A* vereinigt und erzeugen dort bei ihrer Bremsung die Röntgenstrahlen. Man kann nun die Menge der ausgesandten Kathodenstrahlen durch den Heizstrom der Kathode, ihre Geschwindigkeit durch die angelegte Spannung regeln, und dadurch Art und Stärke der erzeugten Röntgenstrahlen in der jeweils gewünschten Weise beeinflussen. Das hat nicht nur für die physikalische Forschung, sondern vor allem auch für die Medizin entscheidende Bedeutung. Eine sachgemäße und für den Kranken gefahrlose Anwendung der Röntgenstrahlen in der Heilkunde ist erst durch diese neuzeitlichen Röhren möglich geworden.

Man bezeichnet eine Röntgenstrahlung als „hart“ oder „weich“, je nachdem sie mehr oder weniger durchdringend ist, d. h. je nachdem in ihr vorwiegend kurzwellige oder langwellige Strahlung enthalten ist.

Daß die Röntgenstrahlen noch kurzwelligeres Licht sind als das Ultraviolett, war sofort vermutet worden. Im Jahre 1912 wurde es durch VON LAUE bewiesen, dem es gelang, Röntgenstrahlen zur Interferenz zu bringen. Dadurch wurde nicht nur ihre Wellennatur bewiesen, sondern es gelang auch, die Wellenlängen zu messen.



Abb. 543.
Schema einer Röntgenröhre nach COOLIDGE.
K Kathode, *A* Anode,
E Heizbatterie für die Kathode, *W* WEHNELT-Zylinder.

Wegen der kleinen Wellenlänge der Röntgenstrahlen konnte man damals zur Erzeugung von Gitterspektren (§ 294) bei ihnen keine mechanisch hergestellten Gitter benutzen. VON LAUE kam daher auf den Gedanken, als Beugungsgitter Kristalle zu benutzen. Die Kristalle bilden Raumgitter, d. h. ihre atomistischen

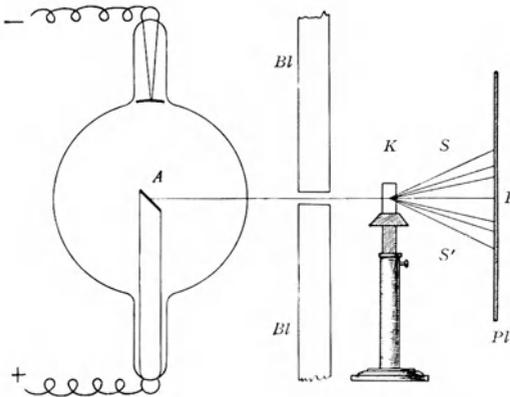


Abb. 544. VON LAUES Versuchsanordnung zum Nachweis der Beugung von Röntgenstrahlen in einem Kristall. *A* Antikathode der Röntgenröhre, *Bl* Bleiblende, *K* Kristall, *P* ungebeugter Strahl, *S* gebeugte Strahlen, *Pl* photographische Platte.

Abb. 544 zeigt die von VON LAUE zum Nachweis der Beugung der Röntgenstrahlen benutzte Versuchsanordnung. Ein feines Bündel von Röntgenstrahlen tritt durch einen Kristall und

tritt hinter diesem auf eine photographische Platte, die überall dort geschwärzt wird, wo Strahlen auf treffen. Abb. 545 zeigt ein auf diese Weise gewonnenes LAUE-Diagramm. Der mittlere Fleck rührt von ungebeugtem Röntgenlicht her, die übrigen Flecke von gebeugtem Röntgenlicht. Die Struktur des LAUE-Diagramms hängt von der Raumgitterstruktur des Kristalls und von seiner Orientierung zum einfallenden Strahl ab.

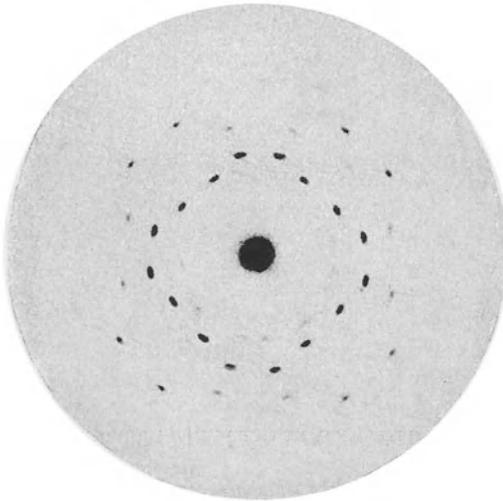


Abb. 545. LAUE-Diagramm der Zinkblende.

Durch diese ungeheuer wichtige Entdeckung wurde nicht nur die Wellennatur der Röntgenstrahlen bewiesen, sondern auch die Richtigkeit der Vorstellung von der Raumgitterstruktur der

Kristalle. In ihrer weiteren Entwicklung führte die LAUESche Entdeckung einerseits zur Entwicklung einer Spektrometrie der Röntgenstrahlen durch W. L. und W. H. BRAGG, andererseits zu einem außerordentlichen Aufschwung der Kristallographie und unserer Kenntnis vom Bau der Materie überhaupt. Auch in der Technik bilden die Röntgenstrahlen heute ein unentbehrliches Hilfsmittel.

Die Wellenlängen der Röntgenstrahlen liegen zwischen 0,158 und 660 ÅE, erstrecken sich also über einen Bereich von 12 Oktaven. Noch erheblich kurz-

welliger sind die *Gammastrahlen*, deren Wellenlängen bis zu 0,0057 ÅE hinabreichen, und die daher noch viel durchdringender sind als die Röntgenstrahlen. Ihre Wellenlänge kann nicht nach dem gleichen Verfahren gemessen werden, wie diejenige der Röntgenstrahlen, weil die Raumgitter der Kristalle dafür zu grob sind. Sie kann aber auf indirektem Wege berechnet werden. Gammastrahlen sind eine Begleiterscheinung des radioaktiven Zerfalls (§ 357). Noch durchdringender, also jedenfalls kurzwelliger, ist die Wellenstrahlung, welche die *Ultrastrahlung* (§ 363) begleitet.

314. Spektrometrie der Röntgenstrahlen. Strukturanalyse. Das LAUESCHE Verfahren kann zur Wellenlängenmessung, also zu einer Spektrometrie der Röntgenstrahlen, verwendet werden, sofern man das Raumgitter des benutzten Kristalls kennt. Jedoch sind die dabei auftretenden Beugungserscheinungen ziemlich verwickelt. Das von W. L. und W. H. BRAGG erdachte Verfahren bedient sich der bei der Reflexion an einem Kristallgitter auftretenden Interferenzerscheinungen, welche viel einfacher sind.

Wir wählen als Beispiel das besonders einfache kubische Raumgitter des Steinsalzes, NaCl, bei dem positive Na-Ionen und negative Cl-Ionen regelmäßig abwechselnd in den Ecken von Würfeln angeordnet sind. Abb. 546 zeigt einen schematischen Querschnitt durch einen solchen Kristall. Die Kantenlänge der Elementarwürfel

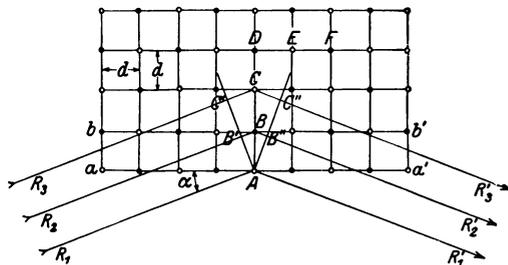


Abb. 546. Zur Reflexion der Röntgenstrahlen an einem Kristall.

sei d . Die schwarzen Kreise seien Na-Ionen, die weißen Cl-Ionen (D, E, F). Die Ebenen aa', bb' usw. heißen Netzebenen. Auf die durch eine solche Netzebene gebildete Oberfläche aa' des Kristalls falle ein mit ihr den Winkel α bildendes Bündel paralleler, kohärenter Röntgenstrahlen R_1, R_2 usw. Wir greifen die beiden Strahlen R_1 und R_2 heraus, welche auf die Ionen A und B fallen. An diesen werden sie nach allen Richtungen abgebeugt. Unter diesen abgebeugten Strahlen betrachten wir die beiden Strahlen R_1' und R_2' , welche so verlaufen, als seien die Strahlen R_1 und R_2 regulär am Kristall reflektiert worden. Die einfallenden Strahlen sind in A und B , weil kohärent, in gleicher Phase, in A und B'' aber nur dann, wenn der Weg $B'B + B''B'$ gleich der Wellenlänge λ oder einem ganzzahligen Vielfachen derselben ist. Es ergibt sich leicht, daß dann

$$2d \sin \alpha = z \lambda, \quad (2)$$

wenn z irgendeine ganze Zahl bedeutet (vgl. die ganz ähnlichen Betrachtungen in § 288). In diesem Falle findet also keine Schwächung oder Auslöschung durch Interferenz statt. Die gleiche Überlegung gilt für die Strahlen R_2 und R_3 .

Nun findet aber auch an allen anderen Gitterpunkten Beugung statt. Es läßt sich zeigen, daß, wenn man die Gesamtheit der Gitterpunkte und alle an ihnen gebeugten Strahlen in Betracht zieht, eine merkliche Intensität der austretenden Röntgenstrahlen nur bei denjenigen Einfallswinkeln und in denjenigen Richtungen auftritt, die der Gl. (2) entsprechen. Je nachdem $z = 1, 2, 3$ usw. ist, spricht man von Reflexion erster, zweiter, dritter Ordnung usw.

Auf die Oberfläche eines Kristalls K falle ein Kegel von Röntgenstrahlen, der Strahlen verschiedener Wellenlänge enthält (Abb. 547). Wir wollen annehmen, es seien drei verschiedene Wellenlängen vorhanden (in Abb. 547 durch die Zahl der Pfeilspitzen angedeutet). Reflexion findet nur in den der Gl. (2) entsprechenden Richtungen statt, und daher verläuft das den verschiedenen

Wellenlängen angehörige Röntgenlicht nach der Reflexion in verschiedenen Richtungen. Stellt man einen kreisförmig gebogenen photographischen Film PP in den Weg der reflektierten Strahlen, so erhält man auf ihm ein nach Wellenlängen geordnetes Spektrum des Röntgenlichts.

Es gibt heute zahlreiche dem gleichen Zweck dienende Verfahren. Als Beispiel sei die Drehkristallmethode angeführt (Abb. 548). Durch eine Bleiblende B

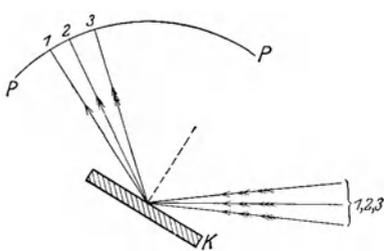


Abb. 547. Zur Reflexion der Röntgenstrahlen an einem Kristall.

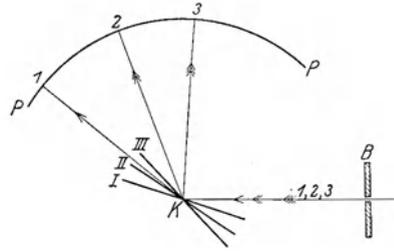


Abb. 548. Zur Drehkristallmethode.

fällt ein feines Bündel Röntgenlicht auf einen Kristall K , der um den Auftreffpunkt der Strahlen gedreht werden kann. Reflexion findet nur bei denjenigen Stellungen des Kristalls statt, bei denen für einen der in der einfallenden Strahlung enthaltenen Anteile die Gl. (2) erfüllt ist. So wird etwa der eine Anteil bei

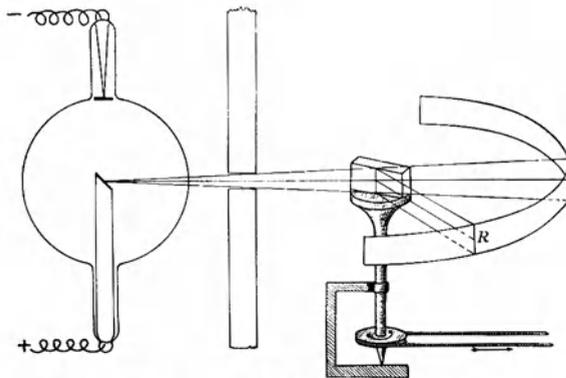


Abb. 549. Spektrometrie der Röntgenstrahlen nach BRAGG.

der Stellung I des Kristalls in die Richtung 1 reflektiert, ein zweiter bei der Stellung II in die Richtung 2 usw. Auf einem kreisförmig gebogenen Film PP entsteht daher bei allmählicher Drehung des Kristalls ein Spektrum, welches, wenn B ein schmaler, zur Zeichnungsebene senkrechter Spalt ist, aus feinen Linien besteht, genau wie die gewöhnlichen optischen Spektren (Abb. 576 und 579, § 347). Abb. 549 zeigt das

Schema der BRAGGSchen Anordnung. Die Genauigkeit der Wellenlängenmessung der Röntgenstrahlen erreicht zwar diejenige im optischen Spektrum nicht, ist aber doch schon sehr beträchtlich.

Bei Verwendung von Röntgenstrahlen bekannter Wellenlänge können natürlich die an Kristallen auftretenden Interferenzen auch zur Untersuchung der Gitterstruktur der Kristalle dienen. Beim Steinsalz (Abb. 546) ergibt sich der Abstand der Ionen, d. h. die Kantenlänge eines „Elementarwürfels“, zu $2,83 \cdot 10^{-8}$ cm. Es ist dies die Größenordnung der Atomdurchmesser (§ 339). Die Richtigkeit dieses Wertes kann man auch auf andere Weise bestätigen. Ein Na-Atom (Atomgewicht 23) wiegt 23mal soviel wie ein Wasserstoffatom, also $23 \cdot 1,65 \cdot 10^{-24}$ g = $3,80 \cdot 10^{-23}$ g, ein Cl-Atom (Atomgewicht 35,5) $35,5 \cdot 1,65 \cdot 10^{-24}$ g = $5,86 \cdot 10^{-23}$ g. Das mittlere Gewicht der beiden Bausteine des Kristalls beträgt also $4,83 \cdot 10^{-23}$ g. Die Kantenlänge eines Elementarwürfels sei d cm. 1 cm³ Steinsalz wiegt 2,16 g. Dann ist das Gewicht eines Elementarwürfels $2,16 d^3$ g. Jede der acht Ecken eines Elementarwürfels ist mit einem Ion besetzt.

Jedes dieser Ionen aber gehört gleichzeitig acht Elementarwürfeln an. Daher ist die Zahl der Ionen im Kristall gleich der Zahl der Elementarwürfel und demnach das auf einen Elementarwürfel entfallende Gewicht gleich dem mittleren Gewicht der Ionen. Es ist demnach $2,16 d^3 = 4,83 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$ oder wieder $d = 2,83 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Diese Berechnung setzt Kenntnis der Masse des Wasserstoffatoms voraus. Sie ist bekannt, wenn man die LOSCHMIDTSche Zahl kennt (§ 63). Man kann daher auch umgekehrt aus der durch Röntgenstrahlanalyse

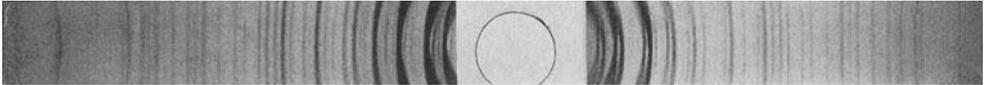


Abb. 550. DEBYE-SCHERRER-Diagramm am festen N_2O_4 .

gemessenen Größe des Elementarwürfels die Masse des Wasserstoffatoms und daraus die LOSCHMIDTSche Zahl berechnen.

Ein weiteres wichtiges Verfahren ist dasjenige von DEBYE und SCHERRER, bei dem keine großen, gut ausgebildeten Kristalle benötigt werden, sondern das

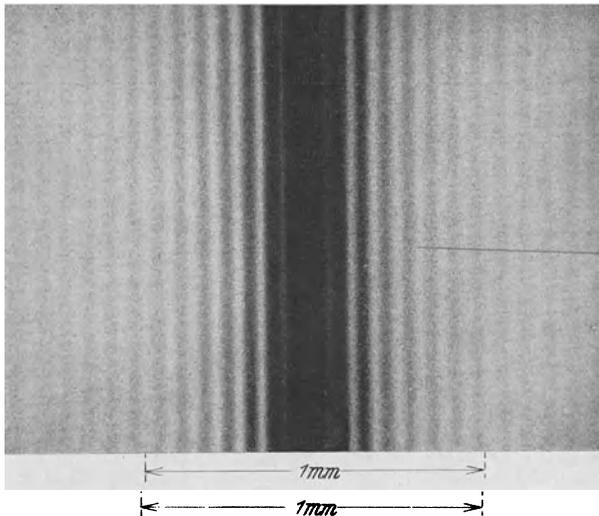


Abb. 551. Beugung von Röntgenstrahlen an einem Strichgitter. (Nach BÄCKLIN.)

zu untersuchende Material in Pulverform verwendet wird. Dieses Verfahren ist grundsätzlich das gleiche wie das Drehkristallverfahren. Während bei diesem aber eine größere Kristallfläche allmählich in verschiedene Orientierungen zu einem Bündel von Röntgenstrahlen gebracht wird, besteht das Pulver aus Kristalliten, deren Kristallflächen alle möglichen Orientierungen haben, so daß an ihm alle Arten von Reflexionen *gleichzeitig* stattfinden, die am Drehkristall *zeitlich nacheinander* eintreten. Wird das Pulver in ein Röhrchen gebracht, so ergeben sich bei der Bestrahlung mit Röntgenstrahlen Interferenzerscheinungen, wie sie Abb. 550 zeigt, aus denen die Struktur der im Pulver enthaltenen Kriställchen berechnet werden kann. Mittels dieses Verfahrens kann man auch Schlüsse auf die Struktur von amorphen Stoffen und Molekülen ziehen.

Später ist es auch gelungen, die Wellenlänge von Röntgenstrahlen mit den gleichen Gittern zu messen, die für optische Zwecke gebraucht werden (§ 294). Dabei wird der Kunstgriff benutzt, daß die Röntgenstrahlen nahezu streifend

auf das Gitter fallen. Die beugende Wirkung ist dann etwa ebenso groß wie bei senkrechtem Einfall auf ein Gitter, dessen Gitterkonstante gleich der Projektion der wirklichen Gitterkonstante auf die Wellenebene der Röntgenstrahlen ist. Infolge des streifenden Einfalls ist diese Projektion sehr klein und fällt in die Größenordnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen. Beobachtet wird die vom Gitter reflektierte Röntgenstrahlung. Abb. 551 zeigt ein auf diese Weise gewonnenes Beugungsbild. Die einzelnen Streifen entsprechen verschiedenen Ordnungen der Interferenz.

315. Emissions- und Absorptionsspektren. Spektralanalyse. Das Spektrum selbstleuchtender Stoffe nennt man ihr *Emissionsspektrum*. Es hat je nach der Art des lichtscheidenden Stoffes ein sehr verschiedenartiges Aussehen.

Glühende feste und flüssige Stoffe senden ein *kontinuierliches Spektrum* aus, d. h. ihr Spektrum enthält die ununterbrochene Folge aller Wellenlängen, also im sichtbaren Gebiet von Rot bis Violett, aber darüber hinaus auch im Ultrarot und Ultraviolett. Dagegen zeigen lumineszierende feste und flüssige Stoffe



Abb. 552. Ausschnitt aus dem Sonnenspektrum mit FRAUNHOFERSchen Linien. In der Mitte das Emissionsspektrum des Eisens im gleichen Spektralbereich. Aufnahme von E. FREUNDLICH.

(§ 323) Spektren, welche aus einzelnen sehr unscharfen Linien oder Liniengruppen oder mehr oder weniger ausgedehnten, verwaschenen Wellenlängenbereichen bestehen.

Bei den leuchtenden Gasen, z. B. in der Glimmentladung, gibt es zwei verschiedene Arten von Spektren, die *Linienpektren* und die *Bandenspektren*. Die Linienpektren (ein Beispiel im Mittelstreifen der Abb. 552) bestehen aus einer oft sehr großen Zahl einzelner feiner Linien, die deutlich voneinander getrennt sind, wenn sie sich auch an einzelnen Stellen häufen können. Auch die Bandenspektren bestehen aus einzelnen Linien. Aber diese sind *stets* sehr dicht gehäuft und bilden deutlich einzelne, aus sehr vielen Linien bestehende Gruppen, die *Banden*, an deren einem Ende, dem Bandenkopf, sie besonders dicht gedrängt liegen. Die Linienpektren werden von leuchtenden Atomen, die Bandenspektren von leuchtenden Molekülen ausgesandt. Man spricht deshalb auch von *Atompektren* und *Molekülpektren*. Die Gesetzmäßigkeiten der Spektren werden im Kapitel 9 eingehend besprochen werden. Dort findet sich auch eine Anzahl von Abbildungen charakteristischer Spektren (§ 341, 345, 347, 349).

Das Licht einer Lichtquelle, die ein kontinuierliches Spektrum aussendet — z. B. einer Bogenlampe — wird beim Durchgang durch einen Stoff in einer für diesen charakteristischen Weise verändert. In dem kontinuierlichen Spektrum erscheinen dunkle Linien oder Streifen bei denjenigen Wellenlängen, deren Licht absorbiert, d. h. nicht durchgelassen wird. Ein solches Spektrum heißt das *Absorptionsspektrum* des Stoffes. Die Absorptionsgebiete sind bei den festen Körpern meist ziemlich breit und verwaschen, bei den Gasen feine Linien (Abb. 552 oben und unten). Stoffe, die im sichtbaren Bereich keine oder nur sehr schmale Absorptionsgebiete haben, sind durchsichtig, wie Glas oder Wasser.

Das Spektrum des Sonnenlichts ist an sich kontinuierlich, wird aber von sehr vielen feinen dunklen Linien, den (zuerst 1802 von WOLLASTON beobachteten) FRAUNHOFERSchen *Linien* durchzogen (Abb. 552). Die stärksten von ihnen werden mit den Buchstaben *A*, *B* usw. bezeichnet. Die FRAUNHOFERSchen Linien

rühren von der Absorption des von der Oberfläche des glühenden Sonnenkerns (Photosphäre) ausgesandten Lichts in der Atmosphäre der Sonne (Chromosphäre) her, einzelne von ihnen auch von einer Absorption in der Erdatmosphäre (tellurische Linien). Das Sonnenspektrum mit den FRAUNHOFERSchen Linien ist also das Absorptionsspektrum der in der Chromosphäre enthaltenen Gase. Abb. 552 zeigt durch Vergleich mit dem Eisenspektrum das Auftreten von Absorptionslinien des Eisens im Sonnenspektrum.

Das Emissions- oder Absorptionsspektrum eines Elements ist für dieses absolut charakteristisch. Es kann also zum Nachweis des Vorhandenseins eines Elements dienen. Hierauf gründeten BUNSEN und KIRCHHOFF (1859) die *Spektralanalyse*, welche ein wichtiges Hilfsmittel der chemischen und metallographischen Forschung bildet. Auch die Röntgenspektren können zur Spektralanalyse dienen. Auf diesem Wege ist es gelungen, die Elemente mit den Ordnungszahlen 43 (Masurium), 72 (Hafnium) und 75 (Rhenium) nachzuweisen, die sich wegen ihrer sehr geringen Konzentration in den Mineralien vorher dem chemischen Nachweis entzogen.

Von größter Bedeutung ist auch die Anwendung der Spektralanalyse auf die Fixsterne. Die Untersuchung der Fixsternspektren hat ergeben, daß sich auf ihnen ausnahmslos die gleichen Elemente befinden wie auf der Erde. Darüber hinaus geben die Fixsternspektren wichtige Aufschlüsse über den Zustand und die Entwicklungsgeschichte der Fixsterne überhaupt.

316. Reine Spektralfarben und Mischfarben. Dreifarbentheorie des Sehens. Reine Spektralfarben sind solche, die durch spektrale Zerlegung des Lichts mit einem Prisma oder Gitter entstehen. Sie entsprechen also Licht von einheitlicher Wellenlänge. Es ist nun eine bemerkenswerte Tatsache, daß man den *Farbton* jeder Spektralfarbe auch auf unendlich viele verschiedene Arten durch *Mischung mehrerer reiner Spektralfarben* hervorrufen kann. Zur Untersuchung dieser Verhältnisse schuf HELMHOLTZ ein Lichtmischgerät, mittels dessen der Farbeindruck zweier Lichtgemische bzw. die Farbe eines Gemisches mit einer reinen Spektralfarbe verglichen werden kann. Mischt man zwei verschiedene reine Spektralfarben, so ergibt sich, je nach dem Mischungsverhältnis, eine Folge von Farbtönen, die einen lückenlosen Übergang von der einen zur anderen reinen Spektralfarbe darstellen. Dabei aber zeigt sich ein erheblicher Unterschied, je nachdem ob die beiden reinen Farben einander im Spektrum nahe liegen oder ob sie weit voneinander entfernt sind. Bei der Mischung eines reinen Rot und Gelb z. B. erscheinen die Mischfarben den Farben des dazwischen liegenden spektral reinen Gelbrot vollkommen gleich. Sie zeigen die gleiche charakteristische *Sättigung*, die bei der Betrachtung reiner Spektralfarben auch ästhetisch so sehr befriedigt. Mischt man jedoch zwei im Spektrum weiter auseinanderliegende reine Farben, so ist die lückenlose Folge der Zwischenfarben zwar auch vorhanden, aber im mittleren Teil der Folge erscheint die Mischfarbe weißlicher, weniger gesättigt, als die im Farbton gleiche reine Spektralfarbe. Es gibt ferner zu jeder reinen Spektralfarbe — den Bereich zwischen etwa $492\text{ m}\mu$ bis $570\text{ m}\mu$ (Gelbgrün bis Grünblau) ausgenommen — eine bestimmte zweite reine Spektralfarbe, mit der zusammen sie, in einem bestimmten Intensitätsverhältnis gemischt, ein reines Weiß ergibt. Ein solches Farbenpaar bezeichnet man als *Komplementärfarben*. Zwei Komplementärfarben zeichnen sich auch dadurch aus, daß sie nebeneinander den Eindruck einer besonders befriedigenden Farbenharmonie erzeugen. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit in der Malerei. (Man vergleiche z. B. die Wirkung des Blau und Gelb am Mantel der Madonna unter den Felsen von LEONARDO DA VINCI.) Zu den Farben des oben ausgenommenen Bereichs gibt es keine spektral reinen Komplementärfarben, wohl aber solche, die Mischfarben reiner Spektralfarben sind, nämlich

die im Spektrum nicht enthaltenen *Purpurfarben*, welche durch Mischung von spektral reinem Rot und Violett entstehen.

Die verschiedenen Purpurtöne bilden, je nach dem Mischungsverhältnis aus Rot und Violett, eine stetige Farbfolge vom reinen Rot bis zum reinen Violett. Der Übergang von dem einen Ende des Spektrums zum anderen kann daher auf zwei Wegen stetig erfolgen, entweder über die Folge der reinen Spektralfarben Rot, Gelb, Grün, Blau, Violett, oder über die Purpurtöne Rot, Purpur, Violett. Das sichtbare Spektrum, das physikalisch bei Rot und Violett abreißt, wird also physiologisch durch die Purpurfarben zu einem Farbenkreise geschlossen.

Außer dem Purpur scheinen in der Folge der reinen Spektralfarben noch gewisse Farben zu fehlen, unter denen besonders Braun und Olivgrün zu nennen sind. Tatsächlich aber handelt es sich hier nicht wie beim Purpur um wirklich neue Farbtöne. Vielmehr zeigt z. B. die Untersuchung des Spektrums eines braunen Körpers mit dem Farbenmischgerät, daß seine Farbe in Wahrheit Gelbrot ist. Braune, in Wirklichkeit also gelbrote Körper verdanken ihre besondere Farbwirkung der Tatsache, daß sie nur einen verhältnismäßig geringen Teil des auffallenden Lichts reflektieren. Sie haben neben ihrer Farbe noch die Eigenschaft der *Schwärzlichkeit*, und diese wird unbewußt in den Farbeindruck mit einbezogen. Man kann ein braunes und ein gelbrotes Täfelchen vollkommen farbgleich erscheinen lassen, wenn man das braune stärker mit weißem Licht beleuchtet als das gelbrote. Wenn wir das Farburteil Braun fällen, so ist dabei stets ein Vergleich mit der Schwärzlichkeit der umgebenden, gleich hell beleuchteten Objekte mit im Spiel, und der Farbeindruck hängt entscheidend von der Helligkeit der Umgebung ab. Projiziert man mittels eines gelbroten Glases ein gelbrotes Feld auf eine weiße Wand, so erscheint das Feld gelbrot, wenn die Umgebung dunkel ist, aber braun, wenn die Umgebung weiß ist. Weitere typische schwärzliche Farben sind das Olivgrün und das Grau, dieses ein schwärzliches Weiß. Hiernach ist jeder Farbeindruck durch drei Bestimmungsstücke eindeutig festgelegt: durch *Farbton, Sättigung und Helligkeit*.

Unter den um die Farbenlehre verdienten Forschern ist in neuerer Zeit insbesondere OSTWALD zu nennen. Bekanntlich hat sich auch GOETHE mit der Farbenlehre sehr eingehend beschäftigt und die NEWTONSche Theorie der bei der Brechung entstehenden Farben leidenschaftlich bekämpft. Ihm schloß sich später, wenn auch bedingt, SCHOPENHAUER an. Während GOETHES Beobachtungen durchweg völlig zutreffend waren, ist seine — durch künstlerisch-intuitive Beweggründe allzu stark beeinflusste — physikalische Deutung mit der Erfahrung nicht vereinbar. Seine Farbenlehre muß daher vom physikalischen Standpunkt aus abgelehnt werden. Hingegen enthält sie eine große Zahl grundlegender physiologischer Erkenntnisse.

Eine physiologische Deutung der vorstehend beschriebenen Erscheinungen gibt die *Dreifarbentheorie des Sehens*, deren Hauptvertreter YOUNG und HELMHOLTZ waren. Hiernach beruht ein Farbeindruck auf drei verschiedenen Einzelvorgängen in der Netzhaut des Auges, und es wird in der Regel angenommen, daß das Auge drei verschiedene Arten von farhentüchtigen Gebilden (Zäpfchen, § 284) enthält, und daß jede Art auf eine bestimmte reine Spektralfarbe maximal anspricht, aber in abgestuftem Maße auch auf die benachbarten Bereiche, wie ein stark gedämpftes, schwingungsfähiges Gebilde (§ 94). Bei einem beliebigen Farbeindruck werden im allgemeinen alle drei Gruppen von Zäpfchen, aber in verschiedener Stärke, erregt, und je nach der Intensitätsverteilung auf die drei Gruppen entsteht im Gehirn der Farbeindruck nach Farbton, Sättigung und Helligkeit.

Eine wichtige Stütze dieser Theorie bilden die Untersuchungen an *Farbenblinden*. Diese sehen das Spektrum nicht als lückenlose Farbfolge, sondern etwa

wie ein gesundes Auge diejenige Farbfolge sieht, die bei der Mischung von Gelb mit dem dazu komplementären Blau entsteht. Die beiden Enden des Spektrums erscheinen gelb bzw. blau, und in der Gegend von etwa $500\text{ m}\mu$ erscheint reines Weiß. Unter sonst gesunden Menschen gibt es zwei Arten von Farbenblinden, die Rotblinden und die Grünblinden. Den letzteren erscheint auch ein gewisses Purpur als weiß. Beide stimmen darin überein, daß sie Rot und Grün verwechseln. Außerdem gibt es noch, aber nur als Folge gewisser Erkrankungen, eine Violett- oder Blaublindheit mit anderen Ausfallserscheinungen. Man deutet die Farbenblindheit als Folge des Ausfalls einer der drei Arten von Zäpfchen.

317. Körperfarben. Die Farben, die die Körper im auffallenden Licht zeigen, beruhen darauf, daß sie nicht alle Farben in gleichem Maße reflektieren. Ein Körper, der nur rotes Licht reflektiert, erscheint bei Beleuchtung mit weißem Licht rot. Enthält aber das auffallende Licht die von ihm reflektierte Farbe nicht, z. B. bei einem rein roten Körper in blauem Licht, so erscheint er schwarz. Enthält das auffallende Licht nur einen Teil der von dem Körper reflektierten Farben, so entsteht der Farbeindruck, der der Mischung der übrigbleibenden Farben, je nach ihren Intensitätsverhältnissen, entspricht. Da wir als Farbe eines Körpers schlechthin seine Farbe im Sonnenlicht verstehen, so erscheint er — uns in der Regel unbewußt — bei dem im kurzwelligen Spektrum verhältnismäßig viel schwächeren künstlichen Licht dem Auge oft schon in veränderter Farbe. Die Schwierigkeit der Auswahl eines farbigen Stoffes bei künstlichem Licht ist bekannt.

Eine praktisch besonders wichtige Rolle spielen unter den Körperfarben die der *Farbstoffe* oder *Pigmente*. Die Mischung von reinen Spektralfarben, die man auch als eine Addition von Lichtern bezeichnen kann, folgt ganz anderen Gesetzen, als die Mischung von Farbstoffen, wie sie etwa der Maler zur Erzielung eines bestimmten Farbtons vornimmt. Die Mischung eines blauen und eines gelben Farbstoffes ergibt bekanntlich keineswegs Weiß, sondern Grün. Das hängt damit zusammen, daß das Gemisch Eigenschaften der beiden Bestandteile sowohl bezüglich der Reflexion als auch der Absorption besitzt.

Die Farben der Körper im durchgehenden Licht sind hauptsächlich durch die Absorption bestimmter Farbbereiche beim Durchgang durch den Körper gegeben. Dabei kann die gleiche Farbe, wie bei den Oberflächenfarben, auf unendlich viele verschiedene Arten durch Mischung reiner Spektralfarben entstehen.

V. Temperaturstrahlung und Lumineszenz.

318. Temperaturstrahlung. Unter Temperaturstrahlung oder Wärmestrahlung versteht man jede Strahlung, die ihre Entstehung der Temperatur eines Körpers verdankt und in ihrer Intensität und spektralen Energieverteilung nur von dieser Temperatur und der Beschaffenheit des Körpers abhängt.

Stehen sich zwei Körper von verschiedener Temperatur gegenüber, ohne daß Wärmeleitung (§ 124) zwischen ihnen stattfindet, so gleichen sich doch ihre Temperaturen im Laufe der Zeit durch *Wärmestrahlung* aus. Diese geht so vor sich, daß nicht nur der wärmere Körper dem kälteren Wärme zustrahlt, sondern auch der kältere dem wärmeren. Die erste Wirkung überwiegt jedoch die zweite um so mehr, je größer der Temperaturunterschied der Körper ist (*Satz von PREVOST*).

Die Erwärmung eines Körpers durch Strahlung beruht darauf, daß die auf ihn fallende Strahlungsenergie in ihm absorbiert und in Molekularenergie, also in Wärme, umgesetzt wird. Umgekehrt kühlt sich ein Körper durch Ausstrahlung deshalb ab, weil dabei ein Teil seiner Molekularenergie in Strahlungsenergie verwandelt wird.

Jeder Körper strahlt bei jeder auch noch so geringen Temperatur. Die Intensität des ausgestrahlten sichtbaren Lichts überschreitet aber erst bei höherer Temperatur die Grenze der Beobachtbarkeit. Das erste schwache Leuchten wird bei festen Körpern und Flüssigkeiten im Dunkeln bei etwa 525° C wahrgenommen (*DRAPERSches Gesetz*), und dies auch nur mit den Stäbchen des ausgeruhten Auges (§ 284). Dieses erste Licht erscheint daher farblos, grauweißlich (Grauglut). Bei weiter steigender Temperatur geht der Körper dann in Rotglut, Gelbglut und schließlich in Weißglut über.

319. KIRCHHOFFSches Gesetz. Schwarzer Körper. Das *KIRCHHOFFSche Gesetz* (1859) besagt, daß bei gegebener Temperatur die Strahlungsemission E eines Körpers zu seiner Strahlungsabsorption A in einem ganz bestimmten Verhältnis steht. Also ist

$$\frac{E}{A} = C. \quad (1)$$

Die Größe C ist lediglich von der Temperatur und der Wellenlänge abhängig, im übrigen für alle Körper die gleiche. Unter der Strahlungsemission E verstehen wir die in 1 sec von 1 cm² der Oberfläche eines Körpers *ausgesandte* Strahlungsenergie. Die Absorption A ist der Bruchteil der auf einen Körper fallenden Strahlung, der von dem Körper *absorbiert*, also nicht durchgelassen oder reflektiert, wird. Das *KIRCHHOFFSche Gesetz* folgt aus dem zweiten Hauptsatz (§ 125). Angenommen, daß zwei Körper von anfänglich gleicher Temperatur einander gegenüberstehen, und daß der eine von ihnen eine vom anderen ausgesandte Strahlung von bestimmter Wellenlänge zwar absorbiert, aber die gleiche Strahlung selbst nicht emittiert. Dann würde er die vom anderen durch diese Strahlung auf ihn übertragene Energie ständig aufspeichern und sich erwärmen. Der andere Körper aber würde durch die Aussendung dieser Strahlung, für die er vom ersten Körper keinen Ersatz erhält, ständig Energie verlieren, sich also abkühlen. Es könnte kein Strahlungsgleichgewicht bestehen. Das ist im Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, nach dem zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Körper dem Zustande der Temperaturgleichheit zustreben müssen. Daher muß ein Körper jede Strahlung, die er absorbiert, auch emittieren, und zwar muß die Emission bei gegebener Temperatur in einem festen Verhältnis zur Absorption stehen, wie es das *KIRCHHOFFSche Gesetz* ausspricht.

Absorbiert ein Körper jegliche auf ihn fallende Strahlung vollkommen, so ist $A = 1$. Einen solchen Körper bezeichnet man, sofern es sich zunächst um das sichtbare Spektralgebiet handelt, im täglichen Leben als schwarz. In der Physik aber versteht man unter einem „*schwarzen Körper*“ einen solchen, welcher *jegliche* Strahlung, ganz gleich welcher Wellenlänge, vollkommen absorbiert. Kein Stoff erfüllt diese Bedingung vollständig. Trotzdem ist ein schwarzer Körper physikalisch mit beliebiger Annäherung zu verwirklichen, und zwar durch eine nicht zu große Öffnung in der Wand eines geschlossenen Hohlraumes, insbesondere wenn dessen Innenwände geschwärzt sind. Ein in eine solche Öffnung fallender Strahl wird im Innern des Hohlraums praktisch vollkommen absorbiert, ehe er nach mehrfachen Reflexionen zufällig wieder aus der Öffnung austritt. Wird z. B., was durch Berußung leicht erreicht wird, jeweils nur 5% der Strahlung an der Wandung reflektiert, so ist nach der zweiten Reflexion nur noch 0,25%, nach der dritten nur noch 0,0125% usw. übrig. Ein solches Loch ist also ein praktisch vollkommener schwarzer Körper. Macht man in die Wand eines geschlossenen Kastens mit berußten Innenwänden ein kleines Loch und berußt auch dessen Umgebung, so sieht man, daß das Loch noch erheblich dunkler ist als der Ruß, welcher bereits etwa 95% der auf fallenden Strahlung absorbiert.

Hat ein Körper aber die größte mögliche Absorption A , so ist nach Gl. (1) auch seine Emission größer als die eines jeden anderen Körpers unter gleichen Bedingungen. Daher ist die Strahlung eines erwärmten schwarzen Körpers, die „*schwarze Strahlung*“, in jedem Spektralbereich stärker als diejenige irgendeines anderen Körpers von gleicher Temperatur. Er bildet einen Grenzfall aller in der Natur vorkommenden strahlenden Körper. Die Strahlung anderer Körper bleibt stets — und zwar in den verschiedenen Spektralgebieten meist in verschiedenem Grade — hinter derjenigen des schwarzen Körpers zurück.

Daß ein Körper um so stärker strahlt, je schwärzer er aussieht, zeigt folgender Versuch. Man bringe auf einem Stück Platinblech einen Fleck aus Tusche an, welcher sich in kaltem Zustande schwarz (A groß) von seiner spiegelnden Umgebung (A klein) abhebt. Erwärmt man jetzt das Blech in einer Bunsenflamme zum Glühen, so leuchtet der Tuschefleck erheblich heller als seine Umgebung (Abb. 553).

Ein Loch in der Wand eines erwärmten Hohlraums ist demnach auch der stärkste, bei einer bestimmten Temperatur der Hohlraumwandung denkbare Strahler (schwarzer Strahler). Da die Strahlung des schwarzen Körpers den idealen

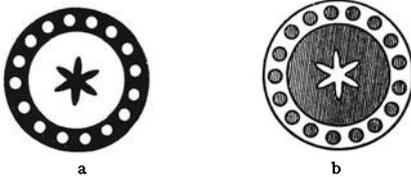


Abb. 553. Schwarz-weißer Körper, a bei tiefer Temperatur im reflektierten Licht, b bei hoher Temperatur selbstleuchtend.

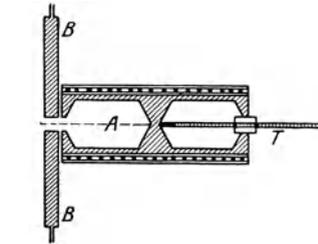


Abb. 554. Beispiel eines schwarzen Körpers für Strahlungsmessungen nach RUBENS.

Grenzfall aller sonstigen Strahler darstellt, so ist ihre Untersuchung von großer Bedeutung. Abb. 554 zeigt als Beispiel einen „schwarzen Körper“, der für Strahlungsmessungen bis etwa 600° dienen kann. Er besteht aus einem mit zwei ausgebohrten Hohlräumen versehenen Kupferblock, der von einer zur elektrischen Heizung dienenden Drahtspule umgeben ist. Als strahlender Hohlraum dient der Teil A , der vorn mit einer Blende versehen ist, vor der sich noch eine mit Wasser gekühlte Blende B befindet, damit nur Strahlung, die aus dem Innern des Hohlraums kommt, zur Beobachtung gelangen kann. Der zweite Hohlraum dient in der Hauptsache zur Einführung eines Thermometers T , mittels dessen die Temperatur der Wand des strahlenden Hohlraums gemessen werden kann. (Eine Ausführung für höhere Temperaturen s. Abb. 541, § 311.) Man nennt die schwarze Strahlung wegen der Art ihrer Erzeugung, und weil sie sich in einem geschlossenen Hohlraum, der anfänglich mit einer Strahlung von beliebiger Energieverteilung erfüllt war, durch Wechselwirkung mit den Wänden stets von selbst herstellt, auch *Hohlraumstrahlung*.

Ein Körper, bei dem die Strahlung zwar der des schwarzen Körpers nicht gleich ist, bei dem aber alle Spektralgebiete in ihrer Energie um den gleichen Bruchteil schwächer sind als beim schwarzen Körper, heißt *grau*. Denn ein solcher Körper erscheint im reflektierten Lichte grau. Das rührt daher, daß er nach dem KIRCHHOFFSchen Gesetz auch von allen Spektralfarben den gleichen Bruchteil absorbiert. Fällt auf ihn weißes Licht, so wird dieses in allen Spektralbereichen im gleichen Grade geschwächt, und im reflektierten Lichte erscheint keine Farbe bevorzugt.

Eine Folge aus dem KIRCHHOFFSchen Gesetz ist auch die *Selbstumkehr der Spektrallinien* (FOUCAULT 1849). Man entwerfe auf einem Schirm ein Spektrum

einer Bogenlampe. Vor den Spalt setze man eine Bunsenflamme, über der sich ein Eisenlöffel mit metallischem Natrium befindet, so daß das Natrium mit gelber Flamme verbrennt, und zwar so, daß das durch den Spalt tretende Licht auch durch die Natriumflamme hindurchgeht. Dann erscheint im Gelben eine dunkle Linie im Spektrum (Abb. 555 a), die sich bei größerer Auflösung als eine Doppellinie erweist. Löscht man die Bogenlampe aus, während das Natrium noch brennt, so sieht man jetzt an der gleichen Stelle eine vorher nicht erkennbare schwache, von der Natriumflamme herrührende gelbe Linie.

Diese Selbstumkehr erklärt sich auf folgende Weise. Nach dem KIRCHHOFFSchen Gesetz absorbieren die Atome des Natriumdampfes Licht an den gleichen Stellen des Spektrums, an denen sie Licht aussenden, da ja Emission und Absorption stets parallel gehen. (Es gilt dies allerdings nur für diejenigen Spektrallinien, die die *Atome in ihrem jeweiligen Zustande* aussenden können. Der Dampf absorbiert daher keineswegs alle Spektrallinien, die die Atome *überhaupt* aussenden können, sondern nur diejenigen, welche der Grundserie des Atoms angehören, vgl. § 341. Das ist in vollkommenem Einklang mit dem KIRCHHOFFSchen Gesetz.) Der in der Flamme befindliche Natriumdampf absorbiert also Licht der gleichen Wellenlänge, wie er es selbst aussendet. Die eigene Lichtemission der Flamme ist aber nicht entfernt stark genug, um das Licht, welches der Dampf dem Licht der Bogenlampe entzieht, im Spektrum zu ersetzen. Die betreffende Stelle im Spektrum, obgleich ganz schwach erhellt, erscheint daher gegenüber der viel helleren Umgebung dunkel. Zum Gelingen des Versuchs ist

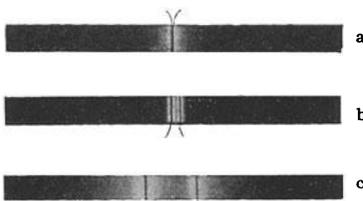


Abb. 555. Selbstumkehr der Spektrallinien im Dampf von Lithium (a), Natrium (b) und Kalium (c). (Erstes Linienpaar der Hauptserien in gleicher Wellenlängenskala.)

es an sich nicht nötig, daß der Natriumdampf selbst leuchtet, man kann ihn auch mit einem mit Natriumdampf gefüllten Glasgefäß anstellen. Abb. 555 b und c zeigen die gleiche Erscheinung bei Lithium- und Kaliumdampf.

320. Das PLANCKSche Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. Die Strahlung des schwarzen Körpers bildet den Grenzfall der Strahlung aller wirklichen Stoffe, und schwarze Körper können durch den schon erwähnten Kunstgriff mit jeder beliebigen Annäherung hergestellt und auf die spektrale Verteilung ihrer Strahlungsenergie bei verschiedenen Temperaturen untersucht werden. Diese Verteilung war bereits vor 1900 insbesondere durch Messungen von PASCHEN und von LUMMER und PRINGSHEIM sehr genau bekannt. Ihre theoretische Begründung stieß aber auf unüberwindliche Hindernisse. Sie kann nur so erfolgen, daß man die Wechselwirkungen zwischen der Strahlung und den die Strahlung aussendenden und absorbierenden Elementarteilchen des schwarzen Körpers untersucht. Diese Elementarteilchen kann man sich als elektrische Oszillatoren (schwingungsfähige Ladungen) denken, die auf die einzelnen Schwingungszahlen abgestimmt sind, und deren Schwingungsweite um so größer ist, je höher die Temperatur des Körpers ist. Von der Temperatur und der Schwingungsweite, also der Schwingungsenergie, der Oszillatoren muß dann auch die Energie einer mit ihnen in Gleichgewicht stehenden Strahlung abhängen. Dabei ist unter *Strahlungsgleichgewicht* ein Zustand zu verstehen, bei dem die Oszillatoren im Durchschnitt in jedem Augenblick ebensoviel Strahlung einer bestimmten Wellenlänge absorbieren, wie sie davon aussenden, so daß die Energiedichte der Strahlung jeder Wellenlänge innerhalb eines von schwarzen Wänden begrenzten Hohlraums zeitlich konstant bleibt.

Nach der klassischen Theorie müßte für die Oszillatoren der Gleichverteilungssatz gelten (§ 100). Ein linear schwingender Oszillator hat nur einen Freiheits-

grad, und müßte eine mittlere kinetische Energie $kT/2$ und eine ebenso große mittlere potentielle Energie, insgesamt also die mittlere Energie $\varepsilon = kT$ haben. Nimmt man dies an, so gelangt man zwangsläufig zu einem Strahlungsgesetz [Gl. (3)], das der Erfahrung widerspricht. PLANCK erkannte, daß man zu einem ihr entsprechenden Gesetz nur gelangt, wenn man für die mittlere Energie der Oszillatoren den Ansatz

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1)$$

macht, wobei ν die Schwingungszahl des Oszillators und der mit ihm in Wechselwirkung stehenden Strahlung ist. h ist eine Konstante, die man das *Wirkungsquantum* nennt, und die die Dimension Energie \times Zeit hat. Ihr Zahlenwert beträgt $6,544 \cdot 10^{-27}$ erg \cdot sec. Wir werden ihr im Kapitel 9 als der fundamentalen Größe der Quantentheorie wieder begegnen. $k = 1,3708 \cdot 10^{-16}$ erg \cdot grad $^{-1}$ ist die BOLTZMANNsche Konstante (§ 100).

Auf Grund der Gl. (1) ergibt sich in der Tat ein mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmendes Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. Es bedeute $E_\lambda d\lambda$ die Energie, welche bei linear polarisierter Hohlraumstrahlung in 1 sec durch jeden Querschnitt eines Strahlungskegels von der Öffnung $\Omega = 1$ geht und deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt. Dann lautet das PLANCKSche Strahlungsgesetz

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\frac{c h}{k\lambda T} - 1}. \quad (2)$$

(Man beachte, daß $ch/k\lambda T = h\nu/kT$ ist [Gl. (1)], da $c/\lambda = \nu$.)

Man sieht leicht, daß Gl. (1) in den Gleichverteilungssatz $\varepsilon = kT$ übergeht, wenn man $h \rightarrow 0$ setzt. Das entscheidende Merkmal, durch das die PLANCKSche Ableitung von der klassischen Theorie abweicht, ist demnach die endliche Größe des Wirkungsquantums h . Setzt man in Gl. (2) $h \rightarrow 0$, so folgt

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c k T}{\lambda^4} d\lambda. \quad (3)$$

Das ist in der Tat das aus der klassischen Theorie folgende Gesetz, das bereits früher von RAYLEIGH und JEANS abgeleitet worden war. Das PLANCKSche Gesetz nähert sich ihm auch dann immer mehr an, wenn die Größe $ch/k\lambda T$ sich dem Werte 0 nähert, also für $\lambda T \gg ch/k$. Tatsächlich bildet Gl. (3) den für große Wellenlängen λ und hohe Temperaturen T zutreffenden Grenzfall des PLANCKSchen Gesetzes.

Ist dagegen $\lambda T \ll ch/k$, so daß $e^{\frac{c h}{k\lambda T}} \gg 1$, so vereinfacht sich Gl. (2) zu

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} e^{-\frac{c h}{k\lambda T}} d\lambda. \quad (4)$$

Dieses Gesetz ist schon 1896 von W. WIEN auf Grund gewisser Annahmen abgeleitet worden, ohne daß er aber die darin auftretenden Konstanten $c^2 h$ und ch/k bereits in dieser Form angeben konnte. Man erkennt nunmehr, daß das WIENSche Gesetz den Grenzfall des PLANCKSchen Gesetzes für kleine Wellenlängen λ und tiefe Temperaturen T darstellt.

In Abb. 556 ist die Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers (E_λ als Funktion von λ) für einige Temperaturen nach Gl. (2) dargestellt.

321. Das WIENSche Verschiebungsgesetz. Das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz. Wie man aus Abb. 556 erkennt, verschiebt sich das Maximum der Energieverteilungskurve mit steigender Temperatur derart, daß bei einer Verdoppelung der absoluten Temperatur T die dem Energiemaximum entsprechende Wellenlänge λ_m auf die Hälfte sinkt. Es ist also das Produkt $\lambda_m T = \text{const}$ (WIENSches Verschiebungsgesetz, 1893). Dieses Gesetz, das auch schon aus der klassischen Theorie folgt, läßt sich aus Gl. (2) ohne weiteres ableiten. Die Lage des Maximums findet man, indem man $dE_\lambda/d\lambda = 0$ setzt. Setzt man $ch/k\lambda_m T = x$, so erhält man für x die transzendente Gleichung $x + 5e^{-x} = 5$ mit der Lösung $x = 4,9651$. Es ist daher

$$\lambda_m T = \frac{ch}{kx} = b. \quad (5)$$

In Übereinstimmung mit dem hieraus berechenbaren Wert ergibt sich aus den Messungen der Zahlenwert $b = 0,288 \text{ cm} \cdot \text{grad}$.

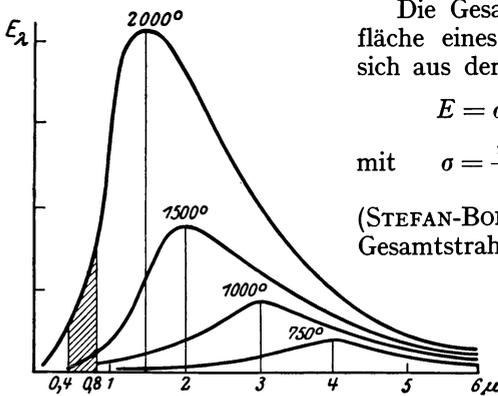


Abb. 556. Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers. Das sichtbare Gebiet ist schraffiert.

Die Gesamtstrahlung E von 1 cm^2 der Oberfläche eines schwarzen Körpers in 1 sec ergibt sich aus der Theorie zu

$$E = \sigma T^4, \quad \left. \begin{array}{l} \text{mit } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{grad}^{-4} \cdot \text{sec}^{-1}. \end{array} \right\} (6)$$

(STEFAN-BOLTZMANNsches Gesetz, 1879, 1884.) Die Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers ist also der 4. Potenz der absoluten Temperatur proportional. Die Konstante σ ergibt sich aus Messungen zu $\sigma = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{grad}^{-4} \cdot \text{sec}^{-1}$, in guter Übereinstimmung mit dem aus Gl. (6) berechenbaren Wert.

Die Gl. (5) und (6) liefern wichtige Möglichkeiten zur Bestimmung der Temperatur von schwarzen Körpern. Man kann entweder aus der gemessenen Energieverteilung λ_m und daraus $T = b/\lambda_m$ ermitteln, oder man mißt die Gesamtstrahlung E von 1 cm^2 der Oberfläche und berechnet T nach der Gleichung $T = \sqrt[4]{E/\sigma}$. Bei nichtschwarzen Körpern, z. B. den Fixsternen ist dies nicht ohne weiteres möglich. Bestimmt man ihre Temperatur nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz, als ob sie schwarze Körper seien, so erhält man eine niedrigere Temperatur als sie tatsächlich haben, weil ihre Strahlung ja schwächer ist als die eines schwarzen Körpers von gleicher Temperatur. Ebenso wird im allgemeinen die Anwendung des WIENSchen Verschiebungsgesetzes Fehler mit sich bringen. Viele Körper aber, auch viele Fixsterne, sind bei hoher Temperatur von einem schwarzen Körper nicht allzu sehr verschieden, so daß man ihre Temperatur mit Hilfe dieser Gesetze zwar nicht streng, aber doch angenähert richtig erhält. Die Anwendung des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes gibt aus dem angeführten Grunde einen unteren Grenzwert für die Temperatur. Man bezeichnet sie, im Gegensatz zur wahren, durch die Energie der Molekularbewegung (§ 100) definierten Temperatur, als *schwarze Temperatur*, auch als *effektive* oder *Strahlungstemperatur*.

Die Temperaturmessung glühender Körper mit Hilfe der Strahlung heißt *optische Pyrometrie*. Ein verhältnismäßig einfaches Verfahren, das sich insbesondere für Laboratoriumszwecke und für die Technik eignet, ist das folgende. Man bildet die Fläche, deren Temperatur gemessen werden soll, in

der Okularblende eines kleinen Fernrohrs ab, innerhalb derer der Glühfaden einer kleinen Glühlampe angebracht ist. Man regelt die Temperatur des Glühfadens so, daß er die gleiche Flächenhelligkeit hat wie die zu untersuchende Fläche. Dann hebt er sich auf ihr nicht mehr ab und hat die gleiche Strahlungstemperatur wie sie. Aus dem hierzu notwendigen Heizstrom kann man, wenn die Lampe vorher mit Hilfe eines schwarzen Körpers bei bekannten Temperaturen geeicht wurde, die Temperatur der Fläche ermitteln. Voraussetzung für eine angenähert richtige Temperaturmessung ist, daß die strahlende Fläche sich wenigstens angenähert wie ein schwarzer Körper verhält.

322. Der optische Wirkungsgrad von Lichtquellen. Im § 163 ist darauf hingewiesen worden, daß der optische Wirkungsgrad einer Lichtquelle um so größer ist, je höher ihre Temperatur ist, d. h. daß der Bruchteil der ausgesandten Strahlung, der in das sichtbare Gebiet fällt, mit steigender Temperatur wächst. Wenn auch die gewöhnlichen Lichtquellen, z. B. die Drähte der elektrischen Glühlampen, keine vollkommenen schwarzen Körper sind, so weichen sie doch bei Glühtemperatur von einem solchen nicht allzusehr ab. Wir können sie daher näherungsweise als solche ansehen. Mit steigender Temperatur steigt die gesamte Strahlungsenergie der Lichtquelle nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz. Es kommt aber noch die Verschiebung des Maximums nach dem WIENschen Verschiebungsgesetz hinzu. In der Abb. 556 ist der sichtbare Spektralbereich durch Schraffierung angedeutet. Bei tieferen Temperaturen ist dieses Gebiet weit vom Maximum entfernt, welches dann im Ultrarot liegt. Es entfällt also nur ein kleiner Bruchteil der Gesamtstrahlung auf das sichtbare Gebiet. Die Verhältnisse bessern sich um so mehr, je mehr sich bei steigender Temperatur das Maximum dem sichtbaren Spektralbereich nähert. Dies gilt allerdings nur bis zu einer gewissen Temperatur. Denn man erkennt aus Abb. 556, daß der optische Wirkungsgrad bei steigender Temperatur wieder sinken muß, wenn das Maximum der Energieverteilungskurve sich über das sichtbare Gebiet hinaus verschoben hat. Der höchste Wirkungsgrad liegt bei etwa 5500° . Das ist ziemlich genau die Temperatur der Sonne. Das menschliche Auge ist also gerade in demjenigen Spektralbereich empfindlich, in dem die Sonne ihr Intensitätsmaximum hat. Künstliche Lichtquellen von so hoher Temperatur können wir leider nicht herstellen. Die ganze Entwicklung der elektrischen Beleuchtungstechnik ist aber in den letzten Jahrzehnten dahin gerichtet gewesen, den Wirkungsgrad der Lichtquellen, d. h. das Verhältnis der gewonnenen sichtbaren Lichtenergie zur aufgewandten Energie, zu vergrößern, indem man zu immer höheren Temperaturen überging. Trotzdem bleibt der optische Wirkungsgrad aller künstlichen Lichtquellen immer noch äußerst gering. Er beträgt z. B. bei der Petroleumlampe und dem Gasglühlicht etwa 0,2%, bei der Kohlefadenlampe 0,5%, bei der luftleeren Wolframlampe 1,6% und bei der gasgefüllten Wolframlampe 4%. Und auch dies sind nur obere Grenzwerte bei günstigen Bedingungen.

323. Lumineszenzerscheinungen. Bei den bisher behandelten Strahlungserscheinungen handelte es sich stets um Temperaturstrahlung, also um Strahlung, welche ihre Ursache in der Temperatur des strahlenden Körpers hat. In allen anderen Fällen bezeichnet man das Auftreten von Lichtstrahlung als *Lumineszenz*. Von diesen Erscheinungen haben wir bereits die *Elektrolumineszenz*, d. h. das Leuchten der Gase unter der Wirkung einer elektrischen Entladung (§ 182f.), kennengelernt. Weitere Lumineszenzerscheinungen sind die folgenden:

Fluoreszenz. Viele Stoffe haben die Eigenschaft, daß sie einen Teil des auf sie fallenden Lichts absorbieren und als Licht der gleichen oder größerer Wellenlänge wieder aussenden. Die Lichtaussendung dauert (im Unterschied zu der gleich zu besprechenden Phosphoreszenz) nur so lange an, wie die äußere

Lichtwirkung andauert. Diese Erscheinung, welche zuerst am Flußspat beobachtet wurde, heißt Fluoreszenz. Andere im sichtbaren Spektralbereich fluoreszierende Stoffe sind z. B. Lösungen von Fluoreszein, Äskulin und anderen Stoffen. Joddampf in einem sonst möglichst gasleeren Glasgefäß zeigt eine grüngelbliche Fluoreszenz. Das Fluoreszenzlicht geht von allen Stellen des Stoffes aus, die von Licht getroffen werden. Daher wird die Bahn des Lichts in einem fluoreszierenden Stoff sichtbar, ähnlich wie in einem trüben Medium. Doch ist die Ursache eine völlig andere. Bei den trüben Medien handelt es sich um eine Streuung des Lichts an kleinen Teilchen, bei der Fluoreszenz um eine Anregung der den Atomen oder Molekülen der fluoreszierenden Stoffe eigentümlichen Lichtschwingungen. Daher ist auch das Spektrum des Fluoreszenzlichts für den betreffenden Stoff charakteristisch. Die Fluoreszenz unter der Wirkung von Röntgenstrahlen haben wir bereits erwähnt. Auch Kathodenstrahlen und die Strahlen radioaktiver Stoffe sind imstande, Fluoreszenz zu erregen. (Weiteres s. § 350.)

