

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten
der Naturwissenschaft und der Technik. BAND 62.
Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN.

Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne

Von

Dr. Aloys Müller

Mit 20 Abbildungen



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH



ISBN 978-3-663-06120-5 ISBN 978-3-663-07033-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-07033-7
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1918

Vorwort

So ziemlich die meisten Arbeiten zum Problem der Referenzflächen sind Variationen des Themas, wie es sein würde, wenn es so wäre, wie ihre Verfasser es sich denken.

Was wir an erster Stelle nötig haben, sind Zahlen, Zahlen und immer wieder Zahlen. Es ist zwar eine selbstverständliche, aber, wie es scheint, hier oft vergessene Weisheit, daß man die Phänomenologie einer Erscheinung kennen muß, um ihre Bedingungen finden zu können. Ich habe darum soweit als möglich das gesamte Material an quantitativen Beobachtungen zu sammeln gesucht und bearbeitet und war erstaunt darüber, wieviel davon in der deutschen und ausländischen Literatur unbekannt und unbenutzt geblieben ist. So hatte ich, auch wenn ich meine wenigen Beobachtungen ausnehme, ein Material zur Verfügung wie noch niemand zuvor, und ich hoffe, daß man es auch den Resultaten ansehen wird.

An zweiter Stelle bedürfen wir der Besinnung auf den Charakter dessen, was eigentlich Gegenstand der Untersuchung ist. Es handelt sich um Sehgrößen, also um psychische Dinge. Somit fallen die Untersuchungen, soviel sie sich auch mit anderen Wissenschaften bemühen mögen, in das Gebiet der Psychologie. Aus dieser Erkenntnis hat man die Folgerungen für Methode und Deutung zu ziehen.

Meine eigenen Beobachtungen sind noch sehr unvollständig. Immerhin habe ich sie mitgeteilt, weil ich glaube, daß sie einiges Interessante enthalten. Die experimentelle Untersuchung einer möglichen Deutung eines Hauptresultates ist in den Vorbereitungen stecken geblieben. Die Schuld an diesen Verhältnissen trugen die Witterung des Sommers 1916, die nicht ungünstiger hätte sein können, soziale Kriegsarbeit und Beschlagnahme von Stoffen, die zu den Versuchen nötig waren.

Ich will keine neue Theorie aufstellen, sondern nur die Bedingungen für die Möglichkeit einer begründeten und umfassenden Theorie schaffen. Wenn ich im Schlußkapitel dennoch eine Theorie andeute, so soll das nur ein erster Ausblick in ein neues Land

sein, den uns die Bearbeitung des gesammelten Materials und bisher nie benutzte Experimente weisen. Ob es für das Referenzflächenproblem das gelobte Land ist, müssen weitere Beobachtungen und Versuche zeigen.

Die mathematische Theorie der Bestimmung der Referenzflächen habe ich so vollständig gegeben, wie sie mir notwendig und nützlich erschien. Sie war bisher hauptsächlich für die Bestimmung der Kugelkappe aus α ausgearbeitet, und auch da nicht einmal vollständig. Sie soll jedem dienen, der Beobachtungen beibringen will.

Äußerlich habe ich durch Verzicht auf alle Zitate in Anmerkungen Raum zu schaffen gesucht. Die kursiv gedruckten Zahlen im Text beziehen sich auf die Nummern des Literaturverzeichnisses. Die in gewöhnlicher Schrift ev. daneben stehenden Zahlen sind Seitenzahlen der betreffenden Arbeiten.

Ich darf nicht schließen, ohne dem Verlage von Herzen zu danken, weil er in der bösesten Zeit des Arbeiter- und Papiermangels den Druck begonnen und durchgeführt hat. —

Die Arbeit von Dember und Uibe (20a) kam bei der Korrektur der letzten Bogen in meine Hand; deswegen sei hier einiges daraus mitgeteilt. Sie ist ganz Reimannscher Typus. Der Zenit wird schätzungsweise festgelegt. Die Beobachter arbeiten die (auf Teneriffa angestellten) Beobachtungen ineinander, was natürlich nicht statthaft ist. Ihre α -Werte sind folgende. Blauer Himmel: Dember 31,3°, Uibe 32,9; Wolkenhimmel: D. 27,6, U. 29,8; Dämmerungshimmel: D. 30,9, U. 34,7; Sternenhimmel ohne Mondschein: D. 40,5, U. 39,8; Sternenhimmel mit Mondschein: D. 36,6, U. 36,7. Weil die Beobachtungen über dem Meereshorizont meist in einer Höhe von 300 m, einige sogar bei 2300 m angestellt wurden, sind, was die Verfasser nicht beachten, die α -Werte etwas zu klein. Da ich im Texte den Fall der Depression nicht berücksichtigt habe, sei hier kurz auf die Berechnung verwiesen. Bezeichnet λ die Depression, so ergibt eine ähnliche Überlegung, wie sie im Texte S. 12 dargestellt ist, die Gleichung

$$\frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2}\xi)}{\cos(\xi - \lambda)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda},$$

aus der man ξ erhält; die weitere Rechnung wie im Texte. Daß im Laufe der Beobachtungen vor allem am blauen Himmel ein

durchgängiges Steigen der α -Werte bei beiden Beobachtern stattfindet, läßt sich nur durch die Annahme einer Fehlerquelle deuten, wahrscheinlich durch langsames Eindringen von Schätzungen in die Bestimmungen der Sehgröße; in diesem Falle wären die Werte teilweise zu groß. Die Kugelkappe ist nach dem zweiten Drobischen Kriterium untersucht. Die stellenweise ziemlich großen Differenzen (bis zu $7,2^\circ$) zeigen keinen deutlichen Gang. Im übrigen können die Folgerungen, die D. und U. ziehen, und sonstige Bemerkungen nach unseren Ausführungen im Texte leicht beurteilt werden. Die folgenden Arbeiten von Dember und Uibe (20b und 20c) sowie die Arbeit von Witte (99a) konnten nicht mehr benutzt werden.

Ich bemerke noch, daß meine Schrift schon Ende 1916 druckfertig vorlag.

Röttgen bei Bonn, Januar 1918

Aloys Müller

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Die Aufgabe	1
Erster Teil. Die Bestimmung der Referenzflächen	
I. Die Bestimmung der Referenzflächen des Himmels	5
A. Mathematische Theorie der Bestimmung der Referenzflächen des Himmels	5
1. Die Charakteristik der Kappe	5
a) Kugelkappe — b) Paraboloidkappe — c) Die übrigen Kappen	
2. Die Korrektur bei verdecktem Horizont	12
a) Kugelkappe — b) Paraboloidkappe	
3. Die Kriterien der Kappen	13
a) Kugelkappe — b) Paraboloidkappe	
B. Darstellung und Diskussion der Beobachtungen	16
1. Psychologisches zur Methode	16
2. Reimann	18
a) Der Winkel α — b) Individuelle Differenzen — c) Art der Referenzfläche — d) Die genauere Vorstellung der Kugelkappe — e) Kritische Bemerkungen	
3. von Sicherer	30
4. Figgé	31
5. Aloys Müller	33
6. Ernst	38
7. Nijland	38
8. Bourdon	41
9. v. Sterneck	42
II. Die Bestimmung der Referenzflächen der Gestirne	46
A. Mathematische Theorie der Bestimmung der Referenzflächen der Gestirne.	46
1. Die Radienvektoren der Referenzflächen.	46
2. Die Äquivalenz der Referenzflächen	49
3. Rotationsflächen zweiter Ordnung	50

	Seite
a) Kugelkappe — b) Paraboloidkappe — c) Ellipsoidkappe — d) Hyperboloidkappe	
4. Andere Rotationsflächen	54
B. Darstellung und Diskussion der Beobachtungen	55
1. Psychologisches zur Methode	55
2. Die Referenzfläche der Sonne	56
a) Reimann und Filehne	56
b) v. Sterneck	58
α) Beobachtungen — β) Kritische Bemerkungen	
c) Aloys Müller	67
3. Die Referenzfläche des Mondes	71
a) Pozděna	71
b) v. Sterneck	72
α) Die Referenzfläche des Mondes bei Tage —	
β) Die Referenzfläche des Mondes in der Dämmerung — γ) Die Referenzfläche des Mondes bei Nacht	
4. Die Referenzfläche der Sterne	77
a) Stroobant	78
b) Deichmüller	80
c) Brenke	82
d) Bourdon	84
e) Ernst	85
f) v. Sterneck	93
III. Die Ergebnisse der Bestimmungen der Referenzflächen	95
1. Die Referenzfläche des blauen Himmels	95
2. Die Referenzflächen des Wolkenhimmels und der Wolken	96
3. Die Referenzfläche der Sonne	96
4. Die Referenzfläche des Mondes	97
5. Die Referenzflächen des Sternenhimmels und der Sterne	97
IV. Die mathematische Behandlung der empirischen Kurven	98
1. Mit Hilfe transzendenter Kurven	99
2. Mit Hilfe algebraischer Kurven von höherer als zweiter Ordnung	105
3. Die Reduktion der Kurvengleichungen	106
4. Beispiele	107
5. Die Gleichung der Referenzflächen	108
6. Die Benutzung von Potenzreihen	108
 Zweiter Teil. Die Bedingungen der Referenzflächen 	
I. Allgemeine Bemerkungen	110
II. Die Gruppe der physikalischen Bedingungen	111
1. Die Refraktion	111
2. Die atmosphärische Grenzfläche	112

	Seite
III. Die Gruppe der physiologischen Bedingungen	114
1. Die Vergrößerung des Netzhautbildes als Folge der Vergrößerung der Pupille	114
2. Die Abnahme der Sehschärfe beim indirekten Sehen	114
3. Die Einwirkung der Schwerkraft auf das Auge	115
4. Die Blickrichtung	116
a) Theorie der Bestimmung der Referenzfläche der Blickrichtung	116
b) Diskussion der Beobachtungen	117
α) Stroobant — β) Reimann — γ) Bourdon — δ) Guttman — ε) Aloys Müller — ζ) Qualitative Beobachtungen	
c) Ergebnis	124
IV. Die Gruppe der psychologischen Bedingungen	124
1. Die Beziehung zwischen scheinbarer und wirklicher Entfernung	124
2. Die Beziehung zwischen Sehgröße und scheinbarer Entfernung	129
a) Projektion — b) Zwischenmedien — c) Lichtschwächung — d) Gewöhnung	
3. Der Kontrast	141
4. Die Farbe	142
5. Die Zusammenfassung mit irdischen Objekten	144
V. Ergebnis und Ausblick	146
Literatur	155

Die Aufgabe

Die meisten Menschen sehen das Himmelsgewölbe als eine Fläche, die im Zenit näher ist als am Horizont. Den meisten Menschen erscheinen ferner Sonne, Mond und Sternbilder in der Nähe des Horizontes durchschnittlich größer als bei kleinerem Zenitabstand. Diese Erscheinungen zu erforschen, ist unsere Aufgabe.

Wir müssen uns erstens klar werden, worauf sich diese Erforschung eigentlich bezieht. Wir beschäftigen uns mit dem Himmelsgewölbe, der Sonne, dem Mond und den Sternbildern als Sehdingen, d. h. wir studieren diese Dinge, wie wir sie sehen, nicht wie wir sie schätzen oder wie sie in Wirklichkeit sind. Da es uns dabei hauptsächlich auf die Größe ankommt, so wollen wir die gemeinten Unterschiede für diesen Begriff ausführlicher betrachten. Wir unterscheiden dreierlei Größen :

1. Die Sehgröße. Wir verstehen darunter die unmittelbar anschauliche Größe. Das Wort paßt auf jede Größe, die dem Gesichtssinn gegeben ist. Gebräuchlich ist es nur bei Gestaltgrößen. Bei Entfernungen pflegt man das Wort „scheinbar“ hinzuzusetzen. Sachlich ist aber durchaus kein Unterschied zwischen diesen beiden Fällen: die scheinbare Entfernung ist eine Sehgröße. Auch Winkel besitzen wenigstens dann eine Sehgröße, wenn sie als Winkel unmittelbar wahrgenommen werden, wenn also ihre Schenkel als Sehdinge im Sehraum gegeben sind. Das letztere ist durchschnittlich beim Gesichtswinkel nicht der Fall. Der Gesichtswinkel ist nichts Gesehenes, nichts, dessen wir uns unmittelbar bewußt werden, sondern das Produkt eines Verstandesprozesses. Trotzdem kann man auch auf ihn den Begriff der Sehgröße in analogem Sinne anwenden und von einem „Sehgesichtswinkel“ reden, den wir in dieselbe Beziehung zur Sehgröße setzen, wie sie der wirkliche Gesichtswinkel zur wirklichen Größe hat.

2. Die Urteilsgröße oder die geschätzte Größe. Sie ist das Resultat der Schätzung einer Wirklichkeitsgröße an der Hand von Erfahrungsmotiven. Das an erster Stelle wirksame und stets vorhandene Erfahrungsmotiv ist die Sehgröße. Die Schätzung kann unbewußt und bewußt erfolgen:

- a) Wenn ich meine Hand in 50 cm Entfernung vom Auge für gerade so groß „halte“ wie in 25 cm, so liegt unbewußte Schätzung vor. Ein Grenzfall der unbewußten Schätzung ist die rein assoziative Verknüpfung einer Sehgröße mit einem Maßausdruck.
- b) Wenn ich den Durchmesser einer Bogenlampe über der Straße auf 30 cm schätze, so ist die Schätzung bewußt.

3. Die Wirklichkeitsgröße. Sie ist die von uns unabhängige Größe, die wir mit Längen- und Winkelmaßstäben messen.

Den Ausdruck „scheinbare Größe“ wollen wir ganz vermeiden, weil er sowohl auf die Sehgröße wie auf den wirklichen Gesichtswinkel paßt. Einem ähnlichen Bedenken ist der Ausdruck „scheinbare Entfernung“ nicht ausgesetzt. Der Kürze halber brauchen wir das Wort „schätzen“ gelegentlich, wo es sich deutlich nicht um geschätzte Größen handelt.

Unsere Untersuchung bezieht sich nun ausschließlich auf Sehgrößen. Die Sehgröße ist im Gegensatz zu allen anderen Größen, die logischen Charakter haben, ein psychisches Gebilde. Weil jede Größe nur durch Größen derselben Art gemessen werden kann, so handelt es sich in all den Fällen, wo wir auf eine Sehgröße ein bei Wirklichkeitsgrößen gebräuchliches Maß anwenden, tatsächlich nur um einen Vergleich von Sehgrößen untereinander. Sehgrößen können nur an Sehgrößen gemessen werden; eine Sehgröße in absolutem Sinne mit 20 cm anzugeben, ist genau so sinnlos, wie der Vorstellung eines Tisches eine Höhe von 80 cm beizulegen. Daß Sehgrößen überhaupt erstens eine unmittlere und zweitens eine innerhalb gewisser, von der Wirklichkeit gezogener Grenzen unbeschränkte Vergleichung untereinander gestatten, während bei den anderen psychischen Größen nur Intervalle als Maßeinheiten brauchbar sind und dieses Messen nur in Grenzfällen möglich ist, kommt daher, daß die Sehgrößen erstens eine extensive Mannigfaltigkeit besitzen und zweitens relativ konstant sind. Alle Angaben von Sehgrößen in Längen- und Winkelmaßen sind deshalb in dem Sinne relativ,

daß sie mit einem beliebigen positiven, reellen Proportionalitätsfaktor multipliziert werden können; nur muß natürlich dieser Faktor für eine Gruppe untereinander verglichener Sehgrößen derselbe sein.

Aus diesem Charakter der Sehgröße folgt, daß man besser nicht von einer „Täuschung“ am Himmelsgewölbe und an den Gestirnen spricht. Eine Täuschung im Wortsinne würde voraussetzen, daß man die Sehgröße unmittelbar mit der Wirklichkeitsgröße vergleichen könnte. Ein solcher Vergleich ist aber nur möglich mit Hilfe der Urteilsgröße. Die Sehgröße ist eine Tatsache, sie ist weder wahr noch falsch. Eine Täuschung kann bei der Urteilsgröße, nicht bei der Sehgröße vorliegen. Es ist ohne Sinn, zu sagen: Wir sehen die Dinge, wie sie sind, oder: Wir sehen sie, wie sie nicht sind. Denn darin liegt ja jener unmögliche unmittelbare Vergleich zweier verschiedener Größenarten. Die oft gehörte Behauptung vom „Sehen der Sonne und des Mondes in ihrer wahren Größe“ ist lediglich ein Dokument psychologischer Konfusion. Wir sehen die Dinge stets so groß, wie wir sie sehen.

Wir müssen zweitens unsere Aufgabe genauer formulieren. Wir nennen das Stück der Fläche des Himmelsgewölbes, das durch die Horizontalebene des Beobachters abgeschnitten wird, oder das entsprechende Stück einer ihr ähnlichen Fläche die Referenzfläche des Himmels (des blauen Himmels, des Wolkenhimmels usw.). Bezeichnen wir mit γ den wirklichen Gesichtswinkel, mit s die Sehgröße der Gestirne (worunter wir zusammenfassend die Sehgröße des Durchmessers von Sonne und Mond und die Sehgröße von Sterndistanzen verstehen wollen), so setzen wir

$$\rho = \frac{s}{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Die durch die Radienvektoren ρ und die (zu den s gehörigen) Höhen als Polarkoordinaten bestimmten Flächen nennen wir die Referenzflächen der Gestirne. Der Anfangspunkt liegt im Auge des Beobachters, und die Höhen beziehen sich auf seine Horizontalebene. Die Referenzfläche ist stets eine beliebige Fläche aus einer Schar ähnlicher Flächen, die den gleichen Anfangspunkt und die gleiche Rotationsachse besitzen. Das Wort „ähnlich“ ist

mathematisch zu verstehen, so daß also proportionale Vektoren konstante Winkel einschließen.

Unsere Aufgabe ist, die Referenzflächen zu bestimmen und die Bedingungen, unter denen sie zustande kommen, zu suchen.

In den meisten Arbeiten zu unserem Problem wird angenommen, daß die Referenzflächen wenigstens des blauen Himmels und des Sternenhimmels im Vergleich mit den Referenzflächen der Gestirne entsprechende Stücke ähnlicher Flächen seien, daß also beispielsweise die Referenzfläche des blauen Himmels durch Beobachtungen an der Sehgröße der Sonne bestimmt werden könne. Das ist eine unbewiesene Voraussetzung, die nur dann richtig wäre, wenn entweder die Referenzflächen der Gestirne ausschließlich der Projektion der Wahrnehmungsbilder der Gestirne auf das Himmelsgewölbe zu verdanken wären oder wenn die auf diese Weise zusammengeworfenen Referenzflächen unter identischen Bedingungen ständen. Die erstere Annahme ist aber eine Hypothese über die Bedingungen der Referenzflächen der Gestirne, die erst auf Grund der Erfahrung untersucht werden muß; die zweite läßt sich von vornherein wegen der Verschiedenheit der in Frage stehenden Sehdinge als unmöglich bezeichnen. Andererseits ist es wohl zweifellos, daß gewisse Bedingungen an der Bildung mehrerer, vielleicht sämtlicher Referenzflächen beteiligt sind. Das mag zur vorläufigen Begründung dafür dienen, weshalb wir im folgenden die Bestimmungen der Referenzflächen des Himmels und derjenigen der Gestirne voneinander trennen, die Bedingungen aber gemeinsam behandeln.

Wie wir aus dem Folgenden sehen werden, ist der Begriff der Referenzfläche, allerdings mit teils falschen, teils entbehrlichen Zutaten, schon von verschiedenen Forschern, wie Brenke (14), Ernst (28), Pozděna (74), v. Sterneck (91), gebraucht worden. Am klarsten findet er sich bei Brenke. Das Wort „Referenzfläche“ stammt von v. Sterneck, und wir werden auch im folgenden nach seinem Vorgang das Wort im Singular mit Rf1, im Plural mit Rfn abkürzen. Bis heute ist der Begriff noch von keinem zu einer vollständigen und systematischen Beschreibung der Tatsachen benutzt und ausgebildet und in seinem Charakter ganz erkannt worden.

Erster Teil

Die Bestimmung der Referenzflächen

I. Die Bestimmung der Referenzflächen des Himmels

A. Mathematische Theorie der Bestimmung der Referenzflächen des Himmels

Zum Zweck der einfacheren mathematischen Behandlung machen wir die Voraussetzung, daß die Rfl des Himmels stets die Kappe einer Rotationsfläche ist, auf deren Drehungsachse der Beobachter und sein Zenit liegen.

Verbindet man die Mitte des Bogens Zenit–Horizont mit dem Beobachter, so bildet diese Verbindungslinie mit der Horizontebene einen Winkel, der kleiner als 45° ist. Die Beobachtung dieses Winkels ist der erste Schritt zur genaueren Bestimmung der Kappe. Wir wollen deshalb diesen ausgezeichneten Winkel ein für allemal α nennen und unsere Behandlung mit ihm beginnen.

Nach den Ausführungen über den Sinn unserer Aufgabe sind die absoluten Maße der Flächen gleichgültig.

1. Die Charakteristik der Kappe

Wir nennen das Verhältnis der Strecken

Zenit–Beobachter

Radius der horizontalen Ausdehnung

die Charakteristik der Kappe und bezeichnen es mit q , dem wir im Falle einer Fläche zweiter Ordnung ein k , p , e oder h anhängen, je nachdem es sich um eine Kugel, ein Paraboloid, ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid handelt.

Unsere erste Aufgabe ist, q aus α zu finden. Ihre Lösung hängt von der Art der vorausgesetzten Fläche ab.

a) Kugelkappe

Fig. 1 stellt einen Meridian einer Kugelkappe dar. Der Mittelpunkt der Kugel liegt in O . E ist die Mitte des Bogens AC . Dann ist $\sphericalangle EDA$ unser Winkel α . Den zugehörigen Zentriwinkel bezeichnen wir mit z ; wir zählen die Zentriwinkel, wo es nicht anders erwähnt ist, stets vom Zenit ab. Den Radius der Kugel setzen wir gleich 1.

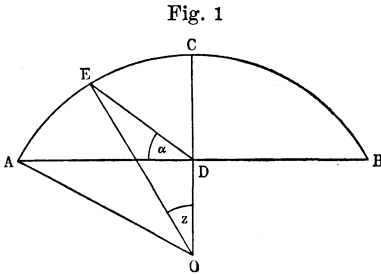


Fig. 1

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{DO}{EO} = \frac{\sin [90 - (\alpha + z)]}{\sin (90 + \alpha)}$$

ferner ist

$$\frac{DO}{EO} = \frac{DO}{AO} = \cos 2z.$$

Daraus

$$\cos 2z = \frac{\cos(\alpha + z)}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$\cos 2z = \cos z - \operatorname{tg} \alpha \sin z$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos z - \cos 2z}{\sin z}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{2z + z}{2} \sin \frac{2z - z}{2}}{\sin z}$$

$$= \frac{\sin \frac{3}{2} z}{\cos \frac{1}{2} z} \dots \dots \dots (2)$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos 3z}{1 + \cos z}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - 4 \cos^3 z + 3 \cos z}{1 + \cos z}$$

$$\cos^3 z - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \cos z - \frac{1}{4} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \quad (3)$$

Die allgemeine Form dieser Gleichung lautet

$$x^3 - 3mx - 2n = 0.$$

Weil im allgemeinen $\alpha \leq 45^\circ$ ist, ist die Diskriminante der Gleichung negativ. Das Argument t der in der Cardanischen Formel auftretenden komplexen Zahlen ergibt sich aus

$$\cos t = \frac{n}{\sqrt{m^3}}$$

Die hier allein in Betracht kommende erste Wurzel wird danach

$$x = 2\sqrt{m} \cdot \cos \frac{t}{3}$$

Setzt man die Werte aus Gleichung (3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\frac{1}{8}(1 - tg^2 \alpha)}{\sqrt{\frac{1}{4^3} \left(1 - \frac{1}{3} tg^2 \alpha\right)^3}} \\ \cos z &= 2\sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3} tg^2 \alpha\right)} \cdot \cos \frac{t}{3} \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $tg^2 30^\circ = \frac{1}{3}$ ist, so läßt sich diesen Gleichungen die logarithmierbare Form geben

$$\cos t = \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha}{8 \left[\sqrt{\frac{1}{3} \cos(30 + \alpha) \cos(30 - \alpha)} \right]^3} \dots (4)$$

$$\cos z = \frac{2}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1}{3} \cos(30 + \alpha) \cos(30 - \alpha)} \cdot \cos \frac{t}{3} \dots (5)$$

Bezeichnet man $\triangle D A O$ mit δ , so ist

$$q_k = \frac{CD}{AD} = \frac{CO - DO}{AD} = \frac{1 - \sin \delta}{\cos \delta}$$

Weil $\delta = 90 - 2z$ ist, ist auch

$$q_k = \frac{2 \sin^2 z}{\sin 2z}$$

oder

$$q_k = tg z \dots (6)$$

Man kann diese Beziehung auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und ODF herleiten ¹⁾.

Um also q_k zu finden, berechnet man zuerst z aus (4) und (5) und erhält dann q_k aus (6).

¹⁾ Der Buchstabe F , der in Fig. 1 vergessen wurde, bezeichnet den Schnittpunkt von AB und OE .

Unsere Resultate gelten übrigens auch für den Fall, daß der Horizont unter dem Kugelmittelpunkt liegt, daß also $\alpha > 45^\circ$ ist. Da die Bedingung dafür, daß die Diskriminante von (3) gleich Null ist, lautet

$$tg^4 \alpha + 18 tg^2 \alpha - 27 = 0,$$

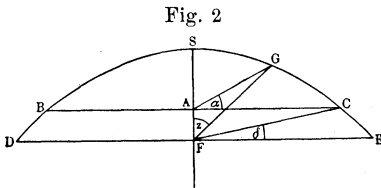
so ist die vorstehende Lösung von (3) nur für $\alpha \leq 49^\circ 43' 9''$ brauchbar.

Wie die partielle Differentiation der allgemeinen Form von (3) nach x zeigt, liefert diese Bedingung damit gleichzeitig den Maximalwert von α .

b) Paraboloidkappe

Daraus, daß alle Paraboloiden (analog wie die Kugeln) einander ähnlich sind, folgt, daß die entsprechende Rechnung sich auch bei der Paraboloidkappe machen läßt. Sie sei der Vollständigkeit wegen hierher gesetzt; nur die Einzelheiten der Rechnung mögen dem Leser überlassen bleiben.

In Fig. 2 zeigt BSC einen Meridian der Paraboloidkappe. F ist der Brennpunkt der Parabel, S der Scheitel. G ist die Mitte des Bogens SC . Den Halbparameter setzen wir gleich 1.



Wendet man den Sinusatz auf das Dreieck $FA G$ an und drückt mit Hilfe der Winkel δ und z die Seiten AF und FG durch die Polar-

gleichung $\left(r = \frac{1}{1 + \sin \delta}, \text{ für den Anfangspunkt in } F \right)$ aus, so findet man

$$\sin \delta = \frac{\cos(\alpha + z)}{\cos \alpha + \sin \alpha \sin z} \dots \dots \dots (7)$$

Ebenso leicht ergibt sich

$$g_p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}},$$

und daraus mit Hilfe von (7)

$$g_p = \frac{1}{2} \sqrt{tg^2 \frac{z}{2} + 2 tg \alpha tg \frac{z}{2}} \dots \dots \dots (8)$$

Sind x_1 und x_2 die Abszissen von G und C , so erhält man

$$x_1 = tg \frac{z}{2},$$

$$x_2 = \sqrt{tg^2 \frac{z}{2} + 2 tg \alpha tg \frac{z}{2}}.$$

Setzt man den Bogen SC gleich dem doppelten Bogen SG , so hat man

$$\int_0^{x_2} \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx = 2 \int_0^{x_1} \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx \dots \dots (9)$$

und durch Ausführung der Integration

$$\frac{x_2}{2} \sqrt{x_2^2 + 1} + \frac{1}{2} \log nat (x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1})$$

$$= x_1 \sqrt{x_1^2 + 1} + \log nat (x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}).$$

Beachtet man, daß $g_p = \frac{1}{2} x_2$ ist und setzt man zur Abkürzung

$$\sqrt{1 + tg \alpha \sin z} = A_1,$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{z}{2} + tg \alpha \sin z} = A_2,$$

$$\frac{\sin \left(45 + \frac{z}{4} \right)}{2 \cos^3 \left(45 + \frac{z}{4} \right)} = A_3,$$

so schreibt sich diese Gleichung nach einigen Vereinfachungen auf folgende Weise:

$$\frac{A_2}{2 \cos \frac{z}{2}} = \frac{tg \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{z}{2} \log nat [A_3 (A_1 - A_2)]}{A_1} \dots (10)$$

Diese transzendente Gleichung kann man mit Hilfe von Näherungsmethoden lösen, wobei man beachten muß, daß

$$90 - \alpha > z > 0$$

ist. Sie ist so geordnet, daß jede Seite unmittelbar den Wert g_p ergibt.

Die Ausdrücke für q_p , x_1 und x_2 , demnach auch Gleichung (9), gelten auch für den Fall, daß der Schnitt, der die Kappe abtrennt, nicht zwischen Scheitel und Brennpunkt liegt.

c) Die übrigen Kappen

Abgesehen von den beiden Fällen der Kugel und des Paraboloids bestimmt der Winkel α allein die Charakteristik der Kappe nicht; sie ist, falls die Rotationsfläche eine Fläche zweiter Ordnung ist, noch von der Exzentrizität abhängig. Nur in Spezialfällen genügt beim Ellipsoid und Hyperboloid¹⁾ der Winkel α . Von diesen Spezialfällen besprechen wir hier ausführlich das Halbellipsoid, weil es in der Literatur mehrmals vorkommt.

In Fig. 3 ist AZB ein Meridian des Halbellipsoides (die kleine Achse ist die Rotationsachse). Um O ist mit OA der Kreis beschrieben. C ist die Mitte des Bogens ZB . Die Gerade DCE steht auf AB senkrecht. Winkel $DOZ = \varphi$ ist die Amplitude. Wir bezeichnen mit ε die Exzentrizität, mit a und b die große und die kleine Halbachse und setzen $b = 1$.

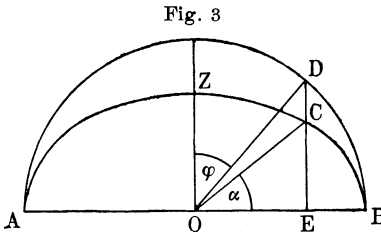


Fig. 3

Es ist

$$OE = x_1 = a \sin \varphi,$$

$$CE = y_1 = a \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Aus der Ellipsengleichung folgt

$$a^2 = \frac{x^2}{1 - y^2}.$$

Setzt man hier die Werte von x_1 und y_1 ein, so erhält man

$$a = \cot \varphi \cot \alpha \dots \dots \dots (11)$$

Nun hat man für den Ellipsenbogen mit der Amplitude φ_0

$$E(\varepsilon, \varphi_0) = a \int_0^{\varphi_0} d\varphi - \frac{1}{2} \varepsilon^2 a \int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 a \int_0^{\varphi_0} \sin^4 \varphi d\varphi - \dots$$

¹⁾ Es kommt natürlich nur die eine Fläche eines zweischaligen Hyperboloids in Betracht.

Setzt man

$$P_0 = \varphi_0, P_n = \frac{(n-1)P_{n-2} - \sin^{n-1} \varphi_0 \cos \varphi_0}{n},$$

so ergibt die Integration

$$E(\varepsilon, \varphi_0) = a \left(P_0 - \frac{P_2}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{P_4}{4} \varepsilon^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{P_6}{6} \varepsilon^6 - \dots \right) \quad (12)$$

und für den Quadranten

$$E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) = a \cdot \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^3\right)^2 - \dots \right] \quad (13)$$

Ferner ist

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{\cot^2 \varphi \cot^2 \alpha - 1}{\cot^2 \varphi \cot^2 \alpha} = \frac{\cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha}.$$

Setzt man diesen Wert und aus (11) den Wert für a in (12) und (13) ein und setzt dann

$$2 E(\varepsilon, \varphi_0) = E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right), \dots \dots \dots (14)$$

so hat man eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten φ , die man mit Hilfe von Näherungsmethoden lösen kann. Man muß dabei beachten, daß $30^\circ < \varphi < 45^\circ$ ist; denn für den Fall $a = b$ ist nach (11) $\varphi = 45^\circ$, für den Fall $b = 0$, also $\alpha = 0$, ergibt sich aus dem Werte für x_1 , weil dann $x_1 = \frac{a}{2}$ ist, $\varphi = 30^\circ$.

Aus (11) erhält man dann a . Zur Vereinfachung der etwas umständlichen Rechnung kann man für die rechte Seite von (14) setzen

$$\frac{9}{32} \pi \cot \varphi \cot \alpha,$$

ein Ausdruck, der den Bogen auf drei Stellen hinter dem Komma genau gibt.

In dem Spezialfall beim Hyperboloid, wo die Grundfläche der Kappe in der Ebene des Halbparameters liegt, läßt sich die Rechnung ähnlich wie beim Ellipsoid führen; wir verzichten hier darauf.

Im allgemeinen kann man also sagen, daß bei den hier in Betracht kommenden Rotationsflächen zweiter Ordnung zu demselben Winkel α unendlich viele Kappen gehören, die einander nicht ähnlich sind.

Im allgemeinen gilt das letztere auch von allen sonstigen Kappen, die von der Rotation symmetrischer Kurven um eine Symmetrieachse herrühren.

2. Die Korrektion bei verdecktem Horizont

In dem Falle, daß Gegenstände am Horizont ein Stück des Bogens Horizont–Zenit wegnehmen, ist die geschätzte Mitte des sichtbaren Bogens nicht die wirkliche Mitte, Winkel α also zu groß. Wir wollen den richtigen Winkel α aus der Höhe der Gegenstände am Horizont bestimmen.

a) Kugelkappe

In Fig. 4 wird das Stück EA des Bogens EB durch Gegenstände am Horizont verdeckt. Seine Höhe möge ω , der zugehörige Zentriwinkel ξ heißen. M ist die Mitte des Bogens AB .

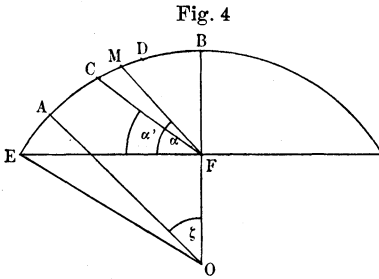


Fig. 4

Winkel MFE ist also das gemessene α , zu dem als Zentriwinkel offenbar $\frac{1}{2} \xi$ gehört. Verlegen wir nun das Bogenstück EA um M als Mitte, so daß $CD = EA$ und $MC = MD$ ist, dann ist C die Mitte des Bogens EB , und Winkel $CFE = \alpha'$ ist

der korrigierte Winkel α . Für die beiden Paare zugehöriger Winkel (ω, ξ) und $(\alpha, \frac{1}{2} \xi)$ gelten nach (1) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega + \xi) &= \cos 2z \cos \omega \\ \cos\left(\alpha + \frac{1}{2} \xi\right) &= \cos 2z \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

Die Division dieser Gleichungen ergibt

$$\frac{\cos(\omega + \xi)}{\cos\left(\alpha + \frac{1}{2} \xi\right)} = \frac{\cos \omega}{\cos \alpha}$$

Am bequemsten löst man diese Gleichung nach ξ durch Probieren. Eine der beiden Gleichungen (15) liefert dann z . Endlich haben wir nach (2)

$$tg \alpha' = \frac{\sin \frac{3}{2} z}{\cos \frac{1}{2} z}$$

b) Paraboloidkappe

Nach Gleichung (8), die für jedes beliebige ω und das zugehörige ξ gilt, hat man

$$q_p = \frac{1}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\xi}{2} + 2 tg \omega tg \frac{\xi}{2}}.$$

Daraus

$$tg \frac{\xi}{2} = + \sqrt{4 q_p^2 + tg^2 \omega} - tg \omega.$$

Mit Hilfe dieses ξ , das ungenau ist, weil q_p aus dem ungenauen α berechnet ist, findet man nach (7) δ aus

$$\sin \delta = \frac{\cos(\omega + \xi)}{\cos \omega + \sin \omega \sin \xi}.$$

Aus (8) ergibt sich dann

$$tg \alpha' = \frac{4 q_p^2 - tg^2 \frac{\chi}{4}}{2 tg \frac{\chi}{4}},$$

wo $\chi = R + 2z - \delta - \xi$ ist. Mit diesem α' berechnet man nun genauere Werte von z und q_p aus (10) und wiederholt damit die vorstehende Rechnung. So verfährt man so lange, bis α' keiner praktisch in Betracht kommenden Verbesserung mehr fähig ist.

3. Die Kriterien der Kappen

Unsere zweite Aufgabe ist, die Art der Fläche zu bestimmen, zu der die Kappe gehört. Da der Winkel α darüber nicht entscheiden kann, müssen wir nach besonderen Kriterien für die einzelnen Kappen suchen. Wir machen dabei die Einschränkung, daß es sich nur um Flächen zweiter Ordnung handelt. Selbst hier lassen sich nur in den zwei im folgenden besprochenen Fällen verhältnismäßig einfache Kriterien finden; bei allen anderen Flächen ist das unmöglich. Wie man vielleicht auf indirektem Wege etwas weiter kommen kann, werden wir später sehen.

a) Kugelkappe

Drobisch hat zwei Kriterien für die Kugelkappe angegeben (24, 111).

P_1 und P_2 seien zwei beliebige, in demselben Meridian liegende Punkte der Kappe, ω_1 und ω_2 ihre Winkelhöhen über der Horizontebene, ξ_1 und ξ_2 die zugehörigen Zentriwinkel. M mit ω_3 und ξ_3 sei die Mitte des Bogens $P_1 P_2$.

Nach Gleichung (1) ist

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega_1 + \xi_1) &= \cos 2z \cos \omega_1 \\ \cos(\omega_2 + \xi_2) &= \cos 2z \cos \omega_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

und, da $z_3 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$ ist, auch

$$\cos \left[\omega_3 + \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \right] = \cos 2z \cos \omega_3.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\operatorname{tg} \omega_3 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) - \cos 2z}{\sin \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)}$$

oder

$$\operatorname{tg} \omega_3 = \frac{2 \sin \left[z + \frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2) \right] \sin \left[z - \frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2) \right]}{\sin \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)} \quad (17)$$

Fällt P_1 in den Zenit, so ist $\omega_1 = 90^\circ$ und $\xi_1 = 0^\circ$ und aus (17) wird

$$\operatorname{tg} \omega_3 = \frac{2 \sin \left(z + \frac{1}{4} \xi_2 \right) \sin \left(z - \frac{1}{4} \xi_2 \right)}{\sin \frac{1}{2} \xi_2} \dots \dots (18)$$

Fällt P_2 in die Horizontebene, so ist $\omega_2 = 0^\circ$ und $\xi_2 = 2z$, und (17) verwandelt sich in

$$\operatorname{tg} \omega_3 = \frac{2 \sin \frac{1}{4}(2z + \xi_1) \sin \frac{1}{4}(2z - \xi_1)}{\sin \frac{1}{2}(2z + \xi_1)} \dots \dots (19)$$

Kennt man also ein ω_1 und ein ω_2 aus Beobachtungen, so kann man aus (16) ξ_1 und ξ_2 und aus (17), oder in besonderen Fällen aus (18) oder (19), ω_3 berechnen. Gleichzeitig kann man

aber ω_3 auch beobachten. Da die vorstehenden Formeln nur für die Kugelkappe gelten, so ist die Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem berechneten ω_3 ein Kriterium für die Kugelkappe.

Das zweite Kriterium verlangt die schätzungsweise Einteilung des Bogens Zenit-Horizont in n gleiche Teile, so daß also zu einem solcher Teile der Zentriwinkel $\frac{2z}{n}$, zu k solcher Teile der Zentriwinkel $k \cdot \frac{2z}{n}$ gehört. Analog der Ausgangsgleichung von (17) erhält man, wenn ω_k der Höhenwinkel des Punktes ist, der, vom Zenit ab gerechnet, k Teile auf dem Meridian abschneidet,

$$\operatorname{tg} \omega_k = \frac{\cos \frac{2k}{n} z - \cos 2z}{\sin \frac{2k}{n} z}$$

oder

$$\operatorname{tg} \omega_k = \frac{2 \sin \frac{n+k}{n} z \sin \frac{n-k}{n} z}{\sin \frac{2k}{n} z} \dots \dots (20)$$

Da ω_k auch beobachtbar ist, ergibt die Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem berechneten ω_k wieder ein Kriterium für die Kugelkappe.

Das zweite Kriterium wird schwerlich praktischen Wert haben, weil die von ihm verlangte schätzungsweise Einteilung zu schwierig ist.

b) Paraboloidkappe

Es seien ω_1 und ξ_1 die zu einem beliebigen Punkte des Meridians gehörigen Winkel, ω_2 und ξ_2 die dem Punkte zugehörigen Winkel, der den Bogen zwischen dem Scheitel und dem beliebigen Punkte (ω_1, ξ_1) halbiert. Man hat dann nach Gleichung (7)

$$\frac{\cos(\omega_1 + \xi_1)}{\cos \omega_1 (1 + \cos \xi_1)} = \frac{\cos(\alpha + z)}{\cos \alpha (1 + \cos z)}$$

und

$$\frac{\cos(\omega_2 + \xi_2)}{\cos \omega_2 (1 + \cos \xi_2)} = \frac{\cos(\alpha + z)}{\cos \alpha (1 + \cos z)}$$

Nach einigen Umrechnungen ergibt sich daraus

$$tg \frac{\xi_1}{2} = + \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos^2 \frac{z}{2} - \cos^2 \omega_1 \cos(\alpha + z)}{\cos^2 \omega_1 \cos \alpha \cos^2 \frac{z}{2}}} - tg \omega_1 \quad (21)$$

und

$$tg \frac{\xi_2}{2} = + \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos^2 \frac{z}{2} - \cos^2 \omega_2 \cos(\alpha + z)}{\cos^2 \omega_2 \cos \alpha \cos^2 \frac{z}{2}}} - tg \omega_2 \quad (22)$$

Die Abszissen x_1 und x_2 der Punkte (ω_1, z_1) und (ω_2, z_2) sind

$$x_1 = tg \frac{\xi_1}{2},$$

$$x_2 = tg \frac{\xi_2}{2}.$$

Setzt man dafür die Werte aus (21) und (22) ein und stellt die der Gleichung (9) entsprechende Gleichung auf, so erhält man eine Gleichung, in der man ω_2 als einzige Unbekannte ansehen kann und die nur für das Paraboloid gültig ist. Das hiernach berechnete ω_2 kann man mit dem beobachteten vergleichen. Entsprechend wird der Vergleich für ein ω_3 , das zu der Mitte des Bogens zwischen einem beliebigen Punkte und dem Horizont gehört.

B. Darstellung und Diskussion der Beobachtungen

1. Psychologisches zur Methode

Die Beobachtungen zu den Rfn des Himmels gehen nach der α -Methode vor sich, worunter wir nicht nur die Bestimmung des Winkels α , sondern auch die darauf beruhende Anwendung der Kriterien verstehen. Einen einzigen Fall einer zweiten Methode werden wir bei der Darstellung der Beobachtungen besprechen. Noch andere Ausnahmen sind nur scheinbar und werden später (bei der Zusammenfassung der Ergebnisse) verständlich. Der Beobachter hat die Aufgabe, die Sehgröße eines Bogens — entweder des Bogens Zenit—Horizont oder eines Teiles davon — in zwei gleiche Sehgrößen zu zerlegen. Über mögliche Fehler sprechen wir

bei Gelegenheit im folgenden. Der Winkel, den die Linie Teilpunkt—Beobachter mit der Horizontalebene bildet, wird gemessen.

Es ist nun nicht ganz leicht, aber notwendig, beim blauen Himmel (und beim Sternenhimmel) die Beobachtungsergebnisse und ihre mathematische Benutzung auf Grund der Ausführungen in der Einleitung psychologisch zu analysieren.

Der Sehform dieses Himmels unterliegt keine wirkliche Form, sondern nur qualitativ bestimmtes Material. Wenn ich also den Halbmeridian der gesehenen Kappe in gleiche Teile einteile, so habe ich damit gleiche Sehgrößen gesucht und es hat keinen Sinn mehr, zu fragen, ob denn nun der Bogen „wirklich“ in gleiche Teile zerlegt ist; denn der Bogen ist die Sehgröße und sonst nichts weiter mehr. Die einzigen wirklichen Größen, die mit der Sehform des genannten Himmels in Beziehung stehen, sind die Höhenwinkel, die man mit Hilfe von Höhenmeßinstrumenten bestimmen kann; zu ihnen gehört natürlich auch Winkel α .

Übersetzen wir diese psychologische Überlegung in die Sprache der Figuren und der Mathematik, so wird aus der Sehform des Himmels ein wirklich gezeichneter Bogen. Gleiche Sehgrößen werden gleiche Teile dieses Bogens. Zu diesen Stücken gehören natürlich gleiche Zentriwinkel, deren Gleichheit also die Gleichheit der Sehgesichtswinkel symbolisch darstellt. Ordnet man dem Sehgesichtswinkel, der zu dem ganzen Bogen Zenit—Horizont gehört, die Maßzahl des wirklichen Gesichtswinkels zu, also 90° , so kann man, falls man den Bogen in n Teile zerlegt hat, der Sehgröße jedes Teils den Sehgesichtswinkel mit der Maßzahl $\frac{90^\circ}{n}$ zuordnen. Man halte sich aber stets vor Augen, daß diese Maßzahlen nur zu Vergleichen der Sehgesichtswinkel und der Sehgrößen untereinander dienen; der Sehgesichtswinkel „ist“ nicht gleich $\frac{90^\circ}{n}$. Summiert man vom Horizont ab bis zu einem beliebigen Punkte die Maßzahlen aller Sehgesichtswinkel, so kann man nach Analogie der wirklichen Höhen von scheinbaren oder Sehhöhen sprechen. So besitzt z. B. der Punkt, wo die dritte und vierte gleiche Sehgröße, vom Horizont gezählt, zusammenstoßen, die Sehhöhe von $\frac{3 \cdot 90^\circ}{n}$, derjenige, wo sich die sechste und siebte berühren,

die Sehhöhe von $\frac{6 \cdot 90^0}{n}$. Psychologisch hat das den Sinn, daß sich die Sehgrößen, denen diese Sehhöhen zugeordnet sind, wie 1:2 verhalten.

Schätzt man zur Sehform gehörige wirkliche Höhen, so erhält man geschätzte Höhen (Urteilsgrößen). Da man weiß, daß der Zenit senkrecht über dem Beobachter liegt, da ferner die Sehgröße hier im allgemeinen das einzige Erfahrungsmotiv ist, auf Grund dessen die Schätzungen vorgenommen werden, so werden die Resultate der Schätzungen übereinstimmen mit den Maßzahlen, die man unter der obigen Annahme den Sehhöhen zuordnen kann.

Weil beim Wolkenhimmel den Sehgrößen wirkliche Größen zugehören, braucht zum psychologischen Verständnis seiner Beobachtung dem in der Einleitung Gesagten vorläufig nichts hinzugefügt zu werden.

2. Reimann

Nachdem Smith (1, 56) $\alpha = 24$ bis 25^0 angegeben (er sagt, bei 30^0 Höhe der Sonne erscheine ihm das obere Bogenstück kleiner, bei 18 oder 20^0 das untere) und Kämtz (2, 47) aus fünf Beobachtungen im Mittel $\alpha = 22,43^0$ gefunden hatte, hat E. Reimann (75; 76) die ersten umfangreichen Bestimmungen von α durch Abschätzen der Mitte des Bogens Zenit–Horizont gemacht.

a) Der Winkel α

Reimann hat seine Beobachtungen zum größten Teil in Hirschberg angestellt, und zwar die meisten auf dem Balkon seines Hauses in der Richtung nach W, weil hier der Horizont am freiesten war. Trotzdem bedeckten ihm die Berge am Horizont noch $1,06^0$. Genauerer über die Art der Abschätzung der Mitte des Bogens teilt er nicht mit. „Nachdem die Mitte des Himmelsbogens abgeschätzt war, wurde nach dem betreffenden, fest im Auge behaltenen Punkte mit einem Lineal visiert, das an einem auf dem Fußboden stehenden Stativ vertikal und horizontal drehbar war. Das Lineal trug einen in Grade geteilten hölzernen Kreis von 14 cm Durchmesser, aus dessen Zentrum ein Pendel herabhing, welches zum Ablesen der Höhe, sowie zum Vertikalstellen der Kreisebene diente. Nach jeder Einstellung wurde das

Instrument um 180° im Azimut gedreht und eine neue Schätzung vorgenommen. Mindestens zwei solcher einzelnen Schätzungen wurden zu einer Beobachtung vereinigt.“

Als Maß der Bewölkung nahm Reimann die Zahl, die angibt, wieviel Zehntel des Bogens von Wolken bedeckt waren, also die Bewölkungsdichte.

Über die verschiedenen Abhängigkeiten von α , wie Reimann sie findet, geben nun die folgenden Tabellen Aufschluß. Tabelle 1 zeigt den Einfluß der Bewölkung.

