ANKÜNDIGUNG.

Das vorliegende Werk entwickelt die Theorie der Integralgleichungen nicht von analytischen Allgemeinheiten ausgehend, sondern aus der Theorie der Wärmeleitung, der freien und erzwungenen Schwingungen und des Potentials heraus. Der Verfasser hofft dadurch den Bedürfnissen solcher Mathematiker und Physiker entgegenzukommen, die das neue analytische Hilfsmittel auf konkrete Einzelfragen anwenden wollen.

Braunschweig, im Januar 1911.

Friedrich Vieweg und Sohn.

Schrön, Prof. Dr. Ludwig, **Siebenstellige gemeine Logarithmen** der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Sekunden, nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionalteile. **24.** revidierte Stereotyp-Ausgabe. Imp.-8°. 1900.

Tafel I und II. Die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. VIII, 498 S. ℳ 4,20.

Tafel III. Interpolationstafel (Supplement zu allen Logarithmentafeln). VIII, 88 S. ℳ 1,80.

Tafel I. Die Logarithmen der Zahlen. (Für Solche, welche Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nötig haben.) VIII, 226 S. ℳ 2,40.

Tafel I in Hlbfrzbd. ℳ 3,60.

Tafel I—III in Hlbfrzbd. ℳ 7,30.

Seiffert, O., Herzogl. Braunschw. Landesvermessungsinspektor, **Vierstellige polygonometrische Tafeln** zur Berechnung und Sicherung der Koordinatenunterschiede mit der Rechenmaschine. 34 S. gr. 8°. 1907. Kart. ℳ 2,50.

Thomson, Prof. J. J., **Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** Autorisierte deutsche Ausgabe von Prof. Gustav Wertheim. Mit 133 Abb. XIII, 414 S. gr. 8°. 1897. ℳ 8,—.

Treutlein, Realgymnasialdirektor P., **Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln** nebst den nötigen Hilfstafeln. IV, 72 S. kl. 8°. 1896. Kart. ℳ —,60, extra steif kart. ℳ —,70.

Vogler, Prof. Dr. Chr. August, **Lehrbuch der praktischen Geometrie.** gr. 8°.

I. Teil. Vorstudien und Feldmessen. Mit 248 Holzstichen und 10 Tafeln. XVII, 689 S. 1885. ℳ 16,—.

II. Teil. Höhenmessungen.

1. Halbband. Anleitung zum Nivellieren oder Einwägen. Mit 90 Holzstichen, 4 Nachbildungen durch Zinkätzung und 5 Tafeln. VIII, 422 S. 1894. ℳ 11,—.

Weber, Prof. Heinrich, **Lehrbuch der Algebra.** **2.** Auflage. gr. 8°.

I. Band. XV, 704 S. 1898. ℳ 10,—, in Hlbfrzbd. ℳ 11,—.

II. Band. XVI, 856 S. 1899. ℳ 12,—, in Hlbfrzbd. ℳ 13,60.

III. Band. Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Mit 2 Abbildungen im Text. XVI, 733 S. 1908. ℳ 20,—, in Hlbfrzbd. ℳ 22,—.

— **Die partiellen Differential-Gleichungen** der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen neu bearbeitet. Mit Abbildungen. gr. 8°.

I. Band. **5.** Auflage. XVIII, 528 S. 1910. ℳ 12,—, in Hlbfrzbd. ℳ 13,60.

II. Band. **4.** Auflage. XII, 527 S. 1901. ℳ 10,—, in Hlbfrzbd. ℳ 11,60.

Wertheim, Prof. Gustav, **Anfangsgründe der Zahlenlehre.** Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler und Gauß. XIII, 427 S. gr. 8°. 1902. ℳ 9,—, in Lnwdbd. ℳ 10,—.

— **Die Arithmetik des Elia Misrachi.** Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. **2.** verbesserte Auflage. IX, 68 S. gr. 8°. 1896. ℳ 3,—.

DIE INTEGRALGLEICHUNGEN

UND IHRE ANWENDUNGEN

IN DER

MATHEMATISCHEN PHYSIK

DIE INTEGRALGLEICHUNGEN

UND IHRE ANWENDUNGEN IN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VORLESUNGEN
AN DER
UNIVERSITÄT ZU BRESLAU
GEHALTEN
VON

ADOLF KNESER

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1911

ISBN 978-3-322-98134-9 ISBN 978-3-322-98797-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-98797-6

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1911

VORWORT.

Die glänzende Entdeckung, durch die Herr Fredholm im Jahre 1900 die Analysis und die mathematische Physik bereichert hat, ist alsbald von hervorragenden Mathematikern fortgebildet und auf neue Gebiete angewandt worden. Schienen zunächst die Existenzfragen der Potentialtheorie den Hauptvorteil zu gewinnen, so haben die Herren Stekloff und Hilbert in ihren Abhandlungen vom Jahre 1904 die mit den Fourierschen Reihen zusammenhängenden Randwertaufgaben der mathematischen Physik den neuen analytischen Hilfsmitteln zugänglich gemacht. Durch ihre Arbeiten angeregt, hat Herr Schmidt ein Jahr darauf in seiner Dissertation die allgemeine Theorie der Integralgleichungen in eine Form gebracht, die an Kürze, Eleganz und Allgemeinheit kaum zu übertreffen sein dürfte. Alle diese Arbeiten haben meine eigenen, demselben Gebiet angehörigen Untersuchungen wesentlich beeinflußt und angeregt.

Aber wozu eine zusammenfassende Darstellung, da doch die Literatur des Gegenstandes in schnellem Wachstum begriffen ist, und vortreffliche Darstellungen in den Werken der Herren Bôcher und Kowalewski vorliegen? Ich glaube das vorliegende Werk durch folgende Erwägungen rechtfertigen und in seinem besonderen Wesen kennzeichnen zu können.

Die Mathematiker haben sich in der letzten Zeit überwiegend mit der Fortbildung der allgemeinen Theorie, insbesondere mit gewissen algebraischen Analogien beschäftigt. So interessant die hieraus entspringenden Fragen sein mögen, will es mir doch scheinen, als ob ihnen gegenüber die Anwendungen, die den Ausgangspunkt der Fredholmschen Entdeckung gebildet haben, zu sehr in den Hintergrund getreten wären. Jedenfalls ist es für den Anfänger wie für den ferner stehenden Mathematiker und den

Physiker nicht ganz leicht, an der Hand der vorliegenden Literatur zu speziellen Anwendungen vorzudringen, die doch bei jeder lebensfähigen Theorie der Prüfstein ihres dauernden Wertes sind. Ich glaubte deshalb der Wissenschaft durch ein Werk zu nützen, das ganz und gar von den Anwendungen, der Wärmeleitung, den freien und erzwungenen Schwingungen allgemeinster Art und der Potentialtheorie ausgeht, das jede Aufgabe individuell und mit einem möglichst geringen Aufwand von allgemeiner Theorie behandelt, und dadurch zeigt, was die neue Theorie Eigentümliches leistet und inwiefern sie etwa den älteren Methoden nur parallel läuft. Ich hoffe durch eine solche Darstellung nicht nur jüngere Mathematiker, insbesondere meine Schüler zu fruchtbarer Arbeit an ergiebigen Einzelfragen anzuregen, sondern auch die theoretischen Physiker zur Prüfung und Anwendung der neuen Theorie zu bewegen.

Meine Arbeit an dem vorliegenden Werke begann mit Vorlesungen und Übungen, die ich im Sommer des vorigen Jahres an der Breslauer Universität gehalten habe. Eine Anzahl meiner damaligen Zuhörer haben in Prüfungsarbeiten und Dissertationen Einzelfragen im Sinne der von mir vorgetragenen Theorien durchgearbeitet, und ich habe manche der so gewonnenen Resultate benutzen können. Für vielfache Anregung bin ich meinem Freunde und Kollegen Herrn Schaefer zu Dank verpflichtet, der als Physiker den Integralgleichungen lebhaftes Interesse entgegengebracht hat.

So ist das Werk aus der lebendigen Wechselwirkung des wissenschaftlichen Verkehrs entsprungen; möge es auch Leser finden, die eine Gegenwirkung ausüben, indem sie die hier entwickelten Methoden verbessern und auf immer neue Kreise von Aufgaben anwenden.

Breslau, im Dezember 1910.

Adolf Kneser.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erster Abschnitt.

Integralgleichungen und lineare Wärmeleitung.

Zweiter Abschnitt.

Integralgleichungen und Schwingungen linearer Massensysteme.

Dritter Abschnitt.

Integralgleichungen und die Sturm-Liouvillesche Theorie.

Erster Abschnitt.

Integralgleichungen und lineare Wärmeleitung.

§ 1.

Wärmeleitung und Wärmequellen.

Ist u die Temperatur eines geraden Stabes von der Länge Eins, der einer Umgebung von der Temperatur Null eingebettet ist; bedeutet ferner x den Abstand von einem seiner Endpunkte, t die in einer gewissen Einheit gemessene Zeit und b eine Konstante, so gilt die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$

und der Fall $b = 0$ bedeutet, daß keine Wärme seitlich ausgestrahlt wird. Diese Gleichung beruht auf den Annahmen, daß die seitliche Strahlung der Temperaturdifferenz proportional ist, und daß der Wärmefluß längs des Stabes, d. h. die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt in der Richtung wachsender x durchtretende Wärmemenge der Größe $-\partial u / \partial x$ proportional ist, von der sie sich nur um einen positiven, durch das Material des Stabes bestimmten Faktor unterscheidet.

Ist die Größe $\partial u / \partial x$ an der Stelle $x = \xi$ stetig, so kann man dies durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{\xi-0} = +\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{\xi+0}$$

ausdrücken, indem man die an das Substitutionszeichen gehefteten Symbole $\xi - 0$, $\xi + 0$ wie gewöhnlich dahin deutet, daß die unabhängige Variable von unten oder oben her gegen den Wert ξ konvergiert. Physikalisch bedeutet diese Gleichung, daß von der Seite $x < \xi$ her, sagen wir von links her, ebensoviel Wärme in den Querschnitt $x = \xi$ hereinströmt, wie nach rechts abströmt. Soll daher an der Stelle $x = \xi$ eine Wärmequelle liegen, d. h. soll im Ganzen aus dem Querschnitt $x = \xi$ eine Wärmemenge ausströmen, die die einströmende um einen konstanten Betrag übertrifft, so muß eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{\xi+0} = -\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{\xi-0} + \text{const.}$$

gelten, speziell etwa die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^{\xi-0}_{\xi+0} = 1,$$

die eine Wärmequelle von der Ergiebigkeit Eins definieren möge, indem wir die links stehende Größe allgemein als Ergiebigkeit bezeichnen wollen.

Die Wärmebewegung nun, die durch Quellen und einen beliebig angenommenen Anfangszustand hervorgerufen wird, ist erst bestimmt, wenn über die Art des Ausflusses der Wärme aus den Enden des Stabes Bestimmtes vorausgesetzt wird. Indem das Substitutionszeichen auf die Variable x bezogen wird und durch h und H positive Konstante bezeichnet werden, können die wichtigsten Fälle in folgender Weise gekennzeichnet werden:

(A) $\quad u|^0 = u|^1 = 0.$

(B) $\quad u\bigg|^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^1 = 0.$

(C) $\quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|^1 = 0.$

(D) $\quad \frac{\partial u}{\partial x} - hu\bigg|^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu\bigg|^1 = 0.$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen liegt auf der Hand: die Enden des Stabes werden auf der festen Temperatur Null gehalten oder adiatherman bedeckt oder lassen Wärme ausstrahlen.

Speziell werde angenommen, die Wärmeverteilung sei stationär, u also von t unabhängig, und an der Stelle $x = \xi$ liege eine Quelle von der Ergiebigkeit Eins. Dann hat man zur Bestimmung der Temperatur w die Gleichungen

$$\frac{d^2 w}{d x^2} - b^2 w = 0, \quad \frac{d w}{d x}\bigg|^{\xi-0}_{\xi+0} = 1$$

und eine der Randbedingungen (A), ...(D) zu erfüllen, in denen u durch w zu ersetzen ist.

Diese Aufgabe ist in allen Fällen leicht zu lösen. Die Größe w wird auf den Strecken von $x = 0$ bis $x = \xi$ und von $x = \xi$ bis $x = 1$ verschiedene analytische Ausdrücke darbieten, im Punkte $x = \xi$ aber einen eindeutig bestimmten Wert haben und stetig sein. Nimmt man z. B. den Fall (A), so geht man davon aus, daß die an einer der Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindenden Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - b^2 w = 0 \tag{1}$$

in der Form

$$\text{const.}\ \mathfrak{Sin}\, b\,x, \quad \text{const.}\ \mathfrak{Sin}\, b\,(1-x)$$

dargestellt werden können, wobei die gewöhnlichen Zeichen

$$\mathfrak{Sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \mathfrak{Cos}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

eingeführt sein mögen. Sollen nun jene beiden Ausdrücke an der Stelle ξ dieselben Werte haben, so müssen sie die Form

$$\text{const.}\ \mathfrak{Sin}\, b\,(1-\xi)\ \mathfrak{Sin}\, b\,x, \quad \text{const.}\ \mathfrak{Sin}\, b\,(1-x)\ \mathfrak{Sin}\, b\,\xi$$

mit derselben Konstanten haben. Setzt man jetzt die Gleichung

$$\left.\frac{d\,w}{dx}\right|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

an, so findet man für $x < \xi$

$$w = \frac{\mathfrak{Sin}\, b\,(1-\xi)\ \mathfrak{Sin}\, b\,x}{b\ \mathfrak{Sin}\, b},$$

für $x > \xi$ dagegen

$$w = \frac{\mathfrak{Sin}\, b\,(1-x)\ \mathfrak{Sin}\, b\,\xi}{b\ \mathfrak{Sin}\, b}.$$

Im Falle $b = 0$ erhält man speziell die Gleichungen

$$w = x\,(1-\xi), \quad x < \xi$$
$$w = \xi\,(1-x), \quad x > \xi.$$

Beide Ausdrücke w, der allgemeine wie der spezielle, sind in x und ξ offenbar symmetrisch.

Legen wir ferner die Randbedingung (C) zugrunde, so ist davon auszugehen, daß

$$\mathfrak{Cos}\, b\,x, \quad \mathfrak{Cos}\, b\,(1-x)$$

die Integrale der Gleichung (1) sind, deren Ableitungen an einer der Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden; daraus folgt leicht

$$w = \frac{\mathfrak{Cos}\, b(1-\xi) \,.\, \mathfrak{Cos}\, b x}{b \,\mathfrak{Sin}\, b}, \quad x < \xi$$

$$w = \frac{\mathfrak{Cos}\, b(1-x) \,.\, \mathfrak{Cos}\, b \xi}{b \,\mathfrak{Sin}\, b}, \quad x > \xi.$$

Hier kann nicht ohne weiteres $b = 0$ gesetzt werden. Das entspricht der Tatsache, daß im Falle (C) beide Enden des Stabes adiatherman bedeckt sind, eine Quelle also keinen stationären Wärmezustand ergeben kann, wenn keine Wärme seitlich ausgestrahlt wird. Wohl aber gilt die Gleichung

$$\lim_{b=0} \left(w - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2 + \xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{3}, \quad x < \xi$$

$$\lim_{b=0} \left(w - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2 + \xi^2}{2} - x + \frac{1}{3}, \quad x > \xi;$$

bezeichnet man den hierdurch längs des ganzen Stabes definierten Ausdruck durch $\overline{w}$, so findet man leicht

$$\frac{d^2 \overline{w}}{d x^2} = 1, \quad \frac{d \overline{w}}{d x}\bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad \frac{d \overline{w}}{d x}\bigg|^{0} = \frac{d \overline{w}}{d x}\bigg|^{1} = 0, \quad \int_0^1 \overline{w}\, d x = 0.$$

Auch diese Größe ist physikalisch leicht zu deuten. Sieht man $-\overline{w}$ als Temperatur an, so ist die in das Element $d x$ durch Leitung eintretende Wärmemenge der Größe

$$-\frac{d \overline{w}}{d x}\bigg|_{x}^{x+dx} = -\frac{d^2 \overline{w}}{d x^2} \cdot d x$$

proportional; wenn daher in diesem Element noch eine mit $d x$ proportionale Wärmemenge etwa als Joulesche Wärme eines galvanischen Stromes erzeugt wird, und die Proportionalitätsfaktoren angemessen gewählt werden, so folgt

$$-\frac{d^2 \overline{w}}{d x^2} d x + d x = 0;$$

d. h. die eintretenden Wärmemengen, die von Leitung und Strom herrühren, haben die algebraische Summe Null; die Temperatur jeder Stelle ist von der Zeit unabhängig. Man kann also $-\overline{w}$ als stationäre Temperatur bei der Grenzbedingung (C) betrachten, wenn eine negative Quelle wirkt und außerdem überall eine konstante Wärmemenge etwa durch einen Strom erzeugt wird.

Wir bezeichnen den Fall (C) bei der Annahme $b = 0$ als den a u s g e a r t e t e n, da er analytisch wie physikalisch den anderen Fällen gegenüber als Ausnahme erscheint, die stets besonders zu untersuchen ist.

Bei den Randbedingungen (B) und (D) beschränken wir uns auf den Fall $b = 0$ und erhalten bei ersterer

$$w = x, \quad x < \xi; \quad w = \xi, \quad x > \xi;$$

bei letzterer

$$w = \frac{(1 + hx)(1 + H[1 - \xi])}{h + H + hH}, \quad x < \xi,$$

$$w = \frac{(1 + h\xi)(1 + H[1 - x])}{h + H + hH}, \quad x > \xi.$$

§ 2.

Hilfssatz aus der Integralrechnung. Quellenmäßig dargestellte Funktionen.

Die Symmetrie der erhaltenen Ausdrücke bezüglich der beiden Argumente x und ξ ist kein Zufall. Um sie als notwendig einzusehen, beginnen wir mit einem einfachen Lemma allgemeinen Charakters aus der Integralrechnung.

Ist die Funktion fx an der Stelle ξ so unstetig, daß die Grenzwerte $f(\xi + 0)$ und $f(\xi - 0)$ endlich und bestimmt sind, während die Ableitung $f'x$ an der Stelle ξ stetig bleibt, so gilt die gewöhnliche Grundgleichung der Integralrechnung

$$fb - fa = \int_a^b f'x \, . \, dx$$

nur, solange die Strecke von a bis b die Stelle ξ nicht enthält. Ist dies der Fall und ist ξ die einzige Unstetigkeitsstelle zwischen a und b, so zerlege man das Integrationsintervall durch den Wert ξ in zwei Teile. Dann gilt zunächst die Gleichung

$$f\xi - fa = \int_a^\xi f'x \, . \, dx$$

in dem Sinne, daß für $f\xi$ der Wert genommen wird, gegen den fx konvergiert, wenn man x vom Inneren des Integrationsintervalls des letzten Integrals gegen ξ heranrücken läßt, also genauer

$$f(\xi - 0) - fa = \int_a^\xi f'x \, . \, dx.$$

Ebenso findet man

$$fb - f(\xi + 0) = \int_\xi^b f'x \, . \, dx,$$

also auch

$$fb - fa = f(\xi + 0) - f(\xi - 0) + \int_a^b f'x \,.\, dx$$

oder

$$\int_a^b f'x \,.\, dx = fx \Big|_a^{\xi - 0} + fx \Big|_{\xi + 0}^b = fx \Big|_a^b + fx \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0}.$$

Wir wenden diese Formel auf eine der in § 1 hergestellten Größen w an, die wir, um die Abhängigkeit von der Unstetigkeitsstelle vor Augen zu haben, durch $K(x, \xi)$ und als Greensche Funktion bezeichnen wollen; $K'(x, \xi)$, $K''(x, \xi)$ seien die Ableitungen nach dem ersten Argument. Dann hat man die Gleichung

(1) $$K''(x, \xi) - b^2 K(x, \xi) = 0,$$

und wenn $K(x, \eta)$ eine Greensche Funktion mit anderer Unstetigkeitsstelle bedeutet, die dieselben Grenzbedingungen erfüllt,

(2) $$K''(x, \eta) - b^2 K(x, \eta) = 0.$$

Bei der soeben eingeführten Voraussetzung verschwindet der Ausdruck

$$M = K'(x, \xi) K(x, \eta) - K(x, \xi) K'(x, \eta)$$

an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, und gelten die Gleichungen

$$K'(x, \xi) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = K'(x, \eta) \Big|_{\eta + 0}^{\eta - 0} = 1.$$

Nun ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2), indem man die erste mit $K(x, \eta)$, die zweite mit $K(x, \xi)$ multipliziert,

$$K''(x, \xi) K(x, \eta) - K''(x, \eta) K(x, \xi) = 0,$$

und die linke Seite ist die offenbar stetige Ableitung des an den Stellen ξ und η unstetigen Ausdrucks M. Das soeben bewiesene Lemma ergibt also

$$0 = \int_0^1 [K''(x, \xi) K(x, \eta) - K''(x, \eta) K(x, \xi)] \, dx$$

$$= M \Big|_0^1 + M \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} + M \Big|_{\eta + 0}^{\eta - 0},$$

oder, da wie bemerkt die Gleichungen

$$M|^0 = M|^1 = 0$$

gelten,

$$M\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + M\Big|_{\eta+0}^{\eta-0} = 0,$$
$$K(\xi, \eta) - K(\eta, \xi) = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch im ausgearteten Falle, für den

$$\overline{w} = K(x, \xi)$$

gesetzt wird, aus den dann geltenden Gleichungen

$$K''(x, \xi) - 1 = 0, \quad \int_0^1 K(x, \xi)\, d\, x = 0.$$

Eine weitere Eigenschaft der Greenschen Funktionen K zeigt sich an der Größe

$$F x = \int_0^1 K(x, \alpha) f \alpha . d \alpha,$$

in der unter $f\alpha$ eine Funktion verstanden werde, die auf der Strecke von 0 bis 1 gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt. Um diese bequem formulieren zu können, wollen wir fx auf einem gewissen Gebiet, etwa der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ stückweise stetig nennen, wenn diese Strecke durch eine endliche Anzahl von Teilpunkten in Teilstrecken zerlegt wird, innerhalb deren die Größe fx stetig ist, während sie einem endlichen Grenzwert zustrebt, wenn man sich von einer beliebig gewählten Seite her einem der Teilpunkte annähert.

Die stückweise stetigen Funktionen dürften die allgemeinsten unstetigen Funktionen einer Variablen sein, die in den Anwendungen vorkommen.

Wenn nun $f\alpha$ auf der Strecke von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ stückweise stetig ist, so gilt die Gleichung

$$F' x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f \alpha . d \alpha,$$

wie man erkennt, wenn man Fx aus Integralen zusammensetzt, in deren Intervallen der Integrand und seine ersten Ableitungen stetig sind. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$F' x = \int_0^x K'(x, \alpha) f \alpha . d \alpha + \int_x^1 K'(x, \alpha) f \alpha . d \alpha,$$

so ergibt sich aus ihr für eine Stelle, an der die Funktion fx stetig ist,

$$F''x = \int_0^x K''(x, \alpha) f\alpha . d\alpha + K'(x, x-0) fx$$
$$+ \int_x^1 K''(x, \alpha) f\alpha . d\alpha - K'(x, x+0) fx,$$

oder mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der die Größe K unterworfen ist,

$$(3) \quad F''x = b^2 \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha + [K'(x, x-0) - K'(x, x+0) fx$$
$$= b^2 Fx + [K'(x, x-0) - K'(x, x+0)] fx.$$

An den Unstetigkeitsstellen von fx bleibe die Größe F'' undefiniert.

Nun ist

$$K'(x, x-0) = \lim_{\varepsilon = +0} K'(x, x-\varepsilon)$$

oder, wenn $x - \varepsilon = x_1$ gesetzt wird,

$$K'(x, x-0) = \lim_{\substack{\varepsilon = +0 \\ x_1 = x-0}} K'(x_1 + \varepsilon, x_1);$$

die Größe $K'(x, y)$ ist aber in dem ganzen Gebiet

$$0 \leqq x \leqq \xi, \quad 0 \leqq y \leqq \xi, \quad x > y$$

stetig und konvergiert daher, wenn diese Beziehungen gelten und x und y gegen ξ heranrücken, gegen den Wert $K'(\xi + 0, \xi)$; somit folgt

$$K'(x, x-0) = K'(x+0, x),$$

und ebenso

$$K'(x, x+0) = K'(x-0, x),$$

was natürlich auch aus den expliziten in § 1 gegebenen Ausdrücken von K verifiziert werden kann. Die Gleichung (3) ergibt also an jeder Stetigkeitsstelle der Funktion fx

$$F''x - b^2 Fx = -fx . [K'(x-0, x) - K'(x+0, x)] = -fx,$$

und dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man $K(x, \xi) = \overline{w}$ setzt, so daß $K'' = 1$, $b = 0$, unter der Voraussetzung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0.$$

Der Ausdruck Fx kann offenbar als die Temperatur gedeutet werden, die erzielt wird, wenn die ganze Strecke von 0 bis 1 mit Quellen von der Ergiebigkeit fx belegt wird, deren jede einen stationären Zustand hervorruft. Kann eine Funktion von x in die Form Fx gebracht werden, so sagen wir, sie sei quellenmäßig dargestellt oder auch kurz quellenmäßig. Sie erfüllt dann offenbar dieselben Grenzbedingungen wie die Funktion $K(x, \xi)$, mit der sie gebildet ist, und hat stetige Ableitungen erster und stückweise stetige zweiter Ordnung, da fx stückweise stetig sein soll.

Umgekehrt läßt sich eine stetige Funktion Φx, die eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt und die Grenzbedingungen der Größe $K(x, \xi)$ erfüllt, quellenmäßig darstellen; im ausgearteten Falle $K = \overline{w}$ ist die Bedingung

$$\int_0^1 \Phi\alpha \,.\, d\alpha = 0 \tag{4}$$

hinzuzufügen.

Sehen wir von diesem Fall zunächst ab, so ist die Größe

$$fx = -\Phi'' x + b^2 \Phi x$$

stückweise stetig. Multipliziert man sie mit $K(x, \xi)$ und addiert sie zu beiden Seiten der mit Φx multiplizierten Gleichung (1), so ergibt sich

$$\Phi x \,.\, K''(x, \xi) - \Phi'' x \,.\, K(x, \xi) = K(x, \xi) fx,$$
$$\frac{d}{dx}[\Phi x \,.\, K'(x, \xi) - \Phi' x \,.\, K(x, \xi)] = K(x, \xi) fx.$$

Integriert man und benutzt das obige Lemma der Integralrechnung, so folgt

$$\begin{aligned} &[\Phi x \,.\, K'(x, \xi) - \Phi' x \,.\, K(x, \xi)] \Big|_0^1 + \Phi x \,.\, K'(x, \xi) \Big|_{\xi + 0}^{\xi - 0} \\ &= \int_0^1 K(x, \xi) fx \,.\, dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Das erste Glied der linken Seite verschwindet aber, da die Funktion Φx dieselben Grenzbedingungen wie die Greensche Funktion erfüllen soll; somit ergibt sich

$$\Phi \xi \,.\, [K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi)] = \Phi \xi = \int_0^1 K(x, \xi) fx \,.\, dx,$$

d. h. die Funktion Φ erscheint quellenmäßig dargestellt.

Im ausgearteten Falle ist die Gleichung (1) durch die Gleichung

$$K''(x, \xi) - 1 = 0$$

zu ersetzen; das in der Gleichung (5) hierdurch erscheinende Glied verschwindet bei der Voraussetzung (4), und man erhält dasselbe Resultat wie vorher.

§ 3.

Übergang zu den Integralgleichungen und einfachste Eigenschaften derselben.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir das Problem der linearen Wärmeleitung wieder auf und suchen demgemäß Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$

die einer der Grenzbedingungen (A), ... (D) des § 1 unterworfen sind. Dazu führt der klassische Ansatz von Daniel Bernoulli

$$u = T.\varphi x,$$

in welchem T von t allein abhängt. Man findet sofort

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - b^2\varphi\right),$$

und beide Seiten dieser Gleichung müssen, da sie von verschiedenen unabhängigen Variablen abhängen, derselben Konstanten gleich sein, die wir etwa durch $-\mu - b^2$ bezeichnen wollen. Dann ergibt sich weiter

$$T = e^{-(\mu + b^2)t},$$

(1) $$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0,$$

und die Größe φ muß dieselben Grenzbedingungen wie u erfüllen. Sehen wir von dem Falle $\mu = 0$ ab, der offenbar zu dem trivialen Ergebnisse $\varphi = \text{const.}$ führt, so folgt aus der Bedingung (C)

$$\int_0^1 \varphi\, dx = -\frac{1}{\mu}\frac{d\varphi}{dx}\Big|_0^1 = 0;$$

wenn daher die Funktion φ mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist, so kann sie nach § 2 in allen Fällen, auch dem ausgearteten, quellenmäßig dargestellt werden mittels der zu der betreffenden Grenzbedingung gehörigen Greenschen Funktion, etwa in der Form

(2) $$\varphi x = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha.$$

Hieraus folgt nach § 2

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - b^2\varphi x = -fx;$$

kombiniert man dies Resultat mit der Gleichung (1), so ergibt sich

$$f x = (b^2 + \mu)\, \varphi x,$$

und aus der quellenmäßigen Darstellung (2) folgt die Beziehung

$$\varphi x = \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha, \tag{3}$$

in der

$$\lambda = b^2 + \mu$$

zu setzen ist, und die wir als **homogene Integralgleichung** mit der Unbekannten φ bezeichnen. Die Greensche Funktion $K(x, \alpha)$ heißt der **Kern** der Integralgleichung, jede stetige Lösung φx eine **Eigenfunktion** des Kerns und die Konstante λ, deren Wert zunächst unbekannt ist, der zugehörige **Eigenwert**.

Die durchgeführte Argumentation zeigt, daß, abgesehen von dem Falle $\varphi =$ const. jede der gesuchten Funktionen φ eine Lösung der Integralgleichung (3) ist. Aber auch das Umgekehrte gilt. Denn zunächst erfüllt jede Eigenfunktion dieselben Grenzbedingungen wie der Kern, was, wenn dieser an einem Ende des Stabes verschwindet, unmittelbar ersichtlich ist. Daß dasselbe auch für die anderen Grenzbedingungen gilt, zeigt die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi' x &= \lambda \frac{d}{dx} \int_0^x K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha + \lambda \frac{d}{dx} \int_x^1 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha \\ &= \lambda \int_0^1 K'(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha + \lambda K(x, x-0) - \lambda K(x, x+0) \\ &= \lambda \int_0^1 K'(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha. \end{aligned}$$

Im Falle (C), $b = 0$ hat man außerdem die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\, d\alpha = 0,$$

also auch für jede Eigenfunktion

$$\int_0^1 \varphi \alpha . d\alpha = 0.$$

Sodann ergibt die Integralgleichung (3), indem man ihre rechte Seite mit der Größe Fx des § 2 identifiziert,

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} - b^2 \varphi x = -\lambda \varphi x = -(\mu + b^2)\, \varphi x$$

oder
$$\frac{d^2\varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$
womit das Behauptete bewiesen ist.

Um die Verbindung zwischen dem Randwertproblem und der Integralgleichung als fruchtbar zu erkennen, genügt es, einige der einfachsten Eigenschaften der Integralgleichungen mit stetigem, symmetrischem Kern zu entwickeln.

Es seien etwa φ_m, φ_n zwei zu den verschiedenen Eigenwerten λ_m und λ_n gehörige Eigenfunktionen, die wir normiert annehmen können, d. h. so bestimmt, daß die Gleichung
$$\int_0^1 (\varphi \alpha)^2 \, d\alpha = 1$$
gilt. Das ist möglich, da jede Eigenfunktion, mit einer Konstanten multipliziert, Eigenfunktion bleibt. Dann gelten die Gleichungen
$$\varphi_m x = \lambda_m \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha . d\alpha, \quad \varphi_n x = \lambda_n \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Um den allgemeinen Charakter der an die letzten drei Gleichungen zu knüpfenden Folgerungen hervortreten zu lassen, wollen wir sie in der unbestimmten Form
$$(4) \qquad \begin{gathered} \int (\varphi \alpha)^2 \, d\alpha = 1, \quad \varphi_m x = \lambda_m \int K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha . d\alpha, \\ \varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha \end{gathered}$$
schreiben und festsetzen, daß das unbestimmte Integralzeichen stets die Integration über dasjenige Gebiet bedeute, das in der Integralgleichung zugrunde gelegt wird und als Grundgebiet bezeichnet werde. In den bisher behandelten Fällen ist das Grundgebiet die Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$. Nichts hindert aber, das Grundgebiet auch mehrdimensional zu nehmen, wobei dann x und α nicht Variable, sondern Stellen dieses Gebiets bedeuten.

Multipliziert man nun die zweite der Gleichungen (4) mit $\lambda_n \varphi_n x$, die dritte mit $\lambda_m \varphi_m x$ und integriert über das Grundgebiet, so ergibt sich
$$\lambda_n \int \varphi_n x . \varphi_m x . dx = \lambda_n \lambda_m \int dx . \varphi_n x . \int K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha . d\alpha,$$
$$\lambda_m \int \varphi_m x . \varphi_n x . dx = \lambda_m \lambda_n \int dx . \varphi_m x . \int K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha.$$
Da ferner die Funktionen K und φ im Grundgebiet stetig sind, kann man auf der rechten Seite dieser Gleichungen die Inte-

grationen vertauschen, und erkennt so, daß die rechts stehenden Größen gleich sind. Daraus folgt sofort

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int \varphi_m x \,.\, \varphi_n x \,.\, d x = 0,$$

und, da λ_m von λ_n verschieden ist,

$$\int \varphi_m \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d \alpha = 0.$$

Eine solche Beziehung zweier Funktionen bezeichnen wir als Orthogonalität und sagen demgemäß: Zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sind zu einander orthogonal.

Wäre nun einer der Eigenwerte komplex, der Kern aber reell, so wäre offenbar auch die dem Eigenwert konjugiert imaginäre Größe ein Eigenwert, und die zugehörige Eigenfunktion zu der dem ersteren Wert zugehörigen konjugiert. Beide Eigenfunktionen wären ferner, weil zu verschiedenen Eigenwerten gehörend, zu einander orthogonal; es verschwände also das Integral des Produktes zweier konjugiert imaginärer Größen, was unmöglich ist. Die Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kerns sind also reell.

Aus den erhaltenen Sätzen gewinnt man die Hoffnung, eine willkürliche Funktion auf dem Grundgebiet nach den Eigenfunktionen entwickeln zu können, wenn diese in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Denn macht man den Ansatz

$$f x = \sum_{n}^{1,\infty} A_n \varphi_n x,$$

und integriert, nachdem man mit $\varphi_m x$ multipliziert hat, gliedweise, so findet man für den Fall, daß die Eigenfunktionen alle zu verschiedenen Eigenwerten gehören,

$$\int f \alpha \,.\, \varphi_m \alpha \,.\, d \alpha = A_m \int (\varphi_m \alpha)^2 \, d \alpha = A_m.$$

Eine mit diesen Koeffizienten gebildete Entwickelung heiße eine Fouriersche im weiteren Sinne des Wortes. Die erhaltene Reihe wird besonders einfach, wenn man

$$f x = K(x, y)$$

setzt. Dann findet man nämlich

$$A_n = \int K(\alpha, y) \, \varphi_n \alpha \,.\, d \alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n}$$

und die Fouriersche Entwickelung des Kerns nimmt folgende Gestalt an:

$$K(x, y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}.$$

Diese Gleichung wollen wir als bilineare Formel, ihre rechte Seite als bilineare Reihe bezeichnen. Sie ist natürlich ebensowenig bewiesen, wie die Fouriersche Entwickelung von fx. Aber eins ist schon hier zu übersehen. Gilt die bilineare Formel und konvergiert die bilineare Reihe gleichmäßig oder sogar gleichmäßig und absolut, so kann mit einer beliebigen stetigen Funktion $f\alpha$ die Gleichung

$$Fx = \int K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha$$

angesetzt werden, und die Integralgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \int F\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha &= \int \varphi_n \alpha . d\alpha \int K(\alpha, \beta) f\beta . d\beta \\ &= \int f\beta . d\beta \int K(\alpha, \beta)\, \varphi_n \alpha . d\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int \varphi_n \beta . f\beta . d\beta. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten in der Entwickelung von Fx sind also nach der Fourierschen Regel gebildet, und es ist unter einer der ausgesprochenen Voraussetzungen betreffs der bilinearen Formel bewiesen, daß jede quellenmäßig darstellbare Funktion in eine gleichmäßig oder gleichmäßig und absolut konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Dasselbe gilt also nach § 2 von jeder den Grenzbedingungen unterworfenen Funktion, die eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt.

Die hiermit angebahnte Entwickelung einer willkürlichen Funktion wird auch beim Problem der Wärmeleitung erfordert. Man bildet eine Lösung von der Form

$$\sum_n A_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n x$$

und sucht sie einem gegebenen Anfangszustand anzupassen, d. h. die Größen A_n so zu bestimmen, daß man zur Zeit $t = 0$ eine gegebene Funktion fx erhält. Das leistet die Gleichung

$$fx = \sum_n A_n \varphi_n x.$$

§ 4.

Anwendung auf gewöhnliche Fouriersche Reihen.

Die durchgeführten allgemeinen Betrachtungen wenden wir auf die drei Grenzbedingungen (A), (B), (C) an, indem wir $b = 0$ setzen.

Im Falle (A) ist der Kern nach § 2 durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} K(x, \xi) &= x(1-\xi), \quad x<\xi, \\ K(x, \xi) &= \xi(1-x), \quad x>\xi, \end{aligned}$$

definiert, und die Eigenfunktionen sind die an den Stellen $x=0$ und $x = 1$ verschwindenden Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

also die Größen

$$\text{const.} \sin n \pi x,$$

in denen n eine ganze Zahl bedeutet, oder, wenn man normiert,

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin n \pi x;$$

der zugehörige Eigenwert ist dann nach § 3

$$\lambda_n = \mu = n^2 \pi^2$$

und die bilineare Formel demnach

$$(2)\qquad K(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n \pi x \,.\, \sin n \pi \xi}{n^2},$$

indem links einer der Werte (1) einzusetzen ist.

Diese Gleichung läßt sich direkt beweisen, indem man von der elementaren Formel

$$\frac{1}{2} + \sum_\nu^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

ausgeht, die man auch auf folgende Weise schreiben kann:

$$\frac{1}{2} + \sum_\nu^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x}{x} + \sin (n + \tfrac{1}{2}) x \cdot \Phi x;$$

dabei ist die Funktion Φx mit ihrer Ableitung stetig auf jeder Strecke, die mit $x = 0$ beginnt und nicht bis an die Stelle $x = 2\pi$ heranreicht. Integriert man nun, so ergibt sich

$$\frac{x}{2} + \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \int_0^x \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) x}{x} \, d x + \int_0^x \Phi x . \sin (n + \tfrac{1}{2}) \, d x$$

$$= \int_0^{(n + 1/2) x} \frac{\sin u}{u} \, d u + \int_0^x \Phi x . \sin (n + \tfrac{1}{2}) x \, d x,$$

und das letzte Integral der rechten Seite wird, wie die Gleichung

$$\int_0^x \Phi x . \sin (n + \tfrac{1}{2}) x \, d x = - \Phi x \cdot \frac{\cos (n + \frac{1}{2}) x}{n + \frac{1}{2}} \Bigg|_0^x$$

$$+ \int_0^x \Phi' x \cdot \frac{\cos (n + \frac{1}{2}) x}{n + \frac{1}{2}} \, d x$$

zeigt, mit wachsenden Werten von n beliebig klein. Bei positiven Werten von x, die kleiner als 2π bleiben, erhält man daher die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin n x}{n} = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \, d u,$$

und wenn x ein beliebiges zwischen den Grenzen 0 und 2π gelegenes Intervall durchläuft, das keinen dieser Werte selbst enthält, konvergiert die erhaltene Reihe gleichmäßig. Als Wert des Integrals auf der rechten Seite wird sofort $\frac{1}{2}\pi$ gefunden, indem man $x = \pi$ setzt.

Aus der erhaltenen Gleichung ergibt sich weiter, wenn x_0 und x_1 beliebige Werte zwischen 0 und 2π sind, indem man integriert,

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{4} + \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\cos n x_0 - \cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi}{2} (x_1 - x_0).$$

Hier konvergiert die links auftretende Reihe in beliebigen Gebieten der Variablen x_0 und x_1 gleichmäßig, ist also stetige Funktion dieser Größen; da dasselbe von den übrigen Gliedern gilt, so ist die Gleichung auch richtig, wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi x_1}{2} - \frac{x_1^2}{4}. \tag{3}$$

Ersetzt man nun x_1 durch $\pi - x_1$, indem man x_1 nicht größer als π nimmt, so folgt

$$(4) \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_n^{1,\infty} \frac{(-1)^n \cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi(\pi - x_1)}{2} - \frac{(\pi - x_1)^2}{4}.$$

Addiert man beide Gleichungen und setzt dann $x_1 = 0$, so findet man

$$2 \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

oder

$$\frac{3}{2} \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

womit die Gleichung (3) in die folgende übergeht:

$$(5) \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n x_1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^2}{4} - \frac{\pi x_1}{2};$$

dabei wird vorausgesetzt

$$0 \leqq x_1 \leqq 2\pi.$$

Setzt man nun eine der Gleichungen

$$x_1 = \pi(\xi - x), \quad x_1 = \pi(\xi + x)$$

an, indem man unter x und ξ echte Brüche versteht, deren zweiter der größere ist, so sind die für x_1 geltenden Voraussetzungen erfüllt, und man erhält aus der Gleichung (5)

$$\pi^2 x \xi + 2 \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi\xi}{n^2} = \pi^2 x,$$

d. h. die zu erweisende Gleichung (2) unter der Annahme $x < \xi$. Aus der Symmetrie der unendlichen Reihe folgt weiter, daß für den Fall $x > \xi$ die rechte Seite durch $\pi^2 \xi$ zu ersetzen ist, und damit ist die bilineare Formel (2) bewiesen. Die bilineare Reihe konvergiert offenbar gleichmäßig und absolut in jedem Intervall der Größen x und ξ.

Hieraus folgt nach § 3, daß jede quellenmäßig dargestellte Funktion, also jede Funktion, die auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ mit ihrer ersten Ableitung stetig ist, eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt und an den Enden der Strecke verschwindet, auf der bezeichneten Strecke in eine gleichmäßig und absolut konvergente Fouriersche Reihe nach den Eigenfunktionen $\sin n\pi x$ entwickelt werden kann; d. h. setzt man an

$$f x = \sum_n^{1,\infty} A_n \sqrt{2} \sin n \pi x,$$

so haben die Koeffizienten die Werte

$$A_n = \int_0^1 f \alpha . \sqrt{2} \sin n \pi \alpha \, d \alpha.$$

Ebenso leicht läßt sich der Fall der Grenzbedingung (B) behandeln. Die Eigenfunktionen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

für die die Bedingungen

$$\varphi 0 = 0, \quad \frac{d \varphi}{d x} \Big|^1 = 0$$

bestehen; man erhält offenbar als normierte Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin (n - \tfrac{1}{2}) \pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und als Eigenwerte

$$\lambda_n = (n - \tfrac{1}{2})^2 \pi^2.$$

Die bilineare Formel ist daher

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin (n - \frac{1}{2}) \pi x \, \sin (n - \frac{1}{2}) \pi \xi}{(n - \frac{1}{2})^2}, \quad x < \xi, \\ \xi &= \frac{2}{\pi^2} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin (n - \frac{1}{2}) \pi x \, \sin (n - \frac{1}{2}) \pi \xi}{(n - \frac{1}{2})^2}, \quad x > \xi. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man leicht aus den Formeln (3) und (4) ableiten, indem man eine von der andern subtrahiert, dadurch die Summe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos (2n - 1) x_1}{(2n - 1)^2}$$

bestimmt und in den Reihen (6) das Produkt der Sinus durch eine Differenz zweier Cosinus ersetzt. Die erhaltenen Reihen konvergieren wiederum in beliebigen Strecken gleichmäßig und absolut. Man schließt hieraus nach § 3, daß eine stetige Funktion $f x$, die den Bedingungen

$$f 0 = 0, \quad f' 1 = 0$$

unterliegt und eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ in die gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$fx = \sum_n^{1,\infty} C_n \sin (n - \tfrac{1}{2}) \pi x$$

entwickelt werden kann, wobei

$$C_n = 2 \int_0^1 f\alpha . \sin (n - \tfrac{1}{2}) \pi \alpha \, d\alpha.$$

Endlich erschließt man aus der Gleichung (5) leicht die Formeln

$$\frac{x^2 + \xi^2}{2} - \xi + \tfrac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\cos n \pi x \cos n \pi \xi}{n^2}, \quad x < \xi,$$

$$\frac{x^2 + \xi^2}{2} - x + \tfrac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\cos n \pi x \cos n \pi \xi}{n^2}, \quad x > \xi.$$

Das ist aber die bilineare Formel für den ausgearteten Fall. Denn die linke Seite ist nach § 1 die zugehörige Greensche Funktion $K(x, \xi)$; die Eigenfunktionen sind nach § 3 die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \mu \varphi = 0,$$

für die

$$\left. \frac{d \varphi}{d x} \right|^0 = \left. \frac{d \varphi}{d x} \right|^1 = 0,$$

mit Ausschluß der Konstanten; sie haben also normiert die Gestalt

$$\sqrt{2} \cos n \pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und die Eigenwerte sind $n^2 \pi^2$. Da ferner die bilineare Reihe offenbar gleichmäßig und absolut konvergiert, so ergeben die Sätze des § 3, daß eine Funktion fx, die dieselben Stetigkeitseigenschaften besitzt, wie die ebenso bezeichnete in den Fällen (A) und (B), deren Ableitung an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, die ferner die Gleichung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0 \tag{7}$$

erfüllt, auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ in die gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$fx = \sum_n^{1,\infty} C_n \cos n \pi x \tag{8}$$

mit den Koeffizienten

$$C_n = 2\int_0^1 f\alpha . \cos n\pi\alpha\, d\alpha$$

entwickelt werden kann.

Läßt man die Relation (7) fallen, so braucht in der Formel (8) nur ein konstantes Glied hinzugefügt zu werden.

§ 5.

Fouriersche Reihen für unstetige Funktionen.

Die erhaltenen Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen leisten noch nicht alles, was in den Anwendungen von der Fourierschen Reihe verlangt wird. Um allgemeinere Resultate zu gewinnen, gehen wir davon aus, daß in jedem der drei behandelten Fälle die bilineare Formel als Fouriersche Entwickelung der Größe $K(x, \xi)$ betrachtet werden kann, die an der Stelle $x = \xi$ einen unstetigen Differentialquotienten aufweist, also nicht mehr zu den Funktionen gehört, die in den Sätzen des § 4 als entwickelbar nachgewiesen sind. Bildet man daher aus beliebig vielen Summanden das Aggregat

$$a_1 K(x, \xi_1) + a_1 K(x, \xi_2) + \cdots,$$

so erhält man eine Funktion, deren erste Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots$ die gegebenen Sprünge $a_1, a_2, \ldots$ aufweist, deren zweite Ableitung stetig ist, und die in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Jetzt sei fx irgend eine die Grenzbedingungen erfüllende Funktion, deren Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ so unstetig ist, daß die Gleichungen

$$f'(\xi_1 - 0) - f'(\xi_1 + 0) = a_1,\ f'(\xi_2 - 0) - f'(\xi_2 + 0) = a_2, \ldots$$

bestehen, die im übrigen aber von $x = 0$ bis $x = 1$ stetig ist, während $f''x$ nur stückweise stetig zu sein braucht. Dann hat die Differenz

$$\psi x = fx - a_1 K(x, \xi_1) - a_2 K(x, \xi_2) - \cdots$$

an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stetige erste Ableitung und überhaupt eine stückweise stetige zweite Ableitung; sie ist also quellenmäßig darstellbar und gehört zu den Funktionen, die nach § 4 in eine gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden können. Dasselbe gilt daher auch wegen der bilinearen Formel von

$$f x = \psi x + a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \cdots$$

Entwickelt werden kann also eine Funktion, deren Ableitung eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, während im übrigen die in den Sätzen des § 4 geltenden Voraussetzungen bei Bestand bleiben.

Um auch Funktionen darzustellen, die selbst unstetig sind oder die Grenzbedingungen nicht erfüllen, gehen wir von folgendem allgemeinen Satze aus.

Die reelle Variable x werde auf ein Gebiet $\mathfrak{G}$ beschränkt, und in diesem sei die Reihe

$$F x = \sum_{\nu} f_{\nu} x$$

gleichmäßig konvergent. Wenn dann im Gebiet $\mathfrak{G}$ auch die Reihe

$$f x = \sum_{\nu} f'_{\nu} x$$

gleichmäßig konvergiert, so gilt in diesem Gebiet die Gleichung

$$\frac{d F x}{d x} = f x.$$

Wenn nämlich die Strecke von x_0 bis x_1 dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört, kann man die Reihe f gliedweise von x_0 bis x_1 integrieren und findet

$$\int_{x_0}^{x_1} f x . d x = \sum_{\nu} (f_{\nu} x_1 - f_{\nu} x_0) = F x_1 - F x_0;$$

dividiert man durch $x_1 - x_0$ und läßt x_1 an x_0 heranrücken, so findet man, da $f x$ stetig ist, sofort die behauptete Gleichung aus dem ersten Mittelwertsatze der Integralrechnung.

Differenziert man, um diesen Satz anzuwenden, die bilineare Formel im Falle (A), auf den wir uns beschränken, gliedweise, so erhält man die Reihe

$$(1) \qquad \frac{2}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin n \pi \xi \cos n \pi x}{n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin n \pi (x + \xi)}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin n \pi (\xi - x)}{n},$$

und diese konvergiert nach § 4 gleichmäßig, wenn $|x - \xi|$ über einer positiven, aber beliebig kleinen Grenze liegt, $x + \xi$ dagegen von 2 um mehr als einen festen Betrag verschieden bleibt. Daraus folgt

$$K'(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\cos n\pi x \sin n\pi\xi}{n}, \tag{2}$$

sobald x und ξ auf der Strecke von 0 bis 1 liegen, ohne zusammenzufallen.

Da nun nach § 3 für jede Eigenfunktion die Gleichung

$$\frac{\varphi'_n x}{\lambda_n} = \int_0^1 K'(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha$$

besteht, so kann die erhaltene Reihe, wie auch die allgemeinere

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\varphi'_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

als Fouriersche Reihe betrachtet werden, die man mit der Größe $K'(x, \xi)$ als Funktion von ξ bildet. Die Gleichung (2) gibt daher die Fouriersche Entwickelung einer Funktion von ξ, die an der Stelle x unstetig ist, und zwar in der Weise, daß, wenn man für den Augenblick

$$K'(x, \xi) = \mathfrak{f}\xi$$

setzt, die folgende Gleichung gilt:

$$\mathfrak{f}(x - 0) - \mathfrak{f}(x + 0) = -1.$$

Der Wert der erhaltenen Reihe an der Stelle $\xi = x$ ist, wie die Gleichung (1) leicht erkennen läßt,

$$\tfrac{1}{2}[\mathfrak{f}(x - 0) + \mathfrak{f}(x + 0)].$$

Setzt man speziell $x = 0$, so erhält man die Entwickelung

$$K'(0, \xi) = 1 - \xi = \frac{2}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{n},$$

und die dargestellte Funktion erfüllt an der Stelle $\xi = 0$ die Grenzbedingung der Eigenfunktionen nicht; die erhaltene Gleichung gilt hier offenbar nicht mehr. Entsprechendes leistet an der Grenze $\xi = 1$ die Reihe

$$K'(1, \xi) = -\xi = \frac{2}{\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi\xi}{n}.$$

Der mit beliebigen Konstanten $a, b, b_1, \ldots$ gebildete Ausdruck

$$\Psi x = a K'(0, x) - b K'(1, x) - b_1 K'(\eta_1, x) - b_2 K'(\eta_2, x) - \cdots$$

kann daher nach den Eigenfunktionen $\sin n\pi x$ auf die Fouriersche Weise entwickelt werden und sein Verhalten an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, sowie an gewissen Unstetigkeitsstellen ist durch folgende Beziehungen gekennzeichnet:

$$\Psi 0 = a, \ \Psi 1 = b, \ \Psi(\eta_n - 0) - \Psi(\eta_n + 0) = b_n.$$

Der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle ist wie bei $\mathfrak{f}\xi$ das arithmetische Mittel der von oben und unten her angestrebten Grenzwerte, d. h.

$$\tfrac{1}{2}[\Psi(\eta_n - 0) + \Psi(\eta_n - 0)].$$

Jetzt sei fx eine Funktion, die an den Stellen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ unstetig ist, deren erste Ableitung an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unstetig, im übrigen aber stetig, und deren zweite Ableitung stückweise stetig ist; dabei sei

$$f0 = a, \ f1 = b, \ f'(\xi_m - 0) - f'(\xi_m + 0) = a_m, \ f(\eta_n - 0) - f(\eta_n + 0) = b_n.$$

Dann ist die Differenz

$$Fx = fx - \psi x - \Psi x$$

auf der ganzen Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ mit ihrer ersten Ableitung stetig, ihre zweite Ableitung ist stückweise stetig und die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen werden durch Fx erfüllt. Diese Funktion ist also nach § 4 auf die Fouriersche Weise entwickelbar. Dasselbe gilt aber von ψx und Ψx, mithin auch von fx; nur an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ versagt die Darstellung vielleicht, weil dies beim Ausdruck Ψx möglich ist, und an den Unstetigkeitsstellen liefert die Reihe wie die für Ψx aufgestellte das arithmetische Mittel der Grenzwerte $f(x - 0)$ und $f(x + 0)$.

Hiermit ist gezeigt, daß Funktionen, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stückweise stetig sind, durch die Fouriersche Sinusreihe dargestellt werden können. Ebenso wie die benutzten Reihen $K'(x, \xi)$ als Funktionen von ξ, konvergiert die erhaltene Fouriersche Reihe gleichmäßig auf jeder Strecke, die weder einen Unstetigkeitspunkt der dargestellten Funktion enthält, noch eine solche der Stellen $x = 0$ und $x = 1$, in der die dargestellte Funktion von Null verschieden ist.

Die Methode, die zu diesem Ergebnis geführt hat, ist offenbar allgemeinen Charakters und ergibt für die soeben definierte Klasse von Funktionen fx sofort auch, daß sie nach den Größen $\sin(n-\frac{1}{2})\pi x$ und $\cos n\pi x$ entwickelt werden können, wobei in letzterem Falle die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0$$

aufzustellen oder in der Entwickelung ein konstantes Glied einzufügen ist.

§ 6.

Das Theorem von Hurwitz.

In allen betrachteten Fällen ist es leicht, eine quellenmäßig darstellbare Funktion ψx zu finden, die zu einer beliebigen auf der Strecke von $x=0$ bis $x=1$ stetigen Funktion fx in solcher Beziehung steht, daß das Integral

$$D = \int_0^1 (f\alpha - \psi\alpha)^2 d\alpha$$

so klein ist wie man will. In der Tat kann man zunächst, abgesehen vom ausgearteten Falle, eine Funktion $\psi_0 x$ konstruieren, die geometrisch durch die Ordinate eines Polygonzuges dargestellt wird, die ferner die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen erfüllt und der Größe

$$D_0 = \int_0^1 (f\alpha - \psi_0\alpha)^2 d\alpha$$

einen beliebig kleinen Wert gibt; denn man kann bewirken, daß die Differenz $|f\alpha - \psi_0\alpha|$ zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=1$ unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt, abgesehen von gewissen Teilstrecken jenes Intervalls, in denen die bezeichnete Größe zwar nicht beliebig klein ist, wohl aber unter einer festen, nur durch die Funktion $f\alpha$ bestimmten Grenze bleibt; dann ist das Integral D_0 offenbar beliebig klein. Ist z. B. eine der Grenzbedingungen

$$\varphi 0 = 0,$$

so wird auch $\psi_0 0 = 0$ zu setzen sein, die Differenz $|\psi_0\alpha - f\alpha|$ also auf einer beliebig kleinen, mit der Stelle $x=0$ beginnenden Strecke nicht beliebig klein sein, aber unter einer festen, durch $f0$ bestimmten Grenze liegen.

Rundet man nun die Ecken des Polygons, dessen Umfang die Punkte mit der Ordinate $\psi_0 x$ enthält, in der Weise ab, daß man in den von zwei zusammenstoßenden Seiten gebildeten hohlen Winkel einen diese Seiten berührenden Kreisbogen legt, so hat der erhaltene Kurvenzug eine Ordinate ψx, die sich bei angemessener Wahl der abrundenden Bögen von $\psi_0 x$ überall um weniger als eine vorgeschriebene Größe unterscheidet; ferner ist die erste Ableitung $\psi' x$ stetig, die zweite Ableitung stückweise stetig und die Grenzbedingungen sind erfüllt. Die Funktion ψx ist also nach § 2 quellenmäßig darstellbar und bewirkt, daß der absolute Wert des Integrals D unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt.

In dem ausgearteten Falle wollen wir der Funktion fx die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0$$

auferlegen und die Funktion ψx wie bisher konstruieren; dann ist auch der absolute Wert der Größe

$$\eta = \int_0^1 \psi\alpha\, d\alpha$$

beliebig klein und die Funktion $\psi\alpha - \eta$ ist quellenmäßig darstellbar und so beschaffen, daß sie, für $\psi\alpha$ gesetzt, dem Integral D einen beliebig kleinen absoluten Wert gibt.

Die hiernach in allen Fällen definierte Funktion $\psi\alpha$ kann nach § 4 in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden; es gibt daher eine endliche Reihe von der Form

$$\Psi x = b_1 \varphi_1 x + b_2 \varphi_2 x + \cdots + b_m \varphi_m x,$$

die, für ψx gesetzt, das Integral D ebenfalls so klein macht wie man will. Diese ist offenbar wie ψx quellenmäßig darstellbar; setzt man nämlich

$$\Theta x = b_1 \lambda_1 \varphi_1 x + b_2 \lambda_2 \varphi_2 x + \cdots + b_m \lambda_m \varphi_m x,$$

so findet man sofort

$$\Psi x = \int_0^1 K(x, \alpha)\, \Theta\alpha . d\alpha.$$

Jetzt multipliziere man die bilineare Formel

$$K(\alpha, \beta) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n \alpha . \varphi_n \beta}{\lambda_n}$$

mit $f\alpha . \Theta\beta$ und integriere nach beiden Variablen von 0 bis 1; da die Eigenfunktionen zu einander orthogonal sind, so ist offenbar, wenn $m > n$,

$$\int_0^1 \Theta x . \varphi_m x . dx = 0,$$

und man erhält die Gleichung

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\alpha\beta) f\alpha . \Theta\beta . d\alpha\, d\beta = \int_0^1 f\alpha . \Psi\alpha . d\alpha = \sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu,$$

wobei gesetzt ist

$$a_\mu = \int_0^1 f\alpha . \varphi_\mu \alpha . d\alpha,$$

oder

$$2\int_0^1 f\alpha . \Psi\alpha . dx - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu = 0.$$

Da ferner offenbar die Gleichung

$$\int_0^1 (\Psi\alpha)^2 d\alpha = \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2$$

daraus folgt, daß die Funktionen $\varphi_n x$ normiert und zu einander orthogonal sind, so gilt die Gleichung

$$M = \int_0^1 (f\alpha - \Psi\alpha)^2 d\alpha = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha + \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2 - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu,$$

deren linke Seite unter einer vorgeschriebenen Größe liegt und in der Form

$$M = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha + \sum_\mu^{1,m} b_\mu^2 - 2\sum_\mu^{1,m} a_\mu b_\mu$$

$$= \sum_\mu^{1,m} (b_\mu - a_\mu)^2 + \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha - \sum_\mu^{1,m} a_\mu^2$$

geschrieben werden kann. Nun gilt aber die Identität

$$N = \int_0^1 (f\alpha - a_1 \varphi_1 \alpha - \cdots - a_m \varphi_m \alpha)^2 d\alpha = \int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha - \sum_\mu^{1,m} a_\mu^2,$$

die aus den soeben erwähnten Eigenschaften der Funktionen $\varphi_n x$ folgt; die Größe M zerfällt also in zwei nicht negative Summanden, deren einer N ist. Mithin liegt auch diese Größe bei geeigneter Wahl der Zahl m unter einer vorgeschriebenen Grenze. Sie nimmt aber offenbar ab, wenn man m vergrößert, nähert sich also, wenn man m über alle Grenzen wachsen läßt, der Null an, d. h. es besteht die Gleichung

$$\int_0^1 (f\alpha)^2\, d\alpha = \sum_n^{1,\infty} a_n^2,$$

die ein wichtiges Theorem von Hurwitz ausspricht.

In den Fällen (A) und (B) hat man zu setzen

$$a_n = \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha \,.\, \sin n\pi\alpha\, d\alpha, \quad a_n = \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha \,.\, \sin(n - \tfrac{1}{2})\pi\alpha\, d\alpha.$$

Will man im Falle (C) die Bedingung

$$\int_0^1 f\alpha \,.\, d\alpha = 0$$

wegschaffen, so braucht man nur

$$c = \int_0^1 f\alpha \,.\, d\alpha$$

und $f\alpha - c$ für $f\alpha$ zu setzen; man erhält so die Gleichung

$$\int_0^1 (f\alpha - c)^2\, d\alpha = \sum_n^{1,\infty} a_n^2, \quad a_n = \sqrt{2}\int_0^1 (f\alpha - c)\cos n\pi\alpha\, d\alpha$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 f\alpha \,.\, \cos n\pi\alpha\, d\alpha$$

oder

$$\int_0^1 (f\alpha)^2\, d\alpha = c^2 + \sum_n^{1,\infty} a_n^2$$

$$= \left[\int_0^1 f\alpha \,.\, d\alpha\right]^2 + 2\sum_n^{1,\infty}\left[\int_0^1 f\alpha \,.\, \cos n\pi\alpha\, d\alpha\right]^2.$$

§ 7.
Wärmeleitung im Ringe; Eigenwerte mit mehreren zugehörigen Eigenfunktionen.

Bei der Wärmeleitung in einem Ringe, d. h. einem linearen, in sich zurücklaufenden Leiter, sei x der längs desselben gemessene Abstand von einem festen Anfangspunkte, 1 die Länge des Ringes; dann ist die Temperatur wie in § 3 Integral der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{d x^2} - b^2 u,$$

und der Umstand, daß zu den Werten $x = 0$ und $x = 1$ derselbe Punkt gehört, fordert die Gleichungen

$$u \Big|_1^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_1^0 = 0.$$

Setzt man daher wie in § 3

$$u = e^{-(\mu + b^2)t}\varphi,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{d x^2} + \mu\varphi = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$(2) \qquad \varphi\Big|_0^1 = \frac{d\varphi}{dx}\Big|_0^1 = 0.$$

Die sämtlichen Lösungen dieser Aufgabe sind die Konstante mit dem Werte $\mu = 0$ und die mit beliebigen Koeffizienten A_n, B_n gebildeten Aggregate

$$A_n \cos 2n\pi x + B_n \sin 2n\pi x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

zu denen die Werte $\mu = 4n^2\pi^2$ gehören.

Diese Größen erscheinen als Lösungen einer Integralgleichung, deren Kern die stationäre Temperatur ist, die von einer an der Stelle $x = \xi$ wirkenden Wärmequelle herrührt, wenn gleichzeitig die Wärme durch die Oberfläche des Ringes nach einem beliebigen Gesetze ausstrahlt. Eine solche Temperatur werde durch w bezeichnet und durch folgende Gleichungen charakterisiert:

$$(3) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} - c^2 w = 0, \quad w\Big|_0^1 = \frac{dw}{dx}\Big|_0^1 = 0, \quad \frac{dw}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1;$$

man findet leicht auf der Strecke $0 < x < \xi$

$$w = \frac{\mathfrak{Cos}\, c(-x+\xi-\frac{1}{2})}{2c\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}c}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{-\mathfrak{Sin}\, c(-x+\xi-\frac{1}{2})}{2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}c}$$

und auf der Strecke $1 > x > \xi$

$$w = \frac{\mathfrak{Cos}\, c(x-\xi-\frac{1}{2})}{2c\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}c}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{\mathfrak{Sin}\, c(x-\xi-\frac{1}{2})}{2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}c}.$$

Ferner ergeben die Gleichungen (1), (2), (3):

$$\left(w\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + (\mu + c^2)\int_0^1 w\varphi\, dx = 0,$$

oder, wenn

$$w = K(x, \xi), \quad \lambda = \mu + c^2 = 4n^2\pi^2 + c^2$$

gesetzt wird:

$$(4) \qquad \varphi x = \lambda\int_0^1 K(x, \alpha)\,\varphi\alpha . d\alpha.$$

Umgekehrt findet man, wenn

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha)\, f\alpha . d\alpha$$

gesetzt wird und $f\alpha$ eine stückweise stetige Funktion ist,

$$(5) \qquad F'x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f\alpha . d\alpha, \quad F''x = c^2 Fx - fx,$$

so daß aus der Integralgleichung (4) immer folgt

$$\varphi'' x = c^2\varphi x - \lambda\varphi x = -\mu\varphi x.$$

Die Randwertaufgabe (1), (2) und die Integralgleichung (4) haben also auch hier genau dieselben Lösungen, und die zweite Gleichung (5) führt wie früher zu dem Satze, daß jede Funktion, die die Randbedingungen erfüllt, eine stetige erste und stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, in der Form Fx, also quellenmäßig dargestellt werden kann.