Phosphoreszenz. Die Phosphoreszenz ist der Fluoreszenz insofern ähnlich, als auch sie in der Erregung eines Leuchtens von Stoffen durch auf sie fallendes Licht besteht. Der am meisten in die Augen fallende Unterschied besteht darin, daß die Phosphoreszenz nach Aufhören der äußeren Lichtwirkung noch eine mehr oder weniger lange Zeit andauert. Oft ist dieses Nachleuchten allerdings von so kurzer Dauer, daß zum Nachweis besondere Hilfsmittel (Phosphoroskop) nötig sind. Beispiele von phosphoreszierenden Stoffen sind die Zinkblende und die BALMAINSche Leuchtfarbe (CaS mit Bi).

Wie LENARD gezeigt hat, ist die Anwesenheit kleiner Spuren von „wirk-samen“ Metallen für die Phosphoreszenzfähigkeit Vorbedingung. So besteht z. B. einer der von LENARD untersuchten „Phosphore“ aus 1 g ZnS, 0,0001 g Cu und 0,01 g NaCl, welches letzteres hauptsächlich als Flußmittel dient.

Wird ein erregter Phosphor erwärmt, so sendet er die in ihm aufgespeicherte Strahlungsenergie sehr viel schneller aus als im kalten Zustande. Er leuchtet also hell auf, klingt aber auch schnell ab (*Ausleuchtung*, LENARD). Dies wurde früher fälschlich als Erregung von Phosphoreszenz durch die Wärme gedeutet (Thermolumineszenz). Die Phosphoreszenz ist ein sehr verwickelter Vorgang, der in einem Zusammenhang mit dem lichtelektrischen Effekt (§ 333) steht. Wir müssen uns hier mit den vorstehenden Angaben begnügen.

Tribolumineszenz. Beim Reiben zweier Zuckerstücke aneinander oder beim Stoßen des Zuckers zeigt sich oft im Dunkeln eine schwache Lichterscheinung, die Tribolumineszenz. Die gleiche Erscheinung zeigen eine ganze Reihe anderer Kristalle.

Chemolumineszenz. Biolumineszenz. Zahlreiche chemische Umwandlungen sind mit einem Leuchten der miteinander reagierenden Stoffe verbunden (Chemolumineszenz). In dieses Gebiet gehören jedenfalls auch die Erscheinungen des tierischen Leuchtens (Biolumineszenz), das man außer bei den Leuchtkäfern und Glühwürmchen bei sehr zahlreichen Meerestieren beobachtet (Meerleuchten). Die Fähigkeit zu leuchten, kommt lediglich gewissen Kleinlebewesen zu. Das Leuchten größerer Lebewesen beruht darauf, daß sie mit diesen in Symbiose leben, sie in ihrem Körper beherbergen. Das Leuchten der Kleinlebewesen hängt von der Sauerstoffzufuhr ab. Die höheren Lebewesen, die solche beherbergen, sind in der Lage, die Lichtaussendung durch Regelung der Sauerstoffzufuhr zu ihren Gästen willkürlich anzuregen oder zu drosseln.

Achtes Kapitel.

Relativitätstheorie.

324. Das Relativitätsprinzip. GALILEI-Transformation. Wir haben in § 17 für den Bereich der Mechanik ausführlich nachgewiesen, daß von zwei Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, keines vor dem anderen bevorzugt ist, und daß jedes Inertialsystem mit gleichem Recht wie ein absolut ruhendes System betrachtet werden darf.

Wir bezeichnen künftig die Koordinaten eines Massenpunktes in zwei mit der Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegten Bezugssystemen S und S' mit x, y, z bzw. x', y', z' . Die beiden Koordinatensysteme wollen wir uns stets so gelegt denken, daß die x -Achse und die x' -Achse zusammenfallen und in die Richtung der Geschwindigkeit v von S' relativ zu S weisen, und daß die y - und die y' -Achse sowie die z - und die z' -Achse einander parallel sind. Den Anfangspunkt der Zeit wählen wir so, daß zur Zeit $t = 0$ die beiden Koordinatensysteme genau zusammenfallen, also $x' = x$ ist.

Wir betrachten einen Massenpunkt, dessen Koordinaten im System S' , das sich als Ganzes gegenüber einem System S mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x -Achse bewege, x', y', z' seien. Dann sind die Koordinaten des Punktes im System S unter Zugrundelegung der klassischen Mechanik

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1a)$$

Setzen wir noch fest, daß den Zeitmessungen in beiden Systemen die gleiche Zeiteinheit und der gleiche Anfangspunkt zugrunde gelegt wird, so ist, wenn wir die Zeitangaben in S und S' mit t und t' bezeichnen,

$$t = t'. \quad (1b)$$

Statt Gl. (1a) und (1b) können wir umgekehrt auch schreiben

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2)$$

Gl. (1a), (1b) und (2) sind die *GALILEI-Transformationen*. Gl. (2) geht aus Gl. (1) hervor, indem man die Koordinaten der beiden Systeme vertauscht und $+v$ durch $-v$ ersetzt. Wir können sagen, daß in Gl. (1) das System S als ruhend, das System S' als ihm gegenüber mit der Geschwindigkeit $+v$ bewegt angesehen wird, in Gl. (2) aber umgekehrt S als gegenüber dem ruhenden System S' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt.

Welches der beiden Bezugssysteme wir verwenden, ist für die Gestalt der mechanischen Gesetze gleichgültig. Die Gesetze der Mechanik sind gegenüber einer GALILEI-Transformation, wie man sagt, *invariant*.

325. Der MICHELSON-Versuch. Die klassische Physik stand auf dem Standpunkt, daß letzten Endes alle physikalischen Erscheinungen in irgendeiner Weise mechanisch-anschaulich zu erklären sein müßten. Zur Durchführung dieses Grundsatzes ersann man als stofflichen Träger der elektrischen und magnetischen Felder, also zur mechanischen Erklärung der elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen, den Äther (§ 26). Wegen der Verbreitung des hypothetischen Äthers im ganzen Weltall lag es nahe, ihn als den eigentlichen Vertreter des absoluten Raumes anzusehen bzw. als das Etwas, in dem man

ein bevorzugtes Koordinatensystem festlegen könne, das man als absolut ruhend anzusehen berechtigt sei.

Es erhob sich daher die Frage, ob eine Bewegung im Äther etwa durch einen elektrischen oder optischen Versuch, durch die Wirkung einer Art von „Ätherwind“, nachgewiesen werden könne. Legen wir die GALILEI-Transformation zugrunde, so scheint es, als müsse das möglich sein. Wir nehmen an, ein System S sei ein im Äther absolut ruhendes Koordinatensystem. In einem solchen muß sich das Licht im Vakuum nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit c gleich schnell fortpflanzen. Das System S' , etwa die Erde, bewege sich wieder mit der Geschwindigkeit v relativ zum Äther in Richtung der x -Achse. Wir betrachten jetzt zwei gleichzeitig vom Nullpunkt ($x = y = z = 0$) des ruhenden Systems ausgesandte Lichtstrahlen, deren einer in Richtung der positiven ($+c$) und deren anderer in Richtung der negativen x -Achse ($-c$) verläuft. Ihre Geschwindigkeit ist also in S gleich $dx/dt = +c$ bzw. $dx/dt = -c$. Bilden wir jetzt die entsprechenden Größen in S' , so erhalten wir nach Gl. (2)

$$c' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = c - v$$

bzw. $c' = -c - v = -(c + v)$.

Von S' aus beurteilt, muß also die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Richtungen verschieden sein. Für Strahlen, die irgendwelche andere Winkel mit der x -Achse bilden, ergeben sich leicht berechenbare Werte, die zwischen den Grenzen $c - v$ und $-(c + v)$ liegen. Vom System S' aus beurteilt, muß also die Lichtgeschwindigkeit in den verschiedenen räumlichen

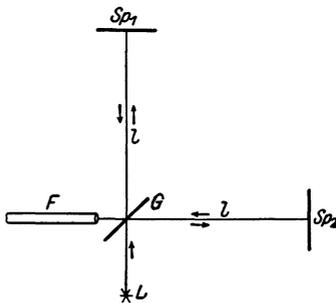


Abb. 557.
Schema des Versuchs von MICHELSON.

Richtungen verschieden sein. Gelingt es, die Geschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen zu vergleichen, so könnte man daraus die Größe und Richtung der „absoluten Geschwindigkeit“ v des Systems S' im Äther berechnen.

Auf diesen Gedanken gründet sich der Versuch von MICHELSON (1881). Voraussetzung ist bei ihm, daß nicht etwa die Erde (auch bezüglich ihrer Rotation) zufällig im Äther ruht, eine Annahme, die sich schon wegen der Kompliziertheit der Bewegung der einzelnen Punkte der Erdoberfläche durchaus verbietet. (Der Gedanke, daß die bewegte Erde den Äther an ihrer Oberfläche mit sich führt, ist durch besondere Versuche in größeren Höhen widerlegt worden.) MICHELSONS Versuchsanordnung, die Abb. 557 ganz schematisch darstellt, ist ein Interferometer von anderer Bauart, als wir es im § 292 besprochen haben. Von der Lichtquelle L geht monochromatisches Licht aus, das an einer halbdurchlässigen (schwachversilberten) Glasplatte G in zwei gleich starke, kohärente Strahlenbündel zerlegt wird, die senkrecht zueinander auf die beiden in gleicher Entfernung l (einige Meter) stehenden Spiegel Sp_1 und Sp_2 verlaufen. An diesen werden sie wieder nach G reflektiert, dort zum Teil durchgelassen bzw. rechtwinkelig reflektiert und gelangen zusammen in ein Fernrohr F . (Alle Vorrichtungen, die z. B. zum Parallelmachen des von L ausgehenden Strahlenbündels zwischen G und Sp_1 bzw. Sp_2 usw. dienen, sind in Abb. 557 fortgelassen.) Da die beiden in das Fernrohr fallenden Strahlenbündel kohärent sind, so entsteht in der Brennebene des Fernrohrökulars ein System von Interferenzstreifen, d. h. hellen und dunklen Linien. Denn die einzelnen Strahlen haben, auch bei gleicher Länge der beiden Arme des Meßgeräts, abgesehen von der Mitte des Gesichtsfeldes, etwas verschiedene Wege bis zu den einzelnen Punkten dieser Ebene zurückzulegen, haben also einen vom Abstände von der

Mitte abhängigen Gangunterschied (vgl. den FRESNELSchen Spiegelversuch, § 287). Würden wir jetzt z. B. den Abstand $G-Sp_2$ verkürzen, so würden sich diese Gangunterschiede ändern, die Interferenzstreifen würden sich verschieben. Das gleiche wäre der Fall, wenn wir an Stelle der im Strahlengange befindlichen Luft in den Weg des einen der beiden Teilstrahlen einen brechenden Stoff brächten, da dadurch die Geschwindigkeit und damit die optische Weglänge des Lichtes geändert würde. Das gleiche aber müßte auch geschehen, wenn auf irgendeine andere Weise das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten längs der beiden Lichtwege sich ändert. Denn Änderung der Lichtgeschwindigkeit, ganz gleich welches ihre Ursache ist, bewirkt Änderung der optischen Weglänge.

Ist die GALILEI-Transformation auf diesen Versuch anwendbar, so müßte er das erwartete Ergebnis haben. Angenommen die Meßanordnung stehe so, daß der nach Sp_2 verlaufende Strahl in Richtung der absoluten Bewegung des Gerätes (der Erde) stehe, dann wäre die Lichtgeschwindigkeit für einen mitbewegten Beobachter in dieser Richtung kleiner als in jeder anderen, also auch kleiner als in der dazu senkrechten Richtung. Dreht man jetzt das Gerät nebst dem Fernrohr um 90° , so daß der andere Strahl in die Richtung der Erdbewegung fällt, so kehren sich die Verhältnisse um. Die optische Weglänge ist jeweils für den in Richtung der Bewegung verlaufenden Strahl größer. Stehen die beiden Arme unter 45° gegen die Bewegung, so sind die Lichtwege gleich. Bei einer Drehung der Meßvorrichtung müßte sich daher eine periodische Verschiebung der Interferenzstreifen, entsprechend der periodischen Änderung der Lichtgeschwindigkeit längs der beiden Lichtwege, zeigen. Eine Berechnung zeigt, daß dies vollkommen deutlich und meßbar sein müßte.

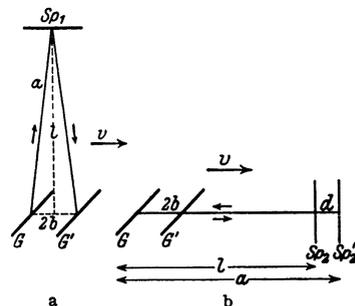


Abb. 558. Zur Erklärung des MICHELSON-Versuchs.

Wir betrachten den Fall, daß der auf Sp_2 verlaufende Strahl in Richtung der Erdbewegung liegt. Die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden System (Äther) ist in allen Richtungen gleich c . Zum Durchlaufen des Weges $G-Sp_1 = a$ (Abb. 558a) und zurück braucht das Licht nicht etwa die Zeit $2l/c$. Da sich G währenddessen ein wenig (um die Strecke $2b$) verschiebt, muß der Strahl ein wenig gegen den Spiegel Sp_1 geneigt sein, wenn er wieder auf die gleiche Stelle von G treffen soll (G bzw. G' bezeichnet hier und im folgenden die Stellung der Glasplatte im Augenblick des Abganges und der Wiederkehr des Lichtes). Es sei t_1 die Zeit, die das Licht für seinen Hin- und Rückweg bzw. der Spiegel G zu seiner Verschiebung von G bis G' benötigt, und v die Geschwindigkeit des Meßgerätes. Dann ist $t_1 = 2a/c = 2b/v$, also $b = a \frac{v}{c}$ und da $a^2 = l^2 + b^2$,

$$s_1 = 2a = \frac{2l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Wir gehen jetzt zum zweiten Strahl über. Es bedeute Sp_2 (Abb. 558b) die Stellung des Spiegels beim Abgang des Lichtes von G , Sp'_2 diejenige im Augenblick der Reflexion. Der Weg von G bis Sp'_2 sei gleich a , die Verschiebung von G gleich $2b$, also der Weg des Lichtstrahls gleich $2a - 2b$, die Verschiebung des Spiegels von Sp_2 bis Sp'_2 gleich d . Betrachten wir nur den Hinweg des Lichts, so ist die dazu nötige Zeit $t'_2 = a/c = d/v$, so daß $d = a \cdot v/c$. Andererseits

ist $a = l + d$, so daß folgt $a = l/(1 - v/c)$. Für den ganzen Hin- und Rückweg braucht das Licht die Zeit $t_2 = 2(a - b)/c = 2b/v$, woraus folgt $b = \frac{a \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}$.

Daraus ergibt sich als Weg des Lichts

$$s_2 = 2(a - b) = \frac{2l}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Aus Gl. (3) und (4) folgt schließlich

$$s_2 : s_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad s_2 = s_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

Drehen wir jetzt das Meßgerät um 90° , so müßte sich immer, die Richtigkeit unserer Grundlagen vorausgesetzt, das Verhältnis der beiden Lichtwege umkehren, wie wir es oben vorausgesagt haben. Die zu erwartende Wirkung ist also die gleiche, die wir erhalten würden, wenn wir den in der Geschwindigkeitsrichtung liegenden Arm bei ruhendem Gerät im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ gegenüber dem anderen *verlängert* hätten.

Das Ergebnis des seitdem noch mehrfach, besonders sorgfältig von JOOS wiederholten MICHELSON-Versuch ist gewesen, daß von einem derartigen Einfluß der Erdbewegung nicht das mindeste zu bemerken ist. Der Versuch verläuft genau so, wie man es erwarten müßte, wenn die Erde im Äther ruhte, also $v = 0$ wäre. Da dieses Ergebnis aber den bisherigen Grundvorstellungen widerspricht, so muß also an den letzteren irgend etwas nicht in Ordnung sein.

326. Die Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie. Die LORENTZ-Transformationen. Man kann das Ergebnis des MICHELSON-Versuchs dahin ausprechen, daß sich das Licht relativ zur bewegten Erde, also jedenfalls auch zu jedem anderen bewegten Bezugssystem, wider alles Erwarten in allen Richtungen gleich schnell fortpflanzt. Es ist die Vermutung aufgetaucht, daß dies seinen Grund darin habe, daß sich die Geschwindigkeit der Lichtquelle, die ja beim MICHELSON-Versuch mitbewegt wird, zu der Lichtgeschwindigkeit addiere. Dem widersprechen gewisse astrophysikalische Beobachtungen entscheidend. Demnach kann jeder von einer Anzahl von relativ zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Beobachtern mit dem gleichen Recht behaupten, in seinem Bezugssystem breite sich ein Lichtblitz — und zwar für alle Beobachter ein und derselbe — in Gestalt einer Kugelwelle um seinen Ursprung aus. Nach unseren gewöhnlichen Anschauungen von Raum und Zeit, wie sie den soeben beim MICHELSON-Versuch angestellten Überlegungen zugrunde liegen, ist das vollkommen unmöglich. Es besteht hier ein klarer Widerspruch der experimentellen Erfahrung mit den alten Raum- und Zeitbegriffen.

Ihn zu lösen gelang im Jahre 1904 EINSTEIN. Er ging davon aus, daß der Widerspruch in der auf den alten Begriffen beruhenden GALILEI-Transformation liegen müsse, und daß diese durch eine andere zu ersetzen sei. Diese neue Transformation fand er, indem er auf Grund des MICHELSON-Versuchs das *Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* aufstellte, welches besagt: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, bezogen auf *irgendein Inertialsystem*, ist unabhängig von der Bewegung dieses Systems. Und ganz allgemein folgerte er: Es gibt nicht nur keinen mechanischen, es gibt *überhaupt keinen* physikalischen Vorgang, dessen Ablauf irgend etwas über eine geradlinige und gleichförmige Bewegung des Bezugssystems aussagt. Eine absolute Bewegung ist *grundsätzlich* unbeobachtbar und gehört daher nicht in den Bereich des physikalisch

Wirklichen. Beobachtbar sind nur relative Bewegungen von Inertialsystemen. Diese Aussagen bilden das *Relativitätsprinzip*. Die Vorstellung von einem stofflichen Lichtäther kann natürlich nicht mehr aufrechterhalten werden (vgl. § 26).

Zur Ableitung der Transformation, die hiernach an die Stelle der GALILEI-Transformation zu setzen ist, betrachten wir wieder zwei mit der Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegte Systeme S und S' mit der in § 324 festgelegten Richtung der Achsen und der relativen Geschwindigkeit. Die senkrecht zur Bewegungsrichtung liegenden Koordinaten eines Massenpunktes müssen in beiden Systemen einander gleich sein, nicht aber x und x' . Ebenso wenig darf man voraussetzen, daß der mit vollkommen gleichartigen Uhren gemessene Zeitablauf in den beiden Systemen der gleiche und vom Ort unabhängig ist. x' und t' sind als Funktionen von x und t anzusetzen, und umgekehrt x und t als Funktionen von x' und t' . Die neue Transformation muß also die allgemeine Gestalt haben

$$x' = x'(x, t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t'(x, t). \quad (6a)$$

bzw.

$$x = x(x', t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t(x', t'). \quad (6b)$$

Wir betrachten jetzt die beiden Koordinatenursprünge in den Systemen S und S' ($x = 0$ bzw. $x' = 0$). Bewegt sich S' gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in der x -Richtung, so tut das auch der Punkt $x' = 0$ gegenüber dem Punkt $x = 0$. Es ist also die Aussage $x' = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage $x - vt = 0$. Betrachtet man aber umgekehrt S' als ruhend, was wir ja dürfen, so bewegt sich jetzt S gegenüber S' mit der Geschwindigkeit $-v$. Demnach ist jetzt die Aussage $x = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage $x' + vt' = 0$. Daher muß, wegen der gleichzeitigen Gültigkeit der jeweils nebeneinander gestellten Aussagen, allgemein sein

$$ax' = x - vt \quad \text{und} \quad ax = x' + vt'. \quad (7a \text{ u. } b)$$

a ist ein zunächst unbekannter Faktor, der in beiden Gleichungen derselbe sein muß, weil sich die beiden Ausdrücke wegen des Relativitätsprinzips durch nichts anderes unterscheiden dürfen, als durch die Vertauschung der Koordinaten und des Vorzeichens von v . Um den Faktor a zu bestimmen, eliminieren wir x' aus den Gl. (7)a und (7b) und erhalten

$$at' = \frac{a^2 - 1}{v} x + t. \quad (8)$$

Eine gleichförmige, geradlinige Bewegung eines bestimmten Massenpunktes in der x -Richtung ist im System S durch $u = x/t$, im System S' durch $u' = x'/t'$ gegeben. (Wir bezeichnen hier die Geschwindigkeit eines Massenpunktes relativ zu einem System mit u bzw. u' , zum Unterschied von der relativen Geschwindigkeit v der beiden Systeme). Dividieren wir Gl. (7a) durch Gl. (8), so folgt:

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{(a^2 - 1) \frac{x}{v} + t} = \frac{u - v}{(a^2 - 1) \frac{u}{v} + 1}. \quad (9)$$

Nun betrachten wir statt eines Massenpunktes einen im Vakuum in der x -Richtung fortschreitenden Lichtstrahl. Nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muß diese in beiden Systemen die gleiche, also für diesen Fall $u' = u = c$ sein. Man erhält dann aus Gl. (9) leicht

$$a = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10)$$

Führen wir dies jetzt in die Gl. 7a und 7b ein, so erhalten wir folgende neue Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{IIa})$$

bzw.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{IIb})$$

Diese Transformation ist bereits von H. A. LORENTZ (1891), sowie von FITZGERALD zur formalen Deutung des MICHELSON-Versuches aufgestellt worden. Sie heißt daher die *LORENTZ-Transformation*. Sie erhält ihre Begründung nunmehr aus dem Relativitätsprinzip.

Die LORENTZ-Transformation geht bei kleiner Geschwindigkeit v , d. h. wenn $v/c \ll 1$, wie man leicht sehen kann, in die GALILEI-Transformation, Gl. (1) und (2), über, enthält diese also als Grenzfall für kleine Relativgeschwindigkeiten. Die Bedingung $v/c \ll 1$ trifft aber für bewegte Körper im Bereiche der täglichen Erfahrung stets zu.

327. Relativität der Zeit und der Länge. Aus der LORENTZ-Transformation ergeben sich nun sehr wichtige Folgerungen für die Größe von Zeiten und Längen in bewegten Systemen. Wir betrachten zwei Ereignisse, die sich im System S an zwei Punkten x_1 und x_2 der x -Achse zu den Zeiten t_1 und t_2 abspielen. Nun ist nach Gl. (IIa) im System S'

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{I2})$$

Der zeitliche Abstand der beiden Ereignisse ist also in den beiden Systemen verschieden. Er ist überdies auch vom Abstände der Orte abhängig, an denen sie stattfinden.

Wir wollen zwei Sonderfälle betrachten, erstens den Fall, daß die beiden Ereignisse von System S aus beurteilt *gleichzeitig* stattfinden, so daß $t_1 = t_2$ und daher im System S'

$$t'_1 - t'_2 = -\frac{v}{c^2} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{I2a})$$

Zwei im System S gleichzeitige Ereignisse sind also vom System S' aus beurteilt, nicht gleichzeitig, sondern finden in einem von ihrem örtlichen Abstände $x_1 - x_2$ abhängigen Zeitabstand statt. Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist kein absoluter, sondern hängt vom Bezugssystem ab.

Zweitens betrachten wir zwei Ereignisse, die zu verschiedenen Zeiten, vom System S aus beurteilt *am gleichen Ort*, stattfinden, so daß $x_1 = x_2$, z. B. aufeinander folgende Durchgänge eines Pendels durch seine natürliche Ruhelage. Dann ergibt sich aus Gl. (I2)

$$t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{I2b})$$

Der zeitliche Abstand der beiden Ereignisse ist also im mitbewegten System S kleiner als in jedem relativ zu ihm bewegten System S' . Führt man aber die

gleiche Überlegung für zwei Ereignisse durch, die sich, vom System S' aus beurteilt, nacheinander am gleichen Ort abspielen, so folgt umgekehrt

$$t_1 - t_2 = \frac{t'_1 - t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12c)$$

Wiederum ist also der Zeitabstand im mitbewegten System größer als in jedem anderen. Das gilt z. B. für die Schwingung eines Pendels oder den Gang einer Uhr. Befinden sich zwei vollkommen gleich beschaffene Uhren in zwei relativ zueinander bewegten Systemen, so geht für jeden Beobachter die jeweils in seiner Hand befindliche, relativ zu ihm ruhende Uhr schneller als die relativ zu ihm bewegte Uhr. Ganz allgemein muß dies für den Ablauf jedes physikalischen Vorganges gelten. *Die Zeit ist also ein relativer Begriff*, nichts Absolutes. Der zeitliche Ablauf eines physikalischen Vorganges hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab.

Betrachtet man die in § 85 für den DOPPLER-Effekt abgeleiteten Gleichungen, so könnte es scheinen, als ob man auf Grund dieses Effektes doch unterscheiden könnte, ob der Beobachter ruht und eine Lichtquelle sich ihm gegenüber bewegt oder umgekehrt; denn es haben sich in diesen beiden Fällen verschiedene Ausdrücke ergeben. Das liegt aber nur daran, daß bei der Rechnung die Relativität der Zeit vernachlässigt wurde, und daß es sich dort nicht um Lichtwellen handelte. Führt man die Rechnung auf Grund der LORENTZ-Transformation durch, so ergeben sich für den Fall, daß es sich um *Lichtwellen im Vakuum* handelt, aber nur in diesem Falle, identische Formeln, ganz gleich, ob man sich den Beobachter ruhend und die Lichtquelle bewegt denkt oder umgekehrt. Es ergibt sich immer

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}},$$

je nachdem die Entfernung zwischen Lichtquelle und Beobachter ab- oder zunimmt. Ist $v/c \ll 1$, so kann man statt dessen wie in § 85 schreiben $\nu' = \nu (1 \pm v/c)$.

Selbstverständlich gilt die obige Gleichung nur für Licht. Bei jeder mechanischen Welle, die ja stets einen stofflichen Träger voraussetzt, bleiben die Gleichungen des § 85 (unter Vernachlässigung einer sehr kleinen relativistischen Korrektur) bestehen. Und es widerspricht natürlich dem Relativitätsprinzip in keiner Weise, daß man feststellen kann, welches der *relative* Bewegungszustand des Beobachters und der Quelle der Wellen gegenüber dem Stoff ist, durch den die Wellen sich zum Beobachter hin fortpflanzen.

Nunmehr betrachten wir zwei Punkte x'_1 und x'_2 auf der x' -Achse von S' , etwa die Enden eines in S' ruhenden Maßstabes. Die Länge des Maßstabes ist also in S' gleich $x_2 - x_1$. Wir wollen die Länge des Maßstabes im System S messen. Wir können uns das durch folgendes Gedankenexperiment ausgeführt denken. Wir legen längs der x -Achse einen in S ruhenden geteilten Maßstab von ausreichender Länge und stellen längs desselben eine große Zahl von Beobachtern auf, welche mit vollkommen genau (im System S) gleichgehenden Uhren versehen sind. Diejenigen beiden Beobachter, bei denen die beiden Enden des zu messenden bewegten Maßstabes sich gerade zu einer vorher vereinbarten Zeit, also etwa zur Zeit $t = 0$, befinden, erhalten den Auftrag, die Orte der beiden Stabenden auf dem ruhenden Maßstab zu bezeichnen. Denn damit die Messung in S einen Sinn hat, muß sie offenbar für beide Enden (in S)

gleichzeitig erfolgen. Das Ergebnis der Messung können wir sofort aus der LORENTZ-Transformation, Gl. (IIa), mit $t = 0$, ableiten. Es wird

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{oder} \quad x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (13)$$

Das heißt, der Stab ergibt sich bei der Messung in S im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$ kürzer als im mitbewegten System S' . Ja, man muß sagen, er *ist* im System S kürzer als in S' . Denn anders, als wir es vorausgesetzt haben, kann man seine Länge in S überhaupt nicht sinnvoll definieren und messen.

Durch Umkehrung des Verfahrens kann man sofort zeigen, daß das gleiche bezüglich eines in S ruhenden Stabes eintritt, wenn seine Länge in S' gemessen wird. Er erscheint von S' aus beurteilt im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$ verkürzt. Eine Strecke ist immer am längsten im mitbewegten System. Abmessungen in der zur Bewegung senkrechten Richtung bleiben, wie man aus den LORENTZ-Transformationen abliest, unverändert. Ein Körper wird also in Richtung seiner Bewegung zusammengedrückt, abgeplattet.

Diese *Relativität von Längen* hat ihren Grund in der verschiedenen Beurteilung der Gleichzeitigkeit in den Systemen S und S' . Da die Messungen in S gleichzeitig erfolgen sollten, so erfolgten sie, von S' aus beurteilt, nicht gleichzeitig, sondern ein wenig nacheinander, und zwar die des voraneilenden Endes etwas früher als die des hinteren Endes, was eine Verkürzung zur Folge hat.

LORENTZ und etwa gleichzeitig FITZGERALD kamen zur Aufstellung der neuen Transformationen, weil sie erkannten, daß sie tatsächlich zu einer richtigen Beschreibung des MICHELSON-Versuches führen. Wir können das jetzt leicht verstehen. In der auf Grund der GALILEI-Transformation gemachten Überlegung (§ 325) hatten wir festgestellt, daß die Wirkung der Bewegung sich genau so äußern sollte, als ob der in der Bewegungsrichtung liegende Arm des ruhend gedachten Gerätes im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ *verlängert* sei, wobei wir voraussetzen, daß er *tatsächlich* seine Länge l beibehält. Die erwartete Wirkung tritt aber nicht ein. Das erklärt sich ohne weiteres aus der oben abgeleiteten Tatsache, daß die erwartete Wirkung der Bewegung durch eine entgegengesetzte Wirkung, nämlich durch eine *Verkürzung* des Armes im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$, genau aufgehoben wird. Die Verkürzung von Längen in bewegten Systemen bezeichnet man als *LORENTZ-Kontraktion*.

328. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Ein Körper bewege sich in der x' -Richtung von S' mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $x'/t' = u'$. Wie groß ist seine Geschwindigkeit $x/t = u$, von S aus beurteilt? Wir bilden nach Gl. (IIb) den Ausdruck:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{vx'}{c^2}}.$$

Nach Division von Zähler und Nenner der rechten Seite durch t' erhalten wir mit $x'/t' = u'$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (14)$$

Nach der Relativitätstheorie gilt also nicht die einfache Addition gleichgerichteter Geschwindigkeiten, $u = u' + v$. Sie ist nur als Grenzfall für $v/c \ll 1$ in der Gl. (14) enthalten. Solange u' und v beide kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind, ist auch, wie man leicht zeigen kann, u kleiner als c . Wird aber $u' = c$, so wird auch $u = (c + v)/(1 + v/c) = c$. Die Lichtgeschwindigkeit ist also in beiden Systemen, entsprechend den Grundlagen der Theorie, die gleiche.

Gl. (14) ist dank der außerordentlichen Genauigkeit interferometrischer Methoden einer Prüfung an der Erfahrung zugänglich. Im § 292 haben wir bereits auf FRESNELS Messungen der Lichtgeschwindigkeit in strömenden Flüssigkeiten hingewiesen. Es sei jetzt c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, $c = c_0/n$ die Lichtgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit, wenn sie ruht, bzw. für einen mitbewegten Beobachter, n ihr Brechungsindex, c' die Lichtgeschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v in Richtung oder gegen die Richtung der Lichtfortpflanzung strömt. FRESNEL fand experimentell

$$c' = c \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (15)$$

(+ oder —, je nachdem, ob die Strömung in der Richtung des Lichtes oder gegen diese erfolgt).

Wollen wir Gl. (14) auf diesen Fall anwenden, so haben wir nur zu setzen $u = c'$ (Lichtgeschwindigkeit in der strömenden Flüssigkeit, beurteilt von einem ruhenden Beobachter), $u' = c$, und wir erhalten

$$c' = \frac{c \pm v}{1 \pm \frac{cv}{c_0^2}}$$

Entwickeln wir dies in eine Reihe und brechen mit dem zweiten Gliede ab, so folgt

$$c' = (c \pm v) \left(1 \mp \frac{cv}{c_0^2} \right) = c \pm v \mp v \frac{c^2}{c_0^2} - \frac{cv^2}{c_0^2}$$

Lassen wir das sehr kleine vierte Glied rechts fort und berücksichtigen $c/c_0 = 1/n$, so ist dies mit Gl. (15) identisch. Von der Strömungsgeschwindigkeit v addiert sich also nur der Bruchteil $v(1 - 1/n^2)$ zur Lichtgeschwindigkeit c . Die Größe $(1 - 1/n^2)$ heißt der FRESNELSche *Mitführungskoeffizient*.

In neuerer Zeit sind weitere Versuche über die Lichtfortpflanzung in bewegten Körpern ausgeführt worden, welche ebenfalls durchweg die Relativitätstheorie bestätigt haben.

329. Masse und Geschwindigkeit. Einige weitere sehr wichtige Folgerungen aus der Relativitätstheorie lassen sich nur auf dem Wege über die Elektrodynamik ziehen. Wir wollen von ihnen hier nur folgende erwähnen.

Die Theorie führt zu dem Ergebnis, daß die Masse der Körper keine konstante Größe ist, sondern von der Geschwindigkeit abhängt. Ist m die *Ruhmasse*, d. h. die Masse eines ruhenden Körpers, so ist die Masse m' des gleichen, mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16)$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist an schnell bewegten Elektronen mit großer Genauigkeit nachgewiesen worden.

Gl. (16) hat eine sehr bemerkenswerte Folge. Für $v = c$ wird $m' = \infty$. Das heißt die Trägheit eines Körpers, sein Widerstand gegen Beschleunigungen, wird bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit unendlich groß. Nur ein unendlich großer Aufwand an Arbeit könnte einen Körper bis genau auf Lichtgeschwindigkeit oder gar darüber hinaus bringen. *Daher ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit der obere Grenzwert der Geschwindigkeit eines Körpers.* Wir kennen auch tatsächlich keinen Fall, in dem sie überschritten würde, während andererseits bei den β -Strahlen der radioaktiven Stoffe Geschwindigkeiten vorkommen, die nur um Bruchteile von 1% kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit. Da weder Energie noch ein Körper sich mit einer größeren

Geschwindigkeit als der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen kann, so ist diese auch die größte denkbare *Signalgeschwindigkeit*. Denn ein Signal erfordert immer die Übertragung von Energie von einem Ort nach einem andern. Wo in der Physik *Überlichtgeschwindigkeiten* auftreten, handelt es sich nie um die Fortpflanzung von Energie mit dieser Geschwindigkeit (§ 309 und 355).

Bei $v = c/2$ ist die Masse bereits um etwa 15% größer als die Ruhmasse bei $v = 0$. Mit weiter steigender Geschwindigkeit wächst sie sehr schnell an. Bei $v = 3/4c$ beträgt der Massenzuwachs bereits über 50%.

330. Masse und Energie. Aus der Relativitätstheorie folgt ferner, daß die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers von der Ruhmasse m gleich

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

beträgt. Ein ruhender Körper besitzt also eine durch die Existenz seiner Masse m bedingte Energie

$$E = m c^2. \quad (18)$$

Der Anteil der kinetischen Energie an der Gesamtenergie E eines bewegten Körpers beträgt demnach

$$E_k = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (19)$$

ein Ausdruck, der für $v/c \ll 1$ in die bekannte Gleichung $E_k = m v^2/2$ übergeht. Jeder Körper besitzt also in Gestalt seiner Masse m einen durch Gl. (18) bestimmten sehr großen Energieinhalt. Er beträgt je Gramm jedes Stoffes $9 \cdot 10^{20}$ erg ≈ 10 Billionen mkg*.

Gl. (18) kann aber auch im umgekehrten Sinne verstanden werden,

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (20)$$

In dieser Form sagt sie aus, daß jeder Energie E eine Masse vom Betrage E/c^2 zukommt, daß also Energie sowohl träge wie schwer ist. Für einen von Strahlung erfüllten, sonst masselosen Hohlraum läßt sich die Trägheit schon aus der klassischen Elektrodynamik ableiten. Die Masse eines Körpers ist also um so größer, je größer sein Energieinhalt ist. Ein Beispiel hierfür liefert schon Gl. (16), nach der die Masse mit ihrer kinetischen Energie wächst. Ein Körper muß im wärmeren Zustand eine etwas größere Masse haben als im kälteren. Denn erstens ist dann die kinetische Energie seiner Moleküle und daher auch deren Masse größer, und zweitens enthält er dann einen höheren Betrag an Strahlungsenergie, der ebenfalls zur Masse beiträgt, bei Fixsterntemperaturen sogar recht beträchtlich. Daher müssen die Fixsternmassen bei fortschreitender Abkühlung abnehmen. (Es ist möglich, daß auch noch andere Ursachen in der gleichen Richtung wirken.)

Die Abhängigkeit der Masse von der Energie macht sich unmittelbar bei den Atomkernen bemerkbar in Gestalt der *Massendefekte*, auf die wir in § 360 zurückkommen werden.

Die Bewegungsgröße (Impuls, § 20) eines Körpers ist auch in der Relativitätstheorie das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Nach Gl. (16) beträgt sie daher

$$G = m' v = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (21)$$

wobei m die Ruhmasse des Körpers ist.

Die im vorstehenden besprochene sog. *spezielle Relativitätstheorie* gehört heute zum unbestrittenen Bestande der Physik und bildet eine ihrer wichtigsten Grundlagen. Sie findet vor allem in ihrer Anwendung auf die Theorie der Atome immer wieder ihre vollkommene Bestätigung.

331. Die **allgemeine Relativitätstheorie**. Die spezielle Relativitätstheorie beschränkt sich auf Inertialsysteme. Die Erweiterung zur *allgemeinen Relativitätstheorie* (EINSTEIN 1917), die nun auch die beschleunigten Bezugssysteme mit umfaßt, geschah durch einen Gedankengang, der demjenigen nahe verwandt ist, der zum Relativitätsprinzip führte. Ein bis dahin nur im Bereich der Mechanik als gültig erkanntes Gesetz wird auf die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen ausgedehnt.

Wir haben in § 20 die *Trägheitskräfte* eingeführt. Erfährt ein Bezugssystem eine Beschleunigung \mathfrak{b}_s , so wirkt in ihm auf jede Masse m eine Trägheitskraft $\mathfrak{f}_t = -m \mathfrak{b}_s$. Wirken in dem System im übrigen keine Kräfte, und ist das System geradlinig und gleichförmig beschleunigt, also \mathfrak{b}_s konstant, so stehen alle Körper dieses Systems unter der Wirkung von Kräften, die unter sich die gleiche Richtung haben, und die den Massen der Körper proportional sind. Genau ebenso aber liegen die Verhältnisse in einem unbeschleunigten System, in dem ein homogenes Gravitationsfeld herrscht. Auch in einem solchen greifen an allen Körpern massenproportionale, gleichgerichtete Kräfte an. In bezug auf die mechanischen Wirkungen besteht also keinerlei Unterschied zwischen den Erscheinungen in einem unbeschleunigten System, in dem ein Gravitationsfeld herrscht, das allen Körpern des Systems eine Beschleunigung \mathfrak{b} zu erteilen sucht, und einem gravitationsfreien System, das eine Beschleunigung $\mathfrak{b}_s = -\mathfrak{b}$ erfährt. Unterlägen wir nicht der irdischen Schwerkraft, würden wir aber statt dessen mit einer der Erdbeschleunigung an Betrag gleichen Beschleunigung mitsamt unserer Umgebung senkrecht aufwärts bewegt, so würden wir nicht den geringsten Unterschied bemerken. Daher kann auch die Wirkung der Schwerkraft durch die Beschleunigung des Bezugssystems aufgehoben werden. Ist seine Beschleunigung die gleiche, wie diejenige der im Gravitationsfeld frei fallenden Körper, so erfahren diese relativ zum System keine Beschleunigung, sind also, von ihm aus beurteilt, kräftefrei. Ein Beispiel dafür ist die in § 18 erwähnte Kerze im frei fallenden Kasten. Demnach ist es grundsätzlich unmöglich, durch einen rein mechanischen Versuch zu entscheiden, ob er sich in einem Inertialsystem im Gravitationsfelde oder in einem gravitationsfreien beschleunigten System abspielt. Man beachte, daß dies nur deshalb der Fall sein kann, weil die Trägheit und die Schwere der Körper einander streng proportional sind.

In seiner *Äquivalenzhypothese* stellte nun EINSTEIN die Behauptung auf, daß die Wirkungen von Gravitationsfeldern und von Beschleunigungen des Bezugssystems nicht nur bei mechanischen Vorgängen, sondern überhaupt, also auch bei elektrischen und optischen Vorgängen, grundsätzlich nicht unterscheidbar sind. Demnach müssen auch die letzteren Vorgänge in einem Gravitationsfelde ebenso ablaufen, wie in einem gravitationsfreien, beschleunigten Bezugssystem.

Auf die Einzelheiten der Theorie können wir hier nicht eingehen, sondern nur auf ihre bisherige Bewährung. Leider gibt es bis heute keinen Versuch, der ihre Prüfung im Laboratorium zuließe. Hingegen macht sie einige nachprüfbar Voraussagen auf dem Gebiet der Astronomie, wie überhaupt ihre Bedeutung zunächst durchaus auf dem Gebiet der kosmischen Physik liegt.

Eine Folgerung aus der Äquivalenzhypothese ist ganz elementar verständlich. Wir denken uns einen Kasten mit einem seitlichen Loch versehen, durch den senkrecht zur Wand ein Lichtstrahl falle, und zwar so, daß er den Kasten, wenn er ruht, horizontal durchläuft (Abb. 559a). Bewegt sich aber der Kasten

gleichförmig nach oben, so ist der gleiche Lichtstrahl *relativ zum Kasten* nach unten geneigt, und zwar um so mehr, je größer die Geschwindigkeit des Kastens ist (Abb. 559b), die in der Abbildung der Deutlichkeit halber als mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar angenommen ist. Wird der Kasten aber nach oben *beschleunigt*, so ändert sich seine Geschwindigkeit, während der Lichtstrahl ihn durchläuft, und infolgedessen ändert sich auch die Neigung des Lichtstrahles (Abb. 559c). Der Lichtstrahl ist im beschleunigten Kasten gekrümmt. Nun ist eine Beschleunigung nach oben einer nach unten wirkenden Schwerkraft äquivalent. Bewirkt jene eine Krümmung des Lichtstrahles, so muß im ruhenden Kasten eine nach unten wirkende Schwerkraft das gleiche tun. Lichtstrahlen müssen also in Schwerfeldern gekrümmt sein.

Die Schwerkraft an der Erdoberfläche und die auf der Erde zur Verfügung stehenden Lichtwege genügen nicht, um meßbare Wirkungen hervorzurufen, wohl aber die 28mal größere Schwerkraft in der Nähe der Sonnenoberfläche und die Wege, die das Licht von Sternen im Anziehungsbereich der Sonne zurücklegt, wenn ein Stern am Himmel dicht neben der Sonne steht.

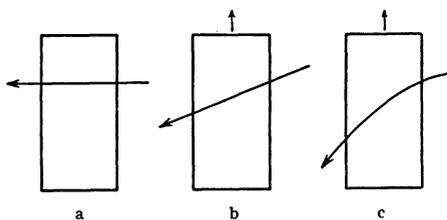


Abb. 559. Zur Lichtablenkung.

Verläuft das Licht eines Sternes dicht an der Sonnenoberfläche vorbei, so wird es der Sonne ein wenig zugekrümmt, aus seiner geraden Bahn abgelenkt. Fällt der Strahl in das Auge eines irdischen Beobachters, so erscheint ihm der Stern infolgedessen ein wenig in Richtung von der Sonne weg aus seiner wahren Stellung verschoben. Die Theorie ergibt für einen unmittelbar an der Sonnenoberfläche vorbeistreichenden Strahl eine Ablenkung um $1,75''$, eine Größe, die der astronomischen Messung noch durchaus zugänglich ist. Solche Beobachtungen sind vorerst nur bei totalen Sonnenfinsternissen möglich, da sonst das Sternlicht vollkommen überstrahlt wird. Während die ersten Beobachtungen die Theorie sehr gut zu bestätigen schienen, haben die neuesten Messungen sowie eine Nachprüfung der älteren Messungen für die Lichtablenkung am Sonnenrande den höheren Wert von $2,2''$ ergeben. Während also die Tatsache der Lichtablenkung feststeht, ist die Übereinstimmung ihrer Größe mit der Theorie noch zweifelhaft.

Die Äquivalenz von Trägheit und Schwere bezieht sich natürlich nicht nur auf Körper, sondern auch auf die Energie. Da Energie träge ist, so ist sie auch schwer, und als eine solche Wirkung der Schwere der Energie können wir auch die Lichtablenkung auffassen. Das Licht wird in der Nähe der Sonne von ihr angezogen, seine Bahn ist gekrümmt wie die eines an der Sonne vorbei bewegten Körpers. Die Lichtenergie führt im Schwerfeld eine Fallbewegung aus.

Die Äquivalenz von Trägheit und Schwere bezieht sich natürlich nicht nur auf Körper, sondern auch auf die Energie. Da Energie träge ist, so ist sie auch schwer, und als eine solche Wirkung der Schwere der Energie können wir auch die Lichtablenkung auffassen. Das Licht wird in der Nähe der Sonne von ihr angezogen, seine Bahn ist gekrümmt wie die eines an der Sonne vorbei bewegten Körpers. Die Lichtenergie führt im Schwerfeld eine Fallbewegung aus.

Die allgemeine Relativitätstheorie führt ferner zu einem Gesetz für die zwischen zwei Massen wirkende anziehende Kraft, d. h. zu einem *Gravitationsgesetz* (vgl. § 45). Dieses läßt sich nicht, wie das NEWTONSche, in geschlossener Form angeben, sondern nur als eine nach Potenzen von $1/r$ (r = Abstand der beiden Körper) schnell fallende Reihe. Das erste und in allen Fällen überwiegend größte Glied dieser Reihe ist mit dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz identisch, das sich also als ein Grenzfall erweist. Der Einfluß des im günstigsten Fall allein noch in Betracht kommenden zweiten Gliedes auf die Planetenbewegung ist nur dann merkbar, wenn die Schwerkraft am Ort des Planeten und die Exzentrizität seiner Bahn nicht zu klein sind. Unter allen Planeten des Sonnensystems treffen wir diese Bedingungen nur beim sonnennächsten, dem Merkur, an. Die Wirkung des zweiten Gliedes besteht in dem Auftreten

einer *Perihelbewegung*, d. h. einer langsamen Drehung der Bahnellipse (Abb. 560). Tatsächlich zeigt der Merkur eine solche. Die Theorie ergibt für sie einen Wert von $43''$ in 100 Jahren. Es scheint, daß dies mit der Erfahrung übereinstimmt. Doch ist der Streit der Astronomen deswegen noch nicht verstummt. (Es handelt sich nämlich nur um den kleinen Rest von Perihelbewegung, der noch übrigbleibt, wenn man die von den gegenseitigen Störungen der Planeten herührenden Wirkungen, die ebenfalls eine Perihelbewegung hervorrufen, durch Rechnung beseitigt hat.)

Die dritte an der Erfahrung prüfbare Voraussage der allgemeinen Relativitätstheorie ist, daß die Spektrallinien eines Stoffes um so mehr nach Rot verschoben sein müssen, je größer die Schwerkraft am Ort der Lichtaussendung ist. Die Schwerkraft auf der Erde ist so klein, daß wir die im Laboratorium gemessenen Wellenlängen der Spektrallinien (von Einflüssen des Druckes usw. abgesehen) als normal betrachten können. Im Spektrum der Elemente an der Sonnenoberfläche sind jedoch meßbare Verschiebungen gegen diese normale Lage zu erwarten. Die Untersuchungen sind außerordentlich schwierig, weil es auf der Sonne noch andere Einflüsse gibt, die die Lage der Linien verändern. Nachdem es eine Zeitlang geschienen hatte, als sei die Rotverschiebung auf der Sonne einwandfrei nachgewiesen, ist die Beweiskraft der betreffenden Untersuchung neuerdings wieder angezweifelt worden. Die Frage des experimentellen Nachweises der Rotverschiebung ist daher zur Zeit noch als offen anzusehen.

Man kann die Rotverschiebung auf folgende Weise verstehen. Die von der Sonne wegfliegenden Lichtquanten (§ 334) unterliegen der Gravitation der Sonne, müssen also gegen diese Hebungarbeit leisten. Das kann nur auf Kosten ihrer Energie $h\nu$ gehen, die sich also bei der Entfernung von der Sonne verkleinern muß. Sie erreichen daher die Erde nur mit einer Energie $h\nu' < h\nu$, d. h. ihre Schwingungszahl ist kleiner als an ihrem Ursprungsort.

Damit sind die derzeitigen Prüfungsmöglichkeiten der allgemeinen Relativitätstheorie erschöpft.

332. Physik des Weltalls Die allgemeine Relativitätstheorie ist ein erster, groß angelegter Versuch zu einer Physik des Weltalls. Sie führt zu dem Ergebnis, daß die Geometrie des Weltalls *nichteuklidisch*, daß der Weltraum nicht „eben“, sondern „gekrümmt“ ist. Einer anschaulichen Vorstellung ist das natürlich nicht zugänglich. Es bedeutet, daß die Geometrie des Weltraumes sich zu derjenigen eines euklidischen Raumes so verhält, wie diejenige einer gekrümmten Fläche zur Geometrie der Ebene. In sehr kleinen Bereichen einer gekrümmten Fläche kann man ohne ins Gewicht fallenden Fehler die Geometrie der Ebene anwenden, wie wir das z. B. in kleinen Bereichen der Erdoberfläche tun. Entsprechend gilt in kleinen Bereichen des Weltraumes — die für unsere gewöhnlichen Begriffe noch ungeheuer groß sein können — mit praktisch vollkommener Genauigkeit die euklidische Geometrie, wie es unserer Erfahrung entspricht. In die geometrischen Beziehungen auf einer gekrümmten Fläche geht das Krümmungsmaß der Fläche in ihren einzelnen Punkten ein, das bei einer Kugel durch ihren Radius bestimmt wird. Entsprechend tritt in den geometrischen Beziehungen im nichteuklidischen Weltraum eine der euklidischen Geometrie fremde Größe auf, die man als das Krümmungsmaß des Weltraumes zu bezeichnen hat, und der ein *Radius der Welt* entspricht.

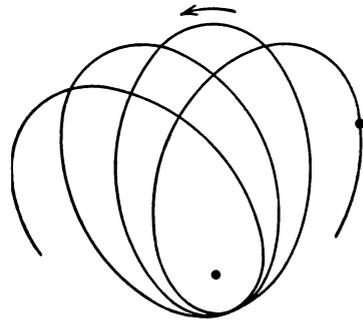


Abb. 560. Schema einer Perihelbewegung.

Nimmt man, wie dies ursprünglich geschah (EINSTEIN, DE SITTER), an, daß sich die Welt mit der in ihr enthaltenen Materie in einem stationären Zustand befindet, daß sich also ihr durchschnittlicher Zustand, unbeschadet der Bewegungen der Materie, nicht ändert, so ergibt sich, daß der Weltraum geschlossen ist und einen endlichen Rauminhalt hat. Das bedeutet, daß er — analog zur Kugelfläche — zwar nirgends begrenzt, aber doch nicht unendlich ausgedehnt ist. Bewegt man sich auf geradester Bahn, d. h. längs der Bahn eines Lichtstrahls im Vakuum, immer weiter fort, so gelangt man schließlich an den Ausgangspunkt zurück, ebenso wie wenn man sich auf der Erdoberfläche längs eines größten Kreises bewegt. Doch führte die Annahme des stationären Zustandes auf Schwierigkeiten. Daher nahmen FRIEDMANN und LEMAITRE an, daß diese Annahme nicht zutrifft. Das Weltall soll sich vielmehr, wie schon DE SITTER vermutete, in einem Zustande ständiger Ausdehnung befinden. Tatsächlich gelang es HUMASON und HUBBLE, eine Erscheinung zu finden, die zunächst nur in diesem Sinne deutbar zu sein schien. Sie beobachteten an den Spektren der Spiralnebel — das sind ferne Milchstraßen, ähnlich der unseren — eine Verschiebung der Spektrallinien nach längeren Wellen (*Rotverschiebung*), die, wenn sie als ein DOPPLER-Effekt zu deuten ist (§ 299), ein allgemeines Auseinanderstreben der Spiralnebel anzeigen würde (*Expansion des Weltalls*). Dabei zeigte sich, daß die Geschwindigkeit, mit der sich die Spiralnebel von uns entfernen, ihrer Entfernung von uns proportional ist. Bei den entferntesten Spiralnebeln hat man so Geschwindigkeiten bis zu $80000 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}$ festgestellt. Natürlich ist das nun nicht so zu verstehen, als stünde gerade die Erde im Mittelpunkt dieses Geschehens. Man kann das expandierende Weltall mit einer Kugelfläche vergleichen, deren Radius mit konstanter Geschwindigkeit wächst. Jeder beliebige Beobachter auf ihr würde beobachten, daß sich alle Punkte auf der Kugelfläche von ihm mehr und mehr entfernen, und zwar mit einer der — über die Kugelfläche gemessenen — Entfernung proportionalen Geschwindigkeit. Neuerdings sind Zweifel aufgetaucht, ob die sehr schwierigen Entfernungsmessungen der entfernteren Spiralnebel wirklich einigermaßen zuverlässig sind, und es steht heute nicht fest, ob der HUMASON-HUBBLE-Effekt nicht vielleicht eine ganz andere Deutung erfordert¹.

So ist die allgemeine Relativitätstheorie vorläufig nur als ein erster und noch in keiner Weise abgeschlossener Versuch zu werten. Sie bedarf noch der Erweiterung zu einer allgemeinen Feldtheorie, die auch die elektrischen und magnetischen Felder umfaßt, und einer Verknüpfung mit der Quantentheorie. Ob der Weltraum wirklich gekrümmt und endlich ausgedehnt ist, kann heute noch nicht endgültig entschieden werden.

¹ Anmerkung bei der Korrektur. Die Deutung der von HUMASON und HUBBLE entdeckten Rotverschiebung als Wirkung einer Expansion des Weltalls hat inzwischen aufgegeben werden müssen. Eine neue Deutung konnte bisher nicht gegeben werden. Es ist möglich, daß es sich bei dieser Rotverschiebung um eine neue, bisher unbekannt Ursache handelt, deren künftige Deutung einen sehr wichtigen Erkenntnisfortschritt mit sich bringen wird.

Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle.

I. Quantentheorie des Lichtes.

333. **Der lichtelektrische Effekt.** Im Jahre 1887 beobachtete H. HERTZ, daß eine Funkenentladung zwischen Metallelektroden bereits bei einer kleineren Spannung einsetzt, wenn man sie mit ultraviolettem Licht (Abbrennen eines Magnesiumbandes) bestrahlt. Hieran anknüpfend stellte HALLWACHS fest, daß sich eine negativ geladene Metallplatte bei ultravioletter Bestrahlung entlädt, eine positiv geladene aber nicht. Etwas später schließlich klärte LENARD diese Tatsachen auf, indem er entdeckte, daß *ultraviolettes Licht an Metallflächen Elektronen freimacht*. Bei den Alkalimetallen tritt dieser *lichtelektrische Effekt (Photoeffekt)* auch schon im kurzwelligen sichtbaren Licht auf. Die Wellenlänge des Lichtes, bei der der Effekt einsetzt (*Grenzwellenlänge*), ist von der Beschaffenheit der Metalloberfläche (Reinheitsgrad, Gasbeladung usw.) stark abhängig. Ein Metall zeigt den lichtelektrischen Effekt bei allen Wellenlängen, die kleiner als die Grenzwellenlänge sind, also auch bei Bestrahlung mit Röntgen- und Gammastrahlen.

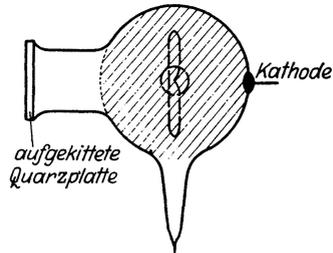


Abb. 561. Einfache lichtelektrische Zelle nach ELSTER und GEITEL.

Abb. 561 zeigt eine einfache *lichtelektrische Zelle*. Sie besteht aus einem möglichst gut evakuierten Glas- oder Quarzkolben mit einem Quarzfenster, das auch im Ultraviolett durchlässig ist. Die Innenwand des Kolbens trägt einen Belag aus einem Alkalimetall mit einer Zuleitung nach außen (Kathode); außerdem ist eine ringförmige Anode vorhanden. Der Metallbelag erhält eine negative Spannung gegen die Anode. Fällt Licht durch das Quarzfenster auf den Belag, so fließt durch die Zelle ein Strom, der zur Messung des auf den Belag fallenden Lichtstromes, also zur Photometrie, dienen kann. Die lichtelektrischen Zellen spielen heute nicht nur im Laboratorium, sondern auch in der Technik, so namentlich beim Tonfilm, beim Fernsehen und bei der Bildtelegraphie, eine wichtige Rolle. Bei gegebener Zusammensetzung des Lichtes ist der lichtelektrische Strom der Lichtintensität streng proportional.

Neben diesem *äußeren lichtelektrischen Effekt* gibt es bei gewissen durchsichtigen, nichtleitenden Kristallen — unter Umständen nach einer bestimmten Vorbehandlung — einen *inneren lichtelektrischen Effekt*. Er beruht darauf, daß das Licht Elektronen an den Atomen im Kristall freimacht, die sich alsdann in ihm bewegen können, so daß der Kristall leitend wird. Eine besonders starke Wirkung zeigt das Selen (HITTORFF 1852). *Selenzellen* können in der gleichen Weise verwendet werden, wie die oben erwähnten Zellen.

Auch an den Atomen oder Molekülen eines Gases kann ein lichtelektrischer Effekt eintreten. Indem von ihnen Elektronen durch Licht abgetrennt werden, wird das Gas ionisiert (§ 346).

Eine lichtelektrische Erscheinung ist auch der *Sperrschichtphotoeffekt*. Abb. 562 zeigt eine der mannigfachen Ausführungsformen einer Sperrschichtphotozelle. Auf einer Kupferplatte befindet sich eine Schicht von Kupferoxydul (Cu_2O), auf die bei hoher Temperatur eine sehr dünne, noch durchsichtige Kupferhaut aufgedampft ist. Auf dieser befindet sich als Zuleitung ein Metallring. [Eine solche Vorrichtung wirkt als *Gleichrichter* (Trockengleichrichter). Ihr Widerstand ist außerordentlich viel kleiner, wenn die Kupferplatte negative Spannung hat, als wenn sie positive Spannung hat. Bei positiver Spannung der Platte sperrt sie, ähnlich wie ein Detektor.] Bei der Verwendung als lichtelektrische Zelle wird die Kupferplatte mit dem Metallring, ohne Einschaltung einer Stromquelle, über ein Galvanometer verbunden. Fällt jetzt Licht durch die Kupferhaut auf das Kupferoxydul, so macht es dort Elektronen frei, die aber nur an die Kupferhaut, nicht durch das Kupferoxydul an die Kupferplatte gelangen können. Die Kupferhaut lädt sich also gegen die Kupferplatte negativ auf, das Galvanometer zeigt einen Strom an.

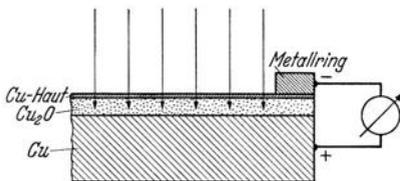


Abb. 562. Sperrschichtphotozelle (Vorderwandzelle).

334. Die Lichtquantentheorie. Im Jahre 1902 machte LENARD eine grundlegende Entdeckung:

1. Die *kinetische Energie* der an einer Metalloberfläche ausgelösten Elektronen ist *von der Lichtintensität unabhängig* und hängt *nur von der Wellenlänge* des Lichts ab.

2. Die kinetische Energie der Elektronen *wächst streng linear* mit der Schwingungszahl ν des Lichts. Die lichtelektrische Wirkung beginnt erst unterhalb einer Grenzwellenlänge λ_g (§ 333), der eine Schwingungszahl $\nu_g = c/\lambda_g$ entspricht ($c =$ Lichtgeschwindigkeit), und bei der Schwingungszahl ν des Lichts beträgt die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen

$$E = \text{const} (\nu - \nu_g). \quad (1)$$

Ferner zeigte es sich später, daß

3. der lichtelektrische Effekt auch bei außerordentlich schwacher Lichtintensität stets *innerhalb einer unmeßbar kurzen Zeit* nach Beginn der Bestrahlung einsetzt und sofort der Gl. (1) gehorcht.

Diese Entdeckungen wurden die Grundlagen zu einer völlig neuartigen Auffassung vom Wesen des Lichts. Allerdings hatte sich diese Entwicklung bereits im PLANCKSchen Strahlungsgesetz (1900, § 320) angekündigt. Seine Ableitung enthält noch einen von uns bisher nicht erwähnten, der klassischen Theorie völlig fremden Zug. Es ist ein grundlegendes Merkmal der klassischen Mechanik, daß sich die Energie eines Gebildes nur stetig ändern kann. Die PLANCKSchen Oszillatoren, also die elementaren Gebilde, welche Strahlung aussenden oder absorbieren, verhalten sich vollkommen anders. Sie können sich nach PLANCKS Theorie nicht in allen nach der klassischen Theorie möglichen, stetig ineinander überführbaren Schwingungszuständen befinden, sondern nur in einer Reihe von ausgezeichneten Zuständen, in denen ihnen ganz bestimmte Energiebeträge zukommen. Bei der Ausstrahlung von Licht gehen sie unetstetig, sprunghaft von einem dieser Zustände in einen anderen über und geben dabei die Differenz dieser *Energiestufen* entsprechende Energie als Licht ab (§ 340). Ebenso vermögen sie Licht auch nur in *Energiequanten* zu absorbieren, die der Differenz zweier Energiestufen entsprechen. Zwischen der ausgestrahlten oder absorbierten Lichtenergie E und der Schwingungszahl ν des Lichts besteht dann immer die Beziehung

$$E = h\nu. \quad (2)$$

Dabei ist h das PLANCKSche Wirkungsquantum, $h = 6,544 \cdot 10^{-27}$ erg · sec. In dieser Theorie tritt also das Licht in *Lichtquanten* auf, deren Energie E der Schwingungszahl ν proportional ist.

