

# Elasticität und Festigkeit.

Die für die

**Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage.**

Von

**C. Bach,**

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens am K. Polytechnikum Stuttgart.

In zwei Lieferungen.

**Erste Lieferung.**

*Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 10 Tafeln in Lichtdruck.*



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg GmbH

1889.

ISBN 978-3-662-32215-4  
DOI 10.1007/978-3-662-33042-5

ISBN 978-3-662-33042-5 (eBook)

Die vorliegende Arbeit war — in beschränkterem Umfange und mit Hinweglassung dessen, was sonst anderwärts zusammengestellt zu finden — ursprünglich nur für die Zuhörer meines Vortrags über Elasticitätslehre bestimmt, mit dem Ziele, ihnen die erfahrungsmässigen Grundlagen der technischen Elasticitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ohne hierzu die für die Vorlesung verfügbare Zeit (3 Stunden im Sommersemester), welche mit Rücksicht auf die Behandlung der schwierigen Aufgaben dieses Gebietes an und für sich knapp bemessen erscheint, in Anspruch nehmen zu müssen. Wiederholten Anregungen schliesslich Folge leistend, übergebe ich dieselbe mit den hierdurch bedingten Erweiterungen der Oeffentlichkeit.

Sie geht davon aus, dass es in erster Linie auf die Erkenntniss des thatsächlichen Verhaltens der Materialien ankommt, und dass es — namentlich für den Maschineningenieur, welcher oft mit Körpern von zusammengesetzten, eigenartigen Formen zu thun hat, und von dem die Industrie auch verlangt, dass er nicht in dem Geleise hergebrachter Formen bleibe — nothwendig erscheint, sich nicht blos die Voraussetzungen der benützten Gleichungen im Spiegel der Erfahrung stets zu vergegenwärtigen, sondern auch die auf dem Wege der Ueberlegung, der mathematischen Ableitung gewonnenen Beziehungen hinsichtlich des Grades ihrer Richtigkeit beurtheilen zu können, soweit dies bei dem jeweiligen Stand unsrer Erkenntnisse überhaupt möglich ist.

Dementsprechend waren fortgesetzt Versuche heranzuziehen und eine gewisse Beschränkung sowohl in Bezug auf den Umfang der Entwicklungen, als auch hinsichtlich des Gebrauchs an mathematischen Hilfsmitteln zu üben. Dass sich auf diesem Wege Aufgaben, welche sonst trotz ihrer grossen Wichtigkeit nur ganz ausnahmsweise behandelt zu werden pflegen, recht klar und dazu fruchtbringender, als es bisher geschehen ist, erörtern lassen, davon dürften beispielsweise §§ 33 und 34 Zeugniss ablegen.

Möge auch diese Arbeit, welche nur ein Schritt in der bezeichneten Richtung sein will, zur Förderung der Technik und damit der Industrie beitragen.

Stuttgart, Anfang Februar 1889.

C. Bach.

## Erster Abschnitt.

### Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

#### Einleitung.

##### § 1. Formänderung. Spannung.

Der gerade stabförmige Körper, Fig. 1, welchen wir uns als Kreiscylinder vorstellen wollen, besitze die Länge  $l$  und den Durchmesser  $d$ , also den Querschnitt  $f = \frac{\pi}{4} d^2$ . Derselbe werde jetzt — Fig. 2 — von zwei Kräften  $PP$  ergriffen, welche gleichmässig über die beiden Endquerschnitte vertheilt angreifen und deren Richtung mit der Stabachse zusammenfällt. Ihre Grösse liege unterhalb der Grenze, bei welcher eine Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes, ein Zerreißen des letzteren eintreten würde; sie halten sich demnach an dem Stabe das Gleichgewicht.

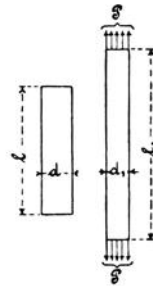


Fig. 1. Fig. 2.

Unter der Einwirkung dieser Kräfte

- a) vergrössert sich die Länge des Stabes von  $l$  auf  $l_1$ , d. h. um  $l_1 - l = \lambda$

und

- b) vermindert sich der Durchmesser des Stabes von  $d$  auf  $d_1$ , d. h. um  $d - d_1 = \delta$ .

Es findet also gleichzeitig eine Ausdehnung in Richtung der Stabachse und eine Zusammenziehung (Contraction) senkrecht zu derselben statt. Die letztere erweist sich übrigens weit kleiner als die erstere. Die Aenderung der Form, welche der Körper durch die ihn ergreifenden Kräfte  $PP$  erfährt, ist hier nach eine doppelte, wenn auch verschieden grosse.

Wir denken uns in dem Stabe, an welchem sich die Kräfte  $PP$  das Gleichgewicht halten, einen Querschnitt. Die auf beiden Seiten desselben liegenden Stabtheile werden in Folge des Vorhandenseins dieser äusseren Kräfte mit gewissen, über den Querschnitt vertheilten Kräften auf einander einwirken. Diese inneren Kräfte, bezogen auf die Flächeneinheit, heissen Spannungen, und insofern zum Ausdruck gebracht werden soll, dass dieselben senkrecht zum Querschnitt gerichtet sind, Normalspannungen.

Unter den Voraussetzungen gleichmässiger Vertheilung der Kräfte  $PP$  über die beiden Endquerschnitte des Stabes und durchaus gleichartiger Beschaffenheit des Stabmaterials wird auch die Spannung für die einzelnen Theile des in Betracht gezogenen Stabquerschnittes gleich gross sein. Bezeichnen wir dieselbe mit  $\sigma$ , so erscheint sie bestimmt durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{P}{f} \cdot \dots \dots \dots 1)$$

Streng genommen müsste hierin  $f$  denjenigen Querschnitt bedeuten, welchen der Stab thatsächlich besitzt, während er durch  $P$  belastet ist. Wie wir oben bei b) sahen, ändert sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte nicht blos die Länge, sondern auch der Durchmesser des Körpers und damit auch der Querschnitt. Unter Umständen kann diese Querschnittsänderung, welche abhängt von der verhältnissmässigen Grösse der Belastung und der Art des Materials, von Bedeutung werden. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, festzuhalten, dass die Gleichung 1 die Spannung  $\sigma$  bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt liefert, sofern, wie oben angenommen,  $f$  den Querschnitt des unbelasteten Stabes bezeichnet.

## § 2. Dehnung. Dehnungscoefficient. Proportionalitätsgrenze. Fließsgrenze.

Die absolute Grösse  $\lambda$  der Längenänderung (vergl. § 1a) hängt ab von der ursprünglichen Länge  $l$  des Stabes. Um sich für Zwecke der Rechnung von dieser Abhängigkeit zu befreien, pflegt man die auf die Längeneinheit bezogene Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} \cdot \dots \dots \dots 2)$$

anzugeben. Diese verhältnissmässige (specifische) Längenänderung  $\epsilon$  wird dann kurz mit Dehnung bezeichnet.

Die Bestimmung derselben durch die Gleichung 2 setzt für den Fall, dass die ursprüngliche Länge  $l$  nicht eine sehr kleine Grösse ist, voraus: es sei die Dehnung an allen Stellen der Strecke  $l$  gleich gross.

Die Dehnung, welche sich für die Spannung (vergl. § 1) gleich der Krafteinheit, d. i. das Kilogramm ergibt, soll Dehnungscoefficient genannt und mit  $\alpha$  bezeichnet werden. Sie findet sich zu

$$\alpha = \frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{\lambda}{l} \frac{1}{\sigma} = \frac{\lambda}{l} \frac{f}{P} \dots \dots \dots 3)$$

Der Dehnungscoefficient ist demnach diejenige Zahl, welche angiebt, um welche Strecke sich ein Stab von der Länge 1 bei einer Belastung von 1 Kilogramm auf die Flächeneinheit (Quadratcentimeter) dehnt.

Diese Begriffsbestimmung liefert unmittelbar die Dehnung als Produkt aus Spannung und Dehnungscoefficient, d. i.

$$\epsilon = \alpha \sigma \dots \dots \dots 4)$$

und die Ausdehnung des ursprünglich  $l$  langen Stabes

$$\lambda = \alpha \sigma l^1),$$

sowie die Spannung als den Quotienten: Dehnung durch Dehnungscoefficienten, d. i.

<sup>1)</sup> Dieser Ausdruck entspricht ganz demjenigen, welcher sich für die Ausdehnung eines Stabes durch die Wärme ergibt, wie folgende Betrachtung deutlich zeigt.

Ein Stab von der Länge  $l_a$  und der Temperatur  $t_a$  wird auf die Temperatur  $t_e$  gebracht. Hierbei dehnt sich derselbe aus um

$$\alpha (t_e - t_a) l_a,$$

sofern  $\alpha$  den Längenausdehnungscoefficienten durch die Wärme bedeutet.

Ein Stab, welcher anfangs so belastet ist, dass in seinen Querschnitten die Spannung  $\sigma_a$  herrscht, besitzt in diesem Zustande die Länge  $l_a$ . Durch Vermehrung der Belastung steigt die Spannung auf  $\sigma_e$ . Hierbei dehnt sich der Stab aus um

$$\alpha (\sigma_e - \sigma_a) l_a,$$

worin  $\alpha$  den oben erörterten Dehnungscoefficienten bedeutet.

Wie ersichtlich, tritt einfach an die Stelle des Temperaturunterschiedes  $t_e - t_a$  der Spannungsunterschied  $\sigma_e - \sigma_a$  und an die Stelle des Längenausdehnungscoefficienten durch die Wärme der Dehnungscoefficient. Beide Erfahrungszahlen sind hierbei allerdings als unveränderlich vorausgesetzt, wenigstens innerhalb dieser Temperatur- beziehungsweise Spannungsunterschiede.

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \dots \dots \dots 5)$$

Der reciproke Werth von  $\alpha$  wird als Elasticitätsmodul bezeichnet.

Nach Gl. 4 kann der Dehnungscoefficient auch als diejenige Zahl erklärt werden, mit welcher die Spannung (Normalspannung) zu multipliciren ist, um die Dehnung zu erhalten.

Für eine Anzahl von Stoffen, z. B. Schmiedeisen, Stahl u. s. w., erweist sich innerhalb gewisser Belastungsgrenzen der Dehnungscoefficient  $\alpha$  als gleichbleibend, d. h.

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \text{constant.}$$

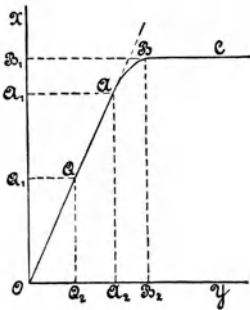


Fig. 3.

Dann besteht innerhalb eines bestimmten Spannungsgebietes Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen. Die Spannung, bis zu welcher hin diese Proportionalität stattfindet, führt den Namen Proportionalitätsgrenze.

Bei Stoffen, für welche  $\alpha$  veränderlich ist, wie dies z. B. bei Gusseisen der Fall, besteht demnach keine Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen, und kann deshalb auch keine Proportionalitätsgrenze vorhanden sein.

Behufs Gewinnung eines anschaulichen Bildes über das Gesetz, nach dem sich Dehnungen und Spannungen ändern, greifen wir zur bildlichen Darstellung.

Auf der Abscissenachse, welche senkrecht angenommen sein soll, werden die Belastungen  $P$  aufgetragen, auf der wagrechten Ordinatenachse die durch diese Belastungen veranlassten Ausdehnungen  $\lambda$ . Um diejenigen Verhältnisse, welche hier zunächst klargestellt werden sollen, recht deutlich hervortreten zu lassen, werde ein Körper aus zähem Schmiedeisen zu Grunde gelegt und der Massstab für die Dehnungen verhältnissmässig gross gewählt. Wir erhalten die in Fig. 3 dargestellte Schaulinie  $OQABC$ . Für den beliebigen Punkt  $Q$  ist  $\overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$  die Belastung  $P$  und  $\overline{OQ_2} = \overline{Q_1Q}$  die zugehörige Verlängerung  $\lambda$ .

Wie ersichtlich, verläuft die Linie bis zum Punkte  $A$  als Gerade, entsprechend dem Umstande, dass von der Belastung  $P = O$  bis  $P = \overline{OA_1}$  Proportionalität zwischen Belastungen (Spannungen) und Verlängerungen (Dehnungen) besteht. Bei höherer Belastung (über  $P = \overline{OA_1}$  hinaus) beginnt die Verlängerung rascher zu wachsen: die Schaulinie löst sich tangential von der Geraden  $OQA$  nach der Ordinatenachse  $OY$  hin. Von  $B$  an verläuft sie (auf eine längere Strecke) fast parallel zu dieser, entsprechend einem ausserordentlich starken Wachstum der Verlängerungen bei sehr geringer Steigung der Belastung: der Stab streckt sich.

Die Linie der Verlängerungen weist hiernach zwei ausgezeichnete Stellen  $A$  und  $B$  auf. Bei  $A$  geht die Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen zu Ende: die der Belastung  $P = \overline{OA_1} = \overline{A_2A}$  entsprechende Spannung  $\sigma = \frac{P}{f}$  ist demnach die Proportionalitätsgrenze. In  $B$  beginnt der Stab sich verhältnissmässig sehr stark zu strecken, gewissermassen zu fließen: Die Spannung, welche der zum Punkte  $B$  gehörigen Belastung  $P = \overline{OB_1} = \overline{B_2B}$  entspricht, wird deshalb als Streck- oder Fliessgrenze bezeichnet.

Wie bereits erwähnt, besitzen nicht alle Stoffe eine Proportionalitätsgrenze. Dasselbe ist auch hinsichtlich der Streck- oder Fliessgrenze zu bemerken.

### § 3. Bruchbelastung. Festigkeit.

Wird die Belastung des Stabes fortgesetzt gesteigert, so findet schliesslich eine Trennung desselben, ein Zerreißen (Zerbrechen) statt.

Denken wir uns den in § 2 erwähnten Schmiedeeisenstab in eine Materialprüfungsmaschine eingespannt, welche die Linie der Verlängerungen selbstthätig aufzeichnet derart, dass die Belastungen die senkrechten Abscissen bilden, während die Verlängerungen  $\lambda$  die zugehörigen wagrechten Ordinaten liefern, und sodann die Belastung allmählich bis zum Zerreißen gesteigert, so erhalten wir die Schaulinie  $OBCEF$  in Fig. 4. Hierbei sind die Verlängerungen im Verhältniss viel kleiner als in Fig. 3 gewählt. Infolge dieses kleinen Massstabes für die Werthe von  $\lambda$  löst sich die Dehnungscurve erst mit Beginn des Fließens (Streckens) von der Achse  $OX$



(Achse der Belastungen). Sie läuft alsdann eine Strecke nahezu wagrecht und steigt hierauf langsam an bis zum Punkte  $E$ . Von dieser Verlängerung  $\lambda = \overline{OE_2}$ , welche die der Messung unterworfenen Stabstrecke unmittelbar bei der Belastung  $P = \overline{E_2 E}$  ergibt, wird angenommen, dass sie sich gleichmässig über die ganze Länge dieser Strecke vertheilt<sup>1)</sup>.

Nachdem diese Verlängerung  $OE_2$  eingetreten ist, beginnt der Stab an einer Stelle sich einzuschnüren, also seinen Querschnitt zu vermindern, Fig. 5. Die Belastung  $P$ , welche von jetzt an zu weiterer Verlängerung erforderlich ist, nimmt ab, bis sich schliesslich der Stab bei  $\lambda = OF_2$  trennt<sup>2)</sup>. Die Belastung im Augenblicke des Zerreißen ist  $\overline{F_2 F'} < \overline{E_2 E}$ .

Die grösste zur Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes erforderliche gewesene Kraft  $\overline{E_2 E} = P_{max}$  wird als Bruchbelastung

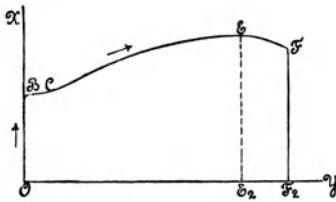


Fig. 4.



Fig. 5.

bezeichnet. Die Spannung, welche dieser zum Zerreißen nöthigen Belastung entspricht, heisst Zugfestigkeit. Dieselbe ist hiernach

$$K_z = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}}.$$

Hierbei erhebt sich die schon zu Gleichung 1 berührte Frage, mit welchem Querschnitt die Bruchbelastung zu theilen ist: Soll

<sup>1)</sup> Der Nachweis für diese übliche Annahme ist noch nicht erbracht. Genaue Untersuchungen dürften lehren, dass dieselbe nicht in dem Masse richtig ist, wie z. Z. angenommen wird.

<sup>2)</sup> Es ist noch nachzuweisen, ob der Grösstwerth der Belastung des Stabes genau mit dem Beginn der Einschnürung zusammenfällt. Für die Nothwendigkeit eines solchen Nachweises spricht die Beobachtung, dass zuweilen bei zähem Material, wie z. B. weichem Stahl, Bronze, die Erscheinung mehr oder minder grosser Einschnürung an mehreren Stellen des Stabes nach einander auftritt; es bilden sich gewissermassen Knoten, bis schliesslich der Bruch an der zuletzt und am stärksten eingeschnürten Stelle erfolgt.

der ursprüngliche Querschnitt des Stabes, oder soll derjenige Querschnitt gewählt werden, den der Stab in dem Augenblicke besass, in welchem die Bruchbelastung wirkte? Streng genommen wäre der letztere Querschnitt in die Rechnung einzuführen, da der Quotient durch gleichzeitig vorhandene Grössen gebildet werden sollte. Dieser Querschnitt ist jedoch schwer zu ermitteln. Thatsächlich benutzt man den ersteren Querschnitt als Nenner und erhält in

$$K_z = \frac{P_{max}}{f} \dots \dots \dots 6)$$

die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt<sup>1)</sup>. Da hiernach  $f$  zu gross eingeführt wird, so erscheint die durch Gleichung 6 bestimmte Zugfestigkeit zu klein, was im Sinne des Zweckes der anzustellenden Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt. Bei manchen Stoffen kann der Betrag dieses Zueklein bedeutend sein, bei anderen verschwindet er.

Die übliche Materialprüfungsmaschine lässt den Eintritt der höchsten Belastung dadurch erkennen, dass im darauf folgenden Augenblick der Waghebel sinkt.

Der grössere Theil der Konstruktionsstoffe liefert Schaulinien, welche Wachstum der Spannungen bis zum Zerreißen aufweisen. Dann fallen die Punkte  $E$  und  $F$  (Fig. 4) zusammen.

§ 4. Gesamtdéhnung. Déhnungsrest. Federung. Elasticität.

Wir nehmen einen aus gewalztem Kupfer hergestellten Rundstab und spannen denselben in eine Prüfungsmaschine. Die vorher stattgehabte Messung ergiebt

Durchmesser des Stabes		$d = 2,52 \text{ cm}$
Querschnitt „ „	$f = \frac{\pi}{4} \cdot 2,52^2 =$	$5,00 \text{ qcm}$
Länge der Strecke, für welche die Déhnung bestimmt werden soll		$l = 10,00 \text{ cm.}$

---

<sup>1)</sup> Der Ermittlung der Zugfestigkeit den Werth  $P_{max} = \overline{E_2 E}$  und den Querschnitt, welchen der Stab an der eingeschnürten (contrahirten) Stelle (Fig. 5) besitzt, zu Grunde zu legen, muss als unzulässig bezeichnet werden, so lange Bruchbelastung und Bruchquerschnitt nicht gleichzeitig, sondern nach einander vorhanden sind.

Der Stab wird abwechselnd in Zeiträumen von 2 Minuten mit der Kraft  $P$  belastet und bis auf  $P = 0$  entlastet. Hierbei ergeben sich aus den Beobachtungen die nachstehend zusammengestellten Zahlen.

Belastung in kg		Länge der Stabstrecke in cm	Zunahme der Länge in cm		
$P$	$\sigma = \frac{P}{f}$	$l + \lambda$	gesamte $\lambda$	bleibende $\lambda'$	sich wieder verlierende $\lambda''$
1	2	3	4	5	6
0	0	$l + 0,00000$			
500	100	$l + 0,00091$	0,00091		
0	0	$l + 0,00001$		0,00001	0,00090
1000	200	$l + 0,00182$	0,00182		
0	0	$l + 0,00008$		0,00008	0,00174
1500	300	$l + 0,00293$	0,00293		
0	0	$l + 0,00025$		0,00025	0,00268
2000	400	$l + 0,00434$	0,00434		
0	0	$l + 0,00066$		0,00066	0,00368
3000	600	$l + 0,00852$	0,00852		
0	0	$l + 0,00210$		0,00210	0,00642

Wie ersichtlich, beträgt bei der Belastung  $P = 500$  kg die Zunahme der Länge 0,00091 cm; infolge der Entlastung verschwindet dieselbe bis auf 0,00001 cm, sodass also eine bleibende Längenänderung, ein Rest von dieser Grösse zu verzeichnen ist. Bei Belastung durch  $P = 1000$  kg ergibt sich die gesammte Längenzunahme der ursprünglich 10 cm langen Strecke zu 0,00182 cm; durch die Entlastung verschwindet dieselbe bis auf 0,00008 cm u. s. f.

Wir haben hiernach dreierlei Längenänderungen zu unterscheiden.

- a) Die gesammte Längenänderung  $\lambda$ , deren Werthe in der Spalte 4 enthalten sind und die mit Gesamtausdehnung bezeichnet werden kann. Es ist dies diejenige Ausdehnung,

welche wir in dem Früheren allein der Betrachtung unterworfen haben. Auf die Längeneinheit bezogen d. h.

$$\epsilon = \frac{\lambda}{l} \dots \dots \dots 2)$$

nannten wir sie kurz Déhnung (§ 2).

- b) Die bleibende Längenänderung  $\lambda'$ , deren Beträge sich in der Spalte 5 befinden, und die Déhnungsrest genannt werden soll.

Derselbe beträgt hier

bei der Spannung $\sigma = 100$ kg	$\frac{1}{91}$	der Gesamtdéhnung d. i.	1,1 $\frac{0}{10}$
" " "	$\sigma = 200$ "	$\frac{8}{182}$ "	" " " 4,4 "
" " "	$\sigma = 300$ "	$\frac{25}{293}$ "	" " " 8,5 "
" " "	$\sigma = 400$ "	$\frac{66}{434}$ "	" " " 15,2 "
" " "	$\sigma = 600$ "	$\frac{210}{852}$ "	" " " 24,6 "

Je grösser die Belastung des Stabes ist, um so bedeutender fällt der Déhnungsrest aus; bei entsprechend kleinen Belastungen verschwindet er.

- c) Die sich wieder verlierende Längenänderung, über deren Grösse die Spalte 6 Auskunft giebt. Dieselbe ist Anfangs gleich der gesammten Längenänderung, bleibt jedoch um so mehr hinter dieser zurück, je stärker der Körper belastet wird. Wir erkennen, dass die Aenderungen, welche die Länge des Stabs infolge der Belastung erfahren hat, um so vollständiger verschwinden, je weniger gross sie waren.

Die jedem Körper innewohnende Eigenschaft, unter der Einwirkung äusserer Kräfte eine Aenderung seiner Gestalt zu erleiden und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder minder vollständig wieder zu verlieren, wird als Elasticität bezeichnet. Die sich wieder verlierende Längenänderung ist die eigentlich elastische und werde deshalb, bezogen auf die Längeneinheit, Federung genannt.

Dem in § 3 gegebenen Vorgange folgend, stellen wir die für den Kupferstab erhaltenen Ergebnisse in Fig. 6 bildlich dar. Auf

der senkrechten Abscissenachse  $OX$  werden die Spannungen  $\sigma$  (Spalte 2) und auf der wagrechten Ordinatenachse

- $\alpha$ ) die zugehörigen Gesamtausdehnungen  $\lambda$  (Spalte 4)  
 $\beta$ ) " " Dehnungsreste  $\lambda'$  (Spalte 5).

aufgetragen.

Die Ordinaten nach  $\alpha$  liefern alsdann die Punkte für die Linie  $OAC$ , d. i. die Curve der Gesamtausdehnungen, während die Ordinaten nach  $\beta$  in der Linie  $OED$  die Curve der Dehnungsreste ergeben.

Die Betrachtung der Linie  $OAC$  zeigt, dass dieselbe bis zur Stelle  $A$  gerade verläuft, d. h. dass bis zur Spannung, welche dem Punkte  $A$  entspricht, Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung besteht. Der Höhenabstand  $\overline{A_2A}$  des Punktes  $A$  über der Achse  $OY$  misst demnach die Proportionalitätsgrenze (§ 2) für den vorliegenden Kupferstab. Bei Spannungen über derselben wachsen die Dehnungen rascher. Dementsprechend muss der in § 2 als Mass der Dehnung aufgestellte

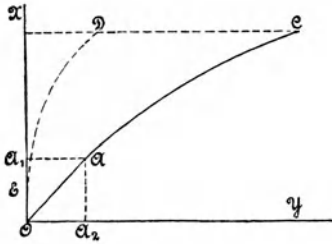


Fig. 6.

Dehnungscoefficient anfangs unveränderlich sein und später zunehmen. Thatsächlich findet sich je mit  $\sigma=0$  als Ausgangspunkt

$$\begin{aligned} \text{bei } \sigma = 100 \text{ kg } \alpha &= \frac{0,00091}{10.100} = 0,00000091 = \sim \frac{1}{1100000} \\ \text{" } \sigma = 200 \text{ " } \alpha &= \frac{0,00182}{10.200} = 0,00000091 = \sim \frac{1}{1100000} \\ \text{" } \sigma = 300 \text{ " } \alpha &= \frac{0,00293}{10.300} = 0,000000977 = \sim \frac{1}{1024000} \\ \text{" } \sigma = 400 \text{ " } \alpha &= \frac{0,00434}{10.400} = 0,000001085 = \sim \frac{1}{922000} \\ \text{" } \sigma = 600 \text{ " } \alpha &= \frac{0,00852}{10.600} = 0,00000142 = \sim \frac{1}{704000} \end{aligned}$$

Die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen ist demnach bei  $\sigma=200$  kg noch vorhanden, bei  $\sigma=300$  kg jedoch nicht mehr; die Proportionalitätsgrenze liegt also zwischen 200 und 300 kg. Die Darstellung in Fig. 6 ergibt sie nur wenig oberhalb  $\sigma=200$  kg. In je kleineren Absätzen man bei den Versuchen die

Belastungen wachsen lässt und je feinere Messwerkzeuge verwendet werden, um so genauer kann dieser Grenzwert festgelegt werden.

Was die Linie  $OED$  der Dehnungsreste anbelangt, so zeigt sich, dass sie zu Anfang — etwa bis in die Gegend des Punktes  $E$  — vollständig mit der Achse  $OX$  zusammenfällt, sich jedoch bald von dieser loslöst und nach der Achse der Dehnungen  $OY$  hin krümmt. Das vorliegende Kupfermaterial in dem Zustande, in welchem es sich befindet, erweist sich demnach als vollständig elastisch nur für kleine Spannungen, etwa bis gegen den Punkt  $E$  hin.

Die Linie der Dehnungsreste kann insofern von praktischer Wichtigkeit erscheinen, als sie Auskunft darüber giebt, welche bleibende Dehnung bei einer bestimmten Inanspruchnahme des Körpers zu erwarten ist<sup>1)</sup>. Zu diesem Zwecke liesse sich in ganz

<sup>1)</sup> In der Regel muss von den Konstruktionen gefordert werden, dass bleibende Formänderungen so gut wie nicht auftreten oder wenigstens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Dementsprechend kann man in der Linie der Dehnungsreste einen Punkt, den wir  $Z$  nennen wollen, annehmen, bis zu welchem hin die bleibenden Dehnungen als verschwindend oder doch genügend klein erscheinen; man erhält dadurch in dem zugehörigen Höhenabstand einen Spannungsgrenzwert, unterhalb dessen die bleibenden Dehnungen vernachlässigbar sind. Diese Spannung kann in Uebereinstimmung mit bisheriger Auffassung als Elasticitätsgrenze bezeichnet werden.

Wie klar ersichtlich, ist der Punkt  $Z$  nicht durch die Natur des Materials allein bestimmt. Diese setzt nur seinen geometrischen Ort — die Linie der Dehnungsreste — fest; seine Lage auf dieser Linie erscheint, sofern die Dehnungsreste nicht verschwindend klein sind, zu einem bedeutenden Theile von dem persönlichen Ermessen desjenigen abhängig, der über die höchstens noch für zulässig erachtete Grösse des Dehnungsrestes zu entscheiden hat. Dass hierbei auch der besondere Zweck des Gegenstandes, um den es sich handelt, einflussnehmend auftreten kann, ist selbstverständlich.

Die Vermengung der Elasticitätsgrenze mit der Proportionalitätsgrenze, indem man ausspricht: die Elasticitätsgrenze ist diejenige Spannung, bis zu welcher die Dehnungen nach dem Entlasten vollständig oder doch nahezu ganz wieder verschwinden und ferner, dass innerhalb der Elasticitätsgrenze Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bestehe, erscheint mindestens im Allgemeinen unzulässig. Sie läuft in nicht wenigen Fällen darauf hinaus, dass durch das mehr oder minder willkürliche Festlegen des oben genannten Punktes  $Z$  auf der Linie der Dehnungsreste gleichzeitig der Linie der Gesammtdehnungen vorgeschrieben wird, auf welche Strecke sie mit einer Geraden zusammenzufallen hat, oder dass dem Punkte  $Z$  der Dehnungsrest-Linie dieselbe Ordinate aufgezwungen wird, welche der Punkt  $A$  der Curve der Gesammtdehnungen besitzt. Dazu kommt, dass die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen überhaupt nicht bei allen Stoffen vorhanden ist, so z. B. nicht bei dem für den Maschinenbau so wichtigen Gusseisen.

gleicher Weise, wie dies in § 2 für die Gesamtdéhnung geschehen ist, eine Masszahl für den Déhnungsrest feststellen.

Auf dem gleichen Wege könnte eine Masszahl für die Federung gewonnen werden, wie dies auch thatsächlich in gewissen Fällen geschieht.

### § 5. Einfluss der Zeit. Elastische Nachwirkung.

Wie in § 4 hervorgehoben, wohnt jedem Körper — allerdings in verschiedenem Grade — die Eigenschaft inne, unter der Einwirkung äusserer Kräfte eine Aenderung der Gestalt zu erfahren und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder weniger vollständig wieder zu verlieren. Eine klar zu Tage liegende Folge dieser Eigenschaft ist es, dass der Körper bei plötzlicher Einwirkung der Kräfte oder bei plötzlicher Entlastung in Schwingungen versetzt wird. Aus diesem Zustande geht er, indem die Spannungen kleiner und kleiner werden, nach mehr oder minder langer Zeit in den Ruhestand über.

Aber auch dann, wenn die Inanspruchnahme oder die Entlastung des Körpers allmählich erfolgt, wenn also derartige Schwingungen nicht beobachtet werden, erweist sich die Formänderung im Allgemeinen nicht unabhängig von der Zeit. Die durch eine bestimmte Belastung erzeugbare Formänderung bedarf zu ihrer Ausbildung einer gewissen, zuweilen kurzen, unter Umständen aber auch sehr langen Zeit. Beispielsweise wird ein Stab aus hartem Werkzeugstahl schon unmittelbar nach allmählich erfolgter Belastung die überhaupt durch diese erreichbare Déhnung aufweisen, während ein belasteter Lederriemen nach Monaten, ja selbst nach Jahren, noch Längenzunahmen, wenn auch immer kleiner werdende, zeigt. In Fällen letzterer Art führt die Zeit asymptotisch zum Endzustand.

Ganz das Entsprechende gilt hinsichtlich der Entlastung: der allmählich entlastete Stab nähert sich dem ursprünglichen Zustande — je nach der Art des Materials — mit verschiedener Geschwindigkeit, um so langsamer, je grösser die erlittene Formänderung war und je länger sie angedauert hatte.

Diese Erscheinung der allmählichen Ausbildung und der allmählichen Rückbildung der Formänderungen wird elastische Nachwirkung genannt. Sie beeinträchtigt die Genauigkeit der

Beobachtungen bei Versuchen zur Bestimmung der Formänderungen mehr oder minder. Namentlich bei wechselnden Belastungen kann dieselbe zu eigenthümlichen Abweichungen führen, entsprechend einem gleichzeitigen, beiderseits mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden Verlaufe entgegengesetzter Aenderungen.

Dieser Einfluss der Zeit auf die Formänderungen, wie auch auf die Festigkeit<sup>1)</sup> des Stoffes macht es nothwendig, dass im Allgemeinen den Ergebnissen von Versuchen auf diesem Gebiete die erforderlichen Angaben über die Zeit beigelegt werden.

## I. Zug.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt, und welche diese zu verlängern strebt.

### § 6. Gleichungen der Zugelasticität und Zugfestigkeit.

1. Es bedeute für den **prismatischen Stab**

$P$  die ziehende Kraft,

$f$  die Grösse des ursprünglichen Stabquerschnittes,

$l$  die ursprüngliche Länge des Stabes,

$\lambda$  die Verlängerung, welche der Stab durch die Einwirkung der Kraft  $P$  erfährt,

$\epsilon = \frac{\lambda}{l}$  die Dehnung (§ 2),

$\alpha$  den Dehnungscoefficienten (§ 2),

$\sigma$  die Spannung, welche durch die Belastung  $P$  hervorgerufen wird, und die mit der Dehnung  $\epsilon$  verknüpft ist, bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt (§ 1),

$k_z$  die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

---

<sup>1)</sup> Beispielsweise werden Stäbe aus Schmiedeeisen, Lederriemen u. s. w., rasch zerrissen, einen grösseren Werth für die durch Gleichung 6 bestimmte Festigkeit liefern, als wenn das Zerreißen langsam erfolgt. Dagegen pflegen im letzteren Falle Dehnung und Quersammenziehung grösser auszufallen; die zur Ausbildung der Formänderungen gelassene Zeit ist eben bedeutender.



Dann ist nach Gl. 1:

$$P = \sigma f. \quad . . . . . 7)$$

$$P \leq k_z f. \quad . . . . . 8)$$

Unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungscoefficienten folgt:

$$\lambda = \alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f}. \quad . . . . . 9)$$

2. Diese zunächst nur für prismatische Stäbe entwickelten Beziehungen werden dann auch auf gerade stabförmige Körper von **veränderlichem Querschnitte** übertragen.

Es bezeichne, Fig. 7,

$P$  die Kraft, welche den Körper auf Zug in Anspruch nimmt,

$f$  die Grösse des beliebigen, um  $x$  von der einen Stirnfläche abstehenden Querschnittes,

$f_o$  den kleinsten Stabquerschnitt,

$l$  die Länge des Stabes vor der Dehnung,

$\lambda$  die Zunahme der Stablänge in Folge der Einwirkung der Kraft  $P$ ,

$\epsilon$  die Dehnung im Querschnitt  $f$ ,

$\sigma$  die Spannung im Querschnitt  $f = \frac{P}{f}$ ,

$\alpha$  den Dehnungscoefficienten,

$k_z$  die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

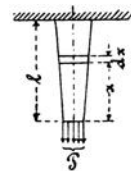


Fig. 7.

Dann gelten ausser der Gl. 7 die folgenden Beziehungen:

$$P \leq k_z f_o. \quad . . . . . 10)$$

$$\lambda = \int_o^l \epsilon dx = P \int_o^l \alpha \frac{dx}{f}. \quad . . . . . 11)$$

Ist  $\alpha$  unveränderlich, was bei Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze zutrifft, falls überhaupt dem in Frage stehenden Material eine solche eigenthümlich (§ 2), so darf  $\alpha$  vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Die Voraussetzungen, welche den vorstehenden Beziehungen 7 bis 11 zu Grunde liegen, sind in manchen Fällen der Verwendung

sehr unvollkommen erfüllt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand seien sie kurz zusammengestellt.

1. Die äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Zugkraft.
2. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
3. Der Einfluss des Eigengewichtes des Stabes kommt nicht in Betracht.
4. Die Dehnungen und die Spannungen sind in allen Punkten eines beliebigen Stabquerschnittes gleich gross und senkrecht zu letzterem gerichtet. (Gleichmässige Vertheilung der Zugkraft über den Querschnitt.)
5. Die Form des Querschnittes ist gleichgiltig.

Soll das eigene Gewicht  $G$  des Körpers berücksichtigt werden, so ergibt sich für den obersten Querschnitt von der Grösse  $f_1$  in Fig. 7:

$$\sigma = \frac{P + G}{f_1} \quad k_z \geq \frac{P + G}{f_1}.$$

Von dem Querschnitte  $f$  (im Abstände  $x$ ) bis zu dem um  $dx$  davon entfernten Querschnitt ändert sich die Gesamtzugkraft  $f\sigma$  um  $\gamma f dx$ , sofern  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Stabmaterials bedeutet. Hieraus folgt

$$d(f\sigma) = \gamma f dx.$$

Wird nun verlangt, die Stabquerschnitte derartig nach oben zunehmen zu lassen, dass  $\sigma$  für alle Querschnitte den gleichen Werth  $k_z$  hat, so ergibt sich:

$$k_z df = \gamma f dx$$

und hieraus:

$$\ln f = \frac{\gamma x}{k_z} + C_1.$$

Für  $x = 0$  muss sein  $f = P : k_z$ , d. h.

$$C_1 = \ln \frac{P}{k_z}.$$

Hiermit wird schliesslich in

$$f = \frac{P}{k_z} l^{\frac{\gamma x}{k_z}}$$

das Gesetz erhalten, nach dem der gezogene Stab als Körper gleichen Widerstandes zu formen wäre.

**§ 7. Mass der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung.**

Wie wir in § 1 b sahen, findet mit der Ausdehnung des nur in der Richtung der Achse gezogenen Stabes Fig. 2 gleichzeitig eine Zusammenziehung senkrecht zur Achse statt. Beträgt die durch Gl. 2 bestimmte Dehnung  $\epsilon$ , so wird die nach jeder zur Achse senkrechten Richtung eintretende Zusammenziehung, bezogen auf die Längeneinheit, d. i. die verhältnissmässige Zusammenziehung (im Falle § 1 b gleich  $\frac{\delta}{d}$ ) als gleich gross betrachtet und durch

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon}{m} \dots \dots \dots 12)$$

gemessen. Die Grösse  $m$  pflegt als eine zwischen 3 und 4 liegende Constante aufgefasst zu werden, so dass hiernach die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$  der Dehnung beträgt.

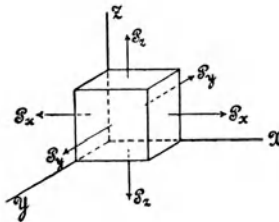


Fig. 8.

Der in Fig. 8 dargestellte Würfel, bestehend aus durchaus gleichartigem (isotropem) und Proportionalitätsgrenze (§ 2) besitzendem Material, werde innerhalb der letzteren zunächst nur in Richtung der  $x$ -Achse auf Zug (durch  $P_x, P_x$ ) in Anspruch genommen. Die in dieser Richtung eintretende Dehnung sei durch  $\epsilon_x$  und die hiermit verknüpfte Spannung durch  $\sigma_x = \frac{\epsilon_x}{\alpha}$  bezeichnet. Nach Massgabe des Erörterten beträgt dann:

in Richtung der  $y$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_x}{m}$ , die Spannung 0,

in Richtung der  $z$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_x}{m}$ , die Spannung 0.

Wird der Würfel nur in Richtung der  $y$ -Achse (von  $P_y, P_y$ ) gezogen und werden die hierdurch in dieser Richtung veranlasste Dehnung und Spannung  $\epsilon_y$ , beziehungsweise  $\sigma_y = \frac{\epsilon_y}{\alpha}$  genannt, so findet sich:

in Richtung der  $x$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_y}{m}$ , die Spannung 0,

in Richtung der  $z$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_y}{m}$ , die Spannung 0.

Wird schliesslich der Würfel nur in Richtung der  $z$ -Achse auf Zug in Anspruch genommen (durch  $P_z, P_z$ ) und die hiermit in dieser Richtung verknüpfte Dehnung durch  $\epsilon_z$ , die Spannung durch  $\sigma_z = \frac{\epsilon_z}{\alpha}$  gemessen, so müsste betragen:

in Richtung der  $x$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_z}{m}$ , die Spannung 0,

in Richtung der  $y$ -Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung  $\frac{\epsilon_z}{m}$ , die Spannung 0.

Wirken die Kräfte  $P_x P_x P_y P_y P_z P_z$  gleichzeitig, so beträgt die resultirende Dehnung

$$\left. \begin{array}{l} \text{in Richtung der } x\text{-Achse} \quad \epsilon_1 = \epsilon_x - \frac{\epsilon_y + \epsilon_z}{m} \\ \text{'' '' '' } y\text{-''} \quad \epsilon_2 = \epsilon_y - \frac{\epsilon_z + \epsilon_x}{m} \\ \text{'' '' '' } z\text{-''} \quad \epsilon_3 = \epsilon_z - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{m} \end{array} \right\} . 13)$$

woraus unter Berücksichtigung, dass

$$\epsilon_x = \alpha \sigma_x \quad \epsilon_y = \alpha \sigma_y \quad \epsilon_z = \alpha \sigma_z \quad . . 14)^1)$$

<sup>1)</sup> Besitzt das Material keine Proportionalitätsgrenze, so wird der Dehnungscoefficient  $\alpha$  nicht constant, sondern eine Funktion von  $\sigma$  oder  $\epsilon$  sein. Es würde dann heissen müssen, etwa:

folgt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) & \text{oder} & \quad \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \\ \varepsilon_2 &= \alpha \left( \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right) & \text{„} & \quad \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \\ \varepsilon_3 &= \alpha \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) & \text{„} & \quad \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \end{aligned} \right\} . 15)$$

Die Beziehungen 15 lehren, dass die Proportionalität, welche bei dem ausschliesslich in der Richtung seiner Achse gezogenen Stäbe nach Massgabe der Gleichungen 4 und 14 zwischen Dehnungen und Spannungen — unter der Voraussetzung, dass  $\alpha$  constant — vorhanden ist, zu bestehen aufhört, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse den Körper ergreifen. Die resultirende Dehnung wird durch solche Zugkräfte vermindert.

In Anbetracht, dass derartige Kräfte eine mehr oder minder grosse Hinderung der Zusammenziehung zur Folge haben, erkennen wir, dass Erschwerung oder theilweise Hinderung der Zusammenziehung (Contraction) des Stabes (senkrecht zu dessen Achse) die Dehnung (in Richtung der Achse) verringert und damit im Allgemeinen, wie Versuche nachweisen (§ 9 Ziff. 1), auch die Festigkeit erhöht.

### § 8. Zugproben.

Den Zugproben werden die Metalle, auf welche sich das Nachstehende zunächst nur bezieht, in Form von Rundstäben

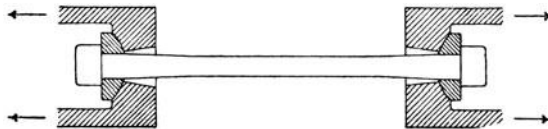


Fig. 9.

oder in Form von Flachstäben

$$\varepsilon_x = \alpha_1 \sigma_x \qquad \varepsilon_y = \alpha_2 \sigma_y \qquad \varepsilon_z = \alpha_3 \sigma_z .$$

Hierin müssen je nach der Verschiedenheit der Spannungen  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$  die Dehnungscoefficienten  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  verschieden grosse Werthe aufweisen.

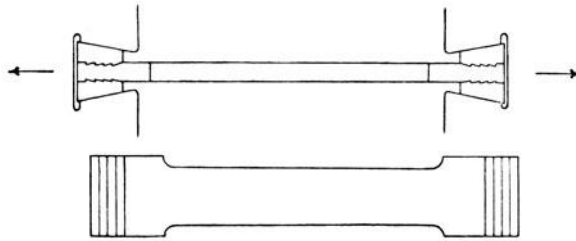


Fig. 10.

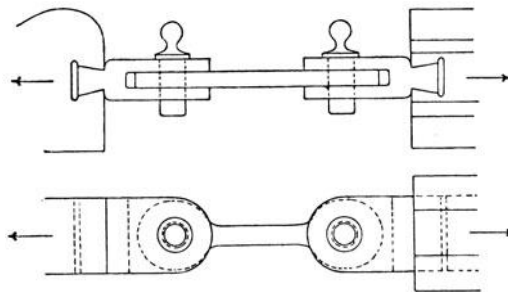


Fig. 11.

unterworfen.

Die zum Einspannen in die Prüfungsmaschine benutzten Vorrichtungen müssen so beschaffen sein, dass die Zugkraft möglichst gleichförmig über die Querschnitte des der Messung unterworfenen mittleren Stückes (von der Länge  $l$ ) des Probekörpers vertheilt wird. Dieser Bedingung lässt sich bei Rundstäben durch die Kugellagerung (Fig. 9), bei Flachstäben durch Befestigung mittelst Loch und Bolzen (Fig. 11), oder durch Einlegen der mit gefrästen Nuthen versehenen Enden in Gebisskeile (Fig. 10) entsprechen. Die Herstellung der Flachstäbe fordert jedoch unter allen Umständen besondere Sorgfalt, wenn der aufgestellten Bedingung genügt sein soll.

Eine zutreffende Vergleichung der Ergebnisse mehrerer Versuche setzt voraus, dass diese unter den gleichen Verhältnissen durchgeführt worden sind. Wie aus dem in (§ 9) und (§ 10) Erörterten hervorgeht, gehört hierzu, dass die Stäbe gleiche oder wenigstens geometrisch ähnliche Querschnitte besitzen und gleich lang den Versuchen unterworfen werden.

Die der Messung unterzogene Strecke  $l$  wird in der Regel zu 200 mm angenommen und das mittlere Stück um wenigstens 20 mm länger, d. h.  $l + 20$  prismatisch gehalten.

Bei der grossen Masse der Zugproben pflegt nur festgestellt zu werden:

- a) die Bruchbelastung  $P_{max}$  (§ 3) und damit die Zugfestigkeit  $K_z$  (§ 3),
- b) der Querschnitt  $f_b$  an der Bruchstelle (an der Stelle der Einschnürung, Fig. 5),
- c) die Länge  $l_b$ , welche das ursprünglich  $l$  lange Stabstück nach dem Zerreißen besitzt.

Die Beobachtung nach a liefert in

$$K_z = \frac{P_{max}}{f} \dots \dots \dots 6)$$

die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt (§ 3).

Die Ermittlung nach b ergibt in

$$\psi = 100 \frac{f' - f_b}{f} \dots \dots \dots 16)$$

die Verminderung des Querschnittes an der Bruchstelle in Procenten des ursprünglichen Querschnittes, die Bruchzusammenziehung oder Bruchkontraktion, oder kurz die Zusammenziehung, Einschnürung oder Kontraktion genannt. Klarer erscheint die Bezeichnung Querschnittsverminderung.

Die Feststellung nach c liefert in

$$\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l} \dots \dots \dots 17)$$

die Verlängerung der der Messung unterworfenen Stabstrecke in Procenten der ursprünglichen Länge, kurz die Dehnung genannt.

Wie wir in § 3 sahen, dehnt sich zunächst die ganze Stabstrecke mehr oder minder gleichmässig bis zum Eintritt der Bruchbelastung, dann folgt die Einschnürung des Stabes — falls eine solche überhaupt eintritt —, die mit einer verhältnissmässig grossen Ausdehnung an dieser besonderen Stelle verknüpft ist. Es setzt sich hiernach die durch Gl. 17 gemessene Dehnung im Allgemeinen zusammen: aus der Dehnung der ganzen Strecke bis zum Eintritt der Bruchbelastung und aus der Dehnung an der Einschnürungsstelle, vermindert um die Verkürzung, welche aus Anlass der mit dem Zerreißen erfolgten Entlastung des Stabes eintritt. Wird zunächst

angenommen, der Bruch erfolge in der Mitte der Strecke  $l$ , so er-  
giebt die Gl. 17 bei vorhandener Einschnürung einen um so grö-  
seren Werth für  $\varphi$ , je kleiner  $l$  ist. Im Allgemeinen gehört hier-  
nach zur Angabe von  $\varphi$  auch die Grösse von  $l$ . Geht der Bruch  
ausserhalb der Mitte vor sich — was in der Regel der Fall —,  
so wird  $\varphi$  um so kleiner ausfallen, je mehr die Bruchstelle an das  
Ende von  $l$  rückt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Diesen Uebelstand hat man durch folgende Vorschrift zu vermeiden  
gesucht:

Die Strecke  $l$  (Gebrauchslänge) ist von 10 zu 10 mm einzutheilen, Fig. 12  
(s. die untenstehenden Zahlen).

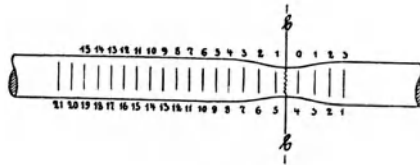


Fig. 12.

Es erfolge der Bruch im Querschnitt  $bb$ . Von der Bruchstelle ausgehend,  
werden zunächst die Teilstriche nach links und rechts hin neu bezeichnet, so,  
wie über der Figur eingeschrieben ist. Sodann wird links die Länge zwischen  
den Teilstrichen 1 bis 10 gemessen und zu ihr  $\bar{b}0 + \bar{b}1$  addirt; hierauf rechts  
die Entfernung der Teilstriche 03 bestimmt und zu ihr die von links zu  
entnehmende Strecke 3 bis 10 hinzugefügt. Die Summe der so erhaltenen  
beiden Grössen ergibt  $l_b$ . Hiernach ist

$$l_b = [\text{Länge zwischen den Teilstrichen 1 bis 10 (links vom Bruch)} + (\bar{b}0 + \bar{b}1)] \\ + [\text{Länge zwischen den Teilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch)} + \\ \text{Länge zwischen den Teilstrichen 3 bis 10 (links vom Bruch)}].$$

Würde im vorliegenden Falle die Länge  $l$  nicht 200 mm, sondern 100 mm  
betragen, so würde sein

$$l_b = [\text{Länge zwischen den Teilstrichen 1 bis 5 (links vom Bruch)} + (\bar{b}0 + \bar{b}1)] \\ + [\text{Länge zwischen den Teilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch)} + \\ \text{Länge zwischen den Teilstrichen 3 bis 5 (links vom Bruch)}].$$

Auf diese Weise hat man unter der Voraussetzung, dass die Längenänderun-  
gen zu beiden Seiten des Bruches einen symmetrischen Verlauf haben, den Stab  
nahezu so ausgemessen, als wenn der Bruch in der Mitte erfolgt wäre.

Im Falle sich der Stab an mehr als einer Stelle besonders stark zusammen-  
gezogen hat (vergl. die zweite Fussbemerkung S. 6), so verliert allerdings das  
angegebene Verfahren an Werth.

Die Eintheilung der Strecke  $l$ , wie auch die Bestimmung von  $l_b$  nach dem  
Bruche sind immer auf zwei entgegengesetzten Seiten des Stabes vorzunehmen.

Um die Veränderlichkeit der Dehnung, überhaupt die Formänderung zu  
zeigen, welche ein der Zugprobe unterworfenen Flachstab aufweist, wurde die in



Ein solches Mass kann nicht als rationelles bezeichnet werden. Trotzdem ist es heute noch üblich, die Dehnung in dieser Weise zu messen und die erhaltene Grösse bei der Beurtheilung der Güte des Materials zu Grunde zu legen<sup>2)</sup>. Richtiger würde es sein, wie auch von Hartig vorgeschlagen wurde, diejenige Dehnung zu bestimmen, welche im Augenblicke des Auftretens des grössten Zugwiderstandes oder unmittelbar vor Beginn der Einschnürung vorhanden ist. Es wäre dies die Grösse  $OE_2$  in Fig. 4. Da es mit den üblichen Prüfungsmaschinen schwer hält oder wenigstens umständlich ist, die Dehnung in dem bezeichneten Augenblick genau festzustellen, so fehlt zunächst noch alle Aussicht, dass diese

Fig. 13 (Taf. I) wiedergegebene Zusammenstellung gefertigt. Auf zwei nach Fig. 10 hergestellten Flachstäben aus Flussstahl von genau 60 mm Breite und 12 mm Stärke waren durch Längs- und Querlinien im Abstände von 10 mm Quadrate von 10 mm Seitenlänge gezeichnet worden. Alsdann wurde der eine Stab der Zugprobe unterworfen. Derselbe erfuhr hierbei die aus Fig. 13 deutlich ersichtliche Formänderung. Der Riss erfolgte an einer Stelle, welche durch eine der eingerissenen Querlinien etwas verletzt worden war.

Es betrug

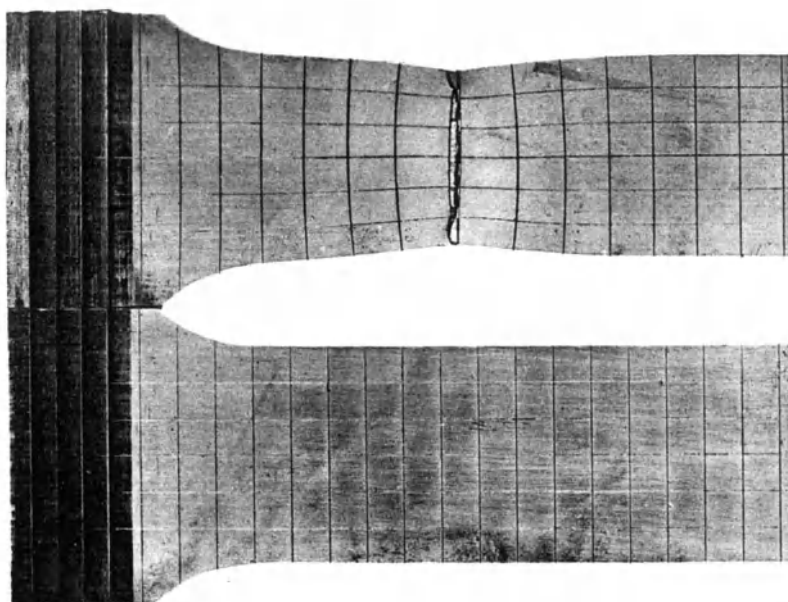
die Bruchbelastung $P_{max}$ . . . . .	37460 kg,
der ursprüngliche Querschnitt $f$ . . . . .	$6,1,2 = 7,2$ qcm,
der Bruchquerschnitt $f_b$ . . . . .	$4,82 \cdot 0,94 = 4,53$ qcm,
die Dehnung auf 100 mm . . . . .	27,5 mm.