Tabelle 1

	Ganz heiter	Ganz bedeckt	Heiter	Wolkig
Bewölkung	0	10	0—5	6—10
Mittlere Bewölkung . . .	0	10	1,6	9,3
Korrigiertes Mittel von α	22,49 ⁰	20,55 ⁰	21,85 ⁰	21,10 ⁰

Tabelle 2 gibt nochmals den Einfluß der Bewölkung, aber innerhalb der Jahreszeiten.

Tabelle 2

Jahreszeit	Frühling		Sommer		Herbst		Winter	
Bewölkung	0—5	6—10	0—5	6—10	0—5	6—10	0—5	6—10
Mittlere Bewölkung	2,1	9,6	1,4	9,2	1,3	9,4	3,0	8,8
Korrigiertes Mittel von α	20,56 ⁰	20,20 ⁰	21,79 ⁰	21,34 ⁰	22,49 ⁰	21,37 ⁰	21,24 ⁰	20,62 ⁰

Tabelle 3 weist die Abhängigkeit von der Tageszeit auf.

Tabelle 3

Tageszeit	Vormittag			Nachmittag		
Mittlere Bewölkung . . .	1,8	4,6	9,1	1,2	6,9	9,6
Korrigiertes Mittel von α	21,74 ⁰	21,49 ⁰	21,11 ⁰	22,18 ⁰	21,44 ⁰	21,10 ⁰

Tabelle 4 macht die Verschiedenheiten in den Jahreszeiten deutlich.

Tabelle 4

Jahreszeit	Frühling	Sommer	Herbst	Winter
Mittlere Bewölkung . . .	5	6,8	5	7,6
Korrigiertes Mittel von α	20,42 ⁰	21,48 ⁰	21,98 ⁰	20,74 ⁰

Endlich bringt Tabelle 5 den Einfluß der Helligkeit zur Darstellung.

Tabelle 5

Völlig heiterer Tag	Völlig heitere Nacht	
	bei Mondschein	ohne Mondschein
23,88 ⁰ \pm 0,11 ⁰	26,55 ⁰ \pm 0,24 ⁰	29,95 ⁰ \pm 0,19 ⁰

Winkel α hängt also nach Reimann ab

1. von der Bewölkung: α ist um so kleiner, je größer die Bewölkungsdichte ist;
2. von den Tageszeiten: α ist am Nachmittag kleiner als am Vormittag;
3. von den Jahreszeiten: α ist im Frühling und Winter kleiner als im Sommer und Herbst;
4. von der Helligkeit: α ist um so kleiner, je heller der Himmel ist.

Selbstverständlich ist auch die Sichtweite von Einfluß auf α . Die bisher mitgeteilten Beobachtungen waren bei unbeschränkter Fernsicht gemacht. Aus 52 Beobachtungen bei beschränkter Sichtweite erhält Reimann im Mittel $\alpha = 24,69^{\circ}$ (einzelne Werte gehen fast bis 29°).

Das unkorrigierte Mittel aus sämtlichen (283) Hirschberger Beobachtungen (abgesehen von den letztgenannten) beträgt $\alpha = 22,43^{\circ}$. Die (in ungenauer Weise berechnete) Korrektur ist $-0,96^{\circ}$. Das korrigierte Mittel ist

$$\alpha = 21,47^{\circ} \pm 0,08^{\circ}.$$

Nimmt man spätere Beobachtungen hinzu, so wird $\alpha = 21,22^{\circ}$.

Da die Beobachtungen besonders im Herbst angestellt wurden und die mittlere Bewölkung kleiner war als das jährliche Mittel, so meint Reimann, daß sich dieser Wert für ihn noch etwas verkleinern würde.

b) Individuelle Differenzen

Reimann hat die Frage, ob Winkel α für alle Menschen den gleichen Wert habe, durch eine Reihe von Beobachtungen mit neun Versuchspersonen zu entscheiden gesucht. Seine Resultate enthält Tabelle 6.

Tabelle 6

Versuchsp.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	27,3 ⁰	29,2 ⁰	29,1 ⁰	23,8 ⁰	29,9 ⁰	30,7 ⁰	25,9 ⁰	28,7 ⁰	37,8 ⁰

Er bemerkt aber dazu, daß zu einer endgültigen Entscheidung seine Versuchspersonen zu geringe Schulung besaßen und zu wenige Beobachtungen gemacht hätten.

c) Art der Referenzfläche

Um die Art der Rfl zu finden, hat Reimann das Kriterium der Kugelkappe angewandt und die Berechnungen nach unseren Formeln (16) und (17) geführt. $\omega_2 = 1,06^0$ war ihm durch seinen Horizont gegeben. Um die ω_3 zu erhalten, hat er zunächst Wolken benutzt, ist aber wegen der Beweglichkeit dieser Marken schnell davon abgegangen. Schließlich nahm er als Marken, die die ω_3 festlegten, keine festen, besonders ausgezeichneten Punkte, sondern begnügte sich mit einmal scharf ins Auge gefaßten Richtungen.

Tabelle 7 bringt nun die berechneten ω_3 für verschiedene Werte von α und ω_1 .

Tabelle 7

α	ω_3 berechnet			
	$\omega_1 = 20^0$	$\omega_1 = 30^0$	$\omega_1 = 40^0$	$\omega_1 = 50^0$
18 ⁰	8,56 ⁰	11,09 ⁰	13,01 ⁰	14,54 ⁰
19	8,69	11,36	13,42	15,07
20	8,81	11,61	13,80	15,59
21	8,93	11,85	14,17	16,09
22	9,03	12,08	14,53	16,58
23	9,14	12,29	14,87	17,05
24	9,22	12,49	15,20	17,51
25	9,31	12,69	15,52	17,95
26	9,39	12,87	15,82	18,39

In Tabelle 8 sind die beobachteten ω_3 dargestellt, und zwar mit den Mittelwerten aus sämtlichen α - und ω_3 -Beobachtungen.

Tabelle 8

α	ω_3 beobachtet			
	$\omega_1 = 20^0$	$\omega_1 = 30^0$	$\omega_1 = 40^0$	$\omega_1 = 50^0$
21 ⁰	8,93 ⁰	—	—	—
21,46	—	11,96 ⁰	—	—
21,14	—	—	14,22 ⁰	—
21,22	—	—	—	16,20 ⁰

Genauerer zeigt Tabelle 9, die eine Reihe von einzelnen, in verschiedenen Jahreszeiten und bei verschiedenen Bewölkungsdichten erhaltenen ω_3 -Werte bringt. Die Anzahl der benutzten Beobachtungen beträgt 2136, die sich ungefähr mit gleichen Beträgen auf die benutzten ω_1 -Werte verteilen.

Tabelle 9

α	ω_3 beobachtet			
	$\omega_1 = 20^0$	$\omega_1 = 30^0$	$\omega_1 = 40^0$	$\omega_1 = 50^0$
19,62 ⁰	—	11,52 ⁰	—	—
19,83	8,79 ⁰	—	—	—
19,95	—	—	13,78 ⁰	—
20,16	—	—	—	15,67 ⁰
20,39	—	—	13,95 ⁰	—
20,50	8,87 ⁰	—	—	—
20,54	—	—	—	15,86 ⁰
20,61	—	—	14,03 ⁰	—
20,64	—	—	—	15,91 ⁰
20,67	8,89 ⁰	—	—	—
21	—	11,85 ⁰	—	—
21,38	—	11,94 ⁰	—	—
21,60	8,99 ⁰	—	—	—
21,64	—	12 ⁰	—	—
21,67	—	—	14,41 ⁰	—
21,71	—	—	—	16,44 ⁰
21,92	—	—	14,50 ⁰	—
21,94	—	—	—	16,55 ⁰
22,18	—	12,12 ⁰	—	—
22,36	—	12,16 ⁰	—	—
22,42	9,08 ⁰	—	—	—
22,44	—	—	—	16,79 ⁰
22,47	—	—	14,69 ⁰	—

Als Ergebnis glaubt Reimann aussprechen zu können, daß die Rfl des Himmelsgewölbes eine Kugelkappe ist.

d) Die genauere Vorstellung der Kugelkappe

Um eine genauere Vorstellung der Reimannschen Rfln des Himmelsgewölbes zu geben, seien zunächst in Tabelle 10 zu den Werten $\alpha = 18^\circ$ bis $\alpha = 38^\circ$ die zugehörigen z - und q_k -Werte zusammengestellt.

Tabelle 10

α	z	q_k	α	z	q_k
18 ⁰	12 ⁰ 33,7'	1 : 4,49	29 ⁰	21 ⁰ 58,6'	1 : 2,48
19	13 ⁰ 20'	1 : 4,22	30	22 ⁰ 58,3'	1 : 2,36
20	14 ⁰ 7'	1 : 3,98	31	23 ⁰ 59,8'	1 : 2,25
21	14 ⁰ 54,9'	1 : 3,75	32	25 ⁰ 3,5'	1 : 2,14
22	15 ⁰ 43,7'	1 : 3,55	33	26 ⁰ 9,5'	1 : 2,04
23	16 ⁰ 33,5'	1 : 3,36	34	27 ⁰ 18'	1 : 1,93
24	17 ⁰ 24,4'	1 : 3,19	35	28 ⁰ 30,7'	1 : 1,84
25	18 ⁰ 16,5'	1 : 3,03	36	29 ⁰ 44,3'	1 : 1,75
26	19 ⁰ 9,8'	1 : 2,88	37	31 ⁰ 2,3'	1 : 1,66
27	20 ⁰ 4,6'	1 : 2,74	38	32 ⁰ 24,4'	1 : 1,57
28	21 ⁰ 0,8'	1 : 2,60			

Eine gute Art und Weise, sich die Kugelkappe vorzustellen und gleichzeitig daraus die Eigentümlichkeiten unserer Höhen-schätzungen abzuleiten, hat Pernter (70, 19) angegeben, ohne sich allerdings über die psychologischen Probleme (und Irrtümer) seiner Darstellung weiter den Kopf zu zerbrechen. Die folgende Betrachtungsweise läßt sich natürlich auf jede Kugelkappe übertragen; die numerischen Werte gelten für die Kugelkappe 1:3,55.

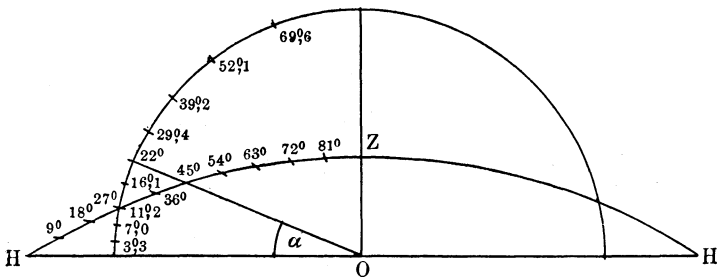
Wir fragen zunächst: Wenn man die Sehgröße des Halbmeridians der Kappe in zehn gleiche Sehgrößen zerlegt, welche wirklichen Höhenwinkel entsprechen den Teilpunkten? Oder anders ausgedrückt: Welche wirklichen Gesichtswinkel kommen gleichen Sehgesichtswinkeln in verschiedener Höhe zu? Die Antwort ergibt sich sofort aus Gleichung (20). Nimmt man α rund zu 22°, z also nach Tabelle 10 zu 15° 43,7', setzt $n = 10$ und zählt die Teilpunkte vom Horizont ab, so bekommt man die folgenden zu den Teilpunkten gehörigen wirklichen Höhen (Tabelle 11).

Tabelle 11

Teilpunkt	ω	Teilpunkt	ω
1	3,3 ⁰	6	29,4 ⁰
2	7 ⁰	7	39,2 ⁰
3	11,2 ⁰	8	52,1 ⁰
4	16,1 ⁰	9	69,6 ⁰
5	22 ⁰	10	90 ⁰

Diese Verhältnisse stellt Fig. 5 bildlich dar. *HZH* ist ein Meridian der Kugelkappe mit der Charakteristik 1:3,55. Die linke Hälfte ist in 10 gleiche Teile zerlegt. Die Maßzahlen, die den zu den Teilpunkten gehörigen Sehhöhen gemäß der früher

Fig. 5



schon erwähnten Annahme, daß die Maßzahl der Sehgröße des ganzen Quadranten 90⁰ betrage, zugeordnet sind, sind angeschrieben. Um *O* als Mittelpunkt ist ein beliebiger Halbkreis beschrieben, der dazu dient, die den Teilpunkten zugehörigen wirklichen Höhenwinkel darzustellen. Man sieht deutlich, wie die zu den gleichen Sehgrößen gehörigen wirklichen Gesichtswinkel mit der Höhe außerordentlich wachsen; während z. B. der ersten Sehgröße ein wirklicher Gesichtswinkel von 3,3⁰ entspricht, kommt der ihr gleichen letzten ein solcher von 20,4⁰ zu. Da der Sehgröße im vorliegenden Falle keine wirkliche Größe entspricht, muß man unter „wirklichem Gesichtswinkel“ die Differenz der entsprechenden wirklichen Höhen verstehen. In etwa 35⁰ wirklicher Höhe ist die dem Sehgesichtswinkel zugeordnete Maßzahl gleich dem wirklichen Gesichtswinkel in dem vorhin bezeichneten Sinne.

Man kann die vorhin aufgeworfene Frage auch umkehren. Sie lautet, wenn wir jetzt den Begriff der geschätzten Höhe mit benutzen: Wie findet man die geschätzten Höhen, die den wirklichen Höhen zukommen? Praktisch genügt es, die geschätzten Höhen aus Tabelle 11 zu interpolieren. Genaue Werte liefert die folgende Überlegung¹⁾. Man kann zu jeder wirklichen Höhe ω das zugehörige ζ nach Gleichung (16) berechnen. Dann ist $(2z - \zeta)$ der vom Horizont gezählte Zentriwinkel zu ω . Da nun der ganze Bogen Zenit–Horizont, als durch einen Quadranten gehend, zu 90° geschätzt wird, während sein wirklicher Winkelwert $2z$ beträgt, so wird der Zentriwinkel $(2z - \zeta)$ im Verhältnis $\frac{90}{2z}$ zu klein geschätzt. Nennt man also die geschätzten Höhenwinkel ω_s , so haben wir

$$\omega_s = \frac{90}{2z}(2z - \zeta).$$

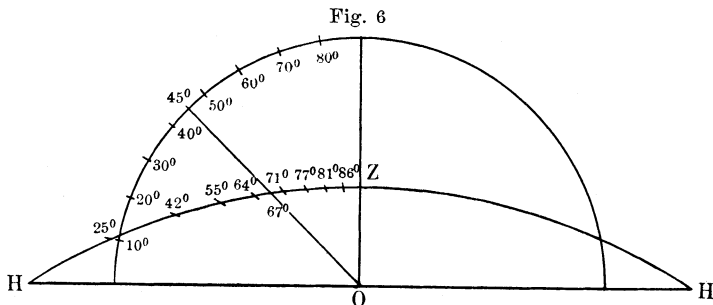
Tabelle 12 gibt die ω von 5° zu 5° und die zugehörigen ζ und ω_s für die Kappe 1:3,55.

Tabelle 12

ω	ζ	ω_s	ω	ζ	ω_s
5^0	$26^0 49'$	13,5 ⁰	50^0	$6^0 44'$	71,1 ⁰
10	$22^0 50'$	24,6	55	$5^0 42'$	73,8
15	$19^0 31'$	34,2	60	$4^0 45'$	76,5
20	$16^0 43'$	42,3	65	$3^0 52'$	79,2
25	$14^0 22'$	48,6	70	$3^0 2'$	81,4
30	$12^0 22'$	54,9	75	$2^0 15'$	83,7
35	$10^0 40'$	59,4	80	$1^0 29'$	85,5
40	$9^0 11'$	63,9	85	$0^0 49'$	88,2
45	$7^0 54'$	67,5	90	$0^0 0'$	90

In Fig. 6 sind diese Verhältnisse für die wirklichen Höhen von 10^0 zu 10^0 gezeichnet. Hier sieht man noch deutlicher, wie sehr wir die wirklichen Höhen überschätzen. Gleiche wirkliche Gesichtswinkel werden infolgedessen in kleineren Höhen überschätzt, in größeren, etwa von 35^0 an, unterschätzt.

¹⁾ Pernters Überlegung (70, 21), die, wie man sich leicht überzeugt, zu derselben Gleichung führt, ist teils ungenau, teils überflüssig kompliziert.



Man sieht übrigens an den beiden Figuren, daß sich die Ergebnisse unserer Betrachtungen mit Hilfe einer genügend großen Zeichnung auf einfache Weise graphisch finden lassen.

e) Kritische Bemerkungen

Ich habe bei einer früheren Gelegenheit (60, 74) eine Kritik der Reimannschen Beobachtungen gegeben, die ich heute in der Hauptsache als unzutreffend ansehe. Weil zwei der dort erhobenen Einwürfe auch schon anderswo aufgetaucht sind, seien einige Worte darüber gesagt. Zunächst sei, so führte ich damals an, der vom Beobachter gesehene Wolkenhimmel objektiv schon eine Kugelkappe, deren Charakteristik bedeutend kleiner sei als die kleinste Charakteristik der Reimannschen Rfn. Finde also noch eine subjektive Drückung des Gewölbes statt, so müsse sie die Charakteristik noch mehr verkleinern. Nun ist gewiß die Tatsache unbestreitbar, daß der Wolkenhimmel unter der Voraussetzung, daß die Wolkendecke der Erdoberfläche parallel ist, objektiv für den Beobachter eine Kugelkappe darstellt, deren Charakteristik sich leicht finden läßt. Bezeichnen wir die Höhe der Wolken mit h , den Erdradius mit r , so ergibt sich

$$q_k = \sqrt{\frac{h}{2r + h}} \dots \dots \dots (23)$$

Weil h gegen r klein ist, verhalten sich also die Charakteristiken ungefähr wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Höhen.

Mit Hilfe von q_k kann man z aus Gleichung (6) und damit α aus Gleichung (2) erhalten. In Tabelle 13 sind die Werte von q_k und α für einige mittlere Wolkenhöhen zusammengestellt.

Tabelle 13

Wolkenform	h in km	q_k	α
Cirrus	9	1:37,6	2° 16' 56"
Cirrostratus	8	1:39,9	2° 9' 36"
Cirrocumulus	7	1:42,7	2° 0' 46"
Alto cumulus	5	1:50,5	1° 42' 6"
Stratocumulus	2	1:79,8	1° 5' 26"
Cumulus	1,5	1:92,2	0° 55' 56"
Stratus	1	1:113	0° 45' 42"

Aber schon die Überlegung, daß die Entfernungen der dem Horizont näheren Teile der Wolkendecke für uns im Maximum der scheinbaren Entfernung liegen, zeigt, daß der Schluß aus dieser Tatsache hinfällig ist. Und die praktische Beobachtung belehrt jeden, daß das subjektive α der Wolkenkugelkappe bedeutend größer ist als das objektive. Das objektive q_k dieser Kugelkappe verkleinert lediglich das subjektive q_k im Vergleich zu dem q_k der Rfl des freien Himmelsgewölbes.

Ferner glaubte ich damals Reimanns Beobachtungen einen geringeren Wert beilegen zu müssen, weil sie nicht unwissentlich gemacht worden seien. Indes gibt es keine unter den „Sehtäuschungen“, die durch das Wissen um die „Täuschung“ verschwindet oder auch nur merklich verkleinert wird.

Aber alle Bedenken gegen Reimanns Methode und Resultate kann ich nicht unterdrücken. Sie seien in den folgenden Punkten zusammengefaßt.

1. Jedem, der Bestimmungen von α macht, wird es auffallen, wie sehr die Größe von α von der genauen Festlegung des Zenits abhängig ist, wie schwer aber andererseits diese Festlegung unter Umständen hält. Ich habe probeweise verschiedene Bestimmungen von einem Fenster des ersten Stockes meiner Wohnung aus gemacht, mich jedesmal bei den Schätzungen der Mitte vorbeugend. Tabelle 14 gibt die Resultate. Man vergleiche diesen Wert von α mit den später folgenden Werten, bei deren Bestimmung der Zenit genau festgelegt wurde. Im vorliegenden Falle nahm das wie überall ein wenig vorspringende Dach ein kleines Stück des Bogens Zenit–Horizont weg. Dieselbe Erfahrung hat v. Sicherer bei seinen im nächsten Abschnitt zu besprechenden Beobachtungen gemacht. Nun gibt Reimann nirgendwo an, wie

er den Zenit bestimmt, ob er überhaupt besonders darauf geachtet und Wert gelegt hat. Bei den Beobachtungen, die er auf freiem Felde machte, war eine solche sichere Bestimmung unmöglich.

Tabelle 14

Wolkenform: Cumulonimbus Stratocumulus		
21,5 ⁰	22,5 ⁰	22 ⁰
21	22,5	22,5
20,5	21	23
22	22	—

Mittel: $\alpha = 21,86^0$.

Reimann hat sich vermutlich stets auf sein Schätzungsvermögen verlassen. Er scheint allerdings eine große Übung und Sicherheit im Schätzen und Festhalten von Punkten am Himmelsgewölbe ohne besondere Marken besessen zu haben. Weil aber dabei unmerklich konstante Fehler auftreten können, so wird man die Reimannschen Werte für α als möglich, aber nicht als sicher bestätigt ansehen dürfen. Die relativen Größen der α -Werte werden natürlich im wesentlichen davon unberührt bleiben.

2. Die Art, wie Reimann die Bewölkung behandelt, wird ihrem Einfluß nicht gerecht. Er nimmt als Maß der Bewölkung die Zahl, die angibt, wieviel Zehntel des geschätzten Bogens von Wolken bedeckt waren, läßt also α abhängig sein von der Bewölkungsdichte. Was indes auf α von Einfluß ist, ist die Höhe, also im allgemeinen die Art der Wolken, und die Dichte nur indirekt insofern, als sie, wenn auch nicht in besonders ausgeprägter Weise, mit der Art und Höhe zusammenhängt. Die Abhängigkeit von der Höhe der Wolken liegt darin begründet, daß beim Wolkenhimmel die objektive Charakteristik ein stets vorhandener Faktor und in der oben mitgeteilten Weise von der Höhe bestimmt ist.

3. Um die Bogen zu erhalten, mit deren Halbierung er die Untersuchung über die Art der Rfl führte, hat Reimann keine festen Marken benutzt, sondern sich mit einmal scharf ins Auge gefaßten Richtungen begnügt. So hoch man nun auch die

Beobachtungskunst Reimanns schätzen mag, so scheint mir doch diese Art und Weise, zu halbierende Bogen festzulegen, nicht die erforderliche Sicherheit zu bieten, um so weniger, als es sich hier um ein Kriterium handelt, wo jede denkbare Sorgfalt angewandt werden müßte. Desto überraschender ist die zum Teil auf hundertstel Grad sich erstreckende Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten ω_3 -Werten. Hier liegt ein seltsamer, unaufgeklärter Widerspruch. Diese Dinge werden aber dadurch noch seltsamer, daß die Schätzungen Reimanns sich hauptsächlich auf den Wolkenhimmel beziehen, die RfI des Wolkenhimmels aber, wie wir noch hören werden, im allgemeinen keine Kugelkappe sein kann.

4. Einen Punkt der früheren Kritik muß ich auch hier wiederholen. Die Ergebnisse seiner Versuchspersonen sind unbrauchbar, weil sich wenigstens in einem Falle nachweisen läßt, daß sie unter suggestivem Einfluß entstanden sind. Reimann erzählt, daß sich unter seinen Versuchspersonen zwei mathematisch gebildete Herren befunden haben, die den Winkel α anfangs sehr groß bestimmten (Versuchspersonen 6 und 9 unserer Tabelle 6), und meint, daß sie „den Winkel und nicht die Bogenlänge zwischen Zenit und Horizont zu halbieren bestrebt gewesen sind“. „Letzterer“, so fährt er fort, „ist auch in seinen Schätzungen allmählich herabgegangen, nachdem ich ihn aufmerksam gemacht hatte, um was es sich handelt.“ Da man nun aber von mathematisch gebildeten Versuchspersonen erwarten muß, daß sie ohne weiteres die Aufgabe, einen Bogen zu halbieren, verstehen, so kann der erzählte Vorgang nur auf einer Suggestion der Versuchsperson beruhen. Reimann scheint also bei der Aufgabestellung und Leitung der Versuchspersonen nicht die Sorgfalt beobachtet zu haben, die bei psychologischen Untersuchungen notwendig ist.

Ich habe mich nach der Art, wie Reimann später die Blickrichtungsversuche, die Ergebnisse und Methoden anderer Forscher behandelt hat, des Verdachtes nicht erwehren können, daß er auch von Autosuggestion nicht frei sei.

5. Schließlich sei noch erwähnt, daß es natürlich unlogisch ist, eine Abhängigkeit des Winkels α von den Jahres- und Tageszeiten neben der Abhängigkeit von Helligkeit, Bewölkung und eventuell anderen Faktoren zu behaupten. Ich glaube auch nicht, daß Reimann das so gemeint hat.

3. von Sicherer

Auf Veranlassung von Zehenders hat von Sicherer in der Nähe von München unter Benutzung eines Instrumentes einige Bestimmungen von α vorgenommen und vornehmen lassen (104, 74). Auf drei Punkte wurde dabei besonderer Wert gelegt:

1. Es wurde prinzipiell nur bei wolkenfreiem oder bei gleichmäßig trübe bedecktem, grauem Himmel oder bei sternklarer Nacht beobachtet. Zum Vergleich sind einige Bestimmungen am bewölkten Himmel vorgenommen worden.
2. Es wurde möglichst jede auch nur andeutungsweise suggestionsverdächtige Bemerkung sorgfältig vermieden.
3. Es wurde auf die richtige Bestimmung des Zenits besonderer Wert gelegt.

Eine Begründung des ersten Punktes fehlt. Sie wird wohl darin liegen, daß beim Wolkenhimmel schon eine objektive Charakteristik $q < 1$ vorhanden ist, daß aber in den oben genannten Fällen von einem eigentlichen Wolkenhimmel nicht gesprochen werden kann. Die beiden anderen Punkte schaffen gerade die Mängel aus dem Wege, die auch wir vorhin an der Methode Reimanns zur Bestimmung von α gefunden haben.

Über die Art der Schätzung teilt von Zehender nichts mit; ebensowenig etwas über das benutzte Instrument, trotzdem es ihm so wichtig erscheint, daß er sogar den Konstrukteur angibt. Ob die Zenitfestlegung mit Hilfe dieses Instrumentes oder auf eine andere Weise geschah, ist gleichfalls nicht gesagt.

Die Resultate von 13 Beobachtern sind in Tabelle 15 dargestellt.

Tabelle 15

Bewölkung	α Mittel aus sämtlichen Beobachtungen	Zahl der Beobachtungen	α Mittel aus 36 Beobachtungen von Sicherers
Wolkenlos	42,0 ⁰	33	43,1 ⁰
Sternklar	42,4	21	47,0
Gleichmäßig trübe	43,6	30	42,3
Bewölkt	37,7	30	38,5

Auffällig sind an diesen Resultaten der relativ große Wert von α bei gleichmäßig bedecktem Himmel und das Auftreten eines α -Wertes, der $> 45^\circ$ ist. Beides kann auf der Art der Schätzung, der erstere Wert auch auf besonderen Zuständen der Luft (Sichtweite), der letztere auf der Beschaffenheit der unmittelbaren Umgebung beruhen. Die Werte lassen sich nicht genügend auf ihre Sicherheit ansprechen, weil außer den schon genannten Angaben auch die Mitteilungen über die Schulung der Versuchspersonen, das benutzte Instrument und die Streuung der Werte fehlen.

4. Figeo

Eine Reihe von Bestimmungen des Winkels α , die der Reimannschen an Umfang kaum nachsteht, verdanken wir Figeo und dem ersten Rechner seines Observatoriums in Batavia (30).

Die Beobachtungen erstrecken sich über ein Jahr. Morgens gegen 8 Uhr wurden sie von dem Assistenten gemacht und nur dann und wann von Figeo kontrolliert. Ihre Anzahl beträgt 344. Figeo selbst hat 43 Beobachtungen nachmittags gegen 5 Uhr angestellt. Eine Mitteilung über die Art der Schätzung fehlt. In den ersten Monaten schwankten die Werte von α zwischen weiten Grenzen (49° bis 29°), in den folgenden Monaten rückten die Grenzen immer näher zusammen. Tabelle 16 gibt die Morgenbeobachtungen, geordnet nach allen vorkommenden Werten von α .

Tabelle 16

α	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32
Anzahl der Beobachtungen.	12	16	27	51	49	61	50	26	12	12	6	3

Das Mittel der Beobachtungen des Assistenten beträgt

$$\alpha = 38,3^\circ,$$

das Mittel der Beobachtungen Figeos

$$\alpha = 36,9^\circ.$$

Berechnet man die Mittel für die einzelnen Monate, so ergibt sich Tabelle 17. Figeo läßt das Dezembermittel außer Betracht, weil der Beobachter im Anfang noch nicht die nötige Übung für

Tabelle 17

Monat	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
α	41,2 ⁰	39,0 ⁰	39,0 ⁰	37,5 ⁰	38,6 ⁰	38,7 ⁰	38,1 ⁰	37,6 ⁰	39,4 ⁰	38,4 ⁰	35,8 ⁰	36,2 ⁰

diese Art der Beobachtungen hatte. Nach ihm haben die Jahreszeiten keinen sicheren Einfluß auf α .

Tabelle 18 stellt die Beobachtungen zusammen 1. nach der Durchsichtigkeit der Atmosphäre, die nach der Sichtbarkeit der Vulkane Sadak und Gedeh bestimmt wurde; 2. nach der Bewölkungsdichte. Die unteren Abteilungen der Tabelle fassen die Beobachtungen zunächst in drei Gruppen, dann in zwei Gruppen nach der Durchsichtigkeit bzw. der Bewölkungsdichte zusammen.

Tabelle 18

Durchsichtigkeit			Bewölkung		
Grad der Durchsichtigkeit	Anzahl der Beobachtungen	α	Dichte der Bewölkung	Anzahl der Beobachtungen	α
0	86	38,5 ⁰	0	43	38,6 ⁰
1	33	37,7	1	45	38,6
2	52	38,6	2	24	39,0
3	30	38,4	3	22	38,5
4	33	38,5	4	31	39,0
5	34	38,1	5	15	38,3
6	26	38,0	6	21	38,0
7	17	38,6	7	14	38,2
8	15	38,6	8	24	37,7
9	11	38,1	9	35	37,9
10	7	36,9	10	62	38,7
0—3	201	38,4	0—3	134	38,7
4—7	110	38,3	4—7	81	38,5
8—10	33	38,1	8—10	121	38,3
0—5	268	38,4	0—5	180	38,7
6—10	76	38,2	6—10	156	38,3

Die Anzahl der Beobachtungen ist in der linken Hälfte der Tabelle etwas größer, weil dort auch einige Mittagsbeobachtungen mit angezogen sind. Ein klar ausgeprägter Einfluß der Durchsichtigkeit und Bewölkungsdichte ist nicht vorhanden, höchstens eine

Andeutung dahin, daß α mit größerer Durchsichtigkeit und zunehmender Bewölkungsdichte kleiner wird.

Über die Art, wie der Zenit festgelegt wurde, ist nichts gesagt. Aber es ist zu beachten, daß es sich im vorliegenden Falle um geschulte meteorologische Beobachter handelte. Und da Figeo selber aus seinen Erfahrungen im internationalen Wolkenjahr 1896/97 mitteilt, wie sehr Beobachter sich täuschten, als sie mehrere Male von einer Wolke angaben, sie stehe annähernd im Zenit. (während ihre Höhe tatsächlich etwa 60° betrug), so darf man annehmen, daß er auf sorgfältige Bestimmung des Zenits besonders geachtet hat. Leider gibt auch er die Wolkendichte, nicht die Art der Bewölkung an; das Resultat der Abhängigkeit von α ist auch entsprechend neutral ausgefallen. Es ist mir ferner nicht recht verständlich, wie man nach der Sichtbarkeit der Vulkane die Anzahl von zehn Stufen der atmosphärischen Durchsichtigkeit erhalten und mit Sicherheit benutzen kann. Einen Einfluß der Jahreszeiten kann man nach den Beobachtungen nicht ohne weiteres von der Hand weisen. Bildet man die Mittel für die Jahreszeiten, so erhält man die folgende Tabelle 19. Die Unterschiede scheinen doch teilweise zu groß zu sein, um ausschließlich durch Beobachtungsfehler erklärt werden zu können. Aber auch hier würde wieder wie bei Reimann zu bemerken sein, daß sich darunter der Einfluß verschiedener Faktoren versteckt.

Tabelle 19

Jahreszeit	α	Jahreszeit	α
Frühjahr	38,4 ⁰	Herbst	37,8 ⁰
Sommer	38,1	Winter	40,1

5. Aloys Müller

Ich habe zu einem dreifachen Zweck eine Anzahl von Bestimmungen zur Rf des Himmels begonnen:

1. Es sollte α unter möglichster Vermeidung der vielleicht vorhandenen Fehlerquellen Reimanns gefunden werden.
2. Es sollte der Einfluß der Bewölkung in richtiger Weise festgestellt werden.

3. Es sollte das Kriterium der Kugelkappe mit möglichster Sorgfalt angewandt werden.

Bei der Schätzung der Mitte des Bogens wurde besonders auf die Festlegung des Zenits geachtet. Ich habe deshalb die Bestimmungen von α stets am Hause gemacht, wo eine Marke am vorspringenden Dache den Zenitpunkt genau bestimmte. Dadurch wurde auch ein möglicher Fehler vermieden, auf den Pernter hinweist (70, 10). Er sagt mit Recht: „Viel hängt davon ab, wie man die Kopfhaltung beim Festlegen des einen Endpunktes des Bogens, des Zenits, einrichtet. Ein festes Fixieren des Zenitpunktes mit weit zurückgelegtem Kopf wird andere Resultate zutage fördern als ein festes Fixieren des Horizontes und kurzes Aufwerfen des Blickes zum Zenit. Das kann sogar so weit gehen, daß bei einer skrupulösen Festlegung des Zenitpunktes bei stark zurückgelegtem Kopfe und nur kurzem Hinabsenken des Blickes zum Horizont der ganze Eindruck des gedrückten Himmelsgewölbes verschwindet.“ Ein Grund zu einem solchen ängstlichen Bemühen, den Zenitpunkt festzuhalten, und damit auch dessen Folgen, waren bei meinen Beobachtungen auf die genannte Weise aus dem Wege geräumt. Die Schätzung der Mitte geschah bei zwanglosem Gleitenlassen des Blickes über den Bogen Zenit–Horizont.

Zum Messen der Höhen benutzte ich die Visierscheibe von Sonn, die einfach und praktisch ist und eine Genauigkeit von $\frac{1}{2}$ Grad wohl erreichen läßt.

Die Himmelsrichtung, nach der die Beobachtungen angestellt wurden, war WSW, weil dort der Horizont am wenigsten behindert war. Wegen der Störung durch übergroße Helligkeit der Atmosphäre konnten die Beobachtungen nur am Morgen gemacht werden, ganz bedeckter Himmel und Dämmerung natürlich ausgenommen.

Zwischen meinem Standpunkte und dem Horizont lagen außer einer kleinen Hofmauer und einer Gartenhecke, über die ich bequem hinüberblicken konnte, nur Wiesen und Felder. Am Horizont nahm ein etwa 1 bis $1\frac{1}{2}$ km entfernter Wald 0,5 bis 1° von dem Bogen Zenit–Horizont weg. Die Korrektion, die deshalb an den α -Werten angebracht werden müßte, ist wegen der großen Charakteristiken sehr gering. Ist z. B. $\alpha = 35,5^{\circ}$ beobachtet, so

ist, wenn $\alpha_1 = 0,6^\circ$ genommen wird, $\alpha' = 35,35^\circ$. Ich habe die Korrektion aus diesem Grunde hier noch nicht berücksichtigt.

Zwischen den Beobachtungen ließ ich öfters Pausen von mehreren Wochen eintreten, damit keine muskuläre Einstellung erfolgen sollte.

Bei der Anwendung des Kriteriums der Kugelkappe war zweierlei zu beachten. Zunächst wurden die ω_1 und ω_2 nicht wie bei Reimann durch Fixieren einer Richtung, sondern durch Marken festgelegt. Als solche Marken dienten z. B. die Kirchturmspitze, eine vorspringende Dachecke, gelegentlich auch eine junge, flugmüde Schwalbe auf der elektrischen Leitung, deren Stillsitzen natürlich genau kontrolliert wurde, meist aber besonders an Drähten angebrachte Marken. Um zweitens möglichst zu vermeiden, daß Beobachtungen unter sehr verschiedenen atmosphärischen und psychophysiologischen Verhältnissen ineinander verarbeitet würden, habe ich stets in Gruppen beobachtet. Eine solche, in einem Zuge durchgearbeitete Gruppe bestand 1. aus Bestimmungen von α ; 2. aus Messungen von ω_1 bzw. ω_2 und Bestimmungen von ω_3 ; 3. aus Bestimmungen von α . Auf einen Tag fiel immer nur eine Gruppe. Zwischen dem ersten und dem zweiten mittleren α -Wert einer Gruppe wurde zur Berechnung von z das Mittel genommen; es kam selten vor, daß infolge einer Änderung der Bewölkung die beiden Werte um mehr als einige Zehntel differierten.

Die Bewölkung wurde, wie gesagt, nicht nach der Dichte, sondern nach der Art aufgezeichnet. Bei wolkenlosem Himmel wurde auf die Sättigung der Farbe geachtet. Ich habe drei Stufen dabei unterschieden: weißblau, nicht tiefblau, tiefblau.

Das ganze Beobachtungsmaterial wird an anderer Stelle mitgeteilt. Tabelle 20 gibt das bis jetzt berechnete Material.

Ordnet man die α -Werte nach der Art der Bewölkung, so erhält man Tabelle 21. Der letzte Wert ist das Mittel aus 35 Beobachtungen.

Da jedes dieser Mittel von einem einzigen bestimmten Zustande der Atmosphäre herrührt, ist der Einfluß der Art der Bewölkung in einer Weise ausgeprägt, wie er zu erwarten war.

Die Anwendung des Kriteriums der Kugelkappe hat schon nach den hier mitgeteilten Beobachtungen das Resultat Reimanns nicht bestätigt. Würden die Differenzen zwischen den

Tabelle 20

α	Zahl der Beobachtungen	z	ω_1 bzw ω_2	ζ_1 bzw ζ_2	ω_3 berechnet	ω_3 beobachtet	Art der Bewölkung. Farbe. Bemerkungen
$30,3^0 \pm 0,17$	25	$23^0 16' 34''$	33^0 24^0	$21^0 46' 43''$ $27^0 4' 49''$	$57,3^0$ $10,7^0$	$58,1^0 \pm 0,22$ $11^0 \pm 0,0$	Nimbus, Cumulonimbus
$30,06^0 \pm 0,12$	28	$23^0 34' 10''$	$33^0 30'$ $26^0 30'$	$22^0 3' 27''$ 26^0	$57,6^0$ $11,66^0$	$59,6^0 \pm 0,07$ $12^0 \pm 0,06$	Nimbus, Cumulonimbus
$31,02^0 \pm 0,14$	26	$24^0 0' 50''$	$32^0 30'$ $11^0 18'$	$23^0 9' 50''$ $37^0 43' 8''$	$57,14^0$ $5,38^0$	$57,5^0 \pm 0,07$ $5,1^0 \pm 0,1$	Alto cumulus. Etwas neblig
$31,15^0 \pm 0,17$	21	$24^0 6'$	$32^0 30'$ 11^0 $55^0 30'$ $55^0 30'$	$23^0 17' 45''$ $38^0 8' 4''$ $12^0 19' 9''$ $12^0 19' 9''$	$57,17^0$ $5,1^0$ $21,4^0$ $71,9^0$	$57,1^0 \pm 0,24$ $4,6^0 \pm 0,05$ $21,6^0 \pm 0,21$ $74,8^0 \pm 0,11$	Anfangs Alto cumulus, neblig. Am Schluß Cirrostratus. Anfangswert von α ist $30,4^0$, Schlußwert $31,9^0$
$35,5^0 \pm 0,02$	11	$23^0 6' 17''$	$32^0 18'$ 11^0 35^0	$31^0 15' 30''$ $47^0 51' 37''$ $20^0 51' 40''$	$58,3^0$ $5,3^0$ $58,8^0$	$58,4^0 \pm 0,26$ $5^0 \pm 0,11$ $60,8^0 \pm 0,21$	Klarer Himmel. Am Horizont eine Spur Cirrus. Nicht tiefblau
$30,4^0 \pm 0,19$	15	$23^0 22' 40''$	$13^0 30'$ $20^0 6'$ $27^0 30'$ 23^0	$34^0 43' 39''$ $29^0 51' 20''$ $25^0 4' 35''$ $27^0 54' 8''$	$6,3^0$ $9,1^0$ $11,8^0$ $10,1^0$	$5,5^0 \pm 0,04$ $7^0 \pm 0,0$ $12^0 \pm 0,06$ $8,7^0 \pm 0,07$	Stratocumulus

Tabelle 21

Art der Bewölkung	α	Art der Bewölkung	α
Nimbus-Cumulonimbus	30,3	Alto cumulus	31,02
Nimbus-Cumulonimbus	30,6	Cirrostratus	31,9
Stratocumulus	30,4	Klarer Himmel	35,7
Alto cumulus	30,4		

beobachteten und den berechneten ω_3 -Werten regellos verstreut sein, so dürfte man den Einfluß von Beobachtungsfehlern vermuten. Ordnet man aber die Differenzen nach den Höhen, wie es in Tabelle 22 geschehen ist, so zeigen sie trotz einer größeren (Nr. 11) und einigen kleineren Abweichungen unzweideutig einen gewissen Gang.

Tabelle 22

Nr.	ω_3 (beob.) — ω_3 (ber.)	Nr.	ω_3 (beob.) — ω_3 (ber.)
1	— 0,5	10	+ 0,2
2	— 0,3	11	— 0,07
3	— 0,28	12	+ 0,36
4	— 0,8	13	+ 0,8
5	— 2,1	14	+ 0,1
6	— 1,4	15	+ 2,0
7	+ 0,3	16	+ 2,0
8	+ 0,34	17	+ 2,9
9	+ 0,2		

Daraus Schlüsse auf die Art der RfI zu ziehen, ist nicht leicht. Mit einiger Sicherheit läßt sich sagen, daß ein Meridian innerhalb eines Quadranten in zwei erheblich verschiedenen Stücken anders als der Kreis verläuft und daß der Punkt, der diese Stücke scheidet, etwa bei $\omega = 10^0$ liegt. Wir werden in den folgenden Nummern 8 und 9 sehen, daß in der Verschiedenheit der Stücke der Unterschied ihres Krümmungssinnes zum Ausdruck kommt. Man beachte, daß das in der Hauptsache für den Wolkenhimmel gilt, da die meisten ω_3 -Werte sich darauf beziehen. Ob es auch für den klaren Himmel richtig ist, kann nur ein größeres Material ergeben.

6. Ernst

Ernst (28) hat Beobachtungen von α am Sternenhimmel gemacht. Er bestimmte Sterne, die ihm in der Mitte des Bogens Zenit–Horizont zu stehen schienen, und berechnete ihren wirklichen Zenitabstand. Über die Art der Beobachtung ist nichts mitgeteilt. Aus 48 Beobachtungen, die über fast zwei Jahre zerstreut sind, erhielt er

$$\alpha = 36,48^\circ \pm 0,26.$$

7. Nijland

Unter der Voraussetzung, daß an den Beobachtungsabenden ein klarer Sternenhimmel vorhanden war, gehört ein Versuch Nijlands hierher, mit Hilfe der Überschätzung wirklicher Höhen einiges über die RfI des Sternenhimmels zu erfahren (65).

Nijland betont: „Ich selbst sehe zwar das Himmelsgewölbe auch stark abgeplattet, bei Tage viel stärker als bei Nacht, doch ist mir ein Fehler dieser Größe in den Höhenschätzungen (wie ihn z. B. Reimann angibt, d. R.) durchaus unbegreiflich.“

Er selber hat nun an sieben Abenden je zehn Höhenschätzungen gemacht. „Die Methode des Höhenschätzens war wie folgt: Zuerst erörterte ich den Zenit, blickte dann schnell ein paarmal vom Zenit nach der Kimme und umgekehrt, und bestimmte dann in einem gewissen Azimute den Punkt $h = 45^\circ$, hierauf durch mehrmalige Halbierung — immer ohne jegliche Hilfsmittel — den Punkt $h = 22,5^\circ$ usw. Die zehn Höhenschätzungen nahmen höchstens eine viertel Stunde in Anspruch.“ Die Rechnung ergab, „nach einer graphischen Ausgleichung“, für die unter ω_s angegebenen Höhen die mit F bezeichneten Schätzungsfehler (Tabelle 45). „Die an meinen Schätzungen anzubringenden Korrekturen K (vierte Spalte) setzen sich aus $-F$ und der Summe S von Refraktion und Depression des Horizontes zusammen.“

„Die F , deren Werte sich für die Höhen 40 bis 70° leider auf nur wenige Beobachtungen stützen, würden nur eine sehr geringe Abplattung des scheinbaren Nachthimmels ergeben, viel geringer, als ich selbst diese Abplattung sehe. Hieraus läßt sich also der Schluß ziehen, daß die fehlerhafte Höhenschätzung von Gestirnen für die scheinbare Form des Himmelsgewölbes nicht maßgebend

sei, und daß also der Betrag der Abplattung auf anderem Wege gefunden werden müßte.“

Tabelle 45

ω_s	F	S	K	ω_s	F	S	K
0 ⁰	+ 0,0 ⁰	- 0,7 ⁰	- 0,7 ⁰	40 ⁰	+ 3,3 ⁰	- 0,1 ⁰	- 3,4 ⁰
5	+ 0,0	- 0,3	- 0,3	45	+ 3,6	- 0,1	- 3,7
8	+ 0,1	- 0,2	- 0,3	50	+ 3,5	—	- 3,5
10	+ 0,2	- 0,2	- 0,4	60	+ 1,8	—	- 1,8
20	+ 0,9	- 0,1	- 1,0	70	+ 0,5	—	- 0,5
30	+ 2,0	- 0,1	- 2,1				

Die Schätzungen wurden bei Gelegenheit einer Reise nach Sumatra auf hoher See gemacht. —

Die Anbringung der Korrektion S ist erlaubt, wenn es sich um geschätzte und wirkliche Höhen, aber nicht, wenn es sich um Sehhöhen und wirkliche Höhen handelt.

Nijland hat als erster und einziger die Methode der Höhenüberschätzungen angewandt. Er benutzt die Resultate nur zu einer qualitativen Bestimmung der Rfl.

Deshalb zunächst ein allgemeines Wort über die Brauchbarkeit der Methode. Die Methode kann erstens zur annähernden Bestimmung der Charakteristik der Rfl dienen, unter den beiden Voraussetzungen, daß einmal die Charakteristiken der verschiedenen Arten von Flächen für dasselbe Beobachtungsmaterial nicht wesentlich voneinander verschieden sind und daß fürs zweite die Überschätzung hauptsächlich von der Charakteristik, weniger von der Art abhängt. Ist unter den Ergebnissen auch der Wert $\omega_s = 45^\circ$, so ist das zugehörige $\omega = \alpha$. Im anderen Falle ergibt sich aus der Kombination einer der Gleichungen (16) mit der Gleichung, die zur Berechnung von Tabelle 12 gedient hat, die Gleichung

$$\cos \left[\omega + (90 - \omega_s) \frac{2z}{90} \right] = \cos 2z \cos \omega,$$

in der natürlich ω_s und ω zugehörige Werte sind und aus der sich $2z$ durch Probieren finden läßt. Daraus erhält man nach (6) q_k . Zweitens gestatten die nach der Methode erhaltenen Resultate offensichtlich die Anwendung der Kriterien der Kugel- und der Paraboloidkappe und entsprechender Kriterien der übrigen Kappen

von Flächen zweiter Ordnung, wenn man die im letzteren Falle auftretende Exzentrizität durch Probieren sucht. Kappen von anderen Flächen werden sich allerdings nicht so bestimmen lassen. Man sieht also, daß die Methode der Höhenüberschätzungen nichts vor der einfacheren α -Methode voraus hat.

Dabei ist natürlich noch vorausgesetzt, daß die notwendige Bedingung für die Anwendung der Methode der Höhenüberschätzungen erfüllt ist, daß nämlich die Sehgröße das einzige Erfahrungsmotiv für die Schätzungen ist. Das war bei Nijland nicht der Fall. Ihm als Astronomen standen zahllose Erfahrungen über Höhen zu Gebote, die er aus Gewohnheit, ohne es zu wollen und zu bemerken, bei den Schätzungen verwenden mußte. Selbst wenn er das vorliegende psychologische Problem verstanden hätte, wäre es fraglich, ob es ihm, der keine Übung in psychologischen Beobachtungen besaß, gelingen konnte, sich von den durch langjährige Gewöhnung in Fleisch und Blut übergegangenen Erfahrungen unabhängig zu machen. Daß beides nicht der Fall war, beweist die gegen Reimann sich wendende Bemerkung, Seeoffiziere hätten ihm erzählt, sie könnten „mit einiger Übung“ die Schätzungsfehler noch kleiner als die seinen machen. So sind denn seine Beobachtungen nicht verwendbar.