Im Jahre 1905 erkannte EINSTEIN, daß die Anwendung dieser *Lichtquantenhypothese* auf den lichtelektrischen Effekt die drei oben genannten Erscheinungen vollkommen erklärt. Auf Grund der Wellentheorie des Lichts sind sie durchaus unverständlich. Nach dieser Theorie müßte man erwarten, daß die kinetische Energie der Elektronen von der Lichtintensität abhängt. Auch müßte bei sehr geringer Lichtintensität eine durchaus meßbare Zeit verstreichen, bis die Lichtwellen eine zur Auslösung eines Elektrons ausreichende Energie auf ein Elektron übertragen hätten. Schließlich führt die Wellentheorie auch zu keinem Verständnis der Grenzwellenlänge. EINSTEIN behauptete nun, daß Licht von der Schwingungszahl ν *unter keinen Umständen* anders als in Gestalt von Energiequanten $E = h\nu$ gemäß Gl. (2) auftritt, und daß sich diese *Lichtquanten*, in vollkommenem Gegensatz zur Wellentheorie, *wie kleine körperliche Teilchen (Photonen)* mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum bewegen. Auf diese Weise können in der Tat sofort nach Beginn einer sehr schwachen Bestrahlung einzelne Lichtquanten mit der Energie $h\nu$ mit einzelnen Elektronen in Wechselwirkung treten und ihre Loslösung aus dem Metall bewirken. Dazu ist aber, wie wir schon bei den Glühelektronen gesehen haben (§ 179), die Leistung von Arbeit (*Austrittsarbeit*) gegen eine Kraft erforderlich, die die Elektronen im Metall zurückzuhalten sucht und für gewöhnlich ihren Austritt verhindert. Die Elektronen können also nicht mit der vollen Energie $h\nu$ aus dem Metall austreten, sondern nur mit der Energie

$$E' = E - A = h\nu - A, \quad (3)$$

wobei A die Austrittsarbeit bedeutet. Gl. (3) aber ist mit dem LENARDSchen Gesetz, Gl. (2), identisch, wenn man $\text{const} = h$ und $h\nu_g = A$ setzt. Die Grenzwellenlänge ist also von der Austrittsarbeit abhängig, die demnach bei den Alkalimetallen besonders klein ist. Daß die Konstante des LENARDSchen Gesetzes wirklich mit dem Wirkungsquantum h identisch ist, hat zuerst MILLIKAN am Natrium nachgewiesen. Genauer sind später ausgeführte Messungen mit Röntgenstrahlen. Diese haben eine sehr große Schwingungszahl, und daher ist dann $h\nu \gg A$, so daß A vernachlässigt werden kann. Diese Versuche erlaubten eine sehr genaue Messung des Wirkungsquantums aus der kinetischen Energie der ausgelösten Elektronen.

Aus Gl. (1) folgt, daß zur Erzeugung einer Röntgenstrahlung von der Schwingungszahl ν die Energie der die Röntgenstrahlung erzeugenden Elektronen (Kathodenstrahlen) mindestens gleich $h\nu$ sein muß. Da die kinetische Energie eines Elektrons (Ladung e), das eine Spannung U durchlaufen hat, gleich eU ist, so muß für die Erzeugung einer Röntgenstrahlung von der Schwingungszahl ν die Bedingung $U \geq h\nu/e$ erfüllt sein. Je größer die Betriebsspannung des Röntgenrohres, um so kurzwelliger (härter) ist die erzeugte Röntgenstrahlung.

Aus der an PLANCKS und LENARDS grundlegende Untersuchungen anknüpfenden EINSTEINSchen Lichtquantenhypothese ist die *Quantentheorie* erwachsen, die der Physik unserer Tage ihren Stempel aufgedrückt und ein neues Zeitalter der Naturerkenntnis überhaupt herbeigeführt hat.

335. Masse und Bewegungsgröße der Lichtquanten. Nach § 330 besitzt jede Energie E eine Masse E/c^2 (c = Lichtgeschwindigkeit). Demnach besitzt ein Lichtquant die Masse

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (4)$$

Wenn aber Lichtenergie eine Masse besitzt, so hat sie auch eine Bewegungsgröße (Impuls, § 22). Aus § 330, Gl. (17) und (21) leitet man die allgemeine

Beziehung $G = Ev/c^2$ ab. Da die Lichtquanten die Geschwindigkeit $v = c$ haben, so folgt für sie $G = E/c$ oder

$$G = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (5)$$

wenn $\lambda = c/\nu$ die Wellenlänge des Lichtes ist. (Es hat einen Sinn, von der Wellenlänge eines Lichtquants zu sprechen. Denn es kommt nur auf die Art der von uns angestellten Beobachtung an, ob wir die betreffende Lichtenergie als Quant oder als Welle beobachten. Vgl. § 337). Die allgemeine Tatsache, daß eine Lichtenergie E die Masse E/c^2 und eine Bewegungsgröße E/c hat, gilt übrigens auch in der Wellentheorie und folgt bereits in der MAXWELLSchen elektromagnetischen Lichttheorie.

Mit einem Lichtquant wird also nicht nur Energie, sondern auch Bewegungsgröße durch den Raum übertragen, genau wie mit einem bewegten Körper. Nach dem Impulssatz (§ 22) muß die Bewegungsgröße auf einen vom Licht getroffenen Körper übergehen, wenn es in ihm absorbiert wird, so wie eine Platte, in die ein Geschöß eindringt, eine Bewegungsgröße erhält. Ein Körper, der Licht absorbiert, erfährt also eine Kraft, einen *Strahlungsdruck* (*Lichtdruck*). Umgekehrt muß ein Körper, der Licht ausstrahlt, einen Rückstoß erfahren, wie ein Geschöß beim Abschuß. Werden Lichtquanten an einem Körper reflektiert, so ist die Kraftwirkung die gleiche, als wenn sie zunächst absorbiert und sofort wieder ausgestrahlt würden. Der Strahlungsdruck ist dann doppelt so groß wie bei einfacher Absorption oder Ausstrahlung. Jede Richtungsänderung

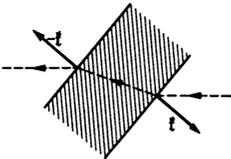


Abb. 563. Durch Strahlungsdruck bei der Brechung erzeugtes Drehmoment.

eines Lichtquants bedeutet eine Impulsänderung und ist ohne Wirkung einer Kraft nicht möglich. So tritt auch bei der Brechung von Licht eine, wenn auch sehr schwache, aber nachweisbare Kraft zwischen dem Licht und dem brechenden Körper auf. Tritt Licht unter zweimaliger Brechung schräge durch eine planparallele Platte (Abb. 563), so erfährt sie ein Drehmoment. Der Strahlungsdruck ist durch viele Versuche nachgewiesen worden (NICHOLS, HULL, POYNTING u. a.). Auch der Strahlungsdruck auf die einzelnen Moleküle eines lichtabsorbierenden Gases ist von LEBEDEV bestätigt worden. Hier handelt es sich immer um sehr schwache Wirkungen. Stärkere Druckwirkungen treten in den starken Strahlungsfeldern in der Nähe der Sonne und der Fixsterne auf. Die gekrümmte Gestalt der Kometenschweife rührt davon her, daß der Druck der Sonnenstrahlung die Moleküle des äußerst verdünnten Stoffes, aus dem der Schweif besteht, von der Sonne wegtreibt. Die auffallende Tatsache, daß gewisse schwere Elemente, so vor allem das einfach ionisierte Kalzium, noch in den größten Höhen der Sonnenatmosphäre vorkommen, wird dadurch erklärt, daß diese Atome bzw. Ionen gerade im Energiemaximum der Sonnenstrahlung absorbieren, so daß sie einen besonders starken, von der Sonne weg gerichteten Strahlungsdruck erfahren.

Innerhalb der Fixsterne aber spielt der Strahlungsdruck, wie zuerst EDDINGTON erkannte, eine ganz ausschlaggebende Rolle für das *Gleichgewicht der Sternmaterie*. Die Temperaturen im Innern der Fixsterne gehen bis in die Größenordnung von 20000000°, und infolgedessen bricht ständig ein ungeheuer starker Strom von Strahlung aus dem Innern nach außen. (Wegen der hohen Temperatur liegt diese Strahlung nach dem PLANCKSchen Strahlungsgesetz überwiegend im Bereich der Röntgen- und Gammastrahlen. Auf dem Wege nach außen wird sie durch Wechselwirkungen mit der Sonnenmaterie, dem Temperaturabfall von innen nach außen entsprechend, immer langwelliger und tritt schließlich als

sichtbares Licht aus der Sternoberfläche aus.) Die Sternmaterie steht daher unter der Wirkung eines nach außen gerichteten Strahlungsdruckes, der der Gravitation entgegenwirkt und nicht allzu viel kleiner als diese ist. Das bewirkt eine weitgehende Auflockerung des Sternensstoffs. Je größer die Masse eines Sterns ist, um so stärker ist auch der Strahlungsstrom und der Strahlungsdruck. Hätte ein Stern eine Masse, deren Größenordnung mehr als etwa das 100fache der Sonnenmasse beträgt, so würde der Strahlungsdruck die Gravitation überwiegen und den Stern sprengen. Tatsächlich liegen auch die größten beobachteten Sternmassen in der Größenordnung von 10–100 Sonnenmassen.

336. **Der COMPTON-Effekt.** Beim lichtelektrischen Effekt verwandelt sich die Energie eines Lichtquants restlos in kinetische Energie eines Elektrons und Austrittsarbeit. Es gibt aber Wechselwirkungen zwischen Lichtquanten und Elektronen, bei denen das Lichtquant nur einen Teil seiner Energie an ein Elektron abgibt. Beträgt sie anfänglich $h\nu_0$, der Energieverlust ΔE , so hat das Lichtquant nach dem Vorgang nur noch die Energie $h\nu_0 - \Delta E$ und eine entsprechend kleinere Schwingungszahl ν gemäß der Gleichung

$$h\nu_0 = h\nu + \Delta E. \tag{6}$$

Außerdem muß nach dem Impulssatz die Summe der Bewegungsgrößen von Lichtquant und Elektron vor und nach der Wechselwirkung die gleiche sein.

Ein solcher Vorgang ist die *Streuung des Lichts an freien Elektronen*. Man kann ihn durchaus wie einen elastischen Stoß zwischen zwei Körpern (§ 25), dem Lichtquant und dem Elektron, behandeln. Eine deutliche Wirkung auf *beide* wird man nur dann erhalten, wenn beide Massen von gleicher Größenordnung sind. Da die Elektronenmasse $\mu = 0,9033 \cdot 10^{-27}$ g ist, so folgt aus Gl. (4), daß ein Lichtquant mit der gleichen Masse die Schwingungszahl $\mu c^2/h = \nu_k = 1,237 \cdot 10^{20}$ sec⁻¹ und die Wellenlänge $\lambda_k = c/\nu_k = h/\mu c = 0,2420 \cdot 10^{-9}$ cm hat (COMPTON-Wellenlänge). Das entspricht einer harten Gammastrahlung. Zum Nachweis muß man also kurzwellige Röntgenstrahlen oder Gammastrahlen verwenden. Es ist dann zu erwarten, daß sich das Lichtquant und das Elektron nach dem „Stoß“ nach verschiedenen Richtungen auseinanderbewegen werden, und daß das Lichtquant außerdem eine Änderung seiner Wellenlänge erfährt.

Diesen Nachweis hat A. H. COMPTON (1922) mit Röntgenstrahlen geführt. Später ist die Theorie von BOTHE und GEIGER, COMPTON und SIMON u. a. auch bei der Streuung von Gammastrahlen bestätigt worden. Man läßt die Strahlen durch Paraffin, Graphit u. dgl. fallen, wo sie mit Elektronen in Wechselwirkung treten, und mißt die Wellenlängenänderung der in den verschiedenen Richtungen aus dem Stoff austretenden Röntgen- oder Gammastrahlen. Diese streuen über einen Winkel von 180° gegen die Richtung der stoßenden Lichtquanten, die in Bewegung gesetzten Elektronen über einen Winkel von 90°. Abb. 564 zeigt die Energieverteilung der Lichtquanten ($h\nu$, obere Hälfte) und der Elektronen (kinetische Energie E , untere Hälfte) in Abhängigkeit vom Streuwinkel. Die Wellenlänge der primären Strahlung ist dabei gleich der COMPTON-Wellenlänge angenommen. Gleichbezahlte Pfeile gehören zusammen.

Da die Elektronen hohe Geschwindigkeiten erlangen, so ist es nötig, für Energie und Impuls die relativistischen Gleichungen anzusetzen (§ 330). Die Ruhenergie des Elektrons vor dem Stoß beträgt μc^2 ; nach dem Stoß beträgt

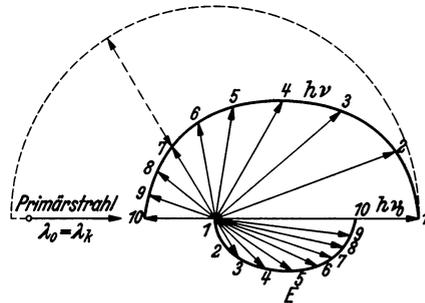


Abb. 564. Zum COMPTON-Effekt.

sie $E_e = \mu c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Die Bewegungsgröße des Elektrons beträgt dann $\mathfrak{G} = \mu v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. v (Betrag v) ist die Geschwindigkeit, die das Elektron erlangt. Da das Lichtquant die Energie $h(\nu_0 - \nu)$ verliert, so fordert das Energieprinzip

$$E_e = h(\nu_0 - \nu) + \mu c^2. \quad (7)$$

Ist ferner $\mathfrak{G}_1 = h\nu_0/c$ die Bewegungsgröße des Lichtquants vor dem Stoß, $\mathfrak{G}_2 = h\nu/c$ diejenige nach dem Stoß, so fordert der Impulssatz

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2, \quad \text{so daß} \quad \mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}_1^2 - 2\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^2. \quad (8)$$

$\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ist das skalare Produkt der Vektoren \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 , so daß $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = |\mathfrak{G}_1||\mathfrak{G}_2|\cos\vartheta$, wenn ϑ der Winkel ist, den sie miteinander bilden, also der Winkel, um den das Lichtquant gestreut wird. Es ist also

$$\mathfrak{G}^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu\cos\vartheta + \nu^2). \quad (9)$$

Wie man aus § 330, Gl. (17) und (21), leicht ableitet, gilt allgemein $E_e^2/c^2 - \mathfrak{G}^2 = \mu^2 c^2$. Führt man dies mit Hilfe der Gl. (7) und (9) aus, so ergibt sich

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0\nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{\mu c^2} (1 - \cos\vartheta). \quad (10)$$

Nun ist aber $1/\nu - 1/\nu_0 = \lambda/c - \lambda_0/c = \Delta\lambda/c$, wenn $\Delta\lambda$ die Wellenlängenänderung des Lichtquants bedeutet. Ferner ist $h/\mu c^2 = \lambda_k/c$, wenn λ_k wieder die COMPTON-Wellenlänge bedeutet. Es folgt

$$\Delta\lambda = \lambda_k (1 - \cos\vartheta) = 2\lambda_k \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (11)$$

Die Wellenlängenänderung ist also bemerkenswerterweise von der primären Wellenlänge λ unabhängig und hängt nur vom Streuwinkel ϑ des Lichtquants ab. Das erleichtert die Prüfung der Theorie sehr.

Später ist nachgewiesen worden, daß die Theorie sich auch bei der Untersuchung *einzelner* Elementarakte bestätigt. Jedem in einer bestimmten Richtung gestreuten Lichtquant entspricht auch ein *gleichzeitig* in der von der Theorie vorausgesagten Richtung gestreutes Elektron. Diese Tatsache ist deshalb wichtig, weil sie beweist, daß auch bei Elementarakt der *Energie- und Impulssatz* nicht, wie das gelegentlich vermutet wurde, nur statistisch, also für die Mittelwerte über eine größere Zahl von Elementarakt, sondern *für jeden einzelnen Elementarakt streng* gilt.

337. Wellenoptik und Quantenoptik. Es ist wohl deutlich, daß sich die Physik vor eine drastische Schwierigkeit gestellt sah, nachdem sich zwingend gezeigt hatte, daß gewisse Erscheinungen nur durch eine Korpuskulartheorie des Lichts beschrieben werden können. Denn auch die Wellentheorie des Lichts ist durch die auf keine andere Weise beschreibbaren Interferenzerscheinungen auf das festeste verankert. Eine Beschreibung durch die Lichtquantentheorie ist bei ihnen vollkommen ausgeschlossen. *Das Licht verhält sich einmal wie ein Wellenvorgang, ein anderes Mal wie ein Quantenvorgang.*

Um zu verstehen, daß diese scheinbar unüberwindliche Schwierigkeit doch nicht zu einer dauernden Verwirrung der Physik führen mußte, und daß heute beide Vorstellungen *nebeneinander*, jede an ihrem klar erkannten Platze, ihr Recht behaupten können, müssen wir hier ein Wort über das Wesen physikalischer Erkenntnis überhaupt sagen. Wir wissen heute, daß die Welt nicht, wie man früher glaubte, rein mechanisch-anschaulich vollkommen verstanden werden kann. Die elektrischen und optischen Erscheinungen sind nicht mechanischer Art. Es liegt aber in der Natur des menschlichen Geistes, daß er, um sich forschend und erkennend zu betätigen, nicht ohne eine innere Anschauung

der Dinge auskommt. Er braucht ein vorstellbares, mechanisches *Modell* der nichtmechanischen Vorgänge. Dieses Modell hat mit den in Frage stehenden Erscheinungen im Grunde sehr wenig zu tun. Es hat — im Gegensatz zur älteren Einschätzung solcher Vorstellungen — *keinerlei Erklärungswert*, es sagt über ein „wahres Wesen“ der Erscheinungen überhaupt nichts aus. Es ist nur ein unentbehrliches gedankliches Hilfsmittel und erfüllt seinen Zweck nur in dem Sinne, daß sein Verhalten durch dieselben Gleichungen beschrieben wird, wie sie mit dem nichtmechanischen Vorgang verknüpft werden müssen, damit seine Wirkungen auf unsere mechanisch-anschaulichen Beobachtungsmittel — unsere Meßgeräte und letzten Endes auf unsere menschlichen Sinne — richtig beschrieben werden und richtig vorhergesagt werden können. Nur in diesem Sinne ist eine Modellvorstellung „richtig“ oder „falsch“.

Beim Licht ist nun die Physik zum ersten — und nicht zum letzten — Male vor die Tatsache gestellt worden, daß ein einziges Modell auf keine Weise zur Deutung eines Erscheinungsbereiches genügt, sondern daß man dazu zweier völlig verschiedener Modelle bedarf. Es bedeutet einen außerordentlichen erkenntnistheoretischen Fortschritt, daß man schließlich die völlige Unbedenklichkeit dieses *Dualismus von Wellen und Korpuskeln* einsah. Er ist deshalb völlig unbedenklich, weil ja die Modellvorstellungen nichts „erklären“, weil das Licht ja *weder* eine Welle *noch* ein Teilchen „ist“, sondern etwas, das einer anschaulichen Beschreibung unzugänglich ist. Es gibt daher nur insofern zwei Lichttheorien, als die Gestalt der Gesetze der Wellentheorie und der Quantentheorie und ihre Methoden durchaus verschieden sind. Die heutige Lichttheorie besteht aus der Wellentheorie *und* der Quantentheorie.

Die *Wellenoptik* ist immer dann zuständig, wenn es sich um die Frage der *Ausbreitung des Lichts im Raum* handelt. Die *Quantenoptik* hingegen gibt uns Auskunft über die *Entstehung des Lichts* und *seine Wechselwirkungen mit den Atomen und Molekülen*, überhaupt über *optische Elementarvorgänge*, und die dabei auftretenden *Umsetzungen von Energie und Impuls*. Die *geometrische Optik* (§ 266) ist ein unter besonderen Bedingungen gültiger *Grenzfall beider Theorien*, da sie sowohl Ausbreitungsvorgänge wie Wechselwirkungen (z. B. die Brechung) umfaßt.

II. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik.

338. **Das elektrische Elementarquantum. Das Elektron und das Proton.** Das elektrische Elementarquantum, das *Atom der Elektrizität*, ist uns bereits als negative Ladung des Elektrons und in der positiven und negativen Ein- und Mehrzahl als Ladung der Ionen häufig begegnet. Sein Betrag ϵ kann auf verschiedene Weisen gemessen oder berechnet werden. Er kann z. B. aus der sehr genau meßbaren FARADAYSchen Konstanten $C = N\epsilon$ (§ 169) berechnet werden, da die LOSCHMIDTSche Zahl N z. B. aus der BROWNSchen Bewegung (§ 101) unabhängig von ϵ bestimmt werden kann. Er kann ferner aus der spezifischen Ladung ϵ/m_H der Wasserstoffionen (Wasserstoffkanalstrahlen, § 183) berechnet werden, wenn die Masse m_H des Wasserstoffions bekannt ist. Eine andere Gruppe von Messungen beruht darauf, daß man die Gesamtladung mißt, die eine gemessene Zahl von Alphateilchen — deren jedes zwei Elementarquanten trägt (§ 357) — mit sich führt (RUTHERFORD und GEIGER, REGENER, E. MEYER).

Genauer aber sind Messungen, bei denen unmittelbar die Ladung *einzelner* Teilchen bestimmt wird, die nur ein einziges oder wenige Elementarquanten tragen. Nach diesem Verfahren, dessen Entwicklung in erster Linie EHRENHAFT zu verdanken ist, hat MILLIKAN die zur Zeit wohl zuverlässigste unmittelbare Messung des Elementarquantums ausgeführt. In einen mit Luft gefüllten

Kondensator mit horizontalen Platten werden kleine, schwebende Tröpfchen gebracht (zerstäubtes Öl, Quecksilber u. dgl.), die mit einem Mikroskop beobachtet werden, dessen Achse parallel zu den Kondensatorplatten steht. Herrscht im Kondensator kein elektrisches Feld, so fallen die Tröpfchen ganz langsam mit konstanter Geschwindigkeit. An ihnen wirken drei Kräfte: die Schwerkraft, der Auftrieb in der Luft und der Reibungswiderstand der Luft. Die beiden letzteren halten der Schwerkraft das Gleichgewicht. Es sei ρ die Dichte eines Tröpfchens, ρ' die Dichte der Luft. Dann beträgt die Masse des Tröpfchens $m = \rho \cdot 4\pi r^3/3$ und die an ihm angreifende Schwerkraft $mg = \rho g 4\pi r^3/3$, der Auftrieb $\rho' g 4\pi r^3/3$. Der Reibungswiderstand beträgt nach § 76, Gl. (II), $6\pi\eta rv$. (Hieran ist bei sehr kleinen Tröpfchen noch eine Korrektion anzubringen.) Demnach ist

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho') g = 6\pi\eta rv.$$

Hieraus kann nach Messung von v und den übrigen vorkommenden Größen der Radius r des Teilchens bestimmt werden.

Nummehr erteilt man dem Tröpfchen eine Ladung, indem man die Luft im Kondensator z. B. mit Röntgenstrahlen ionisiert. Dann lagern sich stets ein oder mehrere Gasionen an das Tröpfchen an. Alsdann erzeugt man im Kondensator durch Anlegen einer Spannung ein Feld E , das so gerichtet ist, daß es das Tröpfchen gegen die Schwerkraft langsam hebt, so daß es mit der Geschwindigkeit v' steigt. Trägt das Tröpfchen z Elementarquanten ε , also die Ladung $z\varepsilon$, so tritt an die Stelle der obigen Gleichung die folgende,

$$z\varepsilon E - \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho') g = 6\pi\eta rv'.$$

Hieraus kann die Ladung $z\varepsilon$ berechnet werden. Da es sich stets nur um ein oder wenige Elementarquanten handelt, so daß sich die gemessenen Ladungen stets innerhalb der Meßfehler deutlich um einige äquidistante Ladungswerte $z\varepsilon$ häufen, so kann man in jedem Einzelfall die Ladungszahl z ohne weiteres erkennen und ε selbst berechnen. Als zuverlässigster Wert gilt heute

$$\varepsilon = (4,770 \pm 0,005) \cdot 10^{-10} \text{ e.s.E.} = 1,591 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb.}$$

Das Verhältnis ε/μ , die *spezifische Ladung des Elektrons* (μ = Elektronenmasse) kann durch elektrische und magnetische Ablenkung von Kathodenstrahlen (oder Betastrahlen) gemessen werden (§ 194). Es beträgt $\varepsilon/\mu = 5,280 \cdot 10^{17} \text{ e.s.E.} \cdot g^{-1} = 1,768 \cdot 10^8 \text{ Coul.} \cdot g^{-1}$. Daraus ergibt sich die *Masse des Elektrons*, $\mu = 0,9033 \cdot 10^{-27} \text{ g}$.

Die kleinste, mit einem positiven Elementarquantum verknüpfte Masse ist — vom Positron (§ 359) abgesehen — die des positiven Wasserstoffions (*Wasser-kern, Proton*). Seine Masse beträgt $m_H = 1,6606 \cdot 10^{-24} \text{ g}$; also ist das Verhältnis $\mu/m_H = 1/1838,3$. Diese Zahl hat sicher eine tiefe, aber heute noch nicht geklärte Bedeutung. Man könnte sie als das *Atomgewicht des Elektrons* bezeichnen, wenn das Atomgewicht des Protons genau gleich 1 wäre. Es ist aber, bezogen auf Sauerstoff = 16,0000 ein wenig größer (genau 1,00721), so daß das Atomgewicht des Elektrons den Wert $1/1824,8 = 5,479 \cdot 10^{-4}$ hat. (Man muß zwischen dem Atomgewicht des Protons und dem des Wasserstoffatoms unterscheiden, da letzteres gleich Proton + Elektron ist. Für diese und die im folgenden vorkommenden atomaren Konstanten vgl. die Tabelle S. VI.)

339. Das Atommodell von RUTHERFORD. Daß die Atome nicht unteilbar sind, folgt schon daraus, daß man sie ionisieren, also Elektronen von ihnen abspalten kann. Es müssen demnach Elektronen Bausteine der Atome sein. Es läßt sich aber beweisen, daß ein statisches Modell des Atoms, d. h. ein solches, bei dem die Elektronen feste Gleichgewichtslagen im Atom haben, nicht möglich ist.

Auf Grund von Beobachtungen beim Durchgang von Elektronenstrahlen durch Materie kam als erster LENARD zu der Vorstellung der Atome als *Kraftzentren* (Dynamiden). Einen weiteren Fortschritt brachten Versuche von GEIGER und MARSDEN (1909). Sie untersuchten die Streuung von Alphastrahlen (§ 357), d. h. die Ablenkungen, die diese Strahlen beim Durchgang durch dünne Metallfolien erleiden. Die Verteilung der gestreuten Alphateilchen über die verschiedenen Streuwinkel ergab sich dabei so, wie sie sein muß, wenn diese (positiv geladenen) Teilchen bis in große Nähe eines sie abstoßenden Zentrums K gelangen und infolge der Abstoßung eine hyperbolische Bahn beschreiben. In Abb. 565 bezeichnen die den einzelnen Bahnen beigefügten Zahlen den Abstand, auf den sich das unabgelenkte Teilchen dem Zentrum genähert haben würde, in der Einheit 10^{-12} cm. Die tatsächliche Annäherung an das Zentrum läßt sich aus dem Streuwinkel berechnen, und sie geht bis zu Abständen von der Größenordnung 10^{-12} cm. Dieser Abstand ist aber viel geringer als der z. B. aus der kinetischen Gastheorie berechenbare Radius der Atome, der von der Größenordnung 10^{-8} cm, also rund 10000mal größer ist. Die Versuche bewiesen ferner, daß die vom Zentrum ausgehende abstoßende Kraft bis auf einen Abstand von mindestens 10^{-12} cm dem COULOMBschen Gesetz gehorcht. Hiernach muß man schließen, daß das Innere des Atoms weitgehend leer ist.

Diese Erkenntnisse führten RUTHERFORD zu einem großen Fortschritt in der modellmäßigen Vorstellung vom Bau der Atome (*Kernmodell*). Die Atome müssen aus einem positiv geladenen Kern bestehen, in dem der ganz überwiegende Anteil der Masse des Atoms vereinigt ist. Seine Abmessungen können auf keinen Fall größer als 10^{-12} cm sein, und er trägt eine positive Ladung. Dieser positive Kern wird nach RUTHERFORD in einem Abstände von der Größenordnung 10^{-8} cm von Elektronen umkreist, wie die Sonne von ihren Planeten. Die elektrische Anziehung wirkt hier wie bei der Sonne die Gravitation und ist wie diese dem Quadrat des Abstandes vom Kern umgekehrt proportional. Die Elektronenbewegung muß daher (von gegenseitigen Störungen abgesehen) nach den KEPLERSCHEN Gesetzen (§ 46) verlaufen. Die Elektronen bewegen sich auf Kreisen oder Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Kern steht. Bei einem elektrisch neutralen Atom ist die Zahl der kreisenden Elektronen so groß, daß die Summe ihrer negativen Ladungen der positiven Kernladung gleich ist. Diese muß also aus einer ganzen Zahl von positiven Elementarquanten (*Kernladungszahl*) bestehen. Wie VAN DEN BROEK zuerst vermutete, ist diese Kernladungszahl mit der *Ordnungszahl* des betreffenden Elements im periodischen System identisch (§ 343).

Dieses Modell aber widerspricht ohne weitere Annahme in einem wesentlichen Punkt der Erfahrung. Ein Elektron, das einen Kern umkreist, ist nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik ein elektrischer Oszillator; es sollte von einem ständig wechselnden elektromagnetischen Felde umgeben sein und ständig Energie — in diesem Falle Licht — in den Raum ausstrahlen. Dadurch aber muß es selbst Energie verlieren, und es kann dem Schicksal nicht entgehen, schließlich in den Kern zu fallen, was offensichtlich nicht das wirkliche Schicksal der Elektronen ist. Man kann ferner die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichts berechnen, und es ergibt sich, daß die Atome kontinuierliche Spektren aussenden müßten. Tatsächlich aber senden die Atome Spektren aus, die aus einzelnen, scharfen Spektrallinien bestehen. Es war noch ein ganz grundlegender

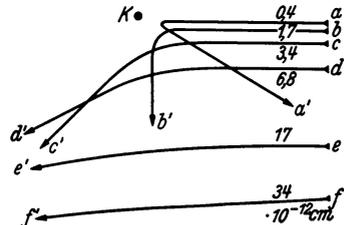


Abb. 565. Ablenkung von Alphateilchen durch einen Atomkern.

Schritt nötig, um den Grundgedanken RUTHERFORDS mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen.

340. Das Atommodell von BOHR. Dieser Schritt gelang NIELS BOHR (1913), indem er — unter radikaler Abkehr von den Vorstellungen der klassischen Physik — das Gedankengut der seit 1900 entwickelten Quantentheorie auf das RUTHERFORDSche Atommodell anwandte. So wie schon PLANCK annehmen mußte, daß seine Oszillatoren sich nur auf ganz bestimmten, verschiedenen *Energiestufen* befinden können und nur sprunghaft von einer Energiestufe auf eine andere übergehen können, so nahm BOHR an, daß es auch bei den kreisenden Elektronen nur bestimmte Energiestufen gibt. Ein solches Elektron kann sich nur auf ganz bestimmten *stationären Bahnen* aufhalten, — statt auf jeder der unendlich vielen Bahnen, die die klassische Mechanik zuläßt —, und während es in einer solchen Bahn verweilt, soll es, — im Gegensatz zur klassischen Elektrodynamik —, keine Energie, *kein Licht ausstrahlen*. Eine Ausstrahlung erfolgt nur in den Augenblicken, in denen das Elektron *sprunghaft* von einer Bahn (Energiestufe) auf eine andere Bahn übergeht, in der es eine kleinere Energie hat, wenn es also einen *Quantensprung* ausführt. Besitzt es in der ersten Bahn die Energie E_n , in der zweiten die Energie $E_m < E_n$, so wird die Energiedifferenz in Gestalt eines Lichtquantens $h\nu$ (§ 334) frei. Es ist also

$$h\nu = E_n - E_m. \quad (1)$$

Somit ist die Schwingungszahl ν des ausgestrahlten Lichts durch die Differenz der Energien in zwei stationären Bahnen bestimmt. Damit aber das Elektron umgekehrt von einer Bahn kleinerer Energie auf eine Bahn größerer Energie gehoben wird, muß ihm die Energie $E_n - E_m$ von außen zugeführt werden.

Zur Berechnung der stationären oder *Quantenbahnen* führt nun, wie BOHR und in erweiterter Form SOMMERFELD bewiesen, der folgende Ansatz, in den wiederum das Wirkungsquantum, aber in ganz anderer Weise, eingeht. Es sei φ das Azimut des Elektrons, q der Drehimpuls des Atoms (§ 35) bezüglich des Atomschwerpunktes. Dann sind die Quantenbahnen dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen das über einen vollen Umlauf des Elektrons genommene Integral

$$\int_0^{2\pi} q d\varphi = n_\varphi h, \quad (2a)$$

d. h. gleich einem ganzzahligen Vielfachen des Wirkungsquantums h ist. Die ganze Zahl n_φ kann jeden Wert von 1 aufwärts annehmen. Ist ferner r der Abstand des Elektrons vom Atomschwerpunkt, G_r die Komponente des Impulses des Atoms (§ 20) in der Richtung von r , so gilt entsprechend

$$\oint G_r dr = n_r h, \quad (2b)$$

wobei das Integral über einen vollen Umlauf zu erstrecken ist. n_r ist wieder eine ganze Zahl, die auch gleich Null sein kann. Man bezeichnet n_φ als die *azimutale Quantenzahl*, n_r als die *radiale Quantenzahl*. Ist $n_r = 0$, besitzt das Elektron also keine radiale Impulskomponente, so beschreibt das Elektron eine Kreisbahn, andernfalls eine elliptische Bahn.

Da das Elektron nur bestimmte, durch die Größe der einzelnen Quantenzahlen gekennzeichnete Bahnen beschreiben und die diesen entsprechenden Energiestufen einnehmen kann, so kann es bei seinen Quantensprüngen auch nur die den Differenzen dieser Energiestufen entsprechenden Energiebeträge in Gestalt von Lichtquanten $h\nu$ aussenden oder aufnehmen, nur Licht von den dadurch gegebenen Schwingungszahlen aussenden oder absorbieren. Die bei den Atomen in Emission und Absorption auftretenden scharfen Spektrallinien sind damit grundsätzlich gedeutet.

Wir wollen hier sogleich bemerken, daß dieses mechanisch-anschauliche Bild der Atome, namentlich die Vorstellung von Elektronenbahnen, nicht als ein eigentliches Abbild einer Wirklichkeit zu werten ist, sondern als ein *Modell* (§ 337). Das bedeutet nicht mehr, als daß ein Gebilde, das diesem Modell wirklich entsprechen und den genannten quantentheoretischen Gesetzen gehorchen würde, sich sehr weitgehend — aber innerhalb heute angegebbarer Grenzen — nach außen hin so verhalten, ebenso auf unsere Meßgeräte einwirken würde, wie es die Atome tatsächlich tun. Wir wissen heute, daß eine „das Wesen der Atome erklärende“ mechanisch-anschauliche Vorstellung von den Atomen grundsätzlich nicht möglich ist. Aber, wie beim Licht, so bildet auch bei den Atomen ein solches Modell — sofern wir die Grenzen kennen, innerhalb derer es zutrifft und in diesem Sinne „richtig“ ist — ein unentbehrliches gedankliches Hilfsmittel. Um dem Atommodell nicht mehr als nötig den Charakter der Wirklichkeit zu verleihen, werden wir künftig in der Regel nicht von Elektronenbahnen reden, sondern von den Zuständen (Quantenzuständen) oder den Energiestufen der Atome. Denn die letzteren gibt es, unabhängig von jeder Modellvorstellung, wirklich.

341. Das Wasserstoffatom. Das einfachste aller Atome ist das des Wasserstoffes. Es hat die Kernladungszahl 1 und besitzt daher nur ein Elektron. Wir beschränken uns in unserer Modellvorstellung zunächst auf Kreisbahnen und haben es daher nur mit einer einzigen veränderlichen Koordinate, dem Azimut φ , und dem mit seiner zeitlichen Änderung verknüpften Drehimpuls zu tun. Es ist also nur die azimutale Quantenzahl n_φ im Spiel, die wir deshalb einfach mit n bezeichnen. Wie SOMMERFELD gezeigt hat, ist es nötig, zu berücksichtigen, daß auch der Kern nicht ruht, sondern daß Elektron *und* Kern sich um ihren ruhenden gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Es sei r der Abstand Kern-Elektron, μ die Masse des Elektrons, M die des Kerns. Dann beträgt der Schwerpunktsabstand des Elektrons $r_e = rM/(\mu + M)$, der des Kerns $r_k = r\mu/(\mu + M)$ (§ 19). Die nach dem COULOMBSCHEN Gesetz zwischen Kern und Elektron wirkende Kraft e^2/r^2 liefert die für die Kreisbewegungen von Elektron und Kern nötige Zentripetalkraft $\mu r_e u^2$ bzw. $M r_k u^2$ ($u =$ Winkelgeschwindigkeit). Es folgt

$$\mu r_e u^2 = M r_k u^2 = \frac{\mu M}{\mu + M} r u^2 = \frac{\epsilon^2}{r^2}. \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment (§ 36) des Atoms (Elektron + Kern) beträgt $J = \mu r_e^2 + M r_k^2 = r^2 \mu M/(\mu + M)$, sein Drehimpuls um die zur Bahnebene senkrechte Schwerpunktsachse ist konstant und beträgt $q = J u$ (§ 37). Nach Gl. (2a)

haben wir nunmehr das Integral $\int_0^{2\pi} q d\varphi = n h$ zu setzen und erhalten dann

$$2\pi \frac{\mu M}{\mu + M} r^2 u = 2\pi \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{M}} r^2 u = n h. \quad (4)$$

Aus Gl. (3) und (4) folgt

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 \mu \epsilon^2} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right) \quad \text{und} \quad u = \frac{8\pi^3 \mu \epsilon^4}{n^3 h^3} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{M}}. \quad (5a \text{ u. } b)$$

Da $\mu/M = 1838,3$ (§ 338), so ist $r_k \ll r_e$ und r_e von r nur sehr wenig (aber doch nachweisbar) verschieden. Der Radius der innersten Bahn (*Grundzustand*, $n = 1$), welche als Zustand kleinster Energie dem normalen Zustand des Atoms entspricht, ergibt sich unter Einsetzung der Werte von μ , ϵ , h und μ/M (§ 334 und 338) zu $r_1 = 0,5275 \cdot 10^{-8}$ cm. Das ist, wie früher erwähnt, die richtige

Größenordnung der Atomdurchmesser. Abb. 566 zeigt die innersten kreisförmigen Quantenbahnen des Wasserstoffatoms.

Die Rotationsenergie des Atoms (Elektron + Kern) beträgt $J u^2/2 = \mu r_k^2 u^2/2 + M r_k^2 u^2/2$, seine durch die Coulombkraft bedingte potentielle Energie $-\varepsilon^2/r$ (§ 137). Die Gesamtenergie E_n des Atoms im n -ten Quantenzustand ergibt sich unter Einsetzung der Werte von r_e , r_k , r und u als die Summe dieser Energieanteile,

$$E_n = \frac{1}{2} J u^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{2 \pi^2 \mu \varepsilon^4}{n^2 \hbar^2} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{M}}. \quad (6)$$

Wir wollen die Größe

$$R = \frac{2 \pi^2 \mu \varepsilon^4}{c \hbar^3}, \quad (7)$$

die *RYDBERG-Konstante*, einführen (c = Lichtgeschwindigkeit). Sie beträgt in ausgezeichneter Übereinstimmung des spektrometrisch ermittelten Wertes mit dem aus Gl. (7) berechneten Wert $109737,1 \text{ cm}^{-1}$. Dann können wir für Gl. (6) schreiben

$$E_n = - \frac{R c \hbar}{1 + \frac{\mu}{M}} \frac{1}{n^2}. \quad (8)$$

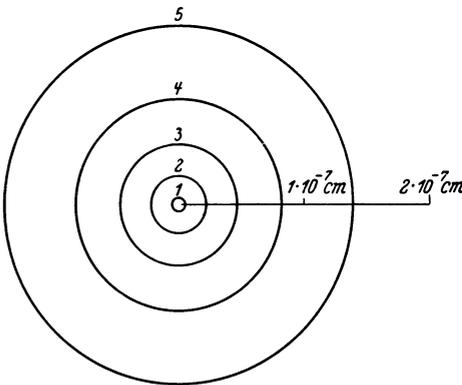


Abb. 566. Die innersten kreisförmigen Quantenbahnen des Wasserstoffatoms.

Springt nun das Atom aus dem n -ten in den m -ten Quantenzustand mit der Energie E_m ($m < n$), so wird die Energie $E_n - E_m$ frei und als Lichtquant $h\nu$ ausgestrahlt,

$$h\nu = E_n - E_m = \frac{R c \hbar}{1 + \frac{\mu}{M}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (9a)$$

Die Frequenz des Lichtquants beträgt also

$$\nu = \frac{E_n}{h} - \frac{E_m}{h} = \frac{R c}{1 + \frac{\mu}{M}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (9b)$$

In der Spektrometrie gibt man statt der Schwingungszahl meist die Wellenzahl $N = 1/\lambda = \nu/c$ an (§ 262, λ = Wellenlänge des Lichtquantes). Dann folgt aus Gl. (9b)

$$N = \frac{E_n}{c h} - \frac{E_m}{c h} = \frac{R}{1 + \frac{\mu}{M}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (10)$$

Man erhält also die einzelnen Wellenzahlen im Spektrum des Wasserstoffatoms, indem man in Gl. (10) für m und n beliebige ganze Zahlen ($n > m$) einsetzt. Diese Wellenzahlen ordnet man nach *Serien*, derart, daß sämtliche Quantensprünge, die zu dem gleichen Endzustand führen, für die also m den gleichen Wert hat, eine Serie bilden. Die Quantenzahl n läuft dann von $m + 1$ bis ∞ . Die einzelnen Serien liegen voneinander getrennt in verschiedenen Spektralbereichen.

Gl. (9b) bzw. (10) stellt nun in der Tat alle bekannten Serien des Wasserstoffatoms vollkommen richtig dar. Schon 1885 hatte *BALMER* empirisch die im Sichtbaren liegende Wasserstoffserie (*BALMER-Serie*) durch die Gleichung $N = \text{const} (1/4 - 1/n^2)$ dargestellt. Das ist nach Gl. (10) die Serie mit $m = 2$ und $n = 3, 4, \dots$, bei der alle Quantensprünge im 2. Quantenzustand enden.

Später wurden auch die im Ultraviolett liegende LYMAN-Serie mit $m = 1$ und weitere Serien mit $m = 3$ (PASCHEN-Serie), $m = 4$ (BRACKETT-Serie) usw. entdeckt. Abb. 567 zeigt das Wellenzahlschema der BALMER-Serie, Abb. 568 eine Aufnahme derselben. Man bezeichnet ihre Linien mit H_α , H_β , H_γ usw.

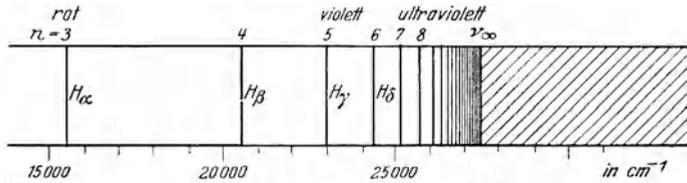


Abb. 567. Schema der BALMER-Serie.

Da n von $m + 1$ bis ∞ läuft, so besteht jede Serie aus unendlich vielen Linien. Diese häufen sich mit wachsendem n unter stetiger Abnahme ihrer

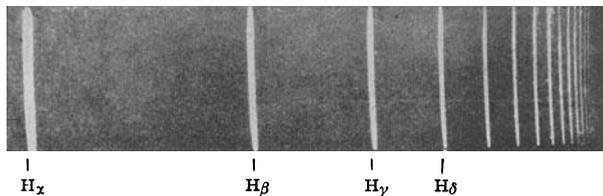


Abb. 568. Aufnahme der BALMER-Serie.

Intensität mehr und mehr, und für $n = \infty$ ergibt sich nach Gl. (9b) an der *Seriengrenze* eine endliche Schwingungszahl ν_∞ (Abb. 567),

$$\nu_\infty = \frac{Rc}{1 + \frac{\mu}{M}} \cdot \frac{1}{m^2} \quad \text{bzw. die Wellenzahl} \quad N_\infty = \frac{R}{1 + \frac{\mu}{M}} \cdot \frac{1}{m^2} = - \frac{E_m}{c h}. \quad (11 \text{ a u. b})$$

Die Anordnung der Spektrallinien zu Serien war — nicht nur beim Wasserstoff — bereits vor der BOHRschen Theorie bekannt (RYDBERG, RITZ, KAYSER und RUNGE). Man hatte auch bereits bemerkt, daß sich die Wellenzahlen einer Serie als Differenzen zweier Größen, die man *Terme* nennt, darstellen lassen. Diese haben beim Wasserstoff die Gestalt

$$T_n = \frac{R}{1 + \frac{\mu}{M}} \cdot \frac{1}{n^2} = - \frac{E_n}{c h}, \quad (12)$$

und die Wellenzahlen werden durch die Term-differenzen $T_m - T_n$ gebildet. Dabei ist T_m innerhalb jeder Serie konstant, und die Terme T_n werden mit der laufenden Quantenzahl n gebildet.

Abb. 569 zeigt ein für viele Überlegungen nützliches Schema der Energiestufen des Wasserstoffatoms für $n = 1$ bis 5 und $n = \infty$.

Die Pfeile deuten die Quantensprünge an, die das Elektron zwischen den einzelnen Energiestufen ausführen kann, bei Lichtaussendung in der Richtung nach unten, bei Lichtabsorption oder sonstiger Energiezufuhr in der Richtung nach oben. Die Länge der Pfeile ist ein Maß für die bei einem Quantensprung freiwerdende Energie bzw. für die Wellenzahl der entsprechenden Spektrallinie.

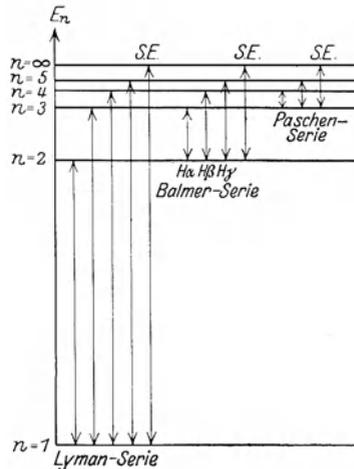


Abb. 569. Energie- (Term-) Schema des Wasserstoffatoms.

S.E. bedeutet das kurzwellige Serienende. (Sämtliche Quantenzahlen sind hier mit n bezeichnet.)

Dem oberen Zustand entspricht am Serienende $n = \infty$, also nach Gl. (5a) und (5b) der Abstand $r = \infty$ des Elektrons vom Kern — praktisch gesprochen ein gegen den Radius der Grundbahn sehr großer Abstand —, die Winkelgeschwindigkeit $u = 0$ und nach Gl. (6) die Energie $E = 0$. Das Elektron befindet sich also in diesem oberen Zustand in sehr großer Entfernung vom Kern in Ruhe und gehört dem Atomverband gar nicht an. Seine Energie ist in diesem Zustand $E_\infty = 0$ und um den Betrag

$$A_\infty = E_\infty - E_1 = -E_1 = \frac{R c h}{1 + \frac{\mu}{M}} \quad (13)$$

größer als im Grundzustand [Gl. (8), $n = 1$]. Daher muß dem Atom, wenn es sich im Grundzustand befindet, mindestens diese Energie zugeführt werden, um das Elektron vom Atom abzureißen, das Atom zu ionisieren (§ 346).

Der Quantenzustand mit der Quantenzahl $n = \infty$ entspricht also einem in sehr großer Entfernung vom Kern ruhenden Elektron. Fällt es von dort auf die m -te Quantenbahn, so wird, analog zu Gl. (13), die Energie $-E_m$ frei. Im allgemeinen wird ein solches freies Elektron aber irgendeine kinetische Energie $\mu v^2/2$ haben. Wird es vom Kern eingefangen, so wird auch diese Energie frei und trägt zur Energie des Lichtquants bei. Dieses hat also die Energie $h\nu = -E_m + \mu v^2/2 = h\nu_\infty + \mu v^2/2$. Die Schwingungszahl ist also größer als diejenige der Seriengrenze. Da die kinetische Energie eines freien Elektrons die stetige Folge aller nach der klassischen Mechanik möglichen Werte von Null an aufwärts haben kann, so liefern diese Quantensprünge ein *kontinuierliches Spektrum*, das sich an die Seriengrenzen anschließt (in Abb. 567 durch Schraffierung angedeutet). Das ist beim Wasserstoff und bei anderen Atomen auch beobachtet worden.

Nach der klassischen Elektrodynamik sollte die Umlauffrequenz $\nu_u = u/2\pi$ des Elektrons mit der Frequenz ν des ausgesandten Lichtes übereinstimmen. Nach der Quantentheorie ist das keineswegs der Fall. Wir betrachten jetzt einen Quantensprung, der von der Quantenzahl n zur Quantenzahl $m = n - 1$ führt. Der Faktor $1/m^2 - 1/n^2$ der Gl. (9b) wird dann gleich $(2n - 1)/n^2 (n - 1)^2$. Ist nun $n \gg 1$, so nähert sich dies dem Wert $2/n^3$, und es wird $\nu = 4\pi\mu e^2/n^3 h^3$ [Gl. (7) und (9b)]. Das aber ist, wie man aus Gl. (5b) entnimmt, identisch mit der Umlauffrequenz $\nu_u = u/2\pi$ auf der n -ten Quantenbahn. Für sehr große Quantenzahlen nähert sich also die Frequenz des ausgesandten Lichts mehr und mehr dem der klassischen Elektrodynamik entsprechenden Wert. Dies ist ein Beispiel für ein grundlegendes Prinzip der Quantentheorie, das *BOHRsche Korrespondenzprinzip*. Es sagt aus, daß die Gesetze der Quantentheorie sich mit wachsenden Quantenzahlen mehr und mehr den Gesetzen der klassischen Physik annähern und schließlich in sie übergehen. Man kann das so verstehen. Je größer n ist, eine um so kleinere relative Änderung bewirkt ein Übergang von n auf $n - 1$, und mit um so kleinerem Fehler kann man diesen *sprunghaften* Übergang durch einen *stetigen* Übergang ersetzt denken. Die unstetigen Übergänge aber sind das Merkmal, das die Quantentheorie so grundsätzlich von der klassischen Theorie mit ihren stetigen Zustandsänderungen unterscheidet. Im Korrespondenzprinzip ist die grundlegend wichtige Erkenntnis verankert, daß die Gesetze der klassischen Physik tatsächlich Grenzesetze sind, in die die Quantengesetze für den Fall sehr großer Quantenzahlen übergehen.

Wir wollen schließlich auch noch die stationären Ellipsenbahnen kurz besprechen. Da bei diesen auch der Abstand r des Elektrons vom Kern periodisch

veränderlich ist, so kommt eine radiale Quantenzahl n_r zur azimutalen Quantenzahl, die wir jetzt wieder n_φ nennen wollen, hinzu (SOMMERFELD). Als *Hauptquantenzahl* bezeichnet man die Summe $n = n_r + n_\varphi$. Als zweite Quantenbedingung kommt nach Gl. (2b) noch $\oint G_r dr = n_r h$ hinzu. Die Durchführung der Rechnung ergibt Ellipsen, deren Energien denjenigen der oben berechneten Kreisbahnen mit der (Haupt-)Quantenzahl n gleich sind. Alle abgeleiteten Beziehungen bleiben also auch bei Berücksichtigung der Ellipsenbahnen bestehen. Das ist aber nur dann genau der Fall, wenn man, wie oben, nach der klassischen Mechanik rechnet. Benutzt man, wie das tatsächlich nötig ist, wenn man den feineren Einzelheiten der Spektren Rechnung tragen will, die Gleichungen der relativistischen Mechanik, so ergeben sich kleine Unterschiede in den Energien der Bahnen verschiedener Exzentrizität. Bei der gleichen Hauptquantenzahl $n = n_r + n_\varphi$ sind also die den verschiedenen Bahnen entsprechenden Spektraltermine einander nicht völlig gleich. Sie spalten in zwei oder mehr nahe benachbarte Terme auf, je nach dem Anteil der azimutalen Quantenzahl an der Hauptquantenzahl n . Daher entstehen auch bei Quantensprüngen, die der gleichen Änderung der Hauptquantenzahl entsprechen, zwei oder mehr nahe benachbarte Linien. Die Spektrallinien zeigen eine *Feinstruktur*. An die Stelle einfacher Linien treten Dubletts, Tripletts usw. (allgemein Multipletts) aus zwei, drei usw. sehr nahe benachbarten Linien. Hierbei spielt die Größe $\alpha = 2\pi e^2/hc$, die eine reine Zahl vom Betrage $1/137,3$ ist, eine wichtige Rolle. Sie ist gleich dem Verhältnis v/c der Geschwindigkeit des Elektrons in der Grundbahn des Wasserstoffatoms zur Lichtgeschwindigkeit. Auch die Zahl 137,3 hat sicher eine tiefe, bisher nicht geklärte Bedeutung (vgl. § 338). Die azimutale Quantenzahl kann nie den Wert Null haben. Das bedeutet im Sinne unseres Modells, daß es keine zu einer Geraden ausgearteten Ellipsenbahnen gibt. Ihr kleinster Wert ist also $n_\varphi = 1$. Man bezeichnet die azimutale Quantenzahl meist als die *Nebenquantenzahl*.

342. Wasserstoffähnliche Spektren. Spektren, die denen des Wasserstoffs in ihrem allgemeinen Bau ähneln, treten bei anderen Atomen dann auf, wenn ein einzelnes Elektron einen sehr viel größeren Kernabstand hat, als alle übrigen. Die letzteren wirken, wenn ihre Anzahl z' ist, zusammen mit dem Kern (Kernladungszahl z) näherungsweise wie ein Kern von der Kernladung $z - z'$. In den Gleichungen (5b), (6) und (7) (§ 341) tritt dann, wie man durch Nachrechnen leicht feststellen kann, $(z - z')^2 \epsilon^4$ an die Stelle von ϵ^4 . Falls $z - z' > 1$, ist das Spektrum gegenüber dem des Wasserstoffs nach höheren Wellenzahlen (Frequenzen), also kleineren Wellenlängen verschoben. Strenge Wasserstoffähnlichkeit liegt dann vor, wenn ein Kern seine sämtlichen Elektronen bis auf eines verloren hat ($z' = 0$). Der Fall unterscheidet sich von dem des Wasserstoffatoms dann nur durch die z -fache Kernladung. Dann lauten die den Gl. (8) und (10) entsprechenden Gleichungen

$$E_n = - \frac{R c h z^2}{1 + \frac{\mu}{M}} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad N = \frac{R z^2}{1 + \frac{\mu}{M}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (14)$$

Dabei ist für M die Masse des betreffenden Kerns einzusetzen.

Dieser Fall ist beim einfach ionisierten Helium (Ordnungszahl 2) verwirklicht, das eines seiner beiden Elektronen verloren hat. Dann gelten die Gl. (14) mit $z = 2$, d. h. die Wellenzahlen sind um den Faktor 4 größer als in den entsprechenden Serien des Wasserstoffs, die Wellenlängen viermal kleiner. Solche Spektren des Heliums werden sowohl in Entladungsröhren, wie auch bei zahlreichen Fixsternen beobachtet. Gewisse Linien des Heliumspektrums fallen, wie man leicht nachrechnen kann, mit Linien des Wasserstoffspektrums fast

genau zusammen. Der sehr kleine Unterschied rührt nur von dem Unterschied der Kernmassen M her.

Wir wollen die Größen $R/(1 + \mu/M)$ beim Wasserstoff mit R_H , beim Helium mit R_{He} bezeichnen, die Kernmassen mit M_H und M_{He} . Das Verhältnis μ/M_H der Elektronenmasse zur Masse des Wasserstoffkerns (Protons) bezeichnen wir mit x . Da die Masse des Heliumkerns 3,973mal größer als die des Protons ist, so ist beim Helium $\mu/M_{He} = x/3,973$. Es ist also $R_H = R/(1 + x)$, $R_{He} = R/(1 + x/3,973)$. R_H und R_{He} sind spektrometrisch äußerst genau bestimmt worden ($109677,691$ und $109722,144 \text{ cm}^{-1}$). Man kann daher aus den vorstehenden Gleichungen $x = \mu/M_H$ und R berechnen. Es ergibt sich $\mu/M_H = 1/1846$, ein Wert, der mit anderweitigen Berechnungen recht gut übereinstimmt, und $R = 109737,1 \text{ cm}^{-1}$, wie schon oben angegeben. Wie man sieht, wird der Einfluß des Faktors $1/(1 + \mu/M)$ mit wachsender Kernmasse M (wachsendem Atomgewicht) schnell immer kleiner.

343. Das periodische System der Elemente. Im Jahre 1869 stellten gleichzeitig und unabhängig voneinander MENDELEJEFF und LOTHAR MEYER das periodische System der Elemente auf, das diese in so wunderbarer Weise nach ihren chemischen Grundeigenschaften, insbesondere nach ihrer Wertigkeit, ordnet (Tabelle 34). Die Reihen der nach steigendem Atomgewicht geordneten

Tabelle 34. Das periodische System der Elemente.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	1 H 1,0078							2 He 4,002
2	3 Li 6,940	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,00	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,00	10 Ne 20,183
3	11 Na 22,997	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 31,02	16 S 32,06	17 Cl 35,457	18 Ar 39,944
4	19 K 39,10 29 Cu 63,57	20 Ca 40,08 30 Zn 65,38	21 Sc 45,10 31 Ga 69,72	22 Ti 47,90 32 Ge 72,60	23 V 50,95 33 As 74,93	24 Cr 52,01 34 Se 79,2	25 Mn 54,93 35 Br 79,916	26 Fe 55,84 27 Co 58,94 28 Ni 58,69 36 Kr 83,7
5	37 Rb 85,47 47 Ag 107,880	38 Sr 87,63 48 Cd 112,41	39 Y 88,92 49 In 114,8	40 Zr 91,22 50 Sn 118,70	41 Nb 92,91 51 Sb 121,76	42 Mo 96,0 52 Te 127,5	43 Ma — 53 J 126,932	44 Ru 101,7 45 Rh 102,91 46 Pd 106,7 54 X 131,3
6	55 Cs 132,81 79 Au 197,2	56 Ba 137,36 80 Hg 200,51	57—71 Seltene Erden s. u. 81 Tl 204,39	72 Hf 178,6 82 Pb 207,22	73 Ta 180,89 83 Bi 209,00	74 W 184,0 84 Po 210,0	75 Re 186,31 85 —	76 Os 190,8 77 Ir 193,1 78 Pt 195,23 86 Em 222
7	87, — —	88 Ra 225,97	89 Ac —	90 Th 232,12	91 Pa 230,5	92 U 238,14		

57 La 138,90	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 — —	62 Sm 150,43	63 Eu 152,0	64 Gd 157,3	65 Tb 158,91	66 Dy 162,46	67 Ho 163,5	68 Er 167,04	69 Tu 169,4	70 Yb 173,5	71 Cp 175,0
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------	-----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	----------------	-----------------	----------------	----------------	----------------

Seltene Erden.

Elemente werden derart übereinandergestellt, daß die in der gleichen Vertikalreihe (*Gruppe*) stehenden Elemente ähnliche chemische Eigenschaften und gleiche Wertigkeit haben. Die Länge der einzelnen Horizontalreihen (*Perioden*) — mit 2, 8, 8, 18, 18, 32, 32 und einer unvollständigen 7. Periode, was offensichtlich als $2 \cdot 1^2$, $2 \cdot 2^2$, $2 \cdot 3^2$ und $2 \cdot 4^2$ zu verstehen ist —, schien früher ein seltsames Zahlenspiel, das nun aber auf Grund der Quantentheorie seine Deutung findet.

Der wesentliche Gedanke ist zunächst, daß gar nicht eigentlich das Atomgewicht die Stellung eines Elements im periodischen System bestimmt, sondern seine *Kernladungszahl* und die dadurch gegebene *Zahl seiner Elektronen*, die allerdings mit dem Atomgewicht im allgemeinen zunimmt. Sie ist identisch mit der *Ordnungszahl* des Elements, also der „Hausnummer“, die man dem Element im periodischen System anweisen muß. Auf die allgemeine Erklärung der Periodizität führt ein von KOSSEL und LEWIS ausgesprochener Gedanke. Die Elektronen sind um den Atomkern in Gruppen angeordnet, sie bilden einzelne, getrennte *Elektronenschalen*. Nach dem BOHRschen *Aufbauprinzip* muß man sich die Bildung eines Atoms aus dem Kern und den Elektronen so vorstellen, daß ein Elektron nach dem anderen in ganz bestimmter Reihenfolge angelagert wird, und daß sich dabei von innen heraus eine Schale nach der anderen bildet. Diese werden — von innen nach außen gezählt — als *K*-, *L*-, *M*-Schale usw. bezeichnet.