Das Besondere gegenüber den früher behandelten Aufgaben ist hier, daß jedem Eigenwerte

$$\lambda_{n+1} = c^2 + 4n^2\pi^2,$$

abgesehen vom Werte $\lambda_1 = c^2$, zwei zu einander orthogonale normierte Eigenfunktionen

$$\sqrt{2}\cos 2n\pi x, \quad \sqrt{2}\sin 2n\pi x$$

zugehören, denen beliebige, mit konstanten Koeffizienten gebildete Aggregate aus ihnen beigesellt werden können; zum Eigenwert $\lambda_1 = c^2$ gehört als einzige normierte Eigenfunktion die Konstante 1. Als bilineare Formel würde man also geneigt sein, folgende Gleichung anzusetzen:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{c^2} + 2 \sum_n^{1, \infty} \frac{\cos 2 n \pi x \cos 2 n \pi \xi + \sin 2 n \pi x \sin 2 n \pi \xi}{c^2 + 4 n^2 \pi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} + 2 \sum_n^{1, \infty} \frac{\cos 2 n \pi (x - \xi)}{c^2 + 4 n^2 \pi^2},$$

und diese Gleichung bestätigt sich leicht, wenn man die Funktion $\operatorname{Cof} ax$ in eine Cosinusreihe entwickelt; man erhält nämlich

$$\operatorname{Cof} ax = 2 a \operatorname{Sin} a \left\{ \frac{1}{2 a^2} + \sum_n^{1, \infty} \frac{(-1)^n \cos n \pi x}{a^2 + n^2 \pi^2} \right\}.$$

Hieraus erschließt man nach der Methode des § 5 die bekannten Sätze über die Darstellung einer periodischen Funktion durch die Fouriersche Sinus-Cosinusreihe, wobei für fx dieselben Singularitäten wie in § 5 zugelassen werden.

Schreibt man die bilineare Formel in der Gestalt

$$K(x, \xi) - \frac{1}{c^2} = 2 \sum_n^{1, \infty} \frac{\cos 2 n \pi (x - \xi)}{c^2 + 4 \pi^2 n^2},$$

so kann man auch $c = 0$ setzen; die linke Seite geht dann z. B., wenn $x < \xi$ ist, in den Ausdruck

$$\lim_{c=0} \left\{ \frac{\operatorname{Cof} c (\xi - x - \frac{1}{2})}{2 c \operatorname{Sin} \frac{c}{2}} - \frac{1}{c^2} \right\} = \frac{1}{2} (\xi - x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{24},$$

wenn $x > \xi$, in den Wert

$$\tfrac{1}{2} (x - \xi - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{24},$$

über. Bezeichnet man die hiermit definierte symmetrische Funktion von x und ξ durch $K(x, \xi)$, so gilt die Gleichung

$$K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\sqrt{2} \cos 2 n \pi x . \sqrt{2} \cos 2 n \pi \xi + \sqrt{2} \sin 2 n \pi x . \sqrt{2} \sin 2 n \pi \xi}{4 \pi^2 n^2},$$

die auch aus den Formeln des § 4 leicht verifiziert werden kann.

Man sieht aus dieser Formel, daß die Größen

(6) $\sqrt{2} \cos 2 n \pi x, \quad \sqrt{2} \sin 2 n \pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$

die beiden zum Eigenwerte $4 n^2 \pi^2$ gehörigen normierten Eigenfunktionen des neuen Kerns sind, der seinerseits die Gleichungen

$$K''(x, \xi) - 1 = 0, \qquad \int_0^1 K(\alpha, x)\, d\alpha = 0$$

erfüllt. Mit diesem Kern sind also, ähnlich wie nach § 3 mit $\overline{w}$, nur die Funktionen fx quellenmäßig darstellbar, die die oben geforderten Eigenschaften besitzen und außerdem die Gleichung

$$\int_0^1 f\alpha . d\alpha = 0 \tag{7}$$

erfüllen. Nach den Eigenfunktionen (6) sind also nicht beliebige willkürliche Funktionen von der beim vorigen Kern geforderten Beschaffenheit zu entwickeln, sondern nur solche, die die Gleichung (7) erfüllen, was natürlich sofort bewirkt wird, indem man einen konstanten Summanden hinzufügt. Damit ist wiederum die Fouriersche Sinus-Cosinusreihe abgeleitet.

§ 8.
Eigenwerte mit mehreren zugehörigen Eigenfunktionen bei beliebigen Kernen.

Um die neue Erscheinung, daß mehrere zu einander orthogonale Eigenfunktionen zu demselben Eigenwerte gehören, genauer zu durchschauen, nehmen wir an, zum Eigenwerte λ_1 gehören die zu einander orthogonalen normierten Eigenfunktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \cdots \varphi_k x$ als Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha,$$

in der das unbestimmte Integralzeichen wie in § 3 auf ein Grundgebiet bezogen werde, das wir ein für allemal festhalten; dabei braucht der Kern nicht symmetrisch vorausgesetzt zu werden. Wir bilden nun die nicht negative Größe

$$P = \int \left[K(x, \alpha) - \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu \varphi_\nu \alpha \right]^2 d\alpha$$

$$= \int K(x, \alpha)^2 d\alpha + \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu^2 - 2 \sum_{\nu}^{1,k} c_\nu \int K(x, \alpha)\, \varphi_\nu \alpha\, d\alpha;$$

setzt man speziell

$$c_\nu = \int K(x, \alpha)\, \varphi_\nu \alpha\, d\alpha = \frac{\varphi_\nu x}{\lambda_1},$$

so findet man

$$P = \int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_{\nu}^{1,k} \frac{(\varphi_\nu x)^2}{\lambda_1^2}$$

und hieraus

$$\int P\, dx = \int\int K(x, \alpha)^2 d\alpha\, dx - \frac{k}{\lambda_1^2},$$

und diese Größe ist wie P nicht negativ. Daraus folgt

$$k \leqq \lambda_1^2 \int\int K(x, \alpha)^2 d\alpha\, dx,$$

d. h. die Anzahl k hat eine gewisse obere Schranke, und zu jedem Eigenwert kann nur eine endliche Anzahl zu einander orthogonaler Eigenfunktionen gehören.

Es sei nun das System der Funktionen $\varphi_1 x, \ldots \varphi_k x$ ein solches, in dem k seinen größten Wert erreicht; dann läßt sich zeigen, daß jede zu λ_1 gehörige Eigenfunktion in der Form

$$c_1 \varphi_1 x + c_2 \varphi_2 x + \cdots + c_k \varphi_k x$$

dargestellt werden kann mit konstanten Koeffizienten c_ν. Wäre nämlich ψx eine Eigenfunktion, bei der dies nicht möglich ist, so könnte man die Konstanten b so bestimmen, daß der Ausdruck

$$\psi_0 x = \psi x - \sum_{\nu}^{1,k} b_\nu \varphi_\nu x$$

zu allen Funktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots \varphi_k x$ orthogonal wäre; es genügt,

$$b_\nu = \int \psi_0 \alpha \,.\, \varphi_\nu \alpha \,.\, d\alpha$$

zu setzen. Die so erhaltene Funktion $\psi_0 x$ kann nicht identisch verschwinden, da dann ψx durch $\varphi_1 x, \ldots$ linear ausgedrückt erschiene, entgegen der Voraussetzung. Man hat also in den Funktionen

$$\psi_0 x, \quad \varphi_1 x, \quad \varphi_2 x, \quad \ldots \varphi_k x$$

ein System von $k+1$ zu einander orthogonalen Eigenfunktionen, die zu dem Eigenwert λ_1 gehören, was der Definition der Zahl k widerspricht. Damit ist gezeigt, daß ψx von den Funktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots \varphi_k x$ linear abhängig sein muß. Zu jedem Eigenwert einer Integralgleichung mit stetigem, symmetrischem oder unsymmetrischem Kern gehört also eine endliche Anzahl zu einander orthogonaler normierter Eigenfunktionen, durch die jede andere zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktion des Kerns linear mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden kann.

Die Gesamtheit der zu allen Eigenwerten gehörigen Systeme zu einander orthogonaler Eigenfunktionen heißt ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des betrachteten Kerns. Jede Eigenfunktion des Kerns ist lineare Kombination aus einer endlichen Anzahl von Gliedern des vollständigen Systems mit konstanten Koeffizienten; ist der Kern symmetrisch, so sind alle Glieder des Systems zu einander orthogonal, da die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen schon in § 3 als zu einander orthogonal erkannt sind.

An dies Resultat schließen wir zwei Korollare. Zunächst sei durch $\varphi_\varrho x$ irgend eine Anzahl von Gliedern des vollständigen Systems bezeichnet; λ_ϱ seien die zugehörigen gleichen oder ungleichen Eigenwerte, der Kern symmetrisch. Dann gibt die Ungleichung

$$\int [K(x, \alpha) - \sum_\varrho c_\varrho \varphi_\varrho \alpha]^2 d\alpha \geqq 0,$$

indem man

$$c_\varrho = \int K(x, \alpha)\, \varphi_\varrho \alpha . d\alpha = \frac{\varphi_\varrho x}{\lambda_\varrho}$$

setzt, ähnlich wie bei einer oben durchgeführten Rechnung

$$\int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_\varrho c_\varrho^2 \geqq 0,$$

$$\int K(x, \alpha)^2 d\alpha - \sum_\varrho \frac{(\varphi_\varrho x)^2}{\lambda_\varrho^2} \geqq 0.$$

Integriert man nach x, so folgt

$$\int\int K(x, \alpha)^2 d\alpha\, dx \geqq \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2};$$

von den reziproken absoluten Werten der Eigenwerte kann also nur eine endliche Anzahl eine vorgeschriebene Grenze überschreiten; die Eigenwerte häufen sich im Endlichen nicht.

Ein zweites Korollar betrifft die mit dem vollständigen System gebildete bilineare Reihe

$$\sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

die, wie wir annehmen wollen, gleichmäßig konvergiere, wenn x und ξ das Grundgebiet durchlaufen. Dann ist die Differenz

$$Q(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

ebenso wie K eine stetige symmetrische Funktion von x und ξ auf der bezeichneten Strecke. Nehmen wir nun den Fundamentalsatz voraus, der im fünften Abschnitt bewiesen wird und aussagt,

daß jeder stetige symmetrische Kern mindestens eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion besitzt,

so gibt es eine nicht identisch verschwindende Funktion ψx, die die Gleichung

$$\psi x = \mu \int Q(x,\alpha)\psi\alpha \,.\, d\alpha \tag{1}$$

erfüllt, in der μ eine Konstante bedeutet. Multipliziert man mit $\varphi_n x$ und integriert, was erlaubt ist, in der Reihe Q gliedweise, so ergibt sich

$$\int \psi x \,.\, \varphi_n x \,.\, dx = \mu \int \psi\alpha \,.\, d\alpha \left(\int K(x,\alpha)\varphi_n x dx - \frac{\varphi_n \alpha}{\lambda_n} \right) = 0; \tag{2}$$

aus der Integralgleichung (1) folgt somit

$$\psi x = \mu \int K(x,\alpha)\psi\alpha \,.\, d\alpha.$$

Hiernach wäre ψx eine Eigenfunktion des Kerns $K(x,\xi)$, also ein Aggregat von Funktionen $\varphi_n x$ mit konstanten Koeffizienten. Das widerspricht aber den Gleichungen (2), und der Widerspruch löst sich nur, wenn $Q(x,\xi)$ identisch verschwindet:

$$K(x,\xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Aus dem zitierten, später zu beweisenden Fundamentalsatze folgt also, daß die bilineare Formel, gebildet mit dem vollständigen Orthogonalsystem eines stetigen symmetrischen Kerns, immer gilt, wenn die bilineare Reihe bezüglich beider Variabeln in dem ganzen Grundgebiet gleichmäßig konvergiert.

Zweiter Abschnitt.

Integralgleichungen und Schwingungen linearer Massensysteme.

§ 9.

Integralgleichungen und freie Schwingungen.

Zu Anwendungen der Integralgleichungen auf das Gebiet der Mechanik führen die folgenden Betrachtungen.

In einem stetig zusammenhängenden Massensystem von einer Dimension sei dx das Massenelement, x die Gesamtmasse des Stückes vom Anfangspunkt bis zu einem beliebigen Punkte hin. Das System sei imstande, um eine Gleichgewichtslage kleine Schwingungen, d. h. rein periodische Bewegungen von kleiner Amplitude auszuführen. Die Parameter, die die möglichen Lagen des Systems bezeichnen, seien q_n, wobei n hier wie fortan stets eine bestimmte endliche oder unendliche Reihe von Zahlen 1, 2, ... repräsentiere; von den Schwierigkeiten des Unendlichen sehen wir ab, solange die entwickelten Formeln nur als Wegweiser dienen. Die Größen q_n seien ferner so gewählt, daß dem Wertsystem $q_n = 0$ die Gleichgewichtslage entspricht, und daß die Differentialgleichungen der kleinen Eigenschwingungen die Gestalt

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = 0$$

annehmen, wobei λ_n positive Konstante seien. Diese Gleichungen ergeben sich als Bewegungsgleichungen nach der Regel von Lagrange, wenn die lebendige Kraft des Systems in der Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dq_n}{dt}\right)^2,$$

die potentielle Energie in der Form

$$V = \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n q_n^2$$

angesetzt wird.

Bei kleinen Schwingungen um die Lage $q_n = 0$ kann die Verrückung jedes Massenpunktes aus seiner Gleichgewichtslage, die wir durch u bezeichnen, als lineare Funktion der Größen q_n angesehen werden; sie sei etwa

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

und sei in jedem Massenelement nur in einer bestimmten Richtung und der ihr entgegengesetzten möglich.

Dann gilt für die lebendige Kraft auch der Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int \left(\sum_n \frac{dq_n}{dt} \varphi_n x\right)^2 dx,$$

in dem das Integralzeichen wie fortan stets die Integration über das ganze Massensystem bezeichne. Vergleicht man die beiden Ausdrücke von T, so ergeben sich sofort die Beziehungen

$$\int (\varphi_n x)^2 dx = 1, \quad \int \varphi_n x \,.\, \varphi_m x \,.\, dx = 0 \quad (m \gtrless n).$$

Auf das betrachtete System, das wir in beliebiger von der Gleichgewichtslage wenig abweichender Lage voraussetzen, wirke von außen her ein Kraftsystem $\mathfrak{K}$, das an jeder Stelle x die Arbeit $X \delta u dx$ leistet, wenn die Verrückung u durch $u + \delta u$ ersetzt wird. Da nun offenbar die Gleichung

$$\delta u = \sum_n \varphi_n x \,.\, \delta q_n$$

gilt, wenn der Verschiebung δu an den Parametern q_n die Variationen δq_n entsprechen, so ist die gesamte Arbeitsleistung der Kräfte $\mathfrak{K}$

$$\int X \delta u dx = \sum_n \delta q_n \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

oder

$$\sum_n Q_n \delta q_n,$$

wenn die den Parametern q_n entsprechenden Kraftkomponenten im allgemeineren Sinne des Wortes durch die Gleichungen

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

definiert werden.

Die gesamte virtuelle Arbeit, die das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ zusammen mit den inneren Kräften des Systems leistet, ist hiernach

$$-\delta V + \sum_n Q_n \delta q_n = \sum_n \left(Q_n - \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) \delta q_n,$$

und die Bewegungsgleichungen erhalten nach der Regel von Lagrange die Form

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = Q_n.$$

Speziell werde das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ so gewählt, daß es das Massensystem im Gleichgewicht hält. Dann bestehen die Gleichungen

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = 0, \quad q_n = \frac{Q_n}{\lambda_n};$$

da nun allgemein

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

gesetzt wird, so bewirkt das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ die Verrückung

$$u = \sum_n \frac{Q_n \varphi_n x}{\lambda_n} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int X \varphi_n x \,.\, dx.$$

Weiter werde das System $\mathfrak{K}$ dahin spezialisiert, daß nur an einer Stelle $x = \xi$ eine Kraft wirke. Man nähert sich diesem Zustande, wenn man die Funktion X nur in der Nähe der Stelle ξ große von Null verschiedene Werte annehmen, sie im übrigen verschwinden läßt, dabei aber die Gleichung

$$\int X dx = 1$$

festhält. Dann reduziert sich das die Arbeit darstellende Integral auf den Ausdruck

$$\int X \delta u \, dx = \delta u \Big|^{x=\xi} \cdot \int X dx = \delta u \Big|^{x=\xi};$$

die Arbeit der punktuell gewordenen Kraft wird also durch die Verrückung δu selbst gemessen, und die Komponente der Kraft in der Richtung der Verrückung u hat die Intensität Eins. Ähnlich reduziert sich die Kraftkomponente Q_n auf die Form

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, dx = \varphi_n \xi \,.\int X dx = \varphi_n \xi,$$

und für die Verrückung erhält man den Ausdruck

$$u = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

der in x und ξ symmetrisch ist und durch $K(x, \xi)$ bezeichnet werde.

Multipliziert man die erhaltene Gleichung mit einer bestimmten, aber beliebig gewählten Funktion $\varphi_m \xi$ und integriert nach ξ über das Massensystem, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\int (\varphi_n x)^2 dx = 1, \quad \int \varphi_m x \cdot \varphi_n x \,.\, dx = 0 \quad (m \gtreqless n)$$

sofort die Integralgleichung

$$\varphi_m x = \lambda_m \int K(x, \xi)\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi.$$

Die Funktionen $\varphi_n x$ sind also Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$, der gewissermaßen von der bilinearen Formel ausgehend konstruiert wird. Die zugehörigen Eigenwerte sind λ_n, und die mechanische Bedeutung des Kerns als Verrückung ist vollkommen ersichtlich. Das Grundgebiet ist das ganze bewegte Massensystem.

Diese Betrachtungen brauchen nur wenig abgeändert zu werden, wenn dämpfende Kräfte von gewissen einfachen Typen wirksam sind, nämlich solche, die von einer Zerstreuungsfunktion abhängig sind. Unter einer solchen verstehen wir eine quadratische Form

$$F = \frac{1}{2} \sum b_{mn} \frac{dq_m}{dt} \frac{dq_n}{dt},$$

deren Koeffizienten Konstante sind; setzt man

$$\frac{dq_n}{dt} = \dot{q}_n,$$

so lauten die verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen folgendermaßen:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial F}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = Q_n,$$

also wenn T und V die vorausgesetzte spezielle Form haben:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \sum_m b_{mn} \frac{dq_m}{dt} + \lambda_n q_n = Q_n.$$

Hieraus aber lassen sich betreffs einer vorausgesetzten Ruhelage des Systems unter der Wirkung der Kräfte $\mathfrak{K}$ genau dieselben

Schlüsse ziehen wie oben, da die mit den Koeffizienten b behafteten Glieder wegfallen. Speziell folgt, daß die Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

gültig bleibt; die Funktionen φ_n sind überhaupt ihrer Definition nach von der Zerstreuungsfunktion F unabhängig.

Die Gleichungen (1) haben auch noch eine Bedeutung, wenn man T als identisch verschwindend ansieht; sie geben dann die Gesetze der Wärmebewegung an. Sind nämlich etwa $u_1, u_2, \ldots$ die Temperaturen einzelner fester materieller Punkte, die allein von einander thermisch beeinflußt werden, so hat man Gleichungen von der Form

$$\frac{du_n}{dt} = \sum_m A_{mn}(u_m - u_n),$$

wobei die Größen A von der Zeit unabhängig sind und ungeändert bleiben, wenn man die Zeiger vertauscht. Man kann daher die letzte Gleichung auch in der Form

$$\frac{du_n}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial u_n}$$

schreiben, wobei V eine Funktion der Größen u_n ist. Sieht man diese als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktsystems an, so erkennt man, daß die Wärmegleichungen aus den Bewegungsgleichungen

$$\mu_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \frac{du_n}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial u_n}$$

entstehen, indem man die Massen $\mu_n = 0$ setzt. Diese Gleichungen gehören einem System an, in welchem Widerstände wirken, außerdem aber konservative Kräfte, die eine potentielle Energie V ergeben.

Denkt man sich in einem solchen System allgemeine Koordinaten q eingeführt, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0 \tag{2}$$

zur Darstellung einer freien Bewegung des Systems, und diese Form bleibt, wenn man die Zahl der Punkte ins Unendliche wachsen läßt. Dann ist die Temperatur u in der Form

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x$$

darzustellen, und wenn wir jetzt annehmen, $2F$ sei einfach die Summe der Quadrate der Größen $\dot{q}$, so erhalten wir ebenso wie oben aus der entsprechenden für T geltenden Voraussetzung auch jetzt die Gleichungen

$$\int \varphi_n \alpha \,.\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha = 0, \quad \int (\varphi_n \alpha)^2 d\alpha = 1.$$

Die oben mit dem Kraftsystem $\mathfrak{K}$ ausgeführte Untersuchung veranlaßt uns hier, in einem Punkte eine Wärmequelle wirken zu lassen, als Analogon der punktuellen Kraft. Damit ist der Ansatz, der im ersten Abschnitte zu den Greenschen Funktionen führte, als spezieller Fall des in diesem Paragraphen entwickelten erkannt.

Die Bewegungsgleichungen (2) geben, wenn V dieselbe Gestalt hat wie oben,

$$\frac{dq_n}{dt} + \lambda_n q_n = 0, \quad q_n = a_n e^{-\lambda_n t},$$

und die gesuchte Temperatur erscheint in der Form

$$u = \sum a_n \varphi_n x \,.\, e^{-\lambda_n t},$$

also ganz wie man es in der klassischen Wärmeleitungstheorie gewohnt ist.

§ 10.

Anwendungen: die schwingende Saite.

Als einfachstes Beispiel für die Theorie des § 9 werde eine Saite von der Länge und linearen Dichtigkeit Eins betrachtet, die längs der x-Achse gespannt ist; für die seitliche Verrückung u gilt bekanntlich, wenn die Zeiteinheit passend gewählt wird, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

mit den Grenzbedingungen

$$u\,|^0 = u\,|^1 = 0. \tag{2}$$

Die Differentialgleichung beruht darauf, daß $\partial u / \partial x$ die zur Saite senkrechte Komponente der in der Richtung wachsender x wirkenden Spannung ist; auf das Massenelement dx wirken daher in seitlicher Richtung die Kräfte

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x+dx},$$

deren algebraische Summe dem Produkt $dx \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleichzusetzen ist.

Herrscht Gleichgewicht und wirkt eine äußere Kraft P, so hat man als Bedingung des Gleichgewichtes die Gleichung

$$(3) \qquad P + \frac{du}{dx}\bigg|_x^{x+dx} = 0,$$

oder, wenn die betrachtete Stelle durch ξ bezeichnet und die Kraftintensität $= 1$ gesetzt wird,

$$\frac{du}{dx}\bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1,$$

und für die Verrückung u gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

mit den Grenzbedingungen (2). Hieraus folgt, wie schon in § 1 benutzt wurde, wenn man u durch $K(x,\xi)$ ersetzt,

$$K(x,\xi) = x(1-\xi), \quad x < \xi,$$
$$K(x,\xi) = \xi(1-x), \quad x > \xi,$$

und als Ordinate aufgetragen ergibt diese Größe eine Kurve, die man als Gestalt der in einem Punkte durch eine seitliche Kraft beeinflußten Saite erwartet, die gebrochene Linie.

Nach § 9 machen wir nun den allgemeinen Ansatz

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x,$$

wobei φ_n eine Funktion der Zeit ist und eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = 0$$

gilt. Betrachten wir speziell eine Bewegung, bei der φ_n allein von Null verschiedene Werte annimmt, und setzen in der Gleichung (1)

$$u = q_n \varphi_n x,$$

so ergibt sich sofort

$$\frac{1}{\varphi_n}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = \frac{1}{q_n}\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\lambda_n, \quad \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \lambda_n \varphi_n = 0,$$

und aus den Bedingungen (2) folgt

$$\varphi_n 0 = \varphi_n 1 = 0.$$

Die Größe φ_n muß also bis auf einen konstanten Faktor der Sinus eines ganzzahligen Vielfachen von πx sein, etwa, indem wir normieren,

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin n\pi x,$$

und hieraus ergibt sich

$$\lambda_n = n^2 \pi^2.$$

Die bilineare Formel nimmt folgende Gestalt an:

$$K(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_n \frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{n^2};$$

sie ist wirklich richtig, was aus § 9 nicht mit Sicherheit geschlossen werden, nur vermutet werden kann; denn sie ist mit der in § 4 streng bewiesenen Formel (2) identisch.

Die Größen q_n bestimmen sich in bekannter Weise aus den Werten von u und $\partial u / \partial t$ zur Zeit $t = 0$, die etwa fx und ψx seien, wobei offenbar

$$f0 = \psi 0 = f1 = \psi 1 = 0$$

sein muß.

Man setzt an

$$u = \sum_n (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \tag{4}$$

und fordert die Gleichungen

$$fx = \sum_n A_n \sin n\pi x, \quad \psi x = \pi \sum_n n B_n \sin n\pi x.$$

Diese Gleichungen sind nach § 4 zu erfüllen, und die erhaltenen Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig, wenn fx und ψx stetige Funktionen sind und stückweise stetige erste und zweite Ableitungen besitzen; in derselben Weise konvergiert also die Reihe (4). Sind speziell auch die Ableitungen dritter und vierter Ordnung stückweise stetig, so sieht man aus den Formeln

$$\frac{1}{2} A_n = \int_0^1 f\alpha \, . \sin n\pi\alpha \, d\alpha,$$

$$\int_a^b f\alpha \, . \sin n\pi\alpha \, d\alpha = -f\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi} \Big|_a^b + \int_a^b f'\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi} \, d\alpha$$

$$= -f\alpha \cdot \frac{\cos n\pi\alpha}{n\pi} \Big|_a^b + f'\alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n^2\pi^2} \Big|_a^b - \int_a^b f''\alpha \cdot \frac{\sin n\pi\alpha}{n^2\pi^2} \, d\alpha,$$

$$\int_0^1 f\alpha \, . \sin n\pi\alpha \, d\alpha = -\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^1 f''\alpha \, . \sin n\pi\alpha \, d\alpha,$$

den analogen mit der Funktion ψ gebildeten Gleichungen und den Darstellungssätzen des § 5, daß der Ausdruck (4) nach x und t zweimal gliedweise differenziert werden darf und, für u gesetzt, in der Tat die Gleichung (1) erfüllt.

Für die potentielle Energie hat man nach § 9 die Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2 = \frac{\pi^2}{2}\sum_n q_n^2 n^2$$

anzusetzen. Die Größen $\pi n q_n$ sind die Koeffizienten in der Entwickelung der Größe $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach den Funktionen $\cos n\pi x$, und es gilt die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = 0.$$

Ist daher die Größe $\partial u/\partial x$ nur stetig, so kann man das in § 6 abgeleitete Hurwitzsche Theorem anwenden und findet für die potentielle Energie den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sum_n n^2\pi^2 q_n^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

der sich auch aus mechanischen Erwägungen rechtfertigen läßt.

§ 11.

Schwingungen des frei herabhängenden Seils.

Ein zweites Beispiel zum § 9 bietet die Schwingung des homogenen hängenden Seils dar. Seine Länge und sein Gewicht seien Eins, die x-Achse der Richtung der Schwere entgegengesetzt, deren Beschleunigung etwa durch passende Zeiteinheit $= 1$ gemacht sei. Ferner sei $x = +1$ der Aufhängepunkt und $x = 0$ das freie Ende; endlich sei u die Verrückung senkrecht zur x-Achse. Dann wirkt auf irgend ein Element dx abwärts die Spannung x, aufwärts die Spannung $x + dx$ und die zur x-Achse senkrechten Komponenten dieser Kräfte sind

(1) $$-x\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x+dx},$$

so daß man als Bewegungsgleichung erhält

$$dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x^{x+dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Setzt man speziell

$$u = q_n \varphi_n x,$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{q_n}\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\lambda_n = \frac{1}{\varphi_n}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\varphi_n}{dx}\right);$$

dabei gilt die Gleichung

$$\varphi_n 1 = 0,$$

und $\varphi_n 0$ ist eine endliche Größe.

Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich durch Jx die Besselsche Funktion von der Ordnung Null, d. h. die Größe

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \cdots,$$

so ist $J(k\sqrt{x})$ das einzige an der Stelle $x = 0$ endliche Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{k^2}{4}y = 0.$$

Hieraus folgt sofort

$$\varphi_n x . \text{const.} = J(2\sqrt{\lambda_n x}) = J(k_n\sqrt{x}), \quad \lambda_n = \frac{k_n^2}{4},$$

wobei die Größen k durch die Gleichung

$$Jk_n = 0, \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

definiert sind; offenbar genügt es, die positiven Wurzeln dieser Gleichung zu nehmen. Da ferner die Theorie der Besselschen Funktionen die Gleichung

$$\int_0^1 J(k\sqrt{\alpha})^2 \, d\alpha = (J'k)^2$$

ergibt, so sind die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \frac{J(k_n\sqrt{x})}{J'k_n}.$$

Lassen wir jetzt im Punkte $x = \xi$ eine seitliche Kraft von der Intensität Eins wirken und nehmen wir an, das Seil bleibe unter ihrer Einwirkung in einer von der freien Gleichgewichtslage verschiedenen Lage in Ruhe, so zeigt der unter (1) angegebene Ausdruck der Spannung, daß zwischen den drei im Punkte ξ angreifenden Kräften folgende Beziehung gelten muß:

$$1 + \left(- x \frac{d u}{d x}\right)\Bigg|^{\xi - 0} + \left(x \frac{d u}{d x}\right)\Bigg|^{\xi + 0} = 0,$$

oder

(2) $$\frac{d u}{d x}\Bigg|_{\xi + 0}^{\xi - 0} = \frac{1}{\xi}.$$

Es ist ferner klar, daß auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = \xi$ die Größe u konstant ist, während sie auf der Strecke $x > \xi$ die Gleichung

$$\frac{d}{d x}\left(x \frac{d u}{d x}\right) = 0$$

erfüllt und für $x = 1$ verschwindet. Man hat also, unter a und b Konstante verstanden, folgende Gleichungen:

$$u = a, \quad (x < \xi),$$
$$u = b \log x, \quad (x > \xi).$$

An der Stelle $x = \xi$ sollen diese Werte gleich sein und außerdem die Beziehung (2) gelten; das gibt

$$a = b \log \xi, \quad 0 - \frac{b}{\xi} = \frac{1}{\xi}, \quad b = -1,$$

also

(3) $$u = -\log \xi, \quad (x < \xi),$$
$$u = -\log x, \quad (x > \xi).$$

Bezeichnet man diese Größe durch $K(x, \xi)$, so hat man als bilineare Formel die Gleichung

$$K(x, \xi) = 4 \sum \frac{J(k_n \sqrt{x})\, J(k_n \sqrt{\xi})}{(J' k_n)^2 . k_n^2}$$

zu erwarten.

Daß übrigens die Ausdrücke (3) die Ordinaten des seitlich abgelenkten Seils darstellen, kann man auch aus der Gleichung der von $x = \xi$ bis $x = 1$ reichenden Kettenlinie ableiten, indem man bedenkt, daß nur ein wenig von der Vertikalen abweichendes steiles Stück der Kurve benutzt wird.

Wenngleich nun die bilineare Formel zunächst nicht bewiesen ist, so beweist man doch leicht die Integralgleichung

(4) $$\varphi_n x = \lambda_n \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Man braucht nur von den Gleichungen

$$\frac{d}{d x}\left[x K'(x, \xi)\right] = 0, \quad \frac{d}{d x}\left(x \frac{d \varphi_n}{d x}\right) + \lambda_n \varphi_n = 0$$

die erste mit φ_n, die zweite mit $K(x,\xi)$ zu multiplizieren und erstere von letzterer zu subtrahieren; dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(K(x,\xi)\frac{d\varphi_n}{dx} - K'(x,\xi)\varphi_n x\right)\right] + \lambda_n \varphi_n x \,.\, K(x,\xi) = 0,$$

und wenn man von 0 bis 1 integriert, das in § 2 gegebene Lemma aus der Integralrechnung benutzt und bedenkt, daß $\varphi_n 0$ und $K(0,\xi)$ endliche Größen sind, so findet man

$$-\xi\varphi_n\xi K'(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + \lambda_n\int_0^1 K(x,\xi)\varphi_n x \,.\, dx = 0,$$

oder die Gleichung (4).

Ein verwandter Fall ist der eines Seiles, das an einer zu ihm senkrechten Achse befestigt ist und um diese rotiert, wobei von der Schwerkraft abgesehen werde. Das Seil bleibe in einer gleichförmig um die Achse rotierenden Ebene und erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = +1$, so daß $x = 0$ ein Punkt der Rotationsachse ist; dann verschwindet die Spannung am freien Ende und wird, wie ihre Beziehung der Zentrifugalkraft zeigt, durch $1 - x^2$ bei passender Größe der Rotationsgeschwindigkeit dargestellt. An Stelle der Ausdrücke (2) erhält man für die auf das Element dx transversal wirkenden Spannungen

$$-(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x},\quad (1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{x+dx},$$

wenn u eine kleine seitliche Verrückung aus der Lage des relativen Gleichgewichts bedeutet.

Die Gleichung der kleinen Schwingungen ist daher

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Setzt man wieder

$$u = \varphi_n x \,.\, q_n,$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\varphi_n}{dx}\right] + \lambda_n\varphi_n = 0,\quad \ddot{q}_n + \lambda_n q_n = 0;$$

als Grenzbedingung erhält man

$$\varphi_n 0 = 0,$$

und die Größen $\varphi_n(+1)$ müssen endlich sein. Die Greensche Funktion ist das an der Stelle $x = 1$ endliche Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{du}{dx}\right]=0,$$

das die Gleichung

$$u\Big|^0 = 0$$

und die Unstetigkeitsbedingung

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

erfüllt. Letztere drückt aus, daß die beiden auf das Element dx wirkenden Spannungskomponenten von transversaler Richtung eine Resultante von der Intensität 1 geben.

Man findet leicht, je nachdem ξ oder x der größere Wert ist, den ersten oder zweiten der Ausdrücke

$$u=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad u=\frac{1}{2}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Daß der zweite dieser Ausdrücke von x unabhängig wird, ist mechanisch plausibel zu machen; das Stück des Fadens, für das $x > \xi$, wird offenbar geradlinig, wenn im Punkte $x = \xi$ eine seitliche Kraft einwirkt.

Die Lösungen des gestellten Randwertproblems sind, wie aus § 28 folgt, die Legendreschen Polynome ungeraden Grades, die hiermit dynamisch gedeutet werden.

§ 12.

Der transversal schwingende Stab.

Als letztes Beispiel betrachten wir den elastischen Stab, der längs der x-Achse liegt und in den Endpunkten $x = 0$ und $x = 1$ unterstützt oder eingespannt ist. Ist u die Verrückung eines seiner Elemente in der Richtung der y-Achse und entfernt sich der Stab nur wenig von der geraden Gleichgewichtslage, so gibt es eine solche positive Konstante a, daß $a\,d^2u/dx^2$ das Moment der elastischen Kräfte ist, die auf das vom Endpunkte $x = 0$ bis zu einem beliebigen Punkte x reichende Stück des Stabes einwirken; auf das Reststück wirkt das Moment $-a\,d^2u/dx^2$. Wirken ferner in den Endpunkten die zum Stabe senkrechten Auflagerreaktionen A_0 und A_1 und, wenn die Enden eingespannt sind, die Momente M_0 und M_1, so ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für die Strecke von $x = 0$ bis zum betrachteten Punkte, indem man bezüglich des letzteren die Momente bildet,

$$(1) \qquad a\frac{d^2 u}{d x^2} + M_0 - A_0 x = 0,$$

und für die Strecke vom betrachteten Punkte bis zum Ende $x = 1$

$$(2) \qquad -a\frac{d^2 u}{d x^2} + M_1 + A_1(1 - x) = 0.$$

Wenn nun der Stab an der betrachteten Stelle mit dem in der Richtung der y-Achse ziehenden Gewicht Eins belastet ist, so gibt dies in den erhaltenen Momentgleichungen keinen Beitrag; doch muß die Summe aller y-Komponenten verschwinden, so daß

$$A_1 + A_0 + 1 = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben aber

$$a\frac{d^3 u}{d x^3}\Bigg|^{x-0} = A_0, \quad -a\frac{d^3 u}{d x^3}\Bigg|^{x+0} = A_1;$$

also folgt, wenn wir jetzt die belastete Stelle $x = \xi$ nennen,

$$a\frac{d^3 u}{d x^3}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = -1.$$

Ferner gilt offenbar allgemein die Gleichung

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = 0,$$

und die Größe u erfüllt an den Enden die betreffende Bedingung, der die Verrückung immer unterworfen ist; sie werde durch $K(x, \xi)$ bezeichnet.

Jetzt wirke in jedem Elemente dx eine seitliche Kraft Ydx; ihr Moment bezüglich des Punktes ξ ist dann $Y(x - \xi)dx$; betrachtet man das Stück des Stabes von $x = 0$ bis $x = \xi$, so ergibt sich

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg|^{\xi} = \int_0^{\xi} Y(x - \xi)\,dx,$$

und hieraus

$$a\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = \int_0^{\xi} Y\,dx, \quad a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - Y = 0.$$

Speziell sei Ydx der Trägheitswiderstand bei der Bewegung, d. h. wenn dx als Massenelement angesehen wird,

$$-dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

dann ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung der allgemeinen Theorie gemäß

$$u=q_n\varphi_n x,$$

so folgt

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2}+\lambda_n q_n=0,\quad a\frac{d^4\varphi_n x}{dx^4}-\lambda_n\varphi_n x=0,$$

und die Konstanten λ_n bestimmen sich aus den Grenzbedingungen, die, z. B. wenn der Stab beiderseits eingespannt ist, folgendermaßen lauten:

$$\varphi_n 0=\frac{d\varphi_n}{dx}\Big|^0=0,\quad \varphi_n 1=\frac{d\varphi_n}{dx}\Big|^1=0. \tag{3}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit den oben aufgestellten

$$K(0,\xi)=K'(0,\xi)=K(1,\xi)=K'(1,\xi)=0,$$

$$\frac{d^4 K(x,\xi)}{dx^4}=0,\quad \frac{d^3 K(x,\xi)}{dx^3}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}=-\frac{1}{a},$$

so findet man aus der allgemeinen Identität:

$$v\frac{d^4 w}{dx^4}-w\frac{d^4 v}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left\{v\frac{d^3 w}{dx^3}-w\frac{d^3 v}{dx^3}+\frac{dw}{dx}\frac{d^2 v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2}\right\}$$

und dem allgemeinen in § 2 angeführten Lemma, indem man

$$v=\varphi_n x,\quad w=K(x,\xi)$$

setzt:

$$-\frac{\lambda_n}{a}\int_0^1 K(x,\xi)\varphi_n x.dx=\varphi_n x.K'''(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}$$

$$=-\frac{\varphi_n\xi}{a},$$

$$\varphi_n\xi=\lambda_n\int_0^1 K(x,\xi)\varphi_n x.dx,$$

wie es die allgemeine Theorie des § 9 erwarten läßt.

Ist umgekehrt eine Funktion gegeben, für die die Gleichung

$$\varphi\xi=c\int_0^1 K(x,\xi)\varphi x.dx=c\int_0^\xi K(\xi,x)\varphi x.dx+c\int_\xi^1 K(\xi,x)\varphi x.dx \tag{4}$$

besteht, so findet man unmittelbar

$$\frac{d^4\varphi\xi}{d\xi^4} = c[K'''(\xi, \xi - 0) - K'''(\xi, \xi + 0)]\varphi\xi.$$

Nun kann man setzen

$$\begin{aligned} K'''(\xi, \xi - 0) &= \lim_{h=+0} K'''(\xi, \xi - h) \\ &= \lim_{\xi_1=\xi,\, h=+0} K'''(\xi_1 + h, \xi_1) \\ &= K'''(\xi + 0, \xi), \end{aligned}$$

und ebenso

$$K'''(\xi, \xi + 0) = K'''(\xi - 0, \xi);$$

somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi\xi}{d\xi^4} &= -c\varphi\xi \cdot \{K'''(\xi - 0, \xi) - K'''(\xi + 0, \xi)\} \\ &= \frac{c}{a}\varphi\xi, \end{aligned}$$

und die Randbedingungen sind infolge der Gleichung (4) erfüllt; jede Lösung der Integralgleichung löst also auch das oben aufgestellte Randwertproblem. Die Funktionen φ_n, die, wie man leicht sieht, die einzigen Lösungen des Randwertproblems sind, repräsentieren also auch die Gesamtheit der Lösungen der Integralgleichung.

Die bilineare Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

die man hiernach erwartet, läßt sich aus dem am Schluß des § 8 gegebenen Satze streng ableiten. Aus den Randbedingungen (3) ergibt sich nämlich, daß φ_n Lösungen der Gleichungen

$$\frac{d^4\varphi_n}{dx^4} - m^4\varphi_n = 0$$

sind, bei denen m positive und durch die Gleichung

(5) $$\cos m \,\mathfrak{Cof}\, m = 1$$

bestimmte Konstante sind; man hat dann

$$\lambda_n = m_n^4 a$$

zu setzen und findet für die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = \frac{(\sin m_n - \mathfrak{Sin}\, m_n)(\cos m_n x - \mathfrak{Cof}\, m_n x) - (\cos m_n - \mathfrak{Cof}\, m_n)(\sin m_n x - \mathfrak{Sin}\, m_n x)}{\mathfrak{Tg}\, m_n - \sin m_n \,\mathfrak{Cof}\, m_n}.$$

Diese liegen bei großen Werten von m_n zwischen endlichen von m_n unabhängigen Grenzen. Die Gleichung (5) zeigt aber, daß die Größen m, wenn sie groß sind, wesentlich wie die Glieder einer arithmetischen Reihe wachsen; die bilineare Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{1}{a} \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{m_n^4}$$

konvergiert daher nach x und ξ gleichmäßig auf der Strecke von 0 bis 1, und dasselbe gilt noch von den Reihen, die man erhält, wenn man gliedweise einmal oder zweimal differenziert. Nach § 8 ist also die bilineare Formel bewiesen, und dasselbe gilt sogar von den Gleichungen

$$K'(x, \xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

$$K''(x, \xi) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n'' x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Hieraus lassen sich nach der in den §§ 4 und 5 angewandten Methode die wichtigsten Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen ableiten, indem man nur noch die quellenmäßig dargestellten Funktionen

$$\int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

einzuführen und zu zeigen hat, daß unter ihnen alle Funktionen enthalten sind, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig sind, stückweise stetige dritte Ableitungen besitzen und die Grenzbedingungen der Eigenfunktionen erfüllen.

§ 13.

Erzwungene Schwingungen und nicht homogene Integralgleichungen.

Auf ein neues mit den Integralgleichungen zusammenhängendes Problem führt die Theorie der erzwungenen Schwingungen des in § 9 betrachteten Massensystems.

Seine Bewegungsgleichungen haben, wenn beliebige Kräfte Q_n wirken, die folgende Form:

$$(1) \qquad \frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = Q_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Diese versuchen wir auf eine besondere Weise zu erfüllen. Die wirkende Kraft X sei das Produkt aus einem räumlich veränderlichen Faktor und einem von der Zeit abhängigen Faktor harmonischen Charakters, etwa, indem wir fortan stets durch deutsche Buchstaben von der Zeit unabhängige Größen, durch β und γ Konstante bezeichnen,

$$X = \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma).$$

Gelingt es dann, die Bewegung so zu gestalten, daß die Verrückung u die analoge Gestalt

$$u = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

annimmt, so liegt das vor, was man erzwungene Schwingung nennt.

Um eine solche Bewegung in den Variablen q_n zu studieren, gehen wir von der in § 9 aufgestellten Gleichung

$$Q_n = \int X \varphi_n x \,.\, dx$$

aus, derzufolge man setzen kann

$$Q_n = \mathfrak{Q}_n \cos(\beta t + \gamma), \qquad \mathfrak{Q}_n = \int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx.$$

Versucht man nun

$$q_n = \mathfrak{q}_n \cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen, was einen Ausdruck u von der gewünschten Form ergäbe, so findet man aus den Gleichungen (1)

$$(\lambda_n - \beta^2)\mathfrak{q}_n = \mathfrak{Q}_n,$$

und hieraus

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x = \sum_n \mathfrak{q}_n \varphi_n x \,.\cos(\beta t + \gamma) = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma),$$

$$\text{(2)}\quad \mathfrak{u} = \sum_n \frac{\mathfrak{Q}_n \varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} \int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch ψx, multiplizieren $\psi \alpha$ mit $K(x, \alpha)$ und integrieren gliedweise, so finden wir

$$\int K(x, \alpha)\psi \alpha \,.\, d\alpha = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \beta^2} \int K(x, \alpha) \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha \,.\int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx$$

oder, da die Gleichungen

$$\varphi_n x = \lambda_n \int K(x, \alpha) \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha$$

gelten,

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} \int K(x, \alpha)\psi \alpha \,.\, d\alpha &= \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n(\lambda_n - \beta^2)} \int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx \\ &= \sum_n \frac{\varphi_n x}{\beta^2}\left(\frac{1}{\lambda_n - \beta^2} - \frac{1}{\lambda_n}\right)\int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx \\ &= \frac{\psi x}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2}\sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n}\int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$f\xi = \int K(x, \xi)\,\mathfrak{X}\,dx,$$

so finden wir aus der bilinearen Formel

$$\sum_n \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} \int \mathfrak{X}\,\varphi_n x\,dx = f\xi;$$

dabei ist

$$\text{(4)} \qquad \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{1}{\lambda_n}\int \mathfrak{X}\varphi_n x . dx, \qquad fx = \sum_n \varphi_n x . \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

und die Gleichung (3) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\text{(5)} \qquad \psi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha)\,\psi\alpha . d\alpha, \quad \lambda = \beta^2;$$

die Definitionsgleichung von ψx ergibt, indem man die zweite Gleichung (4) heranzieht,

$$\text{(6)} \quad \psi x = \sum \frac{\lambda_n \varphi_n x}{\lambda_n - \lambda}\int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = fx + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda}\int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Die Gleichung (5), in der λ willkürlich gedacht wird, ist eine nichthomogene Integralgleichung mit der Unbekannten ψx und ihre Lösung wird, so erwarten wir wenigstens, durch die Formel (6) gegeben.

Um allgemeine und sichere Resultate zu gewinnen, nehmen wir an, eine beliebige quellenmäßige Funktion sei auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen zu entwickeln; d. h. wenn fx eine auf dem Grundgebiet stückweise stetige Funktion ist, gelte die Gleichung

$$\text{(7)} \qquad \int K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n}\int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

und ihre rechte Seite konvergiere gleichmäßig, auch wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Wert ersetzt. Das gilt jedenfalls, wenn die bilineare Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x . \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

richtig ist und ihre rechte Seite gleichmäßig und absolut konvergiert.

Dabei werde zugelassen, was nach § 8 den allgemeinsten, bei Integralgleichungen mit stetigem, symmetrischem Kern möglichen Fall darstellt, daß zu jedem Eigenwert eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen gehört, oder daß eine endliche Anzahl aufeinanderfolgender Werte λ_n gleich sind. Die Funktionen φ_n seien dann die Glieder des nach § 8 konstruierten vollständigen Orthogonalsystems.

Unter dieser Voraussetzung konvergiert auch die Reihe

$$\psi x = fx + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha \tag{8}$$

gleichmäßig und absolut, sobald λ keinem der Werte λ_n gleich ist, weil sich dann die Glieder dieser Reihe von den entsprechenden der Reihe (7) nur um Faktoren unterscheiden, die bei wachsenden Werten von n gegen Eins konvergieren. Multipliziert man daher diese Gleichung mit $K(x, \xi)$, so kann man gliedweise nach x integrieren und findet

$$\begin{aligned} &\int K(x, \xi)\, \psi x . dx \\ &= \int K(x, \xi) f x . dx + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . dx \end{aligned} \tag{9}$$

oder der Gleichung (7) zufolge:

$$\begin{aligned} \int K(x, \xi)\, \psi x . dx &= \sum_n \varphi_n \xi . \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)}\right) \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha \\ &= \sum_n \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha = \frac{\psi \xi - f \xi}{\lambda}; \end{aligned} \tag{10}$$

damit ist die Gleichung

$$\psi \xi = f \xi + \lambda \int K(x, \xi)\, \psi x . dx, \tag{11}$$

d. h. die Integralgleichung (5) erwiesen. Der Ausdruck ψx löst also unter den aufgestellten Voraussetzungen in der Tat die nichthomogene Integralgleichung, in der übrigens fx wesentlich allgemeiner ist, als in der vorausgehenden heuristischen Betrachtung. Es erscheint keine Schwierigkeit, wenn man annimmt, daß fx die Größe λ enthalte, etwa ein Polynom in λ sei, dessen Koeffizienten die Eigenschaften von fx besitzen.

Eine andere Lösung existiert nicht, da die Differenz zweier Lösungen die homogene Gleichung

$$\Theta \xi = \lambda \int K(x, \xi)\, \Theta x . dx$$

erfüllt, die doch keine von Null verschiedene Lösung hat, da λ von den Eigenwerten verschieden ist.

Die Gleichung (8), insofern sie die Integralgleichung (11) löst, bezeichnen wir als die **Schmidtsche Formel** und können dann folgenden Satz aussprechen: Kann jede quellenmäßige Funktion auf die Fouriersche Weise entwickelt werden, und konvergiert die erhaltene Reihe im Grundgebiet gleichmäßig, auch wenn man jedes ihrer Glieder durch seinen absoluten Wert ersetzt, so wird die nicht homogene Integralgleichung durch die Schmidtsche Formel aufgelöst.

Die angewandte Methode führt auch zum Ziel, wenn λ einem der Eigenwerte gleich ist, etwa $= \lambda_m$. Wenn dann $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots \lambda_{m+k}$ die sämtlichen Eigenwerte sind, die gleich λ_m sind, so findet man aus der Integralgleichung (11)

$$\int \psi \xi \,.\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi = \int f\xi \,.\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi + \lambda_m \int\int K(x, \xi)\, \varphi_m \xi \,.\, \psi x \,.\, dx\, d\xi,$$

oder, da in dem Doppelintegral die Integrationen vertauscht werden können,

$$\int \psi \xi \,.\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi = \int f\xi \,.\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi + \int \psi x \,.\, \varphi_m x \,.\, dx,$$

$$\int f\xi \,.\, \varphi_m \xi \,.\, d\xi = 0,$$

und allgemeiner offenbar

$$\int f\xi \,.\, \varphi_{m+\mu} \xi \,.\, d\xi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots k. \tag{12}$$

Diese Bedingungen müssen also erfüllt sein, wenn überhaupt eine Lösung der nichthomogenen Integralgleichung (11) existieren soll.

Sind sie erfüllt, so setze man

$$\psi x = fx + \lambda \sum_n{}' \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

wobei der Akzent am Summenzeichen bedeute, daß die Werte $n = m,\ m+1, \ldots m+k$ weggelassen werden. Den Gleichungen (12) zufolge kann nun gesetzt werden

$$\int K(x, \xi) fx \,.\, dx = \sum_n{}' \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} \int fx \,.\, \varphi_n x \,.\, dx;$$

daraus aber folgt wieder die Gleichung (10), in der nur dem Summenzeichen der Akzent beizufügen ist, und weiter die Gleichung (11).

Zwei verschiedene Lösungen dieser Gleichung würden sich wieder um eine Differenz Θx unterscheiden, die die Gleichung

$$\Theta x = \lambda \int K(x, \alpha)\, \Theta \alpha \,.\, d\alpha$$

erfüllt. Diese aber hat, da $\lambda = \lambda_m$, die allgemeinste Lösung

$$\Theta x = a_0 \varphi_m x + a_1 \varphi_{m+1} x + \cdots + a_k \varphi_{m+k} x,$$

in der $a_0, a_1, \ldots$ willkürliche Konstante sind; somit ergibt sich als allgemeinste Lösung der nicht homogenen Integralgleichung der Ausdruck

$$\psi x + a_0 \varphi_m x + a_1 \varphi_{m+1} x + \cdots + a_{m+k} \varphi_{m+k} x.$$

Interesse verdient noch der besondere Fall, daß in der Integralgleichung (11) gesetzt wird

$$f x = K(x, y), \quad f \xi = K(\xi, y).$$

Man findet dann

$$\int f \alpha \, . \, \varphi_n \alpha \, . \, d\alpha = \frac{\varphi_n y}{\lambda_n},$$

und für die Unbekannte ψx ergibt sich der Wert

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda \sum \frac{\varphi_n x \, . \, \varphi_n y}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

oder, da

$$\frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = - \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda - \lambda_n}$$

ist,

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \sum \left(- \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right) \varphi_n x \, . \, \varphi_n y.$$

Wenn nun die bilineare Formel gilt, erhält man weiter

$$\Gamma(x, y) = \sum \frac{\varphi_n x \, . \, \varphi_n y}{\lambda_n - \lambda}.$$

Die mechanische Bedeutung dieser Größe wird in § 18 auseinander gesetzt; als „lösender Kern" im Sinne der Fredholmschen Theorie erscheint sie im fünften Abschnitt wieder.

§ 14.

Erzwungene Schwingungen einer Saite.

Die entwickelte Theorie kann auf die erzwungenen Schwingungen einer ungedämpften Saite angewandt werden, da nach § 10 für ihre Eigenfunktionen, die als Raumfaktoren der Eigenschwingungen auftreten, die bilineare Formel richtig ist und die bilineare Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Bewegungsgleichung der Saite lautet, wenn eine periodische Kraft von der oben definierten Beschaffenheit einwirkt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma), \tag{1}$$

und wenn man

$$u = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

setzt, findet man

$$-\beta^2 \mathfrak{u} = \frac{d^2 \mathfrak{u}}{d x^2} + \mathfrak{X}$$

mit den Grenzbedingungen

(2) $$\mathfrak{u}\Big|^0 = \mathfrak{u}\Big|^1 = 0.$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit den charakteristischen Eigenschaften des Kerns:

$$\frac{d^2 K(x, \xi)}{d x^2} = 0, \quad \frac{d K(x, \xi)}{d x}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad K(0, \xi) = K(1, \xi) = 0,$$

und setzt wiederum

$$\int_0^1 \mathfrak{X} K(x, \xi) d x = f \xi, \quad \mathfrak{u} = \psi x, \ \lambda = + \beta^2,$$

so findet man

$$\psi \xi = \lambda \int_0^1 K(x, \xi) \psi x . d x + f \xi,$$

und jede Lösung dieser Gleichung erfüllt die Bedingungen (2).

Bedenkt man, daß

$$\varphi_n x = \sqrt{2} \sin n \pi x, \quad \lambda_n = n^2 \pi^2$$

zu setzen ist, so zeigt die Schmidtsche Formel, daß eine erzwungene Schwingung mit folgender Verrückung möglich ist:

$$u = \left[f x + \beta^2 \sum_n \frac{\sqrt{2}\, c_n . \sin n \pi x}{n^2 \pi^2 - \beta^2} \right] \cos (\beta t + \gamma),$$

wobei

$$c_n = \sqrt{2} \int_0^1 f \alpha . \sin n \pi \alpha \, d \alpha = \frac{\sqrt{2}}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \mathfrak{X} \sin n \pi x \, d x.$$

Der erhaltene Ausdruck verliert seinen Sinn, wenn β einer der Größen $n \pi$ gleich wird, was ausgeschlossen wird durch die oben getroffene Festsetzung, daß λ mit keiner der Größen λ_n zusammenfallen soll. Da die einfachen Töne der Saite Verrückungen geben, die durch die Ausdrücke

$$\text{const.} . \sin n \pi x . \sin n \pi t$$

dargestellt werden, so sieht man, daß in dem ausgeschlossenen Falle die Periode der wirkenden Kraft der Periode eines Eigentons der Saite gleich ist.

Für die Mechanik ist es nun wichtig, nicht nur einen möglichen Typus von Bewegungen kennen zu lernen, sondern den bestimmten, der bei gegebenen Anfangszuständen von gegebenen Kräften, etwa den Kräften $\mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma)$, hervorgerufen wird. Dazu führt die Bemerkung, daß die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen erfüllt bleibt, wenn man zu einer ihrer Lösungen eine Lösung der Differentialgleichung der freien Schwingungen addiert. Setzt man demgemäß

$$w = u + v, \quad v = \sum_n \varphi_n x \,.\, (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$
$$= \sqrt{2} \sum_n \sin n\pi x \, (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t),$$

so ist w eine Lösung der Gleichung (1) und es ist leicht, die Forderungen

$$w \Big|^{t=0} = f_1 x, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|^{t=0} = f_2 x,$$

in denen

$$f_1 0 = f_1 1 = f_2 0 = f_2 1 = 0$$

vorausgesetzt wird, dadurch zu erfüllen, daß man eine gegebene Funktion nach den Eigenfunktionen auf Grund der Sätze des § 5 entwickelt. Die geforderten Entwickelungen sind

$$f_1 x - u \Big|^{t=0} = \sum_n a_n \varphi_n x,$$
$$f_2 x - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|^{t=0} = \sum_n n\pi b_n \varphi_n x.$$

Aus den so erhaltenen Formeln läßt sich die Erscheinung der Schwebungen so weit ableiten, wie es überhaupt ohne Rücksicht auf die Dämpfungen möglich ist.

§ 15.

Erzwungene Schwingungen mit Rücksicht auf die Dämpfung.

Die Untersuchung des letzten Paragraphen läßt sich, ohne daß wesentlich neue analytische Entwickelungen auftreten, auf einen Fall übertragen, der mechanisch von bedeutendem Interesse ist, die Bewegung gedämpfter Systeme, für die in § 9 die Bewegungsgleichungen angeführt sind. Handelt es sich um kleine Schwingungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage, so kann man wiederum setzen:

$$T = \frac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2;$$

betreffs der Zerstreuungsfunktion F, die die Dämpfung kennzeichnet, werde die spezielle Annahme

$$F = \frac{b}{2}\sum_n \dot{q}_n^2$$

festgehalten. Dann lauten die Bewegungsgleichungen nach § 9 folgendermaßen:

(1) $$\ddot{q}_n + b\,\dot{q}_n + \lambda_n q_n = Q_n;$$

dabei ist wie oben

$$Q_n = \int X \varphi_n x . dx$$

gesetzt und bedeutet das Integralzeichen stets die Integration über das ganze Massensystem.

Um nun eine Art von Bewegung des Systems zu erhalten, die als erzwungene Schwingung anzusehen wäre, setzen wir die Kraft X wieder als einfache periodische Funktion der Zeit voraus, und zwar sei

$$\theta = \beta t + \gamma, \quad X = \mathfrak{U}\cos\theta + \mathfrak{V}\sin\theta,$$

und die Größen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ von t unabhängig. Hieraus ergibt sich mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{Q}_n = \int \mathfrak{U}\varphi_n x . dx, \quad \mathfrak{R}_n = \int \mathfrak{V}\varphi_n x . dx$$

die Gleichung

$$Q_n = \mathfrak{Q}_n \cos\theta + \mathfrak{R}_n \sin\theta.$$

Versucht man nun die Bewegungsgleichungen (1) durch die Annahme

$$q_n = \mathfrak{q}_n \cos\theta + \mathfrak{r}_n \sin\theta$$

zu erfüllen, wobei die deutschen Buchstaben wieder von der Zeit unabhängige Größen bedeuten, und setzt auf beiden Seiten jeder Gleichung die mit $\cos\theta$ und mit $\sin\theta$ multiplizierten Ausdrücke gleich, so ergibt sich

(2) $$\begin{aligned} -\beta^2\mathfrak{q}_n + b\beta\,\mathfrak{r}_n + \lambda_n\mathfrak{q}_n &= \mathfrak{Q}_n, \\ -\beta^2\mathfrak{r}_n - b\beta\,\mathfrak{q}_n + \lambda_n\mathfrak{r}_n &= \mathfrak{R}_n. \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\mathfrak{q}_n + i\,\mathfrak{r}_n = \mathfrak{w}_n, \quad \beta^2 + ib\beta = \lambda, \quad \mathfrak{U} + \mathfrak{V}i = \mathfrak{W},$$

so folgt aus den Gleichungen (2)

$$\mathfrak{w}_n = \frac{\mathfrak{Q}_n + \mathfrak{R}_n i}{\lambda_n - \lambda} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda}\int \mathfrak{W}\varphi_n x . dx;$$

bedeutet daher das Zeichen $\Re e$ vor einer komplexen Größe den reellen Teil, so ergibt sich weiter, da offenbar

$$u = \sum_n q_n \varphi_n x = \cos\theta \sum_n \mathfrak{q}_n \varphi_n x + \sin\theta \sum \mathfrak{r}_n \varphi_n x$$
$$= \Re e\, e^{-\theta i} \sum_n \mathfrak{w}_n \varphi_n x$$

gesetzt werden kann,

$$u = \Re e\, e^{-\theta i} \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{W} \varphi_n x \,.\, dx. \tag{3}$$

Die hier auftretende Reihe führt aber sofort wieder auf die nichthomogene Integralgleichung; setzt man nämlich

$$\psi x = \mathfrak{W} + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{W} \varphi_n x \,.\, dx,$$

multipliziert mit der Größe

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

und integriert gliedweise, so findet man genau durch die Rechnung, die in § 13 an die Gleichung (2) geknüpft wurde,

$$\psi \xi = f \xi + \lambda \int K(x, \xi)\, \psi x \,.\, dx,$$

wobei

$$fx = \int \mathfrak{W} K(x, \xi)\, dx = \int \mathfrak{U} K(x, \xi)\, dx + i \int \mathfrak{V} K(x, \xi)\, dx$$

gesetzt ist und nur zu bedenken ist, daß der reelle und der imaginäre Teil dieser Größe als quellenmäßig dargestellte Funktionen des Ortes auf die Fouriersche Weise entwickelt werden können; dasselbe gilt daher von der ganzen Größe fx selbst, womit die zitierte Schlußreihe für den vorliegenden Fall gültig bleibt. Die Reihe für ψx konvergiert ferner auch hier absolut und gleichmäßig, wenn die bilineare Formel gilt und die bilineare Reihe in eben dieser Weise konvergiert; denn die Schlüsse, durch die in § 13 dies Resultat erhalten wurde, sind völlig unabhängig davon, ob λ reell oder imaginär ist.

Der erhaltene Ausdruck (3) für u reicht insofern weiter als der entsprechende in § 13, als keiner seiner Nenner verschwinden kann, wenn b, also die Dämpfung, von Null verschieden ist.

Wir wenden diese Theorie auf die Schwingung der gedämpften Saite an, deren Bewegungsgleichung in den Bezeichnungen des § 14 jetzt folgende ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Setzt man

$$u = q \,.\, \varphi x,$$

wobei q von t allein abhänge, so findet man

$$\frac{\ddot{q} + b\dot{q}}{q} = \frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\mu;$$

μ ist von x und t unabhängig und es gelten die Gleichungen

$$\ddot{q} + b\dot{q} + \mu q = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0,$$

deren zweiter die Grenzbedingungen

$$\varphi 0 = \varphi 1 = 0$$

beizufügen sind. Daraus ergibt sich sofort

$$\mu = n^2\pi^2 = \lambda_n, \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

und wenn man die verschiedenen Werte n ausdrücklich unterscheidet,

$$\varphi = \varphi_n x = \sqrt{2}\sin n\pi x,$$

(4) $$\ddot{q}_n + b\dot{q}_n + \lambda_n q_n = 0.$$

Macht man daher den Ansatz

(5) $$u = \sum_n q_n \varphi_n x,$$

so ist das Problem der gedämpften Saite vollständig der oben entwickelten dynamischen Theorie eingeordnet.

Nun ergibt die Gleichung (4), wenn A_n und B_n Integrationskonstante sind, als allgemeine Lösung

$$q_n = e^{-\frac{1}{2}bt}\left(A_n \cos t\sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2} + B_n \sin t\sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2}\right)$$

oder kurz

$$q_n = e^{-\frac{1}{2}bt}\,(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t),$$

indem wir allgemein

$$p_n = \sqrt{\lambda_n - \tfrac{1}{4}b^2}$$

setzen; daraus folgt nach (5) für die Verrückung bei irgend einer freien Schwingung

$$u = e^{-\frac{1}{2}bt} \sum_n \varphi_n x \,.\, (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t).$$

Die Verrückung bei einer erzwungenen Schwingung unter der Wirkung einer Kraft, wie sie in der allgemeinen Theorie vorausgesetzt wurde, wird durch die Formel (3) gegeben, in der nur

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad \lambda = \beta^2 + ib\beta$$

zu setzen ist. Die aus einem bestimmten Anfangszustand durch diese Kräfte hervorgerufene Verrückung wird also durch die Formel

$$u = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}bt}\sum_n (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t)\sin n\pi x$$
$$+ \Re e\, 2e^{-(\beta t+\gamma)i}\sum_n \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2 - \beta^2 - ib\beta}\int_0^1 \mathfrak{W}\sin n\pi x\,dx$$

dargestellt, und die Bewegung setzt sich aus der erzwungenen und Eigenschwingungen zusammen. Letztere allein enthalten in der Amplitude den Faktor $e^{-\frac{1}{2}bt}$, der, da b naturgemäß positiv sein muß, die Eigenschwingungen zum Abklingen bringt, so daß schließlich nur die erzwungene Schwingung merklich bleibt.

Ist speziell zur Zeit $t = 0$ die Saite in Ruhe und in der Gleichgewichtslage, so findet man leicht:

$$\sqrt{2}\,A_n = -\,\Re e\,\frac{2e^{-\gamma i}}{n^2\pi^2 - \beta^2 - ib\beta}\int_0^1 \mathfrak{W}\sin n\pi x\,dx,$$

$$\sqrt{2}\,(p_n B_n - \tfrac{1}{2}bA_n) = -\,\Re e\,\frac{-2\beta i e^{-\gamma i}}{n^2\pi^2 - \beta^2 - ib\beta}\int_0^1 \mathfrak{W}\sin n\pi x\,dx.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, daß, wenn die Dämpfungskonstante klein und β einem bestimmten Werte $n\pi$ nahe gelegen ist, so daß die Periode der erzwingenden Kraft nahezu oder ganz mit einer Eigenperiode der Saite übereinstimmt, die entsprechenden Koeffizienten A_n und B_n im allgemeinen groß sind. Daraus folgt, solange der Wert des Exponentialfaktors der Eigenschwingungen noch nicht zu tief gesunken ist, die bekannte Erscheinung der Schwebungen, die aber mit der Zeit durch den erwähnten Faktor wieder verschwindet.

§ 16.

Kleine Schwingungen in ausgearteten Fällen.