Demnach

die Zugfestigkeit $K_z$ . . . . .	$\frac{37460}{7,2} = 5203$ kg,
die Querschnittsverminderung $\psi$ . . . . .	$100 \frac{7,2 - 4,53}{7,2} = 37$ %,
die Dehnung $\varphi$ . . . . .	$100 \frac{127,5 - 100}{100} = 27,5$ %.

<sup>2)</sup> Die Beschaffenheit des Materials wird im Allgemeinen beurtheilt nach den für  $K_z$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  erhaltenen Werthen. In neuerer Zeit neigt man dazu, dem Inhalt der Fläche  $OBCEFF_2O$ , Fig. 4, oder richtiger demjenigen der Fläche  $OBCEE_2O$  besonderes Gewicht hierbei einzuräumen. Die zuerst genannte Fläche stellt die mechanische Arbeit dar, welche die ZerreiBung des Stabes fordert, während die zweite Fläche nur diejenige Arbeit misst, welche das ganze Stabstück bis zum Beginn der Einschnürung zu seiner Ausdehnung verlangt (vergl. die Fussbemerkungen zu § 3). Von da an bis zum Bruche wird mechanische Arbeit vorzugsweise nur von demjenigen Material verbraucht, welches an der sich zusammenziehenden Stelle vorhanden ist. Die Fläche  $OBCEFF_2O$  kann als Arbeitsdiagramm bis zum Bruche, die Fläche  $OBCEE_2O$  als Arbeitsdiagramm bis zur Einschnürung oder bis zum Eintritt der Bruchbelastung bezeichnet werden.

Fig. 13.



Grösse als Mass der Dehnung allgemein angenommen werden wird. Fälle, wie sie Verfasser zu verzeichnen hat, dass der gezogene Stab sich an einer Stelle einschnürt, hierauf eine noch weiter wachsende Belastung verträgt, dann an einer zweiten Stelle eine Einschnürung erfährt und in dieser bei sinkender Belastung zerreisst, würden verlangen, dass das Dehnungsmass unmittelbar vor Beginn der ersten Einschnürung genommen wird.

Ueber die Abhängigkeit der Dehnung  $\varphi$  von den Abmessungen, insbesondere vom Durchmesser bei gleichen Werthen von  $l$  u. s. w. s. § 9.

Bei umfassenden Versuchen tritt zu den oben unter a bis c angegebenen Ermittlungen noch die Bestimmung

- d) des Dehnungscoefficienten und der Proportionalitätsgrenze (§ 2),
- e) der Fliessgrenze (§ 2),
- f) der Dehnungsreste (§ 4)

und unter Umständen die Feststellung noch anderer Grössen.

### § 9. Einfluss der Form des Stabes.

Die Aufstellungen in § 6 enthalten nur die Grösse  $j'$  des Stabquerschnittes; die Form desselben wäre hiernach vollständig gleichgiltig. Thatsächlich ist sie es jedoch nicht, wenn auch ihr Einfluss nicht bedeutend erscheint. Sein Vorhandensein erhellt, abgesehen von Versuchsergebnissen, schon aus folgender Erwägung.

Den Entwicklungen der üblichen Gleichungen für die Zugelastizität und Zugfestigkeit, wie sie in § 6 und § 8 aufgeführt sind, liegt zunächst die Voraussetzung zu Grunde, dass die Dehnungen und Spannungen in allen Punkten des Stabquerschnittes gleich gross sind, dass sich alle Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, ganz gleich verhalten und nicht gegenseitig auf einander einwirken. Es ändert an jenen Gleichungen nichts, ob eine Kraft  $P$  — gleichmässig vertheilt — getragen wird von einem Stab, dessen Querschnitt 10 qcm beträgt, oder von 1000 Stäben von je 1 qmm Querschnitt. In dem einen Falle ist  $j' = 10$  qcm, in dem anderen  $j' = 1000 \cdot 0,01 = 10$  qcm, d. h. in beiden Fällen gleich. In Wirklichkeit aber — immer gleichmässige Vertheilung der Last und gleiches Material vorausgesetzt — werden sich die 1000 Metallfäden von je 1 qmm Querschnitt unabhängig

von einander (senkrecht zur Achse) zusammenziehen können; sie werden, wenn sie sich vorher gerade berührten, die Berührung in Folge der mit der Dehnung (Belastung) verknüpften Zusammenziehung aufgeben. Die einzelnen Fasern des Stabes von 10 qcm Querschnitt jedoch besitzen eine solche Unabhängigkeit nicht; sie wirken senkrecht zur Achse auf einander ein. Das Ergebniss dieser Einwirkung aber muss ein verschiedenes sein, je nach der Form des Querschnitts, es wird ein anderes sein bei einem kreisförmigen, als bei einem langgestreckt rechteckigen oder einem I-förmigen, es wird ein anderes sein bei einem dünnwandigen Hohlcyliner, als bei einem Vollcyliner u. s. w. Dass aber die bezeichnete seitliche Einwirkung Dehnung und Festigkeit beeinflusst, ergibt sich aus den Betrachtungen, welche in § 7 angestellt wurden.

Derselbe Gedankengang führt zu dem Ergebniss, dass auch die Grösse der Abmessungen bei einer und derselben Querschnittsform — streng genommen — nicht ganz gleichgiltig sein wird.

### Versuchsergebnisse.

#### 1. Einfluss der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist.

Kirkaldy stellte Zerreiassungsversuche mit Rundeisenstäben nach Fig. 14, 15 und 16 an. Die Stäbe Fig. 15 sind entstanden aus Cylindern Fig. 14 je durch Eindrehen einer schmalen Nuthe auf den Durchmesser  $d$ , die Stäbe Fig. 16 aus solchen Fig. 14 durch Abdrehen auf den Durchmesser  $d$ .



Fig. 14.

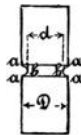


Fig. 15.

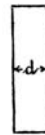


Fig. 16.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind umstehend zusammengestellt.

Sie zeigen die für den ersten Augenblick schlagende Eigenthümlichkeit, dass die Festigkeit bei den nach Fig. 15 eingedrehten Stäben weit grösser ist, als bei den nicht eingedrehten. Versuche, welche in Woolwich mit Stahlstangen (von  $1\frac{3}{16}$  engl. Stärke und mit einer den Durchmesser auf  $\frac{3}{4}$  ver-

mindernden Ausrundung versehen) angestellt worden sind, sowie Versuche von Vickers u. A. bestätigen das von Kirkaldy Gefundene.

Material	Form des Stabes	Zugfestigkeit $K_z$ (Gl. 6)	Querschnitts- verminderung $\psi$ (Gl. 16)
Low Moor. Walzeisen, härteste Sorte	Fig. 14, $d = 2,54$ cm	4560 kg	51,00 %
	„ 15, $d = 1,85$ „	6420 „	8,03 „
	„ 16, $d = 1,85$ „	4920 „	49,23 „
Govan. Geschmiedetes Walzeisen	Fig. 14, $d = 2,54$ cm	5025 kg	40,71 %
	„ 15, $d = 1,78$ „	6910 „	13,77 „
	„ 16, $d = 1,78$ „	5020 „	36,02 „
Govan. Walzeisen	Fig. 14, $d = 2,59$ cm	4040 kg	47,38 %
	„ 15, $d = 1,80$ „	4950 „	21,27 „
	„ 16, $d = 1,80$ „	4360 „	46,91 „

Die Erklärung ergibt sich unmittelbar aus dem in § 7 Gesagten. Unter Einwirkung der Belastung dehnen sich die Fasern, welche durch den kleinsten Querschnitt  $bb$ , Fig. 15 gehen; gleichzeitig tritt eine Zusammenziehung senkrecht hierzu ein. Das bei  $aa$  an den kleinsten Querschnitt sich anschliessende Material setzt dieser Zusammenziehung Widerstand entgegen, d. h. übt in senkrechter Richtung zur Achse des Stabes Zugspannungen auf die durch den kleinsten Querschnitt gehenden und gespannten Längsfasern aus, welche Zugspannungen, wie die Gl. 15 in § 7 lehren, eine Verminderung der Längsdehnung zur Folge haben. Demnach greift das bei  $aa$  an den Querschnitt  $\frac{\pi}{4} d^2$  anschliessende Material, indem es der Ausbildung der Zusammenziehung, sowie der Dehnung hinderlich in den Weg tritt, gewissermassen unterstützend gegenüber dem kleinsten Querschnitt ein und erhöht dessen Festigkeit. Dass die Zusammenziehung gehindert wurde, darüber geben die Werthe für  $\psi$  deutlich Auskunft.

Hieraus folgt im Allgemeinen für die genannten Materialien: Erschwerung oder theilweise Hinderung der Zusammenziehung senkrecht zur Stabachse (Querschnittsverminderung) verringert die Dehnung in Richtung der letzteren und erhöht die Zugfestigkeit.

Im Falle scharfer Eindrechung d. h. mit scharf einspringender Ecke, Fig. 17, pflegt jedenfalls bei Materialien wie Flusseisen oder Flussstahl die Festigkeit nicht zuzunehmen. Der Grund dieses ab-

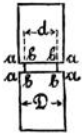


Fig. 17.

weichenden Verhaltens dürfte — abgesehen von der Wahrscheinlichkeit einer Verletzung der Umfangsfasern bei Herstellung der scharfen Ecke — in Folgendem zu suchen sein. Denken wir uns den Cylinder  $bbbb$ , Fig. 17, vom Durchmesser  $d$  und der Höhe  $h$ , in Folge der Belastung um eine gewisse, natürlich sehr kleine Grösse  $x$  gedehnt, so wird dies für die Umfangsfasern einer verhältniss-

mässigen Dehnung  $\frac{x}{l}$  entsprechen, da ein Inmitleidenschaftziehen der über bzw. unter der Ringfläche  $ab$ ,  $ab$  gelegenen Strecken der Umfangsfaser in Folge der plötzlichen Querschnittsvergrößerung nur in ganz untergeordnetem Masse eintreten kann. Von den inneren Fasern dagegen wird sich eine weit grössere Strecke als  $h$  an der Ausdehnung betheiligen können, sodass die verhältnissmässige Dehnung nach dem Innern rasch abnimmt. Dementsprechend vermindert sich auch die Spannung nach dem Innern des Cylinders  $bbbb$ ; die Spannungsvertheilung ist eine ungleichmässige, von innen nach aussen wachsende. Daher reissen die überlasteten äusseren Fasern zuerst und, nachdem der Bruch eingeleitet ist, folgen die inneren, ursprünglich weniger angestregten, nach.

Bei ausgerundeten Ecken, Fig. 15, kann sich die Dehnung der Fasern des Umfanges  $\pi d$  in Folge der allmählichen Querschnittsänderung mehr in das ober- und unterhalb der Ringflächen  $ab$  gelegene Material erstrecken, wodurch eine gleichmässigerer Spannungsvertheilung über den Querschnitt  $\frac{\pi}{4} d^2$  herbeigeführt wird.

Bei gewalztem Schweisseisen pflegen sich derartige scharf einspringende Ecken weniger schroff geltend zu machen als bei Flusseisen oder Flussstahl, da dort die ausgeprägte Faserung, sowie unganze Stellen die Betheiligung ober- und unterhalb der Ringflächen  $ab$ ,  $ab$  gelegener Strecken der Fasern des Umfanges  $\pi d$  an der Dehnung leichter gestatten.

Der oben erörterte Einfluss der gehinderten Zusammenziehung auf Dehnung und Festigkeit ist auch der Grund, weshalb die der Messung unterworfenen Strecke  $l$  der Probestäbe — Fig. 9 bis 11

in § 8 — kürzer gewählt werden muss, als der prismatische Theil derselben. Man hat sich eben zu sichern, dass ein solcher Einfluss innerhalb der der Beobachtung unterworfenen Strecke nicht mehr Geltung erlangen kann.

**2. Einfluss der Länge und des Durchmessers.**

In Bezug hierauf, sowie hinsichtlich des Einflusses der Querschnittsform hat der Chefingenieur Barba in Creusot umfassende Versuche anstellen lassen, die in der Hauptsache von Coureau und Biguet durchgeführt wurden (Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civiles 1880 S. 682—714). Die wesentlichen Ergebnisse finden sich im Folgenden wiedergegeben.

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Durchmesser  $d$ , ebenso sind die der Messung unterworfenen Stabstrecken  $l$  verschieden lang und zwar derart, dass  $l:d$  constant.

Die Versuchsstäbe wurden aus gleich starken Stangen herausgearbeitet.

Gleiche Dauer der einzelnen Versuche wurde mit Sorgfalt erstrebt.

Die angegebenen Werthe sind je die Durchschnittszahlen aus einer Versuchsreihe.

**Rundstäbe aus Flusseisen.**

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser $d$ cm	Stabstrecke $l$ cm	Verhältniss $l:d$	Festigkeit $K_z$ kg	Querschnittsverminderung $\psi = 100 \frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b-l$ cm	Dehnung $\epsilon = 100 \frac{l_b-l}{l}$ %
1	0,690	5,0	7,24	4220	69,3	1,64	32,8
2	1,035	7,5		4200	69,0	2,49	33,2
3	1,380	10,0		4210	69,7	3,30	33,0
4	1,725	12,5		4170	68,6	4,18	33,5
5	2,070	15,0		4160	69,2	5,08	33,6
6	2,415	17,5		4090	69,7	5,80	33,2
7	2,760	20,0		4000	68,8	6,60	33,0
8	3,105	22,5		3960	69,5	7,65	34,0
Durchschnitt				4130	69,2		33,3

## Rundstäbe aus Flussstahl.

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser $d$ cm	Stabstrecke $l$ cm	Verhältniss $l:d$	Festigkeit $K_z$ kg	Querschnittsverminderung $\psi = 100 \frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b-l$ cm	Dehnung $\varphi = 100 \frac{l_b-l}{l}$ %
1	0,690	5,0	7,24	6480	36,5	1,00	20,0
2	1,035	7,5		6490	38,0	1,41	18,8
3	1,380	10,0		6390	37,4	1,82	18,2
4	1,725	12,5		6330	38,4	2,27	18,1
5	2,070	15,0		6350	31,8	2,70	18,0
6	2,415	17,5		6200	35,8	3,17	18,1
7	2,760	20,0		6320	34,4	3,90	19,5
8	3,105	22,5			nicht ermittelt		
Durchschnitt				6360	36,1		18,6

Die Versuchsergebnisse zeigen:

- a) eine, wenn auch nicht bedeutende Abnahme der Festigkeit mit wachsendem Durchmesser,
- $\beta$ ) Unabhängigkeit der Querschnittsverminderung  $\psi$  vom Durchmesser,
- $\gamma$ ) Unabhängigkeit der Dehnung  $\varphi$  vom Durchmesser  $d$  und der Länge  $l$ , sofern das Verhältniss  $l:d$  das gleiche bleibt.

B. Die Versuchsstäbe besitzen verschiedene Durchmesser, dagegen sind die der Messung zu Grunde gelegten Stabstrecken gleich lang.

Nummer des Versuchs	Durchmesser $d$ cm	Stabstrecke $l$ cm	Festigkeit $K_z$ kg	Verlängerung $l_b-l$ cm	Dehnung $\varphi = 100 \frac{l_b-l}{l}$ %	Bemerkungen
1	2,0	10,0	3700	3,75	37,5	Fluss- eisen
2	1,0	10,0	3690	3,05	30,2	
3	0,5	10,0	3760	2,50	25,0	
1	2,0	10,0	5930	2,59	25,9	Fluss- stahl
2	1,0	10,0	5940	2,10	21,0	
3	0,5	10,0	6000	1,70	17,0	



Diese Versuchsergebnisse lehren, dass die Dehnung  $\varphi$  bei gleicher Grösse der Stabstrecke, welche der Bestimmung zu Grunde gelegt wird, in ziemlichem Masse abhängt von dem Durchmesser  $d$  und zwar derart, dass sie wächst mit zunehmendem Durchmesser.

Nach dem Ergebniss  $A\gamma$  entfällt diese Abhängigkeit bei gleichem Verhältniss  $l:d$ .

Hieraus folgt, dass bei Forderung einer bestimmten Dehnung  $\varphi$  für eine bestimmte Stablänge  $l$  ein gewisser Durchmesser  $d$  vorgeschrieben sein muss.

### 3. Einfluss der Querschnittsform.

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Querschnittsform, jedoch gleichgrosse Querschnittsfläche.

Die angegebenen Werthe sind die Mittel aus je einer Reihe von Versuchen mit derselben Querschnittsform.

Querschnittsform	Festigkeit $K_z$ kg	Querschnittsverminderung $\psi = 100 \frac{f - f_b}{f}$ %	Dehnung $\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l}$ %
Rundstab . . .	4150	58,3	32,7
Quadratstab . .	4170	57,3	33,7
Flachstab . . .	3960	56,5	36,0

Hieraus erhellt, dass rechteckige Querschnitte bei gleicher Grösse bedeutendere Dehnung ergeben, als Rundstäbe.

B. Aus Versuchen mit 1 cm starken Flachstäben ergab sich

bei der Breite von            1    2    3    4    5    6    7    8 cm  
die Dehnung auf 10 cm zu 31,0 34,0 35,0 37,2 39,0 40,8 38,5 34,5 %,  
d. h. am grössten bei dem Querschnittsverhältniss 1:6.

Die Festigkeit betrug durchschnittlich 3870 kg.

## C. Die Flachstäbe haben verschiedene Breite.

Nummer des Versuchs	Stärke $a$ cm	Breite $b$ cm	Verhält- niss $b : a$	Festigkeit $K_z$ kg	Dehnung $\epsilon = 100 \frac{l_b - l}{l}$ %	Bemer- kungen
1	1,015	2,000	1,98	4270	29,5	Fluss- eisen
2	0,995	5,985	6,02	4130	35,0	
3	1,017	9,980	9,81	4020	40,0	
1	1,310	2,000	1,53	2400	51,5	Kupfer
2	1,308	5,980	4,57	2380	55,2	
3	1,313	9,990	7,61	2315	59,0	

Nach diesen Versuchen nimmt die Festigkeit mit der Breite etwas ab (vergl. auch A).

Hierbei ist nicht ausser Acht zu lassen, dass dieser Einfluss möglicher Weise von der Einspannung herrühren kann, und dass es überhaupt nicht leicht ist, bei verhältnissmässig breiten Stäben eine gleichmässige Vertheilung der Zugkraft über den Querschnitt zu sichern.

Wir schliessen aus den im Vorstehenden niedergelegten Versuchsergebnissen, dass Ergebnisse von Zugversuchen, streng genommen, nur dann unmittelbar verglichen werden können, wenn die Versuchsstäbe, sofern sie nicht dieselben Abmessungen besitzen, wenigstens geometrisch ähnlich sind.

Dieser Satz gilt mit der in (§ 10) ausgesprochenen Ergänzung dahingehend, dass auch die Geschwindigkeiten, mit welchen die Versuche durchzuführen sind, übereinstimmen müssen, gleichfalls für alle anderen Beanspruchungsarten.

#### § 10. Versuchsergebnisse über den Einfluss der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung.

Von neueren Untersuchungen, welche den schon längst bekannten, auch in § 5 bereits erörterten Einfluss der Zeitdauer des Versuchs nachweisen, seien die folgenden angeführt:

Versuchsreihen mit Rundstäben von 1,6 cm Stärke aus  
Flusseisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit $K_z$	Dehnung, gemessen auf 10 cm
2,5 Minuten	3935 kg	32 ‰
75 „	3720 „	34 „

(Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des  
Ingénieurs Civils, 1880, S. 710.)

Feinkorneisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit $K_z$	Dehnung $\varphi$	Festigkeit $K_z$	Dehnung $\varphi$
Rasch zerrissen	4990 kg	22 ‰	4340 kg	23,3 ‰
Langsam zerrissen	4493 „	25,2 „	3770 „	23,8 „

Gewöhnliches Puddeleisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit $K_z$	Dehnung $\varphi$
Rasch zerrissen	3720 kg	30,4 ‰
Langsam zerrissen	3516 „	35,23 „

Harter Wolframstahl.

Dauer des Versuchs	Festigkeit $K_z$	Festigkeit $K_z$	Festigkeit $K_z$
Rasch zerrissen	14 350 kg	13 270 kg	11 359 kg
Langsam zerrissen	12 300 „	11 339 „	10 230 „

Dehnung 1 bis 1,5 ‰.

(Goedicke, Oest. Zeitschrift für Berg- u. Hüttenwesen 1883, S. 578.)

Hiernach ergeben rascher durchgeführte Versuche eine grössere Festigkeit, sowie eine kleinere Dehnung und (nach Versuchen des Verfassers) in der Regel auch eine kleinere Querschnittsverminderung. Dadurch erklärt es sich, dass die Prüfung eines und desselben Materials, welche an der einen Stelle sehr rasch durchgeführt worden ist, daselbst ungenügende Dehnung und Querschnittsverminderung ergibt, an einer zweiten Stelle langsamer vorgenommen, die bedungene Dehnung und Querschnittsverminderung ausweist.

Leder.

Dauer des Versuchs	Festigkeit $K_z$
1 Stunde 26 Minuten	301 kg
166 Tage	200 „

(George Leloutre, Les transmissions par courroies, cordes et cables métalliques, Paris 1884, oder des Verfassers Bericht hierüber in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1884, S. 871. Dasselbst finden sich auch Mittheilungen über das asymptotische Wachstum der Verlängerung mit der Dauer der Belastung, sowie über das dementsprechende Verhalten bei Entlastung.)

### Hanfseile.

Die ursprünglich 750 mm lange, der Beobachtung unterworfenen Strecke eines 55 mm starken Seiles aus badischem Schleisshanf, welches nach und nach bis zu 500 kg belastet worden ist, zeigt, nachdem diese Belastung 10 Minuten gewirkt hat, die Länge 788,4 mm. Das Seil bleibt längere Zeit hindurch derselben Anstrengung ausgesetzt. Es beträgt nach 10 Minuten

	1	7	26	50	82	120	Std.
die Seillänge	788,4	789,7	791,8	793,2	794,5	795,8	796,5 mm

entsprechend einer weiteren Verlängerung um

	0	1,3	3,4	4,8	6,1	7,4	8,1	„
--	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Hierauf wurde das Seil bis auf 100 kg entlastet.

Es beträgt unmittelbar nach der Entlastung, nach 34 Stunden

die Seillänge	791,9 mm	790,8 mm
---------------	----------	----------

entsprechend einer Verkürzung um

	4,6	„	5,7	„
--	-----	---	-----	---

(Des Verfassers Versuche über die Elasticität von Treibriemen und Treibseilen in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 u. f.)

In sehr anschaulicher Weise lässt sich der Einfluss der Geschwindigkeit, mit welcher das Zerreißen erfolgt, zeigen durch Verwendung von selbstzeichnenden Festigkeitsmassen mit Federbelastung.

(Hugo Fischer, Dingler's polyt. Journal 1884, Bd. 251, S. 337 u. f.)

Nach Massgabe des im Vorstehenden enthaltenen Materials setzt die unmittelbare Vergleichbarkeit der Versuchsergebnisse voraus, dass auch die Geschwindigkeit bei der Durchführung der Versuche entsprechend gewesen sein muss. (Vergl. Schluss von § 9.)

Ueber den Einfluss wiederholter Belastungen, der mechanischen Bearbeitung, der Temperatur u. s. w. wird später das Erforderliche bemerkt werden.

## II. Druck.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt und welche diese zu verkürzen strebt. Die Querschnittsabmessungen werden als so bedeutend vorausgesetzt, dass der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.

### § 11. Formänderung. Druckfestigkeit.

Der Cylinder Fig. 18, welcher ursprünglich die Länge  $l$  und den Durchmesser  $d$ , also den Querschnitt  $\frac{\pi}{4} d^2$  besass, ändert unter der Einwirkung der Kräfte  $PP$ , welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, seine Form. Diese Formänderung besteht in einer Verminderung der Länge  $l$  auf  $l_1$ , d. h. um  $\lambda = l - l_1$  und in einer Vergrößerung des Durchmessers auf  $d_1$ , d. h. um  $\delta = d_1 - d$ . Es findet also gleichzeitig eine Verkürzung, eine Zusammendrückung in Richtung der Stabachse und eine Vergrößerung der Querschnitte, eine Querausdehnung statt.



Fig. 18.

Der Vergleich dieser bei Druckwirkung auftretenden Erscheinungen mit den in § 1 bei Zugwirkung besprochenen zeigt, dass die Umkehrung der Krafrichtung auch die Formänderung umkehrt. Die Richtung der ziehenden Kraft als positiv, diejenige der Druckkraft als negativ bezeichnet, so hat zur Folge

- +  $P$  eine positive Dehnung in Richtung der Stabachse, und
- " negative       " senkrecht zur       " ,
- $P$    "       "       " in Richtung der       " und
- " positive       " senkrecht zur       " .

Ebenso findet Umkehrung der Spannungsrichtung statt: Die Zugkraft giebt eine positive Spannung (Spannung im engeren Sinne des Wortes oder Zugspannung), die Druckkraft eine negative Spannung (Pressung oder Druckspannung).

Dementsprechend werden für den auf Druck in Anspruch genommenen Körper die zur Beurtheilung nöthigen Beziehungen sich durch Umkehrung der im Bisherigen für Zugbeanspruchung aufgestellten Gleichungen gewinnen lassen, in welcher Beziehung auf § 12 zu verweisen ist.

Wir erhalten so die Grössen:

negative Dehnung  $= \frac{\lambda}{l}$ , d. i. die auf die Einheit der ursprünglichen Länge  $l$  bezogene Verkürzung,

Dehnungscoefficient gegenüber Druck, d. i. die Verkürzung eines Stabes von der ursprünglichen Länge 1 bei der Belastung von 1 Kilogramm auf die Flächeneinheit,

und für den Fall, dass diese Zahl bis zu einer gewissen Pressung constant ist, in der letzteren die

Proportionalitätsgrenze gegenüber Druck,

Fliess- oder Quetschgrenze, d. i. diejenige Druckspannung, bei welcher das Material verhältnissmässig rasch nachgiebt, ohne dass Zerstörung eintritt.

Hinsichtlich dieser Grössen gelten sinngemäss dieselben Bemerkungen, welche in § 2 über sie für den Fall gemacht worden sind, dass es sich um Belastung durch eine Zugkraft handelt.

Wird die Belastung des in eine Prüfungsmaschine gespannten Prisma fortgesetzt gesteigert, so tritt schliesslich ein Augenblick ein, in welchem der Widerstand des gedrückten Körpers aufhört, der Belastung das Gleichgewicht zu halten; der Widerstand erscheint überwunden: das Prisma wird zerdrückt, d. h. mehr oder minder vollständig zertrümmert, wie z. B. harte Gesteine, oder es wird zerquetscht, d. h. sein Material weicht nach der Seite aus, fliesst seitlich ab, wie z. B. Blei. Streng genommen wird in beiden Fällen der Widerstand dadurch überwunden, dass das Material nach der Seite ausweicht: im ersteren Falle erfolgt diese Ausweichung nach vorhergegangener oder gleichzeitiger Zertrümmerung, im letzteren dagegen behält der weiche, bildsame Stoff seinen Zusammenhang bei.

Beobachten wir einen dem Zerdrücken ausgesetzten Sandsteinwürfel, so sieht man bei normalem Verlaufe an den Mantelflächen

Fig. 19.



Fig. 20.

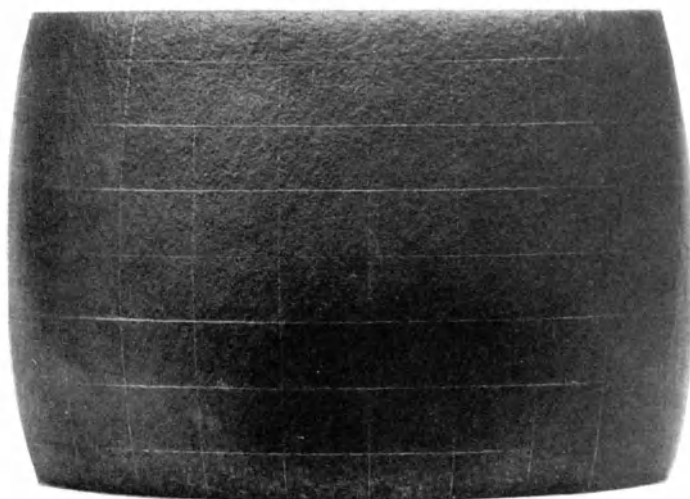


Fig. 23.



Fig. 22. (Grundriss.)

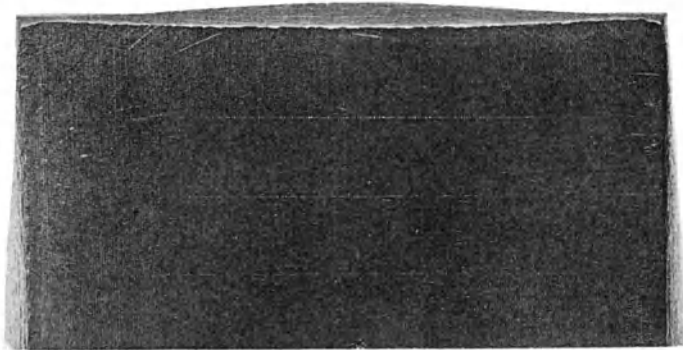
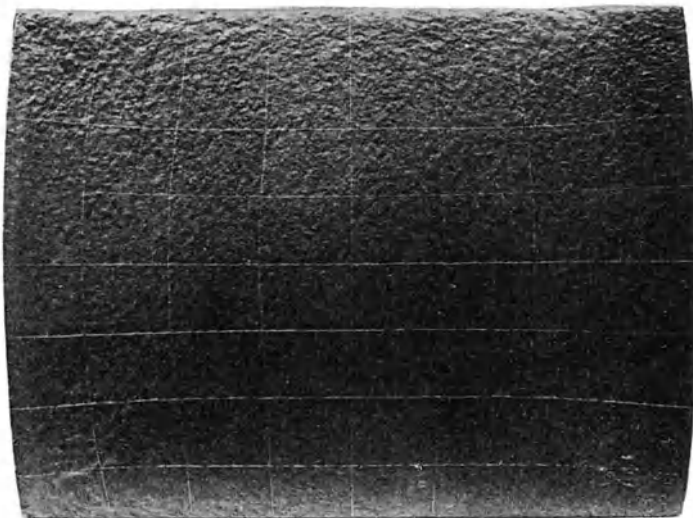


Fig. 21. (Aufriß.)





Platten sich ablösen, welche in der Mitte stärker sind, als nach den in die Druckflächen verlaufenden Rändern hin. Im Innern dagegen bilden sich zwei pyramidale Bruchstücke aus, wie dies die Fig. 19 (Tafel II) deutlich erkennen lässt; die Platten, welche sich seitlich lösten, sind hierbei weggenommen. Man erkennt, wie das Material von den beiden Stirnflächen aus je in pyramidalen Form in das Innere gedrückt worden ist. (Vergl. auch § 13, Ziff. 2, a, D.) Werden die Druckplatten der Prüfungsmaschine einander noch weiter genähert, so pflegt sich der Zusammenhang der beiden Pyramiden durch Abschiebung zu lösen.

Ein dem Zerdrücken ausgesetzter Bleicylinder baucht sich zunächst aus, wie Fig. 20 (Tafel II) zeigt, und geht schliesslich bei fortgesetzter Näherung der Druckplatten in eine immer dünner werdende Scheibe über. Ursprünglich besass der wiedergegebene Cylinder einen Durchmesser und eine Höhe von je 80 mm; sein Mantel war durch 7 Parallelkreise in Abständen von je 10 mm und durch 25 senkrechte Gerade in Abständen von je  $\frac{\pi 80}{25} = 10,05$  mm in 200 Quadrate eingetheilt. Fig. 20 stellt den Cylinder dar, nachdem er auf 64 mm, d. i. 0,8 seiner ursprünglichen Höhe zusammengedrückt ist. Wie ersichtlich, haben sich die Höhen der beiden End- oder Stirnschichten am stärksten vermindert (von 10 mm auf 6,5 mm, d. h. um 35 % gegen 20 % durchschnittliche Verringerung, entsprechend einer Bewegung des Materials in das Innere des Körpers, von wo aus der Stoff nach dem Umfange zu ausweicht.

Fig. 21 und 22 (Tafel III) geben einen Bleiwürfel wieder, welcher ursprünglich 80 mm Seitenlänge besass und dessen 6 Begrenzungsebenen je in 64 gleiche Quadrate eingetheilt worden waren. Fig. 21 zeigt den Aufriss des auf 64 mm zusammengedrückten Körpers und lässt deutlich die Figuren erkennen, in welche die kleinen Quadrate übergegangen, sowie den Umstand, dass auch hier die beiden Stirnschichten am meisten zusammengepresst oder richtiger, dass deren Material zum Theil in das Innere gedrückt worden ist. Der Grundriss (Fig. 22) giebt die eigenthümliche Wölbung wieder, welche die ursprünglich ebenen vier Seitenflächen bei der Zusammendrückung angenommen haben.

Die 3 in Fig. 23 (Tafel III) dargestellten Bruchstücke gehören Guss-eisencylindern von verschiedener Höhe an. Auch hier ist zunächst eine

Ausbauchung zu beobachten, welche schliesslich in Zerstörung übergeht. Die höheren Cylinder (40 mm bei 19,9 mm Durchmesser) schieben sich ab, die niederen (19,8 mm Höhe bei 19,8 mm Durchmesser) erfahren die aus der Figur ersichtliche eigenartige Zertrümmerung. (Vergl. § 13, Ziff. 1 a.)

Zähes Flusseisen in genügend kurzen Stücken verhält sich ähnlich wie Blei. Die Versuchscylinder nehmen fassartige Gestalt an, ohne dass eine Zerstörung eintritt.

Die Belastung, bei welcher der Widerstand des gedrückten Körpers überwunden wird, dieser also der Zertrümmerung verfällt oder in dem geschilderten Sinne nach der Seite abfließt, heisst Bruchbelastung. Die Pressung, welche dieser Belastung, die mit  $P_{max}$  bezeichnet werden mag, entspricht, wird Druckfestigkeit genannt. Dieselbe ist hiernach

$$K = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}} .$$

In der Regel pflegt man als Nenner den ursprünglichen Querschnitt  $f$  des Stabes in die Rechnung einzuführen und erhält dann in

$$K = \frac{P_{max}}{f} . . . . . 18)$$

die Druckfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt (vergl. das in § 3 über die Zugfestigkeit Bemerkte).

Körper aus Materialien, welche unter Einwirkung der Druckbelastung nach der Seite ausweichen, ohne dass hierbei eine Zerstörung eintritt, vergrössern ihren Querschnitt; in Folge dessen wächst die zu weiterer Zusammendrückung erforderliche Kraft. In solchen Fällen ist es selbstverständlich unzulässig, die am Ende einer weitgetriebenen Zusammendrückung beobachtete Kraft  $P_{max}$  durch den ursprünglichen Querschnitt zu dividieren und in diesem Quotienten ein Mass der Widerstandsfähigkeit des Materials erblicken zu wollen.

Diese erscheint gegenüber den Zwecken der Konstruktion erschöpft, sobald das Abfließen nach der Seite beginnt; die Druckfestigkeit ist dann die Fliess- oder Quetschgrenze.

§ 12. Gleichungen der Druckelasticität und der Druckfestigkeit.

Es bedeuten für den prismatischen Stab

- $P$  die auf Druck wirkende Kraft,
- $f$  die Grösse des ursprünglichen Stabquerschnitts,
- $l$  die Länge des Stabes vor Einwirkung der Kraft,
- $\lambda$  die Verkürzung, welche der Stab durch  $P$  erfährt,
- $-\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$  die negative Dehnung, d. i. die verhältnissmässige Zusammendrückung oder Verkürzung,
- $\alpha$  den Dehnungscoefficienten gegenüber Druckbeanspruchung, d. i. diejenige Zahl, welche anzeigt, um welche Strecke sich ein Stab von der Länge 1 bei einer Belastung von 1 Kilogramm pro Quadratcentimeter Querschnitt verkürzt,
- $-\sigma$  die Spannung, welche mit der Dehnung  $-\varepsilon$  verknüpft ist, also durch  $P$  hervorgerufen wird,
- $k$  die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Druckbeanspruchung.

Dann gilt

$$P = -\sigma f, \quad . . . . . 19)$$

$$P \leq k f, \quad . . . . . 20)$$

$$\lambda = -\alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f}. \quad . . . . . 21)$$

Für einen gedrückten Stab mit veränderlichem Querschnitt, entsprechend der Fig. 7 in § 6, jedoch mit auf Verkürzung hinwirkender Kraft  $P$ , gelangt man bei Benützung der daselbst eingeführten Grössen  $f_o$  und  $x$  zu den Beziehungen

$$P \leq k f_o, \quad . . . . . 22)$$

$$\lambda = P \int_o^l \alpha \frac{d x}{f}. \quad . . . . . 23)$$

Die Voraussetzungen, welche diesen Gleichungen zu Grunde liegen, sind:

1. Die äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Druckkraft.
2. Auf die Stirnflächen des Stabes wirken nur senkrecht gegen dieselben gerichtete Kräfte.
3. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
4. Der Einfluss des Eigengewichtes des Körpers kommt nicht in Betracht.
5. Die Abmessungen des Querschnittes sind so bedeutend, dass der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.
6. Die Dehnungen und Spannungen sind in allen Punkten des beliebigen Querschnittes gleich gross. (Gleichmässige Vertheilung der Druckkraft über den Querschnitt).
7. Die Form des Querschnittes ist gleichgiltig.
8. Sofern nur die Voraussetzung 5 erfüllt wird, ist die Länge oder Höhe des Stabes ohne Einfluss.

### § 13. Druckversuche.

#### Einfluss der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit.

Der Probekörper muss so in die Prüfungsmaschine eingespannt werden, dass die Druckkraft sich möglichst gleichmässig über den Querschnitt vertheilt. Zur Erfüllung dieser Bedingung wird die eine der beiden Druckplatten der Einspannvorrichtung möglichst leicht beweglich angeordnet (Kugellagerung); ausserdem werden die Probekörper je mit zwei möglichst genau parallelen, ebenen Druckflächen (durch Hobeln — erforderlichenfalls mit Diamantstahl — oder durch Abdrehen auf der Planscheibe) versehen. Das zuweilen noch gebrauchte Verfahren, die Befriedigung der letzteren Forderung dadurch zu umgehen, dass zwischen Druckplatte und Probekörper nachgiebige Scheiben, wie z. B. Bleiplatten, gelegt werden, erscheint unzulässig. Dieses bildsame, unter der hohen Pressung als dicke Flüssigkeit sich verhaltende Material wird bei Probekörpern aus einigermaßen festen und dichten Stoffen, wie Eisen, Basalt u. dergl. herausgequetscht, also nichts nützen, bei Probekörpern aus porösen oder Vertiefungen besitzenden Steinen u. dergl. dagegen in die Poren sowie Vertiefungen eindringen und auf Sprengung hinwirken, also zu

dem reinen Vorgange des Zerdrückens andere Wirkungen hinzufügen.

Die in § 11 besprochenen Erscheinungen beim Zerdrücken der Körper treten in der geschilderten Reinheit nur dann auf, wenn die Probewürfel mit ihren parallelen, ebenen Stirnflächen gleichmässig und unmittelbar an den Druckplatten anliegen.

Die in den §§ 11 und 12 enthaltenen Gleichungen lassen die Gestalt des Körpers gleichgiltig erscheinen, sofern nur nicht der Fall der Knickung (§ 23) vorliegt. Thatsächlich entspricht dies jedoch nicht der Wirklichkeit: die Querschnittsform ist nicht ganz gleichgiltig, ganz besonders aber beeinflusst die Höhe des Körpers dessen Druckfestigkeit. In dieser Beziehung geben die folgenden aus neuerer Zeit stammenden Versuchsergebnisse deutlich Auskunft.

#### 1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers.

##### a) Versuche des Verfassers mit Gusseisen (vorzüglicher Beschaffenheit).

Cylinder aus einem und demselben Gusseisen-Rundstab, der bei 2,00 cm Durchmesser (bearbeitet) eine Zugfestigkeit von 1860 kg ergeben hatte.

Die Zahlen sind das Mittel aus je 3 Versuchen.

Versuchsreihe	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 18 kg
1	4,00	1,99	3,11	7232
2	1,98	1,98	3,08	7500
3	1,00	1,99	3,11	8579

Die Druckfestigkeit wächst hiernach mit abnehmender Höhe der Versuchskörper.

Sie beträgt für den Fall, dass die Höhe des Cylinders gleich dem Durchmesser desselben ist, das

$$\frac{7500}{1860} = \sim 4\text{-fache}$$

der Zugfestigkeit.

Bei den Versuchsreihen 1 und 2 erhaltene Bruchstücke sind in Fig. 23 (Tafel III) dargestellt.

Prismen von kreisförmigem und von quadratischem Querschnitt aus einem und demselben Gusseisen-Rundstab, dessen Zugfestigkeit zu 2082 kg ermittelt worden war.

Querschnittsform	Durchmesser cm	Quadratseite cm	Höhe cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 18 kg
○	1,70	—	1,70	2,27	7771
□	—	1,70	1,70	2,89	7509

Die Druckfestigkeit ergibt sich demnach für den kreisförmigen Querschnitt etwas grösser, als für den quadratischen.

b) Versuche von Bauschinger mit Sandstein.

Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. polytechnischen Schule in München. 6. Heft. München 1876.

Bauschinger stellte auf Grund der Ergebnisse seiner eigenen Versuche (s. unten) und derjenigen Anderer für die Druckfestigkeit die Gleichung

$$K = \left( \alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \dots \dots \dots 24)$$

auf, giltig für Prismen, bei denen

$$h \leq 5 a, \text{ sofern } a^2 = f, \text{ d. i. } a = \sqrt{f}.$$

Hierin bedeutet

$f$  den Querschnitt des Prisma in qcm,

$u$  den Umfang dieses Querschnittes in cm,

$h$  die Höhe des Prisma in cm,

$K$  die Bruchbelastung pro qcm des Querschnittes in kg,

$\alpha$  und  $\beta$  Constante, welche von der Art des Materials abhängen.

Bauschinger hält übrigens die einfachere Gleichung

$$K = \left( \alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \frac{\sqrt{f}}{u} \dots \dots \dots 25)$$

für ausreichend; nur wenn die Ergebnisse der Versuche von Rondelet und Vicat einbezogen werden sollen, erscheint es nöthig, auf Gl. 24 zurückzugreifen.

A. Prismen von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus einer und derselben Platte von sehr feinem graublauen Schweizer Sandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

No.	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Quer- schnitt ab qcm	Druckfestigkeit K in kg	
					beobachtet, Gl. 18	berechnet nach Gl. 26
1	2	3	4	5	6	7
1	9,95	9,85	9,6	98,01	680	666
2	10,0	9,85	9,7	98,50	685	663
3	6,0	5,85	5,7	35,10	670	670
4	5,2	5,2	5,05	27,04	690	666
5	4,8	4,7	1,1	22,56	1950	1805
6	5,0	4,6	1,1	23,00	1910	1818
7	4,4	9,7	1,1	42,68	2140	2273

Die Versuche No. 1 bis 4 sind angestellt mit Prismen, deren Querschnitt als quadratisch angesehen werden darf und deren Höhe angenähert gleich der Seite des Quadrates ist. Die Werthe der Spalte 6 für diese 4 Versuche lassen erkennen, dass Würfel von verschiedener Grösse, jedoch aus gleichem Material hergestellt, die gleiche Druckfestigkeit besitzen.

Die Versuche No. 5 und 6 beziehen sich auf Prismen mit angenähert quadratischem Querschnitt und einer Höhe, welche weit kleiner ist, als die Querschnittsabmessungen. Die Zahlen in der

Spalte 6 lehren, dass die Druckfestigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen mit abnehmender Höhe wächst.

Das Ergebniss des Versuches No. 7, verglichen mit den Ergebnissen, welche für No. 5 und 6 erlangt wurden, zeigt, dass die Druckfestigkeit unter übrigens gleichen Verhältnissen mit wachsender Grundfläche zunimmt.

Aus 18 derartigen Versuchen (Tab. III, S. 10 der Mittheilungen), wobei die Höhe  $h$  die Seiten nicht überschreitet, berechnen sich die Grössen  $\alpha$  und  $\beta$  der Gl. 24 zu  $\alpha = 310$  und  $\beta = 346$ , so dass diese übergeht in

$$K = \left( 310 + 346 \frac{V\bar{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{V\bar{f}}{u}} \dots \dots \dots 26)$$

Die Uebereinstimmung der hieraus ermittelten und in der Spalte 7 eingetragenen Werthe mit den beobachteten (Spalte 6) ist eine recht gute.

### B. Prismen, wie unter A.

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Seite $a$ cm	Seite $b$ cm	Höhe $h$ cm	Querschnitt $ab$ qcm	Druckfestigkeit $K$ in kg	
					beobachtet, Gl. 18	berechnet nach Gl. 27
1	2	3	4	5	6	7
1	10,0	9,9	29,5	99	444	371
2	10,0	9,8	9,7	98	602	588
3	6,6	6,5	4,75	42,9	676	684
4	4,8	4,6	1,4	22,08	1540	1337
5	4,7	10,0	1,4	47,00	1850	1767

Aus 17 derartigen Versuchen (Tab. II, S. 9 der Mittheilungen), wobei die Höhe  $h$  die Querschnittsabmessungen bedeutend überschreitet, ergibt sich  $\alpha = 262$  und  $\beta = 320$ , also

$$K = \left( 262 + 320 \frac{V\bar{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{V\bar{f}}{u}} \dots \dots \dots 27)$$



C. Prismen von kreisförmigem und von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus feinkörnigem gelben Buntsandstein (Heilbronn).

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Querschnittsform	Durchmesser cm	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ bzw. ab gem	Druckfestigkeit in kg		
							beobachtet, Gl. 18	berechnet	
								Gl. 28 bzw. 29	Gl. 30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	□	—	9,25	9,18	36,3	84,91	381	377	387
2	○	9,2	—	—	36,25	66,47	451	418	407
3	□	—	9,05	9,17	12,45	82,99	440	436	444
4	○	9,22	—	—	12,20	66,76	463	473	473
5	□	—	9,20	9,22	2,73	84,82	790	754	755
6	○	9,15	—	—	2,90	65,75	806	733	729

Aus 18 solchen Versuchen (Tab. V, S. 11 der Mittheilungen) wird unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Werthe  $\alpha$  und  $\beta$  in Gl. 24 erhalten

für die rechteckigen Prismen:

$$K = \left( 347 + 121 \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{u}}, \dots \dots \dots 28)$$

für die Kreiscylinder:

$$K = \left( 369 + 115 \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{u}}, \dots \dots \dots 29)$$

für sämtliche Prismen:

$$K = \left( 358 + 118 \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{u}}, \dots \dots \dots 30)$$

Im Ganzen erweist sich hiernach der Einfluss der Querschnittsform auf die Festigkeit kurzer Prismen — im Gegensatze zu demjenigen der Höhe — als nicht bedeutend.

c) Versuche des Verfassers mit Blei.

Cylinder aus einem und demselben Gussbleikörper durch Drehen hergestellt.

No.	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Spec. Gewicht	Belastung in kg pro qcm, bei welcher das Material	
					noch nicht ausweicht	ausweicht, d. h. seitlich abfließt
1	7,05	3,525	9,76	11,37	46	51
2	3,47	3,53	9,79	11,36	59	69
3	1,01	3,48	9,51	11,35	105	126

Hiernach steigt bei nahezu gleichem Durchmesser die Belastung, welche das Blei erträgt, ohne nach der Seite auszuweichen, von 46 kg auf 105 kg, wenn die Höhe des Cylinders von 7,05 cm auf 1,01 cm vermindert wird.

Gussblei in Würfeln von rund 8 cm Seitenlänge ertrug Belastungen von 50 kg pro qcm; mit 72 kg pro qcm belastet, wich dasselbe fortgesetzt, wenn auch sehr langsam aus.

Gussblei in Form von Scheiben, deren Durchmesser 16 cm und deren Stäbe 1,5 cm, vertrug eine Belastung von 100 kg pro qcm, bei 150 kg pro qcm wich das Material sehr langsam nach der Seite aus.

Weichwalzblei in Form von Scheiben verhielt sich nicht wesentlich anders als Gussblei.

Aus den angeführten Zahlen erhellt deutlich die Zunahme der Druckfestigkeit bei Abnahme der Höhe der Bleikörper.

(S. auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1885, S. 629 u. f.)

**2. Die Belastung trifft unmittelbar nur einen Theil der Querschnittsfläche des Probekörpers.**

a) Versuche von Bauschinger.

Mittheilungen u. s. w., 6. Heft, 1876, S. 13 u. f.

**D. Würfel mit einer durch Abschrägung der Kanten verkleinerten Stirnfläche.**

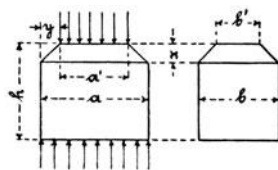


Fig. 24.

Material wie oben unter A bezeichnet.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

Nummer	Höhe <i>h</i> cm	Würfelquerschnitt			Ab- schrä- gung <i>x : y</i> abge- rundet	Stirnfläche			Be- lastung <i>P</i> kg	Druckfestigkeit <i>K</i> in kg, bezogen auf	
		<i>a</i> cm	<i>b</i> cm	<i>a b</i> qcm		<i>a'</i> cm	<i>b'</i> cm	<i>a' b'</i> qcm		den	den
										Quer- schnitt <i>a b</i> <i>P : a b</i>	Quer- schnitt <i>a' b'</i> <i>P : a' b'</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9,8	10,1	9,9	100,0	1 : 1	8,0	7,9	63,2	51 000	510	807
2	9,7	9,8	9,9	97,0	2 : 1	7,9	8,0	63,2	45 000	460	712
3	9,7	9,95	9,9	98,5	3 : 1	8,05	8,05	64,8	45 500	460	702
4	9,85	10,0	9,75	97,5	1 : 2	6,2	6,0	37,2	34 500	350	927
5	9,90	10,1	10,05	101,5	2 : 2	6,3	6,25	39,4	35 000	345	888
6	9,80	10,1	9,8	99,0	3 : 2	6,2	6,0	37,2	32 000	325	860
7	9,80	9,9	10,0	99,0	4 : 2	5,9	6,1	36,0	31 500	320	875
8	9,75	10,0	9,8	98,0	1 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	235	1243
9	9,75	9,95	9,9	98,5	2 : 3	4,2	4,2	17,6	20 500	210	1165
10	9,75	10,05	10,0	100,5	3 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	230	1243
11	9,85	10,10	9,75	98,5	5 : 3	4,25	4,1	17,4	19 700	200	1132

Der Bruch erfolgt immer in der Weise, dass von der kleinen Druckfläche aus eine Pyramide in das Innere des Probestückes hineingetrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

Bei den Versuchen 1 bis 3 war die Stirnfläche von durchschnittlich 98,5 qcm (Spalte 5) vermindert auf im Mittel 63,7 qcm (Spalte 9); die Festigkeit, welche bei Würfelgestalt z. B. nach dem unter 1 b A 2 angegebenen Versuch 685 kg (Spalte 6 daselbst) beträgt, sinkt beispielsweise bei Versuch 3 auf 460 kg, sofern sie auf den Querschnitt  $ab$  bezogen wird und steigt auf 702 bei Beziehung auf den Querschnitt  $a'b'$ . Hiernach würde sich die Druckfestigkeit eines solchen Körpers (Fig. 24) zu gross ergeben, wenn man, von der an Würfeln ermittelten Festigkeit ausgehend, die Fläche  $ab$  der Rechnung zu Grunde legt und zu klein, wenn die Fläche  $a'b'$  in die Rechnung eingeführt wird. Dieses voraussetzende Ergebniss tritt um so schärfer hervor, je kleiner die Stirnfläche  $a'b'$ . Für Versuch No. 11 erscheint die aus Versuchen mit Würfeln gewonnene Druckfestigkeit von 685 kg einerseits vermindert auf 200 kg, andererseits vergrössert auf 1132 kg, je nachdem die Bruchbelastung durch  $ab$  oder  $a'b'$  dividirt wird.

Der Einfluss des Abschrägungsverhältnisses (Spalte 6) lässt sich zwar deutlich erkennen, wie ein Vergleich der Versuche 1 bis 3, 4 bis 7, 8 bis 11 je unter sich lehrt, ist jedoch nicht sehr bedeutend.

#### E. Würfel aus dem unter A genannten Material.

Der Druck wird durch Stahlprismen, deren Achsen mit denjenigen der Würfel zusammenfallen und deren Kanten den Würfelkanten parallel laufen, nur auf einen Theil der Stirnfläche übertragen.

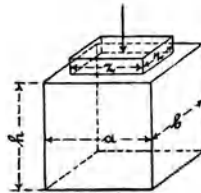


Fig. 25.

Stahlprisma (von 39 mm Höhe) nur auf einer Seite.