Zum Verständnis des folgenden müssen wir zunächst ein grundlegendes, von PAULI entdecktes Gesetz der Quantentheorie anführen (*PAULI-Prinzip*). Es besagt, daß niemals zwei Elektronen an einem Atom in sämtlichen Quantenzahlen übereinstimmen können. Wir kennen bereits die azimutale und die radiale Quantenzahl und ihre Summe, die Hauptquantenzahl. Tatsächlich kommen noch zwei weitere Quantenzahlen hinzu, über deren Bedeutung wir im Rahmen dieses Buches nichts weiter sagen können. Das PAULI-Prinzip führt nun zunächst zu dem Schluß, daß die Elektronen in der *K*-Schale die Hauptquantenzahl $n = 1$, in der *L*-Schale die Hauptquantenzahl $n = 2$ usw. haben. Innerhalb der einzelnen Schalen teilen sich die Elektronen nach ihrer (azimutalen) Nebenquantenzahl, die wir hier, wie üblich, mit k bezeichnen wollen, in *Untergruppen*. Die einzelnen Elektronen einer Untergruppe wieder unterscheiden sich voneinander in den beiden noch hinzukommenden Quantenzahlen. Wir wollen einen Elektronenzustand, der durch die Hauptquantenzahl n und die Nebenquantenzahl k bestimmt ist, durch das Symbol n_k bezeichnen. k kann alle Werte zwischen $k = 1$ und $k = n$ annehmen. Das PAULI-Prinzip bewirkt weiter, daß eine durch das Symbol n_k gekennzeichnete Untergruppe nicht mehr als $2(2k - 1)$ Elektronen aufnehmen kann. Das entspricht den Zahlen 2, 6, 10, 14 usw. Deshalb kann eine Schale nicht mehr als $2 \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2n^2$ Elektronen aufnehmen, wobei n die der Schale entsprechende Hauptquantenzahl ist. Es ergeben sich also für die einzelnen Schalen die Höchstbesetzungsziffern 2, 8, 18, 32, 50, 72 usw.

Je kleiner k ist, um so kleiner ist bei gegebener Hauptquantenzahl n der Drehimpuls, und um so größer der radiale Impuls des Elektrons, und um so größer ist die Exzentrizität der Elektronenbahn. In den höheren Schalen sind also die Bahnen mit $k = 1$ solche von besonders großer Exzentrizität, die zum größten Teil sehr weit entfernt vom Kern verlaufen, auf einem kleineren Teil aber auch tief in die inneren Schalen hineintauchen (*Tauchbahnen*).

Wir werden im folgenden einen bestimmten, beim schrittweisen Aufbau eines Atoms erreichten Zustand jeweils durch dasjenige Element charakterisieren, dessen Aufbau mit der Erreichung dieses Zustandes beendet ist. Es ist nämlich ein wesentlicher Grundgedanke des Aufbauprinzips, daß sich der schrittweise Aufbau aller Elemente — unabhängig von der schließlich erreichten Elektronenzahl — in gleicher Weise abspielt, so daß sämtliche Atome, deren Aufbau bis zur gleichen Elektronenzahl fortgeschritten ist, eine zum mindesten sehr ähnliche Struktur haben.

Beim schrittweisen Aufbau eines Atoms bildet sich zuerst die *K*-Schale mit 2 Elektronen ($n = 1, k = 1, 2n^2 = 2$, Zustand des He), dann die *L*-Schale

mit 8 Elektronen in zwei Untergruppen $2_1, 2_2$ mit 2 bzw. 6 Elektronen ($n = 2, k = 1, 2, 2n^2 = 8$, Zustand des Ne). Die vollständige M -Schale ($n = 3, k = 1, 2, 3, 2n^2 = 18$) enthält 18 Elektronen in drei Untergruppen $3_1, 3_2, 3_3$ mit 2, 6, 10 Elektronen. Sie wird aber zunächst nur bis zum Abschluß der Untergruppe 3_2 , also mit insgesamt 8 Elektronen aufgebaut (Zustand des A, daher nur 8 Elemente in der 3. Periode). Dann erfolgt zunächst der Aufbau der Untergruppe 4_1 der N -Schale mit 2 Elektronen (Zustand des Ca), und erst dann wird der Aufbau der M -Schale mit der Untergruppe 3_3 vollendet (Zustand des Zn). Ähnliches ereignet sich beim Aufbau der weiteren Schalen in noch verwickelterer Weise, wie Abb. 570 zeigt, in der die Pfeilfolge den schrittweisen Aufbau andeutet. Man erkennt aus diesem Schema, daß eine O -Schale, die an sich 50 Elektronen enthalten könnte, bei keinem Element weiter als bis

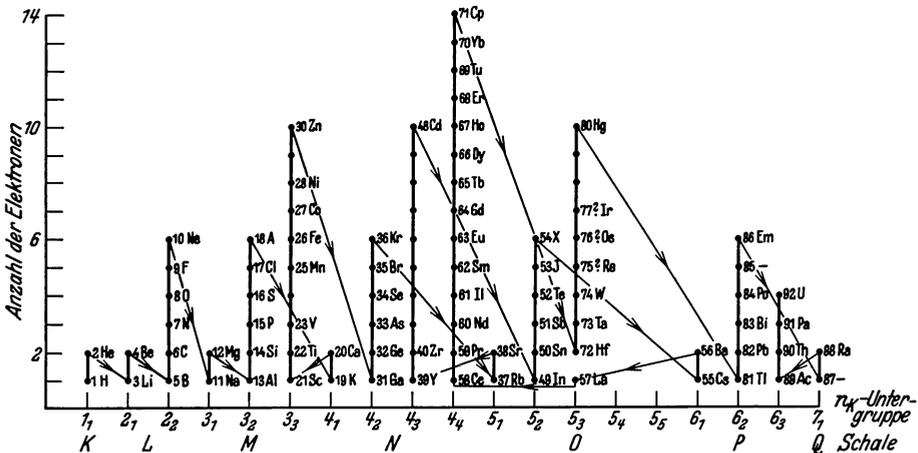


Abb. 570. Schrittweise Aufbau der Elektronenschalen. (Die ausgelassenen Elemente ordnen sich in das Schema nicht ein.) (Aus Handbuch der Physik, Bd. 24, 1.)

zur Ausbildung der Untergruppe 5_3 gelangt (Zustand des Hg) und die P -Schale nur bis zur Ausbildung einer unvollständigen Untergruppe 6_3 beim Uran. Eine Q -Schale besitzt nur das Ra und das noch nicht entdeckte Element 87. Die scheinbar so seltsame Einschaltung der Gruppe der seltenen Erden in die 6. Reihe des periodischen Systems erklärt sich nun recht einfach so, daß nach Vollendung der Untergruppe 6_1 der P -Schale und nach Einbau des ersten Elektrons in die Untergruppe 5_3 der O -Schale (Zustand des La) zunächst die noch fehlende letzte Untergruppe 4_4 der N -Schale fertig aufgebaut wird (Zustand des Cp). Diese ist die einzige Untergruppe mit $k = 4$, die überhaupt zur Ausbildung gelangt.

Wir stellen den Tatbestand der Abb. 570 in der Tabelle 35 noch einmal in anderer Form zusammen, indem wir bei den einzelnen Elementgruppen erstens die höchste Untergruppe der äußersten Schale angeben und dabei vermerken, ob sie im Aufbau begriffen ist oder — falls sie abgeschlossen ist —, bei welchem vorhergehenden Element sie abgeschlossen wurde. Zweitens geben wir die höchste Untergruppe der nächstinneren Schale an und dazu — falls sie bereits abgeschlossen ist — dasjenige Element, dessen Zustand mit dem Abschluß dieser Schale erreicht wurde.

Dieses Schema läßt plötzlich die scheinbar so verzwickten Verhältnisse der Abb. 570 in einem viel einfacheren Lichte erscheinen. Die Elemente der drei ersten Perioden werden ganz stetig von innen nach außen aufgebaut, die dritte aber nur bis zur Untergruppe 3_2 , von der vierten Periode auch noch die beiden

ersten Elemente. Dann aber beginnt mit der vierten Periode, in der zum erstenmal eine 3. Untergruppe in einer inneren Schale auftreten kann, etwas ganz neues, die *Nachholung des Aufbaus* einer vorher zurückgestellten Untergruppe einer inneren Schale (3_3) vom Sc (21) ab. In der 4. bis 6. (7.) Periode zeigen stets die beiden ersten und die sechs letzten Elemente das gleiche Bild wie die entsprechenden Elemente der 2. und 3. Periode. Die zwischen ihnen liegenden Elemente, für die es in der 2. und 3. Periode kein Gegenstück gibt, sind durch eine gleichbleibende äußere Schale (1. Untergruppe) und den bei ihnen erfolgenden schrittweisen Aufbau vorher zurückgestellter 3. und höherer Untergruppen gekennzeichnet.

Wenn man sich merkt, daß eine bestimmte Schale es als *äußere* Schale nie weiter als bis zu einer vollständigen 2. Untergruppe bringt, als *innere* Schale mit Ausnahme der Untergruppe 4_4 nie weiter als bis zur 3. Untergruppe, so läßt sich auf Grund des einfachen Schemas der Tabelle 35 der gesamte Aufbau der Elemente sehr leicht behalten. Besonders deutlich wird aus der Tabelle 35, daß von der 4. Periode ab der Bestand der äußersten Schale vom dritten bis zum siebtvorletzten Element jeder Peri-

Tabelle 35. Zum Schalenaufbau der Elemente.

Elemente	Höchste Untergruppe der äußersten Schale	Höchste Untergruppe der nächstinneren Schale
I 1 H, 2 He	1_1 im Aufbau	—
II 3 Li, 4 Be	2_1 im Aufbau	1_1 He
5 B — 10 Ne	2_2 im Aufbau	1_1 He
III 11 Na, 12 Mg	3_1 im Aufbau	2_2 Ne
13 Al — 18 A	3_2 im Aufbau	2_2 Ne
IV 19 K, 20 Ca	4_1 im Aufbau	3_2 A
21 Sc — 30 Zn	4_1 Ca	3_3 im Aufbau
31 Ga — 36 Kr	4_2 im Aufbau	3_3 Zn
V 37 Rb, 38 Sr	5_1 im Aufbau	4_2 Kr
39 Y — 48 Cd	5_1 Sr	4_3 im Aufbau
49 In — 54 X	5_2 im Aufbau	4_3 Cd
VI 55 Cs, 56 Ba	6_1 im Aufbau	5_2 X
57 La — 80 Hg	6_1 Ba	5_3 (und 4_4) im Aufbau
81 Tl — 86 Em	6_2 im Aufbau	5_3 Hg
VII 87 —, 88 Ra	7_1 im Aufbau	6_2 Em
88 Ac — 92 U	7_1 Ra	6_3 im Aufbau

ode unverändert bleibt, und zwar entsprechend dem Zustand des der betreffenden Periode angehörenden Erdalkalimetalls. In der nächstinneren Schale herrscht bis zum Ca (20) der Zustand des nächstvorhergehenden Edelgases und weiterhin auch dann, wenn die 1. Untergruppe der äußersten Schale im Aufbau begriffen ist. Wenn aber die 2. Untergruppe der äußersten Schale im Aufbau begriffen ist, befindet sich die nächstinnere Schale im Zustande des der 2. Gruppe der betreffenden Periode angehörenden Metalles.

Wenn wir oben gesagt haben, daß das chemische Verhalten eines Elements durch die Zahl seiner Elektronen (Kernladungszahl) bestimmt wird, so ist das jetzt genauer so zu verstehen, daß in der Hauptsache die Zahl der Elektronen in seiner äußersten Schale hierfür verantwortlich ist, die allerdings durch die Gesamtzahl der Elektronen gegeben ist. Denn die Atome treten bei chemischen Verbindungen nur mit ihren äußeren Schalen in Wechselwirkung. Elemente, die in der gleichen Gruppe des periodischen Systems untereinander stehen, haben in ihrer äußersten Elektronenschale gleich viele Elektronen, die zwar nicht genau gleich, aber doch ähnlich angeordnet sind.

Hiernach ist es verständlich, daß in den höheren Perioden oft mehrere aufeinanderfolgende Elemente chemisch sehr nahe verwandt sind. Solche Fälle sind die „Triaden“ Eisen—Nickel—Kobalt, Ruthenium—Rhodium—Palladium und Osmium—Iridium—Platin und vor allem die 15 seltenen Erden. Die Zustände solcher Elemente sind stets derart, daß die letzten in ihre Atome eingebauten Elektronen in eine vorher zurückgestellte Untergruppe eintreten, nachdem bereits der Aufbau einer oder zweier weiterer äußerer Schalen begonnen hat.

Bei den seltenen Erden (La-Cp) wird die äußerste Schale von der Untergruppe 6_1 der *P*-Schale gebildet, die die Untergruppen 5_1 und 5_2 und ein Elektron der Untergruppe 5_3 (Zustand des La) der *O*-Schale umhüllt. Durch den sich tief im Innern der Elektronenhülle abspielenden nachträglichen Aufbau der Untergruppe 4_4 ändert sich im äußeren Zustand der Atome nur wenig. So kommt es, daß die seltenen Erden sich chemisch nur so sehr wenig unterscheiden.

Die einzelnen Perioden des periodischen Systems — außer der ersten und zweiten — entsprechen also nicht etwa unmittelbar den einzelnen Elektronenschalen, obgleich in ihren Besetzungszahlen auch die Besetzungszahlen $2n^2$ der Schalen auftreten. Wie man jedoch aus der Tabelle 35 erkennt, entspricht der Aufbau jeder Periode dem Einbau des ersten Elektrons in eine noch ganz unbesetzte Schale (1. Untergruppe, Zustand der Alkalimetalle), ihr Ende dem Zustand eines Edelgases, mit dem von der 3. Periode ab der weitere Aufbau dieser Schale nach Vollendung ihrer 2. Untergruppe vorläufig zurückgestellt und zunächst der Aufbau der 1. Untergruppe einer neuen Schale begonnen wird.

Man kann das so deuten, daß eine bis zum Zustand eines Edelgases aufgebaute Schale einen besonderen Grad von Stabilität oder Sättigung besitzt und nicht ohne weiteres noch mehr Elektronen aufnimmt. Damit hängt es auch zusammen, daß die Edelgase chemisch träge sind und keine gewöhnlichen chemischen Verbindungen eingehen, da diese stets mit Änderungen in der äußeren Elektronenschale einhergehen. Ein chemisch geschulter Leser wird beim aufmerksamen Studium der Abb. 570 und der Tabelle 35 noch zahlreiche Fälle entdecken, in denen sich ein besonderes chemisches Verhalten eines Elements oder aufeinanderfolgender Elemente aus dem Aufbauprinzip verstehen läßt.

344. Molekülbildung. Die vorstehend gegebene Deutung des periodischen Systems führt ohne weiteres zu einem Verständnis für die Kräfte, die die Atome in einer gewissen Klasse von Verbindungen, den *heteropolaren* oder *Ionenmolekülen*, aneinander binden. Wir haben gesehen, daß der edelgasähnliche Zustand der Elektronenhülle ein von der Natur bevorzugter Zustand ist. Es ist daher verständlich, wenn ein Atom unter geeigneten Bedingungen die Neigung zeigt, in diesen Zustand überzugehen. Das kann auf zwei Weisen geschehen. Entweder gibt das Atom unter Verwandlung in ein positives Ion sämtliche Elektronen seiner äußeren Schale ab, so daß der Zustand des vorhergehenden Edelgases erreicht wird. Oder das Atom nimmt unter Verwandlung in ein negatives Ion so viele Elektronen in seine äußere Schale auf, daß der Zustand des nächstfolgenden Edelgases erreicht wird. Verliert z. B. das Magnesium (12) seine zwei äußeren Elektronen, so entspricht sein Zustand dem des Neons (10). Nimmt aber z. B. das Chlor (17) ein weiteres Elektron in seine aus 7 Elektronen bestehende äußere Elektronenschale auf, so entspricht es dem Edelgas Argon (18). Eine solche Änderung der Elektronenzahl wird sich aber dann am leichtesten vollziehen, wenn zwei oder mehrere Atome zusammentreffen, die einander derart „aushelfen“ können, daß die beteiligten Atome lediglich durch Austausch von Elektronen untereinander sämtlich in den edelgasähnlichen Zustand gelangen, und wenn die Zahl der Elektronen, die ein Atom zur Erreichung des edelgasähnlichen Zustandes abgeben oder aufnehmen muß, nicht zu groß ist. Da sich dabei aber die Atome teils in positive, teils in negative Ionen verwandeln, so besteht zwischen den entgegengesetzt geladenen Ionen eine elektrostatische Anziehung, die ihre Bindung zu einem Molekül bewirkt. Ein einfaches Beispiel ist das Kochsalz NaCl. Das Na-Atom gibt sein einziges äußeres Elektron an das Cl-Atom ab, wobei jenes dem Ne, dieses dem A ähnlich wird. Beim Wassermolekül H_2O gehen die beiden Elektronen der beiden H-Atome in die an sich aus sechs Elektronen bestehende äußere Schale des O-Atoms

über, das sich dadurch in ein doppelt geladenes, dem Ne ähnliches negatives Ion verwandelt, das die zwei einfach geladenen positiven H-Ionen (nackte H-Kerne) elektrostatisch zu binden vermag. Verbindungen dieser Art werden sich also besonders leicht zwischen solchen Elementen bilden, die im periodischen System einem Edelgas nahe sind. Das trifft vor allem für alle Elemente der drei ersten Perioden, sowie für alle Alkali- und Erdalkalimetalle zu, sowie für die Elemente am Schluß der Perioden. Das sind im wesentlichen die Elemente, bei denen die äußere Schale im Aufbau begriffen ist. Das chemische Verhalten der Elemente, bei denen zurückgestellte Untergruppen aufgebaut werden, ist verwickelter.

Es gibt demnach in diesen Verbindungen *zwei Arten von Wertigkeit*, die man als *positiv und negativ* bezeichnet. Ein Atom ist in einer Verbindung positiv k -wertig, wenn es k Elektronen seiner äußeren Schale abgegeben hat. Es ist negativ k -wertig, wenn es zur Erreichung des edelgasähnlichen Zustandes k Elektronen aufgenommen hat. So ist im NaCl-Molekül das Na positiv, das Cl negativ einwertig, im H₂O-Molekül sind die beiden H-Atome positiv einwertig, das O-Atom negativ zweiwertig. Im allgemeinen entscheidet sich die Frage, ob ein Atom mit positiver oder negativer Wertigkeit in Verbindungen eingeht, darnach, ob es leichter durch Abgabe oder durch Aufnahme von Elektronen in den nächstbenachbarten edelgasähnlichen Zustand übergehen kann. So haben die ersten Elemente jeder Periode in der Regel positive, die letzten meist negative Wertigkeit; bei den Elementen der mittleren Vertikalreihen können oft beide Arten von Wertigkeit vorkommen. Aber es kommt auch vor, daß z. B. das Chlor positiv siebenwertig auftritt, indem es seine sämtlichen sieben äußeren Elektronen abgibt; der Sauerstoff kann auch positiv sechswertig auftreten usw. Atome, die vorzugsweise Elektronen *abgeben* und so positive Ionen bilden, nennt man *elektropositiv*, solche, die bevorzugt Elektronen *aufnehmen* und negative Ionen bilden, *elektronegativ*.

Da die Ionenmoleküle aus positiven und negativen Ionen bestehen, die einen gewissen Abstand voneinander haben, so bilden sie elektrische Dipole und haben von Natur ein *elektrisches Moment*. Ausnahmen bilden Moleküle von besonderer Atomanordnung, wie z. B. das gestreckte Molekül CO₂ (O—C—O auf einer Geraden).

Ein durch Elektronenverlust oder Elektronengewinn in den edelgasähnlichen Zustand versetztes Atom (Ion) verhält sich gegenüber elektrisch neutralen Molekülen chemisch ähnlich träge, wie ein Edelgas selbst. Es wird erst wieder reaktionsfähig, wenn es durch Aufnahme oder Abgabe von Elektronen elektrisch neutral geworden ist. Daher reagieren auch die Ionen in einem Elektrolyten, z. B. die Na-Ionen in einer NaCl-Lösung, erst dann mit dem Wasser, wenn sie an der Elektrode durch Aufnahme eines Elektrons elektrisch neutralisiert worden sind. Das Natrium, das im metallischen Zustand so heftig mit Wasser reagiert, reagiert im Ionenzustand mit dem Wasser nicht.

Die vorstehend gegebene Deutung der Molekülbildung trifft aber nur für eine ziemlich beschränkte Gruppe von Verbindungen zu. Die übrigen Verbindungen, insbesondere die in ihnen wirksamen Kräfte, lassen sich nur auf Grund der neueren Quantenmechanik verstehen, so daß wir hier nicht näher darauf eingehen können und uns auf wenige Andeutungen beschränken müssen. Bei den *homöopolaren* oder *Atommolekülen*, zu denen auch die elementaren Gase H₂, N₂, O₂ usw. gehören, bilden die beteiligten Atome aus ihrer äußeren Elektronenschalen eine gemeinsame, beide Atomrümpfe umhüllende Elektronenhülle. So haben z. B. die beiden Atome des Kohlenoxyds CO zusammen zehn äußere Elektronen. Von diesen bilden wahrscheinlich acht eine innere, zwei eine äußere Elektronenschale um die beiden Atomrümpfe. So entsteht ein Molekül, das in seinem äußeren Aufbau den Atomen der Erdalkalien

(II. Gruppe des periodischen Systems) ähnlich ist. Dafür sprechen auch spektroskopische Gründe. Weil die positiven Ladungen der beiden Atomrümpfe im allgemeinen nicht gleich groß sind und daher der positive und der negative Ladungsschwerpunkt des Moleküls meist nicht zusammenfällt, so haben die Atommoleküle meist auch ein natürliches elektrisches Moment. So trägt z. B. beim CO-Molekül der C-Rest vier, der O-Rest sechs positive Elementarquanten im Überschuß. Bei den Molekülen der elementaren Gase aber sind die Atomrümpfe gleich; sie haben also kein natürliches elektrisches Moment. Die Art ihrer Bildung ist aber die gleiche, wie die der anderen Atommoleküle. So hat das Stickstoffmolekül N_2 , wie das CO-Molekül, 10 den beiden Atomen gemeinsame Elektronen, und es ist wahrscheinlich, daß diese eine gemeinsame Elektronenhülle bilden, die derjenigen des CO-Moleküls recht ähnlich ist. Dafür spricht unter anderem, daß die Spektren des CO- und des N_2 -Moleküls einander stark ähneln.

Auf die gleiche Weise wie die Bindung im Molekül auf die oben geschilderten Weisen erfolgen kann, können auch die Atome in den Kristallen aneinander gebunden sein. Zwar besteht dann keine individuelle Zuordnung bestimmter Atome zueinander, wie im Molekül, doch rührt z. B. die Bindung des Na und des Cl im Steinsalzkrystall grundsätzlich von den gleichen Ursachen her, die die Bindung im NaCl-Molekül bewirken (§ 314 und 365). Es ist daher berechtigt, wenn man einen einheitlichen Kristall sozusagen als ein einziges großes Molekül ansieht.

345. Allgemeines über Linienspektren. Die im kurzwelligen Ultrarot, im Sichtbaren und im Ultraviolett liegenden Linienspektren entstehen ausschließlich durch Quantensprünge in der äußersten Elektronenschale eines Atoms. Man nennt sie *optische Spektren*. Entsprechend einer zuerst von BOHR geäußerten Vermutung spielt bei der Entstehung der Linienspektren ein bestimmtes Elektron, das man als das *Leuchtelektron* des Atoms bezeichnet, die maßgebende Rolle. Im Sinne der BOHRschen Modellvorstellung ist das ein Elektron der äußeren Schale, dessen Bahn eine besonders ausgeprägte Tauchbahn ist (§ 343).

Die Atome der Alkalimetalle, deren Leuchtelektron das einzige Elektron ihrer äußeren Schale ist, sind daher noch bis zu einem gewissen Grade *wasserstoffähnlich* (§ 342), da das Leuchtelektron keiner Beeinflussung durch Elektronen der eigenen Schale unterliegt. Die gemeinsame Wirkung des Kerns mit der Ladung $z e$ und der inneren Elektronenschalen mit der Ladung $-(z-1)e$ ist in roher Näherung der Wirkung eines Wasserstoffkerns mit der Ladung e ähnlich. Daher sind auch die Spektren der Alkalimetalle verhältnismäßig einfach und linienarm (Abb. 571 u. 572). Je größer die Zahl der äußeren Elektronen ist, um so verwickelter und linienreicher werden die Spektren. Die linienreichsten Spektren haben die Elemente der VIII. Gruppe des periodischen Systems, also die Edelgase — mit Ausnahme des einfach gebauten Heliums — und die Elemente der „Triaden“, z. B. das Eisen (Abb. 573).

Die Berechnung der Energiestufen des Leuchtelektrons und damit der Spektraltermine und der Spektrallinien aus einer Vorstellung im Sinne des BOHRschen Modells, wie beim Wasserstoff, ist bei Atomen mit mehr als einem Elektron nicht möglich. Hier liegt eine der Grenzen des Modells. Aber umgekehrt ist es möglich, auf Grund einer Analyse der Spektren die einzelnen Spektralserien empirisch durch Terme T_n darzustellen, aus denen dann mittels der stets gültigen Beziehung $E_n = -T_n h c$ [Gl. (12)] die Energiestufen des Leuchtelektrons berechnet werden können. So liefern die Linienspektren ein unentbehrliches Mittel zur Vertiefung unserer Kenntnis vom Bau und Verhalten der Atome.

Die Terme der Atome mit mehr als einem Elektron sind nicht so einfach wie die des Wasserstoffs. Jedoch kann man die Energie des Leuchtelektrons

und die Terme formal, wie in Gl. (14) (unter Vernachlässigung der Massenkorrektion), durch die Gleichungen

$$E_n = -\frac{R c h z^{*2}}{n^{*2}}, \quad T_n = \frac{R z^{*2}}{n^{*2}}$$

darstellen. n^* ist eine mehr oder weniger komplizierte Funktion der Hauptquantenzahl n , die effektive Hauptquantenzahl. z^* ist die effektive Kernladungszahl, d. h. die Ladung, die das gleiche Feld erzeugen würde, wie es in Wirklichkeit der Kern und die ihn umgebenden Elektronen (außer dem Leuchtelektron) erzeugen. Die einfachsten Terme besitzen die Alkalimetalle, weil ihr Leuchtelektron ihr einziges äußeres Elektron ist. Ihre effektive Kernladungszahl ist $z^* = 1$. Man unterscheidet bei ihnen nach KAYSER und RUNGE und nach

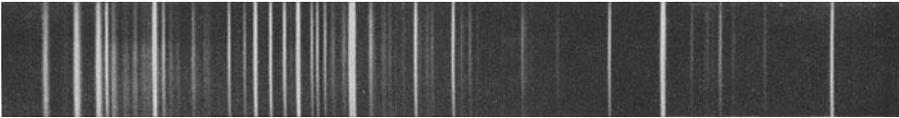


Abb. 571. Emissionsspektrum des Kaliums zwischen 3000 und 5000 Å. Aufnahme von FOOTE und MOHLER.

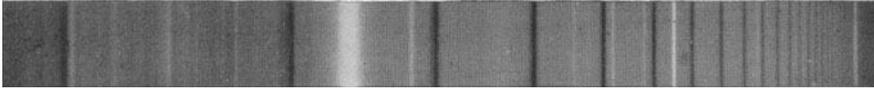


Abb. 572. Absorptionsspektrum des Natriums. Hauptserie zwischen 2400 und 2860 Å. Aufnahme von FOOTE und MOHLER.



Abb. 573. Emissionsspektrum des Eisens zwischen 2200 und 5000 Å. Aufnahme von W. GROTRIAN.

RYDBERG (1889) die Hauptserie, die 1. und 2. Nebenserie, die BERGMANN-Serie und weitere Serien. Ihre Terme haben die Gestalt $R/(n+s)^2$, $R/(n+p)^2$, $R/(n+d)^2$, $R/(n+f)^2$ usw. Die Zahlen s , p , d , f usw. (RYDBERG-Korrektionen) sind bei den einzelnen Alkalimetallen verschieden und liegen zwischen -1 und $+1$. Die Formeln der ersten Serien lauten:

$$\begin{aligned} \text{Hauptserie:} \quad N &= \frac{R}{(1+s)^2} - \frac{R}{(n+p)^2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\ \text{1. Nebenserie:} \quad N &= \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(n+d)^2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \\ \text{2. Nebenserie:} \quad N &= \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(n+s)^2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\ \text{BERGMANN-Serie:} \quad N &= \frac{R}{(3+d)^2} - \frac{R}{(n+f)^2}, \quad n = 4, 5, 6, \dots \end{aligned}$$

Wieder ist der erste Term jeder Serie konstant, der zweite enthält die laufende Quantenzahl n . Der konstante Term der Hauptserie liefert die Energie des Leuchtelektrons im Grundzustand, $E_1 = -Rhc/(1+s)^2$. Alle Serien haben bei $n = \infty$ eine endliche Seriegrenze, deren Wellenzahl gleich dem ersten, konstanten Term der Serienformel ist. Abb. 574 zeigt das Schema der Haupt- und der Nebenserie des Kaliums. Die Linien sind sämtlich doppelt (Feinstruktur). Wegen der Gleichheit der konstanten ersten Terme fallen die Seriegrenzen der beiden Nebenserien zusammen.

Da sich die Atome für gewöhnlich in ihrem Grundzustand befinden, so kann das Leuchtelektron bei unangeregten Atomen nur Quantensprünge ausführen, die im Grundzustand beginnen. Daher absorbieren die Atome in ihrem

gewöhnlichen Zustand auch nicht etwa alle Spektrallinien, die sie *überhaupt* aussenden können, sondern nur diejenigen ihrer Hauptserie, bei deren Emission ja die Quantensprünge im Grundzustand enden. Das ist kein Widerspruch gegen das KIRCHHOFFSCHE Gesetz (§ 319). Denn angeregte Atome können auch Linien höherer Serien absorbieren, die sie ja ebenfalls emittieren können.

Wir haben bisher nur von den Spektren der normalen, elektrisch neutralen, Atome gesprochen, die man *Bogenspektren* nennt, weil sie auch im Lichtbogen entstehen. (Man erzeugt sie heute meist in der Glimmentladung.) GOLDSTEIN hat entdeckt, daß es noch andere Spektren gibt (von ihm Grundspektren genannt), die unter anderem im elektrischen Funken erzeugt werden können und daher *Funkenspektren* heißen. Sie rühren von einfach oder mehrfach ionisierten Atomen her (1., 2. Funkenspektrum usw.), die also ein oder mehrere Elektronen verloren haben, sind also Ionenspektren. Hat ein Atom ein Elektron seiner äußeren Schale verloren, so ist es nach dem Aufbauprinzip in vielen Fällen

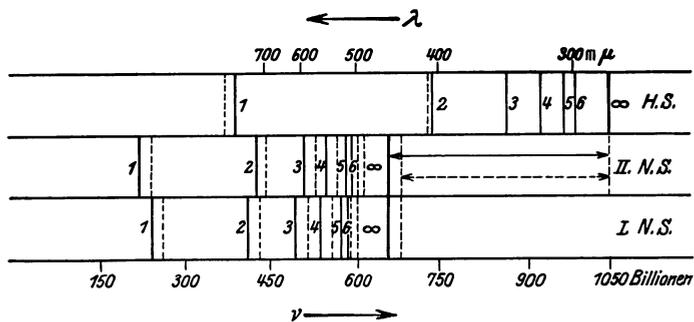


Abb. 574. Schema der Hauptserie und der beiden Nebenserien des Kaliums.

seinem Vorgänger im periodischen System im Bau seiner äußeren Schale ähnlich, hat es zwei Elektronen verloren, so ähnelt es in vielen Fällen dem um zwei Stellen vorhergehenden Atom. So ist z. B. das zweifach ionisierte Ca^{++} (20) dem einfach ionisierten K^+ (19) und dieses wieder dem normalen Ne (18) ähnlich. So ist insbesondere auch das einfach ionisierte Heliumatom He^+ dem Wasserstoffatom H ähnlich. Diese Ähnlichkeit bewirkt, daß in vielen Fällen das 1. Funkenspektrum eines Elements dem Bogenspektrum seines Vorgängers, das 2. Funkenspektrum eines Elements dem 1. Funkenspektrum seines Vorgängers usw. ähnlich ist, zwar nicht in allen Einzelheiten, vor allem nicht in den absoluten Wellenzahlen, wohl aber in seiner allgemeinen Struktur und in der Feinstruktur usw. seiner Linien (*spektroskopischer Verschiebungssatz*). Man sieht leicht ein, daß dieses Gesetz nur deshalb nicht allgemein gilt, weil in vielen Fällen wegen der Auffüllung zurückgestellter Untergruppen innerer Schalen zwei oder mehrere aufeinander folgende Elemente gleich viele Elektronen in ihrer äußeren Schale haben, so daß dann z. B. das einfach ionisierte Atom seinem neutralen Vorgänger im periodischen System nicht ähnlich ist.

An den Oberflächen der Fixsterne sind die Atome durch die hohe Temperatur zu einem großen Teil ionisiert (§ 346). Daher spielen z. B. gewisse Linien des 1. Funkenspektrums des Kaliums (*H-* und *K-Linie*) eine wichtige Rolle in der Astrophysik. Zahlreiche Fixsterne zeigen das wasserstoffähnliche Funkenspektrum des Heliums (*PICKERING-Serie*). Das Wasserstoffatom hat natürlich kein Funkenspektrum, da es nach Verlust seines einen Elektrons jeder Strahlungsmöglichkeit beraubt ist. Daher ist in den Spektren der heißesten Fixsterne, in denen Wasserstoff zwar sicher in großen Mengen vorhanden, aber vollkommen ionisiert ist, kein Wasserstoff erkennbar.

Schon vor der BOHRschen Atomtheorie hat RITZ entdeckt, daß in sehr zahlreichen Fällen die Wellenzahl einer Spektrallinie gleich der Differenz der Wellenzahlen zweier Linien einer anderen Serie des gleichen Elements ist (*RITZsches Kombinationsprinzip*). Das wird jetzt ohne weiteres verständlich. Es seien $E_a > E_b > E_c$ drei verschiedene Energiestufen eines Atoms. Dann liefern die drei möglichen Übergänge zwischen ihnen die drei Wellenzahlen $N_1 = E_a/hc - E_b/hc$, $N_2 = E_a/hc - E_c/hc$ und $N_3 = E_b/hc - E_c/hc = N_2 - N_1$. Dabei gehören N_1 und N_2 der gleichen Serie an. Tatsächlich treten nicht alle hiernach zu erwartenden Kombinationen wirklich als Spektrallinien auf. Gewisse von ihnen sind auf Grund von *Auswahlregeln* ausgeschlossen („verbotene“ Linien); jedenfalls kommen die ihnen entsprechenden Übergänge unter gewöhnlichen Umständen nicht vor. Durch äußere Felder können auch sie herbeigeführt werden.

Bei den Atomen mit mehr als einem äußeren Elektron treten mehrere Termssysteme auf, welche für gewöhnlich nicht miteinander kombinieren (bei Atomen mit zwei äußeren Elektronen Ortho- und Paraterme genannt).

346. Anregung und Ionisierung von Atomen. Der normale Zustand eines Atoms ist, als Quantenzustand kleinster Energie, sein Grundzustand. Denn es kann durch Energieabgabe (Lichtaussendung) von selbst aus jedem höheren Quantenzustand dorthin gelangen. Es kann aber nur durch Energiezufuhr von außen aus ihm entfernt werden. Ein nicht im Grundzustand befindliches Atom nennt man ein *angeregtes Atom*. Die zu einer Anregung erforderliche Energie kann einem Atom auf verschiedene Weise zugeführt werden. Es kann durch *Absorption eines Lichtquants* angeregt werden, dessen Energie genau der Energiedifferenz einer seiner Energiestufen gegen den Grundzustand entspricht, also durch Einstrahlung einer Linie seiner Hauptserie. Es kann aber auch mechanisch angeregt werden. Bei genügend hoher Temperatur kann bei den Zusammenstößen der Moleküle soviel Energie auf ein Atom übertragen werden, daß eine Anregung erfolgt. Darauf beruht das *thermische Leuchten* heißer, fester und flüssiger Körper. Dabei wird aber kein Linienspektrum ausgesandt, sondern ein kontinuierliches Spektrum (§ 315). Das kommt daher, daß die Energiestufen der einzelnen Elektronen durch die nahe Nachbarschaft der Atome in den festen und flüssigen Stoffen auf alle möglichen Weisen verändert sind, so daß auch die Differenzen der Energiestufen und damit die Energie $h\nu$ der Lichtquanten alle möglichen Werte in stetiger Folge annehmen können. Aus diesem Grunde zeigt ein kontinuierliches Spektrum auch keinerlei Züge, die für den leuchtenden Stoff charakteristisch wären.

Eine Anregung der Atome kann ferner durch Zusammenstoß eines schnellen Elektrons mit dem Atom, durch *Elektronenstoß*, erfolgen. Ist E_g die Energie des Atoms im Grundzustand, E_n diejenige in einem angeregten Zustand, so wird die Anregung dieses Zustandes dann erfolgen können, wenn das stoßende Elektron mindestens die Energie $E_n - E_g$ besitzt. Die Mindestenergie, die zur Anregung eines Atoms erforderlich ist, ist gleich der Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und der zweiten Energiestufe des Atoms. Ist die dem Atom zugeführte Energie mindestens so groß wie die Energie, die dem mit hc multiplizierten konstanten Term seiner Hauptserie entspricht (§ 345), so wird das Atom aus dem Grundzustand bis auf den Quantenzustand mit $n = \infty$ gehoben. Das Leuchtelektron wird vom Atom abgetrennt, das Atom *ionisiert*. Das ist, sofern die Ionisierung durch Absorption eines Lichtquants erfolgt, ein *lichtelektrischer Effekt* in seiner einfachsten Form. Ist das Termschema des Atoms bekannt, so kann man seine Energiestufen und die zur Anregung und Ionisierung erforderlichen Energien berechnen.

Die Anregung von Atomen durch Elektronenstoß ist von J. FRANCK und G. HERTZ (1913) in einer für die Entwicklung der Atomtheorie grundlegenden

Arbeit — noch unabhängig von der BOHRschen Theorie — zuerst beim Quecksilberdampf nachgewiesen worden. Ein Elektron hat nach Durchlaufen einer Spannung U die Energie Ue . Es kommt also darauf an, festzustellen, bei welchen Spannungen eine Anregung bzw. eine Ionisierung der Atome einsetzt. Abb. 575 zeigt schematisch die Versuchsanordnung von FRANCK und HERTZ, wie

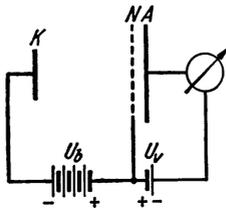


Abb. 575. Schema der Elektronenstoßversuche von FRANCK und HERTZ.

sie ähnlich schon LENARD beim lichtelektrischen Effekt verwendete. Von einer Glühkathode K gehen Elektronen aus, die durch eine veränderliche Spannung U_b in Richtung auf ein Drahtnetz N beschleunigt werden. Hinter diesem liegt eine Auffangelektrode A , die mit einem Galvanometer G verbunden ist. Zwischen N und A liegt eine Spannung U_v von etwa 0,5 Volt, die die durch das Netz hindurchgegangenen Elektronen verzögert. U_b ist stets größer als U_v . Daher können die durch das Netz hindurchtretenden Elektronen gegen die Spannung U_v an die Elektrode A gelangen, sofern sie auf ihrem Wege bis zum Netz in dem den Raum zwischen K und N erfüllenden Quecksilberdampf keine Energieverluste erleiden. Das Galvanometer zeigt dann einen Strom an, der mit der Spannung U_b wächst, weil um so mehr Elektronen durch das Netz (wie durch das Gitter einer Verstärkerröhre) hindurchtreten, je schneller sie sind.

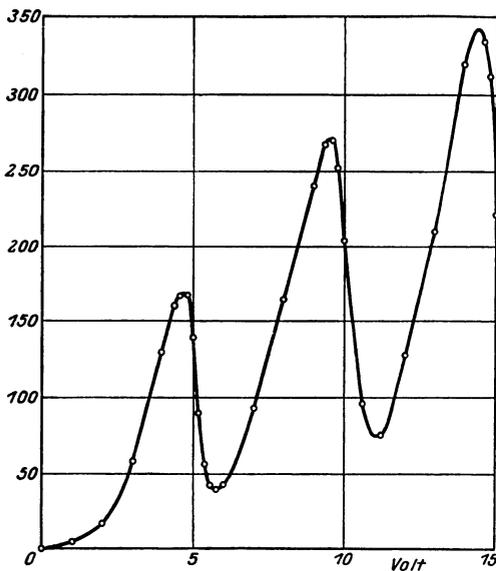


Abb. 576. Messung der Anregungsspannung von Quecksilber. (Nach FRANCK und HERTZ.)

Es erwies sich nun, daß die Zusammenstöße der Elektronen mit den Quecksilberatomen bei kleiner Spannung U_b , also kleiner Elektronengeschwindigkeit, zunächst *vollkommen elastisch*, ohne jeden Energieverlust, verlaufen. Der Galvanometerstrom steigt mit wachsendem U_b zunächst an. Bei einer bestimmten Spannung U_b aber wird er plötzlich sehr viel kleiner. Diese Spannung beträgt beim Quecksilber nahezu 5 Volt (Abb. 576). Die Elektronen müssen nunmehr einen Energieverlust erlitten haben, da sie zum großen Teil die verzögernde Spannung U_v nicht mehr überwinden können. Ihre Zusammenstöße mit den Quecksilberatomen sind plötzlich *vollkommen unelastisch* geworden. Mit weiter wachsender Spannung U_b wächst auch der Strom wieder, um bei der doppelten Spannung, also bei nahezu 10 Volt, wieder plötzlich abzufallen, und das gleiche wiederholt sich bei weiteren Spannungsschritten von nahezu 5 Volt.

Diese Spannung von etwa 5 Volt ist die *Anregungsspannung* des Quecksilberatoms. Sie erteilt den stoßenden Elektronen die nötige Energie, um das Atom aus seinem Grundzustand auf die nächsthöhere Energiestufe zu heben. (Der Rückkehr in den Grundzustand entspricht dann die Ausstrahlung der ersten Linie der Hauptserie). Dabei verliert das stoßende Elektron seine Energie vollständig. Damit es bei einem weiteren Stoß erneut anregen kann, muß ihm wiederum die gleiche Energie zugeführt werden. Das wird in dem Augenblick möglich, wo die Spannung U_b gleich der doppelten Anregungsspannung ge-

worden ist, so daß die Elektronen die Anregungsspannung auf ihrem Wege zum Netz zweimal durchlaufen. Daher rührt das plötzliche erneute Absinken der Stromstärke bei der doppelten Anregungsspannung. Das gleiche wiederholt sich entsprechend jedesmal, wenn die Spannung U_b ein ganzzahliges Vielfaches der Anregungsspannung geworden ist. Auf die gleiche Weise können auch die zur Anregung höherer Quantenzustände nötigen Energien gemessen werden. Die so ermittelten Anregungsspannungen des Quecksilbers stimmen mit den aus dem Termschema berechneten Werten sehr gut überein.

Bei ausreichender Steigerung der Spannung U_b gelangt man zu der Elektronenenergie, die zur Ionisation des Atoms ausreicht. Diese Spannung heißt die *Ionisierungsspannung*. Sie beträgt beim Quecksilber 10,39 Volt. Zu einer Ionisation kommt es aber nur dann, wenn die freie Weglänge im Gase so groß ist, daß die Elektronen die zur Ionisation nötige Energie längs einer freien Weglänge erlangen können. Andernfalls verlieren sie ihre Energie vorzeitig durch Anregungsvorgänge. Tabelle 36 gibt die Zahlenwerte einiger Anregungs- und Ionisierungsspannungen.

Tabelle 36. Anregungsspannungen U_a und Ionisierungsspannungen U_i .

Die Elektronenstoßversuche liefern also ein Mittel, um die Energiestufen der Atome und damit ihr Termschema — wenigstens die tiefsten Terme — zu be-

	U_a Volt	U_i Volt		U_a Volt	U_i Volt
Wasserstoff . . .	10,15	13,5	Kalium	1,6	4,3
Helium	19,8	24,6	Magnesium . .	2,7	7,6
Natrium	2,1	5,1	Thallium . . .	0,9	6,0

stimmen. Ihre Ergebnisse sind in bester Übereinstimmung mit den spektrometrisch ermittelten Werten. Das liefert der BOHRschen Theorie eine außerordentliche Stütze. Die Existenz einer Ionisierungsspannung, also einer bestimmten, zur Abtrennung eines Elektrons vom Atom nötigen Arbeit (LENARDS sog. 11-Volt-Grenze), ist natürlich auch nach der klassischen Theorie als selbstverständlich zu erwarten. Hingegen ist die Existenz bestimmter Anregungsspannungen und der Zusammenhang der Ionisierungs- und Anregungsspannungen mit den Spektraltermen eine Tatsache, die nur auf Grund der der klassischen Theorie völlig fremden quantenhaften Energiestufen, eines charakteristischen Zuges der Quantentheorie, verständlich wird.

Im Anschluß an die Elektronenstoßversuche hat sich in der Atomphysik die Gewohnheit eingebürgert, atomare Energien E durch die entsprechende, in Volt gemessene Spannung U auszudrücken. Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung $E = U\varepsilon$ ($\varepsilon =$ Elementarquantum). Man rechnet also in der Energieeinheit „1 Elektronenvolt“ (eV). Das ist die Energie, die ein Elektron beim freien Durchlaufen einer Spannung von 1 Volt gewinnt. So beträgt z. B. die Ionisationsarbeit des Quecksilberatoms 10,39 eV. Da $\varepsilon = 1,591 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, so ist

$$1 \text{ eV} = 1,591 \cdot 10^{-19} \text{ Wattsec} = 1,591 \cdot 10^{-12} \text{ erg.}$$

Etwas nachlässig sagt man manchmal auch, daß ein Elektron eine „Geschwindigkeit von U Volt“ hat, wenn es die Spannung U frei durchlaufen, also die kinetische Energie $\mu v^2/2 = U\varepsilon$ hat. Tatsächlich beträgt seine Geschwindigkeit dann $\sqrt{2U\varepsilon/\mu} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. (Vgl. die Energieumrechnungstabelle auf S. VI.)

Die für die Abtrennung eines zweiten Elektrons nötige Arbeit ist natürlich erheblich größer als die zur ersten Ionisation erforderliche, und sie steigt mit jeder weiteren Ionisierungsstufe. Bei den Temperaturen im Innern der Fixsterne (bis zu 20 000 000°) ist aber die thermische Molekularenergie und auch

die Strahlungsdichte so groß, daß durch die Zusammenstöße und die Einwirkung der Strahlung nicht nur die Moleküle sämtlich zu Atomen dissoziiert sind (§ 350), sondern auch die Atome zu einem sehr hohen Grade ionisiert sind. Die leichteren Atome bestehen nur noch aus nackten Kernen. Man kann berechnen, daß die Eisenatome im Innern der Sonne von ihren 26 Elektronen bereits 22 verloren haben müssen.

347. Röntgenspektren. Im Gegensatz zu den optischen Spektren entstehen die Röntgenspektren durch Quantensprünge zwischen den inneren Elektronenschalen. Zu ihrer Entstehung ist es nötig, daß ein Elektron einer inneren Schale z. B. durch Elektronenstoß aus der Schale entfernt wird. Da alle anderen Schalen des Atoms mit soviel Elektronen besetzt sind, wie es die Art des Atoms gemäß Tabelle 35 zuläßt, so muß es ganz aus dem Atom hinausbefördert werden. (Die Besetzung eines Platzes in einer noch unvollständigen oder

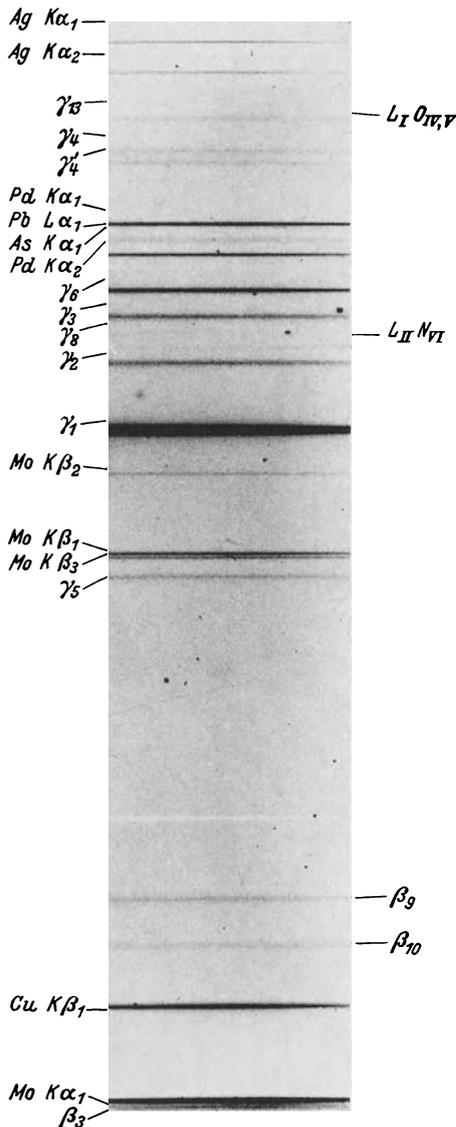


Abb. 577. L-Spektrum des Urans. Nach CLAËSSON. (Die mit Elementensymbolen bezeichneten Linien gehören anderen Elementen an.)

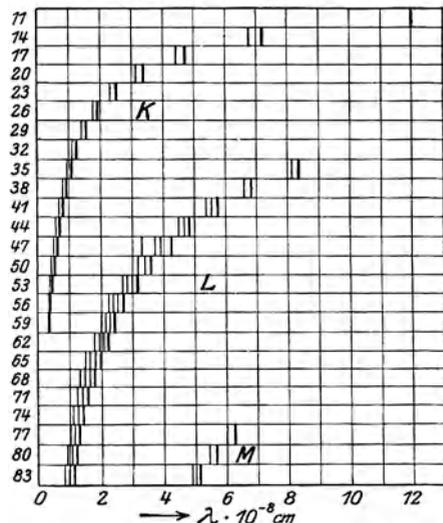


Abb. 578. Schema der K-, L- und M-Serie in Abhängigkeit von der Ordnungszahl.

ganz unbesetzten Untergruppe einer inneren Schale durch das Elektron ist auch nicht möglich.) Das auf diese Weise gestörte Gleichgewicht des Atoms kann sich dann auf verschiedene Weise wieder herstellen. Entweder fällt ein Elektron von außen her wieder unmittelbar in die frei gewordene Stelle zurück, oder ein Elektron einer weiter außen liegenden Schale fällt dorthin

und wird seinerseits durch ein von außen, oder aus einer noch weiter außen liegenden Schale kommendes Elektron ersetzt. Je mehr Elektronenschalen das Atom besitzt, um so mannigfaltiger sind die Möglichkeiten, das Gleichgewicht wieder herzustellen. Jeder Quantensprung eines Elektrons von außen auf eine unvollständig gewordene Schale oder von einer Schale in eine andere führt zur Aussendung eines Lichtquants $h\nu$, das die bei dem Quantensprung freiwerdende Energie mit sich führt. Da die inneren Elektronen durch den Kern weit stärker gebunden sind, als die äußeren, so sind die Energieunterschiede der Elektronen im Anfangs- und Endzustand viel größer, als bei den Quantensprüngen der äußeren Elektronen. Daher sind auch die Lichtquanten $h\nu$ viel größer als bei den optischen Spektren; die Röntgenstrahlen haben eine sehr große Schwingungszahl, eine sehr kleine Wellenlänge (vgl. § 308, Tabelle 31).

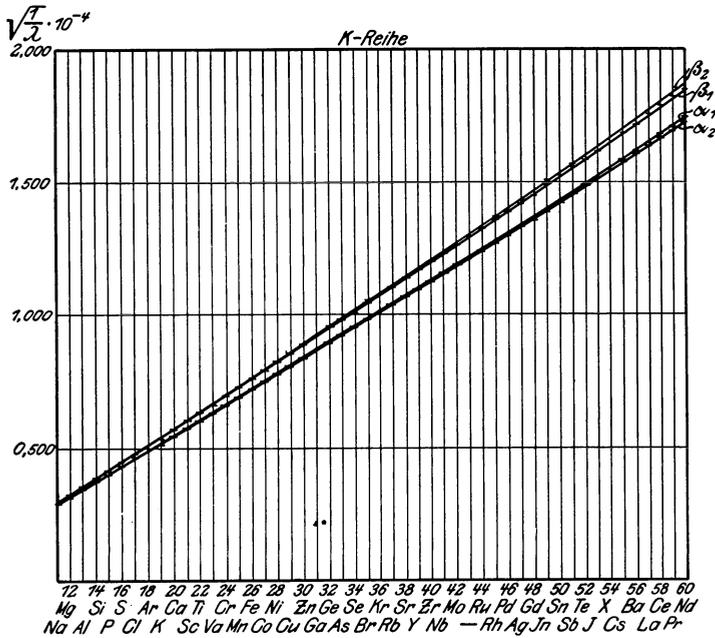


Abb. 579. $\sqrt{1/\lambda}$ in der K-Serie als Funktion der Ordnungszahl (MOSELEYSCHES GESETZ).

Man ordnet die Röntgenspektren nach dem gleichen Gesichtspunkt wie die optischen Spektren in Serien. Die Quantensprünge, die auf der gleichen Schale enden, bilden eine Serie. So liefern die auf der K-Schale endenden Sprünge die K-Serie, die auf der L-Schale endenden die L-Serie usw. Die Elektronen der K-Schale sind am stärksten gebunden. Die Linien der K-Serie entsprechen daher den größten Energiedifferenzen, haben also die kleinsten Wellenlängen. Die K-Strahlung ist die kurzwelligste (durchdringendste, härteste) Röntgenstrahlung eines Atoms. Die Bindungsenergie der Elektronen nimmt von innen nach außen ab und damit die Wellenlänge der betreffenden Serien zu. Natürlich kann eine bestimmte Röntgenserie nur dann auftreten, wenn bei dem betreffenden Atom die entsprechende Schale bereits als eine innere Schale zum mindesten begonnen ist. Die Zahl der Röntgenserien ist daher um so größer, je mehr innere Schalen ein Atom besitzt. So haben die Elemente der 1. Periode überhaupt kein Röntgenspektrum, bzw. es ist identisch mit ihrem optischen Spektrum, die der 2. Horizontalreihe haben nur eine K-Serie. Die L-Serie beginnt mit der 3. Horizontalreihe usw. Abb. 577 zeigt die L-Serie des Urans. Man erkennt aus ihr, auf welcher hohen Stufe die Spektrometrie der Röntgenstrahlen steht.

Wie MOSELEY (1913) entdeckt hat, zeigen die Röntgenspektren durchaus nicht die ausgesprochene Periodizität der Elemente, die sich in den optischen Spektren so deutlich bemerkbar macht. Vielmehr verschieben sich die Linien entsprechender Serien mit steigender Ordnungszahl weitgehend regelmäßig nach kleineren Wellenlängen, also nach größeren Wellenzahlen (Schwingungszahlen, Abb. 578). MOSELEY fand, daß die Wurzeln der Wellenzahlen $N = 1/\lambda$ homologer Serienlinien der Ordnungszahl z der Atome annähernd proportional

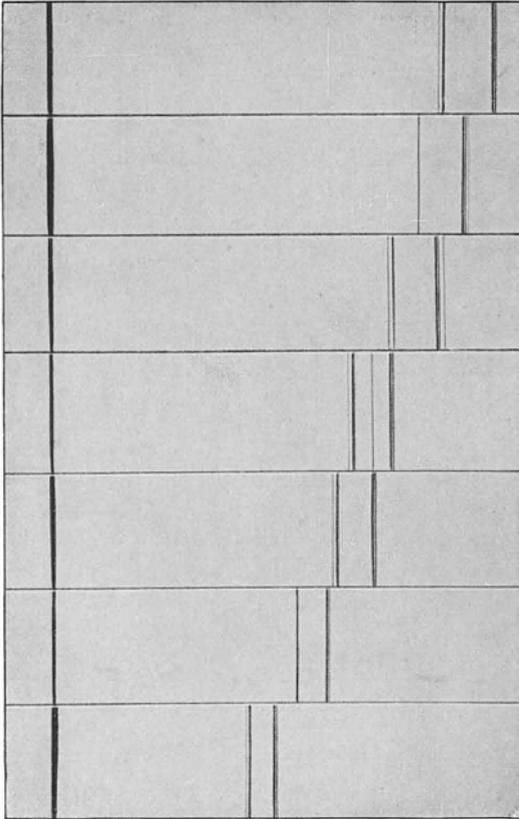


Abb. 580. K -Serien zwischen As (33) und Rh (45).

sind. Besonders genau gilt dies in der K -Serie. Abb. 579 zeigt das Ergebnis von Messungen an vier mit α_1 , α_2 , β_1 , β_2 bezeichneten Linien der K -Serie. Dort ist das MOSELEYSche Gesetz in der Tat vortrefflich erfüllt. Abb. 580 zeigt Aufnahmen der K -Serie einiger aufeinander folgender Elemente, die die allgemeine regelmäßige Verschiebung der Wellenlängen deutlich erkennen lassen.

Das — kurz vor der BOHRschen Theorie entdeckte — MOSELEYSche Gesetz läßt sich aus dieser Theorie sehr einfach begründen. Die beiden Elektronen der K -Schale unterliegen ganz überwiegend der Wirkung der Kernladung $z\varepsilon$. Doch ist auch ein kleiner Einfluß des zweiten Elektrons der K -Schale vorhanden, der dem Einfluß des Kerns entgegenwirkt. Es verhält sich etwa so, als betrage die Kernladung nicht $z\varepsilon$, sondern $(z-s)\varepsilon$, wobei die Zahl s , die *Abschirmungszahl*, nahe an 1 liegt, so daß bei den höheren Elementen der relative Unterschied zwischen $z\varepsilon$ und $(z-s)\varepsilon$ recht klein ist. Die Energie der

Elektronen und die Röntgenterme der K -Schale sind daher, da es sich um einen Fall von Wasserstoffähnlichkeit handelt, nach Gl. (14) $(z-s)^2$ proportional. Der zweite Term jeder Linie ist, wegen der sehr viel kleineren Bindungsenergie in den äußeren Schalen, sehr viel kleiner als der erste, so daß die Wellenzahl ganz überwiegend durch den ersten konstanten K -Term bestimmt wird. Daher ist auch mit sehr großer Näherung $\sqrt{N} = \sqrt{1/\lambda} \sim z-s$, steigt also, wenn $s \ll z$, praktisch linear mit z an. Bei den übrigen Serien liegen die Verhältnisse zwar nicht ganz so einfach, aber doch ähnlich.

Auf Grund des MOSELEYSchen Gesetzes lassen sich die Röntgenspektren noch unbekannter Elemente berechnen, was bei den optischen Spektren bisher nicht möglich ist. Auf diese Weise konnten durch planmäßige Untersuchung der in Frage kommenden Mineralien die bis dahin unbekanntesten Elemente Masurium (43), Hafnium (72) und Rhenium (75) entdeckt und dargestellt werden. Über-

haupt ist eine *Spektralanalyse mit Röntgenstrahlen* ebenso möglich, wie mit Hilfe der optischen Spektren.

Auch die Röntgenspektren können durch Terme dargestellt werden, und diese liefern uns, genau wie die Terme der optischen Spektren die Energiestufen in der äußersten Schale enthüllen, eine Kenntnis von den Energiestufen der inneren Elektronen. Feinere Einzelheiten ergeben sich aus der Multiplettstruktur der Röntgenlinien, die auf einer Aufspaltung der einzelnen Terme beruht.

348. Rotationsschwingungsspektren. Auch die *Rotationen der Moleküle* um ihren Schwerpunkt (§ 101) gehorchen, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, Quantengesetzen. Ein Molekül hat nur bestimmte Energiestufen der Rotationsenergie, und es kann nur durch einen quantenhaften Sprung von einer Stufe auf eine andere übergehen. Bei den Ionenmolekülen, also denjenigen, die ein elektrisches Moment haben (§ 346), erfolgt der Sprung von höherer zu niedrigerer Energie unter Aussendung von Strahlung. Der Sprung von niedrigerer zu höherer Energie kann bei ihnen durch Absorption von Strahlung bewirkt werden. Die Differenzen der einzelnen Energiestufen sind sehr klein, und da auch hier $h\nu = E_n - E_m$, so liegen die hier in Frage kommenden Schwingungszahlen ν im äußersten Ultrarot. Wegen ihrer geringen Intensität kann eine Strahlung in diesem Bereich nicht nachgewiesen werden. Hingegen kann die den Hebungen auf

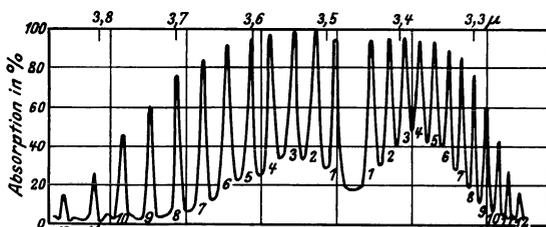


Abb. 58r. Rotationsschwingungsspektrum des HCl zwischen 3,2 und 3,9 μ . (Nach Imsz.)

eine höhere Energiestufe entsprechende Absorption von Strahlung in einigen wenigen Fällen, z. B. beim Wasserdampf, beobachtet werden.