Die Methode des § 9 setzt wesentlich voraus, daß die Konstanten λ_n von Null verschieden sind. Der Fall, daß eine von ihnen verschwindet, die entsprechende Größe q also in der potentiellen Energie nicht vorkommt, kann so formuliert werden, daß man dem Ausdruck der potentiellen Energie dieselbe Form gibt wie in § 9, in der kinetischen Energie und im Ausdruck der allgemeinen Verrückung u aber ein Glied hinzufügt:

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{q}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2,$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2,$$

$$u = q_0\varphi_0 x + \sum_n q_n \varphi_n x.$$

Dann wäre eine der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 q_0}{dt^2} = Q_0,$$

und im Falle des Gleichgewichts hätte man die Gleichung

$$Q_0 = \int X\varphi_0 x\,.\,dx = 0,$$

die im allgemeinen nicht mehr erfüllt werden kann, wenn das Kraftsystem $\mathfrak{K}$ in die an der Stelle ξ wirkende Einzelkraft übergeht.

Um das Gleichgewicht aufrecht erhalten zu können, lassen wir neben dem System $\mathfrak{K}$ noch in jedem Massenelement eine Kraft wirken, die bei einer Verschiebung δu die Arbeit $Y\delta u dx$ leistet. Alsdann sind die verallgemeinerten Kraftkomponenten

$$Q_\nu = \int Y\varphi_\nu x\,.\,dx + \int X\varphi_\nu x\,.\,dx,\quad \nu = 0,\ n$$

und die erste von ihnen, die verschwinden muß, wird, wenn man das System $\mathfrak{K}$ wie früher spezialisiert,

$$Q_0 = \int Y\varphi_0 x\,.\,dx + \varphi_0\xi = 0.$$

Diese Gleichung erfüllt man am einfachsten, indem man

$$Y = -\varphi_0 x\,.\,\varphi_0\xi$$

setzt; dann haben die Größen Q_n wieder die frühere Gestalt

$$Q_n = \int X\varphi_n x\,.\,dx = \varphi_n\xi\,.\int X dx = \varphi_n\xi,$$

da die Ausdrücke

$$\int Y\varphi_n x\,.\,dx = -\varphi_0\xi\,.\int \varphi_n x\,.\,\varphi_0 x\,dx$$

verschwinden.

Hieraus ergibt sich im Falle des Gleichgewichts wie in § 9

$$q_n = \frac{Q_n}{\lambda_n} = \frac{\varphi_n\xi}{\lambda_n},$$

und für die Verrückung erhält man die Formel

$$u = q_0\,\varphi_0 x + \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

in der q_0 eine Funktion von ξ bedeutet. Gelingt es speziell, die Kräfte X und Y so zu bestimmen, daß bei der von ihnen festgehaltenen Gleichgewichtslage die Koordinate q_0 ihren Anfangswert Null erhält, so ist die Größe

$$K(x, \xi) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

als Verrückung mechanisch vollkommen gedeutet, und sie gibt als Kern einer Integralgleichung genommen die Beziehungen

$$\varphi_n \xi = \lambda_n \int K(x, \xi)\, \varphi_n x \,.\, dx, \quad \int K(x, \xi)\, \varphi_0 x \,.\, dx = 0.$$

Die hier entwickelte Methode bleibt mit einer leichten Modifikation brauchbar, wenn die lebendige Kraft T und die Verrückung u zwei Koordinaten, etwa q_0 und q_{01} enthalten, die in der potentiellen Energie nicht vorkommen. Hat man demgemäß die Gleichungen

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{q}_0^2 + \tfrac{1}{2}\dot{q}_{01}^2 + \frac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2,$$

$$u = q_0\,\varphi_0 x + q_{01}\,\varphi_{01} x + \sum_n q_n\,\varphi_n x,$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n q_n^2,$$

so braucht man nur

$$\Xi = -\,\varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi - \varphi_{01} x \,.\, \varphi_{01} \xi$$

zu setzen; dann erhält man nämlich zunächst die Gleichungen

$$\int \Xi\,\varphi_0 x \,.\, dx = -\,\varphi_0 \xi, \qquad \int \Xi\,\varphi_{01} x \,.\, dx = -\,\varphi_{01} \xi,$$

und wenn X auf die oben geschilderte Weise in eine punktuelle Kraft ausartet, die im Punkte ξ wirkt, so ergibt sich

$$\int X \varphi_0 x \,.\, dx = \varphi_0 \xi, \qquad \int X \varphi_{01} x \,.\, dx = \varphi_{01} \xi,$$

also

$$\int (X + \Xi)\, \varphi_0 x \,.\, dx = \int (X + \Xi)\, \varphi_{01} x \,.\, dx = 0.$$

Damit ist der Boden für die weiteren oben gezogenen Schlüsse gesichert und man findet als Wirkung der punktuell gewordenen Kraft X und der Kraft Ξ eine Verrückung von der Form

$$u = q_0 \varphi_0 x + q_{01} \varphi_{01} x + \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

Gelingt es hier, q_0 und q_{01} zum Verschwinden zu bringen, so ist u der Kern einer Integralgleichung, deren Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ sind; offenbar genügt hierzu, die Größe u den Gleichungen

$$\int u \varphi_0 x . dx = \int u \varphi_{01} x . dx = 0$$

zu unterwerfen.

Diese Methode ist ohne Änderung auf den zu Ende des § 9 besprochenen Fall anzuwenden, daß die lebendige Kraft identisch verschwindet und die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial V}{\partial q_m} = 0$$

auf Wärmeleitungsvorgänge anwendbar werden. Wenn dann die potentielle Energie V von q_0 frei ist, so nimmt die entsprechende Bewegungsgleichung einfach die Form

$$\dot{q}_0 = 0, \qquad q_0 = \text{const.}$$

an, so daß $q_0 \varphi_0 x$ eine stationäre Temperatur repräsentiert. Der punktuell wirkenden Kraft entspricht nach § 9 eine Wärmequelle; die entwickelte Methode, den Kern zu suchen, dessen Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x \ldots$ sind, kann daher so formuliert werden, daß man außer der Quelle im Punkte ξ durch das ganze System hin Wärmemengen auftreten läßt, und zwar im Element dx die Menge $-\varphi_0 x . \varphi_0 \xi . dx$.

Die hierdurch hervorgerufene Temperatur $K(x, \xi)$ sucht man dann so zu spezialisieren, daß

$$\int K(x, \xi) \varphi_0 x . dx = 0,$$

was möglich ist, da man jeder stationären Temperatur einen Summanden const. $\varphi_0 x$ beifügen kann. Ist die letzte Gleichung erreicht, so erwartet man die bilineare Formel

$$K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}.$$

§ 17.

Spezielle Fälle von Ausartung.

Wir wenden die letzten Formeln auf den Fall eines longitudinal schwingenden homogenen Stabes von der Länge und

Masse Eins an, dessen Enden frei sind, und der demgemäß in seiner Längsrichtung verschiebbar ist. Bewegungsgleichung und Grenzbedingungen sind folgende:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{x=0,1} = 0.$$

Diese Forderungen werden erfüllt, wenn man u konstant setzt, was offenbar eine longitudinale Verschiebung des unverzerrten Stabes bedeutet. Allgemein kann man daher setzen:

$$\varphi_0 x = 1, \qquad u = q_0 + \sum_{n>0} q_n \varphi_n x;$$

sodann findet man aus der Bewegungsgleichung, indem man sie auf jedes einzelne Glied der letzten Summe anwendet,

$$\frac{1}{q_n}\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{1}{\varphi_n x}\frac{d^2 \varphi_n x}{dx^2} = -\lambda_n$$

und die Grenzbedingungen ergeben, daß

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \qquad \varphi_n x = \sqrt{2}\cos n\pi x$$

zu setzen ist.

Nun ist bei der zugrunde gelegten Form der Bewegungsgleichung $\partial u/\partial x$ die in der Richtung wachsender x wirkende Spannung; wenn daher in einem Punkte $x = \xi$ eine Einzelkraft P wirkt, so muß dieselbe mit den auf beiden Seiten dieser Stelle angestrebten Grenzwerten der Spannung im Gleichgewicht sein:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\xi-0}^{\xi+0} + P = 0,$$

oder für $P = 1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1.$$

Wirkt ferner in irgend einem Element dx eine longitudinale Kraft $Y dx$, so muß sie im Gleichgewicht stehen mit der Resultante der in den Enden des Elements auf dieses wirkenden Spannungen, also

$$Y dx + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}^{x+dx} = 0, \qquad Y + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Sucht man also nach dem Ansatz des § 16 die Gleichgewichtsfigur des Stabes unter der Wirkung einer an der Stelle ξ angebrachten Kraft von der Intensität Eins und einer im Element dx angebrachten Kraft

$$Y\,dx = -\varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi \,.\, dx = -dx,$$

so ist die zugehörige Verrückung diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - 1 = 0,$$

die die Grenzbedingungen

$$\left.\frac{d u}{d x}\right|^{x=0,1} = 0$$

erfüllt und an der Stelle ξ eine Unstetigkeit darbietet, die durch die Gleichung

$$\left.\frac{d u}{d x}\right|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

definiert wird.

Als Lösung dieser Aufgabe ergibt sich, wie schon in § 1 bemerkt ist, für $x < \xi$

$$u = -\xi + \frac{x^2 + \xi^2}{2} + c, \qquad c = \text{const.},$$

für $x > \xi$

$$u = -x + \frac{x^2 + \xi^2}{2} + c,$$

und wenn man u durch $K(x, \xi)$ ersetzt, gilt für die Funktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ die Integralgleichung

$$\varphi_n x = \pi^2 n^2 \int_0^1 K(x, \xi)\, \varphi_n \xi \,.\, d\xi,$$

was man aus den Differentialgleichungen, deren Integrale $K(x, \xi)$ und $\varphi_n x$ sind, leicht verifiziert. Die Konstante c bestimmt das Glied $q_0 \varphi_0 x$ in der allgemeinen Formel des § 16; setzt man

$$c = \tfrac{1}{3},$$

so findet man

$$q_0 = 0, \int_0^1 K(x, \xi)\, d\xi = 0,$$

und diese Gleichung bedeutet offenbar, daß der Schwerpunkt des Stabes seine ursprüngliche Lage behält.

Ein verwandtes Beispiel bietet das in § 11 betrachtete rotierende Seil, wenn es nicht in der Achse endet, sondern sich von $x = -1$ bis $x = +1$ erstreckt und auch da, wo es die Achse schneidet, längs dieser beweglich ist wie ein Faden in einem länglichen Nadelöhr. Man hat dann für die Funktion φ_n die Bedingung, daß die Größen $\varphi_n(+1)$ und $\varphi_n(-1)$ endlich sein müssen. Die Randwertaufgabe, in der die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\varphi}{dx}\right]+\lambda\varphi=0$$

auftritt, hat auch eine Lösung, wenn $\lambda=0$ gesetzt wird, und zwar die Konstante; normiert man, so ergibt sich

$$\varphi_0 x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da nun wie in § 11 auch hier die Spannung durch

$$(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}$$

ausgedrückt wird, so findet man für die Greensche Funktion die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{du}{dx}\right]-\varphi_0 x\,.\,\varphi_0\xi=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{du}{dx}\right]-\tfrac{1}{2}=0,$$

und die Unstetigkeitsbedingung

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}\Bigg|_{\xi+0}^{\xi-0}=1.$$

Setzt man $u=K(x,\xi)$ und bestimmt die in u verfügbare additive Konstante so, daß die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1}K(x,\xi)\,dx=0$$

besteht, so findet man

$$x<\xi,\quad K(x,\xi)=-\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)]-\tfrac{1}{2}+\log 2,$$
$$x>\xi,\quad K(x,\xi)=-\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)]-\tfrac{1}{2}+\log 2.$$

Die Lösungen des Randwertproblems sind, wie in § 28 näher ausgeführt werden soll, die Legendreschen Polynome beliebigen Grades.

Ein weiteres Beispiel dieses Falles findet sich bei den transversalen Schwingungen eines Stabes, dessen Enden beide frei sind. Hält man die Bezeichnungen des § 12 fest, so hat man für die Verrückung die Differentialgleichung

$$a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

und die Grenzbedingungen

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|^{0,1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|^{0,1} = 0.$$

Diese Forderungen werden zunächst erfüllt, wenn man

$$u = q\varphi x$$

setzt und die Differentialgleichungen

$$\varphi'' x = 0, \qquad \frac{d^2 q}{dt^2} = 0$$

gelten. Die Größe φx kann dann aus zwei linear unabhängigen linearen Funktionen von x, etwa 1 und $x - c$ zusammengesetzt werden; diese sind aber nur dann zu einander orthogonal, wenn die Gleichungen

$$\int_0^1 (x - c)\, dx = 0, \qquad c = \tfrac{1}{2}$$

gelten. Die Funktion $x - \frac{1}{2}$ wird ferner erst dann normiert, wenn wir sie mit $\sqrt{12}$ multiplizieren; denn man findet leicht

$$\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})^2\, dx = \tfrac{1}{12}.$$

Hiernach wird man setzen können:

$$\varphi_0 x = 1, \qquad \varphi_{01} x = \sqrt{12}\,(x - \tfrac{1}{2}),$$

und es gibt spezielle Verrückungen von der Form

$$u = q_0 \varphi_0 x = q_0, \qquad u = q_1 \varphi_{01} x = \sqrt{12}\, q_{01} (x - \tfrac{1}{2}),$$

in denen q_0 und q_{01} lineare Funktionen der Zeit sind, so daß

$$\frac{d^2 q_0}{dt^2} = \frac{d^2 q_{01}}{dt^2} = 0.$$

Die mechanische Bedeutung dieser Verrückungen ist leicht ersichtlich: die erste ergibt eine longitudinale Verschiebung des unverzerrten Stabes, die zweite eine Drehung um den Mittelpunkt $x = \frac{1}{2}$. Daß die potentielle Energie des Stabes von den Amplituden dieser Bewegungen unabhängig ist, wenn von der Schwerkraft abgesehen wird, machen schon allgemeine dynamische Erwägungen plausibel.

Ferner werden die Forderungen (1) und (2) erfüllt, wenn man ansetzt:

$$u = q_n \varphi_n x,$$

$$(3) \qquad a\frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - \lambda_n \varphi_n = 0, \qquad \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2}\bigg|^{0,1} = \frac{d^3 \varphi_n}{dx^3}\bigg|^{0,1} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 q_n}{dt^2} + \lambda_n q_n = 0;$$

sind m_n die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\cos m \operatorname{Cof} m = 1,$$

so findet man

$$\lambda_n = a m_n^4,$$

und wenn man die Funktionen $\varphi_n x$ normiert,

$$\varphi_n x = \frac{(\sin m_n - \operatorname{Sin} m_n)(\cos m_n x + \operatorname{Cof} m_n x) - (\cos m_n - \operatorname{Cof} m_n)(\sin m_n x + \operatorname{Sin} m_n x)}{\operatorname{Tg} m_n - \sin m_n \operatorname{Cof} m_n}.$$

Aus den Gleichungen (3) folgt leicht

$$\int_0^1 \varphi_n \alpha \,.\, \varphi_p \alpha \, d\alpha = 0, \qquad n \gtrless p,$$

außerdem aber auch

$$\int_0^1 \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{a}{\lambda_n} \int_0^1 \varphi_n^{\mathrm{IV}} \alpha \,.\, d\alpha = \frac{a}{\lambda_n} [\varphi_n''' 1 - \varphi_n''' 0] = 0,$$

$$\int_0^1 \alpha \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{a}{\lambda_n} \int_0^1 \alpha \varphi_n^{\mathrm{IV}} \alpha \,.\, d\alpha = \frac{a}{\lambda_n} \left\{ \alpha \varphi_n''' \alpha \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi''' \alpha \,.\, d\alpha \right\}$$

$$= \frac{a}{\lambda_n} (\alpha \varphi_n''' \alpha - \varphi_n'' \alpha) \Big|_0^1 = 0.$$

Die Funktionen $\varphi_n x$ sind also nicht nur untereinander, sondern auch zu den Funktionen $\varphi_0 x$ und $\varphi_{01} x$ orthogonal. Man findet daher, indem man

$$u = q_0 \varphi_0 x + q_{01} \varphi_{01} x + \sum_n q_n \varphi_n x$$

setzt, für die lebendige Kraft des Stabes den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx = \tfrac{1}{2} \left[\dot{q}_0^2 + \dot{q}_{01}^2 + \sum_n \dot{q}_n^2 \right],$$

und die Bewegungsgleichungen (4) und (3) werden richtig erhalten, wenn man für die potentielle Energie den Ausdruck

$$V = \tfrac{1}{2} \sum_n \lambda_n q_n^2$$

ansetzt.

Um jetzt der allgemeinen Methode gemäß den Kern einer Integralgleichung zu erhalten, deren Lösungen die Funktionen

$\varphi_n x$ sind, lassen wir im Punkte ξ eine transversale Kraft von der Intensität Eins wirken; die von ihr bewirkte Verrückung u hat dann nach § 12 die Unstetigkeit, die durch die Gleichung

$$- a \frac{d^3 u}{d x^3}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1 \tag{5}$$

ausgedrückt wird. Ferner rührt an jeder Stelle von der Verrückung u eine transversale Kraft

$$- a \frac{d^4 u}{d x^4} d x$$

her; lassen wir nun außerdem die Kräfte

$$- (\varphi_0 x . \varphi_0 \xi + \varphi_{01} x . \varphi_{01} \xi) \, d x$$

wirken, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung die Gleichung:

$$a \frac{d^4 u}{d x^4} + \varphi_0 x . \varphi_0 \xi + \varphi_{01} x . \varphi_{01} \xi = 0 \tag{6}$$

oder

$$a \frac{d^4 u}{d x^4} + 1 + 12 (x - \tfrac{1}{2}) (\xi - \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Diese Differentialgleichung verbunden mit der Unstetigkeitsbeziehung (5) und den Grenzbedingungen

$$\frac{d^2 u}{d x^2}\Big|^{0,1} = \frac{d^3 u}{d x^3}\Big|^{0,1} = 0$$

ergibt durch elementare Rechnung folgenden Ausdruck:

$$a u = a K(x, \xi) = \frac{|x - \xi|^3}{12} - \frac{x^5 \xi + x \xi^5}{10} + \frac{x^4 \xi + x \xi^4}{4}$$
$$+ \frac{x^5 + \xi^5}{20} - \frac{x^4 + \xi^4}{6} - \frac{x^2 \xi + x \xi^2}{4} + \frac{x^3 + \xi^3}{12} + \frac{13}{35} x \xi$$
$$- \frac{11}{210} (x + \xi) + \frac{1}{105}.$$

Aus den Gleichungen (4), (5), (6) folgt mittels der Identität

$$v \frac{d^4 w}{d x^4} - w \frac{d^4 v}{d x^4} = \frac{d}{d x} \left[v \frac{d^3 w}{d x^3} - w \frac{d^3 v}{d x^3} + \frac{d w}{d x} \frac{d^2 v}{d x^2} - \frac{d v}{d x} \frac{d^2 w}{d x^2} \right]$$

die Integralgleichung

$$\varphi_n \xi = \lambda_n \int_0^1 K(x, \xi) \, \varphi_n x . d x$$

sowie die Beziehungen

$$\int_0^1 K(x, \xi) \, \varphi_0 x . d x = \int_0^1 K(x, \xi) \, \varphi_{01} x . d x = 0.$$

§ 18.

Die ausgearteten Fälle nach einer zweiten Methode. Systeme, deren Schwingungszahlen sich im Endlichen häufen.

Eine andere Methode, die ausgearteten Fälle zu behandeln, ergibt sich, wenn man davon ausgeht, daß die ersten Entwickelungen des § 13 gültig bleiben, wenn beliebig viele der Konstanten λ verschwinden. In den Entwickelungen nämlich, die von der Gleichung (1) aus zu dem Resultat (2) führen, treten überall nur die Nenner $\lambda_n - \beta^2$ auf; ist also β von Null und allen nicht verschwindenden Werten λ_n verschieden, so repräsentiert der Ausdruck

$$\mathfrak{u} = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \beta^2} \int \mathfrak{X} \varphi_n x \,.\, dx$$

den Raumfaktor einer erzwungenen Schwingung, und $\mathfrak{X}$ ist der Raumfaktor der wirkenden Kraft. Läßt man diese wieder in eine allein an der Stelle ξ wirkende Kraft von der Intensität Eins in der Weise ausarten, daß die Gleichung

$$\int \mathfrak{X} dx = 1$$

gilt, so geht die Größe $\mathfrak{u}$ in die Form

$$\mathfrak{u} = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n - \beta^2} \tag{1}$$

über, und diese kann als symmetrischer Kern einer Integralgleichung benutzt werden, deren Lösungen alle Funktionen $\varphi_n x$ sind, gleichviel ob die zugehörigen Werte λ_n verschwinden oder nicht. Denn offenbar gilt die Gleichung

$$\varphi_n \xi = (\lambda_n - \beta^2) \int \mathfrak{u} \varphi_n x dx,$$

und die Differenzen $\lambda_n - \beta^2$ sind alle von Null verschieden.

Der Nutzen dieser Bemerkung beruht darauf, daß die mechanische Bedeutung der Größe $\mathfrak{u}$ unter Umständen gestattet, sie explizite auszurechnen und dadurch die bilineare Reihe (1) zu summieren.

Wirkt z. B. auf die transerval schwingende Saite oder den longitudinal schwingenden Stab im Punkte $x = \xi$ die Kraft von der Intensität $\cos(\beta t + \gamma)$, und soll die Verrückung u in einen Raum- und Zeitfaktor nach der Gleichung

$$u = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

zerfallen, so muß nach § 10 (3) die Gleichung

$$\cos(\beta t + \gamma) - \frac{d\mathfrak{u}}{dx}\cos(\beta t + \gamma)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

bestehen. Ferner gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2} + \beta^2\mathfrak{u} = 0,$$

und die Grenzbedingungen sind im Falle der Saite

$$\mathfrak{u}\Big|^{0,1} = 0,$$

im Falle des Stabes

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\Big|^{0,1} = 0.$$

Die diese Forderungen erfüllenden Größen $\mathfrak{u}$ sind aber schon in § 1 bestimmt; man findet bei der Annahme $x > \xi$ für die Größe $\mathfrak{u}$ im Falle der Saite

$$\frac{\operatorname{Sin}\beta(1-x)\operatorname{Sin}\beta\xi}{\beta\operatorname{Sin}\beta},$$

im Falle des Stabes

$$\frac{\operatorname{Cof}\beta(1-x)\operatorname{Cof}\beta\xi}{\beta\operatorname{Sin}\beta}, \tag{2}$$

und bei der Annahme $x < \xi$ sind die Buchstaben x und ξ zu vertauschen.

Die sämtlichen beim Stabe auftretenden Eigenfunktionen, auch die Konstante, der kein Glied in der potentiellen Energie entspricht, sind also Eigenfunktionen des Kernes (2), und der Eigenfunktion 1 entspricht der Eigenwert $-\beta^2$, der Eigenfunktion $\sqrt{2}\cos n\pi x$ der Eigenwert $\pi^2 n^2 - \beta^2$.

Hier möge eine Betrachtung über ausgeartete Kerne Platz finden, die von Fredholm herrührt und von Schaefer auf die Theorie der Dispersion und der Serienspektren angewandt ist.

Sei $K(x, \alpha)$ einer dieser Kerne, für den die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\, d\alpha = 0$$

oder lieber, indem eine Konstante hinzugefügt wird, die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \alpha)\, d\alpha = a \tag{3}$$

gilt, in der a eine negative Konstante bedeutet. Sei ferner Θx die Verrückung an der durch x bezeichneten Stelle eines linearen, von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckten Massensystems $\mathfrak{M}$ und werde angenommen, daß das Massenelement $d\alpha$ auf das Element dx die Kraft

$$K(x, \alpha)[\Theta x - \Theta\alpha]\, dx\, d\alpha$$

ausübt. Dann wirkt auf das Element dx die Gesamtkraft

$$dx \int_0^1 K(x, \alpha)[\Theta x - \Theta\alpha]\, d\alpha,$$

und man erhält die Bewegungsgleichung

$$dx\, \frac{\partial^2 \Theta x}{\partial t^2} = dx \int_0^1 K(x, \alpha)\, [\Theta x - \Theta\alpha]\, d\alpha.$$

Soll das System harmonisch schwingen, so hat man etwa

$$\Theta x = \varphi x \,.\cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen und erhält sofort

$$-\beta^2 \varphi x = \int_0^1 K(x, \alpha)\, [\varphi x - \varphi\alpha]\, d\alpha,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$-\beta^2 \varphi x = a\varphi x - \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

$$(4) \qquad \varphi x = \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

wobei zu setzen ist

$$\lambda = \frac{1}{a + \beta^2}, \quad \beta^2 = -a + \frac{1}{\lambda}.$$

Die Eigenwerte der Gleichung (4) können sich nun nach § 8 nur im Unendlichen häufen; sind ihrer unendlich viele, wie in den betrachteten Beispielen, so erhält das Massensystem $\mathfrak{M}$ unendlich viele Schwingungszahlen β, die sich in der Nähe des Wertes $\sqrt{-a}$ häufen.

Auch die erzwungenen Schwingungen dieses Systems sind leicht zu übersehen. Wirkt nämlich auf das Element dx die Kraft

$$dx \,.\, \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma)$$

und versuchen wir,

$$\Theta x = \mathfrak{u} \cos(\beta t + \gamma)$$

zu setzen, so hat die Bewegungsgleichung die folgende Form:

$$dx\,\frac{\partial^2 \Theta x}{\partial t^2} = dx\int_0^1 K(x, \alpha)\,[\Theta x - \Theta \alpha]\,\alpha + dx \,.\, \mathfrak{X} \cos(\beta t + \gamma);$$

sie ergibt für $\mathfrak{u}$ die Gleichung

$$(\beta^2 + a)\,\mathfrak{u} = \int_0^1 K(x, \alpha)\,\mathfrak{u}(\alpha)\,d\alpha + \mathfrak{X},$$

also eine nichthomogene Integralgleichung, die durch die Schmidtsche Formel nach § 13 sofort gelöst werden kann:

$$\mathfrak{u} = \lambda \mathfrak{X} + \lambda^2 \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int_0^1 \mathfrak{X} \,.\, \varphi_n x\, dx.$$

Dritter Abschnitt.

Integralgleichungen und die Sturm-Liouvillesche Theorie.

§ 19.

Die Sturm-Liouvilleschen Funktionen.

Die analytischen Hilfsmittel, die wir in den letzten Paragraphen kennen gelernt haben, ermöglichen uns, ein Problem allgemeinen Charakters in Angriff zu nehmen, das durch die ihm gewidmeten bewundernswerten Arbeiten von Sturm und Liouville besonders wichtig geworden ist.

Erstreckt sich ein die Wärme leitender heterogener Stab längs der Abszissenachse von $x = 0$ bis $x = 1$ und ist g die spezifische Wärme, k die innere Leitfähigkeit, l das seitliche Strahlungsvermögen, endlich t die Zeit, so erfüllt die Temperatur u die Differentialgleichung

$$g \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) - l u$$

und die Grenzbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h u \Big|^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + H u \Big|^1 = 0,$$

in denen h und H die Werte der äußeren Leitfähigkeit der Endquerschnitte, also positive Konstante, bedeuten. Wird einer dieser Querschnitte oder beide auf der konstanten Temperatur Null gehalten, so erhält man eine der Grenzbedingungen

$$u\Big|^0 = 0, \quad u\Big|^1 = 0$$

oder beide, auf die man auch dadurch kommen kann, daß man eine der Konstanten h, H oder beide unendlich werden läßt.

Setzt man

$$u = V e^{-\lambda t},$$

wobei V von t unabhängig und λ eine Konstante sei, so erhält man die Aufgabe, die Größe V aus der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (g\lambda - l)V = 0 \tag{1}$$

und den Grenzbedingungen

$$k\frac{dV}{dx} - hV\Big|^{0} = 0, \quad k\frac{dV}{dx} + HV\Big|^{1} = 0 \tag{2}$$

zu bestimmen, von denen auch eine oder beide in die Formen

$$V\Big|^{0} = 0, \quad V\Big|^{1} = 0$$

ausarten können.

Einen speziellen Fall dieser Randwertaufgabe erhält man bei der Theorie der heterogenen Saite, deren Bewegungsgleichung, wenn u die Verrückung bedeutet, in der Form

$$g\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

anzusetzen ist, und wenn man eine der Gleichungen

$$u = V\cos\sqrt{\lambda}t, \qquad u = V\sin\sqrt{\lambda}t$$

ansetzt, genau auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + g\lambda V = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$V\Big|^{0} = V\Big|^{1} = 0$$

zurückgeführt wird.

Man sieht, daß hier wie oben bei der Wärmeleitungsaufgabe die Größen g, k ihrer physikalischen Bedeutung nach auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ positiv sind, und daß l jedenfalls nicht negativ ist. Außerdem darf noch, ohne daß die Aufgabe spezialisiert wird, $g = 1$ gesetzt werden. Denn man kann die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{d}{g\,dx}\left(gk\frac{dV}{g\,dx}\right) + \left(\lambda - \frac{l}{g}\right)V = 0$$

schreiben; führt man dann die Größe

$$x_1 = \int_0^x g\,dx : \int_0^1 g\,dx$$

als neue Variable ein, und setzt

$$gk : \left[\int_0^1 g\,dx\right]^2 = k_1, \quad \frac{l}{g} = l_1,$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{d}{dx_1}\left(k_1 \frac{dV}{dx_1}\right) + (\lambda - l_1)\,V = 0,$$

in der die Größe k_1 und l_1 dieselben Eigenschaften haben, wie sie oben für k und l gefordert wurden, und die Grenzbedingungen (2) behalten ihre Form, so daß jetzt der Index 1 wieder weggelassen werden kann.

Um die aufgestellte Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung zurückzuführen, schließen wir zunächst den Fall $h = H = 0$ aus und bewirken dadurch, daß die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dy}{dx}\right) - ly = 0 \tag{3}$$

kein Integral besitzt, das auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$, dem Grundgebiet, wie wir wieder sagen wollen, mit seiner Ableitung stetig ist und beide Randbedingungen erfüllt. Denn wenn z. B. h nicht verschwindet, ist von den Größen dy/dx und y an der Stelle $x = 0$ die erste von Null verschieden, etwa positiv, die zweite nicht negativ, und daraus folgt, daß die Größe

$$z = \frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx},$$

mit positiven Werten beginnend, in den nicht positiven Wert $-H$ übergeht, wenn man x von 0 bis 1 laufen läßt. Nun kann die Größe y im Grundgebiete für positive Werte von x nicht verschwinden, da die Größen $k\,dy/dx$ und y bei kleinen Werten von x mit positiven Werten beginnen, und erstere der Gleichung (3) zufolge nicht abnehmen kann, solange y positiv ist; verschwände aber y im Gebiet

$$0 < x \leqq 1,$$

so müßte dy/dx, mithin auch $k\,dy/dx$ vorher den Wert Null erreicht haben, was unmöglich ist, da die letztere Größe bei positiven Werten von y nicht abnimmt.

Somit kann die Größe z ihr Vorzeichen im Innern des Grundgebietes nicht ändern und an der Grenze $x = 1$ nicht in einen negativen Wert oder die Null übergehen.

Der durchgeführte Beweis zeigt zugleich, daß im Falle $h > 0$ eine die erste Grenzbedingung (2) erfüllende Lösung der Gleichung (1) im Innern des Grundgebietes nicht verschwindet. Dies folgt aber auch im Falle $h = 0$, wenn y für die Stelle $x = 0$ z. B. positiv genommen wird, daraus, daß die Größe $k\,dy/dx$ im allgemeinen mit x wächst, also positiv wird. Etwas anders würde man schließen, wenn l identisch verschwände. Dann wäre $k\,dy/dx$ konstant, hätte also, der ersten Randbedingung im Falle $h = 0$ zufolge, den Wert Null; y wäre konstant und es wäre wiederum unmöglich, die zweite Randbedingung zu erfüllen, wenn H nicht verschwindet.

§ 20.

Übergang zu den Integralgleichungen.

Es seien nun φx und ψx zwei im Grundgebiet stetige Lösungen der Gleichung (3) des § 19, von denen die eine, etwa φx, die erste Grenzbedingung erfüllt, die andere die zweite. Dann kann man annehmen, es gelte die Identität

$$k\left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}\right) = 1,$$

da ihre linke Seite jedenfalls konstant ist, und ein konstanter Faktor in jeder der Größen φ und ψ zur Verfügung bleibt. Verschwände der konstante Wert dieser Größe, so wären φ und ψ nur durch einen konstanten Faktor unterschieden; die Gleichung (3) des § 19 hätte also eine Lösung, die beide Grenzbedingungen erfüllte, was nach § 19 nur in dem ausgearteten Falle $h = H = 0$ eintreten kann.

Sehen wir von diesem ab, so kann der Kern der gesuchten Integralgleichung gebildet werden, indem man, wenn $x \leqq \xi$ ist, setzt

$$K(x, \xi) = \varphi x \,.\, \psi \xi,$$

und, wenn $x \geqq \xi$ ist,

$$K(x, \xi) = \varphi \xi \,.\, \psi x.$$

Die so definierte Größe erfüllt nämlich, wenn wir wie gewöhnlich

$$K'(x, \xi) = \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$$

setzen, die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d[k K'(x, \xi)]}{dx} - l K(x, \xi) = 0$$

und die beiden Grenzbedingungen (2) des § 19, und ist an der Stelle $x = \xi$ singulär, so daß die Gleichung

$$k K'(x, \xi) \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

besteht.

Versteht man nun unter fx eine beliebige, im Grundgebiet stückweise stetige Funktion, unter

$$Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

eine quellenmäßig dargestellte Funktion, so findet man durch dieselbe Rechnung, wie sie in § 2 zu ähnlichem Zweck angewandt wurde,

$$F'x = \int_0^1 K'(x, \alpha) f\alpha . d\alpha,$$

$$\frac{d(kF'x)}{dx} = \int_0^1 \frac{d[kK'(x,\alpha)]}{dx} f\alpha . d\alpha + k . fx . [K'(x, x-0) - K'(x, x+0)];$$

da nun die expliziten Ausdrücke der Funktion K die Gleichungen

$$K'(x, x-0) = K'(x+0, x),$$
$$K'(x, x+0) = K'(x-0, x)$$

ergeben, so folgt aus der erhaltenen Gleichung für alle Stellen, an denen fx stetig ist, die Identität

$$(2) \qquad \frac{d(kF'x)}{dx} - lFx = -fx.$$

An den Unstetigkeitsstellen ist das Symbol F'' zunächst nicht definiert. Man erkennt ferner aus der angegebenen Form der Größe F', daß die Funktion F die Randbedingungen der Größen $K(x, \alpha)$ und V erfüllt.

Ist umgekehrt die Funktion Φx auf dem Grundgebiet mit ihrer ersten Ableitung stetig, während die zweite Ableitung stückweise stetig ist, und erfüllt sie die Grenzbedingungen, so ist die Funktion

$$fx = -\frac{d(k\Phi' x)}{dx} + l\Phi x$$

stückweise stetig, und man kann mit ihr die vorher eingeführte Größe Fx bilden. Dann ergibt sich, indem man diese Gleichung mit $K(x, \xi)$ multipliziert und zu der mit Φx multiplizierten Gleichung (1) addiert,

$$\frac{d}{dx}\left[k(\Phi x \,.\, K'(x,\xi) - K(x,\xi)\,\Phi' x)\right] = K(x,\xi) f x;$$

wenn man sodann über das Grundgebiet integriert, die allgemeine Integrationsregel des § 2 benutzt und bedenkt, daß die Größe in eckigen Klammern an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, weil die Funktion Φx die Grenzbedingungen erfüllt, so erhält man folgendes Resultat:

$$(3) \qquad k\,\Phi x \,.\, K'(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \Phi \xi = \int_0^1 K(x,\xi) f x \,.\, dx;$$

die Funktion Φ kann also quellenmäßig dargestellt werden.

Ein spezieller Fall dieser Größe ist V, die Lösung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems, wenn eine solche existiert. Für sie gilt die Gleichung

$$-\frac{d(kV')}{dx} + l\,V = \lambda\,V;$$

ersetzt man demgemäß fx durch $\lambda\,V$, so ergibt sich aus der Gleichung (3)

$$V\xi = \lambda \int_0^1 V K(x,\xi)\,dx,$$

womit das Randwertproblem auf eine homogene Integralgleichung zurückgeführt ist.

Daß umgekehrt jede Lösung der Integralgleichung auch eine Lösung des Randwertproblems ist, folgt sofort daraus, daß die rechte Seite der Integralgleichung quellenmäßig dargestellt erscheint, woraus sich nach der zwischen f und F geltenden Beziehung (2) ergibt

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) - l\,V = -\lambda\,V;$$

außerdem erfüllt jede Lösung der Integralgleichung ebenso wie jede quellenmäßige Funktion die Grenzbedingungen. Da nun beim Randwertproblem zu jedem Eigenwert offenbar nur eine bis auf konstante Faktoren bestimmte Eigenfunktion gehört, so gilt dasselbe für die Integralgleichung, so daß die in § 8 erörterten Komplikationen ausgeschlossen sind.

Diese Entwickelungen sind im Falle $h = H = 0$ zu modifizieren, wenn das durch die Grenzbedingung

$$y'\Big|^{0} = 0$$

bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0 \tag{4}$$

von selbst auch die zweite Grenzbedingung

$$y'\Big|^1 = 0$$

erfüllt. Sei $\varphi_0 x$ dieses Integral, das als eine stationäre Temperatur des Stabes angesehen werden kann, und werde die Gleichung

$$\int_0^1 (\varphi_0 \alpha)^2 d\alpha = 1$$

vorausgesetzt. Dann ist nach § 16 als Kern der Integralgleichung die stationäre Temperatur u zu nehmen, die durch eine an der Stelle $x = \xi$ wirkende Wärmequelle hervorgerufen wird, wenn in jedem Element dx die Wärmemenge $-dx \,.\, \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi$ erzeugt wird. Aus diesen Festsetzungen ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) - lu - \varphi_0 x \,.\, \varphi_0 \xi = 0 \tag{5}$$

mit den Grenzbedingungen

$$\frac{du}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

und der Unstetigkeitsbedingung

$$k\frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1,$$

wodurch die Größe u offenbar nur bis auf einen Summanden von der Form $c\varphi_0 x$ bestimmt ist, in dem c eine Konstante bedeutet. Diese können wir benutzen, um die Gleichung

$$\int_0^1 u\,\varphi_0 x \,.\, dx = 0 \tag{6}$$

zu erwirken.

Multipliziert man jetzt die Gleichung (5) mit φx, die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\varphi}{dx}\right) + (\lambda - l)\,\varphi = 0 \tag{7}$$

mit u und subtrahiert, so ergibt sich durch die oben gebrauchten Schlüsse, indem man

$$\frac{d\varphi}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

setzt,

$$k\left(\varphi\frac{du}{dx}-u\frac{d\varphi}{dx}\right)\Big|_0^1+k\left(\varphi\frac{du}{dx}-u\frac{d\varphi}{dx}\right)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}$$
$$-\lambda\int_0^1 u\varphi\,dx-\varphi_0\xi\int_0^1\varphi_0 x\,.\,\varphi\,dx=0,$$

oder

$$\varphi\xi-\lambda\int_0^1 u\varphi\,dx-\varphi_0\xi\int_0^1\varphi\,.\,\varphi_0 x\,.\,dx=0. \tag{8}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (4) und (7), in deren ersterer y durch $\varphi_0 x$ ersetzt ist,

$$\lambda\int_0^1\varphi\varphi_0\,dx=0,$$

also, da wir uns auf von Null verschiedene Werte λ beschränken,

$$\int_0^1\varphi\varphi_0\,dx=0,$$

und indem man

$$u=K(x,\xi)$$

setzt, geht die Gleichung (8) in folgende über:

$$\varphi\xi=\lambda\int K(x,\xi)\,\varphi x\,.\,dx.$$

Daß die Größe u in den beiden Argumenten symmetrisch ist, folgt aus den Gleichungen

$$\frac{d[kK'(x,\xi)]}{dx}-lK(x,\xi)-\varphi_0 x\,.\,\varphi_0\xi=0,$$
$$\frac{d[kK'(x,\eta)]}{dx}-lK(x,\eta)-\varphi_0 x\,.\,\varphi_0\eta=0$$

nach einer in § 2 benutzten Methode auf Grund der Relation (6), indem man die erste dieser Gleichungen mit $K(x,\eta)$, die zweite mit $K(x,\xi)$ multipliziert und die Differenz ihrer linken Seiten über das Grundgebiet integriert.

Bei den quellenmäßigen Funktionen tritt insofern etwas Neues auf, als die oben eingeführte Funktion Φx noch die Bedingung

$$\int_0^1\Phi x\,.\,\varphi_0 x\,.\,dx=0 \tag{9}$$

erfüllen muß, um quellenmäßig dargestellt werden zu können; dann ist nämlich $\Phi-F$ eine die Grenzbedingungen

$$\frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

erfüllende Lösung der Gleichung (4), also in der Form $C.\varphi_0 x$ darstellbar. Da nun die Gleichung (6), wenn man nach ξ über das Grundgebiet integriert und die Integrationen vertauscht, die Beziehung

$$\int_0^1 Fx.\varphi_0 x.dx = 0$$

ergibt, so folgt aus der Gleichung (9):

$$\int_0^1 (\Phi - F)\varphi_0 x.dx = \int_0^1 C(\varphi_0 x)^2 dx = 0, \; C = 0,$$

womit die Größe

$$\Phi x = Fx$$

quellenmäßig dargestellt ist.

Auf eine andere, theoretisch einfachere Weise kann der ausgeartete Fall erledigt werden, indem man die Methode des § 18 zum Muster nimmt. Man versteht unter c eine solche Konstante, daß die Randwertaufgabe

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - (l-c)y = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0$$

keine Lösung besitzt; dann kann die vorgelegte Aufgabe in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) + [\lambda' - (l-c)]y = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|^{0,1} = 0.$$

Die Eigenwerte λ' stehen zu denen des ursprünglichen Problems in der Beziehung

$$\lambda' + c = \lambda;$$

die neue Aufgabe kann aber nach derselben Methode behandelt werden, die oben auf die nicht ausgearteten Fälle angewandt wurde, da keiner der Werte λ' verschwindet.

§ 21.

Integrale linearer Differentialgleichungen als Funktionen von Parametern.

Um die Frage nach der Lösbarkeit des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems zu untersuchen, gehen wir von der Bemerkung aus, daß, wenn man allgemein

$$\mathfrak{L}y = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly$$

setzt und unter λ eine willkürliche Konstante versteht, die Integrale der nichthomogenen Differentialgleichung

$$\mathfrak{L}\psi x + \lambda . \psi x + fx = 0, \tag{1}$$

die mit ihren ersten Ableitungen stetig sind und die Grenzbedingungen des Randwertproblems erfüllen, zugleich Lösungen der nichthomogenen Integralgleichung

$$\psi x = Fx + \lambda \int_0^1 K(x, \alpha)\,\psi\alpha . d\alpha \tag{2}$$

sind, wenn die nach § 19 gleichbedeutenden Beziehungen

$$\mathfrak{L}Fx = -fx, \quad Fx = \int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha . d\alpha \tag{3}$$

vorausgesetzt werden, und umgekehrt. Denn die Größe ψx ist nach § 20 quellenmäßig darstellbar, und entsteht, wie die Gleichung (1) zeigt, aus Fx, wenn man fx durch $fx + \lambda\psi x$ ersetzt. Demgemäß gilt die Gleichung

$$\psi x = \int_0^1 K(x, \alpha)\,(f\alpha + \lambda\,\psi\alpha)\,d\alpha$$

oder die Integralgleichung (2), die umgekehrt nach § 20 auch die Gleichung (1) nach sich zieht und den Schluß erlaubt, daß die Größe ψx die Grenzbedingungen erfüllt.

Für die weiteren Schlüsse ist nun grundlegend, daß ψx ein Quotient zweier ganzer Funktionen, d. h. beständig konvergenter Potenzreihen von λ ist, und zwar auch dann, wenn fx ein Polynom des Arguments λ ist. Der Nenner dieses Quotienten ist von fx unabhängig und definiert, gleich Null gesetzt, die Eigenwerte des Kerns $K(x, \xi)$.

Um dies zu zeigen, werde angenommen, in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

seien P und Q Polynome eines Parameters λ und stetig für die reellen Werte der Variablen x von $x = 0$ bis $x = 1$. Dann kann ein Integral y durch die von λ unabhängigen Werte y_0, y'_0 mittels der Gleichungen

$$y\Big|^{0} = y_0, \qquad \frac{dy}{dx}\Big|^{0} = y'_0$$

definiert und durch die Reihe

$$R = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots$$

dargestellt werden, wobei gesetzt ist

$$(4) \qquad y'_{n+1} = y'_0 - \int_0^x (P y'_n + Q y_n)\, dx, \qquad y_{n+1} = y_0 + \int_0^x y'_{n+1}\, dx.$$

Die hiermit gegebenen Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} y'_{n+1} - y'_n &= -\int_0^x [P(y'_n - y'_{n-1}) + Q(y_n - y_{n-1})]\, dx, \\ y_{n+1} - y_n &= \int_0^x (y'_{n+1} - y'_n)\, dx \end{aligned}$$

zeigen nämlich unmittelbar folgendes. Beschränkt man x auf die Strecke von 0 bis 1 und λ auf ein beliebig begrenztes Gebiet $\mathfrak{G}$ in der Ebene der komplexen Zahlen, so gibt es eine von x und λ unabhängige positive Größe A von der Beschaffenheit, daß allgemein die Beziehungen

$$(6) \qquad |y'_n - y'_{n-1}| < (2A)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad |y_n - y_{n-1}| < (2A)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

bestehen. Es genügt dazu, A so zu wählen, daß dies für den Fall $n = 1$ gilt und allgemein für die bezeichneten Gebiete der Variablen x und λ die Ungleichungen

$$A > |P|, \qquad A > |Q|$$

bestehen; dann folgen die Beziehungen (6) aus den Gleichungen (5) durch den Schluß von n auf $n + 1$, und sie zeigen, daß die Reihe R bezüglich beider Variablen x und λ gleichmäßig konvergiert, mithin im Gebiet $\mathfrak{G}$ eine reguläre analytische Funktion von λ darstellt. Dasselbe gilt von der Reihe

$$R' = y'_0 + (y'_1 - y'_0) + (y'_2 - y'_1) + \cdots,$$

und die erste Gleichung (5) ergibt die Beziehung

$$R' = y'_0 - \int_0^x (PR' + QR)\, dx,$$

d. h. R ist wirklich eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

und die Gleichungen (4) ergeben

$$R\Big|^0 = y_0, \quad R'\Big|^0 = y_0'.$$

Seien nun w_1, w_2 zwei Lösungen der Gleichung

$$\mathfrak{L}y + \lambda y = 0,$$

die auf eine von λ unabhängige Weise definiert sind, etwa durch die Gleichungen

$$w_1\Big|^0 = \frac{dw_2}{dx}\Big|^0 = 0, \quad w_2\Big|^0 = \frac{dw_1}{dx}\Big|^0 = 1.$$

Sie sind nach dem soeben erhaltenen Resultat ganze Funktionen von λ; und eine Lösung der Gleichung

(7) $$\mathfrak{L}y + \lambda y + fx = 0$$

ist

$$p = -w_2\int\limits_0^x \frac{w_1 fx \, . \, dx}{\varDelta} + w_1\int\limits_0^x \frac{w_2 fx \, . \, dx}{\varDelta},$$

wobei

$$\varDelta = w_1\frac{dw_2}{dx} - w_2\frac{dw_1}{dx}$$

gesetzt ist. Die Gleichungen

$$\mathfrak{L}w_1 + \lambda w_1 = 0, \quad \mathfrak{L}w_2 + \lambda w_1 = 0$$

ergeben durch bekannte Schlüsse

$$k\varDelta = \text{const.} = -k\Big|^0.$$

Da nun die Größen w_1 und w_2 als besondere Fälle der Reihe R gleichmäßig bezüglich beider Größen x und λ konvergieren, wenn letztere dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört; da ferner die Größe $\varDelta$ von λ frei ist, so sind auch die in p auftretenden Integrale in jedem Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre, also ganze Funktionen von λ, und dasselbe gilt von p.

Das allgemeine Integral der Gleichung (7) kann in der Form

$$y = p + C_1 w_1 + C_2 w_2$$

geschrieben werden, wobei C_1 und C_2 von x unabhängige Größen sind; also ist in dieser Form auch die Größe ψx enthalten. Da nun offenbar die Gleichungen

$$p\Big|^0 = \frac{dp}{dx}\Big|^0 = 0$$

gelten, so ergeben sich bei endlichen Werten von h und H aus den Grenzbedingungen § 19 (2), denen die Größe ψx unterworfen wird, die Gleichungen

$$(8) \qquad C_1\left(k\frac{dw_1}{dx} - hw_1\right) + C_2\left(k\frac{dw_2}{dx} - hw_2\right)\Big|^0 = 0,$$

$$C_1\left(k\frac{dw_1}{dx} + Hw_1\right) + C_2\left(k\frac{dw_2}{dx} + Hw_2\right)\Big|^1 = -k\frac{dp}{dx} - Hp\ \Big|^1.$$

Ist dagegen einer der Werte h und H unendlich oder sind es beide, so wird eine oder jede der hingeschriebenen Gleichungen durch eine der folgenden ersetzt:

$$C_1 w_1 + C_2 w_2 \Big|^0 = 0,$$

$$C_1 w_1 + C_2 w_2 \Big|^1 = -p\Big|^1.$$

In jedem Falle ist die Determinante der Koeffizienten von C_1 und C_2 in den beiden geltenden Gleichungen ebenso wie w_1 und w_2 eine ganze Funktion von λ, die wir $\mathfrak{f}\lambda$ nennen. Da nun p als Funktion von λ dieselbe Beschaffenheit hat, so ist gezeigt, daß in der Tat

$$\psi x = \frac{W}{\mathfrak{f}\lambda}$$

gesetzt werden kann, wobei Zähler und Nenner ganze Funktionen von λ sind.

Ersetzt man übrigens in den Gleichungen (8) die rechten Seiten durch Null, so erhält man die Grenzbedingungen für die Größe

$$V = C_1 w_1 + C_2 w_2;$$

die Eigenwerte der Randwertaufgabe sind also Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{f}\lambda = 0.$$

§ 22.

Anwendung der nichthomogenen Integralgleichung; Existenz des ersten Eigenwertes.

Die nichthomogene Integralgleichung

$$\psi x = Fx + \lambda \int_0^1 K(x, \alpha_1)\, \psi\alpha_1 . d\alpha_1,$$

leistet dadurch einen wichtigen Dienst, daß sie die Entwickelung der Größe ψx nach steigenden Potenzen von λ kennen lehrt. Setzt man nämlich auf ihrer rechten Seite

$$\psi\alpha_1 = F\alpha_1 + \lambda \int_0^1 K(\alpha_1, \alpha_2)\, \psi\alpha_2 . d\alpha_2,$$

so ergibt sich

$$\psi x = Fx + \lambda \int_0^1 K(x, \alpha_1) F\alpha_1 . d\alpha_1$$

$$+ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 K(x, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha_2) \psi\alpha_2 . d\alpha_2 \, d\alpha_1,$$

und hieraus folgt durch die Substitution

$$\psi\alpha_2 = F\alpha_2 + \lambda \int_0^1 K(\alpha_2, \alpha_3) \psi\alpha_3 . d\alpha_3$$

die Gleichung

$$\psi x = Fx + \lambda \int_0^1 K(x, \alpha_1) F\alpha_1 . d\alpha_1$$

$$+ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 K(x, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha_2) F\alpha_2 . d\alpha_2 \, d\alpha_1$$

$$+ \lambda^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(x, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha_2) K(\alpha_2, \alpha_3) \psi\alpha_3 . d\alpha_3 \, d\alpha_2 \, d\alpha_1.$$

Da nun der im vorigen Paragraphen erhaltene Ausdruck der Funktion ψx zeigt, daß sie zwischen festen Grenzen bleibt, wenn x die Strecke von 0 bis 1 durchläuft und λ auf ein endliches Gebiet beschränkt wird, das keine Nullstelle des Nenners $\mathfrak{f}\lambda$ enthält, z. B. auf einen hinreichend kleinen Kreis um den Nullpunkt, so zeigt die erhaltene Gleichung und diejenigen, die das eingeschlagene Verfahren, wenn man es fortsetzt, ergibt, daß die Koeffizienten in der Entwickelung der Größe ψx durch folgende Gleichungen definiert werden:

$$\psi x = F_0 + F_1 \lambda + F_2 \lambda^2 + \cdots,$$

$$F_0 = Fx,$$

$$F_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(x, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha_2) \ldots K(\alpha_{n-1}, \alpha_n) F\alpha_n . d\alpha_n \ldots d\alpha_2 \, d\alpha_1.$$

Aus diesen Werten der Koeffizienten ergibt sich eine wichtige Formel, indem wir

$$F_m = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(x, \beta_1) \ldots K(\beta_{m-1}, \beta_m) F\beta_m . d\beta_m \ldots d\beta_1$$

setzen und das Integral

$$\int_0^1 F_m F_n \, dx$$

als $(m+n+1)$faches Integral schreiben, in dem offenbar die Reihenfolge der Integrationen gleichgültig ist:

$$\int_0^1 F_m F_n \, dx \tag{1}$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x, \alpha_1) \ldots K(\alpha_{n-1}, \alpha_n) K(x, \beta_1) \ldots K(\beta_{m-1}, \beta_m) \, dx \, d\alpha_1 \ldots d\beta_m$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(\beta_1, x) K(x, \alpha_1) \ldots K(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \, dx \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n K(\beta_1, \beta_2) \ldots$$
$$\times K(\beta_{m-1}, \beta_m) \, d\beta_2 \ldots d\beta_m \, d\beta_1.$$

Da nun offenbar

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 K(\beta_1, x) K(x, \alpha_1) \ldots K(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \, dx \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = F_{n+1}\beta_1,$$

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 K(\beta_1, \beta_2) \ldots K(\beta_{m-1}, \beta_m) \, d\beta_2 \ldots d\beta_m = F_{m-1}\beta_1,$$

so erhält man aus der Gleichung (1), wenn $m > 0$, das Resultat

$$\int_0^1 F_m x \, . \, F_n x \, . \, dx = \int_0^1 F_{n+1}\beta_1 \, . \, F_{m-1}\beta_1 \, . \, d\beta_1$$

oder kurz

$$\int_0^1 F_m F_n \, dx = \int_0^1 F_{m-1} F_{n+1} \, dx,$$

so daß diese Größe nur von der Summe der Zeiger $m+n$ abhängt und durch W_{m+n} bezeichnet werden kann.

Speziell gelten die Gleichungen:

$$W_{2n+2} = \int_0^1 F_{n+1}^2 \, dx, \quad W_{2n-2} = \int_0^1 F_{n-1}^2 \, dx,$$

$$W_{2n} = \int_0^1 F_{n-1} F_{n+1} \, dx = \int_0^1 F_n^2 \, dx,$$

und keine dieser Größen ist negativ. Dasselbe gilt von dem Integral

$$\int_0^1 (pF_{n-1} + qF_n)^2 \, dx = W_{2n-2} p^2 + 2 \, W_{2n} pq + W_{2n+2} q^2,$$

wenn p, q beliebige reelle Konstante bedeuten; daraus folgt die Ungleichung

(2) $$W_{2n}^2 - W_{2n-2}\, W_{2n+2} \leqq 0.$$

Die Größen W_{2m} müssen hiernach sämtlich verschwinden oder sämtlich positiv sein, denn keine von ihnen ist negativ und W_{2n} verschwindet sowohl mit W_{2n-2} wie mit W_{2n+2} zugleich. Ist also die Größe

$$W_0 = \int_0^1 F^2 dx$$

von Null verschieden, d. h. verschwindet die Funktion Fx nicht identisch, so sind alle Größen W_{2n} positiv und die Beziehung (2) ergibt

(3) $$\frac{W_2}{W_0} \leqq \frac{W_4}{W_2} \leqq \frac{W_6}{W_4} \leqq \cdots$$

Dies Resultat ist für uns deshalb von großer Bedeutung, weil es zeigt, daß ψx keine ganze Funktion von λ sein kann, es sei denn, daß F identisch verschwände. Da nämlich die Größe $|\psi x|$ unter einer festen Grenze liegt, wenn λ auf ein endliches von Eigenwerten freies Gebiet beschränkt wird, während x das Intervall von 0 bis 1 durchläuft, so ergibt eine Cauchysche Formel, wenn wir das komplexe Argument λ am Funktionszeichen ψ sichtbar machen und nach z über einen Kreis $|z| =$ const. integrieren,

$$\begin{aligned}\psi(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi(x, z)\,dz}{z - \lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu}^{0,n} \lambda^\nu \int \frac{\psi(x, z)\,dz}{z^{\nu+1}} + \frac{\lambda^{n+1}}{2\pi i}\int \frac{\psi(x, z)\,dz}{z^{n+1}(z - \lambda)}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, daß wenn λ auf einen Kreis beschränkt wird, der mit dem Integrationskreis konzentrisch und kleiner als er ist, die Reihe

$$\psi(x, \lambda) = F + F_1\lambda + F_2\lambda^2 + \cdots$$

bezüglich der Variablen x gleichmäßig konvergiert. Dasselbe gilt von der Reihe $F.\psi x$, die man hiernach gliedweise integrieren kann:

$$\begin{aligned}\int_0^1 F.\psi x.dx &= \int_0^1 F^2 dx + \lambda\int_0^1 F F_1\, dx + \cdots \\ &= W_0 + W_1\lambda + W_2\lambda^2 + \cdots\end{aligned}$$

Wäre also die Reihe ψx bezüglich der Variablen λ beständig konvergent, so müßte dasselbe von der zuletzt erhaltenen Reihe, mithin auch von der in ihr enthaltenen

$$W_0 + W_2\lambda^2 + W_4\lambda^4 + \cdots$$

gelten. Dem widersprechen aber die Beziehungen (3), die zeigen, daß in der letzten Reihe die Quotienten eines Gliedes durch das vorhergehende, d. h. die Größen

$$\frac{W_2}{W_0}\lambda^2, \quad \frac{W_4}{W_2}\lambda^2, \ldots$$

bei angemessener Wahl der Größe λ größer als Eins sind.

Damit ist gezeigt, daß ψx keine ganze Funktion von λ sein kann. Diese Größe ist aber der Quotient zweier ganzer Funktionen, von denen $\mathfrak{f}\lambda$ der Nenner ist. Dieser muß also mindestens für einen endlichen Wert von λ verschwinden, und der Kern $K(x, \xi)$ hat also mindestens einen Eigenwert.

Der Grundgedanke des durchgeführten Beweises läßt sich mechanisch einigermaßen kennzeichnen, wenn man, wie in § 19 angedeutet ist, das Sturm-Liouvillesche Problem mit dem der Schwingungen einer heterogenen Saite identifiziert. Dann kann man nämlich nach § 13 die Größe ψx als Amplitude einer erzwungenen Schwingung ansehen, wobei die Periode der wirkenden Kraft durch λ bestimmt wird. Wäre keine Eigenschwingung der Saite möglich, so könnten niemals Schwebungen eintreten, ψx also nicht unendlich anwachsen. Nun zeigt aber die nichthomogene Integralgleichung, deren Lösung ψx ist, daß diese Größe bei gewissen Werten von λ unendlich groß wird; also muß eine Eigenschwingung und ein Eigenwert vorhanden sein.

§ 23.

Existenz unendlich vieler Eigenwerte.

Es sei z. B. λ_n ein beliebiger Pol der Funktion ψx und mögen für Zähler und Nenner des Bruches ψx folgende Entwickelungen gelten, in denen durch $\mathfrak{P}$ Potenzreihen bezeichnet sind:

$$\begin{aligned} W &= M(\lambda - \lambda_n)^m + (\lambda - \lambda_n)^{m+1}\mathfrak{P}(\lambda - \lambda_n), \\ \mathfrak{f}\lambda &= N(\lambda - \lambda_n)^{m+r} + (\lambda - \lambda_n)^{m+r+1}\mathfrak{P}_1(\lambda - \lambda_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Dann ist M eine nicht identisch verschwindende Funktion von x, N eine von Null verschiedene Konstante, und die Integralgleichung

$$\psi x = Fx + \lambda\int_0^1 K(x, \alpha)\,\psi\alpha . d\alpha$$

ergibt

$$W = Fx \,.\, \mathfrak{f}\lambda + (\lambda - \lambda_n)\int_0^1 K(x,\alpha)\, W\alpha \,.\, d\alpha + \lambda_n \int_0^1 K(x,\alpha)\, W\alpha \,.\, d\alpha,$$

und weiter, wenn man die Werte (1) einsetzt, durch $(\lambda - \lambda_n)^m$ dividiert und $\lambda = \lambda_n$ setzt,

$$M = \lambda_n \int_0^1 K(x,\, \alpha)\, M\alpha \,.\, d\alpha.$$

Die Größe M ist also eine zu dem Eigenwert λ_n gehörige Lösung der Randwertaufgabe, und man kann nach § 20 setzen

$$M = C V_n,$$

wobei C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Kombiniert man jetzt die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} V_n + \lambda_n V_n &= 0, \\ \mathfrak{L} W + \lambda W + fx \,.\, \mathfrak{f}\lambda &= 0, \end{aligned}$$

indem man die erste mit W, die zweite mit V_n multipliziert, letztere subtrahiert und das Resultat integriert, so ergibt sich

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^1 W V_n dx + \mathfrak{f}\lambda \int_0^1 fx \,.\, V_n dx = 0.$$

Setzen wir hier die Entwickelungen (1) ein, so erhalten wir die in λ identisch bestehende Gleichung

$$(\lambda - \lambda_n)^{m+1}\int_0^1 M V_n dx + (\lambda - \lambda_n)^{m+2}\mathfrak{P}_2(\lambda - \lambda_n)$$

$$+ (\lambda - \lambda_n)^{m+r}\int_0^1 N fx \,.\, V_n dx + (\lambda - \lambda_n)^{m+r+1}\mathfrak{P}_3(\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Diese Identität kann, da das Glied mit $(\lambda - \lambda_n)^{m+1}$ wegfallen muß, nur bestehen, wenn $r = 1$; d. h. die Funktion ψx hat nur einfache Pole, deren Residuen offenbar die Größen

$$\frac{M}{N} = \frac{C V_n}{N}$$

haben.

Dividieren wir sodann durch $(\lambda - \lambda_n)^{m+1}$ und setzen $\lambda = \lambda_n$, so folgt

$$(2) \qquad C\int_0^1 V_n^2\, dx + N\int_0^1 fx \,.\, V_n dx = 0.$$

Ist also λ_n ein Pol der Funktion ψx, so ist die Größe

$$\int_0^1 fx . V_n \, dx$$

von Null verschieden.

Aus der Gleichung (2) ergibt sich ferner, daß der Pol λ_n das Residuum

$$\frac{C V_n}{N} = - \frac{V_n \int_0^1 fx . V_n \, dx}{\int_0^1 V_n^2 \, dx}$$

besitzt; diese Größe ist das negativ genommene allgemeine Glied der Reihe, die man erhält, wenn man fx auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen V_n zu entwickeln versucht. Bildet man daher in der Ebene der komplexen Größe λ das Integral

$$J_n = - \frac{1}{2 \pi i} \int \psi x . d\lambda,$$

indem man längs einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{K}$, die die ersten n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ und nur diese umfaßt, im positiven Umlaufssinne integriert, so ist der Wert des Integrals einfach

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{V_\nu \int_0^1 fx . V_\nu \, dx}{\int_0^1 V_\nu^2 \, dx}.$$

Ist es nun möglich, den Grenzwert zu finden, dem das Integral J_n zustrebt, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ immer mehr und mehr Eigenwerte umfaßt, so summiert man die nach den Größen V_n fortschreitende Fouriersche Reihe nach der Methode, die Cauchy auf die Fouriersche Reihe im engeren Sinne des Wortes angewandt hat.

Eine wichtige Folgerung werde noch aus den obigen Resultaten gezogen.

Wäre eine stetige Funktion fx so beschaffen, daß alle Gleichungen

$$\int_0^1 fx . V_n \, dx = 0 \tag{3}$$

bestünden, so hätte die Funktion ψx keinen Pol, wäre ganz, und daraus folgt nach dem obigen die Identität

$$fx \equiv 0.$$

Das heißt: Eine im Grundgebiet stetige Funktion verschwindet identisch, wenn sie zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist.

Beiläufig folgt hieraus, daß unendlich viele Eigenwerte λ_n mit zugehörigen Funktionen V_n existieren. Wäre deren Anzahl nämlich endlich — sie ist ja mindestens Eins —, so ergäbe nach § 20 die Größe

$$fx = K(x, \xi) - \sum_n \frac{V_n x \,.\, V_n \xi}{\lambda_n \int_0^1 V_n^2\, dx}$$

die Gleichungen (3), hätte also den Wert Null. Das ist aber unmöglich, da $K(x, \xi)$ eine unstetige Ableitung nach x besitzt, nicht aber die in fx auftretende Summe.

§ 24.

Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen.

Während die Resultate des vorigen Paragraphen aus der Integralgleichung gewonnen wurden, muß auf die Differentialgleichung der Funktionen V und das zugehörige Randwertproblem zurückgegangen werden, wenn man die Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen in so allgemeiner Form erhalten will, wie es für die Anwendungen nötig ist.