No.	Höhe <i>h</i> cm	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbe- lastung <i>P</i> kg	Druckfestigkeit in kg	
		<i>a</i> cm	<i>b</i> cm	<i>ab</i> qcm	<i>z</i> cm	<i>z</i> <sup>2</sup> qcm		<i>P: ab</i> kg	<i>P: z</i> <sup>2</sup> kg
		2	3	4	5	6		7	8
1	9,65	10,0	9,9	99,0	3,9	15,21	16 000	162	1052
2	9,70	9,85	9,9	97,5	5,7	32,49	30 000	308	923
3	9,75	10,0	9,85	98,5	7,8	60,84	47 000	477	772

Der Bruch erfolgt auch hier wieder in der Weise, dass von der Stirnfläche des Stahlprisma aus eine Pyramide in das Innere des Prisma getrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.



Fig. 26.

Stahlprismen auf beiden Stirnflächen.

No.	Höhe <i>h</i> cm	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbe- lastung <i>P</i> kg	Druckfestigkeit in kg	
		<i>a</i> cm	<i>b</i> cm	<i>ab</i> qcm	<i>z</i> cm	<i>z</i> <sup>2</sup> qcm		<i>P: ab</i> kg	<i>P: z</i> <sup>2</sup> kg
		2	3	4	5	6		7	8
1	9,7	9,9	10,0	99,0	5,7	32,49	16 000	162	492
2	9,75	9,65	9,9	95,5	7,8	60,84	36 000	377	592

Wie ersichtlich, ist die Bruchbelastung weit kleiner, wenn der Druck auf beiden Stirnflächen durch die Stahlprismen wirkt.

Diese Ergebnisse sind in folgender Beziehung noch besonders bemerkenswerth. Wird nach Gl. 26

$$K = \left( 310 + 346 \frac{\sqrt{f}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{u}} \frac{1}{4}$$

für ein quadratisches Prisma berechnet, dessen Querschnitt gleich dem der Stahlprismen und dessen Höhe gleich der Würfelhöhe ist, d. h., da dann  $\sqrt{f} = z$  und  $u = 4z$

$$K = 310 + 346 \frac{\sqrt{f}}{h},$$

so ergibt sich

$$\begin{array}{ll} \text{für Versuch 1} & K = 310 + 346 \frac{5,7}{9,7} = 513, \\ \text{„ „ 2} & K = 310 + 346 \frac{7,8}{9,75} = 587. \end{array}$$

Diese Werthe unterscheiden sich von den beobachteten Grössen 492 bzw. 592 nur um wenig. Hiernach hätte also das Material, welches dasjenige Prisma umschliesst, das im Innern des geprüften Würfels erhalten wird, wenn man sich die Seitenflächen der aufgesetzten Stahlprismen fortgesetzt denkt, keinen merkbaren Einfluss auf die Druckfestigkeit. Dieses auffallende Ergebniss, welches Bauschinger auch durch Versuche mit Granit angenähert bestätigt fand, dürfte sich durch die verhältnissmässig geringe Zugfestigkeit des Materials erklären lassen. Mit demselben steht in Uebereinstimmung, dass unter  $D$  die Zunahme des Werthes  $x$  in dem Abschägungsverhältniss  $x : y$  (Spalte 6) bei gleichbleibender Grösse von  $y$  nur einen untergeordneten Einfluss besitzt. Bei den Versuchen No. 8 bis 11 daselbst wächst  $x$  von ungefähr 1 bis 5 cm; die Druckfestigkeit ändert sich hierbei nur unbedeutend.

F. Wird die eine Stirnfläche des Würfels (hier die untere) vollständig, dagegen die andere nur über eine kleinere, im Allgemeinen

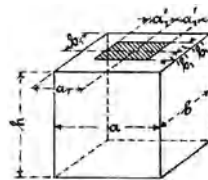


Fig 27.

einseitig gelegene Fläche, welche in Fig. 27 durch Strichlage hervorgehoben ist, belastet, so gilt nach Bauschinger — zunächst immer nur für Sandstein —

$$K = K_0 \sqrt[3]{\frac{a_1 b_1}{a'_1 b'_1}} \dots \dots \dots 31)$$

Hierin bedeutet:

$K$  die Druckfestigkeit bei Belastung des Würfels in der schraffirten Fläche, bezogen auf die Flächeneinheit der letzteren,  
 $K_0$  die Druckfestigkeit für den Fall, dass die Belastung über die ganze Stirnfläche gleichmässig vertheilt ist.

b) Versuche des Verfassers.

Material: Sandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

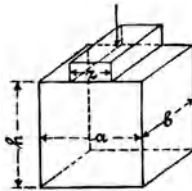


Fig. 28.

Stahlprisma nur auf einer Seite.

Versuchsreihe (je 3 bis 5 Körper)	1	2	3	4	5	6
Seite $a$ durchschnittlich	6,46	10,04	10,01	10,02	9,99	9,96 cm
„ $b$ „	6,03	9,99	10,01	10,03	9,95	10,02 „
Höhe $h$ „	6,00	9,89	9,85	9,82	9,84	9,84 „
Breite $z$ des Prisma	6,03	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5 „
Bruchbelastung pro qcm						
des Querschnittes $ab$	653	232	188	156	120	102 kg
Bruchbelastung pro qcm						
des Querschnittes $bz$	653	926	943	1044	1193	2050 „

§ 14. Hinderung der Querdehnung.

Wie wir in § 11 sahen, wird der Widerstand, welchen ein auf Druck in Anspruch genommener Körper leistet, schliesslich dadurch überwunden, dass das Material nach der Seite hin ausweicht. Daraus folgt, dass der Widerstand an sich unüberwindbar erscheint,

wenn das Material gehindert wird, nach der Seite auszuweichen, d. h. wenn genügend grosse Druckkräfte auf die Mantelflächen wirken.

Dieser Satz gilt nicht blos für feste, sondern auch für flüssige Körper. Denken wir uns beispielsweise einen genügend festen Hohlzylinder, zum Theil gefüllt mit Wasser, auf dem ein gegen die Cylinderwandung vollkommen abdichtender Kolben ruht. Wie stark wir auch — innerhalb der Widerstandsfähigkeit des Hohlzylinders — den Kolben belasten, das nach allen Seiten hin am Entweichen gehinderte Wasser trägt die Belastung, weist also trotz seiner tropfbar flüssigen Natur unter diesen Umständen eine grosse Widerstandsfähigkeit gegen Druck auf.

Die Erscheinung ist eine ähnliche, wie die in § 7 erörterte. Dort handelt es sich um den Einfluss gehinderter Zusammenziehung, hier um denjenigen der Hinderung der Querdehnung, welche die Druckkraft zur Folge haben würde, wenn Kräfte auf die Mantelfläche senkrecht zur Achse nicht thätig wären. Die in § 7 enthaltenen Gleichungen gelten in sinngemässer Weise auch hier. Insbesondere folgt daraus, dass die Beziehung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \text{ oder } \varepsilon = \alpha \sigma,$$

welche bei dem nur in Richtung der Achse gedrückten Stab zwischen der Spannung —  $\sigma$  (Pressung) und der Dehnung —  $\varepsilon$  (Kürzung), sowie dem Dehnungscoefficienten  $\alpha$  gegenüber Druckbeanspruchung besteht, nicht mehr gültig ist, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse angreifen<sup>1)</sup>. Solche Kräfte wirken bei den

<sup>1)</sup> Damit hängt es dann auch zusammen, dass die zulässige Druckanstrengung im Falle gehinderter Querdehnung grösser genommen werden darf. Die in Fig. 29 auf Druck beanspruchte Bleischeibe vom Durchmesser  $d = 35$  mm und der Höhe  $h = 10$  mm würde nach den Versuchen § 13 Ziff. 1c eine Belastung von

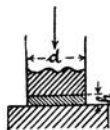


Fig. 29.

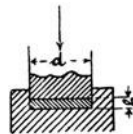


Fig. 30.

125 kg pro qcm nicht mehr vertragen. Dieselbe Bleischeibe nach Fig. 30 vertieft eingelegt, so dass das Blei nach der Seite nicht ausweichen kann, verträgt die doppelte Belastung und mehr.



Versuchskörpern in der Regel auf die Stirnflächen; sie rühren hier her von der Reibung, welche bei der Pressung zwischen Druckplatte der Prüfungsmaschine und Stirnfläche des Probekörpers durch das Bestreben des letzteren sich quer auszudehnen, wachgerufen wird. In Folge dieser Reibung, welche die volle Reinheit der Erscheinung der Druckelasticität und Druckfestigkeit mehr oder weniger beeinträchtigen muss<sup>1)</sup>, beträgt die Querdehnung in der Mitte des Probekörpers mehr als an den Stirnflächen, wie die Fig. 19 bis 22 deutlich erkennen lassen.

Ist  $\varepsilon$  die durch eine Druckkraft in Richtung der Stabachse veranlasste Zusammendrückung für die Länge  $l$ , so wird die hiermit verknüpfte Querdehnung  $\varepsilon_q$  nach allen zur Achse senkrechten Richtungen als gleichgross angesehen und bezogen auf den Längeninhalte, gemessen durch

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \dots \dots \dots 32)$$

Für ein und dasselbe Material pflegt man die Grösse  $m$  in Gl. 12 und 32 als gleich zu betrachten, also das Verhältniss der Dehnung (in Richtung der Stabachse) zur Zusammenziehung (senkrecht zur Achse) bei Zugbeanspruchung gleich zu setzen dem Verhältniss der verhältnissmässigen Zusammendrückung zur Querdehnung bei Druckbeanspruchung.

(Vergl. § 7.)

§ 15. Theorien der Druckfestigkeit.

Ueber den Vorgang des Zerdrückens sind zwei Hauptanschauungen geltend gemacht worden.

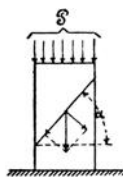


Fig. 31.

Die ältere, von Coulomb herrührende, denkt sich nach Massgabe der Fig. 31 das Zerdrücken durch Abschieben erfolgend und dabei die Druckkraft  $P$  in zwei Seitenkräfte

$P \sin \alpha$ , wirkend in der Gleitungsebene,  
 $P \cos \alpha$ , senkrecht dazu,

zerlegt. Wird der Widerstand pro qcm gegen

<sup>1)</sup> Da die Körper, welche Druckversuchen unterworfen werden, verhältnissmässig kurz sind, so wird die Bestimmung der Querdehnung durch unmittelbare Messung derselben (mittelst besonderer Apparate) für die verschiedenen Querschnitte zu verschiedenen Werthen führen können.

Gleiten mit  $K_s$  (Schubfestigkeit) bezeichnet, so findet sich, sofern  $f$  den Querschnitt des Prisma bedeutet:

$$P \sin \alpha = K_s \frac{f}{\cos \alpha}$$

$$\frac{P}{f} = K_s \frac{2}{\sin 2 \alpha}.$$

Das Gleiten wird die kleinste Kraft  $P$  erfordern, wenn  $\sin 2 \alpha$  am grössten ausfällt, d. i., wenn  $\alpha = 45^\circ$ ; womit nach Einführung der Druckfestigkeit

$$K = \frac{P}{f}$$

sich ergibt

$$K = 2 K_s,$$

d. h. die Druckfestigkeit müsste gleich dem Doppelten der Schubfestigkeit sein.

Diese Theorie wurde später durch Hereinziehung der von  $P \cos \alpha$  veranlassten Reibung ergänzt.

Die zweite Anschauung fasst die Querdehnung ins Auge (§ 11) und nimmt an, dass das Zerdrücken stattfindet, wenn dieselbe so gross geworden, wie die Längsdehnung beim Zerreißen im Falle von Zugbeanspruchung. Mit der Genauigkeit, mit welcher die Längsdehnung drei- bis viermal so gross angenommen werden darf, wie die Querdehnung, findet sich auf diesem Wege die Druckfestigkeit gleich dem Drei- bis Vierfachen der Zugfestigkeit, was beispielsweise für das Gusseisen § 13 Ziff. 1a mit Annäherung zutreffen würde.

Beide Lehren haben durch Druckversuche nicht die erforderliche Bestätigung erfahren.

Eine vollkommene Theorie der Druckfestigkeit würde diese jedenfalls als Funktion der Höhe geben müssen (§ 13), und wenn sie vollkommen sein soll, auch den Fall der Knickung (§ 23) einzuschliessen haben.

### III. Biegung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden Kräfte treffen dessen Achse rechtwinklig und geben für jeden Querschnitt ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht auf demselben steht.

§ 16. Gleichungen der Biegunsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet.

Bei der Entwicklung dieser Beziehungen pflegt man von der durch Fig. 32 dargestellten Sachlage auszugehen: Der bei  $A$  als eingespannt vorausgesetzte Balken  $AB$  ist am freien Ende  $B$  durch

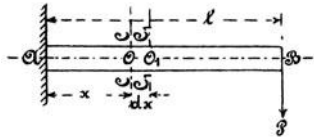


Fig. 32.

die Kraft  $P$  belastet, hinsichtlich welcher angenommen wird, dass sie in die Richtung der einen Hauptachse des Stabquerschnittes falle. (Ueber das Kennzeichen der beiden Hauptachsen eines Querschnittes vergl. § 21 Ziff. 1.) Die Kraft  $P$  ergibt dann für den beliebigen, um  $x$  von  $A$  abstehenden Querschnitt  $CC$  ein Kräftepaar, dessen Moment  $P(l - x)$  ist und dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, sowie eine in die Querschnittsebene fallende Kraft  $P$ . Die letztere wird als nicht vorhanden angesehen und damit die eben als Voraussetzung der einfachen Biegung hingestellte Bedingung, dass sich die äusseren Kräfte für jeden Querschnitt durch ein Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene den letzteren rechtwinklig schneidet, erfüllt.

Es bezeichne mit Bezugnahme auf die Fig. 32 bis 35

$M_b$  das Moment des biegenden Kräftepaares hinsichtlich des in Betracht gezogenen Querschnittes,

- $\eta$  den Abstand eines Flächenstreifens  $df = z d\eta$  im letzteren von derjenigen Hauptachse, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaars steht, d. i. hier  $OO$  (Fig. 35),
- $\Theta = \int \eta^2 df = \int \eta^2 z d\eta$  das Trägheitsmoment des Querschnittes hinsichtlich dieser Hauptachse,
- $e_1$  den grössten positiven Werth von  $\eta$  (Abstand der am stärksten gezogenen oder gespannten Faser),
- $e_2$  den grössten negativen Werth von  $\eta$  (Abstand der am stärksten gedrückten Faser),
- $e = e_1 = e_2$ , sofern der Querschnitt so beschaffen ist, dass beide Abstände gleich gross sind,
- $\sigma$  die durch  $M_b$  im Abstand  $\eta$ , d. h. im Flächenstreifen  $df = z d\eta$  hervorgerufene Spannung,
- $k_z$  bzw.  $k$  die zulässige Anstrengung des Materials auf Zug bzw. Druck,
- $x$  und  $y$  die Coordinaten des beliebigen Punktes  $O$  der elastischen Linie, d. h. der Curve, in welche die ursprünglich gerade Stabachse bei der Biegung übergeht, bezogen auf das aus Fig. 33 ersichtliche Coordinatensystem,
- $\rho$  den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie in dem beliebigen Punkte  $O$ ,
- $\alpha$  den Dehnungscoefficienten, d. i. diejenige Zahl, welche anzeigt, um welche Strecke sich ein Stab von der Länge 1 bei einer Belastung von 1 kg pro qcm Querschnitt dehnt.

Unter der Einwirkung der Kraft  $P$  biegt sich der Stab, wie Fig. 33 erkennen lässt. Infolge dessen werden zwei ursprünglich parallele, um  $dx = \overline{OO_1}$  von einander abtastende Querschnitte  $CC$

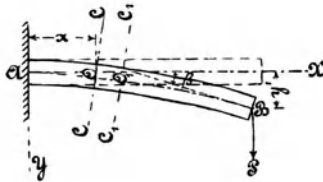


Fig. 33.

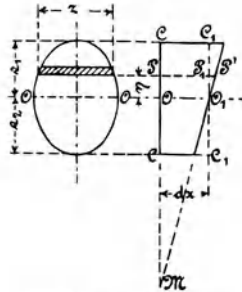


Fig. 34.

und  $C_1C_1$ , Fig. 32, Fig. 34, diesen Parallelismus verloren haben und einen gewissen Winkel  $OMO_1$  mit einander einschliessen. Dass

sie eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben, wird vorausgesetzt. Die oberhalb einer gewissen Faserschicht, welche sich in  $\overline{OO_1}$  darstellt, liegenden Fasern haben sich gedehnt, die unterhalb gelegenen verkürzt. Ist  $\varrho$  der Abstand des Punktes  $M$ , in welchem sich die Durchschnittslinie der beiden Querschnitte projicirt, von dem Punkt  $O$ , also der Krümmungshalbmesser der jetzt gekrümmten Stabachse, d. h. der elastischen Linie im Punkte  $O$ , so findet sich für den in Betracht gezogenen Querschnitt  $COC$  die verhältnissmässige Dehnung  $\varepsilon$  im Abstand  $\eta$  von der Geraden  $OO$  (Fig. 35) aus der Erwägung, dass die Strecke  $\overline{PP_1} = \overline{CC_1} = \overline{OO_1} = dx$  infolge der Biegung übergegangen ist in  $\overline{PP'}$ , also

$$\varepsilon = \frac{\overline{PP'} - \overline{PP_1}}{\overline{PP_1}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OO_1}} - 1 = \frac{\varrho + \eta}{\varrho} - 1 = \frac{\eta}{\varrho}. \quad 33)$$

Die hiermit verknüpfte Spannung  $\sigma$  ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungscoefficienten  $\alpha$  zu

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\eta}{\varrho}, \quad . . . . . 34)$$

sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse auf die Faserschicht nicht einwirken (vgl. § 7 und § 14).

Die so im Inneren des Stabes durch das Moment  $M_b$  wachgerufenen Kräfte müssen sich mit diesem im Gleichgewicht befinden. Dazu gehört, dass die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null ist und dass sie ein Moment liefern, welches gleich und entgegengesetzt  $M_b$  ist.

Die erste Forderung giebt, wenn der im Abstände  $\eta$  liegende und in Fig. 35 durch Strichlage hervorgehobene Flächenstreifen von der Breite  $z$  und der Höhe  $d\eta$  mit  $df$  bezeichnet wird,

$$\int \sigma df = 0, \quad . . . . . 35)$$

genommen über den ganzen Querschnitt. Mit Rücksicht auf Gl. 34, sowie in Anbetracht, dass  $\varrho$  für sämtliche Streifen eines und desselben Querschnittes den gleichen Werth besitzt, findet sich aus Gl. 35

$$\int \frac{1}{\alpha} \eta df = 0. \quad . . . . . 36)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Dehnungscoefficient  $\alpha$  für alle Punkte des Querschnittes gleich gross, also unabhängig von der Grösse und dem Vorzeichen der Spannung  $\sigma$  oder Dehnung  $\epsilon$  ist, folgt

$$\int \eta df = 0, \dots \dots \dots 37)$$

d. h. die Gerade, in welcher die Dehnungen und die Spannungen den Werth Null besitzen, die sogenannte „neutrale Achse“ oder „Nullachse“ geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes und ist, da die Ebene der äusseren Kräfte den letzteren in der einen Hauptachse schneidet, die andere Hauptachse desselben.

Die zweite Bedingung liefert

$$\int \sigma df \cdot \eta = M_b \dots \dots \dots 38)$$

und nach Massgabe der Gleichung 34 unter der unmittelbar vorher bezüglich  $\alpha$  ausgesprochenen Voraussetzung

$$M_b = \frac{1}{\alpha \varrho} \int \eta^2 df,$$

woraus mit

$$\int \eta^2 df = \Theta, \dots \dots \dots 39)$$

d. i. das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf  $OO$ ,

$$\left. \begin{aligned} M_b &= \frac{\Theta}{\alpha \varrho}, \\ \frac{1}{\varrho} &= \alpha \frac{M_b}{\Theta}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 40)$$

Der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers, d. h. die Krümmung, ist hiernach proportional dem Dehnungscoefficienten  $\alpha$ , dem biegenden Moment  $M_b$  und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment  $\Theta$ .

Mit der Annäherung, mit welcher der allgemein giltige Ausdruck

$$\frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\pm \frac{d^2 y}{dx^2}} = \varrho$$

ersetzt werden darf durch

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{d x^2},$$

findet sich

$$M_b = \pm \frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{d x^2}. \quad \dots \dots \dots 41)$$

Der Ersatz von  $\frac{1}{\varrho}$  in Gl. 34 durch die rechte Seite der zweiten der Gleichungen 40 führt zu

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} \eta. \quad \dots \dots \dots 42)$$

Hiernach sind die Spannungen proportional dem Abstände der Flächenelemente von der Nullachse, wie in Fig. 36 dargestellt ist.

Damit ergibt sich die grösste Zugspannung  $\sigma_1$  für den grössten positiven Werth von  $\eta$ , d. i. für  $\eta = + e_1$ , zu



Fig. 36.

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{\Theta} e_1, \quad \dots \dots \dots 43)$$

die grösste Druckspannung  $\sigma_2$  für den grössten negativen Werth von  $\eta$ , d. i. für  $\eta = - e_2$ , zu

$$\sigma_2 = - \frac{M_b}{\Theta} e_2, \quad \dots \dots \dots 44)$$

so dass

$$\left. \begin{array}{l} k_z \geq \frac{M_b}{\Theta} e_1 \qquad k \geq \frac{M_b}{\Theta} e_2, \\ M_b \leq k_z \frac{\Theta}{e_1} \qquad M_b \leq k \frac{\Theta}{e_2}. \end{array} \right\} \dots \dots \dots 45)$$

§ 17. Trägheitsmomente.

Die in § 16 entwickelten Hauptgleichungen setzen im Falle ihrer Benutzung die Kenntniss des betreffenden Trägheitsmomentes voraus. Hinsichtlich der Berechnung desselben sei Folgendes bemerkt.

Ist

$\Theta$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Schwerpunktsachse  $OO$ , Fig. 37, also  $\Theta = \int \eta^2 df = \int \eta^2 z d\eta$ ,

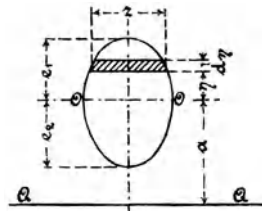


Fig. 37.

$\Theta_1$  das Trägheitsmoment desselben Querschnittes in Bezug auf die Achse  $QQ$ , welche im Abstände  $a$  zu  $OO$  parallel läuft, demnach  $\Theta_1 = \int (\eta + a)^2 df$ ,

$f$  die Grösse des Querschnittes, so ergibt sich

$$\Theta_1 = \int (\eta + a)^2 df = \int \eta^2 df + 2a \int \eta df + a^2 \int df$$

und unter Beachtung, dass

$$\int \eta^2 df = \Theta \quad \int \eta df = 0 \quad \int df = f$$

$$\Theta_1 = \Theta + a^2 f. . . . . 46)$$

Von diesem Hilfssatz, der ausspricht, dass das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $QQ$  gleich ist dem Trägheitsmoment hinsichtlich der zu  $QQ$  parallelen Schwerpunktsachse  $OO$ , vermehrt um das Produkt aus Querschnittsfläche und Quadrat des Abstandes der beiden Achsen, lässt sich oft mit Vortheil Gebrauch machen.



1. Rechteck, Fig. 38.

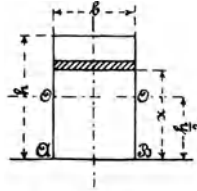


Fig. 38.

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Seite  $AB$  beträgt

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 b \, dx = \frac{1}{3} b h^3,$$

folglich in Bezug auf die um  $\frac{h}{2}$  davon abstehenden Schwerpunktsachse  $OO'$

$$\Theta = \Theta_1 - a^2 f = \frac{1}{3} b h^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 b h = \frac{1}{12} b h^3. \quad . \quad 47)$$

und

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2.$$

2. Dreieck, Fig. 39.

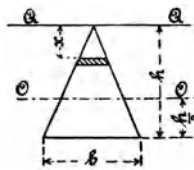


Fig. 39.

Für die Achse  $QQ'$

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 \left(b \frac{x}{h}\right) dx = \frac{1}{4} b h^3.$$

Für die um  $\frac{2}{3} h$  davon abstehende Schwerpunktsachse  $OO'$

$$\Theta = \frac{1}{4} b h^3 - \left(\frac{2}{3} h\right)^2 \cdot \frac{1}{2} b h = \frac{1}{36} b h^3. \quad . \quad 48)$$

3. Kreis, Fig. 40.

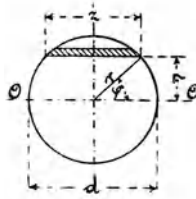


Fig. 40.

Für die Schwerpunktsachse  $OO$  wegen  $\eta = r \sin \varphi$ ,  $z = 2r \cos \varphi$

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} \eta^2 z d\eta = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$\Theta = \frac{\pi}{64} d^4. \quad \dots \dots \dots 49)$$

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{d} = \frac{\pi}{32} d^3 = \sim \frac{1}{10} d^3.$$

4. Ellipse, Fig. 41.

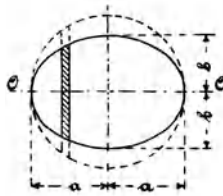


Fig. 41.

Wir denken uns die Ellipse in Verbindung gebracht mit dem sie umschliessenden Kreis vom Radius  $a$  und beide Querschnitte in unendlich schmale Streifen senkrecht zur Achse  $OO$  geschnitten. Das Trägheitsmoment eines jeden Kreisstreifens verhält sich nach Gl. 47 zu demjenigen des Ellipsenstreifens, wie

$$1 : \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

Folglich ergibt sich das auf  $OO$  bezogene Trägheitsmoment der Ellipse nach Gl. 49 zu

$$\Theta = \frac{\pi}{64} (2a)^4 \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi}{4} ab^3. \dots 50)$$

**5. Zusammengesetzte Querschnitte.**

a) Rechnerische Bestimmung, Fig. 42.

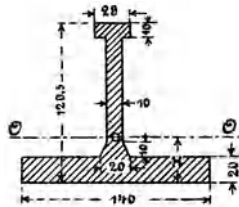


Fig. 42.

Der Querschnitt kann zusammengesetzt gedacht werden aus

dem liegenden Rechteck	$14 \cdot 2 = 28$ qcm,
„ Dreieck	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5$ qcm,
„ stehenden Rechteck	$1 \cdot (12,05 - 2 - 1) = 9,05$ qcm,
„ liegenden Rechteck	$2,8 \cdot 1 = 2,8$ qcm.

Die Lage der Schwerpunktsachse  $OO$  bestimmt sich aus

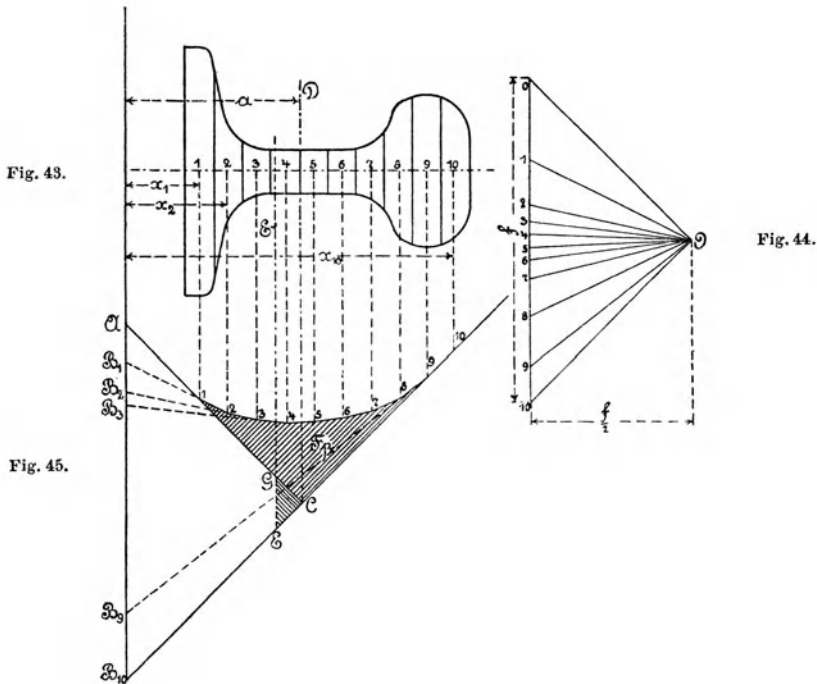
$$x = \frac{28 \cdot \frac{2}{2} + 0,5 \left(2 + \frac{1}{3}\right) + 9,05 \cdot (2 + 9,05 \cdot 0,5) + 2,8 \cdot (12,05 - 0,5)}{28 + 0,5 + 9,05 + 2,8} = 2,99 \text{ cm}$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse nach Massgabe der Gleichungen 47, 48 und 46 zu

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{12} 14,0 \cdot 2,0^3 + 14 \cdot 2 (2,99 - 1)^2 \\ &+ \frac{1}{36} 1 \cdot 1^3 + \frac{1}{2} 1 \cdot 1 (2,99 - 2,33)^2 \\ &+ \frac{1}{12} 1 \cdot 9,05^3 + 1 \cdot 9,05 (6,525 - 2,99)^2 \\ &+ \frac{1}{12} 2,8 \cdot 1^3 + 2,8 \cdot 1 (11,55 - 2,99)^2 = 500,7 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

## b) Zeichnerische Bestimmung, Fig. 43 bis 45.

Bei zusammengesetzten, insbesondere unregelmässig begrenzten Querschnitten pflegt das folgende, von Mohr angegebene zeichnerische



rische Verfahren rascher zum Ziele zu führen, als der Weg der Rechnung.

Die Querschnittsfläche von der Grösse  $f$ , (im Falle des gewählten Beispiels Querschnitt einer Eisenbahnschiene), wird parallel zur Achse, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, in eine Anzahl Streifen zerlegt, hierauf trägt man die Querschnitte  $f_1 f_2 f_3 \dots f_{10}$  dieser Streifen als Strecken  $f_1 = \overline{01}$ ,  $f_2 = \overline{12}$ ,  $f_3 = \overline{23} \dots f_{10} = \overline{910}$  auf einer zur genannten Achse parallelen Geraden auf (Fig. 44) und stellt sich diese Flächen als Schwerkräfte vor, welche in den Schwerpunkten der Streifen angreifen; konstruiert mit dem symmetrisch zu  $010$  gelegenen und von dieser Linie um  $\frac{f}{2}$  abstehenden Punkt  $O$  als Pol Kräfte- und Seil-

polygon, Fig. 44, bezw. Fig. 45. In dem Schnittpunkt  $C$  (Fig. 45) der äussersten Polygonseiten  $1C$  und  $10C$  wird alsdann — wie ohne Weiteres aus der Natur des Seilpolygons folgt — ein Punkt der gesuchten Schwerlinie  $CD$  erhalten, während die von dem Seilpolygon  $123\dots 10$  und den beiden Polygonseiten  $1C$  und  $10C$  eingeschlossene Fläche  $F_p$  (in Fig. 45 durch Strichlage, von links nach rechts ansteigend, bezeichnet), mit  $f$  multiplicirt das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse  $CD$  liefert.

Beweis:

Auf den Knotenpunkt 1 des Seilpolygons, welchen wir uns herausgeschnitten denken, wirken in der Richtung  $C1$  die Kraft  $S_0$ , in der Richtung  $12$  die Kraft  $S_1$  und vertikal abwärts die Schwerkraft  $f_1$ . Dieselben ergeben in Bezug auf den Durchschnittspunkt  $A$  der Geraden  $C1$  mit der beliebigen, zur Richtung der Streifen und der Schwerpunktsachse  $CD$  parallel laufenden Achse  $\overline{AB}_{10}$  die Momentengleichung

$$f_1 x_1 = H \cdot \overline{AB}_1,$$

sofern  $S_1$  in der eigenen Richtungslinie nach  $B_1$  verlegt und hier in seine Verticalcomponente und in seine horizontale Seitenkraft

$$H = \frac{f}{2}$$

zerlegt wird.

Durch Multiplikation mit  $x_1$  findet sich

$$f_1 x_1^2 = 2H \frac{\overline{AB}_1 x_1}{2} = 2H \cdot \text{Fläche } A1B_1 = f \cdot \text{Fläche } A1B_1.$$

In ganz gleicher Weise folgt für den Knotenpunkt 2

$$f_2 x_2^2 = f \cdot \text{Fläche } B_1 2B_2,$$

für die folgenden Knotenpunkte

$$\begin{aligned} f_3 x_3^2 &= f \cdot \text{Fläche } B_2 3B_3, \\ &\cdot \quad \quad \cdot \\ &\cdot \quad \quad \cdot \\ &\cdot \quad \quad \cdot \\ &\cdot \quad \quad \cdot \\ f_{10} x_{10}^2 &= f \cdot \text{Fläche } B_9 10B_{10}. \end{aligned}$$

Nun ist das Trägheitsmoment  $\Theta_1$  des ganzen Querschnitts in Bezug auf die Achse  $AB_{10}$  — streng genommen allerdings nur unter Voraussetzung unendlich schmaler Streifen —

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + \dots + f_{10} x_{10}^2 \\ &= f \cdot (\text{Fläche } A1B_1 + \text{Fläche } B_12B_2 + \text{Fläche } B_23B_3 + \dots \\ &\quad + \text{Fläche } B_910B_{10}) \\ &= f \cdot \text{Fläche } A1510CB_{10}\end{aligned}$$

und in Hinsicht auf die Schwerpunktsachse  $\overline{CD}$  nach Gleichung 46

$$\Theta = \Theta_1 - f a^2.$$

Unter Beachtung, dass Fläche  $ACB_{10} = a^2$  (wegen  $\triangle ACB_{10} = 90^\circ$ ) wird

$$\begin{aligned}\Theta &= f \cdot (\text{Fläche } A1510CB_{10} - \text{Fläche } ACB_{10}) \\ &= f \cdot \text{Fläche } 1510C = f \cdot F_p,\end{aligned}$$




wie das Mohr'sche Verfahren voraussetzt.

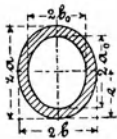

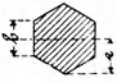
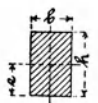
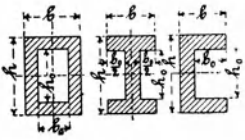
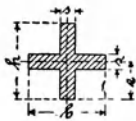

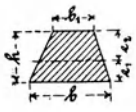

Für die Achse  $EE \parallel CD$  ist, wie nach Massgabe des Erörterten ohne Weiteres klar, das Trägheitsmoment

$$f \cdot (F_p + \text{Fläche } CEG),$$

d. h. gleich dem Produkt aus Stabquerschnitt und der Summe der beiden in Fig. 45 durch Strichlage hervorgehobenen Flächen.

### 6. Zusammenstellung.

Querschnittsform	Trägheitsmoment $\Theta$	Schwerpunktsabstand	Grösse des Querschnittes $f$
	$\frac{\pi}{64} d^4$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} d^2$
	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_0^4)$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2)$
	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$e = a$	$\pi a b$

Querschnittsform	Trägheitsmoment $\Theta$	Schwer- punkts- abstand	Grösse des Querschnittes $f$
	$\frac{\pi}{4} (a^3 b - a_0^3 b_0)$	$e = a$	$\pi (a b - a_0 b_0)$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = 0,54 a^4$	$e = 0,866 a$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 2,6 a^2$
	$0,54 a^4$	$e = a$	$2,6 a^2$
	$\frac{1}{12} b h^3$	$e = \frac{h}{2}$	$b h$
	$\frac{1}{12} (b h^3 - b_0 h_0^3)$	$e = \frac{h}{2}$	$b h - b_0 h_0$
	$\frac{1}{12} [h^3 s + (h_1 - s) s^3]$	$e = \frac{h}{2}$	$h s + (h_1 - s) s$
	$\frac{1}{36} b h^3$	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3} h$	$\frac{1}{2} b h$
	$\frac{1}{36} \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{b + b_1} h^3$	$e_1 = \frac{b + 2b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b + b_1}{2} h$
	$0,0138 d^4$	$e_1 = 0,212 d$ $e_2 = 0,288 d$	$\frac{\pi}{8} d^2$

Ueber die beiden Hauptträgheitsmomente eines Querschnittes, vergl. § 21 Ziffer 1.

## § 18. Fälle bestimmter Belastungen.

I. Der Stab (vergl. Fig. 32 und 33) ist an dem einen Ende eingespannt, am freien Ende mit  $P$  belastet. Ausserdem trägt derselbe eine gleichmässig über seine Länge  $l$  vertheilte Belastung  $Q = pl$ .

Für den beliebigen Querschnitt  $CC$ , welcher um  $x$  von der Einspannstelle absteht, ergibt sich

$$M_b = P(l - x) + p \frac{(l - x)^2}{2}.$$

Den grössten Werth erlangt  $M_b$  für  $x = 0$ , nämlich

$$\max(M_b) = Pl + \frac{pl^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right)l.$$

Demnach findet nach den Gleichungen 45 die stärkste Anstrengung im Querschnitt der Einspannungsstelle  $A$  statt.

Zur Feststellung der elastischen Linie ergibt sich mit Gleichung 41

$$\frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = P(l - x) + p \frac{(l - x)^2}{2}$$

und für Materialien, für welche der Dehnungscoefficient  $\alpha$  constant ist — Gl. 41 gilt zunächst auch nur für solche —, sowie unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Trägheitsmomentes  $\Theta$

$$\frac{\Theta}{\alpha} \frac{dy}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

sofern die Integrationsconstante  $C$  genannt wird. Dieselbe bestimmt sich aus folgender Erwägung. Mit der Bezeichnung der Einspannung verknüpft man den Begriff, dass an der Einspannstelle die elastische Linie (in Fig. 33  $AOB$ ) von der ursprünglich geraden Stabachse ( $AX$ ) berührt wird<sup>1)</sup>, d. h.

$$\text{für } x = 0 \quad \text{ist } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Damit folgt  $C = 0$ , so dass

---

<sup>1)</sup> Ueber die Zulässigkeit dieser nur ausnahmsweise thatsächlich erfüllten Voraussetzung vergleiche § 53.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\Theta} \left[ P \left( l - \frac{x}{2} \right) + \frac{p}{2} \left( l^2 - lx + \frac{x^2}{3} \right) \right] x \quad . . . 51)$$

Hieraus lässt sich für jeden beliebigen Punkt der elastischen Linie der Winkel berechnen, welchen die Tangente an letzterer in dem betreffenden Punkt mit der ursprünglich geraden Stabachse einschliesst. Beispielsweise findet sich für das freie Ende *B*, Fig. 33, dieser Winkel  $\beta$  mit  $x = l$  zu

$$\text{tg } \beta = \frac{\alpha}{2\Theta} \left( P + \frac{Q}{3} \right) l^2$$

und angenähert, da es sich nur um sehr kleine Werthe von  $\beta$  zu handeln pflegt,

$$\beta = \frac{\alpha}{2\Theta} \left( P + \frac{Q}{3} \right) l^2. \quad . . . . . 52)$$

Aus Gl. 51 folgt unter Beachtung, dass

$$\text{für } x = 0 \quad \text{auch } y = 0,$$

die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{\alpha}{\Theta} \left[ \frac{P}{2} \left( l - \frac{x}{3} \right) + \frac{p}{4} \left( l^2 - \frac{2}{3} lx + \frac{x^2}{6} \right) \right] x^2. \quad . 53)$$

Die Durchbiegung  $y'$  des freien Endes beträgt, da hierfür  $x = l$ ,

$$y' = \frac{\alpha}{\Theta} \left( \frac{P}{3} + \frac{pl}{8} \right) l^3 = \frac{\alpha}{\Theta} \left( \frac{P}{3} + \frac{Q}{8} \right) l^3. \quad . . . 54)$$

**2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 46. Er ist belastet durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last  $Q = p(a + b) = pl$  und durch die im Punkte *C* angreifende Kraft *P*.**

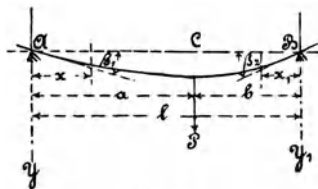


Fig. 46.

Die Auflagerdrücke der Stützen *A* und *B* sind

$$A = P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}, \quad B = P \frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Für den um  $x$  vom Auflager  $A$  abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = Ax - p \frac{x^2}{2} = \left( P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2}.$$

Dasselbe erlangt innerhalb der Strecke  $\overline{AC} = a$  einen grössten Werth für

$$P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} = p x$$

$$x = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2},$$

sofern

$$a > \frac{l}{2}.$$

Der gesuchte Querschnitt könnte hiernach nur in der grösseren der beiden Strecken  $a$  und  $b$  liegen, und zwar zwischen der Balkenmitte und dem Angriffspunkt  $C$  der Kraft  $P$ , vorausgesetzt, dass

$$\frac{P}{Q} b < a - \frac{l}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} < \frac{2a - l}{2b} = \frac{a - b}{2b}$$

$$p a > P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

d. h. dass die über die Strecke  $a$  gleichmässig vertheilte Last grösser ist, als der Auflagerdruck in  $A$ .

Für den Fall, dass

$$\frac{P}{Q} \geq \frac{a - b}{2b}$$

liegt der durch die Biegung am stärksten beanspruchte Querschnitt im Angriffspunkte  $C$  der Kraft  $P$ .

Demnach ergibt sich,

wenn  $\frac{P}{Q} \geq \frac{a-b}{2b}$ , d. i. für den Querschnitt  $C$

$$\max(M_b) = \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right) a - \frac{p a^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{a b}{l}; \quad 55)$$

wenn

$\frac{P}{Q} < \frac{a-b}{2b}$ , d. i. für  $x = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} \max(M_b) &= \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right) \left(\frac{P}{Q} b + \frac{l}{2}\right) - \frac{p}{2} \left(\frac{P}{Q} b + \frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q}. \quad \dots \dots \dots 56) \end{aligned}$$

Für  $Q = 0$  wird

$$\max(M_b) = P \frac{b}{l} \cdot a$$

und wenn

$$a = b = \frac{l}{2}$$

$$\max(M_b) = \frac{P l}{4} \quad \dots \dots \dots 56a)$$

Für  $P = 0$  wird

$$\max(M_b) = \frac{Q l}{8} = \frac{p l^2}{8} \quad \dots \dots \dots 56b)$$

Zur Bestimmung der elastischen Linie innerhalb der Strecke  $AC$  ergibt sich nach Gleichung 41

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = A x - p \frac{x^2}{2}$$

und unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von  $\alpha$  und  $\Theta$  (vergl. Ziff. 1)

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{6} p x^3 + C_1$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha} y = \frac{1}{6} A x^3 - \frac{1}{24} p x^4 + C_1 x + C_2.$$

Wegen

$$y = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{wird } C_2 = 0.$$

Für die Strecke  $BC$  findet sich entsprechend

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = B x_1 - p \frac{x_1^2}{2}$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2} B x_1^2 - \frac{1}{6} p x_1^3 + C''$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha} y_1 = \frac{1}{6} B x_1^3 - \frac{1}{24} p x_1^4 + C'' x_1 + C'''$$

$$C''' = 0.$$

Die Senkung im Punkte  $C$  muss für beide Strecken gleich erhalten werden, d. h.

$$\frac{1}{6} A a^3 - \frac{1}{24} p a^4 + C_1 a = \frac{1}{6} B b^3 - \frac{1}{24} p b^4 + C'' b.$$

Ferner muss der Neigungswinkel der elastischen Linie im Punkte  $C$  der Strecke  $AB$  gleich dem negativen Werth des Neigungswinkels der elastischen Linie im Punkte  $C$  der Strecke  $BC$  sein, d. h.

$$\frac{1}{2} A a^2 - \frac{1}{6} p a^3 + C_1 = -\frac{1}{2} B b^2 + \frac{1}{6} p b^3 - C''.$$

Nach Beseitigung von  $C_1$  und  $C''$  mittelst der beiden letzten Gleichungen findet sich

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{für die Strecke } AC \\
 \frac{\Theta}{\alpha} \left( \beta_1 - \frac{d y}{d x} \right) &= \frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{6} p x^3 \\
 \frac{\Theta}{\alpha} (\beta_1 x - y) &= \frac{1}{6} A x^3 - \frac{1}{24} p x^4 \\
 \beta_1 &= \left( P \frac{a b (a+2b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24} \right) \frac{\alpha}{\Theta}; \\
 &\text{für die Strecke } CD \\
 \frac{\Theta}{\alpha} \left( \beta_2 - \frac{d y_1}{d x_1} \right) &= \frac{1}{2} B x_1^2 - \frac{1}{6} p x_1^3 \\
 \frac{\Theta}{\alpha} (\beta_2 x_1 - y_1) &= \frac{1}{6} B x_1^3 - \frac{1}{24} p x_1^4 \\
 \beta_2 &= \left( P \frac{a b (2a+b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24} \right) \frac{\alpha}{Q}.
 \end{aligned} \right\} \dots 57)$$

Die Durchbiegung  $y'$  im Angriffspunkte  $C$  der Kraft  $P$  ergibt sich zu

$$y' = \left( P + \frac{l^2 + a b}{8 a b} Q \right) \frac{a^2 b^2 \alpha}{3 l \Theta} \dots 58)$$

Für den Fall, dass

$$a = b = \frac{l}{2},$$

folgt

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \left( P + \frac{2}{3} Q \right) \frac{\alpha l^2}{\Theta 16}, \dots 59)$$

$$y' = \left( P + \frac{5}{8} Q \right) \frac{\alpha l^3}{\Theta 48} \dots 60)$$

und sofern  $Q = 0$

$$\beta = \frac{\alpha P l^2}{16 \Theta} \dots 61)$$

$$y' = \frac{\alpha P l^3}{48 \Theta} \dots 62)$$

3. Der Stab ist beiderseits wagerecht eingespannt, Fig. 47, und belastet durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last  $Q = pl$ , sowie durch die in der Mitte  $C$  angreifende Kraft  $P$ .

Wie bereits unter Ziff. 1 erörtert, wird mit der Bezeichnung der Einspannung der Begriff verknüpft, dass die elastische Linie an der Einspannstelle die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente hat. Die vorausgesetzte Einspannung in  $A$  und  $B$  bedingt hiernach, dass die gerade Stabachse  $AB$  die elastische Linie  $ACB$  in  $A$  und  $B$  berührt. In wie weit sich dies thatsäch-

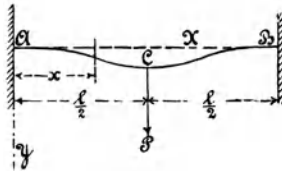


Fig. 47.

lich erreichen lässt, darüber wird in § 53 das Nöthige erörtert werden. Bemerkt sei jedoch schon hier, dass nur in sehr seltenen Fällen von wirklicher Einspannung in dem bezeichneten Sinne gesprochen werden kann.

Bei der Symmetrie der Belastung genügt es, nur die Hälfte  $AC$  des Stabes in Betracht zu ziehen.

An der Einspannstelle  $A$  wirken auf den Balken

$$\begin{aligned} &\text{ein Kräftepaar vom Momente } M_A \\ &\text{„ Auflagerdruck } A = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}. \end{aligned}$$

Für den beliebigen um  $x$  von der Einspannstelle  $A$  abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = M_A + Ax - \frac{p x^2}{2}.$$

Hiermit liefert die Gl. 41

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = M_A + Ax - \frac{p x^2}{2},$$

woraus unter Voraussetzung, dass  $\alpha$  und  $\Theta$  unveränderlich sind

$$-\frac{\Theta}{\alpha} \frac{dy}{dx} = M_A x + \frac{1}{2} Ax^2 - \frac{p x^3}{6}.$$

Die Integrationskonstante ist wegen der angenommenen Befestigungsweise der Stabenden, d. h. wegen

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = 0,$$

ebenfalls gleich Null.

Die unbekannt Grösse des Momentes  $M_A$  ergibt sich durch die Erwägung, dass für

$$x = \frac{l}{2} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

sein muss, aus der Gleichung

$$0 = M_A \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right) \frac{l^2}{4} - p \frac{l^3}{48}$$

zu

$$M_A = - \left( \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12} \right), \quad \dots \dots \dots 63)$$

also links drehend, wie nach der Form der elastischen Linie erwartet werden musste.

Hiermit das biegende Moment im Abstände  $x$  von  $A$

$$M_b = - \left( \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12} \right) + \left( \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2}.$$

Für die Stabmitte  $x = \frac{l}{2}$  folgt

$$M_b = \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{24}, \quad \dots \dots \dots 64)$$

d. i. absolut genommen  $\frac{Ql}{24}$  weniger, als das Moment an der Einspannstelle  $M_A$ .

Da  $M_b$  für die Mitte  $C$  positiv ist, so muss das Moment für einen Querschnitt zwischen  $A$  und  $C$  Null sein, entsprechend einem Wendepunkt der elastischen Linie. (In Gl. 40 wird  $\varrho = \infty$  für  $M_b = 0$ ).

Für den Fall, dass  $Q = 0$ , ergibt sich das Moment

im Punkte $A$ zu	$-\frac{Pl}{8},$
„ „ $C$ „	$+\frac{Pl}{8},$
„ Abstände $x = \frac{l}{4}$ (Wendepunkt)	0.

Für den Fall, dass  $P=0$ , wird das Moment

$$\begin{array}{ll} \text{im Punkte } A & -\frac{Ql}{12} = -\frac{pl^2}{12}, \\ \text{„ „ } C & +\frac{Ql}{24} = +\frac{pl^2}{24}, \\ \text{„ Abstände } x=0,2113l \text{ (Wendepunkt)} & O. \end{array}$$

Die Gleichung der elastischen Linie wird erhalten durch nochmalige Integration des für den ersten Differentialquotienten erhaltenen Ausdruckes unter Beachtung, dass für  $x=0$  auch  $y=0$

$$-\frac{\Theta}{\alpha} y = \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} A x^3 - \frac{p x^4}{24}.$$

Hieraus findet sich die grösste Durchbiegung  $y'$  für  $x = \frac{l}{2}$  zu

$$y' = \left( P + \frac{Q}{2} \right) \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{192}. \quad \dots \dots \dots 65)$$

### § 19. Körper von gleichem Widerstande.

Körper dieser Art sind so geformt, dass die Belastung in sämtlichen Querschnitten eines und desselben Körpers die gleiche Grösstspannung hervorruft. Unter Bezugnahme auf die Beziehungen 45 heisst dies, dass für sämtliche Querschnitte

$$k_z = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}}, \text{ bzw. } k = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_2}}$$

constant ist. Daraus folgt, dass die Querschnitte mit  $M_b$  sich derart ändern müssen, dass der Quotient

$$M_b : \frac{\Theta}{e_1}, \text{ bzw. } M_b : \frac{\Theta}{e_2}$$

für alle Querschnitte gleichbleibt.

Hiermit führt Gl. 40 zu

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} = \alpha \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}} \frac{1}{e_1} = \alpha \frac{k_z}{e_1},$$

woraus ersichtlich, dass im Falle eines constanten Abstandes  $e_1$  und bei Unveränderlichkeit von  $\alpha$  die elastische Linie zum Kreise wird.



I. Der einerseits eingespannte, andererseits freie Körper mit rechteckigem Querschnitt von constanter Breite  $b$  ist am freien Ende durch  $P$  belastet, Fig. 48.

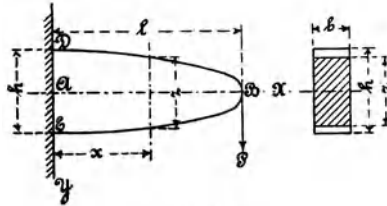


Fig. 48.

Für den um  $x$  von  $A$  abstehenden Querschnitt beträgt

$$M_b = P(l - x) \quad \Theta = \frac{1}{12} b z^3 \quad e_1 = e_2 = \frac{z}{2} \quad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6} b z^2.$$

Folglich

$$k_z = \frac{P(l - x)}{\frac{1}{6} b z^2} = \text{constant},$$

woraus mit  $l - x = x_1$

$$z^2 = \frac{6 P}{k_z b} (l - x) = \frac{6 P}{k_z b} x_1,$$

d. i. die Gleichung einer Parabel. Demnach ist in Fig. 48 die Begrenzung  $EBD$  nach einer Parabel zu gestalten, für welche  $BA$  die Hauptachse,  $B$  der Scheitel und  $E(D)$  ein zweiter Punkt ist, dessen Lage bestimmt erscheint durch

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6 P l}{k_z b}}.$$

Die Durchbiegung  $y'$  am freien Ende ergibt sich unter Zugrundelegung des Coordinatensystems  $x y$  (vergl. Fig. 33) nach Gl. 40 und 41 unter Beachtung des oben Bemerkten aus

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha k_z}{e_1} = \frac{\alpha k_z}{\frac{z}{2}} = \frac{\alpha k_z}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{6 P}{k_z b} (l - x)}} = \frac{\alpha k_z \sqrt{l}}{h \sqrt{l - x}}$$

$$y' = \alpha \left( \frac{16 P l \sqrt{l}}{b h^3} \sqrt{l - x}^3 + \frac{24 P l^2}{b h^3} x - \frac{16 P l^3}{b h^3} \right),$$

sofern  $\alpha$  als unveränderlich betrachtet und im Auge behalten wird, dass für

$$x=0 \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad y = 0,$$

zu

$$y' = \alpha \frac{8 Pl^3}{b h^3} \dots \dots \dots 66)$$

Für den gleichbelasteten, jedoch prismatischen Stab ergab Gl. 54

$$y' = \frac{\alpha}{\frac{1}{12} b h^3} \frac{Pl^3}{3} = \alpha \frac{4 Pl^3}{b h^3},$$

d. i. genau die Hälfte des Werthes Gl. 66.

Nach Massgabe der vorstehenden Rechnung würde der Querschnitt im Angriffspunkte der Kraft  $P$  gleich Null sein. Dieses natürlich unzulässige Ergebniss ist die Folge der Vernachlässigung der Schubkraft.

Unter „Biegung und Schub“ wird in § 52 das zur Feststellung der Querschnittsabmessungen gegen das Ende des Stabes hin Erforderliche bemerkt werden.