Ferner regeln sich auch die *Atomschwingungen*, d. h. die Schwingungen der Atome eines Moleküls um ihre Gleichgewichtslagen im Molekül, nach Quantengesetzen. Ein Molekül besitzt also nur bestimmte Energiestufen der Schwingungsenergie. Bei den Ionenmolekülen führt ein Sprung von einer höheren auf eine niedrigere Energiestufe zur Aussendung von Strahlung. Die Hebung auf eine höhere Energiestufe kann bei ihnen durch Absorption von Strahlung bewirkt werden. Die Energiedifferenzen sind größer als bei der Rotation. Die Schwingungszahlen liegen zwar auch noch im langwelligen Ultrarot, aber in vielen Fällen in einem der Beobachtung der Absorption bereits recht gut zugänglichen Bereich.

Ein Quantensprung der Atomschwingung ist stets mit einem Quantensprung der Rotation verbunden. Die bei einem solchen doppelten Quantensprung freiwerdende Energie, oder die Energie, die dem Molekül zur Erzwingung des umgekehrten Sprunges zugeführt werden muß (z. B. durch Absorption eines Lichtquants), ist gleich der Summe der diesen beiden Sprüngen entsprechenden Energien. Daher kommt die Quantenhaftigkeit eines solchen Vorganges bei den *Rotationsschwingungsspektren* in doppelter Weise ins Spiel. Die möglichen Quantensprünge bilden eine doppelte Mannigfaltigkeit, so daß die Spektren äußerst linienreich sind. Der gleiche Quantensprung der Atomschwingung kann mit vielen verschiedenen Sprüngen der Rotation gekoppelt sein und umgekehrt.

Abb. 58r zeigt ein mit Reflexionsgitter und Thermosäule aufgenommenes Rotationsschwingungsspektrum des Chlorwasserstoffes in Absorption. Jedes Maximum entspricht einer Absorptionslinie des HCl. Bei jeder Linie handelt es sich um den gleichen Sprung der Atomschwingung, der aber jedesmal mit

einem anderen Sprung der Rotation gekoppelt ist. Auffallend ist die Lücke zwischen den beiden mit 1 bezeichneten Linien. Sie rührt daher, daß ein Zustand, bei dem das Molekül nicht rotiert, nicht vorkommt. Abb. 582 zeigt einen anderen Teil des HCl-Spektrums in viel stärkerer Auflösung. Auf Einzelheiten dieser Abbildung kommen wir zurück (§ 358).

Die Analyse der Rotationsschwingungsspektren liefert die Energiestufen des Moleküls in seinen verschiedenen Rotations- und Schwingungszuständen und erlaubt, was besonders wichtig ist, das Trägheitsmoment des Moleküls und

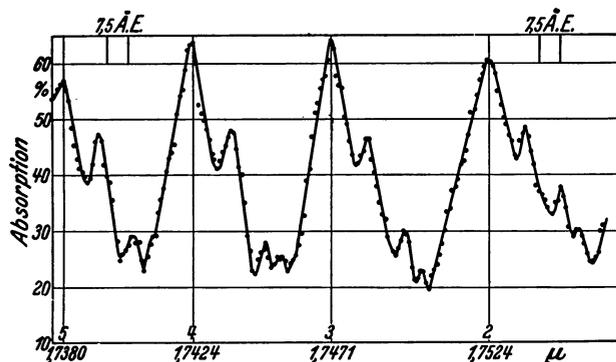


Abb. 582. Rotationsschwingungsspektrum des HCl zwischen 1,738 und 1,755 μ . (Nach HETTNER und BÖHME.)

daraus — wenigstens bei den zweiatomigen Molekülen — den Abstand der Atome zu berechnen (§ 349).

349. Bandenspektren.

An die Stelle der Linienspektren der einzelnen Atome und der einatomigen Moleküle treten bei den mehratomigen Molekülen die Bandenspektren. Auch sie entstehen durch Quantensprünge eines Leuchtelektrons (§ 345) in der äußeren Elektronenschale des Moleküls. Bei

den Ionenmolekülen kann eine mit Lichtemission oder -absorption verbundene Änderung des Schwingungs- und Rotationszustandes *allein* erfolgen; das liefert die Rotationsschwingungsspektren. Bei den Atomolekülen hingegen gibt es keine mit Lichtemission oder -absorption verknüpfte Änderung dieser Zustände allein. Die Quantensprünge der Atomschwingung und der Rotation sind bei ihnen nur dann an der Lichtemission oder -absorption beteiligt, wenn sie gleichzeitig mit einem Quantensprung des Leuchtelektrons erfolgen. Ein Quantensprung des Leuchtelektrons ist aber bei allen Molekülen mit einem Quantensprung der Atomschwingung und der Rotation verbunden. Für die Energie und daher auch die Wellenlänge des ausgesandten oder absorbierten Lichts ist stets die *gesamte* Energieänderung des Moleküls bei einem solchen dreifachen Quantensprung maßgebend. Die in Frage kommenden Energiestufen und die zugehörigen Terme bilden also eine dreifache Mannigfaltigkeit, während die Energiestufen einzelner Atome nur eine einfache Mannigfaltigkeit bilden. Daher ist der Linienreichtum der Bandenspektren außerordentlich viel größer als der der Linienspektren. Den weitaus größten Anteil der Energie liefert der Quantensprung des Leuchtelektrons, den weitaus geringsten der Quantensprung der Rotation. Daher liegen die Bandenspektren im gleichen Wellenlängenbereich wie die optischen Linienspektren, also im kurzwelligen Ultrarot, im Sichtbaren und im Ultraviolett.

Es seien E_e und $E'_e < E_e$ zwei Energiestufen des Leuchtelektrons, E_s und E'_s zwei Energiestufen der Atomschwingung, E_r und E'_r zwei Energiestufen der Rotation, wobei E'_s bzw. E'_r größer oder kleiner als E_s bzw. E_r sein kann. Auf alle Fälle aber ist $E_e \gg E_s \gg E_r$. Dann ist die Schwingungszahl der bei dem entsprechenden Quantensprung ausgesandte Strahlung durch die Gleichung

$$h\nu = (E_e - E'_e) + (E_s - E'_s) + (E_r - E'_r) \quad (15)$$

gegeben. Der Quantensprung des Elektrons allein würde eine einzige Spektrallinie ergeben, deren Schwingungszahl durch das erste Glied von Gl. (15) gegeben

ist. Gleichzeitig mit diesem Quantensprung kommen aber noch viele verschiedene, durch die verschiedenen möglichen Beträge des zweiten Gliedes bedingte Quantensprünge der Atomschwingung vor. Die eine Linie spaltet also in viele Einzellinien auf. Da nun aber noch die vielen durch das dritte Glied bedingten Quantensprünge der Rotation hinzukommen, so spaltet jede

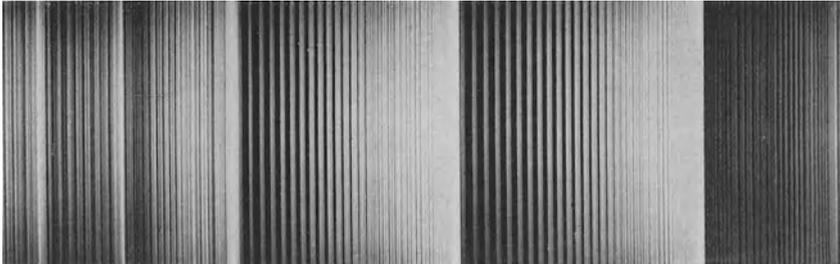


Abb. 583. Ausschnitt aus einer Bande des Stickstoffs.

dieser Einzellinien noch einmal in sehr viele Linien auf. Auf diese Weise entspricht einem und demselben Elektronensprung eine überaus linienreiche *Bande*, die auf Grund der Atomschwingungssprünge aus vielen *Teilbanden* besteht, die ihrerseits wieder auf Grund der Rotationsprünge aus sehr vielen, sehr nahe benachbarten Linien bestehen. Abb. 583 zeigt einen kleinen Ausschnitt aus dem Bandenspektrum des Stickstoffmoleküls N_2 , nämlich sechs Teilbanden einer viel längeren Bande. Die Linien häufen sich an dem einen Ende der Teilbanden. (Das hat einen ganz anderen Grund als die sehr ähnlich aussehende Häufung an den Seriegrenzen der Linienspektren).

Eine zur Kenntnis der Energiestufen (Terme) eines Moleküls führende Analyse der Bandenspektren ist für die Erforschung des Molekülbaues ebenso wichtig, wie die Analyse der Linienspektren für die Atome. Man kann aus ihnen weit leichter als aus den nur in seltenen Fällen experimentell zugänglichen Rotations- schwingungsspektren die Energiestufen E ,

der Rotation ermitteln, die wiederum das Trägheitsmoment des betreffenden Moleküls zu berechnen gestatten. Bei den zweiatomigen Molekülen kann man daraus weiterhin — da die Atommassen m_1 und m_2 bekannt sind — den Atomabstand a berechnen. Nach § 19 und 36 ist das Trägheitsmoment des Moleküls bezüglich einer zur Verbindungslinie der beiden Atome senkrechten Schwerpunktsachse $J = m_1 m_2 a^2 / (m_1 + m_2)$.

Besonders wichtig ist aber das folgende. Abb. 584 gibt, analog zu Abb. 569, ein Termschema eines Moleküls, bei dem von der feineren Aufspaltung durch die Rotation abgesehen ist. E_1 ist der Grundzustand des Moleküls, $E_2, E_3 \dots$ sind angeregte Zustände des Moleküls mit der Schwingungsquantenzahl $p = 0$. Ihnen überlagern sich weitere, durch die steigenden Werte von p bedingte

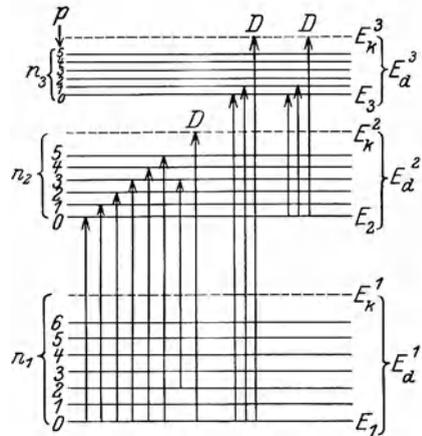


Abb. 584. Termschema eines Moleküls unter Vernachlässigung der Rotation. n_1, n_2, \dots Quantenzahlen des Leuchtelektrons, $p = 1, 2, \dots$ Quantenzahlen der Atomschwingung.

Energiestufen, die von den verschiedenen Schwingungszuständen herrühren. Die Atomschwingungen können aber nicht beliebig heftig werden, ohne daß der Zusammenhang des Moleküls zerstört, das Molekül in seine Atome gespalten, *dissoziiert* wird. (Das entspricht der Ionisation eines Atoms durch Abtrennung eines Elektrons.) Für eine solche Dissoziation ist (analog zur Ionisationsarbeit eines Atoms) eine bestimmte *Dissoziationsarbeit* notwendig. Wie sich aus der Konvergenzstelle der Linien der Hauptserie eines Atoms (der Seriengrenze) die Ionisationsarbeit eines Atoms berechnen läßt, so kann man nach FRANCK die Dissoziationsarbeit eines Moleküls aus der Energie E_k^1 berechnen, auf die hin die sich an den Grundzustand E_1 anschließende Energiestufenfolge mit wachsender Schwingungsquantenzahl p konvergiert. Ebenso konvergieren die sich an die angeregten Zustände E_2, E_3, \dots anschließenden Energiestufenfolgen auf Konvergenzstellen E_k^2, E_k^3, \dots (Abb. 584). Jeder Quantensprung eines Moleküls, der auf ein solches E_k führt (in Abb. 584 durch D gekennzeichnet), hat eine Dissoziation des Moleküls zur Folge.

Tabelle 37. Bildungswärmen, spektrometrisch und kalorimetrisch bestimmt.

	Bildungswärme	
	spektrometrisch kcal	kalorimetrisch kcal
H ₂	100,5	70—100
S ₂	113	90
Cl ₂	57,0	57
Br ₂	45,2	46
J ₂	35,2	34,5
NO	182	191
CO	254	250
KCl	105	103

$E_k - E_1$ ist die Dissoziationsarbeit des im Grundzustand befindlichen Moleküls. Sie läßt sich ohne weiteres berechnen, wenn die Aufstellung eines Energiestufenschemas (Termschemas) entsprechend Abb. 584 gelungen ist.

Die Dissoziationsarbeit ist gleich der Energie, die bei dem umgekehrten Vorgang, der *Molekülbildung*, frei wird. Durch Multiplikation der Dissoziationsarbeit eines Moleküls mit der LOSCHMIDTSchen Zahl N (§ 63) erhält man somit aus dem Bandenspektrum die Wärmetönung bei der Bildung von 1 Mol der betreffenden Moleküle (*Bildungswärme*).

Sie läßt sich spektrometrisch oft viel genauer bestimmen, als kalorimetrisch. In Tabelle 37 sind einige Beispiele zusammengestellt.

350. Fluoreszenz. Wir haben bereits erwähnt (§ 344), daß ein Atom dadurch angeregt, auf einen höheren Quantenzustand gehoben werden kann, daß es ein Lichtquant $h\nu$ absorbiert, dessen Energie hierfür ausreicht. Das gleiche gilt für Moleküle. Bei der Rückkehr in den Grundzustand, gegebenenfalls auf dem Wege über einen oder mehrere dazwischenliegende Quantenzustände des Atoms oder Moleküls, strahlt dieses dann die aufgenommene Energie in Lichtquanten wieder aus. Das ist die von uns bereits erwähnte *Fluoreszenz* (§ 323). Entspricht das eingestrahlte Licht bei einem Atom genau der ersten Linie seiner Hauptserie, so wird das Atom aus dem Grundzustand in den ersten angeregten Zustand gehoben. In diesem Fall gibt es nur die *eine* Möglichkeit der unmittelbaren Rückkehr in den Grundzustand, und dabei wird die gleiche Spektrallinie wieder ausgestrahlt. Da dieser Vorgang eine äußerliche Ähnlichkeit mit einem Resonanzvorgang hat, so bezeichnet man diesen Sonderfall von Fluoreszenz als *Resonanzstrahlung*.

Wird aber ein Quantensprung zu höherer Energie durch ein Lichtquant hervorgerufen, dessen Energie $h\nu$ größer ist als die für den Sprung nötige Energie, so ist das Fluoreszenzlicht langwelliger als das erregende Licht. Auf Grund der Quantentheorie entpuppt sich daher das STOKESSche Gesetz (§ 323), nach dem die Fluoreszenzstrahlung in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle keine kleinere Wellenlänge hat als das erregende Licht, als einfache Folge aus dem Energieprinzip. Die Energie $h\nu'$ des ausgesandten Lichtquants kann,

sofern sie nur aus der Energie $h\nu$ des erregenden Lichtquants stammt, nicht größer als diese sein, so daß $\nu' \leq \nu$ und $\lambda' \geq \lambda$.

Aber auch die Ausnahmen (*antistokesche Linien*) sind verständlich. Ist $h\nu' > h\nu$, so muß die Energiedifferenz $h\nu' - h\nu$ aus einem anderen Energievorrat stammen, und ein solcher findet sich bei den zwei- und mehratomigen Molekülen in Gestalt ihrer Atomschwingungsenergie, sofern diese angeregt ist. Erfolgt gleichzeitig mit einer unmittelbaren Rückkehr des Leuchtelektrons in den Grundzustand ein Quantensprung der Atomschwingung von höherer zu geringerer Energie, so liefert dieser zusätzliche Energie. Abb. 585 zeigt das gleiche Termschema wie Abb. 584. Das Molekül befinde sich z. B. ursprünglich in dem Zustande, der durch die Quantenzahl n_1 des Leuchtelektrons (Grundzustand) und die Quantenzahl $p = 2$ der Atomschwingung gekennzeichnet ist. Durch Absorption eines Lichtquants von genau ausreichender Energie gelange es in den durch die Quantenzahlen n_2 und $p = 4$ gekennzeichneten Zustand. Von dort aus kann es in jeden zum Grundzustand des Leuchtelektrons gehörenden Zustand zurückfallen. Ist $p > 2$, so ist die Energie des Fluoreszenzlichtquants kleiner als die des erregenden Lichtquants. Ist aber $p < 2$, so ist sie größer.

Damit Lichtquanten von einer zur Erregung der Fluoreszenz eines Atoms oder Moleküls wirksamen Energie $h\nu$ sicher zur Verfügung stehen, ist in der Regel die Verwendung einer Lichtquelle, die ein kontinuierliches Spektrum besitzt, erforderlich. Im Ultraviolett kann hierzu unter anderem das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs dienen (§ 341). Auch die Erregung mit der eigenen Hauptserie des zu erregenden Stoffs führt zum Ziel. In vielen Fällen sind auch einzelne Spektrallinien verschiedener Elemente so nahe benachbart, daß sie sich, da sie von Natur eine gewisse Breite haben, zum Teil überdecken, so daß die Fluoreszenz des einen Stoffs durch eine Spektrallinie des anderen erregt werden kann.

351. Der SMEKAL-RAMAN-Effekt. Fällt Licht durch einen durchsichtigen Stoff, so wird stets ein Teil des Lichts an den Molekülen des Stoffs gestreut, d. h. aus seiner Richtung abgelenkt (§ 295). SMEKAL hat zuerst die Vermutung ausgesprochen, daß hierbei kleine Wellenlängenänderungen des Lichts eintreten könnten. Das ist von RAMAN (1928, ziemlich gleichzeitig und unabhängig auch von MANDELSTAM und LANDSBERG) nachgewiesen worden. Bestrahlt man einen durchsichtigen Stoff mit monochromatischem Licht, so treten im Streulicht neben der eingestrahlenen Spektrallinie weitere, ihr nahe benachbarte Linien auf (Abb. 586). Das erklärt sich auf folgende Weise. Bei der Wechselwirkung eines eingestrahlenen Lichtquants mit einem zwei- oder mehratomigen Molekül kann ein Teil seiner Energie $h\nu$ an das Molekül übergehen und an ihm einen Quantensprung der Atomschwingung und der Rotation erzwingen. Die dazu nötige Energie ΔE geht dem Lichtquant verloren, das dann nur noch die Energie $h\nu' = h\nu - \Delta E$ besitzt, so daß $\nu' < \nu$. Es kann aber, wenn auch seltener, vorkommen, daß bei der Wechselwirkung zwischen Lichtquant und Molekül ein Quantensprung der Atomschwingung und der Rotation von höherer zu kleinerer Energie erfolgt, bei dem ein Energiebetrag ΔE frei wird, der dem gestreuten Lichtquant zugute kommt. Dann ist $h\nu' = h\nu + \Delta E$ und $\nu' > \nu$.

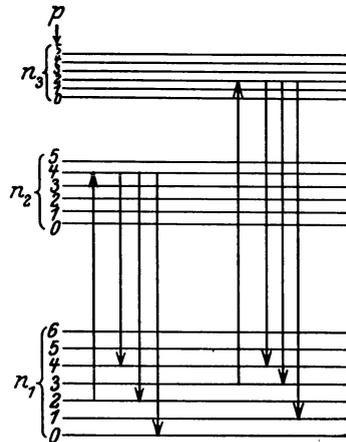


Abb. 585. Zur Theorie der Fluoreszenz.

Während also bei der Fluoreszenz Quantensprünge der Atomschwingung und der Rotation nur als Begleiterscheinung eines Quantensprunges des Leuchtelektrons eintreten, erfolgen diese Quantensprünge beim SMEKAL-RAMAN-Effekt ohne Beteiligung des Leuchtelektrons.

Da aus der Gleichung $h\nu - h\nu' = \pm \Delta E$ die den Quantensprüngen der Atomschwingung und der Rotation entsprechenden Energien ΔE unmittelbar berechnet werden können, so liefert der SMEKAL-RAMAN-Effekt ein ausgezeichnetes Mittel, um diese Quantenzustände zu erkennen. Es sind das die gleichen, die für das Rotationsschwingungsspektrum (§ 349) verantwortlich sind und auch aus diesem ermittelt werden könnten. Mit Hilfe des SMEKAL-RAMAN-Effektes aber können diese Untersuchungen aus dem experimentell

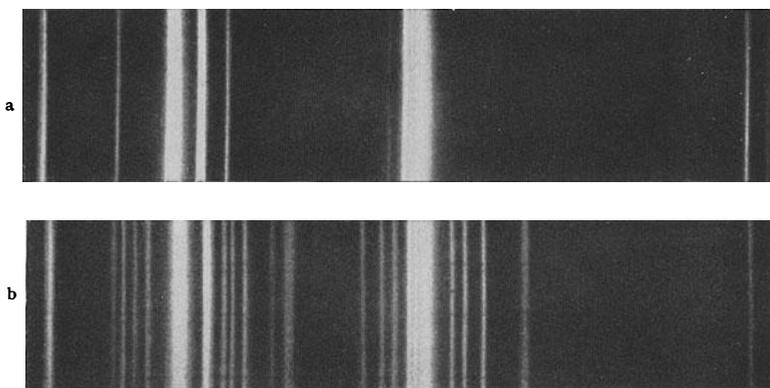


Abb. 586. SMEKAL-RAMAN-Effekt an Tetrachlorkohlenstoff. a Spektrum des einfallenden Lichts (Quecksilberdampflampe), b Spektrum des Streulichts. Nach RAMAN und KRISHNAN.

schwer zugänglichen Ultrarot in das einer sehr genauen und bequemen Untersuchung zugängliche sichtbare und ultraviolette Gebiet verlegt werden.

352. Chemische Wirkungen des Lichts. Die Einwirkung von Licht hat häufig einen wesentlichen Einfluß auf das Zustandekommen von chemischen Wirkungen, indem absorbierte Lichtquanten die zur Auslösung eines chemischen Vorganges nötige Energie liefern. So reagiert z. B. ein Gemisch von gleichen Teilen Chlorgas und Wasserstoffgas (Chlorknallgas) im Dunkeln nicht. Bei Zutritt von Tageslicht bildet sich unter heftiger Explosion Chlorwasserstoff (HCl). Kurzwelliges Licht bewirkt in Sauerstoff (O_2) die Bildung von Ozon (O_3). Die Ozonbildung in der Atmosphäre durch das Sonnenlicht — die mit einer Absorption kurzwelligeren Sonnenlichts verbunden ist — spielt in der Erdatmosphäre eine wichtige Rolle.

Die Anwendung der chemischen Wirkung des Lichts in der Photographie ist allgemein bekannt. Die lichtempfindlichen Schichten der Platten, Filme und Bromsilberpapiere enthalten in Gelatine eingebettete Bromsilberkörner (AgBr). Von diesen dissoziiert ein um so größerer Bruchteil in Ag und Br, je mehr Licht in der Schicht absorbiert wird. Doch ist die dissoziierte Menge zunächst noch so gering, daß eine Veränderung nicht sichtbar ist. Im Entwickler erst setzt sich der Vorgang an den belichteten Stellen fort und führt zur Ausfällung größerer Silbermengen, die wegen ihrer feinen Verteilung in Gestalt kleiner Körner schwarz erscheinen. Das nicht dissoziierte AgBr wird im Fixierbad entfernt. So entsteht das Negativ, das Bild mit umgekehrten Helligkeitswerten, das in bekannter Weise durch Kopieren in ein Positiv verwandelt wird.

Bei den photochemischen Vorgängen werden also Lichtquanten $h\nu$ absorbiert und liefern die Wärmetönung für chemische Umwandlungen. Das *photochemische Grundgesetz* besagt, daß die Absorption stets *in einzelnen Lichtquanten durch einzelne Moleküle* erfolgt. So erfolgt die Dissoziation eines AgBr-Moleküls bei der Photographie jeweils durch ein und nur durch ein Lichtquant. Nach dem Energieprinzip kann deshalb eine photochemische Wirkung nur dann eintreten, wenn die Energie $h\nu$ des Lichtquants mindestens so groß ist, wie die Wärmetönung, die bei dem betreffenden Vorgang auf je ein Molekül entfällt, also beim photographischen Prozeß die Dissoziationsarbeit des AgBr-Moleküls. So wird es verständlich, daß die photochemischen Wirkungen des Lichts mit fallender Wellenlänge stärker werden, so daß ultraviolettes Licht und Röntgenstrahlen weit stärker wirken als sichtbares Licht. Gewöhnliche photographische Platten können bei rotem Licht entwickelt werden, weil dessen Lichtquanten zu energiearm sind, um die AgBr-Moleküle zu dissoziieren.

Die oben erwähnte Chlorknallgasreaktion ist übrigens nicht auf diese einfache Weise zu verstehen. Vielmehr schließt sich an die Absorption eines Lichtquants durch ein Cl_2 -Molekül und dessen dadurch bewirkte Dissoziation eine Kette von Folgereaktionen, — wahrscheinlich unter notwendiger Beteiligung von Spuren von Wasserdampf —, und die Ausbeute wird sehr viel größer, als sie nach dem Grundgesetz sein sollte.

Der wichtigste photochemische Vorgang in der Natur ist die *Kohlensäure-assimilation* in den Pflanzen, die — von wenigen niederen Organismen abgesehen — alle Lebewesen mit der zur Aufrechterhaltung ihrer Lebensvorgänge nötigen Energie versorgt. (Auch die Fleischfresser auf dem Wege über ihre pflanzenfressenden Beutetiere.) Das Blattgrün (Chlorophyll) absorbiert Sonnenlicht, und dieses bewirkt die Verwandlung von Kohlensäure und Wasser in Zucker und Sauerstoff, indem es die für diesen Vorgang nötige Energie von etwa 600 cal für je 1 Mol Zucker liefert. In den Organismen findet eine Rückverwandlung in Kohlensäure und Wasser statt. Die hierbei wieder freiwerdende Energie wird für die Lebensvorgänge verfügbar.

353. Elementare magnetische Momente. Im Jahre 1911 glaubte WEISS gefunden zu haben, daß die magnetischen Momente der Atome ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Einheit seien, die man als *WEISSsches Magneton* bezeichnet. Überdies ist aber das Auftreten atomarer magnetischer Momente auch nach der BOHRschen Atomtheorie zu erwarten. Benutzt man das Modell der um den Atomkern kreisenden Elektronen, so stellt jedes Elektron einen Kreisstrom dar, der ein magnetisches Moment besitzt. Nach § 196 beträgt es $M = \epsilon ur^2/2$. Wir betrachten jetzt ein Wasserstoffatom in seinem Grundzustand ($n = 1$). Dann ist nach § 341, Gl. (5a) und (5b), $ur^2 = h/2\pi\mu$, so daß

$$M = \frac{\epsilon h}{4\pi\mu}. \quad (16)$$

Dieses *BOHRsche Magneton* ist etwa fünfmal größer als das WEISSsche und hat sich tatsächlich als eine elementare Einheit des magnetischen Moments erwiesen.

Wir haben aber bereits in § 221 darauf hingewiesen, daß das Verhältnis zwischen dem magnetischen Moment und dem Drehimpuls der Elektronen beim Versuch von EINSTEIN und DE HAAS der Modellvorstellung der elementaren Kreisströme nicht entspricht. Es hat sich später herausgestellt, daß das bei diesem Versuch auftretende magnetische Moment gar nicht von kreisenden Elektronen im Sinne der AMPÈRESchen Theorie des Magnetismus herrührt, sondern eine ganz andere Ursache hat.

Wie zuerst UHLENBECK und GOUDSMIT auf Grund spektroskopischer Tatsachen erkannten, kommt den Elektronen ein magnetisches Moment von der Größe des BOHRschen Magnetons und ein Drehimpuls zu, die aber nicht erst durch eine kreisende Bewegung entstehen, sondern die *den Elektronen selbst* eigentümlich sind und die in gleicher Weise wie ihre Masse und ihre Ladung eine Grundeigenschaft der Elektronen bilden. Der Drehimpuls ist — in Übereinstimmung mit dem Versuch von EINSTEIN und DE HAAS (§ 221) — genau halb so groß wie derjenige, der sich, wie oben ausgeführt, im BOHRschen Modell für das Elektron des Wasserstoffs in seiner Grundbahn ergibt. Man kann das magnetische Moment und den Drehimpuls modellmäßig als Folge einer Rotation des Elektrons um seine eigene Achse beschreiben (*Elektronendrall, Elektronenspin, Kreiselektron*). Später hat sich gezeigt, daß auch diejenigen Atomkerne, deren Masse (wahres Atomgewicht, § 358) ungerade ist, ein magnetisches Moment haben (*Kernmagneton*), das aber, wie auch theoretisch zu erwarten ist, sehr viel kleiner ist als das BOHRsche Magneton. Das magnetische Moment eines Atoms wird also ganz überwiegend durch die Vektorsumme (Resultierende) der magnetischen Momente seiner Elektronen bestimmt. Ein Atom besitzt ein magnetisches Moment, sofern sich die magnetischen Momente seiner Elektronen nicht gegenseitig aufheben.

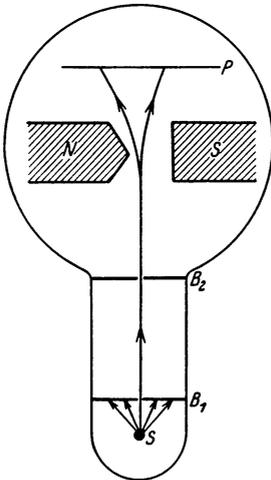


Abb. 587. Zum Versuch von STERN und GERLACH. *S* erhitzte Silberkugel, *B₁*, *B₂* Schlitzblenden, *N S* Magnetpole, *P* Platte zum Auffangen des Silbermiederschlags.

Das Auftreten eines magnetischen Moments an den Atomen bewirkt Paramagnetismus des betreffenden Stoffes (§ 215). Je vollständiger die Untergruppen der einzelnen Elektronenschalen eines Atoms ausgebildet sind (§ 343), um so weitergehend heben sich die magnetischen Momente seiner Elektronen gegenseitig auf. In diesem Fall ist der betreffende Stoff diamagnetisch. Paramagnetismus zeigen daher namentlich die Elemente mit unvollkommen ausgebildeten Untergruppen.

Die Quantentheorie ergibt, daß sich das magnetische Moment eines Atoms nur in ganz bestimmte Richtungen zu einem magnetischen Felde einstellen kann (*Richtungsquantelung*). Im einfachsten Fall kann sich das magnetische Moment nur in die Feldrichtung oder gegen die Feldrichtung einstellen. Dies ist durch einen grundlegenden Versuch von STERN und GERLACH nachgewiesen worden. Sie ließen Silber im Vakuum verdampfen und erzeugten, indem sie den Dampf durch enge Schlitze treten ließen, einen schmalen Strahl von Silberatomen (*Atomstrahl*, Abb. 587). Diesen ließen sie durch ein starkes, sehr inhomogenes magnetisches Feld laufen. In diesem werden die dem Felde gleichgerichteten Atome in Richtung wachsender Feldstärke getrieben (§ 188), die entgegengesetzt gerichteten in Richtung abnehmender Feldstärke. Der Atomstrahl wird also in zwei Strahlen aufgespalten, die in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt sind. Man kann dies an dem Silbermiederschlag erkennen, der auf einer in den Weg der Strahlen aufgestellten Platte auftritt. Das magnetische Moment der Silberatome ergab sich, wie in diesem Fall zu erwarten war, gleich einem BOHRschen Magneton. Bei anderen Metallen ergeben sich andere, aber auch der Theorie entsprechende magnetische Momente.

354. Die Quantentheorie der spezifischen Wärme. Nach dem Gleichverteilungssatz (§ 100) sollte die Molwärme (Atomwärme) der festen Stoffe allgemein $3R$ betragen (R = universelle Gaskonstante, § 106). Bei den meisten Metallen

trifft dies recht gut zu (Gesetz von DULONG-PETIT). Die meisten festen Stoffe jedoch zeigen ein hiervon stark abweichendes Verhalten. Ihre Molwärmern bzw. ihre spezifischen Wärmen, die gleich Molwärme/Molekulargewicht sind, sind kleiner, als es nach dem Gleichverteilungssatz zu erwarten ist, und je tiefer die Temperatur ist, um so allgemeiner ist das — auch bei den Metallen — der Fall. Mit sinkender Temperatur beginnt die spezifische Wärme aller Stoffe zu fallen, bei den einen früher, bei den anderen später.

Zur Erklärung hat — an einen Gedanken von MADELUNG anknüpfend — zuerst EINSTEIN (1907) die Quantentheorie herangezogen. Wir haben bereits gesehen (§ 320), daß der Gleichverteilungssatz nur der klassische Grenzfall eines strengeren quantentheoretischen Gesetzes für den Fall $h\nu/kT \ll 1$ ist. Da es sich bei der spezifischen Wärme der festen Stoffe um die Schwingungsenergie der Moleküle bzw. Atome um ihre Gleichgewichtslagen im Körper handelt, so ist ν in unserem Fall die Schwingungsfrequenz der Moleküle (Atome). Das genaue Gesetz für die auf jeden Freiheitsgrad entfallende Energie lautet nicht $\varepsilon = kT$, sondern

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (17)$$

Für $T \gg h\nu/k$ geht es in den Gleichverteilungssatz $\varepsilon = kT$ über, für $T \ll h\nu/k$ aber hat es die Gestalt $\varepsilon = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. Bei ausreichend tiefer Temperatur — bei vielen Stoffen genügt, weil bei ihnen ν groß ist, schon die gewöhnliche Temperatur — sinkt also die mittlere Schwingungsenergie mit fallender Temperatur recht schnell asymptotisch auf Null. Das gleiche gilt dann, wie die — später von DEBYE, BORN und KARMAN erweiterte und verbesserte — Theorie zeigt, auch für die spezifische und die Molwärme. DEBYE bewies, daß diese in einem von der Stoffart abhängigen Temperaturbereich der 3. Potenz der absoluten Temperatur proportional sind (T^3 -Gesetz).

Man kann dieses allgemeine Verhalten auf folgende Weise verstehen. Auch die Molekülschwingungen in den festen Stoffen gehorchen Quantengesetzen. Es gibt bei ihnen einen Grundzustand und angeregte Zustände. Um den tiefsten *angeregten* Zustand eines Moleküls anzuregen, bedarf es einer *endlichen Mindestenergie*, während nach der klassischen Theorie ein Molekül auch schon beliebig wenig angeregt sein könnte. Wird einem Körper durch Abkühlung mehr und mehr Wärmeenergie entzogen, so wird schließlich ein Zustand erreicht, bei dem die in ihm noch vorhandene Energie nicht mehr genügt, um sämtliche Moleküle mit derjenigen Energie zu versorgen, die zur Anregung ihres tiefsten angeregten Zustandes nötig ist, und erst recht nicht ihrer höheren Quantenzustände. Während ein Teil von ihnen die volle Energie des ersten angeregten Zustandes behält, sinkt mit fallender Temperatur eine immer größere Zahl von Molekülen in den Grundzustand zurück. Die Molekülschwingungen „frieren ein“; die eingefrorenen Moleküle spielen nicht mehr mit und haben keinen Einfluß mehr auf die spezifische Wärme.

Wir können nunmehr auch verstehen, weshalb bei der Berechnung der spezifischen Wärme der Gase gewisse Freiheitsgrade der Rotation ausfallen, nämlich diejenigen, die einem extrem kleinen Trägheitsmoment entsprechen (§ 103). Aus § 341 berechnet man leicht, daß beim Wasserstoff zwischen der Rotationsenergie $E_r = Ju^2/2$ des Atoms und seinem Trägheitsmoment $J = \mu M r^2 / (\mu + M)$ die Beziehung $E_n = n^2 h^2 / 8\pi^2 J$ besteht, die Energie also dem Trägheitsmoment umgekehrt proportional ist, $E_n \sim n^2 / J$. Das letztere gilt auch für ein rotierendes Molekül, und daher ergeben sich für sehr kleine Trägheitsmomente sehr große Energien. Das Trägheitsmoment eines einatomigen

Moleküls ist nun bezüglich jeder Schwerpunktsachse extrem klein, und das gleiche ist bei den zweiatomigen Molekülen bezüglich derjenigen Achse der Fall, die durch die beiden Atome des Moleküls hindurchgeht. Rotationen um diese Achsen haben daher einen so überaus großen Energiebedarf, daß er bei keiner überhaupt denkbaren Temperatur gedeckt werden kann. Er beträgt für ein einatomiges Molekül von mittlerem Atomgewicht mindestens etwa 10^{-6} erg, während selbst bei einer Temperatur von 10000° der Gleichverteilungssatz jedem Freiheitsgrad nur eine Energie von der Größenordnung 10^{-12} erg bewilligt. Diese Freiheitsgrade der Rotation sind daher auch bei den höchsten denkbaren Temperaturen vollkommen eingefroren.

Das Trägheitsmoment der zweiatomigen Moleküle bezüglich ihrer anderen Schwerpunktsachsen und das der drei- und mehratomigen Moleküle überhaupt ist um viele Zehnerpotenzen größer, und daher kann der Energiebedarf der Rotationen um diese Achsen bei nicht allzu tiefer Temperatur durchaus gedeckt werden. Bei ausreichend tiefer Temperatur frieren aber auch diese Freiheitsgrade ein und tragen zur spezifischen Wärme immer weniger bei, so daß sich mit sinkender Temperatur dann auch die zwei- und mehratomigen Moleküle bezüglich ihrer spezifischen Wärme mehr und mehr wie einatomige Moleküle verhalten müssen. Ihre Molwärme sinkt vom klassischen Wert $C_v = 5R/2$ auf den Wert $3R/2$ der einatomigen Gase. Beim Wasserstoffmolekül ist das wegen seines kleinen Trägheitsmoments am leichtesten möglich, und bei ihm ist der letztere Wert auch schon erreicht worden.

Die klassische Theorie der spezifischen Wärmen gilt also nur bei ausreichend hoher Temperatur, d. h. wenn die Rotationen stark angeregt sind, was hohen Quantenzahlen der Rotation entspricht. Die Lage ist dann ähnlich, wie wir sie im gleichen Fall beim Wasserstoffatom besprochen haben (§ 341). Die Unstetigkeit der Quantenvorgänge verwischt sich um so mehr, je höher die Quantenzahlen sind, und die unstetige Folge der Energiestufen kann dann mit einem um so kleineren relativen Fehler durch eine stetige Energieskala ersetzt gedacht werden. Damit gehen die Gesetze der Quantentheorie, wie es das *Korrespondenzprinzip* verlangt, für große Quantenzahlen asymptotisch in die der klassischen Theorie über.

Auch der Energiebedarf der Atomschwingungen (§ 349) ist so groß, daß sie bei gewöhnlicher Temperatur vollkommen eingefroren sind und zur spezifischen Wärme nichts beitragen. Das gleiche gilt in noch höherem Grade für die Anregungsenergie der Elektronen an den Molekülen. Daher senden die Körper bei gewöhnlicher Temperatur auch kein sichtbares Licht aus. Erst bei höherer Temperatur wird die thermische Energie der Moleküle groß genug, um bei Zusammenstößen eine Anregung der Atomschwingungen und der Elektronensprünge zu bewirken, die zur Aussendung sichtbaren Lichts führt.

355. Die Wellentheorie der Materie. Wir haben in § 337 auseinandergesetzt, daß man beim Licht nicht mit einer einzigen Modellvorstellung auskommt, sondern außer dem Wellenmodell auch das Quantenmodell braucht, in dem das Licht wie aus bewegten Teilchen bestehend erscheint. Im Jahre 1924 kam LOUIS DE BROGLIE auf den Gedanken, daß es umgekehrt auch nötig sein könne, für die Materie, also für die Atome und Elektronen, zwei verschiedene Modellvorstellungen zu benutzen und neben das altvertraute Teilchenbild ein *Wellenbild der Atome und Elektronen* zu setzen. Diese Voraussage hat sich bestätigt, und sie hat zu ganz überraschenden Entdeckungen geführt. *Bewegte Atome und Elektronen verhalten sich wirklich unter bestimmten Versuchsbedingungen nicht wie Teilchen, sondern wie Wellen.*

Nach § 330 besitzt jede mit der Geschwindigkeit v bewegte Masse m die Energie $E = m c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ und die Bewegungsgröße $G = m v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

DE BROGLIE verknüpfte nunmehr, genau wie bei den Lichtwellen, mit der Energie eine Schwingungszahl ν durch die Gleichung $E = h\nu$ [§ 334, Gl. (2)] und mit der Bewegungsgröße eine Wellenlänge λ durch die Gleichung $G = h/\lambda$ [§ 335, Gl. (5)]. Demnach ist

$$E = h\nu = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad G = \frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (18)$$

Wie bei jedem Wellenvorgang, muß zwischen Schwingungszahl, Wellenlänge und Geschwindigkeit, die wir hier u nennen wollen, die Beziehung $u = \lambda\nu$ bestehen. Aus Gl. (18) folgt dann

$$u = \frac{E}{G} = \frac{c^2}{v}. \quad (19)$$

Die Geschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit, § 309) dieser *Materiewellen* oder *DE BROGLIE-Wellen* ist also zur Teilchengeschwindigkeit v umgekehrt proportional, und sie ist, da stets $v < c$, stets größer als die Lichtgeschwindigkeit.

Man kann die Materiewellen als ein sog. *Wellenpaket* beschreiben, d. h. als eine Überlagerung mehrerer Wellen von nur sehr wenig verschiedener Wellenlänge, deren Schwingungen sich infolge ihrer Phasenbeziehungen an einer bestimmten Stelle im Raum, dem Ort des bewegten Teilchens, maximal verstärken. Mit dem Fortschreiten der Teilchen verschiebt sich dieser Ort mit einer Geschwindigkeit, für die die klassische Wellentheorie den Betrag c^2/u ergibt. Man nennt diese Geschwindigkeit die *Gruppengeschwindigkeit* des Wellenpakets. Vom Standpunkt der Wellentheorie ist also die Geschwindigkeit v eines bewegten Körpers nach Gl. (19) die Gruppengeschwindigkeit des mit dem Körper verknüpften Wellenpakets.

Die Materiewellen sind natürlich von völlig anderer Art als die Lichtwellen (elektromagnetischen Wellen). Auch wird in ihnen keine Energie und kein Impuls mit der Geschwindigkeit u fortgepflanzt. Aus der Tatsache, daß $u > c$ ist, entsteht deshalb auch kein Widerspruch gegen die Relativitätstheorie (§ 329).

Bei den Wechselwirkungen zwischen dem Licht und irgendwelchen Körpern macht sich die Wellennatur des Lichts um so deutlicher bemerkbar, je größer seine Wellenlänge im Vergleich zu den Abmessungen dieser Körper ist. Entsprechend macht sich auch die Wellennatur der Materie um so stärker bemerkbar, je größer die Wellenlänge der Materiewellen ist. Nach Gl. (18) ist diese für $v \ll c$

$$\lambda \approx \frac{h}{mv}. \quad (20)$$

Diese Wellenlänge ist bei den gewöhnlichen groben Körpern ganz außerordentlich klein, z. B. bei einem Körper von der Masse 1 g bei einer Geschwindigkeit von 1 cm · sec⁻¹ von der Größenordnung 10⁻²⁶ cm. Daher ist bei solchen Körpern von einer Wellennatur nichts zu bemerken. Anders aber bei den winzigen Elementarteilchen, vor allem den Elektronen. Als erster hat ELSASSER die Vermutung ausgesprochen, daß man bei bewegten Elektronen ganz entsprechende Interferenz- und Beugungserscheinungen beobachten müsse, wie beim Licht. Für langsame Elektronen ist $h/m = 7,28 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$. Werden Elektronen durch eine Spannung von 1 Volt beschleunigt, so beträgt ihre Geschwindigkeit 5,94 · 10⁷ cm · sec⁻¹. In diesem Geschwindigkeitsbereich sind sie also mit Materiewellen verknüpft, die von der Größenordnung $\lambda \approx 10^{-7}$ cm sind. Das ist die gleiche Größenordnung, wie die der Röntgenwellenlängen. Es war daher zu erwarten, daß Elektronenstrahlen in diesem Geschwindigkeitsbereich an Kristallen die gleichen Beugungserscheinungen zeigen würden, wie die Röntgenstrahlen (§ 313). Das hat sich, zuerst durch Versuche von DAVISSON

und GERMER an einem Zink-Einkristall, vollkommen bestätigt. Die bei der Interferenz und Beugung von Röntgenstrahlen bewährten Verfahren lassen sich im Grundsatz auf die Materiewellen übertragen. Bei der Durchstrahlung von Kristallen mit Elektronenstrahlen erhält man „LAUE-Diagramme“ (vgl. Abb. 545), und auch die Analogie zum DEBYE-SCHERRER-Verfahren ist vorhanden. Bei der Durchstrahlung dünner Metallfolien mit Elektronen einheitlicher Geschwindigkeit erhält man Beugungsringe, wie sie mit Röntgenstrahlen an Kristallpulvern



Abb. 588. Elektronenbeugung in einer Metallfolie. (Aufnahme von H. MARK.)

erhalten werden (Abb. 588, vgl. Abb. 550). Denn wie diese, bestehen auch die Metallfolien aus sehr kleinen, ganz regellos angeordneten Kriställchen. Die auf diese Weisen gewonnenen Beugungsbilder liefern genau wie die entsprechenden Bilder mit Röntgenstrahlen, Aufschluß über den Kristallbau.

STERN ist es gelungen, Beugungserscheinungen auch bei Strahlen aus H_2 - und He-Molekülen nachzuweisen, die an Kristallflächen reflektiert werden.

Bereits vor der Wellentheorie der Materie hat RAMSAUER die auffällige Tatsache entdeckt, daß in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich der Elektronen, die durch einen Stoff hindurchtreten, der Wirkungsquerschnitt der Moleküle — der aus der

Absorption der Elektronen ermittelt werden kann — mit abnehmender Geschwindigkeit der Elektronen abnimmt (RAMSAUER-Effekt). Nach der klassischen Theorie wäre zu erwarten, daß er mit abnehmender Geschwindigkeit stets zunehmen sollte, weil dann die Elektronen der Beeinflussung durch die Moleküle stärker unterworfen sind.

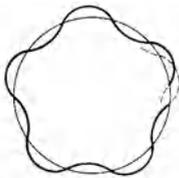


Abb. 589. Kreisbewegung einer Welle. (Nichtstationärer Zustand.) (Nach BORN.)

Nach der Wellentheorie handelt es sich um einen Beugungseffekt der mit den bewegten Elektronen verknüpften Materiewellen an den Atomen. Er tritt bei einer Materiewellenlänge von der Größenordnung 10^{-8} cm ein, und das ist auch die Größenordnung der Atomabmessungen. Bei gleicher Größenordnung von Wellenlänge und Hindernis treten aber bei allen Arten von Wellen besonders augenfällige Beugungserscheinungen auf.

Durch die hier erwähnten und zahlreiche weitere Versuche ist das Wellenmodell der Materie auf genau der gleichen Grundlage und ebenso zwingend begründet, wie das Wellenmodell des Lichts. In beiden Fällen sind es beobachtete Interferenz- und Beugungserscheinungen, die sich einer anderen Beschreibung als durch ein Wellenmodell entziehen. Andererseits bleibt für andere Erfahrungsbereiche, wie beim Licht die Lichtquantentheorie, so auch bei der Materie die altgewohnte, anschauliche Korpuskulartheorie durchaus erhalten. Ein Widerspruch besteht aber hier ebensowenig wie beim Licht, sondern wieder nur ein *Dualismus* (§ 337). Es handelt sich auch hier wieder nur um die für uns unentbehrlichen *Modellvorstellungen*, nicht um Aussagen über einen Sachverhalt, den man als „wahre Wesen“ der Materie bezeichnen könnte. Wie beim Licht kommen wir auch bei der Materie nicht mit einer einzigen Modellvorstellung aus, sondern müssen je nach dem Erfahrungsbereich, um den es sich handelt, die eine oder die andere wählen.

Die Wellentheorie der Materie liefert eine sehr einfache Begründung für die stationären Elektronenbahnen und für die Quantenbedingung Gl. (2a) (§ 340),

wie wir am Beispiel der Kreisbahnen am Wasserstoffatom zeigen wollen. Einem Elektron, das einen Atomkern umkreist, entspricht im Bilde der Wellentheorie eine den Kern umlaufende Welle (Abb. 589). Ein stationärer Zustand kann sich aber nur dann einstellen, wenn der Kreisumfang $2\pi r$ ein ganzzahliges Vielfaches (n -faches) der Wellenlänge λ ist, wenn sich also eine Art von stehender Welle bildet. Es muß also $2\pi r = n\lambda$ sein. Nun ist $\lambda = h/\mu v = hr/\mu r^2 u = hr/Ju = hr/q$ (u Winkelgeschwindigkeit, J Trägheitsmoment des Elektrons, $q = Ju$ Drehimpuls des Elektrons). Es folgt $2\pi r = n\lambda = nh/rq$ oder $2\pi q = nh$. Genau das gleiche folgt aber für Kreisbahnen auch aus Gl. (2a). Denn es ist

$$\text{da } q = \text{const, } \int_0^{2\pi} q d\varphi = nh = 2\pi q.$$

356. Grundlagen der Quantenmechanik. Der Gedanke DE BROGLIES ist in der Folge namentlich von SCHRÖDINGER, HEISENBERG, BORN, JORDAN und DIRAC zu einer mathematischen Theorie, der *Quantenmechanik* oder *Wellenmechanik*, ausgebaut worden, die in ihrer inneren Geschlossenheit der klassischen Mechanik kaum nachsteht, sie aber in der Fülle der von ihr gedeuteten Tatsachen außerordentlich übertrifft. SCHRÖDINGER stellte in engerer Anknüpfung an DE BROGLIE eine bestimmte Gleichung, die *Wellengleichung*, als Grundlage der Theorie auf, während HEISENBERG, BORN und JORDAN die Theorie mit gleichem Ergebnis auf der äußerlich völlig anderen Grundlage der *Matrizenrechnung* aufbauten. DIRAC verknüpfte die Quantentheorie mit der Relativitätstheorie. Das Ziel der Quantenmechanik wird darin gesehen, die Gesamtheit aller *beobachtbaren* Erscheinungen — als der einzig zuverlässigen Wissensgrundlage der Physik —, aber auch *nur diese*, richtig und vollständig zu beschreiben, so wie dies schon viel früher KIRCHHOFF als das einzige vernünftige Ziel der Physik hingestellt hat. Die dabei benutzten Modellvorstellungen, in denen eine frühere Zeit das wesentliche, nämlich eine „Erklärung“ der Naturerscheinungen sah, bilden nur ein zwar unentbehrliches, aber durch keinerlei eigentlichen Erklärungswert ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Erreichung dieses Ziels.

Durch die Quantenmechanik wurde nicht nur der theoretischen, sondern auch der experimentellen Physik ein neuer, außerordentlicher Auftrieb gegeben, indem sie zu einer sehr großen Zahl von Fragestellungen führte, die der experimentellen Prüfung zugänglich sind. Die durch die ältere Quantentheorie gewonnenen Erkenntnisse stellte sie auf eine neue, feste Grundlage und befreite sie von den ihr noch anhaftenden Schlacken der klassischen Theorie. Erst durch die Quantenmechanik gelang ein wirklich erfolgreicher Angriff auf das Molekülproblem. Bei dem einfachsten Molekül, dem Wasserstoffmolekül, gelang bereits eine mit der Erfahrung übereinstimmende Berechnung seines Baues. Auch das von der älteren Quantentheorie nicht gelöste Problem des neutralen Heliumatoms konnte sie meistern. So besteht heute die grundsätzliche, wenn auch erst mit kleinen Ansätzen hoffnungsvoll eröffnete Möglichkeit, durch Aufklärung des Baues der Moleküle *die gesamte Chemie künftig einmal durch einen quantenmechanischen Unterbau zu unterfangen* und ihr eine quantitative physikalische Grundlage zu geben.

Einer der wichtigsten und wahrscheinlich auch für die Erkenntnistheorie bedeutsamsten Gedanken der Quantenmechanik ist die von BOHR zuerst erkannte *Komplementarität* gewisser physikalischer Größen. Sie besteht darin, daß es *grundsätzlich* unmöglich ist, mehr als die Hälfte der Zustandsgrößen eines Gebildes *gleichzeitig* vollkommen scharf zu bestimmen. Je zwei Zustandsgrößen sind in einer eigentümlichen Weise so miteinander gekoppelt, daß die Messung der einen eine gleichzeitige Messung der anderen stört, derart, daß,

je genauer man die eine mißt, die zweite um so weniger genau meßbar wird. Komplementäre Größen sind stets solche, deren Produkt die Dimension einer Wirkung hat, ebenso wie das Wirkungsquantum h . Beispiele sind der Ort und der Impuls, die Zeit und die Energie, der Drehwinkel und der Drehimpuls.

Diesem Zusammenhang hat HEISENBERG in seiner *Unschärferelation* die genaue mathematische Gestalt gegeben. Es sei z. B. x die Ortskoordinate, G der Impuls eines Körpers, z. B. eines Elektrons. Dann sind diese Größen *gleichzeitig* nur mit einer gewissen Unschärfe meßbar, die wir mit Δx und ΔG bezeichnen wollen. Für diese Unschärfen besteht nach HEISENBERG die Beziehung

$$\Delta x \cdot \Delta G \approx h, \quad (21)$$

das Produkt der Unschärfen ist von der Größenordnung des Wirkungsquantums. Man kann zwar grundsätzlich *entweder* x *oder* G mit beliebiger Genauigkeit messen, so daß $\Delta x = 0$ oder $\Delta G = 0$. Dann aber wird nach Gl. (21) entweder $\Delta G = \infty$ oder $\Delta x = \infty$. Bei einer vollkommen scharfen Ortsbestimmung wird der Impuls vollkommen unbestimmt und umgekehrt.

Dies kann anschaulich verstanden werden. Eine Messung an einem Elementarteilchen, z. B. einem Elektron, ist *grundsätzlich* nicht möglich ohne einen Eingriff, der den jeweiligen Zustand des Elektrons in irgendeiner Weise stört. Man denke sich, es sei möglich, ein Elektron mit einem Mikroskop zu betrachten. Zu diesem Zweck muß es beleuchtet werden. Um seinen *Ort* scharf zu erkennen, muß man äußerst kurzwelliges Licht, nämlich sehr harte Gammastrahlen, verwenden. Denn bei Verwendung langwelligeren Lichts entsteht rings um das Elektron ein ausgedehntes, verwaschenes Beugungsscheibchen (§ 295), so daß der Ort des Elektrons innerhalb dieses Scheibchens unbestimmt ist. Sehr kurzwellige Lichtquanten erzeugen aber an dem Elektron einen sehr starken COMPTON-Effekt (§ 336), durch den die Geschwindigkeit und damit der Impuls des Elektrons in einer ganz unkontrollierbaren Weise verändert wird. Will man also den *Impuls* nicht beeinflussen, muß man sehr langwelliges Licht verwenden, wodurch wiederum der Ort völlig unbestimmt wird. Eine genaue Messung des Impulses setzt aber voraus, daß man die Geschwindigkeit durch Messung einer Strecke, also zweier Elektronenorte, und der zu ihrer Zurücklegung nötigen Zeit bestimmt. Selbst wenn dieses gelänge, wüßte man doch weder über den Impuls des Elektrons vor der ersten noch nach der zweiten Ortsmessung etwas, da diese Messungen ja den Impuls in unkontrollierbarer Weise geändert haben. Bei den groben Körpern ist die Beeinflussung durch Meßvorgänge so überaus gering, daß die klassische Physik mit vollem Recht von derartigen Beeinflussungen absieht und eine scharfe Trennung zwischen beobachtetem Objekt und Beobachtungsmittel macht. Natürlich gilt Gl. (21) auch für die groben Körper. Aber bei ihnen ist das Produkt der *relativen* Unschärfen $\Delta x/x \cdot \Delta G/G \approx h/xG$ wegen der Größe des Impulses G so außerordentlich klein, daß sie gegenüber den durch unvermeidliche Meßfehler bedingten Unschärfen überhaupt nicht ins Gewicht fällt.

In der klassischen Mechanik schließt man auf Grund ihrer Gesetze aus dem Ort und der Geschwindigkeit eines Körpers in einem bestimmten Zeitpunkt und den auf ihn wirkenden Kräften auf seinen Ort und seine Geschwindigkeit in irgendeinem späteren Zeitpunkt, stellt also eine *kausale Verknüpfung* zwischen den aufeinanderfolgenden Zuständen her. Bei Elementarteilchen ist aber die Herstellung einer kausalen Verknüpfung schon deshalb unmöglich — selbst wenn sie bestehen sollte —, weil sie durch die unkontrollierbare Störung während des Meßvorganges vollkommen verwischt wird. Hat man den Ort eines Elektrons sehr scharf bestimmt, so weiß man überhaupt nicht, wo man es zum Zwecke einer zweiten Messung suchen soll, ja man kann, wenn man an einem

aus irgendeinem Grunde vermuteten Ort tatsächlich ein Elektron antrifft, nicht einmal entscheiden, ob es sich um das gleiche Elektron handelt. *Elektronen und andere unter sich gleiche Elementarteilchen, z. B. Protonen, sind nicht unterscheidbar, sie haben keine Identität.* Das gleiche gilt für Lichtquanten. Aus diesem Grund verliert das Kausalitätsprinzip im Bereiche der Quantenmechanik jegliche Anwendungsmöglichkeit, und falls es überhaupt gelten sollte, ist sein Walten *grundsätzlich* nicht nachzuweisen.

Die Tatsache, daß gleiche Elementarteilchen grundsätzlich nicht unterscheidbar sind, führt, wie hier nicht näher ausgeführt werden kann, zu einer neuen Art von Kräften zwischen solchen Teilchen, die man *Austauschkräfte* nennt, weil sie damit zusammenhängen, daß man eine Vertauschung zweier solcher Teilchen grundsätzlich nicht nachweisen kann. Solche Austauschkräfte sind für die Bindung der Atommoleküle mit verantwortlich und spielen überhaupt bei denjenigen chemischen Bindungen, die nicht durch elektrische Kräfte nach dem COULOMBSchen Gesetz zu erklären sind, eine wichtige Rolle.

Den Platz der kausalen Aussagen der klassischen Theorie nehmen in der Quantenmechanik *Wahrscheinlichkeitsaussagen* ein. Für ein Elektron gibt es eine *genau* angebbare Wahrscheinlichkeit, daß man es bei einem in bestimmter Weise mit dem Ziel scharfer Ortsbestimmung angestellten Versuch innerhalb eines bestimmten Raumelements antrifft, und ebenso gibt es eine *genau* angebbare Wahrscheinlichkeit, daß man es bei einem auf scharfe Messung des Impulses abgestellten Versuch mit einem bestimmten Impuls behaftet findet. Jedes Elektron hat also eine ganz bestimmte *Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Die Wahrscheinlichkeit, es anzutreffen, wechselt von Ort zu Ort stetig. Man kann sich diesen Sachverhalt versinnlichen, wenn man jedem Elektron eine Art von symbolischem Nebel zugeordnet denkt, dessen Dichte proportional zu dieser Wahrscheinlichkeit ist und sich von Ort zu Ort — und mit der Bewegung des Elektrons auch mit der Zeit — ändert. Die gedachte Dichte dieses Nebels gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß wir das Elektron in dem betreffenden Raumelement tatsächlich antreffen. In diesem Sinne sind die Materiewellen sozusagen als Wellen in diesem Nebel anzusehen, durch deren Ausbreitung die Wahrscheinlichkeitsverteilung des betreffenden Teilchens sich zeitlich ändert. Es sei jedoch ausdrücklich betont, daß der „Nebel“ *nicht etwa das Elektron selbst* ist, sondern eine symbolisch-anschauliche Darstellung der Wahrscheinlichkeit, es an einer bestimmten Stelle des Raums anzutreffen.

Das betrifft auch die Elektronen an den Atomen. *Die Quantenmechanik kennt keine Elektronenbahnen.* Denn zu ihrer Erkennung ist die Möglichkeit einer gleichzeitigen genauen Orts- und Geschwindigkeits-(Impuls-) Messung Voraussetzung. Der Quantenzustand der einzelnen Elektronen an einem Atom ist vielmehr durch die Art ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt, und die Elektronenbahnen der ursprünglichen BOHRschen Theorie sind nichts anderes als Kurven, längs derer der „Nebel“ besonders dicht ist (vgl. Abb. 589).

Obgleich also die Quantenmechanik nur Wahrscheinlichkeitsaussagen kennt, liefert sie trotzdem vollkommen genaue Aussagen über das Ergebnis von Messungen, die in einer genau bestimmten Weise angestellt werden. Sie erfüllt daher ihren Zweck, die *tatsächlich beobachtbaren* Erscheinungen exakt zu beschreiben, in sehr vollkommener Weise.