Gleichsam im Anhang hierzu sei bemerkt, daß wir noch eine Serie von Beobachtungen nach der besprochenen Methode hauptsächlich an irdischen Gegenständen von v. Sterneck besitzen (93, 94). Ich teile sie nicht mit, weil sie mir aus verschiedenen Gründen unbrauchbar erscheinen. Erstens glaube ich, daß bei irdischen Gegenständen außer der Sehgröße immer noch andere Erfahrungsmotive (z. B. vor allem die scheinbare Entfernung) die Resultate der Schätzungen beeinflussen. Zweitens ist es mir auch bei v. Sterneck wegen seiner sonstigen Verwechslungen von Sehgröße und geschätzter Größe nicht recht wahrscheinlich, daß er auf alle Erfahrungsmotive außer der Sehgröße verzichtet haben sollte. Daß wenigstens einer dieser beiden Gründe zutrifft, scheint mir auch die große Charakteristik zu beweisen, die seine Resultate ergeben würden und die ungefähr gleich 1:1,8 sein würde, also noch größer als die Charakteristik 1:2 seiner RfI des Sternenhimmels, während sie doch kleiner sein mußte, weil die Höhenüberschätzung jedenfalls von der RfI des Taghimmels mitbestimmt ist. Die Charakteristik, die aus Höhenüberschätzungen folgt, wird

sich um so mehr der 1 nähern, je mehr Erfahrungsmotive neben der Sehgröße beim Schätzen wirksam waren.

Der Versuch Koerbers (50), Höhenüberschätzungen von Meteoren zu der Rfl 1:3,19 in Beziehung zu setzen, scheint mir nicht befriedigend ausgefallen zu sein.

8. Bourdon

Die Rfl des Wolkenhimmels hat eine eingehendere Untersuchung erfahren, als sie durch bloße Bestimmung von α möglich ist. Die erste solche Untersuchung scheint von Bourdon zu stammen (12).

Bourdon suchte am Himmel solche horizontale Wolkenstreifen, die ihm die Breite von 1 m zu haben schienen, und maß dann (mit einem Oktanten oder mit Hilfe eines auf einem Lineal verschiebbaren Brettchens) ihre Gesichtswinkel. Da man in einer gewissen Höhe über dem Horizont selten solche Streifen sieht, so ist die Zahl der Beobachtungen in größeren Höhen klein. Oft liegt dort nur eine einzige Beobachtung vor, während ihre Anzahl im Horizont 24 beträgt. Auf einer Wand war eine Länge von 1 m markiert; Bourdon betrachtete sie von Zeit zu Zeit, um beim Schätzen richtige Erinnerungsbilder dieser Größe zu haben. Um den Lesern einen Anhaltspunkt für die Sehgröße dieses Vergleichsobjektes zu geben, teilt Bourdon mit, daß ihm die Sehgröße der Sterne β und γ des Kleinen Bären je nach der Höhe bald etwas weniger als 1 m, bald ungefähr 1 m zu sein schien, während ihr Gesichtswinkel $3^{\circ} 11'$ beträgt; die beiden anderen bemerkenswerten Sterne im Kleinen Bären, der Polarstern und sein Nachbar, erschienen ihm ungefähr 1 m oder etwas mehr als 1 m entfernt; ihr Gesichtswinkel ist $3^{\circ} 58'$. Die Beobachtungen wurden auf einem Hügel über kupertes und mit Bäumen, Hecken und Feldern bestandenes Gelände hin angestellt. Sie sind in Tabelle 23 zusammengefaßt. ω gibt stets die Höhe des unteren Randes der Wolke an. γ ist der Gesichtswinkel.

Was in Bourdons Ausdrucksweise über das Vergleichsobjekt von 1 m noch an Unrichtigem steckt, werden wir später sehen.

Bourdon selbst hat seine Resultate nicht zur Bestimmung der Form der Rfl verwertet. Wir wollen es im folgenden tun; zum vollen Verständnis sind die mathematischen Vorbemerkungen

des zweiten Kapitels nötig. Man erhält die Radienvektoren ϱ der Rff, indem man den zu 79^0 gehörigen Radiusvektor als Einheit nimmt und jeden γ -Wert in den zu 79^0 gehörigen Wert $\gamma = 140'$ dividiert.

Tabelle 23

ω	γ	ω	γ	ω	γ
0^0	23'	6^0	48'	19^0	$1^0 3'$
$1^0 13'$	32'	$6^0 35'$	53'	20^0	$1^0 8'$
$1^0 15'$	26'	$6^0 40'$	50'	$20^0 33'$	$1^0 12'$
$1^0 20'$	25'	$6^0 53'$	55'	$21^0 46'$	$1^0 12'$
$1^0 27'$	26'	7^0	46'	22^0	$1^0 3'$
$1^0 28'$	33'	$7^0 6'$	49'	$22^0 58'$	$1^0 26'$
$1^0 39'$	31'	$7^0 20'$	57'	$23^0 20'$	$1^0 30'$
$1^0 50'$	36'	$7^0 44'$	58'	$25^0 52'$	$1^0 5'$
$1^0 53'$	34'	$8^0 9'$	51'	29^0	1^0
2^0	31'	$8^0 10'$	1^0	36^0	$1^0 25'$
$2^0 1'$	24'	$8^0 15'$	51'	$40^0 10'$	$1^0 43'$
$2^0 3'$	29'	$8^0 20'$	58'	$40^0 30'$	$1^0 11'$
$2^0 5'$	35'	$8^0 55'$	41'	42^0	$1^0 42'$
$2^0 11'$	49'	$9^0 7'$	1^0	$42^0 19'$	$1^0 28'$
$3^0 8'$	39'	$9^0 40'$	1^0	43^0	$1^0 36'$
$3^0 9'$	41'	10^0	55'	47^0	$1^0 30'$
$3^0 15'$	47'	11^0	54'	$49^0 28'$	$2^0 18'$
$4^0 35'$	52'	$11^0 20'$	55'	$53^0 20'$	$1^0 41'$
$4^0 46'$	55'	$12^0 57'$	55'	$54^0 35'$	$2^0 13'$
$4^0 5'$	55'	$14^0 33'$	1^0	64^0	$1^0 52'$
$5^0 38'$	46'	$15^0 35'$	55'	$70^0 23'$	$2^0 45'$
$5^0 54'$	55'	$17^0 15'$	56'	79^0	$2^0 20'$

Wenn man dann die ϱ - und ω -Werte passend in Gruppen zusammenfaßt, sie der Bequemlichkeit des Zeichnens wegen in rechtwinkelige Koordinaten umrechnet und die davon bestimmte Kurve zeichnet, so erhält man Fig. 7 (wir brauchen hier und auch später die Kurve immer nur in einem Quadranten wiederzugeben, weil es sich um Rotationsflächen handelt). Die Kurve stellt also einen Meridian der Rff dar; sie besitzt einen Wendepunkt in dem betrachteten Quadranten.

9. v. Sterneck

Im Prinzip ist die Methode v. Sternecks (91, 564) zur Bestimmung der Rff des Wolkenhimmels dieselbe wie die

Bourdon. Während Bourdon stets die gleiche Sehgröße an Wolken beobachtete, gebrauchte v. Sterneck verschiedene Sehgrößen und besaß dadurch eine größere Beobachtungsfreiheit als Bourdon. v. Sterneck bestimmte zunächst den Höhenwinkel, unter dem irgend eine kleine Wolke oder ein scharf abgegrenzter Teil einer größeren gesehen wurde. Dann schätzte er eine bestimmte Dimension dieser Wolke, und zwar möglichst die horizontale. Zur Unterstützung der Schätzung hatte er einen Maßstab zur Hand, auf dem er ein der scheinbaren Dimension gleiches Stück fixierte und dann dessen Länge in Zentimetern abmaß. Mit Hilfe eines Mikrometers wurde schließlich der zugehörige Winkelwert ermittelt. Aus dem Gesichtswinkel und der Sehgröße ließ sich dann der Radiusvektor der Rfl berechnen.

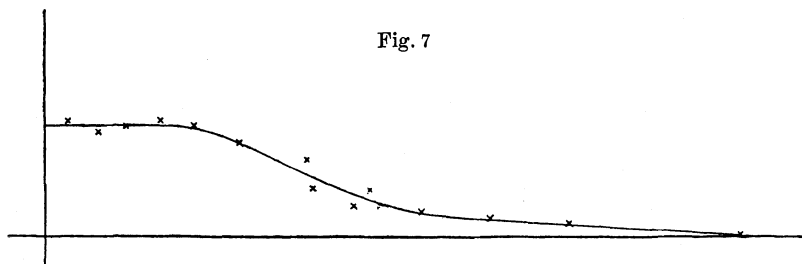


Tabelle 24 gibt die Messungen von drei Tagen wieder, als der Wolkenhimmel aus ziemlich zerrissenen, im Zenit mitunter ziemlich dicken, offenbar recht niedrig schwebenden Wolken bestand. Es bedeuten s die Sehgröße und γ den Gesichtswinkel der geschätzten Wolken, und zwar γ in Einheiten (13,4') des Mikrometers, ρ den Radiusvektor der Referenzfläche. Die ρ sind nach der in der Einleitung angegebenen Formel berechnet.

v. Sterneck betrachtet die Rfl als Kappe eines Hyperboloids, das die Gleichung

$$b^2(a - z)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

besitzt; der Beobachter befindet sich dabei im Koordinatenanfangspunkte und die z -Achse ist die Rotationsachse. Führen wir die Polarkoordinaten ρ , ω ein, so schreibt sich die Gleichung

$$b^2(a - \rho \sin \omega)^2 = a^2 \rho^2.$$

Tabelle 24

ω	s	γ	ϱ	Mittel	ω	s	γ	ϱ	Mittel
3 ⁰	110	3,5	80,6	75,8	18 ⁰	130	14,0	23,9	23,8
3	140	4,8	74,8		18	60	6,0	25,7	
3	170	5,8	75,2		22	75	9,0	21,4	
3	190	6,0	81,2		22	170	18,0	24,2	
3	150	5,5	70,0	70,6	23	140	13,0	27,7	25,5
3	170	6,0	72,7		27	100	11,0	23,3	
4	110	4,0	70,6	66,4	29	70	8,0	22,5	21,5
5	80	3,0	68,4		29	150	17,0	22,6	
5	80	3,3	62,2		32	120	13,0	23,7	
5	80	3,0	68,4		32	80	12,0	17,1	
5	140	5,4	66,5	65,4	35	60	6,5	23,7	19,6
6	100	3,6	71,3		36	60	8,5	18,1	
6	130	6,0	55,6		37	60	9,0	17,1	
6	100	3,7	69,3		38	80	14,0	14,7	
7	150	8,0	48,1	52,9	39	60	9,0	17,1	16,1
7	90	4,0	57,7		42	45	7,0	16,5	
8	50	2,3	55,8	55,8	43	80	12,0	17,1	15,9
9	120	9,0	34,2	43	40	6,0	17,1		
9	200	11,0	46,6	44	60	10,0	15,4		
10	90	4,0	57,7	45	35	6,5	13,8		
12	40	2,6	39,5	48,6	49	60	10,0	15,4	15,9
13	120	10,0	30,8		52	45	7,0	16,5	
16	160	15,0	27,4	29,1	59	120	17,0	18,1	18,1

Daraus ergibt sich, weil nur der kleinere ϱ -Wert in Betracht kommt,

$$\varrho = \frac{b}{m \sin \omega + 1},$$

wo $m = \frac{b}{a}$ ist. Setzen wir $\omega = 0$, so ist $\varrho = b$. Für $\omega = 90^\circ$

wird $\varrho = \frac{b}{m + 1}$. Es ist also

$$q_h = \frac{1}{m + 1}.$$

Die beiden Konstanten b und m , die durch Probieren gefunden werden, haben im vorliegenden Falle die Werte $b = 109,4$, $m = 8$. Also ist $q_h = 1 : 9$. Die Radienvektoren der Kappe sind in Tabelle 25 zusammengestellt.

v. Sterneck betrachtet die Übereinstimmung dieser errechneten mit den aus den Beobachtungen entnommenen ϱ -Werten als

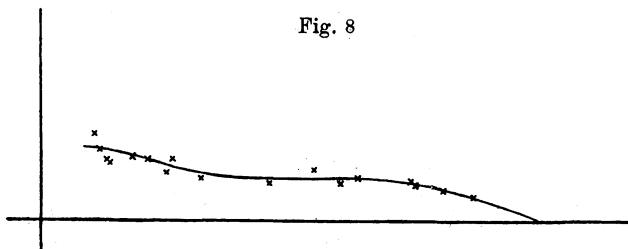
genügend zu der Behauptung, daß die Rfl des Wolkenhimmels eine Hyperboloidkappe 1:9 sei.

Tabelle 25

ω	ϱ	ω	ϱ	ω	ϱ	ω	ϱ
0 ⁰	109,4	7 ⁰	55,4	30 ⁰	22,9	65 ⁰	13,3
1	96,0	8	51,8	35	19,6	70	12,9
2	85,6	9	48,6	40	17,8	75	12,5
3	77,1	10	45,8	45	15,7	80	12,3
4	70,2	15	35,6	50	15,4	85	12,2
5	64,5	20	29,3	55	14,5	90	12,2
6	59,6	25	25,0	60	13,8		

Die Ausdeutung, die v. Sterneck seiner Methode und seinen Resultaten gibt und die in der vorstehenden Darstellung größtenteils schon ausgemerzt ist, werden wir im zweiten Kapitel aus-

Fig. 8



fürlich besprechen, weil sich die meisten Messungen v. Stern-
ecks auf die Rfln der Gestirne beziehen und seine eigenartige
Auffassung dort deutlicher hervortritt. Wir beschränken uns hier
auf die folgende Bemerkung: Bildet man die Differenzen zwischen
den beobachteten und den berechneten ϱ -Werten, so findet man
einen gewissen Gang angedeutet. Zeichnet man, wie bei Bour-
don, die Kurve, die sich den beobachteten Werten möglichst an-
schmiegt, so erhält man Fig. 8 und erkennt, daß ein Kegelschnitt
diese Werte nicht befriedigen kann. Wenn die Kurve die z -Achse
rechtwinklig schneiden soll (was man wohl voraussetzen darf),
dann besitzt sie in dem betrachteten Quadranten zwei Wende-
punkte.

II. Die Bestimmung der Referenzflächen der Gestirne

A. Mathematische Theorie der Bestimmung der Referenzflächen der Gestirne

Wir setzen voraus,

1. daß die Rfn der Gestirne Rotationsflächen sind,
2. daß die Sehgrößen des Durchmessers der Sonne, des Durchmessers des Mondes und der Sterndistanzen (möglichst parallel zum Horizont) zahlenmäßig einwandfrei für verschiedene Höhen ausgedrückt sind.

Unsere Aufgabe ist, aus diesen Daten die Art der Rotationsfläche und die Charakteristik der Kappe zu bestimmen.

1. Die Radienvektoren der Referenzflächen

Die Ermittlung der Radienvektoren beruht auf der in der Einleitung schon angegebenen Gleichung

$$\varrho = \frac{s}{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Wir schreiben die Gleichung für zwei Wertetripel ϱ_1, s_1, γ_1 und ϱ_2, s_2, γ_2 hin und unterscheiden drei besondere Fälle.

1. $\gamma_1 = \gamma_2$

Dann ist

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{s_1}{s_2} \dots \dots \dots (24)$$

2. $\varrho_1 = k \varrho_2 \quad (k > 0)$

Wenn wir jetzt die Tangente gleich dem Winkel setzen, was bei den vorkommenden kleinen Winkeln genügend genau ist, so ist

$$\frac{s_1}{\gamma_1} = k \frac{s_2}{\gamma_2} \dots \dots \dots (25)$$

und im Falle $k = 1$

$$\frac{s_1}{\gamma_1} = \frac{s_2}{\gamma_2} \dots \dots \dots (26)$$

3. $s_1 = s_2$

Dann ist

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \dots \dots \dots (27)$$

Man sieht, daß die ϱ nicht in absolutem Maße ausdrückbar sind, sondern nur miteinander verglichen werden können. Sind also s ($s_0, s_1, s_2 \dots$) die Sehgrößen, ω ($\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$) die zugehörigen Höhenwinkel, so setzen wir

$$\varrho = s$$

und betrachten die ϱ ($\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots$) und ω als die Polarkoordinaten der Rfn mit dem Ausgangspunkt im Beobachter. s_0 und ϱ_0 gehören zu $\omega_0 = 0^\circ$, ϱ_R möge zu $\omega_R = 90^\circ$ gehören.

Bei Vergleichen am Sternenhimmel (und an dem früher schon besprochenen Wolkenhimmel) kann es vorkommen, daß die ϱ nicht in dieser unmittelbaren Weise gegeben sind. Sie müssen dann ohne Zuhilfenahme einer Hypothese über die Gestalt der Kappe gefunden werden. Wir unterscheiden dabei folgende Arten der Vergleichung:

1. Sterndistanzen in verschiedener Höhe werden mit Sterndistanzen im Zenit verglichen.

Bei dieser Methode sind zwei Ausbildungen möglich:

- a) Es wird eine bestimmte Distanz im Zenit als Einheitsmaß genommen und die verglichenen Distanzen in Vielfachen dieses Maßes ausgedrückt.
- b) Es werden zu Distanzen in verschiedenen Höhen gleich groß erscheinende Distanzen im Zenit gesucht.

2. Es werden zu verschiedenen Distanzen gleich groß erscheinende Distanzen in anderen Höhen aufgesucht.

Die Distanzen können in Winkelmaß oder auch, z. B. durch Abmessen an einem Sternglobus, in Millimetern angegeben sein.

Zu 1a. Da man die wirkliche Größe der als Einheitsstrecke benutzten Distanz im Zenit kennt, kann man die Sehgrößen s der verglichenen Distanzen in demselben Maße ausdrücken. Ist γ die wirkliche Größe der verglichenen Distanzen, so stellt $\frac{s}{\gamma}$ die Radienvektoren dar, bezogen auf die Vertikalerhebung der Rfn als Einheit.

Daß die Methode, bei der die Sehgrößen von Sterndistanzen mit den Sehgrößen von irdischen Objekten, z. B. von Werten eines

Maßstabes, verglichen werden, von der vorstehenden prinzipiell nicht verschieden ist und deshalb nicht besonders behandelt zu werden braucht, ist leicht einzusehen.

Zu 1 b. Sind γ_s die Distanzen im Zenit, γ die ihnen gleich erscheinenden Distanzen in anderen Höhen, so sind $\frac{\gamma_s}{\gamma}$ die Radienvektoren, bezogen auf die Vertikalerhebung der Rfl als Einheit.

Zu 2. Die Vergleichen ergeben Gruppen gleich groß erscheinender, zu verschiedenen Höhen gehöriger Distanzen. Besitzen die Glieder einer Distanz verschiedene Höhen, so wird aus ihnen das Mittel genommen. Sind γ_s und γ_8 die wirklichen Größen eines Paares von Distanzen gleicher Sehgröße in den Höhen ω_3 und ω_8 , so ist $\frac{\rho_8}{\rho_3} = \frac{\gamma_8}{\gamma_s}$. Wir kennen die ρ innerhalb einer Gruppe also nur in ihrem Verhältnis zueinander. Ist n die Anzahl der zu einer Gruppe vereinigten Distanzen, so liefert die Gruppe $\frac{n}{2}(n-1)$ Verhältnisse von Radienvektoren. Gleiche Höhen werden bei einigermaßen zahlreichen Beobachtungen in verschiedenen Gruppen wiederkehren. Sind es z. B. ω_3 und ω_8 , so liefern verschiedene Gruppen das Verhältnis $\frac{\rho_8}{\rho_3}$; ist $\omega_8 > \omega_3$, so setzt man $\rho_3 = 1$ und nimmt aus den verschiedenen Werten für ρ_3 das Mittel. Gleichzeitig nimmt man je nach der Anzahl der Beobachtungen Ausgleichungen für die ω von 5^0 zu 5^0 oder von 10^0 zu 10^0 vor. Die weitere Aufgabe ist dann, die Verhältnisse der ρ aneinander anzuschließen. Für das zu dem größten Wert von ω gehörige ρ behält man den Wert 1 bei. Es sei beispielsweise ω_8 . Dann müssen alle Verhältnisse an das Verhältnis $\frac{\rho_8}{\rho_3}$ oder ein anderes, in dem ρ_8 das erste Glied ist, unmittelbar $\frac{\rho_8}{\rho_3}$ oder mittelbar angeschlossen werden. Kennt man z. B. noch $\frac{\rho_5}{\rho_3}$, so ergeben die Proportionen $\frac{\rho_8}{\rho_3} = \frac{\gamma_8}{\gamma_s}$ und $\frac{\rho_5}{\rho_3} = \frac{\gamma_5}{\gamma_s}$ den Wert ρ_5 , bezogen auf ρ_3 . Daran wird man dann wieder andere Verhältnisse, z. B. $\frac{\rho_5}{\rho_2}$, anschließen können und erhält so für alle vor-

kommenden Höhen ϱ -Werte, die auf den zur größten Höhe gehörigen ϱ -Wert als Einheit bezogen sind. Kommt von einem Verhältnis keines der beiden Glieder in einem der anderen Verhältnisse vor, so daß es sich nicht anschließen läßt, dann kann man interpolieren.

Die Vergleichen, bei denen zu der Höhe eines Sternes gleich groß erscheinende Entfernungen desselben von anderen Sternen gesucht werden, sind offensichtlich mit den letztbesprochenen identisch.

Ein besonderer Fall von 2 ist noch, wenn nur Distanzen gleicher Sehgröße für alle möglichen Höhen aufgesucht werden. Ist dann γ_m die zur größten Höhe gehörige wirkliche Distanz, so gibt $\frac{\gamma_m}{\gamma}$ die Radienvektoren, bezogen auf ϱ_m als Einheit.

2. Die Äquivalenz der Referenzflächen

Wir nennen zwei Rfn, verschiedener Objekte dann vollkommen äquivalent, wenn die Erscheinungen der einen bei der Projektion vom Beobachter aus auf die andere für den Beobachter in der gleichen Weise ablaufen. Die Bedingungen der vollkommenen Äquivalenz sind 1. die Ähnlichkeit der Rotationsflächen, von denen die Rfn Kappen sind, 2. die gleiche Charakteristik. Die erste Bedingung ist bei Kugeln und Paraboloiden stets erfüllt, bei Ellipsoiden und Hyperboloiden von der Gleichheit der Exzentrizität (ε) abhängig.

Ein Kriterium der vollkommenen Äquivalenz ist auch die Proportionalität der entsprechenden Radienvektoren der Kappen.

Auch Gleichung (25) kann als Kriterium dienen, wenn man die s_1, γ_1 und s_2, γ_2 als zu verschiedenen Rfn, aber zu derselben Höhe gehörig auffaßt.

Wir sprechen von unvollkommener Äquivalenz, wenn entweder die Flächen ähnlich, die Charakteristiken verschieden sind; oder wenn die Flächen wenigstens in der allgemeinen Form oder annähernd übereinstimmen, die Charakteristiken im ersteren Falle gleich oder verschieden, im zweiten ausschließlich gleich sind. Die Bestimmung läßt natürlich einige Willkür, aber sie gestattet innerhalb gewisser Grenzen doch eine brauchbare Anwendung. So können z. B. Kappen von Flächen zweiter Ordnung

niemals unvollkommen äquivalent sein mit Kappen von Flächen mit Wendepunktlinien. Wohl aber könnte z. B. eine Kugelkappe von einer Hyperboloidkappe bei gleicher Charakteristik so wenig abweichen, daß sie als unvollkommen äquivalent bezeichnet zu werden verdienten. Ebenso würde diese Bezeichnung angewandt werden auf Kappen von Flächen mit Wendepunktlinien, wenn auch der Lagen der Wendepunktlinien etwas variierten und die Charakteristiken verschieden waren.

Bei unvollkommen äquivalenten Rfn ist der Gang der Veränderung der Sehgrößen im allgemeinen annähernd derselbe, wenn auch die Größe der Veränderung verschieden sein sollte.

3. Rotationsflächen zweiter Ordnung

Von absoluten Maßen der Rfn zu sprechen, hat, wie schon gezeigt, keinen Sinn. Wenn trotzdem in den Gleichungen Konstanten (Halbparameter, Exzentrizität usw.) auftreten, so kommt das daher, daß die q mit bestimmten Werten eingesetzt werden müssen. Aber diese Konstanten sind, soweit sie natürlich für dieselbe Fläche nicht unter sich zusammenhängen, insofern willkürlich, als man die q mit jeder beliebigen positiven reellen Zahl multiplizieren darf.

Die allgemeine Methode der Berechnung ist folgende. Legt man das Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in den Beobachter und führt die q und ω als Polarkoordinaten ein, so erhält man, falls es sich um Flächen zweiter Ordnung handelt, Gleichungen mit zwei oder drei Unbekannten (Konstanten). Eine Unbekannte kann man wegschaffen, indem man q_0 einführt. Wäre

q_R zu messen, dann wäre $q = \frac{q_R}{q_0}$ unmittelbar aus den Messungen

bestimmbar. Das ist aber leider in unseren Breiten unmöglich. Wir müssen deshalb q_R aus den Gleichungen finden, indem wir $\omega = \omega_R$ setzen.

Weil der Gang der Rechnung für alle Flächen entsprechend derselbe ist, wollen wir sie nur für die Kugelkappe ausführlich hierher setzen und bei den anderen lediglich die Resultate hinschreiben.

a) Kugelkappe

Fig. 9 stelle ein Stück eines Meridians einer Kugel dar. Liegt der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems im Mittelpunkt O , so lautet die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wenn r den Radius bezeichnet. Wir verlegen den Anfangspunkt durch Parallelverschiebung nach O' und setzen $OO' = d$. Dann ist $y' = y - d$ und die Gleichung des Kreises geht über in

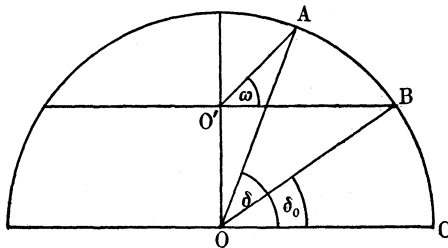
$$x'^2 + (y' + d)^2 = r^2.$$

Da $O'A = \rho$ ist, ist auch

$$x' = \rho \cos \omega$$

$$y' = \rho \sin \omega.$$

Fig. 9



Die Kreisgleichung lautet also jetzt

$$\rho^2 \cos^2 \omega + (\rho \sin \omega + d)^2 = r^2.$$

Setzt man $\omega = 0^0$, so kommt

$$\rho_0^2 + d^2 = r^2,$$

also

$$d = \sqrt{r^2 - \rho_0^2}.$$

Setzt man diesen Wert in die Kreisgleichung ein, so wird daraus endgültig

$$\rho^2 \cos^2 \omega + (\rho \sin \omega + \sqrt{r^2 - \rho_0^2})^2 = r^2 \dots (28)$$

Rechnet man diese Gleichung mit einem beliebigen Wertepaare, so ist dadurch r bestimmt. Dann und nur dann, wenn die anderen Wertepaare (ρ, ω) dieser Gleichung mit dem berechneten r -Werte genügen, ist die Rfl eine Kugelkappe.

Setzt man in (28) ω_R ein, so erhält man

$$q_R + \sqrt{r^2 - q_0^2} = r.$$

Also wird

$$q_k = \frac{1}{q_0} (r - \sqrt{r^2 - q_0^2}).$$

Im Falle der Kugelkappe läßt sich eine für die Rechnung bequemere Gleichung, die als Kriterium dienen kann, auf folgende Weise finden. Wendet man auf die beiden Dreiecke $O O' A$ und $O O' B$ (Fig. 8) den Sinussatz an, so erhält man, wenn man Winkel $A O C$ mit δ , Winkel $B O C$ mit δ_0 bezeichnet,

$$\frac{q}{r} = \frac{\cos \delta}{\sin (90^\circ + \omega)} \quad \text{und} \quad \frac{q_0}{r} = \frac{\cos \delta_0}{\sin 90^\circ}.$$

Daraus folgt

$$\frac{q}{q_0} = \frac{\cos \delta}{\cos \delta_0 \cos \omega} \dots \dots \dots (29)$$

Setzt man $\frac{q}{q_0} = m$, bedenkt man ferner, daß $\delta^0 = 90^\circ - 2z$ und $\delta = 90^\circ - \xi$ ist, wo ξ , wie auch früher immer, den zu ω gehörigen, vom Zenit aus gezählten Zentriwinkel bedeutet, so bekommt man aus (29)

$$\sin \xi = m \sin 2z \cos \omega \dots \dots \dots (30)$$

und daraus

$$\cos \xi = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 2z \cos^2 \omega} \dots \dots \dots (31)$$

Nach Gleichung (1) ist, wenn man durch $\cos \omega$ dividiert,

$$\cos \xi = \operatorname{tg} \omega \sin \xi + \cos 2z.$$

Setzt man (30) und (31) in diese Gleichung ein, so hat man

$$\sqrt{1 - m^2 \sin^2 2z \cos^2 \omega} = m \sin \omega \sin 2z + \cos 2z.$$

Daraus findet man

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2m \sin \omega}{1 - m^2} \dots \dots \dots (32)$$

Dann und nur dann, wenn beim Einsetzen verschiedener Wertepaare (q, ω) in Gleichung (32) stets derselbe Wert für $\operatorname{tg} 2z$ herauskommt, ist die Rfl eine Kugelkappe.

Nebenbei bemerkt, gestattet Gleichung (29), auch die Radienvektoren der Rfl des Himmels sehr einfach zu finden. Setzt man

$$q_0 = \frac{1}{q_k},$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{\sin \xi}{2 \sin^2 \varepsilon \cos \omega}, \dots \dots \dots (33)$$

eine Gleichung, die die Radienvektoren in Einheiten der Strecke Beobachter–Zenit gibt. Natürlich läßt sich diese Gleichung auch in Verbindung mit einer der Gleichungen (16) als Kriterium der Kugelkappe bei den Rfn der Gestirne benutzen; sie ist sogar beim Rechnen noch bequemer als Gleichung (32). Ihr Gebrauch setzt aber die Kenntnis des Winkels ε voraus, den man mit Hilfe von (32) findet. Ist ϱ_0 nicht beobachtet, so sucht man die Charakteristik und daraus ε durch Probieren. ϱ_0 ist dann, wie schon vorhin bemerkt, in Einheiten der Strecke Beobachter–Zenit der reziproke Wert der Charakteristik.

b) Paraboloidkappe

$$\varrho^2 \cos^2 \omega - 2 p \varrho \sin \omega - \varrho_0^2 = 0.$$

Die Durchrechnung mit einem beliebigen Wertepaare ergibt die Konstante p . Dann und nur dann, wenn die anderen Wertepaare (ϱ, ω) dieser Gleichung mit dem berechneten Werte für p genügen, ist die Rfn eine Paraboloidkappe.

$$q_p = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{p}.$$

In dem speziellen Falle, daß der die Kappe abtrennende Schnitt in der Ebene des Halbparameters liegt, haben wir

$$\varrho_0 = \varrho (1 + \sin \omega).$$

ϱ_0 braucht nicht bekannt zu sein; es muß nur in diesem Falle die rechte Seite der Gleichung für alle (ϱ, ω) -Werte eine Konstante sein. Ferner ist dann

$$q'_p = \frac{1}{2}.$$

c) Ellipsoidkappe

$$(\varrho^2 \cos^2 \omega - \varrho_0^2)(1 - \varepsilon^2) + \varrho^2 \sin^2 \omega + 2 d \varrho \sin \omega = 0.$$

Die Durchrechnung mit zwei Wertepaaren ergibt die Werte der Konstanten d und ε . Dann und nur dann, wenn $\varepsilon < 1$ ist und wenn die anderen Wertepaare (ϱ, ω) der Gleichung mit den

berechneten Werten der Konstanten d und ε genügen, ist die Rfl eine Ellipsoidkappe.

$$q_e = + \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \frac{d^2}{\varrho_0^2}} - \frac{d}{\varrho_0}.$$

Im Falle des Halbellipsoids ergibt die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\varrho^2 - 1}}{\varrho \cos \omega} \quad (\varepsilon < 1).$$

Die rechte Seite muß konstant sein.

$$q'_e = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

d) Hyperboloidkappe

$$(\varrho^2 \sin^2 \omega - 2 d \varrho \sin \omega)(\varepsilon^2 - 1) - \varrho^2 \cos^2 \omega + \varrho_0^2 = 0.$$

Auch hier finden sich die Werte der Konstanten d und ε bei Durchrechnung mit zwei Wertepaaren. Dann und nur dann, wenn $\varepsilon > 1$ ist und wenn die anderen Wertepaare (ϱ, ω) der Gleichung mit den berechneten Werten der Konstanten d und ε genügen, ist die Rfl eine Hyperboloidkappe.

$$q_h = \frac{d}{\varrho_0} - \sqrt{\frac{d^2}{\varrho_0^2} - \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}}.$$

In dem besonderen Falle, daß der die Kappe abtrennende Schnitt durch die Ebene des Halbparameters geht, ist

$$\varepsilon = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho \sin \omega} \quad (\varepsilon > 1).$$

$$q'_h = \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

4. Andere Rotationsflächen

Fürs erste wird eine rein empirische, konstruktive Bearbeitung der Beobachtungen nötig sein. Die mathematische Behandlung einer solchen Kurve, wenn sie überhaupt möglich oder angebracht erscheint, muß sich nach den besonderen Umständen richten. Wir werden später mehrere Methoden dieser Behandlung kennen lernen.

B. Darstellung und Diskussion der Beobachtungen

1. Psychologisches zur Methode

Aufgabe der Beobachtungen sind die Messungen der Sehgrößen der Gestirne. Sie können keine direkten Messungen sein, d. h. nicht ein Legen eines Maßstabes über das Wahrnehmungsbild. Denn dadurch würde man nichts anderes als den Gesichtswinkel, in irgend einem Maße ausgedrückt, erhalten. Sie sind vielmehr eine besondere Art der indirekten Messungen: nämlich ein größenabschätzendes Vergleichen zweier Wahrnehmungsbilder (des Gestirnes und eines Vergleichsobjektes), die in einer solchen Entfernung nebeneinander liegen, daß jeder Reiz zur direkten Messung ausgeschlossen erscheint. Die Entfernung darf aber auch nicht so groß sein, daß das Vergleichen dadurch erschwert und unsicher wird; man könnte z. B. mit einigem Recht fragen, ob bei Vergleichung der Sehgrößen von Sterndistanzen im Zenit und im Horizont diese Entfernung nicht schon überschritten ist. Am sichersten ist das Vergleichen bei Sehgrößengleichheit, weniger sicher ist es, wenn die Sehgröße des Gestirnes ein Vielfaches von der Sehgröße des Vergleichsobjektes ist. Die bekannte wirkliche Größe des Vergleichsobjektes liefert dann einen zahlenmäßigen Ausdruck für die Sehgröße des Gestirnes, d. h. der Maßausdruck gestattet, diese Sehgröße mit anderen Sehgrößen desselben Gestirnes zu vergleichen. Man muß das Vergleichsobjekt dem Gestirne bezüglich aller Eigenschaften im Sehraum möglichst angleichen, besonders aber bezüglich der Gestalteigenschaften; bei Sonne und Mond sind also kreisförmige Flächen, bei Sternentfernungen Punktdistanzen (keine ausgefüllten Strecken) zu nehmen. Denn die Sehgröße eines Sehdinges ist erstens von seinen sämtlichen Eigenschaften im Sehraum mitbestimmt und zweitens beim Vergleichen mit anders gearteten Sehgrößen auch von diesen Verschiedenheiten abhängig.

Die im bisherigen nur angedeuteten, im folgenden ausführlicher beschriebenen Methoden, das Verhältnis von Sehgrößen zahlenmäßig auszudrücken, sind vom psychologischen Standpunkte aus nicht alle theoretisch gleichwertig. Vollkommen einwandfrei sind die Fälle, wo unter den Sterndistanzen oder den Wolken gleiche Sehgrößen gesucht werden, wo überhaupt unmittelbar

Sehgrößen von Sterndistanzen in verschiedenen Höhen miteinander verglichen werden. Nicht einwandfrei ist die Anwendung irdischer Vergleichsobjekte. Man findet z. B. in der Höhe ω_1 die Sehgröße o_1 des Vergleichsobjektes gleich der Sehgröße s_1 der Sonne, in der Höhe ω_2 die Sehgröße o_2 gleich s_2 . Nun setzt man das Verhältnis $\frac{s_1}{s_2}$ gleich dem Verhältnis $\frac{o_1}{o_2}$ und — jetzt kommt das Bedenkliche — dieses Verhältnis gleich dem der zu o_1 und o_2 gehörigen wirklichen Größen. Das ist offensichtlich nur dann erlaubt, wenn das in Gleichung (26) ausgedrückte (auf $\frac{o_1}{o_2}$ anzuwendende) Gesetz zutrifft, wo nun die ρ die scheinbaren Entfernungen bezeichnen sollen. Wir werden später sehen, daß das wahrscheinlich nicht immer der Fall ist. Genaueres wissen wir nicht, und wir können nur hoffen, daß die davon herrührenden Fehler innerhalb der Schätzungsfehler bleiben. Wo man deshalb die Anwendung irdischer Vergleichsobjekte umgehen kann (bei Sternen und bei Wolken), soll man es tun. Bei Messungen zur Sehgröße von Sonne und Mond könnte man das Bedenken beseitigen, indem man die Vergleichsobjekte in sehr große Entfernungen bringt; für diesen Fall scheint nämlich das angezogene Gesetz zu gelten. Aber das ist mit kaum aufhebbaeren praktischen Schwierigkeiten verknüpft.

Um naheliegende Mißverständnisse auszuschließen, sei noch einmal betont, daß es sich bei diesen kritischen Bemerkungen über die Methoden nicht um das Finden der Radienvektoren, sondern um den zahlenmäßigen Ausdruck von Sehgrößen handelt. Natürlich wird ein Fehler in letzterem auch die daraus abgeleiteten Radienvektoren mit betreffen.

2. Die Referenzfläche der Sonne

a) Reimann und Filehne

Sieht man von gelegentlichen Beobachtungen, wie z. B. denen Stroobants (98, 319), ab, weil sie ohne Vergleichsobjekt gemacht oder wegen Nichtangabe der Methode unkontrollierbar sind, so stammen die ersten Vergleichen von Reimann (77). Sie wurden in Kolberg über dem Meere angestellt. Die Methode war primitiv. Eine weiße Pappscheibe von 34 cm Durchmesser wurde

im Rücken oder seitwärts von dem der Sonne zugekehrten Beobachter in Augenhöhe befestigt. Der Beobachter hatte die Aufgabe, unter stetem Vergleichen mit der Sonne sich so weit der Scheibe zu nähern oder von ihr zu entfernen, bis sie die gleiche Größe wie die Sonne zu haben schien. Die Entfernungen von der Scheibe wurden dann gemessen. Reimann hatte außer sich noch eine Versuchsperson. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle 26 enthalten.

Tabelle 26

ω	Versuchsperson 1	Versuchsperson 2	Gesamtmittel
0°	11,32	11,57	11,47
55	40,76	35,81	38,11

Machen wir die Hypothese einer Kugelkappe, so erhalten wir unter Benutzung der Gesamtmittel $q_k = 1:3,93$. Über die Art der Rfl können die Messungen Reimanns nichts lehren, weil zwei Punkte zur Bestimmung einer Kurve nicht genügen. Die Methode ist wegen der großen azimutalen Entfernung des Vergleichsobjektes von der Sonne sehr unexakt.

Da Filehnes Ausführungen auf jedes Gestirn passen sollen, gehen wir gleich beim ersten auf sie ein. Er sagt in einer seiner zahlreichen Arbeiten (34, 27): „Wenn man nun z. B. das untergehende Gestirn in dem Augenblick auf seine scheinbare Größe betrachtet, in dem es etwa zwei seiner Durchmesser über dem Horizonte steht, und wenn man es dann erst wieder anschaut, wenn es den Horizont eben tangiert, so ist keine Zunahme seiner Größe erkennbar, während doch im Falle der Kugelkalotte gerade hier die verblüffendste Zunahme der scheinbaren Größe stattzufinden hätte. Mit einer höhenmessenden Vorrichtung, z. B. einem Pendelquadranten, findet man dann ferner leicht, daß die auffallendste (scheinbare Größenänderung etwa zwischen 4° und 14° (oder 13°) (über dem Horizonte) sich zeigt; oberhalb von 14° (bis etwa 20°) und unterhalb von 4° (bis etwa 2°) sind die Größenänderungen pro 1° zwar sehr deutlich erkennbar, aber nicht so auffallend wie zwischen 4° und 14°. Oberhalb von 20° und unterhalb von 2° sind sie schon so gut wie unmerklich.“ Filehne teilt keine Messungen mit. Aus seinen Angaben ist nicht einmal zu ersehen, ob er Messungen gemacht hat oder ob er lediglich die

Eindrücke wiedergeben will, die er bei Höhenbestimmungen hatte. Auf Grund dieser Angaben und des Reimannschen Wertes für α konstruiert er sich die Rf als ein Halbellipsoid mit der Charakteristik 1:3,77. Leider haben also seine mit übermäßig großem Rechenaufwand durchgeführten Konstruktionen keine Grundlage in Messungsergebnissen.

b) v. Sterneck

a) Beobachtungen

Die erste vollständig durchgeführte Messungsreihe der Sehgröße der Sonne rührt von v. Sterneck her (91, 557). Die Methode war dieselbe wie bei den früher besprochenen Messungen am Wolkenhimmel. Die Sehgröße wurde auf einem Maßstab durch vergleichendes Schätzen fixiert und das Resultat abgelesen. v. Sterneck fand nun zunächst, daß nur über 10^0 Höhe eine einheitliche Darstellung möglich ist, indem jedem Höhenwinkel eine bestimmte Sehgröße entspricht. Unter 10^0 Höhe gehören zu demselben Winkel die verschiedensten Sehgrößen. Tab. 27 enthält nun die Messungen über 10^0 . Es sind 60 Messungen, die an 25 Tagen unter den verschiedensten atmosphärischen Zuständen gewonnen wurden. s bedeutet wie immer die Sehgröße.

Tabelle 27

ω	s	Mittel	ω	s	Mittel
10^0	25, 18	19,3	33^0	12,5	13,2
11	20, 19		36	14	
12	19, 17, 17		38	12, 12, 12,5	
13	16, 17, 17, 17	16,6	40	12, 13	12,0
14	16, 17		41	12, 11, 12, 12	
15	17, 15		42	11	
16	17	15,0	43	11,5	12,0
19	15, 15		46	12,5	
20	15		49	12, 12	
21	15, 14	14,5	50	10,5	11,5
22	16		53	11, 10,5	
23	15, 15, 15		54	11,5 11,5	
24	14	14,5	55	11,5	11,3
25	14, 14		56	12	
26	14		57	11, 11,5	
27	15	13,3	58	11	11,0
29	13, 13				
30	13				
31	14				

v. Sterneck bezieht nun diese Beobachtungen auf ein Hyperboloid, das dieselbe Gleichung wie die Rfl des Wolkenhimmels besitzt, nur mit den Konstanten $b = 25,3$, $m = 1,5$. Die Charakteristik der Kappe wird $q_h = 1:2,5$. Dann berechnet er mit Hilfe der q_h -Werte dieser Kappe und des Gesichtswinkels der Sonne die Sehgröße s_h der Sonne. Er nennt s_h den normalen Sonnendurchmesser. Die Tabelle 28 bringt diese q_h - und s_h -Werte, auch für $\omega < 10^0$.

Tabelle 28

ω	q_h	s_h	ω	q_h	s_h	ω	q_h	s_h
0 ⁰	25,3	23,8	9 ⁰	20,5	19,3	50 ⁰	11,8	11,1
1	24,7	23,2	10	20,1	18,9	55	11,4	10,7
2	24,0	22,6	15	18,2	17,1	60	11,0	10,3
3	23,4	22,0	20	16,7	15,7	65	10,7	10,1
4	22,9	21,5	25	15,5	14,6	70	10,5	9,9
5	22,3	21,0	30	14,5	13,6	75	10,3	9,7
6	21,9	20,6	35	13,6	12,8	80	10,2	9,6
7	21,4	20,1	40	12,9	12,1	85	10,1	9,5
8	20,9	19,6	45	12,3	11,6	90	10,1	9,5

Die Übereinstimmung der s - mit den s_h -Werten ist nach v. Sterneck befriedigend.

Bezüglich der s -Werte für $\omega < 10^0$ scheidet nun v. Sterneck die Beobachtungen in drei Klassen: in solche bei vollkommen heiterem, bei ziemlich heiterem (einige leichte Wolken aufweisendem) und bei sehr bewölktem Himmel. Tabelle 29 stellt die Mittelwerte dieser Messungen dar. Die Übereinstimmung der s -Werte bei heiterem Himmel mit den s_h -Werten ist nach ihm genügend. Dagegen sind die s -Werte um so größer, je stärker die Bewölkung ist. v. Sterneck erklärt diese Erscheinungen auf folgende Weise. Die Rfl der Sonne ist ein verkleinertes Abbild der Fläche, auf der sich die Sonne zu bewegen scheint, die Rfl des Wolkenhimmels ein verkleinertes Bild des scheinbaren Wolkenhimmels. Da nun nach seiner Auffassung die Vertikalerhebung der erstenen 10,1 m, die der letzteren 12,2 m ist, wir aber die Sonnenbahn nicht innerhalb des scheinbaren Wolkenhimmels verlaufen sehen, so müssen wir „in Gedanken“ an den Rfln Deformationen anbringen. Er glaubt konstatieren zu können, daß diese Deformationen nach keiner Richtung mehr als 40 Proz. des Radiusvektors ausmachen können.

Tabelle 29

ω	Zahl der Beobachtungen														
	1°	2°	2,5°	3°	3,5°	4°	4,5°	5°	5,5°	6°	6,5°	7°	7,5°	8°	9°
$\left\{ \begin{array}{l} \text{bei heiterem} \\ \text{Himmel} \cdot \\ \text{bei ziemlich} \\ \text{heiterem} \\ \text{Himmel} \cdot \\ \text{bei bewölk-} \\ \text{tem Himmel} \cdot \end{array} \right.$	—	23,5	25	24	21,5	—	—	22	—	—	—	21	—	—	—
	—	—	28	24,8	29	26,7	26	25,7	24	22	21	—	—	25	18
	38	37	—	41	42	—	42	41,7	—	38,5	—	—	38,5	—	—

Da nun bei $\omega \geq 20^\circ$ der Sonnendurchmesser keine Abweichungen vom normalen Werte zeigt, so müssen wir schließen, daß in diesen Höhen die Radienvektoren der Rfl des Wolkenhimmels um 40 Proz. verkürzt werden; dann kommen die beiden Flächen zur Berührung. Bei $\omega < 20^\circ$ aber reicht eine Verkürzung um 40 Proz. nicht mehr aus, um die Berührung herzustellen. Wir vergrößern bei $\omega < 20^\circ$ daher gleichzeitig die Radienvektoren der Rfl der Sonne, bis sie 60 Proz. der Radienvektoren der Rfl des Wolkenhimmels betragen. „Dies führt dann zu den bekannten Vergrößerungen des Sonnendurchmessers beim Auf- oder Untergange.“ v. Sterneck nennt diese Verhältnisse den „Wettstreit der Referenzflächen“ und meint, er sei „bloß als eine Beschreibung der Tatsachen“ aufzufassen.

β) Kritische Bemerkungen

Zu der Bestimmung der Rfl der Sonne durch v. Sterneck möchte ich nun verschiedene kritische Bedenken vorbringen, die teilweise für alle seine Bestimmungen gelten.

1. Was ist die Rfl vom psychologischen Standpunkte aus?

Wenn ich die Sehgröße des Sonnendurchmessers in einer bestimmten Höhe mit Hilfe eines

2 m entfernten Maßstabes auf 2 cm schätze, so bedeutet das folgende: Die Sehgröße einer Scheibe von 2 cm Durchmesser in 2 m Entfernung ist für mich gleich der Sehgröße der Sonnenscheibe im Augenblick der Schätzung. Jedenfalls hat die Rfl es also mit Beziehungen im Sehraum zu tun. Nun ist die Rfl weiterhin nichts, was sich im Bewußtsein unmittelbar vorfindet, was anschaulich gegeben ist; sie wird nicht empfunden und nicht vorgestellt. Sie ist nur das, als was wir sie schon in der Einleitung einführten, nämlich ein Mittel zum Zweck einer einheitlichen und einfachen Beschreibung. Zusammengefaßt: Die Rfl ist die geometrische Deutung der funktionalen Beziehung zwischen Sehgröße und Höhe.

Gegen diese (jedem Psychologen übrigens selbstverständliche) Auffassung fehlt v. Sterneck in zwei Punkten.