Zu diesem Zweck transformieren wir die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)\, V = 0$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k}}, \qquad U = V\sqrt[4]{k}, \qquad Z = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{k}}$$

und erhalten eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\lambda - L)\, U = 0 \tag{1}$$

und Grenzbedingungen

$$\frac{dU}{dz} - h'U \Big|^0 = \frac{dU}{dz} + H'U \Big|^Z = 0, \tag{2}$$

in denen h', H' Konstante, aber nicht notwendig positiv und mit h, H zugleich endlich sind; der Fall, daß eine der Größen h, H unendlich sei, werde zunächst ausgeschlossen. Wir notieren noch die offenbar richtige Gleichung

$$\int_0^1 V^2 dx = \int_0^Z U^2 dz.$$

Jetzt beachten wir, daß die Gleichung (1), wenn $\lambda = \varrho^2$ gesetzt wird, mit jeder der folgenden identisch ist:

$$d\left(\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z\right) = LU \sin \varrho z \, dz,$$

$$d\left(\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z\right) = LU \cos \varrho z \, dz.$$

Integriert man diese Gleichungen und führt, indem man ϱ willkürlich läßt, nur die erste der Grenzbedingungen (2) sowie die Gleichung

$$U \Big|^0 = 1$$

ein, so ergibt sich

$$\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho \cos \varrho x \, . \, U = - \varrho + \int_0^z L' U' \sin \varrho z' dz',$$

$$\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho \sin \varrho z \, . \, U = \quad h' + \int_0^z L' U' \cos \varrho z' dz',$$

wobei durch L', U' die Funktionen L, U, in denen z durch z' ersetzt ist, bezeichnet sind. Hieraus folgt

$$(3) \qquad U = \cos \varrho z + \frac{h' \sin \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z L' U' \sin \varrho (z - z') dz',$$

$$(4) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{dz} = - \sin \varrho z + \frac{h' \cos \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z L' U' \cos \varrho (z - z') dz'.$$

Diese Gleichungen ergeben wichtige Resultate betreffs der Werte von U. Zunächst kann diese Funktion von z nach den in § 21 gegebenen Formeln für die Integration linearer Differentialgleichungen durch das ganze Intervall von $z = 0$ bis $z = Z$ fortgesetzt werden, wobei sie selbst wie auch ihre Ableitung unter einer von z unabhängigen Schranke liegt, die aber zunächst möglicherweise von ϱ abhängt. Es sei z. B. Q die erste positive ganze Zahl, die von den Werten $|U|$ weder erreicht noch überschritten wird. Dann ist die rechte Seite der Gleichung (3) absolut kleiner als

$$1 + \left|\frac{h'}{\varrho}\right| + \frac{Q}{|\varrho|}\int_0^z |L'|\, dz,$$

die linke Seite wird aber für gewisse Werte von z nicht kleiner als $Q - 1$, woraus sich ergibt

$$Q - 1 < 1 + \left|\frac{h'}{\varrho}\right| + \frac{Q}{|\varrho|}\int_0^z |L'|\, dz',$$

$$Q\left[1 - \frac{1}{|\varrho|}\int_0^z |L'|\, dz'\right] < 1 + \left|\frac{h'}{\varrho}\right|.$$

Da nun die Klammer auf der linken sowie die rechte Seite sich bei wachsenden Werten λ und $|\varrho|$ der Grenze $+1$ annähern, so ist klar, daß Q bei diesen Werten nicht unendlich zunimmt, sondern unter einer festen von ϱ unabhängigen Schranke verbleibt. Dasselbe gilt daher von $|U|$ und der Gleichung (4) zufolge auch von der Größe $\varrho^{-1} dU/dz$.

Weiter ergeben die Gleichungen (3) und (4) die Identität

$$\frac{dU}{dz} + H'U = (\varrho - P')\sin \varrho z - P \cos \varrho z,$$

wobei die Größen P und P', die leicht zu bilden sind, zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Schranken liegen. Die Eigenwerte $\lambda = \varrho^2$ werden daher durch die Gleichung

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang} \varrho Z = \frac{P}{\varrho - P'}$$

definiert, die zeigt, daß

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

zu setzen ist, wobei n eine positive ganze Zahl bedeutet, die von einer gewissen Grenze ab immer um Eins wächst, wenn man zu dem nächstgrößeren Wert von λ übergeht, und die Gleichung

$$\lim_{\varrho = +\infty} \varepsilon_n = 0$$

gilt. Schreibt man die Gleichung (5) in den Formen

$$\operatorname{tang}(n\pi + \varepsilon_n Z) = \operatorname{tang}\varepsilon_n Z = \frac{P}{\frac{n\pi}{Z} - P' + \varepsilon_n},$$

$$n\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n Z}{\pi \operatorname{tang}\varepsilon_n Z}[P - (P' + \varepsilon_n)\operatorname{tang}\varepsilon_n Z],$$

und beachtet, daß die rechte Seite der letzten Gleichung zwischen endlichen, von n und ϱ unabhängigen Schranken verbleibt, das Verhältnis $n:\varrho$ aber einem endlichen Grenzwerte zustrebt, so wird klar, daß man setzen kann:

$$(6)\qquad \begin{gathered} \varepsilon_n = \frac{B}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_0}{\varrho}, \\ \cos\varrho z = \cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{B_1}{\varrho}, \quad \sin\varrho z = \sin\frac{n\pi z}{Z} + \frac{B_2}{\varrho}, \end{gathered}$$

wobei die Größen B zwischen festen, von ϱ unabhängigen Schranken verbleiben.

Hieraus ergibt sich mittels der Gleichung (3) leicht

$$\int_0^Z U^2 dz = \frac{Z}{2} + \frac{B_3}{\varrho},$$

wenn B_3 eine Größe ist, die die Eigenschaften von B_0, B_1 und B_2 besitzt; die normierten Eigenfunktionen haben also, der Gleichung (6) zufolge, die Form

$$(7)\qquad \sqrt[4]{k}\,.\,\varphi\; x = \sqrt{\frac{2}{Z}}\cos\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{n},$$

wobei der Buchstabe Ψ hier und fortan eine Größe bedeute, die zwischen endlichen von n und x unabhängigen Schranken liegt. Dabei ist zwar, streng genommen, nicht bewiesen, daß $\varphi_n x$ die $n$te Eigenfunktion ist, da erst von einer gewissen Grenze ab dem um Eins wachsenden Werte von n die aufeinanderfolgenden Werte von ϱ oder λ entsprechen. Das ist aber für die Konvergenzfragen, die wir jetzt in Angriff nehmen, unwesentlich; man könnte außer der Reihe φ_1, φ_2, ... noch eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen hinzufügen, um das vollständige System zu erhalten.

Analog der Gleichung (7) findet man aus den Gleichungen (4) und (6)

$$(8)\qquad \frac{k^{3/4}\varphi_n' x}{\lambda_n} = -\frac{Z}{\pi n}\sqrt{\frac{2}{Z}}\sin\frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{n^2},$$

und der zugehörige Eigenwert hat die Form

$$\lambda_n = \varrho^2 = \frac{n^2\pi^2}{Z^2} + \frac{\Psi}{n},$$

so daß

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{Z^2}{\pi^2 n^2}\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right) \tag{9}$$

gesetzt werden kann.

§ 25.

Die bilineare Formel.

Führen wir nun neben x ein zweites Argument x_1 ein und bezeichnen alle Funktionen von x, in denen x_1 für x gesetzt wird, durch den Index 1, so ergeben die Formeln (7) und (9) des vorigen Paragraphen unmittelbar:

$$\sqrt[4]{k k_1} \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n} = \frac{2Z}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi z}{Z} \cos\frac{n\pi z_1}{Z} + \sum_n \frac{\Psi}{n^2},$$

wobei die Schranken der Größen Ψ wie von x so auch von x_1 unabhängig sind. Die Reihe auf der linken Seite ist zwar nicht vollständig als die bilineare Reihe nachgewiesen, da die Funktionen $\varphi_n x$ und $\cos(n\pi z/Z)$ einander vielleicht nicht völlig eindeutig entsprechen, aber jene Reihe kann sich von der bilinearen nur um eine endliche Anzahl von Gliedern unterscheiden. Die bilineare Reihe des Kerns $K(x, y)$, d. h. die über alle normierten Eigenfunktionen φ_n erstreckte Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

konvergiert also im Grundgebiet absolut und gleichmäßig bezüglich beider Variablen.

Die Formeln (7), (8) und (9) des § 24 zeigen ferner, daß die Reihe

$$-\sqrt[4]{k^3 k_1} \sum_n \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

sich von der Reihe

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi z}{Z} \cos\frac{n\pi z_1}{Z} \\ (1) \qquad &= \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi(z + z_1)}{Z} + \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi(z - z_1)}{Z} \end{aligned}$$

nur um eine bezüglich beider Argumente im Grundgebiet gleichmäßig konvergierende Reihe, also eine stetige Funktion beider Argumente unterscheidet. Da nun die Größen k und k_1 im Grundgebiet stetig und positiv bleiben, folgt weiter, daß die Reihe

$$\mathfrak{f} x_1 = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

in jedem Gebiet der Variablen gleichmäßig konvergiert, in welchem dies von der Reihe (1) gilt. Dazu genügt es, x_1 an irgend einer Stelle des Grundgebietes festzuhalten und x eine Strecke, die einen Teil dieses Gebietes bildet und x_1 nicht enthält, durchlaufen zu lassen. Dann bleiben die Größen $z - z_1$ und $z + z_1$ über einer positiven Grenze und unter einer Schranke von der Form $2Z - c$, wobei c eine positive Konstante bedeutet. Daraus aber schließt man, daß die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (1) gleichmäßig konvergieren, indem man sich der in § 4 entwickelten Eigenschaften der Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin n u}{n}$$

erinnert.

An der Stelle $x_1 = x$, $z_1 = z$ wird der zweite Teil der Reihe (1), als Funktion von x_1 betrachtet, unstetig; dasselbe gilt daher von $\mathfrak{f} x_1$, und es gilt dabei offenbar die Gleichung

$$\mathfrak{f}(x - 0) + \mathfrak{f}(x + 0) = 2\,\mathfrak{f} x. \tag{2}$$

Aus den erhaltenen Eigenschaften der bilinearen Reihe folgt zunächst, daß die Reihe

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) - \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \alpha}{\lambda_n},$$

multipliziert mit einer stetigen Funktion von α, gliedweise integriert werden kann. So erhält man z. B.

$$\int_0^1 Q(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha$$

$$= \int_0^1 K(x, \alpha)\, \varphi_m \alpha \,.\, d\alpha - \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int_0^1 \varphi_m \alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = 0;$$

daraus folgt nach den in § 23 an die Gleichungen (5) geknüpften Bemerkungen die Identität

$$Q(x, \alpha) \equiv 0,$$

und die bilineare Formel

$$K(x, \alpha) = \sum_{n}^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \alpha}{\lambda_n}$$

ist bewiesen.

Aus den auf Konvergenz bezüglichen Eigenschaften der Reihe

$$\sum_{n}^{1, \infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n \alpha}{\lambda_n}$$

ergibt sich sodann auf Grund des in § 5 benutzten allgemeinen Satzes über die Möglichkeit, eine Reihe gliedweise zu differenzieren, die Formel

$$(3) \qquad K'(x, \alpha) = \sum_{n}^{1, \infty} \frac{\varphi_n' x \cdot \varphi_n \alpha}{\lambda_n},$$

sobald x und α verschieden sind.

Hiermit sind alle Vorbedingungen erfüllt, um die Methode des § 5 anzuwenden und die dort abgeleiteten Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Denn multipliziert man zunächst die bilineare Formel mit der im Grundgebiet stückweise stetigen Funktion $f\alpha$, so sieht man, daß die quellenmäßige Funktion

$$\int_0^1 K(x, \alpha) f\alpha \, . \, d\alpha$$

durch eine absolut und gleichmäßig im Grundgebiet konvergierende Fouriersche Reihe dargestellt werden kann. Daraus folgt nach § 13 die Schmidtsche Formel für die Größe ψx.

Da ferner der Kern $K(x, \xi)$, der an der Stelle $x = \xi$ eine unstetige Ableitung nach x besitzt, als Funktion von x mittels der bilinearen Formel nach den Eigenfunktionen $\varphi_n x$ entwickelt werden kann, so gilt dasselbe von dem Ausdruck

$$\Phi x + a_1 K(x, \xi_1) + a_2 K(x, \xi_2) + \cdots + a_m K(x, \xi_m),$$

in welchem $a_1, a_2, \ldots$ konstant sind und Φx quellenmäßig dargestellt werden kann. Wie in § 5 schließen wir hieraus, daß jede Funktion nach den Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann, deren Ableitung im Innern des Grundgebietes eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, während die

Funktion selbst im übrigen die in § 20 angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Funktion Φx besitzt.

Sodann erhält man unstetige, nach den Eigenfunktionen entwickelte Funktionen, wenn man in der Formel

$$K'(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi'_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

ξ als die unabhängige Variable auffaßt; der Formel (2) zufolge ist der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte, denen die dargestellte Funktion zustrebt, wenn man sich von oben oder unten der Unstetigkeitsstelle annähert.

Speziell gelten die Formeln

$$(4) \quad K'(1, \xi) = \sum_n \frac{\varphi'_n 1 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n}, \qquad K'(0, \xi) = \sum_n \frac{\varphi'_n 0 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

und liefern die Entwickelung einer die Grenzbedingung nicht erfüllenden Funktion von ξ. Denn da z. B. in der Größe $K'(1, \xi)$ das zweite Argument das kleinere ist, hat man nach § 20 zu setzen:

$$K(1, \xi) = \varphi \xi \,.\, \psi 1, \qquad K'(1, \xi) = \varphi \xi \,.\, \psi' 1,$$

und diese Größe erfüllt als Funktion von ξ an der Stelle $\xi = 1$ die Grenzbedingung nicht, da sonst die Funktion φx beide Grenzbedingungen erfüllte, was nicht geschieht. Die Größe, die vermöge der Grenzbedingung verschwinden sollte, ist also von Null verschieden.

Die Formeln (3) sind zwar zunächst nur für den Fall abgeleitet, daß die unter den Funktionszeichen K' stehenden Argumente verschieden sind. Aber z. B. die erste von ihnen gilt auch für $\xi = 1$, wenn nur H nicht unendlich ist. Dann hat man nämlich die Gleichung

$$(5) \qquad k K'(x, \xi) \Big|^1 = - H K(1, \xi) = - H \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n 1 \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n},$$

und zwar auch für $\xi = 1$. Da nun die Eigenfunktionen die Grenzbedingung

$$k \varphi'_n + H \varphi_n \Big|^1 = 0$$

erfüllen, kann man die rechte Seite der Gleichung (5) leicht in die der ersten Gleichung (4) überführen, und letztere ist auch für die Stelle $\xi = 1$ erwiesen. Analog gilt die zweite Formel (4) auch für $\xi = 0$, wenn h nicht unendlich ist; die Formeln (4) versagen also nur in solchen Endpunkten des Grundgebiets, in denen alle Eigenfunktionen verschwinden.

Die erhaltenen Resultate zeigen, daß die mit konstanten Koeffizienten a, b, a_ν, b_ν gebildete Größe

$$\Phi x + \sum_\nu^{1,m} a_\nu K(x, \xi_\nu) + \sum_\nu^{1,r} b_\nu K'(\eta_\nu, x) + a K'(1,x) + b K'(0,x),$$

in eine Fouriersche Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann, also eine Funktion von x, die beliebig viele gegebene Unstetigkeiten an sich selbst und ihrer ersten Ableitung darbietet und der Größe, die in den Grenzbedingungen gleich Null gesetzt wird, einen beliebigen Wert gibt. Dabei ist der Wert der Reihe in einer Unstetigkeitsstelle in derselben Weise wie bei der Reihe $K'(x, \xi)$ oder $\mathfrak{f} x_1$ zu bestimmen.

Hieraus erhält man wie in § 5 den Satz, daß jede Funktion fx, die auf der Strecke von 0 bis 1 mit ihren ersten beiden Ableitungen stückweise stetig ist, in der Form

$$fx = \sum_n \varphi_n x \int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha$$

dargestellt werden kann; sie braucht dabei keineswegs die Randbedingungen der Eigenfunktionen zu erfüllen. In den Unstetigkeitsstellen der Funktion fx gibt die Reihe den Wert

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)];$$

in einem Endpunkte des Grundgebiets, in dem die Eigenfunktionen verschwinden, gibt die Reihe natürlich den im allgemeinen unrichtigen Wert Null. Gleichmäßig konvergiert die erhaltene Reihe wie die benutzten Reihen $K'(x, \xi)$ als Funktionen von ξ auf jeder Strecke, die weder einen Unstetigkeitspunkt der dargestellten Funktion enthält, noch einen Endpunkt des Grundgebiets, in dem diese Funktion die Grenzbedingung der Eigenfunktionen verletzt.

Ist ferner fx eine beliebige von $x = 0$ bis $x = 1$ stetige Funktion, so erhält man nach der Methode des § 6 die von Stekloff bewiesene Gleichung:

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty} \left[\int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha \right]^2.$$

§ 26.

Integralgleichungen und Besselsche Funktionen.

Beim Problem des schwingenden Seiles (§ 11) und bei anderen Problemen der mathematischen Physik tritt das System der Funktionen $J_m(\varrho x)$ auf, wobei m eine nicht negative ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, $J_m x$ das an der Stelle $x = 0$ von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integral der Gleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$$

ist, und die Zahlen ϱ durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho J'_m \varrho + H J_m \varrho = 0$$

definiert sind, in der durch H eine Konstante bezeichnet wird, die nicht negativ ist; letztere kann auch den Wert ∞ annehmen, so daß die Werte ϱ die Wurzeln der Gleichung

$$J_m \varrho = 0$$

sind. Es handelt sich bei den erwähnten Problemen darum, eine auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ willkürlich gegebene Funktion nach den Größen $J_m(\varrho x)$ zu entwickeln, bei denen man sich, da $J_m x$ das Produkt aus x^m und einer geraden Funktion von x ist, auf die positiven Werte ϱ beschränken kann.

Das System dieser Funktionen ist dem Sturm-Liouvilleschen verwandt, was besonders klar wird, wenn wir die Größen

$$y = J_m(\varrho \sqrt{x})$$

betrachten, die von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{x}\right) y = 0, \qquad \varrho^2 = \lambda$$

sind und die Grenzbedingung

$$2\frac{dy}{dx} + Hy \Big|^1 = 0 \tag{1}$$

erfüllen. Diese Differentialgleichung fällt unter den von Sturm und Liouville betrachteten Typus mit der Modifikation, daß für die in der allgemeinen Theorie durch k und l bezeichneten Größen die Gleichungen

$$k\Big|^0 = 0, \qquad l\Big|^0 = \infty$$

gelten. Dieser Umstand beeinflußt die Entwickelungen des § 19 nur unwesentlich; insbesondere erkennt man die Größen $J_m(\varrho x)$

als zu einander orthogonal, indem man zwei von ihnen durch V_r und V_n bezeichnet und aus den zugehörigen Differentialgleichungen nach der oft gebrauchten Methode die Formel

$$4\,x(V_r V_n' - V_r V_n')\Big|_0^1 + (\lambda_r - \lambda_n)\int_0^1 V_r V_n\,dx = 0$$

ableitet, in der das vom Integralzeichen freie Glied an der Stelle $x = 0$ wegen des Faktors x verschwindet.

Daß ferner die Größen $J_m(\varrho\,x)$ Eigenwerte eines symmetrischen Kernes sind, ersieht man durch Entwickelungen, die den in § 20 durchgeführten sehr ähnlich sind. Abgesehen von dem als ausgeartet anzusehenden Falle $m = H = 0$ ist der Kern das von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4\,x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}\,y = 0, \tag{2}$$

das an der Stelle $x = 1$ die Randbedingung (1) erfüllt und an der Stelle $x = \xi$ gemäß der Gleichung

$$k\,K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 4\,x\,K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

singulär wird.

Diese Kerne sind explizite anzugeben. Bezeichnet man durch u den echten der beiden Brüche

$$\frac{x}{\xi}, \quad \frac{\xi}{x},$$

so erhält man für $m = 0$ die Gleichung

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\,H} - \frac{1}{8}\log\frac{x\,\xi}{u},$$

für $m > 0$ allgemein

$$K(x, \xi) = \frac{1}{4\,m}\left[u^{\frac{m}{2}} - (x\,\xi)^{\frac{m}{2}}\right] + \frac{(x\,\xi)^{\frac{m}{2}}}{2\,(m + H)},$$

also Ausdrücke, die offenbar auch für den Fall $H = \infty$ einen bestimmten Sinn behalten; bei der Annahme $m > 0$ kann auch $H = 0$ gesetzt werden.

Nimmt man in diesen Ausdrücken für die ganze Strecke von 0 bis 1 den Wert

$$u = \frac{\xi}{x},$$

so stellen sie das bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Integral der Gleichung (2) dar, das eine stetige Ableitung besitzt und an der Stelle $x = 1$ die Randbedingung erfüllt. Dieses Integral enthält an der Stelle $x = 0$ negative Potenzen oder Logarithmen. Sollen also diese Singularitäten bei einem die Randbedingung erfüllenden Integral der Gleichung (2) ausgeschlossen sein, so muß dieses identisch verschwinden.

In dem ausgearteten Falle $m = H = 0$ sucht man nach dem in § 16 gegebenen Ansatz das an der Stelle $x = 0$ von Logarithmen freie Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0,$$

das im übrigen dieselben Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen erfüllt wie die bisher betrachteten Kerne und findet

$$K(x, \xi) = \frac{x + \xi}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{x\xi}{u} - \frac{3}{8},$$

wobei die additive Konstante so bestimmt ist, daß die Gleichung

$$\int_0^1 K(x, \xi)\, dx = 0$$

gilt.

Eine leichte Modifikation erfordert sodann der Nachweis, daß die der Randbedingung unterworfene, an der Stelle $x = 0$ von Logarithmen und negativen Potenzen von x freie Lösung der nichthomogenen Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{x}\right) y + fx = 0$$

als Quotient zweier ganzer Funktionen von λ dargestellt werden kann, dessen Nenner, gleich Null gesetzt, die Eigenwerte definiert. Um dies einzusehen, nehmen wir für das in § 21 benutzte Integral w_1 die Größe $J_m(\varrho\sqrt{x})$, für w_2 ein beliebiges Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\varrho^2 - \frac{m^2}{x}\right) y = 0,$$

das an der Stelle $x = 0$ den Logarithmus oder negative Potenzen von x enthält, und bringen zum Ausdruck, daß das Integral

$$\psi x = p + C_1 w_1 + C_2 w_2$$

von den bezeichneten Singularitäten an der Stelle $x = 0$ frei ist. Da dies, wie man leicht sieht, für die Größe p gilt, und

$$\Delta = \frac{1}{4x}$$

zu setzen ist, so braucht man nur $C_2 = 0$ zu setzen, um für ψx die gewünschte Gestalt an der Stelle $x = 0$ zu erreichen. Die Randbedingung ergibt dann

$$C_1(2w_1' + Hw_1)\Big|^1 = C_1\{\varrho J_m'\varrho + HJ_m\varrho\} = -2p' - Hp\Big|^1,$$

und die Größen C_1 und ψx erhalten den erwünschten Nenner. Der Faktor ϱ^m hebt sich, so daß ψx in allen Fällen als meromorphe Funktion von λ erscheint.

Hiermit sind die für die oben durchgeführte Argumentation wesentlichen Grundeigenschaften der Größe ψx gesichert und man erhält wie früher das erste Hauptresultat, daß eine im Grundgebiet stetige Funktion fx identisch verschwindet, wenn sie zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist, d. h. wenn alle Gleichungen

$$\int_0^1 fx \,.\, J_m(\sqrt{\lambda_n x})\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

bestehen.

§ 27.

Die bilineare Formel bei den Besselschen Funktionen.

Wesentlich anders als bei den Sturm-Liouvilleschen Funktionen muß bei den Besselschen die bilineare Formel abgeleitet werden, wie aus folgenden Erwägungen hervorgeht.

Es ist bekannt, daß die Funktion $J_m x$ für große reelle Argumente asymptotisch durch den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

dargestellt wird. Daraus ersieht man leicht, daß die oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho J_m'\varrho + HJ_m\varrho = 0$$

im wesentlichen in arithmetischer Progression und die Eigenwerte λ_n wesentlich wie die Quadrate der natürlichen Zahlen fortschreiten, so daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n}$$

konvergiert. Aber andererseits zeigt die angeführte asymptotische Darstellung, daß

$$(1) \qquad 2\int_0^1 x J_m(\varrho x)^2 dx = \int_0^1 J_m(\varrho \sqrt{x})^2 dx = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, wobei Ψ zwischen von ϱ unabhängigen, endlichen und positiven Grenzen liegt; die normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_n x = J_m(\sqrt{\lambda_n x}) \left[\int_0^1 J_m(\sqrt{\lambda_n x})^2 dx\right]^{-1/2}$$

bleiben also nicht in dem ganzen Grundgebiet zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen, so daß die bilineare Reihe

$$\sum \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n}$$

nicht in derselben Weise konvergiert, wie bei den Sturm-Liouvilleschen Funktionen.

Nun zeigt die asymptotische Darstellung von J_m, daß $\sqrt{x}\, J_m x$ zwischen endlichen Schranken liegt; man kann daher setzen, indem man $\varrho \sqrt{\xi}$ für x schreibt,

$$\sqrt{\varrho}\, \sqrt[4]{\xi}\, J_m(\varrho \sqrt{\xi}) = \Psi, \qquad \sqrt[4]{\xi}\, J_m(\varrho\sqrt{\xi}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}}.$$

Sobald daher die Größe ξ über einer beliebig klein festgelegten positiven Größe ε verbleibt, kann man auch

$$J_m(\varrho\sqrt{\xi}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}}$$

setzen, mithin

$$\frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{J_m(\varrho\sqrt{\xi})}{\varrho^2}\left[\int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{x})^2 dx\right]^{-1/2} = \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

und da die Größe $J_m(\varrho\sqrt{x})$ jedenfalls zwischen endlichen Schranken bleibt, folgt

$$\varphi_n x = \Psi \,.\, \sqrt{\varrho}, \qquad \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n \xi}{\lambda_n} = \frac{\Psi}{\varrho^{3/2}}.$$

Unter der jetzt geltenden Voraussetzung

$$(2) \qquad \xi > \varepsilon$$

konvergiert also die bilineare Reihe bezüglich der Variablen x gleichmäßig; da ferner bei dieser Annahme $K(x, \xi)$ endlich ist, kann die Reihe

$$Q(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

mit einer stetigen Funktion von x multipliziert von 0 bis 1 nach x gliedweise integriert werden. Offenbar findet man so z. B.:

$$\int_0^1 F x \cdot \varphi_m x \cdot d x = 0;$$

nach dem Satze des vorigen Paragraphen folgt also für das Grundgebiet

$$Q(x, \xi) \equiv 0, \quad K(x, \xi) = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n \xi}{\lambda_n}$$

unter der Annahme (2).

Multipliziert man diese Formel mit der im Grundgebiet stückweise stetigen Funktion $f x$ und setzt

$$\int_0^1 K(x, \xi) f x \cdot d x = F \xi,$$

so erhält man die Gleichung

$$F \xi = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n \xi}{\lambda_n} \int_0^1 f x \cdot \varphi_n x \cdot d x,$$

d. h. die Fouriersche Entwickelung einer quellenmäßigen Funktion, aber nur für positive Werte von ξ.

Unter welchen Bedingungen eine Funktion Φx quellenmäßig dargestellt werden kann, sieht man leicht nach der in § 20 gebrauchten Methode. Setzt man nämlich allgemein

$$\mathfrak{L} y = \frac{d}{d x}\left(4 x \frac{d y}{d x}\right) - \frac{m^2 y}{x}, \quad F x = \int_0^1 K(x, \alpha) f \alpha \cdot d \alpha,$$

so findet man zunächst durch leichte Rechnung

$$\mathfrak{L} F x = - f x;$$

ist sodann Φx eine Funktion mit stetiger erster und stückweise stetiger zweiter Ableitung, die die Randbedingung der Eigenfunktionen erfüllt, und setzt man

$$\frac{d}{d x}(4 x \Phi') - \frac{m^2 \Phi}{x} = \mathfrak{L} \Phi x = - f x,$$

so ist $f x$ im Falle $m > 0$ an der Stelle $x = 0$ nur dann sicher endlich, wenn

$$\lim_{x=0} \frac{\Phi x}{x}$$

endlich ist. Setzen wir dies voraus, so ist $F - \Phi$ eine die Randbedingung erfüllende Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{L} y = 0,$$

deren erste Ableitung stetig ist. Eine solche muß nach § 26 identisch verschwinden; die letzte Gleichung ist ja mit der dort durch (2) bezeichneten identisch. Die Differenz $F - \Phi$ verschwindet also identisch, und damit ist die Funktion Φ quellenmäßig dargestellt; die Argumentation braucht in dem ausgearteten Falle nur unwesentlich modifiziert zu werden.

Hiermit ist gezeigt, daß eine Funktion von den für Φx vorausgesetzten Eigenschaften auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann bis auf die Stelle $x = 0$. Ist nun zunächst $m > 0$, so enthalten die Eigenfunktionen den verschwindenden Faktor $x^{1/2 m}$; die Darstellung von Φx bleibt also an der Stelle $x = 0$ gültig oder nicht, je nachdem $\Phi\, 0$ verschwindet oder nicht. Wenn aber $m = 0$ ist, so scheint folgende besondere Betrachtung unvermeidlich zu sein.

Aus der oben benutzten Gleichung

$$\sqrt{x}\, J_m x = \Psi$$

folgt offenbar

$$\sqrt[4]{\alpha}\, J_m(\varrho \sqrt{\alpha}) = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}},$$

und wenn die Größen a und b dem Grundgebiet angehören,

$$\int_a^b f\alpha \,.\, J_m(\varrho\sqrt{\alpha})\, d\alpha = \int_a^b f\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}} \cdot \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}} \int_a^b \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}} = \frac{\Psi}{\sqrt{\varrho}},$$

wobei die Größe a und b auch in die Grenzen 0 und 1 hineinrücken dürfen, die Schranken des Symbols Ψ aber von a und b unabhängig sind. Da ferner die Größe $J_m(\varrho\sqrt{x})$ zwischen zwei von ϱ und x unabhängigen endlichen Grenzen liegt, so erhält man aus der Formel (1) die Gleichung

$$\frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \cdot \int_0^1 \varphi_n \alpha \,.\, f\alpha \,.\, d\alpha$$

$$= \frac{J_m(\varrho\sqrt{x})}{\varrho^2} \int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{\alpha}) f\alpha \,.\, d\alpha : \int_0^1 J_m(\varrho\sqrt{\alpha})^2 d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho^{3/2}}.$$

Die nach n gebildete Summe dieser Größen konvergiert also gleichmäßig bezüglich der Variablen x und ist auf dem Grundgebiet mit Einschluß des Wertes $x = 0$ stetig. Da nun dasselbe von der Funktion Φx gilt, so bleibt die Fouriersche Darstellung auch für den Wert $x = 0$ richtig.

Um ferner Sätze über die Darstellung unstetiger oder mit unstetiger Ableitung versehener Funktionen zu erhalten, betrachten wir wie in § 25 die bilineare Formel als Fouriersche Entwickelung einer mit unstetiger Ableitung behafteten Funktion; ebenso die durch Differentiation erhaltenen als Darstellung unstetiger Funktionen.

Man findet nun bei der Annahme $x > \xi$ im Falle $m = 0$:

$$K'(x, \xi) = -\frac{1}{4x},$$

und im Falle $m > 0$

$$K'(x, \xi) = \frac{\xi^{\frac{m}{2}}}{8}\left(-\frac{m}{2}x^{-\frac{m}{2}-1} - \frac{m}{2}x^{\frac{m}{2}-1}\right) + \frac{m\xi^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{4(m+H)},$$

also entsprechend beiden Fällen:

$$K'(1, \xi) = -\frac{1}{4}, \quad K'(1, \xi) = \xi^{\frac{m}{2}}\left[-\frac{m}{8} + \frac{m}{4(m+H)}\right],$$

und diese Größen erfüllen als Funktionen von ξ die auf die Stelle $\xi = 1$ bezügliche Randbedingung offenbar nicht.

Hieraus schließt man nach der Methode des § 5, indem man den Ausdruck

$$\mathfrak{F}x = \Phi x + \sum_{\nu}^{1,q} a_\nu K(x, \xi_\nu) + \sum_{\nu}^{1,r} b_\nu K'(\eta_\nu, x) + cK'(1, x)$$

betrachtet, daß eine Funktion nach den Eigenfunktionen eines der betrachteten Systeme entwickelt werden kann, wenn sie mit ihren ersten beiden Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetig ist. Eine solche Funktion kann nämlich immer in die Form $\mathfrak{F}x$ gebracht werden, wobei Φx die oben geforderten Eigenschaften besitzt.

Betreffs der Endpunkte des Grundgebiets und der gleichmäßigen Konvergenz gelten die Resultate des § 25.

Nach der Methode des § 7 folgt endlich, wenn fx im Grundgebiet stetig ist, die Stekloffsche Formel

$$\int_0^1 (f\alpha)^2 d\alpha = \sum_n^{1,\infty}\left[\int_0^1 f\alpha \,.\, \varphi_n\alpha \,.\, d\alpha\right]^2.$$

§ 28.

Die Legendreschen Polynome.

Die mechanische Bedeutung der Legendreschen Polynome ist schon in den §§ 11 und 17 erörtert. Dieselben ergeben sich als Lösungen der Aufgabe, in der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\lambda\Theta=0 \tag{1}$$

die Konstante λ so zu bestimmen, daß ein auf der ganzen Strecke von $x=-1$ bis $x=+1$ endliches Integral vorhanden ist, was bei beliebigen Werten von λ mindestens zweifelhaft ist. Sind λ_1 und λ_2 irgend zwei solcher Werte und Θ_1, Θ_2 die zugehörigen endlichen Integrale, so findet man unmittelbar:

$$\Theta_2\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta_1}{dx}\right]-\Theta_1\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta_2}{dx}\right]+(\lambda_2-\lambda_1)\Theta_1\Theta_2=0,$$

$$(1-x^2)\left(\Theta_2\frac{d\Theta_1}{dx}-\Theta_1\frac{d\Theta_2}{dx}\right)\Bigg|_{-1}^{+1}+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-1}^{+1}\Theta_1\Theta_2\,dx=0,$$

woraus, wenn λ_1 und λ_2 verschieden sind, die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1}\Theta_1\Theta_2\,dx=0$$

folgt. Nimmt man also die Strecke von $x=-1$ bis $x=+1$ als Grundgebiet, so sind die zu verschiedenen der gesuchten Werte λ gehörigen endlichen Integrale der Gleichung (1) zu einander orthogonal.

Nun lassen sich gewisse der gesuchten Werte von λ leicht angeben, die Werte 0 und $n(n+1)$ nämlich, wenn n wieder eine positive ganze Zahl bedeutet, und die zugehörigen Lösungen Θ sind die Legendreschen Polynome

$$P_0x=1,\quad P_nx=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Zu jedem dieser Werte λ gehört keine andere Funktion Θ, weil, wie man leicht sieht, jedes von P_nx verschiedene Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0$$

an den Stellen $x=\pm 1$ unendlich wird. Hätte also die Gleichung (1) außer den Legendreschen Polynomen noch eine Lösung Θ von der gewünschten Beschaffenheit, so müßte sie zu allen Funktionen $P_0 x$, $P_n x$ orthogonal sein:

$$\int_{-1}^{+1} \Theta\, d x = \int_{-1}^{+1} P_n x . \Theta\, d x = 0. \tag{2}$$

Hieraus läßt sich aber ableiten, daß Θ identisch verschwinden müßte. Durch die Polynome $P_0 x$, $P_n x$ läßt sich nämlich, da sie alle von verschiedenem Grade sind, jede ganze positive Potenz von x, mithin jedes Polynom des Arguments x linear ausdrücken, und da nach einem berühmten Theorem von Weierstraß jede stetige Funktion von x in einem endlichen Intervall durch ein Polynom mit beliebig hohem Grade der Annäherung dargestellt werden kann, gibt es ein lineares Aggregat von Legendreschen Polynomen, etwa

$$\psi x = a_0 + a_1 P_1 x + a_2 P_2 x + \cdots + a_m P_m x,$$

von der Beschaffenheit, daß auf dem ganzen Grundgebiet, d. h. der Strecke

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

die Ungleichung

$$|\Theta - \psi x| < \varepsilon \tag{3}$$

gilt, wobei ε beliebig klein gegeben sei. Dann findet man

$$\int_{-1}^{+1} \Theta^2 d x = \int_{-1}^{+1} \Theta \psi x . d x + \int_{-1}^{+1} \Theta (\Theta - \psi x) d x,$$

und hier verschwindet rechts das erste Integral, da Θ zu allen Legendreschen Polynomen orthogonal ist. Die resultierende Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \Theta^2 d x = \int_{-1}^{+1} \Theta (\Theta - \psi x) d x$$

kann aber der Ungleichung (3) zufolge nur bestehen, wenn Θ auf dem Grundgebiet identisch verschwindet.

Damit ist gezeigt, daß die Werte $\lambda = 0$, $n(n+1)$ in der Tat die einzigen sind, die bei dem an die Gleichung (1) geknüpften Randwertproblem zu Lösungen der gesuchten Art, eben den Legendreschen Polynomen führen. Sodann ergibt sich aus der durchgeführten Argumentation, die nur von der Gleichung (2) Gebrauch macht, daß j e d e a u f d e m G r u n d g e b i e t s t e t i g e

Funktion, die zu allen Legendreschen Polynomen orthogonal ist, identisch verschwindet.

Die Funktionen $P_n x$ sind nun schon in § 17 als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns dargestellt; ihre dynamische Bedeutung führte dazu, den Kern folgendermaßen zu definieren:

$$x < \xi, \quad K(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2,$$
$$x > \xi, \quad K(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)] - \tfrac{1}{2} + \log 2.$$

Dann bestehen die Gleichungen

$$\frac{d[(1-x^2)K'(x,\xi)]}{dx} - \frac{1}{2} = 0,$$
$$(4) \qquad K'(x,\xi)(1-x^2)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1, \quad \int_0^1 K(x,\xi)\,dx = 0$$

und die Größen $K(1, \xi)$, $K(-1, \xi)$ sind endlich. Hieraus folgt, indem wir die Differentialgleichung (4) mit P_n multiplizieren und von der mit $K(x, \xi)$ multiplizierten Gleichung (1) subtrahieren, in gewohnter Weise

$$P_n\xi = n(n+1)\int_{-1}^{+1} P_n x \,.\, K(x,\xi)\,dx.$$

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_n x = \sqrt{n + \tfrac{1}{2}}\,P_n x,$$

da durch leichte partielle Integration die Formel

$$\int_{-1}^{+1}(P_n x)^2\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}\right\}^2 dx$$
$$= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

abgeleitet werden kann.

Der erhaltene Kern ist nun zwar an den Stellen $x = \xi = \pm 1$ unendlich, aber offenbar so beschaffen, daß, wenn fx auf dem Grundgebiet stückweise stetig ist, die Größe

$$Fx = \int_{-1}^{+1} K(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha$$

eine stetige Funktion von x ist. Versucht man diese, also eine quellenmäßig dargestellte Funktion von x, nach den Eigenfunktionen rein formal zu entwickeln, so erhält man die Reihe

$$R = \sum_n \varphi_n x \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \sum_n \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int_{-1}^{+1} f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha,$$

sobald gezeigt ist, daß in dem Integral

$$\int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \int_{-1}^{+1} \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha \int_{-1}^{+1} K(\alpha, \beta) f\beta \,.\, d\beta$$

die Reihenfolge der Integrationen geändert werden darf. Das ist sicher, wenn man die unteren Integrationsgrenzen durch $-1+\varepsilon$, die oberen durch $1-\varepsilon$ ersetzt und unter ε eine beliebig kleine positive Größe versteht. Die hiermit weggelassenen Teile des Integrationsgebiets geben aber zu dem Integral einen mit ε verschwindenden Beitrag, gleichviel in welcher Reihenfolge man integriert. Dies ersieht man unmittelbar aus dem expliziten Ausdruck $K(x, \xi)$ und daraus, daß das Integral

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi\alpha \,.\, \log \alpha \, d\alpha$$

mit ε verschwindet, wenn $\varphi\alpha$ eine im Integrationsgebiet stetige Funktion bedeutet. Damit ist die Gleichung

$$(5) \quad \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \int_{-1}^{+1} f\beta \,.\, d\beta \int_{-1}^{+1} K(\alpha, \beta)\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^{+1} f\beta \,.\, \varphi_n \beta \,.\, d\beta$$

erwiesen; ersetzt man $\varphi_n \alpha$ durch 1, so findet man

$$(6) \quad \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, d\alpha = 0.$$

Die Reihe R ist nun leicht als im Grundgebiet gleichmäßig konvergent nachzuweisen. Zu diesem Zweck gehen wir von der Laplaceschen Formel

$$P_n x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\alpha\right)^n d\alpha$$

und der Identität

$$(7) \quad P_n' x = \frac{n x P_n x - n P_{n-1} x}{1 - x^2}$$

aus; diese Formeln zeigen, daß die Größen

$$(8) \qquad P_n x, \quad \frac{(1-x^2)P'_n x}{n}$$

im Grundgebiet zwischen festen von n unabhängigen endlichen Grenzen liegen.

Ist nun die Funktion fx zwischen den Stellen $x = a$ und $x = b$ stetig und hat sie im ganzen Grundgebiet eine stückweise stetige Ableitung, so kann man setzen:

$$\int_a^b P_n\alpha . f\alpha . d\alpha = -\frac{1}{n(n+1)}\int_a^b f\alpha \cdot \frac{d}{d\alpha}\left[(1-\alpha^2)P'_n\alpha\right] d\alpha$$

$$= \frac{-(1-\alpha^2)f\alpha . P'_n\alpha}{n(n+1)}\Bigg|_{a+0}^{b-0} + \frac{1}{n(n+1)}\int_a^b f'\alpha . (1-\alpha^2)P'_n\alpha . d\alpha .$$

Diese Gleichung zeigt wegen der abgeleiteten Eigenschaft der Größen (8), daß die Größe

$$n\int_{-1}^{+1} P_n\alpha . f\alpha . d\alpha$$

zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. Daraus folgt weiter, daß man

$$\frac{\varphi_n x}{\lambda_n}\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha . f\alpha . d\alpha = \frac{(n+\frac{1}{2})P_n x}{n(n+1)}\int_{-1}^{+1} P_n\alpha . f\alpha . d\alpha = \frac{\Psi}{n^2}$$

setzen kann, wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. Damit ist die Reihe R als gleichmäßig konvergent erwiesen.

Hieraus folgen auf Grund der Gleichung (5) die Beziehungen

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha . [R\alpha - F\alpha]\, d\alpha = 0;$$

da ferner die Legendresche Differentialgleichung die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_n\alpha . d\alpha = 0$$

ergibt, so folgt auf Grund der Gleichung (6)

$$\int_{-1}^{+1}[R\alpha - F\alpha]\, d\alpha = 0.$$

Die Differenz $R - F$ ist also zu allen Eigenfunktionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x, \ldots$ und zur Konstanten orthogonal, also Null:

$$Fx = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int_{-1}^{+1} f\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha = \sum_n \varphi_n x \int_{-1}^{+1} F\alpha \,.\, \varphi_n \alpha \,.\, d\alpha.$$

Damit ist gezeigt, daß die in der Form Fx darstellbaren Funktionen sich in eine auf dem Grundgebiet gleichmäßig konvergente Reihe nach den Legendreschen Polynomen $P_1 x$, $P_2 x, \ldots$ entwickeln lassen.

Um dies Resultat in eine brauchbare Form zu bringen, nehmen wir an, die Funktion Φx sei im Grundgebiet mit ihren ersten Ableitungen stetig, habe eine stückweise stetige zweite und dritte Ableitung und erfülle die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \Phi\alpha \,.\, d\alpha = 0; \tag{9}$$

setzt man dann

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\,\Phi' x\right] = fx,$$

so hat diese Größe die soeben von fx verlangte Beschaffenheit. Bildet man mit ihr die Größe Fx, so findet man leicht

$$\frac{d}{dx}\{(1 - x^2)\,[\Phi' x - F' x]\} = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} (\Phi\alpha - F\alpha)\, d\alpha = 0, \tag{10}$$

und die Differenz $\Phi - F$ ist eine mit ihrer ersten Ableitung im Grundgebiet stetige Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

Sie muß also eine Konstante sein, die wegen der zweiten Gleichung (10) den Wert 0 hat. Das heißt: eine Funktion Φx ist quellenmäßig darstellbar mit einer Funktion fx, deren Ableitung von $x = -1$ bis $x = +1$ stückweise stetig ist.

Da endlich die Bedingung (9), wenn sie nicht gilt, erfüllt werden kann, indem man die Funktion Φx um eine Konstante vermehrt, so sieht man, daß jede Funktion Φx, die im Grundgebiet mit ihrer ersten Ableitung stetig ist und stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt, in eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 P_1 x + a_2 P_2 x + \cdots$$

entwickelt werden kann, die im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert.

§ 29.

Die bilineare Formel in Legendreschen Polynomen.

Aus dem erhaltenen Entwickelungssatze kann die bilineare Formel

$$K(x, y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n} = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \cdot P_n y}{n(n+1)}$$

abgeleitet werden, indem man von der folgenden asymptotischen Darstellung Gebrauch macht:

$$(1)\quad P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left\{\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\,\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\}.$$

In dieser bedeutet θ einen Winkel, für den $|\sin\theta|$ über einer festen Grenze g bleibt, und Ψ eine Größe, die zwischen festen, von n unabhängigen Schranken liegt, sobald die Größe g festgelegt ist. Setzen wir $y = \cos\theta$, so bleibt dieser Wert um ein festes Stück von $+1$ und -1 entfernt, das aber mit g beliebig klein gemacht werden kann.

Die Formel (1) ergibt nun, da die Größen P_n im Grundgebiete zwischen gewissen von n unabhängigen Grenzen liegen, unmittelbar:

$$\frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \cdot P_n y}{n(n+1)} = \frac{\Psi}{n^{3/2}};$$

die bilineare Reihe konvergiert also unter der bezüglich der Größe y aufgestellten Voraussetzung gleichmäßig, wobei die Größe x das ganze Grundgebiet durchlaufen darf. Man kann daher die Reihen

$$Q(x, y) = K(x, y) - \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n},$$

$$P_m x \cdot \left[K(x, y) - \sum_n \frac{\varphi_n x \cdot \varphi_n y}{\lambda_n}\right]$$

nach x über das Grundgebiet gliedweise integrieren und erhält auf Grund der geltenden Integralgleichung

$$\int_{-1}^{+1} Q(x, y) P_m x \, . \, dx = 0.$$

Da ferner auch die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} K(x, y)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n x \,.\, dx = 0$$

gelten, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} Q(x, y)\, dx = 0.$$

Die Größe Q ist also zu allen Legendreschen Polynomen und zur Konstanten $P_0 x$ orthogonal, und muß nach § 28 identisch verschwinden. Damit sind die Formeln

$$x \leqq y, \quad -\tfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+y)] - \tfrac{1}{2} + \log 2 = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)}$$

$$x \geqq y, \quad -\tfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-y)] - \tfrac{1}{2} + \log 2 = \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x \,.\, P_n y}{n(n+1)}$$

zunächst unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Größe y von $+1$ und -1 um ein endliches Stück verschieden bleibt, also für jeden von $+1$ und -1 verschiedenen Wert von y, während x das ganze Grundgebiet durchlaufen, also auch die Werte ± 1 annehmen darf. Aus der Symmetrie der erhaltenen Formeln bezüglich der Größen x und y folgt dann, daß auch y im ganzen Grundgebiet beliebig gewählt werden darf.

Setzt man demgemäß $y = \pm 1$ und berücksichtigt die Gleichungen

$$P_n(+1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n,$$

so erhält man die Formeln:

$$(2) \qquad \begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} + \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}) P_n x}{n(n+1)}, \\ -\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} + \sum_n^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})(-1)^n P_n x}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Die bilineare Formel kann als Entwickelung einer Funktion, deren Ableitung unstetig ist, nach den Eigenfunktionen aufgefaßt werden. Daraus schließt man nach der in § 5 gebrauchten Methode, daß in derselben Weise auch eine Funktion zu entwickeln ist, deren erste Ableitung eine beliebige endliche Anzahl von Unstetigkeiten aufweist, z. B. eine Funktion, die geometrisch durch eine polygonale Linie dargestellt wird. Nach der im § 6 benutzten Methode erschließt man hieraus die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} (f\alpha)^2 \, d\alpha = a_0^2 + \sum_n^{1,\infty} a_n^2,$$

in der $f\alpha$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet und gesetzt ist

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} f\alpha . d\alpha, \qquad a_n = \sqrt{n + \tfrac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} f\alpha . P_n \alpha . d\alpha.$$

Man kann, ohne neue Hilfsmittel zu benutzen, noch einen Schritt weiter gehen und die Gleichung

$$\frac{\partial K(x, x_1)}{\partial x} = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n' x . \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

beweisen. Aus der Formel (1) und der Identität (7) des § 28 findet man nämlich, wenn

$$x = \cos\theta, \quad x_1 = \cos\theta_1$$

gesetzt wird, und Ψ dieselbe Bedeutung wie oben hat,

$$\frac{\varphi_n' x . \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

$$= \frac{-2\cos\theta}{n\pi \sin^2\theta \sqrt{\sin\theta \sin\theta_1}} \left\{ \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right] \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n} \right\}$$

$$(3) + \frac{2}{n\pi \sin^2\theta \sqrt{\sin\theta \sin\theta_1}} \left\{ \cos\left[(n-\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right] \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n} \right\}$$

$$= \frac{A}{n} \sin n(\theta + \theta_1) + \frac{B}{n} \sin n(\theta - \theta_1) + \frac{C}{n} \cos n(\theta + \theta_1)$$

$$+ \frac{D}{n} \cos n(\theta - \theta_1) + \frac{\Psi}{n^2},$$

wobei A, B, C, D von n unabhängig sind und zwischen festen von θ und θ_1 unabhängigen Grenzen liegen, sobald die Größen θ, θ_1, $\pi - \theta$, und $\pi - \theta_1$ über beliebig klein fixierten positiven Grenzen verbleiben.

Nun konvergieren die Reihen

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin nu}{n}, \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos nu}{n}$$

bekanntlich gleichmäßig unter der Voraussetzung

$$c < u < 2\pi - c_1,$$

wenn c und c_1 beliebig kleine positive Werte sind; anderseits sind die Winkel θ und θ_1 in Grenzen von der Form c und

$\pi - c_1$ eingeschlossen, so daß eine Beziehung von der Form

$$c < \theta + \theta_1 < 2\pi - c_1$$

gilt. Setzen wir daher noch fest, daß $|x_1 - x|$ und damit $|\theta - \theta_1|$ über einer festen, beliebig kleinen positiven Grenze bleibt, so hat man auch eine Beziehung von der Form

$$c < |\theta - \theta_1| < 2\pi - c_1,$$

und jetzt konvergieren die Reihen

$$\sum_n \frac{\sin(\theta + \theta_1) n}{n}, \quad \sum_n \frac{\cos n(\theta + \theta_1)}{n},$$

$$\sum_n \frac{\sin n(\theta - \theta_1)}{n}, \quad \sum_n \frac{\cos n(\theta - \theta_1)}{n}$$

gleichmäßig. Mithin gilt, wie die Gleichung (3) zeigt, dasselbe von der Reihe

$$\sum_n \frac{\varphi'_n x \,.\, \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

unter der Annahme

$$-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \quad -1 + \varepsilon_1 < x_1 < 1 - \varepsilon_1, \quad |x_1 - x| > \varepsilon_2,$$

wobei ε, ε_1 und ε_2 beliebig kleine positive Größen sind.

Damit ist die Gleichung

$$\frac{\partial K(x, x_1)}{\partial x} = \sum_n \frac{\varphi'_n x \,.\, \varphi_n x_1}{\lambda_n}$$

erwiesen; explizit hat sie folgende Formen. Für $x < x_1$ erhält man

$$\frac{1}{2(1-x)} = \sum_n^{1,\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P'_n x \,.\, P_n x_1;$$

für $x > x_1$

$$\frac{-1}{2(1+x)} = \sum_n^{1,\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P'_n x \,.\, P_n x_1.$$

Die rechts erhaltene Reihe stellt also eine unstetige Funktion von x_1 dar, die an der Stelle $x_1 = x$ einen Sprung macht gemäß der Gleichung

$$f(x - 0) - f(x + 0) = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{-1}{2(1+x)} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Hieraus ersieht man nach der in § 5 angewandten Methode leicht, daß jede Funktion, die mit ihren ersten drei Ableitungen auf dem Grundgebiete stückweise stetig ist, nach den Legendreschen Polynomen entwickelt werden kann.

Vierter Abschnitt.

Wärmeleitung und Schwingungen in Gebieten von zwei oder drei Dimensionen.

§ 30.

Die Poissonsche Gleichung.

Wir bezeichnen eine Funktion als stückweise stetig in einem zwei- oder dreidimensionalen Gebiete, wenn dieses in eine endliche Anzahl von Teilgebieten zerfällt, innerhalb deren die Funktion stetig ist, während sie bestimmten Grenzwerten zustrebt, wenn man sich den die Teilgebiete trennenden Linien nähert. Sagen wir, eine Funktion sei mit ihren Ableitungen stückweise stetig, so ist dies so zu verstehen, daß die Ableitungen im Innern der Teilgebiete existieren und in demselben Sinne wie die Funktion stetig sind; in den Trennungslinien selbst wird die Funktion, weil unstetig, keine eindeutig definierten Ableitungen besitzen.

Wir bezeichnen ferner in diesem Abschnitt die Stellen eines Gebietes durch 0, 1, 2, ...; die Elemente des Raumes, der Fläche und der Linie seien $d\tau$, ds, dl. Diese, wie überhaupt die weiter eingeführten von einer oder mehreren Stellen abhängigen Größen werden mit dem Index der Stelle oder der Stellen versehen, auf die sie sich beziehen, so daß z. B. r_{01} die Entfernung der Stellen 0 und 1, $d\tau_1$ das Element, in welchem die Stelle 1 liegt, $f1$ den Wert der Funktion f in der Stelle 1 bedeutet usf. Der Index 0 soll, wo keine Zweideutigkeit entsteht, weggelassen werden, so daß $d\tau$, ds immer Elemente sind, die die jeweils betrachtete Stelle 0 enthalten.

Irgend ein Gebiet von zwei oder drei Dimensionen wird als Grundgebiet bezeichnet und festgehalten und auf dieses beziehe sich immer das unbestimmte Integralzeichen. Das Integrationselement zeigt dann durch die Bezeichnung immer an, wieviel Dimensionen das Grundgebiet besitzt; ist es eben, so bezeichnen wir es durch $\mathfrak{E}$ und die umgrenzende Linie durch $\mathfrak{C}$; handelt es sich um ein Raumgebiet, so heißt dasselbe $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{F}$ ist die einschließende Oberfläche. Die auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ bezüglichen Größen wollen wir allgemein überstreichen. Die Grenzlinien des Grundgebietes und der Teilgebiete, die bei stückweise stetigen Funktionen eingeführt werden, seien insoweit frei von Singularitäten, daß diese Gebiete als Integrationsgebiete vielfacher Integrale benutzt werden können.

Vielfach werden wir Potentiale von der Form

$$\int \frac{\varrho\, d\tau}{r_{01}} = F1, \quad \int \log \frac{1}{r_{01}}\, ds = \Phi 1$$

zu betrachten haben; sie besitzen die gewöhnlich in der Potentialtheorie benutzten Eigenschaften, wenn ϱ im Integrationsgebiete stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Dann sind die Potentiale und ihre ersten Ableitungen im ganzen Raume oder in der ganzen Ebene stetig und ihre Ableitungen können gebildet werden, indem man das Differentiationszeichen dem Integranden einfügt, z. B. wenn x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten sind,

$$\frac{\partial \Phi 1}{\partial x_1} = \int \varrho \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{1}{r_{01}}\, ds.$$

Diese Eigenschaften sind schon gesichert, wenn die Dichtigkeit ϱ nur als stetig vorausgesetzt wird. Hat sie auch stetige erste Ableitungen, so existieren die zweiten Ableitungen des Potentials und sind im Innern des mit Masse belegten Gebietes sowie in jedem von Masse freien Gebiet stetig, so daß die Größe

$$\Delta_1 F1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}$$

oder auch, wenn $F0 = F$ gesetzt wird, die Größe

$$\Delta_0 F = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

gebildet werden kann und stetig ist. Die Gaussische Integraltransformation erhält dann im Raume die Form

$$\int d\tau . \Delta F = \int_{\mathfrak{F}} \frac{dF}{dN}\, d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ das Element der Oberfläche $\mathfrak{F}$, N die äußere Normale bedeutet. In der Ebene hat man ähnlich

$$\int ds . \Delta \Phi = \int_{\mathfrak{C}} dl \frac{d\Phi}{dN}.$$

Alle diese Eigenschaften bleiben offenbar erhalten, wenn die Größe ϱ mit ihren ersten Ableitungen im betrachteten Gebiete stückweise stetig ist. Dann setzen sich nur die Potentiale aus einer endlichen Anzahl solcher, in denen die Dichtigkeit mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, additiv zusammen.

Das wichtigste Hilfsmittel unserer ferneren Untersuchungen ist nun die Poissonsche Formel:

$$\Delta_1 \int \varrho \frac{d\tau}{r_{01}} = -4\pi\varrho_1,$$

$$\Delta_1 \int \varrho \log\left(\frac{1}{r_{01}}\right) ds = -2\pi\varrho_1.$$

Ist ϱ stückweise stetig, so verlieren diese Gleichungen nur in den Unstetigkeitslinien ihren Sinn; nähert man sich aber diesen Linien, so streben beide Seiten dieser Gleichungen bestimmten endlichen Grenzwerten zu.

Weshalb gerade diese Formeln für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung sind, erkennt man leicht, indem man das Element des das Potential darstellenden Integrals im Sinne der Theorie der Wärmeleitung deutet.

Im Raume kann die Größe

$$\frac{1}{4\pi r_{01}},$$

in der Ebene die Größe

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}},$$

multipliziert mit einer beliebigen konstanten C, als die stationäre Temperatur angesehen werden, die eine an der Stelle 1 befindliche Wärmequelle hervorruft; die Konstante C nennen wir die Ergiebigkeit der Quelle. Setzen wir $C = 1$, so ist die Wärmemenge, die im ersten Falle durch eine Kugel, im zweiten durch einen Kreis vom Radius r_{01} hindurchtritt, die eine oder andere der Größen

$$-\frac{d}{dr_{01}}\left(\frac{1}{4\pi r_{01}}\right)\cdot 4\pi r_{01}^2 = 1,$$

$$-\frac{d}{dr_{01}}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right)\cdot 2\pi r_{01} = 1,$$

multipliziert mit einer Konstanten des leitenden Mittels. Dieselbe Wärmemenge tritt durch eine beliebige geschlossene, die Quelle umschließende Fläche $\mathfrak{F}'$ oder Kurve $\mathfrak{C}'$, die überall stetig gekrümmt seien, und man erhält so die Gleichungen

$$-\int_{\mathfrak{F}'} ds\,\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{4\pi r_{01}}\right) = 1, \qquad -\int_{\mathfrak{C}'} dl\,\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right) = 1,$$

Wir beschränken nun den Punkt 1, indem wir ihn variabel machen, auf das Grundgebiet und nehmen an, die dieses umschließende Fläche $\mathfrak{F}$ oder Kurve $\mathfrak{C}$ liege innerhalb der Fläche $\mathfrak{F}'$ oder Kurve $\mathfrak{C}'$. In beiden Fällen ergibt sich durch Integration:

$$-\int_{\mathfrak{R}} d\tau_1 \int_{\mathfrak{F}'} \frac{d}{dN}\,\frac{\varrho_1}{4\pi r_{01}}\,ds = \int_{\mathfrak{R}} \varrho_1\,d\tau_1,$$

$$-\int_{\mathfrak{C}} ds_1 \int_{\mathfrak{C}'} \frac{d}{dN}\left(\frac{\varrho_1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\right) dl = \int_{\mathfrak{C}} \varrho_1\,ds_1.$$

Da nun r_{01} in diesen Integralen stets von Null verschieden bleibt, so kann man die Integrationen vertauschen. Setzt man daher entsprechend beiden Fällen eine der Gleichungen

$$U = \int \frac{\varrho_1\,d\tau_1}{4\pi r_{01}}, \qquad U = \int \frac{\varrho_1\,ds_1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r_{01}}\right)$$

an, so daß U Funktion der Stelle 0 ist, so folgt

$$(1)\qquad \int_{\mathfrak{F}'} ds\,\frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{R}} \varrho_1\,d\tau_1, \qquad \int_{\mathfrak{C}'} dl\,\frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{C}} \varrho_1\,ds_1.$$

Dabei kann die Größe U offenbar auch als Temperatur angesehen werden, die erhalten wird, wenn das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{C}$ mit Wärmequellen erfüllt ist, deren Ergiebigkeit ϱ_1 ist.

Jetzt gehe die Fläche $\mathfrak{F}'$ stetig in die Fläche $\mathfrak{F}$ über, so daß jeder Punkt der ersteren mit seiner Richtung N stetig in einen Punkt der letzteren mit der zugehörigen äußeren Normale übergeht. Wenn dann die Größe ϱ mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetig ist, so geht nach den oben erwähnten Sätzen der Potentialtheorie die Größe dU/dN stetig in die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ gebildete $\overline{dU/dN}$ über, die ihrerseits eine stetige Funktion des Ortes ist; daraus folgt, daß der Grenzübergang

$$\lim \frac{dU}{dN} = \overline{\frac{dU}{dN}}$$

auf der ganzen Fläche $\mathfrak{F}$ gleichmäßig konvergiert, und daß daher die Gleichung

$$(2)\qquad \lim \int_{\mathfrak{F}'} ds\,\frac{dU}{dN} = \int_{\mathfrak{F}} ds\,\overline{\frac{dU}{dN}}$$

gilt. Analog hat man in der Ebene die Gleichung

$$\lim \int_{\mathfrak{C}'} dl \frac{dU}{dN} = \int_{\mathfrak{C}} dl \frac{\overline{dU}}{dN}, \tag{3}$$

und die Gleichungen (1) ergeben

$$\int_{\mathfrak{F}} ds \frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{R}} \varrho\, d\tau, \quad \int_{\mathfrak{C}} dl \frac{dU}{dN} = -\int_{\mathfrak{C}} \varrho\, ds. \tag{4}$$

Die Gleichungen (1) und (4) sind anschaulich evident, wenn man U als stationäre Temperatur deutet; sie sagen dann aus, daß die durch den Rand des Quellengebietes fließende Wärmemenge dieselbe ist wie diejenige, die durch eine jenes Gebiet umfassende Fläche oder Kurve hindurch tritt.

In den Gleichungen (2) und (3) können nun $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{C}$ als die Grenzen beliebiger mit Masse oder Quellen erfüllter Gebiete $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{C}$ betrachtet werden.

Die Gaussische Integraltransformation lehrt

$$\int_{\mathfrak{F}} \frac{dU}{dN} ds = \int_{\mathfrak{R}} \Delta U\, d\tau, \quad \int_{\mathfrak{C}} \frac{dU}{dN} dl = \int_{\mathfrak{C}} \Delta U\, ds;$$

hieraus folgt nach den Gleichungen (4)

$$\int_{\mathfrak{R}} \Delta U\, d\tau = -\int_{\mathfrak{R}} \varrho\, d\tau, \quad \int_{\mathfrak{C}} \Delta U\, ds = -\int_{\mathfrak{C}} \varrho\, ds.$$

Läßt man endlich die Gebiete $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{C}$ in einen Punkt zusammenschrumpfen, so folgt, da ΔU eine stetige Funktion des Ortes im Innern dieser Gebiete ist, die Poissonsche Gleichung

$$\Delta U = \Delta \int_{\mathfrak{R}} \frac{\varrho_1\, d\tau_1}{4\pi r_{01}} = -\varrho, \quad \Delta U = \Delta \int_{\mathfrak{C}} \frac{\varrho_1\, ds_1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} = -\varrho,$$

wobei die Zeichen ohne Index sich stets auf die Stelle 0 beziehen.

Die Poissonsche Formel bleibt auch, wovon wir später Gebrauch machen, gültig, wenn ϱ an der Stelle 2 im Gebiet $\mathfrak{C}$ unendlich wird wie $-\log r_{02}$, im Gebiet $\mathfrak{R}$ wie $1/r_{02}$. Dann enthält das Potential U z. B. im Falle des ebenen Gebietes einen Summanden von der Form

$$J = \text{const.} \int_{r_{20} < a} ds \log \frac{1}{r_{20}} \log \frac{1}{r_{10}},$$

in dem a eine positive beliebig klein gewählte Konstante und kleiner als r_{12} sei. Dieser Ausdruck kann offenbar als Potential einer Kreisfläche angesehen werden, auf der die Dichtigkeit allein durch den Abstand vom Mittelpunkt bestimmt ist. Da nun das Potential eines unendlich schmalen Kreisrings mit dem Mittelpunkt 2 und konstanter Dichtigkeit in der Form const. $\log(1/r_{20})$ geschrieben werden kann, so gilt dasselbe vom Potential der Kreisfläche, wenn die Potentiale der Ringe summiert werden können, oder die Größe J endlich ist. Dies folgt leicht, wenn wir das Element ds in die Form

$$ds = r_{20}\,dr_{20}\,dl \tag{5}$$

bringen, wobei dl ein Element des Kreises mit dem Radius Eins ist, der in der Stelle 2 seinen Mittelpunkt hat; das Integral

$$\int x \log x\,dx$$

ist ja endlich, auch wenn die untere Grenze $x = 0$ genommen wird und $\log r_{10}$ bleibt im Integrationsgebiet endlich.

Aus der angegebenen Form der Größe J folgt unmittelbar

$$\Delta_1 J = \Delta_1 \left(\text{const. } \log \frac{1}{r_{21}}\right) = 0.$$

Bildet man also die Größe $\Delta_1 U1$, so ergibt die Umgebung der Stelle 2 ebensowenig einen Beitrag, wie irgend ein den Punkt 1 nicht enthaltendes Gebiet, und die Poissonsche Formel bleibt an jeder von 2 verschiedenen Stelle richtig.

Dieselben Schlüsse gelten für den Fall des Gebietes $\mathfrak{R}$, indem man die Formel (5) durch die folgende ersetzt:

$$d\tau = r_{20}^2\,dr_{20}\,d\sigma;$$

dabei bedeutet $d\sigma$ das Element der Kugeloberfläche vom Radius Eins, deren Mittelpunkt 2 ist.