Die große erkenntnistheoretische Bedeutung der Quantenmechanik, die unter anderem in der Abkehr von der aprioristischen Geltung des Kausalitätsprinzips und in dem grundsätzlichen Verzicht auf eine Erkenntnis von einem „wahren Wesen der Dinge“, einer „objektiven Wirklichkeit hinter den Erscheinungen“, liegt, ist offensichtlich. Es liegen auch sehr interessante Gedanken von BOHR vor, die insbesondere JORDAN weitergeführt hat, und die

eine Anwendung quantenmechanischer Gesichtspunkte auf Fragen der Biologie betreffen. Diese Versuche sind noch in den Anfängen und werden von biologischer Seite stark umstritten. Wir wollen es deshalb bei diesen Andeutungen bewenden lassen.

III. Atomkerne. Positronen. Neutronen. Ultrastrahlung.

357. Die natürliche Radioaktivität. Im Jahre 1896 entdeckte A. H. BECQUEREL, daß von Uranmineralien eine sehr durchdringende Strahlung ausgeht. 1898 gelang es dem Ehepaar CURIE, aus dem Uranerz Pechblende ein bis dahin unbekanntes Element, das *Radium*, abzuscheiden, das diese Strahlung in sehr großer Stärke aussendet. (Um 1 g Radium zu gewinnen, müssen rund 10 Tonnen Pechblende aufgearbeitet werden.) Seither ist eine beträchtliche Zahl weiterer Elemente entdeckt worden, die diese Eigenschaft der natürlichen Radioaktivität besitzen.

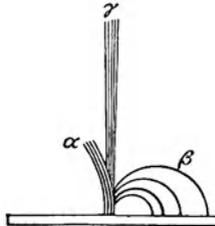


Abb. 590. Alpha-, Beta- und Gammastrahlen im magnetischen Felde.

Es gibt drei Arten von radioaktiven Strahlen, die man als Alpha-, Beta- und Gammastrahlen bezeichnet. Die *Alphastrahlen* erweisen sich auf Grund ihrer Ablenkung im magnetischen Felde als positiv geladene Teilchen (Abb. 590). Sie sind nackte, also mit zwei positiven Elementarquanten geladene Heliumkerne (*Alphateilchen*). Sie haben eine sehr große Geschwindigkeit, bis zu $2 \cdot 10^9$ cm · sec⁻¹. Ihre Ladung kann so ermittelt werden, daß man die von einer großen, bekannten Zahl von Alphateilchen mitgeführte Ladung elektrometrisch mißt. Die Zahl der Teilchen kann z. B. dadurch gemessen werden, daß jedes einzelne von ihnen auf einem Zinksulfidschirm oder einem Diamanten einen deutlichen Lichtblitz hervorruft (*Szintillation*), so daß die Zahl der Teilchen, die das benutzte radioaktive Präparat in einer bestimmten Zeit aus-

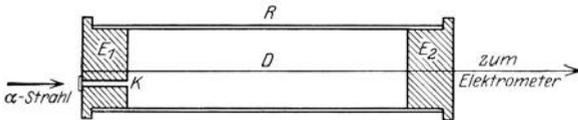


Abb. 591. GEIGERSCHES ZÄHLROHR FÜR ALPHASTRAHLEN.

sendet, ausgezählt werden kann. Genauer ist die Auszählung mit dem *GEIGERSCHEN ZÄHLROHR* (Abb. 591). Es besteht aus einer Kammer mit zwei Elektroden, deren eine durch die metallische Wandung (*R*) gebildet wird. Die zweite (*D*) besteht aus einem dünnen, ausgespannten Draht oder einer feinen metallischen Spitze (*Spitzenzähler*). An die Elektroden legt man eine Spannung, die so zu bemessen ist, daß sie zur Aufrechterhaltung einer selbständigen Entladung noch nicht ausreicht, daß aber die durch ein einzelnes Alphateilchen erzeugte zusätzliche Ionisation genügt, um eine stoßartige selbständige Entladung hervorzurufen, die alsdann sogleich wieder erlischt. Diese plötzlichen Stromstöße können mit einem Elektrometer nachgewiesen und registriert werden, so daß die Zahl der einfallenden Teilchen gezählt werden kann. Das Zählrohr kann auch für andere bewegte Teilchen, sofern sie ionisieren, sowie zur Zählung ionisierender Lichtquanten, benutzt werden. Seine Ausführung ist je nach dem Verwendungszweck verschieden. Das *GEIGERSCHE* Zählrohr ist eines der allerwichtigsten Hilfsmittel der heutigen Strahlenforschung.

Die *Betastrahlen* bestehen aus schnell bewegten Elektronen. Wegen ihrer negativen Ladung werden sie im magnetischen Felde in entgegengesetzter Richtung abgelenkt wie die Alphastrahlen (Abb. 590). Ihre Ablenkbarkeit ist trotz ihrer hohen Geschwindigkeit — bis zu 99% der Lichtgeschwindigkeit — größer als die der Alphastrahlen. Natürlich werden die Alpha- und Betastrahlen auch im elektrischen Felde abgelenkt.

Die *Gammastrahlen* sind eine sehr kurzwellige und daher sehr durchdringende elektromagnetische Wellenstrahlung, noch erheblich kurzwelliger als die Röntgenstrahlen (§ 308, Tab. 31 und Abb. 590). Daher werden sie im elektrischen und im magnetischen Felde nicht abgelenkt. Sie können gleichzeitig sowohl mit Alpha-, wie mit Betastrahlen auftreten, aber nie ohne diese.

Ein überaus schönes und wichtiges Verfahren zur Sichtbarmachung der Bahnen von Alpha- und Betastrahlen ist das *Nebelverfahren* von H. A. WILSON. Diese Strahlen erzeugen längs ihres Weges im Gase, z. B. in der Luft, Ionen. Diese wirken, wie alle Ladungsträger, kondensationsfördernd auf Wasserdampf. Man läßt nun Alpha- oder Betastrahlen in ein Gefäß (*WILSON-Kammer*) treten,

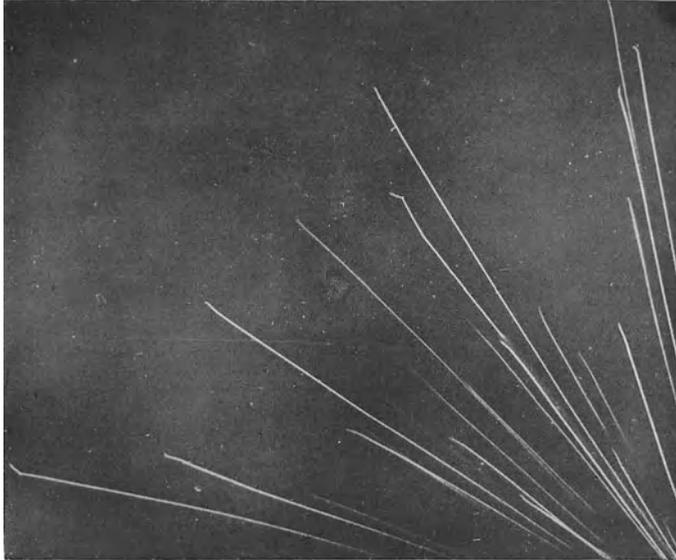


Abb. 592. Bahnen von Alphastrahlen in der WILSON-Kammer.

das Luft enthält, die mit Wasserdampf nahezu gesättigt ist. Die Luft wird sehr schnell adiabatisch ausgedehnt und dadurch abgekühlt, und zwar nur so weit, daß noch keine allgemeine Kondensation des Wasserdampfes eintritt, sondern nur an den Ladungsträgern. Diese beladen sich mit winzigen Wassertropfchen, so daß die Bahnen der Teilchen sich als Nebelspuren abzeichnen. Abb. 592 u. 593 zeigen solche *WILSON-Aufnahmen* von Alphastrahlen, Abb. 594 eine solche von Betastrahlen. Während die Alphastrahlen bis zu ihrem plötzlichen Ende (Reichweite, s. unten) gerade Bahnen beschreiben, werden die Betastrahlen durch Wechselwirkungen mit den Gasmolekülen beträchtlich in ihrer Fortpflanzung beeinflußt, was die unregelmäßigen Krümmungen ihrer Bahnen bewirkt.

Ein bestimmtes radioaktives Element sendet im allgemeinen entweder nur Alpha- oder nur Betastrahlen aus. Nur bei einigen Elementen (RaC, AcC, ThC) kommen beide Strahlenarten vor.

Schon 1899 haben ELSTER und GEITEL die Vermutung ausgesprochen, daß die Radioaktivität auf einem *spontanen, explosionsartigen Zerfall der betreffenden Atome beruht*. Ihren Ausbau verdankt diese Theorie vor allem RUTHERFORD. Die radioaktiven Atome haben einen instabilen Kern, der zu spontanen inneren Umwandlungen neigt, die mit der Ausschleuderung einzelner Kernbestandteile

verbunden sind. Eine Beeinflussung dieser Vorgänge durch äußere Einwirkungen, z. B. durch hohe Temperaturen, hat sich als völlig unmöglich erwiesen.

Die natürliche Radioaktivität ist fast ausschließlich auf Elemente der höchsten Atomgewichte beschränkt. Diese radioaktiven Elemente lassen sich in drei *Zerfallsreihen* ordnen, deren Glieder untereinander in einem genetischen

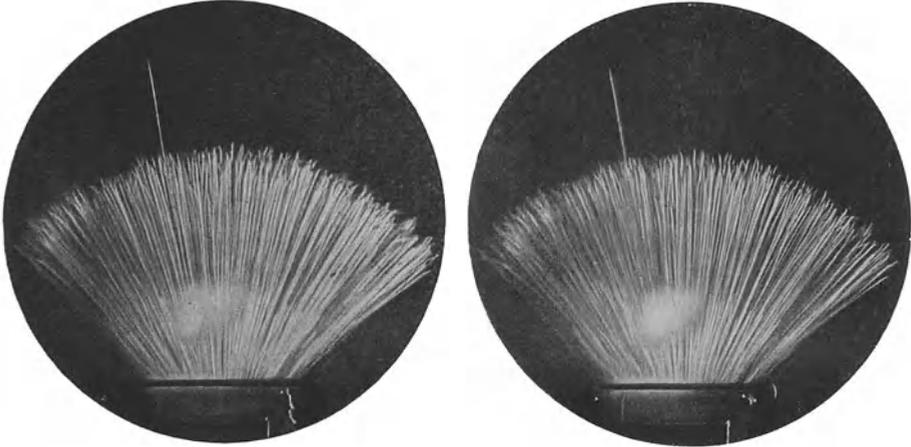


Abb. 593. Alphastrahlen des Thorium C (stereoskopisch).

Zusammenhänge stehen, indem die einzelnen Glieder einer Reihe durch Zerfall schrittweise auseinander entstehen. Diese Reihen sind die *Uranreihe*, die *Aktiniumreihe* und die *Thoriumreihe* (Abb. 595).

An der Spitze der Uranreihe steht das Uran I (U I), das unter Aussendung von Alphastrahlen sehr langsam zerfällt und das Uran X₁ bildet. Dies kann

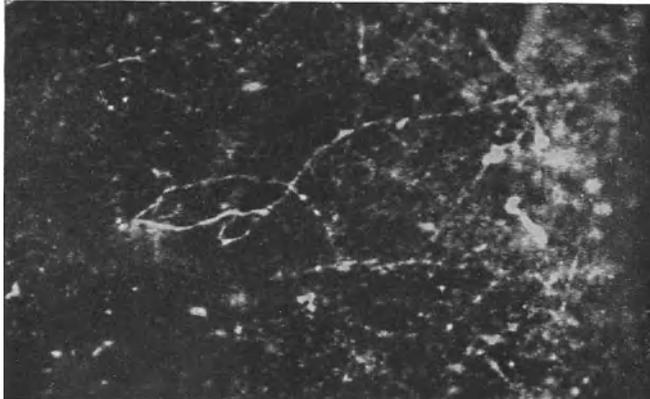


Abb. 594. Betastrahlen in der WILSON-Kammer.

unter Aussendung von Betastrahlen auf zwei Weisen zerfallen (*Verzweigung*), in das UX₂ und das UZ, welche beide unter Betastrahlung das Uran II (U II) bilden. Dieses wieder zerfällt unter Alphastrahlung in das Ionium (Io), dieses in das Radium (Ra). Und so schreitet der Zerfall weiter fort, teils unter Aussendung von Alphastrahlen, teils von Betastrahlen, bis zu einem stabilen Endprodukt, dem Radium G (RaG), das sich chemisch wie Blei verhält (Bleisotop,

§ 358). Die aus dem Radium entstehende Radiumemanation (RaEm) ist ein radioaktives Edelgas. In Abb. 595 sind Alphastrahler schwarz, Betastrahler und die stabilen Endprodukte weiß gezeichnet. Beim RaC tritt erneut eine Verzweigung auf, wobei Alpha- oder Betastrahlen ausgesandt werden.

In den beiden anderen Reihen ist der Verlauf ganz ähnlich. Auch enthält jede von ihnen eine Emanation, ein Edelgas, und jede endet in einem stabilen Endprodukt, das sich chemisch wie Blei verhält. Das Anfangsglied der Thoriumreihe ist das Thorium. Das zu ihr gehörige, von O. HAHN entdeckte Mesothorium (MsTh₁ und MsTh₂) wird unter anderem zur Herstellung von Leuchtzifferblättern benutzt. Das erste sicher bekannte Glied der Aktiniumreihe ist das

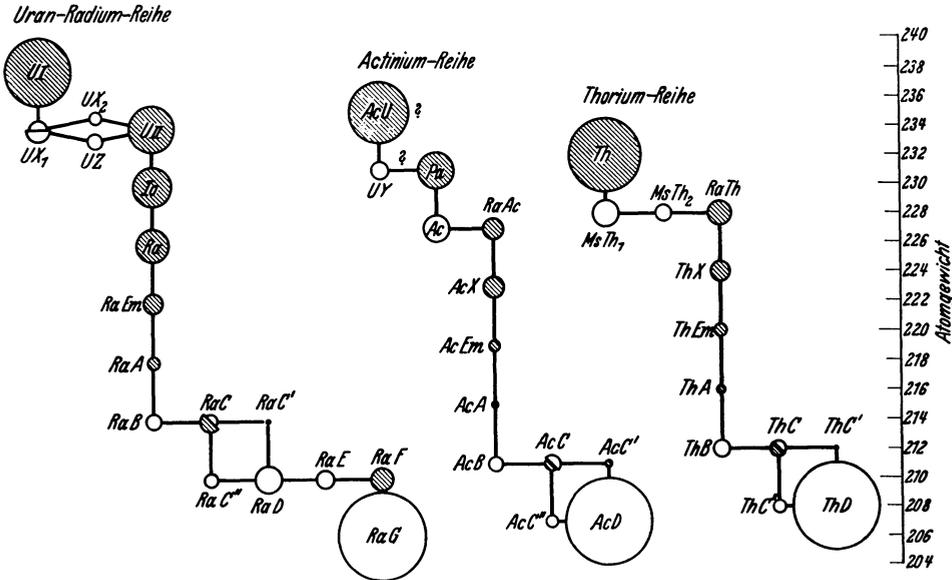


Abb. 595. Die radioaktiven Zerfallsreihen.

Protaktinium (Pa). Doch ist das Vorhandensein zweier höherer Glieder wahrscheinlich (UY und AcU). Ferner bestehen Anzeichen dafür, daß die Reihe entweder von der Uranreihe abzweigt oder von einem Uranisotop (§ 358) ausgeht.

Die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen radioaktiven Stoffe zerfallen, ist überaus verschieden. Ist n_0 die Zahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen unzerfallenen Atome eines einheitlichen radioaktiven Stoffes, n ihre Zahl zur Zeit t , so gehorcht der Zerfall der Gleichung

$$n = n_0 e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

λ ist die Zerfallskonstante, $1/\lambda$ die mittlere Lebensdauer des Stoffes. Diese schwankt zwischen winzigen Bruchteilen einer Sekunde (beim ThC' etwa 10^{-11} sec) und vielen Millionen Jahren (beim UI $6,5 \cdot 10^9$ Jahre). Sie ist gleich der Zeit, in der der Bruchteil $1/e$ der anfänglich vorhandenen Atome zerfällt. Als Halbwertszeit bezeichnet man die Zeit, in der die Hälfte der Atome zerfällt. Sie beträgt z. B. beim Radium 1580 Jahre, beim Mesothorium I 6,7 Jahre. In Abb. 595 sind die Kreise um so größer (aber nicht maßstabgerecht) gezeichnet, je größer die Lebensdauer des betreffenden Elements ist.

Je größer die Lebensdauer, je kleiner also die Zerfallskonstante λ eines alphastrahlenden radioaktiven Stoffes ist, um so kleiner ist die Geschwindigkeit v (bzw. die kinetische Energie) seiner Alphastrahlen. Es ist $\log \lambda = A + B \log v$,

wobei A und B innerhalb der gleichen Zerfallsreihe konstant sind. Die Alphastrahlen eines einheitlichen radioaktiven Stoffs haben eine von der Art des Stoffes, in dem sie verlaufen, abhängige, ganz scharf definierte *Reichweite* (Abb. 592 u. 593; der eine Strahl von größerer Reichweite in Abb. 593 beruht auf einem besonderen Umstand). Als Reichweite schlechthin bezeichnet man diejenige in Luft unter Normalbedingungen. Für die Reichweite R gilt das GEIGER-NUTTALL'sche Gesetz, $R = \text{const } v^3$, wobei die Konstante nur von der Art des durchstrahlten Stoffes abhängt. Zusammen mit der obigen Gleichung ergibt sich dann die Beziehung $\log \lambda = a + b \log R$, wobei a und b innerhalb der gleichen Zerfallsreihe und für den gleichen durchstrahlten Stoff konstant sind. Die leicht meßbare Reichweite liefert daher ein bequemes Mittel, um die Lebensdauer eines Alphastrahlers zu bestimmen, selbst eine so kurze, wie beim ThC' (rund 10^{-11} sec), die auf keine Weise unmittelbar nach Gl. (1) gemessen werden könnte.

Außer den Elementen der genannten Zerfallsreihen gibt es noch einige alleinstehende Fälle von natürlicher Radioaktivität bei leichteren Elementen. Kalium und Rubidium sind ganz schwache Betastrahler, Samarium sendet ganz schwache Alphastrahlen aus.

Bei der Ausschleuderung eines Alphateilchens (Heliumkern, Atomgewicht 4, Kernladungszahl 2), verliert ein radioaktiver Atomkern vier atomare Masseneinheiten und zwei positive Elementarquanten. Demnach muß sein Atomgewicht um vier Einheiten und seine Ordnungszahl um zwei Einheiten sinken. So sinkt z. B. das Atomgewicht des Radiums bei der Bildung der Radiumemanation von 226 auf 222 (Abb. 595), seine Ordnungszahl von 88 auf 86. Das Radiumatom (Erdalkali) rückt also durch seine Umwandlung in ein Emanationsatom (Edelgas) aus der II. in die VIII. Gruppe des periodischen Systems. Bei der Aussendung eines Betateilchens (Elektron) hingegen bleibt das Atomgewicht so gut wie unverändert, die positive Kernladung aber steigt durch den Verlust eines negativen Elementarquantums (eine etwas andere Deutung s. § 361) um eine Einheit. Das Atom rückt also bei einem Betazerfall mit gleichbleibendem Atomgewicht in seiner Ordnungszahl um eine Stelle höher. So haben z. B. das RaD (ein Bleisotop) und das daraus entstehende RaE (ein Wismutisotop) das gleiche Atomgewicht 210, ersteres aber die Ordnungszahl 82, letzteres die Ordnungszahl 83. Das Atom rückt aus der IV. in die V. Gruppe des periodischen Systems. Dieser *radioaktive Verschiebungssatz* (FAJANS, SODDY) bildet eine wichtige Stütze der in § 344 dargestellten Anschauungen über die Natur der chemischen Wertigkeit.

Die Radioaktivität der uranhaltigen Mineralien ermöglicht eine Bestimmung der seit ihrer Bildung verflorenen Zeit. Da ihre Bildung etwa mit der Entstehung der festen Erdkruste begonnen hat, und da diese schon verhältnismäßig bald nach der Entstehung der Erde erfolgt sein muß, so ergibt diese Zeit das ungefähre *Alter der Erde*. Ein Verfahren beruht auf der Bestimmung des Gehalts alter Uranmineralien an Helium. Da die Heliummenge bekannt ist, die 1 g Uran nebst seinen Folgeprodukten in 1 Jahr durch Ausschleuderung von α -Teilchen, die ja Heliumkerne sind, bildet, so kann die seit der Bildung des Minerals verflossene Zeit aus seinem Heliumgehalt berechnet werden. Ein anderes Verfahren beruht auf der Bestimmung der Menge des stabilen Endproduktes RaG. Das Alter der Erde ergibt sich so in der Größenordnung von 1500 Millionen Jahren, was mit anderen Berechnungen recht gut übereinstimmt.

358. Isotopie. Bei den radioaktiven Elementen wurde zuerst die Tatsache offenbar, daß es Atome gibt, die bei gleichem chemischem Verhalten verschiedene physikalische Eigenschaften, nämlich verschiedene Massen (Atomgewichte) und verschiedene Lebensdauern besitzen. So verhalten sich z. B. die radioaktiven

Stoffe RaC, RaE, ThC und AcC, deren Atomgewichte zwischen 210 und 214 liegen, nicht nur unter sich, sondern auch mit dem Wismut (Atomgewicht 209) chemisch identisch, unterscheiden sich aber durch ihr Atomgewicht und durch die Art ihrer Radioaktivität. Ihnen allen kommt die gleiche Ordnungszahl 83 zu, sie gehören an die gleiche Stelle des periodischen Systems. Atome dieser Art, die alle dem gleichen chemischen Element entsprechen, heißen *Isotope* (SODDY). Eine Trennung von Isotopen ist auf chemischem Wege nicht möglich. Es gibt ferner, wie Abb. 595 zeigt, Atomarten, die sich bei gleichem Atomgewicht chemisch verschieden verhalten, *isobare* Atome. So haben die Stoffe RaC'' (81), RaD (82), RaE (83), RaF (84) das gleiche Atomgewicht 210, unterscheiden sich aber durch ihre (in Klammer beigefügte) Ordnungszahl.

In der Folge wurde eine Isotopie bei der überwiegenden Mehrzahl der Elemente nachgewiesen (ASTON). Es gibt nach unserer heutigen Kenntnis höchstens ganz wenige „Reinelemente“. Die meisten Elemente sind Gemische aus isotopen Atomen, deren Massen zum Teil recht verschieden sein können. Der erste Nachweis der Isotopie bei einem nicht radioaktiven Element gelang J. J. THOMSON (1910). Er konnte durch kombinierte elektrische und magnetische Ablenkung von Neon-Kanalstrahlen zwei Isotope des Neons mit den Atomgewichten 20 und 22 nachweisen. Bei der von ihm benutzten *Parabelmethode* (W. WIEN) bilden sich die elektrisch *und* magnetisch abgelenkten Ionen auf einer an geeigneter Stelle in den Weg der Kanalstrahlen gestellten photographischen Platte derart ab, daß Ionen gleicher Masse und Ladung auf der Platte eine Parabel erzeugen, deren einzelne Punkte von Ionen verschiedener Geschwindigkeit herrühren. Die beiden Neonisotope ergaben also zwei getrennte Parabeln. Wegen einer gewissen Ähnlichkeit mit den Linien eines optischen Spektrums bezeichnet man eine derartige Aufnahme als ein *Massenspektrum*, die Art des Verfahrens als *Massenspektroskopie*. Diese wurde seit 1919 zuerst von ASTON, später auch von DEMPSTER und anderen außerordentlich verfeinert und erreicht heute eine Genauigkeit der relativen Massenbestimmung der Atome bis zu fast 0,001%.

Abb. 596 zeigt ein Schema der Parabelmethode in einer ihrer neueren Formen. Die ebenen Pole eines starken Elektromagneten bilden gleichzeitig die Platten eines Kondensators, durch den die Kanalstrahlen hindurchtreten. Demnach liegt sowohl das elektrische wie das magnetische Feld in der Zeichnungsebene. Die elektrische Ablenkung erfolgt in der Zeichnungsebene, die magnetische senkrecht zu ihr. Abb. 597 zeigt eine mit diesem Verfahren gewonnene Aufnahme, bei der außer dem Neon eine Reihe von (absichtlich zu Vergleichszwecken zugesetzten) Kohlenwasserstoffen erscheinen. Die mit 20, 21 und 22 bezeichneten Parabeln rühren von drei Neonisotopen ^{20}Ne , ^{21}Ne und ^{22}Ne her. Die letzteren waren in dem benutzten Gase nach dem Verfahren von HERTZ (s. u.) stark angereichert. Ihr Mengenverhältnis beträgt im gewöhnlichen Neon 90,0:0,27:9,73. (Wir geben künftig, wenn nötig, die Atommasse in runden Atomgewichtseinheiten durch einen links oben gesetzten Index an. ^{20}Ne bedeutet also ein Neon vom Atomgewicht 20.) Bei vielen anderen Stoffen ist die Zahl der Isotope beträchtlich größer. So hat das Zinn elf Isotope mit allen Massen zwischen 114 und 124, von denen das ^{118}Sn mit rund 22% im gewöhnlichen Zinn am stärksten vertreten ist.

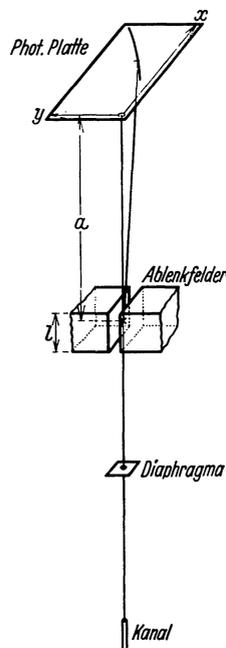


Abb. 596. Schema der Parabelmethode. (Nach LUKANOW und SCHÜRZE.)

Unter den Elementen mit ungerader Ordnungszahl sind — vom Wasserstoff abgesehen — nur solche mit höchstens zwei Isotopen bekannt. Bis heute sind rund 260 verschiedene Atomarten gefunden worden, die den 89 bekannten Elementen angehören, darunter zahlreiche isobare Atomarten, wobei instabile Atomarten (§ 362) nicht mitgezählt sind. Sie würden die Zahl, die sicher noch wachsen wird, beträchtlich erhöhen. Unter diesen 260 Atomarten sind fast sämtliche Atomgewichte zwischen 1 und 238 vertreten. Unter den leichteren stabilen Atomarten fehlt nur diejenige mit dem Atomgewicht 5.

Die massenspektroskopischen Messungen haben das wichtige Ergebnis gehabt, daß die Atommassen, also die wahren Atomgewichte, bezogen auf Sauerstoff gleich 16,0000, durchweg mit großer Annäherung ganzzahlig sind. Die

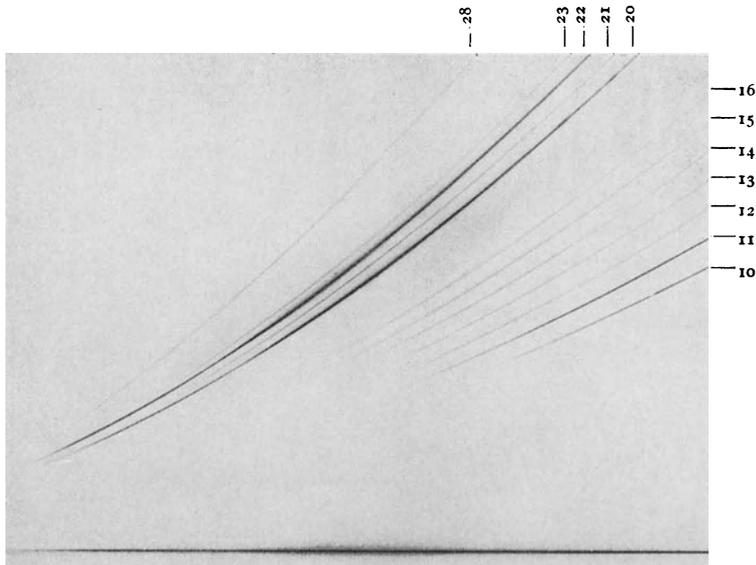


Abb. 597. Massenspektrogramm des Neon. (Nach LUKANOW und SCHÜTZE.)

weitaus größte Abweichung zeigt der Wasserstoff mit 1,00776. Überblickt man das periodische System, so sieht man, daß die dort angeführten, auf chemischem Wege bestimmten (internationalen) Atomgewichte zwar bei den meisten leichten Elementen nahezu ganze Zahlen sind, aber nicht bei den schwereren. Das liegt daran, daß bei den leichteren Elementen, sofern sie nicht überhaupt Reinelemente sind, ein Isotop die anderen an Menge sehr stark überwiegt. Bei Elementen mit mehreren Isotopen (Mischelementen) kann die chemische Atomgewichtsbestimmung nur das mittlere Atomgewicht der beteiligten Isotope ergeben, zu dem jedes Isotop nach Maßgabe seiner Menge beiträgt. Es ist sehr bemerkenswert, daß die mengenmäßige Zusammensetzung der Elemente (von Einflüssen der Radioaktivität abgesehen) unabhängig von ihrer Herkunft, z. B. aus alten oder jungen Mineralien und sogar aus Meteoriten, stets die gleiche ist, so daß auch Mischelemente verschiedener Herkunft stets das gleiche chemische Atomgewicht besitzen.

Die Tatsache, daß an vier Stellen des periodischen Systems der Gang des Atomgewichts nicht mit dem der Ordnungszahl übereinstimmt (Ar—K, Co—Ni, Te—J, Th—Pa), erklärt sich dadurch, daß zufällig in dem Element von kleinerer Ordnungszahl die schweren, in dem Element von größerer Ordnungszahl die leichten Isotope mengenmäßig überwiegen.

Isotope können nur auf physikalischem Wege auf Grund ihrer verschiedenen Masse getrennt werden. Das wirksamste Verfahren zur *Trennung gasförmiger Isotope* hat G. HERTZ entwickelt. Es beruht darauf, daß ein leichteres Isotop schneller durch einen porösen Tonzylinder (§ 65) oder durch einen Schleier von Quecksilberdampf diffundiert als ein schwereres.

Die Isotopie eines Elements macht sich in seinem Spektrum bemerkbar. Bei den Linienspektren muß die Verschiedenheit der Kernmassen zweier Isotope zu einer Verdoppelung der Spektrallinien führen (§ 342). Die Wirkung ist aber nur bei den allerleichtesten Elementen so groß, daß sie zu einer mit einem gewöhnlichen Spektrometer beobachtbaren Trennung der beiden Linien führt (Abb. 598). Durchaus deutlich ist aber der Einfluß der Isotopie bei den Rotationsschwingungs- und den Bandenspektren der Moleküle, da die Masse der Atome des Moleküls natürlich einen Einfluß auf die Rotations- und Schwingungsterme hat. An Stelle jeder einzelnen Linie treten je nach der Zahl der Isotope zwei oder mehr nahe benachbarte Linien auf. Sehr schön ist ein solcher *Isotopieeffekt* in Abb. 582 (§ 348) erkennbar. Die Hauptmaxima gehören dem Chlorisotop ^{35}Cl an, die stärkeren Nebenmaxima dem ^{37}Cl . Ob die schwächeren Nebenmaxima einem Isotop ^{39}Cl angehören, wird bezweifelt, da dieses anderweitig nicht nachweisbar ist. Aus dem Bandenspektrum des Sauerstoffmoleküls ist festgestellt worden, daß auch der Sauerstoff kein Reinelement ist, sondern außer dem ^{16}O noch in sehr geringen Mengen (Größenordnung 0,1%) die Isotope ^{17}O und ^{18}O enthält. Das genaue Atomgewicht 16,0000, das auf Grund internationaler Vereinbarung dem gewöhnlichen Sauerstoff zukommt, ist also tatsächlich das mittlere Atomgewicht eines Isotopengemisches. Das Atomgewicht von ^{16}O ist ein wenig kleiner.

Von allergrößter Bedeutung ist die Tatsache, daß 1933 UREY und Mitarbeiter im BALMER-Spektrum des Wasserstoffs (§ 341) neben den einzelnen Linien je einen ganz schwachen Begleiter entdeckten, der nur von einem Isotopieeffekt herrühren konnte, den ein Wasserstoffisotop von der Masse 2 hervorruft. Dieses Isotop ^2H zum gewöhnlichen Wasserstoff ^1H , der *schwere Wasserstoff*, auch *Diplogonium* oder *Deuterium* genannt, wird meist nicht mit dem Symbol H, sondern mit D (^2D) bezeichnet. Sein Kern heißt *Deuton*. Später wurde in ganz geringen Spuren auch noch ein Isotop ^3H (^3T , Triplogonium, Tritium) entdeckt. Es ist isobar mit dem ebenfalls sehr seltenen Heliumisotop ^3He .

Diesen Isotopen des Wasserstoffs kommt deshalb eine so große Bedeutung zu, weil ihr Massenverhältnis 3:2:1 sehr viel extremer ist, als in irgendeinem anderen Fall. Aus diesem Grunde sind in diesem Fall auch Unterschiede im chemischen Verhalten zu erwarten, z. B. in der Reaktionsgeschwindigkeit. Bei dem Isotop ^2D sind solche Unterschiede bereits in zahlreichen Fällen nachgewiesen worden. Da die Mehrzahl aller chemischen — vor allem alle organischen — Verbindungen Wasserstoff enthält, so ist es für die Chemie von allergrößter Bedeutung, die Änderungen im chemischen Verhalten von Stoffen zu untersuchen, die statt mit dem leichten mit dem schweren Wasserstoff gebildet sind. Auch andere wichtige Fragestellungen der Chemie und der Biologie können mit Hilfe des schweren Wasserstoffs angegriffen werden.

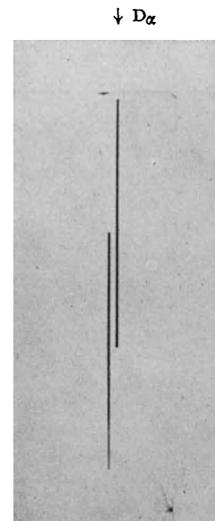


Abb. 598.
 H_{α} -Linie des leichten und
 D_{α} -Linie des schweren Wasserstoffs. (Nach HARMSEN, HERTZ und SCHÜTZKE.)

Wasser, das statt des leichten Wasserstoffs den schweren enthält, also D_2O , *schweres Wasser*, unterscheidet sich stark vom gewöhnlichen Wasser H_2O , wie Tabelle 38 zeigt.

Auch in biologischer Hinsicht scheint schweres Wasser in manchen Fällen anders zu wirken, als gewöhnliches Wasser.

Abb. 598 zeigt den Isotopieeffekt an einer Linie der BALMER-Serie (s. oben), aufgenommen mit einer Mischung von gleichen Teilen 1H und 2D . (Bei der

Tabelle 38. Gewöhnliches und schweres Wasser.

	H_2O	D_2O
Dichte bei $20^\circ C$	0,9982	1,1056 g · cm ⁻³
Größte Dichte bei	+4,0	+11,6° C
Schmelzpunkt	0,00	+ 3,82° C
Normaler Siedepunkt	100,00	101,42° C
Zähigkeit	1,05	1,3 g · cm ⁻¹ · sec ⁻¹
Oberflächenspannung	72,8	67,7 dyn · cm ⁻¹

Aufnahme wurde einmal das obere, dann das untere Drittel der Platte verdeckt gehalten.) Das Bandenspektrum (Viellinienspektrum) des Moleküls D_2 ist von dem des H_2 merklich verschieden (Abb. 599 oben und

unten). In einem Gemisch von H_2 und D_2 dissoziiert ein Teil der Moleküle unter der Wirkung der elektrischen Entladung, die das Gas zum Leuchten bringt. Dann bilden sich auch HD-Moleküle, so daß sich im Spektrum die Linien aller drei Molekülarten überlagern (Abb. 599, Mitte).

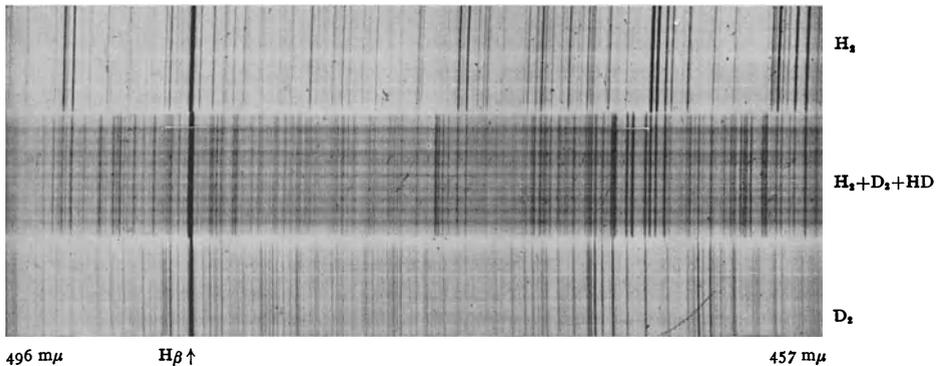


Abb. 599. Viellinienspektrum a von H_2 , b von $H_2 + HD + D_2$, c von D_2 . (Nach HERTZ.)

Bei der Elektrolyse von Wasser wird aus Gründen, die man heute nur vermutungsweise angeben kann, der schwere Wasserstoff erheblich langsamer abgeschieden als der leichte, so daß sich das Wasser an schwerem Wasserstoff anreichert. Derart angereichertes Wasser, das heute bereits käuflich ist, dient als Ausgangsstoff für die Darstellung von schwerem Wasserstoff.

359. Das Neutron und das Positron. Bevor wir in der Besprechung der Atomkerne fortfahren, müssen wir uns mit zwei weiteren Elementarteilchen bekannt machen, die in den letzten Jahren entdeckt wurden. 1930 bemerkten BOTHE und BECKER, daß einige leichtere Elemente, besonders stark das Beryllium, bei Beschießung mit Alphastrahlen eine sehr durchdringende Strahlung aussenden, die sie zunächst für eine sehr kurzwellige Gammastrahlung hielten. CHADWICK konnte aber nachweisen, daß ein Teil dieser Strahlung aus Teilchen besteht, deren Masse derjenigen des Wasserstoffkerns (Protons) nahezu gleich ist. Sie sind aber nicht geladen und heißen deshalb *Neutronen*. Ihre große Durchdringungsfähigkeit rührt daher, daß sie wegen des Fehlens einer eigenen Ladung durch die Ladungen der Atome der von ihnen durchdrungenen Stoffe

nicht beeinflußt werden. Sie werden also nur in den sehr seltenen Fällen aufgehalten, in denen sie einen Kern unmittelbar treffen. Die Neutronen sind Kerne mit der Ladung Null, also auch der Ordnungszahl 0. Die Frage, ob das Neutron als ein weiterer Urbaustein der Materie zu betrachten ist oder als die Vereinigung eines Protons (Wasserstoffkernes) und eines Elektrons zu einem Kern, ist noch nicht entschieden. Im ersten Falle wäre möglicherweise das Proton als ein Kern zu betrachten, der durch Vereinigung eines Neutrons mit einem Positron (s. u.) entsteht. Vielleicht ist aber diese Frage überhaupt gegenstandslos.

Im Jahre 1932 entdeckte ANDERSON, daß sich in der von der Ultrastrahlung (§ 363) ausgelösten Sekundärstrahlung Teilchen befinden, die die gleiche Masse wie die Elektronen, aber eine positive Ladung von 1 Elementarquantum haben. Es handelt sich also um *positive Elektronen*, denen man den Namen *Positronen* gegeben hat. Abb. 600 zeigt die WILSON-Aufnahme (§ 357), auf der das erste Positron entdeckt wurde. Es ist an der oberen Wand der Nebelkammer, in der ein zur Bildebene senkrechtes magnetisches Feld herrscht, ausgelöst. Seine durch das Feld bewirkte Bahnkrümmung ist diejenige eines positiven Teilchens. Es tritt in der Mitte der Kammer durch eine Bleiplatte, wodurch seine Geschwindigkeit vermindert und seine Bahnkrümmung verstärkt wird. Die Existenz von Positronen hat DIRAC bereits vorausgesagt. Während in der klassischen Mechanik die kinetische Energie eines Körpers ihrer Definition nach immer nur positiv sein kann, läßt die DIRACsche Theorie auch den Begriff der negativen kinetischen Energie zu. Nach dieser Theorie gibt es außer den quantenhaften Zuständen mit positiver kinetischer Energie, die die Elektronen in den Elektronenschalen der Atome einnehmen, auch quantenhafte Zustände negativer kinetischer Energie. Da nun die Elektronen stets den Zustand kleinster Energie einzunehmen streben, so sind die letzteren Zustände in der Regel sämtlich besetzt. Die Elektronen sind dann aber der Wahrnehmung nicht zugänglich. Ist μ die Masse eines Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit, so ist der größte mögliche Betrag der negativen kinetischen Energie $-\mu c^2$ erg. Ein ruhendes Elektron aber besitzt die Energie $+\mu c^2$ erg (§ 330). Demnach ist mindestens die Arbeit $2\mu c^2$ erg = $1,18 \cdot 10^6$ eV (§ 346) erforderlich, um ein nicht beobachtbares Elektron mit negativer kinetischer Energie in ein ruhendes Elektron zu verwandeln, und noch mehr, wenn es in ein beobachtbares, bewegtes Elektron verwandelt wird. Geschieht dies aber, so entsteht ein unbesetzter Quantenzustand negativer kinetischer Energie. Wie DIRAC nun weiter gezeigt hat, muß sich die Stelle, an der sich vorher das Elektron mit negativer kinetischer Energie befunden hat, genau so verhalten, wie ein positives Elektron, ein Positron (*Löchertheorie*). Hieraus folgt, daß das Auftreten eines Positrons mit dem Auftreten eines vorher unbeobachtbaren Elektrons gekoppelt sein muß. Tatsächlich wird ein solches paarweises Auftreten von Elektronen und Positronen auch in sehr vielen Fällen beobachtet. Sobald der Zustand negativer

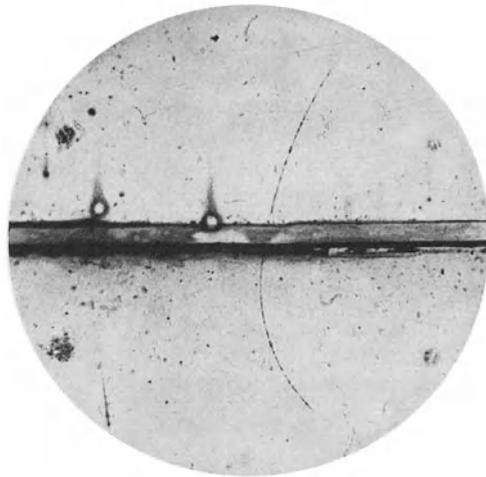


Abb. 600. Bahn eines Positrons. (Nach ANDERSON.)

kinetischer Energie wieder von einem Elektron besetzt wird, muß das Positron wieder verschwinden. Da dies immer sehr schnell geschieht, sind Positronen nur sehr kurzlebig, und es wird verständlich, weshalb sie erst so spät entdeckt wurden. In der Folge konnten Positronen auch mit anderen Strahlen erzeugt werden (ANDERSON, MEITNER und PHILIPP, JOLIOT), deren Energie genau bekannt ist. Dabei hat es sich bestätigt, daß diese Energie mindestens den obigen Betrag von $1,18 \cdot 10^6$ eV erreichen muß, damit Positronen auftreten. Besonders interessant ist die Erzeugung von Elektronen-Positronenpaaren aus Gammastrahlen, da es sich hier sozusagen um eine Erzeugung von Materie auf Kosten von Lichtenergie handelt.

360. Der Bau der Atomkerne. Die Ganzzahligkeit der wahren Atomgewichte sowie die Erscheinungen der Radioaktivität weisen eindringlich darauf hin, daß die Atomkerne keine unteilbaren Gebilde sind, sondern aus einigen wenigen elementaren Bausteinen bestehen. Bereits 1815 vermutete PROUT, daß alle Atome aus Wasserstoff aufgebaut seien. Heute stehen uns für den Aufbau der Kerne vier elementare Gebilde zur Verfügung: der Wasserstoffkern, meist *Proton* genannt, das *Neutron*, beide etwa von gleicher Masse, ersteres aber mit einem positiven Elementarquantum geladen, ferner das *Elektron* mit einem negativen, das *Positron* mit einem positiven Elementarquantum, beide von gleicher Masse, die 1838,3mal kleiner ist als die des Protons. Es wird aber heute allgemein angenommen, daß am Aufbau der Kerne nur Protonen und Neutronen beteiligt sind, von denen die Protonen die Kernladung bestimmen. Wir sehen hier zunächst davon ab, daß das Proton und das Neutron ein etwas größeres Atomgewicht als 1 haben, und betrachten auch alle anderen Atomgewichte als streng ganzzahlig. Ist μ die Masse eines Protons oder Neutrons, ε das elektrische Elementarquantum, so beträgt die Masse eines Kernes, der aus n_p Protonen und n_n Neutronen besteht, $\mu(n_p + n_n)$ und seine Ladung εn_p . Da μ gleich 1 Atomgewichtseinheit ist, so beträgt das Atomgewicht des Kernes $A = n_p + n_n$ und seine der Kernladungszahl gleiche Ordnungszahl $z = n_p$. Die Protonenzahl ist also unmittelbar gleich der Ordnungszahl, die Neutronenzahl $n_n = A - z$. Zum Beispiel enthält der Kern des Bromisotops $^{79}_{35}\text{Br}$ 35 Protonen und $79 - 35 = 44$ Neutronen. (Das Symbol $^{79}_{35}\text{Br}$ bedeutet, daß es sich um ein Atom vom Atomgewicht 79 und der Ordnungszahl 35 handelt). Der Kern des leichten Wasserstoffes ^1_1H besteht nur aus 1 Proton, der des schweren Wasserstoffes ^2_1D aus 1 Proton und 1 Neutron, der des Wasserstoffisotops ^3_1T aus 1 Proton und 2 Neutronen. Der Kern des seltenen Heliums ^3_2He hingegen enthält 2 Protonen und 1 Neutron, der des gewöhnlichen Heliums ^4_2He 2 Protonen und 2 Neutronen. Im Bereich der leichteren Atome ist (mit Ausnahme des Heliumisotops ^3_2He und des Kohlenstoffisotops $^{13}_6\text{C}$) die Zahl der Neutronen durchweg gleich der Zahl der Protonen oder nur um eine oder zwei Einheiten größer. Bei den schwereren Atomen vom Cl (17) ab, wächst aber die Neutronenzahl schneller als die Protonenzahl. So besitzt der Wismutkern $^{209}_{83}\text{Bi}$ 83 Protonen und 126 Neutronen. Selbstverständlich müssen zwischen den Protonen und Neutronen im Kern sehr starke bindende Kräfte wirksam sein. Über die Art dieser Kräfte und die Gesetze, denen sie gehorchen, ist aber bisher nur sehr wenig bekannt. Die *Theorie der Atomkerne* ist erst in den Anfängen. Daß sie eine Quantentheorie ist, die in wesentlichen Zügen der Theorie der Elektronenhüllen der Atome verwandt ist, steht außer Zweifel. Auch im Kern gibt es Energiestufen und Quantensprünge. Ob man aber mit der Quantentheorie in ihrer heutigen Gestalt auskommen wird, oder ob hier noch Überraschungen bevorstehen, kann heute noch nicht entschieden werden.

Tatsächlich beträgt nun die Masse des Protons 1,00721, die des Neutrons etwa 1,008. Der aus 2 Protonen und 2 Neutronen bestehende Heliumkern

aber hat die Masse 4,001, die also kleiner ist als die Massensumme jener Bausteine. Das gleiche zeigt sich bei den schwereren Atomen. Sie haben einen *Massendefekt*. Die Erklärung liefert die Relativitätstheorie. Die vier Bausteine des Heliumkernes ${}^4_2\text{He}$ besitzen in seinem Verbande eine viel kleinere gegenseitige potentielle Energie als im getrennten Zustande. Bei der Bildung eines Heliumkernes wird also Energie frei. Da aber jede Energie E die Masse E/c^2 besitzt (§ 330), so fehlt dem Heliumkern diejenige Masse, die der freigewordenen Energie entspricht. Man kann daher aus dem Massendefekt die „Wärmetönung“ (§ 129) bei der Bildung eines Heliumkernes berechnen. Für 1 Mol = 4 g Helium ergibt sich so eine Wärmetönung von rund $5 \cdot 10^{11}$ cal, die ungeheuer groß ist gegenüber derjenigen bei irgendwelchen chemischen Umwandlungen. Sie würde ausreichen, um 5 Millionen Liter Wasser von 0° auf 100° zu erwärmen.

Gäbe es keinen Massendefekt, so müßte die Masse m eines Atomkerns, der aus n_p -Protonen von der Masse μ_p und n_n -Neutronen von der Masse μ_n besteht, genau gleich $n_p\mu_p + n_n\mu_n$ sein. Tatsächlich ist wegen des Massendefektes $m < n_p\mu_p + n_n\mu_n$. Man bezeichnet den für den Massendefekt charakteristischen Bruch $[(n_p\mu_p + n_n\mu_n) - m]/m$ als den *Packungsbruch* der betreffenden Atomart. Er gibt den relativen Massendefekt je Kernbaustein an.

Aus den Packungsbrüchen kann man schließen, daß in den Atomkernen, soweit das möglich ist, stets je 2 Protonen und 2 Neutronen einen Heliumkern bilden. In dem oben erwähnten Bromkern ${}^{79}_{35}\text{Br}$ treten also 34 Protonen und 34 Neutronen zu 17 Heliumkernen zusammen, so daß der Kern aus 17 Heliumkernen, 10 Neutronen und 1 Proton besteht. Demnach enthält ein Kern nie mehr als ein freies Proton. Kerne ohne freies Proton haben gerade, Kerne mit einem freien Proton ungerade Ordnungszahl. Erstere sind in der Natur viel häufiger als letztere. Besonders häufig sind Kerne mit einem durch 4 teilbaren Atomgewicht.

Es wird vermutet, daß die bei der Bildung von Helium aus 2 Protonen und 2 Neutronen auftretende Wärmetönung den Hauptteil der Wärme der Fixsterne liefert (EDDINGTON). Ohne das Vorhandensein einer sehr ergiebigen Quelle inneratomarer Energie würde die Lebensdauer der Fixsterne außerordentlich viel kürzer sein, als sie es nach unserer Kenntnis von der Entwicklung des Weltalls sein kann.

361. Theorie der Radioaktivität. Da die Atomkerne zu einem wesentlichen Teil aus Heliumkernen bestehen, ist es verständlich, daß beim radioaktiven Zerfall solche Heliumkerne, also Alphastrahlen ausgeschleudert werden. Warum bei der natürlichen Radioaktivität niemals Neutronen oder Protonen ausgeschleudert werden, die es ja neben den Heliumkernen in den Atomkernen gibt, entzieht sich noch unserer Kenntnis. Eine Theorie der *Alphastrahlung* ist von CONDON und von GAMOW entwickelt worden. Es besteht kein Zweifel, daß das COULOMBSche Gesetz zwar bis in einen sehr geringen Abstand von den Kernen gilt (§ 339), daß aber bei weiterer Annäherung an den Kern eine positive Ladung nicht mehr eine Abstoßung, sondern eine Anziehung erfährt. Das Potential zeigt aus diesem Grunde um den Kern herum eine Verteilung, wie sie Abb. 601 schematisch darstellt. Es hat also in einem bestimmten, sehr kleinen Abstände vom Kernzentrum ein Maximum, es bildet eine *Potentialschwelle*. Die Energie der im Kern befindlichen Heliumkerne ist kleiner als die zur Überwindung dieser Potentialschwelle nötige Energie. Das heißt, sie genügt nach den Gesetzen der klassischen Mechanik nicht, um einen Heliumkern zu befähigen, sich aus dem Anziehungsbereich des Kernes bis in den

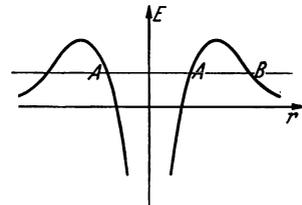


Abb. 601. Potentialverteilung um einen Atomkern.

Abstoßungsbereich zu entfernen. Man spricht von einem „*Potentialtopf*“, in den der Heliumkern auf seinem Energieniveau AA eingeschlossen ist. Nach der Quantenmechanik ist aber nun der Ort eines Teilchens nicht scharf definiert. Es besteht immer nur eine angebbare Wahrscheinlichkeit dafür, es an einem bestimmten Ort anzutreffen. So ist zwar für einen Heliumkern, der sich zur Zeit im Inneren des Kernes befindet, die Wahrscheinlichkeit, es auch in einem etwas späteren Zeitpunkt dort wieder vorzufinden, sehr groß. Aber es besteht doch eine, wenn auch sehr geringe Wahrscheinlichkeit, es einmal außerhalb des Kernes vorzufinden, d. h. es tritt gelegentlich doch immer einmal der Fall ein, daß ein Heliumkern aus dem Kern verschwindet, als Alphastrahl ausgeschleudert wird.

Man kann das wellenmechanisch auch auf folgende Weise anschaulich beschreiben. Wenn ich in einem bestimmten Augenblick *weiß*, daß das Alphateilchen sich noch im Kern befindet, so entspricht dem eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (§ 356), bei der die Materiewellen des Teilchens vollkommen auf das Atominnere beschränkt sind, indem sie an der Potentialschwelle total reflektiert werden. Aber bei der Totalreflexion des Lichtes an einer ausreichend dünnen Schicht dringt immer ein kleiner Teil des Lichtes durch diese hindurch. Das gleiche gilt für die total reflektierten Materiewellen. Hierdurch wird aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Alphateilchens verändert. Sie erstreckt sich mit zunehmender Dichte jetzt auch in den Außenraum. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit, das Alphateilchen im Außenraum anzutreffen, mit der Zeit wächst. Irgendwann — aber wann *wirklich* kann man, da es sich um eine Wahrscheinlichkeit handelt, nicht vorhersagen — wird man es plötzlich im Außenraum vorfinden. Das ist genau das, was man beobachtet.

Nach dem Energieprinzip wäre das Durchschreiten der Potentialschwelle nicht möglich. Es verliert seine Gültigkeit jedoch nur insofern, als der Heliumkern, entgegen dem Energieprinzip, die Potentialschwelle zu durchschreiten vermag („Tunneleffekt“), wobei aber der Begriff des Durch- oder Überschreitens wieder nur als eine Modellvorstellung aufzufassen ist. Wenn der Heliumkern sich außerhalb der Schwelle in B wieder auf dem gleichen Potential befindet, wie innerhalb, so besitzt er auch wieder die gleiche Energie, wie im Innern und seine weitere Bewegung verläuft unter der Wirkung der Kernabstoßung durchaus dem Energieprinzip entsprechend. Die Gültigkeit des Energieprinzips wird durch diese Erkenntnis im übrigen in keiner Weise berührt. Auf Grund dieser Theorie lassen sich die Erscheinungen der Alphastrahlung sehr befriedigend deuten. Auch das wichtige GEIGER-NUTTALLSche Gesetz (§ 357) ergibt sich als eine Folge der Theorie.

Bei den *Betastrahlen* muß zwischen *primären* und *sekundären* Betastrahlen unterschieden werden. Nur die ersteren sind eine unmittelbare Folge einer radioaktiven Umwandlung (*Kern-Betastrahlen*). Die sekundären Betastrahlen werden erst durch Gammastrahlen in der Elektronenhülle ausgelöst. Da die Kerne keine Elektronen enthalten, erscheint es zunächst verwunderlich, daß bei einer radioaktiven Kernumwandlung Elektronen, also Betastrahlen „ausgeschleudert“ werden. Tatsächlich kommen diese nach der heutigen Auffassung gar nicht im eigentlichen, anschaulichen Sinne aus dem Kern. Ihr Auftreten wird vielmehr auf folgende Weise verstanden. Die eigentliche Kernumwandlung besteht darin, daß sich im Kern ein Neutron spontan in ein Proton verwandelt, was der Entstehung eines Positrons am Neutron analog ist. So wie nun Positronen und Elektronen stets paarweise entstehen (§ 359), so ist auch mit diesem Vorgang das Auftreten eines Elektrons, eben eines primären Betastrahls, verbunden. Im Gegensatz zu den Alphastrahlen, die bei der gleichen radioaktiven Umwandlung durchweg gleiche Geschwindigkeit haben, zeigen die

Betastrahlen ein kontinuierliches Geschwindigkeitsspektrum. Gewisse energetische Schwierigkeiten, die sich hieraus ergeben, versucht HEISENBERG dadurch zu beheben, daß er eine weitere Art von Elementarteilchen annimmt, die *Neutrinos*, die gleichzeitig mit den Betastrahlen auftreten sollen, und die die gleiche Masse wie die Elektronen, aber keine Ladung besitzen sollen. Doch ist diese Annahme vorerst noch durchaus hypothetisch.

Der Ursprung der *Gammastrahlen* wird nach ELLIS und MEITNER auf folgende Weise gedeutet. Ohne Zweifel sind die energetischen Zustände im Kern quantenhafter Art, und die normalen Zustände der Kernbestandteile sind, ebenso wie die der Elektronen in der Elektronenhülle des Atoms, diejenigen kleinster möglicher Energie (Grundzustand). Es ist nun möglich, daß bei einer radioaktiven Kernumwandlung die Kernbestandteile zunächst in einen angeregten Quantenzustand versetzt werden, in dem sie eine höhere Energie besitzen als im Grundzustand. Indem sie dann sofort in diesen übergehen, wird der alsdann frei werdende Energiebetrag in Form von Gammastrahlung ausgesandt. Die Energie $h\nu$ der Gammastrahlquanten gibt also in gleicher Weise Auskunft über die Differenzen der Energiestufen des Atomkerns, wie die Energie der Lichtquanten über die Energiestufen in den Elektronenhüllen.

Die Gammastrahlen dringen dann durch die äußere Elektronenhülle des Atomes und können mit den Elektronen in Wechselwirkung treten, indem sie ein Elektron aus der *K*-, *L*-Schale usw. herauswerfen. Ein solches Elektron bildet dann einen sekundären Betastrahl. Die Energie eines Gammastrahlquants geht dabei vollständig in diejenige eines Elektrons über. Ein Teil *A* dient zur Entfernung des Elektrons aus dem Atomverband, der Rest *E'* verbleibt ihm als kinetische Energie. Ist ν die Schwingungszahl eines Gammastrahlquants, als $h\nu$ seine Energie, so ist $E' = h\nu - A$. Die Abtrennungsarbeiten *A* sind aber quantenhaft, da sie den Energiestufen der Elektronen in den Schalen abhängen. Daher kann die kinetische Energie *E'* der Elektronen auch nur quantenhaft sein. Tatsächlich haben die sekundären Betastrahlen keine kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung, wie die primären, sondern es treten nur ganz bestimmte Geschwindigkeiten auf. Sie sind ein Spiegelbild der Röntgensterme des betreffenden Atoms, die durch Abtrennungsarbeiten der Energiestufen der Elektronen in den inneren Elektronenschalen bedingt werden.

362. Kernumwandlungen. Künstliche Radioaktivität. Die *künstliche Umwandlung einer Atomart in eine andere*, wie sie bei der natürlichen Radioaktivität von selbst erfolgt, gelang zuerst RUTHERFORD (1919) durch Beschießung von Atomkernen mit Alphastrahlen. Man nannte das ursprünglich nicht ganz zutreffend eine Atomzertrümmerung. Zahlreiche Atomarten senden, wie RUTHERFORD feststellte, bei Beschießung mit Alphastrahlen, wenn ein Kerntreffer erfolgt, ein Proton von hoher Geschwindigkeit aus (*H-Strahlen*). In Abb. 602 (WILSON-Aufnahme) ist ein solcher Vorgang dort erkennbar, wo sich ein Alphastrahl scheinbar gabelt. Tatsächlich wird das Alphateilchen in den getroffenen Kern eingebaut und dafür ein Proton hinausgeworfen. Die gabelten Bahnen sind die des getroffenen Kerns und des Protons. Ein solcher Vorgang heißt eine *Kernumwandlung* oder *Kernreaktion*. Handelt es sich bei einer Kernumwandlung durch Alphastrahlen z. B. um ein Stickstoffatom ${}^{14}_7\text{N}$, so steigt seine Kernmasse durch Aufnahme eines Heliumkernes ${}^4_2\text{He}$ und Abgabe eines Protons ${}^1_1\text{H}$ um $4 - 1 = 3$ Einheiten, seine Kernladung um $2 - 1 = 1$ Einheit. Es verwandelt sich demnach in ein Atom vom Atomgewicht 17 und der Ordnungszahl 8, also in das Sauerstoffisotop ${}^{17}_8\text{O}$. Man kann das, wie bei einer chemischen Reaktion, durch das Schema ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ beschreiben. In einer solchen Kernreaktionsgleichung muß stets die Summe der oberen und die Summe der unteren Indizes auf beiden Seiten gleich sein (Erhaltung der Masse

und Erhaltung der Ladung, von den sehr kleinen Einflüssen des Massen-defekts abgesehen). Die kinetische Energie des Protons und des Kerns nach dem Vorgang ist größer als diejenige des Alphateilchens vorher. Demnach ist durch die Kernumwandlung inneratomare Energie frei geworden.