Erstens ist für ihn die Rfl etwas anderes als ein Denkresultat, dessen Charakter also in seinem logischen Wert bestände. Sie besitzt für ihn vielmehr ausschließlich ein psychisches Sein. Deshalb spricht er von einem Wettstreit der Rfln, bei dem die Flächen aufeinander einwirken; deshalb meint er, sie könnten vorgestellt werden (92, 13), sie beständen in unserem Bewußtsein und verschwänden aus unserem Bewußtsein (91, 580). Demgegenüber braucht ja nur, wie es bereits geschehen, auf die Erfahrung hingewiesen zu werden, die lehrt, daß die Rfln nicht den Charakter psychischer Gebilde haben. Mitunter bricht auch bei v. Sterneck die Erkenntnis durch, daß es sich dabei lediglich um ein Darstellungsmittel handelt. So, wenn er an der schon zitierten Stelle sagt, der Wettstreit sei nur als eine Beschreibung der Tatsachen aufzufassen. Im Grunde aber ist die Rfl in seinen Augen mehr, sonst würde er die Referenzflächentheorie nicht als einen neuen Versuch den „bisher üblichen Erklärungsversuchen“ der scheinbaren Vergrößerung der Gestirne gegenüberstellen. Daß diese Auffassung schon durch seine eigenen Versuche, das „Zustandekommen“ der Rfln zu erklären, widerlegt wird, ist ihm entgangen; diese Versuche sind mit den „üblichen Erklärungsversuchen“ zu vergleichen.

Zweitens bezieht v. Sterneck (wahrscheinlich nicht wissentlich, aber tatsächlich) die Rfln nicht auf den Sehraum, sondern auf den „Urteilsraum“; er gründet sie nicht nur auf die Sehgröße, sondern auch auf die Urteilsgröße. Das zeigt sich zunächst

an seiner konsequenten Berechnung der Radienvektoren auf Grund der Formel

$$\varrho = \frac{s}{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

an seiner Rechnung von ϱ_h auf s_h in Tabelle 28. Beides ist richtig, weil $2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ eine Konstante ist; aber beides ist auch überflüssig, weil die absolute Größe von ϱ gleichgültig ist. Auch nach der Art, wie v. Sterneck seine Methode der Schätzung handhabt, ist das, was er als Sehgröße anspricht, eigentlich eine Urteilsgröße. Das geht meines Erachtens deutlich aus der folgenden Stelle hervor (133, 1702): „Der Durchmesser des Mondes scheint mir 15 cm zu betragen, heißt: Ich halte eine Scheibe von 15 cm Durchmesser für geeignet, den Mond gerade zu verdecken. Frage ich mich, in welche Entfernung von meinem Auge diese Scheibe etwa gebracht werden müßte, um den Vollmond gerade zu verdecken, so werde ich diese Entfernung mit einem Betrage, der von 17 m gewiß nicht weit abweicht, einschätzen.“ Für v. Sterneck ist also nicht die Sehgröße, die 15 cm eines in zufälliger, willkürlicher Entfernung liegenden Maßstabes besitzen, gleich der Sehgröße des Monddurchmessers; sondern er beurteilt diesen Durchmesser zu 15 cm und schätzt (bzw. berechnet nach der obigen Formel) die ungefähre Entfernung der ihn deckenden Strecke danach auf 17 m. Würde hier Sehgröße mit Sehgröße verglichen, so würde die 15 cm-Scheibe nach der Empfindung v. Sternecks die Mondscheibe decken in der Entfernung des Vergleichsmaßstabes, aber nicht in der aus der Formel berechneten Entfernung ϱ . v. Sterneck erzählt zwar über seine Schätzung (92, 9): „Die Schätzung bestand . . . darin, daß auf einem auf dem Tische liegenden Maßstabe von einem Ende an ein der betreffenden scheinbaren Distanz gleiches Stück abgesteckt und die Anzahl Zentimeter abgelesen wurde; wenn man nämlich ohne Maßstab schätzt, so kommt ein neuer Fehler hinzu, der darin besteht, daß man den Maßstab nicht genau im Gedächtnis hat und die betreffende Strecke in eine unrichtige Zahl von Zentimetern umsetzt; das sollte durch den Gebrauch des Maßstabes vermieden werden“. Aber es läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit zeigen, daß er dennoch auch ohne Maßstab beobachtet, d. h. nicht immer

die Sehgröße am Maßstab mit der Sehgröße des Gestirnes verglichen hat, daß er also geschätzt hat. Das folgt direkt aus der Mitteilung, daß er vom Eisenbahnabteil aus bei der Fahrt den Sonnendurchmesser auf 21, 22, bzw. 24 cm schätzte (91, 560). Diese Vergleichung setzt für mich und wohl die meisten Menschen eine Entfernung des Maßstabes voraus (etwa 15 m), die in keinem Eisenbahnabteil der Welt verwirklicht werden kann. Wenn man nicht bei den Vergleichsakten v. Sternecks an eigenartige, von den normalen sehr abweichende psychische Verhältnisse glauben will, so bleibt nur die Annahme übrig, daß die Beobachtungen v. Sternecks keine Vergleichen von Sehgrößen, sondern Schätzungen, also Beurteilungen auf Grund zufälliger Assoziationen sind, die bei ihm so fest und konstant geworden sind, daß er des Maßstabs nur zur Unterstützung bedarf, ihn aber auch ganz entbehren kann. Das scheint indirekt aus den absoluten Angaben von Sehgrößen und Dimensionen der Rfn zu folgen. Wenn v. Sterneck sagt, daß wir den Durchmesser der Sonne bei einem bestimmten Höhenwinkel auf 15 cm schätzen (91, 549), so ist das eine wegen ihrer Absolutheit unbegreifliche Angabe, wenn sie eine Sehgröße betrifft, dagegen einigermaßen verständlich, wenn es sich um eine Urteilsgröße handelt. Entsprechend werden natürlich die Dimensionen der Rfn auch absolut angegeben, z. B. die Vertikalerhebung durchschnittlich mit 12 m (ich habe das schon aus der Darstellung der Rfn ausgemerzt). Er meint zwar, daß der Betrag von 12 m „an sich ein ganz willkürlicher“ sei, fährt indes fort (91, 583): „Da nun aber, wie ich durch die bereits erwähnte Umfrage konstatiert habe, die meisten Menschen auch hinsichtlich der absoluten Größe der Rfn mit meinen Schätzungen übereinstimmen(?), so muß dieser Höhe von 12 m doch irgend welche besondere Bedeutung zukommen. Es dürfte etwa die Entfernung sein, die den meisten Menschen gerade angenehm (!) ist, um bei bequemem Hinaufsehen einen Gegenstand seiner Größe nach abzuschätzen.“ Wenn man nun nicht annimmt, daß die Beobachtungen v. Sternecks Urteilsgrößen betreffen (was übrigens in den letzten Worten des Zitates ziemlich deutlich ausgesprochen ist), dann müßte man es, so schwer es auch fällt, für möglich halten, daß er nicht einmal durch die Erfahrung gelernt hat, wie diese Angaben absoluter Größen von der zufälligen, willkürlich festsetzbaren Entfernung

des Maßstabes abhängig sind. Natürlich wird eine reine, echte Schätzung von Urteilsgrößen auch im ersten Falle nicht vorliegen; denn v. Sterneck wird schwerlich meinen, daß er 15 cm ablesen werde, wenn er die Sonnenscheibe vor sich auf den Tisch und einen Maßstab darauf legen könnte. Es wird vielmehr, wie schon gesagt, eine Beurteilung nicht an der Hand von Erfahrungsmotiven, sondern auf Grund einer zufällig entstandenen Assoziation sein. Und darin liegt natürlich ebensowenig ein sachlicher Grund für absolute Angaben; denn anstatt mit der Vorstellung einer Strecke von 15 cm hätte die Vorstellung des Sonnendurchmessers sich gerade so gut mit der Vorstellung einer Strecke von anderer Länge assoziieren können.

Daß auch Psychologen, die das Problem der Sehgröße am besten verstehen sollten, dem Eindruck einer absoluten Größe bei Sonne und Mond zwangsmäßig verfallen können, zeigen die Mitteilungen von v. Kries (52, 492). Er betrachtet es geradezu als Voraussetzung der Lösung des Problems der Rfn, darüber ins klare zu kommen, „wie es eigentlich zugeht, daß ein absoluter Größeneindruck, und zwar in solcher Diskrepanz mit dem Entfernungseindruck zustande kommt“. v. Kries zeigt durch diese Worte, daß auch er die Verhältnisse nicht ganz durchschaut. Die tägliche Erfahrung, die Notwendigkeit des Lebens zwingt uns, die wirkliche Größe der Dinge als die für uns praktisch wichtigste zu betrachten. Infolgedessen tritt in den meisten Fällen nicht die Sehgröße, sondern die geschätzte Größe ins Bewußtsein, und es bedarf eines besonderen Aktes, um die Sehgröße ins Bewußtsein zu heben. Dadurch ist die von v. Kries als seltsam angesehene Tatsache der absoluten Größe verständlich; der spezielle Maßausdruck dafür ist assoziativ bedingt. Nicht erklärt, wie bei dieser Gelegenheit erwähnt sein mag, ist dadurch die Tatsache, daß bei Sonne und Mond einem sehr kleinen Gesichtswinkel eine bedeutende absolute Größe entspricht, eine weit bedeutendere, als in analogen Fällen bei irdischen Objekten. Hier mag einmal der Faktor der Eindringlichkeit mitwirken, die durch das fast völlig isolierte Bild des Gestirnes auf ziemlich einfarbigem Hintergrund gegeben ist. Dann auch die Ausfüllung der Fläche. Die meisten Menschen werden den Durchmesser der Plejaden von Electra bis Atlas noch nicht so groß wie den Monddurchmesser sehen, und doch ist er fast doppelt so groß.

Dieses erste kritische Bedenken sagt natürlich, falls man die besprochene Assoziation als konstant ansehen darf, nichts über die Güte und Brauchbarkeit der Beobachtungen und die Ableitung der Rfn aus. Man kann, ohne von ihm gehindert zu werden, die sämtlichen Bestimmungen der Rfn, die v. Sterneck macht, übernehmen, wenn man nur bedenkt, daß man die ρ -Werte mit einem beliebigen (positiven, reellen) Proportionalitätsfaktor multiplizieren darf.

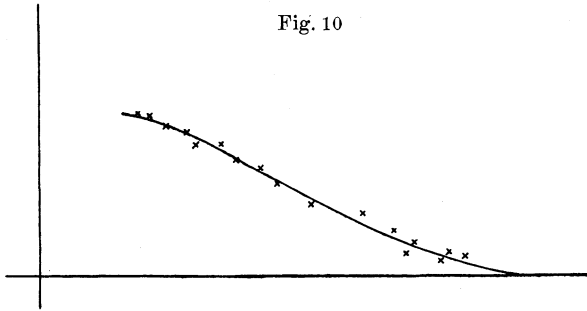
2. Das benutzte Vergleichsobjekt war schlecht gewählt. Schon in dem einleitenden Abschnitt zu diesem Kapitel ist darauf hingewiesen, daß das Vergleichsobjekt besonders den Gestalteeigenschaften der Sonne im Sehraum anzupassen ist, daß also am besten als Vergleichsobjekte kreisförmige Flächen genommen werden. Zunächst vergleicht sich eine Fläche bequemer mit einer Fläche als mit einer Lineargröße. Dann unterliegt man bei dem letzteren Vergleich einer Täuschung, die dem Psychologen und Physiologen längst bekannt ist. Man zeichne einen Kreis und daneben eine Strecke von der Größe des Durchmessers. Jeder, dem man die Zeichnung weist, wird ohne Besinnen bei jeder Lage des Blattes die Strecke für größer erklären als den Durchmesser. Auch wer um den wirklichen Sachverhalt weiß, kann die Täuschung nicht los werden. Um quantitative Ergebnisse zu erhalten, nahm ich vier verschieden große, kreisförmige Flächen von verschiedener Farbe: weiß auf schwarz, rot auf weiß, schwarz auf grau, silber auf braun. Eine solche Fläche hielt ich einige Zentimeter über einen Maßstab, beide natürlich in gleicher Entfernung vom Auge, und griff auf dem Maßstab die Strecke (s) ab, die mir gleich dem Durchmesser (d) zu sein schien. Tabelle 30 enthält die Mittel aus 59 Schätzungen¹⁾.

Tabelle 30

Farbe	d in mm	s in mm	$\frac{d}{s}$
Weiß-schwarz	14,2	11 \pm 0,05	1,29
Rot-weiß	32	27,1 \pm 0,14	1,18
Schwarz-grau	38,5	34,5 \pm 0,09	1,12
Silber-braun	56	49,2 \pm 0,09	1,14

¹⁾ v. Kries teilt von sich selbst gelegentlich mit: $d = 23,6$, $s = 21,58$ (120, 180).

Meines Wissens ist noch keine Gesetzmäßigkeit gefunden, etwa die Größe der Täuschung als Funktion des Durchmessers. Nach den mitgeteilten Beobachtungen sieht es so aus, als ob die Täuschung mit größerem Durchmesser abnehme; doch könnte sich darunter auch ein Einfluß der Farbe oder der etwas verschiedenen Entfernung vom Maßstab (oder andere Umstände) verstecken. Jedenfalls ist sicher, daß in den Schätzungsergebnissen v. Stern- ecks Fehler enthalten sind, die sich in unbekannter Weise auf den Bereich der benutzten Höhen verteilen. Die Art der Rfl, wie sie in der folgenden Nummer festgestellt wird, braucht aber durch die Täuschung nicht verwischt zu werden. Wenn wir die von den vorhin mitgeteilten Beobachtungen nahegelegte Funktion zwischen der Größe der Täuschung und der Größe des Durchmessers als

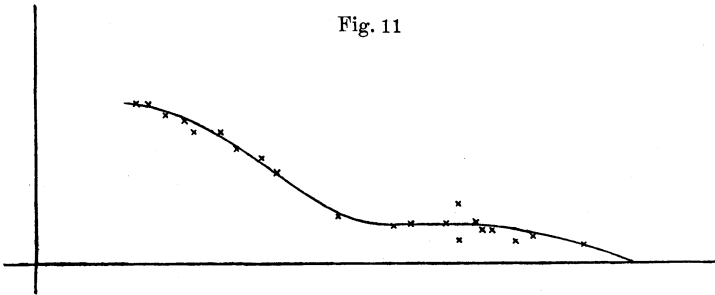


richtig ansehen, dann genügt eine Vergrößerung der Charakteristik, um die Fehler der Täuschung zu korrigieren. Über die Größe der Korrektur wissen wir allerdings nichts.

3. Es läßt sich auch hier zeigen, daß die Rfl der Sonne durch eine Rotationsfläche, deren Erzeugende ein Kegelschnitt ist, unmöglich dargestellt werden kann. Fig. 10 gibt die empirische Kurve bei heiterem Himmel. Sie ist ganz unzweideutig eine Kurve mit einem Wendepunkt in dem betrachteten Winkelraume.

Streicht man in den Ausführungen v. Sternecks über den „Wettstreit“ all das Seltsame, was über die Rfln und das, was wir mit ihnen tun sollen, behauptet wird, so bleibt als Aussage über eine Tatsache die folgende, daß nach den Beobachtungen die Rfln der Sonne bei bewölktem Himmel und des Wolkenhimmels mehr oder weniger äquivalent sind. In Fig. 11 ist die empirische Kurve bei leicht bewölktem Himmel dargestellt. Ein Vergleich

mit Fig. 8 zeigt, daß wenigstens eine Tendenz zur unvollkommenen Äquivalenz besteht. Ich gebe die Kurve für den stark bewölkten Himmel hier nicht wieder, weil ihr Verlauf in niederen Höhen wegen der starken Streuung der Werte zu unsicher ist; sie scheint ebenfalls zwei Wendepunkte in dem Quadranten zu besitzen.



c) Aloys Müller

Meine Beobachtungen zur Rfl der Sonne sind nur Bruchstücke.

Ich wollte zunächst durch Messungen entscheiden, ob die Änderung der Sehgröße auch beim Betrachten durch eine enge Röhre vorliegt. Ich schnitt in den einen Deckel einer 56 cm langen Röhre zwei Fenster. Vor dem einen dieser Fenster wurde die Irisblende eines Mikroskopes befestigt. Die Blende besaß eine gleichmäßige Teilung, und ich hatte mich zuvor durch Messungen überzeugt, daß der Durchmesser der Blendenöffnung sich mit genügender Genauigkeit proportional den Abständen der Teilstriche änderte. Das zweite Fenster war quadratisch und besaß, von einer am anderen Ende der Röhre angebrachten Öffnung aus gesehen, einen Gesichtswinkel von $1^{\circ} 19'$; die Mittelpunkte von Fenster und Blendenöffnung lagen dann für das Auge rund 4° auseinander. Beide Öffnungen wurden beim Beobachten so durch Blendgläser abgeblendet, daß die Helligkeiten der Sonnenfläche und der Blendenöffnung annähernd gleich waren. Das freie Fenster war quadratisch gewählt, um die Größentäuschung beim Kreis im Kreise zu vermeiden. Das Fenster war klein genug, um jeden Einfluß des freien Gesichtsfeldes auszuschließen, und groß genug, um selber wahrscheinlich auf die Sehgröße der Sonne ohne Einwirkung zu sein. Die Aufgabe bestand darin, die Sehgröße der

Blendenöffnung der Sehgröße der Sonne bei monokularer Beobachtung gleich zu machen. Es wurden für jede Höhe stets drei Beobachtungen angestellt, wobei natürlich darauf geachtet wurde, daß die Einstellung der Blende abwechselnd in dem einen und in dem anderen Sinne erfolgte und stets dasselbe Auge benutzt wurde. Tabelle 31 und Tabelle 32 bringen zwei Reihen dieser Messungen, die von je einem Tage stammen. Die kleinen Verschiedenheiten von s rühren nicht nur von den Beobachtungsfehlern her, sondern auch davon, daß die nicht geschliffenen und deshalb bildverzerrenden Blendgläser vorgehalten werden mußten und so bald mit diesem, bald mit jenem Teile vorlagen. Die Beobachtungen genügen wohl zu dem Beweise, daß die Sehgröße der Sonne unter den vorliegenden Bedingungen in allen Höhen konstant ist.

Tabelle 31

Von 20^0 an zwischen Wolken. Von 2^0 an hinter Wolken verschwunden
10. 9. 16

ω	s	ω	s	ω	s	ω	s
37,5 ⁰	1,6	25 ⁰	1,5	10 ⁰	1,7	4 ⁰	1,7
	1,5		1,5		1,6		1,5
	1,6		1,7		1,6		1,6
34	1,6	20	1,5	7	1,6	2	1,7
	1,7		1,5		1,7		1,5
	1,5		1,6		1,5		1,5
30	1,7	15	1,6	5	1,6		
	1,6		1,6		1,5		
	1,7		1,6		1,6		

Tabelle 32

Unter $2,5^0$ in der Dunstschicht am Horizont verschwunden
22. 9. 16

ω	s	ω	s	ω	s	ω	s
39,5 ⁰	1,6	26 ⁰	1,7	14 ⁰	1,6	7 ⁰	1,7
	1,7		1,5		1,5		1,5
	1,5		1,5		1,6		1,5
33	1,5	18	1,5	10	1,5	2,5	1,6
	1,6		1,5		1,7		1,5
	1,7		1,6		1,5		1,5

Bei den Messungen im freien Gesichtsfelde, die übrigens nur provisorisch sind und mit etwas anderem Verfahren fortgesetzt werden, ging ich in folgender Weise vor. In dem Katalog einer Pulverfabrik waren die Schrotsorten Nr. 1 bis PI in schwarzen Kreisflächen auf weißem Grunde in zwei übereinanderliegenden Reihen bildlich dargestellt. Die Millimetergröße des Durchmessers (4, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, 5, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7, 8, 9, 10 mm) stand unter jeder Scheibe. Dieses 9 cm lange und 4,5 cm breite Stückchen starken Kartons schnitt ich aus und befestigte es mit einem auswechselbaren Blendglase an dem einen Ende einer 53 cm langen Stange, die beim Beobachten mit dem anderen Ende senkrecht zur Frontalebene des Kopfes auf die Oberlippe gesetzt wurde. Ich benutzte einen Satz von acht Blendgläsern, die, mit dem schwächsten beginnend, numeriert wurden und so zur Intensitätsvergleichung dienten. Die Sonne wurde immer nur so weit abgeblendet, daß ihr Licht für mein Auge nichts Unangenehmes mehr hatte. Warum die Intensitätswerte beigefügt werden, wird sich später ergeben. Dann hatte ich mir eine Serie von 3 cm im Durchmesser haltenden farbigen Kreisflächen hergestellt, die, mit Weißgelb beginnend, durch Beimischung von Rot in zehn Stufen zum Zinnoberrot und in drei weiteren Stufen zu dem öfters zu beobachtenden Karmin der untergehenden Sonne führten; sie wurden in dieser Folge numeriert. Da die Farbenänderung der Sonne hauptsächlich auf der spektralen Extinktion in der Staubatmosphäre beruht, ist die Farbe ein Mittel zur qualitativen Messung der Reinheit der Luft. Von den Blendgläsern mußten wenigstens die Nummern 7 und 8 ziemlich groß sein, um den störenden Einfluß der hellen Umgebung der Sonne abzuhalten. Bei der Beobachtung, die immer monokular gemacht wurde, wurde das Sonnenbild, um die bekannte Täuschung fernzuhalten, nicht über dem Karton, sondern neben ihm gesehen. Es mußte dann die Scheibe bestimmt werden, deren Sehgröße der Sehgröße der Sonne gleich war. Dabei wurde stets so verfahren, daß bei zwanglosem Gleitenlassen des Blickes von einem zum anderen die zwei Scheiben gesucht wurden, deren Sehgrößen deutlich größer bzw. deutlich kleiner als die Sehgröße der Sonne waren. Das Mittel zwischen beiden wurde notiert. Es kam natürlich auch manchmal eine sofortige, ganz sichere Größenidentifizierung vor.

Horizont und Gelände sind schon früher bei den Mitteilungen der α -Beobachtungen beschrieben. Überschneidungen der Hori-

Tabelle 33

16. 8. 16. Cumulonimbus. Unter 170 hinter Wolken				26. 8. 16. Ganz klare Luft direkt nach Gewitter. Unter 200 durch aufsteigende Wolken verdeckt				10. 9. 16. Blauer Himmel. Etwas neblig. Von 200 an Wolken. Unter 200 hinter Wolken				22. 9. 16. Cumulus. Von 4,50 an hinter Wolken			
ω	s	I	F	ω	s	I	F	ω	s	I	F	ω	s	I	F
52,50	4,5	8	2	14 ⁰	6	8	2	38 ⁰	5	8	1	40 ⁰	4,75	8	2
51	4,5	8	2	11	6-6,5	8	2	34	5	8	1	37,5	4,75	8	2
47,5	4,75	8	2	8,5	6-6,5	8	2	30,5	5 1/4	8	1	33,5	4,75	8	2
40	4,75	8	2	6	6-6,5	8	2	25,5	5 1/4	8	1	26	4,75-5	8	2
35	4,75	8	2	4,5	6-6,5	8	2	20	5 1/4	8	1	18,5	5	8	2
29	5	8	2	2	6,5	7	3	15	5 1/4-5 1/2	8	1	13,5	5-5 1/4	8	2
22,5	5,5	8	2	—	—	—	—	12,5	5 1/4-5 1/2	8	1	4,5	5,5	8	2
19	6	8	2	—	—	—	—	10,5	5,75	8	1	—	—	—	—
17	6	8	2	—	—	—	—	9	5,75	8	1	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	7	6	6	2	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	5,5	6	7	2	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	4	6-6,25	7	3	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	3	6-6,25	6	4	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	2	6-6,25	5	5-6	—	—	—	—

zontlinie in der Nähe der Sonne waren nicht vorhanden. Beobachtet wurde ausschließlich auf individuelle Rfn. Es wurden also niemals die Resultate verschiedener Tage zur Erhaltung einer mittleren Rfl zusammengefügt. Darin liegt der Hauptgrund, weshalb ich in dem Sommer 1916, der wegen seiner Witterung für solche Beobachtungen äußerst ungünstig war, keine einzige, möglichst vollständige Rfl erhalten habe. Tabelle 33 bringt vier Reihen von Beobachtungen. *I* bedeutet die Intensität, *F* die Farbe. Die graphische Darstellung ergibt Kurvenstücke mit je einem mehr oder weniger deutlich ausgeprägten Wendepunkte. Aus diesen und anderen Beobachtungen scheint der Satz zu folgen: Je reiner die Luft ist, desto größer ist die Charakteristik, desto tiefer liegt der Wendepunkt und desto geringer ist die Änderung des Krümmungssinnes ausgeprägt.

Daß bei der beschriebenen Art der Beobachtung noch psychologische Täuschungen hineinspielen können, weiß ich, vor allem durch den Vergleich einer hellen Scheibe auf dunklem Grunde mit dunklen Scheiben auf hellem Grunde. Ich glaube aber wegen des kleinen Bereiches der überhaupt vorkommenden Änderungen der Sehgröße nicht, daß die relative Beeinflussung der Werte durch solche Umstände merklich groß ist, und darauf allein kommt es hier an. Übrigens sind bei den Beobachtungen an der Sonne Täuschungen überhaupt unvermeidlich, vor allem solche durch den Kontrast. Es gilt nur, sie möglichst klein zu halten.

3. Die Referenzfläche des Mondes

a) Pozděna

Pozdena (74) ersetzte an einem allseitig geschlossenen, von innen durch eine Glühlampe erleuchteten Kästchen eine Wand durch zwei gewöhnliche Glasplatten. Zwischen sie konnte er eine kleinere oder größere Anzahl gelber und rötlicher geölter Blätter Seidenpapier legen und auf diese Weise Farbe und Helligkeit des Mondes ziemlich gut nachmachen. Vor dieser Wand war eine Scheibe drehbar, die eine Reihe von Ausschnitten besaß, deren Durchmesser von 10 mm bis 100 mm um je 2 mm wuchsen. Der Apparat war in der Höhe verstellbar, so daß das künstliche Mondbild immer neben den wirklichen Mond fiel. Seine Entfernung vom Auge wurde stets auf 4 m gehalten. Die Versuchsperson

hatte die Aufgabe, die Scheibe so lange zu drehen, bis die Sehgröße des Ausschnittes gleich der Sehgröße des Mondes war. Da Pozděna der Meinung ist, man sehe den Mond dann in seiner „wahren Größe“, wenn auch die Gesichtswinkel von Ausschnitt und Mond gleich seien, so konnte er das in diesem Falle vorliegende ω leicht bestimmen. Denn wenn s' die Sehgröße und a die Entfernung des Ausschnittes, γ den mittleren Gesichtswinkel des Mondes bedeuten, so ist

$$s' = 2 a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Er braucht also bloß die Höhe abzuwarten, wo $s = s'$ war. Beobachtet wurde im Horizont, bei der Kulmination und in der vorhin definierten Höhe. Die Höhe der Kulmination oder wenigstens die geographische Breite, unter der die Beobachtungen angestellt wurden, ist nicht angegeben. Als Werte der Charakteristik werden aus den Sehgrößen bei der Kulmination und im Horizont für drei Versuchspersonen berechnet: 1:2,4, 1:2,6, 1:2,8. Der dritte Wert gilt für eine kurzsichtige Versuchsperson. Bei starkem nervösen Kopfschmerz sank der zweite Wert auf 1:3,83.

So gut bei diesen Beobachtungen die Apparatur war, so schlecht wurde sie benutzt. Anstatt in möglichst vielen Höhen zu messen, wurden nur drei Höhen gewählt. Daraus läßt sich keine R_f herleiten. Dazu kommt, daß zwar so überflüssige Dinge wie Situationsplan, Grundriß, Aufriß und Seitenriß des Ortes der Beobachtung mitgeteilt, aber wichtige Daten zum Gebrauch der Beobachtungen verschwiegen werden. Ich habe deshalb auch auf die Anführung von Einzelheiten verzichtet. Die Berechnung der Charakteristik ist ungenau, weil das ϱ der Kulmination benutzt und nicht ϱ_K abgeschätzt wurde. Über die „wahre Größe“ haben wir schon in der Einleitung gesprochen. Was zur Konstruktion und mathematischen Behandlung der R_fn mitgeteilt wird, ist unglaublich umständlich und ziemlich ohne Wert (64, 549).

b) v. Sterneck

Da der Gesichtswinkel des Mondes sich verhältnismäßig stark ändert, ist er bei jeder einzelnen Bestimmung des Radiusvektors zu berücksichtigen. v. Sterneck unterscheidet die Beobachtungen bei Tage, in der Dämmerung und bei Nacht (91, 571).

α) Die Referenzfläche des Mondes bei Tage

Tabelle 34 enthält die Beobachtungen für $\omega \geq 12^\circ$. γ bedeutet wie früher den Gesichtswinkel, d die Abweichung vom Radiusvektor der Rfl der Sonne.

Tabelle 34

ω	s	γ	ϱ	Mittel	d
12 ⁰	17,5	33'	18,2	18,0	- 0,2
15	17	33	17,7		
19	16	31	17,7	17,1	+ 0,4
20	17	33	17,7		
22	14,5	31	16,0	16,6	+ 1,1
23	16	30	18,3		
26	13,5	31	14,9	14,6	+ 0,1
29	14	33	14,6		
33	15	32	16,1	14,7	+ 1,1
33	12	31	13,3		
38	14,5	32	15,5	14,6	+ 1,7
39	12	31	13,3		
40	13	30	14,9	12,6	+ 0,3
46	11	30	12,6		
49	11,5	30	13,2	12,8	+ 1,0
50	11	30	12,6		
50	11	30	12,6	13,1	+ 1,7
54	11	31	12,2		
55	12	30	13,8	11,5	+ 0,5
56	12	31	13,3		
61	10	30	11,5		

Die Differenzen d sind nicht sehr groß, so daß man sagen kann, daß für $\omega \geq 12^\circ$ die Schätzungen des Monddurchmessers ungefähr auf dieselbe Rfl bezogen werden wie die Schätzungen des Sonnendurchmessers. Bei $\omega < 12^\circ$ tritt ein Unterschied ein, je nachdem Wolken vorhanden sind oder nicht. Tabelle 35 bringt für beide Fälle die Werte der Beobachtungen. s_h ist wie bei der Sonne der normale Durchmesser, der unter Zugrundelegung eines von der Rfl der Sonne ganz wenig verschiedenen Hyperboloids mit dem jedesmal vorhandenen Gesichtswinkel berechnet worden ist. Von den Änderungen des Gesichtswinkels rührt der einmal vorkommende doppelte Wert von s_h her; der obere gehört zu dem ersten, der untere zu dem zweiten s . Man sieht, daß der Durch-

messer bei fast heiterem Himmel von dem normalen nicht sehr verschieden ist, aber bei bewölktem Himmel stark von ihm abweicht.

Tabelle 35

ω	5 ⁰	7 ⁰	8 ⁰	9 ⁰	10,5 ⁰	11 ⁰	12 ⁰	Zahl der Beobachtungen
s { bei fast heiterem Himmel	—	—	21,3	21	21	17	19,3	6
{ bei bewölktem Himmel . .	36	33	31	—	—	—	29	4
s_h	21,8	20,9	{ 18,8 20,4 }	18,5	17,9	17,7	18,8	—

β) Die Referenzfläche des Mondes in der Dämmerung

Die Dämmerung ist gerechnet vom Sonnenuntergang bis zu dem Zeitpunkt, wo die Sonne sich etwa 8⁰ unter dem Horizont befindet und wo nahezu völlige Dunkelheit eingetreten ist. Tabelle 36 enthält die Beobachtungen von zwei Tagen. Die s -Werte sind in der ersten Hälfte der Dämmerung wie bei den Tagesbeobachtungen, in der zweiten wie bei den gleich zu besprechenden Nachtbeobachtungen berechnet. Der Monddurchmesser erscheint also im Vergleich zu s bis zu Höhen über 12⁰ in der Dämmerung stark vergrößert, nähert sich aber mit zunehmender Dunkelheit seinem normalen Werte.

Tabelle 36

ω	5 ⁰	7 ⁰	10 ⁰	12 ⁰	14 ⁰	15 ⁰	Zahl der Beobachtungen
s	30	30	25	24	23	19,5	6
s_h	21,8	20,9	19,7	18,8	19,1	18,8	—

ω	14 ⁰	16 ⁰	18 ⁰	19 ⁰	24 ⁰	Zahl der Beobachtungen
s	27	25	24	20	18	5
s_h	18,1	17,5	18,0	17,8	16,8	—

γ) Die Referenzfläche des Mondes bei Nacht

In Tabelle 37 sind die Nachtbeobachtungen bei $\omega \geq 12^\circ$ zusammengestellt. d bedeutet hier die Abweichung von dem Radiusvektor der später zu besprechenden Rfl des Sternenhimmels.

Tabelle 37

ω	s	γ	ϱ	Mittel	d
15 ⁰	16	30'	18,3	}	- 0,2
15	19,5	33	20,3		
15	18	33	18,8	}	+ 1,3
18	18,5	33	19,3		
18	19	33	19,8	}	+ 1,3
19	20	33	20,8		
20	18	33	18,8	}	+ 1,7
20	17	32	18,3		
24	18	33	18,8	}	+ 0,1
28	16,5	33	17,2		
28	16	33	16,7	}	- 1,2
32	14,5	33	15,1		
37	12,5	30	14,3	}	- 0,8
39	13	31	14,4		
42	13	33	13,5	}	+ 0,7
46	13	30	14,9		
50	13	30	14,9	}	+ 1,1
51	13	30	14,9		
55	11	30	12,6	}	+ 0,8
57	14	30	16,0		
60	12	30	13,8	13,8	+ 0,8

Die Unterschiede d sind so gering, daß v. Sterneck den Monddurchmesser bei Nacht für bezogen erklärt auf die Rfl des Sternenhimmels. Bei $\omega < 12^\circ$ sind Unterschiede vorhanden je nach der Stärke, mit der der Mond den umgebenden Teil des Himmels beleuchtet. Tabelle 38 bringt vier Serien von solchen Beobachtungen.

Bei $\omega < 12^\circ$ erscheint also der Mond in der Nacht um so größer, je mehr er die Umgebung am Himmel erleuchtet.

Auch die „Erklärung“ dieser Erscheinungen gründet v. Sterneck auf das gegenseitige Verhalten der Rfln. Bei Tage besteht nur eine Rfl „in unserem Bewußtsein“, nämlich die der Sonne.

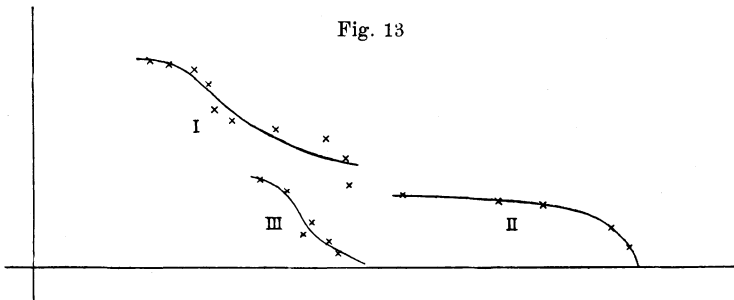
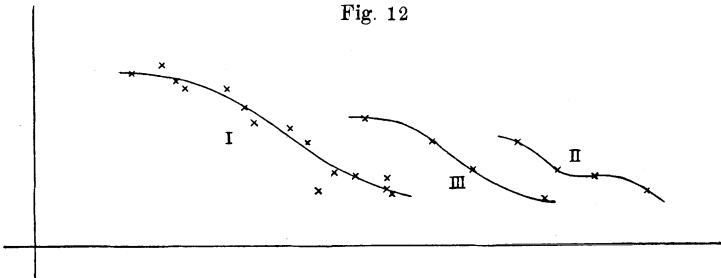
Tabelle 38

I. Umgebung ziemlich hell er- leuchtet			II. Umgebung weniger erleuchtet als bei I			III. Umgebung fast gar nicht er- leuchtet			IV. Umgebung vollständig dunkel		
ω	s	s_h	ω	s	s_h	ω	s	s_h	ω	s	s_h
2 ⁰	35	33,0	5 ⁰	27	21,0	9 ⁰	22	19,0	2,5 ⁰	18,0	20,3
4	34	22,3	9	28	20,0	11	21	18,4	5	17,5	19,5
7	30	21,2	—	—	—	—	—	—	7	16,0	18,9
8	29	20,8	—	—	—	—	—	—	9	16,5	18,4
8	26	20,8	—	—	—	—	—	—	17	15,5	16,3
11	22	19,8	—	—	—	—	—	—	22	14,5	15,4
Zahl der Beobach- tungen	6	—	—	2	—	—	2	—	—	6	—

Auf sie beziehen wir den Mond. Die Deformation durch Bewölkung muß hier um so mehr eintreten, als „ja am Tage der tiefstehende blasse Mond von einem weißen Wölkchen selbst kaum unterscheidbar ist“. Nach dem Untergang der Sonne tritt eine neue Rfl auf, die dem ziemlich hellen Himmelsgewölbe ihre Entstehung verdankt und sich „jedenfalls“ in horizontaler Richtung weiter erstreckt als die Rfl der Sonne. Auf sie wird der Mond in der Dämmerung bezogen. Mit zunehmender Dunkelheit zieht sich die Rfl des Dämmerungshimmels mehr und mehr zusammen, bis sie schließlich in diejenige des Sternenhimmels übergeht. Wenn nun jetzt der Mond einen großen Teil seiner Umgebung ziemlich hell erleuchtet, so wird die bereits „entschwundene“ Rfl des Dämmerungshimmels in einer der von ihr durchlaufenen Phasen wieder „aufleben“ und zu einer Deformation führen, die in der Richtung auf den Mond zu in einer Erweiterung der Rfl des Sternenhimmels besteht und eine stärkere Vergrößerung verursacht. Diese Deformation nimmt mit der Stärke der Beleuchtung ab. —

Wenn man die Kurven der Werte empirisch behandelt, so entstehen wieder andere Bilder, als die Bearbeitung v. Sternecks sie zeigt. In Fig. 12 gibt das Kurvenstück I die Tagbeobachtungen ohne Bewölkung, das Stück II die Tagbeobachtungen mit Bewölkung wieder. I besitzt einen, II zwei Wendepunkte. Arbeitet man die Dämmerungsbeobachtungen ineinander, so entsteht das Kurvenstück III. Bei II und III ist natürlich den Werten der

Zeichnung zu viel Gewicht beigelegt; es bleibt aber kaum etwas anderes übrig. Fig. 13 stellt die Nachtbeobachtungen für $\omega > 12^\circ$ (I), bei ziemlich hell erleuchteter (II) und bei dunkler Umgebung (III) für $\omega < 12^\circ$ dar. I und II besitzen je einen Wendepunkt. Der Gang der Werte bei I ist nicht eindeutig. Man könnte, wenn man den Beobachtungen mehr Gewicht beilegt, auch



ein Kurvenstück mit zwei Wendepunkten zeichnen. I und II bzw. I und III stellen je ein zusammengehöriges Kurvenstück dar, da sie sich ja auf mittlere Rfn beziehen.

4. Die Referenzfläche der Sterne

Keiner Rfn von Gestirnen sind so viele Untersuchungen gewidmet wie derjenigen der Sterne. Der Grund wird wohl darin liegen, daß in den Sternen selber, wie Smith (1, 58) schon wußte, die bequemsten Vergleichsobjekte zu finden sind, wodurch die früher gestellte Bedingung für solche Vergleiche fast vollkommen erfüllt wird.

a) Stroobant

Der erste, der die Rfl der Sterne zu bestimmen versucht hat, scheint Stroobant gewesen zu sein.

Er nahm (97) zwei Sterne in der Nähe des Horizontes (unter 15°) und suchte im Zenit zwei Sterne, deren Entfernung derjenigen des ersten Paares gleich erschien. Die wirklichen Entfernungen wurden durch Messen an einem Sternglobus in Millimetermaß dargestellt.

Stroobant ist auf die Fehler aufmerksam geworden, die solche Schätzungen mit sich bringen, schlägt sie aber nicht hoch an. Abgesehen von der Schwierigkeit, überhaupt zwei passende Vergleichssterne zu finden, von den Intensitätsschwankungen der Sterne am Horizont, von dem störenden Einfluß der zwischenliegenden Sterne waren nach ihm vor allem zwei Schwierigkeiten vorhanden.

1. Dadurch, daß nicht Sterne im Horizont, sondern in der Nähe desselben genommen wurden, konnte bei ihrer scheinbaren Entfernung schon eine Verkleinerung gegen die Lage im Horizont eingetreten sein. Einige Beobachtungen ergaben ihm aber, daß für ihn bis 15° keine Änderung eintrat:

- a) 18. April $8^h 15^m$ (Venus-Saturn) $> (\beta - \gamma) < (\beta - \nu)$ Urs. mai.
 $9^h 45^m$ (Venus-Saturn) $> (\beta - \gamma) < (\beta - \nu)$ Urs. mai.
 b) 18. April $8^h 20^m$ (Saturn- α Tauri) $= (\nu - \varphi)$ Urs. mai.
 $9^h 10^m$ (Saturn- α Tauri) $= (\nu - h)$ Urs. mai.

Die Entfernung $(\nu - h)$ Urs. mai. ist ein wenig kleiner als $(\nu - \varphi)$ Urs. mai.; jedoch kann der Unterschied hier vernachlässigt werden.

2. Die als gleich geschätzten Sternentfernungen haben die verschiedensten Neigungen zueinander. Nun erscheinen gleichlange Linien horizontal und vertikal verschieden groß. Stroobant fand aber durch (nicht mitgeteilte) Beobachtungen, daß die Korrektion im Maximum (d. h., wenn die verglichenen Entfernungen einen rechten Winkel bildeten) im Verhältnis zu dem mittleren Fehler der Beobachtungen sehr schwach war (4%).

Die Tabelle der bis jetzt beschriebenen Beobachtungen Stroobants mitzuteilen, hat keinen Wert, weil sie kein Mittel zur Bestimmung der Art der Rfl bietet. Sie gibt nur die Charakteristik.

Setzt man die Zenitentfernung der Sterne gleich 100, so ist das Mittel der Horizontentfernungen 79,7, die Charakteristik also 1:1,25.

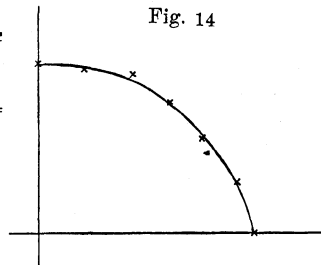
Stroobant gibt gleichzeitig den Bewölkungszustand, die Feuchtigkeit der Luft und das Mondalter an. Ich habe die Charakteristik nach den Unterschieden innerhalb dieser Gruppen für einige Fälle berechnet. Es finden sich kleine Verschiedenheiten (z. B. 1:1,26 bei heiterem, 1:1,24 bei bewölktem Himmel); sie sind aber zu gering, als daß sie innerhalb der Beobachtungsfehler eine Bedeutung haben.

Später (98) hat Stroobant versucht, nach derselben Methode Beobachtungen für verschiedene Höhen (von 15^0 zu 15^0) zu machen, also die Rfl des Sternenhimmels zu finden; er suchte also zu Sterndistanzen in diesen Höhen gleiche Entfernungen im Zenit. Seine Resultate stehen in Tabelle 39. Die Zenitentfernung ist gleich 100 gesetzt. Die Kolonne der ϱ -Werte habe ich beigefügt ($\varrho_R = 1$). Die Beobachtungen erstrecken sich etwa über zwei Monate. Den Meridianschnitt der Rfl zeigt Fig. 14.

Tabelle 39

ω	Sterndistanzen	Zahl der Beobachtungen	ϱ
0^0	79,7	32	1,25
15	84,2	5	1,19
30	90,5	5	1,10
45	92,6	6	1,08
60	93,8	5	1,07
75	100,9	5	0,99

Fig. 14



Stroobant hat den Fehler, der durch die Neigungen der Sterndistanzen gegeneinander entsteht, richtig erkannt, täuscht sich aber, wahrscheinlich verführt durch unzulängliche Beobachtungen, über seine Größe. Nach seinen Worten muß man annehmen, daß der Fehler für ihn 4% des mittleren Fehlers der Beobachtungen betrug. Dieser mittlere Fehler ist $\pm 7,5$. Nach einer Untersuchung von Ebbinghaus (25, 66) beträgt aber die Überschätzung der vertikalen Strecke beim Maximum der Täuschung etwa $3\frac{1}{2}\%$, nach Wundt (101, 591) bei Punktdistanzen (wie sie ja hier in Wirklichkeit vorliegen) sogar 25%.

Ein Widerspruch liegt darin, daß nach der zweiten Beobachtungsgruppe die Erhebung von 0° bis 15° einen Einfluß ausübt (siehe Tabelle), nach der ersten nicht. Da nun dieser Einfluß nach allem, was wir wissen, sicher vorhanden ist, so ist die Zahl 79,7 bei 0° nicht brauchbar; denn sie enthält Werte von Sternpaaren mit mehr als 0° Höhe. Sie muß für Stroobant kleiner, das entsprechende ϱ also größer sein. Das wird die Kurve, die ohnehin so aussieht, als ob sie zwischen 15° und 45° ihren Krümmungssinn ändern wolle, vermutlich zu einer wenn auch nur schwach ausgebildeten Wendepunktskurve machen.

b) Deichmüller

Die Beobachtungen Deichmüllers (20) erstrecken sich zwar auf alle Gestirne. Weil sich aber als einzige konstruierbare Rfl bei ihm die Rfl der Sterne findet, sei er in diesem Abschnitte erwähnt.

Seine Methode¹⁾ war folgende. Fällt man von einem Stern in seiner Vertikalebene die Senkrechte auf die Horizontebene, so wird diese Senkrechte dem Beobachter um so näher rücken, je höher der Stern steigt, um so weiter von ihm abrücken, je mehr er sinkt. Befindet sich in der Vertikalebene ein hoher Gegenstand, z. B. eine Turmspitze, dann ist es möglich, daß sie in eine solche Senkrechte hineinfällt. Wenn nicht, dann kann sie durch Veränderung des Standpunktes des Beobachters leicht dazu gebracht werden; je nachdem der Beobachter sich dem Turme nähert oder von ihm entfernt, kann er bewirken, daß der Stern gerade über ihm zu stehen scheint. Bezeichnet man die Entfernung des Beobachters vom Fußpunkt des Hilfsgegenstandes (Turmes oder dgl.) mit c , so ist die scheinbare Entfernung des Sternes

$$\varrho = \frac{c}{\cos \omega}.$$

ϱ wird als Radiusvektor der Rfl betrachtet. Die größte Anzahl der von Deichmüller veröffentlichten ϱ -Werte eines Objektes enthält die Tabelle 40, die sich auf den Sternenhimmel bezieht. Die Höhe des Hilfsgegenstandes betrug 7,15 m.

¹⁾ Es ist genau dieselbe, die Folkes seinem Freunde Smith mitteilte (I, 416).

Tabelle 40

ω	ϱ	ω	ϱ	ω	ϱ
31,8 ⁰	48,2	50,5 ⁰	34,0	76,7 ⁰	13,9
32,0	48,0	50,5	35,7	77,6	11,2
41,8	43,8	50,6	35,9	77,7	11,7
50,5	35,2	50,6	34,3		

Der Meridian der Rfl, soweit er aus diesen Beobachtungen konstruierbar ist, ist eine Kurve, die gegen den Anfangspunkt, also den Beobachter, zu stark abfällt. Die übrigen mitgeteilten Beobachtungen sind entweder, soweit sie sich auf dieselbe Rfl und dieselbe Höhe des Hilfsgegenstandes beziehen, sehr gering an Zahl (höchstens 3) oder sie sind ohne Höhenangaben. Deichmüller arbeitet seine Beobachtungen für dieselbe Höhe des Hilfsgegenstandes, aber für verschiedene Rfln ineinander zu einer Kurve, die gegen den Beobachter fällt und am Horizont asymptotisch zu verlaufen scheint; sie besitzt also in dem konstruierten Stück einen Wendepunkt. Daß die Höhe des Hilfsgegenstandes die absolute Größe von ϱ beeinflusst, ist im vorhergehenden schon indirekt gesagt.

Die Mitteilungen Deichmüllers waren nur vorläufig; eine größere Publikation ist durch seinen Tod verhindert worden. Über seine Bearbeitung der Beobachtungen braucht wohl kein Wort mehr verloren zu werden. Die Größe von ϱ scheint auch relativ von der Höhe des Hilfsgegenstandes abzuhängen. Die Einstellung des Hilfsgegenstandes in die Senkrechte vom Stern auf die Horizontebene ist nur in mittleren Höhen einigermaßen sicher. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß sie bei großen, vor allem aber bei kleineren Höhen einfach unmöglich ist. Schließlich müßte c offenbar nicht die wirkliche, sondern die scheinbare Entfernung bedeuten.