**2. Der Stab wie unter 1, jedoch von constanter Höhe  $h$ , Fig. 49.**

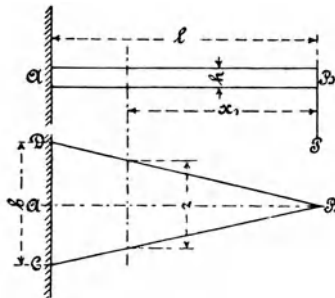


Fig. 49.

Für den um  $x_1$  vom freien Ende  $B$  abstehenden Querschnitt ergibt sich

$$M_b = P x_1 \quad \Theta = \frac{1}{12} h^3 z \quad e_1 = e_2 = \frac{h}{2} \quad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6} h^2 z$$

$$k_z = \frac{P x_1}{\frac{1}{6} h^2 z} = \text{constant}$$

$$z = \frac{6 P}{k_z h^2} x_1,$$

d. h. die Begrenzungslinien  $BC$  und  $BD$  sind Gerade, deren Lage durch

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \frac{b}{2} = \frac{3 Pl}{k_z h^2}$$

bestimmt wird.

Die elastische Linie ist nach Massgabe der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{k_z}{e_1} = 2 \alpha \frac{k_z}{h}$$

infolge der constanten Höhe des Stabes ein Kreis vom Halbmesser

$$\varrho = \frac{h}{2 \alpha k_z}.$$

Die Durchbiegung  $y'$  am freien Ende  $B$  wird daher

$$y' = \frac{l^2}{2\varrho} = \alpha k_z \frac{l^2}{h} = \alpha \frac{6 Pl^3}{b h^3} \quad \dots \quad 67)$$

d. i. 1,5 mal so gross, wie die Durchbiegung (nach Gl. 54) unter sonst gleichen Verhältnissen bei constanter Breite sein würde.

Vergleiche Schlussbemerkung zu Ziff. 1.

**3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 50, und ist durch die im Punkte  $C$  angreifende Kraft  $P$  belastet.**

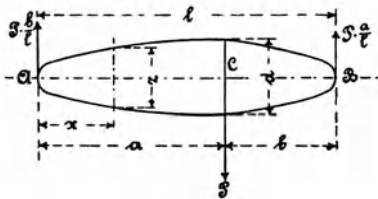


Fig. 50.

Der Theil  $AC$  verhält sich wie ein bei  $C$  eingespannter und bei  $A$  durch  $P \frac{b}{l}$  belasteter Stab, der Theil  $BC$  wie ein bei  $C$  ein-

gespannter und bei  $B$  mit  $P \frac{a}{l}$  belasteter Balken (Fall wie bei Ziff. 1 und 2).

Ist der Querschnitt kreisförmig, so findet sich für den beliebigen, um  $x$  von  $A$  abstehenden Querschnitt der Strecke  $AC$

$$M_b = P \frac{b}{l} x \quad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{\pi}{32} z^3.$$

Damit wird

$$k_z = \frac{P \frac{b}{l} x}{\frac{\pi}{32} z^3} = \text{constant},$$

$$z^3 = \frac{32 P b}{\pi k_z l} x,$$

d. i. die Gleichung einer cubischen Parabel, für welche  $AC$  die Hauptachse,  $A$  der Scheitel ist und deren Ordinate im Querschnitt bei  $C$  durch die Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 P a b}{\pi k_z l}}$$

bestimmt wird.

Da sich für die Strecke  $BC$  ein ganz entsprechendes Ergebnis findet, so besteht der gesuchte Körper  $AB$  aus zwei nach cubischen Parabeln, welche sich im Querschnitt bei  $C$  schneiden, geformten Umdrehungskörpern.

Vergleiche Schlussbemerkung zu Ziff. 1.

## § 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit.

Die Voraussetzungen, welche in § 16 zur Bestimmung der Biegungsanstrengung, Gl. 45, führten, sind:

1. Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht schneidet.

2. Die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, wirken nicht auf einander ein, sind also unabhängig von einander.
3. Die ursprünglich ebenen Querschnitte des Stabes bleiben eben.
4. Der Dehnungscoefficient ist für alle Fasern gleich gross, also auch unabhängig von der Grösse und dem Vorzeichen der Dehnungen oder Spannungen.

Diese Annahmen treten am deutlichsten vor das Auge, wenn

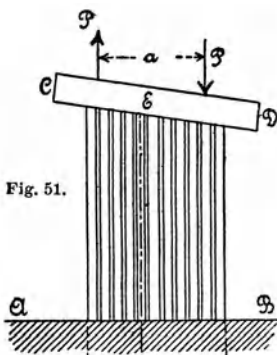


Fig. 51.

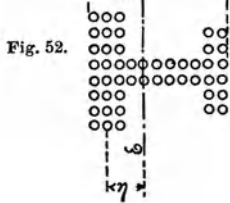


Fig. 52.

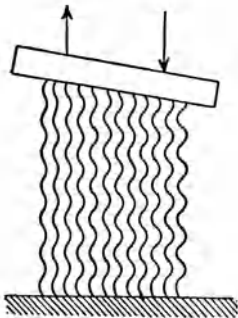


Fig. 53.

wir uns einen Körper so ausgeführt und beansprucht denken, dass sie erfüllt sind. Zu dem Zwecke stellen wir uns vor, der Stab bestehe aus einzelnen, von einander unabhängigen, ursprünglich gleich langen Fasern, etwa wie die Figuren 51 und 52 (Durchschnitt) erkennen lassen. Mit dem einen Ende seien dieselben im Boden  $AB$  befestigt, mit dem anderen an der Platte  $CD$ . Die letztere, welche wir uns gewichtslos denken wollen, werde in der Mittelebene von einem Kräftepaar  $PP$ , dessen Moment  $M_b = Pa$  ist, ergriffen. Sie dreht sich in Folge dessen um eine Achse  $EE$ . Die links von dieser gelegenen Fasern werden gedehnt, die rechts davon befindlichen erfahren eine Verkürzung. Von den gedrückten Fasern werde vorausgesetzt, dass sie sich nach der Seite hin nicht ausbiegen. Die Auffassung der Fasern als vollkommen gleicher Spiralfedern, etwa wie in Fig. 53 gezeichnet, wird diese Vorstellung erleichtern.

Wie ohne Weiteres ersichtlich, sind bei dieser Sachlage die Verlängerungen bzw. Verkürzungen der Fasern proportional dem Abstände von der Achse  $EE$ .

Bedeutet  $\lambda$  die Längenänderung, welche die ursprünglich  $l$  langen und im Abstände  $\eta$  von der Achse  $EE$  gelegenen Fasern er-

fahren haben, so ist

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$$

die verhältnissmässige Dehnung im Abstände  $\eta$ . Wird diese Grösse im Abstände 1 mit  $\varepsilon'$  bezeichnet, so findet sich

$$\varepsilon = \varepsilon' \eta.$$

Hiermit ist eine Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta$$

verknüpft, welcher bei dem Querschnitt  $f_o$  der im Abstände  $\eta$  gelegenen Fasern eine Kraft

$$\sigma f_o = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_o$$

entspricht.

Die Gesamtheit dieser inneren Kräfte muss sich mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht befinden. In Folge dessen muss sein:

die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null, d. h.

$$\Sigma \sigma f_o = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_o = 0,$$

und ferner die Summe der Momente dieser inneren Kräfte gleich dem Moment des Kräftepaares  $Pa = M_b$ , d. h.

$$\Sigma \sigma f_o \cdot \eta = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} f_o \eta^2 = M_b.$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung folgt bei Unveränderlichkeit von  $\alpha$

$$\Sigma f_o \eta = 0,$$

d. h. die Nullachse  $EE$  geht durch den Schwerpunkt sämtlicher Faserquerschnitte, bildet also die zweite Hauptachse des Gesamtquerschnittes.

Die zweite Bedingungsgleichung führt unter der soeben genannten Voraussetzung,  $\alpha$  betreffend, und bei Beachtung, dass  $\Sigma f_o \eta^2 = \Theta$ , zu

$$M_b = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \Theta.$$

Beträgt der Abstand  $\eta$  der am stärksten gezogenen Fasern  $e_1$ , der am stärksten gedrückten  $-e_2$ , so erfahren diese Fasern die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon'}{\alpha} e_1, \text{ bzw. } \sigma_2 = -\frac{\varepsilon'}{\alpha} e_2,$$

woraus folgt

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha} = \frac{\sigma_1}{e_1} \quad \frac{\varepsilon'}{\alpha} = -\frac{\sigma_2}{e_2}$$

und hiermit

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1} \quad M_b = -\sigma_2 \frac{\Theta}{e_2}.$$

Bei Berücksichtigung, dass

$$\sigma_1 \leq k_z \quad -\sigma_2 \leq k,$$

folgt

$$M_b \leq k_z \frac{\Theta}{e_1} \quad M_b \leq k \frac{\Theta}{e_2}$$

oder

$$k_z \geq \frac{M_b}{\Theta} e_1 \quad k \geq \frac{M_b}{\Theta} e_2,$$

d. s. die in § 16 entwickelten Gleichungen 45.

Wir bemerken — wie hervorgehoben sei — dass bei der vorausgesetzten Sachlage die Stabachse gerade bleibt, dass also das Kräftepaar  $PP$  mit dem Momente  $Pa$  eine Krümmung derselben nicht veranlasst.

An die Stelle der Krümmungsachse, welche sich im Krümmungsmittelpunkt projicirt, tritt hier der Durchschnitt der Ebenen  $CD$  und  $AB$ .

Weiter bemerken wir, dass hier die Ebene  $CD$  aufhört, senkrecht zur Faserrichtung und zur Stabachse zu stehen.

Die Beziehung 33, welche für den gebogenen Stab Fig. 33 unter der Voraussetzung abgeleitet worden war, dass die Querschnitte senkrecht zur gekrümmten Mittellinie stehen, gilt eben auch dann, wenn die Achse gerade bleibt, Fig. 51; nur müssen dann die einzelnen Querschnitte sich gegen die Achse derart neigen, dass ihre Ebenen sich sämmtlich in derselben Geraden schneiden, welche den Durchschnitt der Ebenen  $AB$  und  $CD$  bildet.

Die Tangente des Neigungswinkels eines beliebigen zwischen

$AB$  und  $CD$  gelegenen Querschnittes ist proportional dem Abstand des Schwerpunktes desselben über  $AB$ .  $\rho$  hat dann hierbei allerdings nicht mehr die Bedeutung des Krümmungshalbmessers, sondern bezeichnet den Abstand der Schwerachse  $EE$  von der Durchschnitlinie der Ebenen  $AB$  und  $CD$ . Eine Ersetzung von  $\frac{1}{\rho}$  durch  $\pm \frac{d^2 y}{dx^2}$  ist dann natürlich unzulässig.

1. Was nun zunächst die Voraussetzung unter 1 betrifft, dass die auf den Stab wirkenden äusseren Kräfte für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar liefern, so ist festzustellen, dass dieselbe nicht erfüllt zu sein pflegt. Die Erzeugung des biegenden Momentes erfordert Kräfte, welche nur ganz ausnahmsweise, etwa wie im Falle der Fig. 51, wobei die Stabachse gerade bleibt, oder im Falle der Fig. 54 für den mittleren Theil  $AB$ , der dann wegen  $M_b = \text{constant}$  nach einem Kreise gekrümmt ist,



Fig. 54.

nicht mehr als ein Kräftepaar ergeben. In der Regel ist immer eine Schubkraft vorhanden (vergl. Einleitung zu § 16), deren Einfluss allerdings in vielen Fällen in den Hintergrund tritt.

Hinsichtlich der Fälle, in denen die Schubkraft Bedeutung erlangt, muss auf „Biegung und Schub“ in § 52 verwiesen werden.

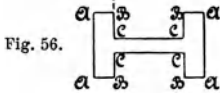
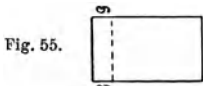
2. Was sodann die unter 2 genannte Voraussetzung anbelangt, dass die Fasern eine gegenseitige Wirkung auf einander nicht ausüben, so erkennt man sofort, dass dieselbe für einen aus dem Ganzen bestehenden Stab nicht erfüllt ist. Wie wir in § 1, bzw. § 11 sahen, ist verbunden: mit der Dehnung in Richtung der Stabachse eine Zusammenziehung senkrecht zu derselben, also eine Verminderung des Faserquerschnittes, und mit der Verkürzung eine Querdehnung, demnach eine Vergrößerung des Faserquerschnittes. Diese Formänderungen senkrecht zur Stabachse sind um so bedeutender, je mehr die Dehnungen (positive wie negative) in Richtung der Fasern betragen. Da nun hier diese



Längsdehnungen mit dem Abstände von der Nullachse in absoluter Hinsicht zunehmen, so werden die von der letzteren weiter abstehenden Fasern sich quer auch mehr zusammenziehen, bezw. mehr dehnen wollen, als die unmittelbar benachbarten und nach der Nullachse hin gelegenen. In Folge dessen werden diese der angestrebten Quersammenziehung, bezw. Querdehnung zu einem Theile hinderlich sein. Dieser gegenseitige Einfluss der Fasern senkrecht zu ihrer Richtung muss nach dem Früheren (§ 7, bezw. 14), die Beziehung  $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ , also im Falle der Unveränderlichkeit von  $\alpha$  die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen beeinträchtigen und die Festigkeit etwas erhöhen (§ 9 Ziff. 1, bezw. § 14).

Ausserdem werden aber auch die fest mit einander verbundenen Fasern noch dadurch auf einander einwirken müssen, dass sich die weiter von der Nullachse abstehenden mehr ausdehnen bezw. verkürzen und deshalb gegenüber den unmittelbar benachbarten, dieser Achse näher gelegenen, ein Gleitungsbestreben haben.

In Bezug auf den gegenseitigen Einfluss der Fasern werden sich verschiedene Querschnittsformen verschieden verhalten (vergl. auch § 9). Vergleichen wir beispielsweise den rechteckigen Querschnitt (Fig. 55) mit dem  $\Gamma$ -förmigen Fig. 56, so erkennt man sofort, dass die auf der Linie  $GG$  liegenden Fasern des ersteren von ihren benachbarten inneren Fasern mehr beeinflusst werden müssen, als die in gleichem Abstand liegenden Fasern  $BCCB$  des anderen Querschnittes. Diese sind eben zum



grössten Theile nach innen frei.

Wird z. B. aus einem und demselben Material ein Stab vom Querschnitt Fig. 55 und ein solcher vom Querschnitt Fig. 56 hergestellt, alsdann für beide auf Grund der Gleichung

$$M_b = \sigma_1 \frac{O}{e_1}$$

die bei der Bruchbelastung eintretende grösste Fasernspannung  $\sigma_1$  ermittelt, so muss sich für den ersteren Stab ein etwas grösserer Werth, d. h. eine etwas grössere Biegefestigkeit ergeben, als für den letzteren.

Aus dem Erörterten folgt weiter beispielsweise für die breit-

basige Eisenbahnschiene, Fig. 57, dass die im Kopfe des Querschnittes zusammengedrückte Masse der Dehnung (positiven wie negativen) einen verhältnissmässig (im Vergleich zu dem, was bei den Entwicklungen in § 16 vorausgesetzt wird) grösseren Widerstand entgegengesetzt, als das Material in dem breiten, wenig hohen Fuss, und dass in Folge dessen die thatsächliche Nullachse oberhalb der horizontalen Schwerpunktsachse des Querschnittes gelegen sein muss. Wird der letztere so bestimmt, dass diese Achse in halber Höhe liegt, so kann hiernach der Querschnitt nicht als ganz rationell bezeichnet werden, namentlich dann nicht, wenn der Fuss sehr breit ist. In solchem Falle muss die wagerechte Hauptachse des Querschnittes entsprechend tiefer, als in halber Höhe sich befinden. Hierdurch erklärt sich auch eine verhältnissmässig grössere Widerstandsfähigkeit starkköpfiger Stuhlschienen u. s. w. sowohl gegenüber gewöhnlicher Biegungsbeanspruchung als auch gegenüber Schlagproben.

Je mehr sich die Querschnittsfläche in zwei schmale, der Nullachse parallele Streifen zusammendrängt, Fig. 58, um so geringer

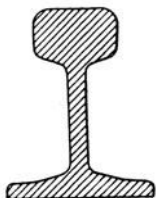


Fig. 57.



Fig. 58.

wird der gegenseitige Einfluss der Fasern aufeinander, um so zutreffender erscheinen unter sonst gleichen Verhältnissen die Beziehungen, welche auf Grund der Voraussetzung Ziff. 2 entwickelt wurden.

Ueberblicken wir das hinsichtlich des gegenseitigen Einflusses der Fasern Gefundene, so erkennen wir, dass im Allgemeinen die Anstrengungen  $k_z$ , bzw.  $k$ , wie sie sich nach den Gleichungen 45 ergeben, nicht mehr den Charakter der reinen Zug- bzw. Druckbeanspruchung besitzen, und dass es deshalb im Allgemeinen als richtig erscheint, bei Ermittlung der Abmessungen eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes als zulässige Anstrengung des Materials Werthe einzuführen, welche aus Biegungs-

versuchen gewonnen wurden. In wie weit es zutreffend ist, wenn an Stelle dieser Biegungsanstrengung die aus Zugversuchen abgeleitete Grösse  $k_z$  gesetzt wird, muss — streng genommen — durch Vergleichung der Ergebnisse von Zug- und von Biegungsversuchen für jedes Material festgestellt werden. Der Beschreitung dieses Weges können sich allerdings in manchen Fällen sehr erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

Bei zusammengesetzten Körpern, wie Gitterträgern u. s. w., welche so construirt sind, dass die einzelnen Theile fast nur Zug und Druck erfahren, ist naturgemäss mit  $k_z$  und  $k$  (falls nicht Knickung in Betracht kommt) zu rechnen.

3. Was die oben unter 3 aufgeführte Voraussetzung anlangt, dass die Querschnitte eben bleiben, so ist festzustellen, dass auch sie nicht genau zutrifft; die Schubkraft, welche mit dem biegenden Moment unvermeidlich verknüpft zu sein pflegt, wirkt auf Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte hin (vergl. „Biegung und Schub“ in § 52). Doch scheint, soweit das bis heute vorliegende Material ein Urtheil gestattet, die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte, bei ausschliesslich oder wenigstens in entschieden vorwiegender Weise auf Biegung beanspruchten Stäben zulässig zu sein.

Für einen Stab aus weichem Bessemerstahl von 140 mm Höhe und 55 mm Breite und 1200 mm Länge, welcher sich bei einer Auflagerentfernung von 1000 mm um 241,5 mm durchgebogen hatte, ohne zu brechen, stellte Bauschinger fest, dass bei dieser ganz bedeutenden Durchbiegung die ursprünglich ebenen Querschnitte eben, sowie senkrecht zur elastischen Linie geblieben waren, und die Länge der früher geraden, 1000 mm langen elastischen Linie sich nicht geändert hatte.

Versuche des Verfassers mit allerdings weniger hohen Stäben aus Schmiedeeisen führten zu dem gleichen Ergebniss.

4. Die Voraussetzung 4, dass der Dehnungscoefficient  $\alpha$  constant ist, also gleich für Zug und für Druck, sowie unabhängig von der Grösse der Spannungen oder Dehnungen, erscheint nur für manche Materialien, beispielsweise für Schmiedeeisen und Stahl, zulässig. Bei Gusseisen z. B. ist sie dagegen nicht zutreffend; hier nimmt  $\alpha$  mit wachsender Spannung oder Dehnung zu.

Für einen Stab aus diesem Material werden unter der Annahme,

dass die Querschnitte eben bleiben, zwar die Dehnungen proportional mit dem Abstände  $\eta$  von der Nullachse wachsen, nicht aber die Spannungen; letztere müssen vielmehr langsamer zunehmen, entsprechend dem Umstande, dass  $\alpha$  in  $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$  mit wachsender Dehnung (Spannung) abnimmt. Fig. 59 veranschaulicht dies. Für die beliebig um  $\eta$  von der Nullachse abtastende Faserschicht sei  $\overline{PP}_1$  die Dehnung und  $\overline{PP}_2$  die Spannung; dann ist für Gusseisen

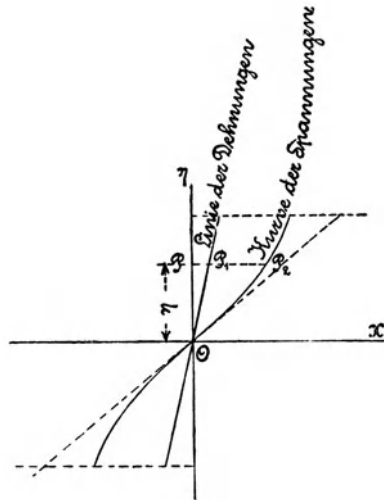


Fig. 59.

der geometrische Ort aller Punkte  $P_2$  eine gegen die Achse der  $\eta$  gekrümmte, in  $OP_2$  sich projicirende Fläche, wenn auch die Punkte  $P_1$  auf der durch die Nullachse gehenden Ebene  $OP_1$  liegen. Die Spannungen nehmen hiernach nicht mit der ersten Potenz von  $\eta$  zu, sie wachsen langsamer. In Folge dessen liefern die Gleichungen 43 bis 45 die Spannungen grösser, als sie thatsächlich sind. Ein und dasselbe Gusseisen muss deshalb bei Biegungsversuchen eine höhere Festigkeit ergeben, als bei Zugversuchen.

Aus dem Erörterten folgt dann weiter, dass das nach der Nullachse hin gelegene Material im Verhältniss zu seinem Abstände von dieser stärker gespannt ist, als das weiter auswärts befindliche. Es wird also das erstere nicht so schlecht ausgenützt, als nach Massgabe des in der Gleichung 42 ausgesprochenen Gesetzes anzunehmen ist. Daher werden Stäbe mit Querschnitten, bei denen

sich das Material nach der Nullachse hin zusammendrängt, widerstandsfähiger sein, als nach Gl. 42 zu schliessen ist. Beispielsweise wird ein Stab mit kreisförmigem Querschnitt eine grössere Bruchbelastung, bestimmt aus der Gleichung 43, liefern müssen, als ein Stab mit quadratischem Querschnitt; dieser wird dagegen eine grössere Biegungsfestigkeit aufzuweisen haben, als der I-förmige Querschnitt u. s. w.

5. Zusammenfassung.

Bedeutet

$k_b$  die im Allgemeinen aus Biegungsversuchen abgeleitete zulässige Anstrengung des Materials,

$e$  den Abstand der am stärksten angestregten Faser des auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes,

so wird nach Massgabe des unter 2 und 4 Erkannten an Stelle der Beziehungen 45 zu setzen sein

$$M_b \leq k_b \frac{\Theta}{e} . . . . . 68)$$

Hierin ist  $k_b$  — streng genommen für alle Materialien — abhängig von der Querschnittsform. Von grösserer Bedeutung wird diese Abhängigkeit — wie das vorliegende Versuchsmaterial schliessen lässt — jedoch erst bei solchen Materialien, für welche der Dehnungscoefficient  $\alpha$  veränderlich ist (Gusseisen); bei Materialien mit constantem  $\alpha$  (Schmiedeseisen, Stahl) tritt sie zurück.

Die Feststellung der elastischen Linie auf Grund der Gl. 41 liefert für den Fall, dass  $\alpha$  constant ist, befriedigende Ergebnisse. Trifft jedoch diese Voraussetzung nicht zu, so kann bei starker Beanspruchung des Materials der Unterschied zwischen Rechnung und thatsächlichem Ergebniss erheblich ausfallen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Nach Gleichung 62

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{\Theta}$$

kommt es bezüglich der Durchbiegung  $y'$  eines in der Mitte mit  $P$  belasteten Stabes nur auf das Trägheitsmoment  $\Theta$  des Querschnittes an; in Folge dessen es z. B. gleichgiltig erscheint, ob bei einem Querschnitte, wie Fig. 42, die breite oder die schmale Flansche als die gezogene auftritt, wenn nur  $P$  und  $l$  die gleichen Werthe besitzen. Thatsächlich erweist sich bei gusseisernen Trägern wegen der Veränderlichkeit von  $\alpha$  die Durchbiegung im letzteren Falle entschieden grösser, als im ersteren. (Vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888 S. 224.)

**§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaars keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.**

**I. Hauptachsen eines Querschnittes. Hauptträgheitsmomente.**

In der Fläche, Fig. 60, sei  $O$  ein beliebiger Punkt derselben,  $OX$  und  $OY$  ein rechtwinkliges, sonst jedoch in ersterer beliebig gelegenes Achsenkreuz; die Coordinaten des mit dem Flächenpunkte  $P$  zusammenfallenden Flächenelementes seien  $x$  und  $y$ . Dann ist das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die  $X$ -Achse  $\Theta_x = \int y^2 df$ ,  
 " " " "  $Y$ - "  $\Theta_y = \int x^2 df$   
 und hinsichtlich der unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die  $X$ -Achse geneigten Geraden  $OO$ , von welcher  $P$ , demnach auch  $df$  um  $z = y \cos \varphi - x \sin \varphi$  absteht,

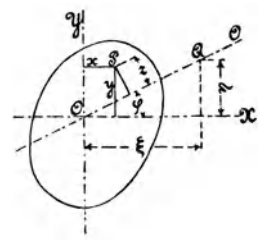


Fig. 60.

$$\Theta = \int z^2 df = \int (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 df$$

$$\Theta_1 = \Theta_x \cos^2 \varphi + \Theta_y \sin^2 \varphi - 2 Z \sin \varphi \cos \varphi, \dots (69)$$

sofern

$$Z = \int x y df. \dots (70)$$

Auf der Achse  $OO$  werde nun von  $O$  aus die Strecke  $\overline{OQ} = r = \sqrt{\frac{1}{\Theta}}$  aufgetragen und den Coordinaten des so erhaltenen Punktes  $Q$  in Bezug auf  $OX$  und  $OY$  die Bezeichnung  $\xi$  und  $\eta$  ertheilt, so dass

$$\xi = r \cos \varphi \quad \eta = r \sin \varphi.$$

Aus Gleichung 69 folgt dann mit Rücksicht darauf, dass

$$\Theta = \frac{1}{r^2}$$

$$1 = \Theta_x r^2 \cos^2 \varphi + \Theta_y r^2 \sin^2 \varphi - 2 Z r^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$1 = \Theta_x \xi^2 + \Theta_y \eta^2 - 2 Z \xi \eta.$$

Diese Beziehung zwischen den Veränderlichen  $\xi$  und  $\eta$  ist die Gleichung einer Ellipse. Hiernach ergibt sich der geometrische Ort aller derjenigen Punkte  $Q$ , welche erhalten werden, wenn auf

jeder durch  $O$  möglichen Geraden die Wurzel aus dem reciproken Werthe des für diese Gerade sich ergebenden Trägheitsmomentes aufgetragen wird, als Ellipse, mit  $O$  als Mittelpunkt, d. i. die sogenannte Trägheitsellipse. Nun sind in einer Ellipse zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen vorhanden — die grosse und die kleine Achse —, für welche das Glied mit dem Produkt der beiden Coordinaten verschwindet. Dies tritt ein, wenn  $Z = 0$ . Werden demnach diese beiden Achsen zu Achsen der  $x$  und der  $y$  gewählt, so wird der Ausdruck Gleichung 70 zu Null.

Ferner ist bekannt, dass die grosse Halbachse der Ellipse der grösste und die kleine Halbachse der kleinste der möglichen Werthe von  $r$  ist. Diese beiden ausgezeichneten Richtungen werden als die beiden Hauptachsen der Fläche für den Punkt  $O$  bezeichnet. Sie sind nach Massgabe des Vorstehenden gekennzeichnet durch

$$Z = \int x y \, df = 0$$

und

$$\Theta_x = \text{Max.}, \quad \Theta_y = \text{Min.} \quad \text{oder} \quad \Theta_x = \text{Min.}, \quad \Theta_y = \text{Max.}$$

Dieser kleinste und dieser grösste Werth unter den Trägheitsmomenten, welche sich für alle Geraden ergeben, die durch den Punkt  $O$  in der Ebene der Fläche gezogen werden können, heissen die beiden Hauptträgheitsmomente der Fläche für den Punkt  $O$  derselben.

Werden die beiden Hauptträgheitsmomente mit  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  bezeichnet, so findet sich das Trägheitsmoment  $\Theta$  für eine beliebige durch  $O$  gehende Gerade, welche mit der Achse des Hauptträgheitsmomentes  $\Theta_1$  den Winkel  $\varphi$  einschliesst, nach Gleichung 69 zu

$$\Theta = \Theta_1 \cos^2 \varphi + \Theta_2 \sin^2 \varphi. \quad . . . . . 71)$$

Besitzen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  gleiche Grösse, so folgt

$$\Theta = \Theta_1 = \Theta_2,$$

d. h. die Trägheitsmomente für alle durch  $O$  möglichen Geraden sind einander gleich. Die Trägheitsellipse geht dann in einen Kreis über.

Das Vorstehende gilt für einen beliebigen Punkt der Fläche. Dementsprechend hat eine Fläche unendlich viele Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Wird von den Hauptachsen oder den Hauptträgheitsmomenten eines Querschnittes kurz hin gesprochen, so sind

hierunter die entsprechenden Grössen für den Schwerpunkt des letzteren verstanden.

## 2. Biegungsanstrengung.

Wir wählen die beiden Hauptachsen des Querschnittes Fig. 61 zu Achsen der  $y$  und  $z$ .  $\Theta_1$  gelte als das Trägheitsmoment in Bezug auf die Hauptachse  $OY$  und  $\Theta_2$  als dasjenige hinsichtlich der Hauptachse  $OZ$ . Ferner sei  $OM_b$  die Paarachse des biegenden Kräftepaars vom Momente  $M_b$ , d. h. diejenige Gerade, welche in  $O$  senk-

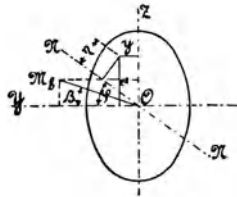


Fig. 61.

recht zur Paarebene steht, mit ihrer Grösse  $OM_b$  das Moment  $M_b$  darstellt und derart eingetragen wird, dass von  $M_b$  nach  $O$  hin gesehen das Moment  $M_b$  rechts drehend erscheint. Die zur Krümmungsachse, welche um  $\varrho$  von  $O$  absteht, parallele Nullachse besitze die Lage  $NN'$ , schliesse also mit  $OY$  den Winkel  $\varphi$  ein, während  $OM_b$  um  $\beta$  gegen  $OY$  geneigt ist.

Nach Gleichung 34 ist die Spannung  $\sigma$  in dem Flächenelement  $df$ , dessen Lage durch  $y$  und  $z$  bestimmt ist

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{\eta}{\varrho} = \frac{1}{\alpha} \frac{z \cos \varphi - y \sin \varphi}{\varrho}.$$

Je die Summe der Momente, welche diese Spannung für alle Flächenelemente in Bezug auf die  $y$ - und die  $z$ -Achse ergibt, muss sich im Gleichgewicht befinden mit den Componenten des Kräftepaars  $M_b$ , d. i. mit

$$M_b \cos \beta, \text{ bzw. } M_b \sin \beta.$$

Folglich

$$M_b \cos \beta = \int \sigma df \cdot z = \int \frac{1}{\alpha} \frac{z \cos \varphi - y \sin \varphi}{\varrho} z df,$$

$$M_b \sin \beta = - \int \sigma df \cdot y = - \int \frac{1}{\alpha} \frac{z \cos \varphi - y \sin \varphi}{\varrho} y df.$$



Unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Dehnungscoefficienten  $\alpha$  und unter Beachtung, dass  $OY$  und  $OZ$  die Hauptachsen des Querschnittes sind, für welche die Grösse  $Z$  (Gl. 70) verschwindet, ergibt sich

$$M_b \cos \beta = \frac{1}{\alpha \varrho} \Theta_1 \cos \varphi \text{ oder } \frac{\cos \varphi}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta_1} \cos \beta$$

$$M_b \sin \beta = \frac{1}{\alpha \varrho} \Theta_2 \sin \varphi \text{ oder } \frac{\sin \varphi}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta_2} \sin \beta$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \operatorname{tg} \beta \quad . . . . . 72)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha M_b \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\Theta_2^2}} \quad . . . . . 73)$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{\eta}{\varrho} = M_b \eta \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\Theta_2^2}} \quad . . . . . 74)$$

oder

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{z \cos \varphi - y \sin \varphi}{\varrho} = M_b \left( \frac{z \cos \beta}{\Theta_1} - \frac{y \sin \beta}{\Theta_2} \right). \quad 75)$$

Die Gleichung 74 geht in die Gleichung 42 über, wenn

$$\beta = 0,$$

d. h. wenn die Paarachse mit einer der beiden Hauptachsen zusammenfällt, oder

$$\text{wenn } \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta,$$

d. h. wenn die Hauptträgheitsmomente und damit alle Trägheitsmomente gleich sind, was beispielsweise zutrifft für den Kreis, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, überhaupt für alle regelmässigen Vielecke, für den kreuzförmigen Querschnitt bei gleichen Abmessungen der Rippen u. s. f.

Für den besonderen Fall des Rechteckes, Fig. 62, folgt wegen

$$\Theta_1 = \frac{1}{12} b h^3 \quad \Theta_2 = \frac{1}{12} b^3 h$$

aus Gleichung 72

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{h}{b} \right)^2 \operatorname{tg} \beta.$$

Die grösste Spannung  $\sigma_{max}$  wird auftreten im Punkte  $E$ , für welchen  $z = 0,5 h$ ,  $y = -0,5 b$

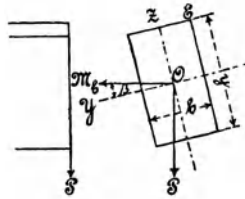


Fig. 62.

$$\sigma_{max} = \frac{6 M_b}{b h} \left( \frac{\cos \beta}{h} + \frac{\sin \beta}{b} \right)$$

und mit Rücksicht auf § 20, Ziff. 5

$$k_b \geq \frac{6 M_b}{b h} \left( \frac{\cos \beta}{h} + \frac{\sin \beta}{b} \right). \dots \dots \dots 76)$$

**3. Durchbiegung.**

Die Durchbiegung eines Stabes, dessen Belastungsebene die Querschnitte nicht in einer der beiden Hauptachsen schneidet, pflegt nur insofern praktisches Interesse zu haben, als unter Umständen der Stab gehindert sein kann, sich in der Richtung zu be-

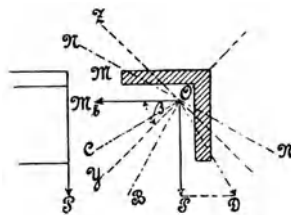


Fig. 63.

wegen, in welcher er sich durchbiegen will, wodurch Zusatzkräfte wacherufen werden. Denken wir uns beispielsweise einen  $l$  langen Stab von dem in Fig. 63 gezeichneten Querschnitt an einem Ende eingespannt und am anderen Ende mit  $P$  belastet, so ergibt sich für die senkrechte Belastungsebene  $OP$  die horizontale Paarachse  $\overline{OM}_b = M_b = Pl$ . Unter der Voraussetzung, dass der winkelförmige

Querschnitt gleiche Schenkel besitzt, werden die beiden Hauptachsen  $OY$  und  $OZ$  unter  $45^\circ$  gegen den Horizont geneigt sein. Bezeichnet nun  $\Theta_1$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptachse  $OY$  und  $\Theta_2$  dasjenige hinsichtlich der zweiten Hauptachse  $OZ$ , so folgt die Lage der Nullachse  $NN$  nach Gleichung 72 unter Beachtung, dass  $\beta = 45^\circ$ . Da die Krümmungsachse parallel zu  $NN$  läuft, so ergibt sich die Durchbiegungsrichtung in der zu  $NN$  senkrechten Geraden  $OB$ . Hiermit wird sich das eine Ende des Stabes unter Einwirkung der vertikalen Belastung  $P$  in der Richtung  $OB$  durchbiegen.

Wenn nun zwei solche Stäbe mit einander verbunden sind, wie z. B. Fig. 64 erkennen lässt, so wird diese Durchbiegung in Folge der Verbindung mehr oder minder vollständig gehindert, d. h. auf die beiden Stäbe wirkt noch je eine horizontale, nach innen gerichtete Kraft  $H$ , welche unter Umständen, namentlich dann, wenn



Fig. 64.

sie nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht — und damit auch auf Verdrehung hinwirkt —, die Anstrengung des Materials wesentlich beeinflussen kann.

Unter der Annahme, dass die Abweichung der Träger in horizontaler Richtung durch ihre Verbindung vollständig gehindert wird, würde sich  $H$  aus der Erwägung ergeben, dass die Durchbiegungsrichtung mit  $OP$  zusammenfallen muss. Damit dies eintritt, müsste  $\sphericalangle YON = \varphi = 45^\circ$  sein, also nach Gleichung 72

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}.$$

Die hierdurch bestimmte Lage der Paarachse  $OC$  lieferte in der zu ihr Senkrechten  $OD$  die Richtung der Belastung (für vertikale Durchbiegung) und damit in  $\overline{PD}$  die gesuchte Horizontalkraft  $H$ .

## § 22. Biegungsversuche.

### I. Biegungsversuche im Allgemeinen.

Biegungsversuche werden in der Regel nach Massgabe der Fig. 46 angestellt und zwar derart, dass die Belastung  $P$  in der Mitte des Stabes angreift. Unter der Voraussetzung, dass das Eigengewicht desselben vernachlässigt werden darf, ergibt sich alsdann für den mittleren Querschnitt die Durchbiegung  $y'$  der Mittellinie des Stabes nach Gleichung 62 zu

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{\Theta} \dots \dots \dots 62)$$

und die Spannung  $\sigma_1$  der um  $e_1$  von der Nullachse abstehenden und am stärksten gespannten Fasern nach Gleichung 56 a und Gleichung 43 zu

$$\sigma_1 = \frac{Pl}{4\Theta} e_1.$$

Durch Beobachtung der zu einer jeden Belastung  $P$  gehörigen Durchbiegung  $y'$  lässt sich für einen bestimmten Stab der Dehnungscoefficient

$$\alpha = 48 \frac{\Theta}{l^3} \frac{y'}{P},$$

oder auch dessen reciproker Werth (Elasticitätsmodul)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{l^3}{48\Theta} \frac{P}{y'}$$

ermitteln.

Es ist bisher allgemein üblich gewesen,  $\alpha$  bzw.  $\frac{1}{\alpha}$  in dieser Weise zu bestimmen, gleichgiltig, wie gross die Höhe des Stabes im Verhältniss zur Entfernung der Auflage war. Ist sie verhältnissmässig bedeutend, so verliert die Gleichung 62 an Genauigkeit, da die Durchbiegung des Stabes nicht bloß von dem biegenden Moment, sondern auch von der Schubkraft abhängt. Die Vernachlässigung des Einflusses der Schubkraft liefert  $\alpha$  zu gross und  $\frac{1}{\alpha}$  zu klein. Wie Verfasser in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888

S. 222 u. f. nachgewiesen hat, beträgt der hierdurch begangene Fehler in Fällen stattgehabter Ermittlung des Werthes  $\frac{1}{\alpha}$  über 30%.

Diese Ausserachtlassung der Schubkraft vorzugsweise ist es gewesen, welche zu dem Irrthum Veranlassung gegeben hat, dass der Elasticitätsmodul, d. i.  $\frac{1}{\alpha}$  für Biegung entschieden geringer sei, als für Zug und Druck<sup>1)</sup>. Die Erwägung des in § 20 unter 2 Erörterten führt übrigens ohne Weiteres zu der Erkenntniss, dass genaue Biegungsversuche und strenge Rechnung  $\alpha$  eher ein wenig kleiner, also  $\frac{1}{\alpha}$  eher etwas grösser, als Zug- und Druckversuche liefern müssen.

Unter Umständen kann der nach Gleichung 62 ermittelte Werth von  $\alpha$  noch durch einen anderen Einfluss ungenau geworden sein. In Folge der Durchbiegung gleitet der Stab auf den Auflagern; hierdurch werden Reibungskräfte wachgerufen, welche auf die Grösse des biegenden Momentes je nach den Verhältnissen mehr oder minder abändernd einwirken. (Vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888 S. 224 u. f.).

Im vierten Abschnitt unter „Biegung und Schub“ (§ 52), sowie unter „Zug, Druck, Biegung“ (§ 46), wird auf den Einfluss der Schubkraft, bezw. der zuletzt erwähnten Reibung näher einzugehen sein.

Die Beobachtung der Belastung  $P_{max}$ , bei welcher der Bruch des durchgebogenen Stabes erfolgt, führt mittelst der Gleichung

$$K_b = \frac{P_{max} l}{4 \Theta} e_1$$

zur Biegefestigkeit  $K_b$ , bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt.

Handelt es sich um zähes Material, wie z. B. weichen Stahl, so findet überhaupt kein Bruch statt; an die Stelle der Bruchfestigkeit tritt die Fliessgrenze (vergl. Schluss von § 11). Die Fortsetzung des Versuches, wobei der Stab eine überaus weitgehende

---

<sup>1)</sup> Hiernach ist auch die Angabe zu beurtheilen, dass der Elasticitätsmodul für Biegung um etwa ein Zehntel geringer als für Zug und Druck zu wählen sei.

Aenderung der Form, insbesondere auch des Querschnittes erfährt, kann, insoweit es sich um die Ermittlung von  $K_b$  handelt, dann unterbleiben.

## 2. Abhängigkeit der Biegefestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform.

Nach § 20, Ziff. 4 muss Gusseisen in Folge der Veränderlichkeit des Dehnungscoefficienten gegenüber den Konstruktionsmaterialien, welche innerhalb gewisser Spannungsgrenzen constante Dehnungscoefficienten besitzen, ein abweichendes Verhalten bei Biegungsversuchen zeigen; namentlich muss trotz der vergleichsweise geringen Formänderungen, welche Gusseisen erfährt, die Biegefestigkeit, berechnet auf Grund der Gleichung 43

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1}$$

wesentlich grösser sich ergeben, als die Zugfestigkeit und in bedeutendem Masse abhängig sein von der Querschnittsform.

In diese Verhältnisse gewähren die vom Verfasser angestellten Versuche Einblick. Ausführlich ist hierüber berichtet in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888 S. 193 bis 199, S. 221 bis 226, S. 1089 bis 1094, 1889 S. 137 bis 145.

Die im Folgenden je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichen Material bei einem und demselben Gusse hergestellt worden.

### Gusseisen A.

Zug- und Biegestäbe bearbeitet.

Zugversuche zur Ermittlung der Zugfestigkeit.

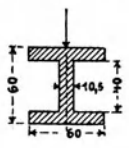
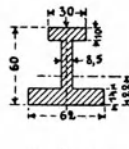
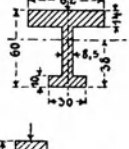
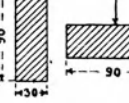
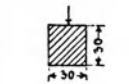

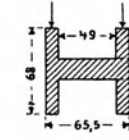
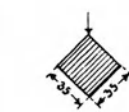
$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1445 + 1355 + 1409 + 1377}{4} = 1396 \text{ kg,}$$

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1369 + 1303 + 1355}{3} = 1342 \text{ „}$$

---


$$K_z = 1369 \text{ kg.}$$

47 Biegungsversuche zur Bestimmung der Biegefestigkeit.

No.	Querschnittsform	Biegefestigkeit $K_b = \frac{P_{max} l}{4 \Theta} e_1$ in kg		$\frac{6}{5} \sqrt{\frac{e}{z_o}}$ bezw. $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{e}{z_o}}$	Bemerkungen
		absolut	in Theilen der Zugfestigkeit		
1	2	3	4	5	6
1		1979	1,45	1,43	
2		2081	1,52	1,49	
3		2076	1,52	1,49	Es zerreißt die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.
4		2395	1,75	1,70	
5		2372	1,73	1,70	
6		2905	2,12	2,05	
7		2929	2,14	2,06	
8		3218	2,35	2,31	

Die Biegezugfestigkeit überschreitet hiernach die für dasselbe Gusseisen ermittelte Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material verhältnissmässig nach der Nullachse hin zusammendrängt. (Vergl. § 20, Ziff. 4.)

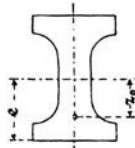


Fig. 65.

Die hierdurch festgestellte Abhängigkeit der Biegezugfestigkeit  $K_b$  von der Querschnittsform und der Zugfestigkeit  $K_z$  lässt sich mit guter Annäherung zum Ausdruck bringen durch die Beziehung

$$K_b = \mu \sqrt{\frac{e}{z_0}} \cdot K_z. \dots \dots \dots 77)$$

Hierin bedeutet

- $z_0$  den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittsfläche von dieser Schwerlinie, Fig. 65,
- $\mu$  einen Coefficienten, der im vorliegenden Falle (vergl. die Werthe der Spalten 4 und 5, S. 97) gewählt werden darf
  - a) für diejenigen Querschnitte, welche oben und unten durch eine wagrechte Gerade begrenzt sind, wie No. 1, 2, 3, 4, 5 und 7, etwa  $\frac{6}{5} = 1,2$ ,
  - b) für die beiden Querschnitte No. 6 und 8, welche oben und unten nicht durch wagrechte Gerade begrenzt sind, bei denen — streng genommen — nur eine einzige Faser am stärksten gespannt ist, etwa  $\frac{4}{3} = 1,33$ .

Ueber den Einfluss der Gusshaut auf  $\mu$  vergl. Ziff. 3, Schluss.

**Gusseisen B von hoher Festigkeit.**

Zug- und Biegezugstäbe bearbeitet.

Querschnitt kreisförmig, 36 mm Durchmesser.

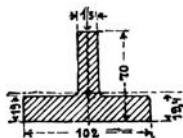
Zugfestigkeit =  $(1893 + 1847 + 1805 + 1846) : 4 = 1848$  kg.

Biegezugfestigkeit =  $(4321 + 4148 + 4073 + 3930 + 4295 + 3903 + 4513 + 3920) : 8 = 4139$  kg = 2,24. Zugfestigkeit.



**Gusseisen C.**

Zugstäbe bearbeitet, Biegungsstab unbearbeitet (also mit Gushaut).



Zugfestigkeit	1310 kg,
Biegungsfestigkeit	2114 kg,
Verhältniss beider	$2114 : 1310 = 1,61 : 1.$

**Gusseisen D.**

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

a) Querschnitt: Fig. 42.

Die schmale Flansche ist die gezogene, die breite die gedrückte.

Beim Biegungsversuch reißt die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.

Zugfestigkeit =	1418 kg,
Biegungsfestigkeit =	2077 kg,
Verhältniss beider	$2077 : 1418 = 1,46 : 1.$

b) Quadratischer Querschnitt:






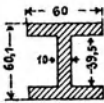
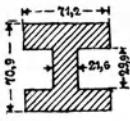
Biegungsfestigkeit	2539 kg,
Verhältniss	$2539 : 1418 = 1,78 : 1.$

**3. Einfluss der Gushaut.****Gusseisen E.**

Zugstäbe (3 Stück) bearbeitet.

Biegungsstäbe (14 Stück), zum Theil bearbeitet (5 Stück),  
zum Theil unbearbeitet (9 Stück).

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1560 + 1586 + 1640}{3} = 1595 \text{ kg.}$$

No.	Querschnittsform	Biegefestigkeit $K_b = \frac{P_{max} l}{4 \theta} e_1$ in kg			
		Stäbe bearbeitet		Stäbe unbearbeitet	
		absolut	in Theilen von $K_z$	absolut	in Theilen von $K_z$
1	2	3	4	5	6
1		2765	1,73	—	—
2		—	—	2295	1,44
3		—	—	2390	1,50
4		2254	1,41	—	—
5		—	—	2026	1,27

Der Vergleich der Spalten 4 und 6 zeigt deutlich, dass die Biegefestigkeit der bearbeiteten, also von der Guss-haut befreiten Stäbe entschieden grösser ist, als diejenige der unbearbeiteten Stäbe. Das Vorhandensein der Guss-haut wirkt demnach auf Verminderung der Biegefestigkeit hin.

Diese Erscheinung lässt sich erklären einmal durch den Einfluss etwa vorhandener Gussspannungen und zweitens dadurch, dass der Dehnungscoefficient für das Guss-hautmaterial geringer ist, wie derjenige für das weiter nach dem Innern des Stabes zu gelegene Gusseisen. Für die letztere Erklärung spricht insbesondere die Beobachtung, dass die Durchbiegungen, namentlich die bleibenden, bei den bearbeiteten Stäben verhältnissmässig weit grösser sind als bei den unbearbeiteten. Die geringere Nachgiebigkeit der an und für sich am stärksten bean-

spruchten äusseren Fasern hat zur Folge, dass die Festigkeit der inneren Fasern weniger ausgenützt wird.

Die Grösse des hiermit festgestellten Einflusses der Gusshaut auf die Biegefestigkeit hängt jedenfalls auch z. B. davon ab, ob die Gussstücke in frischem Sand oder in getrockneten Formen gegossen werden. Unter Umständen wird dieser Einfluss sehr bedeutend werden können<sup>2)</sup>.

Demgemäss ergibt sich der Coefficient  $\mu$  der Gleichung 77 für unbearbeitete Stäbe kleiner als für bearbeitete. Den Werthen in Spalte 6 würde ein Werth im Mittel reichlich 1 entsprechen, d. i. nahezu  $\frac{1}{6}$  kleiner als für die bearbeiteten Stäbe.

## IV. Knickung.

### § 23. Wesen der Knickung.

Es sei  $AB$ , Fig. 66, ein prismatischer Stab von grosser Länge und geringen Querschnittsabmessungen, belastet durch die Kraft  $P$ . Wenn nun die Voraussetzungen,

1. dass die Kraft  $P$  genau mit der Stabachse zusammenfällt,
2. dass diese thatsächlich eine gerade Linie bildet, dass das Material des Stabes durchaus gleichartig ist und an allen Stellen in dem gleichen Zustande sich befindet,
3. dass seitliche Kräfte auf den Stab nicht einwirken, dass derselbe überhaupt Einflüssen, welche solche hervorrufen würden, nicht unterworfen ist,

zutrafen, so würde der Stab nach § 11 nur eine Zusammendrückung in Richtung der Achse und senkrecht dazu eine Querschnittsvergrösserung erfahren. Eine Veranlassung, mit dem freien Ende seitlich auszuweichen, läge dann nicht vor.

In Wirklichkeit sind die genannten Voraussetzungen, namentlich diejenigen unter Ziff. 1 und 2 genau überhaupt nicht zu erfüllen, und angenähert um so weniger leicht, je grösser die Länge des Stabes im Verhältniss zu seinen Querschnittsabmessungen ist.

---

<sup>2)</sup> Hieraus folgt, dass nur bearbeitete Stäbe der Prüfung unterworfen werden sollten, falls man Zahlen erhalten will, welche unter sich mit Berechnung verglichen werden können.

Infolgedessen zeigt die Erfahrung, dass ein solcher Stab mit seinem freien Ende auszuweichen bestrebt ist, dass er eine Biegung erleidet. Um uns über das, was hierbei eintritt, ein richtiges Bild zu verschaffen, führen wir folgende Versuche durch.

a) Wir nehmen einen sorgfältig gerade gerichteten Stahldraht von 3,5 mm Durchmesser, spannen denselben möglichst genau senkrecht in den Schraubstock so ein, dass er eine freie Länge von  $l = 850$  mm besitzt, Fig. 67. Hierauf belasten wir ihn in Richtung seiner Achse mit  $P = P_1 = 0,4$  kg. Sobald Draht und Belastung sich selbst überlassen werden, beginnt das freie Ende des ersteren auszuweichen, bis er bei  $y' =$  rund 25 mm zur Ruhe gelangt. In dieser Lage befindet sich das biegende Moment  $P y'$  (sofern von dem Einfluss des Eigengewichtes des Drahtes abgesehen wird) im



Fig. 66.



Fig. 67.

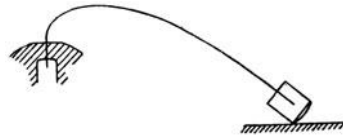


Fig. 68.

Gleichgewicht mit den durch dasselbe im Innern des Stabes wachgerufenen Elastizitätskräften. Die wiederholte Zurückführung des ausgewichenen Drahtes in die senkrechte Lage erwidert derselbe durch erneute Ausbiegung um  $y'$ . Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter, d. h. um mehr als  $y'$  ausgebogen und alsdann sich selbst überlassen, so kehrt er in die Lage  $y' = 25$  mm zurück. Der Gleichgewichtszustand ist demnach ein stabiler.

Die Belastung  $P_1 = 0,4$  kg wird entfernt und durch  $P = P_2 = 1,1$  kg ersetzt. Sobald der Drahtstab mit der Belastung sich selbst überlassen bleibt, beginnt das freie Ende auszuweichen, der

Draht biegt sich fortgesetzt, bis das belastende Gewicht die Werkbank, an welcher der Schraubstock befestigt ist, erreicht hat, Fig. 68.

Die Biegung ist naturgemäss an der Einspannstelle am stärksten. Der Stab ist hierbei nicht gebrochen. Nach der Entlastung verschwindet ein ziemlich bedeutender Theil der erlittenen Formänderung wieder; namentlich erlangt die nach dem freien Ende hin gelegene Strecke die Geradlinigkeit wieder.

b) Ein schlanker Holzstab von quadratischem Querschnitt, Seitenlänge 7,5 mm, wird möglichst genau senkrecht in den Schraubstock gespannt, alsdann am freien Ende mit  $P = P_1 = 1,1$  kg belastet, wobei  $l = 850$  mm. Das freie Ende beginnt auszuweichen und gelangt schliesslich bei  $y' =$  rund 150 mm zur Ruhe.