COCKCROFT und WALTON ist es 1932 gelungen, Kernumwandlungen auch mit Protonenstrahlen (Wasserstoffkanalstrahlen) zu bewirken. Ein Beispiel ist die Umwandlung des Lithiums ${}^7_3\text{Li}$ nach dem Schema ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2\,{}^4_2\text{He}$, wobei also zwei Heliumkerne entstehen. Hierbei tritt ein Massenverlust ein, indem die Masse zweier Heliumkerne ${}^4_2\text{He}$, um 0,0018 Einheiten = rund $3 \cdot 10^{-26}$ g kleiner ist als die Massensumme ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H}$. Diesem Massenschwund entspricht nach § 330 eine Energie von $2,7 \cdot 10^{-5}$ erg. Tatsächlich besitzt jeder der beiden nach entgegengesetzten Richtungen fliegenden He^4_2 -Kerne (*künstlicher Alphastrahl*), wie man aus ihrer Reichweite feststellen kann, je die Hälfte dieser

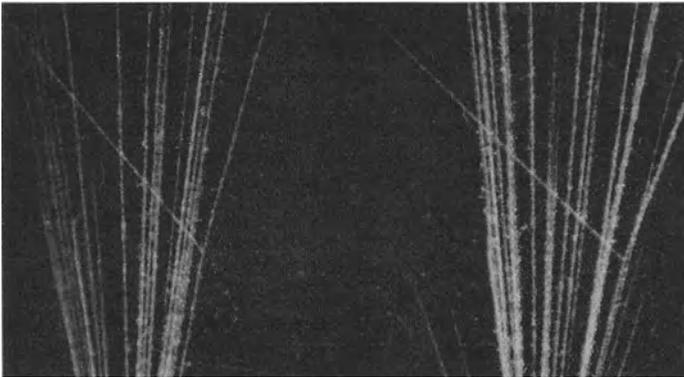


Abb. 602. Atomumwandlung von Stickstoff, stereoskopisch.

freigewordenen Energie — ein besonders schöner und einwandfreier Beweis für die Gültigkeit des Energieprinzips und Impulssatzes auch bei einzelnen Elementarvorgängen.

Besonders wirksam sind Kanalstrahlen des schweren Wasserstoffs ${}^2_1\text{D}$ (Deutonenstrahlen). Dann verläuft z. B. die Umwandlung des Bors ${}^{11}_5\text{B}$ nach dem Schema ${}^{11}_5\text{B} + {}^2_1\text{D} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$. (Mit ${}^1_0\text{n}$ bezeichnen wir das Neutron, Masse 1, Kernladung 0, mit ${}^0_1\text{e}$ das Positron, mit ${}^0_{-1}\text{e}$ das Elektron, Masse praktisch 0, Kernladung +1 bzw. -1). Es entsteht also ein Kohlenstoffatom ${}^{12}_6\text{C}$, und es wird ein Neutron ausgeschleudert. Bei dem Lithiumisotop ${}^6_3\text{Li}$ erfolgt die Umwandlung nach dem Schema ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{D} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H}$. Es verwandelt sich also unter Aussendung eines H-Strahls in sein eigenes Isotop. Eine besonders ergiebige Neutronenquelle bildet die in § 359 erwähnte Umwandlung des Berylliums ${}^9_4\text{Be}$ durch Alphastrahlen, ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$.

Umwandlungen durch Alpha-, Protonen- und Deutonenstrahlen sind nur bei den leichteren Atomarten möglich. Bei den schwereren ist die Abstoßung der positiven Strahlteilchen durch die hohe Kernladung so stark, daß diese nicht durch die Potentialschwelle in den Kern einzudringen vermögen.

Im Jahre 1934 entdeckte das Ehepaar JOLIOT die *künstliche Radioaktivität*. Die bei künstlichen Kernumwandlungen entstehenden Atomkerne sind sehr oft nicht stabil. Bei vielen Stoffen zeigt sich unmittelbar nach ihrer Beschießung mit Alphastrahlen eine deutliche Radioaktivität, die ziemlich schnell abklingt und auch der Gl. (1) (§ 357) gehorcht. Ein Beispiel: Das ${}^{27}_{13}\text{Al}$ verwandelt sich

bei Beschießung mit Alphastrahlen in den Phosphor ${}^{30}_{15}\text{P}$ nach dem Schema ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\text{P} + {}^1_0n$. Dieses Phosphorisotop ist sonst in der Natur nicht bekannt. Das ist verständlich, denn es zerfällt von selbst mit einer Halbwertszeit von $3\frac{1}{4}$ Minuten nach dem Schema ${}^{30}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + {}^0_1e$ in ein isobares Siliziumisotop ${}^{30}_{14}\text{Si}$, wobei ein Positron ausgeschleudert wird, was bei der natürlichen Radioaktivität ebensowenig vorkommt, wie die Ausschleuderung eines Neutrons. Bei der durch Alphastrahlen erzeugten künstlichen Radioaktivität werden stets Positronen ausgeschleudert. Auch Protonen- und Deutonenstrahlen können künstliche Radioaktivität hervorrufen. Bei Beschießung mit Deutonen verwandelt sich der Kohlenstoff ${}^{12}_6\text{C}$ nach dem Schema ${}^{12}_6\text{C} + {}^2_1\text{D} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + {}^1_0n$ unter Aussendung eines Neutrons in einen radioaktiven Stickstoff ${}^{13}_7\text{N}$, der alsbald nach dem Schema ${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + {}^0_1e$ in einen isobaren Kohlenstoff ${}^{13}_6\text{C}$ und ein Positron zerfällt.

Der Angriff auf schwerere Kerne gelang FERMI durch Beschießung mit Neutronen, für die mangels einer Ladung die Potentialschwelle kein Hindernis bildet. Auf diese Weise konnte er bei der Mehrzahl der Elemente künstliche Kernumwandlungen und in vielen Fällen auch künstliche Radioaktivität hervorrufen. Ein Beispiel ist die Umwandlung ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_0n \rightarrow {}^{24}_{11}\text{Na} + {}^4_2\text{He}$ mit nachfolgendem radioaktivem Zerfall ${}^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^0_{-1}e$, bei dem also ein künstlicher Betastrahl entsteht. Daneben tritt aber auch die folgende Umwandlung auf: ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_0n \rightarrow {}^{27}_{12}\text{Mg} + {}^1_1\text{H}$ mit nachfolgendem Zerfall ${}^{27}_{12}\text{Mg} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} + {}^0_{-1}e$. Hierbei entsteht also auf dem Wege über ein radioaktives Magnesiumatom ${}^{27}_{12}\text{Mg}$ wieder das Ausgangsatom, und statt eines Neutrons ist außerhalb des Kerns nunmehr ein Proton und ein Elektron vorhanden. FERMI, sowie später HAHN und MEITNER, gelang es auf diese Weise sogar, das periodische System zu erweitern und „*Transurane*“ — wahrscheinlich bis zur Ordnungszahl 96 — herzustellen, radioaktive Atome, deren Atomgewicht größer ist als das des Urans.

Bei der Beschießung von Beryllium mit Neutronen ist kürzlich die folgende Kernumwandlung festgestellt worden: ${}^9_4\text{Be} + {}^1_0n \rightarrow {}^6_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$ mit nachfolgendem radioaktivem Zerfall des Heliumisotops ${}^6_2\text{He}: {}^6_2\text{He} \rightarrow {}^3_3\text{Li} + {}^0_{-1}e$. Es entsteht hier also ein radioaktives Heliumisotop, das unter Betastrahlung in ein stabiles Lithiumisotop übergeht. Dieses Heliumisotop ist das leichteste aller bisher bekannten künstlich radioaktiven Atome.

Da eine Kernumwandlung nur bei Kerntreffern erfolgt, und da diese natürlich außerordentlich selten sind, so sind die Ausbeuten bei diesen Versuchen sehr gering. Eine künftige Möglichkeit zur praktischen Ausnutzung der künstlichen Radioaktivität durch Ersatz des Radiums und Mesothors in der Heilkunde usw. durch billigere, künstlich radioaktive Stoffe ist trotzdem nicht völlig ausgeschlossen.

Mit den obigen grundlegenden Entdeckungen ist ein völlig neues Gebiet der Physik erschlossen, die *experimentelle Kernphysik*. So wie die Chemie die Gesetze des Molekülbaues durch planmäßigen Auf- und Abbau der Moleküle erforscht hat, so ist es heute möglich, in die Gesetze des Kernbaues durch planmäßigen Auf- und Abbau der Kerne einzudringen. Es besteht daher die Hoffnung, daß wir den Aufbau der Materie aus ihren elementaren Bausteinen in absehbarer Zeit vollkommen erforscht und alsdann auch nach Entwicklung einer *Kerntheorie* vollkommen erfaßt haben werden. Es ist eine denkwürdige Tatsache, daß sich der alte Traum der Alchemie, der der stärkste Antrieb zur Entwicklung der Chemie gewesen ist, nunmehr dank den Hilfsmitteln der neuzeitlichen Physik in ihrem Rahmen erfüllt. Obgleich aber die Herstellung von Goldatomen, z. B. aus Quecksilberatomen, heute durchaus möglich ist, kann natürlich von einer eigentlichen „Goldmacherei“, der Erzeugung verwertbarer Goldmengen, der geringen Ausbeute wegen in keiner Weise die Rede sein.

363. Ultrastrahlung. Die Luft in der Nähe des Erdbodens ist stets merklich ionisiert. Das rührt zum größten Teil von radioaktiven Stoffen im Erdboden her. Daher nimmt auch die Ionisation zunächst mit der Höhe ab. Im Jahre 1910 aber entdeckte GOCKEL bei Ballonaufstiegen, daß sie in der Höhe wieder zunimmt. Später wurde dies für größere Höhen von HESS bestätigt und zuerst richtig gedeutet. Diese Ionisation kann nur von einer Strahlung herühren, die von außen in die Erdatmosphäre einfällt und in dieser durch Absorption geschwächt wird. Diese Strahlung ist außerordentlich durchdringend und konnte von REGENER im Bodensee noch in 300 m Wassertiefe nachgewiesen werden. Ihre Stärke ist zu allen Tageszeiten die gleiche und zeigt nur geringe, mit der Änderung des Luftdruckes zusammenhängende Schwankungen, so daß man schließen muß, daß sie gleichmäßig von allen Seiten her aus dem Weltraum kommt. Man bezeichnet sie als *Ultrastrahlung*, *kosmische* oder *Höhenstrahlung*. Um ihre weitere Erforschung haben sich insbesondere REGENER, MILLIKAN, GEIGER, BOTHE und KOLHÖRSTER verdient gemacht. REGENER ließ schreibende Meßgeräte mit Pilotballonen bis in Höhen von etwa 30 km, also weit in die Stratosphäre, aufsteigen und konnte zeigen, daß sich die Stärke der Ultrastrahlung in diesen Höhen, über denen nur noch eine sehr geringe Luftmasse liegt, wie zu erwarten, einem konstanten Grenzwert nähert.

Die Ultrastrahlung vermag in der von ihr durchstrahlten Materie äußerst heftige Elementarvorgänge auszulösen, die auch in der WILSON-Kammer sichtbar gemacht werden können. Besonders auffällig ist das Auftreten von sog. *Schauern*, die darin bestehen, daß gleichzeitig am gleichen Ort — also offenbar in einem einzigen Elementarakt — eine größere Zahl von Sekundärstrahlen, bis zu mehreren hundert, ausgelöst wird, die teils aus sehr schnellen Elektronen und Positronen, teils aus sehr energiereichen Lichtquanten bestehen.

Die Erforschung der Ultrastrahlung ist noch in ihren Anfängen, so daß auch die Frage nach ihrem Wesen bisher nur sehr unvollkommen geklärt ist. Auf Grund ihrer ungeheuren Durchdringungsfähigkeit kann man aber heute zu keinem anderen Schluß kommen, als daß es sich primär um Massenteilchen von außerordentlich großer Geschwindigkeit handelt. Nach GEIGER kann es sich wahrscheinlich nicht um Elektronen, sondern nur um schwerere Teilchen handeln. Außerdem deutet der sog. *Breiteneffekt* darauf hin, daß es sich um geladene Teilchen handelt. Ihre Stärke ist nämlich an den Polen ein wenig größer als am Äquator. Das ist aber bei geladenen Teilchen als eine Wirkung des erdmagnetischen Feldes zu erwarten. Eine gleiche Wirkung ist bei den Elektronenströmen bekannt, die von der Sonne her zur Erde gelangen. Das erdmagnetische Feld lenkt diese auf die Pole hin ab, wo ihr Einbruch in die Atmosphäre die Polarlichter erzeugt. Daß die ablenkende Wirkung bei der Ultrastrahlung viel geringer ist, ist auf Grund ihrer sehr großen Energie begrifflich.

Nach GEIGER muß man sich von der Ultrastrahlung und den von ihr ausgelösten Wirkungen folgende Vorstellung machen. Die Primärstrahlung (A-Strahlung) besteht aus geladenen Teilchen mit einer Energie von 10^{11} eV oder darüber. Diese erzeugt beim Durchgang durch die Atmosphäre eine sehr durchdringende Wellenstrahlung (B-Strahlung), deren Quanten eine Energie $h\nu$ von 10^8 bis 10^{11} eV haben. (Man vergleiche damit die Energie der Alphastrahlen, die nur von der Größenordnung 10^6 eV ist.) Die B-Strahlung ist es, die in Blei die oben erwähnten Schauer auslöst, deren Reichweite in Blei etwa 2 cm beträgt. Die Schauer (C-Strahlung) wiederum lösen bei ihrer Bremsung in durchstrahlten Stoffen (bisher wurde stets mit Blei gearbeitet) eine Wellenstrahlung (D-Strahlung) aus, deren Quanten $h\nu$ eine Energie von der Größenordnung 10^6 eV haben. Diese schließlich erzeugt in der Materie durch lichtelektrische und COMPTON-

Effekte eine weiche Elektronenstrahlung (E-Strahlung). Es handelt sich also um äußerst verwickelte Erscheinungen.

Der Ursprung der Ultrastrahlung ist völlig dunkel. Bei ihrer Entstehung muß es sich wohl um irgendwelche Elementarvorgänge handeln. Uns ist jedoch bis heute kein Elementarvorgang an einem Atom bekannt, wir vermögen auch keinen solchen zu ersinnen, bei dem auch nur annähernd diejenige Energie frei würde, die wir den primären Ultrastrahlteilchen mindestens zuschreiben müssen. Hier bleibt eine der interessantesten Fragen der heutigen Physik offen. Ihre Lösung wird einmal einen wichtigen Erkenntnisfortschritt bedeuten.

IV. Kristalle.

364. Grundtatsachen des Kristallbaus. Wir haben bereits erwähnt, daß die eigentlichen festen Körper, die Kristalle, sich von den amorphen festen Körpern durch die regelmäßige Anordnung ihrer elementaren Bausteine, ihre *Raumgitterstruktur*, unterscheiden, und daß diese durch die *Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen* (VON LAUE 1912) ermittelt werden kann (§ 314). Der regelmäßige Bau der einzelnen Elementarbereiche eines Kristalls, der sich von einem Elementarbereich zum andern stets in genau gleicher Weise wiederholt, bewirkt, daß die Kristalle auch in ihrem äußeren Bau die bekannte Regelmäßigkeit zeigen. Sie sind konvexe Polyeder, die von ebenen Flächen begrenzt sind und daher auch stets gerade Kanten haben.

Die *Kristallsystematik* ordnet die Vielfalt der Kristalle ursprünglich nach ihrer äußeren Gestalt (BRAVAIS 1848, SOHNCKE 1879, SCHÖNFLIESS 1891). Sie beruht auf einigen grundlegenden Gesetzen und gewissen Symmetrieeigenschaften der Kristalle. Die auf dieser Grundlage entwickelte Systematik ist mit derjenigen identisch, die sich später folgerichtig auch aus der Raumgittertheorie ergeben hat. Wir erwähnen hier nur die allerwichtigsten, zum allgemeinen Verständnis der Systematik nötigen Tatsachen:

1. *Das Gesetz der konstanten Neigungswinkel* (STÉNO 1669, ROMÉ DE L'ISLE 1772): Zwei gleiche Kanten der Kristalle des gleichen Stoffs bilden — sofern die Kristalle unter gleichen Bedingungen gewachsen sind — miteinander stets gleiche Winkel. Beim Wachsen eines Kristalls verschieben sich seine Flächen parallel zu sich selbst, so daß diese Winkel erhalten bleiben. Das ist auf Grund der Raumgittertheorie leicht verständlich.

2. *Das Gesetz der einfachen, rationalen Indizes* (HAÜY). Man wählt einen Punkt im Innern eines Kristalls als Ursprung eines Koordinatensystems, dessen Achsen (a , b , c) parallel zu drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten des Kristalls sind. Das Koordinatensystem ist also sehr oft schiefwinkelig. Die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems unter den verschiedenen möglichen ist eine Frage der Zweckmäßigkeit. Ferner wählt man unter den Flächen des Kristalls — wieder nach Gründen der Zweckmäßigkeit — eine bestimmte Fläche aus. Sie schneidet die drei Achsen in drei Punkten, die die Abstände a , b , c vom Koordinatenursprung haben (Abb. 603). Dabei kommt es nur auf das Verhältnis $a : b : c$ an, das sich nicht ändert, wenn die Fläche parallel zu sich selbst verschoben wird, z. B. wenn der Kristall wächst. Wesentlich ist also nur die Richtung der Flächennormalen. Diese Fläche nebst dem genannten Verhältnis bildet die sog. *Grundform* des Kristalls. Entsprechend schneidet jede andere Fläche des Kristalls die drei Achsen in drei Punkten (von denen einer oder zwei auch im unendlichen liegen können), deren Abstände vom Ursprung wir allgemein mit a_i , b_i , c_i bezeichnen wollen. Dann kann die Lage

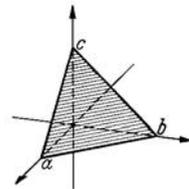


Abb. 603. Zum Gesetz der einfachen, rationalen Indizes.

dieser Fläche — genauer gesagt die Richtung ihrer Flächennormalen — wieder durch das Verhältnis $a_i : b_i : c_i$ gekennzeichnet werden. Diese Abstände können auch negative Werte annehmen, wenn der betreffende Schnittpunkt auf der negativen Seite der Achse liegt. Man bezieht nun das vorstehende Verhältnis auf die Grundform, indem man setzt

$$a_i : b_i : c_i = \frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}. \quad (I)$$

Die Zahlen h, k, l heißen die *Indizes* der betreffenden Fläche. Durch ihre Angabe ist die Lage der Fläche vollkommen bestimmt.

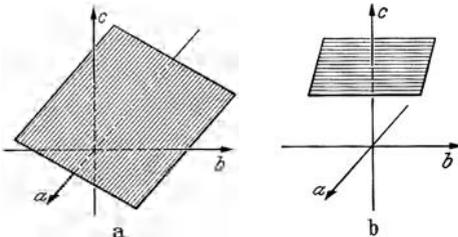


Abb. 604. a Fläche parallel zur a -Achse ($0kl$), b Fläche parallel zur (ab) -Ebene ($00l$).

Das Gesetz der einfachen, rationalen Indizes sagt aus, daß die Indizes h, k, l sich stets durch einfache, rationale Zahlen darstellen lassen, von denen eine oder zwei auch gleich Null sein können. Ist z. B. $h = 0$, so ist nach Gl. (I) $a_i = \infty$, d. h. die Fläche schneidet die a -Achse überhaupt nicht, ist also zu ihr parallel (Abb. 604a). Ist $h = k = 0$, so ist $a_i = \infty$ und $b_i = \infty$, die Fläche also parallel zur (ab) -Ebene (Abb. 604b). Besonders häufig

kommen Flächen mit ganz einfachen Indizes (hkl) wie (001) , (010) , (100) , (110) , (101) , (011) , (211) , (121) usw. vor.

3. *Kristallsymmetrien*. Ist die Raumgitterstruktur eines Kristalls in mehreren Richtungen die gleiche (*gleichwertige Richtungen*), so müssen auch die in solchen Richtungen gewachsenen Flächen als *gleichwertige Flächen* angesehen werden. Unter *Symmetrie* versteht man an einem Kristall alle Regelmäßigkeiten, die ihre Ursache darin haben, daß er gleichwertige Flächen, also auch gleichwertige Richtungen besitzt. Man erkennt die Symmetrien durch gedachte Vornahme gewisser *Deckoperationen*. Darunter versteht man solche Operationen, durch die ein normal gewachsener, einheitlicher Kristall in sich selbst übergeht, genauer gesagt durch die alle gleichwertigen Richtungen des Kristalls in sich selbst übergehen, so daß sich die Indizes aller am Kristall vorhandenen Flächen paarweise in diejenigen einer anderen gleichwertigen Fläche des Kristalls verwandeln.

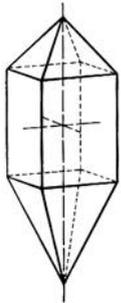


Abb. 605. Kristall mit vierzähliger Drehachse. (Nach NIGGLI.)

Das kann erstens durch eine Drehung des Kristalls um eine *Drehachse* erfolgen. Abb. 605 zeigt einen Kristall, der durch eine Drehung um 90° um die c -Achse in sich selbst übergeht. Man kann diese Deckoperation viermal im gleichen Sinne wiederholen, bis der Kristall wieder identisch in seine Anfangslage zurückkehrt. Deshalb wird die Drehachse in diesem Fall als vierzählig bezeichnet. Allgemein heißt eine Achse n -zählig, wenn die kleinste für eine Deckoperation nötige Drehung $360^\circ/n$ beträgt. Aus dem Gesetz der einfachen, rationalen Indizes läßt sich ebenso wie aus der Raumgittertheorie *beweisen*, daß es nur *zweizählige* (digonale), *dreizählige* (trigonale), *vierzählige* (tetragonale) und *sechszählige* (hexagonale) *Drehachsen* geben kann. Dem entspricht, daß die Drehwinkel nur 180° , 120° , 90° oder 60° betragen können. Auf Grund der Raumgittertheorie hängt dies damit zusammen, daß eine Zerlegung einer Ebene in lauter gleiche gleichseitige, regelmäßige Polygone nur mit Drei-, Vier- und Sechsecken möglich ist.

Zweitens kann eine Deckoperation durch Spiegelung an einer im Kristall gedachten Ebene (*Spiegelebene*) erfolgen. Bei dem in Abb. 606 dargestellten

Kristall geht durch Spiegelung an der gezeichneten Ebene die rechte Kristallhälfte in die linke, die linke in die rechte über.

Drittens gibt es Deckoperationen durch *gleichzeitige* Vornahme einer Drehung *und* einer Spiegelung. Bei einer solchen *Drehspiegelung* wird also der Kristall um eine bestimmte Achse (*Drehspiegelachse*) gedreht und an einer zu dieser Achse senkrechten Ebene (*Drehspiegelebene*) gespiegelt. Ebenso wie die Drehachsen können auch die Drehspiegelachsen nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein. Abb. 607 zeigt das Schema einer zweizähligen Drehspiegelachse. Durch Drehung um 180° um die Achse und gleichzeitige Spiegelung an der zur Achse senkrechten Ebene geht Punkt 1 in Punkt 2 über und Punkt 2 in Punkt 1. In diesem Fall kommt es aber auf die räumliche Lage der Ebene nur insofern an, als sie durch den Punkt *Z* gehen muß, der die Strecke 1—2 halbiert. Jede der unendlich vielen Ebenen, die dieser Bedingung genügen, nebst der zu ihr senkrechten Achse, erfüllt den gleichen Zweck. Daher ist die Existenz eines *Symmetriezentrum* *Z* bereits eine ausreichende Bedingung für diese Art von Symmetrie. Man spricht daher meist nicht von zweizähligen Drehspiegelachsen, sondern von Symmetriezentren. Eine dreizählige Drehspiegelachse entspricht einer dreizähligen wirklichen Drehachse nebst einer wirklichen Spiegelebene (Abb. 608). Sie wird deshalb nicht als besondere Deckoperation gewertet.

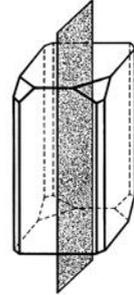


Abb. 606. Kristall mit Spiegelebene. (Nach NIGGLI.)

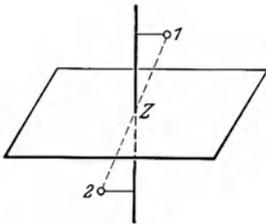


Abb. 607. Zweizählige Drehspiegelachse = Symmetriezentrum.

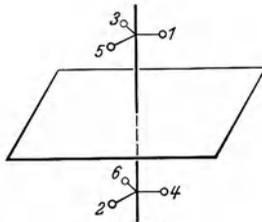


Abb. 608. Dreizählige Drehspiegelachse = dreizählige Drehachse + Spiegelebene.

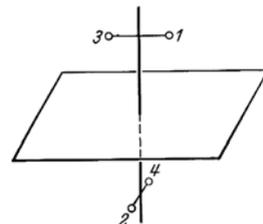


Abb. 609. Vierzählige Drehspiegelachse.

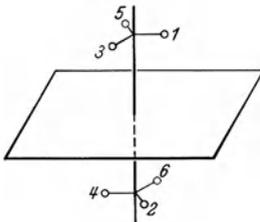


Abb. 610. Sechszählige Drehspiegelachse.

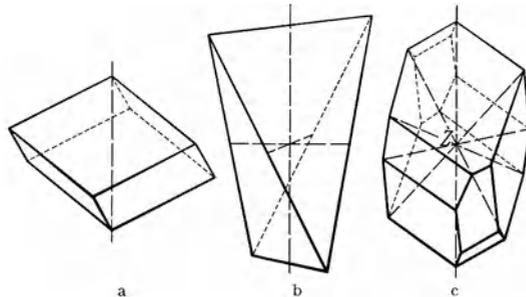


Abb. 611. Kristall a mit sechszähliger, b mit vierzähliger Drehspiegelachse, c mit Symmetriezentrum.

Es bleiben also nur die *vier-* und die *sechszähligen Drehspiegelachsen* übrig. Aus den Abb. 609 und 610 erkennt man ohne weiteres, daß eine vierzählige Drehspiegelachse stets auch eine zweizählige Drehachse, eine sechszählige Drehspiegelachse auch eine dreizählige Drehachse ist. Abb. 610 zeigt Beispiele von Kristallen mit sechs- und vierzähliger Drehspiegelachse, sowie mit Symmetriezentrum.

Beim Raumgitter kommen aber noch weitere Symmetrieelemente hinzu, da bei ihm noch weitere Deckoperationen möglich sind. Eine solche ist erstens

die *Translation*, die Verschiebung des Raumgitters derart, daß homologe Gitterbausteine miteinander zur Deckung kommen. Es sind immer drei Translationen nach drei Richtungen möglich, die nicht in der gleichen Ebene liegen. Zweitens kann eine Deckoperation darin bestehen, daß das Raumgitter um eine bestimmte Richtung als Achse gedreht und gleichzeitig in dieser Richtung verschoben wird (*Schraubung*). Drittens kann sie bestehen in einer Spiegelung an einer Ebene mit gleichzeitiger Verschiebung längs dieser Ebene (*Gleitspiegelebene*). Wie die Drehachsen, so können auch die *Schraubachsen* nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein. Zwei gleichzählige und gleichgerichtete Schraubachsen können sich noch durch ihren Drehsinn unterscheiden (vgl. Rechts- und Linksschrauben). Man bezeichnet daher eine Schraubachse als rechts- oder links-*n*-zählig.

365. Kristallsysteme. Kristallklassen. Raumgruppen. Man ordnet die Kristalle nach ihren Symmetrieelementen. Nicht alle in § 364 genannten Symmetrieelemente können an einem Kristall gleichzeitig auftreten, da manche von ihnen nicht miteinander vereinbar sind. Andere wiederum bedingen sich gegenseitig. Mit Hilfe der mathematischen Gruppentheorie läßt sich berechnen, welche und wieviele Symmetrieelemente gleichzeitig an einem Kristall auftreten können. Ohne Berücksichtigung derjenigen Symmetrieelemente, die nur der Raumgitterstruktur eigentümlich sind, ergeben sich dann 32 verschiedene Möglichkeiten, nach denen man die Kristalle in 32 *Kristallklassen* einteilt. Nach dem Grade der Symmetrie — der Art und Zahl der Symmetrieelemente —, ordnet man die 32 Kristallklassen in 7 *Kristallsysteme*, die wir hier in der Reihenfolge zunehmender Symmetrie anführen.

Triklines System. Es hat von allen Systemen die geringste Symmetrie und umfaßt 2 Klassen, eine ohne Symmetrieebene und eine mit nur einem Symmetriezentrum.

Monoklines System. Es umfaßt 3 Klassen. Diese Kristalle haben eine zwei-zählige Drehachse oder eine Spiegelebene oder beides zugleich.

Rhombisches System. Es umfaßt 4 Klassen. Diese Kristalle sind durch drei aufeinander senkrechte, nicht gleichwertige Drehachsen ausgezeichnet. Außerdem können Symmetrieebenen auftreten.

Hexagonales (7 Klassen), trigonales (5 Klassen) und tetragonales System (7 Klassen). Diese Kristalle haben eine ausgezeichnete Drehachse (*Hauptachse*), welche — je nach der Bezeichnung des Systems — sechs-, drei- oder vierzählig ist. Sie kann auch eine Drehspiegelachse sein. Senkrecht zu ihr können zwei-zählige Achsen stehen, die im hexagonalen und im trigonalen System Winkel von 120° oder 60° , im tetragonalen System Winkel von 90° miteinander bilden. Sofern Symmetrieebenen vorkommen, liegen sie parallel oder senkrecht zur Hauptachse.

Kubisches (reguläres) System. Es umfaßt 5 Klassen. Diese Kristalle haben mindestens vier dreizählige Achsen, welche zueinander wie die Raumdiagonalen eines Würfels liegen, und drei zwei-zählige Achsen, deren Richtungen denen der Würfelkanten des gleichen Würfels entsprechen. In den höher symmetrischen Klassen dieses Systems werden letztere vierzählig, und es kommen zwei-zählige Achsen in Richtung der Flächendiagonalen des Würfels hinzu. In manchen Klassen treten auch Symmetrieebenen auf. In der höchstsymmetrischen Klasse, der kubisch-holoedrischen Klasse, gibt es 48 Deckoperationen.

Abb. 612a—g zeigen je ein Beispiel eines Kristalles, die stereoskopischen¹ Abb. 613—619 je ein Raumgitter (nach VON LAUE und VON MISES) für jedes der 7 Kristallsysteme davon 5 für die gleichen Kristalle wie in Abb. 612.

¹ Einen richtigen Eindruck von den Raumgittern erhält man nur bei stereoskopischer Betrachtung. Diese gelingt bei einiger Übung auch schon mit bloßen Augen. Kurzsichtige Brillen absetzen!

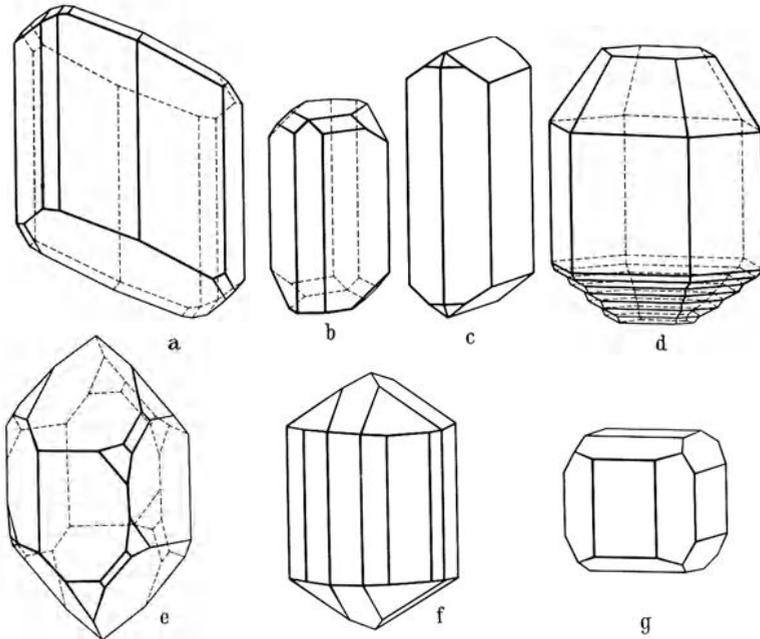


Abb. 612. a Kupfersulfat CuSO_4 (triklin), b Schwefel (monoklin), c Aragonit CaCO_3 (rhombisch), d Zinksulfid ZnS (Wurtzit, hexagonal), e Quarz SiO_2 (trigonal), f Titandioxyd TiO_2 (Rutil, tetragonal), g Eisenkies FeSO_4 (Pyrit, kubisch). (Nach GROTH.)

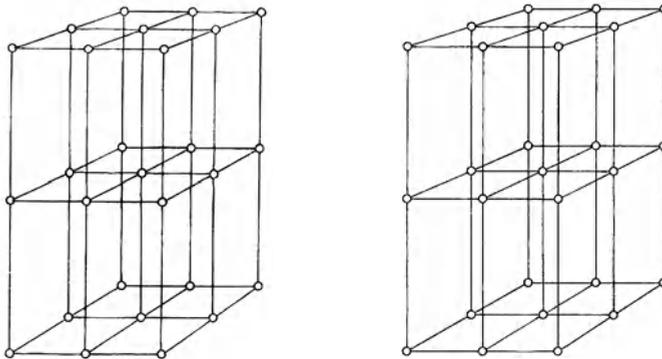


Abb. 613. Einfaches triklines Gitter. Nach von LAUE und von MISES.

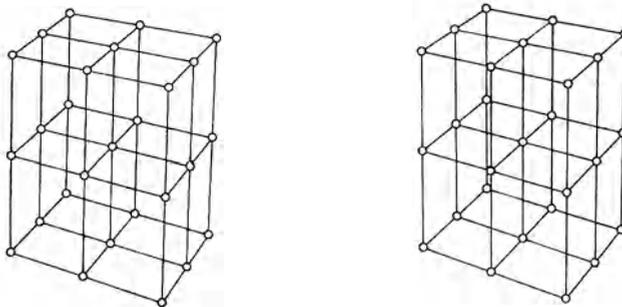


Abb. 614. Einfaches monoklines Gitter. Nach von LAUE und von MISES.

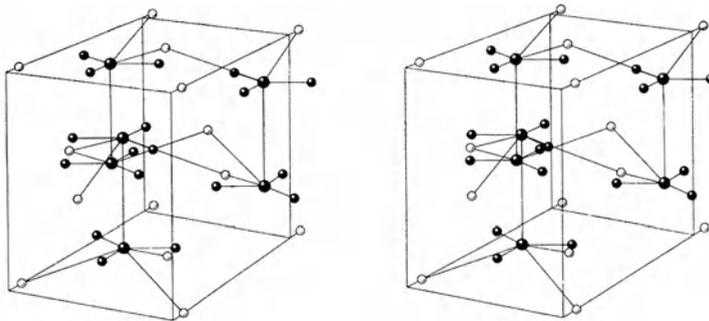


Abb. 615. Gitter des Aragonit (rhombisch). Nach VON LAUE und VON MISES.

○ Ca ● C ● O

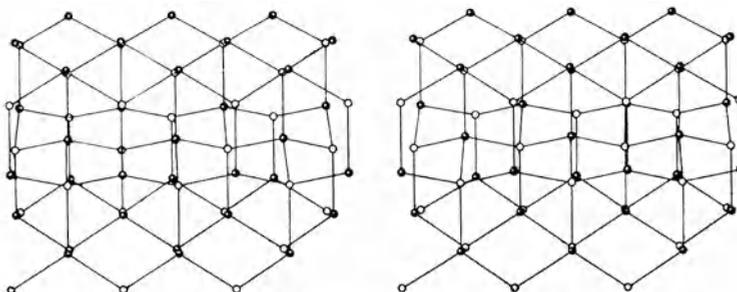


Abb. 616. Gitter des Zinksulfids (hexagonal). Nach VON LAUE und VON MISES.

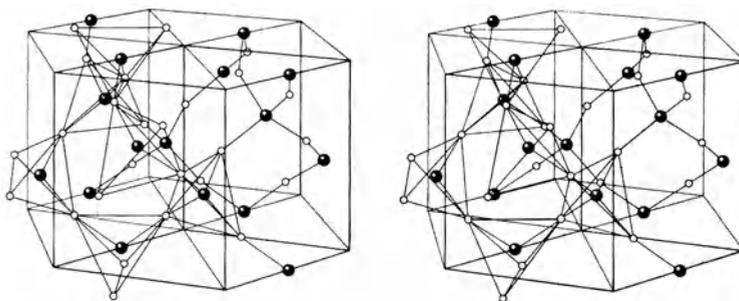


Abb. 617. Gitter des Quarz (trigonal). Nach VON LAUE und VON MISES.

● Si ○ O

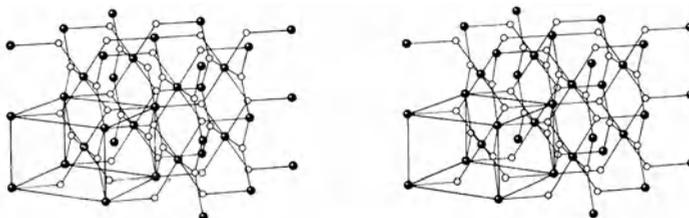


Abb. 618. Gitter des Rutil (tetragonal). Nach VON LAUE und VON MISES.

● Ti ○ O

Um die Gleichwertigkeit der drei zur Hauptachse senkrechten Achsen beim trigonalen System zu kennzeichnen, benutzt man hier vier Indizes, von denen die ersten drei diesen drei Achsen entsprechen, aber nicht voneinander unabhängig sind. (Die dritte dieser Achsen ist durch die beiden anderen gegeben.) Die Summe dieser drei Indizes ist immer Null. Beim hexagonalen System verfährt man entsprechend.

Nimmt man nun noch die der Gitterstruktur eigentümlichen Symmetrieelemente hinzu, so ergibt sich eine weitere Einteilung innerhalb der einzelnen Kristallklassen. Die Gruppentheorie lehrt, daß es insgesamt 230 Möglichkeiten der Kombination von Symmetrieelementen gibt (FEDOROW, SCHÖNFLIESS). Hiernach teilt man die Kristalle in 230 *Raumgruppen* ein, die sich in unregelmäßiger Weise auf die Kristallklassen verteilen. Mit wenigen Ausnahmen gibt

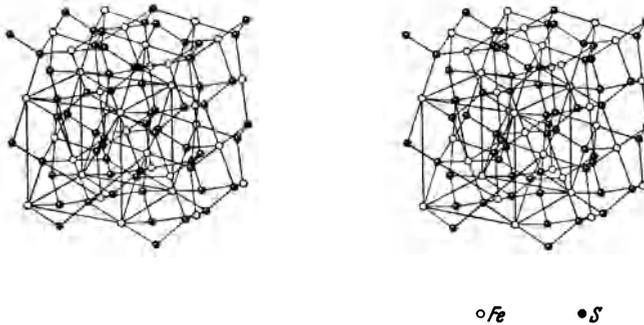


Abb. 619. Gitter des Pyrits (kubisch). Nach VON LAUE und VON MISES.

es für sämtliche Raumgruppen natürliche oder künstliche Beispiele. Eine Raumgruppe mit einer n -zähligen Schraubenachse kann nur einer Klasse mit n -zähliger Drehachse angehören. Jedoch kommt die Existenz von Schraubenachsen in den Symmetrieelementen einer Klasse dann nicht zum Vorschein, wenn gleich viele parallele, gleichzählige Schraubenachsen von entgegengesetztem Drehsinn vorhanden sind. Eine Gleitspiegelebene hat das Auftreten einer Spiegelebene unter den Symmetrieelementen der Klasse zur Folge.

Denkt man sich durch das Innere eines Kristalls eine beliebige Gerade gelegt, so hängt die Anordnung der Bausteine des Kristalls, insbesondere ihr Abstand, von der Richtung der Geraden relativ zu den Vorzugsrichtungen des Kristalls (des Raumgitters) ab. Ein normal gewachsener, ideal ausgebildeter Kristall ist zwar stets *homogen*, aber er ist *anisotrop*. Sein Verhalten gegenüber äußeren Einwirkungen hängt im allgemeinen von der Richtung dieser Einwirkungen ab. So spiegeln sich die Symmetrien eines Kristalls in vielen seiner physikalischen Eigenschaften wieder, wenn auch nicht in allen. So kann man z. B. auf optischem Wege zwischen einem Kristall mit und ohne Symmetriezentrum nicht unterscheiden. Das gleiche gilt für die elektrische und die Wärmeleitung. In bezug auf diese und auf die optischen Erscheinungen verhalten sich alle kubischen Kristalle wie isotrope Körper. Sie zeigen z. B. keine Doppelbrechung. Jedoch kommt die physikalische Verschiedenheit der Richtungen in ihnen z. B. in ihrem elastischen Verhalten zum Ausdruck. Während dieses bei den isotropen Stoffen durch zwei Konstanten, den Elastizitätsmodul und den Schubmodul, bestimmt wird, besitzen die kubischen Kristalle drei Konstanten. Kristalle die eine Hauptachse haben, sind notwendig optisch einachsig (§ 302). Doch kann Einachsigkeit auch bei anderen Systemen vorkommen. Kristalle mit einer Spiegelebene oder einem Symmetriezentrum können keine Drehung der

Polarisationsebene (§ 305) bewirken, weil sich andernfalls bei Ausführung der betreffenden Deckoperation der Drehsinn umkehren würde.

Läßt man die Schmelze eines kristallisierenden Stoffes erstarren, so bilden sich häufig keine großen, mit dem Auge deutlich sichtbaren Kristalle, sondern es entsteht ein *mikrokristallinisches Gefüge*. Der Stoff erstarrt zu einer sehr großen Zahl winziger Kriställchen in dichter Packung, deren kristallographische Achsenrichtungen gleichmäßig über alle räumlichen Richtungen verteilt sind. Während die einzelnen Mikrokristalle natürlich anisotrop sind, verhält sich der Stoff als ganzes wie ein isotroper Stoff, weil sich die Anisotropien der Mikrokristalle in ihm im Durchschnitt ausgleichen. In diesem Zustande befinden sich z. B. die Metalle (die zum größten Teil kubisch oder hexagonal kristallisieren), wenn sie in der technisch üblichen Weise aus ihrer Schmelze gewonnen werden. Es gibt jedoch Verfahren zur „Züchtung“ großer einheitlicher Kristalle (*Einkristalle*) aus der Schmelze von Stoffen, die für gewöhnlich mikrokristallinisch erstarren. Die Wolframdrähte unserer Glühlampen sind solche, sehr lange Einkristalle. Im Gegensatz zum Wolfram sind aber die Einkristalle anderer reiner Metalle fast immer so weich und verletzbar, daß man sie nur mit Vorsicht handhaben darf, so daß sie technisch unbrauchbar sind. Nur durch Zerstörung ihrer Regelmäßigkeit — durch mechanischen Zwang oder durch chemische Verunreinigung (Legierungsbildung) —, gelangt man zu technisch brauchbaren metallischen Werkstoffen.

Schlußwort.

Wenn der Leser abschließend das Bild der Physik überblickt, soweit wir es im Rahmen dieses Buches und nach dem heutigen Stande unseres Wissens zeichnen konnten, so wird er sich dem Eindruck der großartigen Leistung des menschlichen Geistes nicht entziehen können, die in der durch die Physik geschaffenen *Ordnung des physikalischen Erkenntnisgutes* liegt. Wenn es dem Leser gelungen ist, wirklich auf den Grund der Dinge zu gelangen, so wird er erkannt haben, daß es sich tatsächlich immer nur um das Walten *einiger weniger ganz grundlegender, sehr allgemeiner Gesetze* handelt, durch die *eine nicht sehr große Zahl von zweckmäßig definierten Größen* (Länge, Masse, Zeit, elektrische Ladung, Kraft, Energie, Bewegungsgröße usw.) in einen gesetzmäßigen Zusammenhang gebracht werden. Die Einzelercheinungen in ihrer verwirrenden Fülle sind durchweg nur Sonderfälle, die sich aus diesen grundlegenden Gesetzen ableiten lassen, oder die — sofern das heute noch nicht gelungen ist — sicher eines Tages aus solchen ableitbar sein werden.

Erst durch die so geschaffene Ordnung ist die Möglichkeit gegeben, dieses Gut einerseits überhaupt geistig zu bewältigen und es andererseits durch *vernünftige Fragestellungen* und dadurch angeregte *zweckdienliche Versuche zu ihrer Beantwortung* zu mehren.

Der Lernende möge daher von vornherein den Versuch aufgeben, ein physikalisches Scheinwissen durch Auswendiglernen zahlreicher Einzeltatsachen zu erwerben. Ein solches Wissen wäre toter Besitz. Erst als ein Bestandteil des großen und einfachen physikalischen Ordnungsschemas haben die Einzeltatsachen einen wirklichen Erkenntniswert, und erst durch ihre Einordnung in den ganzen, großen Zusammenhang werden sie überhaupt erlernbar und behaltbar. Hat aber der Lernende einmal die ganz allgemeinen Gesetze und natürlich auch die Denkweisen der Physik erfaßt, so hat er damit das Handwerkzeug erworben, das ihn befähigt, die Einzeltatsachen als ihre Folgen zu verstehen, sie auf eine vernünftige Weise im Gedächtnis zu behalten und sich in ihrer Buntheit und Fülle zurechtzufinden. Möge dieses Buch ihm den Weg dazu gewiesen haben.

Namenverzeichnis.

- | | | |
|--|--|---|
| <p>Abbe 451, 464.
 Amici 451.
 Ampère 338, 348, 350, 371.
 Anderson 595, 596.
 Andrews 226.
 Arago 368, 494.
 Archimedes 123.
 Arrhenius 235.
 d'Arsonval 395.
 Aston 591.
 Avogadro 132, 139.</p> <p>Babinet 183, 484, 494.
 Bacon 199.
 Baer 96.
 Balmer 552.
 Barkhausen 379.
 Barkla 511.
 Barnett 380.
 Becker 594.
 Becquerel, A. H. 586.
 Bergmann 563.
 Bernouilli, D. 130, 138, 151.
 Biot 341, 342.
 Bohr 550, 554, 557, 583, 585.
 Bois, du 395.
 Boltzmann 131, 199, 240,
 242, 524.
 Born 579, 583.
 Bothe 545, 594, 602.
 Boyle 140.
 Boys 507.
 Brackett 553.
 Bradley 434.
 Bragg, W. L. u. W. H. 512.
 Braun 345.
 Bravais 603.
 Brewster 494.
 Broek, van den 549.
 Broglie, de 580.
 Brown 201.
 Bunsen 149, 153, 160, 218,
 438, 517.
 Busch 346.</p> <p>Carnot 247.
 Cavendish 107.
 Celsius 198.
 Chadwick 594.
 Chatelier, le 219.
 Chladni 186.
 Clapeyron 220, 224, 249.
 Clausius 199, 220, 224, 240.
 Cockcroft 600.
 Coehn 305.
 Compton 545.
 Condon 597.</p> | <p>Coolidge 511.
 Coriolis 94.
 Corti 196.
 Coulomb 254, 255, 333.
 Cranz 168, 174.
 Crookes 327, 507.
 Curie 380, 586.</p> <p>Dalton 139.
 Daniell 311.
 Davisson 581.
 Davy 199.
 Debye 229, 515, 579.
 Dempster 591.
 Deprez 395.
 Descartes 430.
 Dirac 583, 595.
 Doppler 170, 492.
 Draper 520.
 Dufay 254.
 Dulong 210.</p> <p>Eddington 244, 544, 597.
 Edison 303, 317.
 Ehrenhaft 201, 547.
 Eichenwald 342.
 Einstein 202, 380, 488, 530,
 537, 540, 543, 578, 579.
 Ellis 599.
 Elsasser 581.
 Elster 587.
 Eötvös 97.
 Etingshausen 391.</p> <p>Fajans 590.
 Faraday 57, 260, 266, 276,
 309, 328, 354, 356, 366,
 501.
 Fechner 438.
 Fedorow 609.
 Fermat 181, 440.
 Fermi 601.
 Fitzgerald 532, 534.
 Foucault 86, 435, 521.
 Franck 565, 574.
 Franklin 325.
 Franz 290.
 Fraunhofer 464, 472, 474,
 483, 485, 516.
 Fresnel 182, 472, 479, 482,
 483, 497, 535.
 Friedmann 540.</p> <p>Gaede 149.
 Galilei 1, 20, 21, 22, 62, 104.</p> | <p>Galvani 312.
 Gamow 597.
 Gauss 400.
 Gay Lussac 206.
 Gehrcke 483.
 Geiger 545, 547, 549, 586,
 590, 602.
 Geitel 587.
 Gerlach 578.
 Germer 582.
 Giauque 229.
 Gilbert 253, 305.
 Gockel 602.
 Goethe 518.
 Goldstein 330, 564.
 Goudsmit 578.
 Guericke, von 144, 145, 146,
 149, 305.</p> <p>Haas, de 230, 380, 578.
 Hagen 158.
 Hahn, O. 589, 601.
 Hale 503.
 Hall 390.
 Hallwachs 541.
 Haüy 603.
 Heisenberg 583, 584, 599.
 Helmholtz 48, 166, 190, 197,
 237, 464, 505, 517, 518.
 Henry 236, 366, 367.
 Hero von Alexandrien 152.
 Herschel 508.
 Hertz, G. 565, 591, 593.
 Hertz, H. 330, 419, 421, 431,
 541.
 Hess 602.
 Hettner 572.
 Hittorff 327, 330, 541.
 Hoff, van't 235.
 Hooke 116, 430, 481.
 Hubble 540.
 Hull 544.
 Humason 540.
 Humboldt, W. von 1.
 Huygens 48, 105, 181, 430,
 495.</p> <p>Imes 571.</p> <p>Jamin 482.
 Jeans 523.
 Joliot 596, 600.
 Jolly 123.
 Jordan 583, 585.
 Joule 214, 237, 238, 302, 374.</p> |
|--|--|---|

- Kamerlingh Onnes** 228, 229, 298.
Kapitza 335.
Karman 579.
Kayser 553, 563.
Kelvin (W. Thomson) 199, 214, 240, 276, 295, 391, 394.
Kepler 21, 108.
Kerr 499.
Ketteler 505.
Kirchhoff 290, 527, 520, 583.
Klein 90.
Kleist, von 278.
Kolhörster 602.
Kossel 557.
Krigar-Menzel 107.
Krönig 199.
Kundt 177.

Lambert 437.
Landsberg 575.
Langley 509.
Laplace 341.
Laue, von 411, 603, 606.
Lavoisier 218.
Lebedew 544.
Lecher 421.
Leduc 391.
Lehmann, O. 499.
Lemaître 540.
Lenard 305, 330, 391, 526, 541, 542, 549, 566, 567.
Lenz 297.
Leonardo da Vinci 481, 517.
Lewis 557.
Lichtenberg 254, 326.
Linde 228.
Lipperhey 463.
Lippmann 489.
Lorentz, H. A. 502, 503, 532, 534.
Loschmidt 134.
Lo Surdo 504.
Lummer 438, 483, 522.
Lyman 553.

Madelung 579.
Magnus 154.
Malus 493.
Mandelstam 575.
Mariotte 140, 153.
Marsden 549.
Maxwell 131, 135, 199, 296, 362, 363, 389, 421, 431, 501.
Mayer, Jul. Rob. 48, 237, 238.
Meissner, A. 428.
 — **W.** 229.
Meitner 496, 599, 601.
Mendelejeff 556.
Meyer, Edgar 547.
 — **Lothar** 556.
 — **Victor** 223.
Michelson 435, 527.

Millikan 543, 547, 602.
Mises, von 606.
Moseley 570.

Nernst 211, 247, 312, 391, 394, 417.
Newton 20, 21, 27, 30, 106, 108, 110, 176, 430, 481.
Nichols 544.
Nicol 498.
Nuttall 590.

Oersted 126, 337.
Ohm 191, 289.
Ostwald 518.

Papin 224, 250.
Pascal 120.
Paschen 395, 522, 553.
Pauli 557.
Peltier 306.
Perrin 129, 145.
Petit 210.
Philipp 596.
Pickering 564.
Planck 240, 242, 431, 522, 542.
Plücker 330.
Poggendorff 315, 394.
Pohl 280.
Poiseuille 158.
Poisson 116, 213, 324.
Poulsen 423.
Poynting 544.
Prandtl 153.
Pringsheim 522.
Prout 596.
Pulfrich 451.
Pythagoras 193.

Raman 575.
Ramsauer 582.
Raoult 233.
Rayleigh 129, 488, 523.
Regener 602.
Richards 107.
Richardson 322.
Righi 391.
Ritz 553, 565.
Rogowski 365.
Romé de l'Isle 603.
Römer 434.
Röntgen 342, 510.
Rowland 342.
Rubens 395, 507, 508, 509.
Rumford 199.
Runge 553, 563.
Rutherford 547, 587, 599.
Rydberg 552, 553, 563.

Savart 341, 342.
Scherrer 515.
Schönflies 603, 609.
Schopenhauer 518.

Schrödinger 583.
Schumann 510.
Schweigger 394.
Seebeck 305.
Siemens, von 404.
Simon 545.
Simpson 331.
Sitter, de 540.
Smekal 575.
Smoluchowski, von 202.
Snellius 447.
Soddy 590.
Sohncke 603.
Sommerfeld 550, 551, 555.
Sorge 179.
Stark 492, 504.
Stefan 524.
Steiner 80.
Sténo 603.
Stern 200, 582, 587.
Stifel 193.
Stokes 159, 574.
Stoney 256.

Tesla 417.
Thomson, J. J. 591.
Thomson, W., s. Kelvin.
Töpler 168.
Torricelli 145, 146, 152.
Townley 140.
Townsend 320.
Tyndall 494.

Uhlenbeck 578.
Urey 593.

Viviani 96, 145.
Volta 304, 312.

Waals, van der 126, 132, 207, 226.
Waltenhofen 368.
Walter 325.
Walton 600.
Warburg 298, 376.
Watt 250.
Weber, Wilh. 351, 371, 400, 438.
Wegener, Alfr. 97.
Wehnelt 322, 403, 511.
Weiss 374, 577.
Werckmeister 193.
Wheatstone 197, 294, 468.
Wiedemann 290.
Wien, W. 330, 523, 524, 591.
Wiener 488.
Willis 197.
Wilson, C. T. R. 331.
 — **H. A.** 587.
Wollaston 508, 516.

Young 431, 518.

Zeemann 502.
Zenker 489.

Sachverzeichnis.

- Abbildung durch Linsen 454.
 — durch Spiegel 444.
 Abbildungsmaßstab 433, 441.
 Aberration des Lichtes 435.
 —, sphärische und chromatische 458.
 Ablenkung von Kathodenstrahlen 344.
 Abplattung der Erde 94.
 Abscheidungen, elektrolytische 307.
 Abschirmungszahl 570.
 Absorption von Gasen 236.
 — einer Welle 163.
 — im gesamten Spektrum 505.
 Absorptionskoeffizient 163.
 Absorptionsspektrum 516.
 Absorptionsvermögen 520.
 Achromat 458, 470.
 Achse, optische, von Kristallen 496.
 Additionstheorem der Geschwindigkeiten 534.
 Adhäsion 130.
 Adsorption 130, 237.
 Aerodynamik 150.
 Aggregatzustände 113.
 —, Änderungen 215.
 Akkomodation 465.
 Akkord 190.
 Akkumulator 316.
 Aktivität, optische 500.
 Alphastrahlen 586.
 —, künstliche 600.
 —, Theorie 597.
 Alter der Erde 590.
 Aluminiumgewinnung 318.
 Amorphe Stoffe 113.
 Ampere (Einheit) 287.
 AMPÈRESches Gesetz 350.
 Amperesekunde 256, 287.
 Amperewindungszahl 392.
 Analysator 494.
 Analysenwaage 71.
 Anfahrwirbel 156.
 Anfangsmagnetisierung 375.
 Angriffspunkt einer Kraft 27.
 Ängströmeinheit 5.
 Anionen 309.
 Anisotrope Stoffe 114, 609.
 Anode 307.
 Anodenfall 329.
 Anodenstrahlen 331.
 Anomalie des Wassers 205.
 Anregung von Atomen 565.
 Anregungsspannung 566.
 Antenne 420.
 Anziehung und Abstoßung von Strömen 349.
 Aperiodische Bewegung 102.
 Aperiodischer Grenzfall 103.
 Apertur, numerische 465, 492.
 Äquipartitionsprinzip 199.
 Äquipotentialflächen 60.
 —, elektrische 263.
 Äquivalent, elektrochemisches 309.
 Äquivalenzhypothese 537.
 ARAGOScher Punkt 494.
 Aräometer 126.
 Arbeit 41.
 — bei Volumänderungen 114, 140.
 Arbeitsmaschinen 66.
 Archimedisches Prinzip 123.
 Astigmatismus des Auges 467.
 — von Linsen 458.
 Ätherhypothese 58, 431, 527, 531.
 Atmosphäre (Einheit) 146.
 Atmosphärische Elektrizität 331.
 Atombau 256, 548.
 Atomgewicht 134, 556, 596.
 Atomkerne 549, 596.
 Atommodell von BOHR 550.
 — von RUTHERFORD 548.
 Atommoleküle 561.
 Atomschwingungen 571.
 Atomspektren 516.
 Atomstrahlen 578.
 Atomsuszeptibilität 373.
 Atomumwandlungen 599.
 Atomwärme 210, 578.
 Atomzertrümmerung 599.
 Aufbauprinzip 557.
 Auflösungsvermögen des Gitters 487.
 — des Mikroskops 464, 492.
 Auftrieb in Flüssigkeiten 122.
 — in Gasen 144.
 Auge 465.
 Augenfehler 467.
 Augenlinse des Okulars 464.
 Ausdehnung durch die Wärme 202.
 Ausdehnungskoeffizient, kubischer 203.
 Ausdehnungskoeffizient, linearer 202.
 — der idealen Gase 207.
 Ausleuchtung 526.
 Ausströmungsgesetz von BUNSEN 153.
 Austauschkräfte 585.
 Austrittsarbeit 543.
 Auswahlregeln 565.
 AVOGADROSches Gesetz 139.
 — sche Zahl 132.
 BABINETScher Punkt 494.
 — sches Theorem 183, 484.
 Ball auf Luftstrahl 159.
 Ballistische Kurve 62.
 Balloelektrizität 305.
 BALMER-Serie 552.
 Bandenspektrum 516, 572
 Bar 146.
 bar 118, 146.
 BAERSches Gesetz 96.
 BARKHAUSEN-Effekt 379.
 Barometer 147.
 Bausteine der Materie 596.
 BECQUEREL-Strahlen 586.
 BEHNSche Röhre 147.
 Beleuchtungsstärke 437.
 Benetzung 128.
 BERNOULLISche Gleichung 151.
 Berührungsspannung 304.
 Beschleunigung 9, 14.
 Beschleunigungsarbeit 44.
 Betastrahlen 586.
 —, Theorie 598.
 Beugung 183.
 — des Lichts 483.
 — — — am Gitter 485.
 — — — am Spalt 484.
 — — — an kleinen Teilchen 488.
 — — — im Mikroskop 464, 492.
 — von Materiewellen 581.
 — von Schallwellen 184.
 Beugungsgitter, FRAUNHOFERSche 483.
 —, FRESNELSche 483.
 Beugungsgitter 485.
 Beugungsscheibchen 488.
 Beweglichkeit von Elektronen 288.
 — von Ionen 309.
 Bewegung, absolute und relative 530.