§ 31.

Die Greensche Funktion als Kern einer Integralgleichung.

Die Poissonsche Gleichung bildet die Grundlage für die Theorie der Greenschen Funktion und ihre Anwendung als Kern einer Integralgleichung.

Für die Fläche $\mathfrak{E}$ werde die Greensche Funktion $K(0, 1)$ wie folgt definiert. Allgemein gelte die Differentialgleichung

$$\Delta K(0, 1) = \Delta_0 K(0, 1) = 0;$$

ferner sei

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + M(0, 1),$$

wobei M eine im ganzen Grundgebiet stetige Funktion von 0 und 1 bedeutet. Endlich sei an der Randlinie $\mathfrak{C}$ eine Randbedingung von einer der Formen

$$\overline{K(0, 1)} = 0, \quad \overline{\frac{dK(0, 1)}{dN} + hK(0, 1)} = 0 \tag{1}$$

erfüllt, in der h eine positive Konstante und N wie oben die äußere Normale bedeute.

Daß die so definierte Funktion zweier Stellen existiert und als Funktion der Stelle 0 mit ihren ersten und zweiten Ableitungen außerhalb der Stelle 1 im Grundgebiet stetig ist, folgt in den speziellen Fällen, die wir untersuchen, aus dem expliziten Ausdruck, der jeweils angegeben wird. Für allgemeinere Grundgebiete werden diese Tatsachen im fünften Abschnitt abgeleitet.

Die Funktion $K(0, 1)$ ist die an der Stelle 0 herrschende stationäre Temperatur, die von einer im Punkte 1 befindlichen Quelle herrührt, wenn die Randlinie entweder auf der konstanten Temperatur Null gehalten wird, oder in einer durch h bestimmten Weise die Wärme ausstrahlt. Man kann die Größe $K(0, 1)$ aber auch mechanisch deuten, indem man davon ausgeht, daß die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

in der a eine Konstante bedeutet, für die Verrückung u gilt, wenn wir die Fläche $\mathfrak{C}$ als elastische Membran betrachten, und die Randbedingung ist einfach

$$\bar{u} = 0,$$

wenn die Membran am Rande befestigt ist. Soll nun die Membran eine Ruhelage einnehmen, die von der ursprünglichen verschieden ist, also für u nicht überall den Wert Null ergibt, so hat man die Gleichungen

$$\Delta u = 0, \quad \bar{u} = 0, \tag{2}$$

die nur dann eine nicht identisch verschwindende Lösung haben, wenn u an einer Stelle 1 unstetig ist. Als einfachste Funktion, die die erste Gleichung (2) erfüllt und unstetig ist, bietet sich der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}}$$

dar; versuchen wir, bei der Größe u diese Unstetigkeit anzubringen, so führen die Gleichungen (2) genau auf die vorhin definierte Größe $K(0, 1)$. Als Verrückung könnte sie auftreten, wenn man die Membran im Punkte 1 mit einer Nadel aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt; sie erhält dann in der Umgebung dieses Punktes eine dornartige Gestalt. Jedenfalls aber hätte man eine Verrückung und eine neue Gleichgewichtslage hergestellt, die zu den in § 9 betrachteten gehört. Es ist also nach den dort durchgeführten Erwägungen zu erwarten, daß die bei der Schwingung der Membran auftretenden Eigenfunktionen eine homogene Integralgleichung erfüllen, deren Kern die Größe $K(0, 1)$ ist, und das bestätigt sich in der Tat.

Um dies einzusehen, erinnern wir daran, daß zunächst die Größe $K(0, 1)$ leicht als symmetrisch bezüglich der beiden Stellen 0 und 1 erkannt wird. Beschreibt man nämlich um die Stellen 1 und 2 beliebig kleine dem Innern der Fläche $\mathfrak{E}$ angehörige Kreislinien und wendet auf das Gebiet $\mathfrak{E}'$, aus dem diese Kreise ausgeschieden sind, die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) = \Delta_0 K(0, 2) = 0,$$

$$\int ds \{ K(0, 1) \Delta K(0, 2) - K(0, 2) \Delta K(0, 1) \} = 0$$

an, so findet man nach dem Greenschen Satze

$$(3) \qquad \int dl \left[K(0, 1) \frac{dK(0, 2)}{dN} - K(0, 2) \frac{dK(0, 1)}{dN} \right] = 0,$$

wobei über $\mathfrak{C}$ und die beiden Kreislinien zu integrieren ist, und an letzteren die Gleichungen

$$\frac{d}{dN} = -\frac{d}{dr_{01}}, \quad \frac{d}{dN} = -\frac{d}{dr_{02}}$$

gelten. Läßt man die Radien der Kreise unendlich abnehmen, so kann man auf ihnen mit immer wachsender Annäherung setzen

$$\frac{dK(0, 2)}{dN} = -\frac{d}{dr_{02}} \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{02}} \right) = \frac{1}{2\pi r_{02}},$$

$$\frac{dK(0, 1)}{dN} = -\frac{d}{dr_{01}} \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} \right) = \frac{1}{2\pi r_{01}},$$

und der Beitrag der Kreislinien zu dem Integral (3) nähert sich der Grenze

$$(4) \qquad K(2, 1) - K(1, 2).$$

An der Kurve $\mathfrak{C}$ aber gilt die Gleichung

$$K(0, 1)\,\frac{dK(0,2)}{dN} - K(0, 2)\,\frac{dK(0, 1)}{dN} = 0,$$

da $K(0, 1)$ und $K(0, 2)$ dieselbe der Grenzbedingungen (1) erfüllen. Somit reduziert sich das Integral (3) schließlich auf die Differenz (4) und man findet

$$K(1, 2) = K(2, 1).$$

Nun sei die Aufgabe vorgelegt, die Wärmeleitung in der Fläche $\mathfrak{E}$ oder die Schwingungen der als Membran gedachten Fläche $\mathfrak{E}$ zu untersuchen. Dann hat man für die Temperatur im ersten Falle die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \varDelta u,$$

für die Verrückung im zweiten Falle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varDelta u,$$

wobei a^2 eine Konstante bedeutet, und es ist eine der Randbedingungen

$$\bar{u} = 0, \quad \overline{\frac{du}{dN} + hu} = 0 \quad (h > 0)$$

vorgeschrieben; der Fall $h = 0$, in dem das Randgebiet adiatherman bedeckt ist, erfordert besondere Methoden nach Analogie des § 16 und werde zunächst ausgeschlossen.

Versucht man, die an die Größe u gestellten Forderungen zu erfüllen, indem man u in ein Produkt aus einem nur von der Zeit und einem nur vom Punkte 0 abhängigen Faktor zerlegt, so ergibt sich für letzteren die Gleichung

$$\varDelta \varphi + \lambda \varphi = 0,$$

in der λ eine unbekannte Konstante ist, und eine der Randbedingungen

$$\bar{\varphi} = 0, \quad \overline{\frac{d\varphi}{dN} + h\varphi} = 0.$$

Versteht man ferner unter $K(0, 1)$ diejenige Greensche Funktion, die derselben Randbedingung wie die Größe φ unterliegt, so gilt die Beziehung

$$\overline{\varphi\,\frac{dK(0, 1)}{dN} - K(0, 1)\,\frac{d\varphi}{dN}} = 0.$$

Berücksichtigt man daher die Gleichung

$$\varDelta K(0, 1) = 0$$

und bildet das Integral

$$(5)\quad \begin{aligned} -\lambda \int K(0, 1)\varphi\, ds &= \int [K(0, 1)\varDelta\varphi - \varphi\varDelta K(0, 1)]\, ds \\ &= \int \left[K(0, 1)\frac{d\varphi}{dN} - \varphi\frac{dK(0, 1)}{dN}\right] dl \end{aligned}$$

über das Gebiet $\mathfrak{G}$ mit Ausschluß eines Kreises $\mathfrak{K}$ um den Mittelpunkt 1, indem man durch N stets die äußere Normale dieses Gebietes bezeichnet, so kann man rechts die Integration auf die Kreislinie $\mathfrak{K}$ beschränken. Läßt man den Radius derselben abnehmen, so erhält man die angenäherten Gleichungen

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}, \quad \frac{dK(0, 1)}{dN} = -\frac{dK(0, 1)}{dr_{01}} = \frac{1}{2\pi r_{01}},$$

und in der Grenze erhält man aus der Gleichung (5)

$$(6)\quad \lambda \int K(0, 1)\varphi 0 . ds = \varphi 1,$$

womit die erwartete Integralgleichung abgeleitet ist.

Ist umgekehrt $\varphi 0$ irgend eine im Grundgebiet stetige Lösung dieser Gleichung, so schreiben wir sie in der Form

$$(7)\quad \frac{\varphi 1}{\lambda} = \int \frac{\varphi 0}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}}\, ds + \int \varphi 0 . M(0, 1)\, ds.$$

Dann hat zunächst der zweite Summand der rechten Seite stetige erste Ableitungen, da dies von $M(0, 1)$ ebenso wie von der Greenschen Funktion $K(0, 1)$ außerhalb der singulären Stelle gilt. Der erste Summand der letzten Gleichung hat aber ebenfalls stetige erste Ableitungen, da er als logarithmisches Potential mit der Dichtigkeit $\varphi 0 / 2\pi$ angesehen werden kann, die ersten Ableitungen des Potentials aber, wie in § 30 erwähnt wurde, schon stetig sind, wenn die Dichtigkeit nur als stetig vorausgesetzt wird. Da somit die Größe $\varphi 0$ stetige erste Ableitungen besitzt, kann auf die rechte Seite der Gleichung (7) die Poissonsche Formel angewandt werden, und da offenbar die Gleichung

$$\varDelta_1 M(0, 1) = \varDelta_1 K(0, 1) = 0$$

gilt, erhält man aus der Gleichung (7)

$$\varDelta_1 \varphi 1 = -\lambda\varphi 1, \quad \varDelta\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

Daß ferner die Funktion φ dieselbe Randbedingung erfüllt, wie die Greensche Funktion, zeigen die Gleichungen (6), (7) und die in § 30 angegebene Form der ersten Ableitungen des Potentials unmittelbar.

Auf die Gleichung (6) sind nun freilich die allgemeinen im ersten Abschnitt aufgestellten Sätze über Integralgleichungen nicht ohne weiteres anzuwenden, weil der Kern im Grundgebiet unendlich wird. Aber eine Haupteigenschaft der Eigenfunktionen ist leicht nachzuweisen, daß nämlich zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige zu einander orthogonal sind. In der Tat erfüllen irgend zwei Eigenfunktionen die Differentialgleichungen

$$\lambda_n \varphi_n + \varDelta \varphi_n = 0, \qquad \lambda_m \varphi_m + \varDelta \varphi_m = 0$$

und aus diesen folgt sofort

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int \varphi_n \varphi_m \, ds + \int (\varphi_n \varDelta \varphi_m - \varphi_m \varDelta \varphi_n) \, ds = 0.$$

Formt man das letzte Integral nach dem Greenschen Satze um und bedenkt, daß wegen der allen Eigenfunktionen gemeinsamen Randbedingung die Gleichung

$$\overline{\varphi_n \frac{d \varphi_m}{dN} - \varphi_m \frac{d \varphi_n}{dN}} = 0$$

gilt, so folgt

$$(8) \qquad (\lambda_m - \lambda_n) \int \varphi_m \varphi_n \, ds = 0,$$

und, da $\lambda_m - \lambda_n$ nicht verschwindet,

$$\int \varphi_n \varphi_m \, ds = 0,$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Hieraus kann man weiter ableiten, daß die Eigenwerte reell und positiv sein müssen. Denn die Greensche Formel ist auch auf komplexe Werte der Funktionen des Ortes anzuwenden, wie die Identität

$$\begin{aligned} &\int ds \left[(\varphi + \Phi i) \varDelta (\psi + \Psi i) - (\psi + \Psi i) \varDelta (\varphi + \Phi i) \right] \\ &= \int ds (\varphi \varDelta \psi - \psi \varDelta \varphi) - \int ds (\Phi \varDelta \Psi - \Psi \varDelta \Phi) \\ &+ i \int ds (\varphi \varDelta \Psi - \Psi \varDelta \varphi) + i \int ds (\Phi \varDelta \psi - \psi \varDelta \Phi) \end{aligned}$$

zeigt in Verbindung mit derjenigen, die entsteht, wenn man ds und $\varDelta$ durch dl und d/dN ersetzt. Wäre nun ein komplexer Eigenwert vorhanden, so wären auch die ihm und der zugehörigen Eigenfunktion konjugierten Größen Eigenwert und Eigenfunktion; wendet man auf die beiden Eigenfunktionen die obige Argumentation an. so erhält man wiederum die Gleichung (8), in der φ_n und φ_m konjugiert imaginäre Größen sind, und λ_m von λ_n verschieden ist.

Das ist aber unmöglich, wenn die Eigenfunktionen nicht identisch verschwinden. Die Eigenwerte sind also reell.

Benutzt man endlich die aus der Gaussischen Integraltransformation folgende Gleichung

$$\int ds \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \int \varphi \varDelta \varphi \, ds = \int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi \frac{d\varphi}{dN} \, dl,$$

indem man für φ eine Eigenfunktion nimmt, so folgt aus den Gleichungen

$$\varDelta \varphi + \lambda \varphi = 0, \quad \overline{\frac{d\varphi}{dN} + h\varphi = 0}$$

unmittelbar

$$\int ds \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = - h \int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi^2 dl + \lambda \int \varphi^2 ds,$$

woraus, da die Konstante h positiv ist, hervorgeht, daß λ nicht negativ sein kann. Die Eigenwerte sind also positiv.

Die ganze Argumentation dieses Paragraphen überträgt sich ohne weiteres auf das Gebiet $\mathfrak{R}$, indem man $\log 1/r_{01}$ überall durch $1/r_{01}$ ersetzt.

§ 32.

Quellenmäßige Funktionen; der ausgeartete Fall.

Wenn $f0$ eine mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetige Funktion des Ortes ist, so hat die Größe

$$F1 = \int K(0, 1) f0 . ds$$

den Charakter eines Potentials, ist also mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stetig; daß sie die Randbedingung der Greenschen Funktion $K(0,1)$ erfüllt, zeigt die in § 30 angegebene Form der ersten Ableitungen eines Potentials. Wir sagen, $F1$ sei quellenmäßig dargestellt oder kurz quellenmäßig.

Zerlegt man diese Größe auf Grund der Gleichung

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} + M(0, 1),$$

so ergeben die in § 31 an die Gleichung (7) geknüpften Schlüsse

$$\varDelta_1 F1 = \varDelta_1 \int \frac{f0}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} \, ds - \varDelta_1 \int M(0, 1) f0 . ds$$
$$= \varDelta_1 \int \frac{f0}{2\pi} \log \frac{1}{r_{01}} \, ds,$$

also, da bei den vorausgesetzten Eigenschaften der Größe $f0$ die Poissonsche Gleichung angewandt werden kann,

$$\varDelta_1 F1 = -f1$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\varDelta F0 = -f0.$$

Jetzt sei $\varPhi$ eine im Grundgebiet stetige Funktion des Ortes, die stetige erste und stückweise stetige zweite und dritte Ableitungen besitzt und die Randbedingung der Greenschen Funktion $K(0, 1)$ erfüllt. Dann ist die Größe

$$f0 = -\varDelta\varPhi 0$$

mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetig; bildet man also mit ihr die oben eingeführte Größe F, so findet man

$$\varDelta F0 = -f0, \quad \varDelta(F-\varPhi) = 0$$

und die Größe $F - \varPhi$ erfüllt ebenso wie F und $\varPhi$ eine der Gleichungen

$$\overline{F-\varPhi} = 0, \quad \overline{F-\varPhi + h\frac{d(F-\varPhi)}{dN}} = 0.$$

Nun gilt die Transformation

$$\int u\varDelta u\,ds + \int ds\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = \int_{\mathfrak{C}} u\frac{du}{dN}\,dl,$$

in der x, y rechtwinkelige Koordinaten bedeuten, sobald die Größe u mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, also z. B., wenn man $u = F - \varPhi$ setzt; hieraus folgt je nach der Form der geltenden Randbedingung

$$(1)\quad \int\left[\left(\frac{\partial(\varPhi-F)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varPhi-F)}{\partial y}\right)^2\right]ds = -h\int_{\mathfrak{C}}(\varPhi-F)^2\,dl,$$

oder

$$\int\left[\left(\frac{\partial(\varPhi-F)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varPhi-F)}{\partial y}\right)^2\right]ds = 0,$$

also in jedem Falle für das ganze Grundgebiet $\mathfrak{G}$

$$(2)\quad \varPhi 1 = F1 = \int K(0, 1)f0.ds.$$

Eine Funktion von den für $\varPhi$ vorausgesetzten Eigenschaften ist also quellenmäßig darstellbar.

Wie die durchgeführten Betrachtungen zu modifizieren sind, wenn die Randbedingung die Form

$$\overline{\frac{du}{dN}} = 0$$

hat, ist leicht zu übersehen. Man findet dann offenbar auch

$$\overline{\frac{d\varphi}{dN}} = 0, \quad \varDelta\varphi + \lambda\varphi = 0,$$

und hieraus mittels des Greenschen Satzes.

$$\int \varDelta\varphi\, ds = \int_{\mathfrak{C}} \frac{d\varphi}{dN}\, dl = 0,$$

also

(3) $$\int \varphi\, ds = 0.$$

Um den Kern zu bestimmen, setzen wir nach § 16 die Gleichung

$$\varDelta K(0, 1) = a$$

an, wobei a eine Konstante bedeutet; denn ein möglicher stationärer Zustand wird erhalten, indem man die Temperatur einer beliebigen Konstanten gleich setzt; an Singularitäten werde von der Größe $K(0, 1)$ dasselbe gefordert, wie von der oben ebenso bezeichneten; außerdem kann die Gleichung

$$\int K(0, 1)\, ds = 0$$

angesetzt werden, da in $K(0,1)$ offenbar eine additive Konstante verfügbar bleibt. Dann läßt sich die Größe $K(0, 1)$ ganz ähnlich wie oben als symmetrisch erweisen; die Gleichung (5) des § 31 bleibt richtig und aus ihr folgt wie dort die Integralgleichung (6), da das mit dem Faktor a behaftete Glied der Gleichung (3) zufolge wegfällt. Quellenmäßig darstellbar ist ferner jede Funktion $F0$, die stetige erste und stückweise stetige zweite und dritte Ableitungen besitzt, die Randbedingung

$$\overline{\frac{dF}{dN}} = 0$$

erfüllt und außerdem der Gleichung

$$\int F ds = 0$$

unterworfen ist.

Deutet man die Singularität der Funktion $K(0, 1)$ als Quelle im Punkte 1, so ist deren Ergiebigkeit, wenn man über einen um den Punkt 1 beschriebenen Kreis $\mathfrak{K}$ integriert,

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{dK(0,1)}{dN} dl,$$

wobei die Normale N nach dem Innern der Kurve $\mathfrak{K}$ hingerichtet ist; offenbar kann man das Integral über die Randlinie, an der die Größe

$$\frac{dK(0,1)}{dN}$$

verschwindet, hinzufügen und erhält so als Ergiebigkeit

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{dK(0,1)}{dN} dl + \int_{\mathfrak{G}} \frac{\overline{dK(0,1)}}{dN} dl = \int_{\mathfrak{G}'} \Delta K(0,1) ds,$$

wobei rechts über das Gebiet $\mathfrak{G}'$ integriert wird, das vom Grundgebiet übrig bleibt, wenn die vom Kreise $\mathfrak{K}$ umfaßte Fläche ausgeschlossen wird; links ist dann durch N überall die äußere Normale dieses Gebiets bezeichnet.

Läßt man den Kreis $\mathfrak{K}$ zusammenschrumpfen, so erhält man rechts den Wert

$$a \int ds.$$

Ist daher die Ergiebigkeit Eins, so hat man für a den reziproken Wert des Areals der Fläche $\mathfrak{G}$ zu setzen. Dann ist $-K(0,1)$ die stationäre Temperatur, die von einer im Punkte 1 befindlichen Quelle von der Ergiebigkeit -1 verursacht wird, wenn in jedem Element der Fläche $\mathfrak{G}$ eine gewisse konstante Wärmemenge etwa durch einen galvanischen Strom als Joulesche Wärme erzeugt wird.

Die Existenz der Greenschen Funktion ist hier wie im Falle des vorigen Paragraphen zunächst noch zweifelhaft; sie wird in den Einzelfällen, die wir betrachten, durch besondere Entwickelungen erwiesen, kann aber natürlich auch aus den allgemeinen Existenztheoremen der Potentialtheorie erschlossen werden, die wir im fünften Abschnitt beweisen wollen.

Endlich braucht kaum erwähnt zu werden, daß auch die Entwickelungen dieses Paragraphen auf das räumliche Problem übertragen werden können, indem man die räumlichen Greenschen Funktionen benutzt und beim Integrieren an Stelle des Kreises $\mathfrak{K}$ eine Kugel aus dem Grundgebiete ausschließt.

§ 33.

Eigenfunktionen und Greensche Funktion des Rechtecks als schwingender Membran oder wärmeleitender Platte.

Das Randwertproblem des § 31 ist für das Rechteck als Grundgebiet leicht zu lösen. Wir betrachten den Fall, daß die gesuchte Funktion auf dem Umfange verschwindet, wie es bei einer schwingenden Membran selbstverständlich ist; bei der wärmeleitenden Platte gilt diese Annahme, wenn der Umfang auf der konstanten Temperatur Null gehalten wird. Das Grundgebiet sei begrenzt von den Geraden:

$$x = 0, \quad x = b,$$
$$y = 0, \quad y = c.$$

Man fordert dann die folgenden Gleichungen:

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0, y) = \varphi(b, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, c) = 0;$$

diese werden durch die Annahme

$$\varphi = \sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c}$$

erfüllt, wenn m und n positive ganze Zahlen sind; als zugehöriger Eigenwert ergibt sich

$$\lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right).$$

Integriert man das Quadrat des Ausdrucks φ über das Grundgebiet, so erhält man

$$\int_0^b \sin^2\frac{m\pi x}{b}\,dx \cdot \int_0^c \sin^2\frac{n\pi y}{c}\,dy = \frac{bc}{4};$$

als normierte Eigenfunktionen können also die Ausdrücke

$$\varphi_{mn}0 = \frac{2}{\sqrt{bc}}\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c}$$

gelten, indem wir, wie bisher, durch 0 den Punkt mit den Koordinaten x, y ohne Index bezeichnen. Daß dies System von Eigenfunktionen vollständig ist, stellt sich im Laufe der Untersuchung heraus, und zwar dadurch, daß sich die bilineare Summe

$$\sum_{m,n}^{1,\infty}\frac{\varphi_{mn}0\cdot\varphi_{mn}1}{\lambda_{mn}} = \frac{4}{bc}\sum_{m,n}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)},$$

die wir auch durch S bezeichnen wollen, der in § 31 definierten Greenschen Funktion $K(0, 1)$ gleich erweist.

Um diese Summation in einer gewissen Folge der Glieder durchzuführen, gehen wir von der Fourierschen Entwickelung

$$(1) \qquad \frac{\pi \operatorname{Cof} \mu \alpha}{2 \mu \operatorname{Sin} \mu \pi} = \frac{1}{2 \mu^2} + \sum_{\nu}^{1, \infty} \frac{(-1)^{\nu} \cos \nu \alpha}{\nu^2 + \mu^2}$$

aus, die, wenn μ eine beliebige reelle Konstante bedeutet, in dem Intervall

$$-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$$

gilt, und summieren mit ihrer Hilfe einen Bestandteil der bilinearen Summe:

$$(2) \qquad 2 \sum_{n}^{1, \infty} \frac{\sin \frac{n \pi y}{c} \sin \frac{n \pi y_1}{c}}{n^2 + \left(\frac{m c}{b}\right)^2} = \sum_{n}^{1, \infty} \frac{\cos \frac{n \pi (y - y_1)}{c}}{n^2 + \left(\frac{m c}{b}\right)^2}$$

$$- \sum_{n}^{1, \infty} \frac{\cos \frac{n \pi (y + y_1)}{c}}{n^2 + \left(\frac{m c}{b}\right)^2} = \sum_{n}^{1, \infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n \pi}{c} (c - y_1 + y)}{n^2 + \left(\frac{m c}{b}\right)^2}$$

$$- \sum_{n}^{1, \infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n \pi}{c} (y + y_1 - c)}{n^2 + \left(\frac{m c}{b}\right)^2}$$

Hier kann die zweite Summe stets durch die Formel (1) summiert werden, da die Größen y und y_1 der Strecke von 0 bis c angehören, mithin die Ungleichung

$$-\pi \leqq \frac{\pi (y + y_1 - c)}{c} \leqq + \pi$$

gilt. Die erste Summe kann aber nur dann der Formel (1) subsumiert werden, wenn $y_1 \geqq y$; denn nur dann ist

$$\pi \geqq \frac{\pi (c - y_1 + y)}{c} \geqq - \pi.$$

Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Formel (2), in der

$$\mu = \frac{m c}{b}$$

gesetzt wird, sofort

$$2\sum_{n}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}=\frac{\pi\,\mathfrak{Cos}\,\frac{m\pi}{b}(c-y_1+y)}{\frac{2mc}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{mc\pi}{b}}-\frac{\pi\,\mathfrak{Cos}\,\frac{m\pi}{b}(c-y-y_1)}{\frac{2mc}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{mc\pi}{b}},$$

und hieraus mittels der Additionsformeln der hyperbolischen Funktionen

$$2\sum_{n}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}=\frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi}{b}(c-y_1)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y}{b}}{\frac{mc}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{mc\pi}{b}};\quad y_1\geqq y.$$

Da diese Größe aber in y und y_1 symmetrisch ist, so ergibt sich für den Fall $y_1 \leqq y$ sofort die weitere Formel

$$2\sum_{n}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{n\pi y}{c}\sin\frac{n\pi y_1}{c}}{n^2+\left(\frac{mc}{b}\right)^2}=\frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi}{b}(c-y)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}}{\frac{mc}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{mc\pi}{b}};\quad y\geqq y_1.$$

Hiernach kann die bilineare Summe S bei der Annahme $y \geqq y_1$ in folgender Form geschrieben werden:

$$S=\frac{2}{\pi}\sum_{m}^{1,\infty}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi}{b}(c-y)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi x_1}{b}}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{mc\pi}{b}}.$$

Diese Summe ist der reelle Teil der Größe

$$W=\frac{2}{\pi}\sum_{m}^{1,\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}}\left\{\sin\frac{m\pi x}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi(c-y)}{b}-i\cos\frac{m\pi x}{b}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{m\pi(c-y)}{b}\right\},$$

die auf Grund der Beziehungen und Bezeichnungen

$$\mathfrak{Cos}\,x=\cos xi,\quad \mathfrak{Sin}\,x=-i\sin ix,\quad z=x+yi,$$

$$z_1=x_1+y_1 i,\quad \overline{z_1}=x_1-y_1 i,\quad q=e^{-\frac{\pi c}{b}}$$

auch in den folgenden Formen geschrieben werden kann:

$$W = -\frac{2i}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}\cos\frac{m\pi}{b}(x+iy-ic)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{b}(x_1+y_1 i)\cos\frac{m\pi}{b}(x+yi-ci)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{b}(x_1-y_1 i)\cos\frac{m\pi}{b}(x+yi-ci)}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{b}(z+z_1-ic)+\cos\frac{m\pi}{b}(z-z_1-ic)}{m(q^{-m}-q^m)}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{b}(z+\bar z_1-ic)+\cos\frac{m\pi}{b}(z-\bar z_1-ic)}{m(q^{-m}-q^m)},$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z+z_1-ic)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z-z_1-ic)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z+\bar z_1-ic)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cos\frac{m\pi}{b}(z-\bar z_1-ic).$$

§ 34.

Summierung der erhaltenen Reihe und Verifikation.

Die Reihe W läßt sich summieren mittels einer schon bei Jacobi vorkommenden Formel

$$(1) \qquad \log\vartheta_0(v,q) = Q - 2\sum_m^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\,\frac{\cos 2mv\pi}{m},$$

in der Q eine von v unabhängige Größe bedeutet und gesetzt ist

$$\vartheta_0(v, q) = 1 - 2q\cos 2v\pi + 2q^4\cos 4v\pi - 2q^9\cos 6v\pi + \cdots.$$

Die Reihe für $\log\vartheta_0(v, q)$ konvergiert, wenn

$$v = \xi + \eta i$$

gesetzt wird und ξ und η reelle Größen sind, unter der Voraussetzung

$$(2) \qquad |\eta| < \left|\frac{\log q}{2\pi}\right|,$$

die erfüllt ist, wenn für v eine der Größen

$$(3) \qquad \frac{z \pm z_1 - ic}{2b}, \quad \frac{z \pm \bar{z}_1 - ic}{2b},$$

also für η eine der Größen

$$\frac{y \pm y_1 - c}{2b}$$

gesetzt und die Annahme $y > y_1$ festgehalten wird. Denn es ist zu setzen

$$\frac{\log q}{2\pi} = -\frac{c}{2b},$$

die Größen y und y_1 aber liegen in der Strecke von 0 bis c.

Bleibt ferner die Differenz $y - y_1$ über einer festen positiven Grenze, so gilt dasselbe von der Differenz beider Seiten der Ungleichung (2) und die Reihe $\log\vartheta_0 v$, mit den Argumenten (3) genommen, konvergiert gleichmäßig. Offenbar konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig in jedem Gebiete, in dem mindestens eine der Stellen 0 und 1 vom Rande um mehr als ein festes endliches Wegstück entfernt bleibt.

Hiernach kann man setzen

$$W = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_0\left(\frac{z + \bar{z}_1 - ic}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z - \bar{z}_1 - ic}{2b}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z + z_1 - ic}{2b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z - z_1 - ic}{2b}\right)},$$

oder, indem man die Formeln

$$\vartheta_0\left(v + \frac{\log q}{2\pi i}\right) = iq^{-1/4}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v), \qquad \frac{\log q}{2\pi i} = -\frac{ci}{2b}$$

benutzt,

$$W = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{z + \bar{z}_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z - \bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z + z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z - z_1}{2b}\right)}.$$

und es ist leicht zu übersehen, daß die Größe

$$K(0, 1) = \Re e\, W,$$

gleichviel ob die bisher geltende Annahme $y > y_1$ festgehalten wird oder nicht, die gesuchte Greensche Funktion des Grundgebietes ist.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß die Funktion $K(0, 1)$ verschwindet, wenn der Punkt 0 auf dem Rande des Grundgebietes liegt. Setzt man z. B. $y = 0$, so ist

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{x + x_1 - y_1 i}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{x - x_1 + y_1 i}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x + x_1 + y_1 i}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{x - x_1 - y_1 i}{2b}\right)},$$

und unter dem Zeichen log steht der Quotient zweier konjugiert komplexer Größen, also eine Größe vom absoluten Betrage 1, deren Logarithmus Null oder rein imaginär ist; $\Re e\, W$ verschwindet also. Setzt man ferner $x = 0$, so erhält man

$$W = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{yi + x_1 - y_1 i}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{yi - x_1 + y_1 i}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{yi + x_1 + y_1 i}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{yi - x_1 - y_1 i}{2b}\right)}$$

und unter dem Zeichen log steht wiederum eine Größe vom absoluten Betrage 1.

Vermehrt man ferner in dem Ausdruck W die Größe z um b oder ci, d. h. x um b oder y um c, so erhält man aus den Formeln, die die vier Funktionen ϑ ineinander überführen

$$W(z + b) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_2\left(\frac{z + \bar{z}_1}{2b}\right) \vartheta_2\left(\frac{z - \bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{z + z_1}{2b}\right) \vartheta_2\left(\frac{z - z_1}{2b}\right)},$$

$$W(z + ic) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_0\left(\frac{z + \bar{z}_1}{2b}\right) \vartheta_0\left(\frac{z - \bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z + z_1}{2b}\right) \vartheta_0\left(\frac{z - z_1}{2b}\right)}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt wie oben, daß der reelle Teil der Größen $W(z + b)$, $W(z + ic)$ verschwindet, wenn man $x = 0$ oder $y = 0$ setzt; das bedeutet aber, daß die Größen $\Re e\, W$ verschwinden, wenn man $x = b$ oder $y = c$ setzt, womit die ausgesprochene Behauptung, $K(0, 1)$ verschwinde, wenn der Punkt 0 dem Rande des Grundgebietes angehört, vollständig erwiesen ist.

Was ferner die Singularität der Größe $K(0,1)$ betrifft, die auftritt, wenn die Punkte 0 und 1 zusammenrücken, so sieht man zunächst, daß die Größe W unendlich wird wie

$$-\frac{1}{2\pi}\log(z - z_1),$$

d. h. sich von dieser Größe um eine an der Stelle $z = z_1$ reguläre analytische Funktion von z unterscheidet. Nun gilt die Gleichung

$$\Re\left[-\frac{1}{2\pi}\log(z - z_1)\right] = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}};$$

die Größe $K(0, 1) = \Re W$ hat also genau die von der Greenschen Funktion geforderte Singularität.

Endlich ist ohne weiteres klar, daß die Größe $K(0, 1)$ als reeller Teil einer analytischen Funktion die Laplacesche Gleichung

$$\Delta K(0, 1) = 0$$

erfüllt; hieraus und aus den abgeleiteten Singularitäten und Randeigenschaften folgt nach § 31 die Symmetriegleichung

$$K(0, 1) = K(1, 0)$$

und damit auch die Gleichung

$$\Delta_1 K(0, 1) = 0.$$

Hiermit ist die Größe $K(0, 1)$ endgültig als die gesuchte Greensche Funktion nachgewiesen und die allgemeinen Sätze des § 31 zeigen, daß die Funktionen φ_{mn} Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi_{mn}1 = \lambda_{mn}\int_{\mathfrak{C}} K(0, 1)\,\varphi_{mn}0 \, .\, ds$$

sind.

Die für diese Größe geltende Darstellung durch die bilineare Doppelreihe

$$\sum\sum\frac{\varphi_{mn}0\,.\,\varphi_{mn}1}{\lambda_{mn}}$$

ist zunächst in jedem Gebiete gleichmäßig konvergent, in dem die Differenz $y - y_1$ über einer festen positiven Grenze verbleibt. Denn unter dieser Voraussetzung konvergieren die aus der Formel (1) abgeleiteten Summen gleichmäßig, wie bei dieser schon bemerkt ist; dasselbe gilt stets von den Summen (2) des § 33, die auch bezüglich der Zahl m gleichmäßig konvergieren.

Stellt man daher die bilineare Reihe mit leicht verständlicher Symbolik durch die Doppelsumme

$$\sum_m^{1,\infty} B_m = \sum_m^{1,\infty} \sum_n^{1,\infty} A_{mn}$$

dar, so kann zunächst die links stehende Reihe mit vorgeschriebenem Grade der Genauigkeit durch

$$\sum_m^{1,m_1} B_m$$

ersetzt werden, wobei m_1 durch den Genauigkeitsgrad bestimmt ist, und ohne die erreichte Genauigkeit wieder zu vermindern, vergrößert werden darf. Sodann kann in jedem dieser m_1 Glieder für B_m die Summe

$$\sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

gesetzt und n_1 so gewählt werden, daß die Differenz

$$\sum_m^{1,m_1} B_m - \sum_m^{1,m_1} \sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt und, wenn n_1 vergrößert wird, liegen bleibt. Damit ist erreicht, daß für das ganze betrachtete Gebiet die Differenz der Größen

$$\sum_m^{1,\infty} B_m, \quad \sum_m^{1,m_1} \sum_n^{1,n_1} A_{mn}$$

absolut genommen unter der Summe zweier vorgeschriebenen positiven Größen liegt, also gleichmäßig klein bleibt. Die bilineare Reihe konvergiert also gleichmäßig in jedem Gebiet, indem die Differenz $y - y_1$ über einer positiven Grenze verbleibt.

Da nun die Formeln (2) des § 33 in den Stellen 0 und 1 symmetrisch sind, kann man eine der durchgeführten völlig analoge Schlußreihe für den Fall $y < y_1$ entwickeln und aus dieser insbesondere das Korollar ableiten, daß auch, wenn die Differenz $y_1 - y$ über einer positiven Schranke verbleibt, die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert.

Weiter ist aus der Gestalt der Eigenfunktionen ersichtlich, daß die Variablen x und y keine wesentlich verschiedene Rolle spielen; die bilineare Reihe konvergiert also auch gleichmäßig, wenn eine der Differenzen $x - x_1$ und $x_1 - x$ über einer positiven Grenze verbleibt. Da in allen endlichen Reihen, die die Größe

$K(0, 1)$ mit gleichmäßiger Genauigkeit darstellen, die Zahlen m_1, n_1 und die ihnen analogen vergrößert werden dürfen, schließt man aus den erhaltenen Resultaten leicht, daß die bilineare Reihe in jedem Gebiet gleichmäßig konvergiert, in dem der Abstand der Stelle 0 von der festen Stelle 1 über einer positiven Grenze bleibt.

Dieselben Betrachtungen gelten auch, wie man leicht sieht, für die Reihen, die aus den unter (1) und in § 33 unter (1) angeführten entstehen, indem man gliedweise differenziert; handelt es sich doch um analytische Funktionen, die im Konvergenzgebiete der Reihen regulär sind. Daraus folgt, daß die bilineare Reihe in Gebieten der bezeichneten Art gliedweise differenziert werden darf.

§ 35.

Überblick über einige verwandte Fälle.

Nach der im vorigen Paragraphen benutzten Methode lassen sich noch einige ähnliche Aufgaben behandeln, bei denen nur die Randbedingungen andere sind.

Es seien zunächst die Seiten $y = 0$ und $y = c$ auf der Temperatur Null gehalten, die anderen beiden Seiten adiatherman bedeckt. Dann gelten für die Eigenfunktionen die Bedingungen

$$\varphi\Big|^{y=0} = \varphi\Big|^{y=c} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|^{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|^{x=b} = 0$$

und man findet die normierten Ausdrücke

$$\varphi_{mn}0 = \frac{2}{\sqrt{bc}} \cos\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi y}{c}, \quad \varphi_{0n} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \sin\frac{n\pi y}{c},$$

zu denen die Eigenwerte

$$\lambda_{mn} = \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}, \quad \lambda_{0n} = \frac{n^2\pi^2}{c^2}$$

gehören. Man erhält also folgende bilineare Formel:

$$K(0, 1) = \frac{2}{bc} \sum_n^{1,\infty} \frac{\sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$+ \frac{4}{bc} \sum_m^{1,\infty} \sum_n^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b} \cos\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi y}{c} \sin\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}},$$

und vermittelst der oben gebrauchten Formeln, indem man nach n summiert, für $y > y_1$

$$K(0,1) = \frac{y_1(c-y)}{bc}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_m^{1,\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi}{b}(c-y)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y_1}{b}}{m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi c}{b}}$$

und für $y < y_1$ den Ausdruck, der aus dem hingeschriebenen entsteht, indem man (x, y) und (x_1, y_1) vertauscht.

Hieraus folgt weiter wie oben

$$K(0,1) = \Re e\left[\frac{i y_1 z}{bc} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{2b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right)}\right],$$

und in der ϑ-Funktion ist wiederum $q = e^{-\frac{\pi c}{b}}$ zu setzen.

Läßt man ferner drei Seiten des Rechtecks adiatherman bedeckt sein und hält die Seite $x = 0$ auf der Temperatur Null, so haben die Eigenfunktionen die Gestalt

$$\text{const.}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{c},$$

und für die Greensche Funktion findet man

$$\frac{1}{2\pi}\Re e\log\frac{\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}.$$

Hält man umgekehrt drei Seiten des Rechtecks auf der Temperatur Null, während die Seite $x = 0$ adiatherman bedeckt wird, so haben die Eigenfunktionen die Form

$$\text{const.}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c},$$

und man findet die Greensche Funktion

$$K(0,1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Re e\log\frac{\vartheta_2\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{4z}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{4b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z-\bar{z}_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{4b}\right)}.$$

in diesem und dem vorigen Falle ist zu setzen

$$q = e^{-\frac{\pi c}{2b}}.$$

Sind endlich die zusammenstoßenden Seiten $x = 0$ und $y = 0$ adiatherman bedeckt, die anderen Seiten auf der Temperatur Null, so sind die Eigenfunktionen

$$\text{const.} \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{b} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{c}$$

und der Kern ist, wenn q denselben Wert hat wie in den beiden vorigen Fällen, der reelle Teil des Ausdrucks

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{\vartheta_0\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_2\left(\frac{z+z_1}{8b}\right)\vartheta_0\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{z+z_1}{8b}+\frac{1}{4}\right)} + \cdots,$$

in welchem drei Glieder hinzuzufügen sind, die aus dem hingeschriebenen entstehen, wenn man $z + z_1$ durch einen der Ausdrücke $z - z_1$, $z + \bar{z}_1$, $z - \bar{z}_1$ ersetzt.

Auch hier ist es leicht, die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0,1) = \Delta_1 K(0,1) = 0$$

zu verifizieren und die Singularität der Größe $K(0,1)$ als Funktion der Stelle 0 an der Stelle 1 zu erkennen.

Ebenso läßt sich aber auch der ausgeartete Fall behandeln, daß alle Seiten des Rechtecks adiatherman bedeckt sind. Die Eigenfunktionen sind

$$\varphi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{bc}}\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{c}, \quad \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right),$$

wobei einer der Werte m und n verschwinden darf, nicht aber beide zugleich; die Konstante kann zwar als Lösung der Randwertaufgabe angesehen werden, erfüllt aber nachher nicht dieselbe Integralgleichung wie die anderen Größen φ_{mn}.

Mit diesen Ausdrücken erhält man folgende bilineare Reihe:

$$K(0,1) = \frac{1}{bc}\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}}{\frac{m^2\pi^2}{b^2}} + \frac{1}{bc}\sum_n^{1,\infty}\frac{\cos\frac{n\pi y}{c}\cos\frac{n\pi y_1}{c}}{\frac{n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$+\frac{2}{bc}\sum_m^{1,\infty}\sum_n^{1,\infty}\frac{\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi y}{c}\cos\frac{n\pi y_1}{c}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)}$$

und mittels der früher benutzten Hilfsmittel erhält man bis auf einen konstanten Summanden, der weggelassen ist,

$$K(0, 1) = \frac{1}{2bc}(y^2 + y_1^2)$$
$$- \frac{1}{2\pi} \Re e \log \left[\vartheta_1\left(\frac{z+z_1}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{z+\bar{z}_1}{2b}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-\bar{z}_1}{2b}\right) \right].$$

Offenbar gelten die Gleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) - \frac{1}{bc} = 0$$
$$\Delta_1 K(0, 1) - \frac{1}{bc} = 0;$$

aus ihnen geht, da bc die Fläche des Grundgebietes ist, nach einer in § 32 gemachten Bemerkung hervor, daß $-K(0, 1)$ als Temperatur von einer Wärmequelle von der Ergiebigkeit -1 herrührt, wenn gleichzeitig im Grundgebiet überall eine für die Flächeneinheit konstante Wärmemenge erzeugt wird.

Die Formeln, mit denen in allen diesen Fällen die Summation der doppelt unendlichen Reihen gelingt, sind außer den in § 33 benutzten die folgenden:

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos n(\pi - \alpha)}{n^2 + \mu^2} = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\pi \operatorname{Cos} \mu\alpha}{2\mu \operatorname{Sin} \mu\pi}, \quad (-\pi < \alpha < +\pi),$$

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\cos(2n-1)\alpha}{(2n-1)^2 + \mu^2} = \frac{\pi \operatorname{Sin} \mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{4\mu \operatorname{Cos} \frac{\mu\pi}{2}}, \quad (0 < \alpha < \pi)$$

$$4 \sum_n^{1,\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2(2n-1)}} \frac{\cos(2n-1)\pi z}{2n-1} = \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z}{2}\right)},$$

$$2 \sum_n^{1,\infty} \frac{q^n}{1+q^n} \frac{\sin n\pi z}{n} = \frac{\pi}{2}(1-z) + i \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau}{4}\right) \vartheta_2\left(\frac{z+\tau}{4}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{z+\tau}{4}\right) \vartheta_3\left(\frac{z+\tau}{4}\right)},$$

$$4 \sum_n^{1,\infty} \frac{q^{2n-1}}{1+q^{4n-2}} \frac{\sin(2n-1)\pi z}{2n-1}$$
$$= \frac{\pi}{2} + i \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau}{4}\right) \vartheta_2\left(\frac{z+\tau}{4}\right) \vartheta_3\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right) \vartheta_0\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right) \vartheta_2\left(\frac{z+\tau+1}{4}\right) \vartheta_3\left(\frac{z+\tau}{4}\right) \vartheta_0\left(\frac{z+\tau}{4}\right)}.$$

§ 36.

Greensche Funktionen auf der Kreisfläche.

Durch Aufbau aus den Elementen mittels der bilinearen Reihe lassen sich auch die Greenschen Funktionen für die Kreisfläche vom Radius Eins einschließlich des ausgearteten Falles bestimmen; die Stelle der beim Rechteck benutzten Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen vertreten hier die bilinearen Formeln des § 27.

Transformiert man die Fouriersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

in Polarkoordinaten, und führt, wie in § 31, die Grenzbedingung

$$\overline{\frac{du}{dN} + Hu} = 0$$

ein, so sieht man leicht, daß die Eigenfunktionen

$$J_m(\varrho r) \cos m\theta, \qquad J_m(\varrho r) \sin m\theta$$

sind, wobei J_m die Besselsche Funktion $m$ter Ordnung, m eine nicht negative ganze Zahl bedeutet und die Konstante ϱ durch die Gleichung

$$\varrho J'_m \varrho + H J_m \varrho = 0$$

definiert ist. Der Fall $H = \infty$ bedeutet natürlich

$$J_m \varrho = 0.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind die ∞^2-Werte ϱ^2, so daß man sich auf die positiven Wurzeln beschränken kann. Um die Eigenfunktionen zu normieren, braucht man die über die Kreisfläche erstreckten Integrale

$$P_{mn} = \int ds\, J_m(\varrho r)^2 \cos^2 m\theta$$
$$\overline{P}_{mn} = \int ds\, J_m(\varrho r)^2 \sin^2 m\theta;$$

da $ds = r\,dr\,d\theta$, so findet man leicht

$$P_{0n} = 2\pi \int_0^1 \alpha J_0(\varrho_{0n}\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\overline{P}_{mn} = P_{mn} = \pi \int_0^1 \alpha J_m(\varrho_{mn}\alpha)^2 d\alpha, \qquad (m > 0).$$

Die bilineare Reihe unseres Problems hat daher folgende Form:

$$K(0,1)=\sum_m^{0,\infty}\sum_n^{1,\infty}\frac{\cos m(\theta_1-\theta)J_m(\varrho_{mn}r)J_m(\varrho_{mn}r_1)}{P_{mn}\cdot\varrho_{mn}^2}.$$

In diesem Ausdruck kann jede der Summationen nach n ausgeführt werden, indem man r und r_1 durch $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x_1}$ ersetzt und die in § 26 eingeführten Greenschen Funktionen nach § 27 in die bilineare Reihe entwickelt; man erhält, indem man unter s die kleinere der Größen $\frac{r}{r_1}$ und $\frac{r_1}{r}$ versteht, bei der Annahme $H>0$

$$\begin{aligned}&\pi K(0,1)\\ (1)\quad &=\frac{1}{2H}-\frac{1}{4}\log\frac{rr_1}{s}+\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos m(\theta-\theta_1)}{2m}\left[s^m+\frac{m-H}{m+H}(rr_1)^m\right],\end{aligned}$$

für den Fall $H=0$ aber

$$\begin{aligned}&\pi K(0,1)\\ (2)\quad &=-\frac{3}{8}+\frac{r_1^2+r^2}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{rr_1}{s}+\sum_m^{1,\infty}\frac{\cos m(\theta-\theta_1)}{2m}[s^m+(rr_1)^m].\end{aligned}$$

Die hier erscheinenden Reihen summiert man mittels der Formeln

$$\log\sqrt{1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2}=-\sum_m^{1,\infty}\frac{\alpha^m\cos m\beta}{m},$$

$$\sum_m^{1,\infty}\frac{\alpha^m\cos m\beta}{m+H}=\Re\left(\alpha^{-H}e^{-\beta Hi}\int_0^{\alpha e^{\beta i}}\frac{w^{H-1}dw}{1-w}\right),$$

und findet bei positiven Werten von H

$$K(0,1)=\frac{1}{2\pi H}+\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\frac{1-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)+r^2r_1^2}{r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)+r^2}}$$
$$+\frac{1}{\pi}\Re\left[\left(rr_1e^{i(\theta-\theta_1)}\right)^{-H}\int_0^{rr_1e^{(\theta-\theta_1)i}}\frac{w^{H-1}dw}{1-w}\right],$$

wobei das letzte Glied wegzulassen ist, wenn $H=\infty$ gesetzt wird. In diesem Falle erhält man die in der Theorie des logarithmischen Potentials erscheinende Greensche Funktion der Kreisfläche in bekannter Form. In jedem Falle verifiziert man leicht die Gleichungen

$$\Delta_0K(0,1)=0$$
$$\Delta_1K(0,1)=0.$$

Wenn $H = 0$ angenommen wird, ergibt sich ebenso

$$K(0, 1) = -\frac{3}{8\pi} + \frac{r^2 + r_1^2}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{1 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r^2 r_1^2}$$
$$- \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r^2},$$

und man erhält die Differentialgleichungen

$$\Delta_0 K(0, 1) - \frac{1}{\pi} = 0, \qquad \Delta_1 K(0, 1) - \frac{1}{\pi} = 0,$$

die, da π die Fläche des Grundgebietes bedeutet, unter die in § 32 besonders hervorgehobene Form fallen. Daher ist $-K(0, 1)$ die stationäre Temperatur, die von einer Quelle von der Ergiebigkeit -1 im Punkte 1 herrührt, wenn gleichzeitig auf dem Grundgebiet für jede Flächen- und Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge, etwa als Joulesche Wärme eines galvanischen Stroms, erzeugt wird.

Die in den Formeln (1) und (2) auftretenden Reihen konvergieren übrigens gleichmäßig in jedem Gebiet der Variablen, für das der Abstand der Punkte 0 und 1 über einer festen Grenze bleibt; denn die Reihen

$$\sum \frac{\alpha^m \cos m\beta}{m}, \quad \sum \frac{\alpha^m \cos m\beta}{m + H}$$

können als reelle Teile analytischer Funktionen aufgefaßt werden, die regulär sind, solange α von 1 oder β von Null verschieden ist und α den Wert 1 nicht überschreitet. Hieraus folgt auch, daß in solchen Gebieten die Reihen gliedweise differenziert werden können. Da ferner auch die in § 26 aufgestellten bilinearen Entwickelungen jedenfalls in einem Gebiet, in dem r und r_1 nicht beide unendlich klein werden können, gleichmäßig konvergieren und gliedweise differenziert werden können, so konvergiert die bilineare Reihe

$$\sum_{m,\, n} \frac{\varphi_{mn} 0 \,.\, \varphi_{mn} 1}{\lambda_{mn}}$$

in der Tat gleichmäßig in einem Gebiet, in dem der Abstand der Punkte 0 und 1 über einer festen Grenze bleibt, und kann in diesem Gebiet gliedweise differenziert werden.

§ 37.

Die Greensche Funktion auf der Kugelfläche.

Schreibt man die Fouriersche Differentialgleichung der Wärmebewegung im Raume

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

in räumlichen Polarkoordinaten, die mit den rechtwinkeligen x, y, z durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta\cos\omega, \\ z &= r\sin\theta\sin\omega \end{aligned}$$

verbunden sind, so ergibt sich bekanntlich die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\}.$$

Nehmen wir an, u sei von r unabhängig, so erhalten wir eine Temperaturverteilung, bei der keine Wärme in radialer Richtung nach dem Koordinatenanfangspunkte hin oder von ihm wegfließt; innerhalb einer unendlich dünnen Kugelschicht mit dem Zentrum $r = 0$ bewegt sich die Wärme also gerade so, wie wenn die Schicht von innen und außen adiatherman bedeckt wäre. Die Temperatur in einer solchen Schicht oder auf einer isoliert gedachten Kugeloberfläche vom Radius 1 und dem Mittelpunkte $r = 0$ erfüllt also die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\},$$

deren rechte Seite wir auch durch $a^2\Delta u$ bezeichnen wollen.

Nach der klassischen Methode setzt man

$$u = T.\Phi,\ \frac{\partial T}{\partial\omega} = \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

und findet, indem λ eine unbekannte Konstante bedeutet,

$$T = e^{-a^2\lambda t},$$

$$(1)\quad \Delta\Phi + \lambda\Phi = 0,\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} + \lambda\Phi = 0.$$

Dabei ist λ so zu bestimmen, daß Φ eine auf der Kugelfläche überall endliche, stetig und eindeutig bestimmte Funktion des Ortes wird.

Aus dieser Forderung ergibt sich zunächst

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} \, d\omega = 0;$$

integriert man also die Gleichung (1) nach ω und setzt

$$\Psi = \int_0^{2\pi} \Phi \, d\omega,$$

so findet man die Gleichung

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \lambda \Psi = 0,$$

und diese muß eine für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ endliche Lösung besitzen. Das ist aber genau wieder das Randwertproblem des § 28, und man findet sofort

$$\lambda = n(n+1),$$

wobei n wie immer eine positive ganze Zahl bedeutet. Außerdem kann offenbar noch $\lambda = 0$ und die zugehörige Funktion Φ einer beliebigen Konstanten gleichgesetzt werden.

Um nun zu einer Integralgleichung überzugehen, bemerken wir zunächst, daß für den jetzt durch Δf bezeichneten Ausdruck die Greensche Gleichung

$$(2) \qquad \int (f \Delta g - g \Delta f) \, ds = \int \left(f \frac{dg}{dN} - g \frac{df}{dN} \right) dl$$

gilt, wenn links über das Innere einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden sphärischen Kurve $\mathfrak{C}$, rechts über diese Kurve selbst integriert und durch N die äußere Normale bezeichnet wird. In der Tat ist ja der Ausdruck Δf nichts anderes, als der gewöhnlich so bezeichnete Differentialparameter

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

in dem nur $r = 1$ gesetzt und ausgedrückt wird, daß f von der Polarkoordinate r unabhängig ist. Man kann daher die Greensche Gleichung für einen beliebigen Raum in der Form

$$(3) \qquad \int (f \Delta g - g \Delta f) \, d\tau = \int \left(f \frac{dg}{dN} - g \frac{df}{dN} \right) d\sigma$$

ansetzen, indem man durch $d\tau$ und ds Raum- und Oberflächenelement bezeichnet. Nimmt man das Integrationsgebiet begrenzt von zwei Kugeln $r =$ const., von deren Radien der eine kleiner, der andere größer als Eins ist, und einer Kegelfläche mit der Spitze $r = 0$, die durch die Kurve $\mathfrak{C}$ geht, so folgt die Gleichung (2) unmittelbar aus der Greenschen Formel (3), indem man die Integrationen längs der Radien ausführt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den gesuchten Kern bestimmen, und zwar erklären wir ihn nach § 32 als die stationäre Temperatur, die durch eine Wärmequelle und eine in jedem Element des Grundgebietes auftretende, für die Flächen und Zeiteinheit konstante Wärmemenge hervorgerufen wird. Wir suchen dann noch zu erreichen, daß der Durchschnittswert dieser Temperatur im Grundgebiet verschwindet. Liegt die Quelle speziell im Punkte $\theta = 0$, so finden wir die gesuchte Temperatur bis auf einen konstanten Faktor in der Größe $K(x, \xi)$ des § 28 für den Fall $\xi = 1$, also, wenn b und c Konstante bedeuten, in dem Ausdruck

$$b \log(1 - \cos\theta) + c.$$

Hierdurch wird man veranlaßt, wenn die Wärmequelle im Punkte 1 liegt und γ oder genauer γ_{01} der Winkelabstand 01 ist, den Ansatz

$$K(0, 1) = b \log(1 - \cos\gamma) + c = 2b \log \sin\frac{\gamma}{2} + c + b \log 2$$

zu machen; dabei ist

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Setzt man speziell

$$b = -\frac{1}{4\pi}, \quad c = -\frac{1}{4\pi}(1 - \log 2),$$

so folgt aus einer der Gleichungen (4) des § 28

$$\int K(0, 1)\, d s_0 = 0.$$

Ferner kann auf einem kleinen, um den Punkt 1 beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}$ im wesentlichen gesetzt werden

$$K(0, 1) = -\frac{1}{2\pi} \log\gamma,$$

und wenn man diesen Kreis als Grenze des außer ihm liegenden Restes der Kugelfläche ansieht und die äußere Normale dieses Gebietes N nennt,

$$\frac{dK(0, 1)}{dN} = \frac{1}{2\pi\gamma}.$$

Versteht man daher unter Φ eine beliebige, in der Umgebung der Stelle 1 mit ihren Ableitungen stetige Funktion des Ortes, und integriert über den Kreis $\mathfrak{K}$, so ergibt sich

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \Phi \frac{dK(0,1)}{dN} - K(0,1) \frac{d\Phi}{dN} \right\} dl \sim \frac{1}{2\pi\gamma} \cdot 2\pi\gamma . \Phi 1.$$

Die Greensche Formel, angewandt auf das bezeichnete Restgebiet, ergibt also, wenn man $\mathfrak{K}$ unendlich abnehmen läßt, in der Grenze

$$\int (\Phi \varDelta K - K \varDelta \Phi) ds = \Phi 1. \tag{4}$$

Jetzt werde für Φ eine Lösung der Gleichung (1), d. h. der Gleichung

$$\varDelta \Phi + \lambda \Phi = 0$$

genommen. Aus dieser ergibt sich mittels der Greenschen Formel, angewandt auf Φ und 1 und das mehrfach benutzte Restgebiet als Integrationsgebiet, da das Linienintegral verschwindet,

$$\int \varDelta \Phi ds = 0, \qquad \lambda \int \Phi ds = 0,$$

also, da λ von Null verschieden genommen und die für $\lambda = 0$ erhaltene Lösung beiseite gelassen wird,

$$\int \Phi ds = 0.$$

Anderseits findet man leicht

$$\varDelta K(0,1) - \frac{1}{4\pi} = 0;$$

also folgt aus der Gleichung (4) die Integralgleichung

$$\Phi 1 = \lambda \int K(0,1) \Phi 0 . ds, \qquad \lambda = n(n+1). \tag{5}$$

Die Diskussion derselben wird wesentlich dadurch erleichtert, daß nach der oben für $K(0,1)$ gegebenen Formel und nach der Gleichung (2) des § 29 gesetzt werden kann

$$K(0,1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})}{n(n+1)} P_n(\cos \gamma_{01}), \tag{6}$$

wobei die Gleichung

$$\cos \gamma_{01} = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

gilt. Denkt man nun für einen Augenblick den Punkt $\theta = 0$ in die Stelle 1 gelegt, so geht die Größe $P_n(\cos\gamma_{01})$ in $P_n(\cos\theta)$ über, ist also Lösung der Legendreschen Gleichung, die als spezieller Fall der Gleichung

$$\varDelta \Phi + n(n+1)\Phi = 0$$

aufgefaßt werden kann. Diese ist aber vom Koordinatensystem unabhängig; mithin ist $P_n(\cos\gamma_{01})$ eine ihrer Lösungen auch bei beliebiger Lage des Koordinatensystems. Daraus folgt nach dem, was soeben gezeigt ist, daß $P_n(\cos\gamma_{01})$ auch eine Lösung der Integralgleichung (5) ist, die zu dem Eigenwert $n(n+1)$ gehört; diese Größe ist also orthogonal zu jeder von der Stelle 0 abhängenden Eigenfunktion Y_m, die zu einem von $n(n+1)$ verschiedenen Eigenwert $m(m+1)$ gehört.

Multipliziert man nun die Gleichung (6) mit Y_m, so ist ihre rechte Seite gliedweise über das Grundgebiet integrierbar. Denn legt man wieder für den Augenblick den Punkt $\theta = 0$ in die Stelle 1, so kann man zunächst nach ω gliedweise integrieren, da diese Größe in der Reihe (6) gar nicht vorkommt. Dann aber kann man aus den Entwickelungssätzen des § 28 die Formel

$$F1 = \int_{-1}^{+1} K(1, \alpha) f\alpha \, . \, d\alpha = \sum_{n}^{1, \infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} \int_{-1}^{+1} P_n\alpha \, . \, f\alpha \, . \, d\alpha$$

entnehmen. Daraus folgt, daß die Reihe (6), mit $\sin\theta\, d\theta$ und einer beliebigen stetigen Funktion von θ multipliziert, nach θ gliedweise integriert werden kann, womit das Behauptete bewiesen ist.

Die einzelnen Glieder der rechten Seite der Gleichung (6) sind aber zu Y_m orthogonal, mit Ausnahme des zu $n = m$ gehörigen; somit fallen rechts alle Glieder weg mit einer Ausnahme und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{Y_m 1}{m(m+1)} &= \int Y_m K(0, 1)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{(m+\frac{1}{2})}{m(m+1)} \int Y_m P_m(\cos\gamma_{01})\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Wäre übrigens der Eigenwert, zu dem Y_m gehört, überhaupt nicht in der Form $n(n+1)$ enthalten, so erhielte man rechts überall 0, also die Gleichung

$$\int K(0, 1)\, Y_m ds = 0,$$

so daß Y_m keine Eigenfunktion des Kerns im Sinne der stets geltenden Definition wäre. Damit ist gezeigt, daß die Zahlen $n(n+1)$ die einzigen Eigenwerte der Integralgleichung (5) sind.

Die Gleichung (7) aber zeigt, daß die zu einem bestimmten Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen der Gleichung (5) Lösungen einer besonderen Integralgleichung sind und als solche alle zu demselben Eigenwert gehören. Der Kern dieser Gleichung läßt sich nach einer elementaren Formel aus der Theorie der Legendreschen Polynome, dem sogenannten Additionstheorem der Kugelfunktionen, in folgender Form darstellen:

$$P_m(\cos\gamma_{01}) = P_m x \,.\, P_m x_1$$
$$+ 2\sum_{\nu}^{1,m} \frac{(m-\nu)!}{(m+\nu)!} P_m^\nu x \,.\, P_m^\nu x_1 \,.\, \cos\nu(\varphi - \varphi_1);$$

dabei ist gesetzt

$$P_m^\nu x = (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu P_m x}{d x^\nu} = \sin^\nu\theta \, \frac{d^\nu P_m x}{d x^\nu}.$$

Setzt man diesen Wert von $P_m(\cos\gamma_{01})$ in die spezielle Integralgleichung (7), so sieht man, daß Y_m, d. h. die allgemeinste zum Eigenwert $m(m+1)$ gehörende Eigenfunktion der Gleichung (5), als lineares Aggregat der $2m+1$ Größen

(8) $\quad P_m x, \quad P_m^\nu x \,.\, \sin\nu\varphi, \quad P_m^\nu x \,.\, \cos\nu\varphi, \quad \nu = 1, 2, \ldots m$

dargestellt werden kann. Diese sind sämtlich spezielle Größen Y_m; in der Gleichung

$$\Phi 1 = m(m+1)\int \Phi 0 \,.\, K(0,1)\, ds$$

gehören also zum Eigenwert $m(m+1)$ genau $2m+1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, eben die Größen (8), die nur noch nicht normiert sind.

Man erhält die normierten Funktionen mittels der auf elementarem Wege aus der Legendreschen Differentialgleichung folgenden Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x)^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!}$$

und der bekannten Formeln

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\nu\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\nu\varphi\, d\varphi = \pi.$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß man setzen kann

$$\frac{(2n+1)P_n(\cos\gamma_{01})}{4\pi} = \sum_{\nu}^{0,2n} \varphi_{n\nu} 0 \,.\, \varphi_{n\nu} 1,$$

wenn $\varphi_{n0}, \varphi_{n1}, \ldots \varphi_{n,2n}$ die zum Eigenwerte $n(n+1)$ gehörigen normierten Eigenfunktionen sind. Dividieren wir beiderseits durch $\lambda_n = n(n+1)$ und summieren über die Werte $n = 1, 2, \ldots,$ so erhalten wir die bilineare Formel der Gleichung (6) zufolge in folgender Gestalt:

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\log(1-\cos\gamma_{01})+1-\log 2\right]=\sum_n^{1,\infty}\sum_\nu^{0,2n}\frac{\varphi_{n\nu}0\,.\,\varphi_{n\nu}1}{n(n+1)}.$$

§ 38.

Wärmeleitung in der Vollkugel.

Bei der dreidimensionalen Wärmebewegung in einer Vollkugel gilt die Randbedingung

$$\overline{\frac{du}{dN}+hu}=0,$$

wobei N die äußere Normale, h eine positive Konstante bedeutet. Die Fouriersche Differentialgleichung transformiert sich dann in die schon in § 37 gebrauchte Form

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

$$=\frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\},$$

wobei r, θ, ω wie am angeführten Orte die sphärischen Polarkoordinaten bedeuten. Setzen wir

$$u=e^{-a^2\lambda t}V,\quad \frac{\partial V}{\partial t}=0,$$

so ergibt sich für V die Gleichung

$$\Delta V+\lambda V=0$$

und die Randbedingung

$$\frac{dV}{dr}+hV=0.$$

Substituieren wir ferner

$$x=\cos\theta,\quad V=R\Omega\Theta,$$

wobei jeder Faktor eine Funktion der durch den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichneten Variablen allein ist, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda-\frac{m(m+1)}{r^2}\right)R=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left(m(m+1)-\frac{n^2}{1-x^2}\right)\Theta=0,$$

$$\frac{d^2\Omega}{d\omega^2}+n^2\Omega=0,$$

wobei durch m und n Konstante bezeichnet sind. Für diese aber ergibt sich leicht, daß sie eine ganze Zahl sein müssen, die dann offenbar positiv genommen werden können. Für n folgt dies daraus, daß Ω notwendig nach dem Argument ω die Periode 2π haben muß, für m daraus, daß die zweite Gleichung, da sie durch die Substitution

$$\Theta = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n y}{d x^n}$$

aus der Legendreschen abgeleitet werden kann, nur dann ein an den Stellen $x = \pm 1$ endliches Integral besitzt, wenn n eine ganze Zahl ist. Dieses Integral ist dann

$$\Theta = P_m^n x = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_m x}{d x^n}.$$

Da nun auch R an der Stelle $r = 0$ endlich sein muß, lehrt die für diese Größe erhaltene Differentialgleichung, daß man bis auf einen konstanten Faktor

$$R = r^{-1/2} J_{m + 1/2}(\varrho r)$$

setzen kann, die Eigenwerte ϱ^2 oder λ werden durch die Gleichung

$$\frac{dR}{dr} + hR \Big|^{r=1} = 0, \quad \varrho J'_{m+1/2}(\varrho) + (h - \tfrac{1}{2}) J_{m+1/2}(\varrho) = 0$$

bestimmt, die positiven Wurzeln dieser Gleichung mögen durch $\lambda_{m+1/2,\,1}, \lambda_{m+1/2,\,2}, \ldots$ bezeichnet sein. Die Wurzel $\lambda = 0$ führt zu einer identisch verschwindenden Funktion R.