Die Belastung  $P_1 = 1,1$  kg wird entfernt und durch  $P = P_2 = 1,3$  kg ersetzt. Der hierauf sich selbst überlassene Stab beginnt mit dem freien Ende auszuweichen, auch nach wiederholter Zurückführung in die senkrechte Lage, biegt sich, bis er bei  $y'$  etwa gleich 550 mm bricht.

Die Erscheinungen, welche die beiden Stäbe bei der Belastung mit  $P = P_2$  zeigen, werden unter dem Namen Knickung des Stabes zusammengefasst: im ersten Falle tritt eine Biegung ein, welche — abgesehen von der Möglichkeit, dass es sich um eine Feder handelt — mit dem Zwecke des Stabes, ein widerstandsfähiger Konstruktionstheil zu sein, unvereinbar ist; im zweiten Falle erfolgt ein Bruch, der gleichfalls unzulässig erscheint.

Aus den Versuchen a und b erkennen wir Folgendes.

Bei der Belastung  $P_1$  weicht der Stab nur um  $y'$  aus und gelangt zur Ruhe. Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter ausgebogen und sich dann selbst überlassen, so kehrt er in diese Lage zurück. In derselben herrscht demnach stabiles Gleichgewicht zwischen dem biegenden Moment, welches die auf den Stab wirkenden äusseren Kräfte, d. h. die Schwerkkräfte der Belastung und der eigenen Masse, liefern und den hierdurch im Innern des Stabes wachgerufenen Elasticitätskräften. Bei der Belastung  $P_2$  dagegen besteht überhaupt ein Gleichgewichtszustand nicht, der Stab biegt sich aus, bis die Belastung zum Aufrufen gelangt, also zum Theil aufgehoben wird (Versuch a), beziehungsweise bis sie zum Bruche führt (Versuch b). In beiden Fällen muss es hiernach eine zwischen  $P_1$  und  $P_2$  gelegene Belastung

$P = P_0$  geben, für die der stabile Gleichgewichtszustand, welcher bei  $P = P_1$  noch zu beobachten war, gerade aufhört, zu bestehen.

Diese Kraft  $P_0$  wird als Knickbelastung bezeichnet.

### § 24. Knickbelastung.

(Euler'sche Gleichung.)

Für den Stab Fig. 69 bezeichne

$P$  die in der Richtung der ursprünglich geraden Stabachse wirkende Kraft,

$P_0$  die Knickbelastung, d. i. diejenige Grösse von  $P$ , welche die Knickung herbeizuführen im Stande ist,

$\Theta$  das der Biegung gegenüber in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (in der Regel das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente),

$l$  die Länge des Stabes,

$\alpha$  den Dehnungscoefficienten.

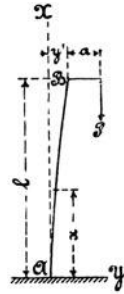


Fig. 69.

In Bezug auf den durch den Abstand  $x$  bestimmten Querschnitt ist, da die zu  $x$  gehörige Ordinate der elastischen Linie  $y$  beträgt, das biegende Moment, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneide,

$$M_b = P (a + y' - y)$$

und damit nach Gleichung 41

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\alpha P}{\Theta} (a + y' - y).$$

Wird gesetzt

$$\frac{\alpha P}{\Theta} = n^2 \quad a + y' - y = -z,$$

so folgt

$$\frac{d^2 z}{d x^2} \frac{d^2 y}{d x^2} = -n^2 z.$$

Dieser Gleichung entspricht unter Voraussetzung, dass  $\alpha$  und  $\Theta$  constant sind, das Integral

$$z = C_1 \sin (n x) + C_2 \cos (n x)$$

oder

$$y - a - y' = C_1 \sin (n x) + C_2 \cos (n x),$$

sofern die beiden Integrationskonstanten mit  $C_1$  und  $C_2$  bezeichnet werden. Dieselben sind bestimmt dadurch, dass für den Punkt  $A$ , also für  $x = 0$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h.

$$C_2 = -a - y' \quad C_1 = 0.$$

Hiermit folgt

$$y = (a + y') [1 - \cos (n x)] \quad . . . . . 78)$$

Für  $x = l$  wird  $y = y'$ , also

$$y' = (a + y') [1 - \cos (n l)]$$

$$\begin{aligned} y' &= a \frac{1 - \cos (n l)}{\cos (n l)} = a \left[ \frac{1}{\cos (n l)} - 1 \right] \\ &= a \left[ \frac{1}{\cos \left( l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right)} - 1 \right] \quad . . . . . 79) \end{aligned}$$

und damit findet sich die Gleichung der elastischen Linie

$$y = a \frac{1 - \cos (n x)}{\cos (n l)} = a \frac{1 - \cos \left( x \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right)}{\cos \left( l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}} \right)}. \quad . 80)$$

Denken wir beispielsweise die Gleichung 79 angewendet auf einen schmiedeisernen Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser, so findet sich mit

$$\alpha = \frac{1}{2000000} \quad \Theta = \frac{\pi}{64} d^4 = \approx \frac{1}{20} d^4 = \frac{1}{20} \quad l = 100$$

$$y' = a \left[ \frac{1}{\cos 100 \sqrt{\frac{20 P}{2000000}}} - 1 \right] = a \left[ \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{10}}} - 1 \right].$$

Für den Hebelarm  $a$  wollen wir uns einen kleinen Betrag vorstellen, etwa daher kommend, dass der Stab schon ursprünglich nicht genau gerade war und dass  $P$  nicht genau durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Es ergibt sich

$$\text{für } P = 5 \text{ kg} \quad y' = a \left( \frac{1}{\cos 0,707} - 1 \right) = 0,32 a,$$

$$\text{für } P = 10 \text{ kg} \quad y' = a \left( \frac{1}{\cos 1} - 1 \right) = 0,85 a,$$

$$\text{für } P = 15 \text{ kg} \quad y' = a \left( \frac{1}{\cos 1,225} - 1 \right) = 1,95 a,$$

$$\text{für } P = 20 \text{ kg} \quad y' = a \left( \frac{1}{\cos 1,4142} - 1 \right) = 5,54 a,$$

$$\text{für } P = 22,5 \text{ kg} \quad y' = a \left( \frac{1}{\cos 1,5} - 1 \right) = 13,16 a.$$

Wir erkennen, dass  $y'$  anfangs langsam, dann aber ausserordentlich rasch mit  $P$  wächst; für  $P = 24,674$  kg wird sogar

$$y' = a \left( \frac{1}{\cos 1,5708} - 1 \right) = a \left( \frac{1}{0} - 1 \right) = a \cdot \infty = \infty.$$

Wie klein also auch  $a$  sein mag — sofern es nur nicht Null ist —, für  $P = 24,674$  kg beträgt  $y' = \infty$ . Erreicht demnach  $P$  diesen Werth, so wird bei der geringsten Abweichung der Belastung von der Stabachse, oder bei nicht vollkommener Geradlinigkeit derselben, oder bei nicht vollständiger Gleichartigkeit des Stabmaterials, oder endlich bei der geringsten seitlichen Einwirkung auf den Stab, dieser umknicken, das Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft  $P$  und den inneren Elasticitätskräften wird aufhören, zu bestehen.

Dieser Werth von  $P$  kann demnach als diejenige Kraft bezeichnet werden, welche im Stande ist, die Knickung herbeizuführen und welche sie auch herbeiführen wird, da die Voraussetzungen unter Ziff. 1 und 2 in § 23 nicht streng erfüllbar sind und deshalb stets ein biegendes Moment vorhanden sein muss. Diese Kraft ist die Knickbelastung  $P_0$ .

Allgemein lässt sich dieselbe aus der Gleichung 79 durch die Erwägung bestimmen, dass

$$P = P_0 \quad \text{für} \quad y' = a \cdot \infty,$$



d. h.

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}}\right) = 0$$

$$l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}. \quad \dots \dots \dots 81)$$

Für den Fall der Fig. 70, nach Massgabe welcher der Stab gezwungen ist, mit seinen sonst beweglichen Enden *A* und *B* in der ursprünglich geraden Stabachse zu bleiben, verhält sich jede der beiden Stabhälften genau so, wie der ganze Stab in Fig. 69. Demnach ergibt sich für die Kraft, durch welche hier die Knickung erfolgen wird, mittelst Einführung von  $0,5 l$  in die Gleichung 81 an Stelle von  $l$



Fig. 70.

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{(0,5l)^2} = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \quad \dots 82)$$

d. i. ein viermal so grosser Werth, wie für den Stab mit freiem Ende.

Die Beziehung 82 wird nach ihrem Urheber als die Euler'sche Gleichung bezeichnet.

Wenn der Stab, Fig. 71, an beiden Enden *A* und *B* so eingeklemmt ist, dass bei etwaiger Ausbiegung die Gerade *AB* Tangente in den Punkten *A* und *B* der elastischen Linie bleibt — was übrigens in Wirklichkeit nur sehr selten zutreffen wird (vergl. § 53) —, so liegen in den Mitten *C* und *E* der Stabstrecken *AD* und *BD* Wendepunkte. Die hierdurch entstehenden Endstücke *AC* und *BE* verhalten sich wie der ganze Stab im Falle der Fig. 69 ( $a = 0$  gesetzt), während das Mittelstück *CDE* dem Stabe in Fig. 70 entspricht. Diese Erwägung ergibt für die beiden Endstücke je von der Länge  $\frac{l}{4}$  nach Gleichung 81



Fig. 71.

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 4 \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

für das Mittelstück, dessen Länge  $\frac{l}{2}$  nach Gleichung 82

$$P_o = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 4 \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}.$$

Folglich gilt für den ganzen Stab, Fig. 71,

$$P_o = 4 \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 83)$$

Hiernach verhalten sich die Knickbelastungen für die Stäbe Fig. 69, 70 und 71, unter sonst gleichen Verhältnissen wie

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} : \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} : 4 \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} = 1 : 4 : 16.$$

Die 3 Gleichungen 81 bis 83 lassen sich zusammenfassen in die eine

$$P_o = \omega \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \dots \dots \dots 84)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\pi^2}{4} \text{ für die Befestigungsweise Fig. 69,} \\ \omega &= \pi^2 \text{ für diejenige Fig. 70 und} \\ \omega &= 4 \pi^2 \text{ für diejenige Fig. 71.} \end{aligned} \right\} \dots 85)$$

§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung.

Als zulässige Gesamtbelastung  $P$  der in § 24 besprochenen Stäbe wird der  $\mathfrak{E}$ te Theil von  $P_o$  genommen, d. h.

$$P = \frac{P_o}{\mathfrak{E}}.$$

Insbesondere

$$\left. \begin{aligned} \text{für Stab Fig. 69} & \quad P = \frac{\pi^2}{4 \mathfrak{E}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \\ \text{„ „ „ 70} & \quad P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{E}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \\ \text{„ „ „ 71} & \quad P = \frac{4 \pi^2}{\mathfrak{E}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots 86)$$

oder allgemein

$$P = \frac{\omega}{\mathfrak{S}} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{O}}{l^2}, \dots \dots \dots 87)$$

worin  $\omega$  einen von der Befestigungsweise der Stabenden abhängigen Coefficienten, den Befestigungscoefficienten bedeutet, dessen Grösse für bestimmte Fälle am Schlusse von § 24 angegeben ist. Hinsichtlich  $\omega = 4 \pi^2$  sei nochmals darauf hingewiesen, dass es nur äusserst selten der Wirklichkeit entsprechen wird, den Stab als beiderseits eingespannt anzusehen (vergl. § 53).

Die Benützung der Gleichungen 86 oder 87 bei Feststellung der Querschnittsabmessungen einer Stütze kommt nach Massgabe des Erörterten darauf heraus, diese so zu wählen, dass erst durch das  $\mathfrak{S}$ -fache der wirkenden Kraft  $P$  die Knickung herbeigeführt wird. Mehr ist hierdurch zunächst nicht erreicht. Insbesondere erscheint es unzutreffend, bei Verwendung dieser Gleichungen zu schliessen, dass erst durch das  $\mathfrak{S}$ -fache der Kraft  $P$  die Möglichkeit einer Biegung eintreten würde. Die beiden, oben unter a und b angegebenen Versuche zeigen deutlich eine ganz bedeutende Ausbiegung bei  $P = P_1 < P_o$ . Die tägliche Erfahrung lehrt ebenfalls, dass Ausbiegung von schlanken Stäben schon bei verhältnissmässig sehr geringer Belastung eintritt. (Vergl. auch die in § 27 unter Ziff. 1 am Schlusse von a gemachten Angaben). Aus der Unmöglichkeit, die in § 23 unter Ziff. 1 und 2 angegebenen Voraussetzungen genau zu erfüllen, was darauf hinauskommt, dass die Grösse  $a$  in Gleichung 79 grösser als Null ist, erklärt sich diese Erscheinung ohne Weiteres.

Will man das Eintreten solcher weit unterhalb der Knickungsgefahr liegenden Ausbiegungen nach Möglichkeit verhindern, so wird das unter sonst gleichen Verhältnissen um so erfolgreicher geschehen, je grösser man  $\mathfrak{S}$  in die Gleichungen 86 oder 87 einführt.

Bei gewissen stangenartigen Maschinenteilen wechseln Zug und Druck, so dass die Stange zunächst auf Zug, hierauf auf Knickung beansprucht ist u. s. f. Folgen nun — wie häufig der Fall — Zug und Druck so rasch auf einander, dass von einer Ausbildung der Formänderung, wie sie die Entwicklung der Gleichungen voraussetzen, nicht die Rede sein kann, so wird ein

geringerer Werth von  $\mathfrak{S}$  genügen, als wenn der genannte Vorgang langsamer vor sich geht<sup>1)</sup>).

Ferner kommt in Betracht, dass in den meisten Fällen selbst der Anordnung Fig. 70 schon in Folge der Reibung in den Gelenken bei  $A$  und  $B$  ein (wenn auch nicht bedeutendes) Biegemoment vorhanden zu sein pflegt. Bei nicht senkrechter Lage der Stange tritt noch hinzu der auf Biegung wirkende Einfluss des Eigengewichts und im Falle ungleichförmiger Bewegung noch derjenige des Trägheitsvermögens. Nicht selten wird der Wärmezustand des Stabes ein einseitig verschiedener sein, welcher Umstand für eiserne Stützen Bedeutung erlangen kann. Auch diesen Einflüssen, wenn sie sich innerhalb gewisser Grenzen halten, wird in der Regel bei Wahl von  $\mathfrak{S}$  Rechnung getragen.

Unter diesen Verhältnissen ist es natürlich ausgeschlossen, dass für  $\mathfrak{S}$  ein bestimmter Werth angegeben werden kann; es werden vielmehr jeweils die besonderen Umstände in Erwägung zu ziehen sein. Hierzu gehört insbesondere auch die Befestigung der Enden der gedrückten Stange. Eine Säule mit grosser und kräftiger Fuss- und Kopfplatte wird sich anders verhalten, als eine sonst gleiche Säule mit kleinen Endplatten. Bei Bleiunterlage wird sich die gleiche Säule leichter nach Fig. 70 krümmen können, als wenn sie mit Cement untergossen worden ist, der vor der Einwirkung der Belastung genügend erhärtet, u. s. w. Streng genommen wäre allerdings diesen Umständen bei Feststellung des Befestigungscoefficienten  $\omega$  Rechnung zu tragen; doch kommt es, da  $P$  proportional dem Quotienten  $\omega : \mathfrak{S}$ , thatsächlich auf dasselbe hinaus, wenn  $\omega$ , wie es für Stützen, deren Enden seitlich nicht ausweichen können, zu geschehen pflegt, mit  $\pi^2$  eingeführt und  $\mathfrak{S}$  entsprechend kleiner gewählt wird, falls man nicht, durch Erwägungen besonderer Art veranlasst, vorzieht, statt der ganzen Säulenlänge einen Bruchtheil derselben in Rechnung zu stellen. (Vergl. Schluss von § 27.)

Für Säulen von Gusseisen darf, ganz abgesehen von der selbstverständlichen Rücksichtnahme auf die Herstellungsweise (liegend oder stehend gegossen), nicht ausser Acht bleiben, dass  $\alpha$ , welches bei der Entwicklung in § 24 als constant vorausgesetzt wurde, thatsächlich veränderlich ist, und zwar zunimmt mit

<sup>1)</sup> Vergl. z. B. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 311.

wachsender Spannung oder Dehnung (vergl. 20, Ziff. 4), sowie überdies für die Gusschale weniger beträgt, als für das im Inneren gelegene Material (vergl. § 22, Ziff. 3).

Unter allen Umständen muss bei einem Stabe, welcher auf Knickung berechnet wird, die in § 12 aufgestellte Forderung bei einfacher Druckbeanspruchung

$$P \leq kf \dots\dots\dots 88)$$

befriedigt sein.

### § 26. Navier'sche (Schwarz'sche) Zerknickungsformel.

Die in den §§ 24 und 25 erörterte Grundgleichung zur Berechnung eines Stabes, welcher der Gefahr des Knickens ausgesetzt ist, hat bis auf unsere Tage in den Kreisen der Techniker des Hochbau- und Bauingenieurwesens vielfach Bemänglung erfahren, deren Wurzel namentlich in dem Umstande zu suchen sein dürfte, dass in ihr nicht die Spannung auftritt, welche man sich gewöhnt hat, als Massstab der Sicherheit einer Construction aufzufassen und von der man deshalb bei Feststellung der Abmessungen immer auszugehen pflegt<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Im Maschineningenieurwesen war nichts oder verhältnissmässig nur wenig von einer solchen Bemänglung zu bemerken und zwar aus verschiedenen Gründen.

Zunächst hat der Gleichgewichtszustand, wie er im Augenblicke des Beginnes der Knickung vorhanden ist, für den Maschineningenieur nichts Fremdes. Es ist demselben geläufig, dass schon die Herstellung eines längeren schlanken Körpers mit thatsächlich gerader Achse und vollständiger Gleichartigkeit des Materials trotz grösster Sorgfalt nicht zu erzielen ist, und dass infolgedessen, ganz abgesehen davon, mit welcher Genauigkeit es möglich erscheint, die Achskraft  $P$  in die vermeintlich gerade Stabachse fallen zu lassen, bei Belastung durch  $P$  eine mit dieser Kraft wachsende Durchbiegung eintreten muss. (Lange Druckstangen, wie sie z. B. bei verticalen Balanciermaschinen auftreten, sind deshalb auch bei genau verticaler Lage niemals durchbiegungsfrei zu erhalten, die Erzitterungen lassen sich bei wechselnder Belastung nicht ganz beseitigen.) Dass bis zu einer gewissen Grösse von  $P$  das mit dieser Kraft und dem Eigengewicht verknüpfte biegende Moment von den inneren Elasticitätskräften des Stabes im Gleichgewicht gehalten wird, und dass bei Ueberschreitung der bezeichneten Grenze dieses Gleichgewicht aufhört und der Stab sich umbiegt oder zerbricht, erscheint dann ganz natürlich. Durch Steigerung der Belastung wird der Stab auf einfachstem Wege aus dem Zustand des stabilen Gleichgewichts in den des labilen übergeführt. An den letzteren muss sich dann schon infolge des Ein-

Ferner zeigten die Ergebnisse von Knickungsversuchen keine Uebereinstimmung mit dem, was die Euler'sche Gleichung

flusses der Zeit auf die Ausbildung der Formänderungen der Vorgang des Knickens anschliessen.

Das Verhalten des unter äusserem Ueberdruck stehenden Flammenrohres eines Dampfkessels, Fig. 72, ist ein ganz entsprechendes. Erfährt die Pressung

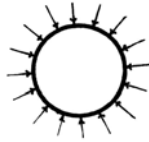


Fig. 72.

der Flüssigkeit, welche das Rohr umgiebt, eine Steigerung, so wird das letztere schliesslich eingedrückt oder zusammengedrückt. Eine eigentliche Zerstörung des Materials tritt hierbei häufig nicht ein. Die Grösse der Pressung, welche das Ein- oder Zusammendrücken herbeiführt, hängt in erster Linie mit ab von der Vollkommenheit der Kreisform des Rohrquerschnittes. In ganz gleicher Lage befinden sich nicht wenige Gefässe und Rohrleitungen der Industrie, welche der Regel nach oder auch nur ausnahmsweise äusserem Ueberdruck Widerstand zu leisten haben.

In solchen Fällen sind eben die Abmessungen so zu wählen, dass unzulässige Formänderungen ferngehalten werden. Allgemein von einer zulässigen Spannung auszugehen, erscheint dann unzutreffend. Die üblichen Sicherheitscoefficienten  $\ominus$  haben, wie oben (§ 25) bereits erörtert, hierbei den allgemeinen Rücksichten und den besonderen Umständen des gerade vorliegenden Falles Rechnung zu tragen.

Im Maschinenbau ist auch in anderen Fällen als bei Knickbeanspruchung von einer höchstens zulässigen Formänderung auszugehen, selbstverständlich unter Festhaltung der Forderung, dass die Anstrengung des Materials in keinem Punkte den höchstens für zulässig erachteten Werth überschreitet. Bei stark belasteten Wellen u. s. w. gestattet man nur eine bestimmte Durchbiegung oder eine gewisse Abweichung der Richtung der elastischen Linie von der ursprünglich geraden Stabachse an bestimmten Stellen; in anderen Fällen wird von einer höchstens zulässigen Verdrehung ausgegangen. Die zulässigen Belastungen unserer Treibriemen u. s. w. bezwecken, die Dehnungen innerhalb gewisser Grenzen zu halten u. s. f. Andererseits werden Federn u. dergl. so construirt, dass mit Sicherheit auf eine gewisse Formänderung gerechnet werden darf. (Vergl. des Verfassers Maschinenelemente 1881, Vorwort S. IV, S. 35, 37, 202, 279, 317 u. s. f.)

Die oben erwähnten Bemänglungen der Euler'schen Gleichung in den Kreisen des Baufachens haben von H. Zimmermann im Centralblatte der Bauverwaltung 1886 S. 217 u. f. eine klare und eingehende Beleuchtung erfahren.

$$P_o = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \dots \dots \dots 82)$$

lieferte<sup>1)</sup>.

Auf diesem Boden war die von Navier herrührende Zerknickungsformel

$$P = f \frac{k}{1 + \alpha \frac{f l^2}{\Theta}} = f \frac{k}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \dots \dots 89)$$

entstanden<sup>2)</sup>.

Hierin bedeutet

- $P$  die zulässige Gesamtbelastung des Stabes,
- $k$  „ „ Druckanstrengung des Materials,
- $f$  den Querschnitt des Stabes,
- $l$  dessen Länge,

---

<sup>1)</sup> Man übersah hierbei, dass, während die Entwicklung dieser Gleichung freie Beweglichkeit der Stabenden voraussetzt (Fig. 70), bei den Versuchen diese freie Beweglichkeit nicht vorhanden war. Hätte man in der Erwägung, dass die vollständige Aufhebung dieser Beweglichkeit, d. i. die Einspannung des Stabes, dazu führt, in Gleichung 82 an Stelle der Länge  $l$  nur deren Hälfte einzusetzen, in jedem einzelnen Fall zu ermitteln gesucht, welcher Bruchtheil von  $l$  oder welcher Werth von  $\omega$  in Gl. 84 (Gl. 87) den Befestigungsverhältnissen der Stabenden ungefähr entsprechen haben würde, das Ergebniss würde ein anderes gewesen sein.

Auch der Einfluss der Veränderlichkeit des Dehnungscoefficienten des Gusseisens, derjenige der Guss-haut und etwaiger Guss-spannungen durften bei der Beurtheilung der Versuchsergebnisse, welche gusseiserne Stützen lieferten, nicht übersehen werden (vergl. § 20, Ziff. 4 und § 22).

Die Versuche von Bauschinger und Tetmajer (§ 27) liefern den Nachweis, dass der Werth

$$P_o = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

der Knickbelastung bei freier Beweglichkeit der Stabenden entspricht.

<sup>2)</sup> Rühlmann stellt in seinem Werk: Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, S. 364 und 365 fest, dass diese Gleichung, welche auch als Gordon's- und Rankine'sche Formel bezeichnet wird, von Navier zuerst entwickelt wurde, dass später 1854 Schwarz sie in anderer Weise ableitete u. s. f.

Sie hat, wenn es sich darum handelt, ihre Richtigkeit durch die Ergebnisse von Knickungsversuchen zu prüfen, den Vortheil, zwei Coefficienten  $k$  und  $\alpha$  zu besitzen, durch deren Wahl leichter eine Anschmiegun g der Versuchsergebnisse erreicht werden kann, als wenn nur ein Coefficient vorhanden ist.

Die Euler'sche Gleichung 82 ist in dieser Hinsicht allerdings weniger gut daran.

- Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes,
- r den Trägheitshalbmesser derart, dass  $\Theta = f r^2$ ,
- z eine Erfahrungszahl, den sogenannten Zerknickungscoefficienten.

Die von Navier dem Wesen nach gegebene Begründung erhellt aus dem Folgenden.

Der in Fig. 73 gezeichnete Stab ist im mittleren Querschnitt durch das Moment  $Pa$ , dessen Ebene den letzteren senkrecht zu derjenigen Hauptachse schneidet, für welche  $\Theta$  gilt, auf Biegung und durch die Kraft  $P$  auf Druck in Anspruch genommen; infolgedessen erfährt die im Abstände  $e$  von der Nullachse gelegene Faserschicht eine Pressung



Fig. 73.

woraus

$$k = \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e,$$

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{ae f}{\Theta}} \quad \dots \quad 90)$$

In dieser Gleichung tritt die Unbekannte  $a$  auf, deren Zweck nach § 23 darin zu bestehen hat, die Möglichkeit des excentrischen Angreifens der Kraft  $P$  bei auf Knickung in Anspruch genommenen Stäben, sowie die Ungleichartigkeit des Materials, die etwaige Verschiedenartigkeit des Wärmezustandes u. s. w. und den Umstand zu berücksichtigen, dass die Stabachse keine genau gradlinige ist. Um diese — offenbar ausserhalb des Rahmens der wissenschaftlichen Elasticitäts- und Festigkeitslehre liegende — Grösse nicht willkürlich wählen zu müssen, worin überhaupt die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Berechnung eines auf Knickung beanspruchten Stabes liegt, hat Navier folgender Erwägung stattgegeben.

Durch das Moment  $Pa$  (allein) tritt in den um  $e$  von der Nullachse abstehenden Fasern die Spannung

$$\sigma = \frac{Pa}{\Theta} e$$

auf. Zu dieser Spannung oder Pressung gehört die Dehnung oder Zusammendrückung

$$\epsilon = \alpha \sigma.$$



Hiermit wird aus der vorigen Gleichung

$$P = \varepsilon \frac{\Theta}{\alpha a e} \dots \dots \dots 91)$$

und durch Gleichsetzung dieses Werthes mit der rechten Seite von Gleichung 82

$$P = \varepsilon \frac{\Theta}{\alpha a e} = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

woraus folgt

$$a = \varepsilon \frac{l^2}{\pi^2 e}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gl. 90 findet sich

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{\varepsilon f l^2}{\pi^2 \Theta}}$$

Mit

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2} = x$$

ergiebt sich

$$P = f \frac{k}{1 + x \frac{f l^2}{\Theta}} = f \frac{k}{1 + x \left(\frac{l}{r}\right)^2} \dots \dots \dots 89)$$

wie oben.

Richtiger erscheint es, die Gleichung 91 nicht mit Gl. 82, sondern mit Gl. 87 in Verbindung zu setzen, so dass

$$P = \varepsilon \frac{\Theta}{\alpha a e} = \frac{\omega}{\mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

woraus dann mit

$$x = \frac{\mathfrak{S}}{\omega} \varepsilon \dots \dots \dots 92)$$

ebenfalls erfolgen würde

$$P = f \frac{k}{1 + x \frac{f l^2}{\Theta}} = f \frac{k}{1 + x \left(\frac{l}{r}\right)^2} \dots \dots \dots 89)$$

Hiernach bedeutet der Coefficient  $x$  das  $\frac{\mathfrak{S}}{\omega}$  fache derjenigen Dehnung (Zusammendrückung), welche im mass-  
8\*

gebenden Faserabstände  $e$  vorhanden ist, insoweit die selbe von dem biegenden Momente allein herrührt.

Die Einführung von  $\alpha$  als eines Erfahrungscoefficienten heisst demnach nichts Anderes, als die Festsetzung eines bestimmten Werthes für die Dehnung, insoweit diese durch das vorhandene biegende Moment hervorgerufen wird. Ob es leichter ist  $\alpha = \frac{\sigma}{\omega}$  anzunehmen, oder  $a$  unter Beachtung der besonderen Verhältnisse schätzungsweise zu wählen, mag hier dahingestellt bleiben.

Soll nun  $\alpha$  — wie unter dem Vorbehalt, die etwaige Veränderlichkeit des Befestigungscoefficienten besonders zu berücksichtigen, angegeben wird — eine vom Material abhängige Constante sein, so wird damit festgesetzt, dass diese Dehnung (oder die ihr entsprechende Kantenspannung), soweit sie von der Biegung herrührt, für ein bestimmtes Material constant anzunehmen ist, also beispielsweise unter sonst gleichen Verhältnissen unabhängig davon, ob es sich um eine Stütze von 10 m Höhe oder um eine solche von 3 m Höhe handelt.

Greifen wir auf die Gründe zurück, welche überhaupt dazu veranlassten, die Grösse  $a$  einzuführen, so finden wir, dass diese Grösse folgenden Umständen Rechnung tragen sollte:

- a) die Achse ist bei längeren Stäben keine gerade Linie,
- b) das Material ist nicht vollkommen gleichartig, sein Zustand nicht an allen Stellen der gleiche,
- c) die Kraft  $P$  fällt nicht genau mit der Stabachse zusammen.

Natürgemäss wachsen die Abweichungen unter  $a$  und  $b$  vom normalen Zustande mit der absoluten Länge der Stütze verhältnissmässig rasch, so dass nicht Unveränderlichkeit, sondern Abnahme der für das biegende Moment zugelassenen Kantendehnung oder Kantenspannung angezeigt erscheint. Knickungsversuche werden den Nachweis erbringen müssen, dass  $\alpha$  nicht constant sein kann, sondern mit  $l$  zunehmen muss und zwar bedeutend, wenn schlanke hohe Stützen in das Bereich der Prüfung gezogen werden<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Thatsächlich glaubte man, diesen Einfluss der Stützenhöhe bereits voll bei der Entwicklung der Gleichung 89 berücksichtigt zu haben.

Laissle & Schübler (Bau der Brückenträger, 4. Auflage, 1876, S. 70), welche wohl am meisten zur Verbreitung der Navier'schen Zerknickungsformel beigetragen haben dürften, ausgehend von der Gleichung 90

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{a e f}{\theta}}$$

Eine scharfe Betrachtung des Zweckes, zu dem überhaupt die Gleichung 89 dienen soll, sowie dessen, was von dem Zerknickungscoefficienten  $\alpha$  verlangt wird, führt zu der Erkenntniss, dass  $\alpha$  — selbst bei dem gleichen Werthe von  $\omega$  — nicht blos Materialconstante sein kann, sondern in der Hand eines rationell arbeitenden Constructeurs — falls derselbe die Gleichung 89 überhaupt benutzt — eine von verschiedenen Umständen zum Theil sehr stark beeinflusste Grösse sein muss. (Vergl. das in § 25 über  $\Theta$  Bemerkte.)

Laissle & Schübler setzen (S. 71 ihres Werkes „der Bau der Brückenträger“, 4. Auflage, 1876) für an den Enden drehbare Stäbe (Fig. 70)

$\alpha = 0,0001$  für Schmiedeeisen (zutreffendenfalls auch für weichen Stahl),

$\alpha = 0,0003$  für Gusseisen,

$\alpha = 0,0002$  für Holz.

Es entspricht dies, wenn  $\omega = \pi^2 = \sim 10$  genommen wird

$$\varepsilon = \frac{0,001}{\Theta},$$

$$\text{bezw. } \frac{0,003}{\Theta},$$

$$\text{bezw. } \frac{0,002}{\Theta}.$$

Scharowski giebt in seinem Musterbuch für die Säulen der Eisenconstruktionen

setzen in der Erwägung, dass  $a$  „für ein und dasselbe Material mit zunehmender Länge sich sehr vergrössern, dagegen bei zunehmenden Querschnittsdimensionen abnehmen wird“

$$a = \alpha \frac{l^2}{e},$$

„worin  $\alpha$  ein durch die Erfahrung für jedes Material festzustellender Coefficient ist“, und erhalten damit

$$P = f \frac{k}{1 + \alpha \frac{f l^2}{\Theta}}$$

	$k_z$ (§ 6)	$k$ (§ 12)	$\alpha$
bei Schmiedeisen	1000 kg	1000 kg	0,0001,
bei Gusseisen	250 „	500 „	0,0002.

Wenn bei gusseisernen Säulen  $\alpha f l^2 : \Theta > 3$ , so wählt Scharowski

$$P = \frac{250 f}{-1 + \alpha \frac{f l^2}{\Theta}}$$

Hierbei ist freie Beweglichkeit der Säulenenden nicht vorhanden, andererseits kann aber auch nicht Einspannung derselben angenommen werden.

Möller — Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Bauconstructionstheile bei erhöhter Temperatur, von M. Möller und R. Lühmann, vom Vereine zur Beförderung des Gewerbflusses in Preussen mit einem Preise gekrönte Arbeit. Berlin 1888. Abdruck aus den Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbflusses 1887 (siehe daselbst S. 603 u. f.) — empfiehlt für gusseiserne und schmiedeiserne Säulen, welche im Falle eines Brandes dem Feuer ausgesetzt sein können, zu nehmen

$$k = 1000 \text{ bis } 1200 \quad \alpha = 0,0004, \text{ d. i. } \varepsilon = \frac{0,0004}{\Theta} \omega.$$

Krohn entwickelt im Centralblatt der Bauverwaltung 1885 S. 400 bis 401 für an den Enden bewegliche Säulen die Beziehung

$$\alpha = \frac{1}{8} \alpha k,$$

worin  $\alpha$  den Dehnungscoefficienten bedeutet.

Dies würde beispielsweise geben

$$\text{für Schmiedeisen mit } \frac{1}{\alpha} = 2\,000\,000 \quad k = 800 \\ \alpha = 0,00005,$$

$$\text{für Gusseisen mit } \frac{1}{\alpha} = 900\,000 \quad k = 800 \\ \alpha = 0,00011.$$

Ueber die Grösse  $\alpha$  vergleiche auch § 27.

## § 27. Knickungsversuche.

## I. Versuche von Bauschinger.

Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. technischen Hochschule in München, Heft 15, München 1887.

Von der grossen Anzahl von Versuchen mit Stützen aus  $\text{H-}$ ,  $\text{L-}$ ,  $\text{I-}$ ,  $\text{U-}$  Eisen greifen wir diejenigen heraus, welche sich auf Stäbe mit Querschnitten beziehen, die zwei Symmetrieachsen besitzen.

Material: Walzeisen. Querschnittsform:  $\text{H-}$ .

a) Die Enden der Versuchsstäbe sind in Spitzen, also frei beweglich gelagert, Fig. 70.

No.	Querschnitt			Trägheitsmoment $\Theta$ cm <sup>4</sup>	Länge $l$ cm	Knickbelastung		Be- lastung pro qcm $\sigma = P'_{\circ} : f$ kg	Ab- weichung $\frac{P'_{\circ} - P_{\circ}}{P'_{\circ}} 100$ %
	Breite cm	Höhe cm	Inhalt $f$ qcm			beobachtet $P'_{\circ}$ kg	berechnet $P_{\circ} = \frac{\pi^2 \Theta}{\alpha l^2}$ kg		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25,2	13,8	63,55	575,6	405,5	70 500	69 000	1105	+ 2
2	12,4	7,2	20,7	37,99	89	61 000	94 500	3035	—
3	—	—	18,22	—	151	30 250	33 000	1662	— 9
4	—	—	18,22	—	223	17 250	15 000	948	+ 13
5	9,93	4,92	11,16	17,31	156,1	10 650	14 000	956	— 31
6	—	—	11,38	—	270	4 100	4 700	360	— 15
7	—	—	11,76	—	465	1 300	1 600	111	— 23
8	9,99	5,01	10,58	14,2	254,3	3 900	4 300	369	— 10
9	9,98	5,01	10,58	14,2	254,3	4 000	4 300	378	— 7,5
10	9,95	5,00	10,55	14,2	254,4	3 900	4 300	370	— 10
11	10,00	5,00	10,56	14,2	254,4	4 050	4 300	384	— 6
12	9,96	4,99	10,55	14,2	254,3	3 900	4 300	370	— 10

Bis auf den Versuch No. 2, welcher bei der Belastung von 3035 kg/qcm (Spalte 9) schon infolge der Anforderungen der einfachen Druckfestigkeit hier auszuscheiden hat (vergl. Schlussbemer-

kung zu § 25), also nicht in Betracht kommt, sind die Abweichungen zwischen den beobachteten Knickbelastungen  $P'_o$  (Spalte 7) und den mit  $\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$  berechneten Werthen  $P_o$  (Spalte 8) durchschnittlich nicht so gross, dass das in der Gleichung

$$P_o = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{G}{l^2}$$

ausgesprochene Gesetz als unzutreffend erschiene, namentlich wenn noch berücksichtigt wird, dass die Querschnittsform, welche hier vorliegt, gegenüber Knickung sich nicht ganz so sicher verhalten dürfte, wie dies die Entwicklung voraussetzt.

Hiernach ist in den Ergebnissen der vorstehenden Versuche eine Bestätigung des in Frage stehenden Gesetzes zu erblicken.

Zum Zwecke der Klarstellung, dass die Ausbiegungen schon bei verhältnissmässig sehr geringen Belastungen beginnen, sei ein Theil der auf den Versuchsstab No. 12 bezüglichen Ermittlungen angeführt.

Belastung $P$	$P : f$	Ausbiegung der Mitte
kg	kg	mm
0	0	0,00
200	19	0,00
400	38	0,04
600	57	0,11
800	76	0,20
1000	95	0,34
2000	190	1,25
3000	284	3,88
3200	303	5,08
3400	322	6,86
3600	341	9,92
3800	360	17,14

- b) Die Versuchsstäbe liegen mit ihren ebenen Stirnseiten an den festen Druckplatten.

Hier gestalten sich die Vorgänge bei der Biegung weniger einfach, als unter a. Zu der Schwierigkeit, den Stab so einzu-

spannen, dass die Richtung der Druckkraft mit der Stabachse zusammenfällt, tritt die weitere hinzu, ein gleichmässiges Anlegen der Stirnflächen an die Druckplatten herbeizuführen und zu sichern. Die Erfüllung der letzteren Bedingung musste sich naturgemäss als unmöglich erweisen. Sobald der Stab seine Ausbiegung — etwa nach *A*, Fig. 74, hin — begonnen, hat er das Bestreben, sich bei

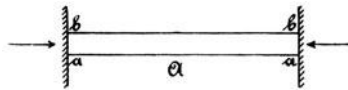


Fig. 74.

*bb* von den Druckplatten zu lösen. Damit aber muss dann eine Aenderung der Vertheilung des Druckes über die Stirnflächen eintreten: die Pressung wird hier von der Stabmitte aus gerechnet nach *a* hin wachsen, nach *b* hin abnehmen. Thatsächlich beobachtete Bauschinger, dass sich am Schlusse des Versuches die Stirnflächen bis auf die bei *a* zusammengedrückten Kanten von den Druckplatten lösten, Fig. 75.

Bei dieser Sachlage erscheint es nicht wahrscheinlich, dass es möglich sein werde, für Stäbe, welche mit ihren ebenen Stirnflächen

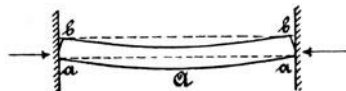


Fig. 75.

an festen Druckplatten anliegen, den Vorgang rechnerisch genau zu verfolgen. Bauschinger hat deshalb zum Zwecke der weiteren Betrachtung seiner Versuchsergebnisse die Navier'sche Gleichung 89 herangezogen, derart, dass in

$$P_o = f \frac{K}{1 + \alpha \frac{f l^3}{\Theta}}$$

unter *K* die Druckfestigkeit verstanden und hierfür 4500 kg eingeführt wird. Dann findet sich

- a) für die in Spitzen gelagerten Stäbe  $\alpha$  schwankend zwischen 0,00009 und 0,000614,

- b) für die Stäbe mit flachen Enden  $\alpha$  schwankend zwischen 0,000041 und 0,00031,

d. i. überaus veränderlich.

Werden  $K$  und  $\alpha$  aus den Versuchsergebnissen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so ergibt sich

- a)  $K = 2270$        $\alpha = 0,000058$ ,  
 b)  $K = 3100$        $\alpha = 0,000029$ .

Die für  $K$  gefundenen Werthe bestätigen die Richtigkeit der Schlussbemerkung des § 11. Die Fliess- oder Quetschgrenze war von Bauschinger für das untersuchte Eisen als schwankend zwischen 2150 und 3690 kg festgestellt worden.

Ferner weisen die Ergebnisse darauf hin, dass die aus Knickungsversuchen bestimmten Werthe  $\alpha$  ebenfalls mit einem Sicherheitscoefficienten multiplicirt in die Rechnung einzuführen sind, ganz wie das bei  $K$  geschieht, wie es auch oben bei der Entwicklung, welche die Gleichung 92 ergab, vorgenommen worden ist.

Die mit  $K = 2270$  und  $\alpha = 0,000058$  berechneten Werthe  $P_0$  für die Stäbe mit beweglichen Enden stimmen mit den beobachteten Werthen nicht gerade gut überein; besser ist dies der Fall bei den mit  $K = 3100$  und  $\alpha = 0,000029$  ermittelten Werthen  $P_0$  für die Stäbe mit flachen Enden.

Auf Grund der Bauschinger'schen Versuche kann geschlossen werden:

- a) für Stäbe mit drehbaren Enden ist die Euler'sche Gleichung 82 zutreffend, sofern die Beziehung 88 befriedigt erscheint,  
 b) für Stäbe mit ebenen, an festen Druckplatten anliegenden Stirnflächen bietet die Navier'sche Knickungsformel 89 brauchbare Werthe.

## 2. Versuche von Tetmajer.

Schweizerische Bauzeitung 1887, Bd X S. 93 u. f.

„ „ 1888, Bd XI S. 110 u. f.

- a) Versuche mit Schweiss- und Flusseisen in Rundstäben bis 5 cm Stärke.  
 (30 Stäbe Schweiss- und 30 Stäbe Flusseisen bearbeitet),  
 Einspannung der Versuchsstangen zwischen Spitzen.



Tetmajer fand:

1. Uebereinstimmung der beobachteten Knickbelastungen mit denjenigen, welche sich auf Grund der Euler'schen Gleichung berechnen liessen.
2. Veränderlichkeit des Zerknickungscoefficienten  $\alpha$ , falls die Gleichung von Navier 89 zu Grunde gelegt wird;

es müsste dann sein

$$\alpha = 0,0001 \sqrt{0,00867 \left(\frac{l}{r}\right)^2 - 0,6936}$$

in

$$\frac{P_o}{f} = \frac{2650}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Flusseisen (2650 Fließgrenze),}$$

$$\frac{P_o}{f} = \frac{2350}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Schweisseisen (2350 Fließgrenze).}$$

#### b) Versuche mit Bauhölzern.

Elastizitätsmodul. Druckfestigkeit. Bemerkungen.

Lärche und Föhre im

Durchschnitt . . . .	104230 kg	318 kg	astfreies Holz,
Roth- und Weisstanne		285 kg	astig.

Tetmajer stellte zunächst für die zwischen Spitzen gelagerten Stäbe fest:

1. das Gleiche wie unter a Ziff. 1, genügend grosse Länge derselben vorausgesetzt;
2. die starke Veränderlichkeit von  $\alpha$ , falls die Navier'sche Gleichung in Betracht gezogen wird:

$$\alpha = 0,0001 \sqrt{0,05 \frac{l}{r} - 0,80}$$

in

$$\frac{P_o}{f} = \frac{318}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Lärche und Föhre,}$$

$$\frac{P_o}{f} = \frac{285}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Roth- und Weisstanne.}$$

Für die mit ebenen Stirnflächen an festen Druckplatten anliegenden Hölzer beobachtete Tetmajer den Abstand der Wendepunkte von einander zwischen  $0,5 l_0$  und  $0,6 l_0$ , sofern  $l_0$  die Entfernung der beiden Druckplatten ist. Er empfiehlt, um sicher zu rechnen, in den soeben gegebenen Gleichungen  $0,6 l_0$  für  $l$  einzuführen, im Uebrigen jedoch nichts zu ändern.

Was in § 26 aus der Natur von  $\alpha$  zu schliessen war, nämlich Wachsthum dieses Coefficienten mit zunehmendem Quotienten  $\frac{l}{r}$ , bestätigen die von Tetmajer sowohl für Holz, als auch für Eisen erlangten Versuchsergebnisse.

---

## Zweiter Abschnitt.

### Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

#### Einleitung.

#### § 28. Schiebung.

Die im Vorhergehenden (§ 1 bis § 27) betrachteten Aenderungen der Form waren Aenderungen der Länge (vergl. die §§ 1, 6, 11 u. s. f.). Damit sind die auftretenden Formänderungen jedoch noch nicht erschöpft, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Wir denken uns in dem von äusseren Kräften noch nicht ergriffenen Körper, welcher der Betrachtung unterworfen werden soll, einen kleinen Vierflächner (Fig. 76). Begrenzt von den drei in den Kanten  $OA$ ,  $OB$  und  $OC$  sich rechtwinklig schneidenden Ebenen  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$  und der weiteren Ebene  $ABC$ , erscheint derselbe bestimmt durch die drei Kantenlängen  $OA$ ,  $OB$  und  $OC$ , sowie durch die Kantenwinkel, welche die Ebenen der körperlichen Ecke mit einander bilden, nämlich

$$\begin{aligned} \sphericalangle BOC & \text{ (an der Kante } OA), \\ \sphericalangle COA & \text{ ( „ „ „ } OB), \\ \sphericalangle AOB & \text{ ( „ „ „ } OC). \end{aligned}$$

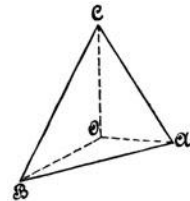


Fig. 76.

Wenn nun jetzt auf den Körper äussere Kräfte, die sich an ihm das Gleichgewicht halten mögen, einwirken, so erleidet er in allen seinen Theilen Formänderungen. Hierbei werden auch die den Vierflächner bestimmenden Grössen sich ändern: die Kanten

werden eine Aenderung ihrer Länge, die Kantenwinkel eine Aenderung ihrer Grösse erfahren.

Die Möglichkeit, dass die Ebenen  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$  und  $ABC$  in gekrümmte Flächen übergehen können, darf unter der Voraussetzung, dass der Vierflächner unendlich klein gedacht wird, unberücksichtigt bleiben, weil ein unendlich kleines Flächenelement — solche liegen dann in den vier Begrenzungsflächen vor — immer als eben angesehen werden kann, und weil die Aenderungen der Lage der vier Flächenelemente bereits durch die Aenderungen der Kanten und der Winkel bestimmt sind.

Hiernach treten zu den im Früheren allein betrachteten Aenderungen der Länge noch Winkeländerungen hinzu.

Zur weiteren Klarstellung des Wesens dieser Aenderungen denken wir uns einen Würfel  $OADBCGFE$  (Fig. 77) von einer in der oberen Ebene  $CGFE$  liegenden und über dieselbe gleichmässig vertheilten Kraft ergriffen und unten (in der Ebene  $OADB$ ) fest-

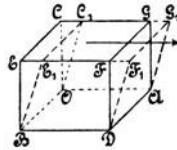


Fig. 77.

gehalten. Dann wird sich die obere Begrenzungsebene  $CGFE$  nach  $C_1G_1F_1E_1$  verschieben, der rechte Winkel  $EBD = \sphericalangle COA$  wird in den spitzen Winkel  $E_1BD = \sphericalangle C_1OA$  übergehen, sich also um

$$\sphericalangle EBE_1 = \sphericalangle COC_1 = \gamma$$

ändern. Diese Winkeländerung ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wofür unter Voraussetzung, dass es sich nur um kleine Aenderungen handelt, gesetzt werden darf

$$\gamma = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}}.$$

Dieser Quotient ist aber auch gleich der Verschiebung, welche unter den gleichen Verhältnissen eine in der Richtung  $OC$  um 1 von der Kante  $BO$  abstehende Ebene (abstehendes Flächenelement, abstehender Punkt) erfahren haben würde. Aus diesem Grunde wird  $\gamma$  als verhältnissmässige (specifische) Verschiebung und kurz als Schiebung oder Gleitung bezeichnet.

Zwei ursprünglich unter rechtem Winkel sich schneidende Ebenen  $OX$  und  $OZ$ , Fig. 78, gelangen durch die Formänderung

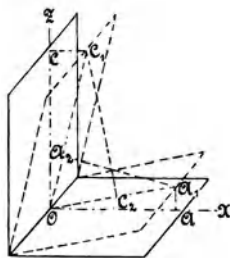


Fig. 78.

in die Lagen  $OA_1$  und  $OC_1$ . Der ursprünglich rechte Winkel  $XOZ$  hat sich hierbei geändert um die Winkel  $XOA_1$  und  $ZOC_1$ , deren Tangenten betragen

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wenn  $AA_1$  und  $CC_1$  senkrecht zu  $OX$ , bzw.  $OZ$  stehen. Da es sich nur um sehr kleine Winkeländerungen handelt, so darf die Gesamtänderung  $\gamma$  gesetzt werden

$$\gamma = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}}.$$

Bei dem betrachteten Vorgange hat sich der ursprünglich in der  $OX$ -Ebene gelegene Punkt  $A_1$  gegen die jetzt nach  $OC_1$  gekommene  $OZ$ -Ebene verschoben um  $\overline{OA_2}$ , sofern  $A_1A_2$  das von

$A_1$  auf  $OC_1$  gefällte Loth ist, und der ursprünglich in  $C$  der  $OZ$ -Ebene gelegene Punkt  $C_1$  gegen die jetzt nach  $OA_1$  gelangte  $OX$ -Ebene um  $OC_2$ , wenn  $C_1 C_2 \perp OA_1$ . Hiernach ergibt sich für die Schiebung

$$\gamma = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\overline{OC_2}}{\overline{C_1 C_2}} = \simeq \frac{\overline{A A_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{C C_1}}{\overline{OC}}.$$

Das Vorstehende zusammenfassend, finden wir, dass mit Schiebung bezeichnet ist:

die Strecke, um welche sich zwei um 1 von einander abstehende Flächenelemente gegen einander verschieben,

oder auch

die Aenderung des rechten Winkels (in Bogenmass) zweier ursprünglich senkrecht zu einander stehenden Seitenflächen.

### § 29. Schubspannung. Schubcoefficient.

Der in § 28 der Betrachtung unterstellte sehr kleine Würfel  $OADBCGFE$  gehöre dem Inneren eines festen Körpers an und nehme unter Einwirkung der äusseren Kräfte, von welchen dieser ergriffen wird, die Gestalt  $OADBC_1 G_1 F_1 E_1$  an. Die innere Kraft, mit welcher aus diesem Anlass die an den Würfel anschliessenden Körpertheile in der Ebene  $CGFE$  auf denselben einwirken und dadurch die Verschiebung der letzteren nach  $C_1 G_1 F_1 E_1$  herbeiführen, heisst, bezogen auf die Flächeneinheit, Schubspannung. Sie unterscheidet sich von der in § 1 besprochenen Spannung dadurch, dass ihre Richtung in das Flächenelement hineinfällt, auf welches sie wirkt, während die im Früheren betrachteten Spannungen senkrecht hierzu standen und deshalb zum Unterschiede als Normalspannungen (Zug- oder Druckspannungen) bezeichnet werden.

Die Schubspannung, die zur Schiebung  $\gamma$  (§ 28) gehört, werde mit  $\tau$  bezeichnet.

Die Schiebung, welche sich für die Schubspannung gleich der Kräfteinheit, d. i. das Kilogramm ergibt, soll Schubcoefficient genannt und mit  $\beta$  bezeichnet werden. Sie beträgt

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau} . . . . . 93)$$

Der Schubcoefficient ist demnach diejenige Zahl, welche angiebt, um welche Strecke sich zwei um 1 von einander abstehende Flächenelemente unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm gegen einander verschieben,

oder auch

derjenige Winkel (in Bogenmass ausgedrückt), um welchen der rechte Winkel  $\left(\frac{\pi}{2}\right)$  zweier ursprünglich senkrecht zu einander stehenden Seitenflächen unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm sich ändert.

Diese Begriffsbestimmung liefert unmittelbar die Schiebung als Produkt aus Schubspannung und Schubcoefficient, d. h.

$$\gamma = \beta \tau, . . . . . 94)$$

wonach der Schubcoefficient auch als diejenige Zahl erklärt werden kann, mit welcher die Schubspannung zu multipliciren ist, um die Schiebung zu erhalten.

Die Schubspannung ergibt sich als der Quotient: Schiebung durch Schubcoefficient, d. i.

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta} . . . . . 95)$$

Der reciproke Werth von  $\beta$  wird als Schubelasticitätsmodul bezeichnet.

Der Vergleich mit § 2 lässt erkennen, dass zwischen Schiebung, Schubspannung und dem Schubcoefficienten genau dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen Dehnung, Normalspannung und dem Dehnungcoefficienten.