- Bewegung, aperiodische 102.
 —, geradlinige 9.
 —, räumliche 13.
 Bewegungsgröße 38.
 —, relativistisch 536.
 — der Lichtquanten 543.
 Bezugssysteme, beschleunigte 33.
 —, bewegte 32.
 Biegung 117.
 Bilder, optische 440.
 —, reelle und virtuelle 440.
 Bildkraft, elektrische 270.
 Bildkonstruktion bei Linsen 454.
 Bildungswärme von Molekülen 574.
 Bildwerfer 459.
 Bildwölbung 458.
 Biologie 586.
 Biolumineszenz 526.
 BIOT-SAVARTSches Gesetz 341, 342.
 Blasinstrumente 195.
 Blenden 464.
 Blinder Fleck 466.
 Blindleistung 411.
 Blindwiderstand 409.
 Blitz 324, 331.
 Blitzableiter 325.
 Bodendruck 120.
 Bogenlampe 326.
 Bogenspektrum 564.
 Bolometer 507.
 BOLTZMANNsche Konstante 199, 202, 242, 523.
 Böschungswinkel 239.
 BOYLE-MARIOTTESches Gesetz 140.
 BOYLE-MARIOTTE-GAY LUSACsches Gesetz 206.
 Brandung 166.
 BRAUNsche Röhre 345.
 Brechkraft 454.
 Brechung des Lichtes 447.
 — magnetischer Kraftlinien 382.
 — von Schallstrahlen 180.
 — von Wasserwellen 180.
 — von Wellen allgemein 179.
 Brechungsgesetz 180, 447.
 — bei Kristallen 497.
 Brechungsindex 180, 447.
 — im gesamten Spektrum 505.
 BREGUETSche Spirale 205.
 Breiten effekt bei Ultrastrahlung 602.
 Bremsstrahlung 511.
 Brennebene 443.
 Brennpunkt 173, 443, 453.
 Brennweite 443, 453.
 BREWSTERSches Gesetz 494.
 Brille 467.
 DE BROGLIE-Wellen 581.
 BROWNSche Bewegung 201.
 BUNSEN-Brenner 169.
 BUYS-BALLOTSches Gesetz 96.
 cal 210.
 CARNOTScher Kreisprozeß 247.
 CELSIUS-Skala 198.
 CGS-System 23, 105.
 Charakteristik von Leitern 299.
 — einer Gasentladung 322.
 — einer Verstärkerröhre 426.
 LE CHATELIERSches Prinzip 219.
 Chemie, quantenmechanische Begründung 576.
 Chemolumineszenz 526.
 CLAPEYRONscher Kreisprozeß 249.
 CLAUDIUS-CLAPEYRONsche Gleichung 200, 224.
 COMPTON-Effekt 545.
 — -Wellenlänge 545.
 CORIOLIS-Kräfte 94.
 CORTISches Organ 196.
 Coulomb (Einheit) 256.
 COULOMBSches Gesetz (Elektrostatik) 254, 279.
 — — (Magnetismus) 333, 386.
 CURIE-Punkt 380.
 DALTONSches Gesetz 139.
 Dampf 221.
 —, gesättigter 221.
 Dampfdichte 223.
 Dampfdruck 221, 225.
 — von Lösungen 233.
 Dampfmaschinen 250.
 Dampfturbinen 251.
 Dämpfung von Galvanometern 397.
 DANIELL-Element 317.
 Dauermagnete 374.
 DEBYE-SCHERRER-Verfahren 515.
 Deckoperationen 604.
 Deklination, magnetische 336.
 Dekrement, logarithmisches 102, 397.
 Destillation 224.
 Detektor 425.
 Deuterium 593.
 Deuton 593.
 Deutonenstrahlen 600.
 DEWAR-Gefäße 246.
 Diamagnetismus 369, 371, 385.
 Dichroismus 498.
 Dichte 25.
 —, kritische 226.
 —, optische 448.
 Dielektrikum 258, 276.
 — im elektrischen Felde 279.
 Dielektrizitätskonstante 278.
 —, absolute 283.
 Differenztöne 179.
 Diffraction 183.
 Diffusion 136.
 Dimensionen im elektromagnetischen Maßsystem 351.
 — im elektrostatischen Maßsystem 283.
 — der magnetischen Größen 391.
 — der mechanischen Größen 105.
 Dioptrie 454.
 Diplogonium 593.
 Dipol, elektrischer 257.
 — — im elektrischen Felde 269.
 —, magnetischer 333, 335.
 — — elementarer 374.
 —, schwingender 418.
 Direktionskraft 99.
 Direktionsmoment 101.
 Diskus 93.
 Dispersion 180, 468, 487.
 —, anomale 505.
 — im gesamten Spektrum 505.
 — beim Beugungsgitter 487.
 Dissonanz 192.
 Dissoziation von Molekülen 574.
 Donner 325.
 Doppelbrechung 495.
 —, elektrische 499.
 Doppelprisma, FRESNELsches 473.
 Doppelschicht, magnetische 339.
 Doppelsterne 433, 493.
 DOPPLER-Effekt 170, 492, 533, 540.
 Drall 79.
 DRAPERSches Gesetz 520.
 Drahtwellen, elektrische 421.
 Drehachse bei Kristallen 604.
 Drehfeld 413.
 Drehimpuls 79.
 — eines Körpers 85.
 — eines Massenpunktes 82.
 Drehkondensator 272.
 Drehkristallmethode 514.
 Drehmoment 63.
 Drehschwingungen 101.
 Drehspiegelung 605.
 Drehspulgeräte 395.
 Drehstrom 412.
 Drehung der Polarisations-ebene 500.
 — — —, magnetische 501.
 Drehzahl 18.

- Dreieckschaltung 413.
 Dreifarbenetheorie des Sehens. 518.
 Drosselspule 409.
 Druck 118.
 — der Gase 137.
 —, hydrodynamischer 152.
 —, hydrostatischer 119.
 —, kritischer 226.
 —, osmotischer 235.
 Druckbauch, Druckknoten 176.
 Druckhöhe 152.
 Druckkoeffizient der Gase 207.
 Druckkraft 118.
 Dualismus von Wellen und Korpuskeln 582.
 DULONG-PETITSches Gesetz 210, 579.
 Dunkelfeldbeleuchtung 492.
 Dunkelräume der Glimmentladung 327, 328.
 Dur und Moll 192.
 Durchflutung 392.
 Durchgriff 426.
 Durchleuchtung 510.
 dyn 24.
 Dynamiden 549.
 Dynamoelektrisches Prinzip 404.
 Dynamomaschinen 403.
 Dynamometer 399.

 Ebbe und Flut 110.
 Echo 173.
 Echolot 173.
 Edelgase 560.
 EDISON-Akkumulator 317.
 Eigenfrequenz 186.
 —, elektrische 410.
 Einfallslot, Einfallswinkel 172.
 Einheiten, absolute elektrische 351.
 —, elektromagnetische 351.
 —, elektrostatische 282.
 —, internationale elektrische 351.
 —, magnetische 391.
 —, mechanische 105.
 —, photometrische 436.
 Einheitsvektor 13.
 Einkristalldrähte 116.
 Einkristalle 610.
 Einschwingvorgänge 188, 409.
 Eisenkerne in Spulen 384.
 Eiskalorimeter 218.
 Elastizität fester Stoffe 115.
 — von Flüssigkeiten 126.
 — der Gase 140, 215.
 Elastizitätsgrenze 116.
 Elastizitätsmodul 116.
 Elastizitätszahl 116.

 Elektrizität, atmosphärische 331.
 —, positive und negative 253.
 — und Materie 256.
 —, Wesen der 256.
 Elektrizitätserzeugung 257.
 Elektrizitätsleitung in Elektrolyten 308.
 — in Gasen 319.
 — in Metallen 288.
 Elektrizitätsmenge 254.
 Elektroanalyse 318.
 Elektrochemisches Äquivalent 309.
 Elektroden 307.
 Elektrodynamisches Grundgesetz 340.
 Elektrokinetik 318.
 Elektrolumineszenz 525.
 Elektrolyse 307.
 — in der Technik 318.
 Elektrolyte, feste 298.
 —, flüssige 307.
 Elektrolyteisen 318.
 Elektrolytkupfer 318.
 Elektromagnet 384, 395.
 Elektrometallurgie 318.
 Elektrometer 273.
 —, absolute 276.
 Elektromotor 405, 413.
 Elektromotorische Kraft 284, 312.
 — —, induzierte 354.
 Elektron 256, 257, 547.
 —, positives 595.
 elektronegativ 561.
 Elektronenbahnen 550, 585.
 Elektronenbeugung 581.
 Elektronendrall 578.
 Elektronenmikroskop 346.
 Elektronenröhre 426.
 Elektronenschalen 557.
 Elektronenspin 578.
 Elektronenstoß 565.
 Elektronenvolt 567.
 Elektrooptik 504.
 Elektrophor 280.
 Elektrophorese 319.
 elektropositiv 561.
 Elektroskop 258.
 Elektrosrose 319.
 Elektrostatik 253.
 Elektrostatischer Schutz 266.
 Elektrostriktion 280.
 Elementarbezirke, magnetische 374.
 Elementarquantum, elektrisches 256, 257, 547.
 Elementarwellen 182.
 Elemente 556.
 —, galvanische 315.
 Elmsfeuer 324.
 Emanation 589.

 Emanationstheorie des Lichtes 430.
 Emissionsspektren 516.
 Emissionsvermögen 520.
 Endotherme und exotherme Vorgänge 252.
 Energie 47.
 —, elastische 118.
 —, inneratomare 597.
 —, kinetische 48.
 — —, relativistisch 536.
 —, potentielle 48.
 — des elektrischen und magnetischen Feldes 388.
 — der Lichtquanten 542.
 Energiedichte, elektrische 276.
 —, magnetische 388.
 Energieprinzip 47, 237.
 — bei Elementarvorgängen 546, 598, 600.
 Energiequanten 542.
 Energiestrom 162.
 Energiestromdichte 163.
 Energiestufen 542, 550.
 — in den Atomkernen 599.
 Entfernungsgesetz 163.
 —, photometrisches 437.
 Entladung, selbständige 324.
 —, unselbständige 320.
 Entmagnetisierung 378.
 Entropie 240, 242.
 EÖRVÖSSCHE Versuche 97.
 Erdatmosphäre 146.
 Erdbebenwellen 170.
 Erdbeschleunigung 23.
 Erddrehung 94, 111.
 Erdfeld, elektrisches 331.
 Erdmagnetismus 336.
 erg 46.
 Erhaltungssatz des Drehimpulses 88.
 — der Elektrizität 257.
 — der Energie 47.
 — des Impulses 39.
 — der Materie 114.
 Erklärungswert von Modellvorstellungen 547, 551, 582.
 Ersatzprinzip 130.
 Erstarrungstemperatur 215.
 Erzscheideverfahren, magnetisches 386.
 ETTINGSHAUSEN-Effekt 391.
 — -NERNST-Effekt 391.
 Expansion des Weltalls 540.
 Explosionsmotore 251.
 Extremvakuum 148.

 Fadenkreuze 464.
 Fadenstrahlen 344.
 Fall, freier 62.
 — im luftleeren Raum 23.
 Farad 271.

- FARADAY-Effekt 501.
 — -Käfig 266.
 FARADAYSche Gesetze 309.
 — Konstante 310.
 Farbe 431.
 — dünner Blättchen 476.
 Farbenblindheit 518.
 Farbenkreis 518.
 Farbenlehre 517.
 Farbenphotographie 489.
 Farbenringe 481.
 Farbsehen 518.
 Farbstoffe 519.
 Farbton 517.
 Fata morgana 449.
 FECHNERSches Gesetz 438.
 Federn 118.
 Federwaage, JOLLYSche 123.
 Feinstruktur 555, 563.
 Feinstrukturkonstante 555.
 Feld, elektrisches 260.
 — — einer Punktladung 264.
 — — induziertes 361.
 — elektromagnetisches 362.
 —, magnetisches 334, 353.
 — — von Strömen 337.
 Feldlinien, elektrische 260, 388.
 —, magnetische 334, 388.
 Feldlinse 464.
 Feldstärke, allgemein 59.
 — elektrische 260.
 — — in Leitern 265.
 — der Gravitation 111.
 —, magnetische 334, 364.
 Feldtheorie 58.
 FERMATSches Prinzip 181, 440.
 Fernrohr 460.
 Fernwirkung 47.
 Ferromagnetismus 369, 373, 385.
 Fixpunkte, thermometrische 198.
 Fixsterne, Entstehung 109.
 —, inneres Gleichgewicht 544.
 —, Massen 536, 545.
 —, Spektren 517, 564.
 —, Temperaturen 567.
 —, Wärmequellen 597.
 Flächendichte, elektrische 254.
 Flächenhelligkeit 437.
 Flächensatz 79, 80, 109.
 Flammenleitung 322.
 Flaschenzug 69.
 FLETTNER-Rotor 154.
 Fließgrenze 115.
 Flimmern der Fixsterne 449.
 Fluoreszenz 525, 574.
 Fluß, magnetischer 357, 387.
 Flüssigkeiten, ideale 151.
 —, zähe 151, 156.
 Flüssigkeitsdruck 120.
 Flüssigkeitslamellen 127.
 Flüssigkeitsoberflächen, freie 121.
 Flüssigkeitsstrahlen 159.
 Flüstergewölbe 173.
 Formanten 197.
 Fortpflanzung, geradlinige 182.
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen 161.
 FOUCAULT-Pendel 96.
 FOURIERSche Reihe 160.
 FRAUNHOFERSche Linien 516.
 Freie Weglänge 140.
 Freiheitsgrade der Moleküle 199.
 Frequenz 100, 160.
 — von Wechselstrom 407.
 Frequenzspektrum der Geige 190.
 Fundamentalpunkte 198.
 Funke, elektrischer 324.
 Funkenspektrum 564.
 Funkenstrecke 325.
 GAEDE-Pumpe 149.
 GALILEI-Transformation 527.
 Galvanomagnetische Erscheinungen 390.
 Galvanometer 394, 396.
 —, ballistisches 396.
 —, Schwingung und Dämpfung 396.
 Galvanoplastik 318.
 Gammastrahlen 513, 587, 599.
 Gangunterschied 175.
 Gasdruck 137.
 Gase, ideale 132.
 Gasentladung 319.
 —, selbständige 324.
 —, unselbständige 321.
 Gaskonstante, universelle 206.
 Gasstrahlen 159.
 Gastheorie, kinetische 130.
 Gasthermometer 209.
 Gauss (Einheit) 371.
 Gefrieren von Gewässern 205.
 Gefrierpunkt 215.
 — von Lösungen 234.
 Gefrierpunktniedrigung 324.
 Gegeninduktivität 366.
 Gehör 196.
 GEIGER-NUTTALLSches Gesetz 590, 598.
 Generatoren 403.
 Geoid 95.
 Geometrie, nichteuklidische 539.
 Geräusche 190.
 Geschoßabweichung 96, 155.
 Geschoßdrall 93.
 Geschwindigkeit 9, 14.
 —, absolute 528.
 —, Additionstheorem 534.
 — der Elektronen in Metallen 288.
 — der Gasmoleküle 200.
 —, kritische von Oberflächenwellen 165.
 — — (Lichtgeschwindigkeit) 351.
 —, mittlere, der Gasmoleküle 136.
 —, wahrscheinlichste, der Gasmoleküle 135.
 Geschwindigkeitshöhe 152.
 Geschwindigkeitsquadrat, mittleres 136.
 Gesetze, physikalische 3.
 Gewicht 23.
 —, spezifisches 25.
 Gewitter 305, 331.
 Gezeiten 110.
 Gitterbeugung 485.
 Gittercharakteristik 426.
 Gitterspektrum 487.
 Gleichgewicht, dynamisches 130.
 —, stabiles, labiles, indifferentes 50.
 — von Kräften 29.
 —, thermisches 240.
 Gleichrichter 327, 425, 542.
 Gleichverteilungssatz 199.
 Gleichzeitigkeit 532.
 Gleitfunken 325.
 Gleitspiegelebene 606.
 Gletscher 219.
 Glimmentladung 327.
 Glühelatronen 321.
 Glühkathode 321.
 Glühlampen 303.
 Glühwürmchen 526.
 Golfstrom 247.
 Grammatom 134.
 GRAMMEScher Ring 403.
 Gammolekül 134.
 Grauer Körper 521.
 Grauglut 520.
 Gravitation 106.
 Gravitationsfeld 111.
 Gravitationsgesetz 106, 538.
 Gravitationskonstante 106.
 Gravitationspotential 112.
 Grenzfall, aperiodischer 397.
 Grenzwellenlänge, lichtelektrische 541.
 Grenzwiderstand 397.
 Grenzwinkel der Totalreflexion 450.
 Grundeinheiten 24, 105.
 Grundform eines Kristalls 603.
 Grundgrößen 24, 105.

- Grundschiwingung 161, 184.
 Grundton 190.
 Grundzustand 551.
 Gruppengeschwindigkeit
 581.
 Gütezfiffer, magnetische 376.
- Halbleiter** 258.
 Halbwertszeit 589.
 HALL-Effekt 390.
 Halo 488.
 Harmonium 196.
 Härte 116.
 Hauptebenen 457.
 Hauptpunkte 457.
 Hauptquantenzahl 555.
 Hauptsatz der Wärmelehre,
 erster 237.
 — — —, zweiter 240.
 — — —, dritter 247.
 Hauptserie 563.
 Hauptträgheitsachsen 81.
 Hauptträgheitsmomente 81.
 Hautwirkung 368.
 Hebel 65, 68.
 Heber 121.
 HEFNER-Kerze 436.
 Helium, flüssiges 229.
 Heliumspektrum 555.
 HENRY'Sches Gesetz 236.
 Hertz (Einheit) 100.
 HERTZ'sche Wellen 419.
 HESS'sche Strahlung 602.
 heteropolare Moleküle 560.
 HEUSLER'sche Legierungen
 374.
 Himmelslicht 488.
 Höhenformel, barometrische
 143.
 Höhenmessung 143, 224.
 Höhenstrahlung 602.
 Hohlraumstrahlung 521.
 Hohlspiegel 442.
 — (wellentheoretisch) 489.
 Homogenität 114, 609.
 Homöopolare Moleküle 561.
 HOOKE'Sches Gesetz 116.
 Hörgrenze 191.
 Horizontalkomponente, erd-
 magnetische 394.
 Hörsamkeit von Räumen
 173.
 H-Strahlen 599.
 HUMASON-HUBBLE-Effekt
 540.
 HUYGENS'Sches Prinzip 181,
 483.
 Hydraulik 150.
 Hydraulische Presse 120.
 Hydrodynamik 150.
 Hydrostatisches Paradoxon
 120.
 Hypothesen 4.
 Hysterese 376.
- Identität von Elementar-
 teilchen 585.
 Immersion 465.
 Impedanz 408.
 Impuls 38.
 Impulsmoment 79.
 Impulssatz 39.
 — bei Elementarvorgängen
 546.
 Indizes, einfache, rationale
 602.
 Induktion, elektromagneti-
 sche 354.
 —, gegenseitige 366.
 —, magnetische 369.
 —, unipolare 358.
 Induktionserscheinungen,
 Überblick 361.
 Induktionsgesetz 356, 387.
 Induktionsstrom 354.
 Induktivität 366, 387, 411.
 Induktor 401.
 Inertialsysteme 33.
 Influenz 267.
 Influenzmaschine 280.
 Inhomogenität 114.
 Inklination, erdmagnetische
 337.
 Interferenz, allgemein 174.
 —, FRAUNHOFER'Sche 474.
 —, FRESNEL'Sche 472, 479.
 — gleicher Dicke 481.
 — gleicher Neigung 476.
 — des Lichtes 471.
 — von Materiewellen 581.
 Interferenzlänge 471.
 Interferometer 482, 528.
 Intervalle 191.
 Invarianz 527.
 Inversionstemperatur 214.
 Ionen 257.
 Ionenmoleküle 560.
 Ionisation 319.
 Ionisierung von Atomen 565.
 Ionisierungsspannung 567.
 Irreversible Vorgänge 240.
 Isobare Atomarten 591.
 Isobaren 231.
 Isolatoren 258.
 Isothermen 207, 226.
 Isotopentrennung 593.
 Isotopie 590.
 Isotopieeffekte in Spektren
 593.
 Isotropie 114.
- JOHNSEN-RAHBEK-Effekt**
 296.
 Joule (Einheit) 46, 48.
 JOULE-Effekt 374.
 JOULE'Sches Gesetz 302.
 — Wärme 302.
 JOULE-THOMSON-Effekt 214.
- Kaleidoskop 443.
 Kalkspat 495.
- Kalorie 210.
 Kalorimetrie 211.
 Kältemaschinen 240, 251.
 Kältemischungen 234.
 Kammerton 193.
 Kanalstrahlen 330.
 Kapazität 270, 277, 296, 411.
 — der Erde 271.
 Kapillarität 128.
 Kapillarwellen 165.
 Kapselpumpe 149.
 Katakaustik 446.
 Kathode 307.
 Kathodenfall 329.
 Kathodenstrahlen 330.
 —, Ablenkung 344.
 Kathodenstrahlröfen 330.
 Kathodenzerstäubung 330.
 Kationen 309.
 Kausalitätsgesetz 2, 584.
 Kehlkopf 196.
 Keil 70.
 KELVIN-Skala 199.
 KEPLER'Sche Gesetze 108,
 255.
 Kernladungszahl 549.
 Kernmagneton 578.
 Kernmodell der Atome 549.
 Kernphysik 601.
 Kernreaktionen 599.
 Kerntheorie 596.
 Kernumwandlungen 599.
 KERR-Effekt 499.
 KETTELER-HELMHOLTZ'sche
 Gleichung 505.
 Kettenreaktionen 577.
 Kilogrammnormal 25.
 Kilowattstunde 46, 303.
 Kinderkreisel 92.
 KIRCHHOFF'Sches Gesetz 520,
 564.
 KIRCHHOFF'Sche Sätze 290.
 Klänge 190.
 Klanganalyse 190.
 Klangfarbe 190.
 Klangfiguren 186.
 Klebkraft, elektrische 296.
 Kleidung 247.
 Klemmenspannung 284.
 Knallwellen 168, 174.
 Koerzitivkraft 376.
 Kohärenz 471.
 Kohlensäureassimilation
 577.
 Kohlensäureschnee 228.
 Kohlenstoffatom, asymme-
 trisches 501.
 Kollektiv 464.
 Kollergang 93.
 Kolloide 233.
 Kombinationsprinzip, RITZ-
 sches 565.
 Kombinationstöne 179.
 Kometenschweife 544.
 Komma, pythagoräisches
 193.

- Kommunizierende Röhren 121.
 Kompaß 337.
 Kompensationsmethode 315.
 Komplementärfarben 517.
 Komplementarität, quantenmechanische 583.
 Komplexionen 241.
 Komponenten eines Vektors 12.
 Kompressionsmodul von Flüssigkeiten 126.
 — von Gasen 140, 215.
 Kondensation 215.
 Kondensationskerne 222.
 Kondensator 271, 275, 277.
 —, Energie, Anziehung der Platten 275.
 Konkavspiegel 443.
 Konsonanz und Dissonanz 191.
 Kontinentalklima und Küstenklima 210.
 Kontinuitätsbedingung 151.
 Konvektion 246.
 Konvexspiegel 443, 447.
 Korona 324.
 Körperfarben 519.
 Korrespondenzprinzip 580.
 Kosmische Strahlung 602.
 — Wolke 110.
 Kovolumen 208.
 Kräfte 20.
 —, Addition 27.
 —, innere, eines Systems 30.
 Kräfteinheiten 24.
 Kräftepaare 28, 63.
 Kraftfelder 57.
 Kraftlinien, elektrische 260.
 —, magnetische 334, 338, 383.
 Kraftmaschinen 66.
 Kräuselwellen 165.
 Kreisbewegung 16.
 Kreisel, KLEINScher 90.
 —, kräftefreier 88.
 —, nicht kräftefreier 91.
 Kreiselektron 578.
 Kreiselkompaß 99.
 Kreiselkräfte 92.
 Kreiseltheorie 88.
 Kreisfrequenz 100, 160.
 Kreisprozesse 247.
 Kreisströme, atomare 371.
 Kreuzgitter 487.
 Kriechbewegung 102.
 Kristalle 113, 562, 603.
 —, flüssige 499.
 Kristallbau 603.
 Kristallflächen 604.
 Kristallgitter 608, 609.
 Kristallklassen 606.
 Kristalloptik 495.
 Kristallsymmetrien 604.
 Kristallsysteme 606.
 Kritische Temperatur 225.
 Kryohydrat 234.
 Kryophor 200.
 Kugelkreisel 82.
 Kugellager 239.
 Kugelwellen 162.
 KUNDTsche Staubfiguren 177.
 Kurzschluß 300.
 Kurzsichtigkeit 467.
 Ladung, elektrische 254.
 —, spezifische, des Elektrons 345, 548.
 — und Feld der Erde 271, 331.
 Ladungsträger 257.
 —, bewegte, im magnetischen Felde 343.
 Lagerreaktion 86.
 LAMBERTSches Gesetz 437.
 Längeneinheiten 5.
 Längenmessung 5.
 Längsdilatation 116.
 LAPLACESches Gesetz 341.
 LAUE-Diagramm 512.
 Lautsprecher 401.
 Lebensdauer radioaktiver Stoffe 589.
 LECHER-System 421.
 Leidener Flasche 278.
 LEIDENFROSTsches Phänomen 246.
 Leistung 46.
 — eines Stromes 302.
 — eines Wechselstromes 410.
 Leistungsmesser, elektrischer 399.
 Leistungsmessung an Maschinen 68.
 Leiter 257.
 Leitfähigkeit, Leitvermögen 289.
 —, elektrolytische 298, 309.
 — von Flüssigkeiten 306.
 —, metallische 288.
 LENARD-Effekt 305.
 — -Strahlen 330.
 LENZsches Gesetz 355.
 Leuchtdichte 437.
 Leuchtelektron 562.
 Leuchten, thermisches 565, 580.
 Leuchtkäfer 526.
 Licht, kohärentes 471.
 —, natürliches und polarisiertes 494.
 Lichtablenkung in Schwerfeldern 537.
 Lichtausbreitung 432.
 Lichtbeugung 483.
 Lichtbogen 326.
 —, tönender 424.
 Lichtbrechung 447.
 Lichtdruck 544.
 Lichteinheiten 436.
 Lichtelektrischer Effekt 541, 565.
 LICHTENBERGSche Figuren 326.
 Lichtgeschwindigkeit 341, 351, 352, 362, 434, 530.
 Lichtjahr 5.
 Lichtmessung 436.
 Lichtmühle 507.
 Lichtquanten 543.
 Lichtquantentheorie 542.
 Lichtquellen 430.
 Lichtstärke 436.
 Lichtstrahlen 432.
 —, krumme 449.
 Lichtstrom 436.
 Lichttheorien 421, 430, 501, 547.
 Lichtvektor 493.
 Lichtweg, ausgezeichneter 440.
 Lichtwellen, stehende 488, 502.
 Lichtzeiger 442.
 LINDE-Verfahren 229.
 Linienspektrum 562.
 Linsen 452.
 — (wellentheoretisch) 489.
 —, dicke 457.
 —, elektrische und magnetische 346.
 Linsenfehler 457.
 Linsenformel 453.
 Linsensysteme 458.
 Lippenpfeifen 187.
 LISSAJOUS-Figuren 101.
 Löchertheorie 595.
 Lochkamera 433.
 Lokalströme 317.
 LORENTZ-Kontraktion 534.
 — -Transformation 531.
 — -Triplet 503.
 LOSCHMIDT'sche Zahl 134, 202, 310.
 Lösungen 232.
 —, kolloidale 233.
 Lösungsdruck 313.
 Lösungswärme 233.
 Lotabweichung 97.
 Luft, flüssige 228.
 Luftballon 145.
 Luftdruck 145.
 Luftelektrizität 331.
 Luftfeuchtigkeit 222, 231.
 Luftpumpe 149.
 Luftsäulen, schwingende 186.
 Luftspiegelungen 449.
 Luftwogen 166.
 Lumen 437.
 Lumineszenzerscheinungen 525.
 LUMMER-GEHRCKE-Platte 483.

- Lupe 460.
 Lux 437.
 LYMAN-Serie 553.
- MACLEOD**-Manometer 148.
 Magdeburger Halbkugeln 146.
MAGGI-RIGHI-LEDUC-Effekt 391.
 Magnete 332.
 —, natürliche 374.
 —, permanente 376.
 Magnetisierung 372.
 — im erdmagnetischen Felde 382.
 — durch Rotation 380.
 Magnetisierungskurve 375, 376.
 Magnetismus 332.
 Magneton 577.
 Magnetooptik 502.
 Magnetostriktion 374.
 Magnetpole 332.
MAGNUS-Effekt 154.
MARIOTTESche Flasche 153.
 Maschinen 66.
 —, einfache 68.
 —, elektrische 403.
 —, thermische 250.
 Maschinensender 423.
 Masse, schwere 23, 105.
 —, träge 21, 105.
 — des Elektrons 548.
 — der Lichtquanten 543.
 — der Moleküle 135.
 — und Geschwindigkeit 535.
 Massenäquivalent der Energie 536.
 Massenausgleich 68.
 Massendefekt 597.
 Masseneinheit 24.
 Massenmessung 25.
 Massenmittelpunkt 37.
 Massenprototyp 25.
 Massenpunkt 8.
 Massenspektroskopie 591.
 Massensuszeptibilität 370, 373.
 Maßeinheit und Maßzahl 4.
 Maßeinheiten, s. Einheiten.
 Maßsystem, elektromagnetisches 341, 351.
 —, elektrostatisches 255, 282.
 —, internationales elektrisches 282, 351, 391.
 —, magnetisches 391.
 —, physikalisches (CGS) 23.
 —, technisches 24.
 Materie, Aufbau 114.
 —, Erscheinungsformen 113.
 Materiewellen 581.
 Matrizenrechnung 583.
- MAXWELLSche** Beziehung 501, 506.
 — Gleichungen 389.
MAXWELLSches Verteilungsgesetz 242.
 Meerleuchten 526.
 Megabar 146.
 Mehrphasenströme, verkettete 412.
 Messungen, physikalische 4.
 Meßbereich von elektrischen Meßgeräten 399.
 Metallbearbeitung 116.
 Metazentrum 125.
 Meteorologie 230.
 Meterkilogramm 46.
MICHELSON-Versuch 527.
 Mikrofarad 271.
 Mikrokristallinische Stoffe 610.
 Mikrophon 400.
 Mikroradiometer 507.
 Mikroskop 463.
 Millibar 146.
 Mischelemente 591.
 Mischfarben 517.
 Mißweisung 99, 336.
 Mitführung des Lichtes 482, 535.
 Mittelpunkt zweier Kräfte 29.
 Mittelwertbildung 133.
 Modellversuche der Technik 152.
 Modellvorstellungen 547, 551, 582.
 Modulation, musikalische 193.
 Modulierung elektrischer Energie 400, 424, 429.
MOHRsche Waage 124.
 Mol 134.
 Molekulargewicht 133.
 Molekularsuszeptibilität 373.
 Molekülbildung 574.
 Molekülspektren 516.
 Molenbruch 233.
 Molvolumen 135.
 Molwärme 210, 212, 580.
 Moment, elektrisches 257, 269.
 — — von Molekülen 561.
 —, magnetisches 333.
 — — von Atomen 371, 377.
 — — von Stromkreisen 348.
 —, statisches 62.
 Momentanwert einer Schwingung 99.
 Momentensatz 79.
 Mondbewegung 108.
 Mondfinsternis 433.
MOSELEYSches Gesetz 570.
 Musikinstrumente 194.
 —, elektrische 195.
- Nachhall 173.
 Nachwirkung, elastische 116.
 —, thermische 209.
 Nadelgalvanometer 394.
 Nahepunkt 465.
 Nahewirkung 58.
NATTERERSche Röhre 228.
 Naturwissenschaften 1.
 Nebelverfahren 587.
 Nebenquantenzahl 555.
 Nebenwiderstand 398.
 Neigungswinkel bei Kristallflächen 603.
NERNST-Effekt 391.
 — **-ERTINGSHAUSEN**-Effekt 391.
 Neutrale Zone bei Biegung 117.
 Neutrino 599.
 Neutron 594.
NEWTONSches Axiom, erstes 20, 21.
 — —, zweites 21.
 — —, drittes 21, 30.
 — Gleichung 167.
 — Ringe 481.
 Nichteuklidische Geometrie 539.
 Nichtleiter 258.
NICOLSches Prisma 498.
 Niederschläge 231.
 Nife-Akkumulator 317.
 Niveauflächen 60.
 —, elektrische 263.
 Nonius 5.
 Normalbedingungen 132.
 Normalbeschleunigung 17.
 Normalelektrode 314.
 Normalelemente 315.
 Normalkraft 75.
 Normalspektrum 487.
 Nullkurve, magnetische 375.
 Nulleiter 412.
 Nullpunkt, absoluter 199, 200, 229, 247.
- Oberflächenladung, elektrische 265.
 Oberflächenionisation 320.
 Oberflächenspannung 126.
 Oberflächenwellen 164.
 Oberschwingungen 161, 185.
 Obertöne 190.
 Objektiv 464.
 Oersted (Einheit) 334.
 Ofenfeuer 147.
 Ohm (Einheit) 289.
OHMSches Gesetz (Akustik) 191, 194.
 — — (elektrischer Strom) 289, 309.
- Ohr 197.
 Okular 461.
 Okularmikrometer 464.
 Ölschichten 129.

- OORT-Effekt 109.
 Opernglas 463.
 Optik 430.
 —, geometrische 439.
 Ordnungszahl der Elemente
 447, 549.
 — von Teilschwingungen
 160.
 Orgel 196.
 Orgelpfeifen 187.
 Orthshöhe 152.
 Osmose 234.
 Oszillator, elektrischer 418.
 Oszillograph 346.
 Ozon in der Atmosphäre 510.
- Packungsbruch 597.
 Panzergalvanometer 395.
 PAPINScher Topf 224.
 Parabelmethode 591.
 Parallelogramm der Kräfte
 27.
 Parallelschaltung von Strom-
 quellen 299.
 — von Widerständen 292.
 Paramagnetismus 369, 371,
 385, 578.
 parsec 5.
 Partialdruck 139.
 Partialschwingungen 160,
 185.
 PASCHEN-Serie 553.
 Passatwinde 230.
 PAULI-Prinzip 557.
 PELTIER-Effekt 306.
 Pendel 103.
 Pendeluhr 105.
 Perihelbewegung 538.
 Periodisches System der Ele-
 mente 556.
 Permeabilität 370, 385, 386,
 393.
 — der Ferromagnetika 377.
 Perpetuum mobile 1. Art 49.
 — 2. Art 240.
 Pfeifen 187.
 Pferdestärke 47.
 Phasen einer Schwingung
 99.
 — eines Stoffes 216.
 Phasengeschwindigkeit 506.
 Phasenkonstante 99, 160.
 Phasensprung bei Reflexion
 177.
 Phosphore 526.
 Phosphoreszenz 526.
 Photochemie 576.
 Photochemisches Grund-
 gesetz 577.
 Photoeffekt 541.
 Photographie 576.
 Photon 543.
 Photometrie 436.
 Photozelle 541.
 Physik, experimentelle 1.
- Physik, theoretische 1.
 —, technische 2.
 —, Aufgabe der 583.
 PICKERING-Serie 564.
 Piezoelektrizität 279.
 Piezometer 126.
 Pipette 147.
 PITOT-Rohr 153.
 Planetenbewegung 108.
 Plastizität 116.
 Plattenkondensator 272.
 Plattenschwingungen 186.
 Poise 157.
 POISEUILLESches Gesetz 158.
 POISSONSches Gesetz 213.
 Poissonsche Gleichung 324.
 — Zahl 116.
 Polarisation von Wellen 169.
 —, dielektrische 276.
 —, elektrische 267.
 —, elektrolytische 312.
 — des Lichtes 493.
 Polarisations ebene 494.
 Polarisationsspannung 312.
 Polarisationswinkel 494.
 Polarisator 494.
 Polarlichter 347.
 Polarstern 98.
 Pole von Magneten 332.
 —, magnetische, der Erde
 336.
 Polflucht der Kontinente
 97.
 Positron 595.
 Potential, allgemein 59.
 —, elektrisches 261.
 — — in Leitern 265.
 — der Gravitation 112.
 —, magnetisches 354.
 — in nicht wirbelfreien Fel-
 dern 362.
 Potentialschwelle an den
 Kernen 597.
 Potentialtopf 598.
 Potentialwaage 276.
 Potentiometerschaltung 293.
 POULSEN-Schwingungen
 423.
 Präzession des Kreisels 90,
 92.
 — der Erdachse 98.
 PREVOSTScher Satz 519.
 Prisma 451.
 —, achromatisches 470.
 —, geradsichtiges 470.
 —, totalreflektierendes 451.
 PRONYScher Zaum 68.
 Proportionalitätsgrenze 115.
 Protonen 548.
 Protonenstrahlen 600.
 PROUTSche Hypothese 596.
 Psychophysisches Grund-
 gesetz 438.
 Punktladung 257.
 Purpurfarben 518.
- Pyroelektrizität 279.
 Pyrometrie, optische 524.
 Pythagoräisches Komma
 193.
- Quantenbahnen 550.
 Quantenmechanik 583.
 Quantenoptik 546.
 Quantensprünge 550.
 Quantentheorie 431, 541.
 — des Lichtes 542.
 Quantenzahlen 550.
 Quarzlinzennmethode 509.
 Quarzquecksilberlampe 327,
 510.
 —, ultrarote Strahlung 509.
 Quarzresonator 280.
 Quarzruhren 280.
 Quecksilberdampfstrahl-
 pumpe 149.
 Quecksilberdiffusionspumpe
 150.
 Quecksilberlichtbogen 326.
 Querkontraktion 116.
 QUINCKESches Interferenz-
 rohr 176.
- Radfahren 77.
 Radialgeschwindigkeit der
 Fixsterne 493.
 Radioaktivität, künstliche
 600.
 —, natürliche 586.
 —, Theorie 597.
 Radiometer 507.
 Radium 586.
 Radius der Welt 539.
 Rahmenantenne 421.
 RAMAN-Effekt 575.
 RAMSAUER-Effekt 582.
 Randwinkel 128.
 RAOULTSches Gesetz 233.
 Rauhreif 225.
 Raumakustik 173.
 Raumdichte, elektrische 254.
 Raumgitter 512, 603.
 Raumgruppen 609.
 Raumladung 321, 323.
 Razemat 501.
 Rechtsabweichung der Ge-
 schosse 96, 155.
 Reflexion von Wellen, all-
 gemein 171.
 — des Lichtes 441.
 — — — im gesamten
 Spektrum 505.
 — — —, metallische 506.
 Reflexionsgesetz 172, 441.
 Refraktion 179.
 Refraktometer 451.
 Regulation des Eisens 219.
 Regenbogen 470.
 Reibung 239.
 —, innere 151, 156.

- Reibungselektrizität 259, 305.
 Reibungsgesetz, STOKES'sches 159.
 Reibungswinkel 239.
 Reichsgesetz über die elektrischen Einheiten 352.
 Reichweite von Alphastrahlen 590.
 Reihenschaltung von Stromquellen 299.
 — von Widerständen 292.
 Rekombination 320.
 Relais, elektromagnetische 399.
 Relativität von Längen und Zeiten 532.
 Relativitätsprinzip 33, 527, 531.
 Relativitätstheorie 527.
 —, allgemeine 537.
 —, spezielle 530.
 Remanenz 375.
 Resonanz 188.
 —, elektrische 410.
 Resonanzbreite 189.
 Resonanzstrahlung 574.
 Resonanztheorie des Hörens 197.
 Resonator, HELMHOLTZscher 190.
 —, HERTZscher 421.
 Reststrahlenmethode 508.
 Reversible und nicht reversible Vorgänge 240.
 Reversionspendel 104.
 RICHARDSON'sches Gesetz 322.
 Richtkraft 99.
 Richtmoment 101.
 Richtstrahler 420.
 Richtungshören 197.
 Richtungsquantelung 578.
 Richtverstärker 427.
 RIGHI-LENUC-Effekt 391.
 Ringspule 340.
 ROGUERSche Spirale 350.
 Rolle 69.
 Röntgenmedizin 511.
 Röntgenröhre 511.
 Röntgenspektren 568.
 Röntgenstrahlen 510, 543.
 Rostpendel 205.
 Rotation eines Körpers 85.
 — eines Massenpunktes 82.
 Rotationsenergie 80.
 Rotationsmagnetismus 368.
 Rotationschwingungsspektrum 571.
 Rotverschiebung 493, 539, 540.
 ROWLANDScher Versuch 342.
 Rückdiffusion 321.
 Rückstellkraft 99.
 Rückstoß 41.
 Ruhmasse 536.
 RYDBERG-Konstante 552.
 — -Korrekturen 563.
 Saccharimeter 552.
 Saiteninstrumente 194.
 Saitenschwingungen 184.
 Sammellinsen 452.
 Sättigung, magnetische 375.
 — von Farben 517.
 Sättigungsdefizit 232.
 Sättigungsdruck 221.
 Sättigungsstrom 321.
 Säule, positive 328.
 Schallgeschwindigkeit 168, 177, 215.
 Schallstrahlen 164.
 Schatten 432.
 Schauer 602.
 Scheinwiderstand 408.
 Scheitelwert 99.
 — von Wechselstrom 407.
 Scherung 117.
 — von Magnetisierungskurven 379.
 Scherungsmodul 117.
 Schiefe Ebene 31.
 Schiffe, Stabilität 125.
 Schiffsmagnetismus 383.
 Schirmwirkung des Eisens 382.
 Schleifenfahrt 78.
 Schlieren 449.
 Schlierenmethode 168.
 Schmelzen 217.
 Schmelzpunkt 215.
 Schmelzwärme 217.
 Schmiermittel 239.
 Schraube 71.
 Schraubenregel, Drehimpuls 79.
 —, elektrodynamisches Grundgesetz 341.
 —, Kreisbewegung 19.
 —, LENZ'sches Gesetz 356.
 —, magnetisches Feld eines Stromes 338, 340.
 —, statisches Moment 63.
 —, Ströme im magnetischen Feld 347.
 —, Vektorprodukt 18.
 —, Winkelgeschwindigkeit 16.
 Schraubung eines Raumgitters 606.
 Schub 117.
 Schubmodul 117.
 Schwankungserscheinungen 131, 202.
 Schwarze Strahlung 521.
 Schwarzer Fleck 481, 520.
 Schwärzlichkeit von Farben 518.
 Schweben kleiner Teilchen 159.
 Schwebungen 178.
 Schwerewellen 165.
 Schwerkraft 22.
 Schwerkraftfeld 60.
 Schwerpunkt 36.
 — elektrischer Ladungen 257.
 Schwerpunktsachse 80.
 Schwerpunktsatz 40.
 Schwimmen 124.
 Schwimmlagen, stabile und labile 124.
 Schwingkristall 280.
 Schwingung, elektrische 407.
 —, erzwungene 188.
 — —, elektrische 421.
 —, gedämpfte 101.
 —, von Galvanometern 395.
 —, harmonische, eines Massenpunktes 99, 160.
 — eines Körpers 184.
 — einer Saite 184.
 Schwingungsbauch, -knoten 176.
 Schwingungsdauer 100, 160.
 Schwingungsgleichung 99, 102.
 Schwingungskreis, elektrischer 415.
 —, offener und geschlossener 420.
 Schwingungsweite 99.
 Schwingungszahl 100, 160.
 — des Lichtes 431.
 — elektrischer Wellen 420.
 Schwingungszeit 100.
 Sehen 467.
 —, räumliches 468.
 Sehweite, deutliche 465.
 Seifenblase 128, 476.
 Seilschwingungen 184.
 Seilwellen 177.
 Sekunde 6.
 Sekundenpendel 104.
 Selbstinduktion 366.
 Selbstumkehr der Spektrallinien 521.
 Selenzelle 541.
 Seltene Erden 559.
 Sender 419.
 Sendeschaltung 428.
 Senkspindel 126.
 Serien 552, 569.
 Seriengrenze 553.
 Shunt 398.
 Siedebarenometer 224.
 Sieden 223.
 Siedepunkt 215.
 Siedepunkterhöhung 233.
 Siedeverzug 216.
 Signalgeschwindigkeit 536.
 Silbervoltmeter 310.
 Sirene 191.
 Skalare 10.
 Skalares Produkt 44.

- Skineffekt 369.
 SMEKAL-RAMAN-Effekt 575.
 Solarkonstante 252.
 Sondenmessungen 329.
 Sonnenfinsternis 433.
 Sonnenflecken 247, 503.
 Sonnenspektrum 509, 510, 516.
 Sonnenstrahlung 252.
 Spalt, Beugung 483.
 Spannung, elektrische 261.
 — —, effektive 411.
 — —, innere 115.
 — —, magnetische 353, 375.
 Spannungskoeffizient der Gase 207.
 Spannungsmesser, elektrischer 398.
 — —, elektrostatischer 273.
 — —, magnetischer 365.
 Spannungsreihe, elektrische 304.
 Spannungsteilung 293.
 Spektralanalyse 517.
 — — mit Röntgenstrahlen 571.
 Spektralfarben 469, 517.
 Spektrallinien 469.
 Spektralserien 552, 569.
 Spektraltermine 553.
 Spektograph, Spektrometer, Spektroskop 470.
 Spektrometrie der Röntgenstrahlen 513.
 Spektrum 469.
 — —, gesamtes, Überblick 504.
 — —, kontinuierliches 516, 554.
 — —, optisches 510, 562.
 — —, verschiedene Arten 516.
 — —, wasserstoffähnliches 555.
 Sperrschichtphotoeffekt 542.
 Spiegel, ebene 442.
 — —, sphärische 443.
 Spiegelebene bei Kristallen 604.
 Spiegelfernrohr 463.
 Spiegelung 172, 441.
 Spiegelversuch, FRESNELscher 472.
 Spiralnebel 540.
 Spitzenentladung 324.
 Spitzenwirkung 267.
 Spitzenzähler 586.
 Sprache 197.
 Spulen 339.
 Stäbchen 467.
 Stabschwingungen 185.
 Standfestigkeit 53.
 STARK-Effekt (elektrische Aufspaltung der Spektrellinien) 504.
 — — (DOPPLER-Effekt) 492.
 Starrer Körper 8.
 Statisches Moment 62.
 Statistik 131.
 Staubfiguren, KUNDTSCHE 177.
 Staudruck 153.
 STEFAN-BOLTZMANNsches Gesetz 524.
 Steighöhe, kapillare 129.
 Steilheit 427.
 STEINERScher Satz 80.
 Stereoskop 468.
 STERN-GERLACH-Versuch 578.
 Sternschaltung 413.
 Sternweite 5.
 Stilb 437.
 Stimmgabel 186.
 Stimmung, harmonische 192.
 — —, temperierte 193.
 STOKESSches Gesetz (Fluoreszenz) 574.
 — — (Reibung) 159.
 Störungen, Fortpflanzung von 161.
 — —, elektromagnetische 362.
 — — der Planeten 109.
 Stoßionisation 319.
 Stoßvorgänge 53.
 Stoßzahl der Gasmoleküle 142.
 Strahl, ordentlicher und außerordentlicher 496.
 Strahlen 163.
 Strahlenbündel, -büschel 163.
 Strahlenoptik 440.
 Strahlung, schwarze 521.
 Strahlungsdämpfung 419.
 Strahlungsdruck 544.
 Strahlungsgesetz, PLANCKsches 522.
 Strahlungsgleichgewicht 522.
 Strahlungslehre 430.
 Strahlungsmessung 507.
 Strahlungstemperatur 524.
 Stratosphäre 230.
 Streckgrenze 115.
 Streuung von Alphastrahlen 549.
 — — des Lichtes 488.
 — — — an Elektronen 545.
 — — — an Molekülen 575.
 Strom, elektrischer 285.
 — — im magnetischen Felde 347.
 — —, wattloser 411.
 Stromarbeit 302.
 Stromdichte, elektrische 287.
 Stromfaden 151.
 Stromleistung 302.
 Stromlinien 150.
 Strommesser, elektrischer 394, 398.
 Stromquellen, elektrische 284.
 Stromröhre 151.
 Stromschleifen, elektrische 338.
 Stromstärke, elektrische 287.
 — —, effektive 411.
 Strömung, laminare und turbulente 158.
 Strömungsfeld 151.
 Strömungsströme 319.
 Stromverzweigungen 290, 301.
 Stromwärme 301.
 Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen 514, 603.
 Stufengitter 483.
 Sublimation 215, 225.
 Summationstöne 179.
 Supraleitfähigkeit 298.
 Suspensionen 233.
 Suszeptibilität 370.
 Symmetriezentrum bei Kristallen 605.
 Szintillation 586.
 Tangentenbussole 393.
 TARTINISCHE Töne 179.
 Tauchbahnen 557, 562.
 Taupunkt 222, 232.
 Technisches Maßsystem 105.
 Teilchen, schwebende 144.
 Teilschwingungen 160, 185.
 Telegraphie 400, 423.
 Telephonie 400, 424.
 Temperatur 198.
 — —, absolute 199.
 — —, effektive 524.
 — —, kritische 225.
 — —, schwarze 524.
 — —, sehr tiefe 229.
 Temperaturausgleich 244.
 Temperaturgefälle 245.
 Temperaturionisation 322.
 Temperaturkoeffizient des Widerstandes 297.
 Temperaturmessung 208.
 — —, elektrische 209, 298, 305.
 — — aus der Strahlung 524.
 Temperaturskala, gasthermometrische 198.
 — —, thermodynamische 249.
 Temperaturstrahlung 519.
 Terme 553.
 Termschema 553.
 TESLA-Schwingungen 417.
 Thermionen 322.
 Thermoelektrizität 305.
 Thermolemente 305.
 Thermokraft 305.
 Thermomagnetische Erscheinungen 390.
 Thermometer 208.
 Thermosäule 507.
 Thermostat 305.
 THOMSONSche Brückenschaltung 295.
 THOMSON-Effekt 391.
 Tonarten 192.

- Töne 190.
 Tonhöhe 190.
 Tonleiter 192, 193.
 Tonschritte 192.
 Tonverwandtschaft 192.
 Topfmagnet 384.
 TORRICELLI-Theorem 152.
 — Versuch 146.
 Torsionsmodul 117.
 Totalreflexion 450.
 TOWNSEND-Strom 320.
 Tragflächen 156.
 Trägheit 20.
 — und Schwere 537.
 — der Energie 536.
 Trägheitsellipsoid 81.
 Trägheitskräfte 34, 537.
 — auf der Erde 95.
 Trägheitsmoment 80.
 — der Moleküle 572, 573.
 Trägheitsradius 80.
 Trägheitssatz 20.
 Trägheitswiderstand 34.
 Transformator 413.
 Translation eines Raumgitters 606.
 Transurane 601.
 Trennungsflächen 155.
 Tribolumineszenz 526.
 Tripelpunkt 216.
 Triplogonium 593.
 Trockengleichrichter 542.
 Troposphäre 230.
 Trübe Medien 494.
 Tunneleffekt 598.
 Turbulenz 155.
 Turmalinplatte 498.
 TYNDALL-Phänomen 494.
- Überblasen 188.
 Überlichtgeschwindigkeit 536.
 Übersetzungsverhältnis eines Umspanners 413.
 Uhren 105.
 Ultramikroskop 492.
 Ultrarot 507.
 Ultraschallwellen 191.
 Ultrastrahlung 513, 602.
 Ultraviolett 509.
 Umkehrbare und nicht umkehrbare Vorgänge 240.
 Umkehrbarkeit des Strahlungsganges 440.
 Umkehrprisma 451.
 Umlaufzeit 17.
 Umsetzungen, chemische, bei der Elektrolyse 310.
 Umspanner 413.
 Umwandlungspunkt, magnetischer 380.
 Umwandlungswärmen 217.
 Unabhängigkeitsprinzip 27.
 Undulationstheorie 430.
 Unipolarmaschine 359.
- Unordnung, ideale 131, 242.
 Unruhe 105.
 Unschärferelation 584.
 Unterbrecher 402, 403.
 Unterkühlung 216.
 Ursache und Wirkung 2.
- Vakuumspektrograph 510.
 Vakuumtechnik 148.
 Vektoren 10.
 Vektorgleichungen 13.
 Vektorsumme 11.
 — von Kräften 27.
 Vektorzerlegung 12.
 Ventile, elektrische 425.
 Verbotene Linien 565.
 Verdampfen 220.
 Verdampfungswärme 220.
 VERDETSche Konstante 501.
 Verflüssigung der Gase 225.
 Vergrößerung optischer Geräte 459.
 Verschiebung, dielektrische 277.
 Verschiebungsarbeit 42.
 Verschiebungsgesetz, WIENsches 524.
 Verschiebungssatz, radioaktiver 590.
 —, spektroskopischer 564.
 Verschiebungsstrom 363.
 Verstärkerröhre 426.
 Verteilungsgesetz, MAXWELLSches 135.
 Verwandlung von Arbeit in Wärme 239.
 — von Wärme in Arbeit 247.
 Viertelwellenlängenblättchen 497.
 Violettverschiebung 493.
 Viskosität 156.
 Vokale 197.
 Volt 264.
 VOLTA-Effekt 304.
 Voltmeter 307.
 Voltgeschwindigkeit 567.
 Voltsekunde 393.
 Volumen, kritisches 226.
 —, spezifisches 25.
 Volumionisation 320.
 Vorwiderstand 399.
- Waage 71.
 VAN DER WAALSsche Gleichung 208, 226.
 — — — — — Kräfte 126, 132, 207.
- Wagenrad 70.
 Wägung 73.
 — eines Gases 143.
 Wahrscheinlichkeit 130.
 —, quantenmechanische 585.
 —, thermodynamische 242.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 585.
 WALTENHOFENSches Pendel 368.
 Wärme, spezifische 210, 211, 578.
 Wärmeäquivalent, elektrisches 238, 303.
 —, mechanisches 238.
 Wärmekapazität 210.
 Wärmekraftmaschinen 250.
 Wärmeleitfähigkeit 245.
 Wärmeleitung 244.
 Wärmeleitzahl 245.
 Wärmemenge 209.
 Wärmeohm 245.
 Wärmequellen 252.
 Wärmestrahlung 519.
 Wärmestrom 244.
 Wärmetheorie, mechanische 199.
 Wärmetheorem, NERNSTsches 247.
 Wärmetod 244.
 Wärmetönung bei chemischen Umwandlungen 252.
 Wärmewiderstand 245.
 Wasser, schweres 594.
 Wasserfallelektrizität 305.
 Wasserstoff, flüssiger 299.
 —, schwerer 593.
 Wasserstoffähnlichkeit 562.
 Wasserstoffatom 551.
 Wasserstoffelektrode 314.
 Wasserstoffgewinnung 318.
 Wasserstrahlpumpe 149.
 Wasserwellen 164.
 Wasserzersetzung 308.
 Watt (Einheit) 47.
 Wattsekunde 46.
 WEBER-FECHNERSches Gesetz 438.
 Wechselstrom 407.
 Wechselstromleistung 410.
 Wechselstrommesser 399.
 Wechselstromwiderstand 408.
 Wechselwirkungsgesetz 30.
 Wechselzahl 407.
 Weglänge, freie 157.
 —, optische 449.
 WEHNELT-Kathode 322.
 — -Unterbrecher 403.
 — -Zylinder 511.
 Weicheisenmeßgeräte 398.
 WEINHOLDSche Gefäße 246.
 WEISSche Bezirke 374.
 Weitsichtigkeit 467.
 Wellen, allgemein 161.
 —, ebene 162.
 —, elektrische 417.
 —, longitudinale 167.
 —, periodische 166.
 —, stehende 176.
 — —, elektrische 421.

- Wellen, transversale 167, 168.
 Wellenfeld 161.
 Wellenfläche 162.
 Wellengeschwindigkeit 164.
 —, elektrische 423.
 Wellengleichung von SCHRÖDINGER 583.
 Wellenlänge 164, 166.
 — elektrischer Wellen 420.
 — des Lichtes 431.
 — — — im Vakuum 449.
 Wellenmechanik 583.
 Wellennormale 162.
 Wellenoptik 471.
 — und Quantenoptik 546.
 Wellenpaket 581.
 Wellentheorie des Lichtes 430.
 — der optischen Abbildung 489.
 Wellenzahl 432.
 Weltall 539.
 Weltäther 58.
 Wertigkeit, chemische 308, 561.
 WESTON-Element 315.
 Wetter 230.
 Wettervorhersage 232.
 WHEATSTONESche Brückenschaltung 294, 301, 411.
 Widerstand, elektrischer 289.
 —, elektrolytischer 314.
 — von Gasen 322.
 —, innerer, von Stromquellen 299.
 —, magnetischer 384.
 Widerstandsgeräte 293.
 Widerstandsmessung 294.
 Widerstandsthermometer 298.
 WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz 290.
 Wiedervereinigung 320.
 WIENSches Verschiebungsgesetz 524.
 WILSON-Kammer 587.
 Wind 230, 246.
 Windungsfläche 339.
 Winkelbeschleunigung 17.
 Winkelgeschwindigkeit 16.
 Winkelmessung 6.
 Winkelspiegel 442.
 Wirbel 151, 155.
 Wirbelfeld 59, 151.
 Wirbelring 155.
 Wirbelstrom 368.
 Wirkleistung 411.
 Wirklichkeit, objektive 585.
 Wirkung und Gegenwirkung 30.
 Wirkungsgrad von Kreisprozessen 249.
 — von Lichtquellen 525.
 — von Maschinen 68, 251.
 Wirkungslinie einer Kraft 27.
 Wirkungsquantum 523, 543.
 Wirkungsquerschnitt der Moleküle 141.
 Wirkwiderstand 409.
 Wismutspirale 391.
 Wölbspiegel 443.
 Wurf, schräger 61.
 Zähigkeit 156.
 Zählrohr 586.
 Zahnräder 70.
 Zäpfchen 467.
 ZEEMAN-Effekt 502.
 Zeigerablesungen 5.
 Zeit, Richtung ihres Ablaufs 244.
 Zeitmessung 6.
 Zelle, lichtelektrische 541.
 Zentralfeld 111.
 Zentralkräfte 80.
 Zentrifugalkraft 73.
 Zentrifugalmoment 86.
 Zentrifugalregulator 76.
 Zentripetalbeschleunigung 17.
 Zentripetalkraft 73.
 Zerfallskonstante 589.
 Zerfallsreihen, radioaktive 588.
 Zerfallstheorie der Radioaktivität 587.
 Zerstäuber 154.
 Zerstreuungslinsen 455.
 Zone des Schweigens 180.
 Zufall 131, 142.
 Zündspannung 328.
 Zungenpfeifen 188.
 Zustandsänderungen eines Gases, adiabatische 213.
 —, isotherme, isobare, isochore 139, 207.
 Zustandsgleichung der idealen Gase 206.
 — VON VAN DER WAALS 207, 227.
 Zustandsgrößen 130.
 Zwangskräfte 31.
 Zykloidenpendel 105.
 Zykklone 96.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.

Einführung in die Physik. Von Prof. Dr.-Ing. e. h. R. W. Pohl, Göttingen.
Erster Band: Einführung in die Mechanik und Akustik. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 440 Abbildungen, darunter 14 entlehnte. VIII, 251 Seiten. 1931. Gebunden RM 15.80
Zweiter Band: Einführung in die Elektrizitätslehre. Vierte, größtenteils neu verfaßte Auflage. Mit 497 Abbildungen, darunter 20 entlehnte. VIII, 268 Seiten. 1935. Gebunden RM 13.80
Dritter Band: Einführung in die Wärmelehre und Optik. In Vorbereitung.

Einführung in die Physik. Von Prof. Dr. Ph. Broemser, Basel. Mit 206 Textabbildungen. VIII, 404 Seiten. 1925. RM 9.45; gebunden RM 10.80

Physik für Jedermann mit besonderer Berücksichtigung der modernen technischen Anwendungen. Von Prof. Dr. phil. Arthur Haas, Wien. (Verständliche Wissenschaft, Band XX.) Mit 76 Abbildungen. X, 274 Seiten. 1933. Gebunden RM 6.80

Physikalisches Handwörterbuch. Zweite Auflage. Mit 1114 Textabbildungen. VI, 1428 Seiten. 1932. RM 96.—; gebunden RM 99.60

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Von Prof. Dr. Erwin Madelung, Frankfurt a. M. Unter Mitarbeit von Dr. K. Boehle, Göttingen und Dr. S. Flügge, Leipzig. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV.) Mit 25 Textabbildungen. XIII, 381 Seiten. 1936. RM 27.—; gebunden RM 28.80

Einführung in die klassische Elektrodynamik. Von Dozent Dr. Johannes Fischer. Mit 120 Abbildungen. VIII, 199 Seiten. 1936. RM 12.—; gebunden RM 13.80

Thermodynamik. Die Lehre von den Kreisprozessen, den physikalischen und chemischen Veränderungen und Gleichgewichten. Eine Hinführung zu den thermodynamischen Problemen unserer Kraft- und Stoffwirtschaft. Von Prof. Dr. W. Schottky. In Gemeinschaft mit Priv.-Doz. Dr. H. Ulich und Priv.-Doz. Dr. C. Wagner. Mit 90 Abbildungen und 1 Tafel. XXV, 619 Seiten. 1929. RM 50.40; gebunden RM 52.92

Einführung in die technische Thermodynamik. Von Prof. Dr.-Ing. Ernst Schmidt, Danzig. Mit 182 Abbildungen im Text und 2 Dampftafeln. VIII, 314 Seiten. 1936. Gebunden RM 15.—

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Lehrbuch der technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker.

Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Prof. Dr.-Ing. Theodor Pöschl, Karlsruhe.

Erster Band. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 249 Textabbildungen. VIII, 318 Seiten. 1930. RM 15.75; gebunden RM 17.10

Zweiter Band. Elementare Festigkeitslehre. Mit 156 Textabbildungen. VI, 218 Seiten. 1936. RM 12.60; gebunden RM 14.25

Dritter Band. Hydraulik. Zweite Auflage. In Vorbereitung

Führer durch die technische Mechanik. Eine neuartige Übersicht

über ihre Grundlagen, Methoden und Ergebnisse für Studium und Praxis. Von Priv.-Doz. Dr.-Ing. Horst Müller, Hannover. Mit 166 Textabbildungen. VIII, 118 Seiten. 1935. RM 8.50

Vorlesungen über elementare Mechanik. Von Prof. Jakob Nielsen,

Kopenhagen. Übersetzt und bearbeitet von Werner Fenchel. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. XLIV.) Mit 164 Abbildungen. X, 500 Seiten. 1935. RM 38.—; gebunden RM 39.60

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Prof. Ferd. Witten-

bauer†, Graz.

Erster Band. Allgemeiner Teil. 896 Aufgaben nebst Lösungen. Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Theodor Pöschl, Karlsruhe. Mit 601 Textabbildungen. VIII, 356 Seiten. 1929.

RM 12.78; gebunden RM 14.04

Zweiter Band. Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 566 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Vierte, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Theodor Pöschl, Karlsruhe. Mit 498 Textabbildungen. VIII, 318 Seiten. 1931. RM 11.34; gebunden RM 12.60

Dritter Band. Flüssigkeiten und Gase. 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textabbildungen. VIII, 390 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck 1922.

Gebunden RM 7.20

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN WIEN

Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme. Zum

Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Von Prof. Dr. Karl Wolf, Wien. Mit 250 Textabbildungen. IX, 359 Seiten. 1931. Gebunden RM 19.—

Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen. (Elastizitäts- und Festigkeits-

lehre.) Von Prof. Dr. Rudolf Girtler, Brünn. Mit 182 Textabbildungen. VIII, 450 Seiten. 1931. Gebunden RM 29.—

Einführung in die theoretische Physik. Von Prof. Reinhold Fürth,

Prag. Mit 128 Textabbildungen. XIV, 483 Seiten. 1936.

RM 18.—; gebunden RM 19.80

Zu beziehen durch jede Buchhandlung