Die Eigenfunktionen sind also, wenn $\varrho^2 = \lambda_{m+1/2,n}$ gesetzt wird,

$$P_m^\mu x . r^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) \cos \mu \omega, \qquad P_m^\mu x . r^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) \sin \mu \omega;$$

dabei sind für μ die Werte $0, 1, \ldots 2m$ zu nehmen, so daß im ganzen $2m + 1$ Eigenfunktionen zu einem Eigenwert gehören.

Um sie zu normieren, hat man ihr Quadrat mit $-r^2 dr\, dx\, d\omega$ zu multiplizieren, über den Raum der Kugel zu integrieren und durch die Quadratwurzel des erhaltenen Integrals zu dividieren. Das auszurechnende Integral ist also

$$A_\mu = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^1 r\, dr \int_{-1}^{+1} dx \left[P_m^\mu x . J_{m+1/2}(\varrho r) \cos \mu \omega\right]^2,$$

oder derselbe Ausdruck, in dem cos durch sin ersetzt ist. Berücksichtigen wir die in § 37 gebrauchte Formel

$$\int_{-1}^{+1} dx\,[P_m^\mu x]^2 = \frac{(m+\mu)!}{(m-\mu)!}\,\frac{2}{2m+1},$$

und setzen wir

$$\int_0^1 r J_{m+1/2}(\varrho r)^2\, dr = N_{m+1/2,n},$$

so erhalten wir

$$A_\mu = \frac{(m+\mu)!}{(m-\mu)!}\,\frac{\pi}{m+\frac{1}{2}}\,N_{m+1/2,n}\ (\mu > 0),$$

$$A_0 = \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}\,N_{m+1/2,n}.$$

Dasselbe ergibt sich, wenn $\sin \mu\omega$ durch $\cos \mu\omega$ ersetzt wird.

Auf Grund dieses Resultats können wir die bilineare Reihe bilden, deren Glieder vom Typus

$$\sum \frac{\varphi 0 \,.\, \varphi 1}{\lambda}$$

sind, wobei im Zähler über alle zum Eigenwert λ gehörigen normierten Eigenfunktionen summiert wird. Man erhält so den Ausdruck

$$\frac{(r r_1)^{-1/2} J_{m+1/2}(\varrho r) J_{m+1/2}(\varrho r_1) \,.\, \varphi}{2\pi \varrho^2 N_{m+1/2,n}},$$

wobei φ durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\varphi &= P_m x \,.\, P_m x_1 \,.\,(m+\tfrac{1}{2})\\ &+ 2\sum_\mu^{1,m} \frac{(m-\mu)!}{(m+\mu)!}(m+\tfrac{1}{2})\,P_m^\mu x \,.\, P_m^\mu x_1 \,.\cos\mu(\varphi-\varphi_1)\\ &= (m+\tfrac{1}{2})\,P_m(\cos\gamma_{01})\end{aligned}$$

und γ_{01} durch die Gleichung

$$\cos\gamma_{01} = x x_1 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1)$$

definiert ist. Die bilineare Reihe geht hiermit in folgende Gestalt über:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_m^{0,\infty}\sum_n^{1,\infty} \frac{(r r_1)^{-1/2}(m+\frac{1}{2})\,P_m(\cos\gamma_{01})\,J_{m+1/2}(\varrho r)\,J_{m+1/2}(\varrho r_1)}{\lambda_{m+1/2,n} N_{m+1/2,n}}.$$

Nach den Formeln in § 27 ist nun die Summation über n sofort durchzuführen. Man erhält unter der Voraussetzung

$$h - \tfrac{1}{2} > 0,\quad r < r_1$$

die Gleichung

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{J_{m+1/2}(\varrho r) J_{m+1/2}(\varrho r_1)}{\lambda_{m+1/2,n} N_{m+1/2,n}} = \frac{1}{2m+1}\left\{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{m+1/2} - (r r_1)^{m+1/2}\right\} + \frac{(r r_1)^{m+1/2}}{m+h}.$$

Ist $r > r_1$, so ist $\frac{r}{r_1}$ durch $\frac{r_1}{r}$ zu ersetzen. Hiernach wird für den Fall $r < r_1$ die bilineare Reihe folgenden Wert erhalten:

$$K(0, 1) = \frac{1}{4\pi}\sum_m^{0,\infty}\left\{\frac{r^m}{r_1^{m+1}} - (r r_1)^m + \frac{2m+1}{m+h}(r r_1)^m\right\} P_m(\cos\gamma_{01}).$$

Diese Reihe summiert sich mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_m^{0,\infty} P_m x \, . \, \alpha^m,$$

$$\frac{1-\alpha^2}{(\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2})^3} = \sum_m^{0,\infty} (2m+1) P_m x \, . \, \alpha^{m+2},$$

$$\int_0^\alpha \frac{(1-\alpha^2)\alpha^{h-1} d\alpha}{(\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2})^3} = \alpha^h \sum_m^{0,\infty} \frac{(2m+1)\alpha^m}{m+h} P_m x.$$

Speziell erhält man für den Fall $h = \infty$, also für die Randbedingung

$$\overline{V} = 0$$

die Gleichung

$$K(0, 1) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r^2 r_1^2}}\right].$$

Dieser Ausdruck ist die in der Elektrostatik auftretende gewöhnliche Greensche Funktion des Vollkugelraumes. Im Falle eines endlichen positiven Wertes von h erscheint noch das Glied

$$\frac{r^{-h}}{4\pi}\int_0^r \frac{(1 - r^2 r_1^2) r^{h-1} dr}{\sqrt{1 - 2 r r_1 \cos\gamma_{01} + r^2 r_1^2}}.$$

§ 39.

Entwickelung der quellenmäßigen Funktionen nach Eigenfunktionen.

Um bei den in diesem Abschnitt eingeführten Integralgleichungen die den früher erhaltenen analogen Sätze über die Darstellung willkürlicher Funktionen und die bilineare Formel abzuleiten, beginnen wir mit der Bemerkung, daß in den bisher betrachteten Fällen das Integral

$$\int K(0,\,1)^2\,ds$$

existiert und auf dem Grundgebiet eine stetige Funktion der Stelle 1 ist. Zunächst nämlich sieht man leicht ein, daß die Integrale

$$\int \log\frac{1}{r_{01}}\,ds,\qquad \int\left(\log\frac{1}{r_{01}}\right)^2 ds$$

dem absoluten Werte nach unter endlichen von der Stelle 1 unabhängigen Grenzen liegen. Erstreckt man sie nur über die Fläche eines Kreises $r_{10} = a$ und führt in dessen Innern r_{01} und einen Winkel ω als Polarkoordinaten mit der Stelle 1 als Zentrum ein, so hat man

$$ds = r_{01}\,dr_{01}\,d\omega$$

zu setzen und zu berücksichtigen, daß die Integrale

$$\int_0^x x\log x\,dx,\qquad \int_0^x x(\log x)^2\,dx,$$

in denen $x \leqq a$ ist, unter einer mit a unendlich abnehmenden Schranke liegen. Da nun

$$K(0,\,1) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{01}} + M(0,\,1)$$

gesetzt werden kann, wobei $M(0,\,1)$ als Funktion der Stelle 0 im Grundgebiet ausnahmslos stetig ist, so ist durch die obigen Bemerkungen die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Ebenso ist auch in einem dreidimensionalen Grundgebiet das Integral

$$\int K(0,\,1)^2\,d\tau,$$

wenn $K(0,\,1)$ wieder eine Greensche Funktion ist, eine stetige Funktion der Stelle 1, was leicht daraus folgt, daß man

$$d\tau = r_{10}^2\,dr_{10}\,d\sigma$$

setzen kann, wenn $d\sigma$ das Element einer Kugelfläche vom Radius Eins ist.

Wir halten im folgenden die Bezeichnungen des ebenen Grundgebietes fest; die Untersuchung ist aber allgemeinen Charakters und setzt zunächst nur voraus, daß das Integral

$$\int K(0,\,1)^2\,ds$$

in dem Sinne, wie es soeben für die Greenschen Funktionen nachgewiesen ist, endlich sei. A fortiori gelten die abzuleitenden Resultate für stetige und stückweise stetige Kerne.

Das wichtigste Werkzeug der Untersuchung ist die Schwarzsche Ungleichung, die folgendes aussagt. Die Integrale

$$(1) \qquad \int v^2 ds, \quad \int v w \, ds, \quad \int w^2 ds$$

seien endlich und bestimmt. Dann gilt die Ungleichung

$$\left[\int v w \, ds\right]^2 \leqq \int v^2 ds \,.\int w^2 ds;$$

denn sind p und q reelle Konstante, so ist die quadratische Form

$$p^2 \int v^2 ds + 2pq \int v w \, ds + q^2 \int w^2 ds = \int (pv + qw)^2 ds$$

niemals negativ, woraus jene Ungleichung unmittelbar folgt.

Jetzt sei φ_n ein System von normierten zu einander orthogonalen Eigenfunktionen des Kerns $K(0, 1)$; dabei werde allgemein

$$a_n = \int f0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds,$$

ferner

$$v = K(0, 1), \qquad w = \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0$$

gesetzt und unter ν irgend eine endliche Menge von Werten n verstanden. Dann existiert das Integral

$$\int v^2 ds = \int K(0, 1)^2 ds$$

und ist eine stetige Funktion der Stelle 1.

Ebenso hat das Integral

$$\int v w \, ds = \sum_\nu a_\nu \int K(0, 1)\, \varphi_\nu 0 \, ds = \sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu 1}{\lambda_\nu}$$

einen endlichen Wert und dasselbe gilt offenbar von

$$\int w^2 ds,$$

sobald nur die Koeffizienten a_ν endlich sind. Dazu reicht es hin, daß die Funktion $f0$ im Grundgebiet stückweise stetig ist; nichts hindert aber auch

$$(2) \qquad f0 = K(0, 2)$$

zu setzen, da dann die Gleichung

$$a_\nu = \frac{\varphi_\nu 2}{\lambda_\nu}$$

folgen würde. Auch wäre dann die Größe

$$\int (f\,0)^2 ds$$

endlich.

Man kann daher die Schwarzsche Ungleichung anwenden und erhält aus ihr die Beziehung

$$\left[\int K(0,1) \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0 \,.\, ds\right]^2 \leqq \int K\,(0,1)^2 ds \,.\int \Big(\sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0)^2 ds,$$

oder, da die Eigenfunktionen φ_ν orthogonal und normiert sind, und hieraus die Gleichung

$$\int \Big(\sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0\Big)^2 ds = \sum_\nu a_\nu^2,$$

folgt,

$$(3) \qquad \left[\int ds\, K(0,1) \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0\right]^2 \leqq \sum_\nu a_\nu^2 \int K(0,1)^2 ds,$$

$$(4) \qquad \Big(\sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu 1}{\lambda_\nu}\Big)^2 \leqq \sum_\nu a_\nu^2 \int K(0,1)^2 ds.$$

Anderseits gilt offenbar die Beziehung

$$\int \Big(f\,0 - \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0\Big)^2 ds \geqq 0,$$

aus der wiederum auf Grund der soeben benutzten Eigenschaften der Funktionen φ_ν folgt

$$\int (f\,0)^2 ds \geqq \sum_\nu a_\nu^2\,;$$

daraus ergibt sich, daß die unendliche Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} a_n^2$$

konvergiert, und zwar auch bei der Annahme (2), und die Ungleichungen (3) und (4) ergeben

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left|\int ds\, K(0,1) \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu 0\right| &\leqq \sqrt{\int (f\,0)^2 ds \int K(0,1)^2 ds}, \\ \left|\sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_\nu 1}{\lambda_\nu}\right| &\leqq \sqrt{\int (f\,0)^2 ds \int K(0,1)^2 ds}. \end{aligned}$$

Man kann dies Resultat auch in folgender Weise aussprechen. Greift man aus einer der beiden nur scheinbar verschiedenen unendlichen Reihen

$$(6) \qquad \sum_n^{1,\infty} a_n \int K(0,1)\varphi_n 0 . d s, \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n 1$$

eine beliebige endliche Anzahl von Gliedern heraus, so liegt die Summe dieser Glieder dem absoluten Betrage nach unter einer festen Schranke, die von der Wahl der herausgegriffenen Glieder unabhängig ist.

Aus dem erhaltenen Resultat folgt zunächst, daß die Reihen (6) absolut konvergieren. Denn man halte die Stelle 1 fest und betrachte die Glieder, die dann positiv ausfallen. Da die Summe beliebig vieler von ihnen unter einer festen Schranke liegt, so bilden sie in ihrer Gesamtheit eine konvergente Reihe. Dasselbe gilt aber offenbar von den negativen Gliedern, mithin auch von deren absoluten Beträgen; damit sind die Reihen (6) als absolut konvergent erwiesen. Für ihren Wert ergibt die Ungleichung (5), angewandt auf die Gesamtheit der positiven und die Gesamtheit der negativen Glieder die Beziehung

$$(7) \qquad \left| \sum_n^{1,\infty} \frac{a_n \varphi_n 1}{\lambda_n} \right| \leqq 2 \sqrt{\int (f 0)^2 d s \int K(0,1)^2 d s.}$$

Ferner konvergieren die Reihen (6) aber auch gleichmäßig. Denn in den Ungleichungen (3) und (4) kann die Summe

$$\sum_\nu a_\nu^2,$$

da die Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} a_n^2$$

konvergiert, dadurch beliebig klein gemacht werden, daß die Zeiger ν über einer gewissen Grenze ν_0 gehalten werden; dann liegt die Summe beliebig vieler positiver Glieder der Reihen (6), deren Zeiger über ν_0 bleiben, ebenfalls dem absoluten Betrage nach unter einer beliebig kleinen, von der Stelle 1 unabhängigen Schranke, ebenso die Summe beliebig vieler negativer Glieder; damit ist die aufgestellte Behauptung in dem Sinne erwiesen, daß die absoluten Werte der Glieder der Reihen (6) eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden.

Bei der Annahme (2) findet man, wie schon bemerkt,

$$a_\nu = \frac{\varphi_\nu 2}{\lambda_\nu},$$

und die betreffs der Reihen (6) erhaltenen Resultate zeigen, daß unter den geltenden Voraussetzungen die Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 0 \cdot \varphi_n 2}{\lambda_n^2}$$

gleichmäßig konvergiert, also im besonderen für alle in § 31 definierten Kerne. Ein noch spezielleres Resultat ist offenbar, daß diese Reihe bei stetigen Kernen stets im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert.

Nimmt man ferner an, die Gleichung

$$K(0,1) = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 0 \cdot \varphi_n 1}{\lambda_n}$$

sei, wie wir es für eine Anzahl wichtiger Einzelfälle getan haben, bewiesen, und ihre rechte Seite konvergiere absolut und gleichmäßig, wenn die Stelle 1 festgehalten wird und der Abstand r_{10} über einer positiven Konstanten a bleibt, so findet man zunächst

$$(8) \qquad \int\limits_{r_{10}>a} K(0,1) f 0 \,.\, ds = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 1}{\lambda_n} \int\limits_{r_{10}>a} f 0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds.$$

Ersetzt man sodann $f0$ außerhalb des Kreises $r_{10} = a$ durch Null, so erhält man wiederum eine im Grundgebiet stückweise stetige Funktion; die Reihe

$$(9) \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 1}{\lambda_n} \int\limits_{r_{10}<a} f 0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds$$

kann daher als spezieller Fall der Reihen (6) angesehen werden und ist absolut konvergent, und die Beziehung (7) ergibt

$$\left| \sum_n \frac{\varphi_n 1}{\lambda_n} \int\limits_{r_{10}<a} f 0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds \right| < 2 \sqrt{\int\limits_{r_{10}<a} (f0)^2 ds \int K(0,1)^2 ds}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird mit a unendlich klein; man kann daher aus der Gleichung (8), indem man rechts die Reihe (9) hinzufügt, folgern

$$(10) \qquad \int\limits_{r_{10}>a} K(0,1) f 0 \,.\, ds = \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 1}{\lambda_n} \int f 0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds + \varepsilon,$$

wobei

$$\lim_{a=0} \varepsilon = 0,$$

und das unbestimmte Integralzeichen sich, wie stets, auf das Grundgebiet bezieht. Da nun aber auch die Gleichung

$$\lim_{a=0} \int_{r_{10} > a} K(0, 1) f 0 \, . \, ds = \int K(0, 1) f 0 \, . \, ds$$

gilt, so ergibt die Gleichung (10)

$$\int K(0, 1) f 0 \, . \, ds = \sum_n^{1, \infty} \frac{\varphi_n 1}{\lambda_n} \int f 0 \, . \, \varphi_n 0 \, . \, ds.$$

Damit ist gezeigt, daß unter den jetzt geltenden Voraussetzungen, also z. B. für die in den §§ 33 bis 38 behandelten Fälle jede quellenmäßige Funktion nach den Eigenfunktionen zu entwickeln ist. Nach § 32 gilt dies also auch von jeder Funktion, die im Grundgebiet mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, die Randbedingungen der betreffenden Greenschen Funktion erfüllt, und stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt.

§ 40.

Hilfssätze über Vertauschung von Integrationen.

Um die erhaltenen Resultate auf Grundgebiete von beliebiger Gestalt zu übertragen, werden wir hauptsächlich davon Gebrauch machen, daß aus der Integralgleichung

$$\varphi 1 = \lambda \int K(0, 1) \varphi 0 \, . \, ds,$$

indem man mit $K(1, 2)$ multipliziert, die Gleichung

$$\int K(1, 2) \varphi 1 \, . \, ds_1 = \frac{\varphi 2}{\lambda} = \lambda \int \int K(1, 2) K(0, 1) \varphi 0 \, . \, ds \, ds_1,$$

folgt, die mit der Bezeichnung

$$\int K(0, 1) K(1, 2) ds_1 = K(0, 2)$$

auch in der Form

$$(1) \qquad \varphi 2 = \lambda^2 \int K^2(0, 2) \varphi 0 \, . \, ds$$

geschrieben werden kann; die Größe K^2 bezeichnen wir als den iterierten Kern.

Hier ist aber die Reihenfolge zweier Integrationen vertauscht, während der Integrand auf dem Integrationsgebiet unendlich wird; es ist also zu untersuchen, ob die durchgeführte Operation berechtigt ist. Um dies einzusehen, gehen wir davon aus, daß bei den in § 31 eingeführten Kernen die Größe

$$F(0,1) = K(0,1)K(1,2) . \varphi 0$$

unendlich wird, wenn die Stellen 0 und 1, die bei der Integration das Grundgebiet durchlaufen, zusammenfallen oder eine von ihnen in die Stelle 2 rückt. Diese umgebe man mit einem beliebig kleinen Kreis $\mathfrak{k}_2$; scheidet man ihn aus dem Grundgebiet $\mathfrak{G}$ aus, so bleibe $\mathfrak{G}_2$ übrig. Dies Gebiet teile man in Elemente, die nach Belieben durch $\varDelta s$ oder $\varDelta s_1$ bezeichnet werden und deren Ausdehnung in jeder Richtung unter einer festen Grenze a bleibe, die beliebig klein fixiert sei. In jedem Element $\varDelta s$ werde ein Punkt 0, in jedem Element $\varDelta s_1$ ein Punkt 1 fixiert, und die Summen

$$\sum_{\mathfrak{G}_2}^{0} F(0,1) \varDelta s, \quad \sum_{\mathfrak{G}_2}^{1} F(0,1) \varDelta s_1$$

über alle Stellen 0 oder 1 erstreckt, für die die Beziehung

$$r_{01} > a \tag{2}$$

gilt. Diese Summen gehen in der Grenze über in die Integrale

$$\int_{\mathfrak{G}_{21}} F(0,1)\, ds, \quad \int_{\mathfrak{G}_{20}} F(0,1)\, ds_1,$$

in denen durch $\mathfrak{G}_{21}$ und $\mathfrak{G}_{20}$ der Rest des Gebietes $\mathfrak{G}_2$ bezeichnet ist, der übrig bleibt, wenn ein mit dem Radius a um 1 oder 0 beschriebener Kreis ausgeschieden wird; offenbar ist der Integrand jedes dieser Integrale im Integrationsgebiet endlich und stetig.

Nun besteht die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{G}_2} \varDelta s_1 \sum_{\mathfrak{G}_2}^{0} F(0,1) \varDelta s = \sum_{\mathfrak{G}_2} \varDelta s \sum_{\mathfrak{G}_2}^{1} F(0,1) \varDelta s_1,$$

da beide Seiten die Summe aller Elemente $F(0,1) \varDelta s \varDelta s_1$ darstellen, in denen die Beziehung (2) gilt. Läßt man daher die Dimensionen der Elemente $\varDelta$ abnehmen, so ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{G}_2} ds_1 \int_{\mathfrak{G}_{21}} F(0,1)\, ds = \int_{\mathfrak{G}_2} ds \int_{\mathfrak{G}_{20}} F(0,1)\, ds_1. \tag{3}$$

Hier können die inneren Integrationsgebiete durch $\mathfrak{G}_2$ ersetzt werden. Sind nämlich $\mathfrak{G}'_{20}$ und $\mathfrak{G}'_{21}$ die um die Mittelpunkte 0 und 1 mit dem Radius a beschriebenen Kreisflächen, so liegt die Größe

$$\int_{\mathfrak{G}'_{21}} F(0,1)\, ds$$

unter einer von der speziellen Lage der Stelle 1 unabhängigen Grenze, die mit a unendlich abnimmt. Dies geht daraus hervor, daß man

$$|F(0, 1)| < A \log \frac{1}{r_{01}}$$

setzen kann, wobei A eine von 0 und 1 unabhängige positive Konstante bedeutet; das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{E}'_{21}} \log \frac{1}{r_{01}}\, ds$$

hat aber offenbar die bezeichnete Eigenschaft, da es leicht durch a ausgedrückt werden kann. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{E}'_{20}} F(0, 1)\, ds_1.$$

Hieraus folgt, daß auch die absoluten Werte der Größen

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}'_{21}} F(0, 1)\, ds, \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds \int\limits_{\mathfrak{E}'_{20}} F(0, 1)\, ds_1$$

mit a unendlich abnehmen. Addiert man sie zu beiden Seiten der Gleichung (3), so ergibt sich

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds_1 \int\limits_{\mathfrak{E}_2} F(0, 1)\, ds = \int\limits_{\mathfrak{E}_2} ds \int\limits_{\mathfrak{E}_2} F(0, 1)\, ds_1, \tag{4}$$

da beide Seiten dieser Gleichung sich nur um eine mit a unendlich abnehmende Größe unterscheiden.

Da ferner die Grösse $F(0, 1)$, wenn eine der Stellen 0 und 1 in die Lage 2 rückt, wie $\log r_{02}$ oder $\log r_{12}$ unendlich wird, so folgt, daß auch die Integrale

$$\int\limits_{\mathfrak{k}_2} F(0, 1)\, ds, \qquad \int\limits_{\mathfrak{k}_2} F(0, 1)\, ds_1$$

mit dem Radius des Kreises $\mathfrak{k}_2$ unendlich abnehmen.

Die Integrale

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_2} F(0, 1)\, ds, \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}_2} F(0, 1)\, ds_1$$

nähern sich daher den endlichen Grenzwerten

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} F(0, 1)\, ds, \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}} F(0, 1)\, ds_1,$$

wenn der Kreis $\mathfrak{k}_2$ unendlich abnimmt. Von diesen Werten ist als Funktion der Stelle 1 der erste, als Funktion der Stelle 0 der zweite auf dem ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ endlich und stetig, so daß auch die Integrale

$$\int_{\mathfrak{k}_2} ds_1 \int_{\mathfrak{G}} F(0,1)\, ds, \qquad \int_{\mathfrak{k}_2} ds \int_{\mathfrak{G}} F(0,1)\, ds_1$$

mit dem Radius des Kreises $\mathfrak{k}_2$ gegen die Grenze Null konvergieren. Man kann daher in der Gleichung (4) beiderseits das innere wie das äußere Integrationsgebiet durch $\mathfrak{G}$ ersetzen, und erhält so die gewünschte Gleichung

$$\int_{\mathfrak{G}} ds_1 \int_{\mathfrak{G}} F(0,1)\, ds = \int_{\mathfrak{G}} ds \int_{\mathfrak{G}} F(0,1)\, ds_1.$$

Die Bedingungen, unter denen diese Gleichung gilt, können noch verallgemeinert werden. Zunächst ist die vorausgesetzte Produktform der Größe $F(0,1)$ unwesentlich; es kommt nur darauf an, daß die Singularitäten die vorausgesetzten sind, wobei anstatt der Stelle 2 auch eine endliche Anzahl von Stellen derselben Beschaffenheit zugelassen werden können.

Die benutzten Eigenschaften der Funktion $\log \frac{1}{r_{01}}$ kommen ferner auch der Funktion $\frac{1}{r_{01}}$ selbst zu, da auch das Integral

$$\int_{r_{01} < a} \frac{ds}{r_{01}}$$

unter einer mit a unendlich abnehmenden, von 1 unabhängigen Grenze liegt. Daraus folgt, daß z. B. auch, wenn

$$F(0,1) = G(0,2)\, \Phi(1,3)$$

gesetzt wird und die Faktoren rechts entweder wie $\log \frac{1}{r_{02}}$ oder $\frac{1}{r_{02}}$ und wie $\log \frac{1}{r_{13}}$ oder $\frac{1}{r_{13}}$ unendlich werden, die Integrationsfolge vertauscht werden kann.

Wenn ferner das Grundgebiet ein räumliches ist und ds demgemäß durch ein Raumelement $d\tau$ ersetzt wird, so bleiben die durchgeführten Betrachtungen gültig, wenn die Größen $\log \frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r}$ durch $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r^2}$ ersetzt werden; denn auch die Integrale

$$\int_{r_{01} < a} \frac{d\tau}{r_{01}}, \qquad \int_{r_{01} < a} \frac{d\tau}{r_{01}^2}$$

liegen unter Grenzen, die von 1 unabhängig sind und mit a unendlich abnehmen.

§ 41.

Iterationen unstetiger Kerne.

Auf Grund der erhaltenen Hilfssätze können wir zunächst die Gleichung (1) des § 40

$$\varphi 1 = \lambda^2 \int K^2(0, 1)\, \varphi 0 . ds$$

als völlig gerechtfertigt auch für die in § 31 eingeführten Kerne ansehen; sie zeigt, daß die Eigenfunktionen $\varphi 0$ auch als solche zu dem Kern K^2 mit den Eigenwerten λ^2 gehören; der Kern K^2 ist aber stetig. Eine weitere Folge der durchgeführten Entwickelung ist, daß die in §§ 3 und 8 abgeleiteten Sätze über Integralgleichungen auf die in § 31 eingeführten Kerne übertragen werden können, da die dort vorkommenden Vertauschungen von Integrationen jetzt gerechtfertigt sind. Speziell kann man auch den Begriff des vollständigen Systems auf die bezeichneten Kerne übertragen, und die am Ende des § 39 erhaltenen Entwickelungen willkürlicher Funktionen sind von der Fourierschen Art.

Ist ferner $\psi 0$ eine Eigenfunktion des Kerns K^2, so daß

$$\psi 1 = \mu \int K^2(0, 1)\, \psi 0 . ds,$$

wobei μ eine Konstante bedeutet, so ist von den Ausdrücken

$$(1) \qquad \theta 1 = \psi 1 \pm \sqrt{\mu} \int K(0, 1)\, \psi 0 . ds$$

mindestens einer nicht identisch gleich Null; es sei dies z. B. der mit dem positiven Vorzeichen gebildete. Dann folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}\int K(1,2)\, \theta 1 . ds_1 &= \int K(1,2)\, \psi 1 . ds_1 + \sqrt{\mu} \iint K(1,2)\, K(0,1)\, \psi 0 . ds\, ds_1 \\ &= \frac{\theta 2 - \psi 2}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu} \int K^2(0, 2)\, \psi 0 . ds \\ &= \frac{\theta 2}{\sqrt{\mu}};\end{aligned}$$

die Größe θ gehört also als Eigenfunktion zum Kern $K(0, 1)$, und da dieser nach § 31 nur reelle Eigenfunktionen und Eigenwerte besitzt, muß die Größe μ positiv sein.

Wenn nun einer der Ausdrücke (1) identisch verschwindet, so sieht man, daß ψ auch eine Eigenfunktion des Kerns $K(0, 1)$ ist, die zu dem Eigenwert $\pm \sqrt{\mu}$ gehört. Ist dies nicht der Fall, so erhält man $2 \psi 1$ dargestellt als Summe zweier Eigenfunktionen des Kerns $K(0, 1)$, die zu den Eigenwerten $+\sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$

gehören. Ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kerns $K(0, 1)$ enthält also in den linearen Kombinationen der zu demselben oder entgegengesetzten Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen alle Eigenfunktionen des Kerns K^2, und kann daher auch als vollständiges normiertes System dieses Kerns aufgefaßt werden, wobei nur die zu entgegengesetzten Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen als demselben Eigenwert bezüglich des Kerns K^2 zugehörig zusammenzufassen sind.

Damit ist gezeigt, daß die zu dem Kern K^2 gehörige bilineare Reihe einfach die Reihe

$$\sum \frac{\varphi 0 \,.\, \varphi 1}{\lambda^2}$$

ist, in der über die Eigenfunktionen eines vollständigen Orthogonalsystems des Kerns K summiert wird. Da nun diese Reihe nach § 39 gleichmäßig konvergiert, so ergibt die Argumentation des § 8 auf Grund des als bewiesen vorausgesetzten Existenztheorems des § 45 sofort

$$K^2(0, 1) = \sum \frac{\varphi 0 \,.\, \varphi 1}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Diese an sich bemerkenswerte Gleichung wollen wir zu dem Nachweis benutzen, daß eine im Grundgebiet stetige Funktion $f0$, wenn alle Gleichungen

$$\int f0 \,.\, \varphi_n 0 \,.\, ds = 0$$

gelten, auch die Identität

$$\int K(0,1) f0 \,.\, ds = 0 \tag{3}$$

erfüllt. In der Tat folgt aus dieser Annahme auf Grund der Gleichung (2), da man rechts gliedweise integrieren darf,

$$\int K^2(0, 1) f0 \,.\, ds = 0$$

oder

$$\int f0 \,.\, ds \int K(0, 2) K(2, 1)\, ds_2 = 0$$

oder, wenn man die Integrationen vertauscht, was nach § 40 erlaubt ist, und

$$F2 = \int f0 \,.\, K(0, 2)\, ds \tag{4}$$

setzt,

$$\int F2 \,.\, K(2, 1)\, ds_2 = 0.$$

Multipliziert man mit $f1$ und integriert nochmals, so erhält man die Gleichung

$$\int f1 . ds_1 \int F2 . K(2,1) ds_2 = 0,$$

in der wiederum nach § 40 die Integrationen vertauscht werden können; so ergibt sich

$$\int F2 . ds_2 \int K(2, 1) f1 . ds_1 = \int (F2)^2 ds_2 = 0,$$

und hiermit ist die behauptete Identität (3) in der Form

$$F2 \equiv 0$$

erwiesen.

Weiter kann jetzt bewiesen werden, daß jede quellenmäßig darstellbare Funktion nach den Eigenfunktionen $\varphi 0$ auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann. Denn wird eine solche Funktion durch die Gleichung (4) definiert, in der sogar allgemeiner als in § 32 unter $f0$ eine beliebige im Grundgebiet stetige Funktion verstanden werden kann, und ist

$$\sum_n^{1, \infty} a_n \varphi_n 0$$

die Fouriersche Entwickelung der Funktion $F0$, so ist diese nach § 39 im Grundgebiet gleichmäßig konvergent. Somit folgt, wenn man

$$\mathfrak{F} 0 = F0 - \sum_n^{1, \infty} a_n \varphi_n 0$$

setzt,

(5) $$\int \varphi_m 0 . \mathfrak{F} 0 . ds = \int \varphi_m 0 . F0 . ds - a_m = 0,$$

woraus sich nach dem soeben erhaltenen Satze die Gleichung

(6) $$\int K(0,1) \mathfrak{F} 0 . ds = 0$$

ergibt.

Die Gleichung (5) führt nun zu folgender Transformation:

$$\int (\mathfrak{F} 0)^2 ds = \int \mathfrak{F} 0 . \left\{ \int K(0, 1) f1 . ds_1 - \sum_n^{1, \infty} a_n \varphi_n 0 \right\} ds$$

$$= \int ds \mathfrak{F} 0 . \int K(0, 1) f1 . ds_1;$$

vertauscht man auch hier nach § 40 die Integrationen, so findet man auf Grund der Gleichung (6)

$$\int (\mathfrak{F} 0)^2 ds = \int ds_1 . f1 . \int K(0,1) \mathfrak{F} 0 . ds = 0, \quad F0 = \sum_n^{1, \infty} a_n \varphi_n 0,$$

womit das Behauptete erwiesen ist. Die erhaltene Reihe konvergiert nach § 39 im Grundgebiet gleichmäßig und absolut; aus diesen Resultaten kann nach § 13 die Schmidtsche Formel zur Auflösung der nicht homogenen Integralgleichung abgeleitet werden, da die dort angewandten Schlüsse nicht erfordern, daß der Kern endlich sei.

Die bisherigen Entwickelungen dieses Paragraphen bleiben offenbar gültig, wenn man ds und $\log(1/r_{10})$ durch $d\tau$ und $1/r_{10}$, das ebene Grundgebiet durch ein räumliches ersetzt; gelten doch die Sätze des § 40 über die Vertauschung der Integrationen für beide Fälle gleichmäßig. Aber mehr noch: von den Eigenschaften der Greenschen Funktionen sind in diesem Paragraphen nur die Singularitäten benutzt; die erhaltenen Resultate gelten also für alle Kerne, die nur in derselben Weise wie die Greenschen Funktionen unendlich werden und a fortiori für Kerne, die im Grundgebiet stetig bleiben.

Beschränken wir uns wieder auf die Greenschen Funktionen als Kerne, so folgt beiläufig aus der Gleichung (2), daß die Anzahl der Eigenfunktionen unendlich ist. Denn wäre sie endlich, so könnte man auf beide Seiten der erhaltenen Gleichung die Operation Δ anwenden. Es ergäbe sich dann auf der rechten Seite eine im Grundgebiet stetige und endliche Funktion der Stellen 0 und 1, während man links die Größe $\Delta K^2(0,1)$ erhielte. Nun ist der iterierte Kern K^2 von der Natur eines Potentials, wie es am Schlusse des § 30 betrachtet ist, und damit, obwohl die Dichtigkeit unendlich wird, die Poissonsche Gleichung erfüllt. Sieht man daher $K(0,1)$ als die Dichtigkeit an der Stelle 0 an, so findet man die Gleichung

$$\Delta K^2(0,1) = -K(0,1),$$

deren rechte Seite unendlich wird, wenn die Stellen 0 und 1 zusammenfallen. Das wäre unmöglich, wenn die bilineare Reihe des Kerns K^2 aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestünde.

Weiter sieht man leicht, daß eine Funktion $f0$, die mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiet stückweise stetig und zu allen Eigenfunktionen orthogonal ist, identisch verschwindet. Denn eine solche Funktion erfüllt die Gleichung (3), auf deren linke Seite man nach § 32 die Poissonsche Formel anwenden kann; man erhält so die Gleichung

$$\Delta \int K(0,1) f0 . ds = -f0 \equiv 0.$$

Sodann sei noch erwähnt, daß auf Grund der Schmidtschen Formel für eine ebene Membran von beliebiger Gestalt die Theorie der erzwungenen Schwingungen in derselben Weise entwickelt werden kann, wie es im dritten Abschnitt für Saiten geschehen ist.

Endlich wissen wir nach § 32, daß jede Funktion quellenmäßig dargestellt werden kann, die die Randbedingungen der Eigenfunktionen erfüllt, mit ihren ersten Ableitungen stetig ist und stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt; in den ausgearteten Fällen ist ein konstanter Summand beizufügen. Eine solche Funktion ist also nach den Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelbar, die zu einer der Greenschen Funktionen als Kern der Integralgleichung gehören.

§ 42.

Entwickelung unstetiger Funktionen.

Auf Grund des erhaltenen Resultates lassen sich auch Einsichten darüber gewinnen, inwiefern unstetige Funktionen oder solche, die unstetige Ableitungen besitzen, und die Randbedingung der Greenschen Funktion nicht erfüllen, nach den Eigenfunktionen eines Kerns entwickelt werden können. Diese Sätze sind allerdings von speziellerem Charakter als die bisher erhaltenen und beziehen sich nur auf den Fall, daß die bilineare Formel in gewissem Sinne gilt und daß die Eigenfunktionen in Faktoren zerfallen, deren jeder nur von einer einzigen Variablen abhängt und als Eigenfunktion eines auf ein eindimensionales Grundgebiet bezüglichen Kerns angesehen werden kann.

Wir beschränken uns auf Gebiete von zwei Dimensionen, in denen der Kern $K(0, 1)$ unstetig wird wie $-(1/2\pi)\log r_{01}$.

Sei dl das Element einer im Grundgebiet verlaufenden Kurve L, in welchem der Punkt 0 liegt, N die Normale, die, wenn die Kurve geschlossen ist, nach außen gerichtet sein soll. Die Richtungen N und N' seien einander entgegengesetzt. Dann hat von den Integralen

$$\Phi 1 = \int\limits_L dl . f0 . K(0,1), \qquad \Theta 1 = \int\limits_L dl . f0 \cdot \frac{dK(0,1)}{dN}$$

das erste die Eigenschaften des logarithmischen Potentials einer einfach belegten Linie, das zweite ist im wesentlichen das Potential einer doppelt belegten Linie. Dabei muß die Funktion $f0$ längs der Kurve L mit ihrer ersten Ableitung stetig sein und, falls die Kurve L nicht geschlossen ist, sondern im Rande des Grundgebietes endigt, in diesem verschwinden. Das Integral Φ bietet daher, wenn der Punkt 1 die Kurve L passiert, für die in normaler Richtung gebildete Ableitung die aus der Potentialtheorie bekannte Unstetigkeit dar:

$$\frac{d\Phi 1}{dN_1} + \frac{d\Phi 1}{dN_1'} = -f1.$$

Das zweite Integral ist selbst in der Weise unstetig, daß die Gleichungen

$$\Theta_i = \Theta 1 - \tfrac{1}{2}f1, \quad \Theta_a = \Theta 1 + \tfrac{1}{2}f1$$

bestehen; dabei sollen Θ_a und Θ_i die Grenzwerte bedeuten, denen sich die Größe Θ annähert, wenn man von der Seite, nach der die Richtung N hinweist, oder von der entgegengesetzten Seite gegen den der Kurve angehörigen Punkt 1 heranrückt. Ferner ist ohne weiteres ersichtlich, daß beide Größen Φ und Θ außerhalb der Linie L im ganzen Grundgebiet dieselben Eigenschaften besitzen wie die quellenmäßigen Funktionen, insbesondere, daß sie die Randbedingungen der Greenschen Funktion erfüllen.

Wenn nun die bilineare Formel gilt und die Reihe

$$\sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n 0 \cdot \varphi_n 1}{\lambda_n}$$

gleichmäßig konvergiert, sobald der Abstand der Stelle 0 von der festen Stelle 1 über einer festen positiven Grenze bleibt, so kann man in dem Integral Φ gliedweise integrieren und erhält die Größe $\Phi 1$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n 1$ entwickelt; doch gilt diese Entwickelung zunächst nur außerhalb der Unstetigkeitslinie, in der die Punkte 0 und 1 zusammenfallen. Man hat also eine spezielle Funktion entwickelt, deren Ableitungen in der Kurve L die oben angedeuteten Unstetigkeiten besitzt.

In den von uns näher untersuchten Fällen der §§ 34 und 36 ist ferner auch die bilineare Reihe gliedweise differenzierbar in dem Sinne, daß die erhaltenen Reihen in demselben Gebiet gleichmäßig konvergieren wie die bilineare Reihe selbst. Man kann also auch für Θ eine Entwickelung nach den Eigenfunktionen erhalten, also für eine Funktion, die an der Kurve L selbst unstetig ist. Auch hier bleibt zweifelhaft, ob und in welchem Sinne die Entwickelung in der Unstetigkeitslinie selbst gilt.

Es muß noch festgestellt werden, ob die erhaltenen Entwickelungen Fouriersche sind in dem früher definierten Sinne, daß also z. B., wenn

$$\Phi 1 = \sum_n a_n \varphi_n 1$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$a_n = \int \Phi 0 . \varphi_n 0 . ds$$

besteht. Davon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise.

Man hat zunächst unmittelbar die Gleichung

$$a_n = \int_L f 0 \cdot \frac{\varphi_n 0}{\lambda_n} dl.$$

Setzt man hier ein

$$\frac{\varphi_n 0}{\lambda_n} = \int K(0, 2) \varphi_n 2 . ds_2,$$

so folgt

$$a_n = \int_L dl_0 f 0 . \int K(0, 2) \varphi_n 2 . ds_2.$$

Schließt man nun aus dem Grundgebiet einen beliebig schmalen, die Kurve L umschließenden Streifen aus und bezeichnet den Rest durch $\mathfrak{E}'$, so kann man setzen

$$\int K(0, 2) \varphi_n 2 . ds_2 = \int_{\mathfrak{E}'} K(0, 2) \varphi_n 2 . ds_2 + \varepsilon,$$

und ε liegt dem absoluten Betrage nach unter einer Grenze, die mit der Breite des ausgeschlossenen Streifens unendlich abnimmt und von der Stelle 0 unabhängig ist. Hieraus folgt

$$a_n = \varepsilon' + \int_L dl_0 f 0 . \int_{\mathfrak{E}'} K(0, 2) \varphi_n 2 . ds_2,$$

wobei ε' eine Größe von derselben Beschaffenheit wie ε bedeutet. Hier können die Integrationen vertauscht werden, so daß man erhält

$$a_n = \varepsilon' + \int_{\mathfrak{E}'} ds_2 . \varphi_n 2 . \int_L f 0 . K(0, 2) dl_0,$$

und da das Integral

$$\int_L f 0 . K(0, 2) dl_0$$

den Charakter eines Linienpotentials hat, also als Funktion der Stelle 2 im ganzen Grundgebiet stetig ist, so kann man in dem letzten für a_n gegebenen Ausdruck $\mathfrak{E}'$ durch $\mathfrak{E}$ ersetzen, ohne daß das Integral sich um mehr als einen Betrag ε'' ändert, der wiederum die Beschaffenheit der Größe ε besitzt. So erhält man die Gleichung

$$a_n = \varepsilon' + \varepsilon'' + \int\limits_{\mathfrak{G}} d s_2 \, . \, \varphi_n 2 \, . \int\limits_L f 0 \, . \, K(0, 2) \, d l_0$$

oder, da ε' und ε'' beliebig klein gemacht werden können,

$$a_n = \int d s_2 \, . \, \varphi_n 2 \, . \int\limits_L f 0 \, . \, K(0, 2) \, d l_0 = \int \varphi_n 2 \, . \, \Phi 2 \, . \, d s_2,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Genau in derselben Weise läßt sich der entsprechende Nachweis für die Reihe Θ führen, indem auch bei Funktionen von der Art der Größe dK/dN die Integrationen vertauscht werden können.

Der Nutzen, den man aus den Funktionen Φ und Θ ziehen kann, wenn man allgemeinere Arten von Funktionen nach den Eigenfunktionen entwickeln will, beruht auf folgender Erwägung: F sei eine beliebige Funktion des Ortes im Grundgebiet, die an der Kurve L eine unstetige normale Ableitung besitzt, so daß die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dF}{dN} + \frac{dF}{dN'} = - f 0$$

besteht. Die Funktion $f 0$ sei wie oben mit ihrer ersten Ableitung längs der Kurve L stetig und verschwinde am Rande des Integrationsgebietes, wenn dieser von der Kurve L erreicht wird. Im übrigen erfülle die Funktion F die Bedingungen, unter denen man sie nach § 41 nach den Eigenfunktionen entwickeln kann. Dann hat die Differenz $F - \Phi$, die selbst stetig ist, im ganzen Grundgebiet, auch auf der Kurve L stetige erste Ableitungen und stückweise stetige zweiter und dritter Ordnung und erfüllt ebenso wie die Größen Φ und Θ die Randbedingungen der Greenschen Funktion. Mithin sind für die Differenz $F - \Phi$ sämtliche Bedingungen erfüllt, unter denen sie nach § 41 auf die Fouriersche Weise entwickelt werden kann. Da nun dasselbe, wie gezeigt, von Φ gilt, so ist auch die Funktion F in der gewünschten Weise entwickelbar; nur bleibt das Verhalten der darstellenden Reihe in der Unstetigkeitslinie L zweifelhaft.

Man hat so gewissermaßen der quellenmäßigen Funktion $F - \Phi$ eine besondere, auf die Fouriersche Weise entwickelbare Funktion Φ angefügt, welche die gewünschte Singularität der ersten Ableitung hervorruft.

In ähnlicher Weise kann nun mittels der Funktion Θ auch eine entwickelbare Funktion hergestellt werden, die selbst eine gegebene Unstetigkeit besitzt. Wäre F in der Kurve L unstetig, so daß die Gleichung

$$F_i - F_a = - f0 \tag{2}$$

besteht und $f0$ dieselben Eigenschaften besitzt wie zuvor, so wäre die Differenz $F - \Theta$ im Grundgebiet quellenmäßig darstellbar, also auf die Fouriersche Weise entwickelbar und dasselbe würde wie von Θ so auch von der gegebenen Funktion F gelten, wenn diese außerhalb der Kurve L überall die Eigenschaften der quellenmäßigen Funktionen besitzt.

Da nun ferner in ähnlicher Weise Unstetigkeiten, die in mehreren Kurven L vorhanden sind, durch Subtraktion mehrerer entsprechend gebildeter Ausdrücke Φ oder Θ wegzuschaffen sind, so ist folgender Satz bewiesen: Die Funktion F sei in beliebig vielen Kurven L, die entweder geschlossen sind oder das Grundgebiet von einem Randpunkte zum anderen durchsetzen, sich gegenseitig aber nicht schneiden, unstetig, so daß Gleichungen von der Form (2) bestehen. In einem anderen System von Kurven L', das dieselben Eigenschaften wie das System L aufweise, seien die normalen Ableitungen der Funktion F unstetig, so daß Gleichungen von der Form (1) bestehen. Außerhalb der Linien L, L' habe die Funktion F stetige erste Ableitungen und stückweise stetige zweiter und dritter Ordnung, und sie erfülle die Randbedingung. Alsdann ist die Funktion F auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickelbar, wobei aber der Wert der erhaltenen Reihen in den Kurven L und L' zweifelhaft bleibt.

Mit diesem Satze ist das Problem der Entwickelung nach den Eigenfunktionen für die Fälle erledigt, in denen keine Randkurven vorhanden sind, wie z. B. für die in § 37 behandelte Wärmebewegung auf der Kugelfläche; die nach den erhaltenen Sätzen darstellbaren Funktionen dürften für alle Anwendungen, die in der mathematischen Physik vorkommen, allgemein genug sein.

§ 43.

Die Werte Fourierscher Reihen in Unstetigkeitsstellen.

Um nun festzustellen, wie sich die erhaltenen Fourierschen Reihen, insbesondere die für Φ und Θ geltenden, in den Unstetigkeitslinien selbst verhalten, gehen wir von folgender Voraussetzung aus, die in den meisten der oben behandelten Einzelfälle erfüllt ist. Jede Eigenfunktion eines zweidimensionalen Grundgebiets sei als Produkt von der Form

$$\varphi_m x \,.\, \overline{\varphi_n} y, \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

darstellbar; die Funktionen $\varphi_m x$ seien Eigenfunktionen eines auf ein lineares Grundgebiet $\mathfrak{X}$ bezüglichen Kerns und so beschaffen, daß jede in diesem Gebiete mit ihren ersten beiden Ableitungen stückweise stetige Funktion nach den Eigenfunktionen $\varphi_m x$ entwickelt werden kann; die erhaltene Reihe gebe in einer Unstetigkeitsstelle das arithmetische Mittel der Grenzwerte, denen die Funktion zustrebt, wenn man sich dieser Stelle von oben oder unten annähert. Dieselbe Beschaffenheit bezüglich eines linearen Gebietes $\mathfrak{Y}$ der Größe y habe das Funktionensystem $\overline{\varphi_n} y$. Indem man nötigenfalls an Stelle von x eine passend gewählte Funktion dieser Größe als Argument einführt, und für y die entsprechende Operation vollzieht, sei bewirkt, daß $ds = dx\,dy$ und daß die Gleichungen

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} (\varphi_m x)^2 dx = \int\limits_{\mathfrak{Y}} (\overline{\varphi_n} y)^2 dy = 1, \quad \int ds\,(\varphi_m x \,.\, \overline{\varphi_n} y)^2 = 1$$

zusammen bestehen, in deren letzter über das zweidimensionale Grundgebiet integriert wird. Endlich werde noch festgesetzt, daß die Unstetigkeitslinie L jeder Linie $x =$ const. oder $y =$ const. nur eine endliche Anzahl von Malen begegne.

Auf Grund dieser Voraussetzungen kann man die in § 42 eingeführte Funktion Φ oder $\Phi(x, y)$ in folgender Weise entwickeln. Es sei

$$a_{mn} = \int \Phi(x, y)\, \varphi_m x \,.\, \overline{\varphi_n} y \,.\, ds = \int\limits_{\mathfrak{X}} dx \,.\, \varphi_m x \int\limits_{\mathfrak{Y}} \Phi(x, y)\, \overline{\varphi_n} y\, dy;$$

dann kann man, da $\Phi(x, y)$ im Grundgebiet stetig ist, die Integrationen vertauschen und erhält

$$(1) \qquad a_{mn} = \int\limits_{\mathfrak{Y}} dy\, \overline{\varphi_n} y \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi(x, y)\, \varphi_m x \,.\, dx = \int\limits_{\mathfrak{Y}} \Phi_m y \,.\, \overline{\varphi_n} y \,.\, dy,$$

wobei gesetzt ist

$$(2) \qquad \Phi_m y = \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi(x, y)\, \varphi_m x \,.\, dx.$$

Da nun diese Größe eine stetige Funktion von y ist, ihre Ableitungen aber nach der neuen betreffs der Linien L eingeführten Voraussetzung stückweise stetig sind, so kann man sie auf die

Fouriersche Weise nach den Funktionen $\overline{\varphi_n} y$ entwickeln und man erhält dann der Gleichung (1) zufolge die Formel

$$\Phi_m y = \sum_n a_{mn} \overline{\varphi_n} y. \tag{3}$$

Da ferner $\Phi(x, y)$ als Funktion von x, wenn man y festhält, ebenfalls mit den ersten beiden Ableitungen auf dem Gebiete $\mathfrak{X}$ stückweise stetig ist, so kann man nach den Eigenfunktionen $\varphi_m x$ entwickeln und erhält auf Grund der Formeln (2)

$$\Phi(x, y) = \sum_m \Phi_m y \cdot \varphi_m x, \tag{4}$$

und der Gleichung (3) zufolge die schon bekannte Gleichung

$$\Phi(x, y) = \sum_m \varphi_m x \sum_n a_{mn} \overline{\varphi_n} y. \tag{5}$$

Die Reihe (4) stellt nun aber die Funktion Φ auch in den Unstetigkeitsstellen der nach x genommenen Ableitung, also auf der Kurve L richtig dar; dasselbe gilt daher auch von der Reihe (5). Die Fouriersche Entwickelung der Größe Φ gilt somit auch in der Unstetigkeitslinie L bei einer gewissen Anordnung der Glieder.

Um analoge Betrachtungen für die in § 42 eingeführte Größe $\Theta = \Theta(x, y)$ anzustellen, setzen wir

$$b_{mn} = \int \Theta \varphi_m x \cdot \overline{\varphi_n} y \cdot ds = \int_{\mathfrak{X}} dx \cdot \varphi_m x \int_{\mathfrak{Y}} \Theta(x, y) \overline{\varphi_n} y \, dy,$$

und finden, da $\Theta(x, y)$ im Grundgebiet stückweise stetig ist,

$$b_{mn} = \int_{\mathfrak{Y}} dy \cdot \overline{\varphi_n} y \int_{\mathfrak{X}} \Theta(x, y) \varphi_m x \, dx;$$

ferner sei

$$\Theta_m y = \int_{\mathfrak{X}} \Theta(x, y) \varphi_m x \cdot dx.$$

Dann erhält man, analog den Formeln (3) und (4), die Gleichungen

$$\Theta_m y = \sum_n b_{mn} \overline{\varphi_n} y, \tag{6}$$

$$\Theta(x, y) = \sum_m \varphi_m x \cdot \Theta_m y. \tag{7}$$

Das Verhalten dieser Reihe auf der Kurve L ist leicht zu übersehen; wird nämlich die Kurve L in irgend einem Punkte von der Linie $y = \text{const.}$ durchsetzt, so ist der Wert der Reihe nach den geltenden Voraussetzungen auf der Linie L

$$\frac{\Theta(x-0,\,y)+\Theta(x+0,\,y)}{2},$$

oder auch

$$\frac{\Theta_i+\Theta_a}{2}; \tag{8}$$

diese beiden Ausdrücke fallen zusammen, weil bei der soeben eingeführten Voraussetzung eins der Gleichungssysteme

$$\Theta(x-0,\,y)=\Theta_i,\quad \Theta(x+0,\,y)=\Theta_a,$$
$$\Theta(x-0,\,y)=\Theta_a,\quad \Theta(x+0,\,y)=\Theta_i$$

besteht. Da nun die Reihe (7) der Gleichung (6) zufolge der Reihe

$$\sum_m \varphi_m x \sum_n b_{mn}\overline{\varphi_n}y,$$

d. h. der Fourierschen Reihe für die Größe Θ in einer gewissen Anordnung gleich ist, so hat auch letztere auf der Linie L, sofern diese sich nicht mit der Linie $y =$ const. berührt, den Wert (8).

Hieraus schließt man leicht, daß auch die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Fourierschen Reihen für unstetige Funktionen F in den Unstetigkeitslinien bei einer gewissen Anordnung der Glieder den Wert $\frac{1}{2}(F_i+F_a)$ ergeben, wenn nicht etwa an der betrachteten Stelle längs der Linie L das Differential dy verschwindet. Denn die Funktion F wurde, indem man einige Funktionen Φ und Θ von ihr abzog, in eine quellenmäßige verwandelt, so daß ihre Fouriersche Entwickelung in den Linien L sich wie die der Größen Φ und Θ verhält.

Um endlich auch Funktionen auf die Fouriersche Art zu entwickeln, die die Randbedingung der Greenschen Funktion nicht erfüllen, nehmen wir an, diese Funktion verschwinde überall am Rande des Grundgebietes. Sind dann die Gebiete $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Strecken von $x = 0$ bis $x = a$ und von $y = 0$ bis $y = b$, so gelten die Gleichungen

$$\varphi_m 0 = \varphi_m a = \overline{\varphi_n} 0 = \overline{\varphi_n} b = 0.$$

Trotzdem gibt es unter den geltenden Voraussetzungen Reihen von der Form

$$\mathfrak{F}x = \sum c_m \varphi_m x,$$

die die Randbedingung nicht erfüllen. Da offenbar die Größe $\mathfrak{F}0$ stets verschwindet, ist das so zu verstehen, daß der Grenzwert $\mathfrak{F}(+0)$

von Null verschieden ist; man denke nur an die bekannte Reihe

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots,$$

die das geschilderte paradoxe Verhalten zeigt.

Seien also $\mathfrak{F}_1 x$, $\mathfrak{F}_2 x$ nach den Funktionen $\varphi_m x$ entwickelbare Funktionen von x, die im Gebiet $\mathfrak{X}$ mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig sind, stückweise stetige dritte Ableitungen haben und die Gleichungen

$$(9) \qquad \mathfrak{F}_1(+0) = \mathfrak{F}_2(a-0) = 1, \quad \mathfrak{F}_1(a-0) = \mathfrak{F}_2(+0) = 0$$

erfüllen. Ebenso seien die Funktionen $\overline{\mathfrak{F}_1} y$, $\overline{\mathfrak{F}_2} y$, für die entsprechende Stetigkeitseigenschaften im Gebiet $\mathfrak{Y}$ angenommen seien, nach den Funktionen $\overline{\varphi_n} y$ entwickelbar, und mögen die Gleichungen

$$(10) \qquad \overline{\mathfrak{F}_1}(+0) = \overline{\mathfrak{F}_2}(b-0) = 1, \quad \overline{\mathfrak{F}_1}(b-0) = \overline{\mathfrak{F}_2}(+0) = 0$$

bestehen. Dann ist es möglich, eine nach den zweidimensionalen Eigenfunktionen $\varphi_m x \,.\, \varphi_n y$ entwickelbare Funktion zu bilden, die im Innern des Grundgebietes mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist, stückweise stetige Ableitungen dritter Ordnung besitzt und am Umfang des Grundgebietes gegen eine beliebige Funktion des Ortes auf der Umfangslinie konvergiert. Diese Funktion sei je nach der Lage des unabhängig veränderlichen Punktes auf dem einen oder anderen Teil der Umfangslinie etwa $\Psi(x, 0)$, $\Psi(a, y)$, $\Psi(x, b)$, $\Psi(0, y)$.

Wir setzen dann mit konstanten Koeffizienten a, b folgende Gleichungen an:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Psi(x, 0) &= \mathfrak{f}_1 x + a_1 \mathfrak{F}_1 x + a_2 \mathfrak{F}_2 x, \\ \Psi(x, b) &= \mathfrak{f}_2 x + b_1 \mathfrak{F}_1 x + b_2 \mathfrak{F}_2 x, \\ \Psi(0, y) &= \overline{\mathfrak{f}_1} y + \overline{a}_1 \overline{\mathfrak{F}_1} y + \overline{a}_2 \overline{\mathfrak{F}_2} y, \\ \Psi(a, y) &= \overline{\mathfrak{f}_2} y + \overline{b}_1 \overline{\mathfrak{F}_1} y + \overline{b}_2 \overline{\mathfrak{F}_2} y. \end{aligned}$$

Mit den hierdurch definierten Funktionen $\mathfrak{f}$, $\overline{\mathfrak{f}}$ bilden wir den Ausdruck

$$\Omega(x, y) = \mathfrak{f}_1 x \,.\, \overline{\mathfrak{F}_1} y + \mathfrak{f}_2 x \,.\, \overline{\mathfrak{F}_2} y + \overline{\mathfrak{f}_1} y \cdot \mathfrak{F}_1 x + \overline{\mathfrak{f}_2} y \cdot \mathfrak{F}_2 x$$

und suchen nun die Konstanten a, b so zu bestimmen, daß am Rande des Grundgebietes die Größen Ψ und Ω überall gleich werden, d. h. daß die Beziehungen

$$(12) \qquad \Psi(x, 0) = \Omega(x, +0), \quad \Psi(x, b) = \Omega(x, b-0),$$
$$(13) \qquad \Psi(0, y) = \Omega(+0, y), \quad \Psi(a, y) = \Omega(a-0, y)$$

gelten.

Nun ergeben die Gleichungen (9) und (10) folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}
\Omega(x, +0) &= \mathfrak{f}_1 x + \overline{\mathfrak{f}}_1(+0) \cdot \mathfrak{F}_1 x + \overline{\mathfrak{f}}_2(+0) \cdot \mathfrak{F}_2 x, \\
\Omega(x, b-0) &= \mathfrak{f}_2 x + \overline{\mathfrak{f}}_1(b-0) \mathfrak{F}_1 x + \overline{\mathfrak{f}}_2(b-0) \cdot \mathfrak{F}_2 x, \\
\Omega(+0, y) &= \overline{\mathfrak{f}}_1 y + \mathfrak{f}_1(+0) \overline{\mathfrak{F}}_1 y + \mathfrak{f}_2(+0) \overline{\mathfrak{F}}_2 y, \\
\Omega(a-0, y) &= \overline{\mathfrak{f}}_2 y + \mathfrak{f}_1(a-0) \overline{\mathfrak{F}}_1 y + \mathfrak{f}_2(a-0) \overline{\mathfrak{F}}_2 y.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (12), (13) sind also erfüllt, wenn diese Ausdrücke den Größen (11) gleich sind, d. h. wenn folgende Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned}
a_1 &= \overline{\mathfrak{f}}_1(+0), & a_2 &= \overline{\mathfrak{f}}_2(+0), \\
b_1 &= \overline{\mathfrak{f}}_1(b-0), & b_2 &= \overline{\mathfrak{f}}_2(b-0), \\
\bar{a}_1 &= \mathfrak{f}_1(+0), & \bar{a}_2 &= \mathfrak{f}_2(+0), \\
\bar{b}_1 &= \mathfrak{f}_1(a-0), & \bar{b}_2 &= \mathfrak{f}_2(a-0).
\end{aligned} \tag{14}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen kann man aber aus den Beziehungen (11), die als Definitionen der Funktionen $\mathfrak{f}$, $\overline{\mathfrak{f}}$ anzusehen sind, bestimmen; berücksichtigt man die Gleichungen (9) (10), so ergibt sich aus dem System (11)

$$\begin{aligned}
\Psi(0, 0) &= \mathfrak{f}_1(+0) + a_1, & \Psi(0, b) &= \mathfrak{f}_2(+0) + b_1, \\
\Psi(a, 0) &= \mathfrak{f}_1(a-0) + a_2, & \Psi(a, b) &= \mathfrak{f}_2(a-0) + b_2, \\
\Psi(0, 0) &= \overline{\mathfrak{f}}_1(+0) + \bar{a}_1, & \Psi(0, b) &= \overline{\mathfrak{f}}_1(b-0) + \bar{a}_2, \\
\Psi(a, 0) &= \overline{\mathfrak{f}}_2(+0) + \bar{b}_1, & \Psi(a, b) &= \overline{\mathfrak{f}}_2(b-0) + b_2.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (14) und damit auch die Gleichungen (12), (13) sind also erfüllt, wenn folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}
\Psi(0, 0) &= \bar{a}_1 + a_1, & \Psi(0, b) &= \bar{a}_2 + b_1, \\
\Psi(a, 0) &= \bar{b}_1 + a_2, & \Psi(a, b) &= \bar{b}_2 + b_2, \\
\Psi(0, 0) &= a_1 + \bar{a}_1, & \Psi(0, b) &= b_1 + \bar{a}_2, \\
\Psi(a, 0) &= a_2 + \bar{b}_1, & \Psi(a, b) &= b_2 + \bar{b}_2.
\end{aligned}$$

Man erhält so nur vier Bedingungsgleichungen, die offenbar von den acht Größen a, b immer leicht erfüllt werden können, und die gewünschten Gleichungen (12), (13) nach sich ziehen.

Jetzt nehmen wir an, die Funktionen $\Psi(0, y)$, $\Psi(a, y)$, $\Psi(x, 0)$, $\Psi(x, b)$ seien, je nachdem x oder y in ihnen vorkommt, nach den Funktionen $\varphi_m x$ oder $\varphi_n y$ auf die Fouriersche Weise entwickelbar. Dann gilt dasselbe von $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\overline{\mathfrak{f}}_1$, $\overline{\mathfrak{f}}_2$ und damit auch von $\Omega(x, y)$. Man hat also auf dem zweidimensionalen Grundgebiete eine nach den Eigenfunktionen fortschreitende Reihe, die den Randbedingungen der Greenschen Funktion widerspricht, und sich den Randwerten der sehr allgemeinen Funktion $\Psi(x, y)$ annähert, wenn das unabhängige Wertsystem (x, y) gegen ein dem Rande angehöriges heranrückt.

Habe nun $\Psi(x, y)$ die Eigenschaften, die am Schluß des § 42 von der dort durch F bezeichneten mit Ausnahme der auf die Randwerte bezüglichen; dann hat die Differenz $\Psi - \Omega$ vollständig den Charakter der dort durch F bezeichneten Funktion, ist also auf die Fouriersche Weise entwickelbar. Dasselbe gilt aber von Ω wegen der von den Funktionen $\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}$ geforderten Stetigkeitseigenschaften, mithin auch von $\Psi(x, y)$ selbst. Damit ist jedenfalls für die in diesem Paragraphen betrachtete spezielle Randbedingung gezeigt, daß in dem Schlußresultate des § 42 die Forderung, die Funktion F erfülle die Randbedingung, weggelassen werden kann; die Funktion bleibt dann auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickelbar.

Hat man eine beliebige Randbedingung der Greenschen Funktion auferlegt, so gilt die durchgeführte Argumentation in leicht modifizierter Gestalt.

Fünfter Abschnitt.

Existenztheoreme und das Dirichletsche Problem.

§ 44.

Allgemeine Theorie der Iterationen.

Wir gehen dazu über, die allgemeine Theorie der Integralgleichungen um einen wesentlichen Schritt zu fördern und zu zeigen, daß jeder stetige symmetrische Kern mindestens eine Eigenfunktion besitzt. Dadurch wird die schon einige Male benutzte allgemeine Argumentation des § 8 den noch fehlenden festen Grund gewinnen; die mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultate werden natürlich im folgenden nicht benutzt.