### § 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen.

Wir denken uns aus dem betrachteten und von äusseren Kräften ergriffenen Körper ein unendlich kleines Parallelepiped  $OADB CGFE$ , Fig. 79, dessen Kanten

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b, \quad \overline{OC} = c$$

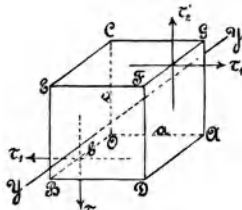


Fig. 79.

sind, herausgeschnitten und die Kräfte eingetragen, mit welchen die an dasselbe anschliessenden Körpermassen in den Schnittflächen auf den Würfel einwirken. Dabei sei zunächst angenommen, dass nur Schubspannungen vorhanden sind und zwar treten auf:

1. in der Begrenzungsfläche  $OADB$  von der Grösse  $ab$  die Schubspannung  $\tau_1$ , also die Kraft  $\tau_1 \cdot ab$ ;
2. in der hierzu parallelen Fläche  $CGFE$  von dem Inhalte  $ab$  die Schubspannung  $\tau'_1$ , also die Kraft  $\tau'_1 \cdot ab$ ; da  $CGFE$  unendlich nahe an  $OADB$  liegt, so kann sich  $\tau'_1$  nur um eine unendlich kleine Grösse, die mit  $\mathcal{A}_1$  bezeichnet sein mag, von  $\tau_1$  unterscheiden, d. i.  $\tau'_1 = \tau_1 + \mathcal{A}_1$ ;
3. in der Begrenzungsfläche  $OBEC$  von der Grösse  $bc$  die Schubspannung  $\tau_2$ , demnach die Kraft  $\tau_2 \cdot bc$ ;
4. in der hierzu parallelen Fläche  $ADFG$  von dem Inhalte  $bc$  die Schubspannung  $\tau'_2$ , demnach die Kraft  $\tau'_2 \cdot bc$ ; da beide Flächen unendlich nahe bei einander gelegen sind, so kann sich  $\tau'_2$  nur um eine unendlich kleine Grösse  $\mathcal{A}_2$  von  $\tau_2$  unterscheiden, d. i.  $\tau'_2 = \tau_2 + \mathcal{A}_2$ .

Soll Gleichgewicht bestehen, so muss u. A. auch die Summe der Momente in Bezug auf die Achse  $YY$ , welche durch den



Schwerpunkt des Parallelepipedes geht und mit der Kante  $OB$  gleich gerichtet ist, Null sein, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 80.

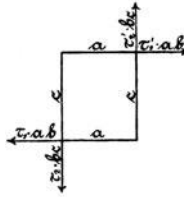


Fig. 80.

$$\tau_1 ab \cdot \frac{c}{2} - \tau_2 bc \frac{a}{2} + \tau'_1 ab \frac{c}{2} - \tau'_2 bc \frac{a}{2} = 0,$$

$$\tau' abc + \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 abc - \tau_2 abc - \frac{1}{2} \mathcal{A}_2 abc = 0.$$

Hieraus unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größe  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  gegenüber den endlichen Größen  $\tau_1$  und  $\tau_2$

$$\tau_1 - \tau_2 = 0,$$

$$\tau_1 = \tau_2, \quad . . . . . 96)$$

d. h. die beiden senkrecht zur Kante  $OB = b$  stehenden Schubspannungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  sind einander gleich. Ist die eine vorhanden, so muss es auch die andere sein; sie treten also paarweise auf.

Zu diesem Ergebniss gelangten wir unter der Voraussetzung, dass lediglich Schubspannungen auf den Würfel einwirkten und zwar nur in den vier Ebenen  $OADB$ ,  $CGFE$ ,  $OBEC$  und  $ADFG$  des Körperelementes, Fig. 79.

Im Allgemeinen werden die Körpertheile, welche das Parallelepiped umgeben, auf dasselbe in den sechs Begrenzungsflächen je mit einer Normalspannung und einer Schubspannung einwirken. Ausserdem können auch noch Massenkraften (Schwere, Trägheitsvermögen) ihren Einfluss äussern.

Was zunächst die Normalspannungen anbelangt, so erkennen wir, dass dieselben für die oben aufgestellte Momentengleichung nicht in Betracht kommen: die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen  $OADB$ ,  $CGFE$ ,  $OBEC$  und  $ADFG$  liefern je eine Kraft, welche die Momentenachse  $YY$  senkrecht schneidet,

also ein Moment gleich Null giebt; die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen  $OAGC$  und  $BDFE$  ergeben in die Momentenachse fallende Kräfte, sind also einflusslos. Die etwaigen Massenkkräfte greifen im Schwerpunkte des Würfels an, gehen demnach durch die Achse, liefern also ein Moment gleich Null.

Von den Schubspannungen entfallen die in den Flächen  $OAGC$  und  $BDFE$  wirkenden ohne Weiteres, da die ihnen entsprechenden Kräfte die Achse  $YY$  schneiden. Hiernach verbleiben noch die Schubspannungen in den vier Flächen  $OADB$ ,  $CGFE$ ,  $OBEC$  und  $ADFG$ .

Wir zerlegen jede derselben nach den Richtungen der Kanten in zwei Componenten. Momentgebend treten hiervon nur auf die senkrecht zu den Kanten  $OB$  und  $GF$  wirkenden Spannungen, d. s.  $\tau_1$   $\tau_2$   $\tau'_1$  und  $\tau'_2$ . Für diese aber fanden wir den oben ausgesprochenen Satz. Derselbe gilt demnach allgemein, gleichgiltig, welche Formänderung das Körperelement unter Einwirkung von Normalspannungen, Schubspannungen und Massenkkräften erfährt:

immer sind für zwei rechtwinklig sich schneidende Ebenen die senkrecht zur Durchschnittslinie gerichteten Componenten der Schubspannungen einander gleich,

oder auch mit Rücksicht darauf, dass diese Durchschnittslinie eine ganz beliebige Lage im Körper haben kann,

wird in einem Körper eine beliebige Gerade gelegt und dieselbe als der Durchschnitt zweier sich rechtwinklig schneidenden Ebenen angesehen, so ist die senkrecht zur Geraden gerichtete Schubspannung in der einen Ebene gleich der senkrecht zu derselben Geraden stehenden Schubspannung in der anderen Ebene.

Die Schubspannungen treten also paarweise auf.

Es entspricht dies ganz der Natur der Schiebung, eine Aenderung des ursprünglich rechten Winkels zu sein. Die auf die Flächeneinheit der beiden Winklebenen wirkenden Kräfte, welche diese Aenderung herbeiführen, müssen in der Richtung des einen Schenkels so gross sein, wie in derjenigen des anderen, da keine der beiden Schenkelrichtungen in irgend einer Weise vor der anderen ausgezeichnet ist.

**§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubcoefficient und Dehnungscoefficient.**

**I. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren grösster Werth.**

$ABCD$ , Fig. 81, sei der Durchschnitt durch ein Parallelepiped.

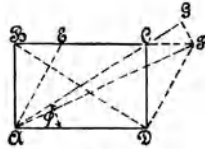


Fig. 81.

Der Körper, welchem dieses angehört, werde nun durch äussere Kräfte ergriffen; infolge dessen ändert er seine Gestalt. Hierbei geht das Rechteck in das Parallelogramm  $A E F D$  über: die Ebene, welche ursprünglich in  $BC$  sich darstellte, erleidet eine Verschiebung um  $\overline{BE} = \overline{CF}$ , so dass die Schiebung

$$\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}.$$

Gleichzeitig erfährt die Diagonale  $\overline{AC}$  eine Vergrösserung auf  $AF$ . Wird von  $A$  aus mit  $\overline{AF}$  ein Kreisbogen beschrieben, so schneidet dieser die Verlängerung von  $AC$  in  $G$ . Die sehr kleine Strecke  $FG$  darf dann als Senkrechte zu  $AG$  angesehen werden, während  $CG$  die Zunahme der Länge der Diagonale ist. Damit findet sich die Dehnung in Richtung der letzteren

$$\epsilon = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF} \cos \varphi}{\overline{CD} \sin \varphi} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} \frac{1}{2} \sin 2 \varphi$$

und wegen

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \gamma$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \gamma \sin 2 \varphi.$$

Für  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , d. h. für  $\overline{CD} = \overline{AD}$  erlangt  $\varepsilon$  seinen grössten Werth

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma. \quad . . . . . 97)$$

Gleichzeitig erfährt die andere, wegen  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  dazu rechtwinklige Diagonale  $DB$  eine Zusammendrückung  $-\varepsilon_2$  von der gleichen Grösse

$$-\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \gamma.$$

Hiernach ist die Schiebung  $\gamma$  mit einer grössten Dehnung  $\varepsilon_1$  und einer gleichzeitigen, dazu senkrechten grössten Verkürzung (Zusammendrückung)  $\varepsilon_2$  verknüpft, welche absolut genommen je halb so gross sind, als die Schiebung. Die Richtung dieser Dehnung zweitheilt den rechten Winkel, dessen Aenderung die Schiebung misst.

Hieraus würde zu folgern sein, dass der zuzulassende Werth  $\gamma_1$  der Schiebung höchstens doppelt so gross sein darf, als die äussersten Falles noch für zulässig erachtete Dehnung  $\varepsilon_1$ , d. h.

$$\gamma_1 \leq 2 \varepsilon_1.$$

Nach Einführung der zulässigen Zuganstrengung

$$k_z = \frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

sowie der zulässigen Schubanstrengung

$$k_s = \frac{\gamma_1}{\beta}$$

ergibt sich

$$k_s \leq 2 \frac{\alpha}{\beta} k_z, \quad . . . . . 98)$$

allerdings unter der Voraussetzung, dass das Material in allen Punkten nach allen Richtungen hin gleich beschaffen, also isotrop ist. Wenn die Beziehung 98 benutzt werden soll, um von der zulässigen Normalspannung eines Materials auf die zulässige Schub-

spannung desselben zu schliessen, so erscheint es nöthig, überdies zu beachten, dass hierfür Gleichartigkeit der Beanspruchungsweise Vorbedingung ist.

**2. Beziehung zwischen Dehnungscoefficient und Schubcoefficient.**

Auf einen Würfel  $ABCD$ , Fig. 82, von der ursprünglichen

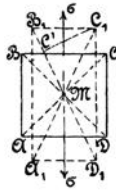


Fig. 82.

Seitenlänge 1 wirken in den Seitenflächen  $AD$  und  $BC$  die Normalspannungen  $\sigma$ . Hierdurch werden die Seitenlängen  $AB$  und  $DC$  um  $\epsilon$  gedehnt, also auf die Grösse  $\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1} = 1 + \epsilon$  gebracht werden, während sich die rechtwinklig hierzu stehenden Kanten  $AD$  und  $BC$  um  $\frac{\epsilon}{m}$  verkürzen (§ 7), demnach die Länge  $1 - \frac{\epsilon}{m}$  annehmen.

Die beiden Diagonalebene  $AC$  und  $BD$  schlossen ursprünglich einen rechten Winkel mit einander ein. Unter Einwirkungen der Normalspannungen  $\sigma$  hat sich dieser Winkel um  $\gamma$  geändert, entsprechend einer Verschiebung z. B. des Punktes  $C$  der Diagonalebene  $AC$  gegenüber der anderen Diagonalebene um

$$\gamma = \frac{\overline{MC''}}{\overline{C'C_1}},$$

sofern  $C_1C' \perp D_1B_1$ .

Die Grösse  $\gamma$  folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der halbe rechte Winkel sich um  $\frac{\gamma}{2}$  geändert hat, aus

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon}{m} \right)}{\frac{1}{2} (1 + \epsilon)}.$$

Die Benützung des Satzes

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

führt zu

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

und unter Beachtung, dass  $\gamma$  und  $\varepsilon$  sehr kleine Grössen gegenüber 1 sind, zu

$$1 - \gamma = 1 - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon,$$

$$\gamma = \frac{m+1}{m} \varepsilon.$$

Denken wir uns jetzt den Würfel in der Diagonalebene  $AC$  auseinander geschnitten, Fig. 83, so wird die Aufrechterhaltung des

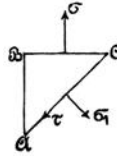


Fig. 83.

Gleichgewichts die Anbringung einer Normalspannung  $\sigma_1$  und einer Schubspannung  $\tau$  fordern, derart, dass die Resultante der Kräfte

$$\sigma_1 \cdot \overline{AC} = \sigma_1 \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \tau \cdot \overline{AC} = \tau \sqrt{2}$$

gleich der Kraft

$$\sigma \cdot \overline{BC} = \sigma \cdot 1 = \sigma,$$

d. h.

$$\sigma_1 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sigma$$

$$\sigma_1 + \tau = \sigma$$

und ferner

$$\sigma_1 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \tau \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sigma_1 = \tau,$$

womit

$$\tau = \frac{\sigma}{2}.$$

Nach dem Früheren ist

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

so dass

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

und mit

$$\gamma = \frac{m+1}{m} \varepsilon$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{m+1}{m} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha, \quad \dots \dots \dots 99)$$

d. h. der Schubcoefficient ist das  $2 \frac{m+1}{m}$ -fache des Dehnungcoefficienten.

Da  $m$  als eine zwischen 3 und 4 liegende Zahl betrachtet zu werden pflegt, so findet sich

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2} \alpha \text{ bis } \frac{8}{3} \alpha = 2,5 \alpha \text{ bis } 2,67 \alpha \\ \alpha &= \frac{3}{8} \beta \text{ bis } \frac{2}{5} \beta = 0,375 \beta \text{ bis } 0,4 \beta. \end{aligned} \right\} \dots \dots 100)$$

Aus Gleichung 98 wird alsdann wegen

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2(m+1)}$$

$$k_s \leq \frac{m}{m+1} k_z. \quad \dots \dots \dots 101)$$

und für  $m = 3$  bis 4

$$k_s \leq \frac{3}{4} k_z \text{ bis } \frac{4}{5} k_z = 0,75 k_z \text{ bis } 0,8 k_z \quad . . . 102)$$

unter den Voraussetzungen, welche zur Beziehung 98 ausgesprochen wurden. Treffen dieselben nicht zu, so erscheint die Gleichung 102 nicht ohne Weiteres gültig. Dann kann es auf Grund von Versuchsergebnissen und sonstigen Erfahrungen nothwendig werden, davon abzuweichen.

## V. Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht.

Es bezeichne

$M_d$  das Moment des drehenden Kräftepaares,

$\Theta_1$  und  $\Theta_2$  die beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes (§ 21, Ziff. 1),

$\Theta$  das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente,

$\Theta' = \Theta_1 + \Theta_2$  das polare Trägheitsmoment,

$f'$  den Inhalt des Querschnittes,

$\tau$  die Schubspannung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes,

$k_d$  die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Drehungsbeanspruchung,

$\beta$  den Schubcoefficienten (§ 29), (reciproker Werth des Schubelasticitätsmodul),

$\gamma = \beta \tau$  die Schiebung oder Gleitung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes (§ 28),

$\vartheta$  den verhältnissmässigen Drehungswinkel, d. h. die Schiebung oder Gleitung im Abstände 1 von der Stabachse für zwei um 1 in Richtung der letzteren von einander abstehende Flächenelemente,

$l$  die Länge des Stabes.



§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt.

Durch die beiden Kräftepaare  $KK$ , Fig. 84, deren Ebenen die Stabachse senkrecht schneiden und welche, das Moment  $M_d$  be-

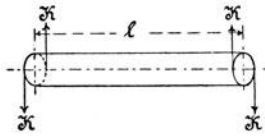


Fig. 84.

sitzend, sich an dem Kreiscylinder das Gleichgewicht halten, werden die einzelnen Querschnitte des Stabes gegen einander verdreht. Um uns ein Bild über diese Formänderung zu verschaffen, theilen

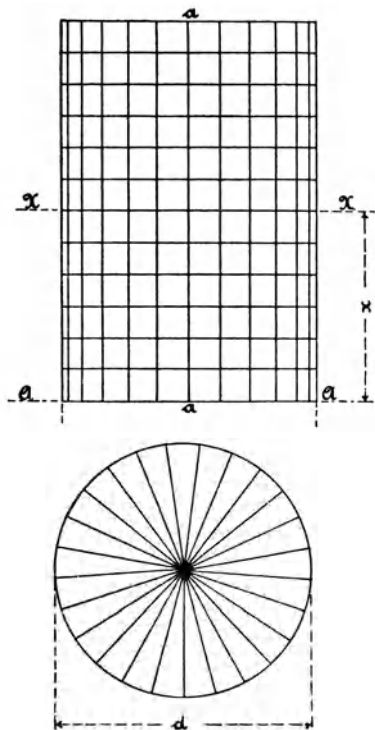


Fig. 85.

wir die Mantelfläche des Cylinders, Fig. 85, bevor dieser von den äusseren Kräften ergriffen wird, durch  $n$  Gerade  $aa$  parallel zur

Achse in  $n$  (25) Rechtecke, je von der Breite  $\pi d:n$  ( $40\pi:25=5,0$  mm, da  $d=40$  mm), und diese durch Parallelkreise im Abstand  $\pi d:n$  (5,0 mm) in Quadrate, deren Seitenlänge  $\pi d:n$  (5,0 mm) beträgt. Auf diese Weise erhalten wir die Fig. 85. Wird nun der so gezeichnete Cylinder der Verdrehung unterworfen, so geht er in Fig. 86 (Tafel IV) über. Aus derselben ist zu entnehmen:

- a) dass die auf den unbelasteten Cylinder gezeichneten Quadrate in unter sich gleiche Rhomben übergegangen sind,
- b) dass die Ebenen der Parallelkreise, d. s. die Querschnitte des Stabes eben und senkrecht zur Achse der letzteren geblieben sind,
- c) dass sich je zwei aufeinander folgende Querschnitte immer gleich viel gegen einander verdreht haben, dass also beispielsweise der Bogen, um welchen sich ein Punkt des Parallelkreises  $XX$ , Fig. 85, gegenüber dem ursprünglich gleich gelegenen Punkte im Stabquerschnitt  $AA$  bewegt hat, proportional dem Abstände  $x$  ist.

Sind nun  $f_1$  und  $f_2$  zwei um 1 von einander abstehende Querschnitte des Stabes und  $P_1 P_2$  zwei ursprünglich gleich gelegene Umfangspunkte in denselben, so wird sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte  $P_2$  gegen  $P_1$  um eine Strecke  $\gamma_1$  verdreht haben, welche nach Massgabe des in § 28 Erörterten als die Schiebung im Punkte  $P_1$  zu bezeichnen ist. Für die Schiebung  $\gamma$  in einem auf dem Halbmesser  $OP_1$ , Fig. 87, im Abstände  $\overline{OP} = \varrho$  von der Achse gelegenen Punkt  $P$  erscheint auf Grund der oben angeführten Erfahrungen die Annahme zutreffend, dass sie sich zu derjenigen im Umfangspunkte  $P_1$  verhält wie  $\varrho:r$ , also

$$\gamma : \gamma_1 = \varrho : r,$$

d. h.

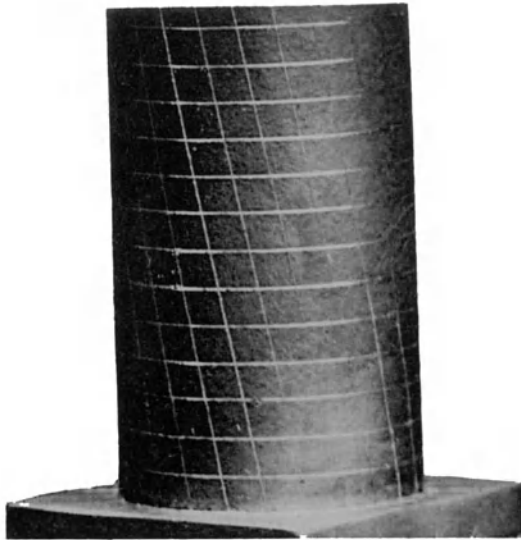
$$\gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r} \dots \dots \dots 103)$$

Wird in Fig. 87 die tangentielle Linie  $\overline{P_1 P_1'} = \gamma_1$  und die hierzu parallele Strecke  $\overline{P P'} = \gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r}$  gemacht, so liefert die zeichnerische Darstellung der Schiebungen in allen Punkten der Geraden  $OP_1$  die Gerade  $OP'P_1'$ .

Fig. 89.



Fig. 86.





$$M_d = \frac{\gamma_1}{r} \int \frac{1}{\beta} \varrho^2 df,$$

und wenn  $\beta$  constant

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r} \int \varrho^2 df.$$

Unter Beachtung, dass

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

sofern  $y$  und  $z$  die rechtwinkligen Coordinaten des in  $P$  liegenden Flächenelementes sind, und mit

$$\int y^2 df = \Theta_1 \quad \text{und} \quad \int z^2 df = \Theta_2$$

wird

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r} (\Theta_1 + \Theta_2) = \tau_1 \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{r} = \tau_1 \frac{\Theta'}{r}.$$

Die beiden Trägheitsmomente  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  sind für den vollen Kreisquerschnitt

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Demnach

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} d^3 = \tau_1 \frac{\pi}{2} r^3. \quad \dots \quad 104)$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d d^3 \quad \text{oder} \quad k_d \geq \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3}. \quad \dots \quad 105)$$

Für den Kreisringquerschnitt ergibt sich, sofern  $d$  der äussere und  $d_o$  der innere Durchmesser ist,

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_o^4)$$

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_o^4}{d}$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_o^4}{d} \quad \text{oder} \quad k_d \geq \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_o^4}. \quad \dots \quad 106)$$

Der Drehungswinkel  $\vartheta$  folgt unmittelbar aus der gegebenen Begriffsbestimmung

$$\vartheta = \frac{\gamma_1}{r} = \frac{\beta M_d}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4}, \quad \dots \quad 107)$$

beziehungsweise

$$\vartheta = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_o^4}. \quad \dots \quad 108)$$

Hiernach der im Abstände 1 von der Achse gemessene Verdrehungsbogen der beiden um  $l$  von einander abstehenden Querschnitte des Kreiscylinders

$$\vartheta_l = \vartheta l = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4} l, \quad \text{bezw.} \quad \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_o^4} l.$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurden nur Schubspannungen im Stabquerschnitte ins Auge gefasst; so z. B. im Punkte  $P$ , Fig. 87, nur die Schubspannung  $\tau$ , welche, senkrecht zu  $OP_1$  angreifend, in der Bildebene wirkt. Nach § 30 treten jedoch die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, dass in demselben Punkte  $P$  senkrecht zur Bildebene, d. h. senkrecht zum Querschnitte eine der oben erwähnten Spannung  $\tau$  gleiche Schubspannung vorhanden ist. Das Flächenelement, in dem sie wirkt, liegt im Punkte  $P$  derjenigen Ebene, welche durch den Halbmesser  $OP_1$  und die Stabachse bestimmt wird. So findet sich beispielsweise im Punkte  $P_1$  die Schubspannung  $\tau_1$  nicht bloß im Querschnitt (tangential zum Kreisumfang gerichtet), sondern auch in der Achsialebene  $OP_1$  mit der Mantellinie des Cylinders zusammenfallend.

Der Uebergang der Quadrate, Fig. 85, (bei Verdrehung des Cylinders) in die Rhomben, Fig. 86 (Tafel IV), beweist dies auch unmittelbar aus der Anschauung. Wie wir in § 28 sahen, ist die Aenderung des ursprünglich rechten Winkels gleich der Schiebung.

Diese Winkeländerung misst demnach wegen  $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$  die Schubspannung unmittelbar. Sie betrifft sowohl den wagerechten wie auch den senkrechten Schenkel des rechten Winkels. Die entsprechende Schubspannung ist deshalb ebensowohl in senkrechter, wie in wagrechter Richtung vorhanden. Sie muss, da alle Rhomben

unter sich gleich sind, für alle Stellen der Mantelfläche des Cylinders dieselbe Grösse besitzen, sowohl tangential zur Umfangslinie, als auch in Richtung der Achse des Stabes. Die grösste Schubspannung, welche im Querschnitt stattfindet, tritt also auch in Richtung der Stabachse auf.

Schneiden wir aus dem Cylinder ein kleines Körperelement  $ACDBEF$ , Fig. 88, heraus, mit den Querschnittsebenen  $ACD$ ,  $BEF$

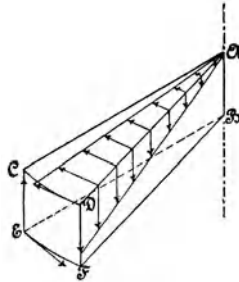


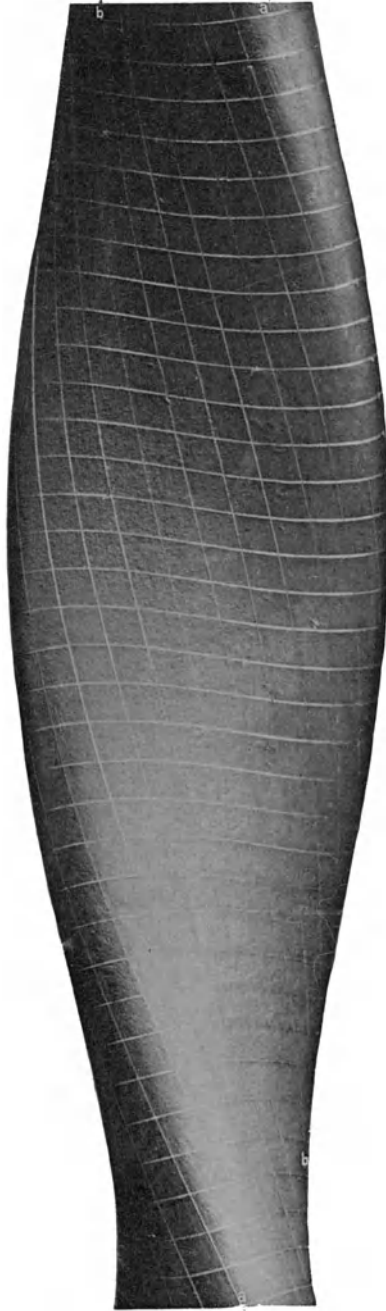
Fig. 88.

und den Achsialebenen  $ABFD$ ,  $ABEC$ , so ergibt die graphische Darstellung der in den Ebenen  $CDA$  und  $BFAD$  wirkenden Schubspannungen unter Voraussetzung eines unveränderlichen Schubcoefficienten je ein Dreieck. Sie zeigt deutlich das paarweise Auftreten der Schubspannungen in den beiden Ebenen, welche  $AD$  zur Durchschnittslinie haben.

Bei gewalztem Eisen oder Draht u. s. w. findet infolge der ausgeprägten Faserrichtung die achsiale Schubspannung häufig einen geringeren Widerstand als die im Querschnitt wirkende, weshalb dann Längsrisse eintreten, wie Fig. 89 (Tafel IV) für ein der Verdrehung unterworfenen Stück Walzeisen erkennen lässt. Beim Verdrehen von Eisendraht lassen sich solche Risse ebenfalls leicht beobachten. Die achsial gerichteten Schubspannungen sind auch Ursache, dass bei auf Drehung in Anspruch genommenen Körpern nicht selten schon frühzeitig bleibende Verdrehung eintritt, wie dies z. B. bei Walzeisen der Fall zu sein pflegt.

(Vergl. die Flächen der durch Verdrehung herbeigeführten Brüche in den Figuren 105 (Tafel VIII), 107 und 108 (Tafel IX), sowie 109 (Tafel X).

Fig. 90.





### § 33. Stab von elliptischem Querschnitt.

#### I. Formänderung.

Nach dem in § 32 gegebenen Vorgange wird ein Cylinder mit elliptischem Querschnitt (grosse Achse =  $2a = 50$  mm, kleine Achse =  $2b = 25$  mm) hergestellt und seine Mantelfläche in Quadrate eingetheilt.

Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Gestalt Fig. 90 (Tafel V) über<sup>1)</sup>. Die beiden ursprünglich geraden Mantellinien, welche die Endpunkte der grossen Halbachsen aller Querschnitte enthalten, sind durch die Bezeichnung  $aa$  hervorgehoben, während diejenigen zwei Linien, welche von den Endpunkten der kleinen Halbachsen sämtlicher Querschnitte gebildet werden, die Bezeichnung  $bb$  tragen. Wir erkennen bei genauer Untersuchung des verdrehten Cylinders:

- a) dass die Quadrate in Rhomben übergegangen sind,
- b) dass die Winkel derjenigen Rhomben, welche mit der einen Seite in der jetzt schraubenförmig gekrümmten Linie  $bb$  liegen, am meisten von dem ursprünglich rechten Winkel abweichen, während diejenigen Rhomben, deren eine Seite von der Schraubenlinie  $aa$  gebildet wird, die geringste Abweichung von ihrer früheren Gestalt, dem Quadrate, zeigen,
- c) dass die ursprünglich ebenen Querschnitte sich gewölbt haben,
- d) dass jedoch die beiden Hauptachsen eines Querschnittes in der ursprünglichen Ebene verblieben sind und den rechten Winkel beibehalten haben,
- e) dass sich je die beiden Hauptachsen zweier auf einander folgenden Querschnitte immer um gleichviel gegen einander (um die in ihrer Lage unverändert gebliebene Stabachse) verdreht haben.

---

<sup>1)</sup> Das Material des auf photographischem Wege dargestellten Cylinders ist wie bei Fig. 86 (Taf. IV) und bei Fig. 94 (Taf. VI), sowie Fig. 95 (Taf. VII) Hartblei. Dasselbe behält die Formänderung fast vollständig bei und giebt deshalb auch nach der Lösung des Stabes aus der Prüfungsmaschine ein gutes Bild dieser Aenderung. Bei Verwendung von stark elastischem Material, wie Gummi, ist die Formänderung eine gleiche, nur verschwindet sie mit der Entlastung des Probekörpers zu einem grossen Theile und entzieht sich so der Darstellung. Versuche mit schmiedbarem Eisen führen zu einem ganz entsprechenden Ergebnisse.

## 2. Schubspannungen.

Fassen wir zunächst einen Umfangspunkt  $P'$  des Querschnittes, Fig. 91, ins Auge, so muss die Schubspannung  $\tau'$  in dem zu  $P'$  ge-

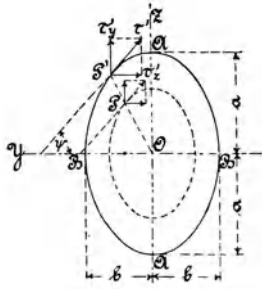


Fig. 91.

hörigen Querschnittselement naturgemäss tangential zur Umfangsline gerichtet sein, sofern hier äussere, eine andere Richtung der Schubspannung bedingende Kräfte nicht angreifen.

Wir zerlegen  $\tau'$  in die beiden Componenten

$$\begin{array}{l} \tau'_y, \text{ senkrecht zur } y\text{-Achse wirkend,} \\ \tau'_z, \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{'' } z\text{-''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{, und} \end{array}$$

bezeichnen durch  $\psi$  den Winkel, welchen die Tangente im Punkte  $P'$  mit der  $y$ -Achse einschliesst, sowie durch  $y'$  und  $z'$  die Coordinaten des Umfangspunktes  $P'$ . Dann folgt zunächst

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\tau'_y}{\tau'_z}$$

und sodann aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

durch Differentiation

$$\frac{y'}{b^2} dy' + \frac{z'}{a^2} dz' = 0$$

$$\frac{dz'}{dy'} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'}.$$

Aus Fig. 91 ergibt sich unmittelbar

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz'}{-dy'}$$

Folglich durch Gleichsetzen der beiden für  $\operatorname{tg} \psi$  erhaltenen Werthe

$$\frac{\tau_y'}{\tau_z'} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'} \dots \dots \dots 109)$$

Hiernach erscheint  $\tau_y'$  proportional  $y'$  und  $\tau_z'$  proportional  $z'$ .

Denken wir uns für den im Inneren des Querschnittes liegenden Punkt  $P$ , bestimmt durch die Coordinaten  $y$  und  $z$ , die entsprechende (ähnliche) Ellipse konstruirt, so wird auch hier die Schubspannung  $\tau$ , deren Componenten  $\tau_y$  ( $\perp OY$ ) und  $\tau_z$  ( $\perp OZ$ ) seien, tangential gerichtet sein müssen. Demgemäss erhalten wir

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz, \dots \dots \dots 109a)$$

worin  $A$  und  $B$  Constante bedeuten.

Die im Querschnitte wachgerufenen Schubspannungen müssen sich nun mit dem Momente  $M_d$  im Gleichgewicht befinden. Wird das in  $P$  liegende Flächenelement mit  $df$  bezeichnet, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\int (\tau_y df \cdot y + \tau_z df z) = M_d,$$

woraus unter Beachtung der Gleichungen 109a und mit Rücksicht darauf, dass nach § 17, Ziff. 6

$$\int y^2 df = \frac{\pi}{4} ab^3 \qquad \int z^2 df = \frac{\pi}{4} a^3 b$$

$$M_d = A \frac{\pi}{4} ab^3 + B \frac{\pi}{4} a^3 b.$$

Die Verbindung der Gleichungen 109 und 109a ergibt

$$\frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{z'} = \frac{Ay'}{Bz'},$$

woraus

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \text{ oder } A = B \frac{a^2}{b^2}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung für  $M_d$  findet sich

$$M_d = B \frac{a^2}{b^2} \frac{\pi}{4} a b^3 + B \frac{\pi}{4} a^3 b = \frac{\pi}{2} a^3 b B,$$

$$B = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^3 b},$$

$$A = B \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3}.$$

Hiermit nach den Gleichungen 109a die Schubspannungen für den beliebigen Querschnittspunkt  $P$

$$\left. \begin{aligned} \tau_y = Ay &= \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3} y, \\ \tau_z = Bz &= \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^3 b} z. \end{aligned} \right\} \dots \dots 110)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^3 b^3} \cdot \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}. \dots 111)$$

Dieser Ausdruck wächst mit  $y$  und  $z$ , erlangt also für bestimmte Umfangspunkte den grössten Werth. Zur Feststellung, in welchen Punkten des Umfangs dies der Fall ist, werde  $a \geq b$  vorausgesetzt und dem Ausdruck für  $\tau'$ , gültig für den Umfangspunkt  $y' z'$ , die Form

$$\tau' = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3} \sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \dots 112)$$

gegeben. Da

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 = 1,$$

so muss wegen  $a \geq b$

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1$$

sein. Demnach ergibt sich der grösste Werth der Schubspannung für  $y' = \pm b$  und  $z = 0$  zu

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2}, \dots \dots \dots 113)$$

d. h. die grösste Schubspannung tritt in den Endpunkten  $BB$  der kleinen Achse, also in denjenigen Punkten auf, welche der Stabachse am nächsten liegen.

Hiermit folgt

$$k_d \geq \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \text{ oder } M_d \leq \frac{\pi}{2} k_d a b^2 \dots \dots 114)$$

In den Endpunkten  $AA$  der grossen Achse ist sie, da hier

$$y' = 0 \qquad z' = \pm a$$

$$\tau' = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^2 b} = \frac{b}{a} \tau'_{max}, \dots \dots \dots 115)$$

d. i. im Verhältniss der Halbachsen kleiner als die Spannung in den Punkten  $BB$ .

Dieses für den ersten Augenblick überraschende Ergebniss steht in voller Uebereinstimmung mit der oben unter Ziff. 1, b angeführten Beobachtung. Die Winkeländerungen, welche nach § 28 die Schiebungen  $\gamma$  messen, die ihrerseits nach § 29 zu den Schubspannungen in der Beziehung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

stehen, sind — Fig. 90 (Taf. V) — am grössten in den Endpunkten der kleinen und am kleinsten in den Endpunkten der grossen Achse der Ellipse.

Hinsichtlich des Gesetzes, nach dem sich die Schubspannungen im Innern ändern, ist die ohne Weiteres aus den Gleichungen 110 u. 111 folgende Bemerkung von Interesse, dass für alle auf der Geraden  $OP'$ , Fig. 91, liegenden Querschnittelemente die Spannungen parallel gerichtet und proportional dem Abstände von der Stabachse sind.

In Fig. 92 ist das Aenderungsgesetz der Schubspannungen dargestellt für die Punkte der grossen und der kleinen, sowie für die-

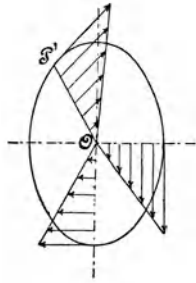


Fig. 92.

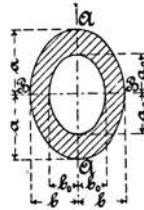


Fig. 93.

jeningen einer beliebigen Halbachse  $OP'$ . Für die Umfangspunkte lässt sich dasselbe unmittelbar der Gleichung 112 entnehmen.

Handelt es sich nicht um einen Voll-, sondern um einen Hohlstab, Fig. 93, so gilt unter der von dem Gange der obigen Entwicklung bedingten Voraussetzung, dass die innere Begrenzungsellipse der äusseren ähnlich ist, d. h.

$$a_0 : a = b_0 : b = m,$$

wegen

$$\int y^2 df = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_0 b_0^3) \qquad \int z^2 df = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_0^3 b_0)$$

$$M_a = A \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_0 b_0^3) + B \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_0^3 b_0),$$

woraus dann mit

$$A = \frac{a^2}{b^2} B$$

$$B = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1 - m^4) a^3 b}$$

und schliesslich

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1 - m^4) a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2} \dots 116)$$

Für die Punkte  $B$  des Umfanges erlangt  $\tau$  seinen Grösstwerth, nämlich

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{(1 - m^4) a b^3} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3 - a_o b_o^3} b, \quad . \quad 117)$$

so dass

$$k_d \geq \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3 - a_o b_o^3} b \quad \text{oder} \quad M_d \leq \frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_o b_o^3}{b}. \quad 118)$$

Die Gleichungen 114 und 117 zeigen deutlich, dass die Widerstandsfähigkeit eines elliptischen Voll- oder Hohlstabes gegenüber der Drehungsbeanspruchung abhängt von dem kleinsten der beiden Hauptträgheitsmomente, also nicht von der Summe beider, wie die ältere Lehre von der Drehungsfestigkeit angab.

Die letztere schuf ursprünglich ihre Entwicklungen, welche davon ausgingen, dass die Schubspannungen proportional mit dem Abstände des Querschnittselementes von der Stabachse wachsen und senkrecht zu diesem Abstände stehen, allerdings nur für die in § 32 behandelten Querschnitte; hierfür war sie auch zutreffend. Ihre Uebertragung auf andere Querschnitte war unzulässig.

Die Gleichung 118 enthält die Beziehung 105 und 106 je als besonderen Fall in sich. Es wird für

$$a = b = \frac{d}{2} \quad a_o = b_o = \frac{d_o}{2}$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_o^4}{d}$$

und für  $d_o = 0$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d d^3.$$

Die Schlussbemerkungen zu § 32, betreffend das paarweise Auftreten der Schubspannungen u. s. w., gelten auch hier, überhaupt sinngemäss für alle auf Drehung beanspruchten Körper.

Hinsichtlich der Folgen, welche eine Hinderung der oben unter Ziff. 1c festgestellten Querschnittswölbung mit sich bringt, sei auf § 34, Ziff. 3 verwiesen.

### § 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.

#### I. Formänderung.

Nach dem Vorgange in den Paragraphen 32 und 33 wird ein Prisma von rechteckigem Querschnitt (60 mm breit, 20 mm stark) hergestellt und jede seiner 4 Mantelflächen in Quadrate von 5 mm Seitenlänge eingetheilt. Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an dem Stabe das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Form Fig. 94 (Taf. VI) über.

Wir erkennen Folgendes:

- a) Die Quadrate haben ihre ursprüngliche Form mehr oder minder verloren und rhombenartige Gestalt angenommen.

Die Querlinien schneiden mit ihren äussersten Elementen die 4 Eckkanten des Stabes senkrecht, wie dies ursprünglich jede der früher geraden Querlinien in ihrer ganzen Erstreckung that; dagegen ändert sich die Rechtwinkligkeit zwischen Quer- und Längslinien um so mehr, je näher die letzteren der Seitenmitte liegen. Die Aenderung des rechten Winkels, d. h. die Schiebung (§ 28), beträgt hiernach in den Kanten des Stabes Null, wächst von da zunächst ziemlich rasch, sofern die breite Seitenfläche ins Auge gefasst wird, und erreicht für sämtliche Seitenflächen in deren Mitten ausgezeichnete Werthe, von denen derjenige in der Mitte der breiten Seitenflächen der grössere ist. Die grösste Schiebung findet hiernach in denjenigen Punkten des Stabumfanges statt, welche der Achse am nächsten liegen.

- b) Die ursprünglich ebenen Querschnitte haben sich gewölbt.
- c) Die beiden Hauptachsen eines Querschnittes sind in der ursprünglichen Ebene geblieben. (Für einen Querschnitt ist dessen ursprüngliche Ebene gestrichelt eingetragen.)
- d) Je die beiden Hauptachsen zweier auf einander folgenden Querschnitte haben sich immer um gleichviel gegen einander verdreht.

Hinsichtlich der Wölbung der Querschnitte ist es von Interesse zu beachten, dass der Abstand derjenigen Punkte des gewölbten Querschnittes, welche von den Seitenmitten ab- und nach den Stabkanten hin gelegen sind, von der ursprünglichen Querschnittsebene (vgl. Ziff. 3) sich als ziemlich bedeutend erweist, und dass infolgedessen die Ausbildung dieser gewölbten Form eine verhält-



Fig. 94.

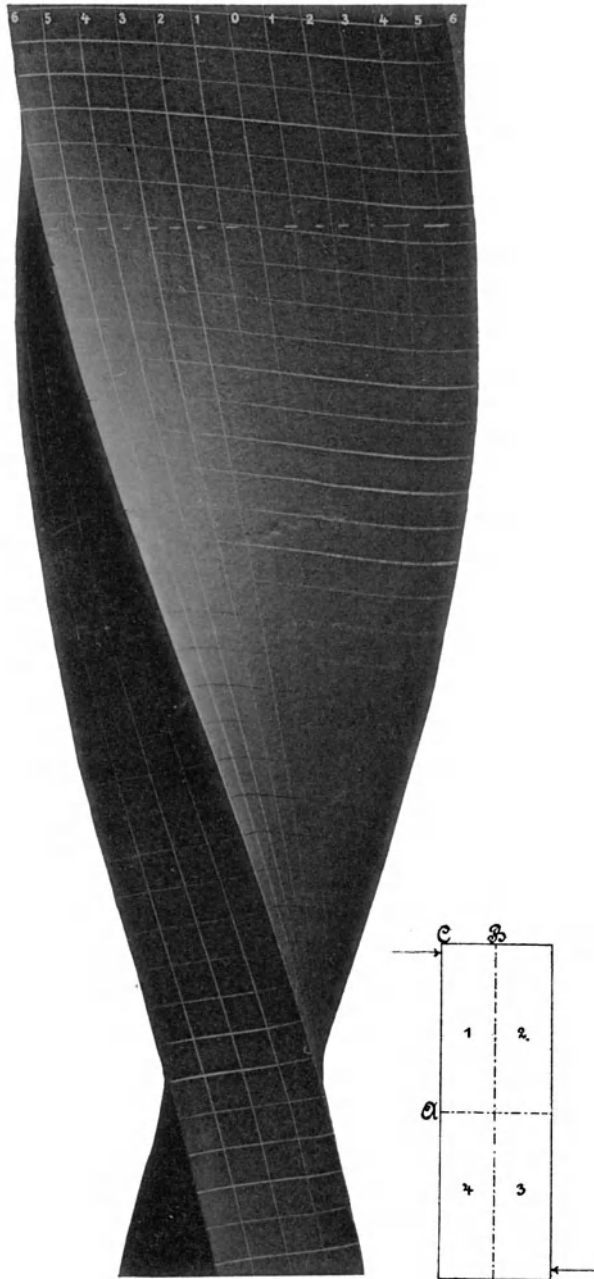
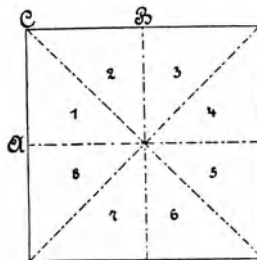
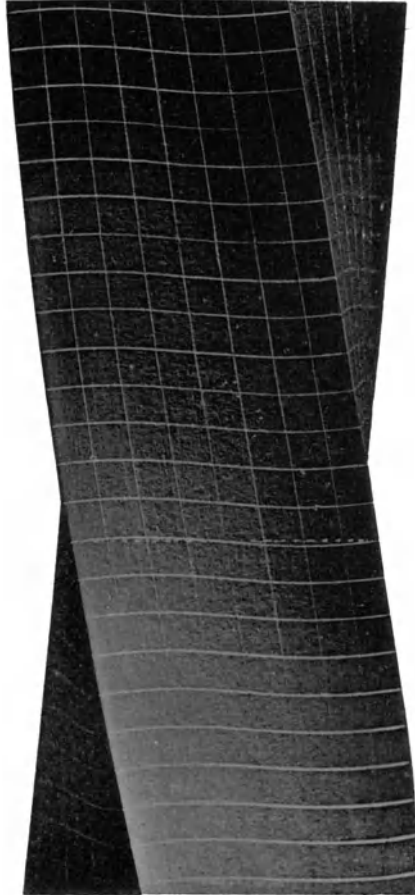


Fig. 95.



nismässig grosse Zurückziehung (positive im ersten und dritten, negative im zweiten und vierten Quadranten) der von den Seitenmitten abgelegenen Fasern gegenüber der früheren Querschnittsebene zur Folge hat. Wie ersichtlich, ist die Wölbung erhaben, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittselemente von der Grundebene hat sich vergrößert, in denjenigen diametral zu einander liegenden beiden Querschnittsvierteln, gegen deren lange Seiten die Kräfte des drehenden Kräftepaars gerichtet sein müssten, wenn hierdurch die stattgehabte Verdrehung bewerkstelligt werden sollte. In den beiden anderen Querschnittsvierteln ist die Wölbung vertieft, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittselemente von der Grundebene hat sich verkleinert.

Die Stirnflächen des verdrehten Prisma werden hiernach zeigen (vgl. Fig. 94)

im Viertel 1	erhabene	Wölbung,	
" "	2	vertiefte	" ,
" "	3	erhabene	" ,
" "	4	vertiefte	" .

Ist für den rechteckigen Stab  $b = h$ , d. h. handelt es sich um einen quadratischen Querschnitt, so nimmt derselbe bei der Verdrehung die Form Fig. 95 (Taf. VII) an. Dieselbe bestätigt das oben unter a) bis d) Erkannte durchaus. Nur hinsichtlich der Wölbung der Querschnitte tritt insofern eine Änderung ein, als hier alle Seiten gleich gross sind und deshalb kein Grund vorliegt, weshalb sich das eine Viertel anders verhalten soll, wie das andere, wenn die Kräfte, welche das vorhandene Kräftepaar liefern, auf den durch die Verdrehungsrichtung bestimmten 4 Halbseiten wirkend gedacht werden. Thatsächlich weist Fig. 95 nach, dass für quadratischen Querschnitt (vergl. Fig. 95) bei der angenommenen Verdrehungsrichtung die Wölbung eine erhabene ist in den Achteln 1, 3, 5 und 7, dagegen eine vertiefte in den Achteln 2, 4, 6 und 8. Ausser den beiden Symmetrieachsen verbleiben noch die zwei Diagonalen in der ursprünglichen Querschnittsebene und damit auch die vier Eckpunkte. Die hierdurch ausgezeichneten vier Linien weisen nach Ziff. 2 noch die weitere Eigenschaft auf, dass die in ihren Punkten wirkenden Schubspannungen senkrecht zu ihnen gerichtet sind.

Die Erkenntniss dieser eigenartigen Formänderungen der Querschnitte ist unter Umständen von grosser praktischer Bedeutung,



Ermittlung der Aenderungen der ursprünglich rechten Winkel; demgemäss werden sich auch die Schubspannungen von  $C$  nach  $A$  hin ändern.

Zum Zwecke der Bestimmung der letzteren erinnern wir uns, dass beim elliptischen Querschnitt (§ 33) die im beliebigen Punkte  $P$  wirkende Spannung  $\tau$  die beiden Componenten  $\tau_y$  und  $\tau_z$  lieferte, für welche galt

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz.$$

Hier werden  $\tau_y$  (senkrecht zur  $y$ -Achse) und  $\tau_z$  (senkrecht zur  $z$ -Achse) in entsprechender Weise von  $y$  und  $z$  abhängen müssen. Dort waren  $A$  und  $B$  constante Grössen, während sie hier veränderlich sein müssen, da ja  $\tau_y$  für  $y = \frac{b}{2}$  nach  $C$  hin bis auf Null abzunehmen hat, ebenso  $\tau_z$  für  $z = \frac{h}{2}$ .

Wird die Schubspannung in der Mitte der langen Seite, d. h. in  $A$  mit  $\tau'_a$ , diejenige in Punkt  $P'$ , welcher im Abstände  $z$  von  $A$  auf der Strecke  $AC$  gelegen ist, mit  $\tau'$  bezeichnet und  $\overline{AH} = \tau'_a$ ,  $P'P'' = \tau'$  gemacht; wird ferner in Anlehnung an § 38, Fig. 119, dem Aenderungsgesetz der Schubspannungen in der Linie  $AC$ , d. h. dem Verlaufe der Linie  $CP''H$ , die einfachste Curve, die gewöhnliche Parabel mit  $H$  als Scheitel und  $HA$  als Hauptachse zu Grunde gelegt, so folgt nach dem bekannten Satz, dass sich bei der Parabel die Abscissen verhalten wie die Quadrate der Ordinaten

$$(\tau'_a - \tau') : \tau'_a = z^2 : \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\tau' = \tau'_a \left[ 1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right].$$

Demgemäss setzen wir für den Faktor  $A$  in der Gleichung  $\tau_y = Ay$

$$A = c \tau'_a \left[ 1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] = m \left[ 1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right]$$

und ganz entsprechend für  $B$  in dem Ausdruck  $\tau_z = Bz$

$$B = d \tau'_b \left[ 1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 \right] = n \left[ 1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 \right],$$

wenn  $c$ ,  $d$ ,  $m$  und  $n$  Constante sind und  $\tau'_b$  die Schubspannung im Punkte  $B$  bezeichnet.

Nach dem bei der Ellipse (§ 33) gewonnenen Ergebnisse — dort verhielten sich die Schubspannungen in den Endpunkten der grossen Achse zu denjenigen in den Endpunkten der kleinen Achse umgekehrt wie die zugehörigen Halbachsen — sowie mit Rücksicht darauf, dass in Fig. 94 die Aenderungen der rechten Winkel in der Mitte der langen Seite, sowie diejenigen in der Mitte der kurzen Seite auf das Verhältniss  $h : b$  hinweisen, werde angenommen

$$\tau'_b = \tau'_a \frac{b}{h}.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= m \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y, \\ \tau_z &= n \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 119)$$

und in ganz gleicher Weise wie in § 33 Ziff. 2

$$\begin{aligned} & \int (\tau_y df \cdot y + \tau_z df \cdot z) = M_d \\ & = m \int \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y^2 df + n \int \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z^2 df, \\ M_d & = \frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - 4 \left( \frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2} \right) \int y^2 z^2 df. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int y^2 z^2 df = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{144} b^3 h^3$$

wird

$$M_d = \frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - \frac{1}{36} \left( \frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2} \right) b^3 h^3. \quad . 120)$$

Nun ist

$$\text{für den Punkt } A, \text{ d. i. } y = \frac{b}{2} \text{ und } z = 0$$

$$\tau_y = \tau'_a,$$

womit nach der ersten der Gleichungen 119

$$\tau'_a = m \frac{b}{2} \quad \text{oder} \quad m = \frac{2 \tau'_a}{b}$$

und für den Punkt  $B$ , d. i.  $y = 0$  und  $z = \frac{h}{2}$

$$\tau_z = \tau'_b,$$

infolgedessen nach der zweiten der Gleichungen 119

$$\tau'_b = n \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad n = \frac{2 \tau'_b}{h} = \frac{2 b}{h^2} \tau'_a.$$

Hiermit gehen die Gleichungen 119 und 120 über in

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= 2 \tau'_a \frac{1}{b} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] y, \\ \tau_z &= 2 \tau'_b \frac{1}{h} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z \\ &= 2 \tau'_a \frac{b}{h^2} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right] z, \end{aligned} \right\} \dots 121)$$

beziehungsweise

$$M_d = \frac{2}{9} \tau'_a b^2 h. \dots 122)$$

Gleichung 122 führt zu

$$M_d \leq \frac{2}{9} k_d b^2 h \quad \text{oder} \quad k_d \geq \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^2 h}. \dots 123)$$

Die grösste Anstrengung tritt hierbei auf in denjenigen Punkten der Umfangsline des Querschnittes, welche der Stabachse am nächsten liegen.

(Vergl. das unter Ziff. 3 Erörterte.)

Um ein Bild der Spannungsvertheilung über den rechteckigen Querschnitt zu erhalten, sind in Fig. 97 die Spannungen für einige

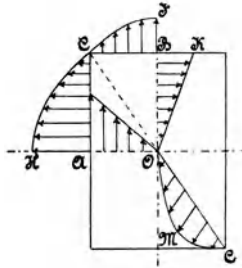


Fig. 97.

Flächenstreifen eingetragen. Es werden dargestellt die Schubspannungen

- für die in der Linie  $CA$  liegenden Querschnittelemente durch die wagrechten Ordinaten der Curve  $CH$ ,
- für die in der Linie  $CB$  liegenden Querschnittelemente durch die senkrechten Ordinaten der Curve  $CJ$ ,
- für die in der Linie  $OA$  liegenden Querschnittelemente durch die zu  $OA$  senkrechten Pfeillinien,
- für die in der Linie  $OB$  liegenden Querschnittelemente durch die wagrechten Ordinaten der Geraden  $OK$ ,
- für die in der Linie  $OC$  liegenden Querschnittelemente durch die geneigten Ordinaten der Curve  $OMC$ .

Die letztere Linie folgt aus den Gleichungen 121 unter Beachtung, dass für die Punkte der Diagonale  $OC$

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h}$$

ist. Hiermit ergibt sich dann für die einzelnen in  $OC$  gelegenen Flächenelemente

$$\tau_z : \tau_y = b : h,$$

d. h. die Schubspannungen sind parallel gerichtet, und





$$M_d = \frac{1}{20} k_d b^3, ^1)$$

sowie derjenige für das gleichseitige Sechseck

$$M_d = \frac{1}{1,09} k_d b^3, ^1)$$

worin je  $b$  die Seitenlänge bezeichnet, bringen.