Deichmüller hat diese Einwände teilweise als berechtigt anerkannt und wenigstens bezüglich des letzten Punktes eine Korrektur versucht, allerdings auf einem ganz falschen Wege. Heute wäre es vielleicht möglich, die Theorie der scheinbaren Entfernungen auf seine Beobachtungen anzuwenden, wenn sie es wegen ihrer Zahl und ihres Charakters verdienen würden.

c) Brenke

Brenke (14) arbeitete mit einer Klasse von Ingenieur-Studenten (Hochschultechnikern, wie wir sagen würden), die von dem Zweck der Beobachtungen nichts wußten. Geschätzt wurden die Abstände der sieben bekannten Sterne des Großen Bären, der Sichel¹⁾ und des Dreiecks δ , ψ , β im Löwen, der Hauptsterne im Raben und von fünf Sternen im Großen Hund. Als Maßeinheit wurde die Entfernung $\alpha - \beta$ der Zwillinge benutzt, wenn ihr Mittelpunkt im Zenit stand. Die Schätzungen wurden auf dem Dach des Observatoriums gemacht bei fast auf 270° im Azimut unbehindertem Horizont. Ihre Anzahl betrug 552. Der wahrscheinliche Fehler eines Mittels der Schätzungen ist $\pm 0,15^\circ$. In Tabelle 41, die die Schätzungen registriert, bedeutet γ die wirklichen, γ' die nach der Schätzung berechneten Gesichtswinkel.

Tabelle 41

ω	γ	γ'	$\frac{\gamma'}{\gamma}$	Zahl der Beobachtungen	ω	γ	γ'	$\frac{\gamma'}{\gamma}$	Zahl der Beobachtungen
8 ⁰	9,7 ⁰	12,4 ⁰	1,28	19	31 ⁰	10,2 ⁰	12,0 ⁰	1,18	20
15	8,2	10,2	1,24	21	32	3,5	3,9	1,11	14
15	8,6	11,7	1,36	22	33	4,4	5,1	1,16	20
17	8,5	11,0	1,31	20	38	7,9	9,1	1,18	20
19	10,2	13,4	1,31	20	42	5,2	6,1	1,17	20
19	6,7	7,9	1,18	20	42	4,0	4,8	1,20	20
22	3,5	4,3	1,23	22	44	5,1	6,0	1,18	20
22	5,1	6,3	1,30	20	46	3,5	4,1	1,14	20
23	4,6	6,0	1,23	22	50	6,6	7,6	1,17	20
25	4,4	5,4	1,23	20	51	2,8	2,7	0,97	20
27	4,0	5,0	1,25	20	65	4,9	5,3	1,08	14
27	7,0	8,0	1,21	14	68	4,7	4,7	1,00	14
28	5,6	6,5	1,16	14	72	3,5	3,9	1,10	14
29	5,3	6,4	1,21	14	75	6,6	7,2	1,09	14
30	5,4	6,4	1,18	20	76	3,0	2,8	0,93	14

Faßt man die Werte von Tabelle 41 in Gruppen zusammen und berechnet auf die früher angegebene Weise die ρ - und ε -Werte für das Halbellipsoid, so erhält man Tabelle 42.

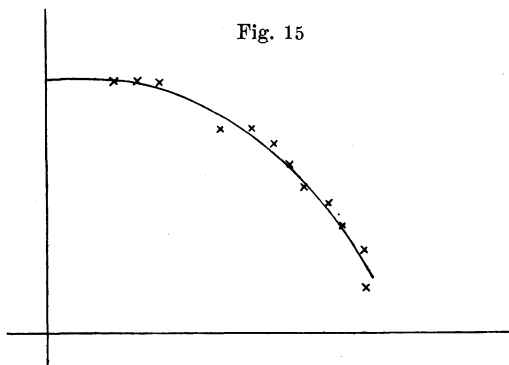
¹⁾ Ich habe vergebens zu erfahren gesucht, welche Konstellation (vermutlich im Löwen) die amerikanischen Astronomen als „Sichel“ (sickle) bezeichnen.

Tabelle 42

ω	ϱ	ε	Zahl der Beobachtungen
13 ⁰	1,293	0,649	62
21	1,256	0,651	144
30	1,183	0,612	136
42	1,182	0,713	80
49	1,093	0,606	60
71	1,040	0,837	70

Der mittlere Wert von ε ist $0,669 \pm 0,022$. Das ergibt die Charakteristik 1 : 1,35. —

Brenke scheint auf den Fehler, der durch die Neigungswinkel der Sterndistanzen beim Vergleichen entsteht, nicht gestoßen zu



sein. Da wir meines Wissens keine quantitativen Angaben über die Größe des Fehlers bei beliebigem Neigungswinkel der Strecken besitzen, so läßt sich so wenig wie bei Stroobant über die Fehler der Beobachtungen etwas sagen, zumal dabei wahrscheinlich individuelle Unterschiede auftreten.

Es ist ferner zwar richtig, daß eine Halbellipse, als Meridian der Rfl, den vorliegenden Beobachtungen genügt (Fig. 15), aber die Beobachtungen zwingen nicht zur Annahme einer Ellipse. Denn gerade an der entscheidenden Stelle, unter 15⁰, wo sich erst zeigen würde, ob die Kurve mit oder ohne Wendepunkt verläuft, ist nur eine einzige Höhe beobachtet. Würde man diese Höhe bei der Zeichnung nicht berücksichtigen, so hätte die dann ent-

stehende Kurve von 35° an abwärts die Tendenz, einen anderen Krümmungssinn anzunehmen.

Es sei noch auf eine eigentümliche Unklarheit in den Angaben Brenkes hingewiesen. Seine Mitteilungen sind datiert von dem University of Illinois Observatory, also sicherlich von Champaign her, dessen Universität sich Un. of Ill. nennt. Nun hat Champaign die geographische Breite von rund $40,1^\circ$. Da nun α und β Geminorum eine Deklination von 32° bzw 28° besitzen, so können sie für Champaign nie im Zenit stehen. Sie können es überhaupt für keinen Ort des Staates Illinois; denn der erstreckt sich von etwa 37° bis $42,5^\circ$. Der Mittelpunkt von $\alpha - \beta$ Geminorum ist zur Zeit der Kulmination für Champaign mehr als 10° vom Zenit entfernt. Das wird allerdings die Beobachtungen kaum beeinflußt haben, weil die Sehgröße sich bei so kleinem Abstand vom Zenit praktisch nicht ändert. Vielleicht liegt hier ein hübscher Beleg dafür vor, daß selbst geübte Astronomen von der Höhenüberschätzung nicht frei sind.

d) Bourdon

Bourdon (12) wählte zwei Sterne in einer Gegend des Himmelsgewölbes und suchte in einer anderen Höhe zwei Sterne mit scheinbar derselben Entfernung. Dann wurden die Gesichtswinkel wie beim Wolkenhimmel gemessen. Auch Bourdon ist darauf aufmerksam geworden, wie nötig es ist, daß die beiden verglichenen Sehgrößen in der Richtung übereinstimmen; nur bei den ersten sechs der in Tabelle 43 folgenden Beobachtungen hat er darauf nicht geachtet. In der Tabelle gehören die Werte innerhalb einer Klammer zu derselben Sehgröße. ω stellt die Höhe des unteren Sternes dar, falls die Distanz nicht horizontal war. Die Beobachtungen stammen nicht aus einer Nacht. —

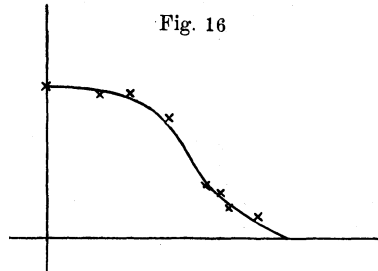
Tabelle 43

ω	γ	ω	γ	ω	γ
10 ⁰	5,2 ⁰ }	15 ⁰	4,5 ⁰ }	31 ⁰	3,4 ⁰ }
90	5,8 }	60	4,8 }	60	3,6 }
21	3,2 }	15	4,5 }	15	11,4 }
60	3,8 }	60	4,9 }	70	14,2 }
5,5	5,5 }	15	4,5 }	10	7,8 }
50	7,3 }	60	4,9 }	45	8,4 }

Streicht man die zweite Gruppe der Beobachtungen, die nicht recht hineinpaßt, so lassen sich die übrigbleibenden durch die in Tabelle 44 hingeschriebenen (ϱ, ω) -Werte ausdrücken. Die graphische Darstellung ergibt, wie Fig. 16 zeigt, eine Kurve mit Wendepunkten.

Tabelle 44

ω	ϱ	ω	ϱ
5,5 ⁰	1,4	45 ⁰	1,1
10	1,2	60	1,1
15	1,2	70	1
19	1,1	90	1



e) Ernst

Ernst hat in zwei Reihen Beobachtungen zur Rfl der Sterne angestellt (28).

In der ersten sehr umfangreichen Reihe suchte er zu verschiedenen Sterndistanzen gleich groß erscheinende Sterndistanzen in anderen Höhen. Seine Beobachtungen enthält Tabelle 46. Die Gruppen von Distanzen mit gleicher Sehgröße sind durch Querstriche getrennt. Z und Z' bedeuten Zenitdistanzen. Die Beobachtungen erstrecken sich über eine Zeit von beinahe zwei Jahren.

Tabelle 46

Sterndistanz	γ	Z	Z'
α Tauri — β Orionis	26 ⁰ 31'	35 ⁰ 27'	62 ⁰ 6'
β Orionis — α Can. mai.	23 40	62 6	78 23
α Tauri — α Aurigae	30 43	35 27	16 39
α Tauri — β Persei	30 50	35 27	11 18
β Persei — β Cassiop.	32 55	11 18	31 50
β Cassiop. — α Urs. min.	31 14	31 50	39 10
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 43	39 10	54 43
α Aurigae — α Gemin.	29 49	35 27	45 17
α Urs. min. — β Urs. min.	16 ⁰ 36'	39 ⁰ 31'	50 ⁰ 53'
" " — δ Cassiop.	18 44	39 31	32 37
" " — γ Urs. min.	18 55	39 31	56 24
" " — χ Draconis	17 45	39 31	56 54
" " — β Cephei	19 15	39 31	51 44

Sterndistanz	γ	Z	Z'
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 ⁰ 43'	39 ⁰ 50'	39 ⁰ 23'
" " — η Draconis	29 5	39 50	66 23
" " — β Cassiop.	31 14	39 50	52 12
" " — h Urs. mai.	27 9	39 50	28 20
" " — η Cephei	28 8	39 50	64 56
α Urs. min. — β Urs. min.	16 ⁰ 36'	39 ⁰ 50'	50 ⁰ 53'
β " " — η Draconis	15 7	50 53	66 3
η Draconis — χ Draconis	15 39	66 3	57 30
χ " " — δ Urs. min.	14 3	57 30	43 33
δ Urs. min. — A Cassiop.	21 25	43 33	38 45
A Cassiop. — β Cassiop.	15 17	38 45	52 2
β " " — ζ Cephei	15 30	52 2	63 16
α Cygni — α Cephei	18 ⁰ 5'	81 ⁰ 2'	63 ⁰ 4'
α Cephei — γ Cephei	18 37	63 4	44 34
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 ⁰ 43'	39 ⁰ 50'	37 ⁰ 28'
" " " — η " "	25 49	37 28	63 16'
α Lyrae — α Draconis	30 ⁰ 33'	73 ⁰ 25'	43 ⁰ 18'
η Draconis — η Urs. mai.	35 39	43 18	67 52
α Aurigae — α Urs. min.	43 ⁰ 26'	55 ⁰ 54'	41 ⁰ 11'
α Urs. min. — η Urs. mai.	41 25	41 11	25 30
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 ⁰ 43'	41 ⁰ 11'	67 ⁰ 52'
" " " — η Draconis	29 5	41 11	43 18
α Urs. min. — γ Cassiop.	28 ⁰ 37'	41 ⁰ 17'	69 ⁰ 56'
" " " — ε Urs. mai.	34 43	41 17	7 15
α Virg. — α Bootis	32 ⁰ 48'	61 ⁰ 7'	35 ⁰ 11'
α Bootis — ζ Urs. mai.	37 0	35 11	8 4
α Gemin. — α Urs. min.	57 ⁰ 56'	58 ⁰ 32'	41 ⁰ 21'
α Lyrae — α Urs. min.	51 34	60 44	41 21
γ Cassiop. — α Urs. min.	28 ⁰ 37'	69 ⁰ 56'	41 ⁰ 21'
α Urs. min. — β Urs. mai.	34 5	41 21	16 46
α Aurigae — γ Cassiop.	39 ⁰ 36'	72 ⁰ 11'	69 ⁰ 56'
γ Cassiop. — α Cygni	39 32	69 56	67 5
γ Urs. min. — ζ Urs. mai.	20 ⁰ 54'	24 ⁰ 22'	7 ⁰ 33'
" " " — α Urs. min.	18 55	24 22	41 21
β Urs. min. — γ Draconis	29 ⁰ 33'	24 ⁰ 56'	33 ⁰ 12'
γ Draconis — α Cygni	27 42	33 12	59 44
α Urs. mai. — α Urs. min.	28 ⁰ 43'	30 ⁰ 26'	41 ⁰ 21'
α Urs. min. — ε Cassiop.	25 35	41 21	66 43

Sterndistanz	γ	Z	Z'
α Lyrae — α Urs. min.	51 ⁰ 34'	44 ⁰ 44'	41 ⁰ 21'
α Urs. min. — α Aurigae	43 26	41 21	77 44
α Bootis — α Virginis	32 ⁰ 48'	53 ⁰ 2'	71 ⁰ 5'
α Virginis — β Leonis	33 25	71 5	48 8
α Bootis — β Leonis	35 18	48 8	53 2
α Urs. min. — α Cephei	27 ⁰ 12'	41 ⁰ 21'	51 ⁰ 14'
α Cephei — γ Cygni	23 50	51 14	57 53
ε Bootis — α Ophiuchi	42 ⁰ 7'	22 ⁰ 23'	49 ⁰ 47'
α Ophiuchi — α Aquilae	33 37.	49 47	65 42
γ Cassiop. — α Urs. min.	28 ⁰ 37'	66 ⁰ 6'	41 ⁰ 21'
α Urs. min. — ε Urs. mai.	34 43	41 21	14 35
α Persei — γ Cassiop.	28 ⁰ 10'	80 ⁰ 30'	64 ⁰ 41'
γ Cassiop. — α Cephei	25 15	64 41	44 27
α Aurigae — α Persei	17 ⁰ 31'	82 ⁰ 23'	80 ⁰ 30'
α Persei — δ Cassiop.	19 38	80 30	66 39
α Urs. min. — ζ Urs. mai.	35 ⁰ 42'	41 ⁰ 8'	22 ⁰ 41'
ζ Urs. mai. — α Bootis	37 0	22 41	35 41
ε Cygni — α Cephei	29 ⁰ 4'	53 ⁰ 6'	44 ⁰ 27'
α Cephei — ε Cassiop.	29 39	44 27	64 30
α Cygni — α Urs. min.	44 ⁰ 41'	45 ⁰ 9'	41 ⁰ 8'
α Urs. min. — η Urs. mai.	41 25	41 8	22 3
α Persei — α Urs. min.	39 ⁰ 25'	28 ⁰ 40'	39 ⁰ 0'
α Urs. min. — ε Urs. mai.	34 43	39 0	73 24
α Cassiop. — α Urs. min.	32 ⁰ 48'	6 ⁰ 59'	39 ⁰ 0'
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 43	39 0	66 51
α Aurigae — α Gemin.	29 ⁰ 49	47 ⁰ 53'	76 ⁰ 9'
„ — δ Cassiop.	36 9	47 53	13 38
β Aurigae — α Gemin.	22 ⁰ 36'	53 ⁰ 36'	76 ⁰ 9'
„ — α Persei	26 24	53 36	28 40
α Aurigae — α Tauri	30 ⁰ 43'	47 ⁰ 53'	58 ⁰ 33'
α Tauri — β Orionis	26 31	58 33	83 58
α Aquilae — α Cygni	38 ⁰ 9'	65 ⁰ 42'	33 ⁰ 5'
α Cygni — β Urs. min.	46 15	33 5	52 12
η Tauri — β Aurigae	33 ⁰ 56'	40 ⁰ 56'	48 ⁰ 16'
β Aurigae — β Gemin.	26 28	48 16	75 10

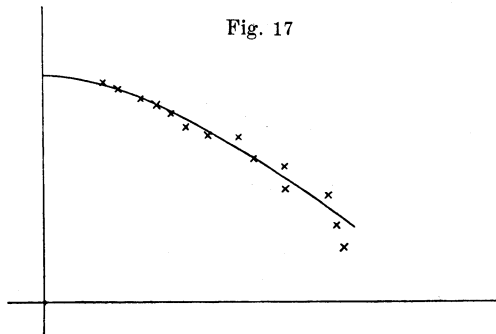
Sterndistanz	γ	Z	Z'
α Lyrae — α Aquilae	34 ⁰ 9'	64 ⁰ 50'	75 ⁰ 42'
α Aquilae — Jupiter	31 16	75 42	87 50
α Aquilae — α Lyrae	34 ⁰ 9'	75 ⁰ 42'	64 ⁰ 50'
α Lyrae — β Urs. min.	43 58	64 50	54 14
α Cygni — α Pegasi	42 ⁰ 33'	43 ⁰ 29'	42 ⁰ 47'
α Pegasi — β Ceti	41 11	42 47	68 31
β Orionis — α Canis mai.	23 ⁰ 40'	66 ⁰ 41'	84 ⁰ 55'
α Canis mai. — α Canis min.	25 38	84 55	75 13
α Canis min. — α Geminor.	26 39	75 13	54 54
α Cassiop. — α Urs. min.	32 ⁰ 48'	8 ⁰ 16'	38 ⁰ 57'
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 43	38 57	64 44
α Cygni — α Urs. min.	44 ⁰ 41'	45 ⁰ 9'	38 ⁰ 57'
α Urs. min. — α Aurigae	43 26	38 57	39 3
α Urs. mai. — α Urs. min.	28 ⁰ 43'	63 ⁰ 38'	41 23'
„ — η „	25 49	63 38	80 21
η Urs. mai. — η Draconis	24 ⁰ 49'	80 ⁰ 21'	63 ⁰ 33'
η Draconis — α Lyrae	30 33	63 33	70 26
α Urs. min. — η Draconis	29 5	41 23	63 33
ζ Draconis — α Lyrae	29 ⁰ 44'	57 ⁰ 58'	70 ⁰ 26'
„ — ε Urs. mai.	31 0	57 58	73 3
α Tauri — β Orionis	26 ⁰ 31'	47 ⁰ 43'	72 ⁰ 26'
„ — α Aurigae	30 43	47 43	34 33
α Canis mai. — α Tauri	46 ⁰ 5'	79 ⁰ 5'	35 ⁰ 56'
„ — α Geminor.	49 57	79 5	47 32
α Urs. mai. — α Urs. min.	28 ⁰ 43'	61 ⁰ 44'	38 ⁰ 58'
α Urs. min. — β Cassiop.	31 14	38 58	19 35
β Cassiop. — α Persei	29 5	19 35	11 18
α Persei — ϑ Aurigae	30 29	11 18	41 47
β Cassiop. — α Urs. min.	31 ⁰ 14'	35 ⁰ 14'	39 ⁰ 15'
α Urs. min. — α Urs. mai.	28 43	39 15	52 2
β Persei — β Cassiop.	32 55	14 21	35 14
α Androm. — β Cassiop.	29 4	50 12	35 14
α Urs. mai. — γ Urs. min.	25 ⁰ 45'	52 ⁰ 2'	57 ⁰ 38'
„ — η Urs. mai.	25 49	52 2	75 23
α Bootis — $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 13^{\text{h}} 20^{\text{m}} \\ \delta = 41^{\circ} 0' \end{array} \right\}$	24 ⁰ 20'	84 ⁰ 50'	61 ⁰ 23'
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 13^{\text{h}} 20^{\text{m}} \\ \delta = 41^{\circ} 0' \end{array} \right\}$ — β Urs. min.	34 9	61 23	48 33

Sterndistanz	γ	Z	Z'
α Bootis - $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 14^{\text{h}} 22^{\text{m}} \\ \delta = 48^{\circ} 0' \end{array} \right\}$	28 ^o 24'	84 ^o 50'	64 ^o 35'
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 14^{\text{h}} 22^{\text{m}} \\ \delta = 48^{\circ} 0' \end{array} \right\}$ - α Urs. min.	43 11	64 35	40 24
α Bootis - η Urs. mai.	30 ^o 34'	80 ^o 21'	55 ^o 11'
η Urs. mai. - α Urs. min.	41 25	55 11	40 15
α Lyrae - α Coronae	39 ^o 43'	70 ^o 26'	50 ^o 56'
α Coronae - ζ Urs. mai.	36 56	50 56	17 36
α Virginis - α Bootis	32 ^o 48'	65 ^o 1'	44 ^o 1'
α Bootis - ζ Urs. mai.	37 0	44 1	17 36
α Bootis - Mars	30 42	44 1	52 14
β Aurigae - β Geminor.	26 ^o 28'	56 ^o 31'	50 ^o 34'
β Geminor. - α Leonis	37 4	50 34	42 28
α Canis mai. - α Canis min.	25 ^o 38'	82 ^o 40'	57 ^o 2'
α Canis min. - α Orionis	25 54	57 2	70 44
α Canis mai. - "	27 3	82 40	70 44
α Geminor. - α Leonis	40 ^o 34'	32 ^o 18'	37 ^o 26'
α Leonis - Mars	38 28	37 26	59 48
α Canis min. - α Canis mai.	25 ^o 38'	57 ^o 2'	82 ^o 40'
α Canis mai. - α Orionis	27 3	82 40	70 44
α Aurigae - β Geminor.	34 ^o 33'	51 ^o 3'	38 ^o 41'
β Geminor. - α Leonis	37 4	38 41	37 49
α Aquilae - α Lyrae	34 ^o 9'	77 ^o 28'	44 ^o 44'
α Lyrae - α Coronae	39 43	44 44	26 16
α Virginis - α Bootis	32 ^o 48'	63 ^o 25'	40 ^o 43'
α Bootis - ε Urs. mai.	39 46	40 43	10 51
α Persei - β Aurigae	26 ^o 24'	75 ^o 2'	63 ^o 28'
β Aurigae - β Geminor.	26 28	63 28	59 25
α Persei - α Aurigae	17 ^o 31'	75 ^o 2'	67 ^o 44'
α Aurigae - Venus	21 26	67 44	82 1
α Piscis austr. - Jupiter	22 ^o 31'	82 ^o 7'	59 ^o 47'
Jupiter - α Pegasi	27 43	59 47	35 13
α Persei - α Urs. min.	39 ^o 25'	31 ^o 54'	39 ^o 3'
α Urs. min. - ε Urs. mai.	34 43	39 3	73 6

Bearbeitet man die Beobachtungen nach der in der allgemeinen Anleitung angegebenen Methode, so erhält man die in Tabelle 47 zusammengestellten Koordinaten der Rfl; man sieht, daß die Beobachtungen sich nicht gut ausgleichen lassen. Fig. 17 gibt die zugehörige Kurve. Es läßt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, ob die vollständige Kurve stets den gleichen Krümmungssinn haben würde oder nicht.

Tabelle 47

ω	ϱ	ω	ϱ	ω	ϱ
10^0	1,35	35^0	1,13	60^0	1
15	1,34	40	1,12	65	1
20	1,34	45	1,02	70	1
25	1,19	50	1	75	1
30	1,23	55	1		



In einer zweiten Reihe von Beobachtungen suchte Ernst zu der Höhe von Sternen je eine ihr gleich großscheinende Distanz dieser Sterne von anderen. Ich habe diese Beobachtungen in die Ableitung der Rfl nicht einbezogen. Für den Fall, daß sie jemand benutzen will, sind sie in Tabelle 48 hier beigefügt. γ bedeutet also bei einem einzelnen Stern die Höhe, bei einem Paar die Distanz. Diese Beobachtungen sind im Jahre 1903 in Leopold an- gestellt.

Ernst leitet selber mit Hilfe dieser letzten Reihe und des früher schon mitgeteilten α -Wertes eine Hyperboloidkappe auf folgende sehr interessante Weise ab. Bestimmt man aus den Beobachtungen den Wert von 2ϱ , so findet man für verschiedene

Tabelle 48

Datum	Sterndistanz	γ
März 26, 11h 15m	α Virginis	24 ⁰ 59'
	α Virginis — α Bootis	32 48
" 26, 11h 21m	α Aurigae	30 4
	α Aurigae — α Ursae minoris	43 26
" 26, 11h 24m	α Canis minoris	22 44
	α Canis minoris — α Geminorum	26 39
" 27, 10h 50m	α Canis minoris	26 54
	α Canis minoris — α Leonis	37 25
" 31, 8h 25m	α Orionis	32 35
	α Orionis — α Aurigae	39 27
April 22, 12h 6m	α Virginis	29 16
	α Virginis — α Bootis	32 48
" 25, 9h 0m	α Canis minoris	27 0
	α Canis minoris — α Leonis	37 25
Mai 3, 8h 30m	Venus	18 9
	Venus — α Aurigae	21 16
" 3, 9h 0m	α Persei	19 30
	α Persei — δ Cassiopejae	19 38
" 3, 9h 5m	α Canis minoris	20 45
	α Canis minoris — β Geminorum	26 14
" 3, 9h 35m	α Virginis	28 1
	α Virginis — α Bootis	32 48
" 3, 9h 35m	α Persei	16 30
	α Persei — α Aurigae	17 31
" 3, 11h 35m	α Virginis	28 11
	α Virginis — α Bootis	32 48
" 3, 13h 30m	α Aquilae	29 44
	α Aquilae — α Cygni	38 1
" 6, 9h 0m	α Virginis	26 35
	α Virginis — α Bootis	32 48
" 6, 9h 0m	α Canis minoris	20 45
	α Canis minoris — β Geminorum	26 14
" 6, 9h 0m	ϵ Cassiopejae	25 15
	ϵ Cassiopejae — α Ursae minoris	25 35
" 6, 9h 0m	α Aurigae	27 21
	α Aurigae — α Geminorum	29 49
" 6, 9h 5m	α Persei	18 6
	α Persei — α Aurigae	17 31
" 6, 9h 45m	α Virginis	28 53
	α Virginis — α Bootis	32 48
Okt. 26, 10h 0m	α Ursae maioris	23 9
	α Ursae maioris — α Ursae minoris	28 43

Datum	Sterndistanz	γ
Okt. 26, 10 ^h 0 ^m	Jupiter	30 ^o 13
	Jupiter — α Andromedae	39 10
Nov. 10, 8 ^h 25 ^m	α Aquilae	26 27
	α Aquilae — α Lyrae	34 9
" 10, 8 ^h 25 ^m	α Tauri	23 47
	α Tauri — α Aurigae	30 43
" 10, 8 ^h 55 ^m	α Tauri	28 36
	α Tauri — α Persei	36 20
" 21, 11 ^h 35 ^m	α Canis minoris	23 28
	α Canis minoris — α Geminorum	26 39

Höhen verschiedene Werte. Nicht große Teile der Rfl können deshalb als Kugelzonen angesehen werden, die zu Kugeln mit um so größerem Radius gehören, je näher sie am Horizont liegen. Nennt man den Radius dieser Kugeln R und bezieht ihn auf die Strecke Beobachter—Zehit als Einheit, so hängt er mit z durch die einfach ableitbare Gleichung

$$R = \frac{1}{2 \sin^2 z}$$

zusammen. Man kann Meridiane der Kugeln zeichnen. Nimmt man auf jedem dieser Kreise den Punkt, der der Höhe entspricht, die zu dem den Kreis bestimmenden z -Werte gehört, und verbindet diese Punkte miteinander, so hat man einen Meridian der Rfl. Als Gleichung dieser Kurve findet Ernst

$$\rho^2 \cos 2\omega + 5,58 \rho \sin \omega = 4,58.$$

Sie ist eine Hyperbel. Diese Behauptung von Ernst ist indes etwas voreilig, denn die Kurve ist unter 15° durch die Beobachtungen nicht bestimmt. Gerade in diesem Gebiete entscheidet es sich aber, ob sie ihren Krümmungssinn beibehält oder ändert. Wir werden noch sehen, daß die Ableitung von Ernst auch deshalb angreifbar ist, weil er den in diesem Zusammenhange unbrauchbaren Wert von α benutzt hat.

Im übrigen ist die Arbeit von Ernst die originellste, die zu dem Problem der Bestimmung der Rfln erschienen ist¹⁾. Ernst

¹⁾ Um die Arbeit nicht gänzlich unbekannt zu lassen, habe ich an anderer Stelle (64 a) eine eingehende, zum Teil wörtliche Inhaltsangabe gebracht.

benutzt die Beobachtungen in Tabelle 48, um mit Hilfe eines großen Rechenapparates eine Korrektur für α zu erhalten. Wie er die aus der Tabelle erhaltenen Korrekturen dann zur Bestimmung der Rfl benutzt, ist im vorstehenden angedeutet. Abgesehen davon, daß sich die Rfl weit bequemer unmittelbar an die Beobachtungen anschließen läßt, leidet die Arbeit zum Teil unter dem Fehler vieler psychologischer Arbeiten: Die angewandte Methode ist exakter, als das Material es zuläßt. So erhält Ernst z. B. zu dem Mittel $2z = 60^{\circ} 44'$ aus Tabelle 48 die Korrektur $+ 8'$. Da aber infolge des wahrscheinlichen Fehlers von α die Grenzen der möglichen $2z$ -Werte $60^{\circ} 2' 16''$ und $61^{\circ} 23' 44''$ sind, so hat diese Korrektur gar keine Bedeutung.

f) v. Sterneck

Die Schätzungen der Sehgrößen von Sterndistanzen, die v. Sterneck auf die früher schon besprochene Weise ausführte (91, 552), erstreckten sich auf eine Reihe von Sternpaaren in verschiedenen Höhen. Es wurden zu der einzelnen Schätzung stets zwei Sterne mit möglichst gleicher Höhe gewählt; zwischen ungleichen Höhen wurde das Mittel genommen. Der Winkelabstand der Sterne wurde mit Hilfe eines Fernrohres gemessen, das aufrechte Bilder lieferte und in dem ein Okularmikrometer angebracht war. Das Mikrometer bestand aus einem gezähnten Metallstreifen. Der Gesichtswinkel eines Zahnes betrug $13,4'$. Da sich die Zehntel noch schätzen ließen, sind die Gesichtswinkel nahezu auf die Minute genau. In Tabelle 49, die die Resultate enthält, sind unter γ die Gesichtswinkel in Einheiten des Mikrometers verstanden.

v. Sterneck glaubt, daß sich diese Beobachtungen am besten durch ein Hyperboloid mit der schon bekannten Gleichung und den Konstanten $b = 24,4$, $m = 1$ darstellen lassen. $q_h = 1:2$. Tabelle 50 bringt die Radienvektoren dieser Kappe.

Die Kritik hat zunächst wieder auf die geringe Tauglichkeit des Vergleichsobjektes hinzuweisen, weil dieselbe hier eine etwas andere Form annimmt. Es handelt sich im vorliegenden Falle um eine der bekanntesten Streckentäuschungen: Die Sehgröße einer Punktdistanz ist kleiner als die Sehgröße einer ausgefüllten Strecke von demselben Gesichtswinkel. Auch hier weiß man von

Tabelle 49

ω	s	γ	ϱ	Mittel	ω	s	γ	ϱ	Mittel
7 ⁰	200	22,0	23,3	23,5	33 ⁰	11	1,9	14,9	15,0
7	210	22,6	23,8		33	99	16,1	15,8	
8	106	12,8	21,3		21,3	36	52	9,8	
10	210	26,0	20,7	20,9	37	59	9,5	15,9	14,5
11	94	11,2	21,5		43	40	6,6	15,6	
12	56	7,0	20,5		43	107	20,3	13,5	
13	135	18,5	18,7	19,7	44	98	16,0	15,7	14,3
13	160	18,4	22,3		44	39	7,0	14,3	
13	57	7,0	20,9		45	56	9,5	15,1	
14	97	12,8	19,4	18,0	47	98	17,7	14,2	14,3
16	47	6,7	18,0		47	85	16,6	13,1	
17	110	15,2	18,6		50	56	9,8	14,7	
18	38	5,8	16,8	16,9	50	109	20,3	13,8	14,7
21	61	9,6	16,3		50	56	9,8	14,7	
22	40	5,4	19,0		52	130	24,0	13,9	
22	120	15,6	19,7	16,9	55	44	7,7	14,7	11,8
23	41	5,8	18,1		60	54	12,3	11,3	
26	54	8,8	15,7		62	16	3,4	12,1	
27	102	17,1	15,3	14,8	62	60	12,7	12,1	13,8
27	41	6,3	16,7		64	107	20,8	13,2	
28	39	6,4	15,6		64	48	8,5	14,5	
29	53	9,7	14,0						

Fig. 18

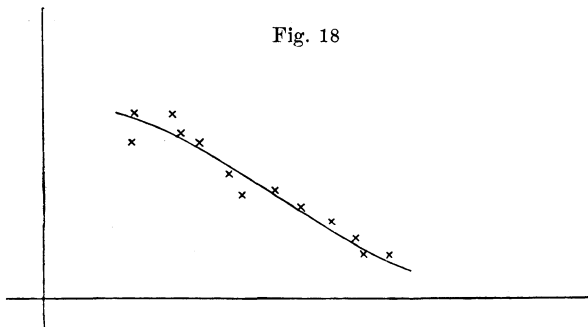


Tabelle 50

ω	ϱ_h	ω	ϱ_h	ω	ϱ_h	ω	ϱ_h	ω	ϱ_h
0 ⁰	24,4	6 ⁰	22,1	20 ⁰	18,1	45 ⁰	14,2	70 ⁰	12,6
1	23,9	7	21,7	25	17,1	50	13,8	75	12,4
2	23,5	8	21,4	30	16,2	55	13,3	80	12,3
3	23,1	9	21,1	35	15,5	60	13,0	85	12,2
4	22,8	10	20,7	40	14,8	65	12,8	90	12,2
5	22,4	15	19,3						

dem funktionalen Zusammenhange zwischen den Größen der Täuschung und der Strecken nichts. Wer sich ferner wegen des unbefriedigenden Anschmiegens der Hyperboloidkappe die empirische Kurve zeichnet, ersieht aus Fig. 18, daß sie gleichfalls wieder ziemlich sicher als eine Kurve mit einem Wendepunkte in dem betrachteten Winkelraume sich ergibt.

III. Die Ergebnisse der Bestimmungen der Referenzflächen

Ich stelle im folgenden das, was sich aus der Diskussion der Beobachtungen für sämtliche Rfn mit genügender Sicherheit zu ergeben scheint, zusammen.

1. Die Referenzfläche des blauen Himmels

Über das Bestehen von individuellen Differenzen läßt sich nicht entscheiden, weil vergleichbare Werte fehlen. Ich schreibe die α -Werte für den blauen Himmel — die einzigen, die vorläufig in Betracht kommen können — hier zusammen: 22,49° (Reimann), 35,7° (Aloys Müller), 38,6° (Figees Assistent), 43,1° (v. Sicherer). Reimanns Wert ist möglicherweise mit einem Beobachtungsfehler behaftet. An dem dritten und vierten Wert ist der Faktor der Durchsichtigkeit der Atmosphäre (der Sichtweite) beteiligt, während Reimanns und mein Wert davon frei sind. Der letzte Wert ist aus früher genannten Gründen unbrauchbar. In sämtlichen Werten steckt noch der Anteil eines Faktors, von dem wir später sprechen werden.

Die Abhängigkeit des Winkels α von der Helligkeit hat Reimann aus den Beobachtungen bei Tage und bei Nacht erschlossen. Damit ist aber nicht entschieden, ob die Helligkeit unmittelbar wirkt oder durch Vermittlung eines anderen Faktors, auf dessen Änderungen auch sie von Einfluß ist.

Winkel α ist von der Sichtweite in dem leicht verständlichen Sinne abhängig, daß er bei größerer Sichtweite kleiner ist. Naturgemäß ändern diese großen Schwankungen auch am meisten den Winkel, unter dem die Kappe den Horizont schneidet; er ist um so kleiner, je größer die Sichtweite ist. Im Falle der Kugelkappe ist er gleich $2z$.

Die Rfl des blauen Himmels ist der Art nach nur in erster Annäherung als Kugelkappe zu bezeichnen. Das folgt schon daraus, daß sie wahrscheinlich unter dem gleichzeitigen Einfluß mehrerer Faktoren steht. Die umfassende und sorgfältige Anwendung des Kriteriums der Kugelkappe könnte wahrscheinlich indirekt geringen weiteren Aufschluß geben.

2. Die Referenzflächen des Wolkenhimmels und der Wolken

Winkel α , also auch die Charakteristik, ändert sich mit der Höhe, also im allgemeinen mit der Art der Bewölkung, und, weil die Dichte der Bewölkung einigermaßen auch von der Art abhängig ist, nicht immer so deutlich auch mit der Dichte.

Die Werte der Charakteristik, die man aus α auf Grund der verschiedenen Hypothesen über die Kappen ableitet, können nicht sehr voneinander abweichen. Legt man deshalb der Bequemlichkeit wegen die Kugelkappe zugrunde, so ergibt sich q aus den Reimannschen Beobachtungen etwa zu 1:3,75, aus meinen zu 1:2,25, aus denen des Assistenten von Figeo zu 1:1,54. Dagegen sind die Werte, die Bourdon und v. Sterneck für q aus den Messungen an einzelnen Wolken erhielten, gemäß den Kurven (Fig. 7 und 8) 1:6,4 und 1:6,7 (der letztere Wert ist möglicherweise noch kleiner). Diese Unterschiede der Werte, die nach den beiden Methoden erhalten wurden, sind so bedeutend, daß sie über eventuelle individuelle Differenzen sicherlich weit hinausgehen; es ist auch an sich schon unwahrscheinlich, daß sich die individuellen Differenzen genau nach den beiden Methoden verteilen würden. Auch auf zufälligen Umständen können sie nicht beruhen, weil es sich um mittlere Rfln handelt. Die Unterschiede zwingen uns also, die Rfl des Wolkenhimmels und die Rfl der Wolken auseinanderzuhalten. Über die erstere ist das Zahlenmäßige schon mitgeteilt. Über die Rfl der Wolken ist noch nachzutragen, daß ihre Meridiane wahrscheinlich Kurven mit wenigstens zwei Wendepunkten über der x -Achse sind.

3. Die Referenzfläche der Sonne

Der Meridian ist eine Kurve mit zwei Wendepunkten über der x -Achse.

Die sehr variable Charakteristik scheint zunächst von der Reinheit der Atmosphäre abzuhängen. Weil ein Faktor der Reinheit der Wasserdampf ist, kann sie eine in derselben Weise wirkende geringe Abhängigkeit auch von der Bewölkung zeigen. Unter Umständen tritt aber, wie die v. Sterneckschen Werte zeigen, eine größere und daher jedenfalls andere Art der Abhängigkeit von der Bewölkung auf. Ich habe versucht, die Werte der Charakteristik an den Kurvenstücken abzuschätzen. q_0 ist mit ziemlicher Sicherheit zu finden. q_R ist unter der Annahme abgeschätzt, daß über 60° keine nennenswerte Änderung von s stattfindet. Unter diesen Voraussetzungen schwanken v. Sternecks Werte zwischen 1:2,9 und 1:5, meine Werte zwischen 1:1,33 und 1:2,71. Die Einzelwerte sind natürlich sehr unsicher (am meisten der Wert 1:5). Da die Abschätzungen aber auf gleiche Weise vorgenommen wurden, so scheint ziemlich sicher zu sein, daß die Charakteristik für mich im Durchschnitt wesentlich größer ist als für v. Sterneck. Ein kleiner Bruchteil dieses Unterschiedes kommt, wie wir früher schon hörten, vielleicht auf Rechnung der v. Sterneckschen Methode, Flächen mit Strecken zu vergleichen. Der andere Bruchteil wird uns später beschäftigen.

Auch die Lage der Wendepunkte scheint mit der Reinheit der Atmosphäre zusammenzuhängen.

4. Die Referenzfläche des Mondes

Der Meridian ist eine Kurve mit zwei Wendepunkten über der x -Achse.

Die sehr variable Charakteristik und die Lage der Wendepunkte scheinen von der Reinheit der Atmosphäre abzuhängen. Der Einfluß der Bewölkung tritt in derselben Weise auf wie bei der Sonne. Nach Abschätzungen, die unter denselben Voraussetzungen wie bei der Rfl der Sonne gemacht wurden, schwanken die Werte der Charakteristik für v. Sterneck zwischen 1:1,5 und 1:3,8.

5. Die Referenzflächen des Sternenhimmels und der Sterne

Beim Sternenhimmel sind die Verhältnisse analog wie beim Wolkenhimmel. Wir sind hier in der glücklichen Lage, von demselben Beobachter über demselben Horizont Messungen nach beiden

Methoden zu besitzen, so daß der Einfluß ev. individueller Differenzen und anderer Faktoren, von denen wir noch sprechen werden, herausfällt; das ist in diesem Falle von besonderer Wichtigkeit, weil der Unterschied nicht so groß ist wie beim Wolkenhimmel. Für Ernst ist $\alpha = 36,48^\circ$; auf Grund der Kugelkappe berechnet, ergibt das $q = 1:1,69$. Schätzt man aber q an der Kurve von Ernst, indem man eine sehr schwache Änderung des Krümmungssinnes annimmt, so kommt $q = 1:2$ (seine Hyperbel ergibt sogar, wie man aus der mitgeteilten Gleichung leicht finden kann, $q_h = 1:2,14$). Der letztere Wert wird um so kleiner, je stärker jene Änderung ausgeprägt ist. Der Unterschied zwischen den nach den beiden Methoden erhaltenen Werten legt uns nahe, die Rfl des Sternenhimmels von der Rfl der Sterne zu trennen. Der Unterschied ist, wie schon gesagt, nicht so groß, wie in dem Falle des Wolkenhimmels.

Die Charakteristik der Rfl des Sternenhimmels schwankt nach den bisherigen Beobachtungen zwischen $1:1,69$ und $1:2,8$.

Der Meridian der Rfl der Sterne ist wahrscheinlich eine Kurve mit zwei Wendepunkten über der x -Achse. Die Änderung des Krümmungssinnes ist nicht so stark ausgeprägt wie bei den Rfln der anderen Gestirne. Ihre Charakteristik liegt auf Grund der bisherigen Beobachtungen zwischen den Werten $1:1,6$ und $1:2$. Man darf daraus nicht schließen, daß sie im Mittel größer ist als die Charakteristik der Rfl des Sternenhimmels; denn von den extremen Werten gehören nur die bereits benutzten $1:1,69$ und $1:2$ zu demselben Beobachter. —

Die Rfln der Gestirne, vielleicht mit Einschluß derjenigen der Wolken, sind unter sich sehr wahrscheinlich unvollkommen äquivalent.

IV. Die mathematische Behandlung der empirischen Kurven

Da die Meridiane der Rfln wahrscheinlich immer Kurven mit Wendepunkten sind, lassen sie sich nicht als Kurven zweiter Ordnung auffassen. Wir nehmen für das Folgende an, daß die empirischen Kurven höchstens zwei Wendepunkte über der x -Achse besitzen. Sollte das auch für die Rfln der Wolken zutreffen, so gelten unsere Ausführungen auch für sie.

Die mathematische Kurve, die den Beobachtungen genügen soll, muß also folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie muß symmetrisch zur y -Achse liegen.
2. Sie muß die x -Achse schneiden.
3. Sie muß über der x -Achse zwei Wendepunkte haben.
4. Von $\omega = 0^\circ$ bis $\omega = 90^\circ$ darf ρ entweder abnehmen oder konstant bleiben, aber niemals wachsen.

Die mathematische Behandlung der empirischen Kurven besteht darin, daß

1. eine mathematische Kurve gesucht wird, die diesen Bedingungen genügt und zugleich der Mannigfaltigkeit der empirischen Kurven gerecht werden kann, und daß
2. gezeigt wird, wie sich aus den an der empirischen Kurve gegebenen Stücken — q und den Wendepunkten — die Koeffizienten der Kurvengleichung bestimmen lassen.

1. Mit Hilfe transzendenter Kurven

Man könnte zunächst daran denken, eine der zur y -Achse symmetrischen (algebraischen oder transzendenten) Kurven zu nehmen, die zwei Wendepunkte über der x -Achse haben und zur x -Achse asymptotisch verlaufen. Durch ein Zusatzglied kann man der zweiten unserer Bedingungen genügen. Als Beispiel wähle ich die transzendente Kurve

$$y = e^{-x^2},$$

die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt ist. Wir verschieben die x -Achse in der Richtung der positiven y -Achse um c . Dann ist

$$y + c = e^{-x^2} \quad (0 < c < 1) \dots \dots (34)$$

Das Stück der Kurve über der x -Achse ist unser Meridian. Die Wendepunkte liegen bei

$$x_w = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da $y_w = e^{-1/2} - c$

und $y_{x=0} = 1 - c$

ist, erhält man aus

$$\frac{y_w}{y_{x=0}} = \frac{e^{-1/2} - c}{1 - c} = A$$

mit den gemessenen Werten y_w und $y_{x=0}$ den Wert

$$c = \frac{A - e^{-1/2}}{A - 1} \dots \dots \dots (35)$$

Dieses c kann auch als erster Näherungswert dienen, um, falls q bekannt ist, aus

$$q = \frac{y_{x=0}}{x_{y=0}} = \frac{1 - c}{\sqrt{\log \text{nat} \frac{1}{c}}} \dots \dots \dots (36)$$

c zu bekommen.

Um den Wendepunkt an der empirischen Kurve zu bestimmen, kann man so verfahren. Man sucht mit dem Lineal das längste gerade Stück der Kurve in der Gegend des Wendepunktes und markiert seine Enden. Die Mitte wird den Wendepunkt ergeben. Wenn man die Zeichnung mehrmals macht (ohne zu kopieren), wenn man ferner noch darauf achtet, ob die Kurve vor und hinter dem geraden Stück gleiche oder ungleiche Krümmung hat, und im letzteren Falle den Wendepunkt etwas von der Mitte weg auf das stärker gekrümmte Stück zu nimmt, so wird das Mittel aus diesen Werten mehr als genügen. Praktisch ist der Einfluß eines kleinen Fehlers nicht groß.

Wenn $y_{(x=0)}$ den an der Kurve gemessenen Wert von $y_{x=0}$ bezeichnet, dann ist $\frac{y_{(x=0)}}{1 - c}$ der Proportionalitätsfaktor, mit dem sämtliche aus (34) berechneten numerischen Streckenwerte zu multiplizieren sind, wenn sie mit den entsprechenden Werten der empirischen Kurve verglichen werden sollen. Die Bezeichnung, die wir jetzt eingeführt haben, wird in den weiteren Ausführungen dieses Kapitels beibehalten. Buchstaben (oder ihre Indizes), deren Werte an der empirischen Kurve gemessen werden oder bei der Berechnung für sie gelten sollen, werden also jedesmal eingeklammert, — mit Ausnahme von ω , weil definitionsgemäß bei ähnlichen Kurven proportionale Vektoren konstante Winkel einschließen, und von c und q , die gegenüber jeder linearen Substitution, die die Koordinaten proportional läßt, invariant sind.

Hat die empirische Kurve keinen Wendepunkt, so ist

$$c \cong \frac{\sqrt{2} - q}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (37)$$

Es fragt sich, ob (34) der oben gestellten vierten Bedingung genügt. Um das zu finden, gehen wir von der ursprünglichen Kurve $y = e^{-x^2}$ aus und untersuchen, ob ϱ in dem Intervall von $\omega = 0^\circ$ bis $\omega = 90^\circ$ ein Minimum hat. Diese Gleichung in Polarkoordinaten lautet

$$F = \varrho \sin \omega - e^{-\varrho^2 \cos^2 \omega} = 0 \dots \dots (38)$$

Wir setzen

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = \varrho \cos \omega - 2 \varrho^2 \sin \omega \cos \omega e^{-\varrho^2 \cos^2 \omega} = 0.$$

Aus der Division der beiden letzten Gleichungen kommt

$$\varrho^2 \sin^2 \omega = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (39)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (38) und Division von (38) und (39) ergibt sich

$$\operatorname{tg} \omega_i = \frac{1}{\sqrt{2 \log \operatorname{nat} \sqrt{2}}},$$

daraus

$$\sin^2 \omega_i = \frac{1}{1 + 2 \log \operatorname{nat} \sqrt{2}}.$$

Da nach (39)

$$\sin^2 \omega_i = \frac{1}{2 \varrho_i^2}$$

ist, so ist auch

$$\varrho_i = \sqrt{\frac{1}{2} + \log \operatorname{nat} \sqrt{2}}.$$

Wir schreiben ϱ_i zum Zeichen, daß es sich um den Minimalwert handelt. ω_i ist das zugehörige ω . Die numerischen Werte sind rund $\varrho_i = 0,88$ und $\omega_i = 52^\circ 59'$. Die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten ist nicht nötig, weil die Werte von ϱ für $\omega = 90^\circ$ und $\omega = 0^\circ$ offenbar 1 und ∞ sind.