Die Buchstaben x, y, $\alpha, \ldots$, die als Variable eingeführt werden, mögen Punkte eines Grundgebietes von beliebig vielen Dimensionen, dx, dy, $d\alpha \ldots$ die Elemente dieses Gebietes bedeuten; jedes unbestimmte Integralzeichen bedeute die Integration über das Grundgebiet. Durch $K(x, y)$ werde eine im Grundgebiet stetige, in den Stellen x und y symmetrische Funktion derselben bezeichnet; $\varphi_n x$ seien die Glieder eines nach § 8 gebildeten vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kerns $K(x, y)$, der, was wir zunächst einmal annehmen, Eigenfunktionen besitze, und λ_n seien die zugehörigen, nicht notwendig von einander verschiedenen Eigenwerte, so daß

$$\varphi_n y = \lambda_n \int K(x, y)\, \varphi_n x \,.\, dx.$$

Wenn dann die bilineare Formel

$$K(x, y) = \sum_n \frac{\varphi_n x \,.\, \varphi_n y}{\lambda_n}$$

gilt und gliedweise integriert werden kann, so findet man

$$\int K(x, y)\, K(x, z)\, dx = \sum_n \frac{\varphi_n y \,.\, \varphi_n z}{\lambda_n^2};$$

die linke Seite ist der iterierte Kern und werde wie früher durch $K^2(y, z)$ bezeichnet. Er ist offenbar in y und z symmetrisch und die Funktionen φ_n bilden nach § 41 auch für ihn ein vollständiges Orthogonalsystem; die Eigenwerte sind λ_n^2, also positiv; aus einer Eigenfunktion des Kerns K^2 kann nach § 41 eine solche des Kerns K abgeleitet werden. Wollen wir also überhaupt die Existenz von Eigenfunktionen beweisen, so genügt es, dies für den Kern K^2 zu tun, also einen Kern, dessen Eigenwerte positiv sind und für den die Größe

$$\int K(x, x)\, dx$$

positiv ist. Auf diesen Fall wollen wir uns von jetzt an beschränken.

Setzt man allgemein

$$\int K^n(x, y)\, K(x, z)\, dx = K^{n+1}(y, z), \tag{1}$$

so findet man unmittelbar

$$K^3(y, z) = \sum_n \frac{\varphi_n y \cdot \varphi_n z}{\lambda_n^3},$$

allgemein

$$K^m(y, z) = \sum_n \frac{\varphi_n y \cdot \varphi_n z}{\lambda_n^m}, \tag{2}$$

da diese Gleichung auf Grund der Beziehung (1) durch vollständige Induktion erschlossen wird.

Nehmen wir speziell an, die Größen λ_n, die ja positiv sind, seien nach der Größe geordnet, und zu λ_1 gehören die Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$, die bei den geltenden Voraussetzungen linear unabhängig und zu einander orthogonal sind. Dann kann man die Gleichung (2) schreiben

$$\lambda_1^m K^m(y, z) = \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu y \cdot \varphi_\nu z + \sum_n^{2,\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^m \varphi_n y \cdot \varphi_n z.$$

Setzt man $y = z = x$ und integriert über das Grundgebiet, so ergibt sich

$$\lambda_1^m \int K^m(x, x)\, dx = k + \sum_n^{2,\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^m.$$

Da nun die Größen λ_1/λ_n echte Brüche sind, so machen die letzten beiden Gleichungen, wenn man m über alle Grenzen wachsen läßt, die folgenden plausibel:

$$\lim_{m=\infty}\left[\lambda_1^m K^m(x, y)\right] = \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu x \,.\, \varphi_\nu y,$$

$$\lim_{m=\infty} \lambda_1^m \int K^m(x, x)\, dx = k.$$

Die letztere Gleichung kann auch wie folgt ausgesprochen werden. Setzt man

$$U_m = \int K^m(x, x)\, dx,$$

so gibt es eine derartige Konstante λ_1, daß der Grenzwert

$$\lim_{m=\infty} \lambda_1^m U_m$$

existiert und eine positive ganze Zahl ist. Man kann hieraus auch schließen

$$\lim_{m=\infty} \frac{\lambda_1^{m+1} U_{m+1}}{\lambda_1^m U_m} = 1, \quad \lambda_1 = \lim_{m=\infty} \frac{U_m}{U_{m+1}}.$$

Diese zunächst rein hypothetischen Resultate lassen sich nun in der Tat immer beweisen, ohne daß von der bilinearen Formel Gebrauch gemacht würde. Dazu führt eine nähere Untersuchung der iterierten Kerne.

Diese Größen sind zunächst alle symmetrisch. Denn ist dies bis zu $K^n(x, y)$ hinauf bewiesen, so gilt die Gleichung

$$K^{n+1}(y, z) = \int K^n(x, y)\, K(x, z)\, dx$$
$$= \int\!\!\int K^{n-1}(x, x)\, K(u, y)\, K(x, z)\, dx\, du,$$

oder, da man

$$\int K^{n-1}(u, x)\, K(x, z)\, dx = K^n(u, z)$$

einführen kann,

$$K^{n+1}(y, z) = \int K^n(u, z)\, K(u, y)\, du = K^{n+1}(z, y),$$

womit das Behauptete erwiesen ist.

Ferner gilt die Gleichung

$$K^{n+r}(x, y) = \int K^n(\alpha, x)\, K^r(\alpha, y)\, d\alpha, \tag{3}$$

jedenfalls für $r = 1$; gilt sie aber für irgendeinen Wert von r, so gilt sie auch für den um Eins größeren. Denn aus ihr folgt, da man die Integrationen vertauschen kann,

$$\int K^{n+r}(x, y)\, K(y, z)\, dy = \int\!\!\int K^n(\alpha, x)\, K^r(\alpha, y) K(z, y)\, d\alpha\, dy,$$

oder

$$K^{n+r+1}(x, y) = \int K^n(\alpha, x)\, K^{r+1}(\alpha, y)\, d\alpha,$$

wie behauptet wurde. Die Gleichung (3) gilt also allgemein.

Aus ihr folgt sofort

$$U_{n+r} = \int\int K^n(\alpha, x)\, K^r(\alpha, x)\, d\alpha\, dx,$$
$$U_{2n} \;\, = \int\int K^n(\alpha, x)^2\, d\alpha\, dx,$$

und hieraus, wenn p und q beliebige reelle Größen sind,

$$U_{2n} p^2 + 2 U_{n+r}\, p\, q + U_{2r}\, q^2 \geqq 0,$$

also

$$U_{n+r}^2 \leqq U_{2n} \,.\, U_{2r},$$

und speziell

(4) $$U_{2n}^2 \;\leqq U_{2n-2}\, U_{2n+2}.$$

Ferner läßt sich zeigen, daß alle Größen U_{2n} positiv sind. Denn zunächst gilt dies von

$$U_2 = \int K^2(\alpha, \alpha)\, d\alpha = \int\int K(x, \alpha)\, K(x, \alpha)\, dx\, d\alpha,$$

da $K(x, y)$ nicht identisch verschwindet. Wäre nun U_{2m} die erste verschwindende der Größen $U_4, U_6, \ldots$, so hätte man der Gleichung (3) zufolge

$$U_{2m} = \int\int K^m(x, \alpha)^2\, dx\, d\alpha,$$

also verschwände $K^m(x, \alpha)$ identisch, mithin auch der Formel (3) zufolge $K^{m+1}(x, \alpha)$. Ist dann $2r$ die gerade der Zahlen m und $m+1$, so verschwindet die Größe

$$K^{2r}(x, x) = \int K^r(x, \alpha)^2\, d\alpha,$$

mithin auch $K^r(x, \alpha)$ identisch, mithin ist

$$U_r = \int K^r(\alpha, \alpha)\, d\alpha = 0, \qquad U_{r+1} = \int K^{r+1}(\alpha, \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Damit geriete man aber in einen Widerspruch zu der Voraussetzung, U_{2m} sei die erste verschwindende in der Reihe der Größen $U_4, U_6, \ldots$

Man kann daher in der Beziehung (4) stets durch $U_{2n} \,.\, U_{2n-2}$ dividieren und erhält

(5) $$0 < \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}.$$

Anderseits ergibt sich mittels der Gleichung (3) aus der offenbaren Beziehung

$$\int [p^2 K^m(x, \alpha)^2 + 2 p q\, K^m(x, \alpha)\, K^r(y, \alpha) + q^2 K^r(y, \alpha)^2]\, d\alpha \geqq 0$$

oder aus der allgemeinen Schwarzschen Ungleichung das Resultat

$$K^{m+r}(x, y)^2 \leqq \int K^m(x, \alpha)^2\, d\alpha \int K^r(y, \alpha)^2\, d\alpha,$$

und hieraus, indem man über das Grundgebiet zweimal integriert,

$$\int\int K^{m+r}(x, y)^2\, dx\, dy \leqq \int\int K^m(x, \alpha)^2\, dx\, d\alpha . \int\int K^r(y, \alpha)^2\, dy\, d\alpha,$$

oder

$$U_{2m+2r} \leqq U_{2m}\, U_{2r} \tag{6}$$

und speziell

$$\frac{U_{2m+2}}{U_{2m}} \leqq U_2.$$

Die positiven Größen $U_{2m+2} : U_{2m}$, die nach der Relation (5) mit m wachsen, bleiben also unter einer endlichen Schranke, und es gibt daher einen positiven Grenzwert c derart, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c, \quad \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqq c;$$

die letzte Ungleichung kann auch geschrieben werden

$$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^n},$$

so daß die positiven Größen $U_{2m} : c^m$ unter einer endlichen Schranke liegen, und sich mit wachsenden Werten von m einer nicht negativen Grenze U annähern. Diese ist positiv; denn schreibt man die Ungleichung (6) in der Form

$$U_{2r} \geqq \frac{U_{2m+2r}}{U_{2m}}, \quad U_{2r} \geqq \frac{U_{2m+2r}}{U_{2m+2r-2}} \cdot \frac{U_{2m+2r-2}}{U_{2m+2r-4}} \cdots \frac{U_{2m+2}}{U_{2m}},$$

so sind alle einzelnen Brüche auf der rechten Seite der Beziehung (5) zufolge nicht kleiner als der letzte von ihnen, also

$$U_{2r} \geqq \left(\frac{U_{2m+2}}{U_{2m}}\right)^r;$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung sich bei wachsenden Werten von m der Grenze c^r nähert, folgt allgemein

$$\frac{U_{2r}}{c^r} \geqq 1,$$

und hieraus

$$U \geqq 1.$$

§ 45.

Beweis für die Existenz einer Eigenfunktion.

Die zu Anfang des vorigen Paragraphen durchgeführten heuristischen Betrachtungen führen nun zu der Vermutung, daß

$$c = \lambda_1^2,$$

d. h. gleich dem Quadrat des kleinsten Eigenwertes und daß ein zugehöriges Aggregat von Eigenfunktionen in der Form

$$\lim_{m=\infty} \frac{K^{2m}(x, y)}{\lambda_1^{2m}} = \lim_{m=\infty} \frac{K^{2m}(x, y)}{c^m}$$

darstellbar ist. Jetzt sind wir hinreichend vorbereitet, um zeigen zu können, daß dieser Grenzwert wirklich existiert und eine Eigenfunktion des Kerns $K^2(x, y)$ darstellt. Aus der Gleichung (3) des § 44 folgt nämlich

$$\frac{K^{2m+2n}(x, y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x, y)}{c^n}$$

$$= \frac{1}{c} \int\int K(x, \alpha) K(y, \beta) \left[\frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+n-1}} - \frac{K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{n-1}}\right] d\alpha\, d\beta,$$

und hieraus nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left[\frac{K^{2m+2n}(x, y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x, y)}{c^n}\right]^2 \leqq \frac{1}{c^2} \int\int K(x, \alpha)^2 K(y, \beta)^2 d\alpha\, d\beta$$

$$\times \int\int d\alpha\, d\beta \left\{\left(\frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+n-1}}\right)^2 - 2\, \frac{K^{2m+2n-2}(\alpha, \beta)\, K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{m+2n-2}} + \left(\frac{K^{2n-2}(\alpha, \beta)}{c^{n-1}}\right)^2\right\},$$

oder, nach der Definition der Größen U_n

$$\left[\frac{K^{2m+2n}(x,y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x,y)}{c^n}\right]^2 \leqq \left\{\frac{U_{4m+4n-4}}{c^{2m+2n-2}} - \frac{2\, U_{2m+4n-4}}{c^{m+2n-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}$$

$$\times \frac{1}{c^2} \int\int K(x, \alpha)^2 K(y, \beta)^2 d\alpha\, d\beta.$$

Hier wird die Klammer auf der rechten Seite, sobald n hinreichend groß gewählt ist, so klein wie man will, da dann ihre Glieder den Werten U, $-2\,U$, U beliebig nahe liegen; der zweite Faktor der rechten Seite liegt unter einer festen Schranke. Die Ungleichung zeigt also, daß der Grenzprozeß

$$\lim_{m=\infty} \frac{K^{2m}(x, y)}{c^m}$$

bezüglich der Variablen x, y im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen eine stetige Funktion $f(x, y)$, die offenbar in x und y symmetrisch ist. Sie ist ferner Eigenfunktion des Kerns K^2 und gehört als solche zum Eigenwert $\frac{1}{c}$, wie die Gleichung

$$\frac{K^{2m+2}(x, y)}{c^{m+1}} = \frac{1}{c} \int K^2(x, \alpha)\, \frac{K^{2m}(y, \alpha)}{c^m}\, d\alpha$$

zeigt. In dieser kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Grenzprozesses m beiderseits unendlich wachsen lassen und erhält so

$$f(x, y) = \frac{1}{c} \int K^2(x, \alpha) f(\alpha, y)\, d\alpha,$$

und ebenso

$$f(x, y) = \frac{1}{c} \int K^2(y, \alpha) f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Endlich verschwindet die Funktion $f(x, y)$ nicht identisch, da die Größe

$$\int f(x, x)\, dx$$

sich, wenn n hinreichend groß genommen wird, von

$$\frac{1}{c^n} \int K^{2n}(x, x)\, dx = \frac{U_n}{c^n},$$

also auch von U beliebig wenig unterscheidet. Letztere Größe ist aber als positiv erkannt; beiläufig ergibt sich noch

$$\int f(x, x)\, dx = U.$$

Hiermit ist eine Eigenfunktion des Kerns K^2 konstruiert und dadurch nach § 44 gezeigt, daß **ein beliebiger stetiger symmetrischer Kern mindestens eine Eigenfunktion besitzt.**

Bemerken wir noch, daß in der ganzen durchgeführten Argumentation nicht vorausgesetzt wird, daß das Integrationsgebiet endlich sei. Ist es unendlich, z. B. die Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$, so braucht man nur zu wissen, daß die betrachteten Integrale, also die iterierten Kerne und die Größen U_m, endliche Werte haben, um auch auf ein solches Grundgebiet die erhaltenen Sätze anwenden zu können.

§ 46.

Genauere Untersuchung der benutzten Grenzprozesse.

Da der Kern K^2 dem Eigenwert c entsprechend eine Eigenfunktion besitzt, kann man nach § 8 ein System normierter und zu einander orthogonaler Eigenfunktionen $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \dots \varphi_k x$ bilden, durch die jede zu diesem Eigenwert gehörige Eigenfunktion linear mit Koeffizienten, die von x unabhängig sind, ausgedrückt werden kann. Man kann daher setzen

$$f(x, y) = \sum_{\nu}^{1,k} \psi_\nu y \cdot \varphi_\nu x,$$

und wegen der Symmetrie der Funktion $f(x, y)$ folgt

$$f(x, y) = \sum_{\nu}^{1,k} \psi_\nu x \,.\, \varphi_\nu y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, wenn μ eine der Zahlen von 1 bis k ist,

$$\int f(x, y)\, \varphi_\mu x \,.\, dx = \psi_\mu y = \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu y \,.\int \psi_\nu x \,.\, \varphi_\mu x \,.\, dx.$$

Die Größen $\psi_\mu y$ sind also linear in den Eigenfunktionen $\varphi_\nu y$ und man kann setzen

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu}^{1,k} C_{\mu\nu}\, \varphi_\mu x \,.\, \varphi_\nu y,$$

wobei durch $C_{\mu\nu}$ Konstante bezeichnet sind.

Hieraus folgt unmittelbar

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \int\int f(x, y)\, \varphi_\nu x \,.\, \varphi_\nu y \,.\, dx\, dy &= C_{\nu\nu}, \\ \int\int f(x, y)\, \varphi_\mu x \,.\, \varphi_\nu y \,.\, dx\, dy &= C_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Nun ergibt die Gleichung

$$\varphi x = \frac{1}{c} \int K^2(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

indem man mit $K^2(x, y)$ multipliziert und integriert, nach der Formel (3) des § 44

$$\begin{aligned} \int K^2(x, y)\, \varphi x \,.\, dx &= \frac{1}{c} \int\int K^2(x, \alpha) K^2(x, y)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha\, dx. \\ &= \frac{1}{c} \int K^4(\alpha, y)\, \varphi \alpha\, d\alpha, \end{aligned}$$

also

$$\varphi x = \frac{1}{c^2} \int K^4(x, \alpha)\, \varphi \alpha\, d\alpha.$$

Hieraus folgt durch dieselbe Operation

$$\varphi x = \frac{1}{c^3} \int K^6(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha,$$

und ebenso allgemein

$$\varphi x = \frac{1}{c^n} \int K^{2n}(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha.$$

Läßt man hier n unendlich wachsen und bedenkt, daß der Grenzübergang

$$\text{(2)} \qquad f(x, y) = \lim_{n=\infty} \frac{K^{2n}(x, y)}{c^n} = \lim_{n=\infty} \frac{K^{2n}(x, y)}{\lambda_1^{2n}}$$

gleichmäßig konvergiert, so erhält man die Gleichung

$$\varphi x = \int f(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha.$$

Setzt man speziell

$$\varphi x = \varphi_\nu x,$$

so erhält man die Gleichung

$$\varphi_\nu x = \sum_{\mu}^{1,k} C_{\mu\nu}\, \varphi_\mu x,$$

und hieraus, da die Funktionen $\varphi_\nu x$ linear unabhängig sind,

$$C_{\nu\nu} = 1, \qquad C_{\mu\nu} = 0,$$

also

$$f(x, y) = \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu x . \varphi_\nu y,$$

und aus der letzten Formel des § 45 schließt man jetzt

$$(3) \qquad \int f(x,x)\, dx = U = \lim_{n=\infty} (U_{2n} \lambda_1^{2n}) = \sum_{\nu}^{1,k} \int (\varphi_\nu x)^2 dx = k.$$

Hiermit sind die zu Anfang des § 44 aus der bilinearen Reihe abgeleiteten Vermutungen vollkommen bestätigt. Insbesondere weiß man, daß jeder stetige Kern Eigenfunktionen besitzt, und die Argumentation des § 8 zeigt, daß ein solcher Kern der bilinearen Reihe gleich ist, wenn diese im Grundgebiete gleichmäßig bezüglich beider Argumente konvergiert.

Nach § 41 weiß man ferner, daß durch die Funktionen φ_ν die Gesamtheit aller derjenigen Eigenfunktionen des Kerns K linear ausgedrückt werden kann, die zu dem Eigenwerte $\sqrt{c}$ oder $-\sqrt{c}$ gehören. Der letztere Wert ist aber ausgeschlossen, da der Kern $K(x, y)$ nach Voraussetzung nur positive Eigenwerte haben soll. Setzt man demgemäß $1 : \sqrt{c} = \lambda_1$, so findet man

$$\int K(x, \alpha) f(\alpha, y)\, d\alpha = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu x . \varphi_\nu y = \frac{1}{\lambda_1} f(x, y),$$

anderseits gilt die Gleichung

$$\int K(x, \alpha) K^{2m}(\alpha, y)\, d\alpha = K^{2m+1}(x, y),$$

mithin auch

$$\int K(x, \alpha)\, \lambda_1^{2m} K^{2m}(\alpha, y)\, d\alpha = K^{2m+1}(x, y) . \lambda_1^{2m};$$

daraus folgt auf Grund der Beziehung (2)

$$f(x, y) = \lim_{m=\infty} [K^{2m+1}(x, y) . \lambda_1^{2m+1}],$$

und hieraus

$$\int f(x, x)\,dx = k = \lim_{m=\infty} (U_{2m+1} . \lambda_1^{2m+1}).$$

Die in den Gleichungen (2) und (3) ausgesprochenen Grenzübergänge bleiben also ungeändert, wenn man $2n$ durch eine unendlich wachsende ungerade Zahl ersetzt.

Erinnert man sich der betreffs des Kerns eingeführten Voraussetzungen, so ist klar, daß mit unseren Entwickelungen folgender Satz bewiesen ist.

Hat der stetige symmetrische Kern $K(x, y)$ keine anderen als positive Eigenwerte, so wird der kleinste von ihnen durch die Gleichung

$$\lambda_1^2 = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \lim_{n=\infty} \int K^{2n+2}(x, x)\,dx : \int K^{2n}(x, x)\,dx$$

bestimmt, wobei die Größen K^n durch die Gleichungen

$$K^1(x, y) = K(x, y), K^n(x, y) = \int K(x, \alpha) K^{n-1}(\alpha, y)\,d\alpha$$

definiert sind.

Die Eigenwerte eines beliebigen stetigen und symmetrischen Kerns sind die Quadratwurzeln aus denen des Kerns $K^2(x, y)$, und dieser hat nur positive Eigenwerte.

Beschränken wir uns, was hiernach ausreicht, auf Kerne mit nur positiven Eigenwerten, so ist es leicht, auch für die folgenden Eigenwerte Grenzprozesse anzugeben, als deren Resultate sie erscheinen.

Sind nämlich wie oben $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ die sämtlichen zum Eigenwert λ_1 gehörigen Eigenfunktionen, so wird die Integralgleichung

$$(4) \qquad \varphi x = \lambda \int \left(K(x, \alpha) - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{\nu}^{1,k} \varphi_\nu x . \varphi_\nu \alpha \right) \varphi \alpha . d\alpha$$

zunächst offenbar von allen Lösungen der Gleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha$$

erfüllt, die zu einem von λ_1 verschiedenen Eigenwert gehören, da diese zu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ orthogonal sind, und die zugehörigen Eigenwerte sind in beiden Gleichungen dieselben. Die Gleichung (4) kann aber keine anderen Lösungen als die soeben bezeichneten besitzen. Denn nach § 8 und § 41 gilt die Gleichung

$$(5) \qquad K^2(x, y) = \sum \frac{\varphi x \cdot \varphi y}{\lambda^2},$$

wenn rechts über ein vollständiges normiertes System von Eigenfunktionen des Kerns K summiert wird. Wendet man dieselbe Gleichung auf den Kern

$$K(x, y) - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{\nu}^{1, k} \varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y$$

an, so tritt an Stelle von $K^2(x, y)$ die Größe

$$K^2(x, y) - \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{\nu}^{1, k} \varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y.$$

Die Entwickelung dieser Größe nach der Formel (5) kann also keine anderen Glieder enthalten als solche von der Form $(\varphi x \cdot \varphi y)/\lambda^2$, in denen φx eine nicht zu λ_1 gehörige Eigenfunktion des Kerns $K(x, y)$ bedeutet. Diese bilden somit die Gesamtheit der Eigenfunktionen des Kerns der Gleichung (4).

Unter den zugehörigen Eigenwerten, die ja positiv sein sollen, sei nun λ_2 der kleinste. Dann braucht man, um ihn durch einen Grenzprozeß darzustellen, nur die oben für λ_1^2 erhaltene Formel anzuwenden und zu bedenken, daß allgemein, wenn

$$\overline{K}(x, y) = K(x, y) - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{\nu}^{1, k} \varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\overline{K}^{2n}(x, y) = K^{2n}(x, y) - \frac{1}{\lambda_1^{2n}} \sum_{\nu}^{1, k} \varphi_\nu x \cdot \varphi_\nu y$$

gilt. Bezeichnet man ferner durch $\overline{U}_n$ die den Größen U_n analogen, die mit dem Kern $\overline{K}$ gebildet sind, so erhält man sofort

$$\overline{U}_n = U_n - \frac{k}{\lambda_1^n},$$

also

$$\lambda_2^2 = \lim_{n=\infty} \frac{\overline{U}_{2n+2}}{\overline{U}_{2n}} = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2} - \dfrac{k}{\lambda_1^{2n+2}}}{U_{2n} - \dfrac{k}{\lambda_1^{2n}}};$$

für die Anzahl der zu λ_2 gehörigen unabhängigen Eigenfunktionen ergibt sich analog der Formel (3)

$$k_2 = \lim_{n=\infty} \left[\left(U_{2n+1} - \frac{k}{\lambda_1^{2n+1}}\right) \lambda_1^{2n+1}\right].$$

Ersetzt man weiter den Kern $\overline{K}$ durch

$$\overline{K}(x, y) - \frac{1}{\lambda_2}\sum \varphi x . \varphi y,$$

indem man über ein vollständiges normiertes System zum Eigenwert λ_2 gehöriger Eigenfunktionen summiert, so erhält man für den nächst größeren Eigenwert λ_3 des Kerns K und die Anzahl k_3 der zugehörigen Eigenfunktionen die Gleichungen

$$\lambda_3^2 = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2} - \frac{k_1}{\lambda_1^{2n+2}} - \frac{k_2}{\lambda_2^{2n+2}}}{U_{2n} - \frac{k_1}{\lambda_1^{2n}} - \frac{k_2}{\lambda_2^{2n}}},$$

$$k_3 = \lim_{n=\infty} \left[\left(U_{2n+1} - \frac{k_1}{\lambda_1^{2n+1}} - \frac{k_2}{\lambda_2^{2n+1}}\right)\lambda_3^{2n+1}\right],$$

und übersieht aus diesen Formeln die allgemeine Regel, nach der alle Eigenwerte durch Grenzprozesse dargestellt werden können.

§ 47.

Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern.

In den §§ 39 und 41 ist gezeigt, daß wenn als Kern eine der in § 31 eingeführten Greenschen Funktionen genommen wird, oder überhaupt der Kern gewisse Stetigkeitsbedingungen allgemeinen Charakters erfüllt, die Reihe

$$(1) \qquad \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

in der überall durch das Grundgebiet integriert wird und $f\alpha$ in diesem eine stetige Funktion der Stelle α bedeutet, gleichmäßig und absolut konvergiert und den Wert

$$\int K(x, \alpha) f\alpha . dx$$

hat. Daraus folgt nach § 13 die Schmidtsche Formel, d. h. die Reihe

$$\varphi x = fx + \lambda \sum_n^{1,\infty} \frac{\varphi_n x}{\lambda_n - \lambda} \int f\alpha . \varphi_n \alpha . d\alpha,$$

konvergiert in derselben Weise wie die Reihe (1), sobald λ eine von den Eigenwerten λ_n verschiedene Konstante bedeutet, und erfüllt die Gleichung

$$\varphi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha.$$

Wir wollen den Inhalt dieser Aussage etwas anders aussprechen, indem wir den Faktor λ in den Kern hineinziehen. Dann können wir sagen: es gibt eine im Grundgebiet stetige Lösung der nicht homogenen Integralgleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha \tag{2}$$

mit symmetrischem Kern, sobald dieser keine Nullösung besitzt. Darunter verstehen wir eine Lösung der letzten Gleichung, die sich ergeben würde, wenn fx identisch verschwindet, also eine Lösung der Gleichung

$$\varphi x = \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha.$$

Die Lösung der Gleichung (2) kann offenbar nur mit fx zugleich identisch verschwinden.

In dieser Form bleibt das erhaltene Resultat gültig, wenn der Kern $K(x, y)$ nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzt wird. Versuchen wir nämlich jetzt die Gleichung (2) durch den Ansatz

$$\varphi x = \psi x - \int K(\alpha, x)\,\psi\alpha \,.\, d\alpha \tag{3}$$

zu erfüllen, so ergibt sich

$$\varphi\alpha = \psi\alpha - \int K(\beta, \alpha)\,\psi\beta \,.\, d\beta,$$

$$\int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha = \int K(x, \alpha)\psi\alpha \,.\, d\alpha - \int d\alpha\, K(x, \alpha) \,.\, \int K(\beta, \alpha)\,\psi\beta \,.\, d\beta,$$

oder, indem die Integrationen im letzten Gliede vertauscht werden,

$$\int K(x, \alpha)\varphi\alpha \,.\, d\alpha = \int K(x, \alpha)\psi\alpha \,.\, d\alpha - \int \psi\beta \,.\, d\beta \int K(x, \alpha) K(\beta, \alpha) d\alpha$$
$$= \int K(x, \alpha)\,\psi\alpha \,.\, d\alpha - \int \psi\alpha \,.\, d\alpha \int K(x, \beta)\, K(\alpha, \beta)\, d\beta,$$

und diese Transformation gilt nach § 40, sobald der Kern $K(x, \alpha)$, wie wir annehmen wollen, entweder stetig ist oder nur in derselben Weise unendlich wird, wie die Greenschen Funktionen des vierten Abschnitts. Zieht man jetzt die Gleichung (3) nochmals heran, so folgt

$$\varphi x - \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha\, d\alpha$$
$$= \psi x - \int \psi\alpha \left[K(\alpha, x) + K(x, \alpha) - \int K(x, \beta) K(\alpha, \beta)\, d\beta\right] d\alpha,$$

oder, wenn

$$Q(x, \alpha) = K(\alpha, x) + K(x, \alpha) - \int K(x, \beta) K(\alpha, \beta)\, d\beta$$

gesetzt wird,

$$\varphi x - \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha \,.\, d\alpha = \psi x - \int Q(x, \alpha)\,\psi\alpha \,.\, d\alpha. \tag{4}$$

Diese Identität führt die nichthomogene Integralgleichung (2) auf eine solche mit dem offenbar symmetrischen Kern $Q(x, \alpha)$ zurück, dessen Singularitäten wieder keine anderen sind als die der Greenschen Funktionen; man erhält nämlich aus der Gleichung (2) unmittelbar

$$f x = \psi x - \int Q(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha \tag{5}$$

und diese ist zu lösen, wenn keine Nullösung existiert.

Wäre dies der Fall, d. h. gäbe es eine nicht identisch verschwindende Lösung der Gleichung

$$\psi x - \int Q(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha = 0,$$

so ergäbe die Identität (4), daß

$$\varphi x = \psi x - \int K(\alpha, x)\, \psi \alpha . d\alpha$$

eine Nullösung des Kerns $K(x, \alpha)$ ist, vorausgesetzt, daß φx nicht identisch verschwindet.

In letzterem Falle hätte die Gleichung

$$\psi x - \int K(\alpha, x)\, \psi \alpha\, d\alpha = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung, oder der Kern $K(\alpha, x)$, der sich von dem soeben betrachteten durch die Stellung der Integrationsvariablen unterscheidet, hätte eine Nullösung. Hat also keiner der Kerne $K(x, \alpha)$ und $K(\alpha, x)$ eine Nullösung, so hat auch der Kern der Gleichung (5) keine solche, und diese ist bei beliebiger Wahl der Funktion $f x$ lösbar. Damit erhält man das Fredholmsche Theorem, daß die Gleichung

$$\varphi x = f x + \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha,$$

in der $f x$ nicht identisch verschwindet, stets eine stetige Lösung φx besitzt, wenn dies von keiner der Gleichungen

$$\varphi x = \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha . d\alpha, \qquad \varphi x = \int K(\alpha, x)\, \varphi \alpha . d\alpha$$

gilt; dabei sei der Kern K entweder stetig oder so singulär, wie die Greenschen Funktionen des vierten Abschnitts.

Lösungen der letzten beiden Gleichungen nennen wir Nulllösungen erster und zweiter Art des Kerns $K(x, \alpha)$; erster Art sind diejenigen, bei denen die Integrationsvariable unter dem Zeichen K so steht, wie in der nichthomogenen Gleichung, also an zweiter Stelle.

§ 48.

Das Dirichletsche Problem in der Ebene.

Als erste wichtige Anwendung des erhaltenen Satzes betrachten wir das Dirichletsche Problem in der Ebene, das wir folgendermaßen aussprechen. Bedeutet α den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, so wird eine Funktion $\Phi\alpha$ gesucht, die die Gleichung

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = 0$$

erfüllt und im Innern einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, überall stetig gekrümmten Kurve $\mathfrak{C}$ mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist; die ferner, wenn man sich der Kurve $\mathfrak{C}$ nähert, gegen Grenzwerte konvergiert, die auf dieser Kurve als Werte einer stetigen Funktion des Ortes gegeben sind. Bezeichnen wir allgemein durch die angehefteten Buchstaben i und a die Grenzwerte einer Größe, denen sie zustrebt, wenn man sich von innen oder außen der Kurve $\mathfrak{C}$ nähert, durch Überstreichen der Werte, die auf dieser Kurve selbst angenommen werden, so kann die Grenzbedingung durch die Gleichung

$$\Phi_i = \overline{F}$$

ausgesprochen werden, in der F eine gegebene Funktion des Ortes auf der Kurve $\mathfrak{C}$ bedeutet.

Es sei ferner $d\alpha$ das Bogenelement, N die innere, N' die äußere Normale der Kurve $\mathfrak{C}$, die vom Punkte α aus gezogen sind; die analoge Bedeutung mögen dx, N_x, N'_x für einen Punkt x haben usf. Dann setzen wir versuchsweise an

$$\Phi x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha . \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}} \cdot d\alpha,$$

d. h. wir denken uns die Kurve $\mathfrak{C}$ sei als doppeltbelegte Linie im Sinne des logarithmischen Potentials wirksam und ergebe das Potential Φ. Das Potential einer Doppellinie hat nun, wenn wir die Kurve $\mathfrak{C}$ stetig gekrümmt voraussetzen, an dieser Kurve eine Unstetigkeit, die durch die Gleichungen

$$\overline{\Phi x} = \Phi_i x - \pi\psi x = \Phi_a x + \pi\psi x \tag{1}$$

dargestellt wird.

Für die weiteren Untersuchungen ist es wesentlich, daß diese Eigenschaft schon abgeleitet werden kann, wenn die Dichtigkeit nur als stetig vorausgesetzt wird, ohne daß Ableitungen zu existieren brauchen, während bei den im vierten Abschnitt betrachteten Potentialen an manchen Stellen stetige Ableitungen der Dichtigkeit vorausgesetzt wurden.

Wir verifizieren die Gleichung (1) für den Fall, daß $\psi\alpha = 1$ gesetzt wird. Dann ist das Element des Integrals Φ, d. h.

$$d\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} = -\frac{d\alpha}{r_{x\alpha}} \frac{d r_{x\alpha}}{dN}$$

nichts anderes, als die scheinbare Größe des Elements $d\alpha$, gesehen von der Stelle x aus und mit solchem Vorzeichen versehen, daß die Integration über die Kurve $\mathfrak{C}$ das Resultat 2π, 0 oder π ergibt, je nachdem der Punkt x im Innern, Äußern oder auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegt. Damit sind dann die Gleichungen (1) verifiziert:

$$\overline{\Phi} = \pi = \Phi_i - \pi = 2\pi - \pi = \Phi_a + \pi = 0 + \pi.$$

Setzt man bei beliebiger Gestalt der Kurve $\mathfrak{C}$ für Φ_i in der ersten Gleichung (1) den Wert F und für $\overline{\Phi}$ das Integral

$$\overline{\Phi} x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\, d\alpha,$$

so ergibt sich

$$\Phi_i x - \pi\psi x = Fx - \pi\psi x = \overline{\Phi} x,$$

$$\psi x = \frac{Fx}{\pi} - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\psi\alpha}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\, d\alpha. \tag{2}$$

Die Funktion ψx ist also die Unbekannte in einer Integralgleichung

$$\psi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha,$$

für die

$$fx = \frac{Fx}{\pi}, \quad K(x, \alpha) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{x\alpha}},$$

zu setzen ist. Das Grundgebiet ist die Kurve $\mathfrak{C}$, und in ihm ist der Kern endlich und stetig, da wir die Kurve überall stetig gekrümmt voraussetzen.

Die Integralgleichung (2) hat nun nach dem vorigen Paragraphen eine auf dem Grundgebiet stetige Lösung, wenn ihr Kern weder Nullösungen erster noch zweiter Art besitzt. Ist dies gezeigt, so gibt die Größe

$$\Phi x = \int\limits_{\mathfrak{C}} \psi\alpha \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}}\, d\alpha$$

die Lösung des Dirichletschen Problems, da sie die Laplacesche Differentialgleichung und die Randbedingung

$$\Phi_i x = \overline{F} x$$

vermöge der Integralgleichung (2) erfüllt.

Es läßt sich aber in der Tat zeigen, daß keine Nullösungen vorhanden sind. Wäre zunächst eine solche erster Art vorhanden, so erfüllte sie die Gleichung

$$\psi x - \int_{\mathfrak{C}} K(x, \alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha = 0. \tag{3}$$

Nimmt man nun $(\psi\alpha)/\pi$ als Dichtigkeit der doppelt belegten Linie $\mathfrak{C}$, so ergibt sich als Potential allgemein

$$\mathfrak{F} x = \int_{\mathfrak{C}} \frac{\psi\alpha}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}}\, d\alpha$$

und speziell auf der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\overline{\overline{\mathfrak{F}}} x = - \int_{\mathfrak{C}} K(x, \alpha)\, \psi\alpha\, d\alpha.$$

Da nun aus der allgemeinen Theorie des Potentials die Gleichungen

$$\overline{\overline{\mathfrak{F}}} x = \mathfrak{F}_i - \frac{\psi x}{\pi} \cdot \pi,$$

$$- \int K(x, \alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha = - \psi x + \mathfrak{F}_i$$

folgen, so ergibt die Gleichung (3) längs der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{F}_i = 0, \tag{4}$$

und da auch die Gleichung

$$\Delta \mathfrak{F} = 0$$

gilt, so folgt, daß $\mathfrak{F}$ im ganzen Innern der Kurve $\mathfrak{C}$ verschwinden müßte.

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dN} = 0,$$

und da die normale Ableitung des Potentials einer Doppellinie an dieser selbst stetig ist, wenn sie auf der einen Seite gegen endliche Grenzwerte konvergiert,

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dN'} = 0.$$

Umgibt man nun die Kurve $\mathfrak{C}$ mit einer anderen $\mathfrak{C}''$, deren Linienelement dl'' und deren innere Normale N'' ist, so gilt nach der Gaussischen Integraltransformation die Gleichung

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} \mathfrak{F} \frac{d\mathfrak{F}}{dN'}\, d\alpha + \int\limits_{\mathfrak{C}''} \mathfrak{F} \frac{d\mathfrak{F}}{dN''}\, dl'' = \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\xi\, d\eta,$$

wobei rechts über die von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ eingeschlossene Fläche zu integrieren ist. Das erste Glied auf der linken Seite dieser Gleichung hat aber den Wert Null; das zweite kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kurve $\mathfrak{C}''$ weiter und weiter hinausrückt, da dann die Größen $\mathfrak{F}$ und $d\mathfrak{F}/dN''$ in bekannter Weise unendlich klein werden; somit folgt für den Außenraum der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} = 0,$$

und da die Größe $\mathfrak{F}$ im Unendlichen verschwindet,

$$\mathfrak{F} = 0,$$

speziell auch

(5) $$\mathfrak{F}_a = 0.$$

Nun gibt die Unstetigkeit des Potentials $\mathfrak{F}$ die Gleichung

$$\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_a = 2\pi \frac{\psi x}{\pi} = 2\psi x,$$

also den Gleichungen (4) und (5) zufolge

$$\psi x = 0,$$

d. h. eine Nullösung erster Art existiert nicht.

Daß auch keine Nullösung zweiter Art vorhanden ist, sieht man leicht daraus, daß die Größe

$$K(\alpha, x)\, \psi\alpha . d\alpha = -\frac{\psi\alpha}{\pi} \frac{d}{dN} \log \frac{1}{r_{\alpha x}}\, d\alpha$$

die nach der Richtung N_x wirkende Kraftkomponente ist, die von der im Element $d\alpha$ vorhandenen Masse $-\psi\alpha . d\alpha/\pi$ im Sinne des logarithmischen Potentials an der Stelle x ausgeübt wird. Man kann diese Komponente auch in jedem außerhalb der Kurve $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte bilden; integriert man über die Kurve $\mathfrak{C}$ nach α, so erhalte man allgemein die Größe M. In den immer gebrauchten Bezeichnungen ist dann

$$\overline{M} = \int K(\alpha, x)\, \psi\alpha . d\alpha,$$

und wenn U das logarithmische Potential ist, das von der mit der Dichtigkeit $-(\psi\alpha)/\pi$ belegten Kurve $\mathfrak{C}$ herrührt:

$$M_i = \left(\frac{dU}{dN}\right)_i, \quad M_a = -\left(\frac{dU}{dN'}\right)_a.$$

Nun gibt die Theorie des Linienpotentials für jeden Punkt der belegten Kurve $\mathfrak{C}$ die Gleichungen

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\left(\frac{dU}{dN}\right)_i &= M_i = \overline{M} + \psi x, \\
-\left(\frac{dU}{dN'}\right)_a &= M_a = \overline{M} - \psi x;
\end{aligned}
$$

wäre daher ψx eine Nullösung zweiter Art, so daß die Gleichung

$$\psi x = \int K(\alpha, x)\, \psi \alpha \,.\, d\alpha = \overline{M}$$

bestünde, so würde folgen

$$\left(\frac{dU}{dN'}\right)_a = 0.$$

Die oben für die Größe $\mathfrak{F}$ angewandte Schlußreihe würde auch hier ergeben, daß außerhalb der Kurve $\mathfrak{C}$ überall die Gleichung

$$(7) \qquad U = 0$$

gilt, mithin auch auf der Kurve $\mathfrak{C}$ selbst, da das Potential U in ihr stetig ist. Daraus aber würde auf Grund der Gleichung

$$\Delta U = 0$$

auch für den ganzen Innenraum die Gleichung (7) folgen, mithin auch

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_i = \left(\frac{dU}{dN'}\right)_a = 0$$

und wegen der Gleichungen (6)

$$2\psi x = \left(\frac{dU}{dN}\right)_i + \left(\frac{dU}{dN'}\right)_a = 0,$$

so daß ψx nicht als Nullösung im eigentlichen Sinne des Wortes zu bezeichnen wäre.

Damit ist gezeigt, daß das Dirichletsche Problem eine Lösung besitzt, und diese ist einzig, da die Differenz zweier Lösungen wieder eine Nullösung ergäbe. Die erhaltene Lösung erscheint als Potential einer doppelt belegten Kurve, bei der die Dichtigkeit stetig ist. Aus dieser Eigenschaft folgen, wie bemerkt, gewisse Eigenschaften des Potentials, z. B. die Stetigkeit seiner Ableitungen außerhalb und innerhalb der Kurve $\mathfrak{C}$, sowie die Gleichungen (1). Setzt man ferner voraus, Fx habe längs der Kurve $\mathfrak{C}$ eine stetige Ableitung, so gilt dasselbe der Integralgleichung (2) zufolge auch von ψx, und hieraus folgt, daß die normal zur Kurve $\mathfrak{C}$ gebildete Ableitung des Potentials gegen endliche, auf der Kurve $\mathfrak{C}$ stetig veränderliche Grenzwerte konvergiert, wenn man an die Kurve heranrückt.

§ 49.

Vereinfachung des in § 47 erhaltenen Kriteriums.

Will man das erhaltene Kriterium für die Auflösbarkeit einer nichthomogenen Integralgleichung auf einzelne Fälle anwenden, so wird die Tatsache wichtig, daß bei stetigen Kernen Nulllösungen zweiter Art nur existieren, wenn auch solche erster Art vorhanden sind.

Um dies einzusehen, gehen wir von der in § 8 aufgestellten Ungleichung

$$k \leqq \lambda_1^2 \int\int K(x, \alpha)^2 d\alpha\, dx \tag{1}$$

aus, in der k die Anzahl der zum Eigenwert λ_1 gehörigen, zu einander orthogonalen Lösungen der Gleichung

$$\varphi x = \lambda \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha\, d\alpha$$

bedeutet.

Man schließt aus der Beziehung (1) sofort, daß bei der Annahme

$$\int\int K(x, y)^2 dx\, dy < 1$$

alle Eigenwerte der Kerne $K(x, y)$ und $K(y, x)$ größer als Eins sein müssen; dann existieren also weder Nullösungen erster noch zweiter Art, da bei diesen offenbar in der Bezeichnung des § 8 der Eigenwert 1 auftritt. Die Gleichungen

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

$$\varphi_1 y = f_1 y + \int K(\alpha, y)\, \varphi_1 \alpha \,.\, d\alpha$$

sind also bei beliebiger Wahl der stetigen Funktionen fx und $f_1 y$ stets auflösbar. Speziell kann man solche Funktionen $\Gamma(x, y)$ und $\Gamma_1(x, y)$ bestimmen, daß die Gleichungen

$$\Gamma(x, y) = K(x, y) + \int K(x, \alpha)\, \Gamma(\alpha, y)\, d\alpha, \tag{2}$$

$$\Gamma_1(x, y) = K(x, y) + \int K(\alpha, y)\, \Gamma_1(x, \alpha)\, d\alpha \tag{3}$$

gelten. Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\Gamma(y, z)\, dy$, indem man links den nach der ersten Gleichung diesem Faktor gleichen Ausdruck

$$\left[K(y, z) + \int K(y, \alpha)\Gamma(\alpha, z)\,d\alpha\right] dy$$

einsetzt und integriert nach y, so ergibt sich

$$\int \Gamma_1(x, y) K(y, z)\,dy + \int\int \Gamma_1(x, y) K(y, \alpha)\Gamma(\alpha, z)\,d\alpha\,dy$$
$$= \int \Gamma(y, z) K(x, y)\,dy + \int\int \Gamma_1(x, \alpha) K(\alpha, y)\Gamma(y, z)\,dy\,d\alpha,$$

und da die Doppelintegrale sich nur durch die Zeichen der Integrationsvariablen unterscheiden, folgt

$$\int \Gamma_1(x, y) K(y, z)\,dy = \int \Gamma(y, z) K(x, y)\,dy.$$

Diese Gleichung kann auf Grund der Gleichungen (2) und (3) geschrieben werden

$$\Gamma_1(x, z) - K(x, z) = \Gamma(x, z) - K(x, z),$$

womit die Identität

$$\Gamma_1(x, y) = \Gamma(x, y)$$

erwiesen ist. Jede Lösung der Gleichung (7) ist also mit jeder der Gleichung (2) identisch; beide Gleichungen können also nur eine gemeinsame Lösung besitzen und haben, wenn diese existiert, keine weiteren Lösungen.

Die Gleichungen (2) und (3) heißen die Resolventen des Kerns $K(x, y)$; ihre gemeinsame Lösung $\Gamma(x, y)$ der lösende Kern. Existiert er, so folgen die Gleichungen

$$fx = \varphi x - \int K(x, \alpha)\varphi\alpha.\,d\alpha, \tag{4}$$

$$\varphi x = fx + \int \Gamma(x, \alpha) f\alpha.\,d\alpha \tag{5}$$

aus einander, wie man sofort erkennt, wenn φx aus der zweiten Gleichung in die erste oder fx aus der ersten Gleichung in die zweite einsetzt und die Resolventen berücksichtigt; ebenso folgen auch die Gleichungen

$$fx = \varphi x - \int K(\alpha, x)\varphi\alpha.\,d\alpha, \tag{6}$$

$$\varphi x = fx + \int \Gamma(\alpha, x) f\alpha.\,d\alpha \tag{7}$$

aus einander; die Integralgleichungen (4) und (6) werden also durch die Formeln (5) und (7) aufgelöst, sobald der lösende Kern $\Gamma(x, y)$ bestimmt ist.

In einem Spezialfalle ist die Frage nach der Existenz des lösenden Kerns rein algebraischer Natur, dann nämlich, wenn man als Kern die Größe

$$K_0(x, y) = \sum_{\nu}^{1,k} \Phi_\nu x \,.\, \Psi_\nu y$$

nimmt und unter Φ, Ψ im Grundgebiete stetige Funktionen des Ortes verstanden werden. In diesem Falle folgt aus der Integralgleichung

$$\varphi x = fx + \int K_0(x, \alpha)\,\varphi\alpha . d\alpha$$

sofort

$$\varphi x = fx + \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \Phi_\nu x, \tag{8}$$

wobei

$$\varrho_\mu = \int \Psi_\mu \alpha . \varphi\alpha . d\alpha \tag{9}$$

gesetzt ist. Substituiert man den Wert (8) in die Ausdrücke (9), so ergeben sich die Gleichungen

$$\varrho_\mu - \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \int \Phi_\nu \alpha . \Psi_\mu \alpha . d\alpha = \int f\alpha . \Psi_\mu \alpha . d\alpha,$$

aus denen die Größen ϱ zu bestimmen sind.

Eine Nullösung erster Art ergibt die Bedingungen

$$\varrho_\mu - \sum_{\nu}^{1,k} \varrho_\nu \int \Phi_\nu \alpha . \Psi_\mu \alpha . d\alpha = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots k.$$

Vertauscht man die Rollen der Funktionszeichen Φ und Ψ, so erhält man die Bedingungen für eine Nullösung zweiter Art, indem man im Schema der Koeffizienten der Größen ϱ_ν die Horizontal- und Vertikalreihen vertauscht. Dadurch wird ersichtlich, daß bei dem Kern $K_0(x, y)$ die Nullösungen erster und zweiter Art stets nur zugleich auftreten.

Jetzt sei $K(x, y)$ wieder ein beliebiger Kern und werde angenommen, man könne den Kern K_0 so wählen, daß für die Differenz

$$K_1(x, y) = K(x, y) - K_0(x, y)$$

die Ungleichung

$$\int\int K_1(x, y)^2\, dx\, dy < 1 \tag{10}$$

gilt, also ein lösender Kern $\Gamma_1(x, y)$ existiert, der die Gleichungen

$$\Gamma_1(x, y) = K_1(x, y) + \int K_1(x, \alpha)\,\Gamma_1(\alpha, y)\,d\alpha,$$
$$\Gamma_1(x, y) = K_1(x, y) + \int K_1(\alpha, y)\,\Gamma_1(x, \alpha)\,d\alpha$$

erfüllt. Dann nimmt die Gleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha . d\alpha \tag{11}$$

die folgende Form an:

$$fx + \sum_{\nu}^{1,k} \int \Phi_\nu x . \Psi_\nu \alpha . \varphi \alpha . d\alpha = \varphi x - \int K_1(x, \alpha) \varphi \alpha . d\alpha,$$

oder kurz, indem wir die linke Seite Fx nennen,

$$Fx = \varphi x - \int K_1(x, \alpha) \varphi \alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn wir sie als Spezialfall der Gleichung (11) oder (6) ansehen,

$$\varphi x = Fx + \int \Gamma_1(x, \alpha) F\alpha . d\alpha.$$

Setzen wir hier für Fx den expliziten Wert, so verschwindet die Größe K_1 und es ergibt sich die Gleichung

$$fx + \int \Gamma_1(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

$$= \varphi x - \int \varphi \alpha \sum_{\nu}^{1,k} \left(\Phi_\nu x + \int \Gamma_1(x, \alpha) \Phi_\nu \alpha . d\alpha \right) \Psi_\nu \alpha . d\alpha.$$

Damit ist die gegebene Integralgleichung (11) auf eine solche zurückgeführt, deren Kern die Gestalt $K_0(x, y)$ hat; speziell also folgt, daß Nullösungen erster und zweiter Art bei stetigen Kernen nur zugleich auftreten.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß K_0 so gewählt werden kann, daß K_1 die Ungleichung (10) erfüllt. Um dies zu erreichen, teile man das Grundgebiet in solche Teilgebiete, daß in jedem von ihnen die Differenz zweier Werte des Kerns absolut unter einer vorgeschriebenen positiven Konstanten ε bleibt. Im νten Teilgebiete liege die Stelle y_ν; dann sei $\Psi_\nu = 0$ in allen Teilgebieten außer dem νten; in diesem sei $\Psi_\nu = 1$ mit Ausnahme eines an die Umgrenzung sich anschließenden Randgebiets von beliebig kleiner Ausdehnung, in dem Ψ_ν stetig von 1 zu 0 übergehe; allgemein werde $\Phi_\nu x = K(x, y_\nu)$ gesetzt. Dies festgesetzt, ist die Größe K_1 im Grundgebiet stetig, und gilt außerhalb der Randgebiete die Beziehung

$$|K_1(x, y)| = \left| K(x, y) - \sum_{\nu}^{1,k} \Phi_\nu x . \Psi_\nu y \right| < \varepsilon;$$

da nun die Gesamtausdehnung der Randgebiete beliebig klein genommen werden kann, so folgt bei passender Wahl von ε die Ungleichung

$$\int\int K_1(x, y)^2 \, dx \, dy < 1.$$

§ 50.

Die Existenz der Greenschen Funktion bei allgemeineren Problemen der Wärmeleitung.

Die erhaltenen Resultate gewähren wesentliche Erleichterungen, wenn man die Methoden des § 48 auf diejenigen Probleme der Wärmeleitung übertragen will, bei denen an der Grenze des Grundgebietes Wärme ausgestrahlt wird.

Es sei etwa das Grundgebiet eben, und es werde in ihm eine Funktion des Ortes, die stationäre Temperatur Φ, gesucht, die die Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

im Innern des leitenden Gebietes und die Randbedingung

$$\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi = F \tag{1}$$

an der Randkurve $\mathfrak{C}$ erfüllt; in dieser bedeute N die innere Normale, h eine positive Konstante und F eine stetige Funktion des Ortes auf der Kurve $\mathfrak{C}$.

Wir versuchen den Ansatz

$$\Phi x = \int \psi \alpha . \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\, d\alpha,$$

indem wir unter $d\alpha$ ein Element der Kurve $\mathfrak{C}$ verstehen, auf die sich auch das unbestimmte Integralzeichen beziehe. Die gesuchte Funktion erscheint als Potential der einfach im Sinne des logarithmischen Potentials mit Masse belegten Linie $\mathfrak{C}$.

Setzen wir dann

$$M = \frac{d\Phi}{dN}$$

und geben den Symbolen $\overline{M}$, M_i, M_a dieselben Bedeutungen wie in § 48, so ergeben die dort benutzten Sätze über das Linienpotential die Gleichungen

$$M_i = \overline{M} + \pi\psi x, \quad M_a = \overline{M} - \pi\psi x. \tag{2}$$

Dabei gilt die Gleichung

$$\overline{M} = \int \psi \alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\, d\alpha;$$

ist doch das Element des Integrals die Komponente der Anziehung des Elementes $d\alpha$ im Punkte x nach der Richtung N.

Kombiniert man diesen Ausdruck mit den Gleichungen (2), so ergibt sich

$$M_i = -\pi\psi x + \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} \cdot d\alpha,$$

und die Randbedingung (1) führt zu der Gleichung

$$0 = -\pi\psi x - h\Phi x - Fx + \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} \cdot d\alpha,$$

und umgekehrt; setzt man für Φx den vorausgesetzten Wert, so ergibt sich

$$(3) \qquad \pi\psi x = -Fx + \int d\alpha \,.\, \psi\alpha \left[\frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} - h \log \frac{1}{r_{x\alpha}}\right].$$

Hiermit ist die Aufgabe, ψx zu finden, auf eine Integralgleichung mit dem unsymmetrischen Kern

$$K(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dN_x} \log \frac{1}{r_{x\alpha}} - \frac{h}{\pi} \log \frac{1}{r_{x\alpha}}$$

zurückgeführt; das Grundgebiet bildet die Kurve $\mathfrak{C}$. Diese Größe sowie die symmetrische Funktion

$$Q(x, y) = K(x, y) + K(y, x) - \int K(x, \alpha) K(y, \alpha)\, d\alpha$$

sind unstetig wie $\log r_{x\alpha}$ oder $\log r_{xy}$, so daß die Theorie des § 47 angewandt und geschlossen werden kann, daß die Integralgleichung (3) eine stetige Lösung ψx besitzt, sobald man weiß, daß keine Nullösung vorhanden ist.

Eine Nullösung erster Art würde nun die Gleichung

$$(4) \qquad -\psi x + \int K(x, \alpha)\, \psi\alpha \,.\, d\alpha = 0$$

erfüllen, und für die zugehörige Größe Φ ergäben sich die Beziehungen

$$(5) \qquad \Delta\Phi = 0, \quad \overline{\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi = 0}.$$

Diese sind aber nicht miteinander vereinbar. Es gilt nämlich die Identität

$$\int_{\mathfrak{C}} ds \left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2\right\} = -\int d\alpha \,.\, \Phi \frac{d\Phi}{dN},$$

wenn links über die leitende Platte integriert und unter ξ, η rechtwinklige Koordinaten verstanden werden, und die zweite Gleichung (5) ergibt

$$\int_{\mathfrak{C}} ds \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 \right\} = - h \int d\alpha . \Phi^2,$$

was offenbar, da h positiv, unmöglich ist.

Eine beliebige Lösung der Gleichung (4) ergibt nun, indem man

$$\psi \alpha = \int K(\alpha, \beta) \psi \beta . d\beta$$

einsetzt,

$$\psi x = \int K(x, \alpha)\, d\alpha \int K(\alpha, \beta) \psi \beta . d\beta.$$

Die Singularität des Kerns K ist aber so beschaffen, daß die Integrationen nach § 40 vertauscht werden können; setzt man daher

$$K^2(x, \beta) = \int K(x, \alpha) K(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

so findet man

$$\psi x = \int K^2(x, \beta) \psi \beta . d\beta.$$

Eine Nullösung erster Art des Kerns $K(x, \alpha)$ wäre also auch eine solche des Kerns $K^2(x, \alpha)$, und dieser ist im Grundgebiet aus denselben Gründen stetig wie die gleichbezeichnete Größe in § 40. Ebenso wäre eine Nullösung zweiter Art des Kerns $K(x, \alpha)$ eine solche des Kerns $K^2(x, \alpha)$. Auf letzteren ist aber die Theorie des § 49 anzuwenden; er besitzt nur Nullösungen zweiter Art, wenn solche erster Art vorhanden sind. Dasselbe gilt daher auch von dem unstetigen Kern $K(x, \alpha)$; da dieser, wie gezeigt, keine Nullösung erster Art besitzt, hat er auch keine zweiter Art, und damit ist die Existenz der gesuchten Greenschen Funktion für das vorgelegte Problem der Wärmeleitung erwiesen. In den auf allgemeine Gebiete bezüglichen Untersuchungen der §§ 31 bis 38 war die Existenz einer solchen Funktion, die dort als Kern genommen wurde, vorausgesetzt.

Die Funktion Φx ergibt sich als Potential einer einfach belegten Linie $\mathfrak{C}$ mit stetiger Dichtigkeit; hieraus folgt, daß die Größe Φx im Innern des von der Kurve $\mathfrak{C}$ umschlossenen Grundgebiets des ursprünglichen Wärmeleitungsproblems stetige erste und zweite Ableitungen besitzt, und daß an der Kurve $\mathfrak{C}$ die normalen Ableitungen der Größe Φx gegen endliche, auf der Kurve sich stetig ändernde Grenzwerte konvergieren. Dasselbe folgt daher für die im vierten Abschnitt durch $M(0, 1)$ bezeichnete Größe, die durch ein Randwertproblem von derselben Form wie Φx definiert werden kann.

§ 51.

Das Dirichletsche Problem im Raume.

Die Aufgabe, eine Funktion Φ zu bestimmen, die in dem von der Fläche $\mathfrak{F}$ umschlossenen Gebiet die Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

erfüllt, an der Fläche selbst aber gegen gegebene Grenzwerte gemäß der Gleichung

$$\Phi_i = \bar{F}$$

konvergiert, kann in derselben Weise, wie das bei dem Dirichletschen Problem in der Ebene durchgeführt ist, auf eine Integralgleichung zurückgeführt werden, indem man in den Formeln des § 48 überall $\log(1/r_{\alpha x})$ durch $1/r_{\alpha x}$ ersetzt und durch $d\alpha$ ein Element der Fläche $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Hält man im übrigen die Bezeichnungen des § 48 aufrecht und nimmt an, die Fläche $\mathfrak{F}$ sei überall stetig gekrümmt, so setzt man

$$\Phi x = \int \psi\alpha \cdot \frac{d}{dN}\left(\frac{1}{r_{\alpha x}}\right) d\alpha$$

an, wobei wie in allen kommenden unbestimmten Integralzeichen über die Fläche $\mathfrak{F}$ als Grundgebiet zu integrieren ist. Dann gelten die Gleichungen

$$\bar{\Phi} x = \Phi_i x - 2\pi\psi x = \Phi_a x + 2\pi\psi x,$$

und man findet für die unbekannte Funktion ψ die Integralgleichung

$$\psi x = \frac{Fx}{2\pi} + \int K(x, \alpha)\,\psi\alpha . d\alpha,$$

wobei gesetzt ist

$$K(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{r_{\alpha x}}\right). \tag{1}$$

Diese Größe wird auf dem Grundgebiet unendlich, so daß die Methode des § 48 nicht mehr ohne weiteres angewandt werden kann.

Diese Schwierigkeit überwinden wir, wie früher in ähnlichen Fällen, indem wir zu iterierten Kernen übergehen.

Sei allgemein die Gleichung

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha . d\alpha \tag{2}$$

gegeben und werde

$$K^2(x, y) = \int K(x, \alpha) K(\alpha, y)\, d\alpha,$$
$$K^3(x, y) = \int K^2(x, \alpha) K(\alpha, y)\, d\alpha$$

gesetzt; darf man die Integrationen vertauschen, was wir in diesem Paragraphen überhaupt voraussetzen wollen, so findet man leicht auch die Gleichung

$$(3) \qquad \begin{aligned} K^3(x, y) &= \iint K(x, \beta) K(\beta, \alpha) K(\alpha, y)\, d\alpha\, d\beta \\ &= \int K(x, \alpha) K^2(\alpha, y)\, d\alpha. \end{aligned}$$

Substituiert man nun in der Gleichung (2) rechts für $\varphi\alpha$ den Wert, den die Gleichung selbst ergibt, so folgt

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha + \int K^2(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

und hieraus, indem man nochmals die Gleichung (2) benutzt

$$\varphi x = fx + \int K(x, \alpha) f\alpha\, d\alpha + \int K^2(x, \alpha) f\alpha \,.\, d\alpha$$
$$+ \int K^3(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha$$

oder kurz

$$\varphi x = \bar{f}x + \int K^3(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha.$$

Wenn also, wie im Falle des Kernes (1) gezeigt werden kann, die Größe $K^3(x, \alpha)$ auf dem Grundgebiet stetig bleibt, so ist die Integralgleichung mit unstetigem Kern auf eine solche mit stetigem Kern zurückgeführt.

Um diesen Zusammenhang genauer zu verfolgen, untersuchen wir die Beziehung zwischen den Nullösungen der Kerne $K(x, \alpha)$ und $K^3(x, \alpha)$. Hat ersterer eine Nullösung, so gilt offenbar dasselbe von $K^3(x, \alpha)$; etwas schwieriger ist die umgekehrte Frage. Werde also die Gleichung

$$(4) \qquad \varphi x = \int K^3(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha$$

vorausgesetzt, und seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die drei Werte der dritten Einheitswurzel, speziell $\varrho_1 = 1$. Dann setze man

$$3\,\theta_\nu x = \varphi x + \varrho_\nu \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha + \varrho_\nu^2 \int K^2(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha;$$

diese Größen können nicht alle drei identisch verschwinden, da sonst dasselbe von φx gälte. Man findet nun ohne weiteres

$$3 \int K(x, \beta)\, \theta_\nu\beta \,.\, d\beta = \int K(x, \beta)\, \varphi\beta \,.\, d\beta$$
$$+ \varrho_\nu \iint K(x, \beta) K(\beta, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha\, d\beta + \varrho_\nu^2 \iint K(x, \beta) K^2(\beta, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha\, d\beta$$
$$= \frac{3\,\theta_\nu x - \varphi x}{\varrho_\nu} + \varrho_\nu^2 \int K^3(x, \alpha)\, \varphi\alpha \,.\, d\alpha,$$

oder auf Grund der Gleichung (4)

$$\theta_\nu x = \varrho_\nu \int K(x, \beta)\, \theta_\nu \beta \,.\, d\beta. \tag{5}$$

Gerade so würde man von einer zum Kern $K^3(x, \alpha)$ gehörigen Nullösung zweiter Art, also einer Lösung der Gleichung

$$\varphi x = \int K^3(\alpha, x)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zu einer Gleichung

$$\theta_\nu x = \varrho_\nu \int K(\beta, x)\, \theta_\nu \beta \,.\, d\beta \tag{6}$$

gelangen.

Die durchgeführte Untersuchung läßt sich offenbar auf beliebige iterierte Kerne $K^m(x, \alpha)$ übertragen, in denen m eine ungerade Zahl ist; aus einer Nullösung eines solchen kann man stets eine Nullösung des ursprünglichen Kernes herstellen. Bei symmetrischen Kernen erhält man hieraus und aus den Sätzen des § 41 das Resultat, daß aus einer Eigenfunktion eines iterierten Kernes stets eine solche des ursprünglichen abgeleitet werden kann.

Für die gegenwärtige Untersuchung bemerken wir nur, daß nach § 49 der Kern K^3 Nullösungen erster und zweiter Art stets nur zugleich besitzt; die Existenz solcher ist also überhaupt ausgeschlossen, wenn entweder die Gleichung (5) oder die Gleichung (6) als unmöglich nachgewiesen wird. Das wird uns beim räumlichen Dirichletschen Problem betreffs der Gleichung (6) in der Weise gelingen, daß wir zeigen: sie kann weder für komplexe Werte von ϱ_ν erfüllt werden noch für den Wert $\varrho_\nu = 1$.

Dies vorausgesetzt, kann nach § 47 die Gleichung

$$\varphi x = \bar{f} x + \int K^3(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha \tag{7}$$

bei beliebiger Wahl der stetigen Funktion $\bar{f}$ aufgelöst werden. Um aber zu der ursprünglichen Gleichung

$$\varphi x = f x + \int K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

zurückzukommen, machen wir von dem in § 47 eingeführten lösenden Kern der Gleichung (7) Gebrauch, der existiert, da keine Nullösungen vorhanden sind. Sei $\Gamma^3(x, \alpha)$ dieser lösende Kern, so daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} K^3(x, y) + \int \Gamma^3(\alpha, y)\, K^3(x, \alpha)\, d\alpha &= \Gamma^3(x, y) \\ K^3(x, y) + \int \Gamma^3(x, \alpha)\, K^3(\alpha, y)\, d\alpha &= \Gamma^3(x, y) \end{aligned} \tag{8}$$

gelten.