Es ist dann

$$\varphi = 1,385$$

beziehungsweise

$$\varphi = 1,694.$$

Die Gleichung 124 spricht deutlich aus, dass die Widerstandsfähigkeit gegenüber Drehungsbeanspruchung von dem kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente bestimmt wird, dass also das grössere nicht in Betracht kommt.

### 3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung.

Unter Ziff. 1 erkannten wir, dass die ursprünglich ebenen Querschnitte des rechteckigen Prisma infolge Einwirkung des Drehungsmomentes in gekrümmte Flächen übergehen. Für den Fall, dass der Querschnitt langgestreckt war, wie bei Stab Fig. 94 (Taf. VI), fand sich, dass die Strecken, um welche hierbei die einzelnen, von den Seitenmitten abgelegenen Querschnittselemente aus der ursprünglichen Querschnittsebene herausgerückt waren, verhältnissmässig bedeutend ausfielen. (Vergleiche daselbst die gestrichelte Linie, welche die ursprüngliche Ebene des jetzt gewölbten Querschnittes angiebt; das Achsenkreuz ist beiden gemeinsam.)

So lange der auf Drehung in Anspruch genommene Körper durchaus prismatisch ist, hat diese Krümmung der Querschnitte verhältnissmässig geringes Interesse für den Ingenieur. Ganz anders gestaltet sich jedoch die Sache, sobald diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist.

Handelt es sich beispielsweise um einen Körper, wie in § 35, Fig. 98 dargestellt, der an seinen Enden Platten trägt, durch welche

---

<sup>1)</sup> S. u. A. Herrmann, Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1883, S. 172.

die beiden Kräftepaare, die sich an ihm das Gleichgewicht halten, auf den mittleren prismatischen Theil wirken, so bietet sich da, wo dieser an die Platte anschliesst, der Querschnittskrümmung ein Hinderniss. Insbesondere sind die nach den Stabkanten zu gelegenen Fasern, Fig. 94, gehindert, um den verhältnissmässig bedeutenden Betrag, den die erhabene Wölbung verlangt, von der Platte sich zurückzuziehen. Infolgedessen entstehen in allen denjenigen Querschnittselementen, welche unter Einwirkung des Drehungsmomentes bestrebt sind, ihre Entfernung von der Grundebene zu vergrössern (sich erhaben zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 94), Zugspannungen, während in allen denjenigen Querschnittspunkten, welche bestrebt sind, den bezeichneten Abstand zu verringern (sich vertieft zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 94), Druckspannungen wachgerufen werden. Sind diese Normalspannungen genügend gross, so kann der Bruch, obgleich die äusseren Kräfte nur ein auf Drehung wirkendes Kräftepaar ergeben, durch Zerreißen der am stärksten gespannten Fasern veranlasst werden.

Einer äusseren Zug- oder Druckkraft bedarf es nicht, da die Zugspannungen in gewissen Querschnittstheilen (Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 94) durch Druckspannungen in den anderen Querschnittselementen (Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 94) im Gleichgewicht gehalten werden.

In solchen Fällen der mehr oder minder vollständig gehinderten Ausbildung der Querschnittswölbung rücken die gefährdetsten Stellen, welche bei Nichthinderung dieser Ausbildung mit denjenigen Punkten des Querschnittsumfanges zusammenfallen, welche der Stabachse am nächsten liegen, von der letzteren fort; beispielsweise in Fig. 94 von *A* nach *C* hin. Bei langgestreckten Querschnitten werden sie sehr rasch von *A* nach *C* hin vorwärtsschreiten.

Beim quadratischen Querschnitt, Fig. 95 (Taf. VII), bleibt *C* in der ursprünglichen Querschnittsebene; infolgedessen ist es ausgeschlossen, dass bei Gleichartigkeit des Materiales die grösste Anstrengung in oder nahe bei *C* auftritt. Sie ist — allgemein — da zu suchen, wo die Gesamtinanspruchnahme, herrührend von den Schubspannungen, welche durch das Drehungsmoment verursacht werden, und von den Normalspannungen, die infolge der Hinderung der Querschnittswölbung ins Dasein treten, den grössten

Werth erlangt. Bei dem quadratischen Querschnitt wird sie, soweit dies hier ohne Anstellung besonderer Rechnungen beurtheilt werden kann — der Mitte der Seitenflächen viel näher liegen als den Stabkanten. Ihre Bestimmung, welche überdies von dem Grade der Vollständigkeit der mehrfach erwähnten Hinderung der Querschnittskrümmung abhängt, gehört in das Gebiet der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit.

(Vergl. auch den vorletzten Absatz von § 32, sowie die Bemerkungen zu Gleichung 98, § 31, Ziff. 1.)

Die zur Berechnung von Stäben, welche durch Drehung beansprucht werden, in diesem und den vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen sind unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung entwickelt, dass die Querschnittswölbung sich ungehindert ausbilden kann.

### § 35. Drehungsversuche.

#### I. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform.

Diese Abhängigkeit muss bei Gusseisen wegen der Veränderlichkeit des Schubcoefficienten  $\beta$  in ziemlich bedeutendem Masse vorhanden sein. (Vergl. § 32.)

Verfasser hat nach der bezeichneten Richtung hin eine Anzahl von Versuchen angestellt. Ueber einen Theil derselben ist in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889 S. 140 bis 145 und 162 bis 166 ausführlich berichtet worden.

Die je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichen Material (bei demselben Gusse) hergestellt worden.

#### Gusseisen A.

Zugstäbe bearbeitet.

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1655 + 1480 + 1601}{3} = 1579 \text{ kg.}$$

a) Stäbe mit rechteckigem Querschnitt, unbearbeitet.

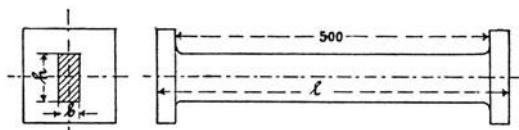


Fig. 98.

Seiten- verhältniss	Durchschnittliche Abmessungen			Drehungs- festigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	<i>l</i> cm	<i>b</i> cm	<i>h</i> cm			
4 Stäbe $b : h = 1 : 1$	53	3,15	3,20	2228	1,42	Bruch erfolgt im prismatischen Theil, Fig. 105 (Taf. VIII).
4 Stäbe $b : h = 1 : 2,5$	56	3,13	7,82	2529	1,60	Bruch erfolgt in der Nähe der einen oder anderen Endplatte, Fig. 106 (Taf. VIII).
4 Stäbe $b : h = 1 : 5$	56	3,08	15,07	2366	1,50	Desgl.
3 Stäbe $b : h = 1 : 9$	54	1,66	15,13	2508	1,59	Desgl.

Die Bruchfläche, Fig. 105 (Taf. VIII), lässt vermuthen, dass bei den quadratischen Stäben der Bruch, der plötzlich erfolgt, in der Mitte der Seitenfläche oder wenigstens in deren Nähe begonnen habe, wie dies nach § 34, Ziff. 3 der Fall sein soll.

Bei den Stäben mit langgestreckter Form des Querschnittes scheint es dagegen, als ob der Bruch Fig. 106 (Taf. VIII), welcher immer in der Nähe einer der beiden zum Einlegen in die Prüfungs-  
maschine dienenden Endplatten erfolgte, von aussen, d. h. von einer Ecke oder in deren Nähe seinen Anfang genommen habe.

Jedenfalls ist hieraus zu schliessen, dass  $K_d$  für die Stäbe mit langgestrecktem Querschnitt zu klein ermittelt wurde. Ferner erkennen wir, als durch den Versuch nachgewiesen, dass ein auf

Drehung beanspruchter Körper, dessen Querschnitt in der einen Richtung eine wesentlich grössere Erstreckung besitzt, als in der anderen, da, wo in Richtung der Stabachse der schwächere prismatische Theil an einen stärkeren anschliesst — wie im vorliegenden Falle das rechteckige Prisma an die Endplatten — die Anstrengung keine reine Drehungsbeanspruchung mehr ist, dass vielmehr daselbst auch Normalspannungen auftreten. (Vergl. § 34, Ziff. 3.)

b) Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

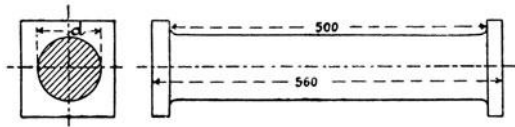


Fig. 99.

Bezeichnung	Durchmesser $d$ cm	Drehungs- festigkeit $K_d = \frac{16 M_d}{\pi d^3}$ kg	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
3 Stäbe, unbearbeitet	10,23	1618	1,02	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil.
1 Stab, bearbeitet	9,6	1655	1,05	Desgleichen, siehe Fig. 107 (Taf. IX).

Von hohem Interesse erscheint die Bruchfläche des linken Stückes der Fig. 107 (Taf. IX). Deutlich sprechen hier die kleinen, der Längsfuge anhängenden Bruchstücke dafür, dass die Trennung schliesslich durch Abschiebung in angenähert achsialer Richtung erfolgt ist (vergl. Fig. 88, sowie das in § 32 am Schlusse Bemerkte).

Ein Einfluss der Entfernung der Gusshaut auf die Drehungsfestigkeit kann nicht festgestellt werden, da dieselbe für die drei unbearbeiteten Stäbe zwischen 1574 und 1683 kg schwankte.

c) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

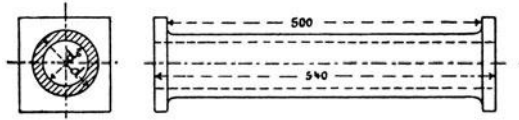


Fig. 100.

Bezeichnung	Durchmesser		Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_o^4} d$ kg	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	d cm	d <sub>o</sub> cm			
3 Stäbe	10,2	6,97	1297	0,82	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil.

Hinsichtlich der Bruchfläche vergl. die zu „Gusseisen B“ gehörige Figur 108 (Taf. IX).

Die Drehungsfestigkeit nähert sich dem Werthe, welcher nach Gleichung 102 zu erwarten ist, entsprechend dem Umstande, dass die Drehungsbeanspruchung hier der einfachen Schubanstrengung ziemlich nahe gekommen ist. Für  $d_o = d$  würde die Drehungsanstrengung vollständig dieselbe sein, wie die Inanspruchnahme auf Schub.

d) Hohlstäbe mit quadratischem Querschnitt, unbearbeitet.

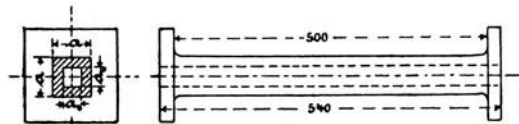


Fig. 101.

Bezeichnung	Seitenlänge		Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{a^4 - a_o^4} a$ kg	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	a cm	a <sub>o</sub> cm			
4 Stäbe	6,21	3,16	1788	1,13	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil, Fig. 109 (Taf. X).

Die Bruchfläche Fig. 109 (Taf. X), berechtigt zur Vermuthung, dass der Bruch in der Mitte der Seite begonnen habe.

Vergleicht man die Drehungsfestigkeit bei vollquadratischem Querschnitt (a) mit derjenigen bei hohlquadratischem, so findet sich

$$2228 : 1788 = 1,25 : 1.$$

Derselbe Vergleich für Vollkreis (b) mit Kreisring (c) ergibt

$$1618 : 1297 = 1,25 : 1$$

also dasselbe.

Beide Vergleiche lehren, dass das nach der Stabachse zu gelegene Material (Gusseisen) bei der Drehung durchaus nicht so schlecht ausgenützt wird, wie man dies annehmen pflegt.

Nach § 32 war, da für Gusseisen der Schubcoefficient  $\beta$  mit zunehmender Spannung wächst, dieses Ergebniss zu erwarten.

Es entspricht dies ganz dem Ergebnisse, zu welchem die Erörterungen in § 20, Ziff. 4, sowie die Versuche § 22, Ziff. 2 bei Biegungsbeanspruchung des Gusseisens führten.

e) Stäbe mit  $\square$ -förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

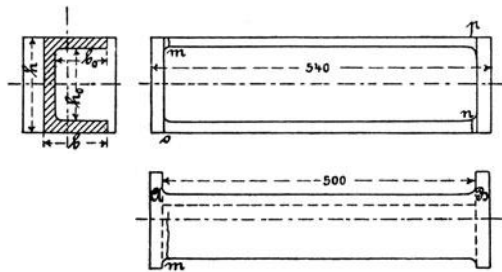


Fig. 102.

$\alpha$ ) Verhältniss  $b : h = \sim 1 : 1,5$ .

No.	Abmessungen				Bruchmoment $M_d$ kg. cm
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm	
1	10,3	15,1	8,6	11,9	34 000
2	10,25	15,15	8,6	11,95	33 750
3	10,3	15,2	8,6	12,0	35 500



Der Bruch beginnt damit, dass gleichzeitig oder unmittelbar auf einander folgend die beiden Querrippen von aussen einreissen und zwar die eine bei  $m$ , die andere bei  $n$ , also diametral gegenüberliegend. Die Drehrichtung des Momentes ist hierbei derart, dass — von Platte  $A$  nach Platte  $B$  gesehen —  $A$  in der Richtung des Uhrzeigers verdreht wird.

Die oben eingetragenen Werthe von  $M_d$  sind die Drehungsmomente, welche sich unmittelbar vor diesem Einreissen der Querrippen ergaben. Sobald Letzteres erfolgt, sinkt die Schale der Kraftwage, entsprechend einer Verminderung des Momentes, welches auf den Stab wirkt. Für den Stab No. 3 wurde diese Verminderung bestimmt, weshalb dessen Verhalten noch kurz beschrieben werden soll.

#### Stab No. 3.

Bei  $M_d = 35500$  kg. cm reissen die Querrippen an den zwei Stellen  $m$  und  $n$  von aussen ein, das Drehungsmoment sinkt auf 25250 kg. cm. Unverletzt ist in dem Querschnitt bei  $m$  beziehungsweise  $n$  noch der innere Theil der nur aussen (auf reichlich die Hälfte) gerissenen Querrippe, der Steg und die andere Querrippe bei  $o$  beziehungsweise  $p$ . Bei fortgesetzter Verdrehung steigt das Moment auf 35250 kg. cm und nimmt dann wieder ab. Der Bruch der Querrippe bei  $n$  beginnt sich in den Steg hinein zu erstrecken, schliesslich bricht dieser und bald auch die andere Querrippe bei  $p$ .

β) Verhältniss  $b : h = \sim 1 : 3$ .

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm	$M_d$ kg. cm	$M'_d$ kg. cm
1	5,2	15,2	3,5	12,0	27 250	—
2	5,2	15,2	3,5	12,0	26 750	27 750
3	5,2	15,3	3,5	12,0	24 000	25 500

Bruch erfolgt in ganz ähnlicher Weise wie unter a erörtert.

Bei dem Drehungsmoment  $M_d$  reissen die Querrippen an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen ( $m$  und  $n$ , Fig. 102) von aussen ein, das Drehungsmoment sinkt ein wenig (z. B. bei

No. 3 von 24000 auf 23000, also um weit weniger als beim Einreißen der Stäbe unter  $\alpha$ , für welche die Breite  $b$  rund noch einmal so gross ist). Mit Wiederaufnahme der Verdrehung steigt es auf  $M'_a > M_a$ , den Bruch herbeiführend. Der Bruch des Steges, welcher letzterer noch unterstützt wird durch die zweite unverletzte Querrippe desselben Querschnittes, fordert also ein etwas grösseres Drehungsmoment, als zum Einreißen der einen Querrippe des unverletzten Stabes nöthig ist; der Stab trägt demnach mit eingerissener Querrippe mehr, wie im unverletzten Zustande.

Für den Versuch No. 1 unter  $\alpha$  würde Gleichung 124 mit  $\varphi = \frac{8}{3}$  und bei Ersetzung von  $k_a$  durch  $K_a$  liefern

$$K_a = \frac{3}{8} \frac{M_a}{\Theta} b = \frac{3}{8} \cdot \frac{34000}{528} \cdot 10,3 = \sim 290 \text{ kg.}$$

Für den Versuch No. 1 unter  $\beta$  würde die Gleichung 124 ergeben

$$K_a = \frac{3}{8} \frac{M_a}{\Theta} b = \frac{3}{8} \frac{27250}{70,5} \cdot 5,2 = \sim 880 \text{ kg.}$$

Werden diese beiden für  $K_a$  erlangten Werthe mit der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe verglichen (a), so ergibt sich, dass die Gleichung 124 für Körper mit Querschnitten der hier vorliegenden Art unbrauchbar ist; denn, um auf eine Spannung zu gelangen, wie sie der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe entspricht, müsste  $\varphi$  im ersteren Falle (290 kg) 8 mal, im letzteren (880 kg) dagegen reichlich  $2\frac{1}{2}$  mal so gross genommen werden.

Würde man beim Stab No. 1 unter  $\alpha$  die Querrippen umlegen und an den Steg anschliessen, so dass ein rechteckiger Querschnitt halten würde von der Höhe  $h + 2b_o = 15,1 + 2 \cdot 8,6 = 32,3$  cm bei einer durchschnittlichen Breite von

$$\frac{h(b - b_o) + 2b_o(h - h_o)}{h + 2b_o} = \frac{15,1 \cdot 1,7 + 17,2 \cdot 1,6}{32,3} = 1,64 \text{ cm,}$$

so wäre mit  $K_a = 2500$  (wie unter a für rechteckige Stäbe von

15,1 cm Höhe und 1,66 cm Stärke gefunden) nach Gleichung 123 auf ein Drehungsmoment von

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h K_d = \frac{2}{9} 1,64^2 \cdot 32,3 \cdot 2500 = \sim 48200 \text{ kgcm}$$

zu rechnen. Das würde

$$100 \frac{48200 - 34000}{34000} = 42\%$$

mehr sein, als der rippenförmige Querschnitt thatsächlich vertrug.

Wird die Festigkeit des Stabes No. 1 unter  $\beta$  in Vergleich gesetzt mit der Widerstandsfähigkeit, welche sein Steg allein besitzen würde, d. h. mit

$$M_d = \frac{2}{9} (5,2 - 3,5)^2 \cdot 15,2 \cdot 2500 = \sim 24400 \text{ kg. cm,}$$

so findet sich, dass der Stab No. 1 unter  $\beta$  nicht wesentlich mehr trägt ( $M_d = 27250 \text{ kg.cm}$ ), als der Steg für sich ohne Querrippen.

Wir erkennen hieraus, dass die untersuchten Stäbe mit [-förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung verhältnissmässig wenig widerstandsfähig sind. (Vergl. unter Gusseisen B, d).

f) Stäbe mit I-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

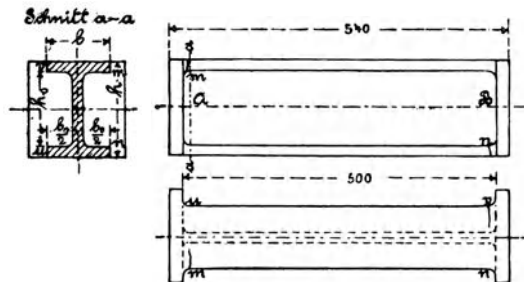


Fig. 103.

$\alpha)$  Verhältniss  $b:h = \sim 1:1,5$ .

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm	$M_d$ kg. cm	$M'_d$ kg. cm
1	10,1	15,1	8,6	11,9	45 000	52 500
2	10,2	15,2	8,6	12,0	55 000	63 000
3	10,3	15,2	8,7	12,0	46 500	59 000

Bruch gesund.

Bei  $M_d$  reissen gleichzeitig oder unmittelbar aufeinander folgend die Querrippen an 4 Stellen von aussen ein. Ist der Drehungssinn des Momentes derart, dass beim Sehen von der Platte  $A$  gegen die Platte  $B$  hin  $A$  in der Richtung des Uhrzeigers gegenüber  $B$  verdreht wird, so reisst die untere Rippe rechts bei  $n$ , links bei  $u$ , die obere rechts bei  $m$ , links bei  $v$  von aussen ein. Mit diesem Einreissen sinkt das Moment nur sehr wenig. Bei Fortsetzung des Versuchs steigt das Moment auf  $M'_d$ , welches wesentlich grösser ist, als  $M_d$ , führt in dieser Grösse den Bruch des Steges und damit des Stabes herbei. Derselbe trägt demnach mit eingerissenen Querrippen bedeutend mehr, wie im unverletzten Zustande.

$\beta)$  Verhältniss  $b:h = \sim 1:3$ .

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm	$M_d$ kg. cm	$M'_d$ kg. cm
1	5,0	15,1	3,4	11,9	32 500	33 750
2	5,0	15,2	3,4	12,0	30 750	32 250
3	5,0	15,1	3,4	11,9	28 750	30 750

Bruchfläche bei 1 und 2 gesund, bei 3 gesund bis auf eine unbedeutende Stelle.

Bruch erfolgt in ganz ähnlicher Weise wie unter  $\alpha$  erörtert. Bei  $M_d$  beginnt das Einreißen der Querrippen,  $M_d'$  bringt den Steg und damit den Stab zum Bruche.

$\gamma$ ) Verhältniss  $b:h = \sim 1:6$ .

No.	Abmessungen				Bruchmoment $M_d$ kg. cm
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm	
1	2,5	15,1	0,9	12,0	25 250

Bruch erfolgt plötzlich. Bruchfläche bis auf eine sehr kleine Stelle gesund.

Wird  $K_d$  auf Grund der Gleichung 124 mit  $\varphi = \frac{8}{3}$  für die Stäbe No. 3 unter  $\alpha$ , No. 1 unter  $\beta$  und No. 1 unter  $\gamma$  berechnet, so findet sich

$$K_d = \frac{3}{8} \frac{46500}{295} \cdot 10,3 = 609 \text{ kg,}$$

$$K_d = \frac{3}{8} \frac{32500}{37} \cdot 5 = 1641 \text{ kg,}$$

$$K_d = \frac{3}{8} \frac{25250}{8,13} \cdot 2,5 = 2912 \text{ kg.}$$

Aus der Verschiedenartigkeit und der absoluten Grösse dieser Werthe erkennen wir, dass auch für I-Querschnitte die Gleichung 124 nicht verwendbar erscheint.

Würde man die Querrippen umlegen und an den Steg anschliessen, so dass je ein rechteckiger Querschnitt von

der Höhe  $15,2 + 2 \cdot 8,7 = 32,6$  cm, der Breite 1,6 cm, bzw.

„ „  $15,1 + 2 \cdot 3,4 = 21,9$  „ „ „ 1,6 „ „

„ „  $15,1 + 2 \cdot 0,9 = 16,9$  „ „ „ 1,6 „

sich ergäbe, so wäre mit  $K_d = 2500$  nach Gleichung 123 auf ein Drehungsmoment zu rechnen von

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h K_d = \frac{2}{9} \cdot 1,6^2 \cdot 32,6 \cdot 2500 = \sim 46360 \text{ kg.cm, bezw.}$$

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1,6^2 \cdot 21,9 \cdot 2500 = \sim 31150 \text{ kg.cm, „}$$

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1,6^2 \cdot 16,9 \cdot 2500 = \sim 24040 \text{ kg.cm.}$$

Der Versuch ergab

46500, bezw. 32500, bezw. 25 250,

also nur wenig hiervon verschieden, so dass ausgesprochen werden darf, dass die untersuchten I-förmigen Querschnitte hinsichtlich des Widerstandes gegen Bruch durch Drehung nahezu gleichwerthig erscheinen mit rechteckigen Querschnitten, deren Breite gleich der Steg- und gleich der Rippenstärke  $s$  und deren Höhe gleich der Summe  $h + 2 b_o$ , d. h.

$$M_d = \frac{2}{9} K_d s^2 (h + 2 b_o). \quad . . . . 125)$$

g. Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

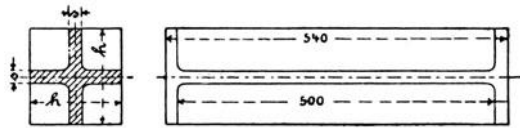


Fig. 104.

No.	Abmessungen		Trägheitsmoment $\Theta$ cm <sup>4</sup>	Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Bemerkungen
	$s$ cm	$h$ cm			
1	2,14	15,2	637	72 500	Bruch gesund.
2	2,14	15,1	616	73 750	Bruch gesund bis auf eine ganz unbedeutende Stelle.

Der Bruch erfolgt in beiden Fällen plötzlich.

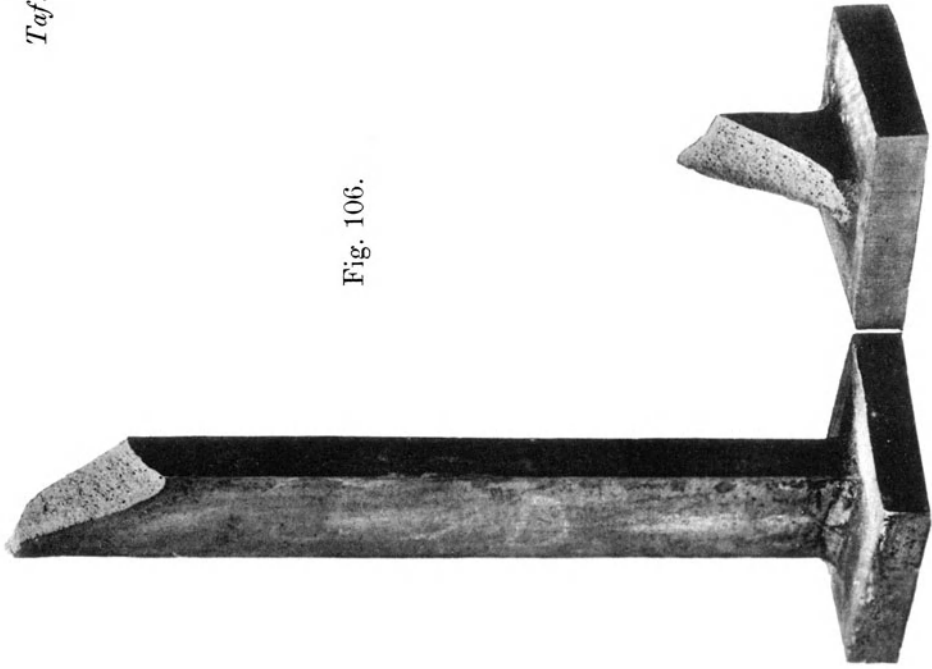


Fig. 106.

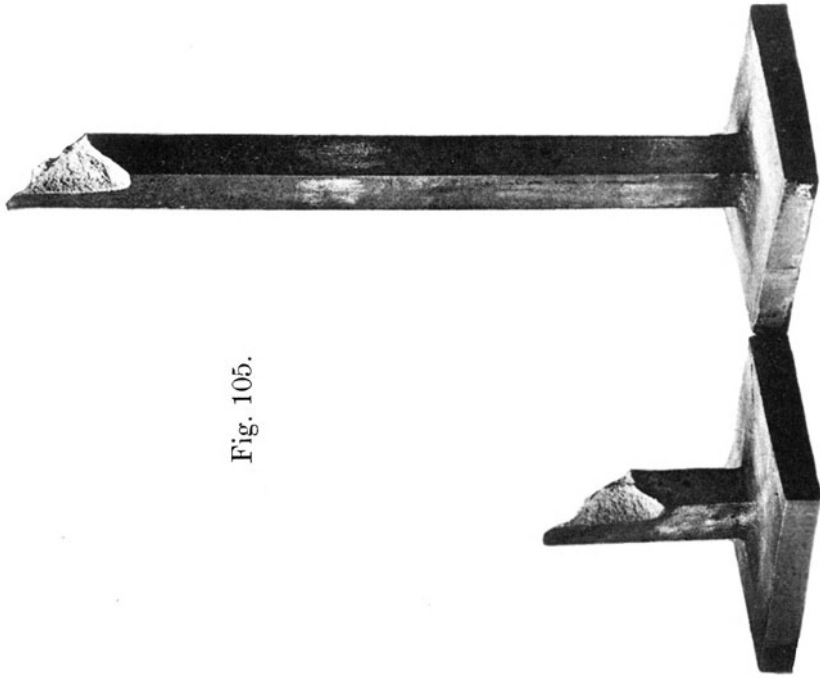


Fig. 105.

Ueber die Bruchfläche vergleiche Fig. 110 (Taf. X). Wie ersichtlich, entstehen je bei dem Bruche 6 Stücke: die beiden Endkörper, sowie vier Dreiecke, welche aus den Rippen herausbrechen.

Die Gleichung 124 würde mit  $\varphi = \frac{8}{3}$  liefern

$$\text{für No. 1} \quad K_a = \frac{3}{8} \frac{72500}{637} \cdot 15,2 = 719 \text{ kg,}$$

$$\text{„ „ 2} \quad K_a = \frac{3}{8} \frac{73750}{616} \cdot 15,1 = 676 \text{ kg,}$$

also einen viel zu kleinen Werth.

Aber auch eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die Gleichung 124 für Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt nicht brauchbar sein kann.

Ein kreuzförmiger Querschnitt mit verhältnissmässig geringer Rippenstärke  $s$  kann in der Weise entstanden gedacht werden, dass man zwei gleiche rechteckige Querschnitte sich rechtwinklig kreuzend auf einander legt. Aus der Natur der Inanspruchnahme auf Drehung folgt dann ohne Weiteres, dass der Widerstand dieses kreuzförmigen Querschnittes doppelt so gross sein muss, wie derjenige jedes der beiden Rechtecke, sofern zunächst davon abgesehen wird, dass sich in der Mitte Theile der beiden Rechtecke decken. Nachdem nun für rechteckigen Querschnitt die Gleichung

$$M_a = \frac{2}{9} K_a b^2 h$$

als zutreffend erkannt worden ist, nach welcher die Breite  $b$  des Querschnittes das Drehungsmoment im quadratischen Verhältnisse beeinflusst, während die Höhe nur mit der ersten Potenz wirksam ist, so ergiebt sich auf Grund der eben angestellten Erwägung für den kreuzförmigen Querschnitt

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{2}{9} K_a s^2 h + \frac{2}{9} K_a s^2 (h - s), \\ &= \frac{2}{9} K_a s^2 (2h - s) \\ &= \frac{2}{9} K_a s^2 h \left(2 - \frac{s}{h}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 126)$$



d. h. wie für einen rechteckigen Querschnitt, dessen Breite gleich der Rippenstärke und dessen Höhe durch Aneinandersetzen der Rippen erhalten wird.

Zur Prüfung der so gewonnenen Gleichung 126 ziehen wir die Versuchsergebnisse heran. Dieselben liefern für No. 1

$$K_d = 4,5 \frac{72500}{2,14^2 (2 \cdot 15,2 - 2,14)} = 2520 \text{ kg,}$$

für No. 2

$$K_d = 4,5 \frac{73750}{2,11^2 (2 \cdot 15,1 - 2,11)} = 2655 \text{ kg.}$$


---

Durchschnitt 2587 kg.

Dieses sind Werthe, die denjenigen entsprechen, welche unter a für rechteckigen Querschnitt erhalten worden sind. Die auf dem Wege einfacher Ueberlegung gewonnene Gleichung 126 liefert demnach Zahlen, welche mit den Versuchsergebnissen in guter Uebereinstimmung stehen.

#### Gusseisen B.

a) Stäbe mit quadratischem Querschnitt.

S. Fig. 98,  $l = 530$ .

α) Unbearbeitet.

No.	Breite $b$ cm	Höhe $h$ cm	Bruch- moment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg	Bemerkungen
1	3,18	3,32	20 750	2776	Bruch gesund.
2	3,19	3,28	19 000	2561	„ „
3	3,30	3,47	21 250	2530	„ „
4	3,10	3,26	17 500	2514	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
Durch- schnitt	3,22	3,34		2598	

Aus den hierbei erhaltenen Bruchstücken wurden 3 Zugstäbe herausgearbeitet.

No.	Durchmesser $d$ cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Bruchbelastung $Z$ kg	Zugfestigkeit $K_z = Z : \frac{\pi}{4} d^2$ kg	Bemerkungen
1	2,38	4,45	7860	1666	Bruch gesund.
2	2,37	4,41	7150	1621	" "
3	2,38	4,45	7340	1649	" "

$$\text{Durchschnitt} \quad 1679$$

$$K_d : K_z = 2598 : 1679 = 1,55 : 1.$$

β) Bearbeitet.

No.	Quadratseite $b$ cm	Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{b^3}$ kg	Bemerkungen
1	3,00	17 250	2875	Bruch gesund.
2	3,03	16 750	2710	" "
3	3,22	21 000	2830	" "
4	3,20	19 250	2643	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
Durchschnitt			2764	

Aus Rohgussstäben von 38 bis 39 mm Seite gehobelt.

$$K_d : K_z = 2764 : 1679 = 1,65 : 1.$$

Hiernach erscheint die Drehungsfestigkeit der bearbeiteten, also von der Gusshaut befreiten Stäbe um

$$100 \frac{2764 - 2598}{2598} = 6,4 \%$$

grösser, als diejenige der unbearbeiteten Stäbe von quadratischem Querschnitt.

Die Verdrehung, namentlich auch die bleibende, welche der bearbeitete Stab bis zum Bruche erfährt, ist wesentlich grösser, als diejenige des unbearbeiteten.

(Vergl. § 22, Ziff. 3, das Folgende unter  $b$ ,  $\beta$ , sowie in diesem Paragraphen unter „Gusseisen A“,  $b$  Schlusssatz.)

b) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

S. Fig. 100.

$\alpha$ ) Unbearbeitet.

No.	Durchmesser		Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_o^4} d$ kg	Bemerkungen
	$d$ cm	$d_o$ cm			
1	10,2	7,0	231 500	1428	Bruch gesund.
2	10,25	6,9	243 750	1451	Bruch bis auf eine kleine Stelle gesund.
Durchschnitt				1439	

$$K_d : K_z = 1439 : 1679 = 0,86 : 1.$$

$\beta$ ) Aussen abgedreht.

Ursprünglicher Durchmesser 102 mm.

No.	Durchmesser		Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_o^4} d$ kg	Bemerkungen
	$d$ cm	$d_o$ cm			
1	9,65	7	173 500	1360	Bruch bis auf eine ganz unerhebliche Stelle gesund, Kern um 1 mm verlegt, Bruchfläche siehe Fig. 108 (Taf. IX).

$$K_d : K_z = 1360 : 1679 = 0,81 : 1.$$

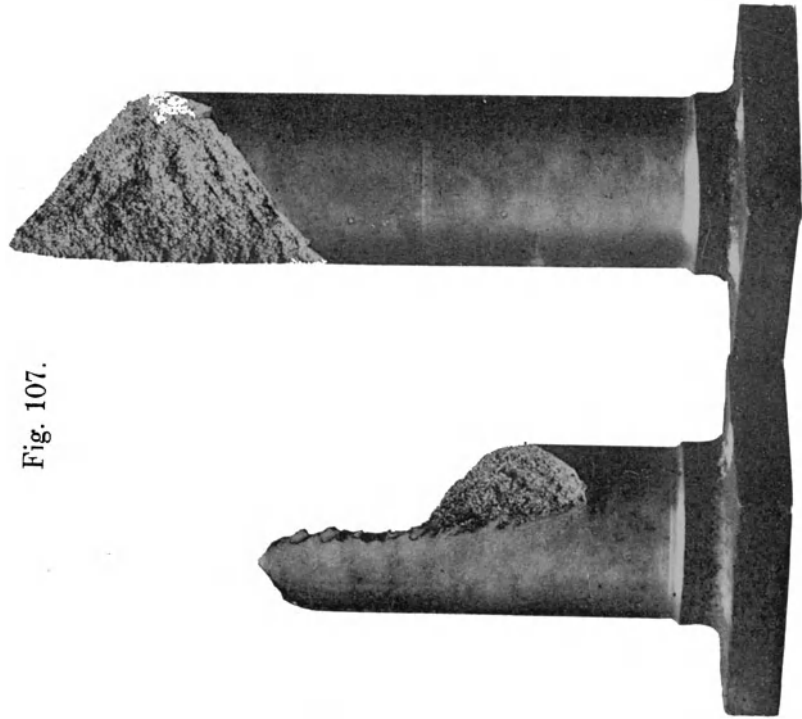


Fig. 107.

Fig. 108.

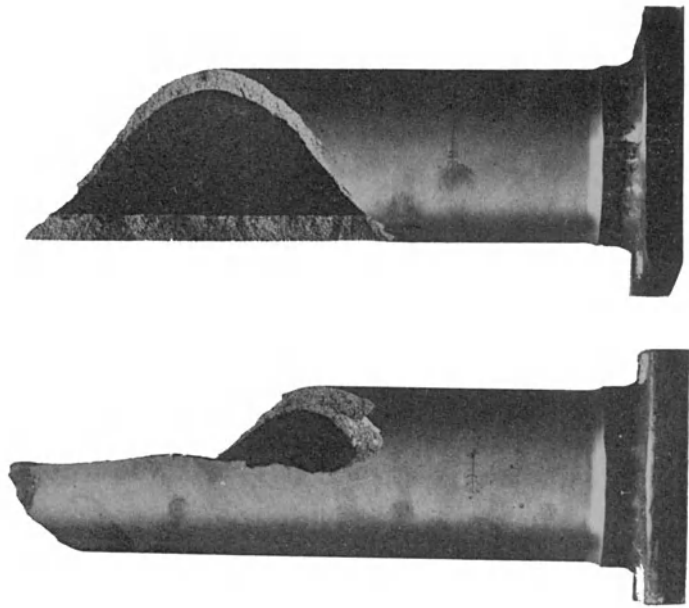


Fig. 127.

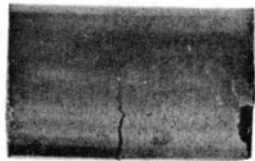
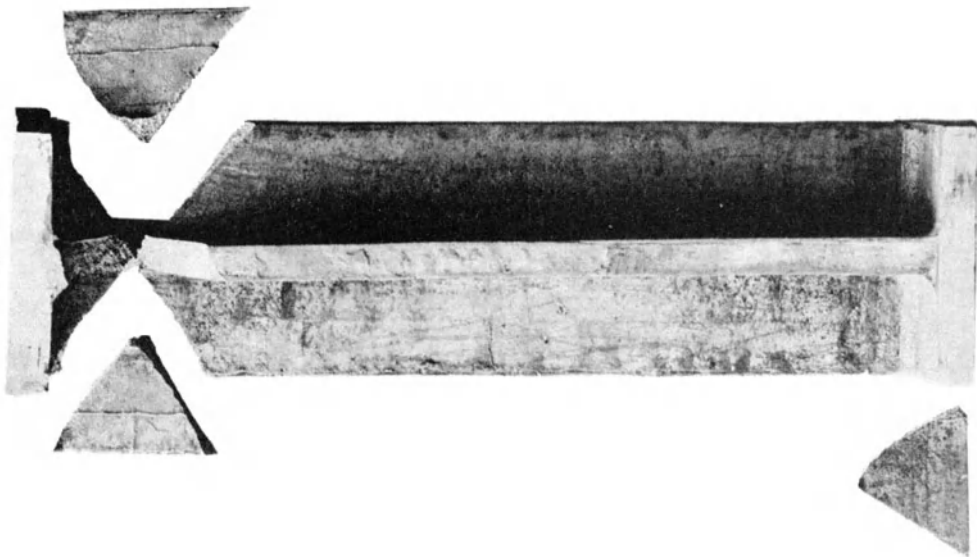
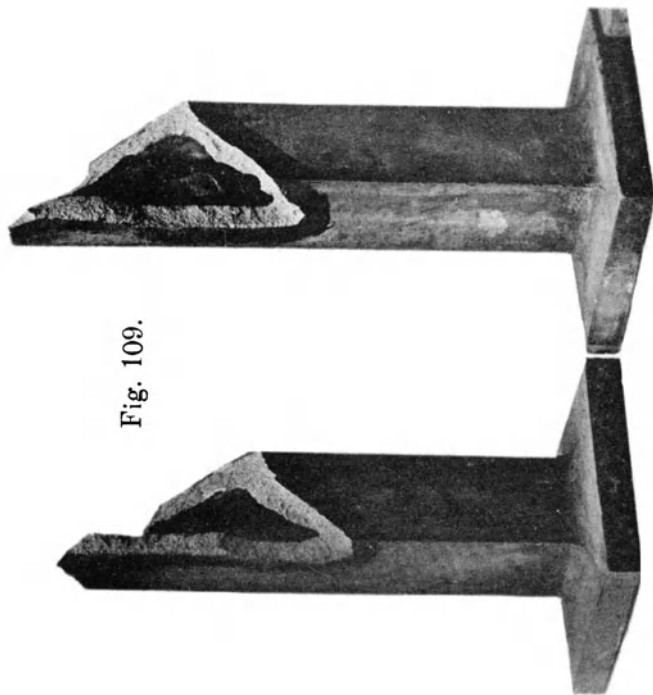


Fig. 110.



Taf. X.

Fig. 109.



Hiernach würde der bearbeitete Hohlcyylinder eine etwas geringere Drehungsfestigkeit aufweisen, als die unbearbeiteten; doch kann ein Urtheil hierüber nicht gefällt werden, da der Einfluss ungleicher Wandstärke (einerseits reichlich 12, andererseits reichlich 14 mm) das Ergebniss trübt und da überdies durch Verringerung des äusseren Durchmessers das Verhältniss  $d_o : d$  grösser geworden ist. (Vergl. unter Gusseisen A, c letzten Absatz, sowie Bemerkung 1 am Schlusse des § 36.)

c) Stäbe mit L-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

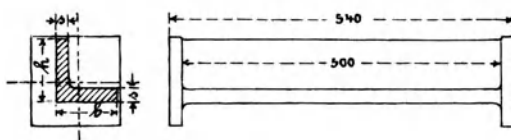


Fig. 111.

α) Seitenverhältniss  $b : h = 1 : 1$ .

No.	Abmessungen			Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)}$ kg	Bemerkungen
	$b$ cm	$h$ cm	$s$ cm			
1	10,2	10,4	2,15	47 250	2494	Bruch gesund bis auf eine ganz unerhebliche Stelle.
2	10,2	10,2	2,15	47 250	2520	Desgleichen.
Durchschnitt					2507	

Bruch erfolgt plötzlich, ein dreieckiges Stück in der Nähe einer der beiden Endplatten bricht heraus.

(Vergl. die Versuche unter Gusseisen A, g, Fig. 110, Taf. X.)

$\beta$ ) Seitenverhältniss  $b : h = 0,6 : 1$ .

No.	Abmessungen			Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)}$ kg	Bemerkungen
	$b$ cm	$h$ cm	$s$ cm			
1	6,3	10,4	2,15	37 750	2526	Bruch gesund.
2	6,0	10,3	2,10	35 000	2515	Desgl. bis auf eine unerhebliche Stelle.
Durchschnitt					2520	

Bruch erfolgt plötzlich; ein Dreieck bricht aus, wie unter  $\alpha$ .

$\gamma$ )  $b = s$ , Querschnitt: Rechteck.

No.	Abmessungen		Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4,5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg	Bemerkungen
	$b$ cm	$h$ cm			
1	2,00	10,3	24 500	2700	Bruch gesund bis auf eine sehr kleine Stelle.
2	2,02	10,35	24 500	2611	Desgl.
3	2,02	10,35	25 250	2679	"
Durchschnitt				2663	

Bruch erfolgt plötzlich in der Nähe einer der beiden Endplatten.

$$K_d : K_z = 2663 : 1679 = 1,59 : 1.$$

Werden die unter  $\alpha$  und  $\beta$  auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4,5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 127)$$

erhaltenen Drehungsfestigkeiten verglichen mit den unter  $\gamma$  erzielten, so ergibt sich das Mittel aus den Ersteren allerdings um

$$100 \frac{2663 - 0,5 (2507 + 2520)}{2663} = 5,7\%$$

geringer. Dieser Unterschied ist aber verhältnissmässig so gering, dass die Gleichung 127, welche auf dieselbe Weise wie Gleichung 125 gebildet wurde, als brauchbare Ergebnisse liefernd bezeichnet werden muss. Hierbei wird allerdings festzuhalten sein, dass die Rippenstärke wenigstens  $\frac{1}{5}$  der Höhe beträgt.

d) Stäbe mit  $\square$ -förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

Fig. 102.

Die untersuchten Stäbe unterscheiden sich von den Prismen, welche aus dem Gusseisen A gefertigt worden waren und über deren Prüfungsergebnisse dort unter e berichtet wurde, dadurch, dass hier die Rippen- und Stegstärke verhältnissmässig grösser ist.

$\alpha$ ) Höhe  $b_o$  der Querrippen gleich der doppelten Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Bemerkungen
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm		
1	6,1	10,2	4,0	6,1	38 500	Bruch gesund.
2	6,2	10,3	4,1	6,1	39 000	" "

Der Bruch beginnt damit, dass gleichzeitig oder unmittelbar auf einander folgend die beiden Querrippen von aussen einreissen und zwar die eine bei  $m$ , die andere bei  $n$ , Fig. 102, also diametral gegenüber liegend.

Wird nach dem Einreissen der Rippen der Stab weiter verdreht, so setzt sich der Riss durch den Steg hindurch fort bei



nahezu derselben Belastung, welche das Einreißen der Querrippen herbeiführte.

$\beta$ ) Höhe  $b_o$  der Querrippen gleich der Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment $M_d$ kg. cm	Bemerkungen
	$b$ cm	$h$ cm	$b_o$ cm	$h_o$ cm		
1	4,1	10,1	2,1	5,9	34 750	Bruch gesund.
2	4,2	10,0	2,05	5,9	36 250	" "

Bruch erfolgt plötzlich an den Enden.

Die Stäbe unter  $\alpha$  mit  $b_o = \sim 4$  cm halten hiernach nicht viel mehr als diejenigen unter  $\beta$  mit  $b_o = \sim 2$  cm.

Die Prüfung der Ergebnisse auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4,5 \frac{M_d}{s^2 (h + 2 b_o)}, \quad \dots \dots 128)$$

worin

$s$  die mittlere Steg- und Rippenstärke bezeichnet, führt zu folgenden Werthen, wenn hierbei für  $s$  die Stegstärke gesetzt wird,

$$1 \alpha) \quad K_d = 4,5 \frac{38500}{2,1^2 (10,2 + 2 \cdot 4)} = 2159 \text{ kg,}$$

$$2 \alpha) \quad K_d = 4,5 \frac{39000}{2,1^2 (10,3 + 2 \cdot 4,1)} = 2151 \text{ kg}$$

Durchschnitt 2155 kg.

$$1 \beta) \quad K_d = 4,5 \frac{34750}{2^2 (10,1 + 2 \cdot 2,1)} = 2734 \text{ kg,}$$

$$2 \beta) \quad K_d = 4,5 \frac{36250}{2,15^2 (10 + 2 \cdot 2,05)} = 2502 \text{ kg}$$

Durchschnitt 2618 kg.

Der für die Stäbe 1  $\alpha$ ) und 2  $\alpha$ ) erhaltene Mittelwerth von 2155 kg bleibt um

$$100 \frac{2663 - 2155}{2663} = \sim 19 \%$$

unter der Drehungsfestigkeit der Stäbe mit rechteckigem Querschnitt ( $c, \gamma$ ), während der Durchschnittswerth für die Stäbe 1  $\beta$ ) und 2  $\beta$ ) nur um

$$100 \frac{2663 - 2618}{2663} = \sim 1,7 \%$$

davon abweicht.

Der Widerstand, welchen die Stäbe unter  $\beta$  dem Bruche durch Drehung entgegensetzen, ist demnach so gross, wie für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, dessen Breite gleich dem Mittel aus der Steg- und der Rippenstärke und dessen Höhe gleich  $h + 2 b_0$ . Die Stäbe unter  $\alpha$  dagegen leisten einen wesentlich geringeren Widerstand.

Hieraus und in Erwägung des bei dem Gusseisen  $A$  unter e) gefundenen Ergebnisses schliessen wir: wenn Stäbe mit  $\square$ -förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung widerstandsfähig sein sollen, so müssen der Steg und die Rippen verhältnissmässig kräftig und überdies die Höhe  $b_0$  der letzteren gering gehalten werden. Dann erreicht die Widerstandsfähigkeit diejenige eines rechteckigen Stabes, dessen Breite gleich der Steg- und Rippenstärke  $s$  und dessen Höhe gleich  $h + 2 b_0$  ist.

**C. Zusammenstellung der Drehungsfestigkeit für die Querschnittsgrundformen des Kreises und des Rechteckes.**

Zugfestigkeit des Gusseisens $A$	1579 kg,
„ „ „ $B$	1679 kg.

No.	Querschnittsform	Drehungsfestigkeit			
		$K_d$		in Theilen der Zugfestigkeit	
		A	B	A	B
1	Kreis	1618	—	1,02	—
2	Kreisring	1297	1439	0,82	0,86
3	Rechteck				
	$b : h = 1 : 1$	2228	2598	1,42	1,55
	1 : 2,5	2529	—	1,60	—
	1 : 5	2366	2663	1,50	1,59
	1 : 9	2508	—	1,59	—
4	Hohlquadrat	1788	—	1,13	—

2. Drehungswinkel.

In dieser Hinsicht liegen eine grössere Anzahl von Versuchen Bauschinger's vor.

Civilingenieur 1881, S. 115 u. f.

Bauschinger hatte sich die Aufgabe gestellt, die von de Saint-Venant herrührende Gleichung

$$\vartheta = \psi M_d \frac{\Theta'}{f^4} \beta \quad . . . . . 128)$$

zu prüfen. In derselben haben  $\vartheta$   $M_d$   $\Theta' f$  und  $\beta$  die unter V S. 138 angegebene Bedeutung, während  $\psi$  einen Coefficienten bezeichnet, welcher rechnermässig betragen soll<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Comptes rendus 1878, t. LXXXVII S. 893 u. f.;  
 „ „ 1879, t. LXXXVIII S. 143.

für den Vollkreis, den Kreisring, die		
Vollellipse, den Ellipsenring	$\psi = 4\pi^2 = 39,5$	,
für das Rechteck, wenn $h:b = 1:1$ ,	$\psi = 42,68$ ,	
„ $h:b = 2:1$ ,	$\psi = 42,0$	,
„ $h:b = 4:1$ ,	$\psi = 40,2$	,
„ $h:b = 8:1$ ,	$\psi = 38,5$	,
für das gleichseitige Dreieck	$\psi = 45$	,
für das regelmässige Sechseck	$\psi = 41$	,
für den Kreisausschnitt, wenn der Centriwinkel		
$45^\circ$ ,	$\psi = 42,9$	,
$90^\circ$ ,	$\psi = 42,4$	,
$180^\circ$ ,	$\psi = 40,8$	.

Wird das gleichseitige Dreieck ausser Acht gelassen, so unterscheiden sich die Werthe von  $\psi$  nicht bedeutend, infolgedessen bereits de Saint-Venant für  $\psi$  den abgerundeten Mittelwerth 40 vorgeschlagen hat.

Bauschinger liess 5 Paar Probestücke aus Gusseisen, je von 1 m Länge herstellen, und zwar:

- |                                           |                    |
|-------------------------------------------|--------------------|
| a) 2 Stäbe von kreisförmigem Querschnitt, |                    |
| b) 2 „ „ elliptischem „                   | $a:b = \sim 2:1$ , |
| c) 2 „ „ quadratischem „                  |                    |
| d) 2 „ „ rechteckigem „                   | $h:b = \sim 2:1$ , |
| e) 2 „ „ „ „                              | $h:b = \sim 4:1$ . |

Die Grösse der Querschnitte betrug

bei den Stäben a) bis d)	$f = 50$ qcm,
„ „ „ e)	$f = 25$ „ .

Für gleiche Drehungsmomente (also bei im Allgemeinen ungleicher Anstrengung des Materials) lässt die Gleichung 128 mit den angegebenen Einzelwerthen von  $\psi$  Drehungswinkel  $\mathcal{J}_a \mathcal{J}_b \mathcal{J}_c \mathcal{J}_d \mathcal{J}_e$  erwarten, welche sich verhalten wie

$$\mathcal{J}_a : \mathcal{J}_b : \mathcal{J}_c : \mathcal{J}_d : \mathcal{J}_e = 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,1.$$

Gemessen hat Bauschinger

$$\mathcal{J}_a : \mathcal{J}_b : \mathcal{J}_c : \mathcal{J}_d : \mathcal{J}_e = 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65.$$

Der Vergleich beider Verhältnissreihen zeigt, dass die für den kreisförmigen und für den elliptischen Querschnitt auf dem Wege des Versuches ermittelten Verhältnisszahlen mit den berechneten in sehr guter Uebereinstimmung stehen. Bei den übrigen Querschnitten ist dies nicht in dem gleichen Masse der Fall. Berücksichtigt man jedoch, dass die Entwicklung der Gleichung 128 Unveränderlichkeit des Schubcoefficienten oder Dehnungscoefficienten voraussetzt, während diese Coefficienten für Gusseisen thatsächlich veränderliche, mit wachsender Anstrengung zunehmende Werthe aufweisen, welcher Umstand bedingt, dass die bei gleichem Momente stärker angestregten Stäbe — das Paar e) ist stärker beansprucht als d), d) bedeutender als c) und c) mehr als a) — einen grösseren Drehungswinkel ergeben müssen, als die Rechnung erwarten lässt, so darf die Uebereinstimmung der beiden Verhältnissreihen immerhin als eine gute bezeichnet werden.

Zur Prüfung der Gleichung 128 können auch noch die Drehungsversuche herangezogen werden, welche Bauschinger mit kreisförmigen und quadratischen Wellen aus verschiedenen Rohmaterialien (Siemens-Martinstahl von 6 verschiedenen Härtegraden, Bessemerstahl von 5 verschiedenen Härtegraden, Feinkorneisen und sehnigem Eisen) ausgeführt hat.