Gleichung (34) erfüllt also die vierte Bedingung nicht immer. Unter welchen Bedingungen sie ihr genügt, hängt ohne Zweifel nur von der Größe des Wertes c ab. Wir fragen also, von welchem Werte c an, für die Gleichung $y = e^{-x^2}$ ausgesprochen, ϱ in dem genannten Intervall kein Minimum mehr hat. Die Antwort gibt

im Scheitel berühren, sie eine (von c abhängige) Strecke weit umfassen und dann in zwei Punkten schneiden.

Genügt demnach das aus (35) bzw (36) berechnete c der Bedingung (40) nicht, dann ist die Kurve (34) unbrauchbar.

Man braucht übrigens diese Rechnung nicht zu machen, falls man q kennt. Um das überblicken zu können, müssen wir zuvor die Abhängigkeit des q von c betrachten. Wenn wir in (36) q nach c differenzieren, so erhalten wir

$$\frac{dq}{dc} = \frac{1 - c - 2c \log \text{nat} \frac{1}{c}}{2c \left(\log \text{nat} \frac{1}{c} \right)^{3/2}}$$

Weil nur der Zähler diesen Bruch gleich Null machen kann, setzen wir

$$1 - c - 2c \log \text{nat} \frac{1}{c} = 0$$

und bekommen aus dieser Gleichung den abgerundeten Wert $c = 0,29$. Den zweiten Differentialquotienten brauchen wir nicht vollständig zu bilden, weil das Glied, das mit dem Zähler des ersten multipliziert ist, für $c = 0,29$ gleich Null wird. Was von ihm übrig bleibt, ist

$$\frac{1 - 2 \log \text{nat} \frac{1}{c}}{2c \left(\log \text{nat} \frac{1}{c} \right)^{3/2}}$$

Auch hier genügt es, den Zähler zu betrachten. Er wird für $c = 0,29$ negativ. q hat also an dieser Stelle ein Maximum und wird von $c = 0,29$ an mit wachsendem c abnehmen. Behält man das im Auge, so findet man aus (37) in Verbindung mit (40), daß

$$q \leq 1 : 1,42$$

sein muß, wenn die Kurve brauchbar sein soll. Auch die Lage der Wendepunkte ist, abgesehen davon, daß die Abszisse konstant ist, noch einer Bedingung unterworfen. Setzt man den Grenzwert von c und den Wert x_w in (34) ein, so erhält man

$$y_w \leq 0,11.$$

Man ersieht aus den letzten Betrachtungen, daß die Kurve (34) bei der Mannigfaltigkeit der empirischen Kurven fast nie brauch-

bar sein wird; sie unterwirft die empirische Kurve zu vielen Bedingungen. Man kann sie nun aber so abändern, daß sie die nötige Schmiegsamkeit besitzt, um, wie es scheint, für alle empirischen Kurven zu genügen. Wir schreiben

$$by + c = e^{-ax^2} \dots \dots \dots (41)$$

Nach unseren Vorbereitungen sieht man nun ohne Schwierigkeit die Richtigkeit der folgenden Gleichungen ein.

$$x_{(w)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(a)}} \dots \dots \dots (42)$$

$$y_{(w)} = \frac{e^{-1/2} - c}{(b)}$$

$$y_{(x=0)} = \frac{1 - c}{(b)} \dots \dots \dots (43)$$

$$q = \frac{1 - c}{(b) \sqrt{\frac{1}{(a)} \log \text{nat} \frac{1}{c}}} \dots \dots \dots (44)$$

$$c = e^{-(a)x_{(y=0)}^2} \dots \dots \dots (45)$$

Liegen die Wendepunkte auf der x -Achse, so ist $y_w = 0$ und daraus kommt

$$c = e^{-1/2} = 0,61.$$

$$\text{tg } \omega_w = \frac{y_{(w)}}{x_{(w)}} = \frac{(e^{-1/2} - c) \sqrt{2(a)}}{(b)} \dots \dots \dots (46)$$

Bestimmt man aus (44) und (46) (b) und setzt die erhaltenen Ausdrücke gleich, so ergibt sich

$$\left| \text{tg } \omega_w \right| = \frac{1 - c}{(e^{-1/2} - c) \sqrt{2 \log \text{nat} \frac{1}{c}}} \dots \dots \dots (47)$$

Man mißt $x_{(w)}$, $y_{(x=0)}$, $x_{(y=0)}$. Gleichung (42) gibt (a), (45) (c), (43) (b). (47) kann zur Kontrolle dienen.

Besitzt die empirische Kurve keine Wendepunkte, so kann man zunächst so rechnen, als ob die Wendepunkte auf der x -Achse lägen. Genügt das nicht, dann nimmt man sie entsprechend tiefer

Durch algebraische Kurven von höherer als zweiter Ordnung 105

an. Natürlich kann man die Kurve in diesem Falle auch als algebraische Kurve zweiter Ordnung auffassen¹⁾).

2. Mit Hilfe algebraischer Kurven von höherer als zweiter Ordnung

Man kann auch algebraische Kurven von höherer als zweiter Ordnung benutzen. Als Beispiel nehmen wir die Kurve vierter Ordnung

$$y = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{a^2 b^2}, \dots \dots \dots (48)$$

wo $0 < a < b < a\sqrt{5}$ ist. Weil die rechte Seite der Gleichung symmetrisch ist, können a und b auch vertauscht werden; dementsprechend ändern sich natürlich auch die vorstehenden Bedingungen. Von der Kurve kommt für uns nur das Stück in Betracht, das zwischen $x = +a$ und $x = -a$ liegt. Man findet

$$q = \frac{1}{a} = \frac{1}{|x_{y=0}|} \dots \dots \dots (49)$$

$$x_w = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} \dots \dots \dots (50)$$

Die Lage der Wendepunkte ist durch folgende leicht auffindbare Bedingungen beschränkt:

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \leq x_w \leq a$$

$$0 \leq y_w \leq 0,44.$$

Weil $y_{x=0} = 1$ ist, lassen sich (49) und (50) nicht ohne weiteres gebrauchen, um (a) und (b) zu erhalten. Es müssen vielmehr alle Streckengrößen mit $y_{(x=0)}$ multipliziert werden. Wir bekommen an Stelle von (49) und (50)

$$(a) = x_{(y=0)}$$

$$(b) = \sqrt{6 x_{(w)}^2 - x_{(y=0)}^2},$$

¹⁾ Bei den Berechnungen nach (41) kann ein Werk gute Dienste leisten, das, wie z. B. das Logarithmisch-trigonometrische Handbuch von Köhler (Leipzig, Tauchnitz), die oft gebrauchten Potenzen e^n von $n = 0,01$ bis $n = 10,00$ von Hundertstel zu Hundertstel fortschreitend bringt.

106 Erster Teil: IV. Mathematische Behandlung der empirischen Kurven
 und die Bedingungen für die Wendepunkte werden

$$\frac{(a)}{\sqrt{3}} \leq x_{(w)} \leq (a)$$

$$0 \leq y_{(w)} \leq 0,44 y_{(x=0)}.$$

Die empirische Kurve, die diesen Bedingungen nicht genügt, läßt sich nicht durch (48) darstellen. Es ist deshalb von vornherein wahrscheinlich, daß das Anwendungsgebiet von (48) beschränkt ist.

3. Die Reduktion der Kurvengleichungen

Sollte es sich bei weiteren Beobachtungen individueller Rfn herausstellen, daß (41) in allen Fällen ausreicht, dann wäre es zum Vergleichen sowohl von Gleichungen mit gezeichneten Kurven als auch von Rfn derselben Art untereinander sehr bequem, wenn die numerischen Koeffizienten der Gleichungen sämtlich auf eine bestimmte, nach Übereinkunft festzusetzende Größe bezogen würden. Dieses Verfahren ist erlaubt, weil die Rfn ja eine beliebige aus einer Schar ähnlicher Flächen ist. Ich will es die Reduktion der Gleichungen nennen und schlage als Reduktionsbasis $y_{x=0} = 1$ vor. Das liegt nahe, weil dieser Faktor schon in dem Werte von q steckt und auch ein einfaches Rechnen ermöglicht. Man wird dann natürlich nicht wie vorhin arbeiten, sondern von der Kurve unmittelbar zur reduzierten Gleichung übergehen. Definitionsgemäß ist dann

$$a = \frac{y_{(x=0)}^2}{2 x_{(w)}^2}.$$

c bleibt, wie sich leicht nachweisen läßt, dasselbe, ebenso q , das sich aber jetzt einfacher so schreibt:

$$q = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} \log \text{nat} \frac{1}{c}}}.$$

b erhält man aus

$$b = 1 - c \dots \dots \dots (51)$$

Schließlich ergibt sich noch die interessante Beziehung

$$\frac{a}{(a)} = \frac{b^2}{(b)^2}.$$

Die Funktion $\frac{a}{b^2}$ ist also eine absolute Invariante für jede Schar ähnlicher Kurven und kann zur direkten Reduktion einer unreduzierten Gleichung dienen, wenn man b nach (51) erhalten hat.

Das Schema der Mitteilung einer Rfln-Beobachtung wäre also dann dieses: Auf die Wiedergabe der Beobachtungen mit allen später noch zu besprechenden Umständen folgen die reduzierte Gleichung und die Angaben von q, x_w, y_w, ω_w . So hätte man auf die kürzeste, exakteste und bequemste Weise alles Material zur vergleichenden Betrachtung von Beobachtungen beisammen. Gewiß ist die Aufstellung der reduzierten Gleichung nicht unbedingt nötig, weil die Hauptwerte q und ω_w von der Reduktion unabhängig sind. Wer aber überhaupt die Zusammenfassung der Beobachtungen in Gleichungsform bringen will, dem wird das Praktische unseres Vorschlages einleuchten.

Würde eine andere Kurve als (41) notwendig, so müßte das Vorstehende sinngemäß auf sie übertragen werden.

4. Beispiele

Ich setze noch einige Beispiele von reduzierten Gleichungen für unsere gefundenen empirischen Kurven hierher.

$$\text{Fig. 7} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,98 y + 0,02 = e^{-0,0995 x^2} \text{ (gibt die Kurve nicht überall} \\ \text{durch (48) nicht darstellbar} \qquad \qquad \text{genau)} \end{array} \right.$$

$$\text{Fig. 10} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,906 y + 0,094 = e^{-0,335 x^2} \\ \text{durch (48) nicht darstellbar} \end{array} \right.$$

$$\text{Fig. 16} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,78 y + 0,22 = e^{-0,6 x^2} \text{ (nicht überall genau)} \\ \text{durch (48) nicht darstellbar} \end{array} \right.$$

$$\text{Fig. 17} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,56 y + 0,44 = e^{-0,23 x^2} \\ y = \frac{(x^2 - 1,83^2)(x^2 - 2,99^2)}{1,83^2 \cdot 2,99^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Fig. 18} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,78 y + 0,22 = e^{-0,36 x^2} \\ y = \frac{(x^2 - 2,04^2)(x^2 - 2,08^2)}{2,04^2 \cdot 2,08^2} \text{ [nicht so exakt wie} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{durch (41)].} \end{array} \right.$$

Die Kurven von Fig. 7 und 16 ließen sich ohne große Mühe auch noch genauer durch (41) darstellen. Man darf im allgemeinen

den Anspruch auf Genauigkeit nicht höher schrauben, als die empirischen Kurven selber sie geben können. Bei den Koeffizienten mehr als die zweite Stelle hinter dem Komma zu berücksichtigen, ist selbst dann kaum nötig, wenn die empirische Kurve fast ganz eindeutig ist. Gleichung (48) ist meistens unbrauchbar; sie gibt auch manchmal keine so gute Darstellung wie (41).

5. Die Gleichung der Referenzflächen

Nimmt man die y -Achse als Rotationsachse, so können demnach die Rfn der Gestirne als die von der x - z -Ebene abgeschnittenen Kappen von Flächen der Form

$$by + c = e^{-a(x^2 + z^2)}$$

angesprochen werden.

Unter der nämlichen Bedingung lassen sich einige von ihnen auch als die einzige einfach zusammenhängende der drei Flächen ansehen, in die die Fläche

$$(x^2 + z^2)(x^2 + z^2 - a^2 - b^2) = a^2 b^2 (y - 1)$$

im allgemeinen durch einen Schnitt in der x - z -Ebene zerfällt. Sicherlich sind noch andere Darstellungen möglich.

6. Die Benutzung von Potenzreihen

Man kann das im vorstehenden beschriebene Verfahren verallgemeinern, indem man die Kurvengleichung in eine Potenzreihe entwickelt denkt, deren Koeffizienten man zu bestimmen sucht. Wir setzen die Reihe an.

$$y = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + \dots \quad (52)$$

Ist die Gleichung reduziert, dann ist $B_0 = 1$. Für die Wendepunkte erhält man nun ohne weiteres die drei Gleichungen

$$y_w = 1 + B_1 x_w + B_2 x_w^2 + B_3 x_w^3 + B_4 x_w^4 + \dots$$

$$tg \omega_w = B_1 + 2 B_2 x_w + 3 B_3 x_w^2 + 4 B_4 x_w^3 + \dots$$

$$0 = B_2 + 3 B_3 x_w + 6 B_4 x_w^2 + \dots,$$

wozu noch als vierte kommt

$$0 = 1 + B_1 \frac{1}{q} + B_2 \frac{1}{q^2} + B_3 \frac{1}{q^3} + B_4 \frac{1}{q^4} + \dots$$

Bestimmt man aus diesen vier Gleichungen die vier Koeffizienten $B_1 \dots B_4$ und setzt die Ausdrücke in (52) ein, so hat

man die Kurvengleichung. Als Beispiel sei der nach der Determinantenmethode berechnete Ausdruck für den ersten dieser vier Koeffizienten mitgeteilt. Setzt man $x_{y=0} = x_0$ und $tg \omega_w = \frac{y_w}{x_w}$, so ist

$$B_1 = \frac{5 y_w x_0^4 - 9 x_0^4 - 8 x_w x_0^3 + 3 x_w y_w x_0^3 + 30 x_w^2 x_0^2 - 21 x_w^2 y_w x_0^2 - 13 x_w^4}{x_w x_0 (5 x_0^3 + 3 x_w x_0^2 - 21 x_w^2 x_0 - 13 x_w)}$$

Man sieht, daß dieses Verfahren, so einfach es theoretisch erscheint, praktisch weit umständlicher als das vorhin benutzte ist und wegen der immerhin vorhandenen Unbestimmtheit der empirischen Kurven doch nicht zu besseren Resultaten führen kann. Sollte es sich allerdings bei weiteren Beobachtungen herausstellen, daß die einfache Kurve (41) nicht genügt, sondern eine kompliziertere gesucht werden muß, dann würde die Benutzung von Potenzreihen vielleicht doch den kürzeren Weg darstellen.

Zweiter Teil

Die Bedingungen der Referenzflächen

I. Allgemeine Bemerkungen

Wir stellen zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die Bedingungen der individuellen Rfn zusammen.

1. Wir verstehen unter Bedingungen einer Rfl diejenigen Faktoren, die die Abweichungen der Rfl von einer gewissen idealen Form derselben bewirken. Diese ideale Form ist bei den Gestirnen die Halbkugel, indem man die kleinen Deformationen vernachlässigen kann, die Refraktion und Parallaxe daran anbringen. Als ideale Form der Rfl des blauen Himmels muß man gleichfalls die Halbkugel nehmen; denn es gibt keinen physikalischen Grund, weshalb wir bei klarem Himmel in der einen Richtung weiter sehen sollten als in der anderen. Dagegen kann die ideale Rfl des Wolkenhimmels, vorausgesetzt, daß die Wolkendecke der Erdoberfläche parallel ist, mit genügender Annäherung als Kugelkappe aufgefaßt werden.

2. Wir unterscheiden

- a) Bedingungen für die Art der Rfl (die Artbedingungen).
- b) Bedingungen für die Charakteristik. Die letzteren sind in der Mehrzahl Horizontbedingungen. Natürlich können die Artbedingungen auch dazu gehören. Im Grenzfall kann eine Artbedingung die wesentlichste Horizontbedingung sein. In der Hauptsache hängt von den Horizontbedingungen, deren Wirkung selbstverständlich bis zu einer gewissen Höhe hinaufreicht, die große Variabilität der Charakteristik der Rfn ab.

Das Kriterium für die Gleichheit aller Bedingungen zweier Rfn ist die Äquivalenz. Sind zwei Rfn vollkommen äquivalent,

so liegt die größte Wahrscheinlichkeit vor, daß ihre Bedingungen gleich sind. Allerdings nur Wahrscheinlichkeit, keine Sicherheit. Denn es ist zwar im höchsten Grade unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen, daß zwei Gruppen mehr oder weniger verschiedener Faktoren unter verschiedenen Umständen vollkommene Äquivalenz zweier Rfn bewirken. Bei unvollkommenen Rfn sind die Artbedingungen wesentlich dieselben; die Horizontbedingungen können wenigstens teilweise verschieden sein.

Die Bedingungen, die bisher in der Literatur angezogen worden sind, teilen wir in drei Gruppen: in physikalische, physiologische und psychologische; über die Zuteilung der einen oder anderen Bedingung zu einer Gruppe kann man verschiedener Meinung sein. Ich vermerke solche Bedingungen nicht, die ohne weiteres als gänzlich unzulänglich einzusehen (wie Brechung in Wassertropfen) oder die selbstverständlich sind (wie die Sichtweite).

3. Ich erwähne im folgenden gelegentlich auch qualitative Beobachtungen. Sie werden aber nur dann benutzt, wenn der Beobachter psychologisch geschult ist oder wenn es auf die Übung im psychologischen Beobachten dabei nicht ankommt, und in diesen beiden Fällen auch nur, wenn aus der Art der Behandlung des Problems hervorgeht, daß dem Beobachter nicht das Durchsetzen einer Theorie, sondern ihr empirischer Unterbau am Herzen liegt.

II. Die Gruppe der physikalischen Bedingungen

1. Die Refraktion

Die Refraktion, die schon von Aristoteles und Ptolemäus als Bedingung der Rfn der Gestirne genannt wurde, kann unter Umständen den Gesichtswinkel vergrößern. Wenn nämlich das Gefälle des Brechungsexponenten immer rascher wird, dann sind die vom Rande der Sonnen- bzw. Mondscheibe ausgehenden Strahlen verschieden stark gekrümmt und zwar so, daß die im Auge des Beobachters an sie gelegten Tangenten einen größeren Winkel einschließen als die von dort nach dem Rande gezogenen Geraden. Diese Erscheinung wird nun durchweg in der Vertikalen auftreten. Es ist indes nicht ausgeschlossen, daß sie auch einmal in der Horizontalen zu sehen ist.

Aber eine solche Abnahme der optischen Dichte der Luft ist eine Ausnahme und deshalb im vorliegenden Falle zur Erklärung unbrauchbar. In der Regel bewirkt die Refraktion eine Verkleinerung des Gesichtswinkels in der Vertikalen und eine weit geringere in der Horizontalen.

2. Die atmosphärische Grenzfläche

Man hat den Satz der allgemeinen Bemerkungen, daß es keinen physikalischen Grund gibt, weshalb wir in der einen Richtung weiter sehen sollten als in der anderen, als unrichtig zu erweisen versucht und eine Grenzfläche, besser Grenzschicht, in der Atmosphäre definieren wollen, die wir bei unbedecktem Himmel als Himmelsgewölbe sähen. Damit wäre allerdings eine Kugelkappenform der Rf_l des blauen Himmels ohne weiteres verständlich.

So erklärt Reimann das gesehene Himmelsgewölbe physikalisch als die Grenzschicht, „deren zurückgeworfenes Licht von unserem Auge nicht mehr empfunden wird und auf welche sich die helleren unteren Schichten projizieren“ (77, 34).

Überträgt man diese und ähnliche Ausführungen in die Sprache der heutigen Physik, so können sie nur auf Grund der Rayleighschen Theorie eine optische Grenzschicht der Atmosphäre behaupten. Wir trennen die Staub- und die Gasatmosphäre. Die Staubatmosphäre kommt für unseren Zweck hauptsächlich in Frage, weil sie etwa $\frac{2}{3}$ des zerstreuten Lichtes liefert. Über die Verteilung der Staubatmosphäre ist uns nichts bekannt. Nehmen wir an, daß ihre Dichte eine sich schneller als bei der Gasatmosphäre ändernde Funktion ihrer Entfernung vom Erdmittelpunkt ist, daß ferner die kleineren Teilchen wegen ihres größeren Schwebevermögens die oberen Schichten bilden, so läßt sich mit Hilfe der Größe der Teilchen eine optische Grenzschicht definieren. Es werden nämlich erst in einer gewissen Höhe über dem Erdboden Teilchen vorhanden sein, die klein gegen die Wellenlänge des Lichtes sind. Von da ab erst liefert die Staubatmosphäre zerstreutes Licht. Diese erste Schicht zerstreuend wirksamer Teilchen verhält sich etwa wie die Oberfläche eines selbstleuchtenden Objektes; wir schauen gleichsam gegen die innere Wand des hohlen Diffusions-

körpers der Staubatmosphäre, wenn ich diesen leicht verständlichen Ausdruck gebrauchen darf.

Eine analoge Definition läßt sich bei der Gasatmosphäre nicht geben, weil ihre Verteilung wahrscheinlich anders ist. Es läßt sich also auch nicht sagen, ob oder wie weit durch sie die Existenz einer Grenzschicht für die Gesamtatmosphäre aufgehoben würde.

Man hat auch gemeint, eine optische Grenzschicht auf die Dichte der Atmosphäre gründen zu können. So sagt Wegener (134, 250) von der Zerstreuung: „Dies könnte allerdings erst in Höhen geschehen, in denen der Abstand dieser Moleküle voneinander hinreichend groß geworden ist, nämlich oberhalb etwa 20 km Höhe.“ Es ist aber nicht zu verstehen, wie die Dichte in dieser Weise mit der Fähigkeit der Zerstreuung zusammenhängen kann.

Es ist indes selbst dann, wenn man die Grenzschicht der Staubatmosphäre ausschließlich als für unser Sehen maßgebend ansieht, doch noch ein zweifelhafter Punkt in dieser Überlegung. Ob sich nämlich eine solche Grenzschicht unserem Auge wirklich ähnlich wie die Oberfläche eines Körpers darstellen würde, trotzdem kontinuierliche Übergänge vom „Medium“ zum „Körper“ vorhanden sind? Da wir eine ursprüngliche Empfindlichkeit gegen die Entfernung von Licht schwerlich annehmen können, da aber im vorliegenden Falle jedes Tiefenmerkmal fehlt, so würden die Entfernungen der Grenzschicht für unser Auge wahrscheinlich qualitativ gleich sein, wir würden die Grenzschicht als undeutlich ausgeprägte Halbkugel sehen.

Endlich bleibt noch zu fragen, wie die gewaltigen Unterschiede in der Höhe der Schicht zu erklären wären, die sich aus den verschiedenen α -Werten ableiten lassen. Aus Gleichung (23) ergibt sich für die Höhe der Ausdruck

$$h = \frac{2 r q^2}{1 - q^2}.$$

Mit dem Reimannschen Werte für den blauen Himmel gerechnet wird $h = 1161$ km, mit meinem Werte $h = 5875$ km. Einen Teil solcher Unterschiede kann man ja psychologisch verstehen. Der größere Teil aber muß objektiv gedeutet werden, wenn man überhaupt mit dem Grenzschichtgedanken Ernst machen will. Diese objektive Deutung würde aber radiale Verschiebungen

erfordern, die wegen ihrer Größe kaum möglich sind. Es ist überhaupt mehr als unwahrscheinlich, daß die Atmosphäre in den genannten Höhen noch optisch wirksam ist.

Einen anderen Sinn als den hier besprochenen kann ich in der Grenzsichttheorie nicht finden. Vor allem ist mir, offen gestanden, der Sinn der Fläche des Himmelsgewölbes, deren Größe Reimann durch Beobachtungen finden will (78, 186), nicht klar; mir scheinen dabei Physikalisches, Psychologisches und Physiologisches durcheinander geworfen zu sein. —

In Wirklichkeit werden die Verhältnisse wohl so liegen, daß wir durch jedes nicht zu kleine Flächenelement des Himmelsgewölbes hindurch Strahlen, die aus den verschiedensten Entfernungen her kommen, erhalten, und daß es keine Summe von solchen Elementen geben kann, bei der eine Entfernung auf Kosten von anderen bevorzugt ist.

III. Die Gruppe der physiologischen Bedingungen

1. Die Vergrößerung des Netzhautbildes als Folge der Vergrößerung der Pupille

Infolge der geringeren Leuchtkraft der Gestirne gegen den Horizont hin erweitert sich die Pupille. Dadurch soll sich das Netzhautbild vergrößern.

Aber zunächst ist es physikalisch unmöglich, daß in dem optischen System des Auges eine Bildvergrößerung durch Änderung des Durchmessers der Eintrittspupille auftritt; von der Pupillöffnung hängen nur die Helligkeit des Netzhautbildes und die Größe der Zerstreuungskreise ab. Die Erklärung widerstreitet auch jeder Erfahrung und vermag die Gesamtheit der vorliegenden Erscheinungen (z. B. Wolkenhimmel) nicht zu deuten.

2. Die Abnahme der Sehschärfe beim indirekten Sehen

Bourdon (12) meint, die Kurven der Verkleinerung des Mondes gegen den Zenit hin und der Abnahme der Sehschärfe zur Netzhautperipherie hin stimmten so gut überein, daß eine kausale Verknüpfung zwischen diesen beiden Beziehungen nahe liege.

In Wirklichkeit stimmen diese Kurven nicht mehr überein, als Hunderte Kurven von Größen, die anfangs schnell und später langsam abnehmen, es auch tun.

Überdies handelt es sich bei dem vorliegenden Problem nur um direktes Sehen.

3. Die Einwirkung der Schwerkraft auf das Auge

Schaeberle (83) und andere (8) meinen, der Abstand der Linse von der Retina sei bei horizontaler Blickrichtung ein Maximum, bei vertikaler unter dem Einfluß der Schwerkraft ein Minimum; deshalb sei im letzteren Falle das Bild auf der Netzhaut verkleinert.

Zoth (107, 204) behauptet zwar, diese Erklärung sei anatomisch unmöglich. Wenn er damit jede Möglichkeit von Veränderungen im Auge unter dem Einfluß der Schwerkraft leugnen will, so ist das sicherlich zu weit gegangen. Solche Veränderungen sind von Levinsohn durch Experimente mit Affen konstatiert und auf Grund eines Analogieschlusses, statistischer Ergebnisse und anatomischer Befunde auch mit Recht beim Menschen angenommen worden (123; 124; 125). Aber es handelt sich in diesen Fällen um langsam eintretende Veränderungen unter lange Zeit andauernder Einwirkung der Schwerkraft. Dagegen verlangt die Deutung Schaeberles sehr schnell sich vollziehende und wieder verschwindende Änderungen. Diese letzteren werden allerdings anatomisch unmöglich sein. Aber es ist überflüssig, diese Unmöglichkeit zu betonen. Ebenso überflüssig ist es, vom physikalischen Standpunkte aus die Kleinheit des Einflusses nachzuweisen (das dürfte übrigens auch kaum möglich sein, weil die nötigen Konstanten nicht alle bekannt sind). Daß die plötzliche Änderung in der Tat nicht eintritt, läßt sich auf andere Weise zeigen.

Selbst wenn nämlich Schaeberles Ansicht über die Möglichkeit eines plötzlichen Einwirkens der Schwerkraft richtig wäre, würde die Folgerung, die er daraus zieht, dennoch falsch sein. Die Änderung des Abstandes bei vertikaler Blickrichtung kann — ich spreche einmal davon wie von einem Faktum — auf verschiedene Weise zustande kommen. Erstens wird der Bulbus in der Hauptachse verkürzt und dadurch der Abstand verkleinert. Zweitens kann die Anziehungskraft die Linse unter Zerrung an

der Zonula ciliaris noch eigens der Netzhaut nähern. Drittens endlich kann man auch noch einen Einfluß auf die Form der Linse annehmen, wodurch sie stärker gewölbt wird. In keinem der drei Fälle wird das eintreten, was Schaeberle erwartet. Die Verkürzung des Bulbus hat die Verlegung der hinteren Brennebene hinter die Netzhaut zur Folge. Das Auge wird hypermetrop und die Bilder der Gegenstände werden undeutlich. Nähert sich nun noch die Linse, ohne ihre Gestalt zu ändern, der Netzhaut, so rückt die Bildebene weiter hinter die Brennebene und die Bilder werden noch verschwommener. Ändert die Linse dabei durch stärkere Wölbung ihre Gestalt, so wird das Rückwärtswandern der Bildebene teilweise wieder aufgehoben. So ist es, wenn man sich die Änderung des Abstandes ohne Rücksicht auf histologische Verhältnisse vorzustellen versucht. Berücksichtigt man wenigstens, daß der Glaskörper nur wenig nachgiebig ist, so wird weder ein Näherrücken der Linse an die Netzhaut, noch eine stärkere Wölbung eintreten können. Vielmehr wird die Linse unter dem Einfluß der Schwerkraft abgeflacht und dadurch die Bildebene noch weiter hinter die Brennebene gerückt. Man sieht, der Einfluß der Schwerkraft würde, wie man ihn sich auch denken mag, das Auge anormal machen. Da nun aber diese Anomalie bei Hebung der Blickrichtung nicht eintritt, so kann auch von einem solchen plötzlichen Einfluß der Schwerkraft keine Rede sein.

4. Die Blickrichtung

a) Theorie der Bestimmung der Referenzfläche der Blickrichtung

Da das Blickfeld nach oben ziemlich eng begrenzt ist (der maximale Ausschlag aus der Primärstellung nach oben beträgt nach verschiedenen Beobachtern zwischen 20° und 33°), so ist die Rfl der reinen Blickrichtung eine zweifach zusammenhängende Fläche. Sie wird zu einer einfach zusammenhängenden, wenn man die Beobachtungen, die unter Hebung des Kopfes über die Blickfeldgrenze hinaus gemacht werden, mit berücksichtigt. Und weil das dem praktischen Leben, insbesondere den in Frage stehenden Verhältnissen entspricht, wollen wir die Rfl so verstehen.

Die Theorie der Bestimmung der Rfl ist dieselbe wie bei den Gestirnen; denn in beiden Fällen liegen miteinander verglichene

Sehgrößen nebst den zugehörigen Höhen als Beobachtungsmaterial vor.

Da ϱ_R beobachtet werden kann, läßt sich die Charakteristik unmittelbar den Beobachtungen entnehmen.

b) Diskussion der Beobachtungen

a) Stroobant

Die ersten Messungen zur Rfl stammen von Stroobant (97). Er verfuhr nach zwei Methoden.

1. Im Zenit waren zwei elektrische Funken mit konstantem Abstand angebracht. In Augenhöhe wurde mit Hilfe eines Stockes auf einer Wand eine gleich groß erscheinende Strecke abgegriffen. Dieses Verfahren war unbequem und unexakt.

2. Im Zenit (an der Decke eines Saales) zwei elektrische Funken mit konstantem Abstand (20 cm). Gleichweit entfernt waren in Augenhöhe zwei andere elektrische Funken angebracht, deren Distanz sich verändern ließ. Der Beobachter hatte die Aufgabe, die Sehgröße der variablen Distanz gleich der der anderen zu machen.

Die Entfernung der Zenitfunken ist in den folgenden zwei Tabellen gleich 100 gesetzt.

Für acht Beobachter ergaben sich dann die in Tabelle 51 zusammengefaßten Werte der Distanz der Horizontfunken. Ihr Mittel ist 81,9. Die mit einem Sternchen bezeichneten Werte sind mit Hilfe der ersten Methode gefunden.

Tabelle 51

Beobachter	Distanz der Horizontfunken	Zahl der Beobachtungen
1	75,7*	12
2	79,5	10
3	80,1	5
4	81,5	30
5	82,3*	1
6	84,6*	12
7	85,0	2
8	86,7	1

Stroobant wollte nun entscheiden, ob die Verkleinerung zum Zenit hin ihre Ursache in der absoluten Lage des Kopfes oder

in seiner relativen Lage zum Körper ihren Grund habe. Er wiederholte deshalb die Versuche, indem er, auf dem Rücken liegend, nun die Zenitfunken in Primärstellung sah. Für den Abstand der Horizontfunken erhielt er als Mittel aus vier Beobachtungen den Wert 82,6, ein zweiter Beobachter ebenfalls aus vier Beobachtungen 81,1. Was Stroobant übrigens hier konstatiert hat, ist der Einfluß der Blicksenkung.

Später (98) versuchte dann Stroobant, die Rfl genau zu bestimmen. Er verglich zu diesem Zweck die verschiebbaren Funken nicht nur im Horizont, sondern in Höhen von 15° zu 15° mit den Zenitfunken. Tabelle 52 enthält die Resultate. Die letzte Kolonne ist von mir hinzugefügt ($q_R^{\text{I}} = 1$).

Fig. 19 gibt den Meridian der Rfl.

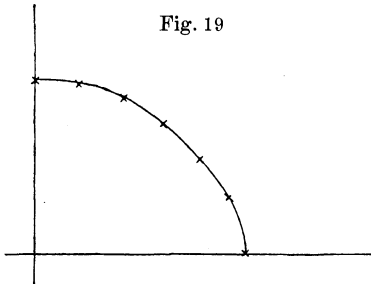


Fig. 19

Tabelle 52

ω	Distanz der verschiebbaren Funken	Zahl der Beobachtungen	q
0°	81,5	30	1,23
15	85,4	10	1,17
30	89,9	10	1,11
45	94,1	10	1,06
60	94,9	10	1,04
75	98,4	10	1,02

β) Reimann

Reimann (77) hatte horizontwärts Scheiben mit 14 bis 25 cm Durchmesser in 15 m Abstand auf einem Tableau angeordnet. Aus einem Fenster im Zenit wurden einzeln Scheiben mit 15 bis 24 cm Durchmesser in demselben Abstand herausgesteckt, und der Beobachter mußte jedesmal die ihm gleich erscheinende Scheibe des Tableaus angeben. Es ergab sich, daß eine Scheibe im Zenit so groß erschien wie eine am Horizont, die $\frac{1}{100}$ größer war.

Diese sehr rohen Beobachtungen ersetzte Reimann dann (78) durch andere, die vermutlich den Stroobantschen nachgebildet waren. Er brachte an der Decke eines Zimmers, dessen Höhe nicht angegeben ist, auf einem Karton in 19,45 cm Entfernung zwei 4 cm lange Linien an, in Augenhöhe zwei gleich lange verschiebbare Linien. Außer sich selber (Re) hatte er noch eine Versuchsperson (Ri). Die Versuchspersonen beobachteten in drei Stel-

lungen: 1. stehend mit Blickerhebung (A), 2. liegend mit Blicksenkung (B), 3. liegend mit Blickerhebung, so daß die Horizontlinien im Zenit waren (C). Setzte man die Entfernung der zentralen Linien gleich 100, so ergab sich für die Horizontlinien

in Stellung A	}	Re	{	110,0 101,0
		Ri	{	102,9 101,8 101,6
in Stellung B	}	Re	{	108,7 100,7
		Ri	{	105,1 101,8 103,3
in Stellung C	}	Ri	{	101,1 106,1.

Wurden die Horizontlinien in 1,5fache Entfernung gestellt, dann kam

in Stellung A	Ri	100,1.
-------------------------	----	--------

Wurden sie fast doppelt so weit wie die Zenitlinien gestellt, so ergab sich

in Stellung A	}	Ri	{	101,0
" " B			{	101,6
" " C			{	100,3.

Bei einer zweiten Serie von Beobachtungen in verdunkeltem Raume waren im Zenit zwei kurze glühende Platindrähte mit 20 cm gegenseitiger Entfernung angebracht, im Horizont solche Drähte mit veränderlichem Abstand. Wurde die Entfernung der Zenitdrähte wieder gleich 100 gesetzt, so ergab sich

in Stellung A	}	Re	{	90,40 74,60 90,40
		Ri	{	96,85 88,75 93,90
in Stellung B	}	Ri	{	92,40
" " C		Ri	{	93,30,

wenn der Abstand der horizontalen Drähte vom Beobachter um $\frac{1}{3}$ vergrößert wurde,

in Stellung A	}	Re	114,80
		Ri	109,20,

wenn er verdoppelt wurde,

in Stellung A	Ri	138,80.
-------------------------	----	---------

Jede der mitgeteilten Zahlen ist das Mittel aus zehn Einzelbeobachtungen.

Reimann hat zur Deutung dieser Ergebnisse verschiedene Prinzipien. Zunächst meint er, daß das Auge außerordentlich fein und sicher Unterschiede der Entfernung ausgleiche. Dann hält er dafür, daß die Erinnerung daran mitwirke, wie wir horizontwärts öfters, zenitwärts sehr selten Gegenstände in großer Entfernung sähen. Die Blickrichtung gilt ihm nicht als Deutungsprinzip.

Ich glaube, daß erstens derjenige, der will, noch andere Deutungsprinzipien einführen könnte. Ist z. B. genau auf den Ausgang von der Primärstellung und auf größtmögliche Blickerhebung geachtet? Und läßt die große Streuung der Werte eine genügende Sorgfalt der Beobachtungen vermuten? Wenn zweitens das zweite der Deutungsprinzipien richtig wäre, dann müßte man einen entsprechenden Einfluß nicht nur im verdunkelten, sondern auch im hellen Raume erwarten. Es müßte ferner das Resultat auch ohne Blickerhebung oder Blicksenkung herauskommen.

Im wesentlichen scheinen mir die bunten Reimannschen Ergebnisse sich durch zwei Deutungsprinzipien ordnen zu lassen. Zunächst liegt eine Verwechslung von geschätzter Größe und Sehgröße vor, die vor allem unbezweifelbar aus den Beobachtungen bei verändertem Abstand in der ersten Serie hervorgeht. Die Versuchspersonen haben dort einfach (vielleicht, sogar wahrscheinlich unbewußt) die wirkliche gegenseitige Entfernung der Horizontlinien schätzungsweise gleich der wirklichen Entfernung der Zenitlinien zu machen versucht. Im Dunkelraume fehlte zur gleichen Schätzung die Möglichkeit einer sicheren Schätzung des Abstandes vom Beobachter. Als zweites Deutungsprinzip kommt dann die Blickrichtung hinzu, deren Wirkung vielleicht niemals ganz rein in den Ergebnissen auftritt, sondern immer mehr oder weniger von jener Verwechslung durchkreuzt wird.

γ) Bourdon

Bourdon (12, 417) stellte mit Hilfe von ausgeschnittenem schwarzem Papier, das er vor Schachteln setzte und durch im Innern befindliche Lampen erleuchtete, zwei gleich helle und gleich große leuchtende Scheiben von 29,5 mm Durchmesser her. Die

Schachteln wurden auf 3 m langen, in Zentimeter abgeteilten Stäben angebracht, die eine in einer Entfernung von 2 m fest, die andere mit Hilfe eines Fadens vorwärts und rückwärts verschiebbar. Die Stäbe waren um eine durch ihre Enden gehende Achse drehbar. An dieser Achse war ein mit Gradeinteilung versehener Kreis befestigt, der den Winkelabstand der Stäbe abzulesen gestattete. Der Stab mit der verschiebbaren Schachtel wurde horizontal festgelegt. Durch ein zwischen den Zähnen gehaltenes, auf der Tischebene liegendes Brettchen wurde die Kopfhaltung fixiert. Die Versuchsperson hatte die Aufgabe, bei einem bestimmten vertikalen Winkelabstand der Scheiben die bewegliche Scheibe so lange zu verschieben, bis sie so groß wie die feste erschien. Bei jedem Winkelabstand wurden zweimal 100 Beobachtungen gemacht, die einen 100, indem die bewegliche Scheibe vom Beobachter ab (+), die anderen 100, indem sie auf den Beobachter zu (—) bis zur Gleichheit der Sehgrößen verschoben wurde. Tabelle 53 enthält die Resultate der monokularen Beobachtungen Bourdons. +1 und —1 sind die Entfernungen der beweglichen Scheibe vom Beobachter in Metern, 1 das Mittel aus beiden; m. V. gibt die mittlere Variation an.

Tabelle 53

ω	—1	m. V.	+1	m. V.	1
0°	2,026	0,014	1,947	0,220	1,986
15	2,043	0,027	1,969	0,032	2,006
30	2,014	0,028	1,968	0,024	1,991
45	1,998	0,029	1,951	0,030	1,974

Die Beobachtungen wurden teilweise binokular wiederholt. Für $\omega = 15^{\circ}$ und $\omega = 30^{\circ}$ war ihre Zahl je zweimal 50. Bei 0° wurden keine Beobachtungen gemacht, weil dann die Tiefenempfindung sich störend bemerkbar machte. Die Resultate gibt Tabelle 54.

Tabelle 54

ω	—1	m. V.	+1	m. V.	1
15°	2,028	0,020	1,981	0,021	2,004
30	2,051	0,036	2,013	0,028	2,032
45	2,047	0,041	1,942	0,031	1,994

Bis 45° ist also für Bourdon bei dieser Versuchsanordnung kein Einfluß der Blickrichtung bei monokularem und binokularem Sehen vorhanden.

d) Guttman

Am Perimeter waren zwei Paare paralleler Linien, eines mit konstantem, das andere mit veränderlichem Abstand, in deutlicher Sehweite angebracht (41). Die konstante Vergleichsstrecke (3 cm Abstand der Linien) war in 40° Höhe, das andere Paar im Horizont angeordnet. Setzte man den gegenseitigen Abstand der Linien der Vergleichsstrecke gleich 100, so ergab sich aus 125 Versuchen für den Abstand der Horizontlinien 96,34 (eine Versuchsperson). Bei den Beobachtungen mit Blicksenkung (40°), bei deren einer Hälfte die Vergleichsstrecke unten war, kam aus 140 Versuchen etwa $\frac{1}{2}\%$ Fehlschätzung heraus. Die Beobachtungen wurden dann auf Flächen ausgedehnt. Im Dunkelzimmer befanden sich zwei gleich erleuchtete Flächen in gleichem Abstand vom Beobachter, beide mit veränderlichem Durchmesser, eine in 0° , die andere in 40° Höhe. Es waren zwei Versuchspersonen vorhanden, die teilweise binokular beobachteten. Ihre Resultate stimmten überein. Aus 145 Versuchen fand sich für den Durchmesser der unteren Fläche 96,47.

e) Aloys Müller

In 10 m Abstand vom Beobachter wurden (60) im Dunkelraume in 0° Höhe zwei Funkenstrecken mit 200 mm konstanter Entfernung erzeugt. Bei 26° Höhe befanden sich in demselben Abstand vom Beobachter zwei Funkenstrecken mit veränderlicher Entfernung. Tabelle 55 gibt die Abstände der oberen Funkenstrecken aus 154 Beobachtungen mit Blickerhebung von 12 Versuchspersonen und aus 76 Beobachtungen mit Blicksenkung von 9 Versuchspersonen. Die Beobachtungen wurden binokular angestellt.

Ein klar ausgesprochener Einfluß der Augenbeschaffenheit ist nicht vorhanden. Mit einer einzigen Ausnahme tritt bei sämtlichen Beobachtungen, ähnlich wie bei vielen Reimannsches, die Wirkung der Blickrichtung anders auf, als sie erwartet wurde: Blickerhebung vergrößert, Blicksenkung verkleinert die wirkliche Größe.

Tabelle 55

Versuchspersonen Augen- beschaffenheit	Blick- erhebung	Blick- senkung	Versuchspersonen Augen- beschaffenheit	Blick- erhebung	Blick- senkung
1. emmetrop . .	191,3	207,1	8. { emmetrop, linkes Auge fast unbrauchbar	185,4	190,6
2. " . .	185,5	190,8			
3. " . .	187,9	—			
4. " . .	196,0	194,7			
5. " . .	198,7	193,2	9. emmetrop	190,1	—
6. " . .	182,8	184,6	10. hypermetrop	185,8	—
7. " . .	—	194,0	11. "	185,0	—
			12. "	175,2	181,4
			13. myop . . .	184,1	176,4

Von einer Entfernungstäuschung berichteten die Versuchspersonen nichts.

ζ) Qualitative Beobachtungen

Zoth (106) unterscheidet einen Einfluß der Blickrichtung auf die scheinbare Entfernung und einen solchen auf die Sehgröße. Der erstere tritt bei verhältnismäßig nahen Objekten auf, wie Zoth durch qualitativen Vergleich von glühenden Platindrähten, die an der Decke eines Saales und in Augenhöhe angebracht waren, bewiesen haben will. Der an zweiter Stelle genannte Einfluß betrifft Objekte, für deren Entfernungs- und Größenschätzung keine Anhaltspunkte vorliegen. Die Unterscheidung scheint durch die besprochenen quantitativen Versuche nicht bestätigt zu sein.

Zwei Gruppen qualitativer Beobachtungen beziehen sich hauptsächlich auf den Mond.

Man hat zunächst versucht, in veränderter Kopf- oder Körperhaltung den hochstehenden Mond ohne Blickerhebung, den tiefstehenden mit Blickerhebung zu betrachten. Dem einen gelangen diese Versuche im Sinne einer Wirkung der Blickrichtung, dem anderen nicht. Wer den Einfluß von Urteilen auf solche Beobachtungen kennt, wird sich darüber weiter nicht wundern.

Dann hat man mit Hilfe von Spiegeln (oder Prismen) das Bild des hochstehenden Mondes an den Horizont, das Bild des tiefstehenden in größere Höhen verlegt. Waren die Spiegel groß genug, dann trat die Wirkung im Sinne der Blickrichtung stets ein. Es ist übrigens selbstverständlich, daß diese letzteren Ver-

suche den Einfluß der Blickrichtung nicht rein ergeben, weil die Horizontbedingungen nicht ausgeschaltet werden können.

c) Ergebnis

Ein Einfluß der Blickrichtung auf die Sehgröße ist zwar ohne Zweifel vorhanden. Aber die in den Versuchen auftretenden widersprechenden Wirkungen und der negative Ausfall der Beobachtungen Bourdons zeigen, daß Faktoren mitwirken, die bisher noch nicht herausgestellt sind. Zu diesen Faktoren zähle ich nicht oder höchstens in zweiter Linie die Beziehungen zwischen Sehgröße und scheinbarer Entfernung. Wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Entfernungsempfindung unbestimmt ist, scheint die Sehgröße etwas Primäres, von der scheinbaren Entfernung relativ Unabhängiges zu sein. Man kann deshalb die Rfl der Blickrichtung als durch die Beobachtungen Stroobants allein noch nicht bestimmt ansehen.

Ob der physiologische Grund des Einflusses der Blickrichtung auf dem Konvergenzimpuls allein oder auch auf dem Akkomodationsimpuls und auf Rollungen beruht, ist uns hier gleichgültig. Vielleicht spielt wenigstens gelegentlich noch das assoziative Moment hinein.

Der Anteil der Blickrichtung an der Rfl der Gestirne läßt sich bei den Beobachtungen dadurch ausschalten, daß man das Vergleichsobjekt in gleiche Höhe mit dem Gestirne bringt. Denn dann tritt ihre Wirkung mit dem gleichen Werte für Gestirn und Vergleichsobjekt auf; notiert wird aber dabei ein Maß des Vergleichsobjektes, also auch des Gestirnes, das von dem Einfluß frei ist. Vorausgesetzt ist allerdings, daß die Blickrichtung in diesen Fällen primär, also relativ unabhängig von der Entfernungsempfindung wirkt und daß assoziative Faktoren keine Rolle spielen.

IV. Die Gruppe der psychologischen Bedingungen

1. Die Beziehung zwischen scheinbarer und wirklicher Entfernung

v. Sterneck hat seine Theorie der scheinbaren Entfernung mit der Rfl der Wolken in Verbindung gebracht (133).

Diese Theorie besagt folgendes. Ist d' die scheinbare, d die wirkliche Entfernung und c ein Wert, der für ein und dieselbe Versuchsreihe konstant bleibt und davon abhängt, „welche Erfahrungsdaten uns vom Beobachtungsorte aus zugänglich sind“, so hängen d' und d durch die Funktion

$$d' = \frac{cd}{c+d}$$

zusammen. d' nähert sich der Grenze c , wenn $d = \infty$ wird; c stellt also die größtmögliche scheinbare Entfernung unter den jeweiligen Umständen dar. v. Sterneck hat (133, 1689) das Gesetz aus einem Beobachtungsmaterial von 22 (!) Schätzungen abgeleitet, wozu er später (93, 15) noch 25 Schätzungen hinzufügte.

Um diese Theorie bequem auf die Wolken anwenden zu können, macht v. Sterneck die Annahme, daß die Wolkenschicht mit hinreichender Genauigkeit als eine Horizontalebene angesehen werden kann, die den Horizont erst in der wirklichen Entfernung $d = \infty$ schneidet. Dann entsteht das Problem: In welcher Gestalt sehen wir eine nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckende Gerade von einem außerhalb der Geraden gelegenen Standpunkte aus?