Man setze nun

$$\Omega(x, y) = K(x, y) + K^2(x, y) + K^3(x, y),$$
$$\Gamma(x, y) = \Omega(x, y) + \int \Gamma^3(\alpha, y)\,\Omega(x, \alpha)\,d\alpha;$$

dann gilt zunächst die Identität

$$\begin{aligned}\Omega(x, y) &- \int \Omega(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha \\ &= K(x, y) - \int K^3(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha,\end{aligned} \tag{9}$$

oder auch, indem wir auf das letzte Integral die bei der Gleichung (3) benutzten Umformungen anwenden,

$$\begin{aligned}\Omega(x, y) &- \int \Omega(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha \\ &= K(x, y) - \int K^3(x, \alpha)\,K(\alpha, y)\,d\alpha.\end{aligned} \tag{10}$$

Jetzt bilden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}X &= \Gamma(x, y) - \int \Gamma(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha \\ &= \Omega(x, y) + \int \Omega(x, \alpha)\,\Gamma^3(\alpha, y)\,d\alpha \\ &\quad - \int \Omega(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha - \int\int \Omega(\alpha, \beta)\,\Gamma^3(\beta, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha\,d\beta;\end{aligned}$$

ziehen wir das erste und dritte Glied gemäß der Formel (10) zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}X = K(x, y) &- \int K^3(x, \alpha)\,K(\alpha, y)\,d\alpha \\ &+ \int \Omega(x, \beta)\,\Gamma^3(\beta, y)\,d\beta \\ &- \int\int \Omega(\alpha, \beta)\,\Gamma^3(\beta, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha\,d\beta,\end{aligned}$$

oder, indem wir die Integrationen im letzten Gliede vertauschen und der Formel (9) gemäß

$$\Omega(x, \beta) - \int \Omega(\alpha, \beta)\,K(x, \alpha)\,d\alpha = K(x, \beta) - \int K(x, \alpha)\,K^3(\alpha, \beta)\,d\alpha$$

setzen,

$$\begin{aligned}X &= K(x, y) + \int \Gamma^3(\beta, y)\,d\beta \left\{ K(x, \beta) - \int K(x, \alpha)\,K^3(\alpha, \beta)\,d\alpha \right\} \\ &\qquad - \int K(x, \alpha)\,K^3(\alpha, y)\,d\alpha \\ &= K(x, y) + \int K(x, \alpha)\,d\alpha \Big\{ \Gamma^3(\alpha, y) - K^3(\alpha, y) \\ &\qquad - \int \Gamma^3(\beta, y)\,K^3(\alpha, \beta)\,d\beta \Big\}.\end{aligned}$$

Im letzten der erhaltenen Glieder verschwindet aber der Integrand der Gleichung (8) zufolge; somit ergibt sich

$$X = K(x, y) = \Gamma(x, y) - \int \Gamma(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha. \tag{11}$$

Auf Grund dieses Resultats kann die ursprüngliche Integralgleichung

$$\text{(12)} \qquad \varphi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha$$

leicht aufgelöst werden; setzt man nämlich

$$\text{(13)} \qquad \varphi x = fx + \int \Gamma(x, \alpha)\, f\alpha . d\alpha,$$

so findet man

$$\varphi\alpha = f\alpha + \int \Gamma(\alpha, \beta)\, f\beta . d\beta,$$

$$\int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha = \int K(x, \alpha)\, f\alpha . d\alpha$$
$$+ \int\int \Gamma(\alpha, \beta)\, K(x, \alpha)\, f\beta . d\beta\, d\alpha,$$

oder, indem man die Integrationen vertauscht und die Gleichung (11) oder

$$\int \Gamma(\alpha, \beta)\, K(x, \alpha)\, d\alpha = \Gamma(x, \beta) - K(x, \beta)$$

berücksichtigt,

$$\int K(x, \alpha)\, \varphi\alpha . d\alpha = \int K(x, \alpha)\, f\alpha . d\alpha$$
$$+ \int f\beta . [\Gamma(x, \beta) - K(x, \beta)]\, d\beta$$
$$= \varphi x - fx,$$

womit die Gleichung (12) erwiesen ist. Diese Gleichung hat also die Lösung (13).

§ 52.

Das räumliche Dirichletsche Problem; spezielle Durchführung.

Um die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen anwenden zu können, muß gezeigt werden, daß die durchgeführten Integrationen zu bestimmten Werten führen und in der Weise, wie es geschehen ist, vertauscht werden dürfen. Dies gelingt mittels der Sätze des § 40, sobald wir uns über die Unstetigkeit von $K^2(x, y)$ und $K^3(x, y)$ klar geworden sind. Für diese Größen ist die geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ das Grundgebiet, die das für die Dirichletsche Aufgabe vorgelegte räumliche Gebiet $\mathfrak{R}$ umschließt.

Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Form der Größe $K(\alpha, \beta)$ sieht man zunächst, daß dieselbe unstetig wird wie $\cos w / r_{\alpha\beta}^2$, wenn w den Winkel zwischen den Richtungen N oder N_α und $r_{\alpha\beta}$ bedeutet. Da wir nun die Fläche $\mathfrak{F}$ stetig gekrümmt voraussetzen, so nähert sich der Bruch $\cos w / r_{\alpha\beta}$ einer endlichen Grenze, wenn die Stellen α und β zusammenrücken.

Die Größe $K(\alpha, \beta)$ wird also unstetig wie $1/r_{\alpha\beta}$, und man kann für ein die Stelle β umfassendes Gebiet $\mathfrak{U}$, das hinreichend klein ist,

$$K(\alpha, \beta) = \frac{A}{r_{\alpha\beta}} + M$$

setzen, wobei A gegenüber der Stelle α eine Konstante bedeutet, deren absoluter Betrag unter einer von β unabhängigen Grenze bleibt, und M im Gebiet $\mathfrak{U}$ eine stetige Funktion der Stelle α ist.

Man nehme nun das Gebiet $\mathfrak{U}$ so klein, daß es sich auf eine gewisse Ebene eindeutig in das schlichte Gebiet $\overline{\mathfrak{U}}$ projiziert. Bezeichnet man in diesem durch $\bar{r}_{\alpha\beta}$ und $d\bar{\alpha}$ die Projektionen des Abstandes $r_{\alpha\beta}$ und des Elementes $d\alpha$, so bleiben die Verhältnisse $r_{\alpha\beta}/\bar{r}_{\alpha\beta}$, $d\bar{\alpha}/d\alpha$ und $d\alpha/d\bar{\alpha}$ zwischen positiven endlichen Grenzen. Daraus folgt, daß man setzen kann

$$(1) \qquad \int\limits_{\mathfrak{U}} K(\alpha, \beta) f\alpha . d\alpha = \int\limits_{\overline{\mathfrak{U}}} \frac{M^0 \, d\bar{\alpha}}{\bar{r}_{\alpha\beta}},$$

wobei M^0 im Gebiet $\overline{\mathfrak{U}}$ endlich und stetig ist, wenn $f\alpha$ im Gebiet $\mathfrak{U}$ eine stetige Funktion des Ortes bedeutet. Da nun das Integral

$$\int \frac{d\bar{\alpha}}{\bar{r}_{\alpha\beta}},$$

erstreckt über ein innerhalb fester Schranken liegendes Gebiet, absolut unter einer von β unabhängigen endlichen Grenze liegt, so ist die Größe (1) endlich und ändert sich stetig mit β, wenn diese Stelle innerhalb des Gebietes $\mathfrak{U}$ bleibt.

Bildet man ferner das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{U}} K(\alpha, \gamma) K(\gamma, \beta) d\gamma,$$

in dem die Stellen α und β zunächst dem Gebiet $\mathfrak{U}$ angehören mögen, so sieht man aus den durchgeführten Betrachtungen, daß man das Integral in der Form

$$\int\limits_{\overline{\mathfrak{U}}} \frac{M^1 \, d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma} \bar{r}_{\beta\gamma}}$$

schreiben kann, wobei die überstrichenen Größen die Projektionen der nicht überstrichenen sind, und M^1 dieselben Stetigkeitseigenschaften wie M^0 besitzt. Das letzte Integral ist aber absolut kleiner als das mit einer gewissen positiven Konstanten multiplizierte Integral

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\,\bar{r}_{\beta\gamma}},$$

dessen Wert wir untersuchen wollen.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, das Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ sei die Fläche einer Ellipse mit den Brennpunkten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$; die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $\bar{\gamma}$ in bezug auf die Hauptachsen dieser Ellipse seien ξ und η, und die Gleichung der Ellipse, die der bezeichneten konfokal ist und durch den Punkt $\bar{\gamma}$ geht, sei

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man ferner

$$a^2 - b^2 = \mathfrak{e}^2, \qquad \xi = a\cos\theta, \qquad \eta = b\sin\theta,$$

so ist $\mathfrak{e}$ konstant und man findet

$$\bar{r}^2_{\alpha\gamma} = (a\cos\theta - \mathfrak{e})^2 + b^2\sin^2\theta = (\mathfrak{e}\cos\varphi - a)^2,$$

$$\bar{r}^2_{\beta\gamma} = (\mathfrak{e}\cos\theta + a)^2, \qquad \bar{r}_{\alpha\gamma}\bar{r}_{\beta\gamma} = a^2 - \mathfrak{e}^2\cos^2\theta,$$

$$d\bar{\gamma} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(b,\theta)}\,db\,d\theta = \frac{a^2 - \mathfrak{e}^2\cos^2\theta}{a}\,db\,d\theta,$$

$$\int \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\,\bar{r}_{\beta\gamma}} = \int \frac{db\,d\varphi}{a}.$$

Hat nun die das Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ umschließende Ellipse die Halbachsen a_0 und b_0, so folgt

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\alpha\gamma}\bar{r}_{\beta\gamma}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b_0} \frac{db}{\sqrt{b^2+\mathfrak{e}^2}} = -2\pi\log\mathfrak{e} + \log\left(b_0^2 + \sqrt{b_0^2+\mathfrak{e}^2}\right).$$

Diese Größe wird, da $\bar{r}_{\alpha\beta} = 2\mathfrak{e}$, unendlich wie $-2\pi\log\bar{r}_{\alpha\beta}$ oder wie $-2\pi\log r_{\alpha\beta}$, wenn die Stellen α und β zusammenrücken. Dasselbe gilt daher von den Integralen

$$\int_{\mathfrak{F}} f\gamma\,.\,K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\gamma, \qquad K^2(\alpha,\beta) = \int_{\mathfrak{F}} K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\gamma,$$

wenn $f\gamma$ eine beliebige stetige Funktion des Ortes im Gebiet $\mathfrak{F}$ bedeutet.

In Integralen wie

$$\int f\alpha\,.\,K^2(\beta,\alpha)\,d\alpha, \quad \int f\alpha\,.\,K^2(\alpha,\beta)\,d\alpha = \int f\alpha\,.\,d\alpha \int K(\alpha,\gamma)\,K(\gamma,\beta)\,d\gamma,$$

kann daher nach § 40 die Reihenfolge der Integrationen nach α und γ umgekehrt werden.

Man übersieht ferner leicht, daß das mit einer stetigen Funktion f gebildete Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{U}} \log r_{\alpha\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{r_{\beta\gamma}} f(\alpha, \beta)$$

über ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{U}$ erstreckt endlich bleibt, auch wenn die Stellen α und β zusammenfallen. Man braucht es nur in die Form

$$\int\limits_{\overline{\mathfrak{U}}} \log \overline{r_{\alpha\gamma}} \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{r}_{\beta\gamma}} \cdot M$$

zu bringen, wobei die Größe M offenbar im Integrationsgebiet stetig ist, und im Gebiete $\overline{\mathfrak{U}}$ Polarkoordinaten mit $\bar{\beta}$ als Zentrum einzuführen; dann folgt das Behauptete aus der Tatsache, daß

$$\int \log u \, d u$$

endlich ist, auch wenn man an die Grenze $u = 0$ heranintegriert. Hieraus folgt weiter, daß das Integral

$$K^3(\alpha, \beta) = \int\limits_{\mathfrak{F}} K(\alpha, \gamma) K^2(\gamma, \beta) \, d\gamma$$

im Grundgebiet $\mathfrak{F}$ endlich und stetig ist, und die Sätze des § 40 zeigen, daß im Integral

$$\int f\alpha \, . \, K^3(\alpha, \beta) \, d\alpha = \int f\alpha \, . \, d\alpha \int K(\alpha, \gamma) K^2(\gamma, \beta) \, d\gamma$$

die Integrationen vertauscht werden dürfen.

Hiermit sind diejenigen Teile des vorigen Paragraphen gerechtfertigt, in denen von der Singularität der Größen K, K^2, K^3 Gebrauch gemacht und Integrationen unstetiger Integranden vertauscht werden.

§ 53.

Nullösungen beim räumlichen Dirichletschen Problem.

Um die Kette der Schlüsse vollständig zu machen, die das räumliche Dirichletsche Problem erledigen, bleibt nach § 51 noch entweder zu zeigen, daß die Gleichung

$$\varphi x = c \int K(x, \alpha) \, \varphi \alpha \, . \, d\alpha$$

weder wenn c den Wert Eins hat, noch wenn c komplex ist, eine Lösung besitzt; oder diese Behauptungen sind für die Gleichung

$$\varphi x = c \int K(\alpha, x) \, \varphi \alpha \, . \, d\alpha \tag{1}$$

zu beweisen, was nach § 51 dasselbe leistet. In letzterer Form ist der Beweis leichter.

Daß zunächst die Gleichung

$$\varphi x = \int K(\alpha, x)\, \varphi \alpha . d\alpha$$

keine Lösung besitzt, zeigen die Schlüsse, durch die in § 48 bewiesen wurde, daß keine Nullösung zweiter Art existiert, wenn man nur überall $\log r$ durch $1/r$ ersetzt.

Um sodann die Gleichung (1) bei komplexen Werten von c als unmöglich nachzuweisen, gehen wir von der Formel

$$K(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d N_\alpha} \left(\frac{1}{r_{\alpha x}}\right)$$

aus und schließen aus ihr

$$K(\alpha, x)\, \varphi \alpha . d\alpha = -\frac{\varphi \alpha}{2\pi} \frac{d}{d N_x} \left(\frac{1}{r_{\alpha x}}\right) d\alpha.$$

Diese Größe ist aber die im Punkte x nach der Richtung N_x wirkende Komponente der Kraft, die das Element $d\alpha$ mit der Masse $-d\alpha . \varphi\alpha / 2\pi$ belegte im Punkte x ausübt. Bilden wir daher das Flächenpotential

$$U = -\int_{\mathfrak{F}} \frac{\varphi \alpha}{2\pi} \frac{d\alpha}{r_{\alpha x}},$$

indem wir unter x auch Stellen im Innern oder Äußern der Fläche $\mathfrak{F}$ verstehen, und bezeichnen durch N wie bisher die innere, durch N' die äußere Normale dieser Fläche, so können wir wie in § 48 die Größen

$$(2) \qquad \begin{gathered} M_i = \left(\frac{dU}{dN}\right)_i, \quad M_a = -\left(\frac{dU}{dN'}\right)_a = \left(\frac{dU}{dN}\right)_a \\ \overline{M} = \int K(\alpha, x)\, \varphi \alpha . d\alpha \end{gathered}$$

bilden, und ihre Bedeutung ist folgende. M_i und M_a sind die Grenzwerte, denen die in der Richtung N wirkende Kraftkomponente zustrebt, wenn man sich dem auf der Fläche $\mathfrak{F}$ liegenden Punkte x von innen oder außen annähert, etwa auf einer zur Fläche normalen Geraden, deren Richtung man, ehe die Fläche $\mathfrak{F}$ erreicht wird, als Richtung N nimmt; $\overline{M}$ aber ist die nach der Richtung N_x genommene Komponente der Anziehung, wenn der Punkt x in der anziehenden Fläche $\mathfrak{F}$ selbst liegt. Die Theorie des Flächenpotentials gibt, da $-\varphi\alpha.(2\pi)^{-1}$ die Dichtigkeit ist, die Gleichungen

$$M_i = \overline{M} + \varphi x, \quad M_a = \overline{M} - \varphi x,$$

oder

$$M_i - M_a = 2\varphi x, \quad M_i + M_a = 2\overline{M}.$$

Benutzt man daher die Gleichungen (2), so führt die vorausgesetzte Beziehung (1) zu der Gleichung

$$M_i - M_a = c\,(M_i + M_a)$$

oder

$$\frac{dU}{dN} + \frac{dU}{dN'} = c\left(\frac{dU}{dN} - \frac{dU}{dN'}\right); \tag{3}$$

dabei bedeuten die Brüche mit dem Nenner dN den durch das Suffix i bezeichneten Grenzwert, die Brüche mit dem Nenner dN' den durch a bezeichneten, was wir für die folgenden Formeln festhalten.

Zu der Gleichung (3) kommt man auch, wenn c komplex ist. Dann gilt dasselbe von $\varphi\alpha$; da diese Größe aber überall nur linear vorkommt, so sind die benutzten Gleichungen der Potentialtheorie auch bei komplexen Werten der Dichtigkeit gültig, und das Potential sowie jede Kraftkomponente fällt dabei komplex aus.

Es sei z. B.

$$U = V + Wi, \quad c = a + bi;$$

dann zerfällt die Gleichung (3) in die beiden folgenden:

$$\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'} - a\left[\frac{dV}{dN} - \frac{dV}{dN'}\right] + b\left[\frac{dW}{dN} - \frac{dW}{dN'}\right] = 0,$$
$$\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'} - a\left[\frac{dW}{dN} - \frac{dW}{dN'}\right] - b\left[\frac{dV}{dN} - \frac{dV}{dN'}\right] = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit W und $-V$ oder mit V und W, addiert sie und integriert über das Grundgebiet, so vereinfacht sich das erhaltene Resultat durch die Gleichungen

$$\int\left(V\frac{dW}{dN} - W\frac{dV}{dN}\right)d\alpha = 0, \quad \int\left(V\frac{dW}{dN'} - W\frac{dV}{dN'}\right)d\alpha = 0,$$

deren erste unmittelbar aus der Gaussischen Integraltransformation für den von der Fläche $\mathfrak{F}$ umschlossenen Innenraum $\mathfrak{R}$ folgt, die zweite aus derselben Transformation für den Außenraum der Fläche $\mathfrak{F}$ und den Unendlichkeitseigenschaften der gewöhnlichen

Potentiale. Mittels dieser Gleichungen findet man durch die angegebenen Operationen folgende Gleichungen:

$$b\int W\frac{dW}{dN}\,d\alpha - b\int W\frac{dW}{dN'}\,d\alpha + b\int V\frac{dV}{dN}\,d\alpha - b\int V\frac{dV}{dN'}\,d\alpha = 0,$$

wofür wir kurz schreiben

$$bT = 0,$$

und

$$-aT + \int V\left(\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'}\right)d\alpha + \int W\left(\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'}\right)d\alpha = 0.$$

Wenn nun c komplex, also b von Null verschieden ist, ergibt sich sofort

$$(4)\qquad T = 0,\quad \int\left[V\left(\frac{dV}{dN} + \frac{dV}{dN'}\right) + W\left(\frac{dW}{dN} + \frac{dW}{dN'}\right)\right]d\alpha = 0.$$

Diese Gleichung transformieren wir mittels der Identitäten

$$\int V\frac{dV}{dN}\,d\alpha = -\int_{\mathfrak{R}} d\tau\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)^2\right]$$

$$\int V\frac{dV}{dN'}\,d\alpha = -\int_{\mathfrak{R}'} d\tau\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

indem wir durch $\mathfrak{R}'$ den Außenraum der Fläche $\mathfrak{F}$ bezeichnen und analoge Gleichungen für W aufstellen. Die linke Seite der zweiten Gleichung (4) geht dann in eine Summe von Integralen negativer Quadrate über und die Gleichung zeigt, daß die Ableitungen von V und W nach ξ, η, ζ im Außenraum $\mathfrak{R}'$ wie im Innenraum $\mathfrak{R}$ verschwinden, die Potentiale V und W im ganzen Raume konstant sind, die zugehörigen Dichtigkeiten also, mit denen die Fläche $\mathfrak{F}$ belegt ist, d. h. der reelle und imaginäre Teil der Funktion $\varphi\alpha$, verschwinden.

Damit ist gezeigt, daß keine Lösungen der Gleichung (1) bei komplexen Werten von c existieren, und die Entwickelungen des § 51 sind soweit ergänzt, wie es nötig war, um zu zeigen, daß die Dirichletsche Aufgabe durch den dort gegebenen Ausdruck wirklich gelöst wird.

Sechster Abschnitt.

Die Fredholmschen Reihen.

§ 54.

Formale Auflösung von Integralgleichungen und Integralgleichungssystemen.

Ersetzt man die Integralgleichung

$$\psi x = f x + \int K(x, \alpha) \psi \alpha . d\alpha$$

durch das System der linearen Gleichungen

$$\psi \alpha_\varrho = f \alpha_\varrho + \sum_{\nu=1}^{n} K(\alpha_\varrho, \alpha_\nu)(\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) \psi \alpha_\nu,$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots n,$$

und löst diese durch Determinanten auf, so wird es plausibel, daß die Integralgleichung in folgender Weise durch die Fredholmschen Reihen aufgelöst wird:

$$\psi x = f x + \frac{1}{D} \int D(x, \alpha) f \alpha . d\alpha,$$

$$D(x, \alpha) = A_0(x, \alpha) - \frac{A_1(x, \alpha)}{1!} + \frac{A_2(x, \alpha)}{2!} - \cdots,$$

$$D = 1 - \frac{A_1}{1!} + \frac{A_2}{2!} - \frac{A_3}{3!} + \cdots.$$

In diesen ist gesetzt

$$A_0(x, y) = K(x, y),$$

$$A_n(x, y) = \iint \cdots \int d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,\alpha_1) & \ldots & K(x,\alpha_n) \\ K(\alpha_1,y) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(\alpha_n,y) & K(\alpha_n,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_n,\alpha_n) \end{vmatrix},$$

$$A_n = \int A_{n-1}(\alpha, \alpha) \, d\alpha.$$

Offenbar hat man hier mit Determinanten zu tun, deren Elemente die Form $K(x, \alpha_n)$, $K(\alpha_n, y)$, $K(\alpha_m, \alpha_n)$ haben. Diese wollen wir kurz durch (xn), (ny), (mn) bezeichnen. Die Determinanten haben ferner die Eigenschaft, daß das erste Argument der Größen $(\alpha\beta)$ in jeder Zeile, das zweite in jeder Spalte dasselbe bleibt; sie sind also durch ihr Diagonalglied vollkommen bestimmt. Sie mögen demgemäß durch das in eckige Klammern geschlossene Diagonalglied dargestellt werden. Mit dieser Bezeichnungsweise erhält man

$$A_n(x, y) = \int \cdots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n [(xy)\,(11)\,(22) \ldots (nn)].$$

Wir wollen nun die Größe $A_n(x, y)$ dadurch umformen, daß wir die in ihr vorkommende Determinante nach den Gliedern ihrer ersten Spalte ordnen. Dann finden wir

$$[(xy)(11)\ldots(nn)] = (xy)[(11)(22)\ldots(nn)] - (1y)[(x1)(22)\ldots(nn)]$$
$$+ (2y)[(x1)(12)(33)\ldots(nn)] - (3y)[(x1)(12)(23)(44)\ldots(nn)] + \cdots.$$

Die Determinanten der rechten Seite sind hier nach folgendem Gesetz gebildet. Die zweiten Ziffern sind immer die der Reihe $1, 2, \ldots n$, die ersten Zeichen sind $x, 1, 2 \ldots n$, von denen sukzessive das erste, zweite, dritte, ... weggelassen wird. Dem entspricht es vollkommen, daß man Determinanten haben will, bei denen die Spalten aus den letzten n Spalten der ursprünglichen Determinante gebildet sind, während die Zeilen diejenigen der ursprünglichen sind, nachdem man die erste, zweite, dritte Zeile weggelassen hat und so fort. Nun erhält man, indem man zwei Spalten vertauscht, oder in den Elementen unserer Determinante die an zweiter Stelle stehenden Ziffern vertauscht, die folgenden Gleichungen:

$$[(x1)(12)(33)\ldots(nn)] = -\,[(x2)(11)(33)\ldots(nn)],$$
$$[(x1)(12)(23)(44)\ldots(nn)] = [(x3)(11)(22)(44)\ldots(nn)],$$
$$[(x1)(12)(23)(34)(55)\ldots(nn)] = -[(x4)(11)(22)(33)(55)\ldots(nn)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Somit ergibt sich

$$A_n(x, y) =$$
$$\int\ldots\int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \{(xy)[(11)(22)\ldots(nn)] - (1y)[(x1)(22)\ldots(nn)]$$
$$-(2y)[(x2)(11)(33)\ldots(nn)] - (3y)[(x3)(11)(22)(44)\ldots(nn)]\}\cdots$$

Die Integrale der einzelnen rechts auftretenden Glieder außer dem ersten sind aber identisch, da ein mehrfaches Integral von der Bezeichnung der Integrationsvariablen unabhängig ist. Man hat z. B., indem man die Bedeutung der Integrationsvariablen α_1 und α_2 vertauscht, die Gleichung

$$\int \cdots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n (1y) [(x1)(22) \ldots (nn)]$$
$$= \int \cdots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n (2y) [(x2)(11)(33) \ldots (nn)].$$

Der Wert des ersten dieser Integrale, mithin auch der aller anderen kann aber offenbar geschrieben werden:

$$\int d\alpha_1 K(\alpha_1, y) \int \ldots \int d\alpha_2 \ldots d\alpha_n [(x1)(22) \ldots (nn)]$$
$$= \int K(\alpha_1, y) A_{n-1}(x, \alpha_1) d\alpha_1.$$

Da ferner offenbar die Gleichung

$$\int \ldots \int d\alpha_1 \ldots d\alpha_n [(11)(22) \ldots (nn)] = \int A_{n-1}(\alpha_1, \alpha_1) d\alpha_1 = A_n$$

gilt, so findet man die Rekursionsformel

$$(1) \qquad A_n(x, y) = A_n K(x, y) - n \int K(\alpha, y) A_{n-1}(x, \alpha) d\alpha.$$

Operiert man mit den Zeilen, wie hier mit den Spalten geschehen ist, so findet man eine entsprechende Rekursionsformel

$$(2) \qquad A_n(x, y) = A_n K(x, y) - n \int K(x, \alpha) A_{n-1}(\alpha, y) d\alpha.$$

Diese beiden Identitäten genügen, um zu zeigen, daß die Integralgleichung durch den Quotienten $D(x, y)/D$ erfüllt wird, sobald nur feststeht, daß die Reihe $D(x, y)$ bezüglich beider Argumente im Grundgebiet gleichmäßig konvergiert. Unter dieser Voraussetzung finden wir nämlich, indem wir von der Gleichung (1) oder

$$(-1)^{n+1} \frac{A_n(x, y)}{n!} = \frac{A_n K(x, y)(-1)^{n+1}}{n!} + \int K(x, \alpha) \frac{A_{n-1}(\alpha, y)}{(n-1)!} d\alpha$$

ausgehen und über n summieren, das folgende Resultat:

$$-K(x, y) + D(x, y) = K(x, y)(D - 1) + \int K(x, \alpha) D(\alpha, y) d\alpha$$

oder auch

$$(3) \qquad D(x, y) = D . K(x, y) + \int K(x, \alpha) D(\alpha, y) d\alpha.$$

Ebenso leicht ergibt sich aus der Formel (2) die Gleichung

$$(4) \qquad D(x, y) = D . K(x, y) + \int K(\alpha, y) D(x, \alpha) d\alpha.$$

Die Formeln (3) und (4) sind also bewiesen, sobald die bezeichnete Eigenschaft der Fredholmschen Reihen feststeht.

Hier möge noch beiläufig bemerkt werden, daß die Fredholmschen Reihen, wenn sie die Integralgleichung mit stückweise stetigem Kern auflösen, auch dasselbe für Systeme von Integralgleichungen leisten.

Seien z. B. die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 x &= f_1 x + \int_0^1 K_{11}(x, \alpha)\, \varphi_1 \alpha \,.\, d\alpha + \int_0^1 K_{12}(x, \alpha)\, \varphi_2 \alpha \,.\, d\alpha, \\ \varphi_2 x &= f_2 x + \int_0^1 K_{21}(x, \alpha)\, \varphi_1 \alpha \,.\, d\alpha + \int_0^1 K_{22}(x, \alpha)\, \varphi_2 \alpha \,.\, d\alpha \end{aligned}$$

vorgelegt, in denen über ein lineares Gebiet integriert wird, innerhalb dessen die Funktionen $K_{\mu\nu}(x, \alpha)$ bezüglich jedes Arguments stückweise stetig sind; $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ seien die Unbekannten. Dann setze man für die Gebiete

$$\begin{array}{lll} 1. & 0 \leqq x \leqq 1, & 0 \leqq y \leqq 1, \\ 2. & 0 \leqq x \leqq 1, & 1 \leqq y \leqq 2, \\ 3. & 1 \leqq x \leqq 2, & 0 \leqq y \leqq 1, \\ 4. & 1 \leqq x \leqq 2, & 1 \leqq y \leqq 1 \end{array}$$

die folgenden Definitionen an, deren jede sich auf das gleich numerierte Gebiet bezieht:

$$\begin{array}{ll} 1. & K(x, y) = K_{11}(x, y), \\ 2. & K(x, y) = K_{12}(x, y - 1), \\ 3. & K(x, y) = K_{21}(x - 1, y), \\ 4. & K(x, y) = K_{22}(x - 1, y - 1). \end{array}$$

Ferner gelte das erste oder zweite der Gleichungssysteme

$$\varphi x = \varphi x_1, \quad f x = f_1 x; \qquad f x = f_2(x - 1), \quad \varphi x = \varphi_2(x - 1),$$

je nachdem x der Strecke von 0 bis 1 oder von 1 bis 2 angehört. Dann können die Gleichungen (5) in die eine Gleichung

$$\varphi x = f x + \int_0^2 K(x, \alpha)\, \varphi \alpha \,.\, d\alpha$$

übergeführt werden, deren Kern auf der Strecke von 0 bis 2 stückweise stetig ist, wenn dasselbe von den Größen $K_{\mu\nu}$ auf der Strecke von 0 bis 1 gilt.

Diese Betrachtung kann offenbar leicht verallgemeinert werden.

§ 55.

Der Hadamardsche Determinantensatz.

Zu den wichtigsten Eigenschaften der Fredholmschen Reihen führt folgende algebraische Betrachtung.

Unter einer orthogonalen Substitution versteht man bekanntlich eine lineare Substitution von der Form

$$y_\nu = \sum_{\varrho}^{1,n} a_{\nu\varrho}\, x_\varrho,$$

bei welcher die Identität

$$\sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

besteht. Hat man speziell $n = 2$, so lehren die offenbar zusammen bestehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ y_2 &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \\ x_1^2 + x_2^2 &= y_1^2 + y_2^2, \end{aligned}$$

in denen α ein beliebiger Winkel sein kann, daß es eine orthogonale Substitution gibt, bei der die Koeffizienten einer Reihe sich zu einander verhalten wie gegebene Größen, die nicht alle gleich Null sind.

Diesen Satz kann man leicht durch vollständige Induktion auf Substitutionen in beliebig vielen Variablen ausdehnen. Sei nämlich der Satz für $n-1$ Variable bewiesen, so daß in den zusammen bestehenden Gleichungen

$$\sum_{\varrho}^{1,n-1} a_{\nu\varrho} x_\varrho = y_\nu, \qquad \sum_{\nu}^{1,n-1} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n-1} x_\nu^2$$

bewirkt werden kann, daß

$$a_{11} = \lambda c_1, \quad a_{12} = \lambda c_2, \quad \ldots a_{1,n-1} = \lambda c_{n-1},$$

wobei $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ beliebig gegebene Größen sind, die nicht alle verschwinden, und λ ein endlicher Proportionalitätsfaktor ist. Dann fügen wir das Variablenpaar $x_n = y_n$ hinzu, so daß die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

gilt, und bildet weiter die Substitution

$$z_1 = y_1 \cos\alpha - y_n \sin\alpha,$$
$$z_n = y_1 \sin\alpha + y_n \cos\alpha,$$
$$z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3, \quad \ldots z_{n-1} = y_{n-1}.$$

Alsdann haben wir offenbar die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} z_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} y_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2$$

und speziell die Beziehung

$$z_1 = \cos\alpha \sum_{\nu}^{1,n-1} a_{1\nu} x_\nu - x_n \sin\alpha.$$

Die Koeffizienten dieses Ausdrucks sind

$$\lambda c_1 \cos\alpha, \quad \lambda c_2 \cos\alpha, \quad \ldots \lambda c_{n-1} \cos\alpha, \quad -\sin\alpha,$$

und man kann durch passende Wahl des Winkels α bewirken, daß

$$-\sin\alpha = c_n \lambda \cos\alpha,$$

wenn c_n eine beliebig vorgeschriebene Größe bedeutet. Auf diese Weise ist erreicht, daß die Koeffizienten in der ersten Reihe der die Variablen x und z verknüpfenden Substitution den willkürlich gegebenen Größen $c_1, c_2, \ldots c_n$ proportional sind. Die Argumentation versagt nur, wenn $n-1$ Größen c verschwinden; dann ist aber die gesuchte orthogonale Substitution einfach eine Permutation der Größen x_ν, bei der x_1 und x_n sich vertauschen.

Jetzt seien $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots x_{n\nu}$, indem man $\nu = 1, 2, \ldots n$ setzt, n Wertsysteme des Variablensystems $x_1, x_2, \ldots x_n$, und man wende auf dieses eine orthogonale Substitution in der schon oben gebrauchten Form an, indem man setzt

$$y_\nu = \sum_{\varrho}^{1,n} a_{\nu\varrho} x_\varrho.$$

Die jenen n speziellen Wertsystemen entsprechenden Systeme der Größen y seien $y_{1\nu}, y_{2\nu}, \ldots y_{n\nu}$. Dann kann man nach dem oben erhaltenen Resultat die Koeffizienten a so wählen, daß die Gleichungen

$$y_{12} = y_{13} = \cdots = y_{1n} = 0$$

gelten. Denn das gibt die $n-1$ homogenen Gleichungen

$$\sum_{\varrho}^{1,n} a_{1\varrho} x_{\varrho\sigma} = 0, \qquad \sigma = 2, 3, \ldots n,$$

die man immer durch Unbekannte erfüllen kann, deren Werte nicht sämtlich verschwinden. Diesen Unbekannten können dann, wie gezeigt, die Größen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$ proportional gesetzt werden.

Weiter transformiere man die Variablen $y_2, y_3, \ldots y_n$ durch eine orthogonale Transformation derart in die neuen Variablen $z_2, z_3, \ldots z_n$, daß die Gleichungen

$$z_{23} = z_{24} = \cdots = z_{2n} = 0$$

bestehen, in denen allgemein $z_{2\nu}, z_{3\nu}, \ldots z_{n\nu}$ das Wertsystem bedeutet, das dem System $y_{2\nu}, y_{3\nu}, \ldots y_{n\nu}$ entspricht. Die hierzu dienende Substitution kann zugleich als eine Transformation der n Variablen $y_1, y_2, \ldots y_n$ angesehen werden, indem man die eine Gleichung $z_1 = y_1$ hinzufügt. Dann kann auch das Variablensystem $z_1, z_2, \ldots z_n$ als durch orthogonale Transformation aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ hervorgegangen erscheinen und die speziellen Werte, die den Größen $x_{\mu\nu}$ entsprechen, bilden ein System von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{ccccc}
z_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
z_{21} & z_{22} & 0 & \ldots & 0 \\
z_{31} & z_{32} & z_{33} & \ldots & z_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

In diesem enthalten die erste und zweite horizontale Reihe rechts von der Diagonale nur Nullen. Auf diese Weise geht man weiter und stellt ein System her, in welchem die drei ersten Reihen dieselbe Eigenschaft haben, die soeben für die erste und zweite erreicht wurde. So fährt man fort, bis man schließlich erreicht hat, daß die $n-1$ ersten Reihen rechts von der Diagonale nur Nullen enthält. Sind die letzten Variablen t, so hat man dann ein Größensystem von der Form

$$\begin{array}{ccccc}
t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
t_{21} & t_{22} & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \\
t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & t_{n-1,3} & \ldots & 0 \\
t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \ldots & t_{nn}
\end{array}$$

erzielt und der Wert der aus diesem gebildeten Determinante ist offenbar $t_{11}\, t_{22} \ldots t_{nn}$.

Nun haben die Determinanten der orthogonalen Substitution stets den Wert ± 1; die Determinante des transformierten Größensystems ist gleich der des ursprünglichen multipliziert mit der

Substitutionsdeterminante. Daraus folgt, daß die ursprüngliche Determinante dem absoluten Werte nach gleich dem Produkt der n Größen $t_{\nu\nu}$ ist, die durch orthogonale Substitution aus den ursprünglichen Größen $x_{\mu\nu}$ abgeleitet sind.

Jetzt werde vorausgesetzt, die Größen $x_{\mu\nu}$ seien dem absoluten Betrage nach nicht größer als 1. Die Größen t seien in der Form

$$t_\nu = \sum_{\varrho}^{1,n} b_{\nu\varrho} x_\varrho$$

angesetzt und es besteht die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} t_\nu^2 = \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2.$$

Aus dieser folgen bekanntlich unmittelbar die Gleichungssysteme

$$\sum_{\nu}^{1,n} b_{\nu\varrho}^2 = 1, \quad \sum_{\nu}^{1,n} b_{\nu\varrho} b_{\nu\sigma} = 0, \quad \varrho \gtrless \sigma,$$

$$\sum_{\varrho}^{1,n} b_{\nu\varrho}^2 = 1, \quad \sum_{\varrho}^{1,n} b_{\mu\varrho} b_{\nu\varrho} = 0, \quad \mu \gtrless \nu.$$

Da nun zwischen beliebigen reellen Größen c_ν, x_ν die allgemeine Ungleichung

$$\Big(\sum_{\varrho} c_\varrho x_\varrho\Big)^2 \leqq \sum_{\varrho} c_\varrho^2 \cdot \sum_{\nu} x_\varrho^2$$

gilt, so folgt, indem man $c_\varrho = b_{\nu\varrho}$ setzt,

$$t_\nu^2 \leqq \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2 \sum_{\nu} b_{\nu\varrho}^2, \qquad t_\nu^2 \leqq \sum_{\nu}^{1,n} x_\nu^2.$$

Bei der Annahme $|x_\nu| \leqq 1$ folgt also

$$|t_\nu| \leqq \sqrt{n};$$

speziell ergibt sich

$$|t_{\nu\nu}| \leqq \sqrt{n}.$$

Da ferner für die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

oben die Gleichung

$$|\Delta| = t_{11}\, t_{22} \dots t_{nn}$$

abgeleitet ist, so folgt

$$|\Delta| < \sqrt{n^n},$$

und die Hadamardsche Ungleichung ist vollständig bewiesen.

Diese Ungleichung, die zunächst nur für den Fall reeller Elemente $x_{\mu\nu}$ abgeleitet ist, bleibt richtig, wenn die in einer Spalte stehenden Elemente sämtlich rein imaginär sind. Hat man daher eine Determinante aus komplexen Elementen, die sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als 1, etwa die Determinante der Elemente $a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}$, wobei die zweiten Zeiger in den Spalten, die ersten in den Reihen konstant bleiben, und zerlegt man die Determinante entsprechend den beiden in jeder Spalte stehenden Summanden in Determinanten, deren Spalten entweder aus Gliedern wie $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots a_{n\nu}$ oder aus Gliedern wie $i b_{1\varrho}, i b_{2\varrho}, \dots i b_{n\varrho}$ bestehen, so ist die Anzahl dieser Summanden 2^n. Auf jeden einzelnen von ihnen kann die für reelle Elemente geltende Hadamardsche Ungleichung angewandt werden. Die Determinante der komplexen Elemente $a_{\mu\nu} + i b_{\mu\nu}$ ist also absolut kleiner als $2^n \sqrt{n^n}$, wenn die absoluten Beträge der Elemente kleiner als 1 sind.

Hieraus schließt man sofort, daß der absolute Wert einer Determinante mit reellen oder komplexen Elementen, die sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als g sind, unter der Grenze

$$g^n \left(2 \sqrt{n}\right)^n$$

liegt.

§ 56.

Die Konvergenz der Fredholmschen Reihen.

Das erhaltene Resultat wenden wir auf die Determinanten an, die in den Ausdrücken $A_n(x, y)$ und A_n vorkommen. Der Kern $K(x, y)$ sei im Grundgebiet als Funktion jeder der Stellen x und y stückweise stetig, übrigens reell oder komplex. Dann gibt es eine solche positive Konstante g, daß die Ungleichung

$$|K(x,y)| < g$$

gilt, wenn die Stellen x und y das Grundgebiet durchlaufen, und man findet sofort die Ungleichungen

$$|A_n(x,y)| < g^{n+1} \left(2 \sqrt{n+1}\right)^{n+1} c^n,$$
$$|A_n| < g^n \left(2 \sqrt{n}\right)^n c^n,$$

in denen c den Wert des Integrals $\int dx$, erstreckt über das Grundgebiet, bedeutet. Die einzelnen Glieder der Reihe $D(x,y)$ sind daher absolut kleiner, als die entsprechenden der Reihe

$$R = 1 + \sum_{n}^{1,\infty} (2g)^{n+1} \left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1} \frac{c^n}{n!}.$$

Diese ist aber konvergent. Denn der Quotient zweier auf einander folgender Glieder ist, wenn man das folgende als Zähler, das vorhergehende als Nenner nimmt, einfach

$$2g\sqrt{n+1}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^n \frac{c}{n+1} = \frac{2gc}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

und da die Größe

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dem Grenzwert e mit wachsenden Werten von n zustrebt, so ist der Wert dieses Quotienten bei hinreichend großem Wert von n beliebig klein. Mit der Reihe R ist aber auch die Reihe D zu vergleichen. Auch sie konvergiert jedenfalls nicht schlechter als die Reihe R. Da diese ferner von den Stellen x, y gänzlich unabhängig ist, konvergiert die Reihe $D(x, y)$ gleichmäßig. Damit sind die notwendigen Grundlagen gegeben, um aus der Rekursionsformel des § 54 die Gleichungen

$$(1) \qquad D(x,y) = DK(x,y) + \int K(\alpha, y)\, D(x, \alpha)\, d\alpha,$$

$$(2) \qquad D(x,y) = DK(x,y) + \int K(x, \alpha)\, D(\alpha, y)\, d\alpha$$

erschließen zu können, die somit für beliebige symmetrische oder unsymmetrische Kerne $K(x, y)$ der oben bezeichneten Art bewiesen sind.

Ist ferner D von Null verschieden, so liefert die Formel

$$\psi x = fx + \frac{1}{D}\int D(x, \alpha) f\alpha . d\alpha$$

eine Lösung der Gleichung

$$\psi x = fx + \int K(x, \alpha)\, \psi\alpha . d\alpha.$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist der, daß der Kern $K(x, y)$ eine ganze rationale Funktion eines Parameters λ ist, der auch komplexe Werte annehmen kann. Beschränkt man diese auf ein festes, übrigens beliebiges Gebiet $\mathfrak{G}$, so liegt die Funktion

$K(x, y)$ dem absoluten Betrage nach unter einer von λ unabhängigen Grenze g, und die Reihen D und $D(x, y)$ konvergieren gleichmäßig auch in bezug auf λ, sind also nach dem Theorem von Weierstraß im Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktionen von λ. Da nun diese Folgerung für ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{G}$ gezogen werden kann, so sind die Größen D und $D(x, y)$ ganze transzendente Funktionen von λ.

Enthält die Größe $K(x, y)$ den Parameter λ als einfachen Faktor und bezeichnen wir durch $K(x,y)$ und $D(x,y)$ die Größen, die bisher $K(x, y)/\lambda$ und $D(x, y)/\lambda$ hießen, so finden wir, daß die Funktionalgleichung

$$\psi x = fx + \lambda \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha$$

durch einen Quotienten zweier ganzer Funktionen von λ, also durch eine meromorphe Funktion dieser Größe gelöst wird, womit die Schmidtsche Formel verallgemeinert wird.

Am einfachsten gestaltet sich die Lösung, wenn wir fx durch $K(x, y)$ ersetzen; dann erhält man einfach die Fredholmsche Resolvente

$$\psi x = K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha)\, \psi \alpha . d\alpha, \tag{3}$$

aus der man schließt, daß ψx dem lösenden Kern $\Gamma(x,y)$ gleichzusetzen ist; dieser hat den Wert

$$\Gamma(x, y) = \frac{D(x, y)}{D},$$

wie aus der Gleichung (1) hervorgeht. Die Reihen D und $D(x,y)$ haben jetzt entsprechend der geänderten Bezeichnung die folgende Gestalt

$$D(x, y) = K(x, y) - \lambda A_1(x, y) + \frac{\lambda^2}{1.2} A_2(x, y) - \cdots,$$

$$D = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} A_2 - \cdots$$

und aus der Beziehung

$$A_n = \int A_{n-1}(\alpha, \alpha)\, d\alpha$$

folgt die Gleichung

$$\int D(x, x)\, dx = -\frac{dD}{d\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Folgerung unter der Voraussetzung

$$D\Big|^{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

Man entwickele auch die Größe $D(x,y)$ nach Potenzen von $\lambda - \lambda_1$ und es sei etwa

$$D(x,y) = D_1(x,y)\,(\lambda - \lambda_1)^k + D_2(x,y)\,(\lambda - \lambda_1)^{k+1} + \cdots.$$

Dann sind $D_\nu(x, y)$ nach der Bildungsweise der Reihe $D(x, y)$ stetige Funktionen von x und y, deren erste nicht identisch verschwindet. Die Größe

$$\int D(x, x)\,dx$$

enthält mindestens die Potenz $(\lambda - \lambda_1)^k$ als Faktor und dasselbe gilt von $dD/d\lambda$; mithin enthält D mindestens die Potenz $(\lambda - \lambda_1)^{k+1}$. Die Stelle λ_1 ist also sicher ein Pol für den Bruch $D(x,y)/D$, und die Gleichung (1) ergibt

$$D_1(x, y) = \frac{\lambda D K(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \lambda \int D_1(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha + \cdots,$$

wobei rechts nur Glieder weggelassen sind, die eine ganze durch $\lambda - \lambda_1$ teilbare Funktion von λ bilden. Nun ist auch D durch $(\lambda - \lambda_1)^k$, wie gezeigt, teilbar und gibt einen Quotienten, der für $\lambda = \lambda_1$ verschwindet; mithin erhält man die Gleichung

$$D_1(x, y) = \lambda_1 \int D_1(\alpha, y)\,K(x, \alpha)\,d\alpha,$$

und da $D_1(x, y)$ nicht identisch verschwindet, kann man y so fixieren, daß eine nicht identisch verschwindende Funktion von x herauskommt. Damit hat man eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\varphi x = \lambda_1 \int K(x, \alpha)\,\varphi\alpha . d\alpha$$

gewonnen. Eine solche ist vorhanden, wenn D an irgend einer Stelle $\lambda = \lambda_1$ verschwindet.

§ 57.

Die Fredholmschen Reihen und die symmetrischen Kerne.

Daß die Größe D bei reellen symmetrischen Kernen, also unter der Voraussetzung

$$K(x, y) = K(y, x),$$

immer mindestens einmal verschwindet, kann jetzt auf eine neue Weise leicht gezeigt werden. In der Tat versuchen wir den lösenden Kern $\Gamma(x, y)$ nach Potenzen von λ zu entwickeln, so müßte die erhaltene Reihe beständig konvergieren, wenn der Nenner D nirgends verschwinden sollte. Läßt sich also zeigen, daß diese Reihe nicht beständig konvergieren kann, so wird notwendig mindestens eine Wurzel der Gleichung $D = 0$ vorhanden sein.

Aus der Gleichung (3) des § 56 ergibt sich nun, wenn wir

$$\psi x = \Gamma(x, y) = K(x, y) + \lambda K^2(x, y) + \lambda^2 K^3(x, y) + \cdots$$

ansetzen, sofort die allgemeine Beziehung

$$K^{n+1}(x, y) = \int K^n(\alpha, y) K(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Die Größen K^n sind also mit den in § 44 ebenso bezeichneten identisch und es besteht wie dort die Gleichung

$$K^{m+n}(x, y) = \int K^m(x, \alpha) K^n(y, \alpha)\, d\alpha.$$

Aus dieser folgt unmittelbar, wenn p, q beliebige reelle Konstanten sind,

$$\int [p K^m(x, y) + q K^n(x, y)]^2\, dx \geqq 0,$$

$$p^2 \int K^m(x, y) K^m(x, y)\, dx + 2pq \int K^m(x, y) K^n(x, y)\, dx$$
$$+ q^2 \int K^n(x, y) K^n(x, y)\, dx \geqq 0$$

oder

$$p^2 K^{2m}(y, y) + 2pq K^{m+n}(y, y) + q^2 K^{2n}(y, y) \geqq 0.$$

Setzt man speziell $n = m + 2$ und x für y, so ergibt sich hieraus

$$(1) \qquad K^{2m}(x, x) K^{2m+4}(x, x) - [K^{2m+2}(x, x)]^2 \geqq 0.$$

Wenn nun $K^{2m}(x, x)$ für irgend einen Wert von x verschwindet, so würde diese Ungleichung sofort dasselbe für $K^{2m+2}(x, x)$ und ebenso für alle folgenden Größen $K^{2r}(x, x)$ ergeben. Die Größe

$$K^2(x, x) = \int K(\alpha, x)^2\, d\alpha$$

ist aber offenbar positiv; wäre $K^{2s}(x, x)$ die erste Größe ihrer Art, deren Exponent eine Potenz von 2 ist und die verschwindet, so ergäbe die Identität

$$K^{2s}(x, x) = \int K^s(x, \alpha)^2\, d\alpha,$$

daß auch $K^s(x, x)$ verschwände, was der Definition des Zeigers $2s$ widerspricht. Da nun, wenn überhaupt eine Größe $K^{2n}(x, x)$ den Wert Null hätte, dasselbe auch von einer ebensolchen Größe gelten müßte, in der für $2n$ eine Potenz von 2 gesetzt ist, so zeigen die erhaltenen Resultate, daß alle Größen $K^{2m}(x, x)$ positiv sind.

Jetzt ergibt die erhaltene Ungleichung (1), daß die Reihe

$$R = \sum_{n}^{1,\infty} K^{2n}(x, x)\, \lambda^{2n-1}$$

für gewisse Werte von λ divergiert; denn der Quotient eines Gliedes durch ein vorhergehendes ist

$$Q_n = \frac{K^{2n+2}(x, x)}{K^{2n}(x, x)}\, \lambda^2.$$

Nach der Ungleichung (1) ist aber

$$\frac{K^{2n+2}(x, x)}{K^{2n}(x, x)} \leqq \frac{K^{2n+4}(x, x)}{K^{2n+2}(x, x)},$$

und die Nenner sind, wie gezeigt, von Null verschieden. Somit folgt, daß der Quotient Q_n mit n anwächst, also bei passender Wahl von λ immer größer als Eins ist. Die Reihe R ist also divergent; sie ist aber nur als Teil in der Taylorschen Reihe $\Gamma(x, x)$ enthalten; mithin kann diese nicht beständig konvergieren.

Damit ist gezeigt, daß die Größe D mindestens eine Nullstelle als Funktion von λ besitzt; jeder stetige symmetrische Kern hat also mindestens eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion.

Sei nun λ_1 irgend ein Pol der meromorphen Funktion $\Gamma(x, y)$, und gelte in der Umgebung der Stelle λ_1 folgende Entwickelung:

$$\Gamma(x, y) = \frac{D(x, y)}{D} = \frac{f_k(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1);$$

durch f_k seien dabei stetige Funktionen der Argumente x, y, durch $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bezeichnet. Dann gibt die Gleichung (3) des § 56:

$$\frac{f_k(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1)$$

$$= K(x, y) + \lambda \int K(x, \alpha) \left[\frac{f_k(\alpha, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} + \cdots + \frac{f_1(\alpha, y)}{\lambda - \lambda_1}\right] d\alpha + \mathfrak{P}_1(\lambda - \lambda_1)$$

oder

$$f_k(x, y) + (\lambda - \lambda_1) f_{k-1}(x, y) + (\lambda - \lambda_1)^2 \mathfrak{P}_2(\lambda - \lambda_1)$$

$$= K(x, y)(\lambda - \lambda_1)^k + \lambda \int K(x, \alpha) f_k(\alpha, y)\, d\alpha$$

$$+ (\lambda - \lambda_1) \int K(x, \alpha) f_{k-1}(\alpha, y)\, d\alpha + (\lambda - \lambda_1)^2 \mathfrak{P}_3(\lambda - \lambda_1),$$

wobei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ wiederum Potenzreihen bedeuten. Setzt man hier $\lambda = \lambda_1$, so findet man

$$f_k(x,y) = \lambda_1 \int K(x,\alpha) f_k(\alpha,y)\, d\alpha.$$

Differenziert man dagegen erst nach λ und setzt erst in der erhaltenen Gleichung $\lambda = \lambda_1$, so findet man

$$\begin{aligned} f_{k-1}(x,y) &= \int K(x,\alpha) f_k(\alpha,y)\, d\alpha + \lambda_1 \int K(x,\alpha) f_{k-1}(\alpha,y)\, d\alpha \\ &= \frac{f_k(x,y)}{\lambda_1} + \lambda_1 \int K(x,\alpha) f_{k-1}(\alpha,y)\, d\alpha. \end{aligned}$$

Kombiniert man die beiden letzten Gleichungen, indem man die erste mit $f_{k-1}(x,y)$, die zweite mit $f_k(x,y)$ multipliziert, und die Differenz beider bildet; integriert man sodann nach x, so ergibt sich

$$0 = \frac{1}{\lambda_1} \int f_k(x,y)^2\, dx$$
$$+ \lambda_1 \int K(x,\alpha) \{ f_k(x,y) f_{k-1}(\alpha,y) - f_k(\alpha,y) f_{k-1}(x,y) \}\, d\alpha\, dx.$$

Hier ist das letzte Integral bei symmetrischem Kern gleich Null; also müßte auch $f_k(x,y)$ identisch verschwinden entgegen der Voraussetzung. Die Zahl k kann also nicht größer als Eins sein; im Falle eines symmetrischen Kerns sind alle Pole des lösenden Kerns einfach.

In der Umgebung eines solchen Poles sei diese Größe in der Form

$$\Gamma(x,y) = \frac{D(x,y)}{D} = -\frac{f_1(x,y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1) \tag{2}$$

entwickelbar. Dann ist die Größe

$$\Gamma_1(x,y) = \frac{D(x,y)}{D} + \frac{f_1(x,y)}{\lambda - \lambda_1}$$

an der Stelle $\lambda = \lambda_1$ nicht mehr singulär. Beschränken wir uns nun, was nach § 44 erlaubt ist, auf symmetrische Kerne, die keine anderen als positive Eigenwerte besitzen, so ist einer von ihnen der kleinste; er werde durch λ_1 bezeichnet. Dann liegt in der Ebene der komplexen Größe λ auf der Kreisfläche mit dem Radius $|\lambda_1|$ kein anderer Pol als λ_1. Die Taylorsche Entwickelung der Größe $\Gamma_1(x,y)$ konvergiert also noch für einen Wert $\lambda = \lambda_1 + \tau$, in welchem τ eine positive Größe bedeutet. Diese Entwickelung kann explizit in folgender Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x,y) &= K(x,y) + \sum_n^{1,\infty} K^{n+1}(x,y)\lambda^n + \frac{f_1(x,y)}{\lambda - \lambda_1} \\ &= \frac{f_1(x,y)}{\lambda_1} + K(x,y) + \sum_n^{1,\infty} \left[K^{n+1}(x,y) - \frac{f_1(x,y)}{\lambda_1^{n+1}} \right] \lambda^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Da nun diese Reihe konvergiert, wenn man $\lambda = \lambda_1 + \tau$ setzt, so folgt

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(K^{n+1}(x,y) - \frac{f_1(x,y)}{\lambda_1^{n+1}}\right)(\lambda_1 + \tau)^n\right] = 0$$

oder

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{(\lambda_1+\tau)^n}{\lambda_1^{n+1}}\left(\lambda_1^{n+1}K^{n+1}(x,y) - f_1(x,y)\right)\right] = 0,$$

also a fortiori

$$\lim_{n=\infty}\left[\lambda_1^{n+1}K^{n+1}(x,y) - f_1(x,y)\right] = 0,$$

$$f_1(x,y) = \lim_{n=\infty}\left[\lambda_1^{n+1}K^{n+1}(x,y)\right].$$

Da nun nach dem Obigen $f_1(x,y)$ eine Eigenfunktion des Kerns ist, so ist wiederum das Verfahren des § 44 abgeleitet, eine Eigenfunktion durch einen Grenzprozeß herzustellen, sobald der zugehörige Eigenwert gefunden ist.

Aber auch für diesen selbst ergibt sich aus der erhaltenen Formel ein Grenzprozeß, durch den man ihn herstellen kann. Da nämlich die Produkte

$$\lambda_1^n K^n(x,y), \quad \lambda_1^{n+k}K^{n+k}(x,y)$$

bei wachsenden Werten von n einander nahezu gleich werden, so ergibt sich

$$\lambda_1 = \lim_{n=\infty}\frac{K^n(x,y)}{K^{n+1}(x,y)}, \quad \lambda_1^2 = \lim_{n=\infty}\frac{K^n(x,y)}{K^{n+2}(x,y)}.$$

Diese Ausdrücke werden illusorisch, wenn der Nenner verschwindet. Man vermeidet dies bei dem zweiten nach den oben durchgeführten Betrachtungen, indem man n gerade nimmt und $x = y$ setzt. Ein spezieller, vielleicht zweckmäßiger Grenzprozeß wird durch die Formel

$$\lambda_1^{2n} = \lim_{n=\infty}\frac{K^{2^n}(x,x)}{K^{2^n+1}(x,x)}$$

angegeben.

Beiläufig findet man auch noch leicht eine Formel, durch die die Anzahl der zu dem Eigenwert λ_1 gehörigen Eigenfunktionen bestimmt werden kann. Erinnert man sich nämlich der Formeln

$$\int D(x,x)\,dx = -\frac{dD}{d\lambda}, \quad \frac{D(x,x)}{D} = K(x,x) + \sum_n^{1,\infty} K^{n+1}(x,x)\lambda^n,$$

und setzt wie früher

$$U_n = \int K^n(x, x)\, dx,$$

so findet man die Taylorsche Entwickelung

$$-\frac{d \log D}{d\lambda} = U_1 + U_2 \lambda + U_3 \lambda^2 + \cdots,$$

und der absolut kleinste Pol dieser offenbar meromorphen Funktion ist wiederum λ_1. Ist nun $\lambda = \lambda_1$ eine q-fache Nullstelle der ganzen Funktion D, so kann man in folgender Form entwickeln

$$\frac{d \log D}{d\lambda} = \frac{q}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1).$$

Vergleicht man die beiden für die linke Seite dieser Gleichung erhaltenen Reihen, so findet man durch die bei den Entwickelungen (2) und (3) gezogenen Schlüsse

$$q = \lim_{n=\infty} \left(U_n \lambda_1^n\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt aber nach § 46 die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen, die zum Eigenwert λ_1 gehören. Diese Anzahl ist also, wenn nur positive Eigenwerte vorhanden sind, gleich der Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = \lambda_1$ in der ganzen Funktion D.

Literarische Notizen.

Als wichtigste und durchgehends benutzte Arbeiten seien folgende angeführt:

Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfversigt af akademiens förhandlingar 57, Stockholm 1900.

Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math. 27, 1903.

Stekloff, Théorie générale des fonctions fondamentales. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) 6, 1904.

Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Erste und zweite Mitteilung. Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1904.

Schmidt, Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissertation, Göttingen 1905, Math. Annalen 63.

---

§ 6. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Annalen 57, 1903.

§ 9. Die Entwickelungen dieses Paragraphen wie des ganzen zweiten Abschnittes knüpfen sich an die allgemeine Theorie der kleinen Schwingungen von Lord Rayleigh, Theory of sound I, Chap. 5, 1894.

§ 11. Die dynamische Deutung der Legendreschen Polynome stammt aus einer Prüfungsarbeit von K. Fischer. Breslau 1910.

§ 12. Juretzka, Die Entwickelung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. Dissertation, Breslau 1909.

§ 13. Frank, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden. Sitzungsberichte der Wiener Akademie 117 (IIa), 1908.

§§ 14, 15. Schaefer und Juretzka, Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen von Saiten und Stäben. Phys. Zeitschrift 10, 1909. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur 1909.

§ 16. Kneser, Dynamische Deutung gewisser Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur 1909.

§ 17. Die zu § 12 zitierte Dissertation von Juretzka.

§ 18. Fredholm, Sur la théorie des spectres. Comptes rendus **142**, 1906. Schaefer, Dispersionstheorie und Serienspektren. Annalen der Phys. (4) **28**, **29**, 1909. Über die Bestimmung der Elektronenzahl aus der Dispersion. Annalen d. Phys. (4) **32**, 1910.

§ 19. Die klassischen Arbeiten von Sturm und Liouville im Journal de math. **1**, **2**, **3**.

§ 20. Kneser, Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Annalen **63**.

§ 23. Beispiele zu der Cauchyschen Methode finden sich in der Dissertation von Freund, Entwickelung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Breslau 1909.

§ 24. Stekloff, Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles linéaires du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant lesdites fonctions. Communications de la société mathématique de Kharkoff **10**, 1909.

§ 25. Der Satz am Schlusse nach Stekloff, Refroidissement de la barre hétérogène. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) **3**. Stekloff, Sur certaines égalités générales. Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg, classe phys.-math. (8) **15**, 1904. Betreffs der Entwickelung willkürlicher Funktionen vergleiche man die erste der eben angeführten Abhandlungen von Stekloff und Kneser, Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, Math. Annalen **58**.

§ 30. Strenge Beweise der hier benutzten Sätze der Potentialtheorie findet man bei Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie. Dissertation, Tübingen 1882.

§§ 33 bis 35, 38. Die Rechnungen sind Prüfungsarbeiten von E. Bergmann und V. Wellmann entnommen. Breslau 1910.

§ 40. Die allgemeine Theorie der Vertauschung von Integrationen richtet sich nach Plemelj, Die linearen Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Monatshefte für Math. u. Phys. **15**, 1904.

§ 41. Zum Schlußresultat führen wir folgende ältere Abhandlungen an:

Zaremba, Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques. Annales scientifiques de l'Ecole normale (3) **16**, 1899.

Stekloff, Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. Annales scientifiques de l'Ecole normale (3) **19**, 1902.

§§ 42, 43. Kneser, Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen von zwei Variablen. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **27**, 1909.

§ 45. Beispiele für die Bemerkung am Schluß bieten die Hermiteschen und Laguerreschen Polynome. Aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von R. Neumann sei folgendes angeführt:

Definiert man die Hermiteschen Polynome durch die Gleichung

$$e^{-hx+hh} = \sum_n^{0,\infty} \frac{h^n}{n!} \mathfrak{P}_n x,$$

so sind die Größen

$$\varphi_n x = e^{-\frac{1}{2}xx} \mathfrak{P}_n x$$

auf der Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes $K(x, y)$ mit unstetiger erster Ableitung, der für den Fall $x < y$ durch die Gleichung

$$K(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}(xx+yy)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha\alpha} d\alpha \int_{+\infty}^{y} e^{-\beta\beta} d\beta$$

definiert wird, und zwar gilt die Gleichung

$$\varphi_n x = (2n+2) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \alpha) \varphi_n \alpha . d\alpha.$$

Eine Funktion fx ist auf der ganzen Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ nach den Funktionen $\varphi_n x$ entwickelbar, wenn sie ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen an einer endlichen Anzahl von Stellen unstetig wird, und im Unendlichen mindestens wie $x^{-\varepsilon-\frac{5}{2}}$ verschwindet, wobei ε beliebig klein und positiv ist.

Sehr ähnliche Resultate lassen sich für die Laguerreschen Polynome ableiten, die als Nenner der Näherungsbrüche bei der Entwickelung der Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots$$

in einen Kettenbruch definiert werden können. Sie dienen dazu, willkürliche Funktionen auf der Strecke von 0 bis $-\infty$ darzustellen, und man erhält ähnliche Resultate wie bei den Hermiteschen Polynomen, wenn man auch die Laguerreschen als Eigenfunktionen eines Kernes mit unstetiger Ableitung im Gebiet von 0 bis $-\infty$ darstellt.

§ 48. Betreffs der hier und weiterhin benutzten Sätze der Potentialtheorie sei auf die zu § 40 zitierte Abhandlung von Plemelj verwiesen.

§ 49. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Annalen **64**, 1907.

§ 50. Picard, Sur quelques applications de l'équation fonctionelle de M. Fredholm. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **22**, 1906.

§§ 52, 53. Plemelj s. § 40.

§ 54. Plemelj, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatshefte für Math. und Phys. **15**, 1904.

§ 56. Die allgemeine Theorie der Fredholmschen Reihen wird in folgenden neueren Abhandlungen fortgebildet:

Goursat, Recherches sur les équations intégrales linéaires. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) **10**, 1908.

J. Schur, Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen. Math. Annalen **66**, 1909.

Landsberg, Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Annalen **69**, 1910.

§ 57. Darboux, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. Journal de math. (3) **4**, 1878.

Kneser, Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen. Rendiconti del circolo mat. di Palermo **22**, 1906.

Als zusammenfassende Darstellungen der Theorie seien erwähnt:

Bôcher, An introduction to the study of integral equations. Cambridge Tracts Nr. 10, Cambridge 1909.

Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten, Kap. 18, 19. Leipzig 1909.