Nach Gleichung 128 ergibt sich, da der Durchmesser bezw. die Quadratseite dieser Wellen je 100 mm betrug, dass die Drehungswinkel sich verhalten müssen wie

$$\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{J}_2 = 4\pi^2 M_d \frac{\frac{\pi}{32} 10^4}{\left(\frac{\pi}{4} 10^2\right)^4} \beta : 42,68 M_d \frac{\frac{1}{6} 10^4}{10^8} \beta = 1 : 0,698,$$

Gleichheit des Schubcoefficienten vorausgesetzt.

Die Messung an den 13 Wellenpaaren lieferte im Mittel

$$\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{J}_2 = 1 : 0,696$$

allerdings mit Schwankungen der Einzelwerthe zwischen 0,633 bis 0,747. Das Mittel der beobachteten Werthe stimmt hiernach sehr gut mit der berechneten Drehung überein.


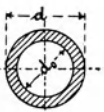
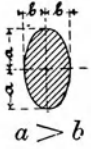
Die Herbeiführung des Bruches der oben unter a) bis e) erwähnten 10 unbearbeiteten Gusseisenkörper durch Verdrehung ergab


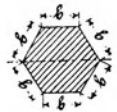
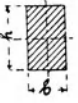

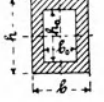
nach Bauschinger folgende aus Gleichung 124 berechnete Werthe für die Drehungsfestigkeit

- a) Kreis  $K_d = \frac{1915 + 1985}{2} = 1950 \text{ kg,}$
- b) Ellipse  $K_d = \frac{2362 + 2720}{2} = 2541 \text{ „}$
- c) Quadrat  $K_d = \frac{2337 + 2569}{2} = 2453 \text{ „}$
- d) Rechteck  $h : b = \sim 2 : 1$   $K_d = \frac{2561 + 2919}{2} = 2740 \text{ „}$
- e) „  $h : b = \sim 4 : 1$   $K_d = \frac{3390 + 3134}{2} = 3262 \text{ „ .}$

§ 36. Zusammenfassung.

Nach Massgabe der in den Paragraphen 32 bis 34 enthaltenen Erörterungen, sowie auf Grund der in § 35 niedergelegten Versuchsergebnisse lassen sich folgende Beziehungen zusammenstellen.

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment $M_d$	Drehungswinkel $\vartheta$	$K_d : K_z$ für Gusseisen
1		$\frac{\pi}{16} k_d d^3$	$\frac{32 M_d}{\pi d^4} \beta$	reichlich 1
2		$\frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_o^4}{d}$	$\frac{32 M_d}{\pi d^4 - d_o^4} \beta$	„ 0,8 <sup>1)</sup>
3	 $a > b$	$\frac{\pi}{2} k_d a b^2$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$	1 bis 1,25 <sup>2)</sup>

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment $M_d$	Drehungswinkel $\vartheta$	$K_d : K_z$ für Gusseisen
4	 <p style="text-align: center;"><math>a &gt; b</math> <math>a_0 : a = b_0 : b = m</math></p>	$\frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_0 b_0^3}{b}$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta,$	0,8 bis 1 <sup>3)</sup>
5		$\frac{1}{1,09} k_d b^3$	$0,967 \frac{M_d}{b^4} \beta$ <p style="text-align: center;">für <math>h : b = 1 : 1</math>  <math>3,56 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta,</math>  für <math>h : b = 2 : 1</math>  <math>3,50 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta,</math>  für <math>h : b = 4 : 1</math>  <math>3,35 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta,</math>  für <math>h : b = 8 : 1</math>  <math>3,21 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta.</math></p>	—
6	 <p style="text-align: center;"><math>h &gt; b</math></p>	$\frac{2}{9} k_d b^2 h$	$3,50 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta,$ <p style="text-align: center;">für <math>h : b = 4 : 1</math>  <math>3,35 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta,</math>  für <math>h : b = 8 : 1</math>  <math>3,21 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta.</math></p>	1,4 bis 1,6 <sup>2)</sup>
7		$\frac{1}{20} k_d b^3$	$46,2 \frac{M_d}{b^4} \beta$	—
8	 <p style="text-align: center;"><math>h &gt; b</math> <math>h_0 : h = b_0 : b</math></p>	$\frac{2}{9} k_d \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b}$	—	1 bis 1,25 <sup>3)</sup>

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment $M_d$	Drehungswinkel $\vartheta$	$K_d : K_z$ für Gusseisen
9		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_o)$	—	1,4 bis 1,6 <sup>2</sup> )
10		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + b - s)$	—	1,4 bis 1,6 <sup>2</sup> )
11		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_o)$	—	1,4 bis 1,6 <sup>2</sup> )
	$s = b - b_o = 0,5(h - h_o)$			
12				



körpern, schliessen die angegebenen Werthe von  $K_d$  die Berücksichtigung der gleichzeitigen Inanspruchnahme durch Normalspannungen in sich. In Fällen der reinen Drehungsanstrengung führt die Verwendung dieser Werthe zu einer etwas grösseren Sicherheit, was im Sinne des Zweckes unserer Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt.

Die Gleichungen für No. 11 und No. 12 bedingen kräftige Rippen etwa von  $s : h = 1 : 5$  an. Ausserdem ist für No. 11 noch zu fordern, dass  $b_o$  nicht wesentlich mehr als  $s = b - b_o$  beträgt.

- 1) Dieser Werth hängt ab von dem Verhältniss  $d_o : d$ . In dem Masse, in welchem sich dasselbe der Null nähert, steigt er er etwa bis reichlich 1. Die Zahl 0,8 gilt für  $d_o : d$  ungefähr gleich 0,7.
- 2) Es sind um so geringere, der kleineren Zahl näher kommende Werthe zu wählen, je mehr sich je beziehungsweise die Ellipse dem Kreise, das Rechteck dem Quadrate, der  $\Gamma$ - und der  $\square$ -Querschnitt der Quadratform ( $b_o = 0, h = s$ ), ebenso der  $+$ - und der  $\perp$ - förmige Querschnitt der letzteren ( $h = b = s$ ) nähern.
- 3) Hier sind die Bemerkungen 1) und 2) zu berücksichtigen. Je kleiner verhältnissmässig  $a_o$  und  $b_o$  (gegenüber  $a$  und  $b$ ) beziehungsweise  $b_o$  und  $h_o$  (gegenüber  $b$  und  $h$ ) sind, um so mehr nähert sich unter sonst gleichen Verhältnissen der Coefficient der oberen Grenze. Das Gleiche gilt, je langgestreckter der Querschnitt ist.

## VI. Schub.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft (Schubkraft), welche in die Ebene des letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet.

Erfüllt erscheint diese Voraussetzung nur bei einer Sachlage, wie sie in Fig. 112 dargestellt ist, entsprechend dem Arbeitsvorgange bei einer Scheere zum Schneiden von Eisen. Aber auch

hier nur in dem Augenblick, in welchem der Stab von den Kanten der beiden Scheerblätter  $A$  und  $B$  gerade berührt wird; denn sobald das obere Blatt sich weiter vorwärts bewegt, dringen beide Blätter in den Stab ein, Fig. 113: an die Berührung des letzteren in zwei

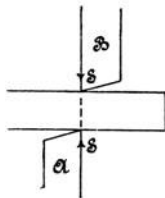


Fig. 112.

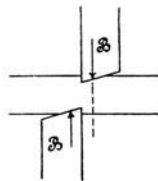


Fig. 113.

Linien durch  $A$  und  $B$  tritt eine solche in zwei Flächen. Damit rückt die obere Kraft  $S$  nach rechts, die untere nach links; es entsteht neben der Schubkraft  $S$  ein rechtsdrehendes Kräftepaar, welches Biegungsbeanspruchungen wachruft, die in dem betrachteten Beispiele allerdings zurückzutreten pflegen. Indem dieses Kräftepaar den Stab in rechtsläufigem Sinne zu drehen sucht, drückt dieser in Richtung seiner Achse auf das obere Scheerblatt nach rechts, auf das untere nach links und erfährt infolgedessen entsprechende Gegenwirkung: ein zweites linksdrehendes Kräftepaar tritt gegenüber dem Stabe in Thätigkeit.

Wir erkennen, dass — streng genommen — Schubbeanspruchung allein niemals vorkommen kann, dass vielmehr die Schubkraft  $S$  immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird.

### § 37. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

Die Schubkraft  $S$  ruft in dem betrachteten Querschnitt Schubspannungen wach, die im Allgemeinen von Flächenelement zu Flächenelement veränderlich sein werden, und bezüglich welcher zunächst nur bekannt ist, dass sie, je multiplicirt mit dem zugehörigen Flächenelement und zusammengefasst, eine Resultante geben müssen, welche gleich und entgegengesetzt  $S$  ist. Mit der Unterstellung, dass die Schubspannungen in den verschiedenen Flächenelementen entgegengesetzt  $S$  gerichtet, also unter sich parallel sind, und die gleiche Grösse  $\tau$  über den ganzen Querschnitt von der Grösse  $f$  besitzen, findet sich

$$S = \tau f \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{S}{f}, \quad . . . . . 129)$$

woraus mit

$k_s$  als zulässiger Schubanstrengung  
folgt

$$S \leq k_s f \quad \text{oder} \quad k_s \leq \frac{S}{f}. \quad . . . . . 130)$$

Hinsichtlich der gemachten Annahme, betreffend die Richtung und die Grösse der Schubspannungen, ist Folgendes zu bemerken. Greifen wir den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 114, heraus,

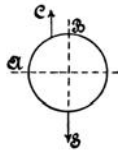


Fig. 114.

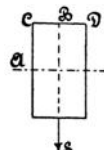


Fig. 115.

so müsste hiernach beispielsweise im Querschnittselement des Umfangspunktes  $C$  bei senkrecht nach unten wirkender Schubkraft  $S$  die Schubspannung vertikal aufwärts gerichtet sein, während sie thatsächlich in die Richtung der Tangente im Punkt  $C$  des Kreises fallen muss, es sei denn, dass in diesem Umfangspunkte eine äussere Kraft thätig wäre, welche eine andere Richtung von  $\tau$  bedingen würde. In den Punkten  $C$  bis  $D$  des rechteckigen Querschnittes, Fig. 115, wird die entgegengesetzt  $S$  gerichtete Schubspannung in Wirklichkeit Null sein müssen — sofern äussere Kräfte hier nicht angreifen —, während sie nach der obigen Voraussetzung in allen Flächenelementen die gleiche Grösse besitzen sollte u. s. f.

Hieraus folgt, dass die Unterstellung, welche zu der Beziehung 129 und 130 führte, wenigstens im Allgemeinen unzutreffend ist.

### § 38. Die Schubspannungen im rechteckigen Stabe.

Wir erkannten in der Einleitung, dass die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird. Davon ausgehend, stellen wir uns die Aufgabe, für die in Fig. 116 und 117 gezeichnete Sachlage — Balken einerseits eingespannt, am anderen freien

Ende belastet — die Grösse der Schubspannungen im Abstände  $z$  von der  $y$ -Achse, die hinsichtlich der Inanspruchnahme auf Biegung als Nullachse erscheint, zu ermitteln.

Zu dem Zwecke denken wir uns ein Körperelement  $ABCD$  von der Länge  $x_1 - x$ , der Breite  $b$  und der Höhe  $e - z$  aus dem

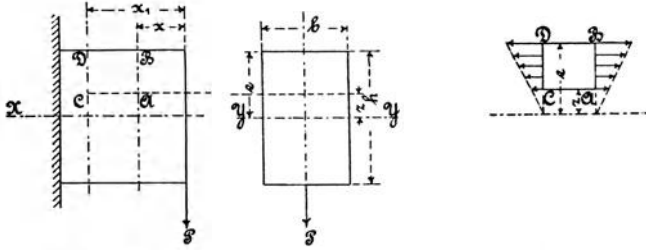


Fig. 117.

Fig. 116.

Fig. 118.

Stabe herausgeschnitten. Auf die Stirnfläche  $AB$  und  $CD$  desselben, Fig. 118, wirken Normalspannungen  $\sigma$ , welche mit dem Abstände  $z$  wachsen. Nach § 16 darf unter der Voraussetzung, dass der Dehnungscoefficient unveränderlich ist, diese Zunahme proportional der ersten Potenz von  $z$  gesetzt werden, wie auch Fig. 36 daselbst erkennen lässt.

Nach Gleichung 42 ist für den Querschnitt  $AB$ , da hier  $M_b = Px$ , die Normalspannung im Abstände  $z$

$$\sigma_z = \frac{Px}{\Theta} z$$

und die Normalspannung im Abstände  $e$

$$\sigma_e = \frac{Px}{\Theta} e,$$

sofern  $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die  $y$ -Achse.

Die auf die Querschnittsfläche  $AB$  von der Grösse  $b(e - z)$  wirkenden Spannungen liefern zusammengefasst eine Normalkraft

$$N = \frac{\sigma_z + \sigma_e}{2} b(e - z) = \frac{Px}{\Theta} \frac{e + z}{2} b(e - z) = \frac{Px}{\Theta} \frac{e^2 - z^2}{2} b.$$

Für den Querschnitt  $CD$  findet sich wegen  $M_b = P x_1$  auf ganz gleichem Wege diese Normalkraft zu

$$N_1 = \frac{P x_1 e^2 - z^2}{\Theta} b.$$

Da infolge  $x_1 > x$  auch  $N_1 > N$  ist, so muss die Kraft

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) \frac{e^2 - z^2}{2} b$$

durch Spannungen in der Fläche  $CA$ , deren Grösse gleich  $(x_1 - x) b$ , übertragen werden, sofern an der Mantelfläche  $BD$  äussere Kräfte nicht angreifen, was vorausgesetzt werden soll. Diese in der Richtung  $CA$  wirkenden und über die Stabbreite  $b$  als gleich gross angenommenen Schubspannungen seien mit  $\tau$  bezeichnet. Dann gilt

$$N_1 - N = \tau (x_1 - x) b = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) \frac{e^2 - z^2}{2} b,$$

woraus

$$\tau = \frac{P}{\Theta} \frac{e^2 - z^2}{2} = 6 \frac{P}{bh^3} (e^2 - z^2) = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} \left\{ 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right\} \quad 131)$$

unter Beachtung, dass hier  $P = S$ .

Die Schubspannung erlangt ihren grössten Werth für  $z = 0$ , d. i. für die Stabmitte (Nullachse). Derselbe beträgt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} = \frac{3}{2} \frac{S}{f}, \quad \dots \dots \dots 132)$$

sofern  $bh = f$  gesetzt wird.

In der Nullachse ist hiernach die Schubspannung um 50 % grösser, als bei gleichmässiger Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt.

Für  $z = \frac{h}{2}$ , d. i. für die am weitesten von der Nullachse abstehenden Punkte wird  $\tau = 0$ .

Werden in Fig. 119 die zu den einzelnen Abständen  $z$  gehörigen

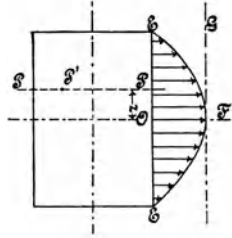


Fig. 119.

Werthe von  $\tau$  als wagrechte Ordinaten aufgetragen, so wird eine Linie  $EFE$  erhalten, welche das Aenderungsgesetz von  $\tau$  klar veranschaulicht. Diese Linie ist für das Rechteck eine Parabel, deren Scheitel  $F$  um  $\overline{OF} = \tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{bh}$  von  $O$  abliegt, wie sich ohne Weiteres ergibt, wenn die Senkrechte  $FG$  als Ordinatenachse gewählt wird und der Gleichung 131 die Form

$$\tau_{max} - \tau = \tau_{max} \left( \frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2$$

oder

$$z^2 = \left( \frac{h}{2} \right)^2 \frac{\tau_{max} - \tau}{\tau_{max}}$$

gegeben wird.

Die vorstehende Betrachtung ermittelte die Schubspannungen in Ebenen, welche parallel zur Stabachse laufen und senkrecht zur Richtung der Schubkraft  $S$  stehen, so z. B. in einem beliebigen Punkt  $P'$  der Linie  $PP$ , Fig. 119, immer diejenige Schubspannung  $\tau$ , welche senkrecht zu  $PP$  wirkt und parallel zur Stabachse (also senkrecht zur Bildebene, Fig. 119) gerichtet ist. Nach § 30 (vergl. auch Fig. 88) treten die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, dass die oben erwähnte Spannung  $\tau$  auch im Punkte  $P'$  der Querschnittsebene (Bildebene) vorhanden ist. Infolgedessen ergibt die Gleichung 131 gleichzeitig die Schubspannungen in der Querschnittsebene und zwar diejenigen, welche im Abstände  $z$  in dem Flächenstreifen  $bdz$  wirksam sind. Damit ist in Gleichung 131 ebenfalls das Gesetz gewonnen, nach dem sich die Schubspannungen in der Ebene des Querschnittes vertheilen.

Wir erkennen: in jedem Punkte des Stabes ist die senkrechte Schubspannung gleich der wagrechten.

Die Forderung, dass diese Spannungen in den Umfangspunkten des Querschnittes immer mit der Tangente an der Begrenzungslinie zusammenfallen müssen, sofern äussere, eine andere Richtung bedingende Kräfte hier nicht angreifen, wird von diesem Vertheilungsgesetz erfüllt. In den Punkten der Begrenzungslinie  $AC$ , Fig. 115, fällt die Richtung von  $\tau$  mit  $AC$  zusammen und in  $CBD$  ist  $\tau = 0$ .

Mit der Veränderlichkeit der Schubspannung ist naturgemäss Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte verknüpft, bezüglich welcher auf § 52 verwiesen sei.

### § 39. Die Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt.

Es bezeichne unter Bezugnahme auf Fig. 120

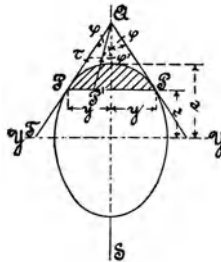


Fig. 120.

$S$  die Schubkraft, welche in die Richtung der  $z$ -Achse fällt, von der vorausgesetzt werde, dass sie Symmetrieebene des Querschnittes ist,

$\Theta$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diejenige Achse, welche zu  $S$  senkrecht steht, d. i. die  $y$ -Achse,

$f$  die Grösse des Querschnittes,

$2y$  die Breite des Querschnittes im Abstände  $z$ ,

$M_z = \int_z^e 2yz dz$  das statische Moment der zwischen den Abständen  $z$  und  $e$  gelegenen (in der Figur durch Strichlage hervorgehobenen) Fläche des Querschnittes hinsichtlich der  $y$ -Achse,

- $\varphi$  den Winkel, welchen die Tangente im Umfangspunkte  $P$  mit der Symmetrieachse einschliesst,
- $\tau$  die Schubspannung, welche in dem um  $z$  abstehenden Umfangspunkte  $P$  durch  $S$  hervorgerufen wird,
- $k_s$  die zulässige Anstrengung des Materials bei Inanspruchnahme auf Schub.

Nach dem Vorgange in § 38 schneiden wir aus dem Stabe (vergleiche auch Fig. 116 und 117) ein Körperelement, Fig. 121,

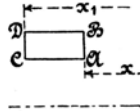


Fig. 121.

heraus. Auf das im Abstände  $z$  gelegene Flächenelement  $2 y dz$  der Stirnfläche  $AB$  wirkt die Normalspannung

$$\sigma_z = \frac{P x}{\Theta} z.$$

Hieraus ergibt sich für die Schnittfläche  $AB$  von der Grösse  $\int_z^e 2 y dz$  die Normalkraft

$$N = \int_z^e 2 y \sigma_z dz = \frac{P x}{\Theta} \int_z^e 2 y z dz = P x \frac{M_z}{\Theta}.$$

Für die Stirnfläche  $CD$  findet sich auf ganz gleichem Wege die Normalkraft

$$N_1 = P x_1 \frac{M_z}{\Theta}.$$

Demnach der Ueberschuss  $N_1$  über  $N$

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) M_z.$$

Diese Kraft muss durch Schubspannungen in der Fläche  $CA$ , deren Grösse gleich  $(x_1 - x) 2 y$  ist, übertragen werden. Dieselben, in Richtung der Stabachse, also senkrecht zur  $y$ -Achse wirkend, seien als gleich gross über die Breite  $2 y$  vorausgesetzt und mit  $\tau_y$  bezeichnet. Dann folgt



$$N_1 - N = \tau_y \cdot 2(x_1 - x)y = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) M_z,$$

$$\tau_y = \frac{P}{2y} \cdot \frac{M_z}{\Theta} \dots \dots \dots 133)$$

Bei der vorstehenden Entwicklung wurde angenommen, dass die Aenderung des biegenden Momentes beim Vorwärtsschreiten von dem einen zu dem anderen der beiden um  $x_1 - x$  von einander abstehenden Querschnitte nach Massgabe der Fig. 116 nur von der Kraft  $P$  beeinflusst werde. Für den Fall, dass diese Voraussetzung nicht zutrifft, dass vielmehr der Stab, Fig. 122, ausser durch die

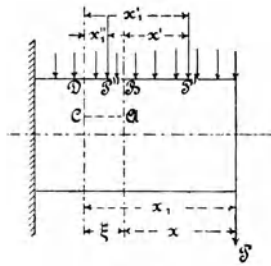


Fig. 122.

am freien Ende angreifende Kraft  $P$  auch noch sonst belastet ist: etwa durch eine Kraft  $P'$ , durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last  $q$ , sowie durch eine zwischen den beiden Querschnitten angreifende Last  $P''$ , so findet sich

für die Stirnfläche  $AB$ , die Stirnfläche  $CD$

das biegende Moment:

$$Px + P'x' + q \frac{x^2}{2}, \qquad Px_1 + P'x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P''x''_1,$$

die Normalspannung  $\sigma_z$ :

$$\frac{Px + P'x' + q \frac{x^2}{2}}{\Theta} z, \qquad \frac{Px_1 + P'x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P''x''_1}{\Theta} z,$$

die Normalkraft  $\int_z^e 2y \sigma_z dz$  :

$$N = \frac{Px + P'x' + q\frac{x^2}{2}}{\Theta} M_z, \quad N_1 = \frac{Px_1 + P'x'_1 + q\frac{x_1^2}{2} + P''x''_1}{\Theta} M_z.$$

Hieraus folgt

$$N_1 - N = \frac{P(x_1 - x) + P'(x'_1 - x_1) + \frac{q}{2}(x_1^2 - x^2) + P''x''_1}{\Theta} M_z.$$

Wegen

$$\xi = x_1 - x = x'_1 - x',$$

$$\frac{x_1^2 - x^2}{2} = \frac{x_1 + x}{2} (x_1 - x) = \xi \frac{x_1 + x}{2}$$

wird

$$N_1 - N = \frac{P\xi + P'\xi + q\frac{x_1 + x}{2}\xi + P''x''_1}{\Theta} M_z.$$

Diese Kraft ist durch die Schubspannungen in der Fläche  $CA$ , vom Inhalte  $2y\xi$  zu übertragen. Soll deren Grösse innerhalb dieser Fläche als constant angenommen werden dürfen, so muss  $\xi$  unendlich klein gewählt werden. Dann ergibt sich zunächst

$$N_1 - N = \tau_y 2y \xi$$

und die Schubspannung:

1. für den Querschnitt  $CD$  im Abstände  $x_1 = x + \xi$  vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\frac{x_1 + x}{2} + P''\frac{x''_1}{\xi}}{2y\Theta} M_z,$$

woraus unter Beachtung, dass, wenn  $\xi$  unendlich klein ist,  $\frac{x''_1}{\xi} = 1$  sein muss

$$\tau_y = \frac{P + P' + qx_1 + P''}{2y\Theta} M_z;$$

2. für den Querschnitt  $AB$  im Abstände  $x$  vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + qx}{2y\Theta} M_z.$$

Im ersteren Falle ist

$$P + P' + qx_1 + P'' = S,$$

und im zweiten

$$P + P' + qx = S.$$

Demnach allgemein

$$\tau_y = \frac{S}{2y} \frac{M_z}{\Theta}, \quad \dots \dots \dots 133)$$

ganz, wie oben schon gefunden<sup>1)</sup>.

Dieser Werth, welcher zunächst nur die wagrechte Schubspannung bestimmt, nach § 30 aber auch gleich der senkrechten Schubspannung in demselben Punkte des Stabes ist, bedarf noch einer Ergänzung, damit die Forderung befriedigt wird, dass die Schubspannungen in den Querschnittselementen der Umfangspunkte tangential zur Begrenzungslinie gerichtet sind.

Diese Forderung bedingt beispielsweise für das im Punkte  $P$ , Fig. 120, gelegene Flächenelement, dass die Schubspannung in die Richtung der Tangente  $TPQ$  oder  $QPT$  fällt. Andererseits fanden wir oben, dass die senkrecht zur  $y$ -Achse, also parallel zur Richtung der Schubkraft wirkenden Schubspannungen die nach Gleichung 133 bestimmte Grösse  $\tau_y$  besitzen müssen. Beiden Bedingungen wird durch die Annahme Befriedigung, dass die Schubspannung im Punkte  $P$  beträgt

---

<sup>1)</sup> Die vorstehende Entwicklung lässt sich kürzen und allgemeiner gestalten, wenn von dem Satze Gebrauch gemacht wird, dass der erste Differentialquotient des biegenden Momentes  $M_b$  in Bezug auf  $x$  gleich der Schubkraft ist, d. h.

$$\frac{dM_b}{dx} = S.$$

Aus leicht ersichtlichem Grunde wurde dem eingeschlagenen Wege der Vorzug gegeben.

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos \varphi} = \frac{S}{2y \cos \varphi} \frac{M_z}{\Theta} \quad . . . . . 134)$$

und für den beliebig zwischen  $PP$  gelegenen Querschnittspunkt  $P'$

$$\tau' = \frac{\tau_y}{\cos \varphi'} = \frac{S}{2y \cos \varphi'} \frac{M_z}{\Theta} \quad . . . . . 135)$$

Gleichung 135, aus welcher sich die Beziehung 134 mit  $\varphi' = \varphi$  als besonderer Werth ergibt, spricht aus, dass die sämtlichen Schubspannungen in den um  $z$  von  $YY$  abstehenden Querschnittselementen sich in demselben Punkte  $Q$  schneiden und die gleiche Componente  $\tau_y$  in der Richtung von  $S$  besitzen.

Wegen  $\tau \leq k_s$ , ergibt sich

$$k_s \geq \frac{S}{2y \cos \varphi} \frac{M_z}{\Theta} \quad . . . . . 136)$$

oder

$$S \leq k_s \frac{\Theta}{M_z} 2y \cos \varphi. \quad . . . . . 137)$$

Aus der Gleichung 134 folgt Nachstehendes.

a) Rechteckiger Querschnitt, Fig. 117, da hier

$$2y = b \quad \varphi = 0,$$

$$M_z = b \left( \frac{h}{2} - z \right) \frac{\frac{h}{2} + z}{2} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\tau = \frac{S}{b} \frac{\frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

und für  $z = 0$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} = \frac{3}{2} \frac{S}{f}, \quad . . . . . 132)$$

wie schon in § 38 ermittelt.

b) Kreisförmiger Querschnitt, Fig. 123.

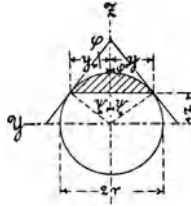


Fig. 123.

$$y = r \sin \psi = r \cos \varphi \quad \Theta = \frac{\pi}{4} r^4 \quad f = \pi r^2.$$

Das statische Moment  $M_z$  des Kreisabschnittes kann unmittelbar bestimmt werden durch Integration oder auch durch die Erwägung, dass der Abstand des Schwerpunktes desselben

$$\frac{(2y)^3}{12 f_a},$$

sofern  $f_a$  den Inhalt des Abschnittes bezeichnet.

$$M_z = \frac{(2y)^3}{12 f_a} f_a = \frac{2y^3}{3} = \frac{2r^3 \cos^3 \varphi}{3}$$

$$\tau = \frac{S}{2r \cos^2 \varphi} \frac{2r^3 \cos^3 \varphi}{3 \cdot \frac{\pi}{4} r^4} = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi = \frac{4}{3} \frac{S}{f} \cos \varphi \quad 138)$$

oder auch, da

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{S}{f} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

Für  $\varphi = 0$ , d. i. für die Nullachse, erlangt  $\tau$  seinen grössten Werth

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{S}{f} \cdot \dots \dots \dots 139)$$

Bei kreisförmigem Querschnitt ergibt sich demnach die Schubspannung in der Nullachse um  $33\frac{1}{3}\%$  grösser, als wenn gleichmässige Vertheilung der Schubkraft über den Querschnitt unterstellt wird.

c) Kreisringförmiger Querschnitt, Fig. 124.

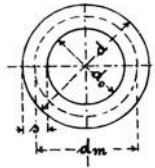


Fig. 124.

Unter der Voraussetzung, dass die Wandstärke verhältnissmässig klein ist und es sich nur um die Ermittlung der grössten, in der Nullachse auftretenden Schubspannung handelt, findet sich mit

$$2y = d - d_o = 2s \quad \varphi = 0 \quad d + d_o = 2d_m$$

$$\Theta_z = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_o^4) = \frac{\pi}{64} (d^2 + d_o^2) (d + d_o) (d - d_o) = \sim \frac{\pi}{8} d_m^3 s.$$

$$M_z = \frac{1}{2} \pi d_m s \cdot \frac{1}{\pi} d_m = \frac{1}{2} d_m^2 s,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{2s} \frac{\frac{1}{2} d_m^2 s}{\frac{\pi}{8} d_m^3 s} = 2 \frac{S}{\pi d_m s} = 2 \frac{S}{f}, \dots 140)$$

sofern der Querschnitt des Ringes

$$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_o^2) = \pi d_m s = f.$$

Hiernach erscheint die Schubspannung in der Nullachse um 100% grösser, als bei gleichmässiger Vertheilung der Spannung über den Querschnitt.

d) I-Querschnitt, Fig. 125.

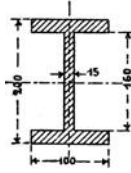


Fig. 125.

In der Mitte des Steges ist

$$2y = 1,5 \text{ cm} \quad \varphi = 0,$$

$$M_x = 1,5 \cdot 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 9 = 228 \text{ cm}^3,$$

$$I_x = \frac{1}{12} (10 \cdot 20^3 - 8,5 \cdot 16^3) = 3765 \text{ cm}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{1,5} \frac{228}{3765} = 0,0404 S.$$

Wegen

$$f' = 10 \cdot 20 - 8,5 \cdot 16 = 64 \text{ qcm}$$

wird

$$\tau_{max} = 2,59 \frac{S}{f'}.$$

Streng genommen ist für Querschnitte dieser Art, bei denen sich die Breite  $2y$  und der Winkel  $\varphi$  beim Uebergang des Steges in die Flanschen plötzlich ändern, die Gleichung 134 nicht mehr richtig; jedenfalls kann sie für die Beurtheilung der Schubspannungen an dieser Uebergangsstelle und in der Nähe derselben ganz unzutreffende Werthe liefern. Da, wo ein so plötzlicher Wechsel in der Breite des Querschnittes eintritt, muss die oben gemachte Voraussetzung des Gleichbleibens von  $\tau_y$  über die ganze Breite  $2y$  unzulässig werden.

Die Gleichung 135 und ihre Sonderwerthe beruhen auf der Voraussetzung eines unveränderlichen Schubcoefficienten. Bei Materialien, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft, wie z. B. bei Gusseisen, werden dieselben unter Umständen zu mehr oder minder bedeutenden Unrichtigkeiten führen können.

## § 40. Schubversuche.

Dieselben pflegen durchgeführt zu werden nach Massgabe der Fig. 112, oder insbesondere für Rundstäbe mit der in Fig. 126 dar-

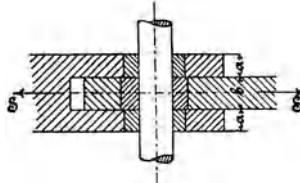


Fig. 126.

gestellten Einrichtung, wobei der Versuchsstab in zwei Querschnitten, also doppelschnittig durchgescheert wird.

Bedeutet  $S$  die Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab vom Querschnitte  $f$  abzuschneiden, so wird der Quotient

$$\frac{S}{f} \text{ (Verfahren Fig. 112)}$$

bezw.

$$\frac{S}{2f} \text{ (Verfahren Fig. 126)}$$

als Schubfestigkeit oder Scheerfestigkeit des Materials bezeichnet. Der letztere Ausdruck erscheint als der zutreffendere. Es wird, namentlich durch das Verfahren, wie es Fig. 112 andeutet, weniger die Widerstandsfähigkeit ermittelt, welche bei einem auf Schub beanspruchten Konstruktionstheil nach Massgabe der Betrachtungen in den §§ 38 und 39 in Frage steht, als vielmehr diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab durchzuschneiden. Aus diesem Grunde hat es auch Bedenken, von der so ermittelten Scheerfestigkeit auf die zulässige Schubanstrengung zu schliessen. In dieser Beziehung sei insbesondere noch auf Folgendes hingewiesen.

Nach Gleichung 102 besteht für durchaus gleichartiges Material zwischen der Schub- und Zuganstrengung die Beziehung

$$k_s = 0,75 k_z \text{ bis } 0,8 k_z.$$



Weiter ist beispielsweise nach Gleichung 132 für einen Stab von rechteckigem Querschnitt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} = \frac{3}{2} \frac{S}{f},$$

woraus wegen  $\tau_{max} \leq k_s$

$$k_s \geq \frac{3}{2} \frac{S}{f},$$

$$\frac{3}{2} \frac{S}{f} \leq 0,75 k_z \text{ bis } 0,8 k_z,$$

$$\frac{S}{f} \leq 0,5 k_z \text{ bis } 0,53 k_z.$$

Abscheerversuche mit Schmiedeisen und Stahl, in einer der beiden beschriebenen Weisen angestellt, liefern die Scheerfestigkeit = 0,67 bis 0,8 der Zugfestigkeit, also wesentlich höher.

Für kreisförmigen Querschnitt ist nach Gleichung 139

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{S}{f},$$

woraus

$$\frac{S}{f} \leq 0,56 k_z \text{ bis } 0,6 k_z.$$

Abscheerversuche, nach Fig. 126 durchgeführt, pflegen die Scheerfestigkeit des Schmiedeisens und des Stahles zu 0,75 bis 0,8 der Zugfestigkeit zu geben, also ebenfalls wesentlich grösser.

Die unten folgenden Versuche mit gusseisernen Rundstäben liefern sogar

Scheerfestigkeit : Zugfestigkeit = 1630 : 1595 = 1,02 : 1,  
 bzw. 1967 : 1679 = 1,17 : 1.

Dieses abweichende Verhalten des Gusseisens gegenüber Schmiedeisen und Stahl erklärt sich in erster Linie aus der Veränderlichkeit des Schubcoefficienten  $\beta$  (Dehnungscoefficienten  $\alpha$ ).

Für die Beurtheilung der beiden Prüfungsverfahren kommt sodann weiter in Betracht der oben festgestellte Umstand, dass die

wirkende Schubkraft von einem biegender Moment begleitet wird. Bei dem durch Fig. 112 angedeuteten Vorgang lässt sich dasselbe allerdings auf einen unerheblichen Betrag herabdrücken, dagegen tritt es stark auf bei dem Verfahren nach Fig. 126: wir haben thatsächlich einen im mittleren Theile (innerhalb der Strecke  $b$ ) belasteten und nach aussen aufliegenden Stab. Eine scharfe Beobachtung zeigt auch deutlich, dass der Versuchskörper durch die Belastung zunächst eine Durchbiegung erfährt und dann erst abgesehen wird. Ist das Material spröde, wie z. B. Gusseisen, so erfolgt zunächst Bruch des Stabes durch das biegender Moment und zwar innerhalb der Strecke  $b$ ; erst später (bei höherer Belastung) tritt das Abscheeren ein. In dieser Hinsicht geben die nachstehenden Versuche des Verfassers lehrreichen Aufschluss.

Rundstäbe von 20,0 mm Durchmesser ( $f = 3,14$  qcm) aus Gusseisen gedreht, geprüft nach dem Verfahren Fig. 126.

- No. 1. Bei der Belastung  $S = 3000$  kg bricht der Stab infolge Biegung, die Wage der Maschine sinkt. Der Versuch wird fortgesetzt, hierbei steigt die Belastung allmählich bis  $S = 10200$  kg, welche Kraft das Abscheeren herbeiführt<sup>1)</sup>.

Fig. 127 (Taf. X) zeigt den an den Enden auf die Länge  $b$  abgescheerten und im mittleren Theile durch Biegung gebrochenen Stabtheil. Die von dem biegender Moment gezogenen Fasern sind gerissen, während die gedrückten zum Theil noch unangegriffen erscheinen.

Die Scheerfestigkeit beträgt  $\frac{10200}{2 \cdot 3,14} = 1635$  kg.

- No. 2. Bei der Belastung  $S = 2825$  kg bricht der Stab infolge der Biegung (d. h. die gezogenen Fasern zerreißen), bei  $S = 9950$  kg erfolgt das Abscheeren.

---

<sup>1)</sup> Diese Erscheinung der Aufeinanderfolge des Biegungsbruches und des Abscheerens, sowie der grosse Unterschied der betreffenden Belastungen sind um so bemerkenswerther, als die Biegefestigkeit gusseiserner Rundstäbe das Doppelte der Zugfestigkeit übersteigt. (Vergl. § 22, Ziff. 2.)

$$\text{Scheerfestigkeit} = \frac{9950}{2 \cdot 3,14} = 1593 \text{ kg.}$$

No. 3. Verhalten ganz wie bei No. 1 und 2,  $S = 3350$  kg, beziehungsweise 10370 kg.

$$\text{Scheerfestigkeit} = \frac{10370}{2 \cdot 3,14} = 1662 \text{ kg.}$$

$$\text{Durchschnitt der Scheerfestigkeiten} = \frac{1635 + 1593 + 1662}{3} = 1630 \text{ kg.}$$

Eine genaue Bestimmung der Biegefestigkeit ist nicht möglich, da die Feststellung des biegenden Moments  $M_b$ , die Kenntniss der Vertheilung der Belastung über die Strecken  $a$ ,  $a$  und  $b$  voraussetzt, und überdies neben der Biegeanstrengung auch Schubanstrengung stattfindet. Ausserdem kommt noch der Einfluss der Reibungskräfte in Betracht, welche durch die Biegung des Stabes in den Auflagerflächen wachgerufen werden. (Vergl. § 46, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, Fussbemerkung auf S. 224 u. f.) Wird in Uebereinstimmung mit Fig. 128

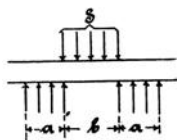


Fig. 128.

gleichmässige Vertheilung unterstellt und der Einfluss des Reibungswiderstandes vernachlässigt, so wäre

$$M_b = \frac{S}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{b}{4} \right) = \frac{S}{4} \left( a + \frac{b}{2} \right)$$

und, da im vorliegenden Falle

$$a = 2,2 \text{ cm} \quad b = 3,0 \text{ cm} \quad \frac{\Theta}{e} = \frac{\pi}{32} 2^3,$$

die Biegefestigkeit  $K_b$

$$\text{für No. 1} \quad \frac{\frac{3000}{4} (2,2 + 1,5)}{\frac{\pi}{32} \cdot 2^3} = \frac{3000 \cdot 3,7}{3,14} = \sim 3530 \text{ kg,}$$

$$\text{für No. 2} \quad \frac{2825 \cdot 3,7}{3,14} = \sim 3330 \text{ kg,}$$

$$\text{für No. 3} \quad \frac{3350 \cdot 3,7}{3,14} = \sim 3950 \text{ kg,}$$

---


$$\text{im Durchschnitt } K_b = 3603 \text{ kg.}$$

Die Zugprobe mit denselben Rundstäben hatte ergeben die Zugfestigkeit

$$\text{für No. 1} \quad 1560 \text{ kg,}$$

$$\text{für No. 2} \quad 1586 \text{ kg,}$$

$$\text{für No. 3} \quad 1640 \text{ kg,}$$

---


$$\text{im Durchschnitt } K_z = 1595 \text{ kg.}$$

Nach § 22, Ziff. 2, Gusseisen A, S. 97, No. 6, wäre hieraus auf eine Biegezugfestigkeit von

$$K_b = 2,12 K_z = 1595 \cdot 2,12 = 3381 \text{ kg}$$

zu schliessen, welche Grösse nicht sehr bedeutend abweicht von derjenigen, die auf Grund der Annahme gleichmässiger Vertheilung der Kräfte über die Strecken  $a$ ,  $a$  und  $b$  erhalten wurde. Würde der das biegende Moment vermindernde Einfluss der Reibung berücksichtigt worden sein, so wäre eine noch weiter gehende Uebereinstimmung eingetreten.

Rundstäbe von rund 24 mm Durchmesser aus Gusseisen gedreht, geprüft nach Fig. 126.

No.	Durchmesser $d$ cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Belastung $S$ beim Bruch durch		Scheerfestigkeit $K_s = S_2 : 2 \frac{\pi}{4} d^2$ kg
			Biegung $S_1$ kg	Abscheeren $S_2$ kg	
1	2,38	4,45	7600	17 650	1973
2	2,37	4,41	8250	17 060	1934
3	2,38	4,45	8450	17 750	1994
Durchschnitt					1967

Die Zugfestigkeit der drei Stäbe war vorher zu

$$K_z = \frac{1766 + 1621 + 1649}{3} = 1679 \text{ kg}$$

ermittelt worden.

Wird Schmiedeeisen der Prüfung nach Fig. 126 unterworfen, so erfolgt allerdings vor dem Abscheeren kein Bruch, weil das Material dem biegenden Momente gegenüber eine genügend weitgehende Formänderung zulässt. Da aber bei Konstruktionstheilen derartige Formänderungen in der Regel nicht statthaft erscheinen, so erhellt, dass selbst in Fällen der Beanspruchung, wie sie durch Fig. 126 dargestellt ist, die Berechnung auf Biegung — wenigstens der Regel nach — massgebend ist<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In dieser Hinsicht bringt die Literatur noch häufig irrtümliche Angaben, obgleich sie hiermit schon seit langer Zeit und naturgemäss im Widerspruch mit dem steht, was rationeller Weise thatsächlich ausgeführt wird. So pflegt beispielsweise in Beziehung auf die Gelenkbolzen bei Dachconstruktionen u. dergl., für die Keile der Keilverbindungen, die Bolzen gewisser Schraubenverbindungen, die Zähne der Sperrräder u. s. f. angegeben zu werden, dass dieselben auf Schub oder gegen Abscheeren zu berechnen seien. Hinsichtlich der Gelenkbolzen und ähnlicher Theile dürfte das oben Erörterte zur Klarstellung ausreichen (vergl. auch § 52, Ziff. 1a), betreffs der Keile, Gewindgänge u. s. f. sei auf des Verfassers Maschinenelemente S. 41 u. f. (Taf. 1, Fig. 28 und 30), bzw. S. 50, S. 238 u. s. w. verwiesen. In Bezug auf Sperrzähne möge das Folgende bemerkt werden.

Durch Verminderung von  $b$  und  $a$  kann allerdings das biegende Moment verringert werden; gleichzeitig wächst aber dann die Pressung  $S : bd$  gegen die Mantelfläche des Rundstabes. Hierdurch aber wird der Verringerung von  $a$  und damit auch derjenigen des biegenden Momentes eine Grenze gezogen.

Da die Widerstandsfähigkeit des Stabes vom Durchmesser  $d$

Die Kraft  $P$ , Fig. 129, im ungünstigen Falle aussen im Punkt  $B$  angreifend,

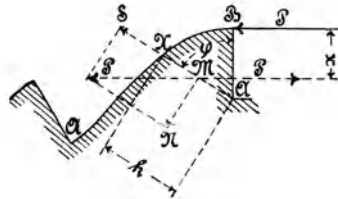


Fig. 129.

ergibt in Bezug auf den zunächst beliebig unter dem Winkel  $\varphi$  angenommenen Bruchquerschnitt  $AX$  mit dem Mittelpunkt  $M$  ein Kräftepaar vom Moment  $Px$ , welches auf Biegung wirkt, ferner eine Schubkraft  $S = P \sin \varphi$  und eine Druckkraft  $N = P \cos \varphi$ , welch' letztere in der Regel ohne Weiteres vernachlässigt werden kann. Indem der Bruchquerschnitt durch  $A$  geführt wird, ist vorausgesetzt, es habe die Begrenzungslinie des Zahnes eine solche Form, dass die Widerstandsfähigkeit der oberhalb  $A$  möglichen Bruchquerschnitte grösser ist, was bei sachgemässer Konstruktion auch der Fall sein muss.

Bezeichnet  $b$  die Breite der Sperrzähne, so findet sich die grösste Biegungsanstrengung  $\sigma$  des Materials nach Gleichung 43 zu

$$\sigma = \frac{Px}{\frac{1}{6}bh^2} = 6 \frac{Px}{bh^2}.$$

Es ist nun derjenige Querschnitt festzustellen, für welchen  $\sigma$  den grössten Werth erlangt, was bei im Allgemeinen beliebiger Gestalt der Begrenzungslinie des Zahnes am einfachsten durch Ausproben geschieht.

Zur Biegungsanstrengung tritt nun allerdings die Schubanstrengung. Wie in § 52 unter Ziff. 1 b erörtert werden wird, ergibt sich jedoch für den rechteckigen Querschnitt, dass die Biegungsanstrengung allein massgebend ist, so lange

$$\frac{x}{\sin \varphi} \geq 0,325 h,$$

d. h. so lange

$$x \geq 0,325 h \sin \varphi.$$

Diese Bedingung wird fast ausnahmslos erfüllt sein, infolgedessen Sperrzähne ebenso ausnahmslos auf Biegung zu berechnen sind.

gegen Biegung der dritten Potenz von  $d$ , gegen Schub dagegen nur der zweiten Potenz von  $d$  proportional ist, so muss das Prüfungsverfahren nach Fig. 126 für das gleiche Material unter sonst gleichen Verhältnissen Werthe für die Schubfestigkeit  $S:f$  liefern, welche von  $d$  abhängig sind. Durch die grossen Pressungen gegen die Mantelflächen der abzuschleerenden Cylinder, welche Kräfte ihrerseits gegenüber dem Bestreben des Stabes, auf der Unterlage zu gleiten, Reibungskräfte wachrufen (vergl. § 46), findet allerdings eine weitere Trübung dieses Verhältnisses statt.

Das vorstehend Erörterte führt zu dem Ergebniss, dass die Schubversuche, wie sie angestellt zu werden pflegen, nicht geeignet sind, die Richtigkeit der Hauptgleichung (134) zu prüfen, noch die Unterlagen für die zulässigen Schubanstrengungen mit der wünschenswerthen Genauigkeit zu liefern. Eine unmittelbare und genaue Prüfung der Gleichung 134 auf dem Wege des Versuches begegnet erheblichen Schwierigkeiten. Dieselben erwachsen aus dem Umstande, dass die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet ist, und dass da, wo dessen Einfluss zurücktritt, so bedeutende Kräfte auf verhältnissmässig kleine Theile der Mantelfläche des Stabes zusammengedrängt wirken müssen, dass die den weiteren Entwicklungen zu Grunde liegende Voraussetzung des Nichtvorhandenseins von Normalspannungen senkrecht zur Stabachse — und unter Umständen derjenigen des Nichtauftretens von senkrecht zur Stabachse stehenden Schubanstrengungen, welche in Ebenen wirken, die sich in Parallelen zur Achse schneiden, — unerfüllt bleibt.

---

# Inhaltsverzeichniss der ersten Lieferung.

## Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch  
Normalspannungen (Dehnungen).

### Einleitung.

	Seite
§ 1. Formänderung. Spannung . . . . .	1
§ 2. Dehnung. Dehnungscoefficient. Proportionalitätsgrenze. Fließgrenze	2
§ 3. Bruchbelastung. Festigkeit . . . . .	5
§ 4. Gesamtdehnung. Dehnungsrest. Federung. Elasticität . . . . .	7
§ 5. Einfluss der Zeit. Elastische Nachwirkung . . . . .	12

### I. Zug.

§ 6. Gleichungen der Zugelasticität und Zugfestigkeit.	
1. Stab mit gleichem Querschnitt . . . . .	13
2. Stab mit veränderlichem Querschnitt . . . . .	14
§ 7. Mass der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Ge- hinderte Zusammenziehung . . . . .	16
§ 8. Zugversuche . . . . .	18
§ 9. Einfluss der Form des Stabes.	
1. Einfluss der Stabform, welche der Zusammenziehung hinderlich ist	24
2. Einfluss der Länge und des Durchmessers . . . . .	27
3. Einfluss der Querschnittsform . . . . .	29
§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluss der Zeit auf Festigkeit, Deh- nung und Querschnittsverminderung . . . . .	30

### II. Druck.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit . . . . .	33
§ 12. Gleichungen der Druckelasticität und der Druckfestigkeit . . . . .	37
§ 13. Druckversuche. Einfluss der Gestalt des Körpers auf die Druck- festigkeit.	
1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers . . . . .	39
2. Die Belastung trifft nur einen Theil der Querschnittsfläche des Probekörpers . . . . .	45
§ 14. Hinderung der Querdehnung . . . . .	49
§ 15. Theorien der Druckfestigkeit . . . . .	51



**III. Biegung.**

§ 16.	Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaars den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet . . . . .	53
§ 17.	Trägheitsmomente.	
	1. Rechteck . . . . .	59
	2. Dreieck . . . . .	59
	3. Kreis . . . . .	60
	4. Ellipse . . . . .	60
	5. Zusammengesetzte Querschnitte.	
	a) Rechnerische Bestimmung . . . . .	61
	b) Zeichnerische Bestimmung . . . . .	62
	6. Zusammenstellung . . . . .	64
§ 18.	Fälle bestimmter Belastungen.	
	1. Der Stab ist einerseits eingespannt, am anderen Ende frei . . . . .	66
	2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen . . . . .	67
	3. Der Stab ist beiderseits eingespannt . . . . .	72
§ 19.	Körper von gleichem Widerstande.	
	1. Der Stab von rechteckigem Querschnitt mit gleichbleibender Breite ist einerseits eingespannt, am anderen freien Ende belastet . . . . .	75
	2. Der Stab wie unter 1, jedoch mit veränderlicher Höhe . . . . .	76
	3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen und ist zwischen beiden belastet . . . . .	77
§ 20.	Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit.	
	1. Die äusseren Kräfte geben nur ein Kräftepaar . . . . .	82
	2. Die Fasern üben einen gegenseitigen Einfluss auf einander nicht aus . . . . .	82
	3. Die Querschnitte bleiben eben . . . . .	85
	4. Der Dehnungscoefficient ist unveränderlich . . . . .	85
	5. Zusammenfassung . . . . .	87
§ 21.	Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaars keine der beiden Hauptachsen in sich enthält.	
	1. Hauptachsen. Hauptträgheitsmomente . . . . .	88
	2. Biegungsanstrengung . . . . .	90
	3. Durchbiegung . . . . .	92
§ 22.	Biegungsversuche.	
	1. Biegungsversuche im Allgemeinen . . . . .	94
	2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform . . . . .	96
	3. Einfluss der Gusschaut . . . . .	99

## Inhaltsverzeichnis der ersten Lieferung.

	Seite
<b>IV. Knickung.</b>	
§ 23. Wesen der Knickung . . . . .	101
§ 24. Knickbelastung (Euler'sche Gleichung) . . . . .	104
§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung . . . . .	108
§ 26. Navier'sche (Schwarz'sche) Zerknickungsformel . . . . .	111
§ 27. Knickungsversuche . . . . .	119

## Zweiter Abschnitt.

### Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

#### Einleitung.

§ 28. Schiebung . . . . .	125
§ 29. Schubspannung. Schubcoefficient . . . . .	128
§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen . . . . .	130
§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubcoefficient und Dehnungscoefficient.	
1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren grösster Werth . . . . .	133
2. Beziehung zwischen Dehnungscoefficient und Schubcoefficient . . . . .	135

#### V. Drehung.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt . . . . .	139
§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.	
1. Formänderung . . . . .	145
2. Schubspannungen . . . . .	146
§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.	
1. Formänderung . . . . .	152
2. Schubspannungen . . . . .	154
3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung . . . . .	160
§ 35. Drehungsversuche.	
1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform . . . . .	162
2. Drehungswinkel . . . . .	182
§ 36. Zusammenfassung . . . . .	185
Kreis, Ellipse, Sechseck, Rechteck, Dreieck, $\text{H}$ -Querschnitt, Kreuzquerschnitt, $\text{L}$ -Querschnitt, Winkelquerschnitt.	

#### VI. Schub.

§ 37. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt . . . . .	189
§ 38. Schubspannungen im rechteckigen Stabe . . . . .	190
§ 39. Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Krafebene symmetrischem Querschnitt . . . . .	194
§ 40. Schubversuche . . . . .	203

---

## Berichtigungen.

---

- S. 12, Zeile 15 von oben lies: indem die Schwingungen u. s. w.
- „ 15, „ 3 „ unten „ :  $e^{\frac{\gamma x}{k_z}}$
- „ 26, „ 11 „ oben „ :  $\frac{x}{h}$
- „ 44, „ 8 „ unten „ : und deren Höhe 1,5 cm u. s. w.
- „ 52, „ 4 „ „ „ : Eine befriedigende Theorie u. s. w.
- „ 71, „ 8 „ oben „ :  $\frac{\alpha}{\Theta}$
- „ 86, „ 5 „ „ „ : zunimmt
- „ 88, Gl. 69 lies:  $\Theta =$  u. s. w.
- „ 90, Zeile 2 von unten lies:  $z$  statt  $Z$ .
- „ 104, „ 6 „ „ „ :  $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 z$ .
- „ 111, „ 1 „ oben „ : vergl. § 20, Ziff. 4.
- „ 131, „ 4 „ oben „ :  $\tau_1$  statt  $\tau'$ .
-