Wir wählen den Standpunkt O zum Koordinatenanfangspunkt und geben der Geraden die Gleichung $x = a$. Ein Punkt P der Geraden wird nun nicht in der Entfernung $OP = d$, sondern in der Entfernung

$$d' = \frac{cd}{c+d} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gesehen, wenn x und y die Koordinaten des Endpunktes von d' sind. Ist φ der Winkel von d (oder d') mit der x -Achse, so ist

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a}{d}$$

Drücken wir nach der oben aufgestellten Funktion d durch d' aus, so erhalten wir

$$d = \frac{cd'}{c-d'} = \frac{c\sqrt{x^2 + y^2}}{c - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Also ist

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a(c - \sqrt{x^2 + y^2})}{c\sqrt{x^2 + y^2}}$$

oder

$$c^2(a-x)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel¹⁾, deren reelle Achse mit der x -Achse zusammenfällt. Die Rfl des Wolkenhimmels ist also eine Hyperboloidkappe. Als Probe an der Erfahrung betrachtet es v. Sterneck, daß die daraus berechneten Werte $c = 10,6$ km, Winkel mit der Horizontebene $= 14^\circ$ im allgemeinen, Wolkenhöhe $= 1575$ m in einem besonderen Falle „ganz plausibel“ sind. —

Es ist ein berechtigter Gedanke, daß die Beziehung zwischen scheinbarer und wirklicher Entfernung die Rfl der Wolken mitbestimmen muß. Aber selbst wenn wir die v. Sternecksche Funktion trotz ihrer noch nicht genügenden Erfahrungsgrundlage als richtig annehmen, ist die Anwendung, die er von ihr macht, doch hauptsächlich zwei Bedenken ausgesetzt. Zunächst kann jene Beziehung nicht zur Ableitung der Rfl der Wolken dienen, weil sie sicher nicht der einzige Faktor ist, von dem diese Fläche abhängt. Die Erfahrung hat uns auch gezeigt, daß diese Rfl keine Hyperboloidkappe ist. Zweitens bezieht sich die Funktion v. Sternecks gar nicht auf scheinbare, sondern auf geschätzte Entfernungen (die in demselben Verhältnis stehen wie Sehgrößen und geschätzte Größen). Das geht vollkommen deutlich aus den folgenden Worten hervor (93, 7): „Zur Ermittlung der scheinbaren Entfernungen haben wir aber kein so einfaches und präzises Mittel zur Verfügung, wie bei der Ermittlung von wahren Entfernungen; jegliches Messungsverfahren ist hier von vornherein ausgeschlossen und wir sind auf das viel ungenauere Verfahren von Schätzungen angewiesen. Das Schätzungsergebnis ist dann das Ergebnis aller uns von dem betreffenden Standorte aus zugänglichen Erfahrungselemente; ... Je mehr Erfahrungselemente uns von dem gewählten Standorte aus zur Verfügung stehen, um so weniger werden die scheinbaren Entfernungen der gesehenen Gegenstände von den wahren Entfernungen abweichen. Das Maximum aller möglichen Erfahrungen bestände dann natürlich darin,

¹⁾ Interessant ist es, damit den Bericht von Folkes an Smith (1, 416) zu vergleichen: „Die parallelen Seiten eines sehr langen und breiten Ganges, Weges usw. schienen sich nicht einander wie gerade Linien zu nähern, die nach einem sehr entlegenen Punkte beide zuzugingen, sondern vielmehr wie die Schenkel zweier Hyperbolen, die sich auf beiden Seiten einer durchs Auge mit den Seiten des Ganges parallel gezogenen Asymptote hinzogen.“

daß wir auf irgend eine Weise vom Standorte aus Zeugen einer tatsächlichen Abmessung aller in Frage kommenden Entfernungen wären; in diesem Falle würde dann der Sehraum mit dem wahren Raume identisch sein.“ Die v. Sternecksche Funktion gibt also die Beziehung zwischen der geschätzten und der wirklichen Entfernung; sie bezieht sich nicht auf den Sehraum, sondern auf den „Urteilsraum“. Deshalb wird bei Versuchen die Konstante c auch individuelle Verschiedenheiten zeigen müssen.

Daß diese Funktion nicht im Sehraum gelten kann, scheint sich mir auch noch aus zwei anderen Umständen zu ergeben: 1. Die scheinbare Entfernung als psychische Größe läßt sich nicht in einem absoluten Maße ausdrücken, sondern nur durch Vergleich mit ihresgleichen. 2. Die scheinbare Entfernung hängt wahrscheinlich ebenso sehr von der Sehgröße ab, wie die Sehgröße von ihr; man darf deshalb voraussetzen, daß die Sehgröße in der Funktion eine Rolle spielen wird. Diese beiden Bedingungen erfüllen die v. Sternecksche Funktion nicht.

Die tatsächlichen Verhältnisse im Sehraum und ihre Beziehungen zum wirklichen Raum sind vielmehr für Bereiche, deren Grenzen sich noch nicht abstecken lassen, in den Gleichungen (24), (26) und (27) beschrieben, wenn man unter ϱ die scheinbare Entfernung versteht. Die Gleichungen (24) und (26) sprechen in diesem Falle das von v. Sterneck sogenannte Sehwinkelgesetz aus (93, 6). v. Sterneck behauptet seine absolute Gültigkeit aus dem Grunde, weil der Sehraum ein „Teil“ des wahren „Raumes“ sei, in ihm also auch die euklidische Geometrie gelten müsse. Das ist ein (eigentlich nicht recht begreiflicher) Irrtum, den v. Sterneck seiner typischen Verwechslung des Sehraumes mit dem „Urteilsraume“ verdankt; für den letzteren gelten selbstverständlich die mathematischen Gesetze. Erfahrungen, wie z. B. das Kleinerwerden der Sehgröße von Objekten bei gleichem Gesichtswinkel in Verbindung mit einer Vergrößerung der scheinbaren Entfernung, beweisen das und zeigen zugleich, daß die Sehgröße nicht nur von ϱ und γ , sondern noch von anderen Faktoren abhängig ist, daß also das Sehwinkelgesetz durchaus nicht uneingeschränkt richtig sein kann. Wir werden noch darauf zu sprechen kommen. Verhältnismäßig am genauesten scheint das in Gleichung (27) ausgedrückte Hillebrandsche Gesetz (115, 285) für die binokulare Betrachtung in der Erfahrung bestätigt zu sein. Es gibt

auch, wenn wir seine strenge Geltung einmal annehmen, die Lösung der Aufgabe, aus den wirklichen Entfernungen die scheinbaren zu berechnen, ohne gegen die vorhin gestellten zwei Forderungen zu verstoßen. Versteht man nämlich unter l die wirklichen Entfernungen, unter σ die wirklichen Größen, so findet man (für den Fall $s_1 = s_2$) leicht

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Da der letzte Quotient für dieselben Gegenstände eine Konstante ist, so lautet das Gesetz in Worten: Bei gleicher Sehgröße zweier Gegenstände ist das Verhältnis ihrer scheinbaren Entfernungen gleich dem Verhältnis ihrer wirklichen Entfernungen, multipliziert mit einer Konstanten, die gleich dem umgekehrten Verhältnis ihrer wirklichen Größen ist.

Man muß dabei beachten, daß in die Bedingung $s_1 = s_2$ alle die Sehgröße und die scheinbare Entfernung beeinflussenden Faktoren (Helligkeit, Umgebung usw.) aufgenommen sind, daß sie also auch in dem Quotienten $\frac{l_1}{l_2}$ stecken. Wenn man übrigens den v. Sterneckschen Wert

$$c = \frac{\sigma_1 l_2 - \sigma_2 l_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

setzt, so geht unter Berücksichtigung der beiden genannten Forderungen die v. Sternecksche Funktion in die unsere über.

Die Hillebrandschen Versuche sind zwar nur für die verhältnismäßig kleinen Entfernungen von einigen Metern gemacht, aber man hat keinen Grund, das Resultat nicht auf beliebige Entfernungen auszudehnen, solange natürlich überhaupt eine bestimmte Entfernungsempfindung auftritt, d. h. solange man sagen kann: für mich ist diese scheinbare Entfernung soviel mal größer oder kleiner als jene scheinbare Entfernung. Die v. Sternecksche Aufgabe, ohne von den Wolken hergenommene Erfahrungsgrundlagen ihre RfI zu finden, ist natürlich mit seiner Hilfe selbst dann nicht lösbar, wenn die in ihm ausgedrückte Beziehung der einzige bestimmende Faktor ist; denn es verlangt (in der Hillebrandschen Form) ja nur, daß unter der Bedingung $s_1 = s_2$ das Produkt $q\gamma$ für alle Höhen konstant ist.

2. Die Beziehung zwischen Sehgröße und scheinbarer Entfernung

Sehr häufig wird die in Gleichung (24) formulierte Beziehung, indem man sie als eine solche zwischen Sehgröße und scheinbarer Entfernung faßt, als die Artbedingung der Rfn des Himmels und der Gestirne angesehen und in dem Satze ausgedrückt: Von zwei Gegenständen, die unter gleichem Winkel gesehen werden, erscheint der entferntere größer.

Dieser Satz trifft nun zweifellos vielfach zu. Häufig ist er aber auch nicht richtig. Man kann sich durch einen einfachen Versuch davon überzeugen. Man lege zwei Freimarken 15 bis 20 cm auseinander und vereinige ihre Bilder durch Veränderung der Konvergenzstellung; das Sammelbild erscheint weiter entfernt und kleiner (vgl auch 110; 118, 329; 109, 389). Ziehen (135) unterscheidet zwischen Sehgröße bei Projektion in stabiler Entfernung (bald größer, bald kleiner) und zwischen Sehgröße desselben Gegenstandes bei Annäherung bzw Entfernung der Wand. Er faßt seine Beobachtungen dahin zusammen, daß „im allgemeinen das Kleinerwerden bei der Projektion desselben Gegenstandes aus der Nähe in größere Entfernung stark überwiegt und — vielleicht im Zusammenhang damit — auch ein ruhendes Objekt etwas öfter kleiner als größer erscheint, wenn die Projektion auf eine entferntere Wand stattfindet.“ (Es ist übrigens interessant, daß er Ähnliches auch für die scheinbare Größe taktiler Empfindungen konstatiert.) Die oft zum Beweise angezogenen und leicht zu wiederholenden Projektionen des Nachbildes der Sonne auf immer entferntere Mauern und Häuser (vielleicht überhaupt vielfach die Projektion von Nachbildern) sind durch die Einmischung des Kontrastes gefälscht; die Nachbilder erscheinen deshalb größer, weil Mauern und Häuser um so kleiner aussehen, je weiter sie entfernt sind. Jedenfalls sind bis heute die Bedingungen, unter denen das Kleiner- oder Größererscheinen bei Konstanz des Gesichtswinkels stattfindet, noch nicht genügend untersucht. Man müßte unterscheiden:

- a) Vergleich von zwei Gegenständen mit gleichem Gesichtswinkel in verschiedener Entfernung.

b) Projektion

 α) desselben Gegenstandes, β) eines Nachbildes auf Ebenen in verschiedenen Tiefen.

c) Projektion desselben Gegenstandes auf Ebenen in verschiedener Entfernung, wobei möglichst jedes Tiefenzeichen vermieden wird.

Bei b) und c) wäre dann noch die Ziehensche Unterscheidung von stabilen und labilen Tiefen während der Beobachtung zu machen. —

Nehmen wir den Satz einmal als richtig an, so lassen sich gegen seine uneingeschränkte Anwendung auf die Gestirne zwei Bedenken vorbringen.

Erstens scheint sich bis jetzt eigentümlicherweise noch niemand gefragt zu haben, ob das Verhältnis der Sehgrößen zweier Gegenstände, die unter gleichem Gesichtswinkel gesehen werden, konstant oder eine Funktion der wirklichen Entfernungen ist. Im letzteren Falle kommt es nämlich für die Anwendung des Satzes wesentlich auf den Verlauf der Funktion an. Um provisorisch etwas darüber zu erfahren, habe ich einige Vergleiche gemacht. Zwei schwarze Quadrate von 9 und 18 mm Seitenlänge wurden in den Entfernungen l_1 und l_2 (Tabelle 56) aufgestellt und die Sehgrößen s_1 und s_2 ihrer Breiten miteinander verglichen. Um wieviel dabei s_2 größer als s_1 gefunden wurde, zeigt die dritte Spalte.

Zeichnet man die Kurve der $\frac{s_2}{s_1}$, indem man l_1 oder l_2 als Abszisse, $\frac{s_2}{s_1}$ als Ordinate nimmt, so scheint sie gegen die Gerade $y = 1$

asymptotisch zu verlaufen. Ich will damit durchaus nichts entschieden, sondern nur ein Problem aufgeworfen haben. Es ist

möglich, daß die Änderung der Sehgröße der Differenz $s_2 - s_1$ eine Täuschung hervorgerufen hat. Immerhin aber ist die Frage berechtigt, ob eine solche Funktion besteht, ob also überhaupt eine so bedeutende Änderung der Sehgröße der Gestirne, wie die Beobachtungen sie zeigen,

Tabelle 56

l_1	l_2	$s_2 >$ um s_1
24 cm	48 cm	$\frac{1}{3}$
52	104	$\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$
75	150	$\frac{1}{4}$
100	200	$\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$
228,5	457	$\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{8}$

durch die Beziehung der Sehgröße zur scheinbaren Entfernung gedeutet werden kann.

Zweitens hat jener Satz dort, wo man von einer größeren oder kleineren scheinbaren Entfernung nicht sprechen kann, offenbar seine Anwendungsmöglichkeit verloren. Und das gerade scheint mir bei den Gestirnen der Fall zu sein. Ich gehöre zu jener Gruppe von Menschen, denen jede Empfindung einer vergleichbaren Entfernung bei den Gestirnen fehlt. Ich habe wohl die Empfindung, daß sie weiter entfernt sind als die nächsten Objekte meiner Umgebung, kann aber einen bestimmteren Ausdruck hierfür und überhaupt einen Ausdruck für das Verhältnis ihrer Entfernung zu derjenigen fernerer irdischer Objekte nicht finden. Ich besitze keine Empfindung dafür, ob Sonne und Mond auch nur in geringer Höhe näher oder weiter entfernt sind als ein 1 km abliegender Wald. Fixiere ich abwechselnd zwei Sterne in verschiedenen Höhen, so erscheint mir der tiefere etwas weiter entfernt. Daß diese Empfindung aber nur von dem allgemeinen Eindruck des Sternenhimmels herrührt, beweist der Umstand, daß ich bei gewissen starken Trübungen der Atmosphäre, wo nur ganz wenige Sterne sichtbar sind, die Zunahme der Sehgröße am Horizont deutlich sehe, aber keine sicheren Tiefenunterschiede empfinde. Die Gestirne liegen für mich 1. im Maximum der scheinbaren Entfernungen, und weil sie durchschnittlich keine Umgebung mit Tiefenzeichen haben, können 2. zentrale Vorgänge innerhalb weiter Grenzen willkürlich mit der Empfindung ihrer Entfernung schalten. Wenn ich während des Vergleichs mir innerlich energisch vorhalte, der in einiger Höhe schwebende Mond sei näher als gewisse irdische Objekte, so habe ich wenigstens für Augenblicke tatsächlich diese Entfernungsempfindung. Ich kann mir eine solche Einstellung geben, daß ich einen Bezirk des Sternenhimmels, wo Sterne verschiedenster Größe beisammen stehen, als „Mückenschwarm“, d. h. mit verschiedenen Tiefenwerten sehe, aber nur für die Augenblicke der Einstellung; sobald ich den Blick über das Himmelsgewölbe schweifen lasse, liegen im allgemeinen alle Sterne für mich in einer Fläche (weniger die besonders hellen, als die stark szintillierenden Sterne scheinen mir mitunter etwas vorzuspringen). Eine zweite Gruppe von Menschen sieht Sonne und Mond am Horizont sogar näher als im Zenit. Und sie ist wahrscheinlich die größere. Denn Zoth (106, 390) richtete dar-

über eine Rundfrage an ungefähr 100 Personen. „Gar niemand gab an, daß ihm der Mond am Horizont weiter erscheine als höher über dem Horizont.“ Bis auf drei, die keine Antwort geben konnten (also jedenfalls zur ersten Gruppe gehörten), teilten alle mit, der Mond erscheine ihnen am Horizont näher, sogar viel näher. Rundfragen von Claparède (16) und Stroobant (98) ergaben dasselbe. Ich habe mitunter, wenigstens beim Monde, auch diese Empfindung; sie ist aber nicht primär und tritt selten assoziativ auf, sondern kommt erst durch einen besonderen Akt ins Bewußtsein. Dem steht nun die dritte Gruppe von Menschen gegenüber, die mit derselben Bestimmtheit die Gestirne am Horizont weiter entfernt sehen will. — Einmal diese großen Unterschiede in den Entfernungsempfindungen verschiedener Menschen, fürs andere die Möglichkeit einer willkürlichen Tiefeneinstellung scheinen mir zu beweisen, daß alles, was über die anfangs genannte, ganz unbestimmte Entfernungsempfindung hinausgeht, seinen Ursprung zufälligen Verknüpfungen oder Umständen verdankt. Wenn jemand behauptet, er sehe den Mond an hellen, wolkenlosen Abenden ganz klar in einer Entfernung von 20 bis 30 m (86, 409), so bin ich weit entfernt, ihm diese Empfindung abstreiten zu wollen, bin aber auch überzeugt, daß sie erst sekundär durch suggestive Wirkung von Urteilen, durch Assoziation oder anderes zustande gekommen ist. Ist diese Auffassung nun richtig — und ich glaube nicht, daß sie umzustoßen ist —, dann kann man im Falle der Gestirne mit Sicherheit die Sehgröße als das Primäre und als im weitesten Maße unabhängig von der Entfernungsempfindung ansprechen; denn sie besitzt, wie jeder weiß, keine analoge willkürliche und zufällige Variabilität. Dann ist es umgekehrt möglich — und das scheint bei dem größten Teil der genannten zweiten Menschengruppe vorzuliegen —, daß die Sehgröße selbst als bestimmender Faktor bei einer Entfernungsempfindung auftritt.

Nach früher Gesagtem liegt übrigens der Grund, warum die meisten Menschen die Gestirne in bestimmter Entfernung zu sehen behaupten, darin, daß wir dem Kampf ums Dasein die geschätzte Größe als das durchschnittlich im Bewußtsein Gegebene verdanken. Es gehört schon eine gewisse psychologische Kultur dazu, sich von diesem Einfluß freizumachen.

Was wir bisher besprochen haben, würde etwa zu folgendem Ausdruck der Beziehungen zwischen Sehgröße und scheinbarer

Entfernung passen: Innerhalb eines ziemlich engen Bereiches hängt die Sehgröße wesentlich von der scheinbaren Entfernung ab; je unbestimmter die relativen scheinbaren Entfernungen werden — entweder durch Vergrößerung der wirklichen Entfernungen oder durch Fehlen von Tiefenzeichen —, desto mehr gewinnen Assoziation, Urteil, Aufmerksamkeit, überhaupt zentrale Prozesse Einfluß auf die Sehgröße.

Wenn die Gestirne in eine Gegend des Gesichtsfeldes kommen, wo zahlreiche Tiefenzeichen vorhanden sind, also in der Nähe des Horizontes stehen, dann ist es vielleicht unter Umständen möglich, daß die Sehgröße des Radius der Horizontalebene den Mangel einer bestimmten scheinbaren Entfernung ausgleichen, sie gleichsam ersetzen kann. Wir sprechen gleich noch davon. Damit wäre, wie man sieht, ein ganz anderer Zusammenhang und Ausdruck für den alten Gedanken gefunden, der das Gestirn am Horizont für ein irdisches Objekt erklärt.

Wir besprechen nun die Ursachen, durch die man die größere Entfernung horizontwärts zu erklären versucht hat. Als solche Ursachen werden hauptsächlich angeführt: a) Projektion der Gestirne auf die Fläche des Himmelsgewölbes, b) Zwischenmedien, c) Lichtschwächung, d) Gewöhnung.

a) Projektion

Käme die Änderung der Sehgröße der Gestirne durch Projektion auf die Fläche des Himmelsgewölbes zustande, dann müßten für denselben Beobachter 1. die Rfn unvollkommen äquivalent sein und könnte 2. die Charakteristik bei den Gestirnen wegen der Horizontbedingungen zwar kleiner, aber unter keinen Umständen größer sein als beim blauen Himmel oder Sternenhimmel. Daß das letztere dennoch der Fall ist, kann ich aus meinen Beobachtungen nachweisen. Als Charakteristiken der Rfn der Sonne von drei Tagen ergaben sich aus Abschätzungen an den Kurven die Werte 1:1,44; 1:1,49; 1:1,41. Die Werte sind, wie schon früher gesagt, unsicher; aber sie sind absichtlich im vorliegenden Falle so abgeschätzt, daß sie in Wirklichkeit höchstwahrscheinlich größer sein werden. Die Charakteristik der Rfl des blauen Himmels beträgt für mich mit ganz geringen Schwankungen 1:1,78. Nun war an einem der Tage, von denen die Kurven herrühren,

ein vollständig ausgebildeter Wolkenhimmel, an den beiden anderen traten vor Sonnenuntergang Horizontwolken auf. Die Werte der Kurven müßten also strenggenommen nicht mit dem Werte für den blauen Himmel, sondern mit noch kleineren Werten verglichen werden. Jedenfalls sind die Unterschiede zu groß und zu gleichmäßig, um durch zufällige Fehler erklärt werden zu können. Die Projektion findet also für mich nicht statt.

Analoges beweist die Mitteilung Zoths (107, 207, 208) von einem Physiker, der keine Wölbung des Himmels, wohl aber die Veränderung der Sehgröße der Gestirne sah.

b) Zwischenmedien

Es ist eine bekannte Täuschung, daß ausgefüllte Strecken größer erscheinen als leere, geteilte größer als ungeteilte. Aus diesem Grunde soll uns die Strecke zum Horizont hin größer vorkommen als die Strecke zum Zenit hin. Da wir vorher den Projektionsgedanken ablehnen mußten, können wir uns den Zusammenhang der Rfn mit dieser Wirkung der Zwischenmedien nur als einen unmittelbaren denken.

Bisher ist zwar für diese Deutung noch keine Grundlage in der Erfahrung gefunden, wonach die Rfn mit der Geländebeschaffenheit veränderlich wären. Aber die bisherigen Beobachtungen können ja auch nicht darüber belehren, weil sie fast ausschließlich mittlere Rfn ergeben, mittlere auch in dem Sinne, daß teilweise zwar von demselben Standpunkte, aber in verschiedenen Azimuten beobachtet wurde. An sich ist der Fehler jener Täuschung ziemlich beträchtlich. Nach Aubert (5) beträgt die Überschätzung $\frac{1}{10}$, nach Kundt (121) $\frac{1}{34}$ (für seine Versuchspersonen $\frac{1}{36}$ und $\frac{1}{37}$), nach Knox (119) $\frac{1}{13}$; Kundt hat aber, wie Aubert mit Recht vermutet, keine Sehgrößen verglichen, sondern geschätzt und deshalb den kleinen Wert erhalten. So groß, daß diese Überschätzung als selbständiger primärer Faktor eine Rfn bestimmen könnte, sind die Werte allerdings nicht; außerdem könnte sie unmöglich die Artbedingung der Rfn der Gestirne sein, allenfalls eine Horizontbedingung. Daß ferner die Änderung der Sehgröße der Gestirne über dem Meere und der Wüste so gut auftritt wie über anderem Gelände, wird sich nicht, wie vielleicht die Rfn des Himmels in diesem Falle, durch Gewöhnung

deuten lassen, weil die dazu vorausgesetzte Assoziation bei der Mehrzahl der Menschen wegen der Seltenheit des Bemerkens nicht fest genug werden kann.

Wenn sonach auch die Wirkung der Zwischenmedien nur eine untergeordnete Rolle spielen kann, so scheint mir ein anderer, damit zusammenhängender Gedanke von größerer Wichtigkeit zu sein, nämlich der vorhin schon angedeutete, daß weniger die Beschaffenheit, sondern mehr die Größe des Radius der sichtbaren Horizontalebene — die Horizontweite — von Einfluß ist: die Charakteristik ist um so kleiner, je größer die Horizontweite ist. Zweierlei darf man zum vollen Verständnis dieses Satzes nicht übersehen. Zunächst handelt es sich nicht um die Sichtweite. Auch bei maximal durchsichtiger Luft und dunstfreiem Horizont kann die Horizontweite je nach dem Standpunkt und der Geländebeschaffenheit sehr verschieden sein. Sie ist unter Umständen durch die Verdeckung des Horizontes bedingt. Bei geringerer Durchsichtigkeit der Luft fällt sie der Größe nach recht häufig mit der Sichtweite zusammen. Zweitens haben nur die erkennbaren, d. h. ins Bewußtsein eingehenden Unterschiede der Horizontweite Einfluß.

Nehmen wir nun die Wirksamkeit dieses Faktors an, dann wird vieles, was wir bisher nur als vereinzelte Tatsachen kennen gelernt haben, unter diesem einen Gesichtspunkt zusammengefaßt und verständlich. Wir verstehen jetzt, warum wir die Rf_W des Wolkenhimmels von der der Wolken, die Rf_S des Sternenhimmels von der der Sterne unterscheiden müssen. Bei den Bestimmungen von α sind wir auf den Gesamteindruck des Himmels eingestellt; dabei ist die Größe der Horizontebene, weil sie die Unterlage der Kappe bildet und sie abschneidet, ein integrierendes Moment des von der Aufmerksamkeit bestrichenen Teiles des Sehraumes. Dagegen sind bei den Methoden, die zur genaueren Bestimmung der Rf_W führen, in dem einen Falle hauptsächlich die scheinbare Entfernung und Sehgröße der Wolken, in dem anderen die Sehgröße der Sterndistanzen für die Charakteristik maßgebend. Wir verstehen ferner die Folge der α -Werte in Tabelle 5 und die indirekte Abhängigkeit von der Helligkeit; wir verstehen, weshalb der Unterschied in den Charakteristiken bei den Rf_W des Wolkenhimmels und der Wolken größer ist als bei denen des Sternenhimmels und der Sterne. Denn bei Tage muß die Horizontweite

wirksamer sein als bei Nacht. So würde also dieser Faktor vor allem die Charakteristik mitbestimmen bei der Gruppe der Rfn des Himmels (des blauen Himmels, des Wolkenhimmels, des Sternenhimmels).

Es fehlen aber, wie es scheint, auch die Anzeichen nicht, daß er bei der Gruppe der Rfn der Gestirne von gewisser Bedeutung ist. Auf seine Rechnung könnte z. B. der größere Bruchteil des Unterschiedes kommen, der zwischen v. Sternecks und meinem Durchschnittswert bei der Charakteristik der Rfl der Sonne gefunden wurde; denn ich beobachtete über der außerordentlich geringen Horizontweite von 1 bis 1,5 km. Sonst habe ich für diesen Fall nur qualitative Beobachtungen und eine halbwegs quantitative. Ich habe über der hiesigen kleinen Horizontweite niemals so starke Vergrößerungen der Sehgröße beobachtet wie früher über den weiten Ebenen am Niederrhein und auf den Hochebenen der Eifel (einen einzigen Fall ausgenommen, wo die Sonne am Horizont einige Minuten zwischen dunklen, den halben Himmel einnehmenden Gewitterwolken sichtbar war). Mitten zwischen den hiesigen Beobachtungen hatte ich am 10. August 1916 Gelegenheit, bei klarem Himmel und etwas nebligem Horizont einen Sonnenaufgang über der (auf der Karte abgemessenen) Horizontweite von rund 24 km zu beobachten, leider ohne irgend einen Apparat. Mit Hilfe von Uhr und Zeichnungen, die ich zu Hause mit meinem gewohnten Vergleichsobjekt verglich, konnte ich die Charakteristik auf 1:3 bis 1:4 bestimmen. Die Farbe von Rotgelb, etwa 5 oder 6 meiner Skala.

Nehmen wir nun noch hinzu, daß der Anwendung unseres Deutungsprinzips nichts in den bisherigen Beobachtungen widerspricht, so glaube ich wenigstens gezeigt zu haben, daß das Prinzip ein Leitgedanke für zukünftige Beobachtungen sein muß. Auf welche Weise im Falle seiner Bestätigung die Sehgröße der Gestirne mit der Horizontweite zusammenhängt, wäre eine weitere Frage, deren Erledigung vielleicht mit den zu Anfang dieser Nummer skizzierten und den gleich zu besprechenden Untersuchungen verknüpft sein würde. Es ist nicht nötig, daß wir infolge des Einflusses der Horizontweite verschiedene Tiefenlagen der Gestirne empfinden. Die Horizontweite braucht nur dieselbe Wirkung auf die Sehgröße zu besitzen, die ein Tiefenfaktor haben würde. Übrigens ist der Gedanke des Prinzips nicht neu; er

findet sich z. B. angedeutet bei Aubert (5, 269) und Hering (46, 27), bei letzterem in der qualitativen Beobachtung, daß der völlig klare Sternenhimmel als Kugelkappe erscheint, sobald es so finster ist, daß die irdischen Dinge nur in ihren Umrissen am Himmel, nicht aber körperlich in die Tiefe gesehen werden; der Taghimmel scheint Hering hinter einer Wand, die alle irdischen Gegenstände bedeckt, senkrecht aus der Erde emporzusteigen. In ähnlicher Weise schwindet für mich der Eindruck der Kappenform wenigstens beim Sternenhimmel, wenn ich innerhalb einer den ganzen Horizont verdeckenden Hofmauer stehe; vielfach ist dann keine bestimmte Form vorhanden; manchmal erscheint mir der Himmel im Zenit weiter entfernt als über der Mauer.

So stehen die Dinge, wenn man sich nur auf die Beobachtungen zu den Rfn verläßt. Von einer anderen Seite her aber scheint der Nachweis einer Wirksamkeit unseres Deutungsprinzips gelungen zu sein, nämlich durch Laboratoriumsversuche. Jaensch (118, 200) spannte zwei parallele Fäden vertikal übereinander (Entfernung 2, 4, 6 oder 8 cm). Die Versuchsanordnung (Beobachtung der Fäden durch Rahmen, Tageslichtbeleuchtung durch transparentes Papier von hinten) war so getroffen, daß die Erfahrungsmotive zur Tiefenschätzung möglichst ausgeschaltet waren. Dann erschien der untere Faden stets näher als der obere. Die scheinbare Neigung der Fadenebene zur Horizontebene wurde auf folgende Weise gemessen. Von zwei durch ein Scharnier mit starker Friktion verbundenen Brettchen wurde eines an den Tisch festgeschraubt, das Scharnier parallel zu den Fäden. Die Versuchsperson stellte die Neigung des beweglichen Brettchens gleich der Neigung der Fadenebene ein. Bezeichnet nun β diese Neigung, so war β um so kleiner, je kleiner der Fadenabstand war (Tabelle 57). War außer den Fäden und dem Hintergrund noch eine horizontale Bodenfläche sichtbar, so wurde β kleiner (Tabelle 58). Der Untergrund war in diesem Falle ein Brett, das kein ganz gleichförmiges Aussehen besaß, weil die Holzfasern deutlich sichtbar war und weil es außerdem in gewissen Intervallen abgestempelt war. Wurde ein gleichgroßer Pappdeckel von gleichförmigem Aussehen gewählt (auch von gleicher Farbe und möglichst gleicher Helligkeit), so war β nicht so groß (Tabelle 59). Die Aufmerksamkeit war dabei dem Untergrund nicht bewußt zugewandt, ebenso wenig wurde auf ihn akkommodiert. Die Versuchspersonen gaben an, sie

würden die Beschaffenheit des Untergrundes nicht bemerkt haben, wenn der Versuchsleiter nichts davon gesagt hätte. Wurde der gleichförmige Untergrund heller gemacht, so wurde β kleiner, und umgekehrt. Wurde der obere Faden gehoben, so daß der Untergrund der Gesichtsfeldgrenze näher rückte, so wurde β größer. Der Untergrund beeinflußt also die scheinbare Raumlage der Fäden um so mehr, je eindringlicher er ist und je mehr er darum die Aufmerksamkeit auf sich zieht. Das Entsprechende war auch bei künstlicher Beleuchtung der Fall.

Tabelle 57		Tabelle 58		Tabelle 59	
Faden- abstand	β	β		β	
		ohne Untergrund	mit Untergrund	Ungleichf. Untergrund	Gleichf. Untergrund
2 cm	30 ⁰				
4	55	65 ⁰	32 ⁰	27 ⁰	42 ⁰
6	75	72	34	33	40
8	90 (sehr unsicher)	67	31	30	44

Man könnte nun meinen, daß hier ausschließlich eine Analogie mit dem Faktor der Geländebeschaffenheit in dem früher definierten Sinne vorliege. Aber Jaensch scheidet diesen Faktor ausdrücklich von dem der größeren Eindringlichkeit. Der erstere scheint ihm allerdings auch für die Wirkung des Untergrundes mit verantwortlich zu sein. „Ich habe nämlich — und zwar zuweilen sehr bestimmt — den Eindruck, daß die Tiefenwerte des Untergrundes von größerer Sinnfälligkeit und Deutlichkeit sind, wenn der Untergrund von einer ungleichförmigen Fläche gebildet wird, als dann, wenn er von ganz gleichförmigem Aussehen ist.“ Er meint aber, daß sich auch diese Erscheinung auf eine (indirekte) Wirkung der Aufmerksamkeit zurückführen lasse.

Jaensch faßt nun die Resultate seiner Untersuchungen (die obigen Tabellen geben davon nur einzelne Beispiele) in folgender Weise zusammen (118, 212): „Ein Objekt, für dessen Tiefenlokalisierung keine wirksamen Anhaltspunkte gegeben sind, erscheint relativ fern oder relativ nahe, je nachdem gleichzeitig mit ihm ein bestimmt lokalisiertes fernes oder nahes Objekt aufgefaßt wird. Richtung der Aufmerksamkeit in die Nähe (Ferne) erteilt — bei Abwesenheit anderer Lokalisationsmotive — allen gerade

im Blickpunkt der Aufmerksamkeit stehenden Objekten einen Nahe-
wert (Fernwert).“

Man muß dieses allgemeine Ergebnis beachten, um die Ver-
suche mit unserem Problem in Beziehung bringen zu können.
Daß ohne Untergrund der untere Faden vorsprang, was schein-
bar in Widerspruch mit unserem Problem steht, geht uns hier
gar nichts an. Das lag lediglich daran, daß die Versuchspersonen
in einer der Horizontalebene fast parallelen Ebene beobachteten
und daß bei dieser Sehlage mit der Richtung der Aufmerksamkeit
nach unten gewohnheitsmäßig eine Richtung in die Nähe ver-
bunden ist (118, 216). Was aber nun geschah, sobald andere
Objekte ins Gesichtsfeld traten, das ist es, was uns interessiert
und was in dem allgemeinen Ergebnis ausgedrückt ist.

Hätte Jaensch seine Beobachtungen auf Flächen mit noch
anderen Variationen der Bedingungen ausgedehnt, so hätte sich
wohl auch entscheiden lassen, ob die Sehgröße dabei unmittelbar
oder durch die scheinbare Entfernung beeinflußt wird. Vermut-
lich ist das erstere der Fall. Denn auch Jaensch ist wie Holtz
(116, 159) u. a. zu der Überzeugung gekommen, daß die Seh-
größe nur in untergeordneter Weise von der scheinbaren Ent-
fernung abhängig ist und um so weniger, je schwerer die Ent-
fernung zu beurteilen ist.

c) Lichtschwächung

Die Lichtschwächung ist hauptsächlich für die Rfl der Sterne
in Betracht gezogen worden. Die gegen den Horizont zu wachsende
Intensitätsabnahme soll die scheinbare Entfernung der Sterne
vergrößern.

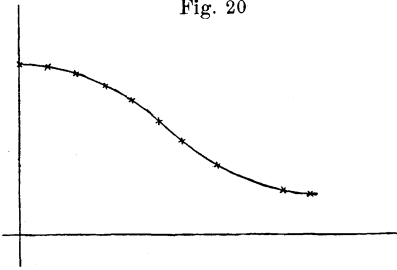
Um darüber entscheiden zu können, bestimmen wir die Rfl
der Extinktion des Sternenlichtes. Wir stellen uns fol-
gendes Problem: Angenommen, es gebe nur Sterne gleicher objek-
tiver Helligkeit und es existiere keine Extinktion der Strahlung;
auf welcher Fläche müssen diese Sterne verteilt sein, damit sie
lediglich durch die Verschiedenheit ihrer Abstände vom Beobachter
denselben Eindruck der durchschnittlichen Intensitätsverteilung
hervorrufen, wie er in Wirklichkeit besteht? Da die Helligkeit
dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, so sind
die Radienvektoren dieser Rfl unmittelbar durch den Ausdruck

$\sqrt{\frac{J_1}{J}}$ gegeben, wenn J_1 die Zenithelligkeit, J die Helligkeit in der Höhe ω ist. Tabelle 60 bringt nach der Extinktionstabelle für Potsdam von G. Müller (70, 672) die (Briggschen) Logarithmen dieser Wurzel für einige Höhen. Konstruiert man den Meridian der Rfl, so erhält man Fig. 20, also eine typische Form der uns bekannten Kurven mit Wendepunkten. Bei $\omega < 8^\circ$ wachsen die Radienvektoren außerordentlich stark. Es läßt sich also mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit schließen, daß die Extinktion des Sternenlichtes direkt oder indirekt die Artbedingung der Rfl der Sterne ist.

Tabelle 60

ω	$\frac{1}{2}(\log J_1 - \log J)$	ω	$\frac{1}{2}(\log J_1 - \log J)$
8 ⁰	0,2359	50 ⁰	0,0122
10	0,1954	60	0,0056
20	0,0899	70	0,0019
30	0,0460	80	0,0004
40	0,0241	90	0,0000

Fig. 20



Damit ist allerdings die Frage nicht entschieden, ob die Extinktion psychologisch so wirkt, wie vorhin angenommen wurde, nämlich durch die Änderung der scheinbaren Entfernung, oder ob sie ohne diesen Umweg mit der Sehgröße zusammenhängt.

Einige schon erwähnte Momente, so die relative Unabhängigkeit besonders der Sehgrößen der Gestirne von der scheinbaren Entfernung, dann meine qualitative Beobachtung der Zunahme der Sehgröße der Sterne ohne jede Verschiedenheit in der Entfernungsempfindung, sprechen für das letztere.

d) Gewöhnung

Die irdischen Objekte, die wir in einer von der horizontalen sehr abweichenden Richtung sehen, sind uns durchschnittlich sehr

nahe. Wir sind also nicht daran gewöhnt, in der nach oben gerichteten Sehlinie weit entfernte Objekte wahrzunehmen, und infolge dieser Gewöhnung halten wir den Zenit (und die Gestirne gegen den Zenit hin) für näher als den Horizont.

Filehne (31; 36) hat diesen primitiven Gedanken vertieft, indem er den Grund unserer Erscheinung darin sieht, daß das Sehen eine Ausdeutung auf Grund mechanisierter Erfahrung ist. Das Sehen in der dritten Dimension, das Vertiefen und Dehnen, wird hauptsächlich an der Horizontalebene gewonnen. Deshalb ist das Vertiefen in vertikaler Richtung unvollkommener und nicht so weit reichend. Die Folge davon ist, daß uns der Himmel über uns weniger entfernt erscheinen muß als am Horizont. —

Der Gedanke ist in dieser Form nur für die Rfn des blauen Himmels und des Sternenhimmels verwendbar.

Das Deutungsprinzip der Gewöhnung tritt noch in einer anderen Form auf. Vom Wolkenhimmel her, der ja objektiv eine Kugelkappe ist, sind wir die gedrückte Form gewöhnt und übertragen sie auf den sonstigen Himmel; wir sehen zwangsmäßig eine uns geläufige bestimmte Gestalt in eine weniger bestimmte hinein. In Betracht kommen kann diese Form ebenfalls nur für den blauen Himmel und den Sternenhimmel. Ich möchte aber glauben, daß Reproduktionsgrundlage und Assoziation in dieser Weise nur als Nebenfaktoren auftreten können; denn es werden sich schwerlich in dem bisher bekannten psychologischen Material Beweise dafür finden, daß die Einstellung auf eine Gestaltauffassung so intensive und konstante Wirkungen hervorbringt, wie es in dem vorliegenden Falle anzunehmen nötig wäre.

3. Der Kontrast

Als Bedingungen für die Rfn von Sonne und Mond können Flächenkontrast und Helligkeitskontrast in Frage kommen.

Die Flächenkontrastwirkung tritt dadurch ein, daß man wegen der Verdeckung durch die Erdoberfläche gegen den Horizont zu ein kleineres Stück des Himmels im Auge hat, auf dem das Bild des Gestirns einen relativ großen Raum einnimmt, gegen den Zenit hin ein größeres. Die Gestaltung des Horizontes (Häuser, Bäume usw.) kann unter Umständen die Kontrastwirkung noch steigern. —

Da aber die Kontrastwirkung um so schwächer wird, je größer die Unterschiede zwischen den kontrastierenden Flächen sind, so ist es fraglich, ob bei unbehindertem Horizont überhaupt eine merkliche Kontrastwirkung eintritt. Jedenfalls wäre sie keine Artbedingung. In besonderen Fällen mag sie immerhin als Horizontbedingung auftreten. Zu diesen Fällen sind vor allem Stellungen der am Horizont schwach leuchtenden Scheibe zwischen großen dunklen Wolken zu rechnen. So wird z. B. die außerordentliche Zunahme der Sehgröße der Sonne, die v. Sterneck bei stark bewölktem Himmel beobachtete, hauptsächlich auf Kontrast beruhen; die vorhin gezeichnete Situation paßt genau auf seine Schilderung (91, 562). Aus der Variabilität der Kontrastwirkung unter verschiedenen Umständen ist dann auch die große Streuung seiner Werte verständlich. Entsprechendes gilt von seinen Mondbeobachtungen bei stark bewölktem Himmel (91, 576).

Der Helligkeitskontrast der Scheibe von Sonne oder Mond gegen den dunkleren Horizont Himmel könnte durch die Irradiation wirken. Daß diese Wirkung besteht, kann man mit Hilfe einer Serie von verschieden starken Blendgläsern leicht dann nachweisen, wenn die Helligkeit der in einiger Höhe über dem Horizont stehenden Sonne zwar ein Fixieren zuläßt, aber doch noch etwas Unangenehmes für das Auge hat. Man sieht dann aber gleichzeitig, daß die Wirkung zu gering ist, um für unser Problem eine nennenswerte Rolle zu spielen. Überdies zeigt sie in der Abhängigkeit von der Höhe den umgekehrten Gang, den die Veränderung der Sehgröße besitzt.

4. Die Farbe

Die Tatsache, daß die Farbe von Einfluß auf Sehgröße und scheinbare Entfernung ist, ist schon lange, besonders im Kunstgewerbe, bekannt. Dennoch setzte die Untersuchung, vor allem die quantitative, ziemlich spät ein. Bei der Bearbeitung einfacher ästhetischer Formen fand Pierce (127), daß, wenn Figuren oder Stücke von solchen symmetrisch auf einer Fläche angeordnet werden sollten, die in dunkleren Farben (Blau, Grün, Kastanienbraun) gehaltenen Teile weiter vom Symmetriezentrum entfernt sein müßten als die in helleren Farben (Weiß, Orange, Rot) gehaltenen. Quantz (130) wollte den unmittelbaren Ein-

fluß der Farbe auf die Sehgröße finden, indem er seine Versuchspersonen verschiedenfarbige gleichgroße Scheiben in einem geschlossenen Kasten so lange vor- oder rückwärts verschieben ließ, bis sie gleichgroß erschienen. Dabei wurden die Flächen in weniger brechbaren Farben (Rot, Orange, Gelb) im Vergleich zu Weiß um 0,2 bis 3,6 Proz. überschätzt, die Flächen in brechbareren Farben (Blaugrün, Blau, Violett) um 0,2 bis 2,2 Proz. unterschätzt. Der Einfluß von Grün war individuell verschieden. Larguier des Bancels (122) stellte die Einwirkung der Farbe auf die Poggendorffsche Täuschung fest, indem die Überschätzung der Rechteckfläche am größten bei Gelb war; dann folgten Orange, Grün, Blau, Dunkelrot, Violett. Bei Benussi (111), der die Zöllnersche Täuschung an farbigen Vorlagen untersuchte, trat schon deutlich ein Unterschied zwischen dem Einfluß der Helligkeit und eines den Farben als solchen eigentümlichen Faktors auf. Grünberg (114) zeigte, daß die von Quantz konstatierten Verhältnisse sich je nach der Beleuchtungsstärke gänzlich ändern können. Bei geringer Beleuchtungsstärke treten die brechbareren, bei größerer die weniger brechbaren Farben vor. Jaensch gab das Mittel zur Deutung all dieser Ergebnisse an die Hand, indem er bewies (118, 377), daß die Farbe neben den drei bisher angenommenen Komponenten des Farbtones, der Helligkeit und der Sättigung noch die Eindringlichkeit als vierte besitzt, die sich unabhängig von den anderen ändern kann. Je eindringlicher eine Farbe ist, eine desto größere Tendenz zum Hervortreten besitzt sie, desto näher wird sie gesehen. Allerdings ist das Hervortreten nicht notwendig mit der größeren Eindringlichkeit verbunden. Es scheint also, daß das Lokalisationsmotiv der Eindringlichkeit der Farbe schwach ist und von anderen Lokalisationsmotiven leicht überwunden werden kann. Jaensch legt besonderen Nachdruck auf die Abhängigkeit der Eindringlichkeit von der Helligkeit. Sie ist zweifellos am bedeutendsten. Aber man wird allen Beobachtungen nur gerecht, wenn man eine doppelte Eindringlichkeit unterscheidet: 1. die spezifische Eindringlichkeit, die vom Farbenton abhängt: Die weniger brechbaren Farben sind eindringlicher als die brechbaren; 2. die mit der Helligkeit verknüpfte Eindringlichkeit, die der ersteren überlagert ist und ein Lokalisationsmotiv von weitaus größerem Einfluß darstellt: Eine Farbe ist um so eindringlicher, je heller sie ist.

Um nun diese Ergebnisse auf das Sehding „blauer Himmel“ anwenden zu können, müssen wir beachten, daß Beleuchtungsstärke und Helligkeit der Farbe zwei sehr verschiedene Dinge sind. Die Helligkeit der Farbe wird nicht allgemein um so kleiner, je geringer die Beleuchtungsstärke ist. Hier greifen vielmehr andere Beziehungen ein. Was uns hier vor allem angeht, ist die im Purkinjeschen Phänomen auftretende Gesetzmäßigkeit, nach der Blau relativ um so heller ist, je geringer die Beleuchtungsstärke ist. Nun ist die Beleuchtungsstärke, die die Sonne dem Himmelsgewölbe gibt, verschieden verteilt. Sie nimmt mit wachsender Höhe und wachsendem Abstand von der Sonne ab. Es kann also sein, daß das Dunkelblau des Zenits relativ heller und deshalb eindringlicher ist als die Farben der tiefer gelegenen Partien, und zwar um so eindringlicher, je tiefer die Sonne steht. Immerhin mag diese Beziehung beim blauen Taghimmel nicht viel bedeuten. Sie gewinnt aber eine sehr große Wichtigkeit beim blauen Dämmerungshimmel, wo die allgemeine Beleuchtungsstärke so herabgesetzt ist, daß die große relative Helligkeit des Blau von bedeutendem Einfluß sein muß. Tatsächlich habe ich zu gewissen Zeitpunkten der Existenz des Dämmerungshimmels förmlich den Eindruck, als ob das blaue Gewölbe herabfallen wolle; ich sehe es sich deutlich an der Grenze des helleren Horizontes im Westen vorwölben. Es macht dann auf mich den Eindruck, den die Rotationsflächen unserer Kurven mit Wendepunkten machen müßten¹⁾. Ich habe dabei noch keine Gelegenheit zur Bestimmung von α gehabt. α muß im Verhältnis zu den Werten des blauen Taghimmels kleiner ausfallen, um so kleiner, je kräftiger der geschilderte Eindruck ist.

5. Die Zusammenfassung mit irdischen Objekten

Der Gedanke, daß die Gestirne durch eine gewisse Zusammenfassung mit irdischen Objekten eine Änderung ihrer Sehgröße erfahren könnten, ist in verschiedenen Formen aufgetreten.

Den ersten Ausdruck fand er wohl in der alten Vergleichstheorie. Wenn der Mond neben einem irdischen Gegenstande am

¹⁾ Man vergleiche damit die Mitteilung von Folkes an Smith (I, 416), ihm habe der Himmel oft wie eine „Muschellinie (conchois)“ ausgesehen. Smith findet das gleichfalls richtig.

Horizont steht, der denselben wirklichen Gesichtswinkel besitzt, so wird er, weil er viel weiter entfernt erscheint, auch viel größer gesehen.

Mayr (57) gibt ihm eine andere Wendung. Infolge der Schwächung des Lichtes am Horizont weicht das Aussehen der Gestirne von dem der irdischen Objekte nicht allzusehr ab. Wir beurteilen deshalb die Gestirne wie ferne irdische Objekte, von deren kleinem Gesichtswinkel wir kein Bewußtsein haben und die wir deshalb überschätzen.

Claparède meint in der letzten Fassung seiner Hypothese (17), wenn der Mond am Horizont stehe und wegen seines schwachen Lichtes und seiner Färbung als irdisches Objekt angesehen werde, interessiere seine Größe mehr und nehme deshalb scheinbar zu. Hinzu kommt nach ihm, daß durch das größere Interesse die Aufmerksamkeit sich mehr auf ihn konzentriert und dadurch eine Verengung der Gesichtsfeldgrenzen und eine Kontrastwirkung eintreten. —

Wenn man davon absieht, wie die Beobachtungen der Sehgröße sich zu der ersten Ansicht stellen, so können auch die Einzelmomente, die diese Formen hervorheben, nicht als glückliche Ausdrücke wirkender Faktoren angesehen werden. Die Vergleichung setzt u. a. unbedingt voraus, daß die Gestirne viel weiter entfernt erscheinen als irdische Objekte, was, wie wir schon hörten, nicht der Fall ist. Bei Mayr liegt eine Verwechslung von Sehgröße und Urteilsgröße vor. Die Diskrepanz zwischen Sehgröße und Gesichtswinkel, die man allenfalls noch darin ausgesprochen finden könnte, kommt in allen Höhen vor. Wenn endlich Claparède das Interesse so sehr betont, so könnte man leicht darauf kommen, den Zusammenhang umzukehren: Der Mond erscheint nicht größer, weil er mehr interessiert, sondern er interessiert mehr, weil er größer erscheint.

Das Gemeinsame, was in diesen Formen als physikalische Seite des wirkenden Faktors wiederkehrt, ist eine gewisse Zugehörigkeit zur Horizontalebene, was als psychologische Seite sich wiederholt, ist ein dadurch hervorgerufenes anderes Verhalten des Beobachters, das von Claparède als eine durch die Veränderung der Eindringlichkeit angeregte Aufmerksamkeitsrichtung wenigstens angedeutet wird. Wir werden später sehen, wie sich das in weitere Zusammenhänge einfügt.

V. Ergebnis und Ausblick

1. Im allgemeinen kann man von den besprochenen Bedingungen feststellen, daß sich bei den meisten aus zwei Gründen noch nicht entscheiden läßt, ob und inwieweit sie die Rfn mitbestimmen: 1. Bis heute sind fast ausschließlich mittlere Rfn beobachtet, keine individuellen, d. h. solche, die von einem Beobachter, von einem Standpunkte aus, in einem Azimut, an einem Tage oder in einer Nacht gewonnen wurden, und dabei fehlen oft genug die nötigen Angaben. 2. Die Bedingungen selber sind meistens quantitativ noch nicht erforscht oder überhaupt nicht erforschbar.

Ich will nun versuchen, die Bedingungen der einzelnen Rfn zusammenzufassen, soweit sie sich wahrscheinlich oder vermutlich bestimmen lassen.

An der Rf des blauen Himmels sind vermutlich direkt oder indirekt beteiligt: Blickrichtung, Horizontweite, Sichtweite, Farbe, Helligkeit, Geländebeschaffenheit, Gewöhnung. Was als Hauptfaktor anzusehen ist, wissen wir nicht.

Als ein Spezialfall der Rf des blauen Himmels erscheint die Rf des Dämmerungshimmels. Hier übernimmt die Farbe eine wesentliche Rolle.

Ein stets vorhandener und bedeutsamer Faktor der Rf des Wolkenhimmels ist die objektive Charakteristik $q < 1$. Im übrigen wird ihre Form vermutlich eine Mischform (oder Überlagerung) der Rfn des blauen Himmels und der Wolken sein, die nach der einen oder anderen Form in Abhängigkeit von der Dichte der Bewölkung innerhalb der Art und von den anderen beim blauen Himmel genannten Faktoren oszilliert. Da bei gleichmäßig bedecktem Himmel keine Rf der Wolken konstruierbar ist, hat die Annäherung der Rf des Wolkenhimmels an diejenige des blauen Himmels dann ein Maximum.

An der Rf des Sternenhimmels wirken die Bedingungen der Rf der Sterne vermutlich nur sehr schwach mit, weil bei der letzteren die Tiefenempfindung gar keine oder nur eine sehr kleine Rolle spielt. Ihre Form ist wohl in der Hauptsache nichts anderes als die Rf des blauen Himmels, in die im Sehraum der Nacht herrschenden Bedingungen eingestellt.

In einem Falle ist es uns bei den Rfn der Gestirne gelungen, mit einiger Wahrscheinlichkeit die Artbedingung festzustellen: bei der Rfn der Sterne war es die Extinktion des Lichtes, oder, wie wir jetzt lieber sagen wollen, um keine psychologische Wirkungsweise zu präjudizieren, der Einfluß der Atmosphäre als eines trüben Mediums; die Zerstreuung in diesem trüben Medium ist ja die Ursache (oder, wenn man will, eine andere Bezeichnung) der Extinktion. Da nun die Rfn der Gestirne unvollkommen äquivalent sind, können wir diesen Einfluß mit der gleichen Wahrscheinlichkeit als ihre allgemeine Artbedingung ansprechen. Es handelt sich also um den Einfluß des trüben Mediums auf die Sehgröße leuchtender Objekte: Die Sehgröße leuchtender Objekte, die durch ein trübes Medium unter möglichstem Ausschluß von Tiefenzeichen gesehen werden, ist um so größer, je stärker die Zerstreuung des Lichtes ist; die Zerstreuung ist von der Dicke der zu durchlaufenden Schicht und von der Stärke der Trübung abhängig. Ein solcher Einfluß ist in etwas ungenauärer Form schon von Kritzinger (121) behauptet worden.

Nehmen wir das an, so ist die Form unserer Kurven qualitativ verständlich. Die Gasatmosphäre wirkt auch ohne Staubatmosphäre als trübes Medium; aber nur etwa $\frac{1}{3}$ der zerstreuten Wirkung kommt auf ihre Rechnung. Wenn wir nun auch über das Ineinanderlagern der beiden Atmosphären nichts Bestimmtes wissen, so ist das eine doch wohl sicher, daß die Wirkung der Staubatmosphäre in niederen Höhen unverhältnismäßig stärker wächst als die der Gasatmosphäre. Die Folge muß sein, daß der an sich langsam wachsende Radiusvektor von einer gewissen Höhe ab viel schneller zunimmt, die Krümmung der Kurve also immer mehr abnimmt, bis schließlich die Änderung des Krümmungssinnes erfolgt. Je nach der Reinheit der Atmosphäre liegt der Wendepunkt in größerer oder kleinerer Höhe und ist die Änderung des Krümmungssinnes mehr oder weniger stark ausgeprägt. Vielleicht verliert schon bei einem gewissen Minimum der Staubatmosphäre die Kurve ihren Wendepunktscharakter und nähert sich etwa der Hyperbel.

Man muß nun beim trüben Medium der Atmosphäre zwei Zustände auseinanderhalten, nämlich 1. die Stärke der Trübung, die von der Menge der gegen die Wellenlängen kleinen Teilchen oder Gasmolekeln abhängig ist, die der Strahl auf seinem Wege trifft,

und 2. die optische „Verunreinigung“ des Mediums durch Teilchen, die nicht mehr klein gegen die Wellenlänge sind. Es kann sein, daß die Sonne sehr lichtschwach untergeht, sogar im Dunst verschwindet, ehe sie den Horizont erreicht hat, ohne daß ihre Farbe charakteristisch rot wird. Dann liegt der zweite Zustand vor. In der Farbe des Himmels äußert er sich so, daß an Stelle des reinen Blau ein weißliches Blau tritt. Der erste Zustand ist es, der nach unserer Deutung den Einfluß auf die Sehgröße der Gestirne besitzt. Deshalb ist die Angabe der Farbe bei Beobachtungen die Hauptsache. Um aber den zweiten Zustand stets sicher von gewissen Fällen des ersten scheidend zu können, ist auch die Kenntnis von Intensitätswerten nötig.

Die Bestätigung oder Widerlegung unserer Annahme ist von sorgfältigeren Bestimmungen der Rfn zu erwarten: Nach der früheren Zusammenfassung der Ergebnisse scheinen sich auch die Beobachtungen an Sonne und Mond widerspruchlos einzufügen. Eine weitere Untersuchung muß im Laboratorium erfolgen. Sollte nun die Auffassung zu Recht bestehen, so bliebe noch die Frage zu beantworten, wie der Einfluß des trüben Mediums auf die Sehgröße psychologisch zu verstehen ist. Bevor man aber nicht die Verknüpfung zwischen diesen Erscheinungen bei willkürlicher Variation der Bedingungen beobachtet hat, läßt sich darüber nichts sagen.

Die Horizontbedingungen der Rfn der Gestirne sind vermutlich Horizontweite, Geländebeschaffenheit, Art der Zusammenfassung, Blickrichtung, Kontrast. Je stärker die Wirkung dieser Bedingungen ist, desto deutlicher ist die Änderung des Krümmungssinnes ausgeprägt. Weil die Wirkung in der Nacht ein Minimum hat, zeigt die Rfl der Sterne die geringste Änderung und eine kleine Variationsbreite der Charakteristik und weist die Rfl des Mondes im Durchschnitt eine größere Charakteristik auf als die Rfl der Sonne (wie man an den Werten v. Sternecks in der Zusammenfassung der Ergebnisse sieht).

Da die Kurven der Rfn der Wolken Wendepunkte besitzen, so kann man auch hier an einen Einfluß des trüben Mediums denken. Jedenfalls aber ist diese Wirkung überlagert von der Wirkung der Beziehung zwischen scheinbarer und wirklicher Entfernung. Von den übrigen Faktoren wird nur ein sehr geringer Einfluß zu erwarten sein. Die Variabilität der Charakteristik ist

in der Hauptsache von der Höhe, also objektiv, bestimmt. Je weniger scharf die Wolken als einzelne, selbständige Gebilde auftreten, desto mehr nähert sich ihre Rfl der des blauen Himmels.

2. Wir müssen nun noch eine überaus wichtige Zusammenfassung machen und können dadurch zunächst die Vielheit der Horizontbedingungen wesentlich verringern. Bei einer Reihe von ihnen (Horizontweite, Geländebeschaffenheit, Art der Zusammenfassung, Farbe) haben wir gelegentlich davon gesprochen, sie seien mehr oder weniger eindringlich und damit also angedeutet, daß sie in dem vorliegenden Zusammenhange psychologisch alle auf die gleiche Weise wirken und durch denselben psychischen Tatbestand repräsentiert werden. Wir können das Gemeinsame an ihnen, das als psychischer Faktor an der Form der Rfln Anteil hat, in dem Begriff der Eindringlichkeit des Wahrnehmungskomplexes oder, da die Aufmerksamkeit davon bestimmt wird, der Aufmerksamkeitsrichtung zusammenfassen. Der Einfluß, den Aufmerksamkeitsrichtung und Aufmerksamkeitswanderung — beide gehören eng zusammen — auf die Sehgröße ausüben, war schon öfters aufgefallen. Er läßt sich z. B. deutlich den Ausführungen Schumanns (132) entnehmen. Aber die umfassende Bedeutung der Eindringlichkeit hat erst Jaensch (117, 118) nachgewiesen¹⁾. Vermutlich ist der Umfang des Begriffs noch weiter, als er hier genommen wurde (Kontrast?). Vielleicht lassen sich auch die widersprechenden Resultate der Blickrichtungsversuche von diesem Gesichtspunkte aus deuten.

Ferner sind von hier aus restlos die schon in der älteren Literatur auftretenden widersprechenden Angaben über die Sehgröße von Sonne und Mond bei der Betrachtung durch Röhren zu verstehen. Die Resultate v. Sternecks über den Einfluß des Hintergrundes auf die Sehgröße des Mondes (Tabelle 38) werden wenigstens zum Teil ebenfalls unter unser Deutungsprinzip fallen, wenn sie sich bestätigen.

Sollte sich nun die Rolle, die wir dem Faktor der Eindringlichkeit beizulegen geneigt sind, aus den Beobachtungen zur Rfl des Himmels mit Sicherheit ergeben, so muß die Frage aufgeworfen werden, ob der Faktor in diesen Fällen nicht bloß die Ursache

¹⁾ Ich will damit nicht jeder seiner Deutungen zustimmen.

der Variabilität der Charakteristik, sondern überhaupt der Grund ist, weshalb die Charakteristik vom Werte 1 abweicht. Mir scheint, daß diese Frage sich dann präzise beantworten läßt. Als das physikalisch Gemeinsame der in jenem Begriff zusammengefaßten Bedingungen können wir die Horizontalebene bezeichnen. Durch die Horizontalebene wird der horizontale Wahrnehmungskomplex eindringlicher sein als der vertikale, und die Aufmerksamkeitsrichtung, die fast ausschließlich durch die Horizontalebene in die Ferne geht, erteilt allen unbestimmt lokalisierten Objekten gerade in dieser Richtung Fernwerte. Es ist nicht nötig, genetische Gesichtspunkte einzuführen, um die Wirkung verständlich zu machen; denn ihr Bestehen, wenigstens unter den Laboratoriumsbedingungen, hat Jaensch, wie gesagt, gezeigt. Vielleicht aber wären solche Gesichtspunkte einiges andere zu beleuchten imstande. So könnte in der Ontogenese ein Grund für die individuellen Differenzen von α liegen. Die Fernvalenzen, die die Aufmerksamkeit erteilt, könnten durch den Einfluß ein und derselben Horizontalebene gewissermaßen konstant reproduzierbar werden. Ob das der Fall ist oder ob die Plastizität des Psychischen unter diesen Umständen jedes Stabilwerden der Verknüpfung ausschließt, ließe sich wohl durch Vergleich der α -Werte von Versuchspersonen konstatieren, die über sehr verschiedenen Horizontalebenen (z. B. Hochgebirgstal und freier Ebene) aufgewachsen sind. Nimmt man an, daß die Blickrichtungswirkung eindeutig besteht und in der Beschaffenheit und Synergie der Augenmuskeln ihren Grund hat, so wäre es nicht unmöglich, diese Wirkung phylogenetisch aus den besprochenen Verhältnissen heraus zu deuten. Wir sehen, wie in diesen Andeutungen die naive Form der Gewöhnungstheorie und der Grundgedanke Filehnes erweitert, vertieft, anders gefärbt, von Überflüssigem oder Falschem befreit, wiederkehren.

Wir würden dann auch verstehen, wie die Projektionstheorie möglich war und bis zu einem gewissen Grade von den Beobachtungen nahegelegt werden mußte.

Es ist nicht Aufgabe dieser Schrift, die zentralen Vorgänge weiter zu untersuchen, in deren Gebiet uns die Herausstellung des psychischen Faktors bei den Horizontbedingungen geführt hat und uns wahrscheinlich auch die Aufdeckung des psychologischen Zusammenhangs zwischen trübem Medium und Sehgröße und end-

lich sicherlich die Frage nach der psychischen Struktur und dem physiologischen Äquivalent der Sehgröße geleiten würden. Die beiden Bücher von Jaensch (117, 118) und die Ausführungen von Witasek (99) und Blumenfeld (113) enthalten einiges darüber.

Wenn die Beobachtungen die Geltung unseres Deutungsprinzips in seinem weitesten bisher besprochenen Umfange erweisen sollten, dann hat das Problem der Bedingungen der Rfn die folgende kurze Lösung gefunden: Artbedingung der Rfn der Gestirne ist der Einfluß des trüben Mediums der Atmosphäre; wesentliche Horizontbedingung ist die Eindringlichkeit des Wahrnehmungskomplexes. Wesentliche Art- und Horizontbedingung der Rfn des blauen Himmels und des Sternenhimmels ist die Eindringlichkeit des Wahrnehmungskomplexes. Bei den Rfn der Wolken und des Wolkenhimmels wirkt die objektive Charakteristik mit.

Um alle Möglichkeiten zu erwägen, werfen wir schließlich noch die Frage auf, ob nicht die Äquivalenz der Rf der Extinktion mit den Rfn der Gestirne auf Zufall beruhe und ob vielleicht die Eindringlichkeit des Wahrnehmungskomplexes auch die Artbedingung dieser Rfn sei. Diese Bedingung müßte dann vom Zenit an bis zu einer gewissen, etwas veränderlichen Höhe über allen Horizonten ziemlich gleichmäßig die Sehgröße langsam ändern, bis ihr Einfluß in niederen Höhen so stark würde, daß er den Krümmungssinn umkehrte und überdies die Ursache der dann auftretenden Unterschiede würde. Man sieht, daß sich daraus nicht so zwangsmäßig wie aus dem Einfluß des trüben Mediums die Art der Kurve ergibt. Man kann unschwer Kriterien dieser Möglichkeit aufstellen; ich setze zwei hierher: a) Trifft die Auffassung zu, dann dürfte in den Fällen, wo große, ontogenetisch bedingte individuelle Differenzen nicht vorliegen und keine variablen Nebenfaktoren auftreten, der Meridian der Rf eines Gestirns über einer sehr kleinen Horizontweite nie einen hochgelegenen Wendepunkt und eine stark ausgeprägte Änderung des Krümmungssinnes zeigen. b) Ferner müßten in diesen Fällen für denselben Beobachter und denselben klaren, dunstfreien Horizont Charakteristik und Wendepunktlage bei demselben Gestirn fast konstant sein, während, wenn der Einfluß des trüben Mediums bestände, auch für diesen Horizont die beiden Momente große Variabilität zeigen müßten.

Mir scheinen danach meine Kurven (Tabelle 33) nicht für diese Möglichkeit zu sprechen. Andererseits liegt die Konstatierung, daß die Sehgröße der Sonne bei Betrachtung durch enge Röhren konstant bleibt (Tabelle 31 und 32), ganz in der Richtung der Möglichkeit; allerdings können erst Laboratoriumsversuche zeigen, ob nicht der Einfluß des trüben Mediums, falls er existiert, nur unter Bedingungen eintritt, die durch meine speziellen Versuchsbedingungen aufgehoben waren.

3. Neben den methodischen Gesichtspunkten für die Beobachtungen, die sich uns früher aus psychologischen Erwägungen ergaben, haben wir jetzt noch eine Reihe von neuen gewonnen, die sich auf die Angaben bei den Beobachtungen und ihre Benutzung beziehen. Ich stelle zum Schlusse das Wichtigste davon zusammen.

a) Angaben bei der Beobachtung nach der α -Methode

- α) Tag und Zeit der Beobachtungen
- β) Winkel α
- γ) Sättigung der Farbe des blauen Himmels
- δ) Art und Dichte der Bewölkung
- ε) Horizontweite
- ζ) Sichtweite
- η) Himmelsrichtung
- ϑ) Geländebeschaffenheit

b) Angaben bei den Beobachtungen der Sehgrößen der Gestirne

- α) Tag der Beobachtungen
- β) Höhe des Gestirnes
- γ) Sehgröße
- δ) Farbe
- ε) Intensität
- ζ) Horizontweite
- η) Bewölkung (auf das Verhältnis der Flächengrößen und Helligkeiten der umgebenden Wolken und des Hintergrundes des Gestirnes am Himmel achten)
- ϑ) Allgemeiner Zustand der Luft, ob nebelig, am Horizont dunstig
- ι) Beschaffenheit der Linie des Horizontes, ob überschritten von Bäumen, Gebäuden usw
- κ) Geländebeschaffenheit

Alle außergewöhnlichen Umstände und jede Änderung eines Umstandes während der Beobachtungszeit müssen vermerkt werden. Man beobachtet bei Sonne und Mond nur auf ganze individuelle Rfn, also vom Aufgang bis zur Kulmination oder von der Kulmination bis zum Untergang.

Die Sterne sind zur Beobachtung auf unsere problematischen Faktoren wenig geeignet. Es fehlt ein schnell und einfach brauchbares Maß der Intensitätsänderung und der Verunreinigung der Atmosphäre. Als das erstere Maß könnte man das Verschwinden von Sternen der letzten, für das betreffende Auge noch wahrnehmbaren Größenklassen benutzen; das setzt aber astronomische Kenntnisse und Übung voraus. Was das letztere Maß angeht, bliebe nur übrig, die Beobachtungen an einen gut bekannten Tageszustand anzuschließen. Aber da die Rfn der Sterne uns wegen der geringen Variationsbreite der Charakteristik überhaupt wenig Aufschluß geben können, würden die Beobachtungen sich mehr mit dem Mond und vor allem mit der Sonne zu beschäftigen haben.

Die Beobachtungen an den Wolken schließen wir hier an. Auch hier sind nur individuelle Rfn zu bestimmen, d. h. solche von einem Tage bei einer Art der Bewölkung. Sollten die Horizontbedingungen, wie zu erwarten ist, von geringem Einfluß sein, so können Rfn desselben Beobachters für dieselbe Art der Bewölkung zu einer mittleren Rfn dieser Art zusammengefaßt werden.

c) Wenn der Einfluß einer bestimmten Bedingung untersucht werden soll, so sind die zu vergleichenden α -Wertreihen von einem Himmel oder Kurven von einem Gestirn nach folgenden Gesichtspunkten auszuwählen:

- α) Es sind nur individuelle Rfn zu vergleichen.
- β) Ausgeschieden werden Beobachtungsreihen mit solchen Bedingungen, die überflüssig komplizieren können (z. B. Bewölkung bei Gestirnen, wenn auf Horizontweite untersucht wird).
- γ) Von den übrigbleibenden Bedingungen müssen diejenigen, auf die nicht untersucht wird, möglichst identisch sein. Zu den Bedingungen, die identisch sein können oder nicht, zählen wir auch den Beobachter.

δ) Innerhalb der verglichenen Beobachtungsreihen müssen dieselbe Methode, dasselbe Vergleichsobjekt und dieselbe Art der Schätzung vorliegen.

d) Ich habe an anderer Stelle (64a) gezeigt, warum Beobachtungen auf hoher See für die Entscheidung über die wesentlichen Bedingungen besonders wichtig werden können. Einmal ist dabei eine Reihe von möglichen Nebenbedingungen ausgeschaltet, und fürs zweite besitzt die Horizontweite keine bemerkbare Variabilität. Ist also der Einfluß des trüben Mediums nicht vorhanden, dann müßte die Charakteristik fast konstant sein. Existiert er aber, dann müßte die Variabilität der Charakteristik geringer sein als zu Lande und wesentlich von der Luftfeuchtigkeit abhängen; denn die Verunreinigung der Luft auf hoher See rührt in der Hauptsache vom Wasserdampf her. Die Anwendung dieser Kriterien setzt voraus, daß die Beobachtungen bei klarem Himmel gemacht sind.

Literatur

I. Die Literatur über die Bestimmung und die Bedingungen der Referenzflächen

1. Die ältere Literatur (etwa bis 1850)

Man findet die ältere Literatur, teilweise mit ausführlichen Belegstellen, in den Arbeiten zusammengestellt, die im folgenden mit den Nummern 16, 17, 27, 31, 77, 78 bezeichnet sind.

Es ließen sich noch manche ältere Autoren hinzufügen, so z. B. aus dem Mittelalter

Witelo (Cl. Baeumker, Witelo, Beitr. zur Gesch. der Philos. des Mittelalters, III, 2, 1908, S. 634),

Dietrich von Freiberg, de iride IV, c. 24 (J. Würschmidt, Dietrich von Freiberg, Über den Regenbogen und die durch Strahlen erzeugten Eindrücke. Beitr. zur Gesch. der Philos. des Mittelalters XII, 5—6, 1914).

Aus im Text ersichtlichen Gründen nenne ich von dieser Literatur nur:

1. Smith R., Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Übers. von A. G. Kästner (1755)
2. Kämtz L. F., Lehrbuch der Meteorologie 3, 44 (1836)

2. Die neuere Literatur

Angeführt sind die Arbeiten, die sich ganz oder teilweise mit dem Problem der Referenzflächen oder einem seiner Teilprobleme beschäftigen. Unter den Arbeiten in populären naturwissenschaftlichen Zeitschriften ist eine Auswahl getroffen; andere populäre Zeitschriften sind nicht berücksichtigt. Von den Ausführungen in psychologischen und physiologischen Lehrbüchern sind nur einige verhältnismäßig ausführliche notiert. Wenn ein Autor seine Ergebnisse gleichzeitig in mehreren Zeitschriften veröffentlicht hat, dann ist in der Regel nur die Originalarbeit angegeben.

3. Allander A., La grandeur apparente du soleil et de la lune. Bull. Soc. astr. de France 15, 139 (1901)
4. Arendt A., Scheinbare Abflachung des Himmelsgewölbes. Weltall 3, 125 (1902)
5. Aubert H., Physiologie der Netzhaut, S. 268 (1865)
6. — —, Grundzüge der physiologischen Optik. In Graefe-Saemisch, Handbuch der ges. Augenheilkunde, II. Bd., 2. Teil, S. 627 (1876)

7. Backhouse T. W., App. size of objects near the Horizon. *Nature* **45**, 7 (1891)
8. Bersin L., Sur l'agrandissement apparent des astres à l'horizon. *Bull. Soc. astr. de France* **15**, 520 (1901)
9. Bernstein F., Das Leuchtturmpphänomen und die scheinbare Form des Himmels. *Zeitschr. f. Psych.* **34**, 132 (1904)
10. Blondel M., Une association inséparable. L'agrandissement des astres à l'horizon. *Rev. phil.* **26**, 489 (1888)
11. Bourdon B., Les objets paraissent-ils se rapetisser en s'élevant au-dessus de l'horizon? *Année psych.* **5**, 55 (1899)
12. — —, La perception visuelle de l'espace, Chap. 14 (1902)
13. — —, La voûte céleste. *Revue du mois* **2**, 131 (1906)
14. Brenke W. C., An Observational Determination of the Apparent Figure of the Sky. *Pop. Astronomy* **9**, 351 (1901)
15. Browne R. G. M., The apparently altered Size of Celestial Objects through change of altitude. *Naut. Mag.* **69**, 79 (1900)
16. Claparède Ed., L'agrandissement et la proximité apparents de la lune à l'horizon. *Arch. de Psych.* **5**, 121 (1905)
17. — —, A propos de la grandeur de la lune à l'horizon. *Ebend.* **5**, 254 (1906)
18. Clausius R., Übersichtliche Darstellung der in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen. *Grunerts Beiträge zur meteorolog. Optik* **1**, 368 (1848/50)
19. Mc.Creary R. M., An Illusion and its cause. *Pop. Astron.* **7**, 11 (1899)
20. Deichmüller F., Über die Größe und die Figur des scheinbaren Himmelsgewölbes. *Bericht 70. Vers. deutsch. Naturf. und Ärzte zu Düsseldorf 1898, Abt. f. Math. und Astron.*, S. 9
- 20a. Dember H. und Uibe M., Über die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes. *Leipziger Ber. Math.-phys. Kl.* **69**, 139 (1917)
- 20b. — —, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. *Ebend.* **69**, 391 (1917)
- 20c. — —, Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont. *Ebend.* **69**, 485 (1918)
21. Destefano O., Il crepuscolo ossia spiegazione de' fenomeni luminosi che si osservano nel tramonto del sole e nelle diverse aurore (1865)
22. Dolmage C. G., On the Apparent Enlargement of Heavenly Bodies when in the Neighbourhood of the Horizon. *Journ. Brit. Astr. Ass.* **10**, 26 (1899)
23. Dreyer Fr., Studien zu Methodenlehre und Erkenntniskritik **2**, 46, 187 (1903)
24. Drobisch M. W., Über die Bestimmung der Gestalt des Himmelsgewölbes. *Leipz. Ber. Math.-phys. Kl.*, S. 107 (1854)
25. Dürr E., in *Ebbinghaus-Dürr, Grundzüge der Psychologie* ³ **2**, 128, 185 (1913)
26. Egger, La vision des monuments élevés. *Rev. scientif.* **18**, 745 und **19**, 94 (1889)

27. Eginitis D., L'agrandissement des disques du soleil et de la lune à l'horizon. *Ann. de l'Observ. d'Athènes* **2**, 17 (1899)
- 27a. Ekama H., Ein Beitrag zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes. *Meteorol. Zeitschr.* **13**, 444 (1896)
28. Ernst M., Bestimmung der scheinbaren Gestalt des Himmelsgewölbes. *Prace matematyczno-fizyczne* **15**, 135 (1904) [polnisch]
29. Fellow S., The Firmament. *Journ. Brit. Astr. Ass.* **16**, 193 (1906)
30. Figeo S., De vorm ven hat hemelgewelf te Batavia. *Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië* **65**, 35 (1906)
31. Filehne W., Die Form des Himmelsgewölbes. *Pflügers Archiv* **59**, 279 (1894)
32. — —, Über die Rolle der Erfahrungsmotive beim einäugigen perspektivischen Fernsehen. *Arch. f. Anat. und Phys., Phys. Abt.*, S. 392 (1910)
33. — —, Über die Betrachtung der Gestirne mittels Rauchgläser und über die verkleinernde Wirkung der Blickerhebung. *Ebend.* S. 523 (1910)
34. — —, Die mathematische Ableitung der Form des scheinbaren Himmelsgewölbes. *Ebend.* S. 1 (1912)
35. — —, Das Weber-Fechnersche Gesetz und die wechselnde scheinbare Größe der Gestirne. *Ebend.* S. 185 (1912)
36. — —, Horizontradius und Zenithöhe in ihren scheinbaren Größenverhältnissen. *Ebend.* S. 373 (1916)
37. Foerster W., Die scheinbare Vergrößerung der Sonnen- und der Mondscheibe in der Nähe des Horizontes. *Mitteil. d. Verein. v. Freunden der Astron. und kosm. Physik* **7**, 104 (1897)
- 37a. Fröbes J., *Lehrbuch der experimentellen Psychologie* **1**, 303 (1917)
38. Gauß Fr., in Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, S. 498 (1880)
- 38a. Goldschmidt R. H., Veränderbarkeit des scheinbaren Mondabstandes. *Mitteil. d. Verein. v. Freunden der Astron. und kosm. Physik* **27**, 97 (1917)
39. Grijns G., L'agrandissement apparent de la lune à l'horizon. *Arch. de Psych.* **5**, 319 (1906)
40. Günther G., Inbetroff: Scheinbare Abflachung des Himmelsgewölbes. *Weltall* **3**, 285 (1902)
- 40a. Günther S., *Handbuch der Geophysik* ² **2**, 90 (1899)
41. Guttmann A., Über Blickrichtung und Größenschätzung. *Zeitschr. f. Psych.* **32**, 333 (1903)
42. Haenel H., Das Problem der Vergrößerung der Gestirne am Himmel. *Verh. d. Ges. deutscher Naturf. und Ärzte*, 80. Bd., 2. Teil, 1. Heft, S. 19 (1909)
43. — —, Die Gestalt des Himmels und die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. *Zeitschr. f. Psych.* **51**, 161 (1909)
44. — —, Das Problem der Vergrößerung der Gestirne am Horizont. *Wochenschr. f. Ther. und Hyg. des Auges* **11**, 33 (1908) [auch in *Jahresber. der Ges. f. Natur- und Heilkunde*, Dresden, S. 142 (1908)]
45. Helmholtz H., *Handbuch der physiol. Optik* ³ **3**, 242 (1910)
46. Hering Ew., *Beitr. zur Physiologie* **1**, 26 (1861)

- 46 a. Höfler A., Didaktik der Himmelskunde, S. 195 (1913)
47. Holtz W., Die Wirkung des Hintergrundes bei der Größenschätzung z. B. des Mondes am Horizont. Götting. Nachr. Math.-phys. Kl., S. 442 (1905)
48. Houzeau, Sur certains phénomènes énigmatiques de l'astronomie. Bull. Acad. Roy. Belg. [2] **46**, 951 (1878)
49. Jouffray A., Sur l'agrandissement des astres à l'horizon. Bull. Soc. astr. de France **17**, 448 (1903)
50. Koerber F., Über Höhenschätzungen bei Meteorbeobachtungen. Mitteil. d. Verein. v. Freunden der Astron. und kosm. Physik **4**, 46 (1894)
51. — —, Ein Analogon zur scheinbaren Abflachung des Himmelsgewölbes. Naturw. Wochenschr. N. F. **1**, 34 (1902)
52. v. Kries J., in Helmholtz, Handbuch der physiol. Optik³ **3**, 307, 492 (1910)
53. Kuropatwiński A., Einige Worte über die scheinbare Gestalt des Himmels. Postęp, okulistyczny **3**, 397 (1903) [polnisch]
54. Lechallas G., L'agrandissement des astres à l'horizon. Rev. phil. **26**, 49, 596 (1888)
55. Lühr K., Die scheinbare Vergrößerung der Gestirne in der Nähe des Horizontes. Mitteil. d. Verein. v. Freunden der Astron. und kosm. Physik **8**, 31 (1898)
- 55 a. Mayer A., Warum erscheint die Sonne größer beim Untergang? Prometheus **28**, 461 (1917)
56. Mayr R., Über einige optische Täuschungen. Beil. z. 15. Jahresber. der Kgl. Realschule in Ludwigshafen (1901)
57. — —, Die scheinbare Vergrößerung von Sonne, Mond und Sternbildern. Pflügers Archiv **101**, 349 (1904)
58. — —, Erwiderung an O. Zoth. Ebend. **105**, 380 (1904)
59. Moreux, Pourquoi la lune paraît-elle plus grosse à l'horizon qu'au zénith? Cosmos **50**, 99 (1901)
60. Müller Aloys, Über den Einfluß der Blickrichtung auf die Gestalt des Himmelsgewölbes. Zeitschr. f. Psych. **40**, 74 (1905)
61. — —, Le problème du grossissement apparent des astres à l'horizon considéré au point de vue méthodologique. Arch. de Psych. **5**, 305 (1906)
62. — —, Die Referenzflächentheorie der Täuschung am Himmelsgewölbe und an den Gestirnen. Zeitschr. f. Psych. **44**, 186 (1907)
63. — —, Zur Frage der Referenzflächen. Ebend. **47**, 287 (1908)
64. — —, Einige Bemerkungen über die Täuschung am Himmelsgewölbe und an den Gestirnen. Arch. f. die ges. Psych. **16**, 549 (1910)
- 64 a. — —, Über die Bestimmung der Referenzflächen des Himmels und der Gestirne. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie **45**, 481 (1917)
65. Nijland A. A., Ortsbestimmung zur See ohne Instrumente und ohne Rechnung. Astron. Nachr. **160**, 257
66. — —, Beobachtungen von SS Aurigae, nebst einer Notiz über die scheinbare Vergrößerung der Konstellationen am Horizont. Astron. Nachr. **182**, 169

67. Nijland A. A., De schijnbare vergrooting der sterrenbeelden aan den horizon. *Hemel en Dampkring* **7**, 58
68. Parize, Diamètre apparent des astres. *Rev. scientif.* **19**, 93 (1890)
69. Pernter J. M., Die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der Gestirne (1901)
70. Pernter J. M. und Exner F. M., Meteorologische Optik, I. Abschnitt (1910)
71. Plassmann J., Über die scheinbare Vergrößerung der Sonne, des Mondes und der Sternbilder in der Nähe des Horizontes. *Mittel. d. Verein. v. Freunden der Astron. und kosm. Physik* **8**, 1 (1898)
72. Plateau M., Une application des images accidentelles. *Bull. Acad. Roy. de Belg.* [2] **49**, 316 (1880)
73. Ponzio M., Rapporto fra alcune illusioni di contrasto angelare dell' apprezzamento di grandezza degli astri all' orizzonto. *Riv. di psicol.* **8**, 304 (1912); auch französisch in *Arch. ital. de biol.* **58**, 231 (1913)
74. Pozdřna R. F., Eine Methode zur experimentellen und konstruktiven Bestimmung der Form des Firmamentes. *Zeitschr. f. Psych.* **51**, 200 (1909)
75. Reimann E., Beiträge zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes. *Programmabh. des Kgl. Gymn. zu Hirschberg* (1890)
76. — —, Weitere Beiträge zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes. *Programmabh.* (1891)
77. — —, Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizonte. *Programmabh.* (1901)
78. — —, Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizonte. *Zeitschr. f. Psych.* **30**, 1 (1902)
79. — —, Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizonte. *Zeitschr. f. Psych.* **37**, 250 (1904)
80. Rémy, La vision des monuments élevés. *Rev. scientif.* **17**, 668 und **18**, 237 (1889)
81. Ronot, Le diamètre apparent des objets éloignés. *Rev. scientif.* **19**, 653 (1890)
82. Rozier, La vision des monuments élevés. *Rev. scientif.* **18**, 26 (1889) und **19**, 93 (1890)
83. Schaeberle J. M., A simple Physical Explanation of the Seeming Enlargement of Celestial Areas near the Horizon. *Astron. Nachr.* **148**, 375
84. Schlesinger Fr., The Apparent Figur of the Sky. *Pop. Astron.* **7**, 117 (1899)
85. Schmidt W., Eine mögliche Erklärung für die scheinbare Flachheit des Himmelsgewölbes. *Die Naturwissenschaften* **4**, 632 (1916)
86. Schmitt Ph., In welcher Entfernung sehen wir die Körper? *Natur und Offenbarung* **56**, 368 (1910)
87. Schoute G. J., Vortrag über W. von Zehenders Aufsatz: „Die Form des Himmelsgewölbes und das Größererscheinen der Gestirne am Horizont“. *Klin. Monatsbl. f. Augenheilk.* **39**, 577 (1901)

88. Schröder H., Über die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes und damit zusammenhängende Erscheinungen. *Weltall* **1**, 29 (1900)
89. See T. J. J., Ptolemy's Theorem on the apparent Enlargement of the Sun and Moon near the Horizon. *Pop. Astron.* **8**, 362 (1900)
90. Sorel, La vision des objets élevés. *Rev. scientif.* **19**, 564 (1890)
91. v. Sterneck R., Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der Gestirne. *Wiener Ber. Math.-naturw. Kl.*, **115**, 547 (1906)
92. — —, Die Referenzflächentheorie der scheinbaren Größe der Gestirne. *Zeitschr. f. Psych.* **46**, 1 (1907)
93. — —, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung (1907)
94. Storch E., Über das räumliche Sehen. *Zeitschr. f. Psych.* **29**, 22 (1902)
95. — —, Der Wille und das räumliche Moment in Wahrnehmung und Vorstellung. *Pflügers Archiv* **95**, 305 (1903)
96. Stratton G., Lineare perspektive Form in der Form des Himmelsgewölbes. *Zeitschr. f. Psych.* **28**, 42 (1902)
97. Stroobant P., Sur l'agrandissement apparent des constellations, du Soleil et de la Lune à l'horizon. *Bull. Acad. Roy. Belg.* [3] **8**, 719 (1884)
98. — —, Nouvelles recherches sur l'agrandissement apparent des constellations, du Soleil et de la Lune à l'horizon. *Ebend.* [3] **10**, 315 (1885)
- 98a. Meyer G., in der Allgemeinen Enzyklopädie der Physik **1**, 685 (1869)
99. Witasek St., Psychologie der Raumwahrnehmung des Auges, S. 400 (1910)
- 99a. Witte H., Über den Sehraum. *Physikal. Zeitschr.* **19**, 142 (1918)
100. Wolffberg L., Warum der Mond nahe dem Horizont größer aussieht. *Wochenschr. f. Ther. und Hyg. des Auges* **7**, 418 (1903/04)
101. Wundt W., Grundzüge der physiologischen Psychologie⁶ **2**, 659, 696 (1910)
102. v. Zehender W., Die Form des Himmelsgewölbes und das Größersichere der Gestirne. *Zeitschr. f. Psych.* **20**, 353 (1899)
103. — —, Die Form des Himmelsgewölbes und das Größersichere der Gestirne. *Ebend.* **24**, 218 (1900)
104. — —, Über optische Täuschung, mit besonderer Berücksichtigung der Täuschung über die Form des Himmelsgewölbes und über die Größenverhältnisse der Gestirne (1902)
105. Zeno T., On the changes in the apparent size of the moon. *Phil. Mag.* [4] **24**, 390 (1862)
106. Zoth O., Über den Einfluß der Blickrichtung auf die scheinbare Größe der Gestirne. *Pflügers Archiv* **78**, 363 (1899)
107. — —, Bemerkungen zu einer alten Erklärung und zu zwei neuen Arbeiten betreffend die scheinbare Größe der Gestirne. *Ebend.* **88**, 201 (1902)
108. — —, Erwiderung an Dr. Mayr. *Ebend.* **103**, 133 (1904)
109. — —, in Nagels Handbuch der Physiologie **3**, 391 (1905)
- 109a. Zschocke H. F., Warum erscheint die Sonne größer beim Untergang? *Prometheus* **28**, 669 (1917)

Eine Reihe von Bemerkungen verschiedener Autoren enthalten:

- Intermédiaire des Biologistes **1** (1898)
 Journ. Brit. Astr. Ass. **10** (1899/1900)
 English Mechanic and World of Science **71** (1900)

II. Hilfsliteratur

Was im Text nicht vermerkt ist, soll zur weiteren Aufklärung über einzelne Punkte dienen.

110. Angell Fr. and Root W. T., Size and Distance of Projection of an After Image on the Field of the Closed Eyes. *Amer. Journ. of Psych.* **24**, 262 (1913)
111. Benussi V., Über den Einfluß der Farbe auf die Größe der Zöllnerschen Täuschung. *Zeitschr. f. Psych.* **29**, 264 (1902)
112. — —, Zur Psychologie des Gestalterfassens. In den „Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie“ von A. Meinong, S. 303 (1904)
113. Blumenfeld W., Untersuchungen über die scheinbare Größe im Sehraume. *Zeitschr. f. Psych.* **65**, 241 (1913)
114. Grünberg V., Über die scheinbare Verschiebung zwischen zwei verschiedenfarbigen Flächen im durchfallenden diffusen Licht. *Zeitschr. f. Psych.* **42**, 10 (1906)
115. Hillebrand F., Theorie der scheinbaren Größe bei binokularem Sehen. *Denkschr. d. Wiener Akad. Math.-naturw. Kl.* **72**, 255 (1902)
116. Holtz W., Über den unmittelbaren Größeneindruck in seiner Beziehung zur Entfernung und zum Kontrast. *Götting. Nachr. Math.-naturw. Kl.*, S. 159 (1893)
117. Jaensch E. R., Zur Analyse der Gesichtswahrnehmungen (1909)
118. — —, Über die Wahrnehmung des Raumes (1911)
119. Knox H. W., On the Quantitative Determination of an Optical Illusion. *Amer. Journ. of Psych.* **6**, 413 (1893)
120. v. Kries J., Beiträge zur Lehre vom Augenmaß. In den „Beiträgen zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“. Herausgegeben von A. König (Helmholtz-Festschrift 1891)
121. Kritzinger H. H., Physiologisch-psychologische Fragen der astronomischen Beobachtungskunde. *Sirius* **48**, 3 (1915)
122. Kundt A., Untersuchungen über Augenmaß und optische Täuschungen. *Poggendorffs Annalen* **30**, 118 (1863)
123. Larguier des Bancels J., De l'estimation des surfaces colorées. *L'année psych.* **7**, 278 (1901)
124. Levinsohn G., Die Entstehung der Kurzsichtigkeit (1912)
125. — —, Die Entstehung der Kurzsichtigkeit, mit Demonstration kurzsichtig gemachter Affen. Bericht über die 39. Vers. d. ophthalmol. Ges. Heidelberg (1913)
126. — —, Über den histologischen Befund kurzsichtig gemachter Affen und die Entstehung der Kurzsichtigkeit. *Arch. f. Ophthalmologie* **88**, 452 (1914)

127. Martius G., Über die scheinbare Größe der Gegenstände und ihre Beziehung zur scheinbaren Größe der Netzhautbilder. *Wundts Phil. Stud.* **5**, 601 (1889)
 128. Pierce E., Aesthetics of Simple Forms. *Psych. Rev.* **1**, 483 (1894)
 129. Poppelreuter W., Über die Bedeutung der scheinbaren Größe und Gestalt für die Gesichtsraumwahrnehmung. *Zeitschr. f. Psych.* **54**, 311 (1910)
 130. — —, Beiträge zur Raumpsychologie. *Zeitschr. f. Psych.* **58**, 200 (1911)
 131. Quantz J. O., The Influence of the Color of Surfaces on our Estimation of their Magnitude. *Amer. Journ. of Psych.* **7**, 26 (1895)
 132. Scharwin W. und Novizki A., Über den scheinbaren Größenwechsel der Nachbilder im Auge. *Zeitschr. f. Psych.* **11**, 408 (1896)
 133. Schumann F., Beiträge zur Analyse der Gesichtswahrnehmung (1904)
 134. — —, Zum Problem der scheinbaren Größe. *Ber. VI. Kongr. f. exp. Psych.*, S. 63 (1914)
 135. v. Sterneck R., Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. *Wiener Ber. Math.-naturw. Kl.* **114**, 1685 (1905)
 136. Wegener A., *Thermodynamik der Atmosphäre* (1911)
 137. Ziehen Th., Über die Abhängigkeit der scheinbaren Größe taktiler Empfindungen von der Entfernung und von der optischen Einstellung. *Zeitschr. f. Sinnesphys.* **50**, 114 (1916)
-

DR. ALOYS MÜLLER:

Verlag von FRIEDR. VIEWEG & SOHN In BRAUNSCHWEIG

Das Problem des absoluten Raumes
und seine Beziehung zum
allgemeinen Raumproblem

X, 154 S. 1911. Geheftet M. 4,—, gebunden M. 4,80

(Die Wissenschaft, Bd. 39)

Theorie der Gezeitenkräfte

Mit 17 Abbildungen

.VI, 81 S. 1916. M. 2,80

(Sammlung Vieweg, Heft 35)

A. MARCUS & E. WEBERS VERLAG In BONN

Wahrheit und Wirklichkeit

Untersuchungen zum realistischen Wahrheitsproblem

IV, 64 S. 1913. M. 2,—.

Verlag von B. G. TEUBNER In LEIPZIG

Der Gegenstand der Mathematik

(erscheint demnächst in der Mathematisch-Physikalischen Bibliothek)

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

- von und zu Aufseß**, Dr. Otto, Freiherr, **Die physikalischen Eigenschaften der Seen.** Mit 36 Abbild. X, 120 S. 8^o. 1905.
M 3,—, geb. M 3,60.
- Börnstein**, Prof. Dr. R., **Leitfaden der Wetterkunde.** Gemeinverständlich bearbeitet. 3. Auflage. Mit 55 Abbild. und 26 Tafeln. X, 270 S. gr. 8^o. 1913.
M 7,—, geb. M 8,—.
- Eckardt**, Dr. Wilh. R., **Das Klimaproblem** der geologischen Vergangenheit und historischen Gegenwart. Mit 18 Abbild. und 4 Karten. XI, 183 S. 8^o. 1909.
M 6,50, geb. M 7,10.
- Einstein**, A., **Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.** Gemeinverständlich. Mit 3 Figuren. 2. Aufl. IV, 70 S. 8^o. 1918.
M 2,80.
- Gehrcke**, Dr. E., **Die Anwendung der Interferenzen** in der Spektroskopie und Meteorologie. Mit 73 Abbild. IX, 160 S. 8^o. 1906.
M 5,50, geb. M 6,20.
- Geitel**, Prof. Dr. Hans, **Über die Anwendung der Lehre von den Gasionen** auf die Erscheinungen der atmosphärischen Elektrizität. 2 Bl., 27 S. 8^o. 1901.
M —, 60.
- Hupka**, Dr. Erich, **Die Interferenz der Röntgenstrahlen.** Mit 33 Abbild. und 1 Doppeltafel. II, 68 S. 8^o. 1914.
M 2,60.
- Konen**, Prof. Dr. H., **Das Leuchten der Gase und Dämpfe**, mit besonderer Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten in Spektren. XIV, 384 S. 8^o. Mit 33 Abbild. u. 1 Tafel. 1913. Geh. M 12,50, geb. M 13,50.
- Loria**, Dr. Stan., **Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem.** VI, 92 S. 8^o. Mit 3 Textabbildungen und einer Tafel. 1914.
M 3,—.
- Mache**, Prof. H., und **v. Schweidler**, Prof. E., **Die atmosphärische Elektrizität.** Methoden und Ergebnisse der modernen luftelektrischen Forschung. Mit 20 Abbild. XI, 247 S. 8^o. 1909.
M 6,—, geb. M 6,80.
- Messerschmitt**, Prof. Dr. Joh. Bapt., **Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche.** Mit 25 Abbild. VIII, 158 S. 8^o. 1908.
M 5,—, in Lnwdbd. M 5,80.
- Spektraltafeln.** Vierundzwanzig der wichtigsten Spektren für den Gebrauch im Praktikum (zum Teil nach H. Erdmann). In feinstem Farbendruck. 8^o. 1913.
In Lnwdbd. M 4,—.
- Study**, Prof. Dr. E., **Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume.** IX, 145 S. 8^o. 1914.
M 4,50, geb. M 5,20.
- Wegener**, Dr. Alfred, **Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.** Mit 20 Abbild. V, 94 S. 8^o. 1915.
M 3,20.
- **Wind- und Wasserhosen in Europa.** Mit 85 Abbild. XI, 301 S. 8^o. 1917.
Geh. M 12,—, geb. M 13,60.
- Witte**, Dr. Hans, **Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.** Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip. Mit 17 Abbildungen. IV, 84 S. 8^o. 1914.
M 2